ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБОБЩЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ НЕВАНЛИННЫ

Факторизационная теорема Неванлинны (см. [1], стр. 269) заключается в том, что множество мероморфных функций, определенных на единичном круге и имеющих ограниченную характеристику, совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизацию

$$f(z)=z^p\frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\mu(\varphi)+iC\right\}, \tag{1}$$

где p — целое число, $\pi_1(z)$ и $\pi_2(z)$ — произведения Бляшке, C — действительная постоянная, а μ — функция ограниченной вариации. Это множество обозначается буквой N.

В настоящей статье введено множество мероморфных функций N_0, которое существенно шире N. Доказано, что функции $f\in N_0$ допускают представление, аналогичное факторизации (1). Основываясь на этом представлении, обобщается теорема А. Я. Хинчина, А. Островского (см. [3], стр. 118).

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, определенная на $|z|<1$ и $0<r<1$. Положим

$$m_0(r, f, a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-a|}\,d\vartheta,$$

если a — конечное комплексное число и

$$m_0(r, f, \infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\ln^+|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta,$$

если $a=\infty$,

Пусть a и b — различные комплексные числа, причем b — конечное число, а a может равняться бесконечности. Мы скажем, что $f\in N_{a,b}$, если

$$\sup_{0<r<1}(m_0(r, f, a)+m_0(r, f, b))<\infty \tag{2}$$

и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty,$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество b-точек функции $f(z)$. Мы обозначим $N_0 = UN_{a,b}$, где сумма берется по всем допустимым парам a, b.

Заметим, что $N_{a,b} \supset N$. Действительно, пусть $f \in N$. Это означает, что f имеет ограниченную характеристику. Следовательно

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - b|} d\vartheta < \infty \tag{3}$$

и

$$\sum (1 - |z_k|) < \infty, \tag{4}$$

где $\{z_k\}$ — множество b-точек функции $f(z)$. Из первой основной теоремы Неванлинны (см. [1], стр. 23) следует, что

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - a|} d\vartheta \leqslant \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - b|} d\vartheta +$$
$$+ \sum \ln \frac{1}{|z_k|} + M, \tag{5}$$

где $M < \infty$. Теперь легко заметить, что из (3), (4) и (5) вытекает (2). Несколько позже мы покажем, что $N_{a,b} \setminus N \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Класс $N_{a,b}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, которые допускают представление*

$$\frac{1}{f(z) - b} = \frac{1}{a - b} + z^{p_1} \frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)} \exp\left\{ z^{p_2} \pi_3(z) \exp\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\mu(\varphi) + iC \right\}\right\}, \tag{6}$$

где p_1, p_2 — целые числа, $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$ и $\pi_3(z)$ — произведения Бляшке, C — действительное число, а μ — функция ограниченной вариации.

Доказательство. Пусть $f(z)$ допускает представление (6). Тогда, используя неравенство (см. [2], стр. 25)

$$\ln^+ \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \ln^+ |x_i| + \ln n,$$

имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\vartheta}) - b|} d\vartheta \leqslant \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|b - a|} + \ln^+ 9\,|p_1| +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \left| \frac{\pi_1(re^{i\vartheta})}{\pi_2(re^{i\vartheta})} \exp\{g(re^{i\vartheta})\} \right| d\vartheta,$$

где

$$g(z)=z^{p_2}\pi_3(z)\exp\left\{\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\mu(\varphi)+iC\right\}\cdot$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\vartheta})-b|}\,d\vartheta\leqslant\ln^+\ln^+\frac{1}{|b-a|}+\ln^+27\,|p_1|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\ln^+\frac{1}{|\pi_2(re^{i\vartheta})|}\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|g(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|\pi_2(re^{i\vartheta})|}\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|g(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta+$$

$$+\ln^+\ln^+\frac{1}{|b-a|}+\ln^+27\,|p_1|.$$

Так как функции $\pi_2(z)$ и $g(z)$ принадлежат пространству N, то из полученного неравенства следует, что

$$\sup_{0<r<1} m_0(r,f,b)<\infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sup_{0<r<1} m_0(r,f,a)<\infty.$$

Следовательно, $f\in N_{a,b}$.

Теперь предположим $f\in N_{a,b}$. Без потери общности можно считать $a=\infty$, $b=0$. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полюсы, а $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нули функции $f(z)$. Введем обозначение

$$\varphi_\rho(z)=z^{p_1}\frac{\prod\limits_{|w_k|<\rho}\dfrac{\rho(w_k-z)}{\rho^2-\overline{w}_k z}\dfrac{|w_k|}{w_k}}{\prod\limits_{|z_k|<\rho}\dfrac{\rho(z_k-z)}{\rho^2-\overline{z}_k z}\dfrac{|z_k|}{z_k}}f(z),$$

где p_1 — целое число выбрано так, чтобы $\varphi_\rho(0)\neq 0,\infty$. В дальнейшем мы предположим, что $p_1=0$, так как в противном случае вместо функции $f(z)$ можно было рассматривать функцию $z^{p_1}f(z)$. Функция $\varphi_\rho(z)$ не имеет нулей и полюсов в круге $|z|<\rho$. Следовательно, $\ln|\ln\varphi_\rho(z)|$ — субгармоническая функция. Это, в частности, означает, что

$$\ln|\ln\varphi_\rho(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\ln\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta. \tag{7}$$

Подставляя выражение для функции $\varphi_\rho(z)$ в (7), получим

$$\ln|\ln|f(0)|+\sum_{|w_k|<\rho}\ln\frac{|w_k|}{\rho}+\sum_{|z_k|<\rho}\ln\frac{\rho}{|z_k|}|\leqslant\ln|\ln|\varphi_\rho(0)||\leqslant$$

$$\leqslant\ln|\ln\varphi_\rho(0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\ln\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|\ln|\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})|+2\pi|\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|\ln|\varphi_\rho(\rho e^{i\vartheta})||\,d\vartheta+\ln 4\pi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|\ln|f(\rho e^{i\vartheta})||\,d\vartheta+\ln 4\pi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\ln^+|f(\rho e^{i\vartheta})|d\vartheta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\ln^+\frac{1}{|f(\rho e^{i\vartheta})|}\,d\vartheta+\ln 8\pi=$$

$$=m_0(\rho,\ f,\ \infty)+m_0(\rho,\ f,\ 0)+\ln 8\pi.$$

Так как $f\in N_{\infty,0}$, то по определению $N_{\infty,0}$ мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|w_k|)<\infty$$

или, что то же самое

$$\prod_{k=1}^{\infty}|w_k|>0.$$

Следовательно

$$\ln|\ln|f(0)|+\sum_{k=1}^{\infty}\ln|w_k|+\sum_{|z_k|<\rho}\ln\frac{\rho}{|z_k|}|\leqslant m_0(\rho,\ f,\ \infty)+$$

$$+m_0(\rho,f,0)+\ln 8\pi,$$

откуда имеем

$$\sup_{0<\rho<1}\left(\sum_{|z_k|<\rho}\ln\frac{\rho}{|z_k|}\right)<\infty,$$

и потому (см. [1], стр. 260) $\sum(1-|z_k|)<\infty$.

Теперь рассмотрим функцию

$$g(z)=f(z)\frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)},$$

где $\pi_1(z)$ и $\pi_2(z)$ — произведения Бляшке с нулями $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. Функция $g(z)$ не имеет нулей и полюсов, следовательно $\ln g(z)$ — аналитическая на $|z|<1$. Докажем, что $\ln g(z)\in N$. Мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|\ln g(\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|\ln|\,g(\rho e^{i\theta})|\,|\,d\theta+\ln 4\pi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|\ln|f(\rho e^{i\theta})|\,|\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\ln\frac{1}{|\pi_2(\rho e^{i\theta})|}\,d\theta+\ln 8\pi \leqslant$$

$$\leqslant m_0(\rho, f, \infty)+m_0(\rho, f, 0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|\pi_2(\rho e^{i\theta})|}\,d\theta+\ln 16\pi. \qquad (8)$$

Так как $\pi_2(z)\in N$, то из полученного неравенства следует, что $\ln g(z)\in N$. Теперь, используя факторизационную теорему Неванлинны, нетрудно получить требуемое представление для функции $f(z)$.

Замечание 1. Из оценки (8) следует, что если $\frac{1}{f(z)}$ — аналитическая функция, принадлежащая $N_{\infty, 0}$, то полная вариация функции μ, фигурирующая в представлении (6), допускает оценку

$$|\mu|\leqslant \sup_{0<r<1}(m_0(r, f, \infty)+m_0(r, f, 0))+\ln 16\pi.$$

Следствие 1. Из представления функции $f\in N_{a, b}$ следует, что она почти всюду на единичной окружности имеет некасательные граничные значения.

Следствие 2. Так как $\frac{i}{1+z}\in N$, то из теоремы 1 следует, что $\exp\left\{\frac{i}{1+z}\right\}\in N_{\infty, 0}$. Однако $\exp\left\{\frac{i}{1+z}\right\}\overline{\in} N$, потому что множество $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\exp\left\{\frac{i}{1+z_k}\right\}=1$, не удовлетворяет условию Бляшке, т. е. $\sum(1-|z_k|)=\infty$.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность* $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *функций, аналитических в круге* $|z|<1$, *удовлетворяющих условиям*

1) *Существует такое* $C>0$, *что*

$$\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\ln^+|f_n(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C \qquad (9)$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\ln^+\frac{1}{|f_n(\rho e^{i\theta})-b|}\,d\theta\leqslant C, \qquad (10)$$

где b — *фиксированное комплексное число.*

2) *На множестве $E \subset \{z/|z|=1\}$ положительной меры последовательность $\{f_n(e^{i\vartheta})\}_{n=1}^{\infty}$ угловых граничных значений функций $f_n(z)$ сходится по мере.*

Тогда последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится внутри круга $|z|<1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z),$$

причем на множестве E последовательность $\{f_n(e^{i\vartheta})\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере $kf(e^{i\vartheta})$ — угловым граничным значениям предельной функции $f(z)$.

Вышеприведенная теорема совпадает с теоремой А. Я. Хинчина——А. Островского, если в условии 1) вместо двойного логарифма под интегралом написать только один логарифм. При этом оказывается, что из условия (9), написанного с одним логарифмом, следует (10).

Доказательство. Так как $f_n(z)$ — аналитическая функция, то из (9) и (10) следует, что $\dfrac{1}{f_n(z)} \in N_{1/b,0}$. Из замечания 1 вытекает, что множество $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ компактно. Существование угловых граничных значений почти всюду на единичной окружности для функции $f_n(z)$ вытекает из следствия 1. В остальном доказательство совпадает с доказательством, проведенным в книге [3] теоремы А. Я. Хинчина——А. Островского, только во всех формулах вместо $\ln^+$ нужно писать $\ln^+ \ln^+$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 24.XI.1975

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Նևանլիննայի ֆակտորիզացիոն թեորեմի ընդհանրացումը (*ամփոփում*)

Հոդվածում մտցվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների N_0 դասը, որը էապես լայն է N դասից։ Ապացուցվում է, որ N_0-ին պատկանող ֆունկցիան թույլ է տալիս ներկայացում, որը հանդիսանում է ֆակտորիզացիայի անալոգը։ Հիմնվելով այդ ներկայացման վրա ընդհանրացվում է Ա. Խինչինի և Ա. Օստրովսկու թեորեմը։

A. A. VAGARSHAKIAN. *A generalization of Nevanlinna's factorization theorem* (summary)

In this paper the new class N_0 of meromorphic functions essentialy richer than N is introduced. It is proved, that any $f \in N_0$ permits representation analogous to the factorization. Using this representation the theorem of A. Hinchin and A. Ostrovski is generalizated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *У. Хейман*. Мероморфные функции, Изд. „Мир", М., 1966.
2. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*. Распределение значений мероморфных функций, Изд. „Наука", М., 1970.
3. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций, М. — Л., ГИТТЛ, 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

Ф. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

О КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются вопросы спектрального анализа канонических дифференциальных операторов. Для исторических и библиографических справок можно обратиться к монографии [1], которая тесно примыкает к рассматриваемым здесь вопросам.

§ 1. Операторы, порожденные каноническими дифференциальными выражениями, и их спектральные функции

1°. Пусть H — гильбертово пространство и J — оператор со свойствами $J^* = -J$, $J^2 = -I$ (I — единичный оператор в H). Формулой $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$ определяется пара взаимно дополнительных ортопроекторов $P_\pm$ ($P_+ + P_- = I$), проектирующих H на собственные подпространства $H_\pm = P_\pm H$ оператора J, отвечающие собственным значениям $\pm i$ ($J = iP_+ - iP_-$).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r) = f(r) \quad (0 \leqslant r < \infty), \tag{1.1}$$

где $V(r)$ и $f(r)$ — функции со значениями в $[H]$* и H соответственно, измеримые и интегрируемые по Бохнеру на любом компакте, содержащемся в $[0, \infty)$. Под решением уравнения (1.1) будем понимать локально абсолютно-непрерывную функцию $x(r)$ со значениями в H, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду. Это условие на функцию $x(r)$, в силу гильбертовости пространства H, равносильно представлению

$$x(r) = x(r_0) + \int_{r_0}^{r} y(t)\,dt,$$

где $y(t)$ — локально интегрируемая функция. Таким образом, определяемое решение уравнения (1.1) является по существу решением интегрального уравнения

* Через $[H]$ обозначено кольцо ограниченных линейных операторов, действующих в H.

$$x(r) = x(r_0) + \int_{r_0}^{r} V(t)\, x(t)\, dt + \int_{r_0}^{r} f(t)\, dt.$$

Это уравнение однозначно разрешимо (см. [2], стр. 141). Пусть оператор-функция $V(r)$ принимает самосопряженные значения: $V^*(r) = V(r)$ и рассмотрим оператор A_0, определяемый дифференциальным выражением

$$J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r) \tag{1.2}$$

на многообразии $D(A_0) \subset L^2(0, \infty; H)$ финитных (на бесконечности) абсолютно-непрерывных вектор-функций $x(r)$ таких, что $x(0) = 0$ и

$$J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r) \in L^2(0, \infty; H).$$

Описание симметрических и самосопряженных расширений и спектральных функций оператора A_0 можно получить как частный случай из результатов работы [2]. В связи с этими вопросами см. также [3] и [4]. Для удобства приведем здесь изложение этих вопросов для рассматриваемого нами случая.

Лемма. *Пусть $f \in L^2(0, R; H)$ при каждом $R < \infty$. Тогда если*

$$\int_0^\infty (f(r), (A_0 h)(r))\, dr = 0 \tag{1.3}$$

для всех $h \in D(A_0)$, то $f(r)$ — локально абсолютно-непрерывная функция и

$$J \frac{df(r)}{dr} - V(r)\, f(r) = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим операторное решение (оператор Коши) $U(r)$ задачи Коши

$$J \frac{dU(r)}{dr} - V(r)\, U(r) = 0, \quad U(0) = I.$$

Известно ([5], стр. 205), что $U(r)$ J-унитарный оператор

$$U^*(r)\, JU(r) = U(r)\, JU^*(r) = J \;(-JU(r)\, JU^*(r) = -U(r)\, J\, U^*(r)\, J = I).$$

Финитная функция $g \in L^2(0; \infty; H)$ принадлежит области значений $R(A_0)$ оператора A_0 тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty U^*(r)\, g(r)\, dr = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, условие (1.3) на $f(r)$ означает, что

$$\int_0^\infty (f(r),\ g(r))\,dr = 0$$

для всех тех финитных $g \in L^2(0, \infty; H)$, которые удовлетворяют условию (1.5). Положим $f_1(r) = -JU^*(r)\,Jf(r)$ $(f(r) = U(r) f_1(r))$ и $g_1(r) = U^*(r)\,g(r)$. Имеем $(f(r),\ g(r)) = (f_1(r),\ g_1(r))$, так что

$$\int_0^\infty (f_1(r),\ g_1(r))\,dr = 0$$

для всех тех финитных функций $g_1 \in L^2(0, \infty; H)$, для которых

$$\int_0^\infty g_1(r)\,dr = 0.$$

Отсюда для функции вида

$$g_1(r) = \begin{cases} f_1(r) - \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R f_1(t)\,dt = f_1(r) - f_0 & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases}$$

получим

$$\int_0^\infty (g_1(r),\ g_1(r))\,dr = \int_0^\infty (f_1(r),\ g_1(r))\,dr - \left(f_0, \int_0^\infty g_1(r)\,dr \right) = 0.$$

Таким образом, $f_1(r) \equiv f_0$ или $f(r) = U(r) f_0$. Последнее и доказывает справедливость леммы.

Предложение 1.1. *Оператор A_0 симметрический.*

Действительно, условие $(A_0 x, y) = (x, A_0 y)$ $\forall\, x, y \in D(A_0)$ получается интегрированием по частям. Плотность $D(A_0)$ в $L^2(0, \infty; H)$ легко следует из леммы, ибо если $(f, h) = 0$ $\forall h \in D(A_0)$, то рассмотрев функцию $x(r)$, являющуюся решением уравнения (1.1), получим

$$\int_0^\infty (x(r),\ (A_0 h)(r))\,dr = \int_0^\infty \left(J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\ x(r),\ h(r) \right) dr =$$

$$= \int_0^\infty (f(r)\ h(r))\,dr = 0.$$

Поэтому $x(r)$ удовлетворяет уравнению (1.4) и, значит $f(r) = 0$.

Предложение 1.2. *Оператор A_0^* задается дифференциаль-*

ным выражением (1.2) *на многообразии* $D(A_0^*)$ *локально абсолютно-непрерывных функций* $x(r)$ *из* $L^2(0, \infty; H)$ *таких, что*

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r)$$

также принадлежит $L^2(0, \infty; H)$.

Пусть $x(r)$ принадлежит области определения оператора A_0^*. Тогда существует $x^* \in L^2(0, \infty; H)$ такая, что $(x, A_0 h) = (x^*, h)$ $\forall h \in D(A_0)$. Рассмотрим решение $g(r)$ уравнения

$$J\frac{dg(r)}{dr} - V(r)\,g(r) = x^*(r).$$

Так как

$$(x^*, h) = \int_0^\infty \left(J\frac{dg(r)}{dr} - V(r)\,g(r),\ h(r) \right) dr = \int_0^\infty (g(r), (A_0 h)(r))\,dr,$$

то

$$\int_0^\infty (x(r) - g(r), (A_0 h)(r))\,dr = 0 \quad \forall h \in D(A_0).$$

В силу леммы функция $x(r)$ вместе с $x(r) - g(r)$ локально абсолютно-непрерывна и

$$J\frac{d(x(r) - g(r))}{dr} - V(r)(x(r) - g(r)) = 0.$$

Итак, $x \in D(A_0^*)$ и

$$x^*(r) = (A_0^* x)(r) = J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r).$$

Утверждение доказано.

2°. При описании симметрических расширений оператора A_0 мы будем следовать методу Калкина (см. [6], стр. 390), который состоит в следующем.

Рассмотрим гильбертово пространство $D(A_0^*)$ со скалярным произведением $(x, y)_1 = (x, y) + (A_0^* x, A_0^* y)$ и в нем билинейную форму

$$\{x, y\} = i\,[(A_0^* x, y) - (x, A_0^* y)]. \tag{1.6}$$

Подпространство $D \subset D(A_0^*)$ называется симметрическим, если билинейная форма (1.6) на D равна нулю: $\{x, y\} = 0$ $\forall x, y \in D$. Подпространство $D^* = \{x \in D(A_0^*) | \{x, y\} = 0\ \forall y \in D\}$ называется сопряженным к подпространству D. Тогда любое замкнутое симметрическое расширение A оператора A_0 получается сужением оператора A_0^* на симметрическое подпространство $D \subset D(A_0^*)$. Прм этом сужение оператора A_0^* на подпространство D^* задает оператор A^*.

В нашем случае

$$\{x, y\} = i \int_0^\infty \left[\left(J \frac{dx(r)}{dr} - V(r) x(r), y(r) \right) - \right.$$

$$\left. - \left(x(r), J \frac{dy(r)}{dr} - V(r) y(r) \right) \right] dr =$$

$$= i \int_0^\infty \frac{d}{dr} (Jx(r), y(r))\, dr = \lim_{R \to \infty} (iJx(R), y(R)) - (iJx(0), y(0)).$$

Числовая функция $(iJx(R), y(R))$ принадлежит $L^2(0, \infty)$ и при $R \to \infty$ имеет предел. Поэтому $\lim_{R \to \infty} (iJx(R), y(R)) = 0$ и окончательно получаем

$$\{x, y\} = ((-iJ)\, x(0), y(0)).$$

Это делает возможным дать описание симметрических расширений оператора A_0 в терминах $(-iJ)$-нейтральных подпространств пространства H^*.

Предложение 1.3. *Произвольное замкнутое симметрическое расширение A_p оператора A_0 дается сужением оператора A_0^* на подпространство $D(A_p)$ вида*

$$D(A_p) = \{x \in D(A_0^*) \mid P_L\, x(0) = x(0)\}, \tag{1.7}$$

где P_L — ортопроектор на $(-iJ)$-нейтральное подпространство L в H. При этом расширение A_p является максимальным симметрическим (самосопряженным) в том и только в том случае, когда $(-iJ)$-нейтральное подпространство L является максимальным (гипермаксимальным).

Замечание. Проектор P_L на $(-iJ)$-нейтральное подпространство L можно задать в виде

$$P_L = \frac{1}{2}(K + K^* + KK^* + K^*K),$$

где K — частично изометрический оператор, отображающий H_+ в H_-. При этом K является угловым оператором подпространства L (см. [4]). В случае, когда K отображает все H_+ на H_-

$$P = \frac{1}{2}(I + K + K^*) \tag{1.8}$$

---

* Относительно понятий, связанных с $(-iJ)$-метрикой $(-iJ = P_+ - P_-)$ пространства H, см. [7].

является проектором на гипермаксимальное $(-iJ)$-нейтральное подпространство. Таким образом, для существования самосопряженного расширения оператора A_0 необходимым и достаточным является условие: $\dim H_+ = \dim H_-$.

Другой характеристикой проектора P на $(-iJ)$-нейтральное подпространство является условие: $PJP=0$.

При этом подпространство $L=PH$ будет гипермаксимальным тогда и только тогда, когда

$$JP+PJ=J. \tag{1.8}$$

В пояснение этого условия заметим, что оно равносильно условию $JP=QJ$ $(Q=I-P)$, которое означает, что подпространство $L=PH$ совпадает со своим $(-iJ)$-ортогональным подпространством, т. е. является гипермаксимальным.

П р е д л о ж е н и е 1.4. *Пусть ортопроектор P удовлетворяет условию $PJP=0$ и $\widetilde{A}_p$ — сужение оператора A_0^* на многообразие $D(\widetilde{A}_p)$ финитных функций $x(r)$ из $D(A_0^*)$, удовлетворяющих условию: $Px(0)=x(0)$. Тогда замыканием этого оператора является оператор A_p, определенный на многообразии $D(A_p)$ вида* (1.7).

В самом деле, покажем что $(\widetilde{A}_p)^*=A_p^*$. Заметим, что на основании вышесказанного, A_p^* есть сужение A_0^* на подпространство

$$D(A_p^*)=\{y\in D(A_0^*)|\, y(0)\in H\ominus JPH\}.$$

Ясно, что если $y\in D(\widetilde{A}_p^*)$, то для всех $x\in D(\widetilde{A}_p)$ имеем

$$(\widetilde{A}_p x, y)=(x, \widetilde{A}_p^* y)=\int\limits_0^\infty \left(x(r),\ J\frac{dy(r)}{dr}-V(r)y(r)\right)dr=(Jx(0), y(0))+$$

$$+\int\limits_0^\infty\left(J\frac{dx(r)}{dr}-V(r)\,x(r),\ y(r)\right)dr=(Jx(0),\ y(0))+(\widetilde{A}_p x, y).$$

Таким образом, $(Jx(0), y(0))=0\ \forall x\in D(\widetilde{A}_p)$, т. е. $y(0)\in H\ominus JPH$, что и требовалось доказать.

3°. Рассмотрим здесь вопрос существования спектральных оператор-функций для канонических дифференциальных операторов. Сделаем это с помощью метода М. Г. Крейна. Обоснование метода направляющих функционалов Крейна для случая гильбертовых пространств дано в [8] и [9]. В [9] для канонического дифференциального оператора построено направляющее отображение. Для наших целей удобно рассмотреть несколько отличное от введенного в [9] направляющее отображение. Предварительно сформулируем необходимые понятия и определения.

Через $V(H)$ обозначается множество оператор-функций $F(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ со значениями в $[H]$, удовлетворяющих условиям:

1) $F(0) = 0$,

2) $F(\lambda)$ — неубывающая функция: $F(\lambda) \geqslant F(\mu)$ при $\lambda > \mu$,

3) $F(\lambda)$ — непрерывна слева: $F(\lambda - 0) = F(\lambda)$.

Каждая функция $F(\lambda)$ из семейства $V(H)$ порождает гильбертово пространство $L^2_F(-\infty, \infty; H)$ вектор-функций со значениями в H, где скалярное произведение задается формулой

$$(f, g)_F = \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) f(\lambda), g(\lambda)).$$

Определение 1.1. Функция $F \in V(H)$ называется спектральной функцией оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H_1, если существует изометрическое отображение пространства H_1 в $L^2_F(-\infty, \infty; H)$ такое, что оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную в $L^2_F(-\infty, \infty; H)$.

Определение 1.2. Пусть $\mathbf{G}$ — некоторое линейное пространство и A — линейный оператор, действующий в $\mathbf{G}$, и пусть H — гильбертово пространство. Отображение Φ: $\mathbf{G} \times R \to H$ называется направляющим отображением для оператора A, если

1) $\Phi(f, \lambda)$ при каждом фиксированном $\lambda \in R$ линейно относительно $f \in \mathbf{G}$,

2) $\Phi(f, \lambda)$ при каждом фиксированном $f \in \mathbf{G}$ — голоморфная вектор-функция по λ со значениями в H,

3) Уравнение $(A - \lambda I) g = f$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\Phi(f, \lambda) = 0$.

В работе [9] (теорема 1) доказано, что в случае, когда $\mathbf{G}$—евклидово пространство и A — симметрический оператор, обладающий направляющим отображением, удовлетворяющим определенному свойству, то существует функция $F \in V(H)$ такая, что

$$(f, g)_G = \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) \Phi(f, \lambda), \Phi(g, \lambda)). \tag{1.9}$$

Последнее, в силу равенства $\Phi(Af, \lambda) = \lambda \Phi(f, \lambda)$, означает, что $F(\lambda)$ является спектральной функцией оператора A.

Рассмотрим в качестве $\mathbf{G}$ многообразие финитных функций из $L^2(0, \infty; H)$ и оператор $\widetilde{A}_p$ в нем. Тогда формулой

$$\Phi(f, \lambda) = QJ \int_0^{\infty} U^*(r, \lambda) f(r)\, dr,$$

где $U(r, \lambda)$ — операторное решение задачи Коши:

$$J\frac{dU(r,\lambda)}{dr} - V(r)\,U(r,\lambda) = \lambda U(r,\lambda);\ U(0,\lambda) = I, \tag{1.10}$$

определяется направляющее отображение Φ: $\mathbf{G} \times R \to QH$ для оператора $\widetilde{A}_p$.

Проверим лишь условие 3) определения 1.2. Положим для некоторого финитного $f \in L^2(0, \infty; H)$

$$g(r) = U(r,\lambda)\,J\int_r^\infty U^*(t,\lambda)\,f(t)\,dt.$$

Легко убедиться, что $g(r)$ — финитная абсолютно-непрерывная функция удовлетворяющая уравнению

$$J\frac{dg(r)}{dr} - V(r)\,g(r) - \lambda g(r) = f(r).$$

Таким образом, для принадлежности функции $g(r)$ многообразию, $D(\widetilde{A}_p)$ необходимо и достаточно, чтобы $Pg(0) = g(0)$. Но поскольку

$$g(0) = J\int_0^\infty U^*(t,\lambda)f(t)\,dt = (PJ + QJ)\int_0^\infty U^*(t,\lambda)\,f(t)\,dt,$$

то последнее условие равносильно условию $\Phi(f, \lambda) = 0$.

Замечание. В случае, когда ортопроектор P удовлетворяет условию (1.8′), отображение $\Phi(f, \lambda)$ можно записать в виде

$$\Phi(f,\lambda) = P\int_0^\infty U^*(r,\lambda)\,f(r)\,dr.$$

Кроме того, в этом случае замыкание оператора $\widetilde{A}_p$ является самосопряженным и на основании теоремы 3 работы [5] можно утверждать, что тождеством (1.9) порождается унитарное отображение пространства $L^2(0, \infty; H)$ на пространство $L^2_\rho(-\infty, \infty; PH)$.

§ 2. Свойства спектральных функций канонических дифференциальных операторов, и обратная задача спектрального анализа

Результаты этого параграфа являются обобщениями работ [10] и [11].

1°. При исследовании свойств спектральных функций канонических дифференциальных операторов, не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением эрмитовых потенциалов $V(r)$, удовлетворяющих условию J-эрмитовости: $JV(r) = -V(r)J$ (см. [12], стр. 466). Зафиксируем ортопроектор P, удовлетворяющий условию (1.8) и через A_V обозначим здесь рассматриваемый в § 1 оператор $\widetilde{A}_p$. При $V(r) \equiv 0$ этот оператор обозначим через A_0. Введем оператор-функцию $\Phi_V(r, \lambda) = U_V(r, \lambda)\,P$, где $U_V(r, \lambda)$ — операторное решение задачи Коши:

$$J\frac{dU_V(r,\lambda)}{dr} - V(r)\,U_V(r,\lambda) = \lambda U_V(r,\lambda);\quad U_V(0,\lambda) = I.$$

При $V(r)\equiv 0$ имеем $\Phi_0(r,\lambda) = U_0(r,\lambda)\,P = (P_+ e^{-i\lambda r} + P_- e^{i\lambda r})\,P$. Рассмотрим оператор $I+\mathbf{K}$ вида

$$(I+\mathbf{K})\,f(r) = f(r) + \int\limits_0^r K(r,t)\,f(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где ядро $K(r,t)$ удовлетворяет при каждом $R<\infty$ условию

$$\sup_{0<t<R}\int\limits_t^R \|K(r,t)\|\,dr < \infty;\quad \sup_{0<r<R}\int\limits_0^r \|K(r,t)\|\,dt < \infty. \tag{2.2}$$

В силу этого условия $I+\mathbf{K}$ является ограниченным оператором в пространстве $L^2(0,R;H)$ при каждом $R<\infty$.

Предложение 2.1. *Пусть*

$$\Phi(r,\lambda) = \Phi_0(r,\lambda) + \int\limits_0^r K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt, \tag{2.3}$$

тогда $\Phi(r,\lambda) = \Phi_V(r,\lambda)$ *в том, и только в том случае, когда слагаемые*

$$K_1(r,t) = \frac{1}{2}\,(K(r,t) - J\,K(r,t)\,J);\quad K_2(r,t) = \frac{1}{2}\,(K(r,t) + JK(r,t)\,J)$$

в разложении ядра $K(r,t)$ *на перестановочную и антиперестановочную с* J *части удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} K_1(r,t) = -\dfrac{1}{2}\,JV\left(\dfrac{r-t}{2}\right)J_0 - J\displaystyle\int\limits_{\frac{r-t}{2}}^{r-t} V(\tau)\,K_1(\tau,r-t-\tau)\,d\tau\,J_0 - \\ \qquad -J\displaystyle\int\limits_{r-t}^{r} V(\tau)\,K_2(\tau,\tau+t-r)\,d\tau, \\ K_2(r,t) = -\dfrac{1}{2}\,JV\left(\dfrac{r+t}{2}\right) - J\displaystyle\int\limits_{\frac{r+t}{2}}^{r} V(\tau)\,K_1(\tau,r+t-\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $J_0 = 2P - I$ $(J_0 = P - Q;\ Q = I - P)$.

Доказательство. Если $\Phi(r,\lambda) = \Phi_V(r,\lambda)$, то удовлетворяется уравнение

$$\Phi(r,\lambda) = \Phi_0(r,\lambda) - \int\limits_0^r U_0(r-s,\lambda)\,JV(s)\,\Phi(s,\lambda)\,ds. \tag{2.5}$$

Поэтому

$$\int_0^r K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt=-\int_0^r U(r-s,\lambda)\,JV(s)\Big[\Phi_0(s,\lambda)+$$

$$+\int_0^s K(s,\tau)\,\Phi_0(\tau,\lambda)\,d\tau\Big]\,ds. \tag{2.6}$$

Учитывая, что $K_1(r,t)\,U_0(t,\lambda)=U_0(t,\lambda)\,K_1(r,t)$ и $K_2(r,t)\,U_0(t,\lambda)=$ $=U_0^*(t,\lambda)\,K_2(r,t)$, после соответствующих преобразований получаем

$$\int_0^r K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt=\int_0^r U_0(t,\lambda)\,K_1(r,t)\,dt\,P+\int_0^r U_0^*(t,\lambda)\,K_2(r,t)\,dt\,P,$$

$$\int_0^r U_0(r-s,\lambda)\,JV(s)\,\Phi_0(s,\lambda)\,ds=\frac{1}{2}\int_0^r U_0(s,\lambda)\,JV\left(\frac{r-s}{2}\right)ds\,P+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^r U_0^*(s,\lambda)\,JV\left(\frac{r+s}{2}\right)ds\,P,$$

$$\int_0^r U_0(r-s,\lambda)\,JV(s)\left(\int_0^r K(s,\tau)\,\Phi_0(\tau,\lambda)\,d\tau\right)ds=$$

$$=\int_0^r U_0^*(\tau,\lambda)\left(\int_{\frac{r+\tau}{2}}^{\tau} JV(s)\,K_1(s,r+\tau-s)\,ds\right)d\tau\,P+$$

$$+\int_0^r U_0(\tau,\lambda)\left(\int_{\frac{r-\tau}{2}}^{r-\tau} JV(s)\,K_1(s,r-\tau-s)\,ds\right)d\tau\,P+$$

$$+\int_0^r U_0^*(\tau,\lambda)\left(\int_{r-\tau}^{r} JV(s)\,K_2(s,\tau+s-r)\,ds\right)d\tau\,P.$$

Приравняв теперь в равенстве (2.6) члены при $U_0(t,\lambda)$ и $U_0^*(t,\lambda)$, получим систему

$$K_1(r,t)\,P=-\frac{1}{2}\,JV\left(\frac{r-t}{2}\right)P-J\int_{\frac{r-t}{2}}^{r-t} V(\tau)\,K_1(\tau,r-t-\tau)\,d\tau P-$$

$$-J\int_{r-t}^{r} V(\tau)\,K_2(\tau,t+r-\tau)\,d\tau\,P,$$

$$K_2(r,t)P = -\frac{1}{2}JV\left(\frac{r+t}{2}\right)P - J\int\limits_{\frac{r+t}{2}}^{r} V(\tau)K_1(\tau, r+t-\tau)\,d\tau\, P.$$

Заметим теперь, что если через T_1 и T_2 обозначены перестановочная и антиперестановочная с J части оператора T, то

$$(T_i P)_j = \frac{1}{2}T_i J_0 \text{ и } (T_i P)_i = \frac{1}{2}T_i \quad (i, j = 1, 2).$$

Поэтому полученная система равносильна системе (2.4). Обратно, если $K_i(r,t)(i = 1, 2)$ удовлетворяют системе (2.4), то обращая приведенные рассуждения, убедимся, что $\Phi(r, \lambda)$, определенная формулой (2.3), удовлетворяет уравнению (2.5). Таким образом, можно сказать, что система (2.4) определяет оператор преобразования (2.1).

Наряду с системой (2.4) рассмотрим систему

$$\begin{cases} L_1(r,t) = \frac{1}{2}JV\left(\frac{r-t}{2}\right)J_0 + J\int\limits_0^{\frac{r-t}{2}} L_1(r-t-\tau,\tau)V(\tau)\,d\tau\, J_0 + \\ \qquad + J\int\limits_0^{t} L_2(r-t+\tau,\tau)V(\tau)\,d\tau, \\ L_2(r,t) = \frac{1}{2}JV\left(\frac{r+t}{2}\right) + J\int\limits_{t}^{\frac{r+t}{2}} L_1(r+t-\tau,\tau)V(\tau)\,d\tau, \end{cases} \tag{2.7}$$

и оператор $I + \mathbf{L}$ вида

$$(I+\mathbf{L})f(r) = f(r) + \int\limits_0^r L(r,t)f(t)\,dt,$$

где $L(r,t) = L_1(r,t) + L_2(r,t)$.

Существование и единственность решений систем (2.4) и (2.7) в классе оператор-функций, удовлетворяющих условиям (2.2), доказывается методом последовательных приближений. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть оператор-функция* $K(r,t)$, *удовлетворяющая условиям* (2.2), *такова, что*

$$J\frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty K(r,t)f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty K(r,t)J\frac{df(t)}{dt}\,dt \tag{2.8}$$

для всех финитных абсолютно непрерывных функций $f(t)$, *удовлетворяющих условию* $f(0)=0$. *Тогда* $K(r,t) = K_1(r-t) + K_2(r+t)$, *где* $JK_1(r) = K_1(r)J$, $JK_2(r) = -K_2(r)J$.

Доказательство. Рассмотрим функции $f(t)$ вида

$$f(t) = \begin{cases} \int_t^R g(s)\,ds & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant R \\ 0 & \text{при } R < t < \infty, \end{cases}$$

где функция $g(s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^R g(s)\,ds = 0.$$

Тогда из (2.8) интегрированием по r от 0 до τ $(0 \leqslant \tau \leqslant R)$ получим

$$\int_0^R \left[\int_0^s (JK(\tau, t) - JK(0, t))\,dt\right] g(s)\,ds = -\int_0^R \left(\int_0^\tau K(r, s)\,J\,dr\right) g(s)\,ds$$

или, положив

$$B(\tau, s) = \int_0^s (JK(\tau, t) - JK(0, t))\,dt + \int_0^\tau K(r, s)\,J dr,$$

получим

$$\int_0^R B(\tau, s)\,g(s)\,ds = 0 \quad \forall g \text{ таких, что } \int_0^R g(s)\,ds = 0.$$

Рассмотрим

$$g(s) = B^*(\tau, s)\,h - \frac{1}{R}\int_0^R B^*(\tau, s)\,h\,ds = B^*(\tau, s)\,h - h_0 \quad (h \in H).$$

Имеем

$$\int_0^R (B^*(\tau, s)\,h - h_0,\ B^*(\tau, s)\,h)\,ds = 0 \quad \forall h \in H.$$

Отсюда

$$\int_0^R \|B^*(\tau, s)\,h\|^2\,ds = \frac{1}{R}\left\|\int_0^R B^*(\tau, s)\,h ds\right\|^2,$$

поэтому

$$B^*(\tau, s)\,h = \frac{1}{R}\int_0^R B^*(\tau, s)\,h ds \quad \forall h \in H.$$

Таким образом, $B(\tau, s)$ не зависит от s и $B(\tau, s) = B(\tau, 0)$. Получили равенство

$$\int_0^s JK(\tau, t)\,dt + \int_0^\tau K(r, s)\,J dr = \int_0^s JK(0, t)\,dt + \int_0^\tau K(r, 0)\,J dr.$$

Приравнивая перестановочную и антиперестановочную с J части в этом равенстве, получим

$$\int_0^s K_1(\tau, t)\,dt + \int_0^\tau K_1(r, s)\,dr = \int_0^s K_1(0, t)\,dt + \int_0^\tau K_1(r, 0)\,dr,$$

$$\int_0^s K_2(\tau, t)\,dt - \int_0^\tau K_2(r, s)\,dr = \int_0^s K_2(0, t)\,dt - \int_0^\tau K_2(r, 0)\,dr.$$

Эти соотношения доказывают утверждение леммы.

Предложение 2.2. *Операторы $I + \mathbf{K}$ и $I + \mathbf{L}$, рассматриваемые в пространстве $L^2(0, R;\ H)$ $(R < \infty)$, взаимно обратные.*

Для доказательства заметим сначала, что операторы $I + \mathbf{K}$ и $I + \mathbf{L}$ множество $\mathbf{C}$ локально абсолютно-непрерывных функций f, удовлетворяющих в нуле условию $Pf(0) = f(0)$, отображают в себя же. При этом справедливы тождества

$$(I + \mathbf{K})\, J\frac{df(r)}{dr} = \left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)(I + \mathbf{K})\, f(r) \tag{2.9}$$

$$\forall f \in \mathbf{C}.$$

$$(I + \mathbf{L})\left(J\frac{df(r)}{dr} - V(r)\, f(r)\right) = J\frac{d}{dr}(I + \mathbf{L})\, f(r) \tag{2.9'}$$

В этом легко убедиться, подставляя значения $K_i(r, t)$ и $L_i(r, t)$ $(i = 1, 2)$ из (2.4) и (2.7) в выражения $(I + \mathbf{K})\, f$ и $(I + \mathbf{L})\, f$ и вычисляя обе части тождеств (2.9) и (2.9'). Рассмотрим оператор $I + \mathbf{M} = (I + \mathbf{L})(I + \mathbf{K})$. Ядро $M(r, t)$ оператора $\mathbf{M}$ имеет вид

$$M(r,t) = \begin{cases} L(r, t) + K(r, t) + \int_t^r L(r, s)\, K(s, t)\, ds & \text{при } 0 \leq t \leq r \\ 0 & \text{при } r < t < \infty. \end{cases}$$

Поскольку, как легко видеть из систем (2.4) и (2.7), ядра $K(r, t)$, $L(r, t)$ удовлетворяют соотношению $K(r, 0)\, Q = L(r, 0)\, Q = 0$, то и $M(r, 0)\, Q = 0$. Далее, из (2.9) и (2.9') следует, что

$$(I + \mathbf{M})\, J\frac{df(r)}{dr} = J\frac{d}{dr}(I + \mathbf{M})\, f(r), \quad \forall f \in \mathbf{C}.$$

На основании леммы 2.1 можем утверждать, что

$M(r, t) = M_1(r-t) + M_2(r+t)(JM_1(r) = M_1(r)J;\ JM_2(r) = -M_2(r)J)$.

Из вышеприведенных свойств $M(r, t)$ следует, что

$$M_1(-t) = M_2(r) = 0\ (t > 0) \text{ и } M_2(r)Q = 0\ (r > 0).$$

Последнее означает, что и $M_2(r) = 0$ $(r > 0)$. Таким образом, $(I + \mathbf{L})(I + \mathbf{K}) = I$ и утверждение доказано.

Рассмотрим операторы $I + \mathbf{K}^*$ и $I + \mathbf{L}^*$, действующие на множестве финитных функций из $L^2(0, \infty; H)$ по формулам

$$(I + \mathbf{K}^*) f(r) = f(r) + \int_r^\infty K^*(t, r) f(t)\, dt,$$

$$(I + \mathbf{L}^*) f(r) = f(r) + \int_r^\infty L^*(t, r) f(t)\, dt.$$

В пространстве $L^2(0, R; H)$ они являются сопряженными к операторам $I + \mathbf{K}$ и $I + \mathbf{L}$. Как и выше непосредственно проверяется, что операторы $I + \mathbf{K}^*$ и $I + \mathbf{L}^*$ множество $\mathbf{C}_0$ финитных абсолютно-непрерывных функций f, удовлетворяющих в нуле условию $Pf(0) = f(0)$, отображают на себя и справедливы тождества

$$(I + \mathbf{K}^*)\left(J\frac{df(r)}{dr} - V(r) f(r)\right) = J\frac{d}{dr}(I + \mathbf{K}^*) f(r) \tag{2.10}$$

$$\forall f \in \mathbf{C}_0$$

$$(I + \mathbf{L}^*)\, J\frac{df(r)}{dr} = \left(J\frac{d}{dr} - V(r)\right)(I + \mathbf{L}^*) f(r). \tag{2.10'}$$

Положим $I + \mathbf{H} = (I + \mathbf{L})(I + \mathbf{L}^*)$. Ядро $H(r, t)$ оператора $\mathbf{H}$ имеет вид

$$H(r, t) = \begin{cases} L(r, t) + \int_0^t L(r, s) L^*(t, s)\, ds & \text{при } r \geqslant t \\ L^*(t, r) + \int_0^r L(r, s) L^*(t, s)\, ds & \text{при } r < t. \end{cases}$$

Из соотношений (1.9') и (2.10') следует, что

$$(I + \mathbf{H})\, J\frac{df(r)}{dr} = J\frac{d}{dr}(I + \mathbf{H}) f(r) \quad \forall f \in \mathbf{C}_0.$$

Поэтому в силу леммы 2.1

$$H(r, t) = H_1(r-t) + H_2(r+t)(JH_1(r) = H_1(r)J;\ JH_2(r) = -H_2(r)J). \tag{2.11}$$

Учитывая теперь свойства $H^*(r, t) = H(t, r)$ и $H(r, 0)\,Q = 0$ ядра $H(r, t)$, получим

$$H_2(r) = H_1(r)\,J_0;\ H_1^*(r) = H_1(-r) = J_0 H_1(r)\,J_0\ (J_0 = P - Q;\ r > 0). \tag{2.12}$$

2°. Перейдем к рассмотрению свойств спектральной функции $\Sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ оператора A_V. На основании § 1 для всех финитных функций f, g из $L^2(0, \infty; H)$ выполняется равенство

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi(f, \lambda), \Sigma(d\lambda)\,\Phi(g, \lambda)), \tag{2.13}$$

где

$$\Phi(f, \lambda) = P\int_0^{\infty} U^*(r, \lambda)\,f(r)\,dr = \int_0^{\infty} \Phi^*(r, \lambda)\,f(r)\,dr.$$

В силу (2.2) для $\Phi(f, \lambda)$ получим представление

$$\Phi(f, \lambda) = \int_0^{\infty}\Big(\Phi_0^*(r, \lambda) + \int_0^{r} \Phi_0^*(s, \lambda)\,K^*(r, s)\,ds\Big) f(r)\,dr =$$

$$= \int_0^{\infty} \Phi_0^*(s, \lambda)\Big(f(s) + \int_s^{\infty} K^*(r, s)\,f(s)\,ds\Big) = \int_0^{\infty} \Phi_0^*(s, \lambda)\,(I + \mathbf{K}^*)\,f(s)\,ds.$$

Положим $(I + \mathbf{K}^*)\,f(r) = f_0(r)$ и $(I + \mathbf{K}^*)\,g(r) = g_0(r)$, тогда

$$(I + \mathbf{L}^*)\,f_0(r) = f(r) \text{ и } (I + \mathbf{L}^*)\,g_0(r) = g(r).$$

Соотношение (2.13) запишется в виде

$$((I + \mathbf{H})\,f_0, g_0) = ((I + \mathbf{L}^*)\,f_0, (I + \mathbf{L}^*)\,g_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_0(f_0, \lambda), \Sigma(d\lambda)\,\Phi_0(g_0, \lambda)),$$

где

$$\Phi_0(f_0, \lambda) = \int_0^{\infty} \Phi_0^*(r, \lambda)\,f_0(r)\,dr.$$

Отобразим теперь пространство $L^2(0, \infty; H)$ на пространство $L^2(-\infty, \infty; H_+)$ следующим образом. Пусть K — изометрическое отображение H_+ на H_-, участвующее в представлении (1.8) проектора P. Элементу $f \in L^2(0, \infty; H)$ поставим в соответствие элемент $\tilde f \in L^2(-\infty, \infty; H_+)$ по формуле

$$\tilde f(r) = \begin{cases} P_+ f(r) & \text{при } r > 0 \\ K^* f(-r) & \text{при } r < 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Легко проверить, что это — изометрическое отображение и что при этом отображении интегральный оператор

$$\mathbf{M} f(r) = \int_0^\infty M(r, t) f(t)\, dt$$

переходит в оператор

$$\widetilde{\mathbf{M}} \widetilde{f}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{M}(r, t) \widetilde{f}(t)\, dt,$$

в котором ядро $\widetilde{M}(r, t)$ $(-\infty < r, t < \infty)$ задается формулой

$$\widetilde{M}(r, t) = \begin{cases} P_+ M(\ \ r, \ \ \ t) P_+ & \text{при} \quad r, \quad t > 0 \\ P_- M(\ \ r, -t) K & \text{при} \ +r, -t > 0 \\ K^* M(-r, \ \ \ t) P_+ & \text{при} \ -r, \quad t > 0 \\ K^* M(-r, -t) K & \text{при} \ -r, -t > 0. \end{cases}$$

Поэтому в силу (2.11) и (2.12) оператор $I + \mathbf{H}$ перейдет в оператор

$$(I + \widetilde{\mathbf{H}}) \widetilde{f}(r) = \widetilde{f}(r) + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{H}(r - t) \widetilde{f}(t)\, dt, \tag{2.15}$$

где $\widetilde{H}(r) = P_+ H_1(r) P_+$ $(-\infty < r < \infty)$. Отметим, что в силу (2.12) оператор-функция $\widetilde{H}(r)$ эрмитова: $\widetilde{H}(-r) = \widetilde{H}^*(r)$. С другой стороны

$$\int_0^\infty \Phi_0^*(r, \lambda) f(r)\, dr = P \int_0^\infty (P_+ e^{i\lambda r} + P_- e^{-i\lambda r}) f(r)\, dr = PP_+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r} \widetilde{f}(r)\, dr.$$

Таким образом, соотношение (2.13) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{f}(r), \widetilde{g}(r))\, dr + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{H}(r-t) \widetilde{f}(t), \widetilde{g}(r))\, dt\, dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r} \widetilde{f}(r)\, dr, \Sigma_1(d\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r} \widetilde{g}(r)\, dr \right), \tag{2.16}$$

где $\Sigma_1(\lambda) = P_+ P\Sigma(\lambda) PP_+$ *. Последнее соотношение вместе с тем фактом, что оператор $I + \widetilde{\mathbf{H}}$ в каждом из пространств $L^2(0, R; H)$ $(R < \infty)$ допускает факторизацию вида

* $2\Sigma_1(\lambda)$ является образом оператора $\Sigma(\lambda)$ при изоморфном соответствии пространств H_+ и PH, задаваемом отображениями $\sqrt{2}\, PP_+$ и $\sqrt{2}\, P_+ P$.

$$I+\widetilde{\mathbf{H}}=(I+\widetilde{\mathbf{K}})^{-1}\,(I+\widehat{\mathbf{K}}^{*})^{-1}, \tag{2.17}$$

где оператор $\widetilde{\mathbf{K}}$ действует по формуле

$$\widetilde{\mathbf{K}}\,\widetilde{f}\,(r)=\int\limits_{-|r|}^{|r|}\widetilde{K}\,(r\,,t)\,\widetilde{f}\,(t)\,dt,$$

дают возможность выявить необходимые условия на спектральную функцию $\Sigma_1(\lambda)$.

Определим оператор-функцию $\Pi\,(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ формулой

$$\Pi\,(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,tI+\displaystyle\int\limits_0^t\widetilde{H}\,(s)(t-s)\,ds & \text{при } t\geqslant 0\\[2ex] -\dfrac{1}{2}\,tI+\displaystyle\int\limits_t^0\widetilde{H}\,(s)(t-s)\,ds & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Из (2.16) при $\widetilde{f}\,(r)=\widetilde{g}\,(r)=\chi_\tau(r)\,h$, где $h\in H_t$, а $\chi_\tau(r)$ — характеристическая функция множества $[-\tau,\,\tau]$, получим

$$2\,(\mathrm{Re}\,\Pi\,(2\tau)\,h,\,h)=2\tau\,(h,\,h)+\int\limits_{-\tau}^{\tau}\!\!\int(\widetilde{H}\,(r-t)\,h,\,h)\,dtdr=$$

$$=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2\lambda\tau}{\lambda^2}\,(\Sigma_1\,(d\lambda)\,h,\,h).$$

Отсюда

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\varepsilon}(\mathrm{Re}\,\Pi\,(2\tau)\,h,\,h)\,d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin 2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon}\right)\frac{(\Sigma_1\,(d\lambda)\,h,\,h)}{\lambda^2}\,.$$

Зафиксируем ε и выберем N так, что при $|\lambda|>N$ имеет место $1-\dfrac{\sin 2\lambda\,\varepsilon}{2\lambda\varepsilon}>\dfrac{1}{2}$. Получим

$$\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{(\Sigma_1\,(d\lambda)\,h,\,h)}{1+\lambda^2}\leqslant\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{(\Sigma_1\,(d\lambda)\,h,\,h)}{\lambda^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin 2\lambda\varepsilon}{2\lambda\varepsilon}\right)\frac{(\Sigma_1\,(d\lambda)\,h,\,h)}{\lambda^2}<\infty.$$

Поэтому спектральная функция $\Sigma_1\,(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Sigma_1 (d\lambda) h, h)}{1+\lambda^2} < \infty.$$

Далее, для финитных непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\tilde{f}(r)$ и $\tilde{g}(r)$ имеем

$$-\int\int_{-\infty}^{\infty} (\Pi(r-t)\tilde{f}'(t), \tilde{g}'(r))\, dt dr = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}(r), \tilde{g}(r))\, dr +$$

$$+\int\int_{-\infty}^{\infty} (\breve{H}(r-t), \tilde{f}(t), \tilde{g}(r))\, dt dr = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{f}(r)\, dr,\ \Sigma_1(d\lambda) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{g}(r)\, dr\Big) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{f}'(r)\, dr,\ \frac{\Sigma_1(d\lambda)}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda r}\tilde{g}'(r)\, dr\Big).$$

Выбрав $\tilde{f}_n(r)$, стремящуюся к $\delta(r)h$ и $\tilde{g}'(r) = \varphi(r)h$, где $h \in H_+$, $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, а $\varphi(r)$ — финитная числовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\varphi(t)\, dt = 0,$$

получим

$$-\int_{-\infty}^{\infty} (\Pi(r) h, h)\varphi(r)\, dr = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda r}\varphi(r)\, dr\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda) h, h)}{\lambda^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\varphi(r)\, dr\Big]\frac{(\Sigma_1(d\lambda) h, h)}{\lambda^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda) h, h)}{\lambda^2}\Big]\varphi(r)\, dr.$$

Отсюда

$$\Pi(r) = A + Br - \int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda) h, h)}{\lambda^2}.$$

Учитывая, что $\Pi^*(r) = \Pi(-r)$ и $\Pi(0) = 0$, окончательно получим

$$\Pi(r) = iBr - \int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-i\lambda r} - 1 + \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2}\Big)\frac{(\Sigma_1(d\lambda) h, h)}{\lambda^2},$$

где B — эрмитов оператор.

Теорема. *Оператор-функция $\Sigma_1(\lambda) \in V(H_+)$ является спектральной функцией оператора A_V в том и только в том случае, если:*

1) *Оператор-функция $\Sigma_1(\lambda)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Sigma_1(d\lambda)\,h,\,h)}{1+\lambda^2} < \infty \quad \forall h \in H_+.$$

2) *Оператор-функция*

$$\Omega(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{i\lambda r}{1+\lambda^2} - e^{-i\lambda r}\right) \frac{d\left(\Sigma_1(\lambda) - \dfrac{\lambda}{\pi} I\right)}{\lambda^2}$$

имеет производную вида

$$\Omega'(r) = \Omega'(0) + \int_0^r \widetilde{H}(s)\,ds,$$

где $\widetilde{H}(s)$ — локально суммируемая эрмитова оператор-функция.

3) *Оператор* (2.15) *допускает факторизацию* (2.17) *в каждом из пространств $L^2(-R, R; H_+)$ $(R < \infty)$.*

Доказательство. Необходимость условий непосредственно следует из вышеприведенных рассмотрений. Достаточность доказывается путем восстановления потенциала $V(r)$ оператора A_V по функции $\Sigma_1(\lambda)$, удовлетворяющей условиям 1)—3), так чтобы $\Sigma_1(\lambda)$ являлась спектральной функцией оператора A_V.

Рассмотрим уравнения

$$\widetilde{K}_R(r, t) + \widetilde{H}(r-t) + \int_{-R}^{R} \widetilde{K}_R(r, s)\,\widetilde{H}(s-t)\,ds = 0,$$

$$\widetilde{K}_R(r, t) + \widetilde{H}(r-t) + \int_{-R}^{R} \widetilde{H}(r-s)\,\widetilde{K}_R(s, t)\,ds = 0.$$

Существование и единственность решений этих уравнений, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{-R<t<R} \int_{-R}^{R} \|\widetilde{K}_R(r, t)\|\,dr < \infty; \quad \sup_{-R<r<R} \int_{-R}^{R} \|\widetilde{K}(r, t)\|\,dt < \infty,$$

следует из условия 3) теоремы. Положив $\Gamma_{2R}(r, t) = \widetilde{K}_R(r-R, t-R)$ $(0 \leqslant r,\ t \leqslant 2R)$, приведем эти уравнения к виду

$$\Gamma_{2R}(r, t) + \widetilde{H}(r-t) + \int_0^{2R} \Gamma_{2R}(r, s)\,\widetilde{H}(s-t)\,ds = 0, \tag{2.18}$$

$$\Gamma_{2R}(r,t)+\widetilde{H}(r-t)+\int_0^{2R}\widetilde{H}(r-s)\,\Gamma_{2R}(s,t)\,ds=0.$$

Перейдя в этих уравнениях к сопряженным и положив $F_{2R}(r,t)=$ $=\Gamma_{2R}(2R-t,\ 2R-r)$, получим

$$F_{2R}(r,t)+\widetilde{H}^*(r-t)+\int_0^{2R}F_{2R}(r,s)\,\widetilde{H}^*(s-t)\,ds=0, \qquad (2.18')$$

$$F_{2R}(r,t)+\widetilde{H}^*(r-t)+\int_0^{2R}\widetilde{H}^*(r-s)\,F_{2R}(s,t)\,ds=0.$$

Из однозначной разрешимости (2.18) и (2.18′) следуют формулы дифференцирования $\Gamma_R(r,t)$ и $F_R(r,t)$ по параметру R

$$\frac{\partial\Gamma_R(r,t)}{\partial R}=\Gamma_R(r,R)\,\Gamma_R(R,t);\quad \frac{\partial F_R(r,t)}{\partial R}=F_R(r,R)\,F_R(R,t). \qquad (2.19)$$

Введем функции

$$\mathrm{E}_*(r,\lambda)=e^{-i\lambda r}\left(I+\int_0^{2r}F_{2r}(s,0)\,e^{i\lambda s}\,ds\right)=e^{-i\lambda r}I+\int_{-r}^{r}\widetilde{K}_r(r,s)\,e^{-i\lambda s}\,ds$$

$$(r\geqslant 0) \qquad (2.20)$$

$$\mathrm{E}(r,\lambda)=e^{i\lambda r}\left(I+\int_0^{2r}\Gamma_{2r}(0,s)\,e^{-i\lambda s}ds\right)=e^{i\lambda r}I+\int_{-r}^{r}\widetilde{K}_r(-r,s)\,e^{-i\lambda s}\,ds.$$

Легко проверить, используя (2.19), что

$$\frac{d\mathrm{E}_*(r,\lambda)}{dr}=-i\lambda\mathrm{E}_*(r,\lambda)+2\Gamma_{2r}(0,2r)\,\mathrm{E}(r,\lambda),$$

$$\frac{d\mathrm{E}(r,\lambda)}{dr}=i\lambda\mathrm{E}(r,\lambda)+2F_{2r}(2r,0)\,\mathrm{E}_*(r,\lambda). \qquad (2.21)$$

Положим

$$\Phi(r,\lambda)=\mathrm{E}_*(r,\lambda)+\mathrm{E}_*(r,\lambda)\,K^*+K\mathrm{E}(r,\lambda)+K\mathrm{E}(r,\lambda)\,K^*,$$

где K — изометрический оператор, определяющий ортопроектор P по формуле (1.8). Соотношения (2.20) и (2.21) примут вид

$$\Phi(r,\lambda)=\Phi_0(r,\lambda)+\int_0^{r}K(r,t)\,\Phi_0(t,\lambda)\,dt,$$

$$\frac{d\Phi(r,\lambda)}{dr}\lambda\Phi(r,\lambda)+V(r)\Phi(r,\lambda),$$

где $V(r)=2\Gamma_{2r}(0,2r)K^{*}+2K\Gamma_{2r}(0,2r)$. Теорема доказана.

Замечание: Множество операторов, порожденных дифференциальными выражениями (1.2) с J-эрмитовыми и самосопряженными потенциалами и граничными условиями (1.7) — (1.8), разбивается на классы унитарно эквивалентных операторов, которым соответствует одна и та же спектральная функция $\Sigma_1(\lambda)$.

Между этими классами и эрмитовыми оператор-функциями $\widetilde{H}(r)$, удовлетворяющими условию 3) теоремы, существует взаимнооднозначное соответствие. При этом операторы из класса, соответствующего $\widetilde{H}(r)$, унитарно эквивалентны оператору $i\frac{d}{dr}$, действующему в гильбертовом пространстве, получающемся замыканием множества финитных вектор-функций из $L^2(-\infty,\infty;H_+)$ по норме, порожденной скалярным произведением $(\widetilde{f},\widetilde{g})_1=((1+\widetilde{H})\widetilde{f},\widetilde{g})$.

Ереванский государственный университет

Поступила 18.VI.1976

Ֆ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածությունում կանոնիկ դիֆերենցիալ օպերատորների վերաբերյալ (ամփոփում)

Դիտարկվում է $L^2(0,\infty,H)$ տարածությունում (1.2) դիֆերենցիալ արտահայտությամբ ծնված օպերատոր։ Ապացուցվում է այդպիսի օպերատորների համար սպեկտրալ օպերատոր-ֆունկցիայի գոյությունը և նշվում է անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի $\Sigma(\lambda)$ չնվազող օպերատոր-ֆունկցիան լինի (1.2) արտահայտությամբ ծնված ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիա։

F. E. MELIK-ADAMIAN. *On canonical differentional operators in Hilbert space* (summary)

The paper gives the soulution of direct and inverse problems of spectral analyses for canonical differentional operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, „Наукова Думка", Киев, 1972.
2. *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук.* О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами и разложение по собственным функциям этого уравнения, ДАН СССР, 208, № 6, 1973.
3. *В. М. Адамян.* К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 178, № 1, 1968.
4. *Ф. С. Рофе-Бекетов.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, ДАН СССР, 184, № 5, 1969.

5. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных операторов в банаховом пространстве, Изд. „Наука“, М., 1970.
6. *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, Изд. „Мир“, 1966.
7. *М. Г. Крейн.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летняя математическая школа, „Наукова Думка“, 1965.
8. *Ф. С. Рофе-Бекетов.* Труды V Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям, Баку, 1961.
9. *H. Langer.* Über die Methode der richtenden Funktionale von M. G. Krein, Acta Mathematica Academica Scientiarum, Hungaricae, XXI, 1970.
10. *М. Г. Крейн.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105, № 4, 1955.
11. *Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории матричных акселерант и спектральных матриц-функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм.ССР, XLV, № 4, 1967.
12. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, Изд. „Наука“, М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

Р. Г. АЙРАПЕТЯН

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Смешанная задача для строго гиперболического уравнения произвольного порядка рассмотрена в работе Р. Сакамото [1], где доказана достаточность равномерного условия Лопатинского для корректности смешанной задачи. В работе С. Миятаке [2] показано, что равномерное условие Лопатинского не является необходимым для L_2-корректности (например, ему не удовлетворяет задача Неймана для волнового уравнения), и для строго гиперболических уравнений второго порядка получены необходимые и достаточные условия для L_2-корректности задачи с одним граничным условием.

В предлагаемой работе рассматриваются смешанные задачи для строго гиперболических уравнений второго порядка, а также для уравнений, вырождающихся на начальной гиперплоскости. Для строго гиперболических уравнений получены достаточные условия L_2-корректности, причем в случае, когда на границе задается одно условие, сравнение показывает, что полученные условия совпадают с необходимыми, полученными в работе [2]. Требования на гладкость коэффициентов в данной работе значительно ослаблены, а доказательства намного проще, чем в [2]. Рассматриваются также задачи с двумя граничными условиями. Для уравнений, вырождающихся на начальной гиперплоскости, получены достаточные условия корректности. В доказательстве используется метод обращения мажорантного интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром [3]. При этом, как показано в работе [8], возрастает число условий согласования.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Мы рассматриваем смешанную задачу для гиперболического уравнения в области $V_0^T = (0, \ T) \times R_+^n$:

$$\begin{aligned} &Pu = f \text{ при } T > t > 0,\ x' \in R^{n-1},\ x_n > 0, \\ &u = \varphi_1,\ u_t = \varphi_2 \text{ при } t = 0,\ x_n > 0,\ x' \in R^{n-1}, \\ &B_j\, u = g_j = (j = 1, \cdots, l) \text{ при } T > t > 0,\ x_n = 0, \\ &\qquad x' \in R^{n-1}\ (l = 0,\ 1,\ 2), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $R_+^n = \{x = (x',\ x_n) \in R^n,\ x_n > 0\}$, $P = P(t,\ x,\ D_t,\ D_x)$ — гиперболический оператор второго порядка и $B_j = B_j(t,\ x',\ D_t,\ D_x)$ — граничные операторы.

Введем следующие обозначения:

$$V_{T_0}^T = (T_0,\ T) \times R_+^n,$$

$$S_t = \{(\tau,\ x',\ x_n),\ \tau = t,\ x' \in R^{n-1},\ x_n > 0\},$$

$$\Gamma_t = \{(\tau,\ x',\ x_n),\ 0 < \tau \leqslant t,\ \ x' \in R^{n-1},\ x_n = 0\},\ \Gamma_T = \Gamma,$$

$$t = x_0,\ D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\ ,\ \ \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}\ \ (i = 0,\ 1, \cdots, n).$$

Обозначим через Lip^k $(k \geqslant 1)$ множество всех определенных в V_0^T функций, у которых производные порядка $\leqslant k$ существуют почти всюду и ограничены, а через Lip^0 — совокупность всех измеримых и ограниченных функций. C — класс непрерывных функций.

Введем некоторые линейные пространства.

1. E^k — пространство всех непрерывно дифференцируемых в V_0^T до порядка k функций с компактными носителями, $E_\infty = E$;

2. $H^p\,(V_0^T)$ — пополнение E по норме

$$|f|_p^2 = |f|_{p,\,V_0^T}^2 = \int\limits_{V_0^T} \sum_{i+j+|\nu| \leqslant p} |D_t^i\ D_{x_n}^j\ D_{x'}^\nu\ f|^2\, dV;$$

3. $H^{p,q}\ (V_0^T)$ — пополнение E по норме

$$|f|_{p,q}^2 = \int\limits_{V_0^T} \sum_{i+j+|\nu| \leqslant p}\ \sum_{k+|\mu| \leqslant q} |D_t^i\ D_{x_n}^{j+k}\ D_{x'}^{\nu+\mu}\ f|^2\, dV;$$

4. $H^p\,(S_t)$ — пополнение E по норме

$$|f|_{p,S_t}^2 = \int\limits_{S_t} \sum_{i+|\nu| \leqslant p} |D_{x_n}^i\ D_{x'}^\nu\ f|^2\ \ dS;$$

5. $H^p\,(\Gamma)$ — пополнение E по норме

$$\langle f \rangle_p^2 = \int\limits_{\Gamma} \sum_{i+|\nu| \leqslant p} |D_t^i\ D_{x'}^\nu\ f|^2\ dS;$$

6. $L^p\,(V_0^t)$ — пополнение E по норме

$$\|f\|_p = \int\limits_0^t |f|_{p,S_\tau}\, d\tau.$$

Оператор P запишем в виде

$$Pu = u_{tt} + \sum_{i=1}^n (d_i\, u_{x_i})_t + \sum_{i=1}^n (d_i\ u_{x_i})_{x_i} - \sum_{i,\,j=1}^n (a_{ij}\, u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+ b_0\left(u_t + \sum_{i=1}^n d_i\, u_{x_i}\right) + \sum_{i=1}^n b_i\, u_{x_i} + cu, \qquad (1.2)$$

где коэффициенты главной части оператора: d_n и a_{nn} будем предполагать непрерывными на $\overline{\Gamma}$.

Работа состоит из двух частей. В первой части (§ 2 и § 3) рассматриваются строго гиперболические задачи с нехарактеристической границей. Это означает, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + d_i d_j)\, \xi_i \xi_j \geqslant \text{const} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{1.3}$$

$$a_{nn} \neq 0 \text{ на } \overline{\Gamma}.$$

Рассмотрим два случая в зависимости от знака a_{nn} на границе.

1. $a_{nn} < 0$ на $\overline{\Gamma}$. В этом случае, как видно из (1.3), $d_n \neq 0$ на $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим сначала случай $d_n < 0$. В этом случае число граничных условий $l = 0$. В случае $d_n > 0$ число граничных условий l равно двум, и к уравнению и начальным данным надо прибавить следующие граничные условия:

$$u = g_1,\ u_{x_n} = g_2 \text{ на } \Gamma. \tag{1.4}$$

2. $a_{nn} > 0$ на $\overline{\Gamma}$. В этом случае к уравнению и начальным условиям нужно добавить одно граничное условие, которое может быть нулевого порядка

$$u = g \text{ на } \Gamma \tag{1.5}$$

или первого порядка

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (d_i - \Lambda_{in})\, u_{x_i} - \alpha \left[u_t + \sum_{i=1}^{n} (d_i + \Lambda_{in})\, u_{x_i} \right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i u_{x_i} - \sigma_0 u = g, \tag{1.6}$$

где $\Lambda_{in} = \dfrac{a_{in} + d_i d_n}{\sqrt{a_{nn} + d_n^2}}$ и α, σ_i удовлетворяют следующим условиям:

$$-\frac{\Lambda_{nn} - d_n}{\Lambda_{nn} + d_n} < \alpha \leqslant \frac{\Lambda_{nn} - d_n}{\Lambda_{nn} + d_n}, \tag{1.7}$$

$$a_{nn} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \xi_i \right)^2 \leqslant [\Lambda_{nn} - d_n - \alpha (\Lambda_{nn} + d_n)] \sum_{i,j=1}^{n-1} \Lambda_{ij} \xi_i \xi_j,$$

$$\Lambda_{ij} = a_{ij} + d_i d_j - \Lambda_{in} \Lambda_{jn}\ (i, j = 1, \cdots, n-1).$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие условия согласования:

$$B_m^i (f, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{j=0}^{m} \{B_{m,j}^i (0, x', D_x)\, u_j\} (0, y) = (D_t^{m-1} g^i)(0, y), \tag{C_k}$$

$$m = 1, \cdots, k;\ i = 1, \cdots, l,$$

где $B^l_{m,j}$ определяются так

$$D_t^{m-1} B^l(t, x', D_t, D_x) u = \sum_{0<j<m} B^l_{m,j}(t, x', D_x) D_t^j u$$

и u_{2+l} последовательно определяются из уравнения и начальных данных.

Для поставленных выше задач будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициенты строго гиперболического оператора P принадлежат* Lip^{p+1}, *а коэффициенты a_{nn} и d_n непрерывны. Тогда при выполнении условий согласования* (C_{p-1}), *смешанная задача с граничными условиями, перечисленными выше, при* $f \in H^{p-1}(V_0^T)$, $\varphi_1 \in H^p(S_0)$, $\varphi_2 \in H^{p-1}(S_0)$, $g_l \in H^{p+1-l}(\Gamma)$, $(i = 1, \cdots$ $\cdots, l)$, $p \geqslant 1$, *имеет единственное решение* $u \in H^p(V_0^T)$, *причем имеет место неравенство*

$$|u|_p \leqslant \mathrm{const}\,\Big(|u|_{p, S_0} + |u_t|_{p-1, S_0} + \sum_{l=1}^{l} \langle B_l u\rangle_{p+1-l} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} |D_t^k Pu|_{p-2-k, S_0} + |Pu|_{p-1}\Big) \tag{1.9}$$

для $\forall u \in H^p(V_0^T)$.

Во второй части работы (§ 4) рассматриваются уравнения, вырождающиеся на начальной гиперплоскости. Для этих уравнений будут рассматриваться задачи с однородными начальными и граничными условиями, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $g_l = 0$. Как и в первой части, будем рассматривать два случая.

1. $a_{nn} < 0$ на Γ. Для уравнения (1.2) ставится задача при $d_n > 0$

$$\begin{gathered} Pu = f \text{ в } V_0^T, \\ u = 0,\ u_t = 0 \text{ на } S_0, \\ u = 0,\ u_{\tau_n} = 0 \text{ на } \Gamma. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Для $d_n < 0$ смешанная задача эквивалентна задаче Коши.

2. $a_{nn} > 0$, $d_n \geqslant 0$ на Γ. Для уравнения (1.2) рассматривается задача Дирихле

$$\begin{gathered} Pu = f \text{ в } V_0^T, \\ u = 0,\ u_t = 0 \text{ на } S_0, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma. \end{gathered} \tag{1.11}$$

В данных обозначениях мы предполагаем, что граница записывается как $x_m = 0$.

Для задачи (1.10) имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть коэффициенты оператора принадлежат* Lip^{p+1} *в* $V^T_{T_0}$ *для* $\forall T_0 > 0$, a_{nn}, $d_n \in C$, *и пусть, кроме условий согласования* $(C_{p+\gamma})$, *выполняются следующие условия на коэффициенты:*

$$\left(\sum_{l=1}^{k} b_l \xi_l\right)^2 \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_k'}{\omega_k} \sum_{i,\, j=1}^{k} \Bigg[\mathrm{const}\, \frac{\omega_k'}{\omega_k} (a_{ij} + d_i d_j) - (a_{ij} + d_i d_j)_t -$$

$$- \sum_{l=1}^{k} d_l\, (a_{ij} + d_i\, d_j)_{x_l} + 2 \sum_{l=1}^{k} d^l_{x_l}\, (a_{ij} + d_i\, d_j) \Bigg] \xi_i\, \xi_j, \tag{1.12}$$

$$\left|(a_{kk} + d_k^2)\, \xi_k^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_{ik} + d_i\, d_k)\, \xi_i\, \xi_k\right| \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_k'}{t\omega_k^{1-\delta}} \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2, \tag{1.13}$$

$$|b_k| \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_k'}{t\omega_k^{1-\delta}},\quad |C| \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_1'}{t\omega_1^{1-\delta}}, \tag{1.14}$$

$$|b_0| + \left| \sum_{l=1}^{n} d^l_{x_l} \right| \leqslant \mathrm{const}, \tag{1.15}$$

$$\widetilde{b}_l = d^l_{x_p},\ \widetilde{b}_l = a^{kl}_{x_p} \quad (k = 1, \cdots, n;\ p = 0,\ 1, \cdots, n-1) \tag{1.16}$$

удовлетворяют условиям (1.12), (1.14),

$$f = \frac{\partial f}{\partial t} = \cdots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}} = 0 \ \text{на}\ S_0. \tag{1.17}$$

Здесь $\omega_l = \omega_l(t) > 0$, $\omega_i(t) \downarrow 0$ *при* $t \to 0$ *и*

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_2'}{\omega_2} \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_n'}{\omega_n}.$$

Тогда для $f \in H^{p,\gamma}(V_0^T)$ *существует единственное решение* $u \in H^p(V_0^T)$, *причем имеет место неравенство*

$$|u|_p \leqslant \mathrm{const}\, |Fu|_{p,\gamma} \tag{1.18}$$

для

$$\forall u \in H^p(V_0^T),$$

γ — *постоянная, зависящая от входящих в условия констант.*

Для задачи (1.11) имеет место теорема 2, если условие (1.13) заменить на условие (1.19), а условие (1.14) — на условие (1.20), где упомянутые условия имеют вид:

Условие (1.13) для $k \neq m$,

$$\left| \sum_{j=1}^{k} (a_{jk} + d_k d_l)\, \xi_k\, \xi_j \right| \leqslant \mathrm{const}\, \frac{\omega_k'}{t\omega_k^{1-\delta}} \sum_{l=1}^{k} \xi_l^2 \tag{1.19}$$

для $k = m$.

Условие (1.14) для $k \neq m$,

$$|b_k| \leqslant \text{const для } k = m. \tag{1.20}$$

§ 2. Энергетические неравенства и теоремы существования при $a_{nn} < 0$

Умножим равенство (1.2) на $2\,(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i})$ и проинтегрируем по V_0^t. Интегрируя по частям и используя формулу Грина, получаем следующую лемму:

Лемма 1.

$$2 \int_{V_0^t} \Big(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\Big) Pu\, dV = \int_{S_t} E\,dS - \int_{S_0} E\,dS + \int_{\Gamma_t} A\,dS + \int_{V_0^t} B\,dV,$$

где

$$E = \Big(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\Big)^2 + \sum_{i,\,j=1}^{n} (a_{ij} + d_i d_j)\, u_{x_i} u_{x_j}, \tag{2.1}$$

$$A = -d_n \left[\Big(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\Big)^2 - \sum_{i,\,j=1}^{n} (a_{ij} + d_i d_j)\, u_{x_i} u_{x_j}\right] +$$
$$+ 2\Big(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\Big) \sum_{j=1}^{n} (a_{jn} + d_j d_n)\, u_{x_j}, \tag{2.2}$$

$$B = \Big(\sum_{j=1}^{n} d^j_{x_j} + 2b_0\Big)\Big(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\Big)^2 -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} d^k_{x_k} \sum_{i,\,j=1}^{n} (a_{ij} + d_i d_j)\, u_{x_i} u_{x_j} - \sum_{i,\,j=1}^{n} (a_{ij} + d_i d_j)_t\, u_{x_i} u_{x_j} -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{i,\,j=1}^{n} (a_{ij} + d_i d_j)_{x_k} u_{x_i} u_{x_j} + 2 \sum_{k,\,i,\,j=1}^{n} d^i_{x_k} (a_{kj} + d_k d_j) \Big| u_{x_i} u_{x_j} +$$
$$+ 2\Big(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\Big) Lu, \tag{2.3}$$

а L — дифференциальный оператор первого порядка.

Лемма 2.

1) *Если $d_n < 0$, то $A \geqslant 0$;*

2) *Если $d_n > 0$, то из условий на границе следует, что*

$$A \geqslant -\text{const}\,(< g_1 >_1 + < g_2 >_0).$$

Доказательство.

1°) Так как $a_{ij} + d_i d_j$ — неотрицательная матрица, то для нее имеет место неравенство

$$\left[\sum_{i,\,j=1}^{n-1} (a_{in} + d_i d_n)\, \xi_i\right]^2 \leqslant (a_{nn} + d_n^2) \sum_{i,\,j=1}^{n-1} (a_{ij} + d_i d_j)\, \xi_i \xi_j).$$

Отсюда легко получить, что A — неотрицательная, если $d_n < 0$, $a_{nn} < 0$.

2) Очевидно следует из вида A.

Используя леммы 1, 2 и начальные условия, получаем интегральную оценку для E

$$\int\limits_{S_t} EdS \leqslant \text{const}\left\{ \int\limits_{V_0^t} EdV + |u|^2_{1, S_0} + |u_t|^2_{0, S_0} + \right.$$

$$\left. + < u >^2_1 + < u_{x_n} >^2_0 \right\} + 2 \int\limits_{V_0^t} \left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i} \right) PudV.$$

Оценим последний член интегрального неравенства

$$2 \int\limits_{V_0^t} \left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i} \right) PudV \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant \tau < t} \int\limits_{S_\tau} EdS \cdot \|Pu\|_0.$$

Вводя обозначения

$$\rho(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{0 < \tau < t} \int\limits_{S_\tau} EdS,$$

$$\sigma = \text{const}\ (|u|^2_{1, S_0} + |u_t|^2_{0, S_0} + < u >^2_1 + < u_{x_n} >^2_0 + \|Pu\|^2_0),$$

получаем интегральное неравенство

$$\rho(t) \leqslant \text{const} \int\limits_0^t \rho(s)\, ds + \sigma.$$

Обращая это неравенство с помощью леммы Гроноулла и используя положительность матрицы $a_{ij} + d_i d_j$, приходим к оценке

$$|u|_{1, S_t} \leqslant \text{const}\ \{ |u|_{1, S_0} + |u_t|_{0, S_0} + < u >_1 + < u_{x_n} >_0 + |Pu|_0 \}. \tag{2.4}$$

Интегрируя эту оценку от 0 до T, получаем (1.9) для $p = 1$. Продифференцируем уравнение (1.2) по x_k ($k = 0, \cdots, n-1$), умножим его на $u_{tx_k} + \sum\limits_{i=1}^{n} d_i u_{x_i x_k}$ и просуммируем по k. Оценим граничные интегралы с помощью граничных условий, продифференцированных по x_k ($k = 0, 1, \cdots, n-1$). Из уравнения найдем значение u_{tt} на S_0. Получим оценки для $u_{x_i x_j}$ ($i = 0, \cdots, n$; $j = 0, \cdots, n-1$). Из уравнения, используя $a_{nn} \neq 0$, получаем оценку для $u_{x_n x_n}$. Таким образом, имеем оценку (1.9) для $p = 2$. Через $p - 2$ шага получаем оценку (1.9).

Для доказательства существования рассмотрим сопряженную задачу. Сделав замену переменкой $t' = T - t$, получаем прямую задачу, где знаки коэффициентов d_i заменены на противоположные. Существование решения следует из условий (C_{p-1}) и энергетической оценки для сопряженной задачи.

§ 3. Энергетические оценки и теоремы существования при $a_{nn} > 0$

Рассмотрим вспомогательный оператор первого порядка

$$Q = 2v_+ + 2\gamma v_- - 2\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i u_{x_i},$$

где σ_i на Γ совпадают с σ_i из условия (1.6) и доопределены при $x_n > 0$,

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{nn} - d_n}{\Lambda_{nn} + d_n} + \frac{\Lambda_{nn} + d_n}{\Lambda_{nn} - d_n}\sigma^2\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial l_+} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} (d_i + \Lambda_{in}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial l_-} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} (d_i - \Lambda_{in}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$v_+ = \frac{\partial u}{\partial l_-}, \quad v_- = \frac{\partial u}{\partial l_+}.$$

Умножив уравнение (2.1) на Q, проинтегрировав по V_0^t и применив формулу Грина, получаем следующую лемму.

Лемма 3.

$$\int\limits_{V_0^t} Qu \cdot Pu\, dV = \int\limits_{S_t} E\, dS - \int\limits_{S_0} E\, dS + \int\limits_{\Gamma_t} A\, dS + \int\limits_{V_0^t} B\, dV,$$

где

$$E = v_+^2 + \gamma v_-^2 + (1+\gamma)\sum_{i,j=1}^{n-1} \Lambda_{ij} u_{x_i} u_{x_j} - (v_+ + v_-)\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i u_{x_i}, \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} A = -(d_n + \Lambda_{nn}) v_+^2 + \gamma(\Lambda_{nn} - d_n) v_-^2 + [(\Lambda_{nn} - d_n) - \\ - \gamma(\Lambda_{nn} + d_n)] \sum_{i,j=1}^{n-1} \Lambda_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + (\Lambda_{nn} + d_n) v_+ \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i u_{x_i} - \\ - (\Lambda_{nn} - d_n) v_- \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i u_{x_i}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$B \leqslant \mathrm{const}\, E. \tag{3.3}$$

Для получения энергетического неравенства нужно оценить A с помощью граничного условия. Из условий (1.6), (1.7), (1.8) получаем

$$A \geqslant -\text{const}\,(<g>_1^2 + |u|_1^2),$$

$$E \geqslant \text{const}\left(v_+^2 + v_-^2 + \sum_{l=1}^{n-1} u_{x_l}^2\right).$$

Отсюда, используя начальные условия, получаем интегральную оценку для E. Обращая это неравенство аналогично тому, как это было сделано в § 2, получаем энергетическую оценку (1.9).

Для доказательства существования решения рассмотрим сопряженную задачу. Найдем граничное условие, сопряженное к условию (1.16)

$$\int_\Gamma (w\,Pu - uPw)\,dS = \int_\Gamma \Big(d_n w_t u - d_n u_t w - \sum_{l=1}^{n} a_{ln} w_{x_l} u +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} a_{ln} u_{x_l} w + b_n uw \Big)\,dS = 0.$$

Отсюда, используя (1.6), получаем

$$\int_\Gamma \cdots = \int_\Gamma \Big(d_n w_t u - \sum_{l=1}^{n} a_{ln} w_{x_l} u - d_n u w_t + \sum_{l=1}^{n} a_{ln} u_{x_l} w + b_n uw -$$

$$- \frac{a_{nn}}{\Lambda_{nn} - d_n - \alpha(\Lambda_{nn} + d_n)} \Big(\alpha v_- - v_+ + \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_l u_{x_l} + \sigma_0 u \Big) w\,dS =$$

$$= \int_\Gamma \Big\{ 2d_n w_t - 2\sum_{l=1}^{n} a_{ln} w_{x_l} + \frac{a_{nn}}{\Lambda_{nn} - d_n - \alpha(\Lambda_{nn} + d_n)} \Big[\alpha \frac{\partial w}{\partial l_+} -$$

$$- \frac{\partial w}{\partial l_-} + \sum_{l=1}^{n-1} \sigma_l w_{x_l} - \sigma_0 w \Big] + b_n w \Big\}\, u\,dS. \tag{3.4}$$

Отсюда получаем, что сопряженное граничное условие запишется так:

$$\frac{\partial w}{\partial l_+} = \alpha \frac{(\Lambda_{nn} + d_n)^2}{(\Lambda_{nn} - d_n)^2} \frac{\partial w}{\partial l_-} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{a_{nn}}{(\Lambda_{nn} - d_n)^2} \sigma_l u_{x_l} - \frac{a_{nn}}{(\Lambda_{nn} - d_n)^2} (\sigma_0 u + g). \tag{3.5}$$

Для сопряженной задачи лемма 3 примет вид

$$\int_{V_t^T} PuQu\,dV = -\int_{S_t} E\,dS + \int_{S_T} E\,dS + \int_\Gamma A\,dS + \int_{V_t^T} B\,dV,$$

где E, A, B определяются выражениями (3.1), (3.2), (3.3). В этом случае интеграл по границе должен быть неположителен с точностью до младших членов при выполнении условия (3.5), что и следует из условий (1.7), (1.8).

Отсюда получается энергетическая оценка для сопряженной задачи, из которой следует существование решения для прямой задачи.

Для задачи с граничным условием (1.5) выбираем

$$Q = 2v_+ + 2\frac{\Lambda_{nn} - d_n}{\Lambda_{nn} + d_n}\, v_-.$$

§ 4. Уравнения, вырождающиеся на начальной гиперплоскости

Докажем сначала теорему 2 для задачи (1.10). Для этого рассмотрим вспомогательные операторы

$$P_k u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\right) -$$

$$- \sum_{i,\ j=1}^{k} [(a_{ij} + d_i d_j)\, u_{x_i}]_{x_j} + \left(b_0 + \sum_{i=1}^{n} d^i_{x_i}\right)\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i\, u_{x_i}\right) + \tag{4.1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} b_i u_{x_i} + \chi(k)\, cu \qquad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

$$\chi(k) = 0 \text{ при } k = 0,$$

$$\chi(k) = 1 \text{ при } k = 1, \cdots, n,$$

$$P_n = P,$$

$$P_0 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\right) +$$

$$+ b_0\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d^i_{x_i}\right)\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\right). \tag{4.2}$$

Лемма 4. *Пусть коэффициенты оператора P_0 удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда задача* (1.10) *для оператора P_0 при $f \in H^p(V_0^T)$, $p \geqslant 2$ имеет единственное решение $u \in H^p(V_0^T)$, причем имеет место неравенство*

$$|u|_{p,\ s_1} \leqslant \text{const}\ |Pu|_p \tag{4.3}$$

для $\forall u \in H^p(V_0^T)$.

Для доказательства умножим обе части (4.2) на

$$2\left(u_t + \sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\right).$$

Получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{S_t}\left(u_t+\sum_{l=1}^{n} d_l u_{x_l}\right)^2 dS \leqslant \text{const}\ \|P_0 u\|_0^2. \qquad (4.4)$$

Умножив интеграл в левой части на u, получаем оценку (4.3) для $p=0$. Оценку для $p>0$ получаем так же как в § 2. Существование следует из оценки для сопряженной задачи.

Теперь покажем, что если теорема 2 имеет место для P_{k-1}, то она имеет место и для P_k.

Умножим обе части уравнения

$$P_k u = f \qquad (4.5)$$

на $2\left(u_t+\sum\limits_{l=1}^{n} d_l u_{x_l}\right)$ и воспользуемся леммой 1. Из начальных и граничных условий видно, что $A=0$, $\int\limits_{S_0} E dS = 0$. Из условий (1.12), (1.15) имеем

$$\int\limits_{V_0^t}\left(B+\text{const}\,\frac{\omega_k'}{\omega_k}\,E\right)dV \geqslant 0.$$

Таким образом, получаем интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром. Обращая это неравенство для оператора P_k, взяв в качестве редукционного оператора P_{k-1}, как это сделано в работе [4], получаем оценку (1.18). Доказательство существования проводится так же как в работе [4] с помощью операторов осреднения.

Для задачи (1.11) доказательство теоремы 2 проводится аналогично, с той лишь разницей, что берутся другие операторы (для простоты принято $\Gamma=\{x_n=0\}$)

$$P_k u = \left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(u_t+\sum_{i=1}^{n} d_i u_{x_i}\right)-(a_{nn}u_{x_n})_{x_n}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{k}\left[(a_{ij}+d_i d_j)u_{x_i}\right]_{x_j}+\left(b_0+\sum_{i=1}^{n} d_{x_i}^i\right)\left(u_t+\sum_{l=1}^{n} d_l u_{x_l}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{k} b_l u_{x_l}+\chi(k)\,cu \quad \text{для } k=0,\ 1,\cdots,\ n-1,$$

где

$$\chi(k)=0, \text{ если } k=0$$

$$\chi(k)=1, \text{ если } k=1,\cdots,\ n-1.$$

Замечание. Для задачи (1.11) при $a_{nn}>0$, $d_n\leqslant 0$ теорема 2 доказывается аналогично, если в условии (1.12) знаки при производных матрицы $a_{ij}+d_i d_j$ заменить на противоположные. Для доказательства энергетической оценки (1.18) уравнение (1.2) надо умножить на функцию ω, являющуюся решением задачи

$$\omega_t + \sum_{i=1}^{n} d_i \omega_{x_i} = u \text{ в } V_0^t,$$

$$\omega = 0, \ \omega_t = 0 \text{ на } S_0, \qquad (4.6)$$

$$\omega = 0 \qquad \text{на } \Gamma.$$

В заключение рассмотрим слабо гиперболическое уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f, \qquad (4.7)$$

где $a_{nn} \in C$, $a_{nn} > 0$ на Γ, но $a_{nn} \to 0$ на Γ при $t \to 0$. Для этого уравнения рассмотрим задачу (1.11).

Умножим уравнение (4.7) на $2u_t$ и проинтегрируем по частям. Получим, аналогично доказательству теоремы 2, интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром. Аналогично работе [4], обратим это неравенство с помощью редукционного уравнения

$$u_{tt} = f(t, x', x_n) - f(t, x', 0)\, e^{-x_n}. \qquad (4.8)$$

Затем продифференцируем уравнение (4.7) по x_k $(k = 0, \cdots, n-1)$, умножим на $2u_{tx_k}$ и просуммируем по k. Из уравнения найдем оценку для $u_{x_n x_n}$. Продолжая дифференцировать уравнение, получим оценку (4.15). Доказав существование решения, аналогично работе [4], получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения* (4.7) *принадлежат* Lip^{p+1} *в* $V_{T_0}^T$ *для* $\forall T_0 > 0$, $a_{nn} \in C$, *и пусть, кроме условий согласования, выполняются следующие условия на коэффициенты*:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \text{const } \omega \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad (4.9)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \xi_i\right)^2 < M \frac{\omega'}{\omega} \left[M \frac{\omega'}{\omega} a_{ij} - a_t^{ij} \right] \xi_i \xi_j, \qquad (4.10)$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \right| \leqslant \text{const } \frac{\omega'}{t\omega^{1-\delta}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad (4.11)$$

$$|b_i| + |c| \leqslant \text{const } \frac{\omega'}{t\omega^{1-\delta}}, \ i = 1, \cdots, n, \qquad (4.12)$$

$\bar{b}_i = a_{x_k}^{ij}$ $(k = 0, \cdots, n-1;\ j = 1, \cdots, n-1)$ *удовлетворяют условиям* (4.10), (4.11)

$$\int_{\Gamma} \sum_{l+|\nu| \leqslant p-1} |D_t^l D_{x'}^{\nu} f|^2 \, \omega^{-(M+\varepsilon)} \, dS < \infty, \qquad (4.13)$$

$$f=\frac{\partial f}{\partial t}=\cdots=\frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}=0 \text{ на } S_0. \tag{4.14}$$

Тогда для $f\in H^{p,\gamma}(V_0^T)$, *удовлетворяющего условиям* (4.13), (4.14), *существует единственное решение, причем имеет место оценка*

$$\sum_{i+j+|\nu|<p} \omega^i |D_t^i D_{x'}^{\nu} D_{x_n}^j u|_{0,S_t} \leqslant \text{const}\,(|f|_{p,\gamma}+$$

$$+\sum_{i+|\nu|<p-1} \int\limits_{\Gamma} \omega^{-(M+\varepsilon)} (D_t^i D_{x'}^{\nu} f)^2\, dS, \tag{4.15}$$

$$\omega=\omega(t)>0 \text{ при } t>0,\ \omega(t)\downarrow 0 \text{ при } t\to 0,$$

ε, δ — *произвольные сколь угодно малые положительные числа*, γ — *постоянная, зависящая от* M *и* δ.

Задача (1.11) для слабо гиперболического уравнения (4.7) рассматривалась в работах [5], [6], [7]. В работе О. А. Олейник [5] рассматривается уравнение, вырождающееся внутри области и на ее границе, но на коэффициенты уравнения накладываются сильные ограничения. В работе Г. М. Фатеевой [6] изучаются линейные и квазилинейные уравнения, определенным образом вырождающиеся внутри области, но строго гиперболические на границе. В работе М. Л. Краснова [7], как два разных случая, рассматриваются вырождения на начальной гиперплоскости и на границе. В случае вырождения на начальной гиперплоскости со скоростью t^{α} ($\alpha>0$) в [7] получены достаточные условия на коэффициенты и правую часть уравнения f корректности задачи. При этом на f накладывается ограничение

$$\int\limits_{V_0^T} \frac{f^2}{t^{\alpha-1+\delta_0}}\, dV<\infty, \tag{4.16}$$

где δ_0 — положительная постоянная.

Выше, в теореме 3, рассматривается случай вырождения с произвольной скоростью ω (например, $\omega=e^{-\frac{1}{t}}$). В частном случае $\omega=t^{\alpha}$, выбирая $M=1+\frac{\delta_0}{\alpha}$, получаем результат работы [7] для уравнения, вырождающегося на начальной гиперплоскости, причем условие (4.16) заменено следующим:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f^2}{t^{\alpha+\delta_0+\varepsilon\alpha}}\, dS<\infty. \tag{4.17}$$

Условие (4.17) слабее чем (4.16), так как стремление $f\to 0$ при $t\to 0$ требуется только на границе. Кроме того, в теореме 3 несколько ослаблены условия на b_i и c.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23.I.1976

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Խառը խնդիրը երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածում քննարկվում է խառը խնդիրը երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար։ Խիստ և թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար ստացված են բավարար պայմաններ լուծման գոյության, միակության և կայունության համար։

R. G. HAIRAPETIAN. *On the mixed problem for hyperbolic equations of second order* (summary)

In the paper the mixed problem for hyperbolic equations of second order is considered sufficient conditions for its correctness in terms of the boundary operators are obtained. For weakly hyperbolic equations with initial conditions given on the hyperplane of degeneration the correctness is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Sakamoto*. Mixed problems for hyperbolic equations, J. Math. Kyoto Univ., 10, № 2, 1970, 349—373.
2. *S. Miyatake*. Mixed problems for hyperbolic equations of second order, J. Math. Kyoto Univ., 13—3, 1973, 435—487.
3. *А. Б. Нерсисян*. О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 2, 1968, 79—100.
4. *А. Б. Нерсисян, Г. Р. Оганесян*. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 149—165.
5. *О. А. Олейник*. Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе, ДАН СССР, 169, № 3, 1966, 525—528.
6. *Г. М. Фатеева*. Задача Коши и краевая задача для линейных и квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 172, № 6, 1967, 1278—1281.
7. *М. Л. Краснов*. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка, Матем. сб., 49 (91), 1959, 29—84.
8. *К. А. Ягджян*. Смешанная задача для некоторых классов несимметризуемых гиперболических систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 5, 1976, 424—431.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

Г. А. БАРСЕГЯН

ДЕФЕКТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СТРУКТУРА ПОВЕРХНОСТЕЙ НАЛОЖЕНИЯ

Предполагаем известными основные положения теории распределения мероморфных функций и теории поверхностей наложения Л. Альфорса и пользуемся стандартными обозначениями (см. [1]).

Из первой основной теоремы Р. Неванлинны вытекает следующее качественное следствие: если мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция $w(z)$ (с неограниченной характеристикой) относительно „редко" принимает в круге $|z| \leqslant r < R$ значение a, то на окружности $|z| = r$ найдутся участки, на которых $|w(z) - a|$ „мало". Иначе некоторые участки границы ∂F_r области $F_r = \{w(z): |z| \leqslant r\}$ (F_r — часть римановой поверхности функции $w^{(-1)}(z)$, на которую отображается круг $|z| \leqslant r$ при отображении функцией $w(z)$) „близко" расположены от a.

Введем величину $\nu(r, a)$, которая характеризует структуру этих участков ∂F_r. Рассмотрим часть границы ∂F_r, лежащую над кругом $|w - a| < 1$ при $a \neq \infty$ и над $|w| > 1$ при $a = \infty$. Это множество является объединением некоторой совокупности дуг γ_a. При этом обозначим через $2\pi\nu_{\gamma_a}$ приращение на γ_a величины $\arg \dfrac{1}{w(z) - a}$ при $a \neq \infty$ и величины $\arg w(z)$ при $a = \infty$.

Положим

$$\nu(r, a) = \nu(r, a, w) = \sum_{\gamma_a} [\nu_{\gamma_a}],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Величина $\nu(r, a)$ определяется структурой границы ∂F_r в окрестности точки a и сама характеризует эту структуру, показывая суммарное количество целочисленных оборотов дуг γ_a вокруг точки a.

Аналогичную величину $\nu(F, a)$ можно определить и в случае конечной, односвязной поверхности наложения F над римановой сферой с гладкой границей ∂F. В самом деле, пусть F^* — поверхность, полученная из такой поверхности F стереографическим отображением на плоскость. Если граница ∂F^* поверхности F^* задается уравнением

$$w = w(z), \ |z| = 1,$$

то величина $\nu(F, a)$ определяется как выше, аналогично величине $\nu(r, a)$ при $r = 1$.

Пользуясь введенными величинами, сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема I. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция $w(z) \neq \mathrm{const}$. Тогда для каждого $a \in \overline{\mathbf{C}}$ и r, $0 < r < R$ имеет место равенство*

$$\nu(r, a) + n(r, a) = A(r) + hL(r),$$

где $|h| < h(a) = \mathrm{const}$.

Теорема II. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция $w(z) \neq \mathrm{const}$ и $a_i \in \overline{\mathbf{C}}$, $(i = 1, 2, \cdots, q)$ таковы, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Тогда при $0 < r < R$ имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} \nu(r, a_i) + \sum_{i=1}^{q} n_1(r, a_i) \leqslant A(r) + hL(r),$$

где

$$|h| < h(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \mathrm{const}.$$

Теорема I′. *Пусть F — конечная, односвязная, с гладкой границей поверхность наложения над римановой сферой. Тогда для каждого $a \in \overline{\mathbf{C}}$ выполняется равенство*

$$\nu(F, a) + n(F, a) = A(F) + hL(F),$$

где $|h| < h(a) = \mathrm{const}$, $n(F, a)$ — *число точек поверхности, стереографически проектирующихся в точку a, $\pi A(F)$ — площадь поверхности F в сферической метрике, $L(F)$ — длина границы ∂F в сферической метрике.*

Теорема II′. *Пусть F — конечная, односвязная, с гладкой границей поверхность наложения над римановой сферой и $a_i \in \overline{\mathbf{C}}$, $(i = 1, 2, \cdots, q)$ таковы, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q} \nu(F, a_i) + \sum_{i=1}^{q} n_1(F, a_i) \leqslant 2A(F) + hL(F),$$

где $|h| < h(a) = \mathrm{const}$, $n_1(F, a)$ — *сумма порядков алгебраических точек ветвления поверхности F, стереографически проектирующихся в точку a.*

Теоремы I, II, I′, II′ можно рассматривать как аналоги I и II основных теорем Р. Неванлинны и Л. Альфорса. Для регулярно исчерпываемых поверхностей F и соответствующих им мероморфных функций $w(z)$ можно определить по аналогии понятия дефекта

$$\overline{\delta}(a, F) = \varliminf_{k \to \infty} \frac{\nu(F_k, a)}{A(F_k)}, \quad \overline{\delta}(a, w) = \varliminf_{r \to R} \frac{\nu(r, a)}{A(r)},$$

где F_k — последовательность поверхностей наложения, регулярно исчерпывающая полную поверхность, и записать соотношение дефектов, вытекающее из теорем II и II′

$$\sum_{(i)} \bar{\delta}(a_i, F) \leqslant 2, \ \sum_{(i)} \bar{\delta}(a_i, w) \leqslant 2.$$

Для широкого класса регулярно исчерпываемых поверхностей и соответствующих им однозначных функций теоремы I, II, I′, II′, есть определенные высказывания о строении границы $F_r(F)$ в окрестности a-точек. Именно, если значение a относительно „редко" принимается в $|z| \leqslant r$ (на F), то близость некоторых участков границы $F_r(F)$ к a осуществляется определенным образом; большое число граничных дуг навивается вокруг точки a.

Отметим, что в определении величины $\nu(r, a)$, являющейся аналогом неванлинновской функции приближения $m(r, a)$, нет упоминания о близости граничных дуг ∂F_r к a, хотя качественно такой вывод в определении содержится: „большое" число оборотов при „малой" длине ∂F_r (условие регулярной исчерпаемости) означает, что дуги ∂F_r должны сжиматься вокруг точки a.

Теоремы I′ и II′ содержат в качестве следствия некоторые высказывания из дифференциальной геометрии в целом.

Рассмотрим гладкую поверхность M в R^3, сферическое изображение K (см. [2]) которой, отображенное с помощью преобразования подобия на риманову сферу—F, есть поверхность наложения, удовлетворяющая условиям теоремы I′ (рассмотрение поверхностей с такими ограничениями, по-видимому, впервые встречается у Л. Альфорса в связи с появлением его теории поверхностей наложения).

a-точкой поверхности M назовем точку, образ которой на F при стереографическом отображении последнего на плоскость, проектируется в точку a. Очевидно все нормали a-точек поверхности M одинаково направлены (a-направлены). Дугам γ_a поверхности F соответствуют некоторые дуги $\gamma_a(M) \subset \partial M$.

Величина $\nu(F, a)$ интерпретируется на поверхности как количество „оборотов" нормалей к поверхности, в точках дуг $\gamma_a(M)$, вокруг a-направления. Учитывая это геометрическое содержание величины $\nu(F, a)$, обозначим ее в терминах поверхности через $\nu(M, a)$. Заметив, что $S(M)$ — площадь сферического образа поверхности M, равна $4\pi A(F)$, $L(M)$ — длина сферического образа поверхности M, равна $4\pi L(F)$, число a-точек поверхности M: $n(M, a) = n(F, a)$, получим аналоги теорем I′ и II′, в которых все величины наглядно описываются в терминах поверхности M.

Теорема 1*. *Пусть M—гладкая поверхность в R^3, сферический образ которой есть поверхность наложения, удовлетворяющая условиям теоремы I′. Тогда для любого a-направления имеем*

$$\nu(M, a) + n(M, a) = \frac{S(M)}{4\pi} + hL(M),$$

где $|h| < h(a) = \text{const}.$

Теорема II*. *Пусть M — гладкая поверхность в R^3, удовлетворяющая условиям теоремы* I*.

Тогда для любого конечного числа q попарно различных a_i $(i = 1, 2, \cdots, q)$ направлений имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{q} \nu(M, a_i) \leqslant \frac{S(M)}{2\pi} + hL(M),$$

где $|h| < h(a_1, a_2, \cdots, a_q) = \text{const}$.

Если теперь предположить, что полную поверхность M можно исчерпать последовательностью подповерхностей M_k так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \frac{L(M_k)}{S(M_k)} = 0$$

(условие аналогичное условию регулярной исчерпываемости поверхностей наложения), то по аналогии можно ввести понятие дефекта a-направления

$$\bar{\delta}(M, a) = \lim_{k\to\infty} \frac{\nu(M_k, a)}{S(M_k)}$$

и соотношения дефектов

$$\sum_{(i)} \bar{\delta}(M, a_i) \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Все эти условия выполняются, например, когда третья квадратичная форма поверхности M удовлетворяет сформулированным в [1] на стр. 363 условиям.

Доказательство теоремы I следует из двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < R \leqslant \infty$ функция $w(z) \not\equiv \text{const}$. Тогда для всех $a \in \overline{\mathbf{C}}$ и $r \in (0, R)$ имеем*

$$n(r, a) - A(r) = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln|w - a|\, d\varphi + hL(r) \tag{1}$$

при $a \neq \infty$,

$$n(r, \infty) - A(r) = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2(r, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln|w|\, d\varphi + hL(r), \tag{2}$$

где

$$\Delta_1(r, a) = \{z: |z| = r,\ |w(z) - a| < 1\},\ \Delta_2(r, a) = \{z: |z| = r,\ |w(z) - a| \geqslant 1\},$$

$$|h| < h(a) = \text{const}.$$

Доказательство. При доказательстве (1) исходим из равенства

$$n(r, a) - A(r) = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Имеем

$$\frac{r}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln |w-a|\, d\varphi -$$

$$- \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{1+|w|^2}\, d\varphi + \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Оценим второй интеграл в правой части

$$\left| \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \sqrt{1+|w|^2}\, d\varphi \right| \leqslant \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{|w|\,|w'|}{1+|w|^2}\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+|a|}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r,\, a)} \frac{|w'|}{1+|w|^2}\, r\, d\varphi \leqslant h(a)\, L(r). \tag{3}$$

Для доказательства (1) нужно показать, что

$$\left| \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2(r,\, a)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi \right| \leqslant h(a)\, L(r). \tag{4}$$

Имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{[(w-a)(\overline{w-a})]'_r}{|w-a|^2} - \frac{(w\bar{w})'_r}{1+|w|^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{(w\bar{w})'_r\,(1+|w|^2-|w-a|^2)}{|w-a|^2\,(1+|w|^2)} - \frac{w'_r\,\bar{a} + \bar{w}'_r\,a}{|w-a|^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\,|a|\,|w|^2 + (1+|a|^2)\,|w| + |a|}{|w-a|^2} \cdot \frac{|w'|}{1+|w|^2}.$$

При $|w-a| > 1$ последнее выражение меньше, чем $h(a) \dfrac{|w'|}{1+|w|^2}$ (где $h(a)$ ограничено), откуда следует (4).

Для $a = \infty$ имеем

$$n(r, a) - A(r) = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi = \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2(r,\, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{|w|}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_1(r,\, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{1+|w^2|}}\, d\varphi + \frac{r}{2\pi} \int\limits_{\Delta_2(r,\, 0)} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{|w|}{\sqrt{1+|w|^2}}\, d\varphi.$$

Оценивая последние два интеграла аналогично (3) и (4), получим (2).

Лемма 2. *При условиях леммы 2 имеет место равенство*

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\,a)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=-\nu(r,\,a)+hL(r), \tag{5}$$

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_2(r,\,0)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w|\,d\varphi=\nu(r,\,a)+hL(r), \tag{6}$$

где $|h|\leqslant h(a)=\mathrm{const}$.

Доказательство. Разобьем часть границы F_r, лежащую над $|w-a|<1$, на дуги следующих видов.

1. Дуги γ_a^0 — это связные части дуги γ_a, на которых приращение $\arg(w(z)-a)=2\pi[\nu_{\gamma_a}]$, $|[\nu_{\gamma_a}]|\geqslant 1$, притом для $\forall\gamma\subset\gamma_a\setminus\gamma_a^0$, $|\Delta_\gamma\arg(w(z)-a)|<2\pi$.

2. Дуги γ_a', $\gamma_a'\subset\{\partial F_r\cap\{|w-a|\leqslant 1\}\}\setminus\{\cup\gamma_a^0\}$, и имеющие длину $\geqslant\frac{1}{2}$.

3. Дуги γ_a'', $\gamma_a''\subset\{\partial F_r\cap\{|w-a|\leqslant 1\}\}\setminus\{\cup\gamma_a^0\}$, и имеющие длину $\leqslant\frac{1}{2}$.

Это разбиение является полным и можно записать

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\,a)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{r}{2\pi}\left|\int\limits_{(\Delta\gamma_a^0)}+\int\limits_{(\Delta\gamma_a')}+\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')}\left(\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi\right)\right|, \tag{7}$$

где (Δx) — подмножества $\Delta_1(r,\,a)$, образы которых лежат на x. Для первого интеграла в правой части по определению имеем

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a^0)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a^0)}d\arg(w-a)=-\nu(r,\,a). \tag{8}$$

Каждая из дуг вида γ_a' может иметь вклад в $\int d\arg(w-a)$ не более чем 2π, в противном случае дуга γ_a' содержала бы в себе дуги вида γ_a^0. Обозначим через l_a' (l_a'') длину некоторой дуги вида γ_a' (γ_a''), и учитывая, что $l_a'\geqslant\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a')}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a')}d\arg(w-a)\leqslant 2\sum_{(\gamma_a')}l_a'. \tag{9}$$

Если $\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')} d\arg(w-a)=2\pi\alpha$, то $l_a''\geqslant\pi\alpha$ (дуги γ_a'' лежат целиком в области $1/2\leqslant|w-a|\leqslant1$ и видны из точки под углом не меньшим $2\pi\alpha$). Отсюда

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\Delta\gamma_a'')}d\arg(w-a)\leqslant\sum_{(\gamma_a'')}\alpha\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{(\gamma_a'')}l_a''. \tag{10}$$

Из (7), (8), (9), (10) получим

$$\frac{r}{2\pi}\int\limits_{\Delta_1(r,\,a)}\frac{\partial}{\partial r}\ln|w-a|\,d\varphi=-\nu(r,\,a)+hl,$$

где $|h|$ ограничена, l — общая длина дуг вида γ_a' и γ_a''. Учитывая, что $l<h(a)\,L(r)$, где $h(a)=\text{const}$, получим доказательство (5). Доказательство (6) аналогично.

Теорема I следует из лемм 1 и 2.

Выведем теперь из теоремы I теорему I′. Пусть F — конечная, односвязная, с гладким краем поверхность наложения. По основной теореме конформных отображений поверхность F^* есть образ круга $|z|\leqslant1$ при отображении некоторой мероморфной функцией $f(z)$. При этом выполняются равенства

$$n(1,\,a,\,f)=n(F,\,a),\quad\nu(1,\,a,\,f)=\nu(F,\,a),$$

$$A(1,\,f)=A(F),\quad L(1,\,f)=L(F).$$

Применив теорему I к функции $f(z)$ с $r=1$, получим теорему I′. Теоремы II и II′ вытекают из теорем I и I′ и второй основной теоремы Л. Альфорса.

Замечание 1. Из (1) вытекает интерпретация принципа аргумента

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}d\arg(w-a)=n(r,\,a)-n(r,\,\infty)=\nu(r,\,\infty)-\nu(r,\,a)+hL(r).$$

С другой стороны, в терминах $\nu(r,\,a)$ уже сам принцип аргумента, по существу, является аналогом первой основной теоремы, поскольку последнее равенство можно переписать так

$$n(r,\,a)+\nu(r,\,a)=n(r,\,\infty)+\nu(r,\,\infty)+hL(r).$$

Замечание 2. Лемма 1 представляет, по-видимому, самостоятельный интерес. Например, продифференцировав тождество Картана ([1], стр. 179, формула 15) по $d\ln t$ и, применив лемму 1, сразу получаем вывод аналога тождества Картана (не зависящий от теории поверхностей наложения) в виде

$$A(r)=\int_{0}^{2\pi} n(r, e^{i\theta})\,d\theta + hL(r).$$

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН Арм.ССР Н. У. Аракеляну и А. А. Гольдбергу за ценные обсуждения работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.V.1976

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ. Դեֆեկտային արժեքները և վերադրման մակերևույթների կառուցվածքը (*ամփոփում*)

$|z|<R\leqslant\infty$ շրջանում մերոմորֆ $w(z)$ ֆունկցիայի համար մտցվում է և ուսումնասիրվում $\nu(r, a)$ մի մեծություն, որը սահմանվում է $w(z)$ ֆունկցիայով արտապատկերելուց $|z|\leqslant r<R$ շրջանի եզրի պատկերի կառուցվածքի տերմիններով։ Ստացված են մերոմորֆ ֆունկցիաների բաշխման տեսության հիմնական թեորեմների անալոգները, որոնց մեջ $\nu(r, a)$ մեծությունը կատարում է նույն դերը, ինչպես $m(r, a)$ մեծությունը Ռ. Նևանլիննայի տեսության մեջ։ Բերվում են կիրառություններ վերադրման մակերևույթների և դիֆերենցիալ երկրաչափության մեջ։

G. A. BARSEGHIAN. *Defficent values and the structure of covering surfaces* (summary)

For a function $w(z)$ meromorphic in $|z|<R\leqslant\infty$ we introduce and investigate a certain quantity $\nu(r, a)$ defined in terms of the boundary structure of the image of $|z|\leqslant r<R$ under the mapping $w(z)$.

The analogues of the basic theorems of the distribution theory of meromorphic functions are obtained in which $\nu(r, a)$ plays the same role as the function $m(r, a)$ in the theory of R. Nevanlinna. Applications to the covering surfaces and differential geometry are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Изд. ОНТИ, 1941.
2. *П. К. Рашевский.* Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М., 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

А. Э. ДЖРБАШЯН

О НУЛЯХ ПОДКЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

1°. Говорят, что аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу D, если она имеет конечный интеграл Дирихле

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f'(z)|^2 \, r dr d\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n < \infty \quad (z = re^{i\vartheta}).$$

В статье Г. Шапиро и А. Шилдса [1] были доказаны следующие теоремы о нулях функций из класса D.

Теорема A. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(|z_k| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \log \frac{1}{1-|z_k|^2} \right\}^{-1} < \infty. \tag{1}$$

Тогда существует функция $f \in D$, $f(z) \not\equiv 0$, *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *и с нормой*

$$\|f\|^2 \le \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z_k|^2}{\log(1-|z_k|^2)} \right)^{-1}.$$

Что этот результат существенно улучшить нельзя, показывает вторая теорема.

Теорема B. *Пусть* $h(t)$ — *произвольная неотрицательная и непрерывная функция на* $[0,1]$, *причем* $h(0) = 0$ *и* $h(t) > 0$ *при* $0 < t \le 1$. *Тогда существует последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(|z_k| < 1)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \log \frac{1}{1-|z_k|^2} \right\}^{-1} h(1-|z_k|) < \infty \tag{2}$$

и являющаяся множеством единственности для класса D, *т. е. для любой функции* $f \in D$ *из* $f(z_k) = 0$ $(1 \le k < \infty)$ *следует, что* $f(z) \equiv 0$ $(|z| < 1)$.

Тем самым в указанной выше статье были существенно улучшены результаты, полученные ранее Л. Карлесоном в [2].

В той же работе [1] были указаны некоторые обобщения этих теорем.

В предположении, что последовательность положительных чисел $\{c_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$c_n^2 \leqslant c_{n-1} \cdot c_{n+1} \quad (n \geqslant 2) \tag{3}$$

вводилась функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{4}$$

а затем класс D_φ, аналитических в круге $|z| < 1$ функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

посредством условия

$$L(f) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{c_n} < \infty. \tag{5}$$

Притом в частном случае, когда $c_n = \dfrac{1}{n} \left(\varphi = \log \dfrac{1}{1-z} \right)$, соответствующий класс $D_\varphi \equiv D$.

Для классов D_φ в статье был сформулирован аналог теоремы А с заменой условия (1) на условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\varphi(|z_k|^2)\}^{-1} < \infty, \tag{1'}$$

пря этом авторами отмечалось лишь, что доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы А, опираясь на условие (3) и некоторые известные результаты Харди и Шура.

Однако доказательство обратной теоремы В было не полным, поскольку оно не проходило в общем случае и, поэтому авторами было дано указание лишь для частного случая $\varphi(z) = (1-z)^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, что, кстати, не содержало в себе даже тоoремы В

$$\left(\text{где } \varphi(z) = \log \frac{1}{1-z} \right).$$

В дальнейшем В. С. Захарян в работе [3] ввел классы $D\{\omega\}$, ассоциированные с функциями $\omega(x)$ из множества Ω_0 (определение см. ниже) при помощи условия

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 \omega(x)\, dx \right) |f'(re^{i\theta})|^2 r\,dr\,d\theta < \infty \tag{6}$$

и доказал для них аналоги обеих теорем A и B. Доказательство первой теоремы не приводилось, поскольку оно содержалось в его совместной с М. М. Джрбашяном работе [4] (лемма 1.9). Доказанная же им вторая теорема, в частности, содержала в себе вышеуказанный случай $\varphi(z)=(1-z)^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$.

Из определения пространств $D\{\omega\}$ видно, что все они содержат класс Дирихле D и $D\{\omega\}\subset D_\varphi$ (для некоторого φ).

Таким образом, вне рассмотрения оставались пространства типа D_φ, содержащиеся в D.

Цель настоящей заметки—покрыть этот пробел, а также дать более обозримую формулировку соответствующих общих теорем A и B.

Именно, с каждой функцией $\omega(x)\in\Omega_0$ мы ассоциируем пространство $D^*\{\omega\}$ посредством условия: $f\in D^*\{\omega\}$, если

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\omega(r)|f'(re^{i\theta})|^2\,rdrd\theta<\infty,$$

очевидно совпадающее с классом D при $\omega(x)\equiv 1$.

Для этих классов доказываются аналог теоремы A (теоремы 1 и 2) и ее полное обращение (теорема 3), что в специальном случае $\omega(x)\equiv 1$ полностью содержит в себе приведенные выше теоремы A и B Шапиро и Шилдса.

2°. Мы будем говорить, что определенная и непрерывная на отрезке $[0,1)$ функция $\omega(x)$ принадлежит множеству Ω_0, если

1) $\omega(0)=1$ и $\omega(x)$ монотонно возрастает,

2) $\displaystyle\int_0^1\omega(x)\,dx<\infty$.

Если, кроме того,

3) $\omega(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема и

$$\overline{\lim_{x\to 1}}\frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)}<1,$$

то мы отнесем ее к множеству Ω_0^*.

Известно (см. [5], теорема 8), что: *если $\omega(x)\in\Omega_0$, то для последовательности*

$$\Delta_0=1,\ \Delta_n=n\int_0^1 t^{n-1}\omega(t)\,dt,\ n=1,2,\cdots$$

проблема моментов

$$\mu_n\equiv\frac{1}{\Delta_n}=\int_0^1 t^n\,d\mu(t)$$

имеет решение $\mu(t)$ в классе неубывающих функций ограниченной вариации.

Отсюда сразу вытекает, что последовательность $\{\mu_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию типа (3):

$$\mu_n^2 \leqslant \mu_{n-1} \cdot \mu_{n+1}, \quad n=1, 2, \cdots.$$

Определим новую последовательность

$$\mu_n^* = \frac{1}{n} \mu_n = \frac{1}{n} \int_0^1 t^n \, d\mu(t), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

для которой, очевидно,

$$(\mu_n^*)^2 \leqslant \mu_{n-1}^* \cdot \mu_{n+1}^*, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

Наряду с известной функцией (см. [5])

$$C(z) \equiv C(z; \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$$

определим новую функцию

$$C^*(z) \equiv C^*(z; \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* z^n.$$

Как известно (см. [4], лемма 1.3), если $\omega(x) \in \Omega_0^*$, то существуют две положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \left\{ \int_r^1 \omega(x)\, dx \right\}^{-1} \leqslant C(r) \leqslant c_2 \left\{ \int_r^1 \omega(x)\, dx \right\}^{-1} \quad (0 \leqslant r < 1). \tag{7}$$

Но

$$C^*(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^* r^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^2 \int_0^1 t^{n-1} \omega(t)\, dt \right\}^{-1} r^n,$$

и поэтому

$$C^{*\prime}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \int_0^1 t^{n-1} \omega(t)\, dt \right\}^{-1} r^{n-1} = -1 + \frac{1}{r} C(r).$$

Отсюда, интегрированием вдоль любого отрезка $\left[\frac{1}{2}, r\right]$ $\left(\frac{1}{2} < r < 1\right)$, получим

$$C^*(r) = c_r + \int_{1/2}^{r} \frac{C(r)}{r}\, dr,$$

где $-\frac{1}{2} \leqslant c_r \leqslant 0$.

Наконец, воспользуясь оценками (7), легко приходим к неравенствам

$$-c_3+\int\limits_0^r \frac{dt}{\int\limits_t^1 \omega(x)\,dx} \leqslant C^*(r) \leqslant -c_4+\int\limits_0^r \frac{dt}{\int\limits_t^1 \omega(x)\,dx} \quad (0\leqslant r<1),$$

где c_3 и c_4 — некоторые положительные константы.

Таким образом, для $\omega(x)\in\Omega_0^*$ утверждения

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{\int\limits_t^1 \omega(x)\,dx}=\infty \tag{8}$$

и

$$\lim_{r\to1} C^*(r;\omega)=\infty \tag{8'}$$

равносильны.

Именно такие функции $\omega(x)$ из класса Ω_0^* нас будут интересовать, поскольку, как будет видно ниже, определяемые нами пространства $D^*\{\omega\}$ только в этом случае содержательны.

Теперь дадим определение классов $D^*\{\omega\}$.

Мы скажем, что функция $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу $D^*\{\omega\}$, если

$$\|f\|^2\equiv\|f\|^2_{\{\omega\}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n^*)^{-1}|a_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 n^2\int\limits_0^1 t^{n-1}\omega(t)\,dt<\infty.$$

Лемма 1. *Функция $f(z)$ принадлежит $D^*\{\omega\}$ тогда и только тогда, когда конечен интеграл*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\omega(r)\,|f'(re^{i\theta})|^2\,r\,dr\,d\theta. \tag{9}$$

Доказательство несложно и опирается на следующее утверждение, которое понадобится нам и в дальнейшем (см. [4], лемма 2.1):

Если $\omega(x)\in\Omega_0$, то существуют две положительные константы $A\equiv A(\alpha,\beta)$ и $B\equiv B(\alpha,\beta)$ такие, что для любого r из промежутка $[1,\infty)$ имеют место неравенства

$$A\int\limits_{1-\frac{1}{r}}^1 \omega(x)\,dx\leqslant\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{\alpha r+\beta}\,dx\leqslant B\int\limits_{1-\frac{1}{r}}^1\omega(x)\,dx \tag{10}$$

для всех $1\leqslant\alpha<\infty$ и $-1\leqslant\beta<\infty$.

Проследив доказательство этих неравенств, легко видеть, что для всех $1 \leqslant \alpha < \infty$, $-1 \leqslant \beta < \infty$

$$0 < A(\alpha, \beta) \leqslant 2, \; 1 \leqslant B(\alpha, \beta) \leqslant 2,$$

а также, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} A(\alpha, \beta) = 0.$$

Это замечание понадобится в лемме 2.

Теперь вычисление интеграла (9) дает

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \omega(r) \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{i(n-1)\theta} r^{n-1} \right|^2 r dr d\theta = \pi \int_0^1 \omega(r) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 r^{2n-1} \right) dr =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \int_0^1 \omega(r) r^{2n-1} dr,$$

а последний ряд, согласно (10), сходится лишь вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \int_0^1 \omega(x) x^{n-1} dx.$$

Скалярное произведение двух функций $f, g \in D^* \{\omega\}$ определим следующим образом:

$$(f, g) \equiv (f, g)_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \overline{l_n}}{\overset{*}{\mu}_n},$$

если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n z^n$.

Функция

$$K_\zeta(z) = C^*(z\overline{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{*}{\mu}_n (z\overline{\zeta})^n \quad (|\zeta| < 1)$$

является воспроизводящим ядром для класса $D^* \{\omega\}$, так как, очевидно

$$(f, K_\zeta)_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} (\overset{*}{\mu}_n)^{-1} a_n \left(\overline{\overset{*}{\mu}_n \overline{\zeta}^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n = f(\zeta).$$

3°. Приведем две теоремы. Первая из них является обобщением теоремы А на случай пространств $D^* \{\omega\}$ и дает достаточное условие на последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ отличных друг от друга точек единичного круга, для того, чтобы она была множеством нулей для некоторой нетривиальной функции $f\in D^*\{\omega\}$. Вторая же теорема содержит построение такой функции с минимальной нормой. Оказывается, что ее можно получить как предел некоторой последовательности определителей.

Доказательства этих теорем нами не приводится, поскольку они фактически содержатся в статье [1]. Однако приводимые нами формулировки этих теорем имеют, по нашему мнению, то существенное преимущество, что как определение введенных нами классов $D^*\{\omega\}$, так и соответствующие теоремы сформулированы исключительно в терминах функции $\omega(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(x)\in\Omega_0$ *и последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(|z_k|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{C^*(|z_k|;\,\omega)}<\infty,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^{|z_k|}\frac{dt}{\int\limits_t^1\omega(x)\,dx}\right\}^{-1}<\infty. \tag{11}$$

Тогда существует функция $f\in D^*\{\omega\}$, $f(z)\not\equiv 0$, *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$ *и с нормой*

$$\|f\|^2\leqslant\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\mu_1^*|z_k|}{C^*(|z_k|)}\right)^{-1}.$$

Сделаем следующее замечание. Если для функции $\omega(x)$ не выполняется условие (8), то, как показывает теорема 1, пространства $D^*\{\omega\}$ могут содержать лишь такие нетривиальные функции, которые имеют не более конечного числа нулей.

Теорема 2. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ — *последовательность отличных друг от друга и от нуля точек единичного круга. Пусть, далее, существует функция* $f\in D^*\{\omega\}$, $\omega\in\Omega_0$, *имеющая эти точки своими нулями. Тогда функции*

$$f_n(z)=\frac{\begin{vmatrix} z & z_1 & \cdots & z_n\\ K_1(z) & (K_1,\,K_1) & \cdots & (K_1,\,K_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K_n(z) & (K_n,\,K_1) & \cdots & (K_n,\,K_n)\end{vmatrix}}{d_n^2\,G(K_1,\cdots,K_n)},\quad n=1,\,2,\cdots,$$

принадлежат классу $D^*\{\omega\}$ *и обладают следующими свойствами:*

(a) $f_n(z_j)=(f_n,\,K_j)=0\ \ (1\leqslant j\leqslant n)$,

(b) $(f_n, z) = 1$, *то есть* $f_n'(0) = \mu_1^*$,

(c) f_n *имеет минимальную норму среди всех функций из* $D^*\{\omega\}$, *удовлетворяющих* (a) *и* (b) *и* $\|f_n\| = \frac{1}{d_n}$,

(d) f_n *стремятся по норме пространства* $D^*\{\omega\}$ *к единственной функции* $z \in D^*\{\omega\}$, *имеющей нули* $\{z_k\}_1^\infty$, $(f, z) = 1$ *и обладающей минимальной нормой. Здесь* $K_j(z) \equiv K_{z_j}(z)$, $G(K_1, \cdots, K_n)$ — *детерминант Грамма функций* $K_1, K_2, \cdots, K_n$ *и* d_n — *расстояние от точки* z *до подпространства в* $D^*\{\omega\}$, *образованного функциями* $K_1(z), \cdots, K_n(z)$.

4°. В этом пункте мы установим полное обращение теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $h(t)$ — *произвольная неотрицательная и непрерывная функция на* $[0, 1]$, *причем* $h(0) = 0$ *и* $h(t) > 0$ *при* $0 < t \leqslant 1$. *Тогда существует последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(|z_k| < 1)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{|z_k|} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\, dx} \right\}^{-1} h(1 - |z_k|) < \infty \tag{12}$$

и являющаяся множеством единственности для класса $D^*\{\omega\}$, $\omega \in \Omega_0^*$.

Доказательство будет основано на следующих двух леммах.

Лемма 2. *Допустим, что точки* $z_1, \cdots, z_n$ *равномерно распределены на окружности* $|z| = r < 1$ *и* $z_1 = r$. *Тогда, если* $f \in D^*\{\omega\}$, $f(z_j) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *и* $(f, z) = 1$, *то*

$$\|f\|^2 \geqslant cn \left\{ \int_0^{r^{2n}} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\, dx} \right\}^{-1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$H(z) = \frac{1}{n}\left(\frac{K_1(z)}{\bar{z}_1} + \cdots + \frac{K_n(z)}{\bar{z}_n} \right),$$

где

$$K_j(z) = K_{z_j}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^* (z \bar{z}_j)^m \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Теперь ясно, что $(f, H) = 0$ и

$$\mu_1^* = (f, \mu_1^* z) = (f, \mu_1^* z - H) \leqslant \|f\| \cdot \|H - \mu_1^* z\|.$$

Имеем

$$H(z) - \mu_1^*(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j(z)}{\bar{z}_j} - \mu_1^* z =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\bar{z}_j}\sum_{m=1}^{\infty} z^m \bar{z}_j^m \mu_m^* - \mu_1^* z = \sum_{m=0}^{\infty} z^{nm+1} r^{nm} \quad \mu_{nm+1}^* - \mu_1^* z =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} z^{nm+1} r^{nm} \mu_{nm+1}^* = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{nm+1} r^{nm}}{(nm+1)^2 \int_0^1 t^{nm}\omega(t)\,dt}.$$

Здесь мы воспользовались следующим свойством корней из единицы

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_j^k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \pmod n \\ nr^n, & k = 0 \pmod n \end{cases}, \qquad \text{при } |z_j| = r.$$

Теперь мы получаем

$$\|H - \mu_1^* z\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2nm}}{(nm+1)^2\int_0^1 t^{nm}\omega(t)\,dt} \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2nm}}{(nm+1)^2\int\limits_{1-\frac{1}{nm}}^{1}\omega(t)\,dt} \leqslant \frac{c}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2nm}}{m^2\int\limits_{1-\frac{1}{m}}^{1}\omega(t)\,dt} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(r^{2n})^m}{m^2\int_0^1 t^{m-1}\omega(t)\,dt} = \frac{c}{n^2}C^*(r^{2n}) \leqslant \frac{c}{n^2}\int_0^{r^{2n}}\frac{dt}{\int_0^1 \omega(x)\,dx}.$$

Здесь c, вообще говоря, различные постоянные, зависящие только от n, притом, как видно из замечания к неравенству (10), $c \equiv c(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\|f\|^2 \geqslant (\mu_1^*)^2 c(n)^{-1} n^2 \left\{\int_0^{r^{2n}}\frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx}\right\}^{-1} \geqslant c_0 n \left\{\int_0^{r^{2n}}\frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx}\right\}^{-1},$$

так как уже $c(n)^{-1} \to \infty$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $n_k \to \infty$, $\delta_k \to 0$ и $n_k\delta_k \to 0$. Обозначим*

$$\psi(k) = \frac{1}{n_k}\int_0^{1-\delta_k}\frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \equiv \frac{1}{n_k\varphi(1-\delta_k)}.$$

Тогда, если $\psi(k) \to 0$, то и

$$\frac{1}{n_k \varphi\left[(1-\delta_k)^{n_k}\right]} \to 0.$$

Доказательство очевидно, так как

$$\frac{1}{\varphi(1-\delta_k)} = \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \geqslant \int_0^{(1-\delta_k)^{n_k}} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} = \frac{1}{\varphi\left[(1-\delta_k)^{n_k}\right]}.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Для этого нужно построить две последовательности: $n_k \to \infty$ и $r_k = (1-\delta_k) \to 1$ так, чтобы удовлетворялись следующие три условия:

(I) $\psi(k) \to 0$;

(II) $n_k \delta_k \to 0$;

(III) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h(\delta_k)[\psi(k)]^{-1} < \infty$.

Обозначим как и прежде

$$1-r_k = \delta_k, \quad \psi(k) = [n_k \varphi(r_k)]^{-1}.$$

Положив далее $g(y) = h(e^{-y})$, по условию теоремы будем иметь, что $g(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Выберем теперь последовательность $\{y_k\}_1^\infty$ так, чтобы

$$y_1 < y_2 < \cdots, \quad y_k \geqslant k \text{ и } g(y) \leqslant 2^{-k} \text{ при } y \geqslant y_k.$$

После этого положим $n_k = k y_k$ и $\psi(k) = \dfrac{1}{k}$, т. е.

$$\frac{1}{n_k}\int_0^{r_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} = \frac{1}{k}, \quad \text{или} \quad \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} = y_k.$$

Тогда ясно, что условие (I) выполняется. Далее, при $k \to \infty$

$$n_k \delta_k = k y_k \delta_k \leqslant y_k^2 \delta_k =$$

$$= \delta_k \left\{ \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{\int_t^1 \omega(x)\,dx} \right\}^2 \leqslant \delta_k \left\{ \int_0^{1-\delta_k} \frac{dt}{1-t} \right\}^{-1} = \delta_k \log^2 \frac{1}{\delta_k} \to 0.$$

Таким образом, выполняется и условие (II). Наконец, замечая, что $\log\dfrac{1}{\delta_k} \geqslant y_k$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(\delta_k)}{\psi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} k h(\delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k g\left(\log\frac{1}{\delta_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty.$$

Теперь образуем последовательность $\{z_m\}_1^\infty$ следующим образом: на окружностях $|z| = r_k$ берем n_k точек так, чтобы они были равномерно распределены на этих окружностях и одна из этих z_m была равна r_k. Тогда условие (III) означает, что для $\{z_m\}_1^\infty$ выполняется условие (12) теоремы.

Если бы существовала нетривиальная функция $f \in D^* \{\omega\}$, равная нулю во всех точках последовательности $\{z_m\}_1^\infty$, то, по лемме 2, мы имели бы, что

$$\|f\|_\omega^2 \geqslant c_0 \, n_k \left\{ \int\limits_0^{r_k^{2n_k}} \frac{dt}{\int\limits_t^1 \omega(x)\, dx} \right\}^{-1}$$

для всех $k = 1, 2, \cdots$.

Однако из условий (I) и (II) и леммы 3 следует, что правая часть этого неравенства при $k \to \infty$ стремится к бесконечности. Это противоречие доказывает теорему.

В заключение сделаем следующее замечание. В случае большего роста функций $\omega(x)$, когда интеграл (8) сходится (например, при $\omega(x) = (1-x)^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ соответствующие пространства $D^* \{\omega\}$ лежат в пространстве A аналитических в круге $|z| < 1$ функций с абсолютно сходящимся рядом Тейлора.

Действительно, если $\omega(x) = \dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, то из

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in D^* \{\omega\}$$

вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \int\limits_0^1 x^{n-1} \frac{dx}{(1-x)^\alpha} < \infty.$$

Но

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1-x)^\alpha}\, dx = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = O(n^{\alpha-1})$$

при $n \to \infty$ и, следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{1+\alpha} < \infty.$$

Отсюда будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\, n^{\frac{1+\alpha}{2}}}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

при $0<\alpha<1$, а это означает, что имеет место включение $D^*\{\omega\}\subset A$, и поэтому не существует нетривиальной функции $f(z)\in D^*\{\omega\}$ с бесконечным числом нулей произвольного расположения в единичном круге.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.IX.1976

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների ենթադասերի զրոների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են Դիրիխլեի վերջավոր ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների D *դասի* $D^*\{\omega\}$ *ենթադասերը։ Նրանց համար ապացուցվում են Հ. Շապիրոյի և Ա. Շիլդսի ([1]) թեորեմների անալոգները այդ դասերի ֆունկցիաների զրոների մասին։*

A. E. DJRBASHIAN *On the zeros of functions belonging to subclasses of analitic functions with finite Dirichlet integral* (summary)

In the paper the subclasses $D^*\{\omega\}$ of the class D of functions with finite Dirichlet integral are considered. The analogues of theorems of H. Shapiro and A. Shields ([1]) for the zeros of functions from that classes are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Zeit., 80, № 3, 1962, 217—229.
2. *L. Carleson.* On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals, Math. Zeit., 56, № 3, 1952, 289—295.
3. *В. С. Захарян.* Граничные свойства и единственность функций с ограниченным интегралом типа Дирихле, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", V, № 6, 1970, 534—543.
4. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
5. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 1, 1977 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН, Б. А. СААКЯН

ОБЩИЕ КЛАССЫ ФОРМУЛ ТИПА ТЕЙЛОРА-МАКЛОРЕНА

§ 1. Введение

В работе авторов [1], в частности, был открыт класс формул типа Тейлора-Маклорена, ассоциированных с дифференциальными операторами дробного порядка и с функциями типа Миттаг-Леффлера.

В настоящей статье, опираясь на результаты упомянутой работы, и в общих чертах вновь следуя развитому там методу, мы получаем существенное обобщение указанной формулы.

Но прежде чем перейти к изложению статьи, приведем некоторые литературные указания.

а) Следуя статье [1], предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $\{\lambda_j\}_0^\infty$ — произвольная *неубывающая* последовательность неотрицательных чисел, с которой можно ассоциировать последовательность функций

$$\varepsilon_k^{(\rho)}(x;\lambda_0,\cdots,\lambda_k)\equiv\varepsilon_k^{(\rho)}(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon;\,\beta)}\frac{e^{x\zeta^\rho}\,\zeta^{\rho-1}}{\prod\limits_{j=0}^{k}(\zeta+\lambda_j)}\,d\zeta,\ x\in(0,+\infty)\,(0\leqslant k<+\infty),\tag{1.1}$$

где $\rho\geqslant 1$ — произвольный параметр, а $\gamma(\varepsilon,\beta)$ — надлежащий контур в плоскости ζ, состоящий из лучей $\arg\zeta=\pm\beta$ $(\varepsilon\leqslant|\zeta|<\infty)$ и дуги — $-\beta\leqslant\arg\zeta\leqslant\beta$ окружности $|\zeta|=r$, соединяющей концы $\varepsilon e^{\pm i\beta}$ этих лучей, причем

$$\frac{\pi}{2\rho}<\beta\leqslant\min\left\{\pi,\ \frac{\pi}{\rho}\right\}.$$

Если для любого k $(0\leqslant k<+\infty)$ обозначим через $s_k\geqslant 1$ кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_0^k$ нашей последовательности $\{\lambda_j\}_0^\infty$, то функции $\varepsilon_k^{(\rho)}(x)$ представимы также в виде

$$\varepsilon_k^{(\rho)}(x)=\sum_{j=0}^{k}c_j^{(k)}E_\rho^{(s_j-1)}\left(-\lambda_j x^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}\right)x^{\frac{s_j}{\rho}-1},\tag{1.2}$$

где коэффициенты $\{c_j^{(k)}\}_0^k$ определяются из разложения на простые дроби

$$R_k(\zeta) \equiv \prod_{j=0}^{k} (\zeta+\lambda_j)^{-1} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\Gamma(s_j)\, c_j^{(k)}}{(\zeta+\lambda_j)^{s_j}}, \tag{1.3}$$

а

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{k}{\rho}\right)}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ при любом значении параметра μ.

Было установлено (см. [1], лемму 2.2 и ее следствие), что при условии $\rho \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\rho} \leqslant \mu < +\infty$

$$E_\rho(-x;\mu) > 0, \; x \in [0, +\infty). \tag{1.4}$$

Далее простыми рассуждениями было установлено (лемма 2.6), что функции $\varepsilon_k^{(\rho)}(x)$ допускают также представление в виде многократного интеграла

$$\varepsilon_k^{(\rho)}(x) = \int_0^x e_\rho(x-t_1;\lambda_0)\,dt_1 \int_0^{t_1} e_\rho(t_1-t_2;\lambda_1)\,dt_2 \times \cdots$$
$$\cdots \times \int_0^{t_{k-2}} e_\rho(t_{k-2}-t_{k-1};\lambda_{k-2})\,dt_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} e_\rho(t_{k-1}-t_k;\lambda_{k-1})\, e_\rho(t_k;\lambda_k)\,dt_k, \tag{1.5}$$

где

$$e_\rho(x;\lambda) \equiv E_\rho\left(-\lambda x^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho}\right) x^{\frac{1}{\rho}-1}.$$

Из представления (1.5) и (1.4) следовало важное свойство последовательности функций $\{\varepsilon_k^{(\rho)}(x)\}_0^\infty$ для любого $\rho \geqslant 1$

$$\varepsilon_k^{(\rho)}(x) > 0, \; x \in (0, +\infty) \; (0 \leqslant k < +\infty). \tag{1.6}$$

Наконец, полагая, что $D^{\frac{1}{\rho}}$ — дифференциальный оператор дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля (см. § 1 в данной статье), введем в рассмотрение операторы

$$L^{\frac{k}{\rho}}(D) \equiv \prod_{j=0}^{k-1} \left(D^{\frac{1}{\rho}} + \lambda_j\right), \quad \tilde{L}^{\frac{k}{\rho}}(D) = D^{-\alpha} L^{\frac{k}{\rho}}(D), \tag{1.7}$$

где $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\rho}$.

Теперь обозначим через $C_{n+1}^{(\rho)}[0, l]$ $(0 < l < +\infty)$ множества функций $f(x)$, подчиненных условиям

1) Функции

$$\tilde{D}^{\frac{k}{\rho}} f(x) = D^{-\alpha} \{ D^{\frac{k}{\rho}} f(x) \} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

непрерывны на $[0, l]$;

2) Функция $D^{\frac{n+1}{\rho}} f(x)$ непрерывна на $(0, l)$ и принадлежит классу $L(0, l)$.

Одним из основных результатов работы (1) авторов было следующее утверждение (теорема 4.1):

Если $f(x) \in C_{n+1}^{(\rho)}[0, l]$, *то при любом* $\rho \geqslant 1$ *и* $n > \rho - 1$ *справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{L}^{\frac{k}{\rho}} f(0)\, \varepsilon_k^{(\rho)}(x) + R_n(x; f), \quad x \in [0, l), \tag{1.8}$$

где

$$R_n(x; f) = \int_0^x \varepsilon_n^{(\rho)}(x - \tau)\, L^{\frac{n+1}{\rho}} \{ f(\tau) \}\, d\tau, \quad x \in [0, l). \tag{1.9}$$

(б) О функциях типа $\varepsilon_n^{(\rho)}(x)$.

В случае $\rho = 1$ и попарно различных чисел λ_k из (1.1) и (1.2), (1.3) будем иметь соответственно:

$$\varepsilon_k^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{e^{x\zeta}}{\prod\limits_{j=0}^{k} (\zeta + \lambda_j)}\, d\zeta, \tag{1.1'}$$

$$\varepsilon_k^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j^{(k)} e^{-\lambda_j x}, \quad c_j^{(k)} = \prod_{\substack{l=0 \\ (l \neq j)}}^{k} (\lambda_l - \lambda_j)^{-1}. \tag{1.2'}$$

Функции типа $\varepsilon_k^{(1)}(x)$, вернее типа $\varepsilon_k^{(1)}\left(\log \frac{1}{t}\right)$, для $t \in (0, 1]$ их представление (1.2′), а также их свойство (1.6), по-видимому, впервые были введены в анализ Хаусдорфом в 1921 году в его знаменитом исследовании [2], посвященном, в частности, обобщению классической проблемы моментов и полиномов С. Н. Бернштейна для системы степеней $\{t^{\lambda_j}\}_0^\infty$.

В том же случае $\rho = 1$, но при $\lambda_j = \omega j$ $(\omega > 0,\ j \geqslant 0)$ функции $\varepsilon_k^{(1)}(x)$ были введены в известной монографии Нерлунда [3] 1926 года. Здесь было отмечено интегральное представление

$$\varepsilon_k^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{x\zeta}}{\zeta\prod\limits_{j=1}^{k}(\zeta+\omega j)}\,d\zeta \quad (k=0,1,2,\cdots), \tag{1.10}$$

а также явное выражение для

$$\varepsilon_k^{(1)}(x) = \frac{\omega^{-k}}{k!}\,(1-e^{-\omega x})^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.11}$$

Более того, формула (1.8)—(1.9) в случае $\rho=1$, $\lambda_j=\omega j$ в несколько скрытой форме по существу содержится на стр. 213 гл. VI его монографии [3].

Далее, в цикле своих совместных работ (1948—1952 гг.), подытоженных в монографии [4], Хиршман и Уиддер построили теорию обращения преобразований типа свертки

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1.12}$$

В главе II книги [4], имеющей лишь предварительный характер и служащей своего рода *моделью* для основного ее содержания, излагается теория обращения в случае так называемых конечных ядер вида

$$G_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{x\zeta}}{\zeta\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\frac{\zeta}{a_j}\right)}\,d\zeta, \tag{1.13}$$

где $a_j \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ — любые вещественные числа. Здесь устанавливается:

Если функция $\varphi(t)$ непрерывна и суммируема на $(-\infty, +\infty)$, то обращение преобразования (1.12) с ядром $G_k(x)$ можно осуществить посредством дифференциального оператора

$$\mathbf{L}_k(D) = D\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{D}{a_j}\right), \tag{1.14}$$

с помощью формулы

$$\varphi(x) = \mathbf{L}_k f(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.15}$$

Таким образом, функции $\varepsilon_k^{(1)}(x)$ и операторы $L^k(D) \equiv L^{\frac{k}{1}}(D)$ лежат в истоках теории преобразований типа свертки, поскольку, очевидно, что положив $\rho=1$, $\lambda_0=0$, $\lambda_j=-a_j$, будем иметь

$$\varepsilon_k^{(1)}(x) \equiv \left(\prod_{j=1}^{k}\lambda_j^{-1}\right) G_k(x), \tag{1.16}$$

$$\overset{\frac{k}{1}}{L}(D) \equiv L^k(D) = D\prod_{j=1}^{k-1}(D+\lambda_j) = \left(\prod_{j=1}^{k-1}\lambda_j^{-1}\right)\mathbf{L}_{k-1}(D). \tag{1.17}$$

После указанных исследований, где впервые были введены и нашли свои важные применения функции $\varepsilon_n^{(1)}(x)$ и операторы $L^n(D)$, они фигурируют в работе [5] при выводе одного обобщения формулы Тейлора-Маклорена, эквивалентного полученной впоследствии формуле (1.8)—(1.9) работы [1] авторов в частном случае, когда $\rho = 1$.

Указанная формула работы [5] была получена путем простой модификации способа интегрирования по частям, посредством которой в анализе обычно устанавливается сама формула Тейлора-Маклорена.

При этом, взамен операторов $L^k(D)$ в этой работе по существу пишется оператор

$$e^{\lambda_k x} L^k(D) f(x) \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

под названием „обобщенной производной порядка k“ функции $f(x)$.

Наконец, в работе [1] авторов была установлена формула (1.8)—(1.9) уже при любом $\rho \geqslant 1$ и для любой неубывающей последовательности $\{\lambda_j\}_0^\infty$. При этом, как функции $\varepsilon_k^{(\rho)}(x)$, так и операторы $\overset{\frac{k}{\rho}}{L}(D)$, здесь были естественным образом получены применением другого известного из анализа способа установления формулы Тейлора-Маклорена. Это—способ последовательного решения задач типа Коши, но уже для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$D^{\frac{1}{\rho}} y(x) + \lambda y(x) = \varphi(x), \ x \in (0, l), \tag{1.18}$$

$$D^{-\alpha} y(x)|_{x=0} = 0,$$

решением которого служит функция

$$y(x) = \int_0^x e_\rho(x-t; \lambda)\, \varphi(t)\, dt, \ x \in [0, l).$$

Этого же способа мы будем придерживаться и в настоящей работе.

§ 2. Предварительные сведения и леммы

1°. (a) Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(0, l)(0 < l < +\infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка α $(0 < \alpha < +\infty)$ в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x = 0$ принято называть функцию

$$_0D^{-\alpha} f(x) \equiv D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \ x \in (0, l). \tag{2.1}$$

В каждой точке Лебега функции $f(x)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D^{-\alpha} f(x) = f(x),$$

$D^{-\alpha} f(x)$ при $\alpha = 0$ определяется следующим образом:

$$D^{-0} f(x) \equiv f(x), \quad x \in (0, l). \tag{2.2}$$

Пусть $f(x) \in L(0, l)$ и при данном α $(0 < \alpha < 1)$ функция $D^{-(1-\alpha)} f(x)$ почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно суммируемую).

Тогда функция

$$_0D^{\alpha} f(x) \equiv D^{\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-(1-\alpha)} f(x)\} \tag{2.3}$$

называется производной порядка α от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$.

Ввиду (1.2) и (1.3) почти для всех $x \in (0, l)$ при $\alpha = 1$ имеем:

$$D^1 f(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x), \quad D^0 f(x) = f(x). \tag{2.3'}$$

При произвольном $\alpha > 0$ оператор $D^{\alpha} f$ определяется следующим образом:

Пусть α $(0 < \alpha < +\infty)$ задано и целое число $p \geqslant 1$ определяется из условия $p - 1 < \alpha \leqslant p$.

Пусть, далее, $f(x) \in L(0, l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \{D^{-(p-\alpha)} f(x)\}$$

почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно суммируемую на $(0, l)$). Тогда функция

$$D^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^p}{dx^p} \{D^{-(p-\alpha)} f(x)\} \tag{2.4}$$

называется производной порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$.

Наконец, отметим, что (см. [6], гл. IX) при $p - 1 < \alpha \leqslant p$ $(p \geqslant 1)$ и $-1 < \gamma < +\infty$

$$D^{\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}. \tag{2.5}$$

б) Как хорошо известно [6], целые функции

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\rho > 0), \tag{2.6}$$

где μ — произвольный, вообще говоря, комплексный параметр, называются функциями типа Миттаг-Леффлера и для любого значения параметра μ они имеют порядок ρ, а их тип равен единице.

Предварительно введем следующие обозначения:

$$e_\rho(x;\lambda) \equiv E_\rho\left(-\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\frac{1}{\rho}\right)x^{\frac{1}{\rho}-1}, \tag{2.7}$$

$$e_{\rho,\mu}(x;\lambda) \equiv E_\rho\left(-\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\mu\right)x^{\mu-1}. \tag{2.8}$$

Известно [1], что при $\rho \geqslant 1$, $\mu \geqslant \frac{1}{\rho}$, $\lambda \in [0, +\infty)$

$$e_\rho(x;\lambda)>0,\ e_{\rho,\mu}(x;\lambda)>0,\ x\in(0,+\infty).$$

в) Приведем некоторые леммы, пользуясь этими обозначениями.

Лемма 2.1. *Пусть* $\rho>0$, $p\geqslant 1$, $p-1<\mu\leqslant p+\frac{1}{\rho}$. *Тогда для любого* λ *имеет место формула*

$$D^{-\left(p+\frac{1}{\rho}-\mu\right)}\{e_{\rho,\mu}(x;\lambda)\} = E_\rho\left(-\lambda x^{\frac{1}{\rho}};p+\frac{1}{\rho}\right)x^{p+\frac{1}{\rho}-1},\ x\in(0,+\infty). \tag{2.9}$$

Это следует из формулы (см. [6], гл. III, (1.16))

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_\rho\left(\lambda t^{\frac{1}{\rho}};\mu\right)t^{\mu-1}\,dt = x^{\mu+\alpha-1}\ E_\rho\left(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\mu+\alpha\right)$$

$$(\mu>0,\ \alpha>0, \forall\lambda),$$

если в ней положить $\alpha=p+\frac{1}{\rho}-\mu$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\rho\geqslant 1$, $\mu\geqslant\frac{1}{\rho}$, $\lambda\in(0,+\infty)$. *Тогда имеет место формула*

$$D^{\left(\mu-\frac{1}{\rho}\right)}\{e_{\rho,\mu}(x;\lambda)\} = e_\rho(x;\lambda),\ x\in(0,+\infty). \tag{2.10}$$

Это непосредственно следует из разложения функции

$$e_{\rho,\mu}(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k x^{\frac{k}{\rho}+\mu-1}}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$$

и формулы (2.6).

Пользуясь леммой 2.1, легко доказывается следующая

Лемма 2.3. *Пусть* $\rho\geqslant 1$, $\mu\geqslant\frac{1}{\rho}$, $\lambda>0$ *и функция* $\varphi(t)\in L(0,l)$

непрерывна на интервале $(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$, *тогда справедлива формула*

$$D^{\left(\mu-\frac{1}{\rho}\right)}\left\{\int_0^x e_{\rho,\mu}(x-t;\lambda)\varphi(t)\,dt\right\}=\int_0^x e_\rho(x-t;\lambda)\varphi(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Доказательство следующих лемм содержится в работе [1].

Лемма 2.4. *Пусть* $\rho \geqslant 1$, *тогда для любого значения параметра* λ

$$\left(D^{\frac{1}{\rho}}+\lambda\right)\{e_\rho(x;\lambda)\}\equiv 0. \tag{2.12}$$

Лемма 2.5. *Пусть* $\varphi(x) \in L(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$ *и* λ — *произвольный параметр. Тогда в классе функций*

$$y(x) \in L(0, l),\quad D^{\frac{1}{\rho}}y(x) \in L(0, l)\ (0 < l < +\infty)$$

задача типа Коши

$$D^{\frac{1}{\rho}}y(x)+\lambda y(x)=\varphi(x),\ x \in (0, l),$$

$$D^{-\alpha}y(x)|_{x=0}=0$$

имеет единственное решение $Y(x;\lambda)$, *представимое в виде*

$$Y(x;\lambda)=\int_0^x e_\rho(x-t;\lambda)\varphi(t)\,dt,\ x \in (0; l),$$

то есть

$$\left(D^{\frac{1}{\rho}}+\lambda\right)\left\{\int_0^x e_\rho(x-t;\lambda)\varphi(t)\,dt\right\}=\varphi(t). \tag{2.13}$$

§ 3. Формула типа Тейлора-Маклорена

(a) Пусть $\{\lambda_j\}_0^\infty$ — произвольная неубывающая последовательность неотрицательных чисел

$$0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots. \tag{3.1}$$

Пусть далее, последовательности $\{\rho_j\}_0^\infty$, $\{\mu_j\}_0^\infty$ удовлетворяют условиям

$$\rho_j \geqslant 1,\ \mu_j \geqslant \frac{1}{\rho_j}\ (j \geqslant 0).$$

Введем в рассмотрение операторы

$$\Delta^{(0)} f(x) \equiv f(x), \quad \Delta^{(n)} f(x) = \left\{ \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{D}_j \right\} f(x) \quad (n \geqslant 1), \tag{3.2}$$

$$\tilde{\Delta}^{(n)} f(x) = D^{-\alpha_n} D^{\left(\mu_n - \frac{1}{\rho_n}\right)} \Delta^{(n)} f(x) \quad (n \geqslant 0), \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{D}_j f(x) = (D^{\frac{1}{\rho_j}} + \lambda_j) D^{\left(\mu_j - \frac{1}{\rho_j}\right)} f(x) \quad (j \geqslant 0), \tag{3.4}$$

$$D^{\frac{1}{\rho_j}} f(x) = \frac{d}{dx} D^{-\alpha_j} f(x) \quad \left(\alpha_j = 1 - \frac{1}{\rho_j}\right), \ (j \geqslant 0).$$

Рассмотрим ассоциированную с последовательностями чисел $\{\lambda_j\}_0^\infty$, $\{\rho_j\}_0^\infty$ и $\{\mu_j\}_0^\infty$ последовательность функций $\{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\}_0^\infty$, положив

$$\Omega_0(x; \lambda_0, \rho_0, \mu_0) \equiv e_{\rho_0, \mu_0}(x; \lambda_0),$$

$$\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n) = \int_0^x e_{\rho_0, \mu_0}(x - t_1; \lambda_0)\, dt_1 \int_0^{t_1} e_{\rho_1, \mu_1}(t_1 - t_2; \lambda_2)\, dt_2 \times$$

$$\times \int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1} - t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n}(t_n; \lambda_n)\, dt_n, \tag{3.5}$$

где

$$e_{\rho_j, \mu_j}(x; \lambda_j) \equiv E_{\rho_j}(-\lambda_j x^{\frac{1}{\rho_j}}; \mu_j)\, x^{\mu_j - 1} \quad (j \geqslant 0).$$

Отметим, что при $\rho_j = \rho$ $(\rho \geqslant 1)$, $\mu_j = \dfrac{1}{\rho}$ $(j \geqslant 0)$ операторы $\Delta^{(n)}$, $\tilde{\Delta}^{(n)}$ и система функций $\left\{\Omega_n\left(x; \left\{\lambda_j, \rho, \dfrac{1}{\rho}\right\}_0^n\right)\right\}_0^\infty$ были введены нами в работе [1].

Лемма 3.1. 1°. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\tilde{\Delta}^{(k)} \{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} \equiv \Delta^{(k)} \{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} \equiv 0, \tag{3.6}$$
$$x \in (0, +\infty), \ k \geqslant n + 1,$$

$$\tilde{\Delta}^{(n)} \{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = E_{\rho_n}(-\lambda_n x^{\frac{1}{\rho_n}}; 1), \ x \in (0, +\infty). \tag{3.7}$$

2°. *Для любого $n \geqslant 1$*

$$\tilde{\Delta}^{(k)} \{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\}|_{x=0} = 0, \ 0 \leqslant k \leqslant n - 1. \tag{3.8}$$

Доказательство. 1°. Если $n = 0$, $k = 1$, то в силу (2.10) и (2.13) получим

$$\Delta^{(1)}\{\Omega_0(x;\lambda_0,\rho_0,\mu_0)\} = (D^{\frac{1}{\rho_0}}+\lambda_0)\,D^{\left(\mu_0-\frac{1}{\rho_0}\right)}\{e_{\rho_0,\mu_0}(x;\lambda_0)\} =$$

$$= (D^{\frac{1}{\rho_0}}+\lambda_0)\{e_{\rho_0}(x;\lambda_0)\} \equiv 0.$$

Тогда, очевидно

$$\widetilde{\Delta}^{(1)}\{\Omega_0(x;\lambda_0,\rho_0,\mu_0)\} \equiv 0.$$

Из определения операторов $\Delta^{(k)}$, $\widetilde{\Delta}^{(k)}$ следует, что

$$\widetilde{\Delta}^{(k)}\{\Omega_0(x;\lambda_0,\rho_0,\mu_0)\} = \Delta^{(k)}\{\Omega_0(x,\lambda_0,\rho_0,\mu_0)\} \equiv 0,\ k \geqslant 2.$$

Далее заметим, что

$$\widetilde{\Delta}^{(0)}\{\Omega_0(x;\lambda_0,\rho_0,\mu_0)\} = D^{-\alpha_0}D^{\left(\mu_0-\frac{1}{\rho_0}\right)}\{e_{\rho_0,\mu_0}(x;\lambda_0)\} =$$

$$= D^{-\alpha_0}\{e_{\rho_0}(x;\lambda_0)\} = E_{\rho_0}(-\lambda_0 x^{\frac{1}{\rho_0}}, 1),\ x \in (0,+\infty).$$

Лемма доказана при $n=0$, $k \geqslant 1$.

Согласно определениям (3.2), (3.5) в силу лемм 2.3—2.5 имеем

$$\Delta^{(2)}\{\Omega_1(x;\{\lambda_j,\rho_j,\mu_j\}_0^1)\} = \widetilde{D}_1\widetilde{D}_0\left\{\int_0^x e_{\rho_0,\mu_0}(x-t_1,\lambda_0)\,e_{\rho_1,\mu_1}(t_1;\lambda_1)\,dt_1\right\} =$$

$$= \widetilde{D}_1\,(D^{\frac{1}{\rho_0}}+\lambda_0)\,D^{\left(\mu_0-\frac{1}{\rho_0}\right)}\left\{\int_0^x e_{\rho_0,\mu_0}(x-t_1;\lambda_0)\,e_{\rho_1,\mu_1}(t_1;\lambda_1)\,dt_1\right\} =$$

$$= \widetilde{D}_1\,(D^{\frac{1}{\rho_0}}+\lambda_0)\left\{\int_0^x e_{\rho_0}(x-t_1;\lambda_0)\ e_{\rho_1,\mu_1}(t_1;\lambda_1)\,dt_1\right\} =$$

$$= \widetilde{D}_1\{e_{\rho_1,\mu_1}(x;\lambda_1)\} = (D^{\frac{1}{\rho_1}}+\lambda_1)\,D^{\left(\mu_1-\frac{1}{\rho_1}\right)}\{e_{\rho_1,\mu_1}(x;\lambda_1)\} =$$

$$= (D^{\frac{1}{\rho_1}}+\lambda_1)\{e_{\rho_1}(x;\lambda_1)\} \equiv 0.$$

Откуда, согласно (3.3), получим также

$$\widetilde{\Delta}^{(2)}\{\Omega_1(x;\{\lambda_j,\rho_j,\mu_j\}_0^1)\} = D^{-\alpha_2}D^{\left(\mu_2-\frac{1}{\rho_2}\right)}\{\Delta^{(2)}[\Omega_1(x;\{\lambda_j,\rho_j,\mu_j\}_0^1)]\} \equiv 0,$$

$$k \geqslant 3.$$

Пусть, теперь $n \geqslant 2$ — любое и $0 \leqslant k < n$. Тогда будем иметь

$$\Delta^{(k)}\{\Omega_n(x;\{\lambda_j,\rho_j,\mu_j\}_0^n)\}=\prod_{j=1}^{k-1}\widetilde{D}_j\,(D^{\frac{1}{\rho_0}}+\lambda_0)\,D^{\left(\mu_0-\frac{1}{\rho_0}\right)}\left\{\int_0^x e_{\rho_0,\mu_0}(x-t_1;\lambda_0)dt_1\,\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{t_1} e_{\rho_1,\mu_1}(t_1-t_2;\lambda_1)\,dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1},\mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n;\lambda_{n-1})\,e_{\rho_n,\mu_n}(t_n;\lambda_n)\,dt_n\right\}=$$

$$=\prod_{j=1}^{k-1}\widetilde{D}_j\,(D^{\frac{1}{\rho_0}}+\lambda_0)\left\{\int_0^x e_{\rho_0}(x-t_1;\lambda_0)\,dt_1\int_0^{t_1} e_{\rho_1,\mu_1}(t_1-t_2;\lambda_1)\,dt_2\,\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1},\mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n;\lambda_{n-1})\,e_{\rho_n,\mu_n}(t_n;\lambda_n)\,dt_n\right\}=$$

$$=\prod_{j=2}^{k-1}\widetilde{D}_j\,(D^{\frac{1}{\rho_1}}+\lambda_1)\,D^{\left(\mu_1-\frac{1}{\rho_1}\right)}\left\{\int_0^x e_{\rho_1,\mu_1}(x-t_2;\lambda_1)\,dt_2\,\times\right.$$

$$\times\int_0^{t_2} e_{\rho_2,\mu_2}(t_2-t_3;\lambda_2)\,dt_3\,\times$$

$$\left.\times\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1},\mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n;\lambda_{n-1})\,e_{\rho_n,\mu_n}(t_n;\lambda_n)\,dt_n\right\}=$$

$$=\prod_{j=2}^{k-1}\widetilde{D}_j\left\{\int_0^x e_{\rho_2,\mu_2}(x-t_3;\lambda_2)\,dt_3\cdots\,\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1},\mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n;\lambda_{n-1})\,e_{\rho_n,\mu_n}(t_n;\lambda_n)\,dt_n\right\}.$$

Легко видеть, что продолжая процесс вычисления после k шагов $(k<n-2)$ мы приходим к равенству

$$\Delta^{(k)}\{\Omega_n(x;\{\lambda_j,\rho_j,\mu_j\}_0^n)\}=\int_0^x e_{\rho_k,\mu_k}(x-t_{k+1};\lambda_k)\,dt_{k+1}\times\cdots$$

$$\times\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1},\mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n;\lambda_{n-1})\,e_{\rho_n,\mu_n}(t_n;\lambda_n)\,dt_n\,, \tag{3.9}$$

а при $k=n-2$ к равенству

$$\Delta^{(n-2)}\{\Omega_n(x;\{\lambda_j,\rho_j,\mu_j\}_0^n)\}=\int_0^x e_{\rho_{n-2},\mu_{n-2}}(x-t_{n-1};\lambda_{n-2})\,dt_{n-1}\,\times$$

$$\times \int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}} (t_{n-1} - t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n} (t_n; \lambda_n)\, dt_n. \qquad (3.10)$$

Наконец, при $k = n - 1$ получим

$$\Delta^{(n-1)} \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = (D^{\frac{1}{\rho_{n-2}}} + \lambda_{n-2})\, D^{\left(\mu_{n-2} - \frac{1}{\rho_{n-2}}\right)} \times$$

$$\times \Delta^{(n-2)} \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = (D^{\frac{1}{\rho_{n-2}}} + \lambda_{n-2})\, D^{\left(\mu_{n-2} - \frac{1}{\rho_{n-2}}\right)} \times$$

$$\times \Big\{ \int_0^x e_{\rho_{n-2}, \mu_{n-2}} (x - t_{n-1}, \lambda_{n-2})\, dt_{n-1} \times$$

$$\times \int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}} (t_{n-1} - t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n} (t_n; \lambda_n)\, dt_n \Big\} = (D^{\frac{1}{\rho_{n-2}}} + \lambda_{n-2}) \times$$

$$\times \Big\{ \int_0^x e_{\rho_{n-2}} (x - t_{n-1}; \lambda_{n-2})\, dt_{n-1} \times$$

$$\times \int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}} (t_{n-1} - t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n} (t_n; \lambda_n)\, dt_n \Big\} =$$

$$= \int_0^x e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}} (x - t_n, \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n} (t_n; \lambda_n)\, dt_n. \qquad (3.11)$$

Но поскольку

$$\Delta^{(n)} \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = (D^{\frac{1}{\rho_{n-1}}} + \lambda_{n-1})\, D^{\left(\mu_{n-1} - \frac{1}{\rho_{n-1}}\right)} \Delta^{(n-1)} \times$$

$$\times \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\},$$

то, пользуясь формулой (3.11), в силу лемм 2.3—2.5 будем иметь

$$\Delta^{(n)} \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = e_{\rho_n, \mu_n} (x; \lambda_n).$$

Теперь заметив, что

$$\Delta^{(n+1)} \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = (D^{\frac{1}{\rho_n}} + \lambda_n)\, D^{\left(\mu_n - \frac{1}{\rho_n}\right)} \{e_{\rho_n, \mu_n} (x; \lambda_n)\} =$$

$$= (D^{\frac{1}{\rho_n}} + \lambda_n) \{e_{\rho_n} (x; \lambda_n)\} \equiv 0$$

получим

$$\Delta^{(n+1)} \{\Omega_n (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} =$$

$$= D^{-\alpha_{n+1}} D^{\left(\mu_{n+1}-\frac{1}{\rho_{n+1}}\right)} \Delta^{(n+1)}\{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} \equiv 0.$$

Из определения операторов $\widetilde{\Delta}^{(k)}$, $\Delta^{(k)}$ следует (3.6).

Поскольку

$$\Delta^{(n)}\{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = e_{\rho_n, \mu_n}(x; \lambda_n),$$

то по определению (3.3), согласно (2.9) и (2.10), получим (3.7).

Итак, утверждение 1° леммы доказано.

2°. Пусть теперь $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Пользуясь формулой (3.9), в силу леммы 2.3, будем иметь

$$\widetilde{\Delta}^{(k)}\{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = D^{-\alpha_k} D^{\left(\mu_k-\frac{1}{\rho_k}\right)}\left\{\int_0^x e_{\rho_k, \mu_k}(x-t_{k+1}; \lambda_k)\, dt_{k+1}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n}(t_n; \lambda_n)\, dt_n\right\} = \tag{3.12}$$

$$= D^{-\alpha_k}\left\{\int_0^x e_{\rho_k}(x-t_{k+1}; \lambda_k)\, dt_{k+1}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n}(t_n, \lambda_n)\, dt_n\right\} =$$

$$= \int_0^x E_{\rho_k}\left[-\lambda_k (x-t_{k+1})^{\frac{1}{\rho_k}}; \ 1\right] dt_{k+1}\cdots$$

$$\cdots\int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n}(t_n; \lambda_n)\, dt_n,$$

а при $k = n-1$, пользуясь формулой (3.11), имеем также

$$\widetilde{\Delta}^{(n-1)}\{\Omega_n(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\} = D^{-\alpha_{n-1}} D^{\left(\mu_{n-1}-\frac{1}{\rho_{n-1}}\right)} \times$$

$$\times \int_0^x e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1}-t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n}(t_n, \lambda_n)\, dt_n =$$

$$= D^{-\alpha_{n-1}}\left\{\int_0^x e_{\rho_{n-1}}(x-t_n; \lambda_{n-1})\, e_{\rho_n, \mu_n}(t; \lambda_n)\, dt_n\right\} = \tag{3.13}$$

$$= \int_0^x E_{\rho_{n-1}} [- \lambda_{n-1} (x - t_n)^{\frac{1}{\rho_{n-1}}}; 1] \, e_{\rho_n, \mu_n}(t_n; \lambda_n) \, dt_n.$$

Из (3.12) и (3.13) получим (3.5).

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Для любого* $n \geqslant 0$ *в сумме вида*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, \Omega_k (x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^k), \quad x \in (0, +\infty) \tag{3.14}$$

коэффициенты $\{c_k\}_0^n$ *могут быть определены из формул*

$$c_k = \tilde{\Delta}^{(k)} \{P_n(0)\} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n). \tag{3.15}$$

Доказательство. Полагая, что $0 \leqslant j \leqslant n$, применим к функции $P_n(x)$ оператор $\tilde{\Delta}^{(j)}$. Тогда в силу формул (3.6) и (3.7) получим

$$\tilde{\Delta}^{(j)} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, \tilde{\Delta}^{(j)} \{\Omega_k (x; \{\lambda_i, \rho_i, \mu_i\}_0^k)\} =$$

$$= \sum_{k=j}^{n} c_k \, \tilde{\Delta}^{(j)} \{\Omega_k (x; \{\lambda_i, \rho_i, \mu_i\}_0^k)\} = \tag{3.16}$$

$$= c_j \, \tilde{\Delta}^{(j)} \{\Omega_j (x; \{\lambda_i, \rho_i, \mu_i\}_0^j)\} + \sum_{k=j+1}^{n} c_k \, \tilde{\Delta}^{(j)} \{\Omega_k (x; \{\lambda_i, \rho_i, \mu_i\}_0^k)\} =$$

$$= c_j E_{\rho_j} (-\lambda_j x^{\frac{1}{\rho_j}}; 1) + \sum_{k=j+1}^{n} c_k \, \tilde{\Delta}^{(j)} \{\Omega_k (x; \{\lambda_i, \rho_i, \mu_i\}_0^k)\}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Поскольку $E_{\rho_j}(0; 1) = 1$, то из (3.16), в силу (3.8) при $x \to 0$ получим соотношение (3.15) леммы.

Лемма 3.3. *Пусть функция* $\varphi(\tau) \in L(0; l)$ *непрерывна на интервале* $(0, l)$ $(0 < l \leqslant +\infty)$. *Тогда для любого* $n \geqslant 1$ *справедлива формула*

$$\int_0^x e_{\rho_0, \mu_0}(x - t_1; \lambda_0) \, dt_1 \int_0^{t_1} e_{\rho_1, \mu_1}(t_1 - t_2; \lambda_1) \, dt_2 \cdots$$

$$\cdots \int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1} - t_n; \lambda_{n-1}) \, dt_n \times \tag{3.17}$$

$$\times \int_0^{t_n} e_{\rho_n, \mu_n}(t_n - t_{n+1}; \lambda_n) \, \varphi(t_{n+1}) \, dt_{n+1} = \int_0^x \Omega_n (x - \tau; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n) \, \varphi(\tau) \, d\tau.$$

Доказательство леммы 3.3 проводится точно так же, как доказательство леммы 4.1 работы [1].

б) Обозначим через $C_{n+1}\{[0, l); <\lambda_j>, <\rho_j>, <\mu_j>\}$ $(0<l<<+\infty)$ множество функций $f(x)$, подчиненных следующим условиям:

1) Функции

$$\tilde{\Delta}^{(k)} f(x) \quad (k=0, 1, \cdots, n) \text{ непрерывны на } [0, l),$$

2) функции

$\Delta^{(k)} f(x)$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n+1)$ непрерывны на $(0, l)$ и принадлежат классу $L(0, l)$.

Заметим, что любая функция

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\,\Omega_k(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^k),$$

где $\{c_k\}_0^n$ — вещественные коэффициенты, принадлежат классу

$$C_{n+1}\{[0, l), <\lambda_j>, <\rho_j>, <\mu_j>\}.$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. *Если $f(x)\in C_{n+1}\{[0, l), <\lambda_j>, <\rho_j>, <\mu_j>\}$, то имеет место формула*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \tilde{\Delta}^{(k)} f(0)\,\Omega_k(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^k)+R_n(x; f),\ x\in(0, l), \tag{3.18}$$

где

$$R_n(x; f)=\int_0^x \Omega_n(x-\tau; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n)\,\Delta^{(n+1)}\{f(\tau)\}\,d\tau,\ x\in(0, l). \tag{3.19}$$

Доказательство. Обозначим

$$P_n(x; f)=\sum_{k=0}^{n} \tilde{\Delta}^{(k)} f(0)\,\Omega_k(x; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^k), \tag{3.20}$$

$$R_n(x; f)=f(x)-P_n(x; f) \tag{3.21}$$

и заметим, что в силу лемм 3.1, 3.2 $R_n(x; f)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\tilde{\Delta}^{(k)}\{R_n(x; f)\}|_{x=0}=0,\ 0\leqslant k\leqslant n, \tag{3.22}$$

$$\Delta^{(n+1)}\{R_n(x; f)\}=\Delta^{(n+1)} f(x)=\varphi(x),\ x\in(0, l). \tag{3.23}$$

Пользуясь определением оператора $\Delta^{(n+1)}$, уравнение (3.23) можно записать в виде

$$\left(D^{\frac{1}{\rho_n}}+\lambda_n\right) D^{\left(\mu_n-\frac{1}{\rho_n}\right)}\,\Delta^{(n)} R_n(x; f)=\varphi(x),\ x\in(0, l), \tag{3.23'}$$

но поскольку

$$D^{-\alpha_n} D^{\left(\mu_n - \frac{1}{\rho_n}\right)} \Delta^{(n)} R_n(x; f)|_{x=0} = 0,$$

то из (3.23′), согласно лемме 2.5, функция $D^{\left(\mu_n - \frac{1}{\rho_n}\right)} \Delta^{(n)} R_n(x; f)$ определяется единственным образом посредством интегральной формулы

$$D^{\left(\mu_n - \frac{1}{\rho_n}\right)} \Delta^{(n)} R_n(x; f) = \int_0^x e_{\rho_n}(x - t_{n+1}; \lambda_n)\, \varphi(t_{n+1})\, dt_{n+1}. \tag{3.24}$$

Отсюда по лемме 2.3 получим

$$\Delta^{(n)} R_n(x; f) = \int_0^x e_{\rho_n, \mu_n}(x - t_{n+1}; \lambda_n)\, \varphi(t_{n+1})\, dt_{n+1}. \tag{3.25}$$

Далее рассмотрим уравнение

$$\left(D^{\frac{1}{\rho_{n-1}}} + \lambda_{n-1}\right) D^{\left(\mu_{n-1} - \frac{1}{\rho_{n-1}}\right)} \Delta^{(n-1)} R_n(x; f) = \int_0^x e_{\rho_n, \mu_n}(x - t_{n+1}; \lambda_n) \times$$

$$\times \varphi(t_{n+1})\, dt_{n+1} \tag{3.25′}$$

и воспользуемся вновь лишь последним из начальных условий (3.22) для $k = n - 1$.

Тогда в силу леммы 2.5 получим представление единственного решения этой задачи

$$D^{\left(\mu_{n-1} - \frac{1}{\rho_{n-1}}\right)} \Delta^{(n-1)} R_n(x; f) =$$

$$= \int_0^x e_{\rho_{n-1}}(x - t_n; \lambda_{n-1})\, dt_n \int_0^{t_n} e_{\rho_n, \mu_n}(t_n - t_{n+1}; \lambda_n)\, \varphi(t_{n+1})\, dt_{n+1}. \tag{3.26}$$

Из (3.26) по лемме 2.3 имеем

$$\Delta^{(n-1)} R_n(x; f) =$$

$$= \int_0^x e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(x + t_n; \lambda_{n-1})\, dt_n \int_0^{t_n} e_{\rho_n, \mu_n}(t_n - t_{n+1}, \lambda_n)\, \varphi(t_{n+1})\, dt_{n+1}.$$

Повторяя наши рассуждения с последовательным исчерпанием всех начальных условий (3.22), мы приходим к тождеству

$$R_n(x; f) \equiv \int_0^x e_{\rho_0, \mu_0}(x - t_1; \lambda_0)\, dt_1 \int_0^{t_1} e_{\rho_1, \mu_1}(t_1 - t_2; \lambda_1)\, dt_1 \times \cdots$$

$$\times \int_0^{t_{n-1}} e_{\rho_{n-1}, \mu_{n-1}}(t_{n-1} - t_n; \lambda_{n-1})\, dt_{n-1} \int_0^{t_n} e_{\rho_n, \mu_n}(t_n - t_{n+1}; \lambda_n)\, \varphi(t_{n+1})\, dt_{n+1} \equiv$$

$$
= \int_0^x \Omega_n \left(x - \tau; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n\right) \varphi(\tau)\, d\tau,
$$

то есть

$$
R_n(x; f) \equiv \int_0^x \Omega_n \left(x - \tau; \{\lambda_j, \rho_j, \mu_j\}_0^n\right) \Delta^{(n+1)} \{f(\tau)\}\, d\tau.
$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 17.II.1976

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Բ. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Թեյլոր-Մակլորենի տիպի բանաձևերի ընդհանուր դասեր (*ամփոփում*)

Հեղինակների նախորդ աշխատանքում [1], մասնավորապես ստացված էր Թեյլոր-Մակլորենի տիպի բանաձևերի մի դաս, ասոցացված կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների և Միտտագ-Լեֆֆլերի տիպի ֆունկցիաների հետ։

Ներկա հոդվածում, հենվելով հիշյալ աշխատանքի արդյունքների վրա և ընդհանուր գծերով հետևելով այնտեղ զարգացված մեթոդին, մենք բերում ենք նշված բանաձևերի էական ընդհանրացումը։

M. M. DJRBASHIAN, B. A. SAAKIAN. *General classes of formulae of Taylor-Macloren type* (summary)

Among other results in the paper [1] a class of formulae of Taylor-Macloren type associated with differential operators of fractional order and Mittag-Löffler type functions had been discovered.

In the present paper following the same methodology and employing many results from [1], the mentioned formulae are essentially generalized.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян.* Классы формул и разложения типа Тейлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН СССР, серия матем., 39, № 1, 1975, 69—122.
2. *F. Hausdorf.* Summations methoden und momenten folgen, Math. Zeischrift, 9, 1921, I, 74—109, II, 280—299.
3. *N. E. Nörlund.* Lec'ons sur lis series d'interpolation, Paris, 1926.
4. *И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер.* Преобразования типа свертки, ИИЛ, М., 1953.
5. *Г. В. Бадалян.* Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1954.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.

Примечание при корректуре

В только что опубликованной заметке Бадаляна Г. В. (ДАН СССР, т. 232, № 2, 1977) указано некоторое обобщение одного из содержащихся в работе авторов [1] результатов, а именно, нашей общей формулы типа Тейлора—Маклорена.

Это обобщение, не содержащее однако результатов данной работы, получено путем формализации нашей конструкции — переносом начала координат, введением функций и операторов с заранее постулированными свойствами, почерпнутыми из работы [1].

М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS