ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication, should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in-full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

Ю. М. МОВСИСЯН

К ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Введение

В работе [1] вводится понятие алгебры второй ступени и развивается общая теория гомоморфизмов и многообразий для таких алгебраических образований. При этом под алгеброй второй ступени понимается объект $<Q;\ \Sigma;\ G>$, где Σ — некоторая совокупность финитарных операций, определенных на множестве Q, и G — некоторая совокупность финитарных операций, определенных на множестве Σ. Эти алгебры возникают в связи с исследованием некоторых формул из языка второй ступени [2].

Понятие универсальной алгебры является частным случаем понятия алгебры второй ступени. А именно, при $G=\varnothing$ из алгебры второй ступени $<Q;\ \Sigma;\ G>$ возникает универсальная алгебра $<Q;\ \Sigma>$. Поэтому, естественно было ожидать, что при $G=\varnothing$ теория алгебр второй ступени сводится к обычной теории универсальных алгебр, изложенной, например, в книге [3]. Однако, при $G=\varnothing$ из теории алгебр второй ступени, развитой в [1], получилась несколько иная теория универсальных алгебр. В настоящей работе излагаются некоторые вопросы из этой теории. Понятие гомоморфизма в изложенном здесь смысле было рассмотрено еще и в работе [4]. Однако идея рассмотрения таких морфизмов по существу восходит к Марчевскому (см., например, [5]) и Фудзиваре [6].

Более точное сравнение обычной теории универсальных алгебр с результатами настоящей работы содержится в следующих трех пунктах.

1. Некоторые результаты обычной теории универсальных алгебр имеют одинаковое содержание с соответствующими результатами настоящей работы. Например, формулировка известной теоремы Де-Грота о том, что каждая группа изоморфна группе всех автоморфизмов некоторого кольца, остается верной и при новой трактовке понятия гомоморфизма.

2. Некоторые результаты обычной теории универсальных алгебр незначительно изменяются. В обычной теории известна теорема Биркгофа-Фринка о том, что каждая полная компактно-порожденная решетка изоморфна решетке всех подалгебр некоторой универсальной алгебры. При новых определениях гомоморфизма и подалгебры, принятых в настоящей работе, можно установить, что каждая полная компактно-порожденная решетка вкладывается в решетку всех подалгебр некоторой универсальной алгебры. *Верна или нет формулиров-*

ка теоремы Биркгофа-Фринка при настоящем изложении теории универсальных алгебр—пока открытый вопрос.

3. Некоторые результаты обычной теории универсальных алгебр совершенно не сравнимы с результатами настоящей работы. Например, класс колец в изложенной теории не образует многообразия.

Изложенный в настоящей работе подход можно было бы применять и к различным обобщениям понятия универсальной алгебры: многоосновные алгебры, алгебры второй ступени (ступенчатые алгебры), модели, топологические алгебры и др. При этом выборе мы остановились на рассмотрении топологических алгебр.

§ 1 Тип алгебр. Подалгебры*

Если $D=\langle Q;\ \Sigma\rangle$ есть произвольная алгебра и $A\in\Sigma$, то через $|A|$ обозначается арность операции A.

Подмножество $T=\{|A|\ |A\in\Sigma\}$ множества всех натуральных чисел N называется типом алгебры $D=\langle Q;\ \Sigma\rangle$.

Например, тип произвольного кольца $Q(+,\cdot)$ по нашему определению, есть множество $T=\{2\}$. Произвольный группоид, в частности, группа, полугруппа и квазигруппа также имеет тип $T=\{2\}$. Таким образом, группы, полугруппы и квазигруппы мы рассматриваем как алгебры с одной бинарной операцией, а кольца и поля — как алгебры с двумя бинарными операциями.

Две алгебры будем называть однотипными, если они имеют равные типы. Таким образом, группоид и кольцо по нашему определению являются однотипными алгебрами. Если тип алгебры равен T, то ее будем еще называть T-алгеброй. Класс алгебр называется классом Т-алгебр, если каждая ее алгебра есть T-алгебра.

Алгебру $D'=\langle Q';\ \Sigma'\rangle$ будем называть подалгеброй алгебры $D=\langle Q;\ \Sigma\rangle$ и писать $D'\leqslant D$, если $Q'\subseteq Q$, $\Sigma'\subseteq\Sigma$.

Например, аддитивная полугруппа всех натуральных чисел есть подалгебра группы $Z(+)$, каждая коммутативная группа есть подалгебра некоторого кольца и др.

Если $D_1=\langle Q_1;\ \Sigma_1\rangle$, $D_2=\langle Q_2;\ \Sigma_2\rangle$ — подалгебры алгебры D и $Q_3=Q_1\cap Q_2\neq\varnothing$, $\Sigma_3=\Sigma_1\cap\Sigma_2\neq\varnothing$, то пара $D_3=\langle Q_3;\ \Sigma_3\rangle$ также подалгебра алгебры D. Подалгебра D_3 называется пересечением подалгебр D_1, D_2 и обозначается $D_3=D_1\cap D_2$. Если же $Q_1\cap Q_2=\varnothing$ или $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing$, то полагаем $D_1\cap D_2=\varnothing$. Аналогично определяется пересечение любого числа подалгебр.

Определим равенство двух алгебр:

$$D=D'\Longleftrightarrow Q=Q',\ \Sigma=\Sigma'.$$

В противном случае будем говорить, что $D\neq D'$.

Если $D'\leqslant D$ и $D'\neq D$, то D' называется истинной подалгеброй алгебры D.

---

* Под словом „алгебра“ в дальнейшем разумеется универсальная алгебра.

Будем говорить, что алгебра $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ порождается непустым множеством $X \subseteq Q$, или непустое множество $X \subseteq Q$ порождает алгебру D, если не существует ее истинной подалгебры вида $D' = \langle Q'; \Sigma \rangle$ такой, что $X \subseteq Q'$ (в обозначениях $D = \langle \{X\}; \Sigma \rangle$).

Если существует такое конечное множество X, что $D = \langle \{X\}; \Sigma \rangle$, то алгебра D называется конечнопорожденной.

Класс всех подалгебр одной и той же алгебры (включая быть может пустое множество) образует полную решетку относительно частичного порядка „$\leqslant$".

Теорема 1. *Полная решетка всех подалгебр каждой алгебры является компактно-порожденной, т. е. каждый ее элемент есть объединение компактных элементов.*

Доказательство. Следует заметить, что класс всех подалгебр каждой алгебры $\langle Q; \Sigma \rangle$ образует алгебраическую систему замыканий множества $Q \cup \Sigma$. Каждая алгебраическая система замыканий является полной компактно-порожденной решеткой [7]. Компактными элементами этой решетки являются конечнопорожденные подалгебры с конечной системой операций и только они.

§ 2. Гомоморфизмы алгебр

Пусть $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ и $D' = \langle Q'; \Sigma' \rangle$ — две однотипные алгебры. Пара $(\varphi, \breve{\psi})$ отображений $\varphi\colon Q \to Q'$, $\breve{\psi}\colon \Sigma \to \Sigma'$ называется гомоморфизмом из алгебры D в алгебру D' и обозначается $(\varphi, \breve{\psi})\colon D \Rightarrow D'$, если отображение $\breve{\psi}$ сохраняет арность операций и для любых $A \in \Sigma$, $|A| = n$ и $x_1, \cdots, x_n \in Q$ справедливо равенство:

$$\varphi\,[A\,(x_1, \cdots, x_n)] = [\breve{\psi}\,A]\,(\varphi x_1, \cdots, \varphi x_n).$$

Пара $(\varepsilon, \breve{\varepsilon})$ тождественных отображений $\varepsilon\colon Q \to Q$, $\breve{\varepsilon}\colon \Sigma \to \Sigma$ есть гомоморфизм алгебры D в себя.

Пара $\langle \varphi Q; \breve{\psi}\Sigma \rangle$ является подалгеброй алгебры D' и называется гомоморфным образом алгебры D. Если пары $(\varphi_1, \breve{\psi}_1)\colon D \Rightarrow D_1$ и $(\varphi_2, \breve{\psi}_2)\colon D_1 \Rightarrow D'$ — гомоморфизмы, то пара отображений $(\varphi_1\varphi_2, \breve{\psi}_1\breve{\psi}_2)\colon D \Rightarrow D'$ — также гомоморфизм и называется произведением гомоморфизмов $(\varphi_1, \breve{\psi}_1)$ и $(\varphi_2, \breve{\psi}_2)$. Таким образом, алгебры и их гомоморфизмы (в качестве морфизмов) образуют категорию.

Гомоморфизм алгебры в себя называется ее эндоморфизмом. Множество всех эндоморфизмов одной и той же алгебры образует полугруппу с единицей.

Определим еще ряд стандартных понятий.

Гомоморфизм $(\varphi, \bar{\psi})$ называется эпиморфизмом, если отображения $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ сюръективны—и мономорфизмом, если отображения $\varphi, \tilde{\psi}$ инъективны. Изоморфизм — это одновременно эпи- и мономорфизм. Изоморфизм алгебры в себя называется ее автоморфизмом. Множество всех автоморфизмов одной и той же алгебры образует группу.

Если существует мономорфизм $(\varphi, \bar{\psi})$ из алгебры D в алгебру D', то говорят еще, что алгебра D вкладывается в алгебру D'. Каждая полугруппа с единицей вкладывается в полугруппу всех эндоморфизмов некоторой алгебры, каждая группа вкладывается в группу всех автоморфизмов некоторой алгебры.

Множество всех автоморфизмов вида $(\varphi, \bar{\varepsilon})$ образует группу и называется группой главных автоморфизмов. Эта группа—нормальный делитель во всей группе автоморфизмов. Для некоторых алгебр группа главных автоморфизмов совпадает с группой всех автоморфизмов. Такая ситуация, в частности, имеет место для любого группоида и для любого кольца.

Каждая группа изоморфна группе главных автоморфизмов некоторой алгебры.

§ 3. Конгруэнции и фактор-алгебры

Пусть $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ — алгебра, а r и $\bar{t}$ — отношения эквивалентности, определенные соответственно на множествах Q и Σ. Упорядоченная пара $(r, \tilde{t}) = q$ называется конгруэнцией на алгебре D, если

а) из отношений $x_1\, r\, x_1', \cdots, x_m\, r\, x_m'$ следует

$A(x_1, \cdots, x_m)\, r\, A(x_1', \cdots, x_m')$, где $x_i, x_i' \in Q$, $A \in \Sigma$, $|A| = m$,

б) из отношения $A\, \bar{t}\, B$ следует $|A| = |B|$ и $A(x_1, \cdots, x_n)\, rB(x_1, \cdots$ $\cdots, x_n)$ для любых $x_1, \cdots, x_n \in Q$, где $A, B \in \Sigma$, $|A| = n$.

Нулевая конгруэнция определяется как пара $\hat{O} = (O, \tilde{O})$, где

$$xOy \Longleftrightarrow x = y,\ x, y \in Q,$$

$$A\tilde{O}B \Longleftrightarrow A = B,\ A, B \in \Sigma.$$

Единичная конгруэнция определяется как пара $\hat{1} = (1, \tilde{1})$, где

$$x1y \Longleftrightarrow x, y \in Q,$$

$$A\bar{1}B \Longleftrightarrow |A| = |B|,\ A, B \in \Sigma.$$

Пусть $q_1 = (r_1, \tilde{t}_1)$ и $q_2 = (r_2, \bar{t}_2)$ — две конгруэнции некоторой алгебры, определим

$$q_1 \leqslant q_2 <=> r_1 \leqslant r_2, \quad \tilde{t}_1 \leqslant \tilde{t}_2.$$

Например, $\hat{O} \leqslant q \leqslant \hat{1}$ для любой конгруэнции q. Кроме того пара $q_3 = (r_1 \cap r_2, \tilde{t}_1 \cap \tilde{t}_2)$ — также конгруэнция, которая называется пересечением конгруэнций q_1, q_2 и обозначается обычным путем: $q_3 = q_1 \cap q_2$. Аналогично определяется и обозначается пересечение любого числа конгруэнций. Таким образом, класс всех конгруэнций, определенных на одной и той же алгебре, образует полную решетку. Конгруэнция $(r, \tilde{t})$ алгебры $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется вполне инвариантной, если она выдерживает любой эндоморфизм $(\varphi, \tilde{\psi})$ этой алгебры, т. е.

$$xry => \varphi x r \varphi y, \quad x, y \in Q,$$

$$A \tilde{t} B => \tilde{\psi} A \tilde{t} \tilde{\psi} B, \quad A, B \in \Sigma.$$

Пусть $q = (r, \tilde{t})$ есть конгруэнция алгебры $D = \langle Q; \Sigma \rangle$. Элементы фактор-множества $\Sigma/\tilde{t} = \bar{\Sigma}$ можно трактовать как операции, определенные на фактор-множестве $Q/r = \bar{Q}$ следующим путем:

$$\bar{A}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) = \overline{A(x_1, \cdots, x_n)},$$

где $\bar{A} \in \bar{\Sigma}$, $|A| = n$, $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n \in \bar{Q}$.

Корректность определения операций $\bar{A}$ следует из определения конгруэнции. Таким образом, определена алгебра $\langle Q/r; \Sigma/\tilde{t} \rangle$, называемая фактор-алгеброй алгебры D по конгруэнции q и обозначается как D/q.

Фактор-алгебра T-алгебры есть T-алгебра. Пара отображений $(\varphi_e, \tilde{\psi}_e)$, где $\varphi_e: x \to \bar{x}$, $\tilde{\psi}_e: A \to \bar{A}$, является эпиморфизмом. Он называется естественным гомоморфизмом.

С каждым гомоморфизмом $(\varphi, \tilde{\psi})$ можно связать некоторую конгруэнцию $(r, \tilde{t})$, называемую ядром этого гомоморфизма. В самом деле, если $(\varphi, \tilde{\psi})$: $D => D'$ — гомоморфизм, то пара $q = (r, \tilde{t})$, где $xry <=> \varphi x = \varphi y$, $A \tilde{t} B <=> \tilde{\psi} A = \tilde{\psi} B$, является конгруэнцией. Эта конгруэнция—ядро гомоморфизма $(\varphi, \tilde{\psi})$ и обозначается через $\mathrm{Ker}\,(\varphi, \tilde{\psi})$. Обратное утверждение, однако, не верно. Существуют конгруэнции, не являющиеся ядрами подходящих гомоморфизмов. Например, конгруэнция вида $(1, \tilde{0})$, где 1—единичная эквивалентность, а $\tilde{O}$—нулевая эквивалентность. В связи с этим конгруэнцию $q = (r, \tilde{t})$ будем называть ядерной, если она является ядром для некоторого гомоморфизма $(\varphi, \tilde{\psi})$. Нулевая и единичная конгруэнции каждой алгебры являются ядерными. Существуют такие алгебры, которые кроме этих тривиальных конгруэнций дртгими ядерными конгруэнциями не обладают. Примером такой алгебры может служить алгебра $<Q; \Sigma>$, где Σ — класс всех унитарных операций множества Q. Существуют и такие алгебры, каждая конгруэнция которых ядерна. Например, T-алгебра $<Q; \Sigma>$, для которой отображение $A \to |A|$ инъективно, т. е. множество Σ по каждой арности $n \in T$ содержит лишь одну операцию. Поэтому в группах, полугруппах и квазигруппах каждая конгруэнция ядерна. Нетрудно заметить, что в кольцах существует только одна не ядерная конгруэнция, а именно конгруэнция вида $(1, \bar{O})$.

Пересечение ядерных конгруэнций есть ядерная конгруэнция, поэтому класс всех ядерных конгруэнций каждой алгебры образует полную решетку.

§ 4. Прямое произведение алгебр

Пусть $\mathfrak{M} = \{D_i / D_i = <Q_i; \Sigma_i>, \ i \in J\}$ — произвольный класс T-алгебр, $\hat{Q} = \Pi Q_i$ — декартово произведение множеств Q_i, а $\hat{\Sigma} = \widetilde{\Pi}\Sigma_i$ — совокупность всевозможных систем $\hat{A} = (A_i)_{i \in J}$ операций одинаковых арностей, взятых по одному из каждого множества Σ_i. Элементы множества $\hat{\Sigma}$ можно трактовать как операции, определенные на множестве $\hat{Q}$ покомпонентно, т. е. если

$$\hat{A} = (A_i)_{i \in J}, \ |A_i| = m, \ \hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_m \in \hat{Q}, \ \hat{x}_j = (x_j^i)_{i \in J},$$

то

$$\hat{A}\,(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_m) = (A_i\ (x_1^i, \ \cdots, \ x_m^i))_{i \in J}\,.$$

Алгебра $\hat{D} = <\hat{Q}; \hat{\Sigma}>$ называется прямым произведением семейства алгебр D_i, $i \in J$ и обозначается $\hat{D} = \prod_{i \in J} D_i$. Прямое произведение T-алгебр есть T-алгебра. Понятно, что множество всех n-арных операций прямого произведения $\hat{D}$ есть декартово произведение множеств всех n-арных операций алгебр D_i, $i \in J$.

Можно доказать, что прямое произведение в только что определенном смысле, является реализацией прямого произведения в рассматриваемой категории универсальных алгебр.

Пара отображений $(\varphi_i, \bar{\psi}_i)$, где $\varphi_i\colon \hat{x} \to x_i, \bar{\psi}_i\colon \hat{A} \to A_i$ является гомоморфизмом $\hat{D} \Rightarrow D_i$ для каждого $i \in J$. Подалгебра $\hat{D}' \leqslant \hat{D}$, где $\hat{D}' = <\hat{Q}'; \hat{\Sigma}'>$, называется подпрямым произведением семейства алгебр D_i, $i \in J$, если пара $(\varphi_i|_{\hat{Q}'}, \bar{\psi}_i|_{\hat{\Sigma}'})$ есть эпиморфизм для каждого

$i \in J$. При этом, например, $\varphi_i|_{\hat{Q}'}$ означает ограничение отображения φ_i на подмножестве $\hat{Q}'$.

Теорема 2. *Пусть D—произвольная алгебра и q_i, $i \in J$—некоторый набор ядерных конгруэнций в ней. Если $q = \Pi\, q_i$, то алгебра D/q изоморфна подпрямому произведению фактор-алгебр D/q_i, $i \in J$.*

Доказательство. Рассмотрим прямое произведение $\prod\limits_{i \in J} D/q_i$ фактор-алгебр D/q_i, $i \in J$. Пусть

$$D = \langle Q; \Sigma \rangle, \; q_i = (r_i, \widetilde{t_i}), \; q = (r, \widetilde{t}) \text{ и } \prod_{i \in J} D/q_i = \langle \hat{S}; \hat{G} \rangle.$$

Определим отображение φ: $Q/r \to \hat{S}$, сопоставляя каждому классу $[a]\, r$ тот элемент из $\hat{S}$, i-я компонента которого для всякого $i \in J$ является классом эквивалентности r_i, содержащим $[a]\, r$. Аналогично определяется отображение $\widetilde{\psi}$: $\Sigma/\widetilde{t} \to \hat{G}$, корректность которого следует из ядерности конгруэнции $q = (r, \widetilde{t})$. Нетрудно заметить, что пара $(\varphi, \widetilde{\psi})$—гомоморфизм из алгебры D/q в алгебру $\prod\limits_{i \in J} D/q_i$. Этот гомоморфизм будет и мономорфизмом, так как конгруэнции q_i, $i \in J$ являются ядерными. Наконец, та подалгебра алгебры $\prod\limits_{i \in J} D/q_i$, на которую алгебра D/q мономорфно отображается, будет подпрямым произведением алгебр D/q_i, $i \in J$.

Универсальная алгебра называется ядерно неразложимой, если совокупность всех ее ненулевых ядерных конгруэнций обладает ненулевым пересечением.

Теорема 3. *Каждая алгебра изоморфна подпрямому произведению ядерно неразложимых алгебр.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $D = \langle Q; \Sigma \rangle$, пары различных элементов $x, y \in Q$, $A, B \in \Sigma$ и обозначим через $\mathfrak{M}\,(x, y, A, B)$ множество всех ядерных конгруэнций алгебры D, разделяющих эти элементы, т. е. если

$$q \in \mathfrak{M}\,(x, y, A, B) \text{ и } q = (r, \widetilde{t}), \text{ то } [x]\, r \neq [y]\, r, [A]\, \widetilde{t} \neq [B]\, \widetilde{t}.$$

С помощью леммы Цорна, нетрудно установить, что частично-упорядоченное множество $\mathfrak{M}\,(x, y, A, B)$ обладает максимальными элементами. Для каждой четверки различных элементов x, y, A, B обозначим через $q\,(x, y, A, B)$ одну из максимальных конгруэнций, их разделяющих. Поскольку пересечение всех этих максимальных конгруэнций является нулевым, то по теореме 2 алгебра D изоморфна подпрямому произведению всех фактор-алгебр $D/q\,(x, y, A, B)$. Остается заметить, что каждая фактор-алгебра $D/q\,(x, y, A, B)$ ядерно неразложима.

§ 5. Алгебра слов. Понятие сверхтождества

В дальнейшем помимо „чистых“ множеств, нам понадобятся и так называемые множества с определенным типом. А именно, если U—произвольное множество и Θ: $U \to N$—некоторое отображение этого множества в множество всех натуральных чисел, то образ $\Theta(U)$ множества U при этом отображении Θ будем называть типом, точнее Θ-типом множества U. При этом, если $\omega \in U$ и $\Theta(\omega) = n$, то n называется арностью элемента ω и обозначается так: $n = |\omega|$. Для краткости, множество с типом T будем называть T-множеством.

Пусть X — произвольное множество, а U — произвольное множество с определенным типом. Элементы множества X называются предметными переменными, а элементы множества U—функциональными переменными. Будем определять два „сорта“ слов—нижние и верхние слова.

Каждое функциональное переменное и только они называются верхними словами, т. е. множество всех верхних слов совпадает с U.

Понятие нижнего слова определяется индуктивно. Во-первых, каждое предметное переменное есть нижнее слово, и во-вторых, если ω—верхнее слово с арностью m и $x_1, \cdots, x_m$—нижние слова, то выражение $\omega(x_1, \cdots, x_m)$ также есть нижнее слово. Обозначим через $X(U)$ совокупность всех нижних слов, полученных таким путем. Тогда пару $<(X)\, U;\ U> = U(X)$ можно трактовать как алгебру, она называется алгеброй слов.

Если U есть T-множество, то соответствующая алгебра слов $U(X)$ есть T-алгебра для любого множества X.

Алгебра слов $U(X)$ порождается множеством X.

T-алгебра слов $U(X)$ называется стандартной, если множество X — счетно и множество U для любого $n \in T$ содержит ровно счетное число n-арных операций.

Пусть X, X' — произвольные множества и U, U'—произвольные множества с определенными типами. Будем говорить, что пара (X, U) эквивалентна паре (X', U'), если существуют взаимнооднозначные отображения $X \leftrightarrow X'$ и $U \leftrightarrow U'$, причем последнее соответствие сохраняет арность.

Если пара (X, U) эквивалентна паре (X', U'), то алгебра $U(X)$ изоморфна алгебре $U'(X')$. В частности, две однотипные стандартные алгебры слов изоморфны.

Теорема 4. *Пусть алгебра* $D = <Q;\ \Sigma>$ *однотипна с алгеброй слов* $U(X) = <(X)\, U;\ U>$. *Если* $\tilde{\psi}$: $U \to \Sigma$ — *произвольное отображение, сохраняющее арность, то любое отображение* φ_0: $X \to Q$ *можно продолжить до отображения* φ: $(X)\, U \to Q$ *так, что пара* $(\varphi, \tilde{\psi})$ *есть гомоморфизм* $U(X) \Rightarrow D$.

Доказательство. Определим $\varphi|_X = \varphi_0$. Если ω — верхнее слово с арностью m и образы нижних слов $x_1, \cdots, x_m$ при отображении

φ уже определены, то образом слова $\omega(x_1, \cdots, x_m)$ считаем элемент $[\bar{\psi}\ \omega](\varphi x_1, \cdots, \varphi x_m) \in Q$.

Введем теперь понятие сверхтождества.

Если w_1, w_2 — нижние слова из стандартной T-алгебры слов $U(X)$, то их формальное равенство $w_1 = w_2$ будем называть нижним T-сверхтождеством. Если же w_1, w_2 — верхние слова с одной и той же арностью, то их формальное равенство называется верхним T-сверхтождеством.

Будем говорить, что в T-алгебре $D = \langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется нижнее (верхнее) T-сверхтождество $w_1 = w_2$, если при любом гомоморфизме $(\varphi, \bar{\psi})$: $U(X) \Rightarrow D$ слова w_1, w_2 имеют равные образы, т. е. $\varphi w_1 = \varphi w_2$ (соответственно $\bar{\psi} w_1 = \bar{\psi} w_2$).

Если использовать терминологию А. И. Мальцева [2], то нижние сверхтождества по существу являются замкнутыми формулами второй ступени вида:

$$\forall X, \cdots, Y \forall x, \cdots, y\ (w_1 = w_2),$$

где w_1, w_2 — термы от функциональных и предметных переменных, входящих в приставку этой формулы. Выполнимость нижнего сверхтождества совпадает с выполнимостью этой формулы.

Верхние сверхтождества — формулы нового характера. Их можно образовать лишь двумя способами:

$$\forall X,\ Y\,(X = Y),$$
$$\forall X\,(X = X),$$

где X, Y — разные функциональные переменные с одинаковой арностью.

Что касается обычных тождеств, каким является, например, тождество дистрибутивности в кольцах, то их можно представить как замкнутые формулы вида

$$\exists X, \cdots, Y \forall x, \cdots, y\,(w_1 = w_2).$$

§ 6. О выполнимости сверхтождеств

Пусть $\langle Q; \Sigma \rangle$ — произвольная T-алгебра. Спрашивается какие T-сверхтождества могут выполняться в этой алгебре. Конечно, существуют такие T-сверхтождества, которые выполняются во всех T-алгебрах. Это так называемые тривиальные T-сверхтождества и они имеют вид $w = w$. Поэтому в поставленной задаче речь идет о нетривиальных T-сверхтождествах. При такой общей постановке этот вопрос едва ли обозрим. Однако при некоторых естественных ограничениях как на рассматриваемые алгебры, так и на рассматриваемые сверхтождества, задача намного упрощается. В частности, имеется ряд окончательных результатов о выполнимости некоторых сверхтождеств в системах групп, в системах полугрупп и в системах квазигрупп. При этом алгебра $<Q; \Sigma>$ называется системой групп, или групповой системой, если для любого $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ — группа. Аналогично определяются системы подгрупп и системы квазигрупп. Можно говорить и о более специальных алгебрах. Например, алгебра $<Q; \Sigma>$, каждая операция которой—полугруппа с единицей, называется полугрупповой системой с единицей. Можно еще рассматривать коммутативные полугрупповые системы, т. е. алгебры, каждая операция которых—коммутативная полугруппа. Интересные подкатегории можно выделять и в категории групповых систем и в категории квазигрупповых систем.

В работе [8] была исследована выполнимость сверхтождества ассоциативности

$$X[x, Y(y, z)] = Z[U(x, y), z]$$

в системах полугрупп. Оказывается, что сверхтождества ассоциативности, выполняющиеся в полугрупповых системах с единицей, могут быть одним из следующих видов:

$$X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{1}$$

$$X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), z], \tag{2}$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z], \tag{3}$$

$$X[x, Y(y, z)] = X[Y(x, y), z]. \tag{4}$$

Дано также точное описание тех полугрупповых систем с единицей, в которых могут выполняться эти сверхтождества. Приведем один типичный результат.

Теорема 5. *В полугрупповой системе с единицей* $<Q; \Sigma>$ *выполняется сверхтождество* (2), *если и только если существует полугруппа* $Q(\cdot)$ *такая, что для любого* $A \in \Sigma$ *справедливо равенство*

$$A(x, y) = x \cdot a \cdot y,$$

где $a \in Q$.

Одновременно были изучены выполнимость так называемых уравновешенных сверхтождеств в системах полугрупп и в системах квазигрупп.

Следует отметить, что хотя изучение уравновешенных сверхтождеств только началось, изучение уравновешенных тождеств началось сравнительно давно. Первое исследование этого направления содержится в одной работе А. И. Мальцева [9], где тождества такого вида называются однородными. В дальнейшем теория уравновешенных тождеств получила широкое развитие в работе В. Д. Белоусова [10]. Некоторые результаты об уравновешенных сверхтождествах содержатся в работах [11] и [12]. При этом, нижнее сверхтождество

$w_1 = w_2$ называется уравновешенным, если каждая предметная переменная участвует в записи каждого слова w_1, w_2 один и только один раз. Например, сверхтождество ассоциативности — уравновешенное сверхтождество. Среди неуравновешенных сверхтождеств более подробно исследовано сверхтождество дистрибутивности

$$X[x,\ Y(y,\ z)] = U[V(x,\ y),\ Z(x,\ z)]$$

(см., например, [13]).

§ 7. Многообразия алгебр

Пусть Λ — некоторый набор T-сверхтождеств, а $\mathfrak{M}^T_\Lambda$ — класс всех T-алгебр, в которых выполняется каждое сверхтождество из Λ. Понятно, что для любых $T \neq \varnothing$ и Λ всегда $\mathfrak{M}^T_\Lambda \neq \varnothing$ и, если $T_1 \neq T_2$, то $\mathfrak{M}^{T_1}_{\Lambda_1} \cap \mathfrak{M}^{T_2}_{\Lambda_2} = \varnothing$ для любых Λ_1 и Λ_2. С другой стороны, $\mathfrak{M}^T_{\Lambda_1} \cap \mathfrak{M}^T_{\Lambda_2} = \mathfrak{M}^T_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ для любых Λ_1, Λ_2 и $T \neq \varnothing$. Будем говорить, что

$$\mathfrak{M}^T_{\Lambda_1} \leqslant \mathfrak{M}^T_{\Lambda_2} \Longleftrightarrow D \in \mathfrak{M}^T_{\Lambda_1} \Rightarrow D \in \mathfrak{M}^T_{\Lambda_2}.$$

Класс алгебр $\mathfrak{M}$ называется многообразием, если существуют множества T и Λ такие, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T_\Lambda$. При этом будем говорить, что многообразие $\mathfrak{M}$ определяется парой множеств $(T,\ \Lambda)$.

Таким образом, класс всех полугрупп—многообразие. Это многообразие определяется парой $(T,\ \Lambda)$, где $T = \{2\}$, а множество Λ состоит из нижнего сверхтождества $X[x,\ X(y,\ z)] = X[X(x,\ y),\ z]$ и верхнего сверхтождества $X = Y$.

Класс всех T-алгебр также есть многообразие. Оно определяется парой $(T,\ \Lambda)$, где Λ состоит из нижнего сверхтождества $x = x$. Это многообразие будем обозначать через $\mathfrak{M}^T_1$.

Класс всех одноэлементных T-алгебр—многообразие, определяемое парой $(T,\ \Lambda)$, где Λ определяется нижним сверхтождеством $x = y$ и обозначается через $\mathfrak{M}^T_0$. Эти обозначения оправдываются тем, что для любых Λ и T справедливо соотношение

$$\mathfrak{M}^T_0 \leqslant \mathfrak{M}^T_\Lambda \leqslant \mathfrak{M}^T_1 .$$

Если же некоторый класс T-алгебр $\mathfrak{M}$ не образует многообразия, то из соотношения $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{M}^T_1$ следует, что класс многообразий, в которых содержатся $\mathfrak{M}$, не пуст, и что этот класс обладает минимальным элементом относительно частичного порядка „$\leqslant$". Этот минимальный элемент называется многообразием, порожденным классом $\mathfrak{M}$ и обозначается через $\mathfrak{M}^*$. Легко убедиться, что многообразие $\mathfrak{M}^*$ определяется парой $(T,\ \Lambda)$, где Λ — совокупность всех T-сверхтождеств (нижних или верхних), каждое из которых выполняется во всех T-алгебрах класса $\mathfrak{M}$.

Каждой совокупности T-сверхтождеств Λ соответствует многообразие $\mathfrak{M}^T_\Lambda$ и каждому классу T-алгебр $\mathfrak{M}$ соответствует класс $\Lambda^T_{\mathfrak{M}}$.

всех таких T-сверхтождеств, каждое из которых выполняется во всех алгебрах из $\mathfrak{M}$. Пара отображений $\Lambda \to \mathfrak{M}^T_\Lambda$ и $\mathfrak{M} \to \Lambda^T_{\mathfrak{M}}$ образует

соответствие Галуа, замкнутыми элементами которого являются многообразия и те классы сверхтождеств, которые определяют вполне инвариантные конгруэнции на соответствующих стандартных алгебрах слов.

Теорема 6. *Класс однотипных алгебр является многообразием, если и только если он наследственен, гомоморфно- и мультипликативно замкнут.*

При этом класс однотипных алгебр называется:

а) наследственным, если он вместе с каждой T-алгеброй содержит каждую ее T-подалгебру;

б) гомоморфно замкнутым, если он вместе с каждой алгеброй содержит каждый ее гомоморфный образ:

в) мультипликативно замкнутым, если он вместе со всякой совокупностью алгебр содержит их прямое произведение.

Каждый гомоморфно замкнутый класс алгебр абстрактен, т. е. он вместе со всякой своей алгеброй содержит и любой ее изоморфный образ.

Доказательство теоремы 6 проводится в заключении следующего параграфа.

Отметим, что в одном весьма частном случае, когда рассматриваемые универсальные алгебры замкнуты относительно суперпозиции операций и содержат все единичные операции, аналогичный результат был получен Файтловичем]14].

Класс всех групп есть гомоморфно и мультипликативно замкнутый класс однотипных алгебр. Однако, класс всех групп не образует многообразия, так как этот класс алгебр не наследственен. В самом деле, существуют такие группы, не каждая подалгебра которой есть группа. Более того, как известно каждая коммутативная полугруппа с сокращением вкладывается в некоторую группу. Каждая свободная полугруппа также вложима в группу. Именно из последнего факта (с учетом теоремы 6) вытекает

Предложение 1. *Многообразие всех полугрупп порождается классом всех групп.*

Нетрудно заметить, что все групповые многообразия находятся в классе всех периодических групп, так как в периодических группах и только в них каждая подалгебра есть группа.

Класс всех квазигрупп также не образует многообразия. Кроме условия наследственности здесь нарушается еще гомоморфная замкнутость. В связи с этим, квазигруппу будем называть наследственной, если каждая ее подалгебра—квазигруппа. Понятно, что наследственные группы—это в точности периодические группы. Однако *полное описание класса всех наследственных квазигрупп неизвестно.*

Прямое произведение двух колец по нашему определению есть алгебра с четырьмя операциями. Поэтому класс всех колец не является мультипликативно замкнутым. Каждая абелева группа есть подалгебра некоторого кольца, поэтому класс всех колец не наследственен. В результате класс всех колец не образует многообразия. Обозначим этот класс через K и рассмотрим многообразие K^*, порожденное этим классом. Поскольку каждый группоид вкладывается в мультипликативную часть некоторого кольца, то K^* совпадает с многообразием всех бинарных алгебр (т. е. алгебр с бинарными операциями). Иначе говоря справедливо

Предложение 2. *В классе всех колец не выполняется никакое нетривиальное сверхтождество.*

Однако, если рассматривать класс всех полей, то понятно, что в этом классе алгебр выполняются нетривиальные сверхтождества

$$X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z],$$

$$X(x, y) = X(y, x).$$

Неизвестно, *какие еще нетривиальные сверхтождества выполняются в классе всех полей!*

Этот вопрос эквивалентен задаче описания многообразия, порожденного классом всех полей.

§ 8. Свободные алгебры

Пусть $\mathfrak{M} = \{D_i / D_i = \langle Q_i;\ \Sigma_i \rangle,\ i \in J\}$ — произвольный класс однотипных T-алгебр, X—произвольное множество, U — произвольное T-множество и $D = \langle Q;\ \Sigma \rangle$—произвольная T-алгебра.

Тройку $\langle X, U, D \rangle$ будем называть $\mathfrak{M}$-универсальной, если существует пара таких отображений φ_0: $X \to Q$, $\tilde{\psi}_0$: $U \to \Sigma$, что

а) $\tilde{\psi}_0$ сохраняет арность и является сюръективным отображением, а $\varphi_0 X$ порождает алгебру D.

б) для любого $D_i \in \mathfrak{M}$ и для любых отображений λ: $X \to Q_i$, $\tilde{\mu}$: $U \to \Sigma$ (сохраняющих арность) существует гомоморфизм $(\lambda', \tilde{\mu}')$: $D \Rightarrow D_i$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(X, U) \arrow[r, Rightarrow, "(\varphi_0,\, \tilde{\psi}_0)"] \arrow[d, equal] & D \arrow[d, Rightarrow, "(\lambda',\, \tilde{\mu}')"] \\
(\lambda, \tilde{\mu}) \arrow[r, Rightarrow] & D_i
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\lambda = \varphi_0 \lambda'$ и $\tilde{\mu} = \tilde{\psi}'_0 \tilde{\mu}'$.

Для произвольного X и для произвольного T-множества U, тройка $\langle X, U, U(X) \rangle$ является $\mathfrak{M}$-универсальной для любого класса T-алгебр $\mathfrak{M}$.

Если тройка $<X, U, D>$ является $\mathfrak{M}$-универсальной, то она оказывается и $\mathfrak{M}^*$-универсальной.

Если тройка $<X, U, D>$ является $\mathfrak{M}$-универсальной и $D \in \mathfrak{M}$, то алгебра D называется $\mathfrak{M}$-свободной алгеброй, определенной парой (X, U) и обозначается через $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$.

Теорема 7. *Если $\mathfrak{M}$ — абстрактный, наследственный и мультипликативно замкнутый класс T-алгебр, то свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$ существует для произвольного X и для произвольного T-множества U.*

Доказательство. Пусть $D = <Q; \Sigma>$ есть произвольная T-алгебра класса $\mathfrak{M}$, $\lambda: X \to Q$ и $\tilde{\mu}: U \to \Sigma$ — отображения, сохраняющие арность, где U—произвольное T-множество. Продолжим эти отображения до гомоморфизма $(\lambda^*, \bar{\mu}^*): U(X) \Longrightarrow D$. Пусть $q_i = (r_i, \bar{t}_i)$, $i \in \Lambda$ — совокупность всех ядер таких гомоморфизмов и $q = \bigcap q_i$. Тогда фактор-алгебра $U(X)/q$ оказывается $\mathfrak{M}$-свободной алгеброй, определенной парой (X, U) (в силу теоремы 2).

В частности, если $\mathfrak{M}$—многообразие всех полугрупп, то мы приходим к обычному пониманию свободной полугруппы.

Мы договорились рассматривать группы как алгебры с одной ассоциативной и обратимой операцией. Из предложения 1 следует, что при таком рассмотрении класс всех групп не обладает свободной алгеброй. Если же в определении свободной алгебры порождаемость понимать в теоретико-групповом смысле, то такие свободные алгебры в классе всех групп уже будут существовать. Эти алгебры и изучаются в теории групп под названием свободных групп.

Заметим еще одно применение предложения 1: *свободными алгебрами в классе полугрупп, вложимых в группы, являются свободные полугруппы и только они.*

Доказательство теоремы 6. Необходимость проверяется непосредственно. Докажем достаточность.

Предположим, что класс T-алгебр $\mathfrak{M}$ удовлетворяет трем условиям наследственности и $\mathfrak{M}^*$—многообразие, порожденное классом $\mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^*$, то достаточно показать, что $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}$. Если $D^* \in \mathfrak{M}^*$ и $D^* = <Q^*; \Sigma^*>$, то существует свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}^*}(X, U)$ такая, что D^* является ее гомоморфным образом. По той же причине (теорема 7) существует и свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$. Однако алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$ будет свободной алгеброй и для многообразия $\mathfrak{M}^*$. Таким образом, алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X, U)$ и $F_{\mathfrak{M}^*}(X, U)$ изоморфны, поэтому $F_{\mathfrak{M}^*}(X, U) \in \mathfrak{M}$ и потому $D^* \in \mathfrak{M}$.

§ 9. Многообразия абелевых алгебр

Пусть $D = <Q; \Sigma>$ и $D' = <Q'; \Sigma'>$ — две T-алгебры. Обозначим через Hom (D', D) множество всех гомоморфизмов из алгебры

D' в алгебру D. Будем говорить, что множество $\mathrm{Hom}(D', D)$ является $\tilde{\psi}$-суммируемым, если для любого $A \in \Sigma$, $|A|=n$ и для любых гомоморфизмов

$$(\varphi_1, \tilde{\psi}), \cdots, (\varphi_n, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Hom}(D', D) \text{ пара } (\lambda_A, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Hom}(D', D), \quad \text{где}$$

$$\lambda_A\colon x \to A(\varphi_1 x, \cdots, \varphi_n x),\ x \in Q'.$$

Множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(D', D)$ будем называть просто суммируемым, если оно $\tilde{\psi}$-суммируемо для любого допустимого $\tilde{\psi}$. При этом отображение $\tilde{\psi}\colon \Sigma' \to \Sigma$ называется допустимым, если существует отображение $\varphi\colon Q' \to Q$ такое, что $(\varphi, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Hom}(D', D)$. Наконец, алгебру D будем называть абелевой, если $\mathrm{Hom}(D', D)$ суммируем для любой T-алгебры D', для которой $\mathrm{Hom}(D', D) \neq \varnothing$.

Теорема 8. *T-алгебра D абелева тогда и только тогда, когда в ней выполняется сверхтождество*

$$X[Y(x_{11}, \cdots, x_{1n}), \cdots, Y(x_{m1}, \cdots, x_{mn})] =$$
$$= Y[X(x_{11}, \cdots, x_{m1}), \cdots, X(x_{1n}, \cdots, x_{mn})]$$

для любых $m, n \in T$.

Доказательство. Рассмотрим T-алгебру слов $U(X)$, где $X\{x_1, \cdots, x_m\}$, $U = \{X_1, X_2, \cdots\}$ и произвольную $m \times n$ матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \cdots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}, \cdots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

с элементами из множества Q. Положим

$$\varphi_i^0 x_j = a_{ji},\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\tilde{\psi} X_i = A_i,\ A_i \in \Sigma,\ i = 1, 2, \cdots$$

и продолжим пару $(\varphi_i^0, \tilde{\psi})$ до гомоморфизма $(\varphi_i, \tilde{\psi})\colon U(X) \Rightarrow D$ (в силу теоремы 4). Доказываемое утверждение теперь вытекает из следующих равенств:

$$A_1[A_2(a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, A_2(a_{m1}, \cdots, a_{mn})] = A_1[A_2(\varphi_1 x_1, \cdots$$
$$\cdots, \varphi_n x_1), \cdots, A_2(\varphi_1 x_m, \cdots, \varphi_n x_m)] =$$

$$= [\tilde{\psi} X_1](\lambda_{A_2} x_1, \cdots, \lambda_{A_2} x_m),$$

$$A_2[A_1(a_{11}, \cdots, a_{m1}), \cdots, A_1(a_{1n}, \cdots, a_{mn})] =$$

$$= A_2[[\tilde{\psi} X_1](\varphi_1 x_1, \cdots, \varphi_1 x_m), \cdots, [\tilde{\psi} X_1](\varphi_n x_1, \cdots, \varphi_n x_m)] =$$
$$= A_2[\varphi_1[X_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, \varphi_n[X_1(x_1, \cdots, x_m)]] =$$
$$= \lambda_{A_2}[X_1(x_1, \cdots, x_m)].$$

Из доказанной теоремы следует, что класс однотипных абелевых алгебр образует многообразие.

В категории всех групповых систем абелевыми алгебрами являются коммутативные группы и только они.

В категории всех полугрупп с единицей абелевыми алгебрами будут коммутативные полугруппы и только они. Однако, *полное описание всех абелевых алгебр в многообразии всех полугрупп остается еще открытым.*

Полное описание абелевых алгебр в категории всех квазигрупп дает следующая теорема (см. [15]): *квазигруппа $Q(\cdot)$ абелева тогда и только тогда, когда существует коммутативная группа $Q(+)$ такая, что*

$$x \cdot y = \varphi x + c + \psi y, \text{ где } \varphi, \psi \in Aut\,[Q(+)],\ \varphi\psi = \psi\varphi \text{ и } c \in Q.$$

Некоторые простые результаты об абелевых группоидах имеются в работах [16] и [17].

§ 10. О топологических алгебрах

Понятие обычной топологической алгебры впервые было определено в работах А. И. Мальцева [18]. Однако, изложенный в настоящей работе подход к алгебраическим понятиям, приводит к более общему определению понятия топологической алгебры. А именно, алгебру $< Q; \Sigma >$, где $\Sigma = \bigcup\limits_n \Sigma_n$ и Σ_n — совокупность всех n-арных операций из Σ, будем называть топологической алгеброй, если Q и каждый из множеств Σ_n являются такими топологическими пространствами, что:

а) каждая операция $A \in \Sigma$ $(|A| = n)$ непрерывна в топологии Q, т. е. для любой окрестности V точки $y = A\,(x_1, \cdots, x_n)$ существуют такие окрестности $U_1, \cdots, U_n$ точек $x_1, \cdots, x_n \in Q$, что $A\,(U_1, \cdots, U_n) \subseteq V$;

б) каждая операция $A \in \Sigma$ $(|A| = n)$ непрерывна в топологии Σ_n, т. е. для любой окрестности V точки $y = A\,(x_1, \cdots, x_n)$ существует такая окрестность U точки $A \in \Sigma_n$, что $U\,(x_1, \cdots, x_n) \subseteq V$.

В частности, если множества Σ_n имеют дискретную топологию, то введенное понятие совпадает с обычным понятием топологической алгебры.

Понятие топологической алгебры в смысле М. С. Бургина [19] также является частным случаем введенного понятия.

Если алгебра $< Q; \Sigma >$ является T-алгеброй, то соответствующая топологическая алгебра называется топологической T-алгеброй. Определения подалгебр, фактор-алгебр, непрерывных гомоморфизмов, прямого произведения, многообразия топологических алгебр определяется естественным путем.

Топологическая алгебра $R' = < Q'; \Sigma' >$ называется подалгеброй топологической алгебры $R = < Q; \Sigma >$, если алгебра $< Q'; \Sigma' >$ есть подалгебра алгебры $< Q; \Sigma >$, а топологические пространства Q' и Σ'_n являются соответственно подпространствами Q и Σ_n.

Гомоморфизм T-алгебр $(\varphi, \tilde{\psi})$: $R \Rightarrow R'$ называется непрерывным гомоморфизмом топологических T-алгебр $R = < Q; \Sigma >$ и $R' = < Q'; \Sigma' >$, если отображения $\varphi: Q \to Q'$ и $\tilde{\psi}_n: \Sigma_n \to \Sigma'_n$ являются непрерывными, где $\tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}|_{\Sigma_n}$, $n \in T$.

Прямое произведение семейства топологических T-алгебр

$$\mathfrak{M} = \{R_i | R_i = < Q_i; \Sigma_i >, i \in J\}$$

есть топологическая T-алгебра $\hat{R} = < \hat{Q}; \hat{\Sigma} >$, где $\hat{R}$ как алгебра есть прямое произведение алгебр R_i и топологии на декартовых произведениях $\hat{Q}$ и $\hat{\Sigma}_n$ определены по А. Н. Тихонову.

Класс топологических алгебр называется многообразием, если алгебра этого класса образует многообразие в алгебраическом смысле (§ 7).

Теорема 9. *Класс топологических T-алгебр является многообразием тогда и только тогда, когда он наследственен, гомоморфно и мультипликативно замкнут.*

При этом, класс топологических T-алгебр называется:

а) наследственным, если он вместе с каждой топологической T-алгеброй содержит все ее топологические T-подалгебры,

б) гомоморфно замкнутым, если он вместе с каждой топологической алгеброй содержит каждый ее непрерывно-гомоморфный образ,

в) мультипликативно замкнутым, если он вместе с каждой системой топологических алгебр содержит прямое произведение этого семейства.

Доказательство теоремы 9 проводится по той же категорийной схеме, что и доказательство теоремы 6.

Ереванский государственный
университет

Поступила 11.II.1976

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Ունիվերսալ հանրահաշիվների տեսության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում զարգացվում է ունիվերսալ հանրահաշիվների մի տեսություն, որը ինչ որ չափով տարբերվում է ունիվերսալ հանրահաշիվների սովորական տեսությունից։ Այդ տեսությունը առաջանում է երկրորդ աստիճանի հանրահաշիվների տեսությունից, [1]։ Այդ ուղղությամբ ծագում են մի շարք նոր խնդիրներ, որոնց մի մասը ձևակերպվում են աշխատանքում։ Ընդ որում այդ խնդիրների մի մասը վերաբերվում է դասական հանրահաշիվներին՝ խմբերին, օղակներին և այլն։

Yu. M. MOVSISIAN. *On the theory of universal algebras* (summary)

In this work the author develops a universal algebra theory that differs from the usual universal algebra theory. This theory rises from the second step algebra theory developed by the author [1]. It naturally gives rise to some new problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. М. Мовсисян.* Бипримитивные классы алгебр второй ступени, Мат. исслед. АН МССР., IX, 1 (31), 1974, 70—82.
2. *А. И. Мальцев.* Алгебраические системы, Изд. „Наука", 1970.
3. *П. Кон.* Универсальная алгебра, Изд. „Мир", 1968.
4. *Ю. М. Мовсисян.* О некоторых понятиях общей алгебры, „Научный работник ЕГУ", № 18, 1973, 3—11.
5. *K. Glazek, J. Michalski.* On weak homomorphisms of general non-indexed algebras, Bul. Pol. Acad., Ser. mat., astron., phys., 22, № 7, 1974, 651—656.
6. *T. Fujiwara.* On mapping between algebraic system, Osaka Math. J., 11, № 2, 1959, 153—172.
7. *G. Grätzer.* Universal algebras, Princeton, 1968.
8. *Ю. М. Мовсисян.* Сверхтождества ассоциативности в системах полугрупп, ДАН Арм.ССР, LXII, № 5, 1976.
9. *А. И. Мальцев.* Свободные топологические алгебры, Изв. АН СССР, сер. матем. 21, № 2, 1957, 171—198.
10. *В. Д. Белоусов.* Уравновешенные тождества в квазигруппах, Мат. сборник, 70, (112), № 1, 55—97.
11. *Ю. М. Мовсисян.* Несократимые уравновешенные сверхтождества, исслед. по теории квазигрупп и групп, Кишинев, 1973, 115—127.
12. *Ю. М. Мовсисян.* О системах полугрупп, Уч. записки ЕГУ, № 2, 1975, 25—31.
13. *J. Aczel.* Proff of theorem on distributive type hyperidentities, Algebra Univers., 1, № 1, 1971, 1—6.
14. *S. Fajtlowicz.* Birkhoff theorem in the category of non-indeched algebras, Bul., Acad. Polon., Ser. Math. Astr. Phys., 17, 1969, 273—275.
15. *R. H. Bruck.* Some result in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc., 55, 1944, 19—52.
16. *R. Strecker.* Über entropische Gruppoide, Potsdam. Forsch. R., B, № 3, 1974, 153—154.
17. *I. Lehman.* Einige Ergebnise zur Theorie der bisymmetrischen Quasigruppen, там же, 154—156.
18. *А. И. Мальцев.* К общей теории алгебраических систем, Мат. сборник, 35 (77), № 1, 1954, 3—20.
19. *М. С. Бургин.* Топологические алгебры с непрерывными системами операций, ДАН СССР, 213, № 3, 1973, 505—508.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

М. В. САМОХИН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ СТРОГО КРАЙНИМИ ТОЧКАМИ ЕДИНИЧНОГО ШАРА АЛГЕБРЫ H^∞

Введение

Понятие строго крайней точки единичного шара произвольного банахова пространства B было введено в работе [1]. Мы воспользуемся модифицированным определением (оно приводится в работе [2]), которое отличается от первоначального лишь по форме, но более удобно для целей настоящей работы.

Точка $x \in B$; $\|x\| = 1$, называется строго крайней, если выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\max\{\|x + y\|; \|x - y\|\} \leqslant 1 + \delta$ для некоторого $y \in B$, то $\|y\| \leqslant \varepsilon$.

Непосредственно из определения видно, что любая строго крайняя точка является крайней точкой единичного шара пространства B.

В первой части настоящей работы будет доказана теорема, характеризующая строго крайние точки единичного шара произвольной равномерной алгебры A, как функции, модуль которых равен единице на границе Шилова алгебры A. В качестве простого следствия этой теоремы будет получен результат работы [2] о строго крайних точках единичного шара алгебры $H^\infty(\Delta)$ ограниченных аналитических функций в единичном круге Δ. Следует заметить, что доказательство соответствующего результата в работе [2] является чисто аналитическим и не использует алгебраической структуры $H^\infty(\Delta)$.

Во второй части будут получены некоторые свойства функций, являющихся строго крайними точками единичного шара алгебры $H^\infty(D)$, где D — произвольная область расширенной плоскости (предполагается, что алгебра $H^\infty(D)$ содержит непостоянные функции). Полученные здесь результаты являются обобщением, на случай произвольной строго крайней точки единичного шара алгебры $H^\infty(D)$, известных свойств экстремальной функции в задаче о лемме Шварца для области D. Эта задача впервые была подробно рассмотрена в работе [4], а затем в работах [5] и [6]. В качестве приложения будет получен необходимый признак экстремали для задач, рассмотренных в работе [9].

В третьей части показано, что для достаточно широкого класса областей D, гомоморфизм $\pi^*: H^\infty(D) \to H^\infty(\Delta)$, индуцированный универсальным накрывающим отображением $\pi: \Delta \to D$, переводит строго крайние точки единичного шара алгебры $H^\infty(D)$ в строго крайние точки единичного шара алгебры $H^\infty(\Delta)$. Это позволяет (для данного класса областей) уточнить полученную во второй части теорему о множестве значений функции, являющейся строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность профессору С. Я. Хавинсону за консультации.

1°. Рассмотрим пространство $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X с равномерной нормой. Пусть A — замкнутая подалгебра $C(X)$, содержащая константы и разделяющая точки X. Границу Шилова алгебры A обозначим через S.

Теорема 1.1. *Для того чтобы функция f была строго крайней точкой единичного шара алгебры A необходимо и достаточно, чтобы $|f(x)| = 1$ для любой точки $x \in S$.*

Доказательство. Пусть модуль функции f равен единице на границе Шилова. Покажем, что f является строго крайней точкой. Для заданного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \sqrt{1+\varepsilon} - 1$. Если функция $g \in A$ такова, что $\|f \pm g\| \leqslant 1 + \delta$, то легко видеть, что для любой точки $x \in S$ будет $|g(x)| \leqslant \varepsilon$, а следовательно и $\|g\| \leqslant \varepsilon$.

Пусть теперь функция f является строго крайней точкой единичного шара алгебры A. Покажем, что ее модуль равен единице на границе Шилова.

Предположим противное, то есть допустим, что $|f(x)| < 1$ для некоторой точки $x \in S$. Пользуясь непрерывностью функции f, выберем такую окрестность U точки x, для всех точек t которой будет выполнено неравенство $|f(t)| \leqslant \rho < 1$, и положим $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-\rho)$. Из минимальности границы Шилова следует, что найдется такая функция $h \in A$, для которой

$$\|h\| = \sup_X |h| = \sup_U |h| = 1 \text{ и } |h(y)| < 1$$

для любой точки $y \in X \setminus U$. Отсюда следует, что $(1-\rho)|h(t)| + |f(t)| \leqslant 1$ для всех точек $t \in U$.

Предположим, что существует требуемое $\delta > 0$. Из непрерывности функций f и h следует, что найдется такое открытое множество $V \subset X$, что $\bar{U} \subset V$ и для всех точек t множества V выполнено неравенство

$$(1-\rho)|h(t)| + |f(t)| \leqslant 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Пусть $q = \sup_{X \setminus V} |h| < 1$. Выберем целое положительное число N, для которого $q^N < \frac{\delta}{2}$ и рассмотрим функцию $g = (1-\rho) h^N$. Для этой функции получаем

$$\|g\| = \sup_X (1-\rho)\,|h^N| = (1-\rho)\sup_X |h|^N = 1-\rho > \varepsilon.$$

Но с другой стороны

$$|g(t)| + |f(t)| = (1-\rho)\,|h(t)|^N + |f(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} (1-\rho)\,|h(t)| + |f(t)| \leqslant 1 + \dfrac{\delta}{2}; & t \in V \\ q^N + 1 \qquad\qquad\qquad \leqslant 1 + \dfrac{\delta}{2}; & t \in X \setminus V. \end{cases}$$

Значит $\|f \pm g\| < 1 + \delta$ и, следовательно, функция f не является строго крайней точкой единичного шара алгебры A. Полученное противоречие доказывает теорему.

В дальнейшем мы будем рассматривать строго крайние точки алгебры $H^\infty(D)$ ограниченных аналитических функций в произвольной области D расширенной плоскости. Поскольку алгебру $H^\infty(D)$ можно рассматривать, как равномерную алгебру на пространстве максимальных идеалов, то к ней применима теорема 1.1. В частности для единичного круга $\Delta = \{|z| < 1\}$ справедлив следующий результат [2].

Следствие 1.2. Внутренние функции и только они являются строго крайними точками единичного шара алгебры $H^\infty(\Delta)$.

2°. В различных работах, посвященных решению экстремальных задач в $H^\infty(D)$ ([3],]4], [6], [9]) получалось, что экстремальные функции во многих случаях обладают тем свойством, что их модуль на границе Шилова алгебры $H^\infty(D)$ равен единице. В явном виде это утверждение формулируется в работах [6] и [9], а в работах [3] и [4] оно немедленно следует из граничного поведения экстремалей. Наиболее полный результат в этом направлении содержится в работе [9]. Таким образом, экстремали в этих задачах, в силу теоремы 1.1, оказываются строго крайними точками единичного шара алгебры $H^\infty(D)$.

В работах [4], [5], [6] исследована экстремальная функция для задачи о лемме Шварца в произвольной области D расширенной плоскости. Мы покажем, что некоторые свойства этой функции не являются специфичными именно для данной задачи; точнее, будет показано, что любая строго крайняя точка единичного шара алгебры $H^\infty(D)$ этими свойствами обладает. В частности, это верно и для экстремальных функций во многих других задачах.

Обозначим через M и S соответственно пространство максимальных идеалов и границу Шилова алгебры $H^\infty(D)$. Нам потребуется естественная проекция Z пространства M на замыкание $\overline{D}$ области D. (Подробное построение этой проекции имеется в работе [8]). Если $\varphi \in M$, то $Z(\varphi)$ это единственная точка ζ расширенной плоскости, такая, что $\varphi(f) = f(\zeta)$ для всех функций $f \in H^\infty(D)$, аналитичных в этой точке.

При этом множество $Z^{-1}(D)$ гомеоморфно отображается на D. Слоем M_ζ над произвольной точкой $\zeta \in \overline{D}$ называется множество $Z^{-1}(\zeta)$.

Точка $\zeta\in\partial D$ называется существенной [10], если найдется такая функция $h\in H^\infty(D)$, которая не может быть аналитически продолжена ни в какую окрестность точки ζ; в противном случае точка ζ называется устранимой. Совокупность существенных точек обозначим $e(D)$. Легко видеть, что множество $e(D)$ замкнуто, и любая ограниченная аналитическая функция в области D продолжается до ограниченной аналитической функции на $\overline{D}\setminus e(D)$.

Пусть A — произвольная банахова алгебра, а M_A и S_A соответственно пространство максимальных идеалов и граница Шилова алгебры A. Хорошо известно, что для произвольного элемента $a\in A$ справедливо включение $\partial[\hat{a}(M_A)]\subset\hat{a}(S_A)$. Здесь $\hat{a}$ — преобразование Гельфанда элемента a. (По поводу доказательства см., например, работу [7]). Следующая теорема является уточнением этого результата для алгебры $H^\infty(D)$.

Теорема 2.1. *Для любой функции $f\in H^\infty(D)$ имеет место включение*

$$\partial[\hat{f}(M)]\subset e(f(D))\subset\hat{f}(S),$$

где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда функции f.

Доказательство. Из компактности пространства M и непрерывности функции $\hat{f}$ следует, что $\overline{f(D)}\subset\hat{f}(M)$. С другой стороны, в работе [8] показано, что образ $\hat{f}(M_\zeta)$ слоя над произвольной точкой $\zeta\in\overline{D}$ совпадает с предельным множеством функции f в этой точке, и, следовательно, $\overline{f(D)}=\hat{f}(M)$. Рассмотрим теперь произвольную точку $\zeta\in\partial[\overline{f(D)}]$. Поскольку множество $\overline{f(D)}$ замкнуто, то любая окрестность точки ζ содержит открытое множество, не принадлежащее $f(D)$ и, следовательно, не являющееся устранимым для $H^\infty(f(D))$. В работе [10] показано, что из этого следует существенность точки ζ. Таким образом первое включение доказано.

Докажем второе. Пусть точка $\zeta_0\in\partial[f(D)]$ является существенной. В работе [11] доказано, что в этом случае найдется функция $g\in H^\infty(f(D))$, образующая пик в этой точке, то есть такая, что

$$\|g\|=\sup_{f(D)}|g|=\overline{\lim_{z\to\zeta_0}}|g|\quad\text{и}\quad\overline{\lim_{z\to\zeta}}|g|<\|g\|$$

для любой точки $\zeta\in\partial[f(D)]\setminus\{\zeta_0\}$. Рассмотрим суперпозицию $g\circ f\in H^\infty(D)$, и пусть $a\in S$ такая точка, для которой $|\widehat{g\circ f}(a)|=\|g\circ f\|$. Покажем, что $\hat{f}(a)=\zeta_0$. Если это не так, то $\hat{f}(a)=\zeta_1\neq\zeta_0$. Выберем такое число δ, что $0<\delta<|\zeta_1-\zeta_0|$ и пусть $q=\sup\{|g(\zeta)|:\zeta\in f(D);\ |\zeta-\zeta_1|<\delta\}$. Тогда $q<\|g\|$. Из непрерывности функций $\hat{f}$ и $\widehat{g\circ f}$ следует, что найдется такая окрестность U точки a, для всех точек x которой будут выполнены неравенства

$$\|g\| - |g \circ \hat{f}(x)| \leqslant \frac{\|g\| - q}{2}$$

и

$$|\hat{f}(x) - \zeta_1| \leqslant \delta.$$

Поскольку преобразования Гельфанда из $H^\infty(D)$ непрерывны на M, то из принципа максимума модуля для аналитических функций следует, что граница Шилова принадлежит границе замыкания множества $Z^{-1}(D)$ в пространстве M. Следовательно, найдется точка $x_0 \in U$ такая, что $w_0 = Z(x_0) \in D$. Для этой точки предыдущие неравенства можно переписать в виде:

$$\|g\| - |g \circ f(w_0)| \leqslant \frac{\|g\| - q}{2},$$

$$|f(w_0) - \zeta_1| \leqslant \delta.$$

Из первого неравенства получаем, что

$$|g \circ f(w_0)| \geqslant \frac{\|g\| + q}{2} > q.$$

Но из второго неравенства следует, что $|g \circ f(w_0)| = |g(f(w_0))| \leqslant q$. Полученное противоречие доказывает равенство $\hat{f}(a) = \zeta_0$, а, следовательно, и второе включение.

Следствие 2.2. *Для любой функции $f \in H^\infty(D)$ множество $\partial[f(D)] \setminus \hat{f}(S)$ устранимо для $H^\infty(D)$.*

Следующие два простых примера показывают, что включения, указанные в теореме 2.1, вообще говоря, строгие.

1) Рассмотрим область D, полученную из единичного круга Δ отбрасыванием отрезка $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ и тождественное отображение z этой области на себя. Тогда $\hat{z}(M) = \Delta$ и, следовательно, $\partial[\hat{z}(M)] = \partial\Delta$ в то время, как

$$e(z(D)) = e\left(\Delta \setminus \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) = \partial\Delta \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

2) Пусть E — замкнутое, всюду разрывное подмножество единичного круга Δ положительной логарифмической емкости и аналитической емкости нуль (по поводу понятия и свойств аналитической емкости см. [4] и [7]). Рассмотрим область $\Delta \setminus E$ и универсальное накрывающее отображение π: $\Delta \to \Delta \setminus E$. Тогда $e(\pi(\Delta)) = e(\Delta \setminus E) = \partial\Delta$ (последнее равенство вытекает из свойств аналитической емкости). Если теперь предположить, что $\hat{\pi}(S) = \partial\Delta$, то из теоремы 1.1 и следствия 1.2 мы получим, что функция π — внутренняя. Но по теореме Фростмана ([14], теорема 2.14) внутренняя функция должна принимать

все значения из единичного круга за исключением, быть может, множества нулевой логарифмической емкости. Полученное противоречие показывает, что $\hat{\pi}(S)$ больше чем единичная окружность.

В качестве не тривиального примера функции, доставляющей равенство в теореме 2.1 можно рассмотреть произвольную строго крайнюю точку f единичного шара алгебры $H^\infty(D)$, не равную тождественно постоянной. Из теоремы 1.1 и теоремы 2.1 следует, что

$$\partial\,[\hat{f}(M)] \subset e\,(f(D)) \subset \hat{f}(S) \subset \partial\Delta.$$

Но, так как $f \not\equiv \mathrm{const}$, то, на самом деле, здесь имеют место равенства. В частности, часть границы $\partial\,[f(D)]$, попавшая внутрь единичного круга, оказывается устранимой для $H^\infty(f(D))$ и справедлива следующая

Теорема 2.3. *Пусть функция f является строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$ и $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда любая ограниченная аналитическая функция в области $f(D)$ продолжается до ограниченной аналитической функции в единичном круге Δ.*

Используя понятие аналитической емкости, эту теорему можно сформулировать следующим образом:

Любая функция $f \not\equiv \mathrm{const}$, являющаяся строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$, принимает в области D все значения из единичного круга Δ, кроме, быть может, множества E_f аналитической емкости нуль.

Замечание. Соответствующий результат для экстремальной функции в лемме Шварца доказан в работе [4] и повторен в [5].

Сделаем теперь небольшое отступление, касающееся экстремальных задач в $H^\infty(D)$. Рассмотрим, следуя [9], задачу о

$$\sup_{f \in H^\infty(D);\, \|f\| < 1} \left| \int f\, d\mu \right|,$$

где μ — конечная мера, сосредоточенная на некотором компакте $K \subset D$, не разделяющем границу области D. Как уже было сказано, экстремальная функция f^* в этой задаче является строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$. Следовательно, по теореме 2.3 функция f^* принимает все значения из единичного круга Δ, за исключением, быть может, множества аналитической емкости нуль; и значит $H^\infty(\Delta) = H^\infty(f^*(D))$. Укажем теперь, как можно получить дополнительную информацию об экстремальной функции f^*. Для этого рассмотрим компакт $f^*(K) \subset \Delta$ и на нем меру ν, положив $\nu(E) = \mu(f^{*-1}(E))$ для любого множества $E \subset \Delta$. Рассмотрим теперь задачу о

$$\sup_{g \in H^\infty(\Delta);\, \|g\| < 1} \left| \int g\, d\nu \right|.$$

Из определения меры ν следует, что

$$\int g\,d\nu = \int g \circ f^*\,d\mu$$

и, следовательно,

$$\sup_{g\in H^\infty(\Delta);\,\|g\|<1} \left|\int g\,d\nu\right| = \sup_{g\in H^\infty(\Delta);\,\|g\|<1} \left|\int g\circ f^*\,d\mu\right| \leqslant \sup_{f\in H^\infty(D);\,\|f\|<1} \left|\int f\,d\mu\right| =$$

$$= \int f^*\,d\mu.$$

Но при $g(z) = z$ получаем, что

$$\int z\,d\nu = \int f^*\,d\mu$$

и, следовательно, функция z служит единственной, с точностью до умножения на $e^{i\alpha}$, экстремалью в индуцированной задаче (единственность следует из единственности функции f^*). Пусть $\hat{\nu}$ — преобразование Коши меры ν. Тогда, если представить функции $g \in H^\infty(\Delta)$ интегралом Коши в единичном круге, и изменить порядок интегрирования, получим

$$\int z\,d\nu = \sup_{g\in H^\infty(\Delta);\,\|g\|<1} \left|\int g\,d\nu\right| = \sup_{g\in H^\infty(\Delta);\,\|g\|<1} \left|\int_{\partial\Delta} g\cdot\hat{\nu}\,d\zeta\right| = \inf_{\varphi\in H^1(\Delta)} \int_{\partial\Delta} |\hat{\nu} - \varphi|\,ds.$$

Третье равенство — это следствие из хорошо известного принципа двойственности, подробно рассмотренного в работе [3].

Пусть нижняя грань достигается для некоторой функции $\varphi^* \in H^1(\Delta)$. Из характеристики экстремальных функций, данной в этой же работе, находим, что в нашем случае

$$\zeta\,(\hat{\nu}(\zeta) - \varphi^*(\zeta))\,d\zeta \geqslant 0,$$

где $\zeta \in \partial\Delta$. Полученное неравенство можно рассматривать, как необходимый признак экстремальной функции f^* в исходной задаче.

Лемма 2.4. *Множество $E \subset \partial D \setminus \overline{\partial D}$ является устранимым для $H^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда $E \cap Z(S) = \varnothing$, где $Z\colon M \to \overline{D}$ — естественная проекция.*

Доказательство. Необходимость утверждения следует из принципа максимума модуля для аналитических функций.

Если же множество E не устранимо, то оно содержит существенные точки. Рассмотрим точку ζ и функцию $g \in H^\infty(D)$, образующую в ней пик. Возьмем точку $a \in S$, для которой $|\hat{g}(a)| = \|g\|$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1, можно показать, что $Z(a) = \zeta$.

Теорема 2.5. *Пусть для некоторой функции $f \in H^\infty(D)$ и $f \not\equiv$ const имеет место равенство $\partial[\hat{f}(M)] = \hat{f}(S)$. Тогда для того* *чтобы множество* $E \subset \partial D \setminus \partial\overline{D}$ *было устранимым для* $H^\infty(D)$, *необходимо и достаточно, чтобы оно было устранимо для* f.

Доказательство. Необходимость очевидна. Предположим теперь, что множество E устранимо для функции f. В силу леммы 2.4 достаточно показать, что $E \cap Z(S) = \varnothing$. Поскольку множество E устранимо для f, то $f(E) \subset \operatorname{int}\overline{f(D)}$ и, кроме того, $f(E) = \hat{f}(Z^{-1}(E))$. Следовательно, $f(E) \cap \hat{f}(S) = \varnothing$, а значит и $E \cap Z(S) = \varnothing$.

Из рассуждений, предшествовавших теореме 2.3, следует, что условие теоремы 2.5 выполнено для любой строго крайней точки единичного шара алгебры $H^\infty(D)$ и, следовательно, справедлива

Теорема 2.6. *Пусть* f — *строго крайняя точка единичного шара алгебры* $H^\infty(D)$ *и* $f \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда любое множество* $E \subset \partial D \setminus \partial\overline{D}$, *устранимое для* f, *будет устранимо и для* $H^\infty(D)$.

Замечание. Соответствующий результат для экстремальной функции в лемме Шварца доказан в работе [4] и повторен в [5].

3°. Пусть D — произвольная область расширенной плоскости, а Δ — единичный круг. Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $\pi\colon \Delta \to D$ и гомоморфизм $\pi^*\colon H^\infty(D) \to H^\infty(\Delta)$, индуцированный этим отображением. Известно (см. [12], [13]), что для некоторого, достаточно широкого класса областей (какого именно — будет сказано дальше), справедлив следующий результат:

Функция f является крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда $\pi^*(f)$ является крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(\Delta)$.

Мы покажем, что в рассматриваемом классе областей это утверждение справедливо и для строго крайних точек. Опишем теперь области, для которых верны высказанные утверждения (см. [13]).

Пусть в некоторой области D задана многозначная ограниченная аналитическая функция h такая, что ее модуль $|h|$ является однозначной функцией. Если γ — некоторая замкнутая гладкая кривая в D, то при продолжении элемента функции h вдоль этой кривой, он умножится на некоторую константу $\Gamma_h(\gamma)$, равную по модулю единице (поскольку $|h|$ — однозначная функция). Легко видеть, что $\Gamma_h(\gamma)$ зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ кривой γ и не зависит от того из какой точки продолжать элемент h. Соответствие $h^*\colon [\gamma] \to \Gamma_h(\gamma)$ согласовано с операцией умножения в фундаментальной группе $\pi_1(D)$ и, следовательно, задает характер на этой группе.

Пусть теперь Γ—произвольный характер на $\pi_1(D)$. Обозначим через $H^\infty(D, \Gamma)$ множество всех многозначных ограниченных аналитических функций h в области D, модуль которых однозначен, и таких, что $h^*[\gamma] = \Gamma[\gamma]$ для любого элемента $[\gamma] \in \pi_1(D)$. Для произвольной точки $\xi \in D$ положим:

$$M(D, \Gamma, \xi) = \sup\{|h(\xi)|\colon h \in H^\infty(D, \Gamma);\ |h| \leqslant 1 \text{ в } D\}$$

и $M(D, \xi) = \inf \{M(D, \Gamma, \xi)$: Γ есть характер на $\pi_1(D)\}$ (если класс $H^\infty(D, \Gamma)$ пуст, то $M(D, \Gamma, \xi) = 0$).

Теорема W. [13]. Все классы $H^\infty(D, \Gamma)$ одновременно нетривиальны тогда и только тогда, когда $M(D, \xi) > 0$ для некоторой точки $\xi \in D$ (и, следовательно, для всех точек D).

В работе [6] доказано, что если область D такова, что $M(D, \xi) > 0$ для некоторой точки $\xi \in D$, и f—экстремальная функция в лемме Шварца для D, то суперпозиция $f \circ \pi$ будет внутренней функцией в единичном круге. Однако доказательство этого результата не опирается на специфику экстремальной функции и может быть перенесено на случай произвольной строго крайней точки.

Теорема 3.1. *Пусть область D такова, что $M(D, \xi) > 0$ для некоторой точки $\xi \in D$. Если функция f является строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$, то суперпозиция $f \circ \pi$ будет внутренней функцией в единичном круге.*

Доказательство. Предположим противное, то есть допустим, что существует множество F на единичной окружности, положительной меры, для каждой точки t которого $|f \circ \pi(t)| < \rho < 1$ для некоторого ρ $\left(\rho > \dfrac{1}{2}\right)$. Не теряя общности предположим, что множество F инвариантно относительно группы G дробно линейных преобразований круга Δ на себя, таких, что $\pi \circ g = \pi$ для любого элемента $g \in G$. Пусть функция u осуществляет гармоническое продолжение характеристической функции множества F внутрь единичного круга. Тогда функция u инвариантна относительно группы G. Выберем число $\delta > 0$ так, что $\dfrac{1}{\rho} > \delta > 1$ и рассмотрим функцию $h = \dfrac{\delta}{e} \cdot \exp(u + iv)$, где v — гармонически сопряженная к u. Тогда

$$h \in H^\infty(\Delta) \text{ и } |h(z)| = \begin{cases} \delta; & z \in F \\ \dfrac{\delta}{e}; & z \in \partial\Delta \setminus F. \end{cases}$$

Следовательно, $|h \cdot (f \circ \pi)| \leqslant 1$ почти всюду на $\partial\Delta$. Кроме этого $|h \circ g| = |h|$ для любого элемента $g \in G$. Поэтому существует многозначная ограниченная аналитическая функция H, с однозначным модулем, в области D такая, что $H \circ \pi = h$.

Выберем точку $z_0 \in \Delta$ так, что $|h(z_0)| > 1 + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из теоремы W следует, что для любого n существует многозначная ограниченная аналитическая функция d_n в области D, такая, что

1) $|d_n(\pi(z_0))| \geqslant \sigma > 0$ (σ не зависит от n),

2) произведение $d_n \cdot H^n$ есть однозначная аналитическая функция в области D,

3) $|d_n| < 1$ в области D.

Устремим n к бесконечности. Тогда

$$\|d_n \cdot H^n\| \geqslant |H(\pi(z_0))|^n \cdot |d_n(\pi(z_0))| \geqslant (1+\varepsilon)^n \cdot \sigma \to \infty.$$

Но поскольку умножение на f есть изометрия в $H^\infty(D)$, то

$$\|d_n \cdot H^n\| = \|f^n \cdot d_n \cdot H^n\| = \|(f^n \circ \pi) \cdot h^n \cdot (d_n \circ \pi)\| \leqslant \|(f \circ \pi) \cdot h\|^n \leqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 3.1 и следствия 1.2 и вытекает нужное утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть область D такова, что $M(D, \xi) > 0$ для некоторой точки $\xi \in D$. Функция f является строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда $\pi^*(f)$ является строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(\Delta)$.*

Замечание. Поскольку для областей такого типа суперпозиция $f \circ \pi$ будет внутренней функцией, то, используя известную теорему Фростмана, можно получить следующее утверждение, уточняющее теорему 2.3:

Пусть область D такова, что $M(D, \xi) > 0$ для некоторой точки $\xi \in D$. Тогда любая функция f, являющаяся строго крайней точкой единичного шара алгебры $H^\infty(D)$, принимает в области D все значения из единичного круга Δ, за исключением, быть может, некоторого множества E_f логарифмической емкости нуль.

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила 12.V.1974

Մ. Վ. ՍԱՄՈԽԻՆ. H^∞ հանրահաշվի միավոր գնդի խիստ ծայրային կետեր հանդիսացող ֆունկցիաների որոշ հատկություններ (*ամփոփում*)

Դիցուք D-ն ընդլայնված հարթության կամայական տիրույթ է և դիցուք f ֆունկցիան հանդիսանում է $H^\infty(D)$ հանրահաշվի միավոր գնդի խիստ ծայրային կետ։ Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ եթե $f \not\equiv$ const (ենթադրվում է, որ այդպիսի ֆունկցիաներ գոյություն ունեն), ապա

1) $\{|z| < 1\} \setminus f(D)$ *բազմությունը ունի անալիտիկ, իսկ բավական լայն դասի տիրույթների համար նաև լոգարիթմական զրո ունակություն։*

2) *կամայական* $E \subset \partial D \setminus \partial \bar{D}$ *բազմությունը, որը վերացնելի է f-ի համար, վերացնելի է նաև $H^\infty(D)$-ի համար։*

M. V. SAMOKHIN. *Some properties of strict extreme point functions in the unite ball of H^∞ algebra* (summary)

Let D be any domain in the extended plane and let the function f be a strict extreme point in the unit ball of algebra $H^\infty(D)$. In the present work it is shown that if $f \not\equiv$ const (it is supposed that such a function exists) then:

1) the set $\{|z|<1\} \setminus f(D)$ is of analytic (and for a large class of domains logarithmic) capacity zero;

2) any set $E \subset \partial D \setminus \partial \bar{D}$ which is removable for f is such for all t he $H^\infty(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mc. R. Gulgan.* Strong extreme points in Banach spaces, Manuscripta math., 5, 1971, 113—122.
2. *J. Cima* and *J. Thompson.* On strong extreme points in H^p, Duke Math. J., 40, 1973, 529—532.
3. *С. Я. Хавинсон.* Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях, Матем. сб., 36 (78), 1955, 445—478.
4. *С. Я. Хавинсон.* Об аналитической емкости множеств, совместной нетривиальности различных классов аналитических функций и лемме Шварца в произвольных областях, Матем. сб., 54 (96), 1961, 3—50.
5. *S. Fisher.* On Schwarz's lemma and inner functions, Trans. Amer. Math. Soc., 138, 1969, 229—240.
6. *S. Fisher.* The moduli of extremal functions, Mich. Math. J., 19, 1972, 179—183.
7. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, Изд. „Мир", 1973.
8. *T. Gamelin.* Localisation of corona problem, Pacific J. Math., 34, 1970, 73—81.
9. *T. Gamelin.* Extremal problems on arbitrary domains, Mich. Math. J., 20, 1973, 3—11.
10. *W. Rudin.* Some theorems on bounded analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 78, 1955, 333—342.
11. *A. Beck.* A theorem on maximum modulus, Proc. Amer. Math. Soc., 15, 1964, 345—349.
12. *M. Voichick.* Extreme points of bounded analytic functions on infinitely connected regions, Proc. Amer. Math. Soc., 17, 1966, 1366—1369.
13. *H. Widom.* The maximum modulus principal for multiple valued analytic functions, Acta Math., 126, 1971, 63—82.
14. *Э. Коллингвуд, А. Ловатер.* Теория предельных множеств, Изд. „Мир", 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

З. А. АРУШАНЯН

ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этой работе выясняется, какая скорость убывания данных Коши $\left\{U, \dfrac{\partial U}{\partial t}, \cdots, \dfrac{\partial^{2p-1} U}{\partial t^{2p-1}}\right\}$ при приближении (вдоль границы) к фиксированной граничной точке обеспечивает обращение в тождественный нуль решения задачи Коши для полигармонического уравнения.

Для гармонических функций подобная задача была поставлена в работе [2]. Ее решение было дано в работах [1], [9]. В [1] можно найти и сведения по истории вопроса.

§ 1. Формулировка и обсуждение результатов

Обозначения: $R_+^{n+1} \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \in R^{n+1} \mid t > 0\}$;

$$D^\delta \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^n \mid |x| \leqslant \delta\}; \quad S^{n-1} \overset{\text{def}}{=} \{x \in R^n \mid |x| = 1\};$$

ω_{n-1} — естественная мера на единичной сфере S^{n-1}. Точку пространства R^{n+1} с координатами $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ мы будем обозначать символом (x, t), где $x = (x_1, \cdots, x_n)$; пространство R^n мы будем отождествлять с гиперплоскостью $\{(x, t) \in R^n \mid t = 0\}$.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}; \quad \Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta.$$

Полигармоническое уравнение в этих обозначениях принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)^p U(x, t) = 0 \quad (p = 1, 2, \cdots). \tag{1.1}$$

Функции, удовлетворяющие уравнению (1.1) назовем p-гармоническими.

Нам потребуется понятие правильной мажоранты (см. [1], стр. 63). Так называется неотрицательная функция v, заданная на некотором интервале $(0, \eta)$, непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$x \cdot \frac{v'(x)}{v(x)} \uparrow +\infty \text{ при } x \downarrow +0.$$

1°. **Формулировка основного результата.** В этой формулировке будут участвовать натуральное число p, правильная мажоранта v, два непересекающихся множества T и S такие, что

$$T=\{j_0,\ j_1,\cdots,\ j_{p-1}\},\quad S=\{s_0,\ s_1,\cdots,\ s_{p-1}\},$$

причем $T\cap S=\varnothing$, $T\cup S=\{0,1,\cdots,2p-1\}$ и p-открытых подмножеств сферы S^{n-1}, которые мы будем обозначать через E_s $(s\in S)$. Кроме того, нам понадобится область G с достаточно гладкой границей, содержащаяся в R^{n+1}_{+} и такая, что при некотором $\delta>0$

$$D^{\delta}\subset\partial G\cap R^n.$$

Теорема А. *Пусть U—p-гармоническая функция класса $C^{2p}(\overline{G})$. Если*

$$1.\quad \max_{\theta\in E_s}\left|\frac{\partial^s U}{\partial t^s}\right|(\rho\cdot\theta)=o\ (\rho^{N+1})\quad(\rho\to0,\ s\in S)$$

для любых $N=0,\ 1,\cdots,$

$$2.\quad \max_{\theta\in S^{n-1}}\left|\frac{\partial^j U}{\partial t^j}\right|(\rho\cdot\theta)\leqslant v\ (\rho)\quad(\rho>0,\ j\in T)$$

для некоторой правильной мажоранты v такой, что

$$3.\quad \int\limits_0 \log v\ (t)\ dt=-\infty,$$

то

$$U\ (x,\ t)\equiv0\ \ ((x,\ t)\in G).$$

Мы докажем более общую теорему, в которой вместо решений класса $C^{2p}(\overline{G})$ рассматриваются решения соболевского класса $H^{2p}(G)$— всех функций, обобщенные производные которых до порядка $2p$ включительно принадлежат $L^2(G)$. Функции класса $H^{2p}(G)$ и их нормальные производные до порядка $2p-1$ имеют на ∂G естественные граничные значения. Более точно

$$\frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}\in H^{2p-k-\frac{1}{2}}(\partial G)\quad(k=0,\ 1,\cdots,\ 2p-1).$$

Именно эти граничные данные имеются в виду в формулировке теоремы В (см. § 3, теорема о следах).

Теорема В. *Пусть U — p-гармоническая функция класса $H^{2p}(G)$. Если*

$$1.\quad \int\limits_0^{\rho}\int\limits_{E_s}\left|\frac{\partial^s U}{\partial t^s}\right|(r\cdot\theta)\ d\omega_{n-1}\ r^{n-1}\ dr=o\ (\rho^{N+1})\quad(\rho\to0,\ s\in S)$$

для любых $N = 0, 1, 2, \cdots,$

$$2. \quad \int\limits_{|x|<\rho} \left| \frac{\partial^j U}{\partial t^j} \right| (x)\, dx \leqslant v(\rho) \quad (\rho > 0,\ j \in T)$$

для некоторой правильной мажоранты v *такой, что*

$$3. \quad \int\limits_0 \log v(t)\, dt = -\infty,$$

то $U(x, t) \equiv 0$ $((x, t) \in G)$.

Доказательство этой теоремы будет дано в § 6. Там будет показано, что условие 1 можно ослабить.

Основное отличие задачи Коши для p-гармонических функций от задачи Коши для гармонических функций состоит в большем разнообразии способов разбиения множества данных на две группы, то есть способов выбора множеств $T = \{j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}\}$ и $S = \{s_0, s_1, \cdots \cdots, s_{p-1}\}$. Для некоторых разбиений результаты получаются технически более просто. Так, например, обстоит дело для множества $T = \{0, 2, \cdots, 2p-2\}$, когда „$S$-данные“ Коши довольно просто выражаются через „T-данные“, или для $S = \{0, 1, \cdots, p-1\}$, когда в выражениях „$S$-данных“ через „$T$-данные“ присутствуют лишь потенциалы Рисса, тогда как в общем случае к этим потенциалам приходится применять дифференциальные операторы (то есть рассматривать псевдодифференциальные соотношения между S и T-данными Коши), усложняющие анализ.

Наше доказательство теоремы В состоит в установлении связи между свойствами единственности решений задачи Коши для полигармонических уравнений (1.1) и свойствами единственности псевдопотенциалов Ньютона

$$\Phi[f, w, x] = D^a \left[\int\limits_{|y|<\eta} \frac{f(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} + w(x) \right],$$

где $f \in L^1(D^\eta)$, w — вещественно-аналитическая функция, а D^a — дифференциальный оператор.

2°. План работы. Для этого мы в § 4 выводим интегро-дифференциальные соотношения, выражающие зависимость данных Коши „S-группы“ от данных Коши „T-группы“ на плоском куске границы области G (см. [3]). Выводу этой зависимости предшествуют подготовка некоторых простых алгебраических фактов (см. § 2, п. 1), сведения о разрешимости краевых задач для полигармонических уравнений (см. § 3, п. 3), а также некоторые хорошо известные факты о p-гармонических функциях (см. § 3, п. 1 и п. 2). Во всей работе важную роль будет играть теорема 2.1. Доказательство см. в п. 3 § 2.

Доказательство основной теоремы заканчивается в § 6, где мы в общих чертах следуем рассуждениям работы [1].

В § 7 устанавливается точность условия 3 теоремы А.

В § 5 вводится понятие слабого асимптотического ряда для обобщенной функции T вблизи нуля. Главный результат этого параграфа (теорема единственности для слабых асимптотических рядов) доказана в п. 3. Теорема 7.2—это некоторая „грубая теорема" неединственности.

На протяжении всей работы мы неоднократно будем применять хорошо известные факты теории линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Основными источниками для ссылок по этому поводу нам будут служить книги Шилова [3] и Лионса—Мадженеса [4].

§ 2. Алгебраическая часть

1°. Определение пространства $Q_p^-[\sigma]$.

Рассмотрим, следуя [3], двойственное по отношению (1.1) уравнение, которое имеет следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-|\sigma|^2\right)^p V(\sigma,\ t)=0\ ((\sigma,\ t)\in R_+^{n+1}). \tag{1.1}$$

Для каждого $\sigma\in R^n$ это обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2p$. С уравнением (1.1) свяжем p-мерное подпространство $Q_p^-[\sigma]$ пространства R^{2p} (см. [3], стр. 235). Это подпространство определяется следующим образом.

Рассмотрим матрицу:

$$P=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \lambda_0|\sigma|^{2p} & 0 & \lambda_{2p-2}|\sigma|^2 & 0 \end{vmatrix}, \tag{2.1}$$

где в последней строке выписаны коэффициенты многочлена $(\lambda^2-|\sigma|^2)^p$ $(\sigma\in R^n)$. Эта матрица естественно связана с системой дифференциальных уравнений первого порядка, обычным способом сопоставляемой уравнению (1.1): p-кратному собственному значению $-|\sigma|$ матрицы P отвечают p линейно-независимых векторов, принадлежащих R^{2p} при каждом $\sigma\in R^n$.

Определение 2.1. $Q_p^-[\sigma]$ есть p-мерное подпространство, порожденное собственными векторами матрицы P, отвечающими собственному значению $-|\sigma|$.

Рассмотрим базисную матрицу подпространства $Q_p^-[\sigma]$ (ее столбцы суть собственные векторы матрицы P):

$$E(-|\sigma|)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ -|\sigma| & 1 & & 0 \\ (-|\sigma|)^2 & 2(-|\sigma|) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-|\sigma|)^{2p-1} & (2p-1)(-|\sigma|)^{2p-2} & & C_{2p-1}^{p}(-|\sigma|)^{p} \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

2°. Теорема 2.1. *Пусть* $S=\{s_0, s_1, \cdots, s_{p-1}\}$,

$$T=\{j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}\}, \text{ где } 0 < s_k,\ j_k \leqslant 2p-1$$

— некоторое разбиение множества $\{0, 1, \cdots, 2p-1\}$ *на две группы, такое, что* $S \cap T=\varnothing$.

Существует матрица $H=(h_{sj})$ $(s \in S,\ j \in T)$ *такая, что если* $b=\{b_0, b_1, \cdots, b_{2p-1}\} \in R^{2p}$ *— произвольный вектор, то*

1. $b \in Q_p^-[\sigma]$ $(\sigma \in R^n \setminus \{0\})$ *тогда и только тогда, когда*

$$|\sigma|^{-s} b_s=\sum_{j \in T} h_{sj} |\sigma|^{-j} b_j \quad (s \in S), \tag{2.3}$$

2. *Все миноры матрицы* H *обратимы.*

Доказательство теоремы 2.1 будет дано в пункте 4, а сейчас мы проделаем некоторую подготовительную работу, изучив определители, возникающие при доказательстве теоремы 2.1.

3°. Рассмотрим матрицу-функцию $E^T(x)=\{a_{j,k}(x)\}$ $(j \in T,\ k=0, 1, \cdots, p-1)$, где при $j > k$

$$a_{j,k}(x)=\frac{j!}{k!\,(j-k)!}\, x^{j-k}=C_j^k \cdot x^{j-k}, \text{ а}$$

при $j \geqslant k$ $a_{j,k}(x) \equiv 0$.

Лемма 2.1. *Для любого* $T=\{j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}\}$

1. $\det E^T(x)=h_0 x^q$, *где* $h_0 \neq 0$;

2. $q=\sum\limits_{k=0}^{p-1} j_k - \frac{p(p-1)}{2}$.

Доказательство. Как известно определитель матрицы $(b_{j,k})$ вычисляется по формуле

$$\det(b_{j,k})=\sum_{\nu}(-1)^{|\nu|} b_{0,\nu(0)}\, b_{1,\nu(1)} \cdots b_{p-1,\nu(p-1)}, \tag{2.4}$$

где ν — элемент группы перестановок множества $\{0, 1, \cdots, p-1\}$, а ν — четность элемента ν. В нашем случае имеем:

$$b_{k,\nu(k)}=C_{j_k}^{\nu(k)} \cdot x^{j_k-\nu(k)},$$

так что каждое слагаемое в сумме (2.4) приобретает вид:

$$(-1)^{|\nu|} h_\nu\, x^{\sum\limits_0^{p-1} j_k - \sum\limits_0^{p-1} \nu(k)}.$$

Так как $\sum\limits_0^{p-1} \nu(k) = \frac{p(p-1)}{2}$, то для всей суммы имеем

$$\left[\sum_\nu (-1)^{|\nu|} h_\nu\right] x^q, \text{ где } h_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_\nu (-1)^\nu h_\nu.$$

А теперь докажем, что $h_0 \neq 0$. Так как $h_0 = E^T(1)$, то для завершения доказательства леммы 2.1 нужно убедиться в том, что значение определителя $E^T(x)$ при $x = 1$ не равно нулю.

$$h_0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1!} j_0 & \frac{1}{2!} j_0(j_0-1) & \frac{1}{(p-1)!} j_0(j_0-1)\cdots(j_0-p+2) \\ 1 & \frac{1}{1!} j_1 & \frac{1}{2!} j_1(j_1-1) & \frac{1}{(p-1)!} j_1(j_1-1)\cdots(j_1-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{1!} j_{p-1} & \frac{1}{2!} j_{p-1}(j_{p-1}-1) & \frac{1}{(p-1)!} j_{p-1}(j_{p-1}-1)\cdots(j_{p-1}-p+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_1^{p-1}\left(\frac{1}{\nu!}\right) \begin{vmatrix} 1 & j_0 & j_0(j_0-1) & j_0(j_0-1)\cdots(j_0-p+2) \\ 1 & j_1 & j_1(j_1-1) & j_1(j_1-1)\cdots(j_1-p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & j_{p-1} & j_{p-1}(j_{p-1}-1) & j_{p-1}(j_{p-1}-1)\cdots(j_{p-1}-p+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{1}{\nu!}\right) W(j_0, j_1, \cdots, j_{p-1}) \neq 0.$$

где W — определитель Вандермонда.

Замечание 2.1. Пусть $T' = \{j_0, j_1, \cdots, s, \cdots, j_{p-1}\}$, где $s \in S$. Тогда

$$\frac{\det E^{T'}(x)}{\det E^T(x)} = h'_{s_j}\, x^{s-j}, \text{ где } h'_{s_j} \neq 0 \qquad (2.5)$$

(T' это T с той разницей, что элемент j заменен элементом s). Сейчас мы сформулируем простую лемму 2.2, которая в удобных для проверки терминах дает ответ на вопрос: когда в матрице $(a_{i,j})$ $(i, j = 0, 1, \cdots, p-1)$ все миноры обратимы?

Лемма 2.2. *Пусть $(a_{i,j})$ $(i, j=0, 1, \cdots, p-1)$ — матрица комплексных чисел. Следующие утверждения равносильны:*

1. *Все миноры матрицы $(a_{i,j})$ обратимы,*

2. *Если p координат вектора $X = (x_0, x_1, \cdots, x_{2p-1}) \in R^{2p}$ равны нулю и*

$$\sum_{j=0}^{p-1} a_{ij}\, x_j = x_{p+i} \; (i = 0, 1, \cdots, p-1),$$

то $X = 0$.

Это утверждение очевидно.

4°. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\sigma \neq 0$ и $\sigma \in R^n$. По определению пространства $Q_p^-[\sigma]$ и базисной матрицы $E(-|\sigma|)$ (см. п. 1, § 2) имеем: $b = \{b_k\}_{k=0}^{2p-1} \in \{Q_p^-[\sigma]$ тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $c \in R^p$ имеет место следующее равенство $b_i' = E(-|\sigma|)\cdot c$. А это равенство означает, что

$$b_j = E^T(-|\sigma|)\cdot c \;\; (j \in T),$$
$$b_s = E^S(-|\sigma|)\cdot c \;\; (s \in S)$$

(обозначение E^T было введено в начале п. 2 этого параграфа).

А теперь заметим, что матрица $E^T(-|\sigma|)$ при $-|\sigma| = x$ совпадает с матрицей, рассмотренной в лемме 2.1, так что она обратима и мы можем написать

$$\{b_s\} = E^S\,[E^T]^{-1}\,\{b_j\} \;\; (s \in S). \tag{2.6}$$

Это и есть, собственно говоря, первое утверждение теоремы 2.1 в векторной записи.

Для того чтобы получить явные выражения для координат $\{b_s\}$ $(s \in S)$, через координаты $\{b_j\}$ $(j \in T)$ заметим, что

$$\begin{vmatrix} b_{j_0} & \\ b_{j_1} & \\ \vdots & E^T(-|\sigma|) \\ b_{j_{p-1}} & \\ b_s & (-|\sigma|^{s-1} \cdots \end{vmatrix} = 0 \quad (s \in S).$$

Разложим этот определитель по первому столбцу, получим

$$b_s = \sum_{j\in T} (-1)^j \,\frac{\det E^{T'}(-|\sigma|)}{\det E^T(-|\sigma|)}\, b_j = \sum_{j \in T} h_{sj}\,|\sigma|^{s-j}\, b_j \;(s \in S),$$

где по определению

$$h_{sj} = (-1)^j \frac{h_0(T')}{h_0(T)} \; s \in S,\, j \in T).$$

Здесь мы пользовались замечанием 2.1 к лемме 2.1. Перепишем полученные соотношения в следующем виде:

$$|\sigma|^{-s}\, b_s = \sum_{j\in T} h_{sj}\,|\sigma|^{-j}\, b_j \;\; (s \in S). \tag{2.7}$$

Итак, первое утверждение теоремы 2.1 доказано. А теперь переходим к доказательству утверждения об обратимости миноров только что полученной матрицы $H = (h_{sj})$ $(s \in S,\ j \in T)$ в соотношении (2.7).

Напомним, что (2.7) справедливо для любых разбиений $\{T; S\}$ множества индексов $\{0, 1, \cdots, 2p-1\}$.

Предположим, что $Y = (y_0, y_1, \cdots, y_{2p-1})$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{j \in T} h_{sj}\, y_j = y_s \quad (s \in S)$$

и p — его координаты (индексы которых заполняют множество T^* типа T) равны нулю. Положим $S^* = \{0, 1, \cdots, 2p-1\} \setminus T^*$ и $b_k = |\sigma|^k y_k$, для $k \in T^* \cup S^*$. Тогда вектор $\{b_k\}_{k=0}^{2p-1}$, будучи решением (2.7), принадлежит $Q_p^-[\sigma]$ и его S^*-координаты выражаются по формулам типа (2.7), для S^*, T^* и $h_{sj} = h^*_{sj}$. Поэтому вектор Y — нулевой, и ссылка на лемму 2.2 завершает доказательство.

Теорема 2.1 полностью доказана.

§ 3. О полигармонических функциях

В этом параграфе мы будем иметь дело с пространством (уже упоминавшимся ранее) всех функций, все обобщенные производные которых до порядка $2p$ включительно принадлежат $L^2(G)$, где G—ограниченная область в R^{n+1} с достаточно гладкой границей.

Мы неоднократно будем использовать, без подробных пояснений, известные факты о гладкости сужений функций класса $H^{2p}(G)$ на гиперповерхности и о граничных значениях этих функций и их производных (см. [4], стр. 219, теорема 8.1). В частности, нам понадобится следующая теорема (см. [4], гл. 1, теорема 8.3).

Т е о р е м а о с л е д а х. Предположим, что G — конечная область с достаточно гладкой границей или $G = R^{n+1}_+$. Тогда отображение

$$U \to \left\{ \frac{\partial^j U}{\partial \nu^j} \,\middle|\, j = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}, \tag{3.1}$$

где $\dfrac{\partial^j}{\partial \nu^j}$ — нормальная производная к ∂G порядка j, продолжается по непрерывности до линейного непрерывного отображения, обозначаемого снова через (3.1), действующего из $H^m(G)$ в

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial G).$$

1°. Ф о р м у л а Г р и н а д л я п о л и г а р м о н и ч е с к о г о о п е р а т о р а. Пусть G — область с достаточно гладкой границей, а функции U и V класса $C^\infty(\overline{G})$. Для U, V и Δ известна следующая формула Грина:

$$\int_G U \Delta V - \Delta U \cdot V = \int_{\partial G} U \frac{\partial V}{\partial \nu} - \frac{\partial U}{\partial \nu} V. \tag{3.2}$$

Заменяя в (3.2) U на $\Delta^i U$, а V на $\Delta^{p-i-1} V$ и суммируя по i от нуля до $p-1$, получаем следующий вариант формулы Грина для полигармонического оператора Δ^p $(p=1, 2, \cdots)$

$$\int_G U\Delta^p V - \Delta^p U\cdot V = \int_{\partial G} \sum_{i=0}^{p-1} \Delta^i U \frac{\partial \Delta^{p-i-1} V}{\partial \nu} - \Delta^{p-i-1} V \frac{\partial \Delta^i U}{\partial \nu}. \quad (3.3)$$

Так как $C^\infty(\overline{G})$ плотно в $H^{2p}(G)$, то по теореме о следах формула (3.3) справедлива для функций U и V, принадлежащих классу $H^{2p}(G)$.

Следующую теорему мы иногда будем называть „грубой теоремой единственности" решений задачи Коши для полигармонического уравнения.

2°. „Грубая теорема единственности".

Теорема 3.1. *Предположим, что U—p-гармоническая функция класса $H^{2p}(G)$, где $G\subset R^n$ — область с достаточно гладкой границей.*

Если существует такой открытый кусок $B\subset\partial G$ границы G, что $\left.\frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}\right|_B \equiv 0$ $(k=0, 1, \cdots, 2p-1)$, то $U\equiv 0$ в G $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right.$ означает дифференцирование по нормали к $\left.\partial G\right)$.

Доказательство. Для любого натурального числа k обозначим через $J_k(\rho)$ фундаментальную функцию оператора Δ^k (в R^n), так что $\Delta^p J_p(|x-y|)=\delta(x)$ $(x, y\in R^n)$, а $\Delta^s J_k(\rho)=J_{k-s}(\rho)$. Применяя формулу Грина (3.3) для полигармонической функции U, принадлежащей классу $H^{2p}(G)$ и $V=J_p$, получим следующее представление для $U(x)$ через граничные значения U и ее производных до порядка $2p-1$

$$\int_{\partial G} F(x, y)\, ds = \begin{cases} U(x) & (x\in G) \\ 0 & (x\in R^n\setminus\overline{G}), \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$F(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} \left\{ \Delta^i U \frac{\partial}{\partial\nu} J_{i+1}(|x-y|) - \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta^i U)\, J_{i+1}(|x-y|)\right\}.$$

Но по условию теоремы $\int_{\partial G} F = \int_{\partial G\setminus B} F$, следовательно, $\int_{\partial G\setminus B} F$ определяет p-гармоническую функцию в $R^n\setminus(\partial G\setminus B)$. Но вне G $\int_{\partial G} F$ равен нулю, следовательно из (3.4) следует, что $U\equiv 0$ в G.

3°. В этом пункте мы, опираясь на хорошо известные методы (см. [3], гл. IV), подготовим необходимые для дальнейшего сведения о разрешимости краевых задач для полигармонических уравнений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)^p U(x, t) = 0 \quad ((x, t)\in R^{n+1}). \quad (3.5)$$

С уравнением (3.5) свяжем семейство обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра σ, где $\sigma \in R^n$, возникающее после формального преобразования Фурье уравнения (3.5) по переменной $x \in R^n$;

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - |\sigma|^2\right)^p V(\sigma, t) = 0 \quad (t > 0, \ \sigma \in R^n). \tag{3.6}$$

Заменим, при каждом $\sigma \in R^n$ это уравнение порядка $2p$ системой $2p$ уравнений первого порядка. Решение этой системы с начальным вектором $V(\sigma) = \{v_k(\sigma)\}_0^{2p-1}$ имеет вид:

$$V(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} V(\sigma) \tag{3.7}$$

(определение матрицы $P(\sigma)$ см. в начале § 2, (2.1)).

В этом параграфе мы будем использовать пространства $H^s(R^n)$ $(s>0)$ (см. 4, гл. 1, п. 7.1). Напомним, что при $s \in (-\infty, +\infty)$,

$$H^s(R^n) = \{f \mid f \in L^2(R^n), \ (1+|\sigma|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(R^n)\},$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции f.

Теорема 3.2. *Пусть вектор-функция*

$$V: R^n \to R^{2p}, \text{ где } V = \{v_k\}_{k=0}^{2p-1}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1. $V(\sigma) \in Q_p^-[\sigma]$ *для почти всех* $\sigma \in R^n$,

2. $(1+|\sigma|^2)^p |\sigma|^{-l-\frac{1}{2}} v_l \in L^2(R^n)$.

Тогда, если $V(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)} V(\sigma)$, *где* $V = \{V_k\}_{k=0}^{2p-1}$, *то*

а) $$\int_0^{\infty} dt \int_{R^n} |V_n|^2 (\sigma, t)(1+|\sigma|^2)^{2p-k} d\sigma < +\infty$$

для любого $k=0, 1, \cdots, 2p-1$
и

в) $$\lim_{t\to+0} \int_{R^n} |V_k(\sigma, t) - v_k(\sigma)|^2 (1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}} d\sigma = 0.$$

Замечание к теореме 3.2. Пусть T и S имеют тот же смысл, что и в теореме 2.1. Если для вектор-функции $\{v_j'\}$ $(j \in T)$ имеет место условие 2'. $(1+|\sigma|^2)^p |\sigma|^{-j-\frac{1}{2}} v_j' \in L^2(R^n)$, где $j \in T$, то ее можно „дополнить" до вектор-функции $\{v_k\}$, $(k \in T \cup S)$ таким образом, чтобы для нее были выполнены условия 1 и 2 теоремы 3.2. Для этого достаточно определить $\{v_s\}$ $(s \in S)$ с помощью соотношений

(2.3) теоремы 2.1, обеспечивающих включение „расширенной" вектор-функции в $Q_p^-[\sigma]$. Условие 2 следует из 2′.

Доказательство теоремы 3.2. Сначала выясним, как действует оператор $e^{tP(\sigma)}$ в подпространстве $Q_p^-[\sigma]$ пространства R_*^{2p}. Так как спектр матрицы $P(\sigma)$ в $Q_p^-[\sigma]$ совпадает с p-кратным корнем $-|\sigma|$ многочлена $\lambda \to \det[P(\sigma)+\lambda I]$, то $e^{tP(\sigma)}$ можно представить в виде $R[P(\sigma)]$, где R — произвольный многочлен, такой, что при $\lambda = -|\sigma|$

$$R(-|\sigma|) = e^{-t|\sigma|};\ R'(-|\sigma|) = t\,e^{-t|\sigma|};\cdots;R^{(p-1)}(-|\sigma|) = t^{p-1}\,e^{-t|\sigma|}.$$

Ясно, что в качестве такого многочлена можно брать

$$R(\lambda) = e^{-t|\sigma|}\left\{1+\frac{t}{1!}(\lambda+|\sigma|)+\cdots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}(\lambda+|\sigma|)^{p-1}\right\}.$$

Следовательно

$$e^{tP(\sigma)}\Big|_{Q_p^-[\sigma]} = e^{-t|\sigma|}\left\{I+\frac{t}{1!}[P+|\sigma|I]+\cdots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}[P+|\sigma|I]^{p-1}\right\}. \quad (3.8)$$

Теперь из условия 1 теоремы 3.2 следует:

$$V(\sigma, t) = e^{tP(\sigma)}\Big|_{Q_p^-[\sigma]}\cdot v(\sigma) = e^{-t|\sigma|}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\frac{t^s}{s!}[P+|\sigma|I]^s\,V(\sigma)\right\} =$$

$$= e^{-t|\sigma|}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\frac{1}{s!}(t|\sigma|)^s\,V^s(\sigma)\right\}\ (P = P(\sigma)),$$

где по определению положено $V^s(\sigma) = \dfrac{P(\sigma)+|\sigma|I}{|\sigma|}V^{s-1}(\sigma)$. Далее

$$V_k(\sigma, t) = e^{-t|\sigma|}\left[\sum_{s=0}^{p-1}\frac{1}{s!}(t|\sigma|)^s\,v_k^s(\sigma)\right]\ (V^s = \{v_k^s\}_{k=0}^{2p-1}). \quad (3.9)$$

Используя явное выражение матрицы $P(\sigma)$ (см. (2.1)), индукцией по s покажем, что

$$|\sigma|^{-k}\,v_k^s(\sigma) = \sum_{e=0}^{2p-1}\alpha_{k,e}^s\,|\sigma|^{-e}\,v_e(\sigma)\ (k = 0, 1,\cdots, 2p-1), \quad (3.10)$$

где $s = 0, 1,\cdots, p-1$, а $\alpha_{k,e}^s$ не зависит от σ. В самом деле, из определения V^s следует, что

$$v_k^s(\sigma) = \left(\frac{P(\sigma)+|\sigma|I}{|\sigma|}V^{s-1}(\sigma)\right)_k.$$

Но из (2.1) следует, что

$$\frac{P(\sigma)+|\sigma|I}{|\sigma|} = (C_{s,m}\,|\sigma|^{s-m}),$$

где $s, m = 0, 1, \cdots, 2p-1$, а $C_{s,m}$ не зависит от σ. Поэтому

$$v_k^{s+1}(\sigma) = \sum_{m=0}^{2p-1} C_{k,m} |\sigma|^{k-m} v_m^s(\sigma) = \sum_{m=0}^{2s-1} C_{m,k} |\sigma|^{k-m} \times$$

$$\times |\sigma|^m \sum_{e=0}^{2p-1} a_{k,e}^s |\sigma|^{-e} v_e(\sigma) = |\sigma|^k \sum_{e=0}^{2p-1} a_{k,e}^{s+1} \cdot |\sigma|^{-e} v_e(\sigma),$$

где

$$a_{k,e}^{s+1} = \sum_{m=0}^{2p-1} a_{k,e}^s C_{k,m}.$$

Наконец, учитывая (3.9), получим для $k = 0, 1, \cdots, 2p-1$

$$J_k \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt \int_{R^n} |V_k|^2(\sigma, t)(1+|\sigma|^2)^{2p-k} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty dt \int_{R^n} \left| \sum_{s=0}^{p-1} e^{-t|\sigma|} \frac{(t|\sigma|)^s}{s!} v_k^s(\sigma) \right|^2 (1+|\sigma|^2)^{2p-k} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p(p-1)}{2} \sum_{s=0}^{p-1} \int_{R^n} \left[\int_0^\infty e^{-2t|\sigma|} \frac{(t|\sigma|)^{2s}}{s!^2} d(t|\sigma|) \right] |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{-\frac{1}{2}} v_k^s(\sigma)|^2 d\sigma =$$

$$= \sum_{s=0}^{p-1} d_s \int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{-\frac{1}{2}} v_k^s(\sigma)|^2 d\sigma \left(d_s = \frac{p(p-1)}{2s!^2} \int_0^\infty e^{-2t} t^{2s} dt \right).$$

Далее, учитывая равенство (3.10), получим

$$\int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{-\frac{1}{2}} v_k^s(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant \sum_{e=0}^{2p-1} d_{k,e}^s \int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^{\frac{2p-k}{2}} |\sigma|^{k-e-\frac{1}{2}} v_e(\sigma)|^2 d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{e=0}^{2p-1} d_{k,e}^s \int_{R^n} |(1+|\sigma|^2)^p |\sigma|^{-e-\frac{1}{2}} v_e(\sigma)|^2 d\sigma < +\infty$$

по условию 2 теоремы 3.2. Следовательно, $J_k < +\infty$ и утверждение а) нашей теоремы доказано.

Переходим к доказательству утверждения в).

Учитывая (3.8) и (3.9), получим

$$V(\sigma, t) - V(\sigma) = (e^{tP(\sigma)} - I) V(\sigma) = (e^{-t|\sigma|} - 1) V(\sigma) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{p-1} e^{-t|\sigma|} \frac{(t|\sigma|)^s}{s!} \left[\frac{P(\sigma) + |\sigma| I}{|\sigma|} \right]^s V(\sigma).$$

Следовательно

$$V_k(\sigma,t)-v_k(\sigma)=(e^{-t|\sigma|}-1)\,v_k(\sigma)+\sum_{s=0}^{p-1}e^{-t|\sigma|}\frac{(t|\sigma|)^s}{s!}\,v_k^s(\sigma). \qquad (3.11)$$

Далее обозначим через $N_t(\sigma)$ подынтегральное выражение в утверждении в) теоремы 3.2, и покажем, что предельный переход под знаком интеграла допустим по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

Из равенства (3.9) следует, что $N_t(\sigma)$ почти всюду стремится к нулю, когда $t\to+0$. С другой стороны, при всех $t>0$ для $N_t(\sigma)$ имеем следующую оценку:

$$|N_t(\sigma)|\leqslant p\left\{(e^{-t|\sigma|}-1)|v_k|^2(\sigma)+\sum_{s=0}^{p-1}e^{-2t|\sigma|}\frac{(t|\sigma|)^{2s}}{s!^2}|v_k^s|^2\right\}(1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\left[|v_k|^2(\sigma)+\sum_{s=0}^{p-1}|v_k^s|^2(\sigma)\right](1+|\sigma|^2)^{2p-\nu-\frac{1}{2}}\leqslant c_2|v_k|^2(\sigma)(1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}}+$$

$$+c_2\left[\sum_{e=0}^{2p-1}(1+|\sigma|^2)^{\frac{1}{2}\left(2p-k-\frac{1}{2}\right)}|\sigma|^k\,|\sigma|^{-e}\,|v_e(\sigma)|\right]^2\leqslant c_1(1+|\sigma|^2)^{2p-k-\frac{1}{2}}|v_k|^2(\sigma)+$$

$$+c_2\sum_{e=0}^{2p-1}\left[(1+|\sigma|^2)^p\,|\sigma|^{-e-\frac{1}{2}}|v_e|(\sigma)\right]^2\overset{\mathrm{def}}{=}F(\sigma)\in L^1(R^n).$$

Мы воспользовались равенством (3.10), последнее включение следует из условия 2 теоремы 3.2. Доказательство теоремы 3.2 закончено.

4°. Введем теперь следующий класс p-гармонических функций в полупространстве R_+^{n+1}. Напомним, что $H^{2p}(R_+^{n+1})$ состоит из всевозможных функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными до порядка $2p$ включительно классу $L^2(R_+^{n+1})$.

Определение 3.1. Решение U уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)^p U(x,t)=0\quad((x,t)\in R_+^{n+1}), \qquad (3.12)$$

принадлежащее классу $H^{2p}(R_+^{n+1})$, назовем регулярным решением.

Пусть $u_0, u_1,\cdots, u_{2p-1}$ — набор функций, заданных в R^n, причем $u_l\in H^{2p-l-\frac{1}{2}}(R^n)$ $(l=0,1,\cdots,2p-1)$. Следующая теорема показывает, при каких условиях, наложенных на эти функции, существует регулярное решение, l-тая нормальная производная которого совпадает на $\partial R_+^{n+1}=R^n$ с функцией u_l. В формулировке этой теоремы символом $[U]_t$, где U — функция в R_+^{n+1}, а $t>0$, будем обозначать функцию, заданную в R^n следующим образом:

$$[U]_t(x)=U(x,t)\quad(x\in R^n,\ t>0).$$

Теорема 3.3. *Пусть вектор-функция* $b = \{b_k\}_0^{2p-1}$, *где* $b_k(\sigma) = \hat{u}_k(\sigma)$ $(\sigma \in R^n)$ *удовлетворяет условиям* 1 *и* 2 *теоремы* 3.2. *Тогда существует регулярное решение* U *p-гармонического уравнения* (3.12) *такое, что*

$$\lim_{t\to+0}\left\|\left[\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right]_t - u_k\right\|_{H^{2p-k-\frac{1}{2}}(R^n)} = 0 \quad (k=0,\ 1,\cdots,\ 2p-1). \qquad (3.13)$$

Доказательство. В качестве решения U следует взять обратное преобразование Фурье функции V (см. 3.7)), построенной при доказательстве теоремы 3.2. При этом из той же теоремы имеем:

$$J_k \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt \int_{R^n} |V_k|^2(\sigma,\ t)\,(1+|\sigma|^2)^{2p-k}\,d\sigma < +\infty. \qquad (3.14)$$

Но так как $V(\sigma,\ t)$ удовлетворяет уравнению $(1.1)^\wedge$, то

$$V_{2p}(\sigma,\ t) = \sum_{k=0}^{2p-1} \alpha_k\,|\sigma|^{2p-k}\,V_k(\sigma,\ t),$$

где α_k — постоянные числа, следовательно из (3.14) следует, что $J_{2p} < +\infty$, так что

$$\|U\|_{H^{2p}(R_+^{n+1})} \leqslant c \sum_{k=0}^{2p} J_k < +\infty$$

(см. [4], гл. 1, теорема 1.3). А это по определению 3.1 значит, что U — регулярное решение.

Утверждение (3.13) теоремы 3.3 совпадает с утверждением в) теоремы 3.2.

§ 4. Связь между данными Коши для функции, полигармонической в полушаре

Цель настоящего параграфа—установить некоторые интегро-дифференциальные соотношения между данными Коши p-гармонической функции на плоском куске границы верхнего полушара в R_+^{n+1}. Обозначения:

$$K_\pm^\delta = \{(x,\ t) \in R_\pm^{n+1}\,|\,|x|^2 + t^2 < \delta^2\};$$

$$K^\delta = \{(x,\ t) \in R^{n+1}\,|\,|x|^2 + t^2 < \delta^2\};\ K^\delta = K_-^\delta \cup D^\delta \cup K_+^\delta,\ H^{2p}(K_\pm^\delta)$$

и $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ — пространства типа Соболева, о которых говорилось в начале § 3 (см. [5], стр. 48).

1°. Об одном представлении полигармонической функции класса $H^{2p}(K_+^\delta)$.

Теорема 4.1. *Пусть U — p-гармоническая функция класса $H^{2p}(K_+^\delta)$. Тогда существуют функции U' и W, заданные, соответственно, в R_+^{n+1} и в K^δ и такие, что*

а). $U(x, t) = (U' + W)(x, t)$ $((x, t) \in K_+^\delta)$;

в). *U' — регулярное решение уравнения* (3.12) (*см.* § 3, *опр.* 1);

с). $\Delta_t^p W(x, t) = 0$ $((x, t) \in K^\delta)$.

Сначала мы опишем один способ продолжения функций с нулевыми мультимоментами.

Лемма 4.1. *Пусть* $\psi \in H^s(D^{2\eta})$, *где* $s > 0$; $D^{2\eta}$ — *n-мерный открытый шар с центром в начале и радиусом* 2η; q — *натуральное число. Тогда существует функция* ψ^* *со следующими свойствами:*

1. $\psi^* \in H^s(R^n)$, $\psi^*(x) \equiv 0$ *для* $|x| > 3\eta$;

2. $\psi^*(x) = \psi(x)$ *для* $|x| \leqslant \eta$;

3. $\int\limits_{R^n} \psi^*(x)\, x^\alpha\, dx = 0$ $(|\alpha| \leqslant q)$ *для любого* α, *где* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ — *мультииндекс;* $|\alpha| = \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_l$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in C^\infty(R^n)$ такая, что $\gamma \equiv 0$ при $|x| \leqslant \eta$ и $\gamma \equiv 0$ при $|x| \geqslant 3\eta$. Ясно, что (см. [4]) $\varphi \overset{\text{def}}{=} \gamma\psi \in H^s(R^n)$. Рассмотрим пространство основных функций D с носителями в кольце $2\eta \leqslant |x| \leqslant 3\eta$ и сопряженное с ним пространство K. Далее, пусть для $|\alpha| \leqslant q$ $c_\alpha \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{R^n} \psi(x)\, x^\alpha\, dx$. Мы будем отождествлять функцию f, непрерывную в кольце $D^{3\eta} \setminus \bar{D}^{2\eta}$, с элементом множества

$$K\left(\varphi \to \int f \cdot \varphi \quad (\varphi \in D)\right).$$

Так как система функций $\{x^\alpha\}_{|\alpha| < q}$ линейно независимая в K, то найдутся элементы $g_\beta \in D$ такие, что $x^\alpha(g_\beta) = \delta^{\alpha, \beta}$. Положим

$$g_0 = \sum_{|\alpha| < q} c_\beta\, g_\beta \quad (g_0 \in D),$$

тогда в качестве ψ^* можно брать $\varphi - g_0$. Действительно, во-первых, $\varphi - g_0 \in H^s(R^n)$, так как $\varphi \in H^s(R^n)$, а $g_0 \in D$; во-вторых, на D^η $\varphi - g_0 \equiv \psi$ и наконец свойство 3 проверяется непосредственно:

$$\int\limits_{R^n} (\varphi - g_0)(x)\, x^\alpha\, dx = \int\limits_{R^n} \varphi(x)\, x^\alpha\, dx - \sum_{|\beta| < q} c_\beta\, x^\alpha(g_\beta) = c_\alpha - c_\alpha = 0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы сохраним за символом ψ^* тот же смысл, что и в формулировке этой леммы. А теперь переходим к доказательству теоремы 4.1. Функцию U' определим, как регулярное решение уравнения (1.1), для которого $\frac{\partial^{2k} U'(x, 0)}{\partial t^{2k}} = \frac{\partial^{2k} U(x, 0)}{\partial t^{2k}}$ при $x \in D^{\delta}$ (в смысле теоремы 3.3). Разность $W = U - U'$ по „принципу симметрии" с использованием формулы Грина, окажется p-гармонически продолжимой в нижний полушар. Перейдем к точному изложению. Функции

$$\psi_{2k}(x) = \frac{\partial^{2k} U(x, 0)}{\partial t^{2k}} \; (k = 0, 1, \cdots, p-1)$$

принадлежат классу $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(D^{\delta})$ (см. теорему о следах). Поэтому их можно продолжить до функций класса $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(R^n)$ (см. [5], теорема 9.1). Продолженные функции попрежнему обозначим через ψ_{2k}. Применим лемму 4.1 к каждому из них (с $\eta = 2\delta$) и „исправим" их так, чтобы получить финитные функции $\overset{\bullet}{\psi}_{2k}$ класса $H^{2p-k-\frac{1}{2}}(R^n)$, совпадающие с ψ_{2k} в D^{δ}, и такие, что

$$\int\limits_{R^n} \psi^*(x)\, x^{\alpha}\, dx = 0$$

при любом α с $|\alpha| \leqslant q$. Тогда

$$(1+|\sigma|^2)^p\, |\sigma|^{-2k-\frac{1}{2}}\, \hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k} \in L^2(R^n) \; (k = 0, 1, \cdots, p-1). \tag{4.1}$$

В самом деле, функции $\hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}$ аналитичны, как преобразования Фурье финитных функций, поэтому

$$[D^{\alpha}\, \hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}](0) = \int\limits_{R^n} \overset{\bullet}{\psi}_{2k}(x)\, x^{\alpha}\, dx = 0 \quad (|\alpha| \leqslant q),$$

так что

$$\hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}(\sigma) = O\,(|\sigma|^{2p-1})(|\sigma| \to 0). \tag{4.2}$$

Из (4.2) и из того, что $\overset{\bullet}{\psi}_{2k} \in H^{2p-2k-\frac{1}{2}}(R^n)$ следует (4.1). Положим теперь $v_{2k}(\sigma) = \hat{\overset{\bullet}{\psi}}_{2k}(\sigma)$ $(k = 0, 1, \cdots, p-1)$ и воспользуемся замечанием к теореме 3.2. Это замечание позволяет найти функции $v_k(\sigma)$ $(k = 0, 1, \cdots, 2p-1)$ так, чтобы вектор-финкция $V = \{v_k\}_0^{2p-1}$ удовлетворяла условию теоремы 3.2. По теореме 3.3 существует функция U', являющаяся регулярным решением p-гармонического уравнения в R_+^{n+1} и такая, что

$$\lim_{t\to+0}\left\|\left[\frac{\partial^{2k}U'}{\partial t^{2k}}\right]_t-\dot{u}_{2k}\right\|_{H^{2p-2k-\frac{1}{2}}(R^n)}=0. \tag{4.3}$$

Если $W(x, t)=(U-U')(x, t)$ для $(x, t)\in K^\delta_+$, то во-первых, имеет место утверждение a) теоремы 4.1, но так как U' — функция класса $H^{2p}(R^{n+1}_+)$, то $W\in H^{2p}(K^\delta_+)$ и справедливо также утверждение в) нашей теоремы. Осталось доказать утверждение c) о полигармонической продолжимости W через плоский кусок границы K^δ_+ (на K^δ_-).

Так как по построению четных данных для решения U' имеем

$$\frac{\partial^{2k}U'(x,0)}{\partial t^{2k}}=\frac{\partial^{2k}U(x,0)}{\partial t^{2k}} \text{ на } D^\delta, \text{ то } \frac{\partial^{2k}W(x,0)}{\partial t^{2k}}\equiv 0$$

на D^δ. Из теоремы о следах следует, что

$$D^\alpha_x\frac{\partial^{2k}W(x,0)}{\partial t^{2k}}\equiv 0 \text{ на } D^\delta \ (|\alpha|\leqslant 2p-2k-1). \tag{4.4}$$

Воспользуемся „полигармонической формулой Грина“ (3.3):

$$\int\limits_{K^\delta_+} U\Delta^p_t V-\Delta^p_t U\cdot V=\int\limits_{\partial K^\delta_+}\{E(U, V)-F(U, V)\}, \tag{4.5}$$

где

$$E\overset{\text{def}}{=}\sum_{l=0}^{p-1}\Delta^l_t U\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta^{p-l-1}V);\quad F\overset{\text{def}}{=}\sum_{l=0}^{p-1}\Delta^{p-l-1}_t V\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta^l_t U),$$

а функции U и V из класса $H^{2p}(K^\delta_+)$. Положим $U=W(x, t)$ и $V=J_p(x, t;\ x_0, t_0)$ (J_p — фундаментальное решение уравнения $\Delta^p_t U=0$ с полюсом в точке $(x_0, t_0)\in K^\delta_+$).

При $(x_0, t_0)\in K^\delta_+$, учитывая, что $\partial K^\delta_+=D^\delta\cup(\partial K^\delta_+\setminus D^\delta)$, получим

$$W(x_0, t_0)=\sum_{l=0}^{p-1}\int\limits_{D^\delta} J_{l+1}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta^l_t W)+\frac{\partial}{\partial t}J_{l+1}(\Delta^l_t W)+Q(x_0, t_0),$$

$$0\equiv\sum_{l=0}^{p-1}\int\limits_{D^\delta} J_{l+1}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta^l_t W)-\frac{\partial}{\partial t}J_{l+1}(\Delta^l_t W)+Q(x_0-t_0).$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее равенство, получим

$$W(x, t)=2\sum_{l=0}^{p-1}\int\limits_{|y|<\delta}\frac{\partial}{\partial t}J_{l+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)W(y, 0)\,dy+\tilde{Q}(x, t)$$

для любого $(x, t)\in K^\delta_+$, где $\tilde{Q}$ — продолжима с сохранением полигармоничности на весь шар K^δ. Далее, все интегралы в правой части последнего равенства равны нулю, так как при любом $i=0, 1,\cdots$ $\cdots, p-1$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)^l W(y,0)=\sum_{k=0}^{l} c_l^k \Delta^{l-k}\frac{\partial^{2k} W(y,0)}{\partial t^{2k}}=0 \text{ на } D^\delta,$$

в силу равенства (4.4). Итак, $W(x, t) = \bar{Q}(x, t)$ для $(x, t)\in K_-^\delta$ и утверждение с) теоремы 4.1 также доказано. Тем самым, теорема 4.1 полностью доказана.

А теперь переходим к формулировке основного результата этого параграфа.

2°. Пусть $\{T; S\}$ — какое-нибудь разбиение множества $\{0, 1, \cdots, 2p-1\}$ на два p-элементных подмножества. Положим $T=T_1\cup T_2$; $S=S_1\cup S_2$, где T_1, T_2, S_1, S_2 определяются следующим образом:

если $j\in T_1$, то $j=2j'-1$, а если $j\in T_2$, то $j=2j'$;

если $s\in S_1$, то $s=2s'-1$, а если $s\in S_2$, то $s=2s'$.

Теорема 4.2. *Пусть $U\in H^{2p}(K_+^\delta)$ — полигармоническая функция. По определению положим*

$$u_k(x)=\frac{\partial^k U(x,0)}{\partial t^k}\quad (k=0, 1, \cdots, 2p-1).$$

Существуют семейство функции w^j $(j\in T)$ и вещественная матрица $H=(h_{sj})$ $(s\in S, j\in T)$ такие, что для $x\in D^\delta$ имеем:

1. $$\left[\Delta^{p-s'}u_s-\sum_{j\in T_1}h_{sj}\Delta^{p-j'}u_j\right](x)=\sum_{j\in T_2}h_{sj}\Delta^{p-j'}\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|y|<\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w^j(x)\right]\ (s\in S_1),$$

2. $$\left[\Delta^{p-s'}u_s-\sum_{j\in T_2}h_{sj}\Delta^{p-j'}u_j\right](x)=\sum_{j\in T_1}h_{sj}\Delta^{p-j'+1}\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|y|<\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w^j(x)\right]\ (s\in S_2),$$

3. *w^j $(j\in T)$ — вещественно-аналитическая в D^δ,*
4. *все миноры матрицы H обратимы.*

Доказательство. Пусть функция u принадлежит $H^{2p}(K_+^\delta)$. Пользуясь теоремой 4.1, представим ее в виде $U=U'+W$, где U' — регулярное решение уравнения $\Delta_t^p U=0$ в R_+^{n+1}, а W — полигармоническая функция класса $H^{2p}(K^\delta)$. Из регулярности U' следует, что производные этой функции по t на R^n связаны соотношениями (2.3) теоремы 2.1. Обозначим через v_k' преобразование Фурье функции $u_k'(x)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\partial^k U'(x,0)}{\partial t^k}$, перепишем уравнения (2.3) в следующем виде:

$$1)^{*}\ |\sigma|^{-2s'}\, v_s'(\sigma) = \sum_{j\in T_2} h_{sj}\, |\sigma|^{-2j'}\ \frac{v_j'(\sigma)}{|\sigma|} + \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, |\sigma|^{-2j'}\, v_j'(\sigma)\ (s\in S_1),$$

$$2)^{*}\ |\sigma|^{-2s'}\, v_s'(\sigma) = \sum_{j\in T_2} h_{sj}\, |\sigma|^{-2j'}\, v_j'(\sigma) + \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, |\sigma|^{-2(j'-1)}\, \frac{v_j'(\sigma)}{|\sigma|}.$$

Умножая эти соотношения на $|\sigma|^{2p}$ и производя обратное преобразование Фурье, получим

$$1)\ \Delta^{p-s'} u_s'(x) - \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \Delta^{p-j'} u_j'(x) = \sum_{j\in T_2} h_{sj}\, \Delta^{p-j'} \int_{R^n} \frac{u_j'(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}}\ (s\in S_1),$$

$$2)\ \Delta^{p-s'} u_s'(x) - \sum_{j\in T_2} h_{sj}\, \Delta^{p-j'} u_j'(x) = \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \Delta^{p-j'+1} \int_{R^n} \frac{u_j'(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}}\ (s\in S_2).$$

Эти равенства можно обосновать так. Функции $|\sigma|^{-1} v_j'(\sigma)$, как это видно из доказательства теоремы 4.1 § 4, можно считать принадлежащими $L^2(R^n)$. Если бы функции u_j' принадлежали классу $S(R^n)$ быстро убывающих бесконечно-дифференцируемых функц ий, то преобразование Фурье функций

$$x \to \int_{R^n} \frac{u_j'(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}}\ (x\in R^n),\ (j\in T)$$

совпало бы с $|\sigma|^{-1} v_j'(\sigma)$ (см. [5], стр. 138).

Включения $v_j'\in L^2(R^n)$, $|\sigma|^{-1} v_j'\in L^2(R^n)$ позволяют применить этот результат и к нашим функциям u_j'. Из того, что $U'(x, t) = U(x, t) - W(x, t)$ при $(x, t)\in K_+^\delta$, следуют равенства

$$u_k'(x) = u_k(x) - w_k(x)\ (x\in D^\delta,\ k = 0, 1, \cdots, 2p-1).$$

При $x\in D^\delta$ соотношения связи 1) и 2) преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \Delta^{p-j'} u_j' = \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \Delta^{p-j'} (u_j - w_j) = \sum_{j\in T_1} h_{sj}\, \Delta^{p-j'} u_j + \tilde{Q}_s,$$

где $\tilde{Q}_s\ (s\in S)$ вещественно-аналитичны;

$$\int_{R^n} \frac{u_j'(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} = \int_{R^n\setminus D^\delta} \frac{u_j'(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} + \int_{D^\delta} \frac{u_j(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} -$$

$$-\int_{D^\delta} \frac{w_j(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} = \int_{D^\delta} \frac{u_j(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}} + \tilde{Q}_j(x),$$

где $\tilde{Q}_j$ также вещественно-аналитичны, так как $\int_{D^\delta} \frac{w_j(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}}$ — такая функция по теореме Леви (см. [8], стр. 61), а $\int\limits_{R^n \setminus D^\delta} \frac{u_j'(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}$ аналитична в D^δ очевидным образом.

Остальные выражения в 1) и 2) преобразуются таким же образом. Для завершения доказательства теоремы 4.2 остается определить $w^j(x)$ $(j \in T,\ x \in D^\delta)$ из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j \in T_1} h_j\ \Delta^{p-j'}\ w^j(x) = Q_s(x)\ \ (s \in S_1,\ x \in D^\delta),$$

$$\sum_{j \in T_2} h_{sj}\, \Delta^{p-j'+1}\ w^j(x) = Q_s(x)\ \ (s \in S_2,\ x \in D^\delta).$$

Здесь $Q_s\,(s \in S)$ — некоторые аналитические функции, получающиеся после описанных выше преобразований.

Эта система уравнений разрешима относительно $\Delta^{p-j'}\, w^j(x)$, когда $j \in T_2$ и $\Delta^{p-j'+1}\, w^j(x)$, когда $j \in T_1$, так как матрица (h_{sj}) $(s \in S_1,\ j \in T_2)$ и матрица (h_{sj}) $(s \in S_2,\ j \in T_1)$ обратимы по утверждению 2 теоремы 2.1.

Остается решить следующие неоднородные полигармонические уравнения:

$$\Delta^{p-j'}\, w^j(x) = f_{2j'}(x) \text{ и } \Delta^{p-j'+1}\, w^j(x) = f_{2j'-1}(x)$$

с аналитическими в D^δ правыми частями. Аналитичность решений этих уравнений в D^δ может быть непосредственно выведена из аналитичности фундаментального решения и уже упомянутой теоремы Леви.

§ 5. Слабый асимптотический ряд для обобщенной функции

1°. Некоторые локальные оценки обобщенных функций.

Определение 5.1. Пусть N — целое число. Будем говорить, что набор $\{\varphi_\rho\}$ $(\rho > 0)$ функций класса $C^\infty(R^n)$ образует N-семейство, если

1. $\operatorname{supp}(\varphi_\rho) \subset \{x \in R^n \mid \rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho\}$, при любом $\rho > 0$

и

2. $[D^\alpha \varphi_\rho](x) = O(\rho^{N-|\alpha|})$ $(x \in R^n)$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. Заметим, что $\{D^\alpha \varphi_\rho\}$ $(\rho > 0)$ есть $N + |\alpha|$-семейство, если $\{\varphi_\rho\}$ $(\rho > 0)$ есть N-семейство.

Определение 5.2. Пусть T — обобщенная функция в $R^n \setminus \{0\}$ (в смысле Шварца). Будем писать

$$T(x) = O(|x|^{N+1})\ \ (|x| \to 0), \text{ если}$$

$$\frac{1}{\rho^n} < T,\ \varphi_\rho > = O(\rho)\ \ (\rho \to 0) \text{ каково бы ни было } N\text{-семейство } \{\varphi_\rho\}.$$

Это определение согласуется с обычным пониманием символа O, как показывает следующее простое предложение.

Лемма 5.1. *Если f-функция, непрерывная в $R^n \setminus \{0\}$ и*

$$1. \max_{\rho < |x| < 3\rho} |f(x)| = O(\rho^{N+1}) \quad (\rho \to 0),$$

или если функция f — локально-суммируема в $R^n \setminus \{0\}$ и

$$2. \frac{1}{\rho^n} \int\limits_{\rho < |x| < 3\rho} |f|(x)\, dx = O(\rho^{N+1}) \quad (\rho \to 0),$$

то $f(x) = O(|x|^{N+1})$ $(|x| \to 0)$ в смысле определения 5.2.

Для доказательства леммы 5.1 нужно воспользоваться утверждением 2 определения 5.1 лишь при $|\alpha| = 0$. Однако доказательство следующего утверждения использует 2 в полном объеме.

Лемма 5.2. *Если T—обобщенная функция в $R^n \setminus \{0\}$ и*

$$T(x) = O(|x|^{N+1}), \text{ то } [D^\alpha T](x) = O(|x|^{N-|\alpha|+1}) \quad (|x| \to 0),$$

каков бы ни был мультииндекс α.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\rho\}$ — какое-нибудь $N - |\alpha|$-семейство. Тогда

$$\frac{1}{\rho^n} < D^\alpha T, \varphi_\rho > = \frac{1}{\rho^n} < T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi_\rho > = O(\rho),$$

так как $\{D^\alpha \varphi_\rho\}$ есть N-семейство. Доказательство закончено.

2°. Мы здесь рассмотрим асимптотические разложения специального вида, нужные нам для дальнейшего. Можно было бы распространить вводимые в этом пункте понятия и на ряды более общего вида.

Определение 5.3. Пусть T— обобщенная функция в $R^n / \{0\}$, $\left\{c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}$ $(k = -q, -q+1, \cdots)$ — последовательность функций класса $C^\infty(R^n)$. Предположим, что при любом $N = -q, -q+1, \cdots$

$$T(x) - \sum_{k=-q}^{N} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right) = O(|x|^{N+1}) \quad (|x| \to 0)$$

в смысле определения 5.2. Тогда мы будем говорить, что

$$\sum_{k=-q}^{\infty} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

есть слабый асимптотический ряд функции T вблизи нуля.

Следующая лемма показывает, что слабые асимптотические ряды можно дифференцировать почленно.

Лемма 5.3. *Пусть* $\sum\limits_{k=-q}^{\infty} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$ *— слабый асимптотиче-*

ский ряд обобщенной функции T вблизи нуля; α — мультииндекс. Тогда $\sum_{k=-q}^{\infty} D^{\alpha}\left[|x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right]$ *есть слабый асимптотический ряд для $D^{\alpha} T$ вблизи нуля, точнее:*

$$1.\ D^{\alpha}\left[|x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right] = |x|^{k-|\alpha|}\, \tilde{c}_{k-|\alpha|}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где $\{\tilde{c}_p\}_{p=-|\alpha|}^{\infty}$ — некоторая последовательность функций класса $C^{\infty}(S^{n-1})$ для $p = -q-|\alpha|, -q-|\alpha|+1, \cdots$ и

$$2.\ \frac{1}{\rho^n} < D^{\alpha} T - \sum_{k=-q-|\alpha|}^{N} |x|^k \tilde{c}_k\left(\frac{x}{|x|}\right),\ \varphi_{\rho} > = O(\rho),$$

каковы бы не были $N = -q-|\alpha|, \cdots$ и N-семейство $\{\varphi_{\rho}\}$.

Доказательство. Существование функций $\tilde{c}_p$ следует из того, что производная порядка $|\alpha|$ от однородной функции порядка k есть однородная функция порядка $k-|\alpha|$. Пункт 2 есть непосредственное следствие леммы 5.2.

3°. Теорема единственности для слабых асимптотических рядов. Начнем с явного указания некоторого конкретного N-семейства. Положим

$$\varphi_{\rho}(|x|) = k \exp\left\{-\frac{\rho^2}{\rho^2-(|x|-2\rho)^2}\right\} \text{ при } \big||x|-2\rho\big| < \rho \text{ и}$$

$$\varphi_{\rho}(|x|) \equiv 0 \text{ при } \big||x|-2\rho\big| \geqslant \rho, \quad \text{где}$$

$$k^{-1} = \int_1^3 t^{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{1-(t-2)^2}\right\} dt.$$

Ясно, что $\varphi_{\rho} \in C^{\infty}(R^n)$ $(\rho > 0)$ и

a) $\operatorname{supp}(\varphi_{\rho}) \subset \{x \in R^n \mid \rho \leqslant |x| \leqslant 3\rho\}$,

в) $\frac{1}{\rho^n}\int_0^{\infty} \varphi_{\rho}(r)\, r^{n-1} dr = 1$ для любого $\rho > 0$,

c) $[D^{\alpha}\varphi_{\rho}](x) = O(\rho^{-|\alpha|})$ (см. [7], стр. 55).

Определение 5.4. Пусть E — относительное открытое подмножество сферы S^{n-1}. Обозначим через χ_E произвольную функцию класса $C^{\infty}(S^{n-1})$, компактный носитель которой содержится в E.

Теорема 5.1. *Пусть* $\sum_{k=-q}^{\infty} |x|^k c_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$ *— слабый асимптотический ряд обобщенной функции T вблизи нуля. Предположим, что $T(x)$ быстро стремится к нулю при $|x| \to 0$ вдоль конуса с основанием E и вершиной в точке $x = 0$. Точнее*

$$\chi_E\left(\frac{x}{|x|}\right) T(x) = O(|x|^{N+1}) \quad \text{при любом } N = 0, 1, \cdots,$$

и для любой функции χ_E, описанной в определении 5.4.

Тогда $c_k\left(\dfrac{x}{|x|}\right) \equiv 0$ *для* $\dfrac{x}{|x|} \in E$ $(k = -q, -q+1, \cdots)$.

Доказательство. Пусть Y — какая-нибудь сферическая функция. Положим

$$\varphi^*_{\rho, N}(x) = \frac{\varphi_\rho(|x|)}{|x|^N} Y\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Легко проверяется, что $\{\varphi^*_{\rho, N}\}$ есть N-семейство в смысле определения 5.1. Доказательство теоремы проведем по индукции относительно N. При $N = -q$ имеем

$$\frac{1}{\rho^n} < T - |x|^{-q} c_{-q}\left(\frac{x}{|x|}\right), \ \chi_E \varphi^*_{\rho, -q} > = O(\rho)$$

(мы воспользовались тем, что $\{\chi_E \varphi^*_{\rho, N}\}$ — также N-семейство); далее

$$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_{R^n} c_{-q}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-q} \frac{\varphi_\rho(|x|)}{|x|^{-q}} Y\left(\frac{x}{|x|}\right) \chi_E\left(\frac{x}{|x|}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\rho^n} < T, \chi_E \varphi^*_{\rho, -q} > + O(\rho).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\rho^n} < T, \chi_E \varphi^*_{\rho, -q} > = O(\rho),$$

запишем последний интеграл как повторный

$$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_0^\infty \varphi_\rho(r) r^{n-1} dr \int\limits_{S^{n-1}} \chi_E(\omega) c_{-q}(\omega) Y(\omega) d\omega_{n-1} = O(\rho)$$

$(r = |x|, \ \omega = \dfrac{x}{|x|};$ $d\omega_{n-1}$ — естественная мера на S^{n-1}). Из свойства в) функций $r \to \varphi_\rho(r)$ следует, что

$$\int\limits_{S^{n-1}} Y(\omega) [\chi_E c_{-q}](\omega) d\omega_{n-1} = 0.$$

Произвол в выборе функций χ_E и Y позволяет заключить, что $c_{-q}(\omega) = 0$ при любом $\omega \in E$. Индукционный переход обосновывается аналогично. Если известно, что

$$c_{-q}(\omega) = c_{-q+1}(\omega) = \cdots = c_{N-1}(\omega) = 0 \text{ на } E, \text{ то}$$

$$\frac{1}{\rho^n} < T - |x|^N c_N\left(\frac{x}{|x|}\right), \ \chi_E \varphi^*_{\rho, N} > = O(\rho),$$

и так как по условию теоремы

$$\frac{1}{\rho^n} < T, \chi_E \varphi^*_{\rho, \Lambda} > = O(\rho),$$

то рассуждая также как выше, заключаем, что $c_N(\omega) = 0$ ($\omega \in E$). Теорема доказана.

§ 6. Доказательство основной теоремы

1°. Однородные решения полигармонических уравнений.

Лемма 6.1. *Пусть m, s — натуральные числа, $m > 2s$. Пусть далее функция c_m принадлежит классу $C^\infty(S^{n-1})$. Если*

$$\Delta^s \left[|x|^m c_m\left(\frac{x}{|x|}\right)\right] = 0 \quad \textit{для} \quad x \in R^n, \textit{ то}$$

$$c_m(\omega) = \sum_{k=0}^{s} Y_{m-2s}(\omega) \quad (\omega \in S^{n-1}),$$

где Y_j — n-мерная сферическая функция порядка j.

Доказательство. По теореме Альманзи всякое решение U уравнения $\Delta^s U = 0$ в R^n представимо в виде

$$U(x) = \sum_{k=0}^{s} |x|^{2k} U_k(x) \quad (x \in R^n),$$

где U_k — функция, гармоническая в R^n (см. [6], стр. 531). Поэтому для функции c_m, удовлетворяющей условию леммы, справедливо следующее представление:

$$|x|^m c_m\left(\frac{x}{|x|}\right) = \sum_{k=0}^{s} |x|^{2k} U_k(x),$$

где все функции U_k гармонические в R^n, следовательно

$$U_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} |x|^l Y_l^k(\omega)\left(x \in R^n, \omega = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}\right),$$

где Y^k — n-мерная сферическая функция порядка l. Значит при каждом $\omega \in S^{n-1}$

$$|x|^m c_m\left(\frac{x}{|x|}\right) = \sum_{k=0}^{s} |x|^{2k} \sum_{l=0}^{\infty} |x|^l Y_l^k(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} |x|^{l+2k} \times$$

$$\times Y_l^k(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} |x|^l \sum_{k:\, l-2k \geq 0} Y_l^n(\omega).$$

Следовательно,

$$c_m(\omega)=\sum_{k:\ m-2k>0}^{s} Y_{m-2k}(\omega).$$

Лемма доказана.

2°. Теорема единственности для псевдопотенциалов Ньютона.

В этом пункте мы докажем теорему единственности для потенциалов Ньютона в D^η, близкую по духу к теореме 1 статьи [1]. Наше доказательство будет использовать некоторые факты, полученные в [1].

Теорема 6.1. *Пусть* $f\in L^1(R^n)$, w — *функция вещественно-аналитическая в замкнутом круге* $\overline{D}^\eta$; E — *относительно открытое подмножество сферы* S^{n-1}; v — *правильная мажоранта такая, что* $\int\limits_0 \log v(t)\,dt=-\infty$; s — *натуральное число;*

$$\Phi(x)\overset{\text{def}}{:=}\Delta^s\left\{\int\limits_{|y|<\eta}\frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w(x)\right\}(x\in R^n).$$

Если

1. $\int\limits_{|y|<\rho}|f|(y)\,dy\leqslant v(\rho)\ \ (0<\rho<\eta)$,

2. $\left[\chi_E\left(\frac{x}{|x|}\right)\Phi(x)\right]=O(|x|^{N+1})\ \ (|x|\to 0,\ N=0,1,\cdots)$

для любой функции χ_E, *описанной в определении* 5.4, *то существует* $\eta'<\eta$ *такое, что* $f(y)=0$ *при почти всех* $y\in D^{\eta'}$, *а*

$$\operatorname{supp}(\Phi)\subset\{x\in R^n|\eta'\leqslant|x|\}.$$

(Определение правильной мажоранты см. в п. 1° § 1).

Доказательство. Из условия 1 теоремы 6.1 следует, что

$$\frac{1}{\rho^n}\int\limits_{|x|<\rho}\left|\int\limits_{|y|<\eta}\frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}-\sum_{m=0}^{N}|x|^m c_m\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|dx=O(\rho^{N+1})\qquad(6.1)$$

для $N=0,1,2,\cdots$, где

$$c_m\left(\frac{x}{|x|}\right)=\int\limits_{|y|<\eta}\frac{P_m^{(n+1)}(\cos(x,y))}{|y|^{m+n-1}}f(y)\,dy,\qquad(6.2)$$

а $P_m^{(n+1)}$ — многочлены Гегенбауера. Вывод этого соотношения дан в работе [1] (см. § 5, лемма 1). Из аналитичности функций w в шаре $\overline{D}^\eta$ следует существование последовательности $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ функций, вещественно-аналитических на S^{n-1} и числа $\eta'<\eta$ таких, что

$$w(x)=\sum_{m=0}^{\infty}|x|^m w_k\left(\frac{x}{|x|}\right)\qquad(6.3)$$

равномерно в $D^{\eta'}$ и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ [\max_{\omega\in S^{n-1}}|w_k(\omega)|]^{1/k}\leqslant\frac{1}{\eta'}\quad(\eta'>0). \tag{6.4}$$

Сумму $\int\limits_{|y|<\eta}\frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}+w(x)$ обозначим через $T(x)$. Из определения слабого асимптотического ряда (см. леммы 5.1 и 5.2) следует, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Delta^s\left\{|x|^m(c_m+w_m)\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\}$$

есть слабый асимптотический ряд для функции $\Phi=\Delta^s T$ вблизи нуля. По лемме этот ряд имеет вид

$$\sum_{m=-2s}^{\infty}|x|^m\,\tilde{a}_m\left(\frac{x}{|x|}\right)(a_m=c_m+w_m\ \text{ на }\ S^{n-1}).$$

Из теоремы единственности слабо асимптотических рядов 5.1 и из условия быстрого стремления к нулю функции Φ вдоль множества E следует, что

$$\tilde{a}_m(\omega)=0\ \text{ при любом }\ \omega\in E\ \text{ и }\ m\geqslant-2s.$$

Функции $\tilde{a}_m$, очевидно, вещественно-аналитичны на сфере S^{n-1}, так как таковы и c_m и w_m. Поэтому $\tilde{a}_m(\omega)=0$ при любом $\omega\in S^{n-1}$ и $m\geqslant-2s$, значит, $\Delta^s\left[|x|^{m+2s}a_{m+2s}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right]=0$ (см. лемму 5.3) при любом $x\in R^n$. По лемме 6.1

$$a_m(\omega)=\sum_{k=0}^{s}Y_{m-2k}(\omega)\ (m\geqslant 2s;\ \omega\in S^{n-1}),$$

где Y_j — n-мерная сферическая функция порядка j, то есть

$$c_m(\omega)=w_m(\omega)+\sum_{k=0}^{s}Y_{m-2k}(\omega).$$

Умножим последнее тождество на какую-нибудь n-мерную сферическую функцию Y и проинтегрируем по S^{n-1} относительно естественной меры $d\omega_{n-1}$. При достаточно большом m: $m>M(Y)$ получим

$$d_m(Y)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{S^{n-1}}c_m(\omega)\,Y(\omega)\,d\omega_{n-1}=\int\limits_{S^{n-1}}w_m(\omega)\,Y(\omega)\,d\omega_{n-1},$$

так как функция Y ортогональна $\sum\limits_{k=0}^{s}Y_{m-2k}$, если m достаточно велико. Из только что полученного равенства и из оценки (6.4) для w_m получаем такую же оценку для $d_m(Y)$. А именно

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,[d_m(Y)]^{1/m} \leqslant \frac{1}{\eta'}\cdot$$

Повторяя рассуждения, проведенные на стр. 91 и 92 статьи [1], мы выводим теперь из этой оценки, что $f(y)=0$ при почти всех $y\in D^{\eta'}$. А это означает, что Φ—аналитическая в $D^{\eta'}$, следовательно $\Phi\equiv 0$ в $D^{\eta'}$.

Теорема доказана.

3°. Доказательство теоремы B. (формулировка этой теоремы была дана в п. 1°, § 1).

Если $U(x, t)$— решение p-гармонического уравнения в полушаре K_+^δ, принадлежащее классу $H^{2p}(K_+^\delta)$, то по теореме 4.1 данные u_s $(s\in S)$ выражаются через данные u_j $(j\in T)$ на D^δ следующими равенствами:

$$\Phi_s(x) = \sum_{j\in T_1} h_{sj}\,\Delta^{n_j}\left[\int\limits_{|y|<\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}} + w^j(x)\right]\ (s\in S_2), \tag{6.5}$$

$$\Phi_s(x) = \sum_{j\in T_2} h_{sj}\,\Delta^{n_j}\left[\int\limits_{|y|<\delta}\frac{u_j(y)\,dy}{(x-y)^{n-1}} + w^j(x)\right]\ (s\in S_1), \tag{6.6}$$

где $n_j = p-\dfrac{j}{2}$, когда $j\in T_2$ и $n_j = p-\dfrac{j+1}{2}$, когда $j\in T_1$,

$$\text{а}\quad \Phi_s(x) \overset{\text{def}}{=} \Delta^s u_s(x) - \sum_{j\in T}\tilde{h}_{sj}\,\Delta^{n_j} u_j(x). \tag{6.7}$$

Из условий 1 и 2 теоремы B, применяя леммы 5.1 и 5.2, получим (в смысле определения 5.2) из (6.7)

$$\chi_{E_s}\left(\frac{x}{|x|}\right)\Phi_s(x) = O(|x|^{N+1})\ (s\in S),\ N=0, 1,\cdots. \tag{6.8}$$

Далее, пусть

$$\sum_{m=0}^{\infty}|x|^m c_m^j\left(\frac{x}{|x|}\right)\quad (j\in T),$$

где

$$c_m^j\left(\frac{x}{|x|}\right) = \int\limits_{|y|<\eta}\frac{P_m^{(n+1)}(\cos(x, y))}{|y|^{m+n-1}}\,u_j(y)\,dy,$$

асимптотический ряд функции u_j $(j\in T)$ вблизи нуля. Ясно, что (см. (6.5))

$$\sum_{m=0}^{\infty}|x|^m\left[\sum_{j\in T_1}h_{sj}\,\tilde{a}_m^j\left(\frac{x}{|x|}\right)\right],$$

где

$$a_m^j(\omega) = c_m^j(\omega) + w_m^j(\omega) \quad (\omega \in S^{n-1},\ j \in T) \tag{6.9}$$

(по поводу перехода от a к $\tilde{a}$ см. лемму 5.3), является слабым асимптотическим рядом для обобщенной функции Φ_s $(s \in S_2)$. Применяя теорему 5.1 для каждого $s \in S_2$ при условии (6.8) к ряду (6.9), получим

$$\sum_{j \in T_1} h_{sj}\, \tilde{a}_m^j(\omega) = 0 \quad (\omega \in E_s;\ s \in S_2;\ m = 0, 1, \cdots). \tag{6.10}$$

Из аналитичности функции a_m^j (см. (6.9), (6.2)) следует, что последнее равенство сохраняется при всех $\omega \in S^{n-1}$. Так как матрица (h_{sj}) $(s \in S_2,\ j \in T_1)$ обратима по теореме 4.1 (см. утверждение 3), то $\tilde{a}_m^j(\omega) = 0$ для $\omega \in S^{n-1}$ $(j \in T_1,\ m = 0, 1, \cdots)$. Аналогично, из соотношения (6.6) получаем: $\tilde{a}_m^j(\omega) = 0$ для $\omega \in S^{n-1}$ $(j \in T_2,\ m = 0, 1, \cdots)$. Так что для всех $j \in T$ имеем

$$\tilde{a}_m^j(\omega) = 0 \quad (\omega \in S^{n-1},\ m = 0, 1, \cdots).$$

По лемме 6.1 для каждого $j \in T$ получаем

$$a_m^j(\omega) \overset{\text{def}}{=} (c_m^j + w_m^j)(\omega) = [Y_m^j + Y_{m+2} + Y_{m+4} + \cdots$$
$$\cdots + Y_{m+2n_j}](\omega) \quad (m \geqslant -2_{n_j}),$$

где Y_k^j — n-мерные сферические функции, соответствующие индексу j. Далее, как это показывает ход доказательства теоремы 6.1, можем утверждать, что существуют числа η_j, где $0 < \eta_j < \delta$, такие, что

$$u_j(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^j U(x, 0)}{\partial t^j} \equiv 0 \ \text{для}\ x \in D^{\eta_j} \quad \text{и} \quad j \in T.$$

А теперь вернемся к утверждениям (6.5) и (6.6). Они показывают, что $\Delta^{n_s} U_s$ $(s \in S)$ — аналитическая в окрестности нуля (точнее в D^{η}, где $\eta \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{j \in T} \eta_j$). Поэтому и все функции u_s $(s \in S)$ аналитичны в окрестности начала. Из условия 1 теоремы В легко заключить, например, применяя теорему единственности 5.1 к степенному разложению функций u_s в окрестности нуля, что $u_s(x) \equiv 0$ в окрестности нуля. Итак, все функции u_k для $k = 0, 1, \cdots, 2p - 1$ обращаются в нуль в окрестности начала. Следовательно, в силу „грубой теоремы единственности" (теорема 2, § 3), функция U тождественно равна нулю в K_+^δ.

Доказательство закончено.

§ 7. Обсуждение вопроса о точности теоремы А

1°. В этом пункте мы покажем, что условие расходимости интеграла $\int_0 \log v(t)\,dt$, участвующее в формулировке теоремы А, не может быть отброшено. Более того, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть q—натуральное число, v—такая правильная мажоранта, что функция—$\log v$ возрастает на полуоси $(-\infty, 0)$ вместе со всеми своими производными до порядка q (мы считаем, что v — четная функция), и*

$$\int_0 \log v(t)\,dt > -\infty.$$

Тогда существует гармоническая функция класса $C^q(R^2_+)$ такая что

$$1.\ \left|\frac{\partial^m U}{\partial y^m}\right|(x, 0) \leqslant v(x)\ (x \in R,\ m = 0, 1, \cdots, q-1), \tag{7.1}$$

2. $U(x, y) \not\equiv 0$ в R^2_+.

Для построения такой функции U докажем следующую лемму.

Лемма 7.1. *Пусть q — натуральное число, $\psi > 0$ — четная функция класса $C^\infty(R \setminus \{0\})$, возрастающая на полуоси $(-\infty, 0)$ вместе со своими производными до порядка q, и пусть*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx < +\infty.$$

Тогда, если

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)\,dx}{x - z}\ (\operatorname{Im} z > 0),$$

то при любом $m = 0, 1, \cdots, q-1$ функции

$$F^{(m)}(z) = \frac{m!}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)\,dx}{(x - z)^{m+1}}$$

непрерывно продолжимы на множество $R \setminus \{0\}$ и при $t \in R$; $t \neq 0$; $m = 0, 1, \cdots, q-1$ $|F^{(m)}(t)| \leqslant \frac{c_m}{|t|^{m+1}}$ для некоторых c_m.

Доказательство. Пусть $z = t + iy$ $(t \in R \setminus \{0\},\ y > 0)$. Имеем.

$$F^{(m)}(z) = \frac{m!}{\pi i}\left[J_1\left(-\infty, \frac{t}{2}\right) + J_2\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t\right) + J_3\left(\frac{3}{2}t, +\infty\right)\right],$$

где

$$J_k(a, b) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^{m+1}} \quad (k=1, 2, 3).$$

Интегралы J_1 и J_3 оцениваются сразу, так как при $x \in \left(-\infty, \frac{t}{2}\right)$ или $x \in \left(\frac{3}{2}t, +\infty\right)$ имеем $|x-z| \geqslant \frac{t}{2}$, следовательно

$$|J_{1,3}| \leqslant 2^{m+1}\frac{1}{|t|^{m+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \frac{c_m^{1,3}}{|t|^{m+1}} \quad (t \neq 0). \tag{7.2}$$

Чтобы оценить J_2, представим его в следующем виде:

$$J_2 = \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\psi^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{\psi^{(m+1)}(\tilde{t}(x))}{(m+1)!}(x-t)^{m+1}\right]\frac{dx}{(x-z)^{m+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{\psi^{(k)}(t)}{k!}\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t}\frac{(x-t)^k}{(x-z)^{m+1}}\,dx + \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t}\left(\frac{x-t}{x-z}\right)^{m+1}\frac{\psi^{(m+1)}(\tilde{t}(x))}{(m+1)!}\,dx =$$

$$\overset{\text{def}}{=} J_2' + J_2''\left(t = \tilde{t}(x) \in \left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t\right), \text{ когда } x \in \left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t\right)\right).$$

Нетрудно установить интегрированием по частям, что из монотонности $\psi^{(s)}$ и конечности интеграла $\int\limits_0^\infty \psi(x)\,dx$, следует оценка

$$\psi^{(s)}(t) = o\left(\frac{1}{|t|^{s+1}}\right) \quad (s = 0, 1, \cdots, q). \tag{7.3}$$

Далее, так как $\left|\frac{x-t}{x-z}\right| \leqslant 1$ при $z = t + iy$, то для J_2'' имеем

$$|J_2''| \leqslant \frac{|t|}{(m+1)!}\left|\psi^{(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leqslant \frac{c_m'}{|t|^{m+1}} \tag{7.4}$$

см. (7.3).

В оценке (7.4) мы учитывали монотонность $\psi^{(m+1)}$. Для того чтобы оценить J_2', сначала вычислим следующий предел:

$$\lim_{(y\to 0)} \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t} \frac{(x-t)^k}{(x-z)^{m+1}}\, dx \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_k \quad (z = t + iy). \tag{7.5}$$

Имеем,

$$(x-t)^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s (x-z)^{k-s} (z-t)^s.$$

Следовательно, при $z=t+iy$ и $k<m$,

$$a_k = \lim_{y\to 0} \sum_{s=0}^{k} C_k^s (z-t)^s \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3}{2}t} \frac{dx}{(x-z)^{m-k+s+1}} = \lim_{y\to 0} \sum_{s=0}^{k} \frac{C_k^s (iy)^s}{-m+k-s} \times$$

$$\times \frac{1}{(x-z)^{m-k+s}} \Bigg|_{x=\frac{t}{2}}^{x=\frac{3}{2}t} = \sum_{s=1}^{k} + \sum_{s=0}^{0} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{k-m} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\left(\frac{3}{2}t - z\right)^{m-k}} - \frac{1}{\left(\frac{t}{2} - z\right)^{m-k}} \right] = \frac{c_{m,k}}{|t|^{m-k}}$$

(при $s>0$ множитель $(iy)^s$ обеспечивает бесконечную малость s-го слагаемого).

Если $k=m$, то нужно воспользоваться тем, что

$$\lim_{y\to 0} \ln \left| \frac{\frac{3}{2}t - z}{\frac{t}{2} - z} \right| = 0, \quad \text{при } z = t + iy.$$

Следовательно

$$|J_2| < \sum_{k=0}^{m} \frac{|a_k|}{k!} |\psi^{(k)}(t)| \leqslant \frac{\bar{c}_m}{|t|^{m+1}}$$

(см. (7.3), (7.6). Собирая полученные оценки для $J_{1,3}$; J_2'; J_2, получим:

$$|\lim_{y\to 0} F^{(m)}(z)| = |F^{(m)}|(t) \leqslant \frac{c_m}{|t|^{m+1}} \quad (t \in R \setminus \{0\}).$$

(Существование этого предела следует из хорошо известных свойств интеграла типа Коши).

Доказательство теоремы 7.1.

Пусть $\psi(x) = -\log \bar{v}(x)$, где $\bar{v}(x) = \tilde{c}_N |x|^N v(x)$; $\tilde{c}_N$ — достаточно большая константа; $N > N(q)$ — достаточно большое натуральное число. Положим

$$Q(z)=\exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)\,dx}{x-z}\right\}\ (I_m\, z>0) \tag{7.7}$$

и докажем, что Reel $Q(z)$ или $I_m\, Q(z)$ удовлетворяют утверждениям 1 и 2 теоремы 7.1.

Итак, при любом $m=0, 1,\cdots, q-1$ функция $Q^{(m)}(z)$ имеет вид $Q(z)\cdot H_m(z)$, где $H_m(z)$ есть линейная комбинация произведений функций вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)\,dx}{(x-z)^s}\qquad (s=0, 1,\cdots)$$

и по лемме 7.1

$$|Q^{(m)}(t)|\leqslant Q(t)\ \frac{c_{m,N}}{|t|^{N_m}}\leqslant\tilde{v}(t)\ \frac{c_{m,N}}{|t|^{N_m}}\leqslant\frac{\bar{c}_{N_m}}{|t|^{N_m}}\ c_N\,|t|^N v(t).$$

Так что при достаточно большом $N>N(q)$ получим

$$|Q^{(m)}(t)|\leqslant v(t)\ \text{для любого}\ m=0, 1,\cdots, q-1. \tag{7.8}$$

Следовательно, для Reel $Q^{(m)}(z)\overset{\text{def}}{=}U(x, y)$ имеем

$$\left|\frac{\partial^m U}{\partial y^m}\right|(t, 0)\leqslant|Q^{(m)}(t)|\leqslant v(t)\ (m=0, 1,\cdots, q-1).$$

Теорема 7.1 доказана.

2°. В этом пункте мы установим, что теорема А неулучшаема еще и в том смысле, что нельзя в ее условиях уменьшить количество данных Коши, от которых требуется малость вблизи нуля. Если освободить от требований малости хотя бы одну функцию из состава данных Коши $\left\{U, \frac{\partial U}{\partial t},\cdots, \frac{\partial^{2p-1} U}{\partial t^{2p-1}}\right\}$, то решение соответствующего полигармонического уравнения может оказаться нетривиальным, даже если все остальные данные тождественно равны нулю в окрестности нуля.

Теорема 7.2. *Пусть k_0 и p—натуральные числа;* $0\leqslant k_0<2p$. *Существует функция $U\not\equiv 0$ класса $C^\infty(R^{n+1}_+)$ (являющаяся регулярным решением) такая, что при* $\delta>0$

$$\left.\frac{\partial^k U(x, 0)}{\partial t^k}\right|_{D^\delta}\equiv 0\ (k=0, 1,\cdots, k_0-1,\ k_0+1,\cdots, 2p-1). \tag{7.9}$$

Доказательство. Для определенности предположим, что исключительное значение k_0 — четное число, то есть $k_0=2s_0$. Пусть f — ненулевая финитная функция класса $C^\infty(R^n)$, сосредоточенная в кольце $D^{2\delta}\setminus\overline{D}^\delta$.

Искомую систему $\{U_k\}_{k=0}^{2p-1}$ данных Коши с условием (7.9) построим следующим образом:

$$U_{2k+1}(x) \overset{\text{def}}{=} c_{2k+1}\Delta^{k+1} f(x) \quad (x \in R^n,\ k = 0, 1, \cdots, 2p-1),$$

где константы c_{2k+1} будут выбраны чуть позже, а данные u_{2k}, где $k = 0, 1, \cdots, p-1$ определим с учетом замечания к теореме 3.2, устанавливающей зависимость между данными Коши, обеспечивающими разрешимость задачи Коши. А именно, пусть v_s — преобразование Фурье функции u_s. Выберем функции u_{2k} так, чтобы

$$|\sigma|^{-2k} v_{2k}(\sigma) = \left[\sum_{j=0}^{p-1} h_{2k,\,2j+1} |\sigma|^{-2j} v_{2j+1}(\sigma)\right] |\sigma|^{-1}. \tag{7.10}$$

Здесь $(h_{2k,\,2j+1})$ $(k,\ j = 0, 1, \cdots, p-1)$ — матрица, участвующая в соотношении связи (2.3) теоремы 2.1. Легко видеть, что правые части равенств (7.10) совпадают с

$$\left[\sum_{j=0}^{p-1} h_{2k,\,2j+1}\, c_{2j+1}\right] |\sigma| \hat{f}(\sigma) \quad (k = 0, 1, \cdots, p-1). \tag{7.11}$$

Если мы положим $u_{2k} \equiv 0$ при $k \neq s_0$, а постоянные c_{2j+1} определим из системы

$$\sum_{j=0}^{p-1} h_{2k,\,2j+1}\, c_{2j+1} = \delta^{k,\,s_0} \quad (k = 0, 1, \cdots, p-1), \tag{7.12}$$

то (7.10) будет выполнено при $s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, s_0 + 1, \cdots, p-1$. Наконец, положим

$$u_{2s_0}(x) = c \int_{R^n} \frac{\Delta^{s_0+1} f(y)\, dy}{|x-y|^{n-1}}. \tag{7.13}$$

Очевидно, что (7.10) будет выполнено и при $k = s_0$.

Разрешимость системы (7.12) следует из обратимости соответствующей матрицы (см. теорему 3.1, п. 3°). По теореме 3.3 существует функция $U \in H^{2p}(R_+^{n+1})$, удовлетворяющая уравнению $\Delta_t^p U = 0$ $((x, t) \in R_+^{n+1})$ и такая, что

$$\frac{\partial^k U(x, 0)}{\partial t^k} = u_k(x) \quad (k = 0, 1, \cdots, 2p-1,\ x \in R^n).$$

Функции u_k $(k=0, 1, \cdots, 2p-1)$ по построению принадлежат $C^\infty(R^n)$. Поэтому решение $U(x, t)$ принадлежит классу $C^\infty(\overline{R}_+^{n+1})$ (см. [7], стр. 30, замечание 1). Построенная нами функция U является регулярным решением p-гармонического уравнения в R_+^{n+1} и не есть тождественный нуль (см. определение функции u_{2s_0} (7.13), хотя и выполнены равенства (7.9). Теорема доказана.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность профессору В. П. Хавину за постановку задачи, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова Поступила 3.VI.1975

Զ. Ա. ԱՌՈՒՇԱՆՅԱՆ. Միակության եզրային թեորեմա պոլիհարմոնիկ հավասարման Կոշու խնդրի լուծման համար (*ամփոփում*)

Այս աշխատանքում պոլիհարմոնիկ ֆունկցիաների համար հետազոտվում է հետևյալ հարցը. թե Կոշու տվյալները ինչպիսի արագությամբ պիտի նվազեն եզրագծի ֆիքսված կետին մոտենալու դեպքում (եզրագծի երկայնքով), որպեսզի հավասարման լուծումը լինի նույնաբար զրո։

Z. A. ARUSHANIAN. *A boundary uniqueness theorem for the solution of the Cauchy problem for polyharmonic equation* (summary)

The paper investigates the rate of decrease of the Cauchy data

$$\left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{2p-1} u}{\partial t^{2p-1}}\right\}$$

along the boundary sufficient for the solution of the Cauchy polyharmonic equation to be identical zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Мазья, В. П. Хавин.* О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа; единственность, нормальность, аппроксимация, Труды ММО, т. 30, 1974, 61—114.
2. *С. Н. Мергелян.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, УМН, XI, № 5, 1956, 3—26.
3. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ, второй специальный курс, Изд. „Наука", М., 1965.
4. *Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес.* Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд. „Мир". М., 1971.
5. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. „Мир", М., 1973.
6. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, Изд. „Наука", М., 1974.
7. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИИЛ, М., 1962.
8. *С. Бохнер, У. Т. Мартин.* Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, М., 1951.
9. *В. Рао.* Теорема единственности для гармонических функций, Мат. заметки, 3, № 3, 1968, 247—254.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 6, 1976 Математика

Ф. А. ТАЛАЛЯН

О СУММИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение

Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T=(T_{m,n})$ — матрица, состоящая из произвольных отображений E в себя. Тогда преобразование

$$y_m=\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}x_n$$

определяет метод суммирования последовательностей в E. Если предел $\lim\limits_{m\to\infty} y_m$ существует, то он называется T-пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначается через $T-\lim x_n$.

А. Робинсон ([1], см. также [2]) доказал, что в том случае, когда пространство E банахово и $T_{m,n}$ — непрерывные линейные отображения E в себя, для регулярности матрицы (или метода суммирования) T необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

1) $\lim\limits_{m\to\infty} T_{m,n}x=0$ для любого $x\in E$ и $n=1, 2,\cdots$;

2) Для любого $x\in E$ существует

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}x \text{ и } \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\,x=x,$$

т. е. операторы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_{m,n}$ сильно сходятся к тождественному оператору;

3) $\sup\left\{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} T_{m,i}\,x_i\right\|: n=1, 2,\cdots;\ \|x_i\|\leqslant 1,\ i=1, 2,\cdots, n\right\}<C,$

где C не зависит от m.

В дальнейшем условия 1), 2) и 3) мы называем условиями регулярности, соответственно первым, вторым и третьим.

В настоящей работе рассматриваются следующие задачи.

Каково множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$, если некоторая матрица T суммирует

a) все перестановки последовательности $\{x_n\}$,

b) все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$.

Для числовых последовательностей и матриц задача b) рассмотрена в работах [3] и [4].

Начнем с одного примера. Пусть E — бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_n: n=1, 2, \cdots\}$ — ортонормальная система в E и T есть матрица Чезаро

$$T=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\|.$$

Пусть $\{n_k\}$ — произвольная (не обязательно возрастающая) последовательность натуральных чисел. В силу ортонормальности системы $\{e_n\}$ имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} T_{m,k}\, e_{n_k}\right\| = \left\|\frac{1}{m}(e_{n_1}+\cdots+e_{n_m})\right\| \leqslant \frac{\sqrt{m}}{m} \to 0.$$

Следовательно матрица T суммирует все перестановки и все подпоследовательности расходящейся последовательности $\{e_n\}$.

Таким образом, в общем случае условия a) или b) не гарантируют сходимость последовательности $\{x_n\}$ и вопрос заключается в выяснении структуры множества предельных точек.

§ 1. Перестановки

Теорема 1.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T_{m,n}$ — произвольные отображения E в себя такие, что матрица $T=(T_{m,n})$ удовлетворяет первому условию регулярности. Тогда, если множество T-пределов всех перестановок последовательности $\{x_n\}$ состоит из более чем одной точки, то существует перестановка, которая не суммируется матрицей T.*

Сначала докажем одну лемму.

Лемма 1.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $\{T_n\}$ — последовательность произвольных отображений E в себя. Положим*

$$S_m = \sup\left\{\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} T_k\, x_{n_k}\right\|\right\},$$

где sup *берется по всем перестановкам последовательности* $\{x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\}$. *Тогда, если для любой перестановки* $\{x_{n_k}\}$ *последовательности* $\{x_n\}$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} T_k x_{n_k}$ *сходится, то*

$$\lim_{m \to \infty} S_m = 0. \tag{1.1}$$

Доказательство. Сначала введем некоторые обозначения. Положим $X = \{x_n\}$, т. е. X есть фиксированная последовательность, фигурирующая в формулировке леммы. Если x есть элемент (новое обозначение для элемента) последовательности X, то через $N(x)$ обозначим номер этого элемента в X. Два элемента x' и x'' последовательности X совпадают или нет в зависимости от того справедливо или нет равенство $N(x') = N(x'')$.

Далее, если через V обозначена последовательность $\{v_1, v_2, \cdots\}$, то через V_k мы обозначим конечную последовательность $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$.

Наконец, введем одну операцию над конечными последовательностями. Если A и B — конечные последовательности, каждая из которых составлена из различных элементов X, то через AB обозначим конечную последовательность, построенную следующим образом: зачеркиваем из B все те элементы, которые встречаются в A, сохраняем порядок между оставшимися элементами и полученную последовательность приписываем справа к A. Условимся также вместо $(AB)\,C$ писать ABC.

Теперь перейдем к доказательству леммы. Допустим обратное. Пусть $m(1) < m(2) < \cdots$ — такая последовательность, что

$$S_{m(k)} > a > 0, \ k = 1, 2, \cdots. \tag{1.2}$$

Индукцией по i построим последовательности $\{k_i\}$, $\{X^{(i)}\}$ и $\{M_i\}$ где $\{k_i\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, каждое $X^{(i)}$ есть перестановка последовательности

$$\{x_{m(k_i)+1}, x_{m(k_i)+2}, \cdots\}$$

и M_i — натуральные числа.

Положим $k_1 = 1$. Согласно (1.2) $S_{m(k_1)} > a$. Поэтому найдется перестановка $X^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\}$ последовательности $\{x_{m(k_1)+1}, x_{m(k_1)+2}, \cdots\}$ такая, что

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m(k_1)+n} x_n^{(1)}\right| > a.$$

Возьмем M_1 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{M_1} T_{m(k_1)+n} x_n^{(1)}\right| > a.$$

Пусть построены k_{l-1}, $X^{(l-1)}=\{x_1^{(l-1)}, x_2^{(l-1)},\cdots\}$ и M_{l-1}. Возьмем $k_l>k_{l-1}$ настолько большим, чтобы для любого $n=1, 2,\cdots, M_{l-1}$ выполнялось неравенство $N(x_n^{(l-1)})\leqslant m(k_l)$. Согласно (1.2) имеем $S_{m(k_l)}>a$. Поэтому найдется перестановка $X^{(l)}=\{x_1^{(l)}, x_2^{(l)},\cdots\}$ последовательности $\{x_{m(k_l)+1}, x_{m(k_l)+2},\cdots\}$ такая, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m(k_l)+n}\, x_n^{(l)} \right\| > a.$$

Возьмем M_l настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{M_l} T_{m(k_l)+n}\, x_n^{(l)} \right\| > a. \tag{1.3}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательности $\{k_l\}$, $\{X^{(l)}\}$ и $\{M_l\}$, для которых при любом l выполняется неравенство (1.3).

Теперь, используя введенные обозначения, построим следующую бесконечную последовательность

$$X_{m(k_1)}\, X^{(1)}_{M_1}\, X_{m(k_2)}\,,\ X^{(2)}_{M_2}\, X_{m(k_3)},\cdots. \tag{1.4}$$

Согласно нашему построению последовательность (1.4) представляет собой перестановку последовательности X.

Представим последовательность (1.4) в виде $\{y_1, y_2,\cdots\}$. Тогда, в силу (1.3), будем иметь

$$\left\| \sum_{n=m(k_l)+1}^{m(k_l)+M_l} T_n\, y_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{M_l} T_{m(k_l)+n}\, x_n^{(l)} \right\| > a$$

для любого $l=1, 2,\cdots$. Это значит, что ряд $\sum T_n y_n$ расходится, чего не может быть. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Предположим обратное. Пусть $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — такие перестановки последовательности $\{x_n\}$, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\, y_n = y_0,\ \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m,n}\, z_n = z_0 \tag{1.5}$$

и $y_0\neq z_0$. Мы покажем, что тогда можно построить новую перестановку, которая не суммируется матрицей T.

Обозначим через $p(k)$ наименьшее натуральное число n, обладающее тем свойством, что для любого $i\leqslant k$ существует $j\leqslant n$ такое, что y_i и z_j представляют собой один и тот же элемент последовательности $\{x_n\}$. Меняя ролями $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, аналогичным образом определяем величину $q(k)$.

Далее положим

$$s(m, Y, N)=\sup\left\{\left\| \sum_{k=1}^{N} T_{m,k}\, y_{n_k} \right\|\right\},$$

где sup берется по всем перестановкам $\{y_{n_1}, \cdots, y_{n_N}\}$ элементов $y_1, \cdots, y_N$. Аналогично определяется выражение $s(m, Z, N)$. Очевидно, при любом N имеет место

$$\lim_{m\to\infty} s(m, Y, N) = \lim_{m\to\infty} s(m, Z, N) = 0. \tag{1.6}$$

Наконец, положим

$$S(m, Y, N) = \sup\left\{\left\|\sum_{k=N+1}^{\infty} T_{m,k}\, y_{n_k}\right\|\right\},$$

где sup берется по всем перестановкам $\{y_{n_1}, y_{n_2}, \cdots\}$ последовательности $\{y_{N+1}, y_{N+2}, \cdots\}$. Аналогично определяется $S(m, Z, N)$. Применяя лемму к последовательностям $\{T_{m,n}: n = 1, 2, \cdots\}$ и $\{y_n: n = 1, 2, \cdots\}$ или к $\{T_{m,n}: n = 1, 2, \cdots\}$ и $\{z_n: n = 1, 2, \cdots\}$, получим, что при любом m имеет место

$$\lim_{N\to\infty} S(m, Y, N) = \lim_{N\to\infty} S(m, Z, N) = 0. \tag{1.7}$$

Теперь индукцией построим последовательность $n_0, m_1, n_1, m_2, n_2, \cdots$. Пусть n_0 — произвольное натуральное число, и $\{\delta_n\}$ — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Возьмем m_1 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$s(m_1, Z, p(n_0)) < \delta_1$$

и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_1,n}\, z_n - z_0\right\| < \delta_1.$$

Выбор такого числа возможен, в силу (1.5) и (1.6).

Теперь возьмем число $n_1 > p(n_0)$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$S(m_1, Z, n_1) < \delta_1.$$

Выбор такого n_1 возможен, в силу (1.7).

Далее выбираем число $m_2 > m_1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$s(m_2, Y, q(n_1)) < \delta_2$$

и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_2,n}\, y_n - y_0\right\| < \delta_2,$$

после чего выбираем $n_2 > q(n_1)$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$S(m_2, Y, n_2) < \delta_2.$$

Допустим построены числа m_l и n_l. Если l — нечетное число, то выбираем $m_{l+1} > m_l$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$s\,(m_{l+1},\ Y,\ q\,(n_l)) < \delta_{l+1} \tag{1.8}$$

и

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{l+1},\,n}\, y_n - y_0\right| < \delta_{l+1}, \tag{1.9}$$

после чего выбираем $n_{l+1} > q(n_l)$ так, чтобы выполнялось

$$S\,(m_{l+1},\ Y,\ n_{l+1}) < \delta_{l+1}. \tag{1.10}$$

Если же l — четное число, то, используя (1.5), (1.6) и (1.7), мы найдем числа $m_{l+1} > m_l$ и $n_{l+1} > p\,(n_l)$ такие, что выполняются неравенства

$$s\,(m_{l+1},\ Z,\ p\,(n_l)) < \delta_{l+1}, \tag{1.11}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{l+1},\,n}\, z_n - z_0\right| < \delta_{l+1} \tag{1.12}$$

и

$$S\,(m_{l+1},\ Z,\ n_{l+1}) < \delta_{l+1}. \tag{1.13}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим $n_0,\ m_1,\ n_1,\ m_2,\ n_2,\cdots$. Отметим, что последовательности $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ являются строго возрастающими.

Теперь положим $Y_n = \{y_1,\cdots,y_n\}$, $Z_n = \{z_1,\cdots,z_n\}$, и используя операцию над конечными последовательностями, введенную при доказательстве леммы, построим бесконечную последовательность

$$Y_{n_0}\, Z_{n_1}\, Y_{n_2}\, Z_{n_3}\cdots. \tag{1.14}$$

Очевидно (1.14) является перестановкой последовательности $\{x_n\}$. Представим (1.14) в виде

$$\{v_1,\ v_2,\cdots\}. \tag{1.15}$$

Тогда из наших построений видно, что при любом $k = 1, 2,\cdots$ последовательность (1.15) удовлетворяет следующим условиям:

$$\{v_1,\cdots, v_{q\,(n_{2k-1})}\} \text{ является перестановкой } \{y_1,\cdots, y_{q\,(n_{2k-1})}\}, \tag{1.16}$$

$$\{v_1,\cdots, v_{p\,(n_{2k})}\} \text{ является перестановкой } \{z_1,\cdots, z_{p\,(n_{2k})}\}, \tag{1.17}$$

$$v_n = y_n \text{ при } q\,(n_{2k-1}) + 1 \leqslant n \leqslant n_{2k}, \tag{1.18}$$

$$v_n = z_n \text{ при } p\,(n_{2k}) + 1 \leqslant n \leqslant n_{2k+1}, \tag{1.19}$$

$$\{v_n\colon n \geqslant n_{2k} + 1\} \text{ является перестановкой } \{y_n\colon n > n_{2k} + 1\}, \tag{1.20}$$

$$\{v_n\colon n \geqslant n_{2k-1} + 1\} \text{ является перестановкой } \{z_n\colon n \geqslant n_{2k-1} + 1\}. \tag{1.21}$$

Теперь докажем, что последовательность (1.15) не суммируется матрицей T. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{2k},\,n}\, v_n = \sum_{n=1}^{q\,(n_{2k-1})} T_{m_{2k},\,n}\, v_n + \sum_{n=q\,(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k},\,n}\, v_n +$$

$$+ \sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} T_{m_{2k}, n} v_n. \tag{1.22}$$

В силу (1.16), (1.8), (1.20) и (1.10) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{q(n_{2k-1})} T_{m_{2k}, n} v_n \right\| \leqslant s\,(m_{2k},\ Y,\ q\,(n_{2k-1})) < \delta_{2k}, \tag{1.23}$$

$$\left\| \sum_{n=n_{2k}+1}^{\infty} T_{m_{2k}, n} v_n \right\| \leqslant S\,(m_{2k},\ Y,\ n_{2k}) < \delta_{2k}. \tag{1.24}$$

Далее из (1.18) получим

$$\sum_{n=q(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k}, n} v_n = \sum_{n=q(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k}, n}\ y_n,$$

откуда, в силу (1.8), (1.9) и (1.10), имеем

$$\left\| \sum_{n=q(n_{2k-1})+1}^{n_{2k}} T_{m_{2k}, n} v_n - y_0 \right\| < 3\delta_{2k}. \tag{1.25}$$

Наконец, из (1.22), (1.23), (1.24) и (1.25) следует

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{2k}, n} v_n - y_0 \right\| < 5\delta_{2k}. \tag{1.26}$$

Точно так же, используя условия (1.11), (1.12), (1.13), (1.17), (1.19) и (1.21), получим

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_{2k+1}, n} v_n - z_0 \right\| < 5\delta_{2k+1}. \tag{1.27}$$

Так как $y_0 \neq z_0$, то из (1.26) и (1.27) следует, что последовательность $\{v_1, v_2, \cdots\}$ не суммируется матрицей T, что и требовалось.

Теорема 1.2. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T = (T_{m,n})$ — матрица, состоящая из непрерывных линейных отображений E в себя, удовлетворяющая первым двум условиям регулярности. Если все перестановки последовательности $\{x_n\}$ T-суммируемы, то*

1) *T-пределы всех перестановок равны $T - \lim x_n$,*

2) *последовательность $\{x_n\}$ либо не имеет предельных точек, либо имеет единственную предельную точку $T - \lim x_n$.*

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 1.2. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{T_n\}$ — последовательность непрерывных линейных операторов, отображающих E в себя такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = 0 \text{ для любого } x \in E \tag{1.28}$$

и $\{x_n\}$—последовательность точек E, имеющая предельную точку $x_0 \in E$. Положим

$$S_N = \sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T_{N+n}\, x'_n\right\| : \{x'_n\} \in \sigma_N\right\},$$

где σ_N — множество всех последовательностей, получающихся из $\{x_n\}$ удалением каких-либо N элементов и перестановкой оставшихся элементов. Тогда, если для любой перестановки $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n y_n$ сходится, то

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 0.$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда существует число $a > 0$ такое, что

$$S_N > a \text{ при бесконечно многих значениях } N. \tag{1.29}$$

Исходя из (1.29) мы построим такую перестановку $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n y_n$ расходится.

Возьмем число N_1 таким, чтобы имело место $S_{N_1} > a$. Тогда найдется последовательность $\{x_n^{(1)}\} \in \sigma_{N_1}$ и натуральное число n_1 такие, что

$$\left\|\sum_{n=1}^{n_1} T_{N_1+n}\, x_n^{(1)}\right\| > a.$$

Положим $y_{N_1+n} = x_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_1$, и пусть $y_{N_1+n_1+1}$ есть первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $N_1+1 < n \leqslant N_1+n_1$. Таким образом, имеем

$$\left\|\sum_{n=N_1+1}^{N_1+n_1} T_n\, y_n\right\| > a. \tag{1.30}$$

Далее, в силу условия (1.28) и предположения (1.29), существует такое $N_2 > N_1 + n_1$, что выполняются следующие условия:

$$S_{N_2} > a, \tag{1.31}$$

$$\|T_m y_n\| < \frac{a}{4(n_1+1)},\ m > N_2,\ N_1 + 1 \leqslant n < N_1 + n_1 + 1, \tag{1.32}$$

$$\|T_m x_0\| < \frac{a}{8(n_1+1)},\ m > N_2. \tag{1.33}$$

В силу (1.31) найдется последовательность $\{x_n^{(2)}\} \in \sigma_{N_2}$ и натуральное число n_2 такие, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_2} T_{N_2+n} x_n^{(2)} \right\| > a. \tag{1.34}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Никакой элемент y_n, $N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1$ не встречается среди элементов $x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_2$. Тогда полагаем $y_{N_2+n} = x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_2$ и в качестве $y_{N_2+n_2+1}$ берем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех

$$y_n,\ N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1,\ N_2 + 1 \leqslant n \leqslant N_2 + n_2.$$

2) Пусть

$$y_{m(2,1,p)} = x_{k(2,1,p)}^{(2)},\ p = 1, 2, \cdots, l(2, 1),\ l(2, 1) \leqslant n_1 + 1, \tag{1.35}$$

где $m(2, 1, p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие неравенству $N_1 + 1 \leqslant m(2, 1, p) \leqslant N_1 + n_1 + 1$, а $k(2, 1, p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leqslant k(2, 1, p) \leqslant n_2$. Возьмем попарно различные элементы $x_{t(2,1,p)}$, $p = 1, 2, \cdots, l(2, 1)$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы каждое $x_{t(2,1,p)}$ было отлично от всех y_n, $N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1$, $x_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_2$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\| T_m (x_{t(2,1,p)} - x_0) \| < \frac{a}{8(n_1 + 1)}, \tag{1.36}$$

$$m = N_2 + k(2, 1, p),\ p = 1, 2, \cdots, l(2, 1).$$

Теперь заменим в последовательности $\{x_1^{(2)}, \cdots, x_{n_2}^{(2)}\}$ все $x_{k(2,1,p)}^{(2)}$ на соответствующие $x_{t(2,1,p)}$, $p = 1, 2, \cdots, l(2, 1)$ и элементы полученной указанным способом последовательности обозначим через $y_{N_2+1}, \cdots$ $\cdots, y_{N_2+n_2}$. Наконец, в качестве $y_{N_2+n_2+1}$ возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $N_1 + 1 \leqslant n \leqslant N_1 + n_1 + 1$, $N_2 + 1 \leqslant n \leqslant N_2 + n_2$.

Тогда в любом случае мы будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N_2+1}^{N_2+n_2} T_n y_n \right\| > \frac{a}{2}. \tag{1.37}$$

Действительно, в случае 1) неравенство (1.37) совпадает с неравенством (1.34). Пусть имеет место случай 2). Разобьем суммы, фигурирующие в неравенствах (1.34) и (1.37), на две части

$$\sum_{n=1}^{n_2} T_{N_2+n} x_n^{(2)} = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant n_2 \\ n \neq k(2,1,p)}} T_{N_2+n} x_n^{(2)} + \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x_{k(2,1,p)}^{(2)}, \tag{1.38}$$

$$\sum_{n=N_2+1}^{N_2+n_2} T_n y_n = \sum_{\substack{1\leq n\leq n_2 \\ n\neq k(2,1,p)}} T_{N_2+n} x_n^{(2)} + \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x_{l(2,1,p)}. \tag{1.39}$$

Из (1.32) и (1.35) имеем

$$\left\| \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x^{(2)}_{k(2,1,p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.40}$$

Из (1.33) и (1.36) выводим

$$\left\| \sum_{p=1}^{l(2,1)} T_{N_2+k(2,1,p)} x_{l(2,1,p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.41}$$

Из (1.38), (1.39), (1.40) и (1.41) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_2} T_{N_2+n} x_n^{(2)} - \sum_{n=N_2+1}^{N_2+n_2} T_n y_n \right\| < \frac{a}{2}. \tag{1.42}$$

Наконец, из (1.34) и (1.42) получим (1.37).

Пусть выбраны числа $N_1, n_1, N_2, n_2, \cdots, N_{i-1}, n_{i-1}$ и элементы

$$y_n,\ N_j+1\leq n\leq N_j+n_j+1,\ j=1, 2, \cdots, i-1.$$

Возьмем число $N_i > N_{i-1}+n_{i-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$S_{N_i} > a, \tag{1.43}$$

$$\|T_m y_n\| < \frac{a}{4(n_1+\cdots+n_{i-1}+i-1)}, \tag{1.44}$$

$$m > N_i,\ N_j+1\leq n\leq N_j+n_j+1,\ j=1, 2, \cdots, i-1,$$

$$\|T_m x_0\| < \frac{a}{8(n_1+\cdots+n_{i-1}+i-1)},\ m > N_i. \tag{1.45}$$

В силу (1.43) найдется последовательность $\{x_n^{(i)}\} \in \sigma_{N_i}$ и натуральное число n_i такие, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_i} T_{N_i+n} x_n^{(i)} \right\| > a. \tag{1.46}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Никакой элемент y_n, $N_j+1\leq n\leq N_j+n_j+1$, $j=1, 2, \cdots, i-1$ не встречается среди элементов $x_n^{(i)}$, $n=1, 2, \cdots, n_i$. Тогда полагаем $y_{N_i+n} = x_n^{(i)}$, $n=1, 2, \cdots, n_i$ и в качестве $y_{N_i+n_i+1}$ берем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех

$$y_n,\ N_j+1\leq n\leq N_j+n_j+1,\ j=1, 2, \cdots, i-1,\ N_i+1\leq n\leq N_i+n_i.$$

2) Пусть

$$y_{m(i,j(q),p)} = x^{(i)}_{n(i,j(q),p)}, \tag{1.47}$$

$$q = 1, 2, \cdots, r(i);\ r(i) \leqslant i-1;\ p = 1, 2, \cdots, l(i, j(q));$$
$$l(i, j(q)) < n_{j(q)} + 1,$$

где $j(q)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие наравенству $1 \leqslant j(q) \leqslant i-1$, $m(i, j(q), p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие соответствующим неравенствам $N_{j(q)} + 1 \leqslant m(i, j(q), p) \leqslant$ $< N_{j(q)} + n_{j(q)} + 1$, $p = 1, 2, \cdots, l(i, j(q))$, и наконец $k(i, j(q), p)$ — попарно различные числа, удовлетворяющие неравенству

$$1 \leqslant k(i, j(q), p) \leqslant n_i,\ q = 1, 2, \cdots, r(i),\ p = 1, 2, \cdots, l(i, j(q)).$$

Возьмем попарно различные элементы $x_{t(i, j(q), p)}$, $q = 1, 2, \cdots$ $\cdots, r(i)$, $p = 1, 2, \cdots, l(i, j(q))$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы каждое $x_{t(i, j(q), p)}$ было отлично от всех y_n, $N_j + 1 \leqslant n < N_j + n_j + 1$, $j = 1, 2, \cdots, i-1$; $x_n^{(i)}$, $n = 1, 2, \cdots, n_i$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\|T_m(x_{t(i, j(q), p)} - x_0)\| < \frac{a}{8(n_1 + \cdots + n_{i-1} + i - 1)}, \tag{1.48}$$
$$m = N_i + k(i, j(q), p),\ q = 1, 2, \cdots, r(i),\ p = 1, 2, \cdots, l(i, j(q)).$$

Теперь заменим в последовательности $x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}$ каждое $x_{k(i, j(q), p)}^{(i)}$ соответствующим $x_{t(i, j(q), p)}$, и элементы последовательности, полученной после такой замены, обозначим через $y_{N_i+1}, \cdots, y_{N_i+n_i}$.

Наконец, в качестве $y_{N_i+n_i+1}$ возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех элементов

y_n, $N_j + 1 \leqslant n \leqslant N_j + n_j + 1$, $j = 1, 2, \cdots, i-1$, $N_i + 1 \leqslant n \leqslant N_i + n_i$.

Тогда в любом случае будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N_i+1}^{N_i+n_i} T_n y_n \right\| > \frac{a}{2}\cdot \tag{1.49}$$

Действительно, в случае 1) неравенство (1.49) совпадает с неравенством (1.46). Пусть имеет место случай 2). Перепишем суммы, фигурирующие в неравенствах (1.46) и (1.49), в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{n_i} T_{N_i+n} x_n^{(i)} = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant n_i \\ n \neq k(i, j(q), p)}} T_{N_i+n}\, x_n^{(i)} + \sum_{q=1}^{r(i)} \sum_{p=1}^{l(i, j(q))} T_{N_i+k(i, j(q), p)}\, x_{k(i, j(q), p)}^{(i)}, \tag{1.50}$$

$$\sum_{n=N_i+1}^{N_i+n_i} T_n y_n = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant n_i \\ n \neq k(i, j(q), p)}} T_{N_i+n}\, x_n^{(i)} + \sum_{q=1}^{r(i)} \sum_{p=1}^{l(i, j(q))} T_{N_i+k(i, j(q), p)}\, x_{t(i, j(q), p)}. \tag{1.51}$$

Из (1.44) и (1.47) имеем

$$\left\| \sum_{q=1}^{r(l)} \sum_{p=1}^{l(l,j(q))} T_{N_l+k(l,j(q),p)} x^{(l)}_{k(l,j(q),p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.52}$$

Из (1.45) и (1.48) получим

$$\left\| \sum_{q=1}^{r(l)} \sum_{p=1}^{l(l,j(q))} T_{N_l+k(l,j(q),p)} x_{t(l,j(q),p)} \right\| < \frac{a}{4}. \tag{1.53}$$

Из (1.50), (1.51), (1.52) и (1.53) имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{n_l} T_{N_l+n} x^{(l)}_n - \sum_{n=N_l+1}^{N_l+n_l} T_n y_n \right\| < \frac{a}{2}. \tag{1.54}$$

Наконец, из (1.46) и (1.54) получим (1.49).

Продолжив указанный процесс неограниченно, мы построим последовательность отрезков $[N_l+1, N_l+n_l]$ натурального ряда, причем каждому $n \in U[N_l+1, N_l+n_l]$ сопоставлен некоторый элемент y_n последовательности $\{x_n\}$. Из построения видно, что различным числам соответствуют различные элементы. Далее, из неравенств $N_i > N_{i-1} + n_{i-1}$, $i=1, 2, \cdots$ видно, что бесконечно много натуральных чисел не входят в множество $U[N_l+1, N_l+n_l]$ и, что множество элементов, не соответствующих никаким $n \in U[N_l+1, N_l+n_l]$, бесконечно (оно содержит все $y_{N_i+n_i+1}$, $i=1, 2, \cdots$). Заполним всеми этими элементами все свободные места в натуральном ряде. В результате мы получим перестановку $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой при любом l выполняется (1.49), чего не может быть. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Утверждение 1) содержится в теореме 1.1. Докажем утверждение 2). Пусть x_0 является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. В силу 1) достаточно доказать, что T-предел некоторой перестановки последовательности $\{x_n\}$ равен x_0.

Обозначим

$$S(m, N) = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} T_{m,n} x'_n \right\| : \{x'_n\} \in \sigma_N \right\}.$$

Из второго условия регулярности следует, что при любом m последовательность операторов $\{T_{m,n};\ n=1, 2, \cdots\}$ удовлетворяет условию (1.28). Поэтому, в силу леммы имеем

$$\lim_{N\to\infty} S(m, N) = 0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{1.55}$$

Опишем процесс построения требуемой перестановки. Пусть $\delta_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. В силу второго условия регулярности существует натуральное число m_1 такое, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_1,n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_1.$$

Возьмем N_1 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_1-1} T_{m_1, n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_1 \tag{1.56}$$

и

$$S(m_1, N_1 - 1) < \delta_1. \tag{1.57}$$

Теперь возьмем попарно различные элементы $y_1, \cdots, y_{N_1-1}$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\| T_{m_1, n} (y_n - x_0) \| < \frac{\delta_1}{N_1 - 1}, \; n = 1, 2, \cdots, N_1 - 1. \tag{1.58}$$

Наконец, в качестве y_{N_1} возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $n = 1, 2, \cdots, N_1 - 1$. Пусть выбраны элементы $y_1, \cdots, y_{N_{i-1}}$. Возьмем $m_i > m_{i-1}$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_{i-1}} T_{m_i, n} y_n \right\| < \delta_i, \tag{1.59}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_{i-1}} T_{m_i, n} x_0 \right\| < \delta_i, \tag{1.60}$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_i, n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_i. \tag{1.61}$$

Далее, возьмем $N_i > N_{i-1} + 1$ настолько большим, чтобы имело место

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_i-1} T_{m_i, n} x_0 - x_0 \right\| < \delta_i \tag{1.62}$$

и

$$S(m_i, N_i - 1) < \delta_i. \tag{1.63}$$

Теперь возьмем попарно различные элементы $y_{N_{i-1}+1}, \cdots, y_{N_i-1}$ последовательности $\{x_n\}$ так, чтобы каждое y_n, $N_{i-1} + 1 \leqslant n \leqslant N_i - 1$ было отлично от каждого y_n, $1 \leqslant n \leqslant N_{i-1}$ и чтобы выполнялись неравенства

$$\| T_{m_i, n} (y_n - x_0) \| < \frac{\delta_i}{N_i - N_{i-1}}, \; N_{i-1} + 1 \leqslant n \leqslant N_i - 1. \tag{1.64}$$

Наконец, в качестве y_{N_i} возьмем первый элемент последовательности $\{x_n\}$, отличный от всех y_n, $n = 1, 2, \cdots, N_i - 1$.

Продолжив этот процесс неограниченно, мы построим перестановку $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$ и две последовательности натуральных чисел $\{m_i\}$ и $\{N_i\}$ такие, что при любом i выполняются неравенства (1.59)—(1.64).

Из (1.61) и (1.62) имеем

$$\left\| \sum_{n=N_l}^{\infty} T_{m_l, n} x_0 \right\| < 2\delta_l. \tag{1.65}$$

Из (1.60), (1.61) и (1.65) имеем

$$\left\| \sum_{n=N_{l-1}+1}^{N_l-1} T_{m_l, n}\, x_0 - x_0 \right\| < 4\delta_l. \tag{1.66}$$

Далее, в силу (1.64) и (1.66), будем иметь

$$\left\| \sum_{n=N_{l-1}+1}^{N_l-1} T_{m_l, n}\, y_n - x_0 \right\| < 5\delta_l. \tag{1.67}$$

Наконец, из (1.59), (1.63) и (1.67) получим

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_l, n}\, y_n - x_0 \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N_l-1} T_{m_l, n}\, y_n \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{n=N_{l-1}+1}^{N_l-1} T_{m_l, n}\, y_n - x_0 \right\| + \left\| \sum_{n=N_l}^{\infty} T_{m_l, n}\, y_n \right\| < \delta_l + 5\delta_l + \delta_l = 7\delta_l. \tag{1.68}$$

Так как по условию все перестановки суммируемы, то из (1.68) будем иметь

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m, n}\, y_n = x_0,$$

что и требовалось. Теорема 1.2 доказана.

§ 2. Подпоследовательности

Теорема 2.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T = (T_{m, n})$ — матрица, состоящая из непрерывных линейных отображений E в себя, удовлетворяющая первому условию регулярности. Если все последовательности $\{\varepsilon_n x_n,\ \varepsilon_n = \pm 1\}$ T-суммируемы, то для любого выбора $\varepsilon_n = \pm 1$ справедливо равенство*

$$T - \lim \varepsilon_n x_n = 0.$$

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 2.1. *Пусть E — нормированное линейное пространство и $\{x_n\}$ — последовательность точек E. Если ряд $\Sigma\, \varepsilon_n x_n$ сходится при любом выборе чисел $\varepsilon_n = \pm 1$, то*

$$\lim_{N \to \infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n x_n \right\| : \varepsilon_n = \pm 1 \right\} = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Предположим обратное, тогда существует последовательность $N_1 < N_2 < \cdots$ такая, что

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n=N_k}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| : \varepsilon_n = \pm 1\right\} > a > 0, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.2}$$

В силу (2.2) возьмем такие ε_n, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|\sum_{n=N_1}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| > a. \tag{2,3}$$

Так как ряд $\sum \varepsilon_n x_n$ сходится, то из (2.3) следует существование числа $k(1)$ такого, что

$$\left\|\sum_{n=N_1}^{N_{k(1)}-1} \varepsilon_n x_n\right\| > a.$$

Далее, в силу (2.2) имеем

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n=N_{k(1)}}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| : \varepsilon_n = \pm 1\right\} > a,$$

откуда, при подходящем выборе ε_n, будем иметь

$$\left\|\sum_{n=N_{k(1)}}^{\infty} \varepsilon_n x_n\right\| > a. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует существование числа $k(2)$ такого, что

$$\left\|\sum_{n=N_{k(1)}}^{N_{k(2)}-1} \varepsilon_n x_n\right\| > a.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим такую последовательность знаков ε_n, что ряд $\sum \varepsilon_n x_n$ расходится. Из полученного противоречия вытекает справедливость (2.1).

Доказательство теоремы 2.1. Предположим обратное. Существует такая последовательность знаков ε_n, что

$$T - \lim \varepsilon_n x_n = x_0 \neq 0.$$

Очевидно можно считать $\varepsilon_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$. Таким образом, имеем

$$T - \lim x_n = x_0 \neq 0. \tag{2.5}$$

Построим индукцией две последовательности натуральных чисел $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ и $m_1 < m_2 < \cdots$ следующим образом. Возьмем произвольное число n_0 и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$.

Применяя первое условие регулярности и (2.5), выберем число m_k настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{n=1}^{n_{k-1}} \| T_{m_k, n} x_n \| < \delta_k \tag{2.6}$$

и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_k, n} \ x_n - x_0 \right\| < \delta_k. \tag{2.7}$$

Далее, применяя лемму 2.1, возьмем число n_k настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{n=n_k+1}^{\infty} \varepsilon_n T_{m_k, n} x_n \right\| : \varepsilon_n = \pm 1 \right\} < \delta_k. \tag{2.8}$$

Продолжая указанный процесс неограниченно, мы построим требуемые последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$.

Теперь положим $\varepsilon_i = (-1)^k$ при $n_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_k$. Тогда из (2.6), (2.7) и (2.8) легко следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{m_k, n} \varepsilon_n x_n = (-1)^k x_0. \tag{2.9}$$

Предположение $x_0 \neq 0$ и (2.9) противоречат условиям теоремы 2.1. Итак $x_0 = 0$, что и требовалось.

Теорема 2.2. *Пусть E — нормированное линейное пространство, $\{x_n\}$ — последовательность точек E и $T = (T_{m, n})$ — регулярная матрица, состоящая из линейных отображений E в себя. Если все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ T-суммируемы, то множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$ состоит из не более чем одной точки.*

Доказательство. Пусть x' и x'' — две предельные точки последовательности $\{x_n\}$. Выберем две подпоследовательности $\{x_{p(k)}\}$ и $\{x_{q(k)}\}$ так, чтобы ни один элемент $\{x_n\}$ не входил в $\{x_{p(k)}\}$ и $\{x_{q(k)}\}$ одновременно и чтобы $\lim\limits_{k \to \infty} x_{p(k)} = x'$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_{q(k)} = x''$. Из того, что все подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ T-суммируемы, следует, что при любом выборе знаков ε_k последовательность $\varepsilon_k (x_{p(k)} - x_{q(k)})$ T-суммируема (см. [5], стр. 401). Следовательно, в силу теоремы 2.1 имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{m, k} (x_{p(k)} - x_{q(k)}) = 0. \tag{2.10}$$

С другой стороны, в силу регулярности матрицы T имеем

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{m, k} (x_{p(k)} - x_{q(k)}) = x' - x''. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что $x' = x''$. Теорема 2.2 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 9.II.1976

Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Նորմավորված տարածություններում հաջորդականությունների գումարման մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկված են գումարման մեթոդներ, որոնք տրվում են գծային օպերատորներից կազմված մատրիցներով։ Պարզված է թե ինչ կառուցվածք կարող է ունենալ հաջորդականության սահմանային կետերի բազմությունը, եթե նրա բոլոր տեղափոխությունները կամ բոլոր ենթահաջորդականությունները գումարվում են տվյալ մեթոդով։

F. A. TALALIAN. *Summation of sequences in normal spaces* (summary)

Methods of summation determined by matricies consisting of linear operators are considered. The structure of the set of limiting points of the sequences for whith all transpositions or subsequences are summable by the given method is clariferd.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Robinson.* On functional transformations and summability, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 52, 1950, 132—160.
2. *G. G. Lorentz* and *M. S. Macphail.* Unbounded operators and a theorem of A. Robinson, Trans. Roy. Soc., Canada, vol. 46. series 3, 1952, 33—37.
3. *R. C. Buck.* A note on subsequences, Bull. Amer. Math. Soc., 49, 1943, 898—899.
4. *R. C. Buck.* An addendum to "A note on sybsequences", Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 1074—1075.
5. *Р. Кук.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., 1960.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1976 թ., XI, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика" за 1976 г., XI, №№ 1—6

CONTENTS

of the Isvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, seria "Matematika", 1976, vol. XI, №№ 1—6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 3502. Подписано к печати 12/I 1977 г. Тираж 750. Изд. 4530. Заказ 1077.
Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$. Печ. л. 5,5. Бум. л. 2,75.
Усл. печ. л. 7,7. Уч. изд. л. 6,3.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24.