

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՍԻ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մասնատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ուղիղ թան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումների հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակներին հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։ Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերի շրջանցված սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ավթաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ քան շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 անձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամություն 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մասնատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
 N. H. ARAKELIAN
 S. N. MERGELIAN
 A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
 R. L. SHAKHBAGIAN
 I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“
 Academy of Sciences of Armenia,
 24, Berekamutian St.,
 Yerevan, Soviet Armenia

А. Х. МЕГРАБЯН

РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

Настоящая статья является продолжением работ [4, 5, 6], в которых рассматривался вопрос реализуемости функций классов М. М. Джрбашяна N_α ($-1 < \alpha < \infty$), D_α ($0 < \alpha < \infty$) при α целом. Реализовать функцию $f(z)$ означает построить линейный узел с передаточной функцией $f(z)$.

Реализуемость функций класса $N \equiv N_0$ Неванлинны была доказана в [4]. В работах [5, 6] приводились строения линейных узлов с передаточными функциями классов N_p , D_p ($p = 1, 2, \dots$). В данной работе приводятся реализации функций классов N_α ($-1 < \alpha < \infty$), D_α ($0 < \alpha < \infty$) при не целом α .

В § 1 формулируется ряд понятий и утверждений из теории линейных систем и теории функций классов N_α , D_α .

В § 2 приводятся реализации функций класса N_α ($-1 < \alpha < \infty$).

В § 3 строятся узлы, реализующие функции класса D_α ($0 < \alpha < \infty$).

§ 1. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

1. Пусть имеем пару гильбертовых пространств H (внутреннее), E (внешнее) ($\dim E = 1$), линейный оператор T ($D(T) \subset H$; $T: D(T) \rightarrow H$) элементы $p, q \in H$ ($(zI - T)^{-1} q \in H$), k — комплексное число. Совокупность

$$L = \begin{pmatrix} T & q \\ p & k \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

называется линейным узлом*.

Функция

$$S(z) = k + ((zI - T)^{-1} q, p)_H \quad (1.2)$$

называется передаточной функцией открытой системы F

$$R = (zI - T)^{-1} q,$$

$$S = k + ((zI - T)^{-1} q, p)_H.$$

Если $L_n = \begin{pmatrix} T_n & q_n \\ p_n & k_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2$) — узлы с внутренними пространствами

* В отличие от узлов, рассматриваемых в работе [5], оператор T является произвольным и не связан с элементами p, q, k дополнительными соотношениями.



H_n ($n = 1, 2$) и внешним пространством E , то узел $L = \begin{pmatrix} T & q \\ p & k \end{pmatrix}$, задаваемый равенствами

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2, \\ Tf &= T_1 f_1 + T_2 f_2 + (f_1, p_1) q_2 \quad (f = f_1 + f_2) \\ q &= q_1 + q_2 k_1, \quad p = k_2 p_1 + p_2, \quad k = k_1 k_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

называется сцеплением узлов L_1, L_2 ($L = L_1 \vee L_2$).

Рассмотрим специальный вид ([4, 6]) линейных узлов. Пусть

$$H \equiv H(x_1, x_2) = L_2(F; x_1, x_2) \quad (1.4)$$

— пространство векторнозначных функций $f(x)$ ($x_1 < x < x_2$) со значениями в заданном пространстве F и со скалярным произведением

$$(f, g)_H = \int_{x_1}^{x_2} (f(x), g(x))_F dx. \quad (1.5)$$

Строится семейство узлов $L \equiv L(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= Q_1(x)(Bf)(x) + Q_0(x) \int_{x_1}^x e^{\beta(x-t)} (f, p_0)_F q_0 dt, \\ q &= q_0 Q_0(x) e^{\beta(x-x_1)}, \\ p &= p_0 e^{\beta(x_2-x)}, \\ k &= e^{\beta(x_2-x_1)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где B — линейный оператор в F ; $Q_0(x), Q_1(x)$ ($x_1 < x < x_2$) — комплекснозначные функции; p_0, q_0 (каналовые элементы) $\in H$, причем $(zI - Q_1(x)B)^{-1} q_0 \in F$. Тогда передаточная функция узла (1.6) будет иметь вид

$$S(z) = \exp \left\{ \beta(x_2 - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} ((zI - Q_1(x)B)^{-1} q_0, p_0)_F Q_0(x) dx \right\}. \quad (1.7)$$

2. М. М. Джрбашяном были открыты новые классы D_α ($0 < \alpha < \infty$), а позже — классы N_α ($-1 < \alpha < \infty$) мероморфных в круге $|z| < 1$ функций, которые, по существу, являются сколь угодно широкими ([2, 3]). В частном случае при $\alpha = 0$ класс N_0 совпадает с классом N Неванлинны. Приведем некоторые результаты из этих работ, на которые мы будем существенно опираться.

Пусть

$$U_\alpha(z; \zeta) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \frac{\log \left| 1 - \frac{re^{i\theta}}{\zeta} \right|}{(1 - zr e^{-i\theta})^{\alpha+1}} r dr d\theta. \quad (1.8)$$

Теорема А (М. М. Джрбашян [2]). Если функция $F(z)$ принадлежит классу D_α , то она представима в следующем виде:

$$F(z) = cz^\lambda \frac{\pi_\alpha(z; a_\mu)}{\pi_\alpha(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \frac{\log |F(re^{i\theta})|}{(1-zr e^{-i\theta})^{\alpha+1}} r dr d\theta \right\}, \quad (1.9)$$

где c — константа, λ — целое число, $\{a_\mu\}$, $\{b_\nu\}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots$) — отличные от $z = 0$ нули и полюсы $F(z)$, а

$$\pi_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \{-U_\alpha(z, z_k)\} \quad (1.10)$$

— аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, обращающаяся в нуль в точках множества $\{z_k\}_1^\infty$.

Теорема В (М. М. Джрбашян [3]). Класс N_α ($-1 < \alpha < \infty$) совпадает с множеством функций, допускающих представление в круге $|z| < 1$

$$F(z) = cz^\lambda \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma(1+\alpha) \left[\frac{2}{(1-ze^{-i\theta})^{\alpha+1}} - 1 \right] d\psi(\theta) \right\}, \quad (1.11)$$

где

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left\{ - \int_{|z_k|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(z+n+1)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \times \right. \\ \left. \times \left[z_k^{-n} \int_0^{|z_k|} (1-x)^\alpha x^{n-1} dx - \overline{z_k}^n \int_{|z_k|}^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1} dx \right] z^n \right\} \quad (1.12)$$

— сходящееся произведение типа Бляшке, $\psi(\theta)$ — вещественная функция ограниченного изменения на $[0, 2\pi]$, s — комплексное число, λ — целое число.

§ 2. Реализация функций класса N_α ($-1 < \alpha < \infty$)

1. Задача реализации для классов N_α , D_α в случае, когда $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, была решена в работах [4, 5, 6]. В данной статье мы будем предполагать, что α не является целым числом.

Из теоремы В следует, что любая функция $F(z)$ класса N_α представима в виде

$$F(z) = \prod_{l=1}^4 f_l(z), \quad (2.1)$$

где

$$f_1(z) \equiv B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z; z_k), \quad (2.2)$$

а

$$\begin{aligned} A_\alpha(z; \zeta) = & \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ - \int_{|x|=1}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \left[\zeta^{-k} \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \right. \\ & \left. \left. - \zeta^k \int_1^\infty (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right] z^k \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$f_2(z) = \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{(1 - ze^{-i\theta})^{\alpha+1}} - 1 \right] d\psi(\theta) \right\}, \quad (2.4)$$

$\psi(\theta)$ — функция ограниченного изменения на $[0, 2\pi]$,

$$f_3(z) = \frac{1}{B_\alpha(z; z_k)}, \quad (2.5)$$

$$f_4(z) = c \cdot z^i \quad (i - \text{целое число}). \quad (2.6)$$

Вначале мы рассмотрим случай $z > 0$.

2. Проведем разрез плоскости z вдоль луча r ($r > 1$) и рассмотрим в этой области ту однозначную ветвь функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^\alpha} \quad (0 < z_0 < 1), \quad (2.7)$$

которая при $z = 0$ принимает значение $e^{-i\pi\alpha}$.

Обозначим ее через $f_0(z)$. Имеет место

Лемма 1. *Функция $f_0(z)$ имеет следующее интегральное представление:*

$$f_0(z) = \frac{1 - \exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{1}{(t-1)^{\alpha_0} t - z} dt. \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть $D_{R, \varepsilon}$ — внутренность круга $|z| < R$ ($R > 1$) без множества $\Delta = \{z: |z| \leq R, \operatorname{Re} z > 1 - \varepsilon, |\operatorname{Im} z| \leq \varepsilon\}$, где ε — произвольное число ($\varepsilon > 0$). Обозначим через $\Gamma_{R, \varepsilon}$ границу области $D_{R, \varepsilon}$, Γ_R — границу круга $|z| < R$ без дуги $\sim AB$, где $A = (\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$, $B = (\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}, -\varepsilon)$, $\Gamma_{R, \varepsilon}^*$ — границу множества Δ без дуги $\sim AB$. Тогда $f_0(z)$ представима интегралом Коши

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{f_0(t)}{t-z} dt$$

или

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f_0(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R,1}} \frac{f_0(t)}{t-z} dt, \quad (2.9)$$

где во втором интеграле обход интегрирования берется в отрицательном направлении.

Очевидно при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f_0(t)}{t-z} dt \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Далее, ε можно взять настолько малым, что при $t \in [1-\varepsilon + i\varepsilon; |r| < \varepsilon]$

$$|t-z|^{-1} < c_0 \quad (0 < c_0 < \infty, \quad c_0(\varepsilon) = \text{const}).$$

Тогда, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{1-\varepsilon-i\varepsilon}^{1-\varepsilon+i\varepsilon} \frac{f_0(t)}{t-z} dt \rightarrow 0.$$

Легко заметить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma}^{1-\varepsilon} \frac{f_0(t-i\varepsilon)}{t-i\varepsilon-z} dt = -\exp(-2\pi\alpha_0 i) \int_1^R \frac{f_0(t)}{t-z} dt, \quad (2.11)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1-\varepsilon}^R \frac{f_0(t+i\varepsilon)}{t+i\varepsilon-z} dt = \int_1^R \frac{f_0(t)}{t-z} dt. \quad (2.12)$$

Теперь, устремив в (2.11), (2.12) R к бесконечности, и учитывая (2.9), (2.10), получим лемму.

3. Реализуем функцию $B_\alpha(z; z_k)$ ($0 < \alpha < \infty$) (2.2).

3.1. Лемма 2. Функция $A_\alpha(z; \zeta)$ ($|z| < 1$, $|\zeta| < 1$, $(0 < \alpha < \infty)$) представима в виде

$$A_\alpha(z; \zeta) = \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ \sum_{k=0}^p \left[\frac{a_k}{(|\zeta|-\bar{\zeta}z)^{k+\alpha_0}} + b_k \right] - \right. \\ \left. - \int_0^1 \left[\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\varphi_\alpha^{(p+1)}(x)}{(x-\bar{\zeta}z)^{\alpha_0}} + \frac{1}{x-\bar{\zeta}z} + \frac{1}{x(1-x)^{1-\alpha_0}} \right] dx - \right.$$

$$\left. \left\{ xp \left[\frac{x}{1} + \frac{z(1-\bar{\zeta})-x}{1} - \frac{z(z(1-\bar{\zeta})-x)}{1-\alpha_0(1-x)} - \frac{(1+\alpha)J}{(\alpha_0)J} \right] \int_0^1 - \right. \right. \\ \left. \left. (2.12) \right. \right.$$

где

$$a_k = - \frac{\Gamma(k + \alpha_0)}{\Gamma(\alpha + 1)} [\varphi_a^{(p-k)}(|\zeta|) - \varphi_a^{(p-k)}(|\zeta|)^{-1} |\zeta|^{2(k + \alpha_0)}],$$

$$b_k = - \frac{(1 - |\zeta|)^{k + \alpha_0}}{k + \alpha_0}, \quad (2.14)$$

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} x^\alpha (1-x)^\alpha, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^\alpha, & \text{при } x \geq 1, \end{cases}$$

$$p = [\alpha], \quad \alpha_0 = \alpha - p \quad (0 < \alpha_0 < 1).$$

Доказательство. Поступая так же, как и в [6] получим, что имеет место соотношение

$$A_\alpha(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \{-\omega_\alpha(z; \zeta)\}, \quad (2.15)$$

где

$$\omega_\alpha(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \left\{ \left(\frac{x}{x - \bar{\zeta} z} \right)^{\alpha+1} + \left(\frac{\zeta}{\zeta - xz} \right)^{\alpha+1} - 1 \right\} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx +$$

$$+ \log \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \quad (2.16)$$

— аналитическая функция во всей плоскости с разрезом вдоль отрезка $[re^{i \arg \zeta}, 1 \leq r \leq |\zeta|^{-1}]^*$.

Введем обозначения

$$J_{\alpha,1}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{x^\alpha (1-x)^\alpha}{(x - \bar{\zeta} z)^{\alpha+1}} dx - \log \frac{1 - \bar{\zeta} z}{|\zeta| - \bar{\zeta} z},$$

$$J_{\alpha,2}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{x^{-1} (1-x)^\alpha \zeta^{\alpha+1}}{(\zeta - xz)^{\alpha+1}} dx + \log \frac{\zeta - z}{\zeta - |\zeta| z},$$

$$J_{\alpha,3}(z; \zeta) = - \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx.$$

Учитывая (2.16), можем записать

$$\omega_\alpha(z; \zeta) = \sum_{j=1}^3 J_{\alpha,j}(z; \zeta). \quad (2.17)$$

Пусть $p = [\alpha]$, $\alpha_0 = \alpha - p$ ($0 < \alpha_0 < 1$). Произведя интегрирование по частям, $J_{\alpha,1}(z; \zeta)$ можно привести к виду

* Интеграл в (2.16) понимается в смысле главного значения Коши.

$$J_{\alpha,1}(z; \zeta) = \sum_{k=0}^p \frac{\Gamma(k + \alpha_0)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\varphi_{\alpha}^{(p-k)}(|\zeta|)}{(|\zeta| - \bar{\zeta}z)^{k+\alpha_0}} + \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{|\zeta|}^1 \frac{\varphi_{\alpha}^{(p+1)}(x)}{(x - \bar{\zeta}z)^{\alpha_0}} dx - \log \frac{1 - \bar{\zeta}z}{|\zeta| - \bar{\zeta}z}. \quad (2.18)$$

Делая замену переменных в $J_{\alpha,2}(z; \zeta)$ и проинтегрировав по частям $p+1$ раз, получим

$$J_{\alpha,2}(z; \zeta) = - \sum_{k=0}^p \frac{\Gamma(k + \alpha_0)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\varphi_{\alpha}^{(p-k)}(|\zeta|^{-1})}{(|\zeta|^{-1} \bar{\zeta}^{-1} z)^{k+\alpha_0}} + \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_1^{|\zeta|^{-1}} \frac{\varphi_{\alpha}^{(p+1)}(x)}{(x - \bar{\zeta}^{-1} z)^{\alpha_0}} dx + \log \frac{\zeta - z}{\zeta - |\zeta|z}, \quad (2.19)$$

$$J_{\alpha,3}(z; \zeta) = \sum_{k=0}^p \frac{(1 - |\zeta|)^{k+\alpha_0}}{k + \alpha_0} - \int_1^{|\zeta|^{-1}} \frac{\varphi_{\alpha}^{(p+1)}(x)}{x^{\alpha_0}} dx. \quad (2.20)$$

Записывая логарифмы в (2.18), (2.19) в виде интеграла типа Коши по соответствующим отрезкам, учитывая (2.15), (2.17), после некоторых преобразований получим лемму.

3.2. Реализуем функцию

$$g_n(z) = \exp \left\{ \frac{\alpha_n}{|\zeta| - \bar{\zeta}z)^{n+\alpha_0}} + b_n \right\} \quad (0 < \alpha_0 < 1), \quad (2.21)$$

где α_n, b_n определяются из (2.14).

Пусть $H_n = L_2(F_n; x_1, x_2)$ — пространство векторнозначных функций $f(x)$ ($x_1 < x < x_2$) со значениями в пространстве

$$F_n = L_2(1, \infty) + L_2(1, \infty) + \dots + L_2(1, \infty), \quad (2.22)$$

где $L_2(1, \infty)$ повторяется $n+1$ раз.

Положим $\beta = -1, x_1 = 0$. Так как при $z \rightarrow \infty$ $g_n(z) \rightarrow b_n$, то из (1.7) следует, что надо положить $x_2 = -b_n$.

Рассмотрим оператор B_n , задаваемый в пространстве F_n равенством

$$(B_n f)(t) = \bar{B}_n(t) f(t) \quad (1 < t < \infty),$$

где

$$\bar{B}_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{|\zeta|}{\zeta} & \rho_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\zeta|}{\zeta} & \rho_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{|\zeta|}{\zeta} & \rho_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{|\zeta|}{\zeta} t \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Очевидно B_n — неограниченный оператор в F_n с плотной областью определения. Пусть

$$Q_0(x) \equiv Q_1(x) \equiv 1, \prod_{k=1}^n \rho_k = \frac{1 - \exp(-2\pi a_0 t)}{2\pi i} \frac{(-1)^{n+1} |\zeta|^{1-a_n} a_n}{b_n \zeta^{n+1}}, \quad (2.24)$$

тогда резольвентный оператор $R_z(Q_1(x) B_n)$ запишется в виде

$$R_z(Q_1(x) B_n) = \frac{\bar{\zeta}^{n+1}}{(|\zeta| - \bar{\zeta} z)^n} \frac{(-1)^{n+1}}{|\zeta| t - \bar{\zeta} z} C_n, \quad (2.25)$$

где C_n — треугольная матрица $[c_{ik}]$ ($i, k = 1, 2, \dots, n+1$), причем

$$c_{1, n+1} = \prod_{k=1}^n \rho_k.$$

Положим

$$q_n^0 = (0, 0, \dots, (t-1)^{-\frac{\alpha_2}{2}}), \quad (2.26)$$

$$p_n^0 = ((t-1)^{-\frac{\alpha_2}{2}}, 0, \dots, 0, 0).$$

Легко заметить, что элементы p_n^0, q_n^0 не принадлежат пространству F_n . Покажем, что они являются его обобщенными элементами (в смысле Березанского). Для этого рассмотрим множество F_n^+ элементов $f \in F_n$ таких, что элемент

$$g_f(t) = \begin{cases} \sqrt{t-1} f(t), & \text{при } t \geq 2 \\ f(t), & \text{при } 1 < t < 2 \end{cases} \quad (2.27)$$

принадлежит пространству F_n . Очевидно F_n^+ плотно в F_n . F_n^+ является, в свою очередь, гильбертовым пространством относительно метрики

$$\|f\|_+^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \int_1^{\infty} |g_i(t)|^2 dt, \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} f &= (f_1, f_2, \dots, f_{n+1}), \quad g_i(t) = \\ &= \begin{cases} \sqrt{t-1} f_i(t), & \text{при } t \geq 2 \\ f_i(t), & \text{при } 1 < t < 2 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \end{aligned}$$

Сопряженным к пространству F_n^+ является гильбертово пространство F_n^- с метрикой

$$\|f\|_-^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \int_1^{\infty} |g_i^*(t)|^2 dt, \quad (2.29)$$

где

$$f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_{n+1}^*), \quad g_i^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t-1}} f_i^*(t), & \text{при } t \geq 2 \\ f_i^*(t), & \text{при } 1 < t \leq 2. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

Из (2.28), (2.29) следует, что

$$\|f\|_- \leq \|f\| \leq \|f\|_+. \quad (2.30)$$

Значит

$$F_n^+ \subset F_n \subset F_n^-.$$

Пространства F_n^+ , F_n^- называются, соответственно, пространствами основных и обобщенных элементов ([1, 7]). Нетрудно заметить, что $p_n^0, q_n^0 \in F_n^-$, т. е. являются обобщенными элементами пространства F_n .

Из (2.25), (2.26) имеем

$$R_z(Q_1(x) B_n) q_n^0 \in F_n^-.$$

Подставляя выражения (2.23)–(2.26) в формулу (1.7), получим*

$$S(z) = \exp \left\{ b_n + \int_0^{-b_n} dx \frac{(-1)^{1+\alpha_0} |\zeta|^{1-\alpha_0} a_n}{b_n (|\zeta| - \bar{\zeta} z)^n} \frac{1 - \exp(-2\pi a_0 i)}{2\pi i} \times \right. \\ \left. \times \int_1^{\infty} \frac{1}{(t-1)^{\alpha_0}} \frac{dt}{|\zeta| t - \bar{\zeta} z} \right\}.$$

Применяя лемму 1, имеем

$$S(z) = \exp \left\{ \frac{a_n}{(|\zeta| - \bar{\zeta} z)^{n+\alpha_0}} + b_n \right\}.$$

Итак, нами доказана

Лемма 3. Пусть

$$H_n = L_2(F_n; 0, -b_n),$$

$$F_n = L_2(1, \infty) \dot{+} L_2(1, \infty) \dot{+} \dots \dot{+} L_2(1, \infty)$$

($L_2(1, \infty)$ повторяется $n+1$ раз). Тогда передаточная функция узла A_n

$$(T_n f)(x) = (B_n f)(x) + \int_0^x e^{y-x} (f, p_n^0)_{F_n} q_n^0 dy,$$

* Хотя $R_z(Q_1(x) B_n) q_n^0, p_n^0 \in F_n^-$, но $(R_z(Q_1(x) B_n) q_n^0, p_n^0)_{F_n}$ существует.

$$q_n = q_n^0 e^{-x}, \quad p_n = p_n^0 e^{x+b_n}, \quad k_n = e^{b_n}, \quad (2.31)$$

где B_n, p_n^0, q_n^0 определяются по формулам (2.23), (2.24), (2.26), является

$$g_n(z) = \exp \left\{ \frac{a_n}{(|\zeta| - \bar{\zeta} z)^{n+a_n}} + b_n \right\},$$

причем каналовые элементы p_n^0, q_n^0 являются обобщенными элементами пространства F_n .

3.3. Пусть

$$H = L_2(F; |\zeta|, 1), \quad F = C + L_2(1, \infty) \quad (2.32)$$

(C — комплексная плоскость). Определим оператор B в пространстве F по формуле

$$(Bf)(t) = \bar{B}(t) f(t), \quad (2.33)$$

где

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\bar{\zeta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение фиксированные элементы

$$q_0(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\bar{\zeta}}}, \frac{\sqrt{a(x)}}{\sqrt{(t-1)^{a_0}}} \right), \quad (2.34)$$

$$p_0(x) = \overline{q_0(x)} \quad (|\zeta| < x < 1)$$

пространства H . Точнее, элементы $p_0(x), q_0(x)$ являются обобщенными элементами (в смысле Березанского) пространства H . Положим

$$Q_0(x) \equiv 1; \quad Q_1(x) = x; \quad a(x) = \frac{1 - \exp(-2\pi a_0 i)}{2\pi i} \frac{(-1)^{a_0} \Gamma(a_0)}{\Gamma(a+1)} \times \\ \times \frac{\varphi^{(p+1)}(x) x^{1-a_0}}{\bar{\zeta}}, \quad (2.35)$$

где $\varphi(x)$ определяется из выражений (2.14).

Тогда, применяя лемму 1, учитывая вышесказанное относительно обобщенных элементов, получим

$$((zI - xB)^{-1} q_0(x), p_0(x))_F = \frac{1}{x - \bar{\zeta} z} - \frac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a+1)} \frac{\varphi^{(p+1)}(x)}{(x - \bar{\zeta} z)^{a_0}}.$$

Тогда, положив

$$\beta = \frac{1}{1-|\zeta|} \int_{|\zeta|}^1 \frac{dx}{(1-x)^{1-a_0 x}} \quad (0 < a_0 < 1) \quad (2.36)$$

и, учитывая (2.32)–(2.35), мы по формуле (1.7) найдем $S(z)$. А именно, нами доказана следующая

Лемма 4. Функция

$$h_2(z) = \exp \left\{ \int_{|\zeta|}^1 \left[\frac{-\Gamma(z_0)}{\Gamma(a_0+1)} \frac{\bar{\zeta}^{(p+1)}(x)}{(x-\bar{\zeta}z)^{a_0}} + \frac{1}{x-\bar{\zeta}z} \right] dx + \int_{|\zeta|}^1 \frac{dx}{(1-x)^{1-z_0} x} \right\} \quad (2.37)$$

реализуется узлом L^3

$$H = L_2(F; |\zeta|, 1), F = C \dot{+} L_2(1, \infty),$$

$$(Tf)(x) = x(Bf)(x) + \int_{|\zeta|}^x \exp[\beta(x-y)](f, p_0(y))_F q_0(y) dy,$$

$$q = q_0(x) \exp[\beta(x-|\zeta|)], \quad (2.38)$$

$$p = p_0(x) \exp[\beta(1-x)],$$

$$k = \exp[\beta(1-|\zeta|)],$$

где B , $p_0(x)$, $q_0(x)$, β определяются из формул (2.33) — (2.36), а $p_0(x)$, $q_0(x)$ являются обобщенными фиксированными элементами пространства H .

Без существенных изменений доказывается

Лемма 5. Функция

$$h_3(z) = \exp \left\{ - \int_{|\zeta|}^{|\zeta|^{-1}} \left[\frac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a+1)} \frac{(x-1)^{a_0-1}}{(x-\zeta^{-1}z)^{a_0}} - \frac{1}{x-\zeta^{-1}z} \right] dx - \log |\zeta| \right\} \quad (2.39)$$

реализуется узлом L^3

$$H = L_2(F; 1, |\zeta|^{-1}), F = C \dot{+} L_2(1, \infty),$$

$$(Tf)(x) = x(Bf)(x) + \int_1^x \exp[\beta(x-y)](f, p_0(y))_F q_0(y) dy,$$

$$q = q_0(x) \exp[\beta(x-1)], \quad (1 < x < |\zeta|^{-1}) \quad (2.40)$$

$$p = p_0(x) \exp[\beta(|\zeta|^{-1} - x)],$$

$$k = |\zeta|,$$

где B — оператор в F , задаваемый равенством

$$(Bf)(t) = \bar{B}(t)f(t),$$

$$\bar{B}(t) = \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

$$q_0(x) = \left(\sqrt[1]{\zeta}, \frac{\sqrt{b(x)}}{\sqrt{(t-1)^{a_0}}} \right), \quad p_0(x) = \overline{q_0(x)}.$$

$$\beta = -\frac{\log |\zeta|}{|\zeta|^{-1} - 1}, \quad b(x) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{1 - \exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i} (-1)^{\alpha_0} \zeta \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\alpha_0 - 1}.$$

3.4. Вернемся к линейным узлам A_n (2.31) ($n = 0, 1, 2, \dots, p$).

Лемма 6. Пусть узел A_1^* является сцеплением узлов A_0, A_1 . Тогда передаточной функцией узла A_1^* является произведение передаточных функций узлов A_0, A_1 .

Доказательство. Узел A_1^* по формуле (1.3) запишется в виде

$$H^* = H_0 + H_1,$$

$$T^* f = T_0 f_0 + T_1 f_1 + (f_0, p_0)_{H_0} q_1,$$

$$q^* = q_0 + q_1 k_0, \quad p^* = p_0 k_1 + p_1, \quad k^* = k_0 k_1, \quad (2.41)$$

где T_i, p_i, q_i, k_i ($i = 0, 1$) определяются из формул (2.31).

Формула (1.2) дает

$$S(z) = k^* + ((zI - T^*)^{-1} q^*, p^*)_{H^*}. \quad (2.42)$$

Допустим, что

$$f^* = (zI - T^*)^{-1} q^* \quad (f^* = f_0 + f_1), \quad (2.43)$$

тогда

$$S(z) = k_0 k_1 + k_1 (f_0, p_0)_{H_0} + (f_1, p_1)_{H_1}. \quad (2.44)$$

Из (2.41), (2.43) следует

$$q_0 = (zI - T_0) f_0,$$

$$q_1 k_0 = -(f_0, p_0)_{H_0} q_1 + (zI - T_1) f_1$$

или, учитывая (2.31)

$$q_0^0 = (zI - B_0) e^{x_0} f_0 - \int_0^{x_0} e^y (f_0, p_0^0)_{F_0} q_0^0 dy \quad (0 < x_0 < -b_0),$$

$$q_1^0 [(f_0, p_0)_{H_0} + k_0] = (zI - B_1) e^{x_1} f_1 - \int_0^{x_1} e^y (f_1, p_1^0)_{F_1} q_1^0 dy \quad (0 < x_1 < -b_1).$$

Введя обозначения

$$y_i(x) = e^x (f_i, p_i^0),$$

$$r_i(x) = ((zI - B_i)^{-1} q_i^0, p_i^0)_{F_i}, \quad (i = 0, 1) \quad (2.45)$$

$$u_i(x) = \frac{y_i(x)}{r_i(x)}$$

и учитывая (см. (1.2)), что

$$k_0 + (f_0, p_0)_{H_0} = q_0(z), \quad (2.46)$$

получим

$$g_0(z) q_1^0 = (zI - B_1) e^{x_1} f_1 - \int_0^{x_1} e^y (f_1, p_1^0)_{F_1} q_1^0 dy. \quad (2.47)$$

Элемент q_1^0 входит в область определения оператора $(zI - B_1)^{-1}$, точнее $(zI - B_1)^{-1} q_1^0 \in F_1^-$ ($q_1^0 \in F_1^-$), но $((zI - B_1)^{-1} q_1^0, p_1^0)_{F_1}$ существует. Поэтому, применив оператор $(zI - B_1)^{-1}$ к обеим частям выражения (2.47) и, умножив скалярно на p_1^0 , получим

$$g_0(z)((zI - B_1)^{-1} q_1^0, p_1^0)_{F_1} = e^{x_1} (f_1, p_1^0)_{F_1} - \int_0^{x_1} e^y (f_1, p_1^0)_{F_1} dy \cdot ((zI - B_1)^{-1} q_1^0, p_1^0)_{F_1}.$$

Заметив, что

$$r_1(x_1) = ((zI - B_1)^{-1} q_1^0, p_1^0)_{F_1} = \frac{b_1^{-1} a_1}{(|\zeta| - \zeta z)^{1+\alpha}}$$

можно записать

$$g_0(z) = u_1(x_1) - \int_0^{x_1} u_1(y) dy r_1(x_1)$$

или

$$y_1(x_1) = r_1(x_1) g_0(z) \exp[r_1(x_1) x_1], \quad (2.48)$$

Из (2.45), (2.48), (2.31) следует

$$\begin{aligned} (f_1 p_1)_{H_1} &= e^{b_1} \int_0^{-b_1} e^x (f_1, p_1^0)_{F_1} dx = k_1 \int_0^{-b_1} y_1(x) dx = \\ &= k_1 g_0(z) (\exp[-b_1 r_1(x_1)] - 1) \end{aligned}$$

или

$$(f_1, p_1)_{H_1} = g_0(z) \exp[b_1 - b_1 r_1(x_1)] - k_1 g_0(z). \quad (2.49)$$

Учитывая (2.44), (2.46), (2.49), (2.21), получим

$$S(z) = g_0(z) g_1(z).$$

Замечание 1. Теорема о композиции узлов (лемма 6), хотя и была доказана для частного случая (для узлов A_0, A_1), применима ко всем узлам, рассматриваемым в данной работе. Действительно, не меняя метода доказательства, убедившись, что оператор $(zI - Q_1(x)B)^{-1}$ (обычно фигурирующий в узлах) не выводит каналовый элемент q_0 из пространства обобщенных элементов, причем существует $((zI - Q_1(x)B)^{-1} q_0, p_0)_F$, мы получим тот же результат.

3.6. Рассмотрим сцепление $A_2^* = A_1^* \vee A_2$ (см. (2.31)), т. е.

$$A_2^* = A_0 \vee A_1 \vee A_2.$$

На основании замечания 1 получим, что передаточной функцией узла A_2^* является функция $g_0(z) g_1(z) g_2(z)$.

Продолжая этот процесс, мы получим, что узел

$$L^1 = A_0 \vee A_1 \vee \dots \vee A_p \quad (2.50)$$

реализует функцию

$$h_1(z) = \prod_0^p g_n(z) = \exp \left\{ \sum_0^p \left[\frac{a_n}{(|\zeta| - |\bar{\zeta}z|)^{a_n+1}} + b_n \right] \right\}. \quad (2.51)$$

Проделав последовательно то же, что и выше, можно доказать, что передаточная функция узла

$$A(\zeta) = L^0 \vee L^1 \vee L^2 \vee L^3, \quad (2.52)$$

где

$$L^0 = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}^{-1} & |\zeta|^{-1} \sqrt{1 - |\zeta|^2} \\ \bar{\zeta}^{-1} \sqrt{1 - |\zeta|^2} & |\zeta|^{-1} \end{pmatrix} \quad (|\zeta| < 1)$$

— узел, реализующий фактор Бляшке $\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta}$ ([6]), а L^1, L^2, L^3 определяются выражениями (2.50), (2.38), (2.40), является функция $A_\alpha(z; \zeta)$ (см. (2.13), (2.37), (2.39), (2.51)).

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Существует линейный узел $A(\zeta)$ с передаточной функцией $A_\alpha(z; \zeta)$ ($0 < \alpha < \infty$).*

Замечание 2. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $0 < |z_k| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+1} < \infty,$$

тогда, как известно ([3]), произведение

$$B_\alpha(z; z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z; z_k)$$

представляет собой аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию.

Пусть $A(z_k)$ является линейным узлом с передаточной функцией $A_\alpha(z, z_k)$. Тогда, сцепляя узлы $A(z_1), A(z_2), \dots, A(z_n)$, можно доказать, что узел

$$A_n(z_k) = A(z_1) \vee A(z_2) \vee \dots \vee A(z_n)$$

реализует произведение

$$B_z^n(z; z_k) = \prod_{k=1}^n A_z(z; z_k).$$

Формально продолжая этот процесс до бесконечности (т. е. устремив n к бесконечности), можно получить узел A с передаточной функцией $B_*(z; z_k)$. Свойства операторов узла A в данной работе не исследуются.

4. Реализуем функцию $f_2(z)$ (2.4).

Функция $\psi(\vartheta)$ в определении $f_2(z)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 2\pi]$, поэтому представима в виде

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta)\vartheta \in [0, 2\pi],$$

где $\psi_j(\vartheta)$ ($j = 1, 2$) — неубывающие, ограниченные на $[0, 2\pi]$ функции. Пусть $s = \psi_j(\vartheta)$, l_j — вариация $\psi_j(\vartheta)$ на $[0, 2\pi]$, а $\sigma_j(s)$ — непрерывная справа, обратная к $s = \psi_j(\vartheta)$ функция, причем, если ϑ_0 — точка разрыва функции $s = \psi_j(\vartheta)$, то в интервале $\psi_j(\vartheta - 0) \leq s \leq \psi_j(\vartheta_0 + 0)$ функция $\sigma_j(s)$ доопределяется равенством $\sigma_j(s) = \vartheta_0$.

Тогда

$$f_2(z) = g_1(z) g_2(z),$$

где

$$g_j(z) = \exp \left\{ (-1)^{j+1} \int_0^{l_j} \left[\frac{2}{(1 - ze^{-i\sigma_j(s)^{2+1}}} - 1 \right] ds \right\} \quad (j = 1, 2).$$

Реализуем $g_j(s)$. Пусть $H_j = L_2(F_{p+1}; 0, l_j)$ ($p = [a]$, $a = p + \alpha_0$), где F_{p+1} определяется выражением (2.22) ($n = p + 1$). Введем в рассмотрение оператор B в пространстве F_{p+1} , задаваемый равенством

$$(Bf)(t) = \bar{B}(t) f(t),$$

где

$$\bar{B}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \rho_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

оператор B является неограниченным с плотной областью определения. В качестве канальных элементов примем векторы

$$q_j^0 = (0, 0, \dots, 0, (t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}}); \quad p_j^0 = ((t-1)^{-\frac{\alpha_0}{2}}, 0, \dots, 0, 0), \quad (2.54)$$

являющиеся обобщенными элементами пространства F_{p+1} .

Положим

$$Q_j^i(x) = \exp[i\sigma_j(x)]; \quad Q_j^i(x) = (-1)^{j+1+p} \exp[i(p+2)\sigma_j(x)],$$

$$\rho_j = (-1)^j; \quad \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{p+1} = 2 (-1)^{1+\alpha_0} \frac{1 - \exp(-2\pi\alpha_0 i)}{2\pi i}. \quad (2.55)$$

Тогда

$$(zI - Q'_1(x)B)^{-1} = \frac{1}{(z - e^{i\alpha_j(x)})^{p+1}} \frac{1}{z - t e^{i\alpha_j(x)}} C, \quad (2.56)$$

где C — оператор, задаваемый верхней треугольной матрицей $[c_{ik}]_{i,k=1}^{p+2}$, причем $c_{1,p+2} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{p+1}$.

Подставляя выражения (2.53)–(2.56) в (1.7), получим

$$S(z) \equiv g_j(z).$$

Итак, узел $L(g_j)$

$$H = (F_{p+1}; 0, L_1), F_{p+1} = L_2(1, \infty) + L_2(1, \infty) + \dots \\ \dots + L_2(1, \infty) \quad (p+2\text{-раза}),$$

$$(T_j f)(x) = e^{i\alpha_j(x)} (Bf)(x) + (-1)^{j+1} e^{i\alpha_j(x)(p+2)} \int_0^x e^{\beta_j(x-y)} (f, p_j^0) q_j^0 dy, \\ g_j = (-1)^{j+1} q_j^0 e^{i(p+2)\alpha_j(x) + \beta_j x}, \\ p_j = p_j^0 e^{\beta_j(ij-x)}, \\ k_j = e^{\beta_j i j} \quad (2.57)$$

реализует функцию $g_j(z)$, где B, p_j^0, q_j^0, β_j определяются выражениями (2.53)–(2.55).

Рассмотрим узел

$$L = L(g_1) \vee L(g_2). \quad (2.58)$$

Применяя теорему о сцеплении узлов*, получим, что передаточная функция узла L является $f_3(z)$ (2.4).

Имеет место

Теорема 2. Пусть аналитическая в $|z| < 1$ функция $f(z)$ принадлежит классу N_a ($0 < a < \infty$) и $f(z) \neq 0$ ($|z| < 1$). Тогда существует линейный узел L с передаточной функцией $f(z)$.

Доказательство. При a целом теорема была доказана в [6]. Пусть a — не целое. Известно ([3]), что функция, удовлетворяющая условиям теоремы, представима в виде (2.4). Тогда узел (2.58) реализует $f(z)$ и т. д.

5. Реализация функций $f_3(z), f_4(z)$.

Имея реализацию функции $B_a(z, z_k)$, построение узла с передаточной функцией

$$f_3(z) = \frac{1}{B_a(z, z_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(z, z_k')} \exp \sum_{j=1}^3 J_{a,j}(z; z_k') \\ (B(z, z_k') \text{ — фактор Бляшке})$$

* См. замечание 1 леммы 6.

(см. (2.15), (2.18)—(2.20)) не представляет трудности и мы здесь не будем приводить его.

Как было показано [6], для реализации функции $f_\lambda(z) = cz^\lambda$ (c — константа, λ — целое число) через передаточную функцию $S(z)$, необходимо потребовать условие $\lambda \leq 0$.

Тогда узел

$$H = C + C + \dots + C$$

$(-\lambda)$ -мерное комплексное пространство

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{-\lambda}) = (0, x_1, \dots, x_{-\lambda-1}),$$

$$q = (c, 0, \dots, 0),$$

$$p = (0, 0, \dots, 1),$$

$$k = 0$$

реализует функцию $f_\lambda(z)$.

В случае $\lambda > 0$ функцию $f_\lambda(z)$ можно реализовать через передаточную функцию $W(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$ ([4, 6]).

Теорема 3. Пусть $F(z) \in N_\alpha$ ($F(0) \neq 0$, $-1 < \alpha < \infty$). Тогда можно построить узел с передаточной функцией $F(z)$.

Доказательство. При α целом теорема была доказана в работах [4, 5, 6]. Пусть α — не целое и $0 < \alpha < \infty$. На основании теорем 1, 2 после сцепления узлов, реализующих функции $f_i(z)$ ($i=1, 2, 3, 4$) (см. (2.1)—(2.6)), получим узел, реализующий функцию $F(z)$.

Пусть $-1 < \alpha < 0$. Обозначим через $\gamma = 1 + \alpha$ ($0 < \gamma < 1$). Поступая так же как и при доказательстве лемм 2—4, теорем 1, 2, легко получить узлы, реализующие функции

$$A_\gamma(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ - \int_{|\zeta|}^1 \left[\left(\frac{x}{x - \bar{\zeta}z} \right)^\gamma + \left(\frac{\zeta}{\zeta - xz} \right)^\gamma - 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(1-x)^{\gamma-1}}{x} dx - \log \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \right\}, \\ h(z) = \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{(1 - e^{-i\theta}z)^\gamma} - 1 \right] d\psi(\theta) \right\},$$

а значит можно реализовать и функцию $F(z) \in N_\alpha$ ($-1 < \alpha < 0$)*.

§ 3. Реализация функций класса D_α ($0 < \alpha < \infty$)

1. Из теоремы А вытекает следующее представление функции $G(z) \in D_\alpha$:

* См. замечания 1, 2.



$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g_k(z), \quad (3.1)$$

где

$$g_1(z) = \pi_a^*(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} M_a(z; z_k), \quad (3.2)$$

$$M_a(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ -U_a(z; \zeta) + \frac{1}{2} U_a(0; \zeta) \right\}, \quad (3.3)$$

$$g_2(z) = \frac{1}{\pi_a(z; z_k)}, \quad (3.4)$$

$$g_3(z) = c z^{\lambda} \quad (c - \text{константа}, \lambda - \text{целое число}), \quad (3.5)$$

$$g_4(z) = \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \frac{\log |F(re^{i\theta})|}{(1-re^{-i\theta}z)^{\alpha+1}} r dr d\theta \right\}. \quad (3.6)$$

2. Пусть α — не целое, $p = [\alpha]$, $\alpha = p + \alpha_0$. Пользуясь методом, примененным при доказательстве леммы 2, можно доказать, что имеет место

Лемма 7. Функция $M_a(z; \zeta)$ представима в виде

$$M_a(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ \sum_{k=0}^p \frac{(1 - |\zeta|^2)^{k+\alpha_0}}{k + \alpha_0} \left[\frac{1}{(1 - \bar{\zeta} z)^{k+\alpha_0}} - \frac{1}{2} \right] - \right. \\ \left. - \left| \int_1^{|\zeta|^{-2}} \left(\frac{(x-1)^{\alpha_0-1}}{\left(x - \frac{z}{\zeta}\right)^{\alpha_0}} - \frac{1}{x - \frac{z}{\zeta}} \right) dx - \frac{1}{2} \int_1^{|\zeta|^{-2}} \frac{(x-1)^{\alpha_0-1} - x^{\alpha_0}}{x^{\alpha_0-1}} dx \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Доказательства мы не приводим, заметим лишь, что необходимо пользоваться следующим представлением:

$$U_a(z; \zeta) = \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha}}{\left(1 - \frac{z}{\zeta} t\right)^{\alpha+1}} \frac{dt}{t}.$$

3. Построение узлов, реализующих отдельные факторы выражения (3.1) подобны результатам предыдущего параграфа и мы их опускаем. Приведем лишь несколько лемм и теорем без доказательства.

Лемма 8. Передаточной функцией узла

$$H = L_2(F_{k+1}; 0, x_2), F_{k+1} = L_2(1, \infty) + L_1(1, \infty) + \dots + L_2(1, \infty),$$

$$(Tf)(x) = (Bf)(x) + \int_0^x e^{-\frac{1}{2}(x-y)} (f, p_0)_{F_{k+1}} q_0 dy,$$

$$q = q_0 e^{-\frac{1}{2}x},$$

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{2}(x_2-r)},$$

$$k = e^{-\frac{1}{2} x_2},$$

где

$$q_0 = (0, 0, \dots, (t-1)^{-\frac{x_2}{2}}),$$

$$p_0 = ((t-1)^{-\frac{x_2}{2}}, 0, \dots, 0, 0)$$

— обобщенные элементы пространства F_{k+1} , B — оператор в F_{k+1} , задаваемый равенством

$$(Bf)(t) = \tilde{B}(t) f(t) \quad (1 < t < \infty)$$

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}^{-1} p_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\zeta}^{-1} & p_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{\zeta}^{-1} t \end{pmatrix},$$

а

$$\prod_1^k \rho_i = \frac{(-1)^{k+a_0}}{\bar{\zeta}^{k+1}} \frac{1 - \exp(-2\pi a_0 i)}{2\pi i}, \quad x_2 = \frac{(1 - |\zeta|^2)^{k+a_0}}{k + a_0},$$

является функция

$$h_k(z) = \exp \left\{ \frac{(1 - |\zeta|^2)^{k+a_0}}{k + a_0} \left[\frac{1}{(1 - \bar{\zeta} z)^{k+a_0}} - \frac{1}{2} \right] \right\}.$$

Лемма 9. Линейный узел

$$H = L_2(F; 1, |\zeta|^{-2}), \quad F = C + L_2(1, \infty),$$

$$(Tf)(x) = x(Bf)(x) + \int_1^x e^{\beta(x-y)} (f, p_0)_F q_0 dy,$$

$$q = q_0 e^{\beta(x-1)},$$

$$p = p_0 e^{\beta(|\zeta|^{-2} - x)},$$

$$k = e^{\beta(|\zeta|^{-2} - 1)},$$

где B — оператор, задаваемый равенством

$$(Bg)(t) = \tilde{B}(t) g(t) \quad (t \in (1, \infty))$$

$$\tilde{B}(t) = \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

а

$$q_0(x) = \left(\sqrt{\zeta}, \frac{\sqrt{b(x)}}{\sqrt{(t-1)^{a_0}}} \right), \quad p_0(x) = \overline{q_0(x)}$$

— каналовые элементы,

$$b(x) = \frac{1 - \exp(-2\pi a_0 i)}{2\pi i} (-1)^{1+a_0} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{1-a_0},$$

$$\beta = -\frac{1}{2(|\zeta|^{-2}-1)} \int_1^{|\zeta|^{-2}} \frac{(x-1)^{a_0-1} - x^2}{x^{a_0+1}} dx,$$

реализует функцию

$$g(z) = \exp \left\{ \int_1^{|\zeta|^{-2}} \left(\frac{(x-1)^{a_0-1}}{\left(x - \frac{z}{\zeta}\right)^{a_0}} - \frac{1}{x - \frac{z}{\zeta}} \right) dx - \frac{1}{2} \int_1^{|\zeta|^{-2}} \frac{(x-1)^{a_0-1} - x^2}{x^{a_0+1}} dx \right\}.$$

Из лемм 8, 9, пункта 5 § 2 следует, что имеет место

Теорема 4. Существует линейный узел, реализующий функцию

$$F(z) = cz^{\lambda} \frac{\pi^*(z, z_k)}{\pi^*(z, z_k)}.$$

Замечание. Так как функция $f(z) \in D_a$ ($0 < z < \infty$) принадлежит пространству N_a [3], то, конечно, $f(z)$ можно было реализовать как элемент класса N_a (§ 2). Учитывая, что классы D_a представляют самостоятельный интерес с точки зрения теории систем с дискретным временем [4, 6], мы дали реализацию отдельных факторов представления (3.1).

В заключение выражаю глубокую признательность М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание при выполнении работы.

Харьковский государственный университет,

Институт математики АН Арм.ССР

Поступила 29.X.1975

Լ. Խ. ՄԵԶՐԱԲՅԱՆ. N_a դասի ֆունկցիաների ռեալիզացումը (ամփոփում)

Հայտնի է, որ եթե $f \in N_p$ ($f \in D_p$) ($p=0, 1, 2, \dots$), ապա գոյութիւն ունի զծային հանդույս, որի փոխանցման ֆունկցիան հանդիսանում է $I(z)$ ։ Տվյալ աշխատանքում ապացուցվում է նմանապես թեորեմ N_a դասի համար ոչ ամբողջ α -ի դեպքում ($-1 < \alpha < \infty$)։

Բերվում է նաև D_a դասի ֆունկցիաների ռեալիզացիան։

L. Kh. MEHRABIAN. *Realisation of functions from the class N_α*

(summary)

It is known (4, 5, 6) that if $f \in N_p$ ($f \in D_p$) ($p = 1, 2, \dots$) then there exists linear knot with transmission function $f(z)$. The paper proves an analogous theorem for the class N_α for non-integer α . Some realizations of functions of the class D_α are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский. Пространства с негативной нормой, УМН, 28, вып. 1, 1963.
2. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщен. Института мат. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948.
3. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
4. М. С. Лившиц. Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна, ДАН СССР, 219, № 4, 1974.
5. М. С. Лившиц, А. А. Янцвиг. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, ХГУ, 1971.
6. Л. Х. Меирабян. Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 6, 1975, 560—580.
7. Э. Р. Цекановский. Обобщенные расширения неограниченных операторов, ДАН СССР, 165, № 1, 1965.

А. Н. АЙРАПЕТЯН, В. И. ГАВРИЛОВ

УСИЛЕНИЯ ТЕОРЕМЫ МЕЙЕРА, КАСАЮЩЕЙСЯ ГРАНИЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье будет указано приложение теоремы Коллингвуда о максимальности ([2], стр. 379, теорема 1; стр. 395, см. также [3], стр. 108, теорема 4,8) для изучения граничных свойств мероморфных функций в единичном круге вдоль орициклов. Используются также свойства $P^{(p)}$ -последовательностей ([4]). Доказываемые теоремы усиливают утверждение теоремы Мейера ([3], стр. 204, теорема 8.8) и распространяют ее на орициклические пути.

1°. Обозначим через Ω , D , Γ и $h(\zeta, \alpha)$, соответственно, расширенную z -плоскость, круг $|z| < 1$, окружность $|z| = 1$ и хорду круга D оканчивающуюся в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол α ; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ обозначает подобласть круга D , ограниченную хордами $h(\zeta, \alpha_1)$, $h(\zeta, \alpha_2)$ и окружностью $|z - \frac{1}{2}\zeta| = \frac{1}{2}$. Область $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$; если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко через $\Delta(\zeta)$.

Для произвольных точек $a, b \in D$ и кривой $L \subset D$ положим

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|,$$

$$\sigma(a, L) = \inf \{b \in L; \sigma(a, b)\}.$$

Пусть $\Delta(\zeta)$ обозначает орицикл круга D в точке $\zeta = e^{i\theta}$, т. е. — окружность радиуса меньше единицы, касающуюся изнутри окружности Γ в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Два орицикла $\Lambda_1(\zeta)$, $\Lambda_2(\zeta)$ круга D в точке $\zeta = e^{i\theta}$ ограничивают некоторую односвязную область, которую диаметр круга D , проведенный в точку $\zeta = e^{i\theta}$, делит на две равные части, называемые в дальнейшем левым орициклическим углом $O^-\Delta(\zeta)$ и правым орициклическим углом $O^+\Delta(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Символом $O\Delta(\zeta)$ обозначается произвольный орициклический угол с вершиной $\zeta \in \Gamma$. Ниже нам понадобится следующее свойство орициклов: для произвольных точек z_1 и z_2 , лежащих на орицикле $\Lambda_1(\zeta)$ и произвольного другого орицикла $\Lambda_2(\zeta)$ имеем

$$\sigma(z_1, \Lambda_2(\zeta)) = \sigma(z_2, \Lambda_2(\zeta)) = \text{const.}$$

2°. Пусть $f(z)$ — произвольная действительная или комплексная функция, отображающая D в Ω , и S — подмножество круга D , для

которого $\zeta \in \Gamma$ является предельной точкой. Обозначим через $C(f, \zeta, S)$ множество всех значений $a \in \Omega$, для которых на S можно указать по крайней мере одну последовательность точек

$$\{z_n^{(a)}\}, n = 1, 2, \dots, z_n^{(a)} \in S, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(a)} = \zeta,$$

по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(a)}) = a$. В частности, получаем предельные множества

$$C(f, \zeta, D), C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha)), C(f, \zeta, \Delta(\zeta)), C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) \quad \text{и} \\ C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)).$$

Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $c(f)$, если для любого угла Штольца $\Delta(\zeta)$ и любого орициклического угла $O\Delta(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ имеем

$$C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = \cup C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) \quad \text{и} \quad C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) = \cup C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)),$$

где объединения берутся по всем углам Штольца и орициклическим углам в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Если, дополнительно,

$$C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) = C(f, \zeta, \Delta(\zeta)) = C(f, \zeta, D),$$

то точку $\zeta \in c(t)$ отнесем к множеству $C(f)$. Точка $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}(f)$, если

$$\cap C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha)) = \cap C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)) = C(f, \zeta, D) \quad \text{и} \quad C(f, \zeta, D) \neq \Omega,$$

где пересечения берутся по всем хордам и орициклам в точке $\zeta \in \Gamma$.

3°. Пусть, теперь, функция $f(z)$ мероморфна в D . Тогда функция

$$q_f^{(p)}(z) = (1 - |z|)^p \rho(f(z)), \quad \rho(f(z)) = |f'(z)| \frac{1}{1 + |f(z)|^2}$$

непрерывна в D для любого числа $p \geq 1$. Функцию $q_f^{(1)}(z)$ будем обозначать короче через $q_f(z)$.

Следуя [4] и [5] последовательность точек

$$\{z_n\}, n = 1, 2, \dots, z_n \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$$

называем $P^{(p)}$ -последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$ ($p \geq 1$ — действительное фиксированное число), если для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неевклидовых кругов

$$D_p(z_{n_k}, \varepsilon) = \{z \in D; \sigma(z, z_{n_k}) < \varepsilon (1 - |z_{n_k}|^2)^{p-1}\}$$

бесконечно часто каждое значение $w \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Каждая последовательность точек $\{z_n\}, z_n \in D, n = 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|^2)^p \rho(f(z_n)) = +\infty$, является

$P^{(p)}$ -последовательностью для функции $f(z)$ ([4], теорема 1). Известно также ([4], теорема 3), что последовательность точек

$\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, будет $P^{(p)}$ -последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда существует такая последовательность положительных чисел

$$\{\varepsilon_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max [q_f^{(p)}(z), z \in D_p(z_n, \varepsilon_n)] = +\infty.$$

В дальнейшем $P^{(1)}$ -последовательности будем называть короче P -последовательностями.

Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$, если каждая хорда $h(\zeta, a)$ и каждый орицикл $\Lambda(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит P -последовательность функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если

$$\cap C(f, \zeta, h(\zeta, a)) = \cap C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)) = \emptyset,$$

где пересечения берутся по всем хордам $h(\zeta, a)$ и всем орициклам $\Lambda(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$, и ни одна хорда $h(\zeta, a)$ и ни один орицикл $\Lambda(\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$ не содержат P -последовательностей функции $f(z)$.

Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $Q_0(f)$, если

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in D} \sup q_f(z) = 0;$$

точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $Q_1(f)$, если

$$0 < \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in D} \sup q_f(z) < +\infty.$$

Положим

$$\mathfrak{M}_0(f) = \mathfrak{M}(f) \cap Q_0(f), \mathfrak{M}_1(f) = \mathfrak{M}(f) \cap Q_1(f),$$

$$I_0^*(f) = I^*(f) \cap Q_0(f), I_1^*(f) = I^*(f) \cap Q_1(f), Q(f) = Q_0(f) \cup Q_1(f).$$

В произвольной точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}(f)$ имеем $C(f, \zeta, D) \neq \emptyset$, и следовательно, в силу отмеченных свойств P -последовательностей, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}(f)$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in D} \sup q_f(z) < +\infty.$$

Поэтому $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f)$.

Граничное поведение мероморфной функции $f(z)$ в произвольной точке $\zeta = e^{i\theta} \in Q_0(f)$ определяется следующим утверждением, доказанным Андерсоном, Клауни и Поммеренке [1].

Теорема А. ([1], теорема 4.1). Если $\zeta = e^{i\theta} \in Q_0(f)$, то для любой жордановой кривой L , лежащей в D и оканчивающейся в $\zeta = e^{i\theta}$, имеем $C(f, \zeta, L) \supset \cup C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2))$, где объединение берется по всем углам $\Delta(\zeta, a_1, a_2)$ с вершиной в $\zeta = e^{i\theta}$.

Поэтому в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}_0(f)$ и в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in I_0^*(f)$ для любой жордановой кривой L , лежащей в D и оканчивающейся в $\zeta = e^{i\theta}$, имеем $C(f, \zeta, L) = C(f, \zeta, D)$.

4°. Теперь мы сформулируем основную теорему.

Теорема 1. Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем

$$\Gamma = \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f) \cup I_0^*(f) \cup I_1^*(f) \cup P(f) \cup E,$$

где E — множество первой категории на Γ .

Эта теорема, являясь усилением теоремы Мейера ([3], стр. 204, теорема 8.8), представляет собой также обобщение теоремы 1 из [6], в которой изучалось поведение вдоль углов Штольца.

5°. Выделим в качестве лемм основные этапы в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. Для любой действительной или комплексной непрерывной функции $q(z)$, отображающей D в $\mathbb{Q}$, дополнение множества $C(q)$ относительно Γ является множеством первой категории.

Лемма 1 является простым следствием теоремы Коллингвуда о максимальнойности. Действительно, рассмотрим семейство кривых $G(1)$, состоящее из счетного числа хорд $\{h(1, z_n)\}$ и орициклов $\Delta_m(1)$, оканчивающихся в точке $\zeta = 1$, и обладающее тем свойством, что каждый угол Штольца $\Delta(1)$ и каждый орициклический угол $O\Delta(1)$ с вершиной в точке $\zeta = 1$ содержат по крайней мере один элемент множества $G(1)$. Обозначим через $G(\zeta)$ ($\zeta = e^{i\theta}$) образ $G(1)$ при повороте $z' = e^{i\theta}z$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Согласно теореме Коллингвуда о максимальнойности в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, исключая самое большое множество $E \subset \Gamma$ первой категории, для любого элемента $L \in G(\zeta)$ имеем $C(q, \zeta, L) = C(q, \zeta, D)$. В силу выбора семейств $G(\zeta)$, каждая точка $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ принадлежит множеству $C(q)$ и лемма доказана.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 1. Применим лемму 1 к функциям $f(z)$ и $q_f(z)$. Множество $M = C(f) \cap C(q_f)$ имеет своим дополнением относительно Γ множество первой категории, так как дополнения множеств $C(f)$ и $C(q_f)$ относительно Γ согласно лемме 1 есть множества первой категории. В произвольной точке $\zeta = e^{i\theta} \in M$ имеем четыре возможности: (i) множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено и $C(f, \zeta, D) \neq \mathbb{Q}$; (ii) множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено и $C(f, \zeta, D) = \mathbb{Q}$; (iii) множество $C(q_f, \zeta, D)$ не ограничено и $C(f, \zeta, D) = \mathbb{Q}$; (iv) множество $C(q_f, \zeta, D)$ не ограничено и $C(f, \zeta, D) \neq \mathbb{Q}$. Отметим сразу, что возможность (iv) в действительности реализоваться не может, так как условие неограниченности множества $C(q_f, \zeta, D)$ означает существование P -последовательности функции $f(z)$, стремящейся к точке $\zeta = e^{i\theta}$ и ведет, следовательно, к утверждению, что $C(f, \zeta, D) = \mathbb{Q}$.

6°. Если в точке $\zeta \in M$ реализуется возможность (iii), то каждый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ и каждый орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержат по крайней мере одну P -последовательность функции $f(z)$. Утверждение, что в этом случае $\zeta = e^{i\theta} \in P(f)$, следует из такой леммы.

Лемма 2. Хорда $h(\zeta, a)$ (орицикл $\Delta(\zeta)$) не содержит P -последовательностей мероморфной в D функции $f(z)$ в том и толь-

ко в том случае, когда найдется некоторый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ (орициклический угол $O\Delta(\zeta)$), содержащий $h(\zeta, a)$ ($\Lambda(\zeta)$), в котором множество $C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta))$ (множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$) ограничено.

Для хорд эта лемма доказана в [6]. Установим справедливость утверждения леммы 2 для орициклов. Для доказательства достаточности, допустим, что по некоторому орициклическому углу $O\Delta(\zeta)$, содержащему орицикл $\Lambda(\zeta)$, предельное множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ ограничено, но $\Lambda(\zeta)$ содержит P -последовательность $\{z_n\}$ функции $f(z)$. Согласно ([4], теорема 3) найдется последовательность точек

$$\{z_n^1\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_n^1) = 0,$$

по которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_f(z_n^1) = +\infty.$$

В силу отмеченных выше свойств орициклов все точки z_n^1 , начиная с некоторого номера n_0 , попадут во внутрь орициклического угла $O\Delta(\zeta)$ и значит множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ не ограничено, что невозможно.

Чтобы доказать необходимость условий леммы 2, допустим, что в каждом орициклическом угле $O\Delta(\zeta)$, содержащем орицикл $\Lambda(\zeta)$, предельное множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ не ограничено. Таким образом, любой угол $O\Delta(\zeta)$ содержит последовательность точек $\{z_n\}$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} q_f(z_n) = +\infty$. Неограниченно уменьшая величину раствора углов $O\Delta(\zeta)$, стягивая их к орициклу $\Lambda(\zeta)$ и используя свойства орициклов, выделим из последовательности точек $\{z_n\}$ такую подпоследовательность $\{\bar{z}_n\}$, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, \Lambda(\zeta)) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} q_f(\bar{z}_n) = +\infty$.

Обозначим через $\{z_n^1\}$ такую последовательность точек из $\Lambda(\zeta)$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_n^1) = 0$. Согласно ([4], теорема 3) последовательность точек $\{z_n^1\}$ является P -последовательностью функции $f(z)$.

7°. Если реализуется возможность (i) или возможность (ii), то точка $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежит множеству $Q(f)$. Утверждения, что $\zeta = e^{i\theta} \in \mathfrak{M}(f)$, и значит $\zeta \in \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f)$, если реализуется (i), и что $\zeta = e^{i\theta} \in I^*(f)$, и значит $\zeta \in I_0^*(f) \cup I_1^*(f)$, если реализуется (ii), следует на основании определений множеств $\mathfrak{M}(f)$ и $I^*(f)$, леммы 2 и следующего результата.

Лемма 3. Если у мероморфной в D функции $f(z)$ в некоторой точке $\zeta = e^{i\theta} \in C(f)$ множества $C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta))$ (множества $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$) ограничены для любого угла Штольца $\Delta(\zeta)$ (орициклического угла $O\Delta(\zeta)$), то для всех хорд $h(\zeta, a)$ (орициклов $\Lambda(\zeta)$) в точке $\zeta = e^{i\theta}$ множества $C(f, \zeta, h(\zeta, a))$ ($C(f, \zeta, \Lambda(\zeta))$) одинаковы и совпадают с $C(f, \zeta, \Delta(\zeta))$ ($C(f, \zeta, O\Delta(\zeta))$). В частности, если в точке $\zeta = e^{i\theta} \in C(f)$ множество $C(q_f, \zeta, D)$ ограничено, то

$$\bigcap_h C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha)) = \bigcap_{\Lambda} C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)) = C(f, \zeta, D).$$

Справедливость утверждения леммы 3 для хорд $h(\zeta, \alpha)$ и углов Штольца $\Delta(\zeta)$ установлена в [6]. Чтобы доказать лемму 3 полностью, допустим, что найдутся орицикл $\Lambda(\zeta)$ и значение $\alpha \in \Omega$ такие, что $\alpha \notin C(f, \zeta, \Lambda(\zeta))$, в то время, как в каждом орициклическом угле $O\Delta(\zeta)$, содержащем орицикл $\Lambda(\zeta)$, имеется последовательность точек $\{z_n^{(1)}\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(1)} = \zeta$, по которой $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(1)}) = \alpha$. Неограниченно уменьшая величину раствора углов $O\Delta(\zeta)$, стягивая их к орициклу $\Lambda(\zeta)$ и используя свойство орициклов, выделим из последовательности точек $\{z_n^{(1)}\}$ такую подпоследовательность точек $\{z_\nu\}$, что $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = \zeta$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z_\nu) = \alpha$ и $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma(z_\nu, \Lambda(\zeta)) = 0$. Отметим на $\Lambda(\zeta)$ такую последовательность точек $\{z_\nu^1\}$, чтобы $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma(z_\nu, z_\nu^1) = 0$. По допущению $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z_\nu^1) = 0$. Согласно ([5], теорема 7) каждая из последовательностей $\{z_\nu\}$ и $\{z_\nu^1\}$ является P -последовательностью для функции $f(z)$. Согласно лемме 2, по некоторому орициклическому углу $O\Delta(\zeta)$, содержащему орицикл $\Lambda(\zeta)$, множество $C(q_f, \zeta, O\Delta(\zeta))$ должно быть неограниченным. Полученное противоречие доказывает лемму 3, а вместе с ней и теорему 1.

З а м е ч а н и е. Анализируя доказательство теоремы 1, особенно п. 7, мы видим, что фактически доказано следующее утверждение: для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем

$I^*(f) = I_0^*(f) \cup I_1^*(f) \cup E$, где E — множество первой категории на Γ .

Пусть $p_0 > 1$ — действительное фиксированное число. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $P_{p_0}(f)$, если каждый орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ и каждый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит $P^{(p_0)}$ -последовательность функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $P_{p_0}^-(f)$, если каждый угол $\Delta(\zeta)$ и каждый орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержат по крайней мере одну P -последовательность функции $f(z)$ и не содержат $P^{(p_0)}$ -последовательностей функции $f(z)$.

Т е о р е м а 2. Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем

$$\Gamma = \mathfrak{M}_0(f) \cup \mathfrak{M}_1(f) \cup I_0^*(f) \cup I_1^*(f) \cup P_{p_0}(f) \cup P_{p_0}^-(f) \cup E,$$

где E — множество первой категории на Γ .

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Рассмотрим множество $M = C(f) \cap C(q_f) \cap C(q_f^{p_0})$. Согласно лемме 1, множество M имеет своим дополнением относительно Γ множество E первой категории; т. е. $\Gamma = M \cup E$. Для любой точки $\zeta = e^{i\theta} \in M$ имеем восемь возможностей:

- $$\begin{array}{ll}
 C(f, \zeta, D) \neq \Omega, & C(f, \zeta, D) = \Omega, \\
 \text{(i)} \quad C(q_f, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty, & \text{(ii)} \quad C(q_f, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty, \\
 C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty, & C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \supset + \infty, \\
 C(f, \zeta, D) = \Omega, & C(f, \zeta, D) = \Omega, \\
 \text{(iii)} \quad C(q_f, \zeta, D) \supset + \infty, & \text{(iv)} \quad C(q_f, \zeta, D) \supset + \infty, \\
 C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty, & C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \supset + \infty, \\
 C(f, \zeta, D) = \Omega, & C(f, \zeta, D) \neq \Omega, \\
 \text{(v)} \quad C(q_f, \zeta, D) \supset + \infty, & \text{(vi)} \quad C(q_f, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty, \\
 C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \supset + \infty, & C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \supset + \infty, \\
 C(f, \zeta, D) \neq \Omega & C(f, \zeta, D) \neq \Omega, \\
 \text{(vii)} \quad C(q_f, \zeta, D) \supset + \infty, & \text{(viii)} \quad C(q_f, \zeta, D) \supset + \infty, \\
 C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty, & C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \supset + \infty.
 \end{array}$$

Используя свойства $P^{(p)}$ ($p > 1$)-последовательностей, легко вывести, что последние четыре случая в действительности не реализуются. Покажем это, например, в случае (vi). Так как $C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D) \supset + \infty$, то из определения множества $C(q_f^{(p_0)}, \zeta, D)$ следует, что существует последовательность точек

$$\{z_n\}, z_n \in D, n = 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1, z_n \rightarrow \zeta,$$

удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|)^{p_0} \rho(f(z_n)) = +\infty$$

и значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|) \rho(f(z_n)) = +\infty.$$

Последнее противоречит тому, что $C(q_f, \zeta, D) \overline{\sup} + \infty$.

В случае (iii) каждый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ (орициклический угол $O\Delta(\zeta)$) с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит по крайней мере одну P -последовательность функции $f(z)$. Кроме того ни один из узлов Штольца $\Delta(\zeta)$ и орициклических углов $O\Delta(\zeta)$ не содержит $P^{(p_0)}$ -последовательностей, поскольку, в противном случае, в силу теоремы 3 из статьи [4], некоторый угол Штольца $\Delta(\zeta)$ или орициклический угол $O\Delta(\zeta)$ содержал бы последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow \zeta$, по которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_f^{(p_0)}(z_n) = +\infty.$$

Следовательно, при реализации случая (iii) точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{p_0}^-(f)$. В случае (iv) любой угол $\Delta(\zeta)$ (орициклический угол $O\Delta(\zeta)$) содержит по крайней мере одну $P^{(p_0)}$ -последовательность функции $f(z)$, и сле-

довательно, точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{\rho_0}(f)$. В доказательстве теоремы 1 было замечено, что при реализации случаев (i) и (ii) точка $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежит множествам $\mathfrak{M}(f)$ или $I^*(f)$.

8°. Чтобы сформулировать некоторую теорему, родственную теореме 2, введем дополнительные обозначения. Если функция $f(z)$ мероморфна в D , то как это принято в теории предельных множеств, $F(f)$ обозначает множество точек $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых объединение $\bigcup_{\Delta} C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ по всем углам Штольца с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ состоит из единственного значения. Множество точек $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых для произвольной функции $f(z)$, определенной в D , множества $C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$ одинаковы для всех углов $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta = e^{i\theta}$, обозначают через $K(f)$. Множество точек $\zeta = e^{i\theta}$, в которых

$$\bigcap_{\Delta} C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = C(f, \zeta, D)$$

обозначим через $C(f)$. Точку $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*(f)$, если пересечение $\bigcap_h C(f, \zeta, h(\zeta, \alpha))$ по всем хордам $h(\zeta, \alpha)$ в $\zeta = e^{i\theta}$ совпадает с Ω и ни одна из хорд $h(\zeta, \alpha)$ не содержит P -последовательностей функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta}$ отнесем к множеству $P_{\rho_0}(f)$, если каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в $\zeta = e^{i\theta}$ содержит хотя бы одну $P_{(\rho_0)}$ -последовательность функции $f(z)$. Точка $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежит множеству $P_{\rho_0}^-(f)$, если каждый угол $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит по крайней мере одну P -последовательность функции $f(z)$ и не содержит $P_{(\rho_0)}$ -последовательностей функции $f(z)$.

Теорема 3. Для любой мероморфной в D функции $f(z)$ имеем

$$\Gamma = F(f) \cup I^*(f) \cup P_{\rho_0}(f) \cup P_{\rho_0}^-(f) \cup E,$$

где E — множество линейной меры нуль на Γ .

Эта теорема уточняет утверждение теоремы 2 из статьи [6].

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся результатом Е. П. Долженко ([3], стр. 257), согласно которому для любой действительной или комплексной в D функции $q(z)$ имеем $\text{mes } K(q) = 2\pi$. Образуем множество

$$N = K(f) \cap K(q_f) \cap K(q_f^{(\rho_0)}).$$

Тогда $\Gamma = N \cup E$, $\text{mes } E = 0$. Для произвольной точки $\zeta = e^{i\theta} \in N$ и любого угла $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ имеем восемь возможностей:

$$\begin{aligned} C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) &\neq \Omega, & C(f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) &= \Omega, \\ \text{(i) } C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) &\bar{\supset} +\infty & \text{(ii) } C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) &\bar{\supset} +\infty, \\ C(q_f^{(\rho_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) &\bar{\supset} +\infty, & C(q_f^{(\rho_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) &\bar{\supset} +\infty, \end{aligned}$$

- $$C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) = \mathcal{Q}, \quad C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) = \mathcal{Q}$$
- $$(iii) \quad C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty, \quad (iv) \quad C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty,$$
- $$C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty, \quad C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty,$$
- $$C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) = \mathcal{Q}, \quad C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \neq \mathcal{Q},$$
- $$(v) \quad C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty, \quad (vi) \quad C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty,$$
- $$C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty, \quad C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty,$$
- $$C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \neq \mathcal{Q}, \quad C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \neq \mathcal{Q},$$
- $$(vii) \quad C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty, \quad C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty,$$
- $$C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty, \quad C(q_f^{(p_0)}, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty.$$

Заметим, что последние четыре случая не могут реализоваться. Покажем это, например, для случая (viii). Условие $C(q_f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) \supset +\infty$ означает, что угол $\Delta(\zeta, a_1, a_2)$ содержит P -последовательность функции $f(z)$, следовательно

$$C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a_1, a_2)) = \mathcal{Q},$$

что противоречит первому условию. Остальные три случая рассматриваются аналогично.

В случае (iii) каждый угол $\Delta(\zeta, a_1, a_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$ содержит хотя бы одну P -последовательность функции $f(z)$ и не содержит ни одной $P^{(p_0)}$ -последовательности функции $f(z)$. Следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{p_0}^-(f)$. В случае (iv) каждый угол $\Delta(\zeta, a_1, a_2)$ содержит по крайней мере одну $P^{(p_0)}$ -последовательность функции $f(z)$, следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta} \in P_{p_0}(f)$. В статье [6] доказано, что при реализации случаев (i) и (ii) почти все точки $\zeta = e^{i\theta}$ принадлежат множествам $F(f)$ и $I^*(f)$, соответственно.

Ереванский педагогический институт

им. Х. Абовяна,

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Поступила 6.I.1975

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային վարքի վերաբերյալ Մայրիի բնորոշի ուժեղացումը (ամփոփում)

Հոդվածում նշված է Կոլինգվուդի մաթսիմալության թեորեմի ([2], էջ 379, 395 կամ [3], էջ 108, թեորեմ 4.8) կիրառություն միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների հորիզոնական վրայով եզրային վարքի ուսումնասիրության համար: Օգտագործվում են նաև $P(p)$ հաջորդականությունների հատկությունները [4]: Ապացուցվող երկու թեորեմներն ուժեղացնում են Մայրիի թեորեմը ([3], էջ 204, թեորեմ 3.8) և տարածում են այն հորիզոնական ուղիների վրա:

A. N. AJRAPETIAN, V. I. GAVRILOV. *Generalizations of a theorem of Meier, concerning the boundary behaviour of meromorphic functions* (summary)

The paper deals with an application on the Collingwood theorem ([2], p. 379, p. 395 or [3], p. 108, theorem 4.8) and properties of $P^{(p)}$ -sequences [4] to the study of horicycle behaviour of meromorphic functions in the unit disc. Two theorems are proved that generalise the Meier theorem ([3], p. 204, theorem 3.8) and extend it on the horicycle paths.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Anderson, J. Clunie, Ch. Pommerenke. On Bloch functions and normal functions, J. reine and angew. Math., 270, 1974, 12—37.
2. E. F. Collingwood. On sets of maximum indetermination of analytic functions, Math. Z., 67, № 4, 1957, 377—396.
3. Э. Коллингвуд, А. Ловатер. Теория предельных множеств, М., Изд. „Мир“, 1971.
4. В. И. Гаврилов. Мероморфные в единичном круге функции с заданным ростом сферической производной, Матем. сб., 71 (113), № 3, 1966, 385—404.
5. В. И. Гаврилов. О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Матем. сб., 67 (109), № 3, 1965, 408—427.
6. В. И. Гаврилов. Поведение вдоль хорд мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 216, № 1, 1974, 21—23.

Յ. Ա. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве E_n , $x = (x_1, \dots, x_n)$ точки Ω , S — граница Ω . Рассмотрим следующую задачу:

$$a_{ij}(x, u) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$b_i(x, u) u_{x_i} = \varphi(x, u), \quad x \in S \quad (2)$$

в предположении, что $b_i(x, u) \cos(\bar{n}, x_i) \geq \bar{\epsilon} > 0$, где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к границе Ω . Здесь и всюду по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до n .

В работе [2] получена условная теорема существования классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений краевых эллиптических задач в предположении, что имеются априорные оценки максимумов модулей и модуля непрерывности первых производных решений. В гл. X [1] исследована классическая разрешимость краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений с дивергентной главной частью

$$\frac{d}{dx_i} (a_i(x, u, u_x)) + a(x, u, u_x) = f(x)$$

при граничном условии

$$a_i(x, u, u_x) \cos(\bar{n}, x_i) = \varphi(x, u).$$

В настоящей работе в предположении, что известна оценка $\max_{\bar{\Omega}} |u(x)|$, получены оценки $\langle u \rangle_{\bar{\Omega}}^{(2)}$, $\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|$, $\langle u_{x_i} \rangle_{\bar{\Omega}}^{(2)}$, необходимые для исследования классической разрешимости задачи (1)–(2). Заметим, что достаточные условия ограниченности максимума модуля решений задачи дается теоремой (2.2) главы X [1].

Пусть $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $\max_{\bar{\Omega}} |u(x)| \leq M$, функции $a_{ij}(x, u)$, $a(x, u, p)$ при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leq M$ и произвольных p дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют следующим естественным ограничениям (см. [1]):

$$a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \geq \nu(M) \xi^2, \quad \nu(M) > 0, \quad (3)$$

$$\left(|a_{ij}(x, u)| + \left| \frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial a(x, u, p)}{\partial p_i} \right| \right) (1 + |p|) + \\ + |a(x, u, p)| + \left| \frac{\partial a(x, u, p)}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial a(x, u, p)}{\partial x_i} \right| \leq \mu(M) (1 + |p|)^2. \quad (4)$$

Здесь и далее через $\nu(t)$, $\mu(t)$ будем обозначать различные постоянные, обладающие следующими свойствами:

$\nu(t)$ — положительная невозрастающая непрерывная функция, определенная при $t > 1$,

$\mu(t)$ — положительная неубывающая непрерывная функция, определенная при $t \geq 0$.

Кроме того, считаем, что

$$S \in O^2, \quad \varphi(x, u) \in O^2\{x, u; x \in \overline{\Omega}, |u| \leq M\},$$

$$b_i(x, u) \in O^2\{x, u; x \in \overline{\Omega}, |u| \leq M\}, \quad f(x) \in L_\infty(\Omega)^*.$$

Рассмотрим область Ω_1 , примыкающую к некоторому участку S_1 границы Ω . Без ограничения общности можем считать, что система координат $\{x_i\}_{i=1}^n$ такова, что направление внешней нормали к S_1 задается уравнением $x_n = 0$. Из (1) и (2) следует, что при любой функции $\eta(x) \in W_2^1(\Omega)$, равной нулю вне Ω_1 , $u(x)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega} \left[a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} \eta - (a - f) \eta \right] dx + \int_{S_1} a_{nj} u_{x_j} \eta ds = 0. \quad (5)$$

Учитывая условие (2) и преобразовывая граничный² интеграл в (5) в объемный, получим следующее интегральное тождество:

$$\int_{\Omega} [a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + A \eta + (A_* u_{x_n} + \bar{\varphi}) \eta_{x_n} - A_* u_{x_n} \eta_{x_n}] dx = 0 \quad (6)$$

где

$$A_*(x, u) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{ni} - a_{nn} \frac{b_i}{b_n} \right), \quad \bar{\varphi} = a_{nn} \frac{\varphi}{b_n},$$

$$A(x, u, u_x) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u_{x_j} - a + f + \frac{dA_*}{dx_n} u_{x_n} - \frac{dA_*}{dx_n} u_{x_n} + \frac{d\bar{\varphi}}{dx_n}.$$

Из наших предположений следует, что

$$|A(x, u, p)| \leq \mu(M) (1 + |p|)^2. \quad (7)$$

Положим в (6) $\eta = \zeta^2 \max\{u - k, 0\}$, где k — любое число, а $\zeta(x) —$

* Обозначения см. в [1].

срезающая функция для шара K , радиуса ρ с центром на S_1 , не пересекающего $S \setminus S_1$. Тогда из (6) получим

$$\int_{A_{k, \rho}} [a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} \zeta^2 + a_{ij} u_{x_j} (u - k) 2\zeta_{x_i} + A(u - k) \zeta^2 + \tilde{\varphi} u_{x_n} \zeta^2 + \\ + (A_0 u_{x_n} + \tilde{\varphi})(u - k) 2\zeta_{x_n} - A_0 u_{x_n} (u - k) 2\zeta_{x_n}] dx = 0, \quad (8)$$

где

$$A_{k, \rho} = \{x \in \Omega_\rho; u(x) > k\}, \quad \Omega_\rho = K_\rho \cap \Omega.$$

Первый член в (8) оставим слева, а остальные перенесем вправо и оценим, пользуясь условиями (3), (4) и (7). В правой части к членам, содержащим производные от функции $\zeta(x)$ применим неравенство Коши с $\varepsilon > 0$ (см. гл. II [1]). Тогда из (8) получим следующее неравенство:

$$\int_{A_{k, \rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2 dx \leq \gamma \left[\int_{A_{k, \rho}} (u - k)^2 |\nabla \zeta|^2 dx + \text{mes } A_{k, \rho} \right], \quad (9)$$

где γ зависит от μ , ν , M . Подставляя в (6) $\eta = \zeta^2 \max \{-u - k, 0\}$ и производя аналогичные оценки, приходим к неравенству (9) для функции $-u(x)$. Из (9) на основании теоремы 7.2 гл. II [1] следует оценка $|u|^{(2)}$ вблизи S_1 .

Перейдем к оценкам первых производных $u(x)$. Для этого преобразуем тождество (6) с $\eta = \xi_{x_r}$, $r \neq n$, где ξ — произвольная достаточно гладкая функция в $\bar{\Omega}$, равная нулю вне Ω_1 . В результате будем иметь

$$\int_{\Omega} \left[\left(a_{ij} u_{x_j} x_j + \frac{da_{ij}}{dx_r} u_{x_j} \right) \xi_{x_i} + A \xi_{x_r} - \frac{d(A_0 u_{x_n} + \tilde{\varphi})}{dx_r} \xi_{x_n} + \right. \\ \left. + \frac{d(A_0 u_{x_n})}{dx_r} \xi_{x_n} \right] dx = 0$$

или, что то же самое

$$\int_{\Omega} [a_{ij} u_{x_j} x_j \xi_{x_i} + B_i \xi_{x_i} + (A_0 u_{x_r x_n} \xi_{x_n} - A_0 u_{x_n x_r} \xi_{x_n})] dx = 0, \quad (10)$$

где

$$B_i(x, u, u_x) = \frac{da_{ij}}{dx_r} u_{x_j} + \partial_i A - \partial_i^r \left(\frac{dA_0}{dx_r} u_{x_n} + \frac{d\tilde{\varphi}}{dx_r} \right) + \partial_i^r \frac{dA_0}{dx_r} u_{x_n}.$$

Из наших предположений следует, что

$$\left. \begin{aligned} B_i &= u_{x_r} \tilde{B}_i | \tilde{B}_i | \leq \mu(M)(1 + |p|), \quad i \neq r \\ B_r &= B'_r + B''_r | B_r | \leq \mu(M)(1 + |p|)^2 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где

$$B'_r = \frac{da_{ij}}{dx_r} u_{x_j} + f + \frac{dA_s}{dx_n} u_{x_s} - \frac{dA_s}{dx_s} u_{x_n},$$

$$B''_r = -a + \frac{d\bar{\varphi}}{dx_n}.$$

Предположим пока, что известна оценка $\max_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq M_1$ и оценим гельдеровские нормы для первых производных. Подставим в (10)

$$\xi = \zeta^2 \max \{u_{x_r} - k, 0\}$$

и пусть

$$A_{k,p} = \{x \in \Omega_p; u_{x_r} > k\}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{A_{k,p}} [a_{ij} u_{x_r x_j} u_{x_r x_i} \zeta^2 + a_{ij} u_{x_r x_j} (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_i} + B_i u_{x_r x_i} \zeta^2 + \\ + B_i (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_i} + A_s u_{x_r x_n} (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_n} - \\ - A_s u_{x_s x_r} (u_{x_r} - k) 2\zeta \zeta_{x_n}] dx = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый член в (12) оставим слева, а остальные перенесем вправо. Произведем оценки с помощью условий (3), (4), (7), (11), а в членах, содержащих производные от функции $\zeta(x)$, применим неравенство Коши с $\varepsilon > 0$. Тогда из (12) получим

$$\int_{A_{k,p}} |\nabla u_{x_r}|^2 \zeta^2 dx \leq \gamma \left(\int_{A_{k,p}} (u_{x_r} - k)^2 |\nabla \zeta|^2 dx + \text{mes } A_{k,p} \right), \quad (13)$$

где γ зависит от μ , ν , M и M_1 . Если в (10) подставим $\xi = \zeta^2 \max \{-u_{x_r} - k, 0\}$, то придем к неравенству (13) для функции $-u_{x_r}$. Из (13) на основании теоремы 7.2 гл. II [1] следует, что $\langle u_{x_r} \rangle_{\Omega_1}^{(\beta)} \leq c$, $r \neq n$ с некоторым c и $\beta > 0$, зависящим от перечисленных выше постоянных. Оценка величины $\langle u_{x_n} \rangle_{\Omega_1}^{(\beta)}$ следует из уравнения (1) и неравенства (13). В самом деле, из (13) при $k = \min_{K_p \cap \Omega_r} u_{x_r}$ следует, что для шаров

$\bar{K}_\rho$, лежащих в области Ω_1 , верна оценка (выбираем $\zeta(x)$ так, чтобы $|\nabla \zeta| \leq \frac{1}{\rho}$)

$$\int_{\bar{K}_\rho \cap \Omega} |\nabla u_{x_r}|^2 dx \leq \gamma \rho^{n-2+2\beta}, \quad r \neq n. \quad (14)$$

Из уравнения (1) вытекает, что

$$u_{x_n x_n} = \sum_{r \neq n} d_{ir} u_{x_r x_i} + d \quad (15)$$

с ограниченными d_{ir} и d . Значит (14) верно и для $u_{x_n x_n}$, и в силу леммы 4.2 гл. II [1] $\langle u_{x_n} \rangle_{\Omega_1}^{(5)}$ оценивается через известные постоянные и расстояние Ω_1 до $S \setminus S_1$.

Теперь оценим $\max |\nabla u|$ в Ω . Как и в случае первой краевой задачи [1], для этого достаточно получить оценки интегралов

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u|^m dx \quad (m \text{ — достаточно большое, но конечное число}) \text{ и максимума модуля градиента } u(x) \text{ на } S_1.$$

Заметим, что из (9) при $K = \min_{\bar{K}_\rho \cap \Omega_1} u(x)$ следует неравенство

$$\int_{\bar{K}_\rho \cap \Omega_1} |\nabla u|^2 dx \leq c \rho^{n-2+2\alpha} \quad (16)$$

при $\rho \leq \bar{\rho}$, где $\bar{\rho}$ и c определяются числом M и известными постоянными. Обозначим

$$v = \sum_{k=1}^{n-1} u_{x_k}^2 + 1, \quad \omega = \sum_{k=1}^n u_{x_k}^2 + 1.$$

В тождестве (6) положим $\eta = [u(x) - u(x_0)] v^{s+1} \omega^q \zeta^2$, $s, q \geq 0$, $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара $\bar{K}_\rho$ с центром $x_0 \in S_1$ и радиусом $\rho \leq \bar{\rho}$, меньшим расстояния x_0 до $S \setminus S_1$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\rho} \left\{ a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} v^{s+1} \omega^q \zeta^2 + (u - u(x_0)) [a_{ij} u_{x_j} (s+1) v^s v_{x_i} \omega^q \zeta^2 + \right. \\ & \quad + a_{ij} u_{x_j} v^{s+1} q \omega^{q-1} \omega_{x_i} \zeta^2 + a_{ij} u_{x_j} v^{s+1} \omega^q 2\zeta \zeta_{x_i} + A v^{s+1} \omega^q \zeta^2 + \\ & \quad \left. + (A u_{x_n} + \tilde{\gamma}) (s+1) v^s v_{x_n} \omega^q \zeta^2 + v^{s+1} q \omega^{q-1} \omega_{x_n} \zeta^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ v^{s+1} \omega^q 2 \zeta_{x_n} - A_s u_{x_n} ((s+1) v^s v_{x_s} \omega^q \zeta^2 + \\ + v^{s+1} q \omega^{q-1} \omega_{x_s} \zeta^2 + v^{s+1} \omega^q 2 \zeta_{x_s}) + \tilde{\varphi} u_{x_n} v^{s+1} \omega^q \zeta^2 \} dx = 0.$$

Производя оценки с использованием (3), (4) и (7), придем к следующему неравенству:

$$\int_{\Omega_\rho} v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 dx \leq c_1 \max_{\Omega_\rho} |u - u(x_0)| \int_{\Omega_\rho} \left\{ [(s+1) v^s \omega^q |\nabla v| \zeta^2 + \right. \\ \left. + q v^{s+1} \omega^{q-1} |\nabla \omega| \zeta^2 + 2 v^{s+1} \omega^q |\nabla \zeta| |\omega|^{1/2} + v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 \right\} dx + \\ + c_1 \int_{\Omega_\rho} v^{s+1} \omega^{q+1/2} \zeta^2 dx,$$

в котором c_1 определяется постоянными $\nu(M)$, $\mu(M)$, $\max_{x \in \Omega_\rho} |\tilde{\varphi}| < M$.

К членам в правой части применим неравенство Коши с $\varepsilon = 1$ и воспользуемся тем, что $\max_{\Omega_\rho} |u(x) - u(x_0)| \leq c_2 \rho^\alpha$. Выбирая $\rho < (3c_1 c_2)^{-1/\alpha}$,

получим

$$\int_{\Omega_\rho} v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 dx \leq c \rho^\alpha \int_{\Omega_\rho} [(s+1)^2 v^{s-1} \omega^q |\nabla v|^2 \zeta^2 + q^2 v^{s+1} \omega^{q-2} |\nabla \omega|^2 \zeta^2 + \\ + 2 v^{s+1} \omega^q |\nabla \zeta|^2] dx + c(s, q). \quad (17)$$

Теперь подставим в тождество (8) $\xi = u_{x_r} v^s \omega^q \zeta^2$, $r \neq n$. В результате получим

$$\int_{\Omega_\rho} [(a_{ij} u_{x_r x_j} + B_i) (u_{x_r x_i} v^s \omega^q \zeta^2 + u_{x_r} s v^{s-1} v_{x_i} \omega^q \zeta^2 + u_{x_r} v^s q \omega^{q-1} \omega_{x_i} \zeta^2 + \\ + u_{x_r} v^s \omega^q 2 \zeta_{x_i}) + q A_s v^s \omega^{q-1} \zeta^2 u_{x_n} (v_{x_n} u_{x_n x_s} - v_{x_s} u_{x_n x_n}) + \\ + A_s v^s \omega^q \zeta (v_{x_n} \zeta_{x_s} - v_{x_s} \zeta_{x_n})] dx = 0.$$

Произведем здесь суммирование по r от 1 до $n-1$. В левой части оставим два положительных члена

$$a_{ij} u_{x_r x_j} u_{x_r x_i} v^s \omega^q \zeta^2, \quad a_{ij} u_{x_r x_j} u_{x_r} s v^{s-1} v_{x_i} \omega^q \zeta^2 = \frac{s}{2} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \omega^q \zeta^2.$$

Остальные члены перенесем вправо, подставляя вместо $u_{x_n x_n}$ его зна-

чения из (15) и производя интегрирование по частям в члене $B'_r \frac{\partial}{\partial x_r}$. Левую часть оценим, исходя из (3), а правую часть оценим по модулю, замечая, что в силу условий на S , $f(x)$, $\varphi(x, u)$ и (4) верны следующие неравенства:

$$|a_{ij} u_{x_i x_j} u_{x_r}| \leq c |\nabla v|,$$

$$|B'_r| \leq c v^{1/2} \omega^{1/2},$$

$$\left| \frac{\partial a}{\partial u_{x_i}} u_{x_i x_r} + \frac{\partial a}{\partial u} u_{x_r} + \frac{\partial a}{\partial x_r} - \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx_r dx_n} \right| \leq c \omega^{1/2} \sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| + c v^{1/2} \omega.$$

В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \left[\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 v^{s \omega^q \zeta^2} + \frac{s}{2} v^{s-1 \omega^q} |\nabla v|^2 \zeta^2 \right] dx \leq c \int_{\Omega_\rho} \left\{ q |\nabla v| v^{s \omega^{q-1}} |\nabla \omega| \zeta^2 + \right. \\ \left. + |\nabla v| v^{s \omega^q \zeta} |\nabla \zeta| + v^{1/2 \omega^{1/2}} \left(\sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| v^{s \omega^q \zeta^2} + s v^{s-1/2} |\nabla v| \omega^q \zeta^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + q v^{s+1/2 \omega^{q-1}} |\nabla \omega| \zeta^2 + v^{s+1/2 \omega^q \zeta} |\nabla \zeta| \right) + \omega^{1/2} \sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| v^{s+1/2 \omega^q \zeta^2} + \right. \\ \left. + v^{s+1 \omega^{q+1} \zeta^2} \right\} dx = 0. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши с ε при $q = s = 0$, получаем

$$\int_{\Omega_\rho} \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \zeta^2 \leq c \int_{\Omega_\rho} (v \omega \zeta^2 + v |\nabla \zeta|^2) dx, \quad (18)$$

а при $s > 0$, $q > 0$, выбирая $\varepsilon = \frac{2q^2}{s}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \left[\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 v^{s \omega^q \zeta^2} + \frac{s}{2} v^{s-1 \omega^q} |\nabla v|^2 \zeta^2 \right] dx \leq c \int_{\Omega_\rho} \left[\frac{q^2}{s} \omega^{q-2} v^{s+1} |\nabla \omega|^2 \zeta^2 + \right. \\ \left. + v^{s+1 \omega^q} |\nabla \zeta|^2 + (1+s) v^{s-1 \omega^{q+1} \zeta^2} \right] dx. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (17) и (19) при $q = s = 0$ и достаточно малых ρ следует

$$\int_{\Omega_\rho} \left(\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \zeta^2 + v \omega \zeta^2 \right) dx \leq c \int_{\Omega_\rho} v |\nabla \zeta|^2 dx + c(\rho)$$

и, так как $v \leq \omega$, то на основании (16) получим

$$\int_{\Omega_p} \left(\sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 + v \omega \right) \zeta^2 dx \leq c_1(p). \quad (20)$$

Так как $\omega_{x_i} = 2 \sum_{e=1}^n u_{x_e} u_{x_e x_i}$, то $|\nabla \omega|^2 \leq 4 \omega u_{xx}^2$. Из (15) имеем, что

$$|u_{x_n x_n}| \leq c' \sum_{r \neq n} |u_{x_r x}| + c' \omega. \quad (21)$$

Следовательно, верно следующее соотношение:

$$|\nabla \omega|^2 \leq c \omega \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 + c \omega^3. \quad (22)$$

Пусть $s > 0$, из (17) и (19), используя соотношение (22) при $\frac{q^2}{s} \ll 1$ выводим

$$\int_{\Omega_p} \left[v^{s+1} \omega^{q+1} \zeta^2 + v^s \omega^q \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \zeta^2 \right] dx \leq c(s, q) \int_{\Omega_p} v^{s+1} \omega^q |\nabla \zeta|^2 dx + c(s, q). \quad (23)$$

Пусть $p_s = \frac{p}{2} + \frac{p}{2^{s+1}}$, Ω_{p_s} — последовательность областей $s = 1, 2, \dots$ и $\zeta_s(x)$ — срезающая функция для шара K_{p_s} , равная единице в $K_{p_{s+1}}$. Если $q = 0$, то из (23) и (20) вытекает

$$\int_{\Omega_{p_s}} v^{s+1} \omega \zeta_s^2 dx \leq c(s), \quad s > 0.$$

Рассматривая (23) последовательно при $q = 0, 1, \dots$, получим оценки интегралов

$$\int_{\Omega_{\frac{p}{2}}} \left(v^{s+1} \omega^{q+1} + v^s \omega^q \sum_{r \neq n} u_{x_r x}^2 \right) dx \leq c(s, q), \quad (24)$$

а используя (21) выводим

$$\int_{\Omega_{\frac{p}{2}}} (1 + |\nabla u|)^m (1 + u_{xx}^2) dx \leq c(m). \quad (25)$$

откуда и следует

$$\int_{\Omega_{\frac{p}{2}}} |\nabla u|^m dx \leq c(m). \quad (26)$$

Оценим сейчас $\max |u_{x_r}|$, $r \neq n$ вблизи S_1 . Введем функцию $z = v_{x_r}^2$ и пусть $A_k = \{x; x \in \Omega, z(x) > k\}$. Подставим в (8) $\xi = u_{x_r} \zeta_{x_i}^2 \max \{z - k, 0\}$, $r \neq n$, $k > 0$ и просуммируем по r от 1 до $n - 1$. В результате получаем следующее интегральное тождество:

$$\begin{aligned} \int_{A_k} [a_{ij} u_{x_r x_j} (u_{x_r x_i} (z - k) \zeta_i^2 + u_{x_r} z_{x_i} \zeta_i^2 + u_{x_r} (z - k) 2 \zeta_{x_i}^2) + \\ + B_i (u_{x_r x_i} (z - k) \zeta_i^2 + u_{x_r} z_{x_i} \zeta_i^2 + u_{x_r} (z - k) 2 \zeta_{x_i}^2) + \\ + A_r z \zeta (v_{x_n} \zeta_{x_r} - v_{x_r} \zeta_{x_n}) + A_r (z - k) \zeta (v_{x_n} \zeta_{x_r} - v_{x_r} \zeta_{x_n})] dx = 0. \end{aligned}$$

Так как $u_{x_r x_j} u_{x_r} = \frac{1}{2} (z_{x_j} - 2v \zeta_{x_j})$, то из условий (3), (4) и (11) вытекает, что

$$\int_{A_k} |\nabla z|^2 dx \leq c \int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^6 (1 + |\nabla \zeta|^2) dx \leq c_1 \int_{A_k} (1 + |\nabla u|)^6 dx,$$

где c_1 зависит от μ , ν , ρ . Применяя неравенство Гельдера с показателями $p = \frac{l}{6}$, $q = \frac{l}{l-6}$, где $l > 3n$, получим

$$\int_{A_k} |\nabla z|^2 dx \leq c_1 \text{mes}^{\frac{1}{q}} A_k, \quad \frac{1}{q} > 1 - \frac{2}{n}. \quad (27)$$

Из (27), в силу леммы 5.4 гл. II [1], следует оценка $\max_{\Omega_1} v_{x_r}^2 \leq M_2$, т. е. $\max_{\Omega_1} |u_{x_r}| \leq M_2$, $r \neq n$. Используя граничное условие (2), оцениваем $\max_{\Omega_1} |u_{x_n}|$. Из этих оценок и неравенства (25) также как и в случае первой краевой задачи (гл. IV [I]) получается оценка $\max |\nabla u|$ вблизи S_1 . Сформулируем доказанные утверждения в виде теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что функции $a_{ij}(x, u)$, $a(x, u, p)$ при $x \in \bar{\Omega}$, $|u| \leq M$ и произвольных p дифференцируемы по своим аргументам и удовлетворяют неравенствам (3) и (4):*

$$f(x) \in L_\infty(\Omega), \quad \varphi(x, u) \in O^3(\Omega \times [-M, M]), \quad b_i(x, u) \in O^2(\Omega \times [-M, M]),$$

$$\max_{\Omega} |\varphi, \varphi_{x_i}, \varphi_{x_i x_j}, \varphi_{x_i x_j x_k}| \leq \mu(M).$$

Пусть граница $S \in O^2$. Тогда для любого решения $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (1)–(2), для которого $\max |u| \leq M$, норма $|u|_{\Omega}^{(1+\beta)}$ оценивается при некотором $\beta > 0$ постоянной, зависящей от M , $\nu(M)$, $\mu(M)$ и границы S . Этими же постоянными определяется β .

Этих оценок достаточно для исследования классической разрешимости задачи (1)–(2) в предположении определенной гладкости функций, образующих уравнение (1) и граничное условие (2), а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнено следующее условие (теорема 2.2 гл. X [1]): при $|u| > R$ (R – достаточно большое число):

$$a_{ij}(x, u) \xi_i \xi_j \geq \nu(M) \xi^2, \quad \nu > 0,$$

$$\operatorname{sign} u \left[\frac{\partial a_{ij}(x, u)}{\partial x_i} + a(x, u, 0) - f(x) \right] < 0, \quad x \in Q,$$

$$\operatorname{sign} u [b_i(x, u) \cos(\vec{n}, x_i) - \varphi(x, u)] > 0, \quad x \in S,$$

и пусть функции $a_{ij}(x, u)$, $a(x, u, p)$ и их частные производные по x, u, p удовлетворяют условию Гельдера с показателем α по x и с показателем $\alpha' > \alpha$ по u, p . Функция $b_i(x, u)$ принадлежит пространству $C^{1+\alpha}(\bar{Q})$; S – поверхность класса $C^{2+\alpha}$. Тогда задача (1)–(2) разрешима в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{Q})$.

Пользуясь случаем, автор благодарит проф. Н. Н. Уральцеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила 7.IV.1975

Է. Լ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Ոչ-զծային եզրային խնդիր կվազիզծային էլիպտիկ հավասարումների համար (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկված է ոչ-զծային եզրային խնդիր

$$a_{ij}(x, u) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = f(x), \quad x \in Q,$$

$$b_i(x, u) u_{x_i} = \varphi(x, u), \quad x \in S$$

հավասարման էլիպտիկության պայմանի դեպքում և երբ տեղի ունի հետևյալ պայմանը

$$b_i(x, u) \cos(\vec{n}, x_i) > \delta > 0:$$

ենթադրելով իրագործված $\max |u| < M$ պայմանը, ստացված են

$$\langle u \rangle_Q^{(\alpha)}, \quad \max_Q |\nabla u|, \quad \langle u_{x_i} \rangle_Q^{(\alpha)}$$

գնահատականները, որոնք անհրաժեշտ են խնդրի կլասիկ լուծելիության հետադրական համարը

E. L. KAZARIAN. *Non-linear boundary problem for quasi-linear elliptical equations* (summary)

The paper considers the boundary problem

$$a_{ij}(x, u)u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

$$b_i(x, u)u_{x_i} = \varphi(x, u), \quad x \in S$$

for elliptical equation and

$$b_i(x_i, u) \cos(\vec{n}, x_i) \geq \delta > 0.$$

Under the condition $\max |u| < M$ the evaluations of

$$\langle u \rangle_{\frac{1}{2}}^{(a)}, \quad \max_{\bar{\Omega}} |\nabla u|, \quad \langle u_{x_i} \rangle_{\frac{1}{2}}^{(a)},$$

which are necessary for the analysis of classical solvability of the problem are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Изд. «Наука», 1973.
2. R. Florenza, Sui problemi di derivata oblique per le equazioni ellittiche, Ricerche di Mat. Napoli, 8. 1959. 83—110.

С. Г. СИМОНЯН, М. В. ФЕДОРЮК

АСИМПТОТИКА МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ И ЗОН НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ХИЛЛА

§ 1. Введение

1. Рассмотрим систему из n уравнений

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu^2 Q(t) x = 0, \quad t \in R, \quad (1.1)$$

где $x(t)$ есть n -вектор (столбец), $Q(t)$ есть $n \times n$ матрица, μ — вещественный параметр. Матрица $Q(t)$ имеет период $T > 0$. Число $\rho = \rho(\mu)$ называется мультипликатором [3] системы (1.1), если существует нетривиальное решение этой системы $x(t)$ такое, что

$$x(t + T) = \rho \cdot x(t) \quad (1.2)$$

при всех $t \in R = (-\infty, +\infty)$. Нас интересует асимптотика мультипликаторов $\rho(\mu)$ при $\mu \rightarrow +\infty$.

Эта задача рассматривается при следующих предположениях относительно матрицы $Q(t)$:

Условие I. При $t \in R$ собственные значения матрицы $Q(t)$ вещественны, положительны и различны.

Условие II. Матрица $Q(t)$ голоморфна в некоторой полосе

$$G_a = \{t : |\operatorname{Im} t| < a\}.$$

Заметим, что мы не предполагаем вещественной симметричности или эрмитовости матрицы $Q(t)$ при $t \in R$.

Основным результатом настоящей работы является теорема 3.7 (формула 3.27)), в которой получены асимптотические формулы для мультипликаторов, и теорема 4.1 — о зонах неустойчивости.

Отметим, что в случае систем для мультипликаторов ранее был получен только главный член асимптотики.

Асимптотику $\rho_j(\mu)$ мы вычисляем с помощью асимптотики фундаментальной матрицы $X(t, \mu)$ системы (1.1) (при $\mu \rightarrow +\infty$, $t \in [0, T]$). Асимптотику $X(t, \mu)$ можно вывести из классических результатов Г. Биркгофа — Я. Д. Тамаркина [1], [2], однако из такой асимптотики не удастся вычислить асимптотику мультипликаторов. Основной технический прием, использованный в настоящей работе — построение некоторой специальной фундаментальной матрицы (ф. м.), это сделано в § 2. При этом существенно используется голоморфность матрицы $Q(t)$ в окрестности вещественной оси.

Асимптотические формулы для модулей мультипликаторов $\rho_j(\mu)$ системы вида (1.1) в точках краев зон неустойчивости при гладкой

симметрической вещественной матрице $Q(t)$, которые удовлетворяют еще условию I, вычислены в работе [4]. Асимптотика ширины зон неустойчивости скалярного уравнения (1.1) при аналитической функции $Q(t)$ получена в работе [9]. Некоторые результаты этой работы содержатся в [10], [11] и доложены на семинаре в МФТИ.

§ 2. Асимптотика специальной фундаментальной системы решений

1. Введем обозначения: $q_j(t)$, $1 \leq j \leq n$ — собственные значения матрицы $Q(t)$, занумерованные в порядке убывания:

$$q_1(t) > q_2(t) > \dots > q_n(t) > 0, \quad t \in R, \quad (2.1)$$

$$\lambda_j(t) = -i \sqrt{q_{n-j+1}(t)}, \quad \lambda_{n+j}(t) = i \sqrt{q_j(t)}, \quad (2.2)$$

где $\sqrt{q_j(t)} > 0$ при $t \in R$,

$$\Lambda_0(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_{2n}(t)). \quad (2.3)$$

Сведем систему (1.1) к системе первого порядка, полагая

$$x_j(t) = y_j(t), \quad \frac{dx_j(t)}{dt} = \mu y_{n+j}(t), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.4)$$

Тогда система (1.1) эквивалентна системе

$$\frac{dy}{dt} = \mu A(t) y, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -Q(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $y(t)$ есть $2n$ -вектор (столбец) с компонентами $y_j(t)$ и 0 , E — соответственно нулевая и единичная $n \times n$ матрицы. Собственными значениями матрицы $A(t)$ является $\lambda_j(t)$.

Если $b > 0$ достаточно мало, то в полосе $G_b = \{t: |\text{Im} t| \leq b\}$ функции $\lambda_j(t)$ голоморфны и различны и поэтому существует [5] голоморфная и невырожденная при $t \in G_b$ матрица $T_0(t)$ такая, что

$$A(t) T_0(t) = T_0(t) \Lambda_0(t). \quad (2.6)$$

Пусть $\Lambda_1(t)$ — диагональная матрица с элементами

$$(\Lambda_1(t))_{jj} = \lambda_j^{(1)}(t) = - \left(T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} \right)_{jj}, \quad (2.7)$$

и $T_1(t)$ — матрица с элементами

$$(T_1(t))_{jj} = 0, \quad (T_1(t))_{ij} = (\lambda_i(t) - \lambda_j(t))^{-1} \left(T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} \right)_{ij}, \quad (2.8)$$

Тогда

$$[\Lambda_0(t), T_1(t)] - T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} = \Lambda_1(t),$$

$$[\Lambda_0(t), T_1(t)] = \Lambda_0(t) T_1(t) - T_1(t) \Lambda_0(t). \quad (2.9)$$

Лемма 2.1. Пусть $b > 0$ достаточно мало. Тогда существует $\mu_0 = \mu_0(b) > 0$ такое, что подстановка

$$y(t) = T_0(t)(E + \mu^{-1} T_1(t)) z(t) \quad (2.10)$$

приводит систему (2.5) к виду

$$\frac{dz}{dt} = (\mu \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t) + \mu^{-1} P(t, \mu)) z(t), \quad (2.11)$$

$$P(t, \mu) = -(E + \mu^{-1} T_1(t))^{-1} \times \\ \times (T_1(t) \Lambda_1(t) + T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} T_1(t) + \frac{dT_1(t)}{dt}). \quad (2.12)$$

Матрица $P(t, \mu)$ при $\mu > \mu_0(b)$ голоморфна в G_b и

$$\max_{t \in G_b} \|P(t, \mu)\| \leq c, \quad \mu > \mu_0(b), \quad (2.13)$$

где c не зависит от μ , $G_b = \{t: 0 \leq \operatorname{Re} t \leq T; |\operatorname{Im} t| \leq b\}$.

Доказательство см. [6], лемма 2.3. Заметим, что матрицы $T_j(t)$, $\Lambda_j(t)$, $j = 0, 1$ голоморфны в области G_b , и что имеет место асимптотическое разложение

$$P(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \mu^{-k}, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad t \in G_b, \\ P_k(t) = (-1)^{k-1} (T_1^{k+1}(t) \Lambda_1(t) + \\ + T_1^k(t) T_0^{-1}(t) \frac{dT_0(t)}{dt} T_1(t) + T_1^k(t) \frac{dT_1(t)}{dt}). \quad (2.14)$$

Введем обозначения

$$\xi_j(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_j(t) dt, \quad \xi_j^{(1)}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_j^{(1)}(t) dt,$$

$$\xi_{ij}(\alpha, \beta) = \xi_i(\alpha) - \xi_j(\beta),$$

$$\xi_{ij}^{(1)}(\alpha, \beta) = \xi_i^{(1)}(\alpha) - \xi_j^{(1)}(\beta),$$

$$U^0(\alpha, \beta) = \exp \left(\int_{\alpha}^{\beta} (\mu \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t)) dt \right),$$

$$u_j^0(\alpha, \beta) = \exp (\mu \xi_j(\alpha, \beta) + \xi_j^{(1)}(\alpha, \beta)). \quad (2.15)$$

Здесь интеграл берется по гладкой кривой, содержащей точки α, β и лежащей в области G_b , где $b > 0$ выбрано так, чтобы была применима лемма 2.1. Точный выбор контура мы будем каждый раз указывать. Сведем систему (2.11) к системе интегральных уравнений. Фиксируем j и положим

$$z_j(t, \mu) = u_j^0(0, t) w(t, \mu). \quad (2.16)$$

Тогда

$$\frac{dw}{dt} = (\mu (\Lambda_0(t) - \lambda_j(t) E) + (\Lambda_1(t) - \lambda_j^{(1)}(t) E) + \mu^{-1} P(t, \mu)) w(t). \quad (2.17)$$

Пусть e_j есть $2n$ -вектор с компонентами δ_{kj} . Рассмотрим интегральное уравнение

$$w(t) = e_j + \mu^{-1}(K_j w)(t), \quad (2.18)$$

где K_j — интегральный оператор:

$$K_j w = \int_{\gamma_j(t)} K_j(t, t', \mu) w(t') dt',$$

$$K_j(t, t', \mu) = U^0(t', t) u_j^0(t, t') P(t', \mu). \quad (2.19)$$

В частности

$$(K_j w)_l = \int_{\gamma_{lj}} \exp(\mu \xi_{lj}(t', t)) (P(t', \mu) w(t'))_l dt'. \quad (2.20)$$

Здесь $\gamma_{lj}(t)$ — кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости t , соединяющая точки t_{lj} , $t \in G_b$, а $\gamma_j(t)$ есть вектор — путь с $2n$ компонентами $\gamma_{lj}(t)$. Как показано в [6], § 3, решение уравнения (2.18) является решением уравнения (2.17).

2. Выбор путей $\gamma_{lj}(t)$. Пусть $\Delta = \Delta(a, b, \delta)$ — замкнутый треугольник с вершинами в точках $a + ib$, $a \pm \delta$, где $a \in R$, $b, \delta > 0$. При $t \in \Delta$ положим

$$\gamma_{lj}(t) = [a - \delta, \operatorname{Re} t] + [\operatorname{Re} t, t], \quad (2.21)$$

$$\gamma_{lj}(t) = [a + ib, t], \quad (2.21')$$

если, соответственно

$$\operatorname{Im}(\lambda_l(t) - \lambda_j(t)) > 0, \quad t \in R, \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_l(t) - \lambda_j(t)) \leq 0, \quad t \in R. \quad (2.22')$$

Лемма 2.2. Существуют $b > 0$, $\delta > 0$ такие, что при $t \in \Delta(a, b, \delta)$ и при любых $a \in R$, j, l выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \xi_{lj}(t', t) \leq 0, \quad t' \in \gamma_{lj}(t). \quad (2.23)$$

Доказательство. При $l = j$ утверждение леммы очевидно. Фиксируем j, l , и положим

$$f(t) = -i(\lambda_l(t) - \lambda_j(t)), \quad g(t', t) = \int_{t'}^t i f(t'') dt'', \quad t' \in \gamma_{lj}(t).$$

Пусть выполнено условие (2.22), тогда при $t' \in [a - \delta, \operatorname{Re} t]$ имеем $\operatorname{Re} g(t', t) \equiv 0$, так как $\operatorname{Im} f(t'') = 0$ при $t'' \in R$. Пусть $t' \in [\operatorname{Re} t, t]$, тогда

$$t' = \operatorname{Re} t + ip', \quad t'' = \operatorname{Re} t + ip'',$$

$$0 \leq p' \leq p'' \leq \operatorname{Im} t;$$

$$f(t'') = f(\operatorname{Re} t) + O(p''),$$

так что

$$g(t', t) = - \int_{p'}^{\operatorname{Im} t} [f(\operatorname{Re} t) + O(p'')] dp'',$$

где $E(\rho'')$ — равномерно по $\operatorname{Re} t$, в силу периодичности функции $f(t)$. Поскольку $\rho'' = O(b)$, $\inf_{t \in R} (f(t)) > 0$, то при $b > 0$ достаточно малом имеем

$$\operatorname{Re}[f(\operatorname{Re} t) + O(\rho'')] \gg \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f(\operatorname{Re} t)),$$

$$\operatorname{Re} g(t', t) < -\frac{1}{2}(\operatorname{Im} t - \rho') \operatorname{Re} f(\operatorname{Re} t) \leq 0.$$

Тем самым (2.23) доказано

Пусть выполнено условие (2.22'). Тогда

$$t = a + ib - i\rho e^{i\varphi}, \quad |\operatorname{tg} \varphi| < \frac{\delta}{b}; \quad t' = a + ib - i\rho' e^{i\varphi},$$

$$t'' = a + ib - i\rho'' e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \rho' \leq \rho'' \leq \rho.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g(t', t) &= \int_{\rho'}^{\rho} [\operatorname{Re} f(a + ib - i\rho'' e^{i\varphi}) \cos \varphi - \\ &\quad - \operatorname{Im} f(a + ib - i\rho'' e^{i\varphi}) \sin \varphi] d\rho''. \end{aligned}$$

Так как $\varphi = O\left(\frac{\delta}{b}\right)$, $\rho'' = O(b)$, $\operatorname{Im} f(a) = 0$, то подынтегральная функция имеет вид

$$f(a) + O\left(b + \frac{\delta}{b}\right).$$

По условию, $f(a) \leq -f_0 < 0$ при всех $a \in R$, так что, если величины $b, \frac{\delta}{b}$ достаточно малы, то

$$\operatorname{Re} g(t', t) \leq \frac{1}{2} \int_{\rho'}^{\rho} f(a) d\rho'' \leq 0.$$

Тем самым (2.23) доказано.

3. Асимптотика специальной ф. с. р. системы (2.11). Всюду в дальнейшем $b, \delta > 0$ фиксированы и выбраны так, чтобы выполнялись утверждения леммы 2.2. Положим для краткости $\Delta(a, b, \delta) = \Delta(a)$.

Лемма 2.3. Существует $\mu_0 > 0$ такое, что при любом $a \in R$ система (2.5) имеет фундаментальную матрицу вида

$$Y(t, \mu) = T_0(t) (E + \mu^{-1} T_1(t)) Z(t, \mu), \quad ((2.24)$$

где $Z(t, \mu)$ есть ф. м. системы (2.11) вида

$$Z(t, \mu) = (E + \mu^{-1} V(t, \mu)) \exp \left(\int_0^t (\mu \Lambda_0(t') + \Lambda_1(t')) dt' \right), \quad (2.25)$$

где $t \in \Delta(a)$, $\mu \geq \mu_0$ и

$$\|V(t, \mu, a)\| \leq c. \quad (2.26)$$

Матрица $V(t, \mu, a)$ разлагается в асимптотический ряд

$$V(t, \mu, a) \sim \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t, a) \mu^{-k} \quad (\mu \rightarrow +\infty). \quad (2.27)$$

равномерно по $t \in \Delta(a)$. Здесь E — единичная матрица порядка $2n$.

Доказательство. В силу леммы (2.2) ядро интегрального оператора K_j (см. (2.18) — (2.20)) имеет порядок $O(1)$ при $t \in \Delta(a)$. Отсюда с помощью метода последовательных приближений получаем, что существует ф. с. р. системы (2.11) $Z(t, \mu, a)$, удовлетворяющая условиям (2.25) и (2.26) (см., например, [4]). После этого стандартным методом ([7], гл. VII) получаем разложение (2.27). В силу подстановки (2.10) матрица (2.24) есть ф. с. р. системы (2.5).

Замечание. Разложение (2.25), (2.27) можно любое число раз дифференцировать по t и по μ с сохранением равномерности разложения по $t \in \Delta(a)$. Матрицы $V_k(t, a)$ голоморфны по t при $t \in \Delta(a)$.

Матрицы $Z(t, \mu, a)$, $Z(t, \mu, a')$ связаны соотношением

$$\hat{Z}(t, \mu, a) = Z(t, \mu, a') \Omega(\mu, a, a'). \quad (2.28)$$

Матрицу Ω мы назовем матрицей перехода (от ф. м. $Z(t, \mu, a)$ к ф. м. $Z(t, \mu, a')$).

Лемма 2.4. Пусть $a, a' \in R$ таковы, что $\Delta(a) \cap \Delta(a')$ содержит треугольник. Тогда

$$\Omega(\mu, a, a') = \Lambda(\mu) + M^0(\mu) + M_0(\mu), \quad (2.29)$$

где $\Lambda(\mu)$ — диагональная матрица, $M^0(\mu)$ и $M_0(\mu)$ — верхняя треугольная и нижняя треугольная матрицы, соответственно, с нулевыми диагональными элементами. При $\mu \rightarrow +\infty$ имеют место оценки

$$M_0(\mu) = O(\mu^{-1}); \quad M^0(\mu) = O(e^{-\mu^d}), \quad d > 0 \quad (2.30)$$

и разложение

$$\Lambda(\mu) \sim E + \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^{(k)} \mu^{-k}, \quad (2.31)$$

где $\Lambda^{(k)}$ — постоянные диагональные матрицы.

Заметим, что матрицы Λ , M^0 , M_0 и число d зависят от a, a' .

Доказательство. Имеем из (2.25), (2.28) при $t \in \Delta = \Delta(a) \cap \Delta(a')$

$$\Omega(\mu, a, a') = Z^{-1}(t, \mu, a') \cdot Z(t, \mu, a) = E + \mu^{-1} U^{-1}(t, \mu) W(t, \mu) U(t, \mu), \quad (2.32)$$

где обозначено

$$U(t, \mu) = \exp\left(\mu \int_0^t \Lambda_0(t') dt' + \int_0^t \Lambda_1(t') dt'\right), \quad (2.33)$$

$$E + \mu^{-1} W(t, \mu) = (E + \mu^{-1} V(t, \mu, a'))^{-1} \times (E + \mu^{-1} V(t, \mu, a)). \quad (2.33)$$

Следовательно, элементы $\omega_{jk}(\mu)$ матрицы $\mathcal{Q}(\mu, \alpha, \alpha')$ имеют вид

$$\omega_{jk}(\mu) = \delta_{jk} + \mu^{-1} W_{jk}(t, \mu) \times \exp(\mu \xi_{kj}(0, t) + \xi_{kj}^{(1)}(0, t)). \quad (2.34)$$

Но $\omega_{jk}(\mu)$ не зависят от t , поэтому в (2.34) $t \in \Delta$ можно брать любым. Взяв $t \in R$ и заметив, что $|\exp(\mu \xi_{kj}(0, t))| = 1$ при $t \in R$, мы получим, что $\omega_{jk}(\mu) = \delta_{jk} + O(\mu^{-1})$ при любых j, k . При $j = k$ имеем

$$\omega_{jj}(\mu) = 1 + \mu^{-1} W_{jj}(t, \mu),$$

и из леммы (2.2) и (2.33) следует (2.31).

Пусть $t_0 \in \Delta$, $\text{Im } t_0 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Re } \xi_{kj}(0, t_0) &= \text{Re } \xi_{kj}(0, \text{Re } t_0) + \text{Re } \xi_{kj}(\text{Re } t_0, t_0) = \\ &= \int_0^{\text{Im } t_0} \text{Im} [\lambda_j(\text{Re } t_0 + it') - \lambda_k(\text{Re } t_0 + it')] dt'. \end{aligned}$$

В силу (2.1), (2.2) имеем $\text{Im}(\lambda_k(t) - \lambda_j(t)) < 0$ при $1 \leq j \leq k \leq \leq 2n$, $t \in R$, так что

$$\text{Re } \xi_{kj}(0, t_0) < 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq 2n. \quad (2.35)$$

Напомним, что $\text{Re } \xi_{kj}(\text{Re } t_0) \leq 0$ при $t_0 \in \Delta(\alpha)$, $t_0 \in \Delta(\alpha')$ при j, k , указанных в (2.35). Полагая $t = t_0$ в (2.34), получаем из (2.35), что

$$\omega_{jk}(\mu) = O(e^{-\mu d}) \quad (d > 0) \quad 1 \leq j < k \leq 2n.$$

Лемма доказана.

Будем называть матрицу $\mathcal{Q}(\mu)$ квазитреугольной, если ее элементы, лежащие ниже главной диагонали, имеют порядок $O(\exp(-d\mu))$, $d > 0$ при $\mu \rightarrow +\infty$, а остальные элементы имеют порядок $O(1)$.

Следствие 2.4. Любая ф. м. $Z^{(m)}(t, \alpha_m, \mu)$ системы (2.11), построенная в $\Delta(\alpha_m)$, связана с ф. м. $Z^{(1)}(t, \alpha_1, \mu)$ той же системы, построенной в $\Delta(\alpha_1)$, по формуле

$$Z^{(m)}(t, \alpha_m, \mu) = Z^{(1)}(t, \alpha_1, \mu) \mathcal{Q}(\mu), \quad (2.36)$$

где $\mathcal{Q}(\mu)$ — квазитреугольная матрица.

Доказательство. Построим конечную последовательность открытых треугольников Δ_j , $1 \leq j \leq m$; $\Delta(a_j, b, \delta) = \Delta_j$, основания которых покрывают отрезок $[a_1, a_m]$, причем $a_j < a_{j+1}$. Пусть $Z^{(j)}(t, \mu)$ — ф. м., построенная в лемме 2.3. Тогда, в силу леммы 2.4

$$Z^{(j+1)}(t, \mu) = Z^{(j)}(t, \mu) \mathcal{Q}_j(\mu) \quad (1 \leq j \leq m), \quad (2.37)$$

где $\mathcal{Q}_j(\mu)$ — квазитреугольная матрица. Из (2.37) имеем

$$Z^{(m)}(t, \mu) = Z^{(1)}(t, \mu) \mathcal{Q}_1(\mu) \cdots \mathcal{Q}_m(\mu). \quad (2.38)$$

Заметим, что произведение квадратных квазитреугольных матриц тоже квазитреугольная матрица. Следовательно, из (2.38) приходим к (2.36).

§ 3. Асимптотика мультипликаторов системы (1.1)

1. Пусть $Z(t, \mu)$ — некоторая ф. м. системы (2.11), построенная в лемме 2.3. Согласно теореме Ляпунова—Флоке [7] имеем

$$Z(t+T, \mu) = Z(t, \mu) C(\mu). \quad (3.1)$$

Мультипликаторы (2.11) являются корнями алгебраического уравнения

$$\det(C(\mu) - \rho E) = 0. \quad (3.2)$$

В этом пункте мы определим асимптотики матричных элементов $c_{kj}(\mu)$ матрицы $C(\mu)$ при $\mu \rightarrow +\infty$.

Лемма 3.1. Пусть $Z(t, \mu)$, ф. м. системы (2.11), построенная в лемме 2.3, которая имеет вид (2.25). Пусть матрица $C(\mu)$ есть неособая матрица, связанная с матрицей $Z(t, \mu)$ соотношением (3.1).

Тогда при $\mu \rightarrow +\infty$ матрица $C(\mu)$ квазитреугольная и для элементов матрицы $C(\mu)$ справедливы асимптотические формулы

$$c_{jj}(\mu) = \exp(i\mu\varphi_j + \delta_j) \left[1 + \sum_{r=1}^m d_{rj} \mu^{-r} + O(\mu^{-m-1}) \right], \quad (3.3)$$

$$c_{ki}(\mu) = O(\mu^{-1}) \quad (k < j), \quad (3.4)$$

$$c_{kj}(\mu) = O(\exp(-\mu d)) \quad (k > j, d > 0), \quad (3.5)$$

где обозначено

$$\varphi_r = \int_0^T \sqrt{q_{n-r+1}}(t) dt; \quad \varphi_{n+r} = \int_0^T \sqrt{q_r}(t) dt, \quad (3.6)$$

$$\delta_j = \int_0^T \lambda_j^{(1)}(t) dt \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.7)$$

Величины d_{rj} не зависят от μ и определяются по формуле

$$d_{rj} = (W_r(0))_{jj} \quad (1 \leq j \leq 2n, \quad 1 \leq r \leq m). \quad (3.8)$$

Матрицы $W_r(t)$ определяются по формуле (3.10).

Доказательство. Из (3.1) и (2.25) имеем при любом $t \in G_b$, $\mu > \mu_0(b)$

$$C(\mu) = U^{-1}(t, \mu) [E + W(t, \mu)] U(t+T, \mu), \quad (3.9)$$

где $U(t, \mu)$ определяется по формуле (2.33).

$$W(t, \mu) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} W_k(t) \quad (\mu \rightarrow +\infty). \quad (3.10)$$

Далее, $C(\mu)$ не зависит от t , выбирая t в комплексной плоскости точно так же, как и в доказательстве леммы 2.4, получаем (3.4), (3.5).

Выписав диагональные элементы (3.9) при $t=0$ получим (3.3), где d_{rj} определяются по формуле (3.8). Лемма доказана.

Лемма 3.2. Если (2.11) получена с помощью подстановки (2.10) из системы (2.5), то эти системы имеют одинаковые мультипликаторы.

Доказательство этой леммы следует из подстановки (2.10) и из того, что при подобных преобразованиях матриц собственные значения не меняются.

Известно также, что если система (2.5) получена из системы (1.1) с помощью подстановки (2.4), то эти системы имеют одинаковые мультипликаторы [3].

Таким образом мультипликаторы системы (1.1) являются корнями уравнения (3.2), где матрица $C(\mu)$ связана с фундаментальной матрицей $Z(t, \mu)$ системы (2.11) соотношением (3.1), т. е.

$$C(\mu) = Z^{-1}(0, \mu) Z(T, \mu). \quad (3.11)$$

2. Асимптотика мультипликаторов системы (2.11).

Лемма 3.3. Уравнение (3.2) при $\mu \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$\Delta(\rho, \mu) = \Delta_0(\rho, \mu) + \varepsilon(\rho, \mu) = 0. \quad (3.12)$$

Здесь

$$\Delta_0(\rho, \mu) = \prod_{j=1}^{2n} (\rho - c_{jj}(\mu)), \quad (3.13)$$

$c_{jj}(\mu)$, $1 \leq j \leq 2n$ определяются из (3.3) — (3.5).

$$|\varepsilon(\rho, \mu)| \leq c_0 \exp(-\mu d), \quad \mu > \mu_0 > 0; \quad d > 0, \quad (3.14)$$

$0 \leq c_0 < +\infty$ — не зависящее от μ число.

Доказательство. Уравнение (3.2) относительно ρ есть алгебраическое уравнение $2n$ -ой степени, коэффициенты которого при $\mu > \mu_0$ суть ограниченные по модулю функции и коэффициент при старшем члене ρ^{2n} есть 1. Следовательно, при любом $\mu > \mu_0$ все корни уравнения (3.2) расположены на комплексной ρ плоскости внутри некоторого круга $\gamma_0; |\rho| < \rho_0 < \infty$, и

$$\rho(\mu) = O(1), \quad \mu \rightarrow +\infty. \quad (3.15)$$

Раскрыв определитель в левой части уравнения (3.2), получаем ввиду (3.3) — (3.5), что кроме члена, состоящего из произведений элементов главной диагонали (который мы обозначим через Δ_0), в остальных членах обязательно содержится экспоненциально малый множитель (сумма которых обозначена ε). В силу (3.15) справедлива оценка (3.12). Лемма доказана.

Далее, оценим модуль многочлена $\Delta_0(\rho, \mu)$ снизу. Воспользовавшись теоремой А. Картана [7] об оценке модуля многочлена снизу, получаем при $\mu > \mu_0$ оценку

$$|\Delta_0(\rho, \mu)| \geq 2c_0 \exp(-\mu d), \quad d > 0, \quad c_0 > 0. \quad (3.16)$$

Эта оценка будет справедлива тогда, когда сумма радиусов картановых кружочков выбрана так:

$$\sum_{j=1}^{2n} r_j = 2H = (2c_0)^{1/2n} \cdot \exp\left(-\frac{\mu d}{2n} + 1\right). \quad (3.17)$$

При тех же ρ и μ , при которых выполняется неравенство (3.16), имеем

$$|\Delta(\rho, \mu)| > c_0 \exp(-\mu d). \quad (3.18)$$

Как следует из (3.17), радиус r_j каждого картанова кружка удовлетворяет неравенству

$$r_j < 2H \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.19)$$

Неравенства (3.14), (3.16) и (3.18) показывают, что многочлены $\Delta(\rho, \mu)$ и $\Delta_0(\rho, \mu)$ имеют корни только внутри картановых кружочков γ_j , $j=1, 2, \dots, 2n$.

При данном $\mu > \mu_0$ картановы кружки могут распадаться на две группы:

а) изолированные кружки — любой кружочек из этой группы не имеет пересечения с остальными, и

б) остальные кружки — неизолрированные.

Ниже выясним, при каких μ ($\mu > \mu_0$) группа б) отсутствует.

Лемма 3.4. Если $\mu > \mu_0$ таково, что при всех $1 \leq j, k \leq 2n$, $k \neq j$ выполнено условие

$$|c_{jj}(\mu) - c_{kk}(\mu)| > 4H. \quad (3.20)$$

где H определяется по формуле (3.17), то все картановы кружки изолированы, т. е. при условии (3.20) группа б) отсутствует.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из теоремы А. Картана и из (3.20).

Следствие 3.5. Картановы кружки второй группы могут возникнуть только при тех μ ($\mu > \mu_0$), при которых выполняется неравенство

$$|c_{jj}(\mu) - c_{kk}(\mu)| \leq 4H, \quad (j \neq k; \quad 1 \leq j, k \leq 2n). \quad (3.21)$$

Обозначим через $\mu_{jkr} = \mu_{*r}^{(r)}$, $r=1, 2, \dots$ корни уравнения

$$c_{jj}(\mu) - c_{kk}(\mu) = 0 \quad (k \neq j). \quad (3.22)$$

Совокупность этих корней образует счетное множество точек на интервале $(\mu_0, +\infty)$. Занумеруем последовательность этих точек в порядке возрастания $\{\mu_{*r}^{(r)}\}_1^\infty$. Имеет место следующая

Лемма 3.6. Если $\mu_* = \mu_{*r}^{(r)}$ ($r=1, 2, \dots$), $\mu_* > \mu_0$ — корень уравнения (3.22), то для любого μ , не принадлежащего интервалам

$$|\mu_* - \mu| \leq d_0 \exp\left(-\frac{\mu_* d}{2n}\right) \cdot |1 + O(\mu_*^{-1})|, \quad (3.23)$$

где

$$d_0 = \frac{(2c_0)^{1/2n} e}{||\varphi_j| - \varphi_k||} > 0 \quad (j \neq k), \quad (3.24)$$

все картановы кружки изолированы.

Доказательство. Рассмотрим неравенство (3.21) в окрестности точки μ_* , указанной в лемме. Полагая в (3.21) $\mu = \mu_* + \Delta\mu$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \Delta \mu \right| \exp \left(\Delta \mu \frac{d}{2n} \right) \left| \exp \left(i \left(\mu_* + \frac{\Delta \mu}{2} \right) \varphi_j + \delta_j \right) \cdot \left(i \varphi_j + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i \varphi_j \mu_* - \exp \left(-\frac{i \Delta \mu}{2} \varphi_j \right)}{\mu_* (\mu_* + \Delta \mu)} + \dots \right) - \exp \left(i \left(\mu_* + \frac{\Delta \mu}{2} \varphi_k + \delta_k \right) \cdot \left(i \varphi_k + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{i \varphi_k \mu_* - \exp \left(\frac{i \Delta \mu}{2} \varphi_k \right)}{\mu_* (\mu_* + \Delta \mu)} + \dots \right) \right) \right| \leq e (c_0)^{1/2n} \exp \left(-\frac{\mu_* d}{2n} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \Delta \mu \right| \exp \left(\Delta \mu \frac{d}{2n} \right) (|\varphi_j| - |\varphi_k|) \leq e c_0^{1/2n} \exp \left(-\mu_* \frac{d}{2n} \right) |1 + O(\mu_*^{-1})|,$$

отсюда следует оценка

$$|\Delta \mu| |1 + O(\Delta \mu)| \leq d_0 \exp \left(-\mu_* \frac{d}{2n} \right) |1 + O(\mu_*^{-1})|,$$

где d_0 определяется по формуле (3.24). Лемма доказана.

Из леммы 3.6 получаем, что при достаточно большом $\mu_0 > 0$ и $\mu > \mu_0$ бесконечный интервал $(\mu_0, +\infty)$ разбивается на интервалы двух типов: 1) замкнутые интервалы типа (3.23) и 2) открытые интервалы. Совокупность всех открытых интервалов типа 2) обозначим L .

Пусть интервал $(a, b) \subset L$. Если $\mu \in (a, b)$, то при этом μ все картановы кружки γ_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$) изолированы, и в силу неравенства (3.16) и (3.18) внутри каждого γ_j многочлены $\Delta(\rho, \mu)$ и $\Delta_0(\rho, \mu)$ имеют по одному нулю и выполняется неравенство

$$|\rho_j(\mu) - c_{jj}(\mu)| \leq b_0 \exp \left(-\mu \frac{d}{2n} \right), \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.25)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.7. Пусть условия I и II из введения выполнены. Тогда при достаточно большом μ_0 и при всех $\mu > \mu_0$, $\mu \in L$ справедливо неравенство

$$|\rho_j(\mu) - c_{jj}(\mu)| \leq b_0 \exp \left(-\frac{\mu d}{2n} \right), \quad (1 \leq j \leq 2n). \quad (3.25)$$

Здесь $b_0, \frac{d}{2n}$ — зависящие от μ положительные константы;

$\rho_j(\mu)$, $j = 1, 2, \dots, 2n$ — мультипликаторы системы (1.1).

Для элементов $c_{jj}(\mu)$, $j = 1, 2, \dots, 2n$ справедливо асимптотическое разложение (3.3).

Следствие 3.8. Из теоремы 3.7 следует, что при $\mu \in L$ и при $\mu \rightarrow +\infty$ для различных мультипликаторов системы (1.1) справедлива асимптотическая формула

$$\rho_j(\mu) = c_{jj}(\mu) + O(\exp(-\mu d)), \quad (d > 0, \mu \rightarrow +\infty), \quad (3.26)$$

или, ввиду (3.3), асимптотическое разложение

$$\rho_j(\mu) = \exp(i\mu\varphi_j + \delta_j)(1 + \sum_{r=1}^m d_{rj}\mu^{-r} + O(\mu^{-m-1})), \quad (3.27)$$

где постоянные числа φ_j , δ_j и d_{rj} определяются по формулам (3.6) — (3.8).

§ 4. Асимптотика зоны неустойчивости системы (1.1)

Известно [9], что для скалярного уравнения Хилла (1.1), при выполнении условий I, II, зоны неустойчивости экспоненциально малы при $\mu \rightarrow +\infty$. Ниже мы установим, что при некоторых условиях (см. теорему 4.1) аналогичная ситуация имеет место и для системы Хилла (1.1).

Теорема 4.1. Пусть условия I, II из введения выполнены. Кроме того, пусть

III: матрица $Q(t)$, при $t \in \mathbb{R}$ — вещественная симметрическая матрица (или эрмитова).

Тогда зоны неустойчивости системы (1.1) экспоненциально малы при $\mu \rightarrow +\infty$.

Доказательство. При наличии условий I и II система (1.2) имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ серий [4] зон неустойчивости. Ширина этих зон имеет порядок $O(\mu^{-h})$, $\mu \rightarrow +\infty$, $h > 0$, если $Q(t) \in C^h[0, T]$. Известно также, что если некоторое значение параметра μ определяет границу зоны неустойчивости, то при этом значении параметра μ среди мультипликаторов системы (1.1) возникает кратность. Если одновременно выполняются условия I, II и III, то согласно лемме 3.6 и теореме 3.7 имеем, что мультипликаторы системы (1.1) различны только при $\mu \in L$, т. е. кратность мультипликаторов может возникнуть только тогда, когда μ принимает значение внутри экспоненциально малых отрезков (3.23). Тем самым теорема доказана.

Ленинградский филиал ЕРПИ им. К. Маркса,
Московский физико-технический институт

Поступила 24.I.1975

Ս. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Մ. Վ. ՖԵԴՈՐՅՈՒԿ. Խիլի սխտեմի մոլտիպլիկատորների և անկայունության զոնաների ասիմպտոտիկան (ամփոփում)

Քննարկվում է հոլոմորֆ դորժակիցներով Խիլի սխտեմը՝ Պոտենցիալ մատրիցայի վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում (տես աշխատանքի II և III պայմանները) ստացվել են սխտեմի մոլտիպլիկատորների վերլուծություններն ասիմպտոտիկ շարքերի և ապացուցված է, որ անկայունության զոնաները էքսպոնենցիալ կարգի փոքր մեծություններ են, երբ սխտեմի պարամետրը ձգտում է անվերջության:

S. G. SIMONIAN, M. V. FEDORYUK. *The asymptotics of multipliers and non-stability zones of Hill's system (summary)*

Hill's system with holomorphic coefficients is analysed. Under some conditions on the potential matrix the expansions of multipliers in asymptotic series are obtained. It is also proved that non-stability zones are exponentially small when the parameter of the system tends to the infinity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркюф Г. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Trans. Amer. Math. Soc., 9, 1908, 219—231.
2. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917, 3—97.
3. Крейн М. Г. Сборник „Памяти А. А. Андропова, о нем“. Основные положения теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Изд. АН СССР, 1955, 413—498.
4. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, Киев, 1954, 9—57, 251—266.
5. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изд. „Наука“, 1970, 273—274.
6. Федорюк М. В. Асимптотическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Матем. сборник, 173 (121), № 4 (3), 1959, 477—516.
7. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. иностранной литературы, М., 1958, 152—187, 189—201.
8. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956. Гл. I.
9. Симонян С. Г. Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма-Лиувилля с периодическим аналитическим потенциалом. Дифференц. уравнения, XVI, № 7, 1970, 1264—1272.
10. Симонян С. Г. Асимптотика мультипликаторов системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ДАН Арм.ССР, LI, № 4, 1970, 203—206.
11. Симонян С. Г. Автореф. канд. дисс., ЕГУ, 1971.

К. А. ЯГДЖАН

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСИММЕТРИЗУЕМЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В в е д е н и е

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для гиперболических систем, которые предполагаются симметричными только на боковой границе.

Известно, что если система симметризуема, то ее характеристическая матрица в каждой точке подобна вещественной диагональной. Мы рассмотрим системы, для которых при $t=0$ последнее условие нарушается. Такие несимметризуемые системы будем называть слабо симметризуемыми. В случае смешанных задач, как и в случае задачи Коши, младшие члены слабо симметризуемых систем, вообще говоря, должны удовлетворять определенным условиям, а начальные данные и правые части уравнений должны иметь повышенную гладкость по определенным группам пространственных переменных [1]. В смешанных задачах для слабо симметризуемых систем к этим естественным требованиям прибавляются (см. ниже) некоторые условия согласования (на пересечении границ) повышенного, по сравнению с симметризуемыми системами, порядка. Существуют случаи, в которых подобные условия согласования необходимы для существования решения смешанной задачи в пространстве L_2 .

В доказательствах мы используем модификацию метода работы [2] и схему получения интегрального неравенства работы [3], соответствующим образом видоизмененную. В случае слабо симметризуемой системы получается интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром и используется условие обращения подобного неравенства ([4], [5], [6]).

Автор благодарит профессора М. С. Аграновича за ряд полезных советов.

§ 1. Постановка задачи

Рассматриваются псевдодифференциальные (п. д.) системы следующего вида:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - A_n(t, x) \frac{\partial}{\partial x_n} - G(t, x, D') A' - C(t, x, D') = \frac{\partial}{\partial t} - M, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi', \xi_n)$, Λ' — п. д. оператор с символом $\sqrt{1 + |\xi'|^2}$, $A_n(t, x)$ есть $m \times m$ матричная В-функция, т. е. C^∞ функция, все производные которой ограничены. $G(t, x, D')$, $C(t, x, D')$ есть матричные (размера $m \times m$) п. д. операторы по $x_1, \dots, x_n$ нулевого порядка, символы $G(t, x, \xi')$, $C(t, x, \xi')$ которых не зависят от ξ_n и являются непрерывно дифференцируемыми функциями по t до порядка r , где r — достаточно большое число.

Граничное условие имеет вид

$$u(t, x', 0) \in B(t, x'), \quad x_n = 0, \quad (1')$$

где $B(t, x')$ — некоторое подпространство C^m фиксированной размерности. Всюду далее мы будем, не ограничивая общности, считать $B(t, x')$ не зависящей от t, x' . Использование стандартных методов, а именно, разбиения единицы и локального изменения координат, множество задач в более сложных областях может быть приведено к случаю полупространства.

Полученные результаты относятся к задаче

$$\begin{cases} L[u] = f(t, x) & \text{в } (0, T) \times R_+^n, \\ u(t, x) \in B, \quad x_n = 0, \\ u(0, x) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $u(t, x)$, $f(t, x)$ есть вектор-столбцы размерности m .

Введем обозначение

$$A(t, x, \xi) = A_n(t, x) \xi_n + G(t, x, \xi') \Lambda'(\xi'). \quad (3)$$

Нам понадобятся следующие условия:

Условие I. Существует симметричная положительно определенная $m \times m$ матричнозначная В-функция $R(t, x, \xi)$, определенная в $(0, T) \times R^n \times \{\xi; |\xi| = 1\}$, со следующими свойствами:

$$(i) \quad R(t, x, \xi) A(t, x, \xi) \text{ эрмитова при } (t, x, \xi) \in (0, T) \times R^n \times \{\xi; |\xi| = 1\},$$

$$(ii) \quad R(t, x, \xi) = I \text{ при } x_n = 0,$$

$$(iii) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x_n \partial \xi_n} = 0 \text{ при } x_n = 0;$$

Условие II.

$$\det A_n(t, x', 0) \neq 0;$$

Условие III. (Неотрицательность граничных условий). Для любого $u \in B$

$$u \cdot \overline{A_n(t, x) u} \geq 0. \quad (4)$$

В случае положительных граничных условий задача (2) была решена М. С. Аграновичем ([7], [8], [9]) для более общих п. д. систем первого порядка. В [7] указано, что положительные граничные условия могут быть заменены на неотрицательные, если система симме-

трична в некоторой окрестности боковой границы. В то же время пример Ямагути [3] показывает, что при нарушении условия симметричности системы на границе задача (2) с неотрицательными граничными условиями, вообще говоря, некорректна. Это связано с нарушением равномерного условия Лопатинского.

М. Икава [3] установил энергетические неравенства для решений задачи (2), если выполнены условия I — III, когда оператор (1) — дифференциальный. В предложении 1 этой же работы приводятся достаточные условия ((1.7), (1.8) [3]) существования $R(t, x, \xi)$, удовлетворяющего условию I. Однако, в приведенном в [3] доказательстве последнего предложения имеется ошибка, хотя результат и верен (см. ниже).

Пусть $e'(t, x, \xi)$, $|e'| = 1$ является собственным вектором матрицы $A(t, x, \xi)$, соответствующим $\lambda_l(t, x, \xi)$. Тогда в [3] строится функция

$$R(t, x, \xi) = [e'(t, x, \xi) \cdot e'(t, x, \xi)]_{l=1, \dots, n} \quad (5)$$

и утверждается, что она удовлетворяет условию I. Для того чтобы убедиться, что это не так, достаточно рассмотреть систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & 1 + x_1^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} = f. \quad (6)$$

Это — строго гиперболическая система и для нее выполнены все условия Предложения 1 [3]. Однако матрица, построенная по формуле (5), не удовлетворяет пункту (i) условия I.

На п. д. системы вида (1), в предположении симметричности $A(t, x, \xi)$ вне некоторого компакта, переносятся результаты работы [3].

Теорема 1. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда для решения $u(t, x) \in E(k, R_+^n)$ (k — положительное целое) задачи (2), (I') с начальным условием $u(0, x) = g(x)$ при $f(t, x) \in E(k, R_+^n)$ имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(t, x)\|_{k, R_+^n}^2 \leq C_k \{ \|g(x)\|_{k, R_+^n}^2 + \|f(0, x)\|_{k-1, R_+^n}^2 + \int_0^t \|f(s, x)\|_{k, R_+^n}^2 ds \} \quad (7)$$

для $t \in [0, T]$ с постоянной C_k , не зависящей от u и t .

Предложение 1. Пусть матрица $A(t, x, \xi)$, $\xi \neq 0$ подобна вещественной диагональной, симметрична при $x_n = 0$, а ее собственные значения имеют постоянную кратность. Тогда, для того чтобы существовал симметризатор $K(t, x, \xi)$, удовлетворяющий условию I и такой, что $\frac{\partial R}{\partial x_n}(t, x', 0, \xi) = 0$, необходимо и достаточно чтобы

$$\operatorname{Im} \frac{\partial A}{\partial x_n}(t, x', 0, \xi) = 0 \quad (8)$$

на $[0, T] \times \{x; x_n=0\} \times \{\xi; |\xi|=1\}$.

Легко заметить, что условие (8) эквивалентно условиям (1.8), (1.7) работы [3].

§ 2. Основные результаты

Кроме обозначений работы [3] мы будем пользоваться нормами

$$\|u\|_{p,q}^2 = \sum_{\substack{j=0, \dots, p \\ |a|-k \leq p-q}} \|D_x^j, D_{x_n}^k u\|_{L^2}^2 \quad (9)$$

$$\|u(t, x)\|_{p,q}^2 = \sum_{j=0}^p \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t, x) \right\|_{p-j,q}^2 \quad (10)$$

и соответствующим пространством $E^{p,q}$.

Для п. д. систем мы предположим, что носители рассматриваемых решений лежат в фиксированном компакте. Имеет место

Теорема 2. Пусть оператор $C(t, x, D')$ такой, что функция $tC(t, x, \xi)$ по t r раз непрерывно дифференцируема, и пусть выполнены условия I, II, III, и

$$\int_0^t \frac{\|f(s, x)\|_{1, R_+^n}^2}{s^{2p}} ds < \infty. \quad (11)$$

Тогда для решения $u(t, x) \in E(2, R_+^n)$ задачи (2) имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(t, x)\|_{1, R_+^n}^2 \leq t^{2p} \operatorname{const} \int_0^t \frac{\|f(s, x)\|_{1, R_+^n}^2}{s^{2p}} ds, \quad (12)$$

если $\|u(t, x)\|_{1, R_+^n}^2 = t^{2p} o(1)$, $t \rightarrow +0$, где положительная постоянная p достаточно велика и зависит от $C(t, x, \xi)$.

Замечание 1. В теореме 2 $C(t, x, \xi')$ может, вообще говоря, иметь особенность при $t=0$.

Доказательство. С помощью $R(t, x, \xi)$ вводится оператор $H_0(t)$ и затем—скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{H(t)} = (H_0(t) u_0, v_0)_{L^2(R^n)} + C((L + (D_x)^2)^{-1} u_0, v_0)_{L^2(R^n)}. \quad (13)$$

Доказывается, что для $u \in L^2(R_+^n)$ с носителем в $\{x; 0 \leq x_n \leq 1\}$ имеет место

$$\|u\|_{L^2(R_+^n)} \leq c_0 \|u\|_{H(t)} \leq c_1 \|u\|_{L^2(R_+^n)}, \quad (14)$$

а для $u \in H^1(R_+^n)$, $\text{supp } u \subset \{x; 0 \leq x \leq 1\}$

$$2 \operatorname{Re} ((M[u])_0, H_0(t)u_c) \leq \left(\frac{c}{t} + \text{const}\right) \|u\|_{L_2(R_+^n)}^2 - \int A_n(x', 0, t) u(x', 0) \cdot \overline{u(x', 0)} dx'. \quad (15)$$

Для u , $\text{supp } u \subset \{x; 0 \leq x_n \leq 1\}$ выводим неравенство

$$y(t) \leq \int_0^t \left(\text{const} + \frac{c}{t}\right) y(t) dt + \text{const} \int_0^t \|f(s, x)\|_{L_2(R_+^n)}^2 ds, \quad (16)$$

где $y(\tau) = \max_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t, x)\|_{L_2(R_+^n)}^2$. Используя разложение единицы и соответствующий результат для задачи Коши, доказательство которого не представляет особого труда, а также условие обратимости интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром [4] при достаточно больших p , выводим отсюда (11). Доказательство для $\|u\|_{L_2(R_+^n)}^2$ аналогично.

Замечание 2. Неравенство (11) переносится на функции $u(t, x) \in E(1, R_+^n)$ аналогично тому, как это сделано в [3].

Пусть оператор $\tilde{L}$ такой, что $Q = \tilde{L} - L$ является п. д. оператором по $x_1, \dots, x_n$, символ $Q(t, x, \xi)$ которого не зависит от ξ_n и имеет порядок не выше первого.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \tilde{L}[v] = f, \\ v \in B, x_n = 0, v(0, x) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

$$(18)$$

Предположим, что для решений задачи (17), (18) имеет место оценка ($g = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots$)

$$\|v(t, x)\|_{L_2(R_+^n, g)}^2 \leq C_{k, g} \left\{ \|f(0, x)\|_{L_2(R_+^n, g)}^2 + \int_0^t \|f(s, x)\|_{L_2(R_+^n, g)}^2 ds \right\}. \quad (19)$$

Рассмотрим последовательность задач

$$\begin{cases} \tilde{L}[v_i] = f_{i-1}, f_0 = f, f_k = Qv_k, k = 1, \dots, n. \\ v_i \in B, v_i(0, x) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где $v_i \in E^{p+1, n+1-i+s}$, $i = 1, \dots, n$.

Теперь уже можем привести

Условие IV. Существует $f_n \in E^{p+1, s}$, построенная вышеуказанным образом, где положительные постоянные n, s зависят только от оператора L .

Введем матричный п. д. оператор $L(t, D')$, элементы которого имеют вид $\lambda_{ij}(t) \Lambda^k$, $0 \leq k \leq s$, $i, j = 1, \dots, m$, где $\lambda_{ij}(t)$ — достаточно гладкие функции, и предположим, что при $t > 0$ существует $L^{-1}(t, D')$, причем $\|L^{-1}(t)\|_{L_s} \leq \text{const } t^{-l}$, где $l = \text{const}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 3. Пусть существует оператор $L(t, D')$ такой, что

1°. $[L(t, D'), A_n(t, x)] = 0$;

2°. если граничное условие записать в виде $Bu = 0$, то

$$[L(t, D'), B] = 0;$$

3°. $\dot{L}(t, D') L^{-1}(t, D')$, $L(t, D') C(t, x, D') L^{-1}(t, D')$ есть п. д. операторы порядка не выше нулевого, символы элементов которых ограничены сверху функцией $\text{const} \cdot t^{-1}$, $t > 0$, $|\xi| = 1$;

4°. $L(t, D') G(t, D') L^{-1}(t, D')$ есть п. д. оператор с достаточно гладким по t символом, причем для $L(t, D') A(t, x, \xi) L^{-1}(t, \xi)$ выполнено условие I;

5°. выполнены условия II, III, а IV имеет место с достаточно большими n и r ;

Тогда для любого решения $u \in E(2, R_+^n)$ задачи (2) имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(t, x)\|_{1, R_+^n}^2 \leq C_1 \left\{ \|\psi(0, x)\|_{0, s+n}^2 + \int_0^t \|f(\tau, x)\|_{1, s+n}^2 d\tau \right\}. \quad (21)$$

с постоянной C_1 , не зависящей от f и u .

Доказательство. С помощью функций v_l задача (2) приводится к новой задаче с быстро убывающей правой частью f_n (см. [4], [5], [6])

$$L[w] = f_n, \quad w = u - \sum_{l=1}^n v_l. \quad (22)$$

Далее, с помощью $L(t, D')$ делается преобразование неизвестной функции и применяется теорема 2. Теорема доказана.

Как и в [3] оценка (21) переносится на функции u из $E(q, R_+^n)$. Заметим, что условие IV содержит в себе определенные условия согласования на границе $t = 0$, $x_1 = 0$ более высокого порядка, чем это требуется для существования решения в симметризуемом случае.

Используя результат работы [10] и метод доказательства теоремы существования из [11], получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, а оператор L — дифференциальный. Тогда в $E(1, R_+^n)$ существует единственное решение задачи (2) и для него справедлива оценка (21).

§ 3. Примеры

1°. Пример 1. Система имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & \mu_1^2 & 0 \\ \mu_1^2 & 0 & \mu_2^2 x_2^2 \\ 0 & x_2^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} u = f, \quad (23)$$

где $\mu_1(0) = 0$, $\mu_1(t) \geq 0$, $\mu_1(t) \neq 0$, $t \neq 0$, и $\mu_2(t)$ имеет степенную скорость при $t \rightarrow 0$. При $t > 0$ система симметризуема, при $t = 0$ не подобна диагональной. Для нее

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (24)$$

Граничное условие имеет вид $Bu = 0$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Для задачи (2) с (25), (23) равномерное условие Лопатинского нарушено.

Согласно теореме 4 для нее существует единственное решение и для него имеет место энергетическое неравенство (18), если $|c_{13}|$, $c_{23} \leq \text{const } \mu_2(t)$, а функция $f(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет, например, условию

$$\sum_{k+m < r} \left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_2^k \partial t^m} f(0, 0, x_1) \right| = 0, \quad (26)$$

где r — некоторая постоянная.

2°. В теоремах 3, 4 начальные данные, очевидно, можно брать произвольными. Вышеизложенная техника обобщается на произвольные скорости вырождения, однако это приводит к очень жестким условиям на f .

3°. Приведем наконец пример строго гиперболической системы, для которой не существует симметризатора со свойствами условия I: Пример 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} = f. \quad (27)$$

Կ. Ն. ՅԱԴՋՅԱՆ. Խառը խնդիրներ շխմետրիզացվող հիպերբոլական համակարգերի որոշ դասերի համար (ամփոփում):

Հոդվածում քննարկվում է առաջին կարգի շխմետրիզացվող հիպերբոլական համակարգերի համար ոչ բացասական եզրային պայմաններով խառը խնդիր: Հավասարման գլխավոր մասի վրա դրվում են որոշ պայմաններ: Դիտարկվում են հաստատուն և փոփոխական պատկերվածք խառնակաերեսիկ արժաններ:

C. H. YAGDJIAN. *Mixed problem for some non symmetrizable hyperbolic systems (summary)*

The paper is concerned with a mixed problem with nonnegative boundary condition for a hyperbolic system of the first order which is assumed symmetric only at the boundary.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Я. Иерий, В. М. Петков. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
2. S. Mizohata, Yu. Ohya. Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II, Japan J. Math., 40: 1, 1971, 63—104.
3. M. Ikawa. Mixed problem for a hyperbolic system of the first order, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 7 (1971. 2), 427—454.
4. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для гиперболического уравнения, выражающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—802.
5. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения с данными на линии вырождения, Дифф. уравнения, 4, № 9, 1968, 1658—1662.
6. А. Б. Нерсисян. Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196: 2, 1971, 289—292.
7. М. С. Аиранович. Положительные граничные задачи для некоторых гиперболических систем, ДАН СССР, 167, № 6, 1966, 1215—1218.
8. М. С. Аиранович. О положительных граничных задачах для некоторых систем первого порядка, Труды ММО, 16, 1967, 3—24.
9. М. С. Аиранович. Граничные задачи для систем псевдодифференциальных операторов I-го порядка, УМН, 24, вып. 1, 1969, 61—125.
10. J. Rauch, F. J. Massau. Differentiability of solutions to hyperbolic initial boundary value problems, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 189, 1974, 303—319.
11. А. Б. Нерсисян, Г. Р. Оганесян. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 149—165.

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОТДЕЛИМОСТЬ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ И ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ

Теорема Хелли [1] является одним из самых замечательных и фундаментальных результатов теории выпуклых множеств. Сейчас известно много различных ее доказательств; наиболее интересные из них отмечены в обстоятельном обзоре [2]. В предлагаемой статье дается новое доказательство теоремы Хелли, основанное на построенной в [3] (и подробно изложенной в [4]) теории отделимости выпуклых конусов. Излагаемое доказательство открывает пути для различных обобщений теоремы Хелли; некоторые из них указаны в заключительной части статьи.

Прежде всего сформулируем определения и факты, касающиеся отделимости выпуклых конусов. Все построения будут проводиться в n -мерном евклидовом векторном пространстве R^n .

Замыкание, внутренность и выпуклая оболочка множества $M \subset R^n$ будут обозначаться, соответственно, через $\bar{M}$, $\text{int } M$, $\text{conv } M$. Если $Q \subset R^n$ — выпуклое множество, то через $\text{aff } Q$ будет обозначаться его *несущая плоскость*. Внутренность выпуклого множества Q относительно $\text{aff } Q$ будет обозначаться через $\text{ri } Q$.

Пусть $K \subset R^n$ — выпуклый конус с вершиной 0. Через $D(K)$ будет обозначаться его *двойственный конус*:

$$D(K) = \{x: ax \leq 0 \text{ при } a \in K\}.$$

Будем говорить, что конусы $K_1, \dots, K_m \subset R^n$ с общей вершиной в точке 0 *отделимы* в R^n , если существует гиперплоскость (проходящая через 0), которая отделяет какой-либо один из этих конусов от пересечения остальных (т. е. для некоторого i конус K_i находится в одном замкнутом полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а пересечение остальных конусов — в другом замкнутом полупространстве). Следующие две теоремы доказаны в работах [3], [4].

Теорема 1. Если выпуклые конусы $K_1, \dots, K_m$ с общей вершиной 0 неотделимы в R^n , то $\text{ri } K_1 \cap \dots \cap \text{ri } K_m \neq \emptyset$.

Теорема 2. Для того чтобы выпуклые конусы $K_1, \dots, K_m$ с общей вершиной 0 были отделимы в R^n , необходимо и достаточно существование таких векторов $a_1 \in D(K_1), \dots, a_m \in D(K_m)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что $a_1 + \dots + a_m = 0$.

Перейдем теперь к теореме Хелли. Она утверждает (в наиболее существенном своем варианте), что если в R^n дана конечная си-

система замкнутых выпуклых множеств, каждое $n+1$ из которых имеют непустое пересечение, то существует точка, принадлежащая всем этим выпуклым множествам. Очевидно, ее можно также сформулировать в следующей эквивалентной форме: если в R^n заданы $m+1$ замкнутых выпуклых множеств $F_1, \dots, F_{m+1}$, каждые m из которых имеют непустое пересечение и при этом $F_1, \dots, F_{m+1} = \emptyset$, то $m \leq n$. В этой форме мы ее и докажем.

Выберем для каждого $k=1, \dots, m+1$ точку p_k , принадлежащую всем множествам $F_1, \dots, F_{m+1}$, кроме F_k ; таким образом, $p_k \in F_i$ при $i \neq k$. Далее, выберем замкнутое ограниченное выпуклое множество Q , содержащее все точки $p_1, \dots, p_{m+1}$, и положим $M_i = F_i \cap Q$. Через $U_\varepsilon(M)$ будем обозначать ε -окрестность множества M в пространстве R^n . Так как $M_1 \cap \dots \cap M_{m+1} = \emptyset$, причем множества M_i замкнуты, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(M_1) \cap \dots \cap U_\varepsilon(M_{m+1}) = \emptyset$. Обозначим через r точную верхнюю грань чисел ε , обладающих этим свойством. Тогда

$$\overline{U_r(M_1)} \cap \dots \cap \overline{U_r(M_{m+1})} \neq \emptyset, \quad U_r(M_1) \cap \dots \cap U_r(M_{m+1}) = \emptyset. \quad (1)$$

Без ограничения общности можно считать (произведя параллельный перенос), что

$$0 \in \overline{U_r(M_1)} \cap \dots \cap \overline{U_r(M_{m+1})}. \quad (2)$$

Обозначим Γ_i опорную гиперплоскость множества $\overline{U_r(M_i)}$ в точке 0, а через K_i — то из замкнутых полупространств, ограниченных гиперплоскостью Γ_i , которое содержит $\overline{U_r(M_i)}$. Из второго соотношения (1) вытекает, что $\text{int } K_1 \cap \dots \cap \text{int } K_{m+1} = \emptyset$, и потому, по теореме 1, конусы $K_1, \dots, K_{m+1}$ (с общей вершиной 0) отделимы. В то же время каждые m из конусов $K_1, \dots, K_{m+1}$ имеют общую внутреннюю точку (например, одну из точек p_i), и потому неотделимы.

По теореме 2 существуют такие векторы $a_1 \in D(K_1), \dots, a_{m+1} \in D(K_{m+1})$, не все равные нулю, что $a_1 + \dots + a_{m+1} = 0$. Ясно, что все векторы $a_1, \dots, a_{m+1}$ отличны от нуля (иначе по теореме 2, какие-либо m из конусов $K_1, \dots, K_{m+1}$ были бы отделимыми).

Покажем, что векторы $a_1, \dots, a_m$ (или любые другие m из векторов $a_1, \dots, a_{m+1}$) линейно независимы. Действительно, допустим, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$, где не все числа λ_i равны нулю; мы можем считать, что $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_m|$, причем $\lambda_1 = 1$. Мы имеем

$$(1 - \lambda_2) a_2 + \dots + (1 - \lambda_m) a_m + a_{m+1} = (a_1 + \dots + a_{m+1}) - (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m) = 0.$$

Так как все коэффициенты в левой части неотрицательны, то

$$(1 - \lambda_2) a_2 \in D(K_2), \dots, (1 - \lambda_m) a_m \in D(K_m), \quad a_{m+1} \in D(K_{m+1})$$

и потому (снова по теореме 2) конусы $K_2, \dots, K_{m+1}$ отделимы, что однако невозможно. Полученное противоречие показывает, что векто-

ры $a_1, \dots, a_n$ линейно независимы в R^n . Но тогда $m \leq n$, чем и завершается доказательство.

Пусть теперь F — некоторый класс подмножеств пространства R^n . Обозначим через $\text{him } F$ наименьшее из натуральных чисел m , обладающих следующим свойством: если $F_1, \dots, F_l$ — произвольные множества класса F , причем каждые $m+1$ из них имеют непустое пересечение, то $F_1 \cap \dots \cap F_l \neq \emptyset$. Обозначение $\text{him } F$ введено П. С. Солтаном [5] под названием *размерность Хелли* класса F (ср. также обозначения на стр. 60 книги [2]).

Будем считать, что класс F состоит только из замкнутых множеств, и попытаемся найти случаи, когда идея приведенного выше доказательства теоремы Хелли позволяет вычислить $\text{him } F$ (в теореме) Хелли F есть класс всех замкнутых выпуклых множеств). С этой целью проанализируем основные моменты этого доказательства. Прежде всего в этом доказательстве множества $F_1, \dots, F_{m+1}$ были заменены ограниченными множествами $M_1, \dots, M_{m+1}$, содержащими некоторые выбранные точки p_i . Для возможности проведения этой части доказательства достаточно потребовать, чтобы класс F обладал следующим свойством:

А) Если $F \in F$ и X — содержащееся в F компактное множество, то существует в классе F такое ограниченное множество M , что $X \subset M \subset F$.

Очевидно, что свойство А) будет, например, выполнено, если все множества класса F ограничены. Потребуем также, чтобы класс F обладал следующим свойством:

Б) Вместе с каждым множеством $M \in F$ классу F принадлежит любое множество, получающееся из M гомотетией с произвольным центром и положительным коэффициентом.

Из выполнения свойства Б) вытекает, что класс F обладает свойством:

Б') Множества, получающиеся из некоторого $M \in F$ параллельными переносами, также принадлежат классу F .

Следующий этап приведенного выше доказательства — рассмотрение множеств $U_\varepsilon(M)$. Множество $U_\varepsilon(M)$ представляет собой сферическую окрестность множества M , т. е. объединение всех открытых шаров радиуса ε с центрами в точках множества M . Однако в доказательстве можно было бы использовать и иные окрестности, например, множество $V(M)$, которое содержится в $U_\varepsilon(M)$ и в то же время содержит некоторую окрестность множества M , т. е. $V(M) \supset U_\delta(M)$ при некотором $\delta > 0$. Итак, потребуем, чтобы класс F обладал следующим свойством:

В) Для любого ограниченного множества $M \in F$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $V \in F$, $\delta > 0$, что $U_\delta(M) \subset V \subset U_\varepsilon(M)$.

Мы покажем теперь, что в случае класса F , обладающего свойствами А), Б), В), можно получить оценку для размерности Хелли $\text{him } F$. Введем определения, необходимые для формулировки соответ-

ствующей теоремы. Вектор f , удовлетворяющий условию $|f|=1$, будем называть *экстремальным*, если существует такой конус K с вершиной 0 , являющийся опорным конусом некоторого множества $F \in \mathcal{F}$, что луч $[0, f)$ является гранью конуса $D(K)$. (Опорным конусом выпуклого множества M в его точке a называется минимальный замкнутый выпуклый конус с вершиной a , содержащий множество M). Множество всех экстремальных векторов обозначим через $H(F)$. Далее, векторы $f_1, \dots, f_{m+1}$ будем называть *положительно зависимыми*, если существуют такие положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$, что $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$. Если векторы $f_1, \dots, f_{m+1}$ положительно зависимы, а каждые m из этих векторов линейно независимы, то будем говорить, что векторы $f_1, \dots, f_{m+1}$ *минимально зависимы*. Наконец, через $\text{md } H$, где $H \subset R^n$, обозначим наибольшее из таких натуральных m , что в H имеется $m+1$ минимально зависимых векторов.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющий условиям А), Б), В). Тогда $\text{him } \mathcal{F} \leq \text{md } H(\mathcal{F})$.

Доказательство следует идеям изложенного выше доказательства теоремы Хелли. Положим $\text{him } \mathcal{F} = m$, и пусть $F_1, \dots, F_{m+1}$ — такие множества класса $\mathcal{F}$, что $F_1 \cap \dots \cap F_{m+1} = \emptyset$, но каждые m из множеств $F_1, \dots, F_{m+1}$ имеют непустое пересечение. Выберем такие точки $p_1, \dots, p_{m+1}$, что $p_i \in F_j$ при $i \neq j$. В силу свойства А) существуют такие ограниченные множества $M_1, \dots, M_{m+1}$ класса $\mathcal{F}$, что $M_i \subset F_i$ и $p_i \in M_j$ при $i \neq j$. Так как $M_i \subset F_i$, то $M_1 \cap \dots \cap M_{m+1} = \emptyset$ и потому, в силу замкнутости множеств M_i , существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(M_1) \cap \dots \cap U_\varepsilon(M_{m+1}) = \emptyset$. Согласно свойству В), существуют такие множества $V_1, \dots, V_{m+1}$ класса $\mathcal{F}$ и такое $\delta > 0$, что $U_\delta(M_i) \subset V_i \subset U_\delta(M_i)$. Таким образом, $M_i \subset \text{int } V_i$, $i = 1, \dots, m+1$, и $V_1 \cap \dots \cap V_{m+1} = \emptyset$. Выберем точку $b_i \in M_i$, $i = 1, \dots, m+1$, и обозначим через V_i^r тело, гомотетичное телу V_i с центром b_i и коэффициентом $1 + \gamma$. Пусть r — точная верхняя грань чисел $\gamma > 0$, для которых $V_1^r \cap \dots \cap V_{m+1}^r = \emptyset$. Тогда (ср. (1))

$$V_1^r \cap \dots \cap V_{m+1}^r \neq \emptyset, \text{int } V_1^r \cap \dots \cap \text{int } V_{m+1}^r = \emptyset. \quad (3)$$

Без ограничения общности можно считать (произведя параллельный перенос), что $0 \in V_1^r \cap \dots \cap V_{m+1}^r$ (ср. (2)).

Обозначим через K_i опорный конус множества V_i^r в точке 0 . Тогда конусы $K_1, \dots, K_{m+1}$ отделимы (см. (3)), но каждые m из них имеют общую внутреннюю точку и потому неотделимы. По теореме 2 существуют такие векторы $a_1 \in D(K_1), \dots, a_{m+1} \in D(K_{m+1})$, не все равные нулю, что $a_1 + \dots + a_{m+1} = 0$. Так как конус $D(K_i)$ — острый (ибо K_i — телесный конус), то по теореме Крейна—Мильмана,

$$a_i = \sum_j \lambda_j f_j,$$

где f_i — экстремальные векторы конуса $D(K_i)$, числа λ_i положительны, а написанная сумма содержит конечное число слагаемых. Учитывая соотношение $\alpha_1 + \dots + \alpha_{m+1} = 0$, получаем положительную зависимость $\sum_i \sum_j \lambda_i f_i = 0$.

Выберем теперь из векторов f_i наименьшее число векторов, являющихся положительно зависимыми, и пусть $\sum_{i,j} \mu_{ij} f_i = 0$ — положительная зависимость между выбранными векторами; множество тех пар (i, j) , по которым здесь производится суммирование, обозначим через T . Запишем последнюю сумму в виде

$$\sum_{i,j} \mu_{ij} f_i = \sum_i \left(\sum_j \mu_{ij} f_i \right) = \sum_i \alpha_i^*,$$

где по-прежнему берутся пары $(i, j) \in T$. Если для некоторого i_0 ($= 1, \dots, m+1$) имеется хотя бы одна пара $(i_0, j) \in T$, то вектор $\alpha_{i_0}^* = \sum_j \mu_{i_0 j} f_{i_0}$ отличен от нуля, поскольку $f_{i_0} \in D(K_{i_0})$, а конус $D(K_{i_0})$ — острый. Следовательно, среди векторов α_i^* имеются отличные от нуля. Так как $\alpha_i^* \in D(K_i)$, то отсюда следует, что все векторы α_i^* отличны от нуля (иначе некоторые m конусов K_i оказались бы отделимыми). Но тогда ясно, что в сумме $\sum_{i,j} \mu_{ij} f_i = 0$ имеется не менее $m+1$ слагаемых. В силу минимальности числа слагаемых в этой сумме векторы f_i , где $(i, j) \in T$, минимально зависимы. Так как $f_i \in H(F)$, то $\text{md } H(F) \geq m$, т. е. неравенство $\text{him } F \leq \text{md } H(F)$ справедливо.

Для формулировки следующей теоремы (содержащей противоположное неравенство) наложим еще одно требование на класс F . Пусть M — некоторое выпуклое множество и f — отличный от нуля вектор. Будем говорить, что f является *нормальным вектором* для множества M , если существует такая точка $a \in M$, что $M \subset \{x: fx \leq fa\}$ и $\Gamma = \{x: fx = fa\}$ является единственной опорной гиперплоскостью множества M , проходящей через точку a . Наложим теперь на класс F следующее требование:

Г) Для любого вектора $f \in H(F)$ найдется такое множество $F \in F$, что f является нормальным вектором для множества F .

Теорема 4. Пусть F — некоторый класс замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющий условиям Б'), Г). Тогда $\text{him } F \geq \text{md } H(F)$.

Доказательство. Положим $\text{md } H(F) = m$ и пусть $f_1, \dots, f_{m+1} \in H(F)$ — минимально зависимые векторы, а $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$ — положительная зависимость между ними. Для каждого $= 1, \dots, m+1$ выберем такое множество $M_i \in F$, содержащее точку 0,

что $M_i \subset \{x: f_i x \leq 0\}$ и $\Gamma_i = \{x: f_i x = 0\}$ — единственная опорная гиперплоскость множества M_i в точке 0. Положим $P_i = M_i - k f_i$, $i = 1, \dots, m+1$, где k — некоторое положительное число. Тогда $P_i \in F$. Легко видеть, что при любом выборе числа $k > 0$ мы имеем $P_1 \cap \dots \cap P_{m+1} = \emptyset$. В самом деле, допустим, что существует точка $x_0 \in P_1 \cap \dots \cap P_{m+1}$. Тогда $x_0 + k f_i \in M_i \subset \{x: f_i x \leq 0\}$, и потому $f_i(x_0 + k f_i) \leq 0$, т. е. $f_i x_0 \leq -k$. Следовательно, $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{m+1} f_{m+1} x_0 \leq k(-\lambda_1 - \dots - \lambda_{m+1}) < 0$, что однако невозможно, поскольку $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$. Итак, $P_1 \cap \dots \cap P_{m+1} = \emptyset$.

Докажем теперь, что при некотором выборе числа k каждые m из множеств $P_1, \dots, P_{m+1}$ имеют непустое пересечение. Этим будет установлено соотношение $\lim F \geq m$, завершающее доказательство теоремы.

Так как каждые m из векторов $f_1, \dots, f_{m+1}$ линейно независимы, то существует такое $\varepsilon > 0$, что при $|y_i| \leq \varepsilon, \dots, |y_{m+1}| \leq \varepsilon$ любые m из векторов $f_1 + y_1, \dots, f_{m+1} + y_{m+1}$ также будут линейно независимыми. Фиксируем такое $\varepsilon > 0$. Гиперплоскость $\{x: (f_i + y_i) x = 0\}$ обозначим через $L_i(y_i)$. Тогда при $|y_i| \leq \varepsilon$ и любых z_i каждые m из гиперплоскостей $L_i(y_i) + z_i$, $i = 1, \dots, m+1$, имеют в пересечении точку. Если при этом $|z_i| \leq \delta, \dots, |z_{m+1}| \leq \delta$, то эти точки пересечения находятся от точки 0 на расстояниях, не превосходящих $r\delta$, где r — некоторое положительное число (число $\delta > 0$ здесь произвольно). Следовательно, обозначая через E_d шар радиуса d с центром 0, мы найдем, что каждые m из множеств $(L_i(y_i) + z_i) \cap E_{r\delta}$ имеют при $|y_i| \leq \varepsilon, |z_i| \leq \delta$ непустое пересечение. Остается установить, что при некотором выборе чисел k, δ и векторов y_i, z_i мы имеем $P_i \supset (L_i(y_i) + z_i) \cap E_{r\delta}$.

Пусть $h_{i1}, \dots, h_{in}$ — такие векторы, содержащиеся в гиперплоскости Γ_i , что они являются вершинами $(n-1)$ -мерного симплекса S_i , имеющего 0 своим центром тяжести. Так как $h_{ij} \in \Gamma_i$, то существует такая линия $x = \varphi_{ij}(t)$, $0 \leq t \leq \eta$, содержащаяся в M_i , что $\varphi_{ij}(0) = 0$ и $\frac{d\varphi_{ij}(0)}{dt} = h_{ij}$. Обозначим через $T_i(t)$ симплекс с вершинами

$\varphi_{i1}(t), \dots, \varphi_{in}(t)$, а через $q_i(t)$ — центр тяжести этого $(n-1)$ -мерного симплекса. Кроме того, положим $z_i(t) = q_i(t) - t^2 f_i$. Тогда $\varphi_{ij}(t) = th_{ij} + o(t)$, $q_i(t) = o(t)$, $z_i(t) = o(t)$. Так как точки $th_{i1}, \dots, th_{in}$ являются вершинами симплекса, гомотетичного S_i , то из этого следует, что нормаль к несущей гиперплоскости симплекса $T_i(t)$ имеет вид $f_i + y_i(t)$, где $y_i(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Кроме того, так как центр тяжести симплекса $T_i(t) - t^2 f_i$ лежит в точке $z_i(t) = o(t)$, то этот симплекс удовлетворяет (при достаточно малом t и при некотором $c > 0$) условию

$$E_{ct} \cap (T_i(t) - t^2 f_i) = E_{ct} \cap \text{aff}(T_i(t) - t^2 f_i).$$

Выберем, наконец, такое $t > 0$, что $|y_i(t)| \leq \varepsilon, |z_i(t)| \leq \delta$, где $\delta = \frac{ct}{r}$, и положим $k = t^2$. Тогда $r\delta = ct$, и потому мы имеем.

$$\begin{aligned}
 P_i &= M_i - k f_i = M_i - t^2 f_i \supset (T_i(t) - t^2 f_i) \cap E_{ci} = \\
 &= E_{ci} \cap \text{aff}(T_i(t) - t^2 f_i) = E_{ci} \cap (L_i(y_i(t)) + q_i(t) - t^2 f_i) = \\
 &= E_{ir} \cap (L_i(y_i(t)) + z_i(t)),
 \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Следствие. Пусть $H(F^*) = H(F)$, где F^* — некоторый класс замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющий условиям А), Б), В), а $F \subset F^*$ — его подкласс, удовлетворяющий условиям Б'), Г). Тогда $\text{him } F = \text{md } H(F)$.

В самом деле, $\text{him } F \leq \text{him } F^* \leq \text{md } H(F^*) = \text{md } H(F)$ (теорема 3) и в то же время $\text{him } F \geq \text{md } H(F)$ (теорема 4).

Пример 1. Пусть H — некоторое замкнутое подмножество сферы $S^{n-1} \subset R^n$, не являющееся односторонним, т. е. не содержащееся ни в какой полусфере сферы S^{n-1} . Всякое полупространство вида $\{x: f x \leq \lambda\}$, где $f \in H, \lambda \in R$, условимся называть H -выпуклым полупространством; всякое множество, представляющееся в виде пересечения некоторого семейства H -выпуклых полупространств, условимся называть H -выпуклым множеством. Через F обозначим класс всех H -выпуклых множеств пространства R^n . Тогда (ср. [6]) класс F удовлетворяет условиям А)–Г), причем $H(F) = H$. Следовательно, $\text{him } F = \text{md } H$.

Пример 2. Пусть $H \subset S^{n-1}$ — конечное множество, не являющееся односторонним. Обозначим через F класс всех многогранников, внешние нормали к $(n-1)$ -мерным граням которых принадлежат множеству H . Условие А) здесь выполнено в силу того, что множество H не является односторонним. Выполнение условий Б), В), Г) очевидно. Таким образом, $\text{him } F = \text{md } H$.

Пример 3. Пусть F — класс всех многогранников, получающихся параллельными переносами из фиксированного n -мерного многогранника $M \subset R^n$. Тогда $\text{him } F = \text{md } H$, где H — множество всех единичных векторов, являющихся внешними нормальными $(n-1)$ -мерных граней многогранника M .

Математический институт им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступила 8.IX.1975

Վ. Դ. ԲՈԼՏԱՆՍԿԻ. Ուռուցիկ կոնեքի անշատելիությունը և ելիքի բնույթը (ամփոփում)

Հեղինակի նախորդ հոդվածներին մեկում (ՀՍՍՀ ԳԱ տեղեկագիր, «Մաթեմատիկա» VII, № 4, 1972 թ.) ապացուցված է $K_1, K_2, \dots, K_m \subset R^n$ ուռուցիկ կոնեքի սխեմի անշատելիության չափանիշը:

Այս հոդվածում ցույց է տրված անշատելիության չափանիշի կիրառելիությունը կոմբինատորային երկրաչափությունում: Հիմնական արդյունքը հանդիսանում է նշված չափանիշի օգնությամբ ստացված ելիքի բնույթի նոր ապացույցը:

V. G. BOLTJANSKY. *Separability of convex cones and Helly's theorem*
(summary)

A criterion of separability for a system of convex cones $K_1, \dots, K_m \subset R^n$ was established in author's earlier article. Here the separability criterion is applied in combinatorial geometry. The main result consists in a new proof of the Helly's theorem.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е. Хелли. О совокупности выпуклых тел с общими точками, УМН, вып. 2, 1936, 80—81.
2. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли. Теорема Хелли, Изд. "Мир", М., 1968.
3. В. Г. Болтянский. Свойство отделимости системы выпуклых конусов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 4, 1972, 250—257.¹
4. В. Г. Болтянский. Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, 30, № 3 (183), 1975, 3—55.
5. П. С. Солтан. Теорема Хелли для d -выпуклых множеств, ДАН СССР, 205, № 3, 1972, 537—539.
6. В. Г. Болтянский. Теорема Хелли для H -выпуклых множеств, ДАН СССР, 219, № 5, 1974, 1042—1044.

Ж. С. НАЛБАНДЯН, В. Д. ШИГЛИК

РЕАЛИЗАЦИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОМ ПРОЦЕССОРЕ

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) является эффективным методом вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ)—одной из наиболее широко применяющихся математических операций при обработке цифровых сигналов в спектральном анализе, цифровой фильтрации, корреляционном анализе и в других областях.

Алгоритм БПФ может быть успешно реализован как программно на универсальных ЭВМ, так и аппаратно-микропрограммно на специализированных ЭВМ. В настоящее время существуют устройства, специально ориентированные на реализацию алгоритма БПФ и называемые БПФ-процессорами, которые имеют достаточно высокое быстродействие вычисления коэффициентов Фурье, позволяющее работать в реальном масштабе времени [1], [2].

При решении задач по обработке результатов наблюдений кроме преобразования Фурье часто встречаются операции над векторами, матрицами, операции свертки, корреляции и другие, реализацию которых с экономической точки зрения целесообразно совместить в одном специализированном процессоре.

В работе [3] описана структура специализированного процессора, предназначенного для решения задач по обработке результатов наблюдений и выполняющего операции типа умножения-сложения над n -мерными векторами.

В настоящей работе приводится описание вычислительной схемы, разработанной на основе известного алгоритма БПФ [4] и реализующей БПФ в специализированном процессоре [3] по основанию 4 и по смешанному основанию $4+2$.

Рассматривается объединение различных вариантов алгоритма БПФ в единую процедуру.

С учетом структурных особенностей спецпроцессора, вычислительная процедура по основанию 4 организована таким образом, что существенно ускоряется выполнение БПФ по сравнению с процедурой по основанию 2. Приводится также сравнительная оценка времени вычисления коэффициентов Фурье по основаниям 4 и 2.

Кратко опишем основные принципы БПФ и дадим некоторые необходимые в дальнейшем определения.

Для дискретной последовательности из N чисел $\{x_k\}$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) ДПФ определяется следующим образом:

$$y_r = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w_N^{-kr} \quad (r = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1)$$

где $w_N^l = e^{\frac{2\pi i}{N} l}$, а y_r — r -й коэффициент ДПФ. В общем случае $\{x_k\}$ представляют собой комплексные числа, а $\{y_r\}$ — всегда комплексные числа.

Обращение формул (1) аналогично записывается в виде:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r w_N^{kr} \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (2)$$

и называется обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ).

Процесс вычисления коэффициентов ДПФ непосредственно по (1) весьма длителен, так как требует выполнения операций в количестве, пропорциональном N^2 , в то время как алгоритм БПФ позволяет уменьшить это число до величины, пропорциональной $N \log N$.

Пусть число N разбито на n множителей, не обязательно равных друг другу:

$$N = \prod_{l=1}^n p_l \quad (p_l \geq 2).$$

Суть алгоритма БПФ заключается в выполнении процесса вычисления коэффициентов ДПФ итерационным методом за n шагов по выражениям:

$$x_{k,l}^{(j)} = \sum_{m=0}^{p_j-1} x_{r,l+mQ_j}^{(j-1)} w_{p_j}^{-km}, \quad (3)$$

где

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad P_j = \prod_{l=1}^j p_l, \quad Q_j = \frac{N}{P_j},$$

$$k = 0, 1, \dots, P_j - 1, \quad l = 0, 1, \dots, Q_j - 1, \quad r = \left[\frac{k}{p_j} \right],$$

причем под $x_{0,q}^{(0)}$ подразумевается входная последовательность

$$x_q \quad (q=0, 1, \dots, N-1).$$

Промежуточную последовательность, полученную на j -ом шаге, назовем j -массивом.

Как следует из (3), результаты, получаемые после каждого шага, используются для вычисления элементов в последующем шаге и при достижении равенства $j = n$ элементы полученного массива будут искомыми коэффициентами Фурье.

Из (3) следует, что каждое из N уравнений (1) представляется в виде последовательности сумм, число слагаемых в которых равно множителям p_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Эффективность алгоритма БПФ достигается благодаря выполнению суммирования на каждом j -ом шагу одновременно по группам

$$[x_{r_i l}^{(j)}, x_{r_i l+q_j}^{(j)}, x_{r_i l+2q_j}^{(j)}, \dots, x_{r_i l+(p_i-1)q_j}^{(j)}],$$

содержащим p_i элементов (называемых далее p_i -группой) сразу для всех N уравнений.

Процесс вычисления сумм для p_i -групп по (3) для всех N уравнений назовем этапом.

Весь вычислительный процесс БПФ состоит из n этапов.

Введем понятие подмассива. В процессе вычисления элементов j -массива выделяются такие p_i -группы, при вычислении которых используется один и тот же набор комплексных экспоненциалов.

k_j -подмассивом j -массива назовем совокупность тех p_i -групп, при вычислении которых по (3) используются одни и те же комплексные экспоненциалы.

Количество k_j -подмассивов определяется следующим образом:

$$k_1 = 1, \quad k_j = \prod_{l=1}^{j-1} p_l \quad (j = 2, 3, \dots). \quad (4)$$

В частности, в случае алгоритма БПФ по основаниям 2 или 4, т. е. в случае, когда все множители p_i равны двум или четырем, p_i -группы представляют собой соответственно пары или четверки элементов. Количество подмассивов j -массива составляет соответственно 2^{j-1} или 4^{j-1} ($j=1, 2, \dots, n$).

В работе [5] приведен вычислительный алгоритм БПФ по основанию 2. В этом случае вычисление на каждом j -ом этапе выполняется по выражениям:

$$\begin{aligned} A'_r &= A'_{r-1} + w^q A'_{r-1}, \\ A''_r &= A'_{r-1} - w^q A'_{r-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где A'_{r-1} и A''_{r-1} — пара комплексных чисел, вычисленных на предыдущем этапе, а о степенях w будет сказано позднее.

Очевидно, что для вычисления коэффициентов массива из $N=2^n$ элементов по этому алгоритму требуется выполнить $N \log_2 N$ операций комплексного сложения и $\frac{1}{2} N \log_2 N$ операций комплексного умножения.

Приведем теперь вывод формул ДПФ по основанию 4, т. е. для случая, когда $N=4^n$.

Разобьем входную последовательность $\{x_k\}$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) на четыре группы:

$$\begin{aligned} z_k^{(0)} &= x_{4k}, \quad z_k^{(1)} = x_{4k+1}, \quad z_k^{(2)} = x_{4k+2}, \quad z_k^{(3)} = x_{4k+3} \\ &\left(k=0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1\right) \end{aligned}$$

и вычислим ДПФ для каждой из последовательностей $z_k^{(m)}$ ($m = 0, 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} x_r^{(0)} &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(0)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr}, \\ x_r^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(1)} e^{-\frac{6\pi i}{N}kr}, \\ x_r^{(2)} &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(2)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr}, \\ x_r^{(3)} &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(3)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что величины $x_r^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) обладают свойством периодичности, а именно

$$x_r^{(j)} = x_{r+\frac{N}{4}}^{(j)} \left(r = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \right), \quad (7)$$

Представим теперь ДПФ входного массива $\{x_k\}$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) следующим образом:

$$\begin{aligned} y_r &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i}{N}kr} = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} z_k^{(0)} e^{-\frac{8\pi i}{N}kr} + e^{-\frac{2\pi i}{N}r} \sum_{k=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} z_k^{(1)} e^{-\frac{8\pi i}{N}k} + \\ &+ e^{-\frac{4\pi i}{N}r} \sum_{k=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{4}-1} z_k^{(2)} e^{-\frac{8\pi i}{N}k} + e^{-\frac{6\pi i}{N}r} \sum_{k=\frac{3N}{4}}^{N-1} z_k^{(3)} e^{-\frac{8\pi i}{N}k} \\ &\left(r = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \right). \end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned} y_r &= x_r^{(0)} + x_r^{(1)} e^{-\frac{2\pi i}{N}r} + x_r^{(2)} e^{-\frac{4\pi i}{N}r} + x_r^{(3)} e^{-\frac{6\pi i}{N}r} = \\ &= \sum_{j=0}^3 x_r^{(j)} e^{-\frac{2\pi i}{N}jr} \left(r = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}-1 \right). \end{aligned}$$

Заменим в этой формуле r на $r + \frac{N}{4}$ и воспользуемся свойством периодичности (7). Тогда получим

$$y_{r+\frac{N}{4}} = \sum_{j=0}^3 (-i)^j x_r^{(j)} e^{-\frac{2\pi i}{N} r j}. \quad (8)$$

Еще дважды заменяя в (8) индекс r на $r + \frac{N}{4}$, с учетом периодичности (7) получим окончательно следующую группу выражений:

$$\begin{aligned} y_r &= \sum_{j=0}^3 x_r^{(j)} w^{-rj}, \\ y_{r+\frac{N}{4}} &= \sum_{j=0}^3 (-i)^j x_r^{(j)} w^{-rj}, \\ y_{r+\frac{N}{2}} &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j x_r^{(j)} w^{-rj}, \\ y_{r+\frac{3}{4}N} &= \sum_{j=0}^3 (i)^j x_r^{(j)} w^{-rj} \\ &\quad \left(r = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичные преобразования можно, в свою очередь, применить к $x_r^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, 3$), из чего следует, что вычисление коэффициентов ДПФ четырех последовательностей, состоящих из $\frac{N}{4}$ элементов каждая, можно свести к вычислению последовательностей из $\frac{N}{16}$ элементов каждая. Эти операции можно проводить до тех пор, пока каждая последовательность не сведется к четырем элементам. Таким образом, для $N = 4^n$, применяя (6) для последовательностей из $N, \frac{N}{4}, \frac{N}{4^2}, \dots, 4$ точек, получим коэффициенты ДПФ. При этом количество комплексных умножений составит $\frac{3}{4} N \log_4 N$, а количество комплексных сложений — $3 N \log_4 N$.

Существуют различные варианты алгоритма БПФ, в частности, широко известны варианты Кули-Туки и Санди-Туки. Оба варианта удобны при машинной реализации тем, что результаты, получаемые после каждого этапа, размещаются в той области памяти, где ранее находились исходные данные, что дает значительную экономию оперативной памяти. Отличие этих вариантов состоит в том, что в варианте алгоритма Кули-Туки входной массив должен задаваться в упорядоченном виде, в то время как выходной получается в неупорядоченном (перетасованном); в варианте же Санди-Туки из неупорядоченного исходного массива после преобразования получаются результаты в упорядоченном виде. Отметим также, что в алго-

ритме Санди-Туки экспоненциальные коэффициенты используются в упорядоченном порядке степеней, а в варианте Кули-Туки—в неупорядоченном порядке степеней.

Перетасовка входных элементов массива (при алгоритме Санди-Туки) и получение перетасованных элементов выходного массива (при алгоритме Кули-Туки) производится по правилу реверсии разрядов номеров по данной системе счисления, т. е. если номер элемента в q -ичной системе счисления есть $a_1 a_2 \dots a_n$ (где $a_i = 0, 1, \dots, q-1$), то реверсия приводит к номеру $a_n a_{n-1} \dots a_1$.

В процессе цифровой обработки случайных величин, когда применяется теорема свертки для преобразования Фурье, необходимо бывает осуществить также обратное преобразование Фурье.

Очевидно, что в случае основания 2 выражения ОДПФ не будут отличаться от выражений для прямого преобразования за исключением того, что экспоненциальные коэффициенты следует заменить сопряженными комплексными числами. Для основания 4 вычисление коэффициентов ОДПФ выполняется по выражениям:

$$\begin{aligned} x_r &= \sum_{l=0}^3 y_r^{(l)} w^{rl}, \\ x_{r+\frac{N}{4}} &= \sum_{j=0}^3 (i)^j y_r^{(j)} w^{rj}, \\ x_{r+\frac{N}{2}} &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j y_r^{(j)} w^{rj}, \\ x_{r+\frac{3}{4}N} &= \sum_{j=0}^3 (-i)^j y_r^{(j)} w^{rj}. \end{aligned} \quad (10)$$

Опишем теперь реализацию алгоритма БПФ на спецпроцессоре [3] для вариантов Кули-Туки и Санди-Туки. Реализация обоих вариантов позволит осуществить прямое и обратное преобразование без дополнительной перетасовки результатов.

Очевидно, что при больших основаниях объем вычислений уменьшается, однако вычислительные формулы становятся более промоздкими.

Весьма эффективным для реализации в спецпроцессоре является преобразование по основанию 4.

Для случая $N=2^{2n+1}$ преобразование выполняется со смешанным основанием $4+2$, т. е. все этапы вычислительного процесса, кроме последнего, выполняются по основанию 4, а последний—по основанию 2, что приводит к необходимости реализации на спецпроцессоре также и алгоритма по основанию 2. Естественно, что реализация смешанного алгоритма потребует поэтапного выполнения преобразований, что также дает возможность реализовать оба варианта (Кули-Туки и Санди-Туки) алгоритма единой вычислительной процедурой.

Итак, рассмотрим реализацию БПФ по основаниям 2 и 4 для вариантов Кули-Туки и Санди-Туки прямого и обратного преобразования Фурье.

Рассмотрим массив, состоящий из $N=2^n$ элементов (элементы массива в общем случае — комплексные числа). Расположение массива в оперативной памяти (ОП) таково, что разность адресов ОП соседних элементов постоянна. Информация, необходимая для управления потоком данных между оперативной памятью и спецпроцессором должна касаться расположения массивов в ОП, их размеров, форматов данных и должна содержать:

— адреса начальных элементов входного и выходного массивов и массива экспоненциалов в ОП;

— число подмассивов на данном этапе вычислительного процесса;

— число p_i -групп (пар или четверок) в каждом подмассиве;

— шаг между начальными элементами соседних подмассивов;

— шаг между соседними p_i -группами;

— шаг между элементами в p_i -группе.

Перед тем, как приступить к выполнению БПФ, необходимо составить и поместить в ОП таблицу экспоненциальных коэффициентов для конкретного варианта алгоритма. Число элементов в таблице, используемых при реализации БПФ, равно $\frac{N}{2}$ или $\frac{N}{4}$, соответственно основанию.

Таблица экспоненциалов, используемая при варианте Кули-Туки, должна содержать коэффициенты в перетасованном виде. При этом таблица для алгоритма по основанию 2 составляется по правилу:

$$w(k) = e^{\frac{2\pi i}{N} k} \quad \left(k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1\right),$$

где α получается путем реверсирования последних $n-1$ разрядов двоичного представления числа k .

Для варианта Санди-Туки таблица экспоненциалов состоит из упорядоченного набора степеней, отличающихся друг от друга на $\frac{\pi}{2^j}$ радианов, где j — номер соответствующего этапа.

Для реализации вариантов Кули-Туки и Санди-Туки единым алгоритмом требуется составление отдельных подтаблиц для каждого этапа в случае алгоритма Санди-Туки, причем на j -ом этапе экспоненциальные коэффициенты определяются по правилу:

$$w(k) = e^{\frac{\pi i}{2^j} k} \quad (k=0, 1, \dots, 2^j-1).$$

Составив таблицы экспоненциалов для некоторого $N=2^n$, их можно будет использовать для вычисления коэффициентов Фурье с любым объемом входного массива $N=2^m$, где $m \leq n$.

Те же самые таблицы экспоненциалов можно использовать и для алгоритма по основанию 4, при этом при варианте Кули-Туки выборка экспоненциалов выполняется через один, а при варианте Санди-Туки и подтаблицы, и экспоненциалы в подтаблицах выбираются через один.

В спецпроцессоре предусмотрено средство для инвертирования знака элементов входного массива. Используя это средство, можно той же самой вычислительной процедурой вычислить коэффициенты ОДПФ по основанию 2.

Итак, одной вычислительной процедурой спецпроцессора можно реализовать один этап прямого и обратного преобразования Фурье по алгоритмам Кули-Туки и Санди-Туки для основания 2.

Для алгоритма по основанию 4 прямое и обратное преобразование выражаются различными формулами (9) и (10) соответственно, поэтому их реализация требует различных процедур в спецпроцессоре.

Таким образом, в состав стандартных алгоритмов входят три последовательности микропрограмм, каждая из которых реализует варианты Кули-Туки и Санди-Туки алгоритма БПФ.

Вычислительный процесс БПФ для любого из трех приведенных алгоритмов в спецпроцессоре выполняется по следующей схеме.

Соответственно управляющей информации о массивах на любом j -этапе в первую очередь в ВЗУ-1 спецпроцессора загружаются экспоненциальные коэффициенты в количестве, равном $\min(k_j, m)$, где k_j — количество подмассивов, а m — объем ВЗУ-1.

После этого происходит прием элементов входного массива порциями в спецпроцессор и одновременно с их загрузкой в блоке быстрого умножения-сложения по формулам (5), (9), (10), соответственно алгоритмам, выполняются вычисления, промежуточные и окончательные результаты которых записываются в ВЗУ-2. Результаты вычисления p_i -групп записываются в ОП машины, после чего тот же процесс повторяется и для остальных p_i -групп в подмассивах.

В случае, когда $k_j > m$, после использования всех экспоненциальных коэффициентов, находящихся в ВЗУ-1, процесс повторяется с загрузкой оставшихся коэффициентов.

Подсчитаем общее время вычисления коэффициентов Фурье для всех этапов по основанию p ($p=2; 4$).

Введем следующие обозначения:

— время приема управляющей информации из ОП в спецпроцессор на одном этапе обозначим через τ_1 , а суммарное время по этим этапам — t_1 ;

— время вычисления p элементов в блоке умножения-сложения обозначим через τ_p , а суммарное время вычисления — t_p ($p=2, 4$);

— время переключения направления потока данных обозначим через τ_3 , суммарное время переключения — t_3 ;

— время доступа к ОП обозначим через τ_5 , суммарное время приема информации в спецпроцессор — t_5 , суммарное время запоминания результатов в ОП — t_6 , суммарное время приема экспоненциальных коэффициентов — t_7 . Время доступа к ОП зависит от цикла обращения к ОП и от числа обращений к ОП со стороны центрального процессора и устройств ввода-вывода при их совместной работе. Ширину обращения к ОП в единицах слов обозначим через l . Поскольку вычисления в блоке умножения-сложения производятся параллельно

но с приемом информации в спецпроцессор, то общее время вычисления коэффициентов Фурье будет:

$$T_p = t_1 + \max(t_3, t_p) + t_3 + t_6 + t_7.$$

Число этапов вычислительного процесса БПФ равно $\log_p N'$, следовательно

$$t_1 = \tau_1 \log_p N,$$

$$t_p = \frac{N}{p} \tau_p \log_p N,$$

$$t_3 = \frac{N}{p} \tau_3 \log_p N,$$

$$t_5 = t_6 = \frac{2N}{l} \tau_5 \log_p N,$$

количество k_j — подмассивов на каждом этапе вычисляется по формуле (4). Общее количество подмассивов — K , равное общему числу загружаемых в ВЗУ-1 экспоненциальных коэффициентов, вычисляется по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$K = \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{N - 1}{p - 1}.$$

Тогда

$$t_p = \frac{2(N-1)}{l(p-1)} \tau_5.$$

Следовательно

$$T_p = \tau_1 \log_p N + \max\left(\frac{2N}{l} \tau_3 \log_p N, \frac{N}{p} \tau_p \log_p N\right) + \frac{N}{p} \tau_3 \log_p N + \frac{2\tau_5}{l} \left(\frac{N-1}{p-1} + N \log_p N\right). \quad (11)$$

Время вычисления четверки элементов $\tau_4 = 12,8$ мксек.

При $l=1$, т. е. когда прием информации в спецпроцессор производится по одному действительному числу, если время доступа к ОП $\geq 1,6$ мксек, то выражение (11) примет вид

$$T_p = \tau_1 \log_p N + 2\tau_5 \left(2N \log_p N + \frac{N-1}{p-1}\right) + \frac{N}{p} \tau_3 \log_p N$$

(заметим, что при $p=2$ эта формула подавно верна).

Из этой формулы непосредственно следует, что

$$T_2 > 2T_4,$$

т. е. реализация алгоритма БПФ по основанию 4 на спецпроцессоре значительно эффективнее, чем по основанию 2.

ժ. Ս. ՆԱԼԲԱՆԴԻԱՆ, Վ. Դ. ՇԳԻԴԼԻԿ. Ֆուրյեի արագ ձևափոխության իրականացումը մասնագիտացված պրոցեսորում (ամփոփում)

Քերվում է հաշվողական սխեմայի նկարագրումը, որը իրականացվում է Ֆուրյեի արագ ձևափոխության մասնագիտացված պրոցեսորում 4 հիմքով և խառը 4+2 հիմքով:

Դիտարկվում է Ֆուրյեի արագ ձևափոխության ալգորիթմի զանազան տարբերակների միավորումը միասնական գործողության մեջ, որը 4 հիմքի դեպքում կազմակերպված է այնպես, որ ստացվում է ժամանակի էական շահում:

J. S. NALBANDIAN, V. D. SCHIGLIK. *A fast Fourier transform on a special-purpose processor (summary)*

A description of a computational process yielding fast Fourier transform (FFT) on a special-processor by radix 4 and mixed radix 4+2 has been given.

A combination of different versions of FFT algorithms into a single procedure organised with radix 4 leading to essential time gain is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. J. Corinthus. A fast Fourier transform for high-speed signal processing, IEEE Transactions on Computers, volume C-20, August 1971, 843-846.
2. M. J. Corinthus. The design of a class of fast Fourier transform Computers, IEEE Transactions of Computers, volume C-20, June 1971, 617-623.
3. В. Д. Щиглик, Ж. С. Налбандян. Проблемно-ориентированный процессор для эффективной обработки результатов наблюдений, Доклады АН АрмССР, том LXII, № 2, 1976, 100-104.
4. J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for machine calculation of complex Fourier series, Math. Computation, vol. 19, April 1965, 297-301.
5. W. T. Cochran, J. W. Cooley. What is the fast Fourier transform, IEEE Transactions on audio and electroacoustics, volume AU-15, number 2, June 1967, 45-55.

В. П. ГРИГОРЬЕВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

В в е д е н и е

Работа посвящена изучению разрешимости на всей оси нелинейных дифференциально-операторных уравнений вида

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) + Au(t) + \beta(t, u(t), u'(t)) = h(t), \quad (1)$$

где

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) = \sum_{q=0}^{2s} a_q \frac{d^q}{dt^q} u(t), \quad a_q \in R^1, \quad a_{2s} = (-1)^{s-1};$$

A — линейный неограниченный формально самосопряженный оператор и оператор $\beta(t, u, u')$ зависит нелинейно от u, u' и является в некотором смысле близким к монотонному оператору. Дифференциальные уравнения вида (1), не содержащие нелинейностей, изучались Дубинским Ю. А. в работах [1]—[3] и были названы им частично гиперболическими. Если $s = 1$, то уравнение (1) есть нелинейное волновое уравнение, играющее важную роль в теоретической физике и изучавшееся многими авторами. При $s = 2$ разрешимость дифференциального уравнения с частными производными типа (1), возникающего в теории ангармонических решеток, изучалась в работе [4].

§ 1. Обозначения и предположения

Пусть даны комплексные сепарабельные гильбертовы пространства G и H такие, что $G \subset H$ с непрерывной операцией вложения и G плотно в H . Обозначим через $H(R^1; s; G; \gamma)$ множество функций $u(t)$, определенных и измеримых на оси R^1 со значениями в G , удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{H(R^1; s; G; \gamma)}^2 = \int_{R^1} (\|u^{(s)}(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_G^2) e^{-\gamma t} dt < +\infty,$$

где γ — некоторое фиксированное вещественное число.

Будем рассматривать также пространства $L_{p, \gamma}(R^1; X)$, где X — некоторое B -пространство и $p > 1$. Это пространства функций $u(t)$, определенных и измеримых на R^1 со значениями в X и таких, что

$$\|u\|_{L_{p, \gamma}(R^1; X)}^p = \int_{R^1} \|u(t)\|_X^p e^{-\gamma t} dt < +\infty.$$

Если Y — некоторое B -пространство, плотное в H с непрерывной операцией вложения, то через Y' будет обозначаться пространство, сопряженное к Y . H отождествляется со своим сопряженным H' . Если $u \in Y$ и $v \in Y'$, то скалярное произведение между этими элементами будут обозначаться через (u, v) , в частности, если $Y=H$, то это обычное скалярное произведение в H .

Будем также предполагать, что нам дано некоторое рефлексивное B -пространство F , которое плотно и непрерывно вложено в H , $F \cap G$ — сепарабельно, плотно вложено в H , оператор вложения непрерывен.

Скалярное произведение между элементами $u \in F$ и $v \in F'$, где F' — сопряженное к F , будет обозначаться через $[u, v]$. Если p — действительное число, $p > 1$, то скалярное произведение между $u \in L_{p, \gamma}(R^1; F)$ и $v \in L_{p', \gamma}(R^1; F')$ будет обозначаться через $\{u, v\}_\gamma$. Тогда

$$\{u(t), v(t)\}_\gamma = \int_{R^1} [u(t), v(t)] e^{-\gamma t} dt.$$

Если Z — некоторое B -пространство функций $u(t)$, которое плотно и непрерывно вложено в $L_{2, \gamma}(R^1; H)$ и Z' — его сопряженное, то скалярное произведение между элементами из Z и Z' будет обозначаться через $\langle u, v \rangle_\gamma$.

В частности, если $Z = L_{2, \gamma}(R^1; H)$, то это обычное скалярное произведение в $L_{2, \gamma}(R^1; H)$. В этом случае

$$\langle u, v \rangle_\gamma = \int_{R^1} (u(t), v(t)) e^{-\gamma t} dt.$$

Это обозначение распространяется и на тот случай, когда указанный интеграл существует, возможно в смысле распределений на R^1 ; индекс γ опускается, если $\gamma = 0$.

Условие 1. Предполагается, что на элементах пространства $G \times G$ определена непрерывная полубилинейная эрмитова форма $a(u, v)$, удовлетворяющая условию

$$a(u, u) \geq c_1 \|u\|_0^2 - c_2 \|u\|_1^2$$

для любого $u \in G$, где $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$ — константы, не зависящие от u .

Очевидно, существует константа $c_3 > 0$ такая, что для любых $u \in G$ и $v \in G$

$$|a(u, v)| \leq c_3 \|u\|_0 \cdot \|v\|_0.$$

Если функции $u(t)$ и $v(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(R^1; G)$, то интеграл $\int_{R^1} a(u, v) e^{-\gamma t} dt$ существует и будет обозначаться через

$\langle a(u, v) \rangle_\gamma$. Заметим, что так как отображение $v \rightarrow a(u, v)$ непрерывно и полулинейно (линейно в вещественном случае), то каждому $u \in G$ соответствует единственный элемент $Au \in G'$ такой, что

$$(Au, v) = a(u, v), (v \in G).$$

Условие 2. Предполагается, что дан нелинейный оператор β , отображающий F в F' и удовлетворяющий при некотором фиксированном $\gamma > 0$ следующим условиям:

а) если $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F)$, то $\beta(u) \in L_{p',\gamma}(R^1; F')$, $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$;

б) β переводит ограниченные множества в $L_{p,\gamma}(R^1; F)$ в ограниченные множества из $L_{p',\gamma}(R^1; F')$;

в) β слабо непрерывно отображает конечномерные подмножества из $L_{p,\gamma}(R^1; F)$ в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$;

г) $\operatorname{Re} \{ \beta(u), u \}_\gamma \geq c_4 \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^1; F)}^p - c_5 \|u\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 - c_6$ для любой функции $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F) \cap L_{2,\gamma}(R^1; H)$;

д) $\operatorname{Re} \{ \beta(u) - \beta(v), u - v \}_\gamma \geq 0$ для любых функций $u(t)$ и $v(t)$ из пространства $L_{p,\gamma}(R^1; F)$;

е) Если последовательность гладких функций $u_n(t)$ такова, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; G),$$

$$u'_n(t) \rightarrow u'(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; H) \text{ и в } L_{p,\gamma}(R^1; F),$$

$u''_n(t) \rightarrow u''(t)$ слабо в $L_{2,\gamma}(R^1; H)$, то для некоторой подпоследовательности $u_{n_s}(t)$ $\beta(u_{n_s}) \rightarrow \beta(u')$ слабо в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$.

Условие 3. Предполагается, что дан дифференциальный оператор порядка $2s$

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) \equiv \sum_{q=0}^{2s} a_q u^{(q)}(t), \quad a_q \in R^1, \quad u^{(q)}(t) \equiv \frac{d^q u(t)}{dt^q}$$

такой, что $a_{2s} = (-1)^{s-1}$.

§ 2. Теорема существования и единственности

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2, 3 при некотором $\gamma > 0$, и пусть $s > 1$. Тогда существует такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что при $\lambda \geq \alpha(\gamma)$ для любой функции $h(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; H)$ такой, что $h'(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G')$, найдется единственная функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) u(t) \in H(R^1; s; G; \tau);$$

$$2) u'(t) \in L_{p, \tau}(R^1; F);$$

$$3) u^{(l)}(t) \in L_{2, \tau}(R^1; G') + L_{p', \tau}(R^1; F') \text{ при } s < l \leq 2s;$$

4) для любой функции $v(t) \in L_{2, \tau}(R^1; G) \cap L_{p, \tau}(R^1; F)$ справедливо тождество

$$\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_{\tau} + \langle a(u, v) \rangle_{\tau} + \lambda \langle u, v \rangle_{\tau} + \{\beta(u'), v\}_{\tau} = \langle h, v \rangle_{\tau}.$$

Доказательство. Выберем систему функций $v_l(t)$, определенных на R^1 со значениями в $F \cap G$ таких, что

а) $v_l(t)$ — гладкие и финитные на R^1 ;

б) $v_l(t)$ образуют полную систему (линейные комбинации плотны в пространстве $C_0^{\infty}(R^1; F \cap G)$).

Приближенные решения определим формулой

$$u_n(t) = \sum_{l=1}^n c_{ln} \int_{-\infty}^t v_l(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где коэффициенты c_{ln} задаются как решения нелинейной алгебраической системы „моментных уравнений“ вида

$$A(u_n, v_i) \equiv \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, v_i \right\rangle_{\tau} + \langle a(u_n, v_i) \rangle_{\tau} + \lambda \langle u_n, v_i \rangle_{\tau} + \{\beta(u'_n), v_i\}_{\tau} = \langle h, v_i \rangle_{\tau}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Для разрешимости этой системы достаточно в силу условия 2в) выполнения „условия острого угла“, (см. [6], [7], [8]), которое в данном случае имеет вид

$$\operatorname{Re} \left[\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_{\tau} + \langle a(u_n, u'_n) \rangle_{\tau} + \lambda \langle u_n, u'_n \rangle_{\tau} + \{\beta(u'_n), u'_n\}_{\tau} \right] \geq c_7 \langle u_n, u_n \rangle_{\tau} - c_8. \quad (3)$$

В выражении $A(u_n, u'_n)$ проинтегрируем по частям во втором и третьем членах с учетом того, что $v_l(t)$ финитные функции. Тогда получим

$$\operatorname{Re} A(u_n, u'_n) = \operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_{\tau} + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_n, u_n) \rangle_{\tau} + \frac{\lambda \gamma}{2} \langle u_n, u_n \rangle_{\tau} + \operatorname{Re} \{\beta(u'_n), u'_n\}_{\tau}. \quad (4)$$

Обозначим далее через $w_n(t)$ функцию, равную $u_n(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$. Тогда выражение $\operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_{\tau}$ можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_\gamma = \operatorname{Re} \sum_{\substack{0 \leq r < q \\ q=0}}^{\infty} a_q \beta_{rq} \int_{R^1} \left(w_n^{(r)}, w'_n + \frac{\gamma}{2} w_n \right) dt,$$

где $\beta_{rq} = \frac{q!}{r! (q-r)!} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{q-r}$. Интегрируя по частям, уравниванием порядки дифференцирования и, пользуясь равенством Парсеваля, получаем

$$\operatorname{Re} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, u'_n \right\rangle_\gamma = \int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}_n\|_H^2 d\tau, \quad (5)$$

где $\tilde{w}_n = \tilde{w}_n(\tau)$ — образ Фурье функции $w_n(t)$. Из (4), используя условия 1 и 2г), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A(u_n, u'_n) &\geq \int_{R^1} \left\{ \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] - c_5 \tau^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda - c_2) \gamma}{2} \right\} \|\tilde{w}_n(\tau)\|_H^2 d\tau - c_6. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть многочлен по τ степени $2s > 2$. Поэтому найдется такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что при $\lambda > \alpha(\gamma)$ для любого $\tau \in R^1$ будет справедливо неравенство

$$\begin{aligned} A(\tau, \gamma, \lambda) &\equiv \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] - c_5 \tau^2 + \\ &\quad + \frac{(\lambda - c_2) \gamma}{2} > c_9 > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

откуда получаем (3).

Таким образом, система алгебраических уравнений (2) разрешима и, тем самым, приближенные решения $u_n(t)$ определены. Умножим уравнения системы (2) на c_{in} и просуммируем по i . Получим

$$A(u_n, u'_n) = \langle h, u'_n \rangle_\gamma.$$

Из равенства (4) аналогично тому, как выводилось неравенство (6), но, не одевая член $\frac{\gamma}{2} \langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma$, получим

$$\operatorname{Re} A(u_n, u'_n) \geq \int_{R^1} A(\tau, \gamma, \lambda + c_2) \|\tilde{w}_n\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma - c_6. \quad (8)$$

Поскольку $A(\tau, \gamma, \lambda + c_2) > A(\tau, \gamma, \lambda) > 0$, то

$$\langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma \leq \frac{2}{\gamma} \operatorname{Re} \langle h, u'_n \rangle_\gamma + \frac{2c_6}{\gamma}. \quad (9)$$

Интегрируя по частям в выражении $\langle h, u_n' \rangle_\gamma$ и применяя неравенство Шварца, получим

$$\begin{aligned} \langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma &\leq c_{10} \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} (\|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')} + \gamma \|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}) + \\ &+ \frac{2c_8}{\gamma} = \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} K_\gamma(h) + \frac{2c_8}{\gamma}. \end{aligned} \quad (10)$$

По условию 1 имеем $a(u_n, u_n) \geq c_1 \|u_n\|_0^2 - c_2 \|u_n\|_H^2$. Поэтому

$$c_1 \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)}^2 - c_2 \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 \leq \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} K_\gamma(h) + \frac{2c_8}{\gamma}. \quad (11)$$

Из неравенства (3) аналогично получаем

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 \leq \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} \cdot \frac{\gamma}{2c_9} K_\gamma(h) + \frac{c_8}{c_9}. \quad (12)$$

Поэтому из (11) и (12) имеем

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)}^2 \leq c_{11} \|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} K_\gamma(h) + c_{12}$$

или

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G)} \leq L_\gamma(h). \quad (13)$$

В частности, из неравенства (10) получим, что

$$\langle a(u_n, u_n) \rangle_\gamma \leq K_\gamma(h) L_\gamma(h) + \frac{2c_8}{\gamma}. \quad (14)$$

Далее выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы для любого $\tau \in R^1$ выполнялось неравенство

$$A(\tau, \gamma, \lambda) > \varepsilon \tau^{2\lambda}.$$

Тогда из неравенств (6) и (13) получим

$$\|(u_n e^{-\frac{\gamma t}{2}})^{(s)}\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 < c_8 + L_\gamma(h) K_\gamma(h).$$

Или, переходя к эквивалентной норме

$$\|u_n\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 + \|u_n^{(s)}\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2 < c_{13} (1 + L_\gamma(h) K_\gamma(h)). \quad (15)$$

Далее, используя (4) и имеющиеся оценки (6), (7), (13), (14), (15) и условие 2 г), получим

$$\|u_n'\|_{L_{p,\gamma}(R^1; F')}^p \leq M_\gamma(h), \quad (16)$$

где $M_\gamma(h)$ зависит от $\|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}$ и $\|h'\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}$.

Полученные оценки позволяют сделать вывод, что существует такая подпоследовательность $u_{n_j}(t)$, что $u_{n_j}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $H(R^1; s; G; \gamma)$ и $u_{n_j}'(t) \rightarrow u'(t)$ слабо в $L_{p,\gamma}(R^1; F')$. По условию 2 е) эта подпоследовательность может быть выбрана так, чтобы $\beta(u_{n_j}') \rightarrow \beta(u')$ слабо в $L_{p',\gamma}(R^1; F'')$. Переходя к пределу при $j \rightarrow +\infty$ в каждом из

уравнений системы (2), получим, что при любом $i = 1, 2, \dots$ будут иметь место равенства

$$\begin{aligned} \langle P_{2s} u, v_i \rangle_\gamma + \langle a(u, v_i) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v_i \rangle_\gamma + \\ + \{\beta(u'), v_i\}_\gamma = \langle h, v_i \rangle_\gamma. \end{aligned}$$

Поскольку по предположению функции $v_i(t)$ образуют полную систему в пространстве $C_0^\infty(R^1; F \cap G)$, то, производя замыкание, получим, что для любой функции $v(t)$ из этого пространства справедливо тождество

$$\begin{aligned} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_\gamma + \langle a(u, v) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v \rangle_\gamma + \\ + \{\beta(u'), v\}_\gamma = \langle h, v \rangle_\gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Положим в этом равенстве $v \cdot e^{-\gamma t} = \varphi(t) \cdot \xi$, где $\varphi(t) \in C_0^\infty(R^1)$ и ξ — элемент пространства $F \cap G$. Равенство (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{R^1} (u, \xi) P_{2s}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi(t) dt + \int_{R^1} a(u, \xi) \varphi(t) dt + \lambda \int_{R^1} (u, \xi) \varphi(t) dt + \\ + \int_{R^1} [\beta(u'), \xi] \varphi(t) dt = \int_{R^1} (h, \xi) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Здесь

$$P_{2s}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi \equiv \sum_{q=0}^{2s} (-1)^q \alpha_q \varphi^{(q)}.$$

Скалярное произведение (u, ξ) задает непрерывный функционал $j_1(t)$ над пространством $F \cap G$, причем $|j_1(t)| \leq \|u\|_{G'}$, где через $|j_1(t)|$ обозначена норма функционала. Аналогично $a(u, \xi) = j_2(t)$ и

$$|j_2(t)| \leq c_s \|u\|_{G'}; \quad [\beta(u'), \xi] = j_3(t) \quad \text{и} \quad |j_3(t)| \leq \|\beta(u')\|_{F'}$$

и, наконец, $(h, \xi) = j_4(t)$, $|j_4(t)| \leq \|h\|_{G'}$. Таким образом

$$\begin{aligned} j_1(t) \in L_{2, \gamma}(R^1; G'), \quad j_2(t) \in L_{2, \gamma}(R^1; G), \\ j_3(t) \in L_{p', \gamma}(R^1; F') \quad \text{и} \quad j_4(t) \in L_{2, \gamma}(R^1; G). \end{aligned}$$

Пусть

$$j(t) = j_4(t) - \lambda j_1(t) - j_2(t) - j_3(t).$$

Тогда

$$\int_{R^1} (u, \xi) P_{2s}^* \left(\frac{d}{dt} \right) \varphi(t) dt = \int_{R^1} (j(t), \xi) \varphi(t) dt,$$

что означает, что $u(t)$ имеет производные в смысле распределений на R_1^1 до порядка $2s$ и является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) = j(t),$$

откуда следует, что $u^{(l)}(t)$ при $l \leq 2s$ представимы в виде суммы двух слагаемых, принадлежащих соответственно пространствам

$$L_{2,\gamma}(R^1; G') \text{ и } L_{p',\gamma}(R^1; F'), \text{ так как } L_{2,\gamma}(R^1; G) \subset L_{2,\gamma}(R^1; G').$$

Производя замыкание в равенстве (17), получим, что оно будет справедливым для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{p',\gamma}(R^1; F)$.

Покажем, что функция $u(t)$ единственна. Выберем гладкую финитную функцию $\eta(t)$ со значениями в R^1 такую, что

$$\int_{R^1} \eta(\tau) d\tau = 1; \quad \eta(t) = \eta(-t), \quad \eta(t) \in C_0^\infty(R^1).$$

Обозначим

$$\eta_k(t) = k\eta(kt) \text{ и } v_k(t) = \{[u'(t) * \eta_k(t)] e^{-\frac{\gamma t}{2}} * \eta_k(t)\} e^{\frac{\gamma t}{2}}.$$

Так как $u'(t) * \eta_k(t) = u(t) * \eta'_k(t)$, то $v_k(t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция со значениями в $K \cap G$. Положим в (17) $v(t) = v_k(t)$. Обозначая через $u_k(t)$ свертку $u(t) * \eta_k(t)$, получим

$$\begin{aligned} \left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u_k, u'_k \right\rangle_\gamma + \langle a(u_k, u'_k) \rangle_\gamma + \lambda \langle u_k, u'_k \rangle_\gamma = \\ = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \{\beta(u'), v_k\}_\gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что функции $u_k(t)$ гладкие и принадлежат $L_{2,\gamma}(R^1; H)$, а функции $u_k(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными. Учитывая это обстоятельство, проинтегрируем по частям в соотношении (18). Получим

$$\begin{aligned} \int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}_k(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_k, u_k) \rangle_\gamma + \\ + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u_k, u_k \rangle_\gamma = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \{\beta(u'), v_k\}_\gamma, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tilde{w}_k$ — образ Фурье функции $w_k(t) = u_k(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$. Здесь использовано равенство Парсеваля. В равенстве (19) перейдем к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u) \rangle_\gamma + \\ + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u, u \rangle_\gamma = \langle h, u' \rangle_\gamma - \{\beta(u'), u'\}_\gamma, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{w}(\tau)$ — образ Фурье функции $w(t) = u(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$,

Допустим теперь, что существуют две функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяющие тождеству (17). Тогда их разность $z(t) = u_1(t) - u_2(t)$ будет удовлетворять тождеству

$$\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) z(t), v(t) \right\rangle_{\Gamma} + \langle a(z, v) \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle z, v \rangle_{\Gamma} = \{\beta(u'_2) - \beta(u'_1), v\}_{\Gamma} \quad (21)$$

и равенству

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_{2s} \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - i\tau \right) \right] |\tilde{z}_1(\tau)|^2_H d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(z, z) \rangle_{\Gamma} + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle z, z \rangle_{\Gamma} = \operatorname{Re} \{\beta(u'_2) - \beta(u'_1), u'_1 - u'_2\}_{\Gamma}, \quad (22)$$

где $\tilde{z}_1(\tau)$ — образ Фурье функции $z(t)$ $e^{-\frac{\gamma t}{2}}$. По условию 2 д) правая часть равенства (22) неположительна. С другой стороны, в силу выбора λ , $\lambda \geq a(\gamma)$, левая часть не меньше, чем некоторая положительная константа μ , умноженная на $\|z\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)}^2$.

Следовательно, $\|z\|_{L_{2,\gamma}(R^1; H)} = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Теорема существования и единственности.

Случай $s = 1$

В данном параграфе мы будем предполагать, что $s = 1$. Пусть при некотором $\gamma > 0$ выполнены условия 1, 2а), 2б), 2в), 2д), 3а), и пусть при этом же γ для любой функции $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F)$

$$\operatorname{Re} \{\beta(u), u\}_{\Gamma} \geq c_4 \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^1; F)}^p - c_3, \quad (23)$$

где $c_4 > 0$, $c_3 \geq 0$ и не зависят от u .

Теорема 2. Если выполнены перечисленные выше условия, то найдется такое вещественное число $a(\gamma)$, что при $\lambda \geq a(\gamma)$ для любой функции $h(t)$ такой, что $h(t) \in L_{1,\gamma}(R^1; H)$, $h'(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G)$, найдется единственная $u(t)$, удовлетворяющая условиям:

$$1) u(t) \in H(R^1; 1; G; \gamma);$$

$$2) u'(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F);$$

$$3) u''(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) + L_{p',\gamma}(R^1; F');$$

4) для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{p,\gamma}(R^1; F)$ справедливо тождество

$$\left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_{\Gamma} + \langle a(u, v) \rangle_{\Gamma} + \lambda \langle u, v \rangle_{\Gamma} + \{\beta(u'), v\}_{\Gamma} = \langle h, v \rangle_{\Gamma}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1 приближенные решения $u_n(t)$ строятся путем решения нелинейной алгебраической системы „моментных уравнений“ вида (2). Разрешимость этой системы доказывается аналогично, с той разницей, что замена условия 2 г) условием (23) делает условие $s > 1$ для разрешимости системы необязательным. Априорные оценки в рассматриваемом случае имеют вид

$$\int_{R^1} (\|u_n'\|_H^2 + \|u_n(t)\|_G^2 + \|u_n'(t)\|_F^2) e^{-\gamma t} dt \leq K_\gamma (\|h\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}^2 + \|h'\|_{L_{2,\gamma}(R^1; G')}^2). \quad (24)$$

Из этих оценок выводим, что существует такая подпоследовательность $u_{n'}(t)$, что $u_{n'}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $H(R^1; 1; G; \gamma)$, $u_{n'}'(t) \rightarrow u'(t)$ слабо в $L_{p,\gamma}(R^1; F)$, $\beta(u_{n'}') \rightarrow \psi(t)$ слабо в $L_{p',\gamma}(R^1; F')$, последнее в силу условия 2 б). Слабый предельный переход в „моментных уравнениях“ и замыкание дают выполнение для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{p,\gamma}(R^1; F)$ тождества

$$\left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_\gamma + \langle a(u, v) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v \rangle_\gamma + \langle \psi(t), v \rangle_\gamma = \langle h, v \rangle_\gamma, \quad (25)$$

причем аналогично тому как это делается в доказательстве теоремы 1 получаем, что $u''(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G') + L_{p',\gamma}(R^1; F')$.

Покажем, что $\psi(t) = \beta(u')$. Возьмем некоторую функцию $\eta(t)$,

$$\eta(t) \in C_0^\infty(R^1), \quad \eta(t) = \eta(-t), \quad \int_{R^1} \eta(t) dt = 1,$$

и рассмотрим функцию $\eta_k(t) = k \eta(kt)$. Очевидно, что $\eta_k(t) \rightarrow \delta(t)$ при $k \rightarrow +\infty$. Далее рассмотрим функцию $u_k(t) = u(t) * \eta_k(t)$ и функцию $v_k(t) = [(u_k' e^{-\gamma t}) * \eta_k(t)] e^{\gamma t}$.

В тождестве (25) положим $v(t) = v_k(t)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u, v_k \right\rangle_\gamma + \langle a(u, v_k) \rangle_\gamma + \lambda \langle u, v_k \rangle_\gamma = \\ = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \langle \psi(t), v_k \rangle_\gamma \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u_k, u_k' \right\rangle_\gamma + \langle a(u_k, u_k') \rangle_\gamma + \lambda \langle u_k, u_k' \rangle_\gamma = \\ = \langle h, v_k \rangle_\gamma - \langle \psi(t), v_k \rangle_\gamma. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегрируя по частям и пользуясь равенством Парсеваля, получим

$$\int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{w}_k\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u_k) \rangle_\gamma +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u_k, u_k \rangle_T = \langle h, v_k \rangle_T - \{\psi(t), v_k\}_T,$$

где $\bar{w}_k(\tau)$ — образ Фурье функции $w_k(t) = u_k(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$.
В этом равенстве перейдем к пределу при $k \rightarrow +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\bar{w}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u) \rangle_T +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u, u \rangle_T = \langle h, u' \rangle_T - \{\psi(t), u'\}_T. \quad (27)$$

Далее, из „моментных уравнений“, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\left\langle P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u_n, v_l \right\rangle_T + \langle a(u_n, v_l) \rangle_T + \lambda \langle u_n, v_l \rangle_T +$$

$$+ \{\beta(u'_n), v_l\}_T = \langle h, v_l \rangle_T, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

путем умножения их на c_{ln} и суммирования по i с последующим интегрированием по частям выводим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\bar{w}_n(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u_n, u_n) \rangle_T +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u_n, u_n \rangle_T = \langle h, u'_n \rangle_T - \{\beta(u'_n), u'_n\}_T.$$

Возьмем нижний предел от правой и левой части и воспользуемся неравенством: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|$, если $u_n \rightarrow u$ слабо в B -пространстве. Получим

$$\int_{\mathbb{R}^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\bar{w}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(u, u) \rangle_T +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma}{2} \langle u, u \rangle_T + \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(u'_n), u'_n\}_T \leq \operatorname{Re} \langle h, u' \rangle_T.$$

Сравнивая это неравенство с (27), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(u'_n), u'_n\}_T \leq \operatorname{Re} \{\psi(t), u'\}_T. \quad (28)$$

Из этого неравенства следует, что $\psi(t) = \beta(u')$. Действительно, если $\varphi(t)$ — произвольная функция из пространства $L_{p, \gamma}(R^1; F)$, то

$$-\operatorname{Re} \{\beta(\varphi), u'\}_T = -\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(\varphi), u'_\gamma\}_T,$$

$$-\operatorname{Re} \{\varphi(t), \varphi(t)\}_T = -\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \{\beta(u'_\gamma), \varphi(t)\}_T,$$

$$\operatorname{Re} \{\beta(\varphi), \varphi\}_T = \operatorname{Re} \{\beta(\varphi), \varphi\}_T.$$

Складывая эти равенства с неравенством (28), получим

$$\operatorname{Re} \{\psi - \beta(\varphi), u' - \varphi\}_T \geq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \{\beta(u') - \beta\varphi, u' - \varphi\}_T \geq 0,$$

последнее в силу условия 2 д). Из этого неравенства вытекает, что

$$\operatorname{Re} \{\psi - \beta(\varphi), u' - \varphi\}_T \geq 0.$$

Полагая $\varphi(t) = u'(t) - \delta \varphi_1(t)$, где $\varphi_1(t) \in L_{p, \gamma}(R^1; F)$ и устремляя затем в неравенстве $\delta \rightarrow 0$, получим, в силу условия 2 в),

$$\operatorname{Re} \{\psi(t) - \beta(u'), \varphi_1(t)\}_T \geq 0$$

для любой функции $\varphi_1(t) \in L_{p, \gamma}(R^1; F)$, что возможно лишь при $\psi(t) = \beta(u')$. Таким образом, существование функции $u(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы, доказано. Покажем, что такая функция единственна. Допустим противное: существуют две различные функции $u(t)$ и $v(t)$. Тогда для разности $w(t) = u(t) - v(t)$ будет справедливо равенство

$$\int_{R^1} \operatorname{Re} \left[P_2 \left(i\tau + \frac{\gamma}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{2} - i\tau \right) \right] \|\tilde{z}(\tau)\|_H^2 d\tau + \frac{\gamma}{2} \langle a(w, w) \rangle_T + \frac{\lambda\gamma}{2} \langle w, w \rangle_T = \{\beta(v') - \beta(u'), u' - v'\}_T,$$

где $\tilde{z}(\tau)$ — образ Фурье функции $w(t) e^{-\frac{\gamma t}{2}}$.

Из этого равенства, как и в доказательстве теоремы 1, следует, что $u(t) = v(t)$. Теорема доказана.

§ 3. Другой тип уравнений. Теорема существования

В данном параграфе рассматривается случай, когда $\beta = \beta(u)$, т. е. уравнение имеет вид

$$P_2 \left(\frac{d}{dt} \right) u(t) + Au(t) + \beta(u) + \lambda u(t) = h(t).$$

Пусть H_1 — гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H . В свою очередь G плотно лежит в H_1 и вложение G в H_1 вполне непрерывно. Предполагается, что оператор $\beta(u)$ удовлетворяет при некотором $\gamma > 0$ условиям 2 а), 2 б), 2 в), а также условиям:

а) для любой функции $u(t) \in W_{p, \gamma}^1(R^1; F) \cap L_{2, \gamma}(R^1; H)$

$$\operatorname{Re} \{\beta(u), u'\}_T \geq c_4 \|u\|_{L_{p, \gamma}(R^1; F)}^p - c_5 \|u\|_{L_{2, \gamma}(R^1; H)}^2 - c_6;$$

б) если последовательность $u_n(t)$ такова, что $u_n(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $L_{p, \gamma}(R^1; F)$ и сильно в $L_{2, \gamma}(R^1; H_1)$, то $\beta(u_n(t)) \rightarrow \beta(u)$ слабо в $L_{p', \gamma}(R^1; F')$. Оператор $P_2 \left(\frac{d}{dt} \right)$ предполагается удовлетворяющим условию 3 а) и форма $a(u, v)$ — условию 1.

Теорема 3. Если выполнены при некотором $\gamma > 0$ перечисленные выше условия, то существует вещественное число $\alpha(\gamma)$, такое, что при $\lambda \geq \alpha(\gamma)$ для любой функции $h(t)$ такой, что $h(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G')$, $h'(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G')$, найдется функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $u(t) \in H(R^1; s; G; \gamma)$;
- 2) $u(t) \in L_{p,\gamma}(R^1; F)$;
- 3) $u^{(l)}(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G') + L_{2,\gamma}(R^1; F')$ при $s < l \leq 2s$;
- 4) для любой функции $v(t) \in L_{2,\gamma}(R^1; G) \cap L_{2,\gamma}(R^1; F)$ справедливо тождество

$$\left\langle P_{2s} \left(\frac{d}{dt} \right) u, v \right\rangle_{\gamma} + \langle \alpha(u, v) \rangle_{\gamma} + \lambda \langle u, v \rangle_{\gamma} + \\ + |\beta(u), v|_{\gamma} = \langle h, v \rangle_{\gamma}.$$

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет рассуждения доказательства теоремы 1. Необходимые изменения состоят в следующем. Чтобы получить сильную сходимость последовательности приближенных решений $u_n(t)$ в пространстве $L_{2,\gamma}(R^1; H_1)$ нужно воспользоваться тем фактом, что

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; G) \\ \text{и} \quad u'_n(t) \rightarrow u'(t) \text{ слабо в } L_{2,\gamma}(R^1; H).$$

Поскольку, по предположению вложение $G \subset H_1$ вполне непрерывно; то применяя теорему Обена Ж. П., см. [9], получим подпоследовательность, сходящуюся сильно в $L_{2,\gamma}(R^1; H_1)$.

Теорема доказана.

§ 4. Приложения к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными

А. Пусть Ω — ограниченная область в $\bar{R}_x^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в области $Q = \Omega \times R_t^1$ дифференциальное уравнение вида

$$P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) + L_{2m}(x, D) u(x, t) + \lambda u(x, t) + \beta(x, t, u') = h(x, t) \quad (29)$$

с условиями на $\Gamma = \partial\Omega \times R_t^1$:

$$D^m u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad |\omega| \leq m - 1.$$

Здесь

$$1) \quad P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u \equiv \sum_{q=0}^{2s} a_q u^{(q)}, \quad u^{(q)} \equiv \frac{\partial^q u}{\partial t^q}, \quad a_q \in R^1, \quad a_{2s} = (-1)^{s-1}, \quad s \geq 1,$$

$$2) \quad L_{2m}(x, D) u = \sum_{\substack{|x| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u)$$

—равномерно сильно эллиптический дифференциальный оператор в Ω порядка $2m$ ($m \geq 1$) такой, что $a_{\alpha\beta}(x)$ при $|x| = |\beta| = m$ равномерно непрерывны в Ω , $a_{\alpha\beta}(x)$ —ограничены и измеримы при $|x| + |\beta| \leq 2m$ и $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$; символ D означает дифференцирование по пространственным переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3) $\beta(x, t, u)$ — некоторая нелинейная функция такая, что

а) $\beta(x, t, \xi)$ непрерывна по ξ почти всюду в Q и измерима по x и t при любом $\xi \in C^1$;

б) $|\beta(x, t, \xi)| \leq k_1 |\xi|^{p-1}$, $\forall \xi \in C^1$, k_1 — постоянная, не зависящая от x, t и ξ ; $p > 2$ — некоторое фиксированное число;

$$в) \quad \operatorname{Re} \int_Q \beta(x, t, v) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt \geq K_\gamma \|v(x, t)\|_{L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))}^p - M_\gamma$$

при любой функции $v(x, t) \in L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))$, где константы $K_\gamma > 0$ и $M_\gamma > 0$ не зависят от $v(x, t)$;

$$г) \quad \operatorname{Re} \int_Q [\beta(x, t, u) - \beta(x, t, v)] [\overline{u(x, t)} - \overline{v(x, t)}] e^{-\gamma t} dx dt > 0$$

при любых функциях $u(x, t)$ и $v(x, t)$ из пространства $L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))$;

4) λ — некоторое фиксированное вещественное число.

Полагая

$$a(u, v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \int \alpha_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} dx,$$

получим форму, удовлетворяющую, в силу неравенства Гординга,

Условию 1, если положить $H = L_2(\Omega)$ и $G = \tilde{W}_2^m(\Omega)$.

Если положить $F = L_p(\Omega)$, то функция $\beta(x, t, \xi)$ задает нелинейный оператор, удовлетворяющий условиям 2 а), б), в), г) и д), см. [8]. Покажем, что выполнено также условие 2е). Пусть имеется последовательность $u_n(x, t)$ такая, что $u_n(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в

$L_{2, \gamma}(R^1; \tilde{W}_2^m(\Omega))$, $u'_n \rightarrow u'$ слабо в $L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))$ и в $L_{p, \gamma}(R^1; L_p(\Omega))$, $u''_n \rightarrow u''$ слабо в $L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))$. Тогда нужно показать, что $\beta(u'_n) \rightarrow \beta(u')$ слабо в $L_{p', \gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega))$, где u, u' — некоторая подпоследовательность из $\{u_n\}$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

В силу условия 3 б) из функции $\beta(x, t, \xi)$, последовательность $\beta(u'_n)$ слабо компактна в $L_{p', \gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega))$ и, следовательно, найдется подпоследовательность u'_n такая, что $\beta(u'_n) \rightarrow \psi(x, t)$ слабо в $L_{p', \gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega))$. С другой стороны, по теореме компактности (см. [10]) по-

следовательность u_n компактна в пространстве $L_2(\Omega_1; W_{2,\gamma}^1(K))$, где $\Omega_1 \times K$ — компактная подобласть Q . Действительно, положим

$$A_1 = W_{2,\gamma}^2(K), A_2 = W_{2,\gamma}^1(K), A_3 = L_{2,\gamma}(K).$$

Вложение $W_{2,\gamma}^2 \subset W_{2,\gamma}^1$ компактно и теорема компактности применима. Выберем подпоследовательность (обозначим ее снова u_n) такую, что $u'_n \rightarrow u'$ сильно в $L_{2,\gamma}(K; L_2(\Omega_1))$. Таким образом, для любой компактной подобласти $Q_1 = \Omega_1 \times K$, $K \subset R^1$, мы можем получить (выбирая, если нужно, еще раз подпоследовательность) подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в $Q_1 \subset Q$. Этого достаточно, чтобы утверждать (теорема Лебега и теорема Витали, см. [11]), что $\beta(u') = \psi(x, t)$ почти всюду в Q_1 . Так как Q_1 была произвольной, то $\beta(u') = \psi(x, t)$ почти всюду в Q .

Применение теорем 1 и 2 дает следующий результат.

Теорема 4. При выполнении при некотором $\gamma > 0$ перечисленных выше условий существует такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что если $\lambda \geq \alpha(\gamma)$, то для любой функции $h(x, t)$ такой, что

$$h(x, t) \in L_{2,\gamma}(R^1; L_2(\Omega)), h'_t(x, t) \in L_{2,-\gamma}(R^1; W_{2,-m}(\Omega)),$$

найдется единственная функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям

$$1) u(x, t) \in H(R^1; s; W_2^m(\Omega), \gamma);$$

$$2) u'_t(x, t) \in L_{p,\gamma}(R^1; L_p(\Omega));$$

$$3) u_t^{(l)}(x, t) \in L_{2,\gamma}(R^1; W_{2,-m}(\Omega)) + L_{p',-\gamma}(R^1; L_{p'}(\Omega)), s < l \leq 2s;$$

4) для любой функции $v(x, t) \in L_{2,\gamma}(R^1; W_2^m(\Omega)) \cap L_{p,\gamma}(R^1; L_p(\Omega))$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_Q P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \lambda \int_Q u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \beta(x, t, u') \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt = \\ & = \int_Q h(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt. \end{aligned}$$

В. В данном пункте рассматривается случай, когда оператор $\beta(u')$ задается выражением вида $\sum_{|\alpha| \leq m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\beta u')$. Со-

ответствующий дифференциальный оператор предполагается удовлетворяющим следующим условиям:

1) функции $A_i(x, t, \xi_i)$ — непрерывны по ξ_i при почти всех $(x, t) \in Q$ и измеримы по x и t при любом $\xi_i \in \mathbb{C}^1$;

2) $|A_i(x, t, \xi_i)| \leq k_1 |\xi_i|^{p-1}$, где $k_1 > 0$ и не зависит от ξ_i ;

3) $\operatorname{Re} \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m-1} A_i(x, t, D^\alpha u) \overline{D^\alpha u} e^{-\gamma t} dx dt > k_2 \|u\|_{L_{p, \gamma}(R^m; \dot{W}_p^{m-1}(Q))}^p - k_3$;

4) $\operatorname{Re} \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m-1} [A_i(x, t, D^\alpha u) - A_i(x, t, D^\alpha v)] \times$
 $\times [\overline{u(x, t)} - \overline{v(x, t)}] e^{-\gamma t} dx dt > 0$

для любых функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ из пространства $L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(Q))$. Если положить теперь $H = L_2(Q)$, $G = \dot{W}_2^m(Q)$; $I = \dot{W}_2^{m-1}(Q)$, то выполнение условий на оператор β проверяется аналогично предыдущему случаю. Применение теорем 1 и 2 дает следующий результат.

Теорема 5. При выполнении при некотором $\gamma > 0$ перечисленных выше условий существует вещественное число $\alpha(\gamma)$ такое, что если $\lambda \geq \alpha(\gamma)$, то для любой функции $h(x, t)$ такой, что

$$h(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; L_2(Q)), \quad h'_t(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(Q)),$$

найдется единственная функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям

$$1) u(x, t) \in H(R^1; s; \dot{W}_2^m(Q), \gamma);$$

$$2) u'_t(x, t) \in L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(Q));$$

$$3) u_i^{(l)}(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(Q)) + L_{p', \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{1-m}(Q)), \quad s < l \leq 2s;$$

4) для любой функции $v(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^m(Q)) \cap L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(Q))$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_Q P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) [u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \lambda \int_Q u(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt + \\ & + \int_Q \sum_{|\alpha| \leq m-1} A_i(x, t, D^\alpha u) \overline{D^\alpha v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt = \\ & = \int_Q h(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt. \end{aligned}$$

С. В данном пункте рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) + L_{2m}(x, D) u(x, t) + \lambda u(x, t) + \\ + \sum_{|\delta| \leq m-1} (-1)^{|\delta|} A_\delta(x, t, D^\alpha u) = h(x, t).$$

Будем предполагать, что функции $A_\delta(x, t, \xi_\delta)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 пункта В и условию

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \int_Q A_\delta(x, t, D^\alpha u) D^\delta u'_t(x, t) e^{-\gamma t} dx dt > \\ > k_2(\gamma) \|u\|_{L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))}^p - k_3(\gamma) \|u\|_{L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))}^2 - k_4(\gamma)$$

для любой функции $u(x, t) \in W_{p, \gamma}^1(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega)) \cap L_{2, \gamma}(R^1; L_2(\Omega))$, где $k_2 > 0$, $k_3 \geq 0$, $k_4 \geq 0$ — константы, не зависящие от $u(x, t)$, а $W_{p, \gamma}^1(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$ — пространство функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными пространству $L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$. Полагая

$$H = L_2(\Omega), G = \dot{W}_2^m(\Omega), F = \dot{W}_p^{m-1}(\Omega), H_1 = \dot{W}_2^{m-1}(\Omega),$$

применим теорему 3. В итоге получим следующий результат.

Теорема 6. При выполнении при некотором $\gamma > 0$ сформулированных выше условий существует такое вещественное число $\alpha(\gamma)$, что если $\lambda > \alpha(\gamma)$, то для любой функции $h(x, t)$ такой, что $h(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(\Omega))$, $h'_t(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(\Omega))$, найдется функция $u(x, t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $u(x, t) \in H(R^1; s; \dot{W}_2^m(\Omega); \gamma)$;
- 2) $u(x, t) \in L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$;
- 3) $u_t^{(l)}(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^{-m}(\Omega)) + L_{p', \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{1-m}(\Omega))$;

при $s < l \leq 2s$;

- 4) для любой функции

$$v(x, t) \in L_{2, \gamma}(R^1; \dot{W}_2^m(\Omega)) \cap L_{p, \gamma}(R^1; \dot{W}_p^{m-1}(\Omega))$$

справедливо тождество

$$\int_Q \left| P_{2s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x, t) \overline{D^\beta v(x, t)} + \right.$$

$$+ i u(x, t) \overline{v(x, t)} + \sum_{|k| < m-1} A_k(x, t, D^k u) \overline{D^k v(x, t)} \Big| e^{-\gamma t} dx dt = \\ = \int_0^t h(x, t) \overline{v(x, t)} e^{-\gamma t} dx dt.$$

Замечание: При $p = 2$ из приведенных теорем получаются результаты и для линейных уравнений, которые, являясь также новыми, дополняют известные результаты, полученные Ю. А. Дубинским в работах [1–3].

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Поступила 25.III.1974

Վ. Պ. ԳՐԻԳՐԵՎ. Ոչ գծային դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումներ ամբողջ
բլանդի տարածքի վրա (ամփոփում)

Ոչ գծային բարձր կարգի դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումների համար ստացված են գոյության և միակության թեորեմներ ամբողջ բլանդի տարածքի վրա սարդիկյան կշռային տարածությունների նման դասերում: Ապացույցը հիմնված է Գալլերկինի մեթոդի վրա: Ստացված են զնահատականների մոտավոր լուծումների համար: Տրվում են ընդհանուր թեորեմների կիրառումներ ոչ գծային մասնական ածանցյալներով հավասարումների լուծումների գոյության վերաբերյալ $Q = \Omega \times R_+^1$, $\Omega \subset R_x^n$ անվերջ դիսկում:

V. P. GRIGOR'EV. *Nonlinear differential-operator equations on the whole line* (summary)

Global existence and uniqueness theorems for nonlinear differential-operator equations of high order in Sobolev spaces with a weight are obtained. Galerkin's method of obtaining apriori estimates for approximate solutions is used. Applications of abstract theorems to the problem of solvability of nonlinear partial differential equations in the cylinder $Q = \Omega \times R_+^1$, $\Omega \subset R_x^n$ are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. А. Дубинский. Задача Коши для операторно-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 181, № 5, 1968, 1046–1048.
2. Ю. А. Дубинский. Смешанные задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными, Труды ММО, 20, 1969, 205–240.
3. Ю. А. Дубинский. Об одном классе дифференциально-операторных уравнений высокого порядка, ДАН СССР, 187, № 5, 1969, 982–985.
4. M. Tsutsumi, J. Růžička. On the global solution of a certain nonlinear partial differential equation, Proc. Japan. Acad., 45, № 6, 1969, 466–469.
5. В. П. Григорьев. О разрешимости смешанных задач для некоторого класса квазилинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 196, № 1, 1971, 24–27.
6. П. Е. Соболевский. Об уравнениях с операторами, образующими острый угол, ДАН СССР, 116, № 5, 1957, 754–757.
7. М. И. Вишик. Решение системы квазилинейных уравнений, имеющих дивергентную форму, при периодических граничных условиях, ДАН СССР, 137, № 3, 1961, 502–505.
8. М. И. Вишик. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Труды ММО, 12, 1963, 125–184.
9. J. P. Aubin. Un théorème de compacité, C. R. Acad. Sc., 256, 1963, 5042–5044.
10. В. П. Григорьев. Об одной теореме компактности, Труды МЭИ, Высшая математика, вып. 146, 1972, 22–27.
11. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.

С. Д. ГРИГОРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННОЙ С ОДНОРОДНЫМИ КОСМОЛОГИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

0°. Данная работа посвящена исследованию одной динамической системы, возникающей в общей теории относительности и описывающей эволюцию во времени метрики однородной космологической модели V типа (по классификации Бианки, см. [1], стр. 487).

Наиболее актуальными физическими вопросами в этом круге задач являются: вопрос о поведении метрики g_{ij} вблизи космологической сингулярности, где $\det g_{ij}$ обращается в нуль и вопрос об изотропизации метрики при бесконечном расширении пространства. В ряде работ, посвященных этим задачам, применялись как численные, так и аналитические методы ([2], [3], [4] и др.)

Методы качественной теории дифференциальных уравнений в этих задачах были применены С. П. Новиковым в работе [4] при изучении модели IX типа. В последующих работах С. П. Новикова и О. И. Богоявленского проведено полное исследование качественными методами модели IX типа ([6, 7]) и всех остальных моделей в синхронно сопутствующей системе отсчета ([8]). В этих работах предлагалась также программа изучения более общих моделей с произвольным движением вещества.

Эта программа проводится нами в случае физически важной модели V типа (в ней, как частный случай, содержится открытая модель Фридмана) „со скоростями“ в предположении диагональности метрики.

Используя метод работ [6, 7], нам удастся провести регуляризацию исходной системы дифференциальных уравнений: построить компактное многообразие S с границей Γ и динамическую систему на нем, которая в $S \setminus \Gamma$ эквивалентна исходной системе и имеет особые точки, лежащие на границе Γ , по характеру которых можно судить об асимптотическом поведении решений.

Основной результат заключается в том, что в сторону расширения все диагональные метрики изотропизуются, а в сторону сжатия имеют казнеровскую (23) или квазифридмановскую асимптотики (22).

Отметим, что наличие этих асимптотик было установлено в работах [2, 3], однако полное исследование всех возможных в рассматриваемой модели режимов не было проведено.

1°. Однородные космологические модели, как известно, описываются четырехмерными многообразиями M^4 , удовлетворяющими следующим условиям:

- 1) многообразие M^4 диффеоморфно $G \times R^1$, где R^1 — прямая, G — некоторая трехмерная группа Ли;
- 2) на M^4 задана метрика g_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, 3$), имеющая сигнатуру $(+, -, -, -)$;
- 3) метрика g_{ij} инвариантна при правых сдвигах на элементы группы G и удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R = T_i^j, \quad (1)$$

здесь R_i^j — тензор Риччи метрики g_{ij} , R — скалярная кривизна, T_i^j — тензор энергии-импульса материи.

Мы рассматриваем однородные модели, в которых метрика, индуцированная на подмногообразии $G \times t \subset G \times R^1$ (t — временная координата на R^1), имеет сигнатуру $(-, -, -)$. В этом случае на многообразии M^4 можно выбрать линейно независимые векторные поля X_0, X_1, X_2, X_3 такие, что поля X_1, X_2, X_3 касаются каждого из подмногообразий $G \times t$, не зависят от времени t и инвариантны при правых сдвигах на элементы группы G , поле времени $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ ортогонально X_1, X_2, X_3 и, кроме того, $\langle X_0, X_0 \rangle = 1$ (синхронное время); коммутационные соотношения имеют вид $[X_0, X_\alpha] = 0$, $[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$), где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы группы G .

Согласно условиям, указанным выше, положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}(t) = -\langle X_\alpha, X_\beta \rangle$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$) зависит только от времени t и предположение диагональности метрики $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ ($\alpha \neq \beta$) позволяет записать ее на M^4 в виде

$$ds^2 = dt^2 - q_1^2(t) \omega_1^2 - q_2^2(t) \omega_2^2 - q_3^2(t) \omega_3^2,$$

где $q_\alpha^2(t) = q_{\alpha\alpha}(t)$ ($\alpha = 1, 2, 3$), а ω_α — стандартные правоинвариантные 1-формы на G и $\omega_\alpha(X_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$.

В уравнениях (1) мы рассматриваем лишь гидродинамический тензор энергии-импульса пылевидной материи, который в базисе X_0, X_1, X_2, X_3 имеет вид

$$T_i^j = \varepsilon u_i u^j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3),$$

где ε и u^i (функции времени t) соответственно плотность энергии и компоненты 4-скорости частиц материи.

При исследовании уравнений (1) удобно считать, что структурные константы $C_{\alpha\beta}^\gamma$ приведены к одному из канонических типов по

Бианки (V тип: $C_{31}^1 = -C_{13}^1 = 1$, $C_{32}^2 = -C_{23}^2 = 1^*$, остальные структурные константы равны нулю). Выпишем компоненты тензора Риччи метрики (2) для модели V типа (см. 1, стр. 489)

$$\begin{aligned}
 R_0^0 &= \left[-\frac{\dot{q}_1}{q_1} - \frac{\dot{q}_2}{q_2} - \frac{\dot{q}_3}{q_3} \right] - \left(\frac{\dot{q}_1}{q_1} \right)^2 - \left(\frac{\dot{q}_2}{q_2} \right)^2 - \left(\frac{\dot{q}_3}{q_3} \right)^2, \\
 R_3^0 &= \frac{\dot{q}_1}{q_1} + \frac{\dot{q}_2}{q_2} - \frac{2\dot{q}_3}{q_3}, \\
 R_1^1 &= -\frac{(\dot{q}_1 q_2 q_3)'}{q_1 q_2 q_3} - \frac{2}{q_1^2}, \\
 R_2^2 &= -\frac{(\dot{q}_1 q_2 q_3)'}{q_1 q_2 q_3} - \frac{2}{q_1^2}, \\
 R_3^3 &= -\frac{(\dot{q}_1 q_2 q_3)'}{q_1 q_2 q_3} - \frac{2}{q_1^2},
 \end{aligned} \tag{2'}$$

$$R_1^0 = R_2^0 = 0, \quad R_\alpha^\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{2''}$$

Из (2') и (2'') видно, что все недиагональные компоненты тензора Риччи тождественно равны нулю, кроме компоненты R_3^0 . Отсюда следует, что компоненты 4-вектора скорости u_1 и u_2 для диагональной метрики (2) равны нулю и уравнения Эйнштейна, соответствующие нулевым компонентам тензора Риччи (2'') выполнены тождественно. Выпишем все остальные уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned}
 R_0^0 - \frac{1}{2} R &= \varepsilon u_0 u^0, \\
 R_3^0 &= \varepsilon u_0 u_3, \\
 R_1^1 - \frac{1}{2} R &= 0, \\
 R_2^2 - \frac{1}{2} R &= 0, \\
 R_3^3 - \frac{1}{2} R &= \varepsilon u_3 u^3.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Исключив из первых трех уравнений компоненты 4-скорости u^0 , u^3 и энергию ε , получаем замкнутую систему на компоненты метрики $q_i(t)$

$$\begin{aligned}
 R_1^1 - \frac{1}{2} R &= 0, \\
 R_2^2 - \frac{1}{2} R &= 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

* Базис X_1, X_2, X_3 здесь отличен от базиса, использованного в [1], см. [7], стр. 30.

$$R_3^3 - \frac{1}{2} R = \frac{(R_3^0)^2}{q_3^2 \left(R_3^0 - \frac{1}{2} R \right)}.$$

Сведение этой системы второго порядка к системе первого порядка осуществляется методом, предложенным в работе [7]. В этой работе показано, что уравнения Эйнштейна в синхронно-сопутствующей системе отсчета ($u^0=1$, $u^i=0$) для модели IX типа и некоторых других эквивалентны гамильтоновой системе с гамильтонианом H , где

$$H = \left(R_3^0 - \frac{1}{2} R \right) \sqrt{-g} = T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) + V(q_1, q_2, q_3), \quad (5)$$

а $g = \det g_{ij} = -(q_1 q_2 q_3)^2$.

Отметим, что хотя в рассматриваемой задаче окончательные уравнения и не являются гамильтоновыми, однако в их записи также участвует функция H , слагаемые которой в данном случае имеют следующий вид:

$$T = \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_3 + q_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_3, \quad (5')$$

$$V = -\frac{3q_1 q_2}{q_3}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что система (4) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = h_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = h_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = h_3 + \frac{(R_3^0)^2 (\sqrt{-g})^3}{(q_3)^3 H},$$

где

$$L = T - V = \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_3 + q_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_3 + \frac{3q_1 q_2}{q_3},$$

$$h_1 = \frac{2q_1 \dot{q}_2^2}{q_1 q_2 q_3}, \quad h_2 = \frac{2q_1^2 \dot{q}_2}{q_1 q_2 q_3}, \quad h_3 = -\frac{4q_1^2 \dot{q}_2^2}{q_1 q_2 q_3}, \quad (6')$$

$$R_3^0 = \frac{\dot{q}_1}{q_1} + \frac{\dot{q}_2}{q_2} - \frac{2\dot{q}_3}{q_3}. \quad (6'')$$

Далее, сделав преобразование Лежандра с формальным лагранжианом L

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} (q_j q_k), \quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Мы представим систему (6) как систему уравнений в фазовом пространстве с „координатами“ q_i и „импульсами“ p_i (7).

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} - h_1, & \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} - h_2, & \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial q_3} - h_3 - \frac{(R_0^3)^2 (V - g)^2}{(q_3)^3 H}, & \dot{q}_3 &= \frac{\partial H}{\partial p_3},\end{aligned}\quad (8)$$

где функция H определена формулами (5), (5'), а функция R_0^3 — формулой (6'') и в новых координатах p_i, q_i они имеют вид

$$H = \frac{1}{4 q_1 q_2 q_3} \left(2 \sum_{i < j}^3 p_i q_i p_j q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 - 12 q_1^2 q_2^2 \right),$$

$$R_0^3 = \frac{1}{q_1 q_2 q_3} (2 p_2 q_3 - p_1 q_1 - p_3 q_2).$$

Прежде чем переходить к исследованию системы (8) укажем область фазового пространства, на которой система дифференциальных уравнений (8) эквивалентна системе уравнений Эйнштейна (1). Эта область выделяется физическими условиями: положительность плотности энергии ε и единичность 4-скорости u^4 .

Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned}H &= \varepsilon u_0^2 \sqrt{-g} \geq 0, \\ H^2 - (q_3 R_0^3 \sqrt{-g})^2 &= (\varepsilon u_0 \sqrt{-g})^2 [u_0^2 - q_3^2 (u^3)^2] = \\ &= (\varepsilon u_0 \sqrt{-g})^2 \geq 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Утверждение. Область, которая выделяется неравенствами (9), инвариантна (т. е. траектории системы (8) не выходят из этой области).

Действительно, производная, в силу системы дифференциальных уравнений (8), от правой части неравенства (9) равна

$$\frac{d}{dt} [H^2 - q_3^2 (R_0^3 \sqrt{-g})^2] = \frac{4 R_0^3 \sqrt{-g}}{H} [H^2 - (q_3 R_0^3 \sqrt{-g})^2].$$

Следовательно, многообразие $H^2 - (q_3 R_0^3 \sqrt{-g})^2 = 0$, граница области (9), является инвариантным многообразием, отсюда следует, что ни одна траектория из области (9) не выходит из этой области.

2°. Перейдем к преобразованию системы дифференциальных уравнений (8) и к изучению ее методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Сделаем замену координат

$$P_i = p_i q_i, \quad Q_i = q_i^2$$

и замену времени

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{q_1 q_2 q_3}.$$

Система (8) в новых координатах и времени τ принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{P}_1 &= H_0 + 4 Q_1 Q_2, \\ \dot{P}_2 &= H_0 + 4 Q_1 Q_2, \\ \dot{P}_3 &= H_0 + 4 Q_1 Q_2 - \frac{(2P_3 - P_1 - P_2)^2 Q_1 Q_2}{H_0}, \\ \dot{Q}_1 &= Q_1 (P_2 + P_3 - P_1), \\ \dot{Q}_2 &= Q_2 (P_1 + P_3 - P_2), \\ \dot{Q}_3 &= Q_3 (P_1 + P_2 - P_3).\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь

$$H_0 = q_1 q_2 q_3, \quad H = \frac{1}{4} \left(2 \sum_{i < j} P_i P_j - \sum_{i=1}^3 P_i^2 - 12 Q_1 Q_2 \right).\tag{11}$$

Напомним, что система (10) рассматривается в области (9), которая в новых координатах имеет вид

$$H_0^2 - (2P_3 - P_1 - P_2)^2 Q_1 Q_2 \geq 0, \quad H_0 > 0.\tag{12}$$

Область, определенную неравенством (12), обозначим через S' , а границу ее — через Γ .

Заметим, что хотя в правой части одного из уравнений (10) содержится выражение с делением на H_0 , однако это выражение всюду в области S' остается регулярным, поскольку

$$\frac{(2P_3 - P_1 - P_2)^2 Q_1 Q_2}{H_0} \leq H_0.$$

Отсюда следует, что при $H_0 \rightarrow 0$ это выражение $\rightarrow 0$, поэтому при $H_0 = 0$ мы доопределим это выражение его предельными значениями.

Введем новые координаты

$$v_1 = P_1 + P_2, \quad v_2 = P_1 - P_2, \quad v_3 = 2P_3 - P_1 - P_2, \quad r = (Q_1 Q_2)^{\frac{1}{2}}.\tag{12'}$$

В этих координатах функции H_0 имеет вид суммы квадратов:

$$H_0 = \frac{1}{4} (v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 12r^2).$$

Многообразие S' в этих координатах некомпактно. Мы компактифицируем это многообразие на бесконечности по v_1 путем введения новых координат:

$$v_2 = \frac{v_2}{v_1}, \quad v_3 = \frac{v_3}{v_1}, \quad \bar{r} = \frac{r}{v_1}.\tag{13'}$$

Заметим, что при направлении времени в сторону сжатия из условия $H_0 \geq 0$ (11) следует, что $P_1, P_2, P_3 < 0$, поэтому $v_1 = P_1 + P_2 < 0$. Сделаем монотонную замену времени $\frac{d\tau_1}{d\tau} = -v_1$. Система (10) в координатах (13) и времени τ_1 имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{v}}_2 &= \bar{v}_2 (2H_1 + 8\bar{r}^2), \\ \ddot{\bar{v}}_3 &= (1 + 2\bar{v}_3)(H_1 + 4\bar{r}^2) + \frac{(1 + 2\bar{v}_3)\bar{r}^2}{H_1}, \\ \ddot{\bar{r}} &= \bar{r} (-1 - \bar{v}_3 + 2H_1 + 8\bar{r}^2), \\ \dot{Q}_3 &= Q_3 \bar{v}_3, \\ \dot{\bar{v}}_1 &= -v^1 (2H_1 + 8\bar{r}^2).\end{aligned}\tag{14}$$

В координатах (13') мы приходим к многообразию с $\bar{r} \leq 0$, но, для удобства, мы рассмотрим систему (14) при $\bar{r} \geq 0$ (уравнения (14) симметричны по отношению к изменению знака координаты $\bar{r}$). Первые три уравнения образуют замкнутую подсистему, определенную на компактном многообразии S , выделенном неравенствами:

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{1}{4} (1 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 - 12\bar{r}^2) \geq 0, \\ H_1 - |(1 + 2\bar{v}_3)| \bar{r} &\geq 0, \bar{r} \geq 0.\end{aligned}\tag{15}$$

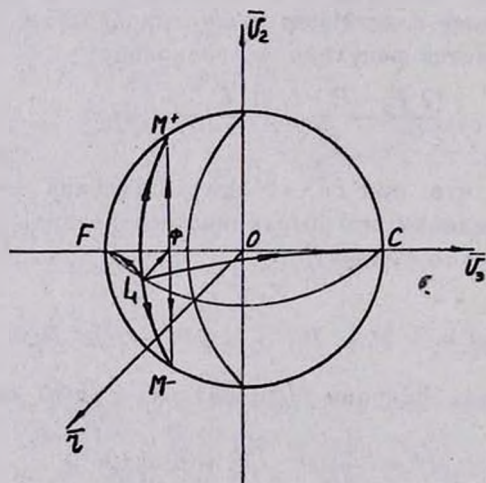


Рис 1.

Система (14) на многообразии S , изображенном на рис. 1, имеет следующие инвариантные многообразия:

1. $v_3 = -\frac{1}{2}$. Траекториям на этой плоскости соответствуют решения модели V типа без скоростей.

2. $\bar{v}_2=0$. Решения „типа Тауба“, где $P_1 \equiv P_2$. Тогда $\frac{Q_1}{Q_2} \equiv \text{const.}$

3. $\bar{r}=0$. Эта плоскость является границей, приклеенной к многообразию S' в результате компактификации на бесконечности по v_1 .

Отметим, что в силу системы (14) $\frac{\dot{\bar{v}}_2}{\bar{v}_1} > 0$, поэтому многообразие $\bar{v}_2=0$ неустойчиво, т. е. решения „типа Тауба“ неустойчивы. Далее, многообразие $\bar{v}_3 = -\frac{1}{2}$ также неустойчиво. Действительно

$$\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right)^* = 2\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right) \left(H_1 + 4\bar{r}^2 + \frac{2\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right)\bar{r}^2}{H_1} \right), \quad (16)$$

поэтому $\frac{\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right)^*}{\bar{v}_3 + \frac{1}{2}} > 0$ при $\bar{v}_3$ близком к $-\frac{1}{2}$. Отметим, что обе

области $\bar{v}_3 > -\frac{1}{2}$ и $\bar{v}_3 < -\frac{1}{2}$ инвариантны. В области $\bar{v}_3 > -\frac{1}{2}$ всегда $\dot{\bar{v}}_3 > 0$, поэтому никакая траектория в этой области не подходит к инвариантному неустойчивому многообразию $\bar{v}_3 = -\frac{1}{2}$, т. е. решения без скоростей являются неустойчивыми.

Из уравнения $\dot{\bar{v}}_2 = \bar{v}_2(2H_1 + 8\bar{r}^2)$ следует, что в особых точках системы (14) либо $\bar{v}_2=0$, либо $\bar{r}=0$ и $H_1=0$, т. е. особые точки

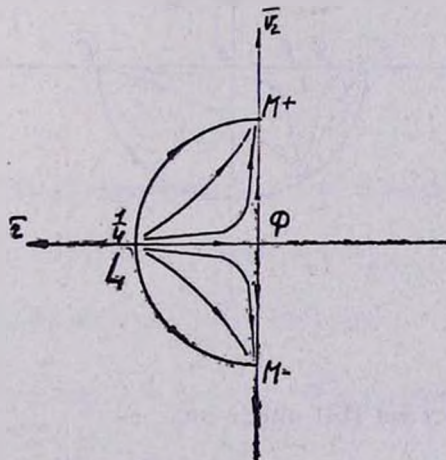


Рис. 2.

лежат на одном из инвариантных многообразий 1, 2, 3. Рассмотрим систему (14) на этих инвариантных многообразиях.

1. $\bar{v}_2 = -\frac{1}{2}$. Система (14) имеет вид:

$$\dot{\bar{v}}_3 = \bar{v}_2 (2H_1 + 8\bar{r}^3), \quad \dot{\bar{r}} = \bar{r} \left(-\frac{1}{2} + 2H_1 + 8\bar{r}^3 \right). \quad (17)$$

Эта система имеет следующие особые точки: отталкивающая особая точка L , неустойчивая особая точка Φ и две притягивающие особые точки M^+ , M^- (см. рис. 2). Фазовый портрет этой системы в силу наличия монотонной функции $\bar{v}_2$, однозначно определен. Особая точка $L \left(\bar{r} = -\frac{1}{4}, \bar{v}_3 = 0 \right)$ является отталкивающей особой точкой для всей системы (14). При направлении времени в сторону расширения, все траектории системы (14), в силу наличия монотонных функций $\bar{v}_2$, $\left| \bar{v}_3 + \frac{1}{2} \right|$, входят в особую точку L . Этой особой точке соответствует точное решение — метрика плоского пространства Минковского

$$ds^2 = dt^2 - t^2 (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2^2 + c_3 \omega_3^2) \quad (c_i = \text{const}; i=1, 2, 3), \quad (18)$$

которая при направлении времени в сторону расширения является устойчивой асимптотикой решений. Следовательно, все решения в сторону расширения изотропизуются. Сепаратрисе $\bar{v}_2 = 0$, соединяющей особые точки L и Φ , соответствует открытое решение Фридмана-

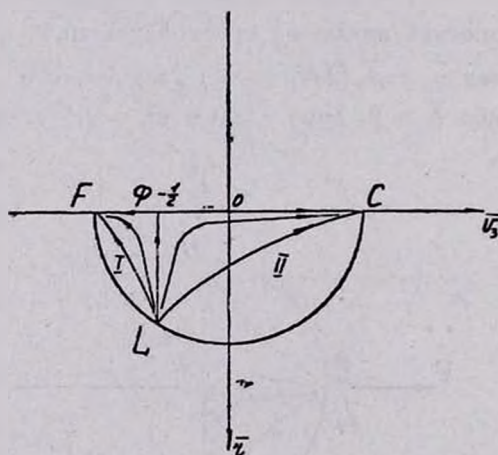


Рис. 3.

2. $\bar{v}_2 = 0$. Система (14) имеет вид

$$\dot{\bar{v}}_3 = (2\bar{v}_3 + 1)(H_1 + 4\bar{r}^3 + \frac{(2\bar{v}_3 + 1)\bar{r}^2}{H_1}), \quad (19)$$

$$\dot{\bar{r}} = \bar{r} (-1 - \bar{v}_3 + 2H_1 + 8\bar{r}^3).$$

Напомним, что система (14) рассматривается в области (15), ее границы показаны линиями I и II, которые являются траекториями системы (19) (см. рис. 3).

Очевидно

$$H_1 + 4\bar{r}^2 + \frac{(2\bar{v}_3 + 1)\bar{r}^2}{H_1} > 0 \text{ при } \bar{v}_3 > -\frac{1}{2}. \quad (20)$$

Однако легко видеть, что и в области $\bar{v}_3 < -\frac{1}{2}$ (15), выражение (20) положительно.

Поэтому $\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right)$ — монотонная функция в обеих областях, и фазовый портрет системы (19) однозначно определен: система (19) имеет две притягивающие особые точки F , C и неустойчивую особую точку Φ и отталкивающую особую точку L (рис. 3).

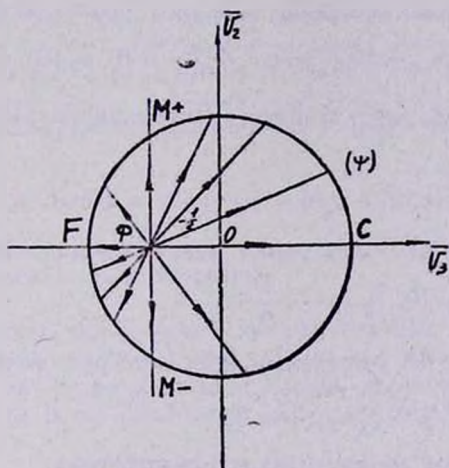


Рис. 4.

3. Система (14) на многообразии $\bar{r} = 0$ имеет вид

$$\dot{\bar{v}}_2 = 2H_1\bar{v}_2, \quad \dot{\bar{v}}_3 = 2H_1\left(\bar{v}_3 + \frac{1}{2}\right). \quad (21)$$

Очевидно, для траекторий этой системы

$$\left(\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_3 + \frac{1}{2}}\right)' = 0, \text{ т. е. } \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_3 + \frac{1}{2}} = \text{const.}$$

Траектории идут по лучам, проходящим через точку

$$\Phi: (\bar{v}_3 = 0, \bar{v}_2 = -\frac{1}{2}, \bar{r} = 0).$$

Все граничные точки круга $H_1 \geq 0$, $\bar{r} = 0$ являются притягивающими особыми точками системы (14) и, в частности, (21). Обозначим эти особые точки (ψ) , где ψ — угол ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) (рис. 4).

Суммируем информацию, полученную о системе (14). Система (14) имеет две монотонные функции

$$\bar{v}_3 \text{ и } \left| \bar{v}_3 + \frac{1}{2} \right| \text{ (в области (15)).}$$

Система (14) имеет три инвариантных многообразия 1, 2, 3. Особые точки системы (14):

а) отталкивающая особая точка $L \left(\bar{r} = \frac{1}{4}, \bar{v}_2 = 0, \bar{v}_3 = -\frac{1}{2} \right)$, в сторону расширения этой точке отвечает асимптотика открытого решения Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - t^2 (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2^2 + c_3 \omega_3^2), \quad c_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

справедливая для всех решений, т. е. все решения изотропизуются;

б) неустойчивая особая точка $\Phi \left(\bar{r} = 0, \bar{v}_2 = 0, \bar{v}_3 = -\frac{1}{2} \right)$, ей отвечает в сторону сжатия квазифридмановская асимптотика

$$ds^2 = dt^2 - t^{\frac{4}{3}} (c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_2^2 + c_3 \omega_3^2), \quad c_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (22)$$

На многообразии S эта точка имеет единственную входящую в нее сепаратрису $\bar{v}_2 = 0, \bar{v}_3 = -\frac{1}{2}$;

в) окружность (ψ) притягивающих особых точек $\bar{r} = 0$,

$$1 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 = 0.$$

Этим особым точкам соответствует асимптотика:

$$Q_1 = \bar{Q}_1 t^{2p_1}, \quad Q_2 = \bar{Q}_2 t^{2p_2}, \quad Q_3 = \bar{Q}_3 t^{2p_3}, \quad \bar{Q}_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Показатели степеней

$$p_1 = \frac{1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3}{2 + \bar{v}_3}, \quad p_2 = \frac{1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3}{2 + \bar{v}_3}, \quad p_3 = \frac{-\bar{v}_1}{2 + \bar{v}_3} \quad (24)$$

на окружности $\bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2 = 1$ удовлетворяют казнеровским тождествам:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Решения „без скоростей“ в сторону сжатия имеют асимптотику (23) с показателями (24) при $\bar{v}_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{v}_3 = -\frac{1}{2}$ (см. [8]), в то время как для метрики с одной скоростью реализуются любыми наборами казнеровских показателей (p_1, p_2, p_3) .

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *В сторону расширения все диагональные метрики модели V типа изотропизуются, а в сторону сжатия имеют кэшеровскую асимптотику (23) или квазифридмановскую асимптотику (22).*

В заключение приношу глубокую благодарность моему научному руководителю профессору С. П. Новикову за постановку задачи и внимание к работе и О. И. Богоявленскому за обсуждение результатов.

Институт математики АН Армянской ССР,

Математический институт

им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила 5.VI.1975

Ս. Դ. ԳՐԻԳՐԻԱՆ. Կոսմոլոգիական մոդելների հետ կապված դինամիկ սխեման հետազոտություն (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է դինամիկ սխեման, որը նկարագրում է V-րդ տիպի համասեռ կոսմոլոգիական մոդելը (նյութի շարժման դեպքում) ընդհանուր հարաբերականության տեսությունում: Դիֆերենցիալ հավասարումների որակական տեսության մեթոդներով ցույց է տրված, որ տարածության անվերջ լայնացման ուղղությամբ անկյունագծային մետրիկաներն իզոտրոպացվում են, իսկ սեղմվելու ուղղությամբ՝ ունեն կաղնեռական կամ կվազիֆրիդմանյան ասիմպտոտիկաներ:

S. D. GRIGORIAN. *Investigation of a dynamical system connected with homogenous cosmological models (summary)*

The paper considers the dynamical system describing the so-called V type homogenous cosmological model (with motion of the matter) in the general relativity theory. It is shown, that in the direction of infinite expansion all diagonal metrics become isotropical while in the direction of contraction they have Kasherian or quasi-Fridman asymptotics.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, Изд. "Наука", М., 1973.
2. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников. Проблемы релятивистской космологии, УФН, 80, № 3, 1963, 391—438.
3. Л. П. Грищук, А. Г. Дорошкович, И. Д. Новиков. Анизотропия ранних стадий космологического расширения и реликтового излучения, ЖЭТФ, 55, № 6, 1968, 2281—2290.
4. С. П. Новиков. О некоторых свойствах космологических моделей, ЖЭТФ, 62, № 6, 1972, 1977—1989.
5. С. П. Новиков. О некоторых свойствах космологических моделей, Препринт ИТФ им. Л. Д. Ландау, Черногловка, ноябрь 1971 — апрель 1972.
6. О. И. Богоявленский, С. П. Новиков. Особенности космологической модели Биянки IX с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений, ЖЭТФ, 64, № 5, 1973, 1475—1494.
7. О. И. Богоявленский, С. П. Новиков. Качественная теория однородных космологических моделей, Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 1, 1975, 7—43.
8. О. И. Богоявленский. Качественная теория однородных космологических моделей II, Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 2, 1976.

Լ. Խ. Մեհրաբյան, N_α դասի ֆունկցիաների ռեալիզացումը	369
Ա. Ն. Հայրապետյան, Վ. Ի. Գավրիլով. Մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային վարքի վերաբերյալ Մայերի թեորեմի ուժեղացումը	390
Է. Լ. Ղազարյան. Ոչ-գծային եզրային խնդիր կվազիգծային էլլիպտիկ հավասարումների համար	400
Ս. Գ. Սիմոնյան, Մ. Վ. Ֆեդորյուկ. Խիլի սխտեմի մոլտրիպլիկատորների և անկայունության զոնաների ասիմպտոտիկան	411
Կ. Հ. Յադջյան. Խառը խնդիրներ լսիմետրիզացվող հիպերբոլական համակարգերի որոշ դասերի համար	424
Վ. Գ. Բոլտյանսկի. Ուռուցիկ կոնների բաժանելիությունը և Խելիի թեորեմը	432
Ժ. Ս. Նալբանդյան, Վ. Դ. Շիցլիկ. Ֆուրյեի արագ ձևափոխության իրականացումը մասնագիտացված պրոցեսորում	440
Վ. Պ. Գրիգորև. Ոչ գծային դիֆերենցիալ-օպերատորային հավասարումներ ամբողջ թվային առանցքի վրա	450
Ս. Դ. Գրիգորյան. Կոսմոլոգիական մոդելների հետ կապված դինամիկ սխտեմի հետազոտությունը	468

СОДЕРЖАНИЕ

Л. Х. Мехрабян. Реализация функций класса N_α	369
А. Н. Айрапетян, В. И. Гаврилов. Усиления теоремы Мейера, касающейся граничного поведения мероморфных функций	390
Э. Л. Казарян. Нелинейная краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений	400
С. Г. Симонян, М. В. Федорук. Асимптотика мультипликаторов и зон неустойчивости системы Хилла	411
К. А. Ядджян. Смешанные задачи для некоторых классов несимметризуемых гиперболических систем	424
В. Г. Болтянский. Отделимость выпуклых конусов и теорема Хелли	432
Ж. С. Налбандян, В. Д. Шиглик. Реализация быстрого преобразования Фурье на специализированном процессоре	440
В. П. Григорьев. Нелинейные дифференциально-операторные уравнения на всей оси	450
С. Д. Григорян. Исследование одной динамической системы, связанной с однородными космологическими моделями	468

CONTENTS

L. Kh. Mehrabian. Realisation of functions from the class N_α	369
A. N. Ajrapetian, V. I. Gavrilov. Generalizations of a theorem of Meier, concerning the boundary behaviour of meromorphic functions	390
E. L. Kazarian. Non-linear boundary problem for quasi-linear elliptical equations	400
S. G. Simontan, M. V. Fedoryuk. The asymptotics of multipliers and non-stability zones of Hill's system	411
K. H. Yagdjian. Mixed problem for some non symmetrizable hyperbolic systems	424
V. G. Boltiansky. Separability of convex cones and Helly's theorem	432
J. S. Nalbandian, V. D. Schiglik. A fast Fourier transform on a special-purpose processor	440
V. P. Grigor'ev. Nonlinear differential-operator equations on the whole line	450
S. D. Grigorian. Investigation of a dynamical system connected with homogeneous cosmological models	468