# ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
# ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
# ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
# ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
# ИЗВЕСТИЯ
# АКАДЕМИИ НАУК
# АРМЯНСКОЙ ССР

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
## МАТЕМАТИКА

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН
Армянской ССР, серия «Математика».

1976 I.II. w 4

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.
2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.
3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.
4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.
5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.
6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.
7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.
8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.
9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.
10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.
11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 4. 1976 Математика

П. Э. МЕЛИК-АДАМЯН

# К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство $[H]$—кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $H$ и $J$—оператор со свойствами $J^* = -J$, $J^2 = -I$ ($I$ — единичный оператор в $H$). Очевидно, операторы $P_\pm = \frac{1}{2}(I \mp iJ)$ являются взаимно ортогональными проекторами на собственные подпространства $H_\pm = P_\pm H$ оператора $J$, причем $J = iP_+ - iP_-$. В дальнейшем предполагается, что $\dim H_+ = \dim H_-$. В силу этого в $H$ можно построить частично изометрический оператор $K$ с исходным подпространством $H_+$ и финальным подпространством $H_-$, т. е. такой, что $K^*K = P_+$, $KK^* = P_-$. С каждым оператором $K$ связывается проектор $P_K = \frac{1}{2}(I + K + K^*)$, удовлетворяющий условию

$$JP_K + P_K J = J. \tag{0.1}$$

Заметим, что оператор $iJ$ — эрмитов индефинитный и сужение оператора $K$ на $H_-$, которое мы также будем обозначать через $K$, является угловым оператором гипермаксимального $iJ$-нейтрального подпространства $H_k = P_k H$ (см. [1]). Проекторы $P_\pm$, $P_K$ связаны соотношениями

$$P_\pm P_K P_\pm = \frac{1}{2} P_\pm, \quad P_K P_\pm P_K = \frac{1}{2} P_K. \tag{0.2}$$

Известно [2], что дифференциальное выражение

$$J \frac{dx(r)}{dr} - V(r)\, x(r) \quad (0 \leqslant r < \infty), \tag{0.3}$$

где $V(r)$ — функция, значениями которой являются ограниченные самосопряженные операторы в $H$, равномерно измеримая и такая, что

$$\int_0^\infty \|V(r)\|\, dr < \infty \tag{0.4}$$

и граничное условие

$$P_K\, x(0) = x(0) \tag{0.5}$$

определяют самосопряженный оператор $\mathbf{L}$ в пространстве $L_2(0, \infty; H)$. Через $\mathbf{L}_0$ будем обозначать оператор рассматриваемого типа, соответствующий случаю $V(r)\equiv 0$. В наших рассмотрениях, не ограничивая общности (см. [2]) можно предполагать, что потенциал $V(r)$ нормализован, т. е. $JV(r)=-V(r)J$.

Для канонических дифференциальных операторов (0.3)—(0.5) развиты различные подходы к теории рассеяния. В работе М. Г. Крейна и Ф. Э. Мелик-Адамяна [3] рассмотрено уравнение

$$J\frac{dx(r,\lambda)}{dr}=\lambda x(r,\lambda)+V(r)\,x(r,\lambda)\quad(0\leqslant r<\infty)\tag{0.6}$$

с граничным условием (0.5) в случае $\dim H<\infty$ и матрица рассеяния ($S$-матрица) определена через асимптотическое поведение решения задачи (0.6)—(0.5). Другой подход, связанный с волновыми операторами, развит В. М. Адамяном в [2], где введено понятие субоператора рассеяния. В этой же работе показано, что к каноническим операторам с финитным потенциалом ($V(r)=0$ при $r\geqslant a>0$) применима схема теории рассеяния, предложенная П. Лаксом и Р. Филлипсом [4].

В § 1 настоящей работы без указанных ограничений показывается, что матрицы рассеяния, фигурирующие в каждом из этих подходов, совпадают.

В § 2, сведением к оператору на полуоси, изучается канонический оператор вида (0.3) на всей вещественной оси. Такой оператор можно рассматривать как самосопряженное расширение с выходом оператора, задаваемого дифференциальным выражением (0.3) на полуоси $[0,\infty)$. Дается описание $S$-матриц (субоператоров рассеяния) для таких расширений в рамках теории унитарных сцеплений полуунитарных операторов [5], являющейся обобщением теории Лакса-Филлипса.

В случае, когда значениями потенциальной функции $V(r)$ при $r<0$ являются конечномерные операторы, приводится решение следующей обратной задачи: восстановление потенциала канонического оператора на отрицательной полуоси с помощью характеристик $S$-матрицы, не зависящих от потенциала на положительной полуоси.

Автор выражает искреннюю благодарность В. М. Адамяну за постановку задач и обсуждение.

## § 1. Эквивалентность различных определений $S$-матрицы канонического оператора на полуоси

1.1. Обозначим через $E(r,\lambda)$ оператор Коши уравнения (0.6), т. е. операторное решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $E(0,\lambda)=I$, а через $E_0(r,\lambda)=e^{-J\lambda r}$ — оператор Коши уравнения ($0.6_0$), получающегося из (0.6) при $V(r)\equiv 0$.

Известно (см. [6]), что функция $E(r,\lambda)$ $J$-унитарна при $\operatorname{Im}\lambda=0$, $iJ$ — нерастягивающая при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ и $iJ$ — несжимающая при $\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$. Оператор Коши обратим для всех $\lambda$ и имеет место соотношение

$$E^* (r, \bar{\lambda})\, iJE (r, \lambda) = iJ. \tag{1.1}$$

Приведем используемые в дальнейшем формулы, полученные в работе [2].

Оператор Коши $E (r, \lambda)$ допускает оценку

$$\| E (r, \lambda) \| \leqslant e^{|\operatorname{Im} \lambda| r + \int\limits_0^r \| V (s) \| ds}. \tag{1.2}$$

Для функции $A (r, \lambda) = E_0^{-1} (r, \lambda)\, E (r, \lambda)$ справедливо представление

$$A (r, \lambda) = I + \int\limits_0^r e^{2J\lambda r}\, \Gamma (r, s)\, ds, \tag{1.3}$$

где $\Gamma (r, s) (r \geqslant s,\ 0 \leqslant r < \infty)$ при фиксированном $r$ принадлежит пространству $L_1 (0, r; [H])$.

Из (0.4) и оценки (1.2) следует, что при $r \to \infty$ последовательность функций $A (r, \lambda)$ равномерно по $\lambda \in (-\infty, \infty)$ в равномерной операторной топологии сходится к операторной функции $A (\lambda)$, представимой в виде

$$A (\lambda) = I + \int\limits_0^\infty e^{2J\lambda s}\, \Gamma (s)\, ds. \tag{1.4}$$

Здесь $\Gamma (s) \in L_1 (0, \infty; [H])$ является пределом в $L_1 (0, \infty; [H])$ последовательности функций $\Gamma (r, s)$ при $r \to \infty$.

Операторная функция $A (\lambda)$ является оператором асимптотической эквивалентности ($A$-оператором) уравнений (0.6) и (0.6$_0$) (см. [6]). Из $J$-унитарности $E (r, \lambda)$ при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ следует $J$-унитарность функции $A (\lambda)$.

Обозначим через $\Pi_\pm$, соответственно, замкнутые верхнюю и нижнюю полуплоскости. Из (1.3) и (1.4) видно, что функции $P_\pm A (r, \lambda)$, и $P_\pm A (\lambda)$, первоначально заданные на вещественной оси, формулами

$$P_\pm A (r, \lambda) = P_\pm + \int\limits_0^r e^{\pm 2i\lambda s} P_\pm \Gamma (r, s)\, ds, \quad \lambda \in \Pi_\pm,$$

$$P_\pm A (\lambda) = P_\pm + \int\limits_0^\infty e^{\pm 2i\lambda s} P_\pm \Gamma (s)\, ds, \quad \lambda \in \Pi_\pm$$

продолжаются до функций, голоморфных в верхней и нижней полуплоскостях. Как и в [2] можно показать, что последовательности $P_\pm A (r, \lambda)$ при $r \to \infty$ сходятся в равномерной операторной топологии равномерно по $\lambda \in \Pi_\pm$ к функциям $P_\pm A (\lambda)$.

Так как функция $E(r, \lambda)$ обратима, то из (1.1) имеем

$$E^{-1}(r, \lambda) = -JE^{*}(r, \overline{\lambda})\, J,$$

отсюда, используя оценку (1.2), получим

$$\|x\| = \|E^{-1}(r, \lambda)\, E(r, \lambda)\, x\| \leqslant \|JE^{*}(r, \overline{\lambda})\, J\| \, \|E(r, \lambda)\, x\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{|\operatorname{Im} \lambda|\, r + \int\limits_0^{\infty} \|V(s)\|\, ds} \|E(r, \lambda)\, x\|$$

или

$$\|E(r, \lambda)\, x\| \geqslant e^{-(|\operatorname{Im} \lambda|\, r + \int\limits_0^{\infty} \|V(s)\|\, ds)} \cdot \|x\|. \qquad (1.5)$$

1.2. Рассмотрим задачу (0.6)—(0.5). Так как эта задача имеет единственное решение, то оно запишется в виде

$$x(r, \lambda) = E(r, \lambda) \cdot P_K\, x_0, \text{ где } x_0 \in H.$$

Из определения $A$-оператора следует асимптотика

$$x(r, \lambda) = E_0(r, \lambda)\, A(\lambda)\, P_K\, x_0 + o(1), \quad r \to \infty.$$

Рассматривая пространство $H$ как ортогональную сумму

$$H = H_{+} \oplus H_{-}, \qquad (1.6)$$

имеем

$$x(r, \lambda) = e^{i\lambda r} \frac{1}{2} (P_{-} A(\lambda)\, P_{+} + P_{-} A(\lambda)\, P_{-} K)\, x_{-} +$$

$$+ e^{-i\lambda r} \frac{1}{2} (P_{+} A(\lambda)\, P_{+} + P_{-} A(\lambda)\, P_{-} K)\, x_{+} + o(1),$$

где $x_{+} = x_{0+} + K^{*} x_{0-}$, а $x_{0\pm} = P_{\pm} x_0$. Из $J$-унитарности функции $A(\lambda)$ следует (см. [7]), что для любого оператора $Z$, отображающего $H_{+}$ в $H_{-}$ с $\|Z\| \leqslant 1$, оператор $(P_{+} A(\lambda)\, P_{+} + P_{+} A(\lambda)\, P_{-} Z)$, как оператор, действующий из $H_{+}$ в $H_{-}$, имеет ограниченный обратный. Поэтому

$$|x(r, \lambda)| = e^{i\lambda r} S(\lambda)\, y_{+} + e^{-i\lambda r} y_{+} + o(1), \quad r \to \infty, \qquad (1.7)$$

где

$$S(\lambda) = (P_{-} A(\lambda)\, P_{+} + P_{-} A(\lambda)\, P_{-} K)(P_{+} A(\lambda)\, P_{+} + P_{+} A(\lambda)\, P_{-} K)^{-1}, \qquad (1.8)$$

а $y_{+} = \frac{1}{2} (P_{+} A(\lambda)\, P_{+} + P_{+} A(\lambda)\, P_{-} K)\, x_{+}$. Оператор-функция $S(\lambda)$ называется $S$-матрицей оператора L при асимптотическом подходе (см. [3]).

При разложении (1.6) функция $A(\lambda)$ представляется в виде блочной матрицы. Из (1.8) видно, что $S(\lambda)$ является ассоциированным с этой матрицей дробно-линейным преобразованием углового оператора $K$. Из $J$-унитарности $A(\lambda)$ и изометричности оператора $K$ следует (см. [7]), что $S(\lambda)$ является изометрическим отображением $H_+$ на $H_-$. Поэтому, имея (1.7), $S$-матрицу можно интерпретировать как угловой оператор гипермаксимального нейтрального подпространства $H_\lambda = \{x; x = x_+ + S(\lambda)x_+, x_+ \in H_+\}$ такого, что решение $x(r, \lambda)$ уравнения (0.6) с граничным условием из $H_K$, на бесконечности асимптотически ведет себя как решение невозмущенного уравнения (0.6$_0$) с граничным условием из $H_\lambda$.

Обозначим

$S_\pm(\lambda) = P_\pm A(\lambda) P_+ + P_\pm A(\lambda) P_- K$. Так как $P_K = \frac{1}{2}(I + K + K^*)$,

то

$$S_\pm(\lambda) = 2P_\pm A(\lambda) P_K P_+. \tag{1.9}$$

Отсюда, используя (1.4), получим

$$S_\pm(\lambda) = 2\left(P_\pm P_K P_+ + \int\limits_0^\infty e^{\pm 2i\lambda t} P_\pm \Gamma(t) P_K P_+ \, dt\right). \tag{1.10}$$

Последнее означает, что $S_\pm(\lambda)$ продолжается до функций, голоморфных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Обозначим через $\mathbf{R}_\pm(N, \Pi_\pm)$ кольца операторных функций $F_\pm(\lambda)$, действующих в гильбертовом пространстве $N$ и представимых в виде

$$F_\pm(\lambda) = C_0 + \int\limits_0^\infty e^{\pm i\lambda t} C(t)\, dt, \quad \lambda \in \Pi_\pm,$$

где $C(t) \in L_1(0, \infty; [N])$, $C_0 \in [N]$.

**Замечание 1.1.** Для колец операторных функций $\mathbf{R}_\pm(N, \Pi_\pm)$ и винеровских колец $R_\pm(\Pi_\pm)$ скалярных функций выполняются условия теоремы 3 работы [8] при указанных там частных предположениях. В силу этого, имеют место операторные обобщения теорем Винера:

*если функции $F_\pm(\lambda) \in \mathbf{R}_\pm(N, \Pi_\pm)$ ограниченно обратимы в каждой точке $\lambda \in \Pi_\pm$, то и $F_\pm^{-1}(\lambda) \in \mathbf{R}_\pm(N; \Pi_\pm)$.*

**Теорема 1.1.** *Функции $S_+(\lambda)$ и $K^* S_-(\lambda)$ со своими обратными принадлежат кольцам $\mathbf{R}_\pm(H_+, \Pi_\pm)$.*

**Доказательство.** Так как $P_- P_K P_+ = \frac{1}{2} K P_+$, то, учитывая соотношения (0.2), из (1.9) имеем $S_+(\lambda) \in \mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$ и $K^* S_-(\lambda) \in \mathbf{R}_-(H_+, \Pi_-)$. Покажем, что функции $S_+(\lambda)$ и $K^* S_-(\lambda)$ ограниченно обратимы соответственно в каждой точке $\lambda \in \Pi_\pm$.

Достаточно рассмотреть функцию $S_+(\lambda)$, так как для $K^* S_-(\lambda)$ доказательство проводится аналогично.

Используя $iJ$-нерастягиваемость функции $E(r, \lambda)$ в верхней полуплоскости, соотношение $P_K J P_K = 0$, получающееся из (0.1), и обратимость функции $E(r, \lambda)$, при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеем

$$(S_+(r,\lambda)x_+,\ S_+(r,\lambda)x_+)=4(P_+A(r,\lambda)P_Kx_+,\ P_+A(r,\lambda)P_Kx_+)=$$
$$=2e^{-2\operatorname{Im}\lambda r}(P_KE^*(r,\lambda)(I-iJ)E(r,\lambda)P_Kx_+,\ x_+)\geqslant$$
$$\geqslant 2e^{-2\operatorname{Im}\lambda r}\|E(r,\lambda)P_K\ x_+\|^2\geqslant e^{-(4\operatorname{Im}\lambda r+2\int\limits_0^\infty\|V(s)\|\,ds)}\|x_+\|^2>0.$$

Отсюда следует обратимость функции $S_+(r,\lambda)$ и замкнутость области значений оператора $S_+(r,\lambda)$. Покажем, что область значений этого оператора совпадает со всем $H_+$, откуда, по теореме Банаха, будет следовать ограниченность $S_+^{-1}(r,\lambda)$ Для этого докажем, что подпространство нулей оператора $S_+^*(r,\lambda)$ пусто. Допустим, что

$$S_+^*(r,\lambda)\ x_+=2P_+P_KA^*(r,\lambda)P_+x_+=0,\ \text{но}\ \|x_+\|\neq 0.$$

Так как проектор $P_+$ отображает подпространство $H_K$ на все $H_+$ (см [1]), то $P_KE^*(r,\lambda)x_+=0$. Это означает, что $E^*(r,\lambda)x_\perp\in H_K^\perp$. В силу (0.1) подпространство $H_K^\perp$ является гипермаксимальным нейтральным, поэтому

$$(iJE^*(r,\lambda)x_+,\ E^*(r,\lambda)x_+)=0.$$

Из (1.1) имеем $E^*(r,\lambda)=-JE^{-1}(r,\bar\lambda)J$. Так как при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ функция $E(r,\bar\lambda)$ является $iJ$-несжимающей, то $E^{-1}(r,\bar\lambda)$ будет $iJ$-нерастягивающей, следовательно такова же и функция $E^*(r,\lambda)$. Отсюда

$$0=(iJE^*(r,\lambda)x_+),\ E^*(r,\lambda)x_+)=(E(r,\lambda)iJE^*(r,\lambda)x_+,x_+)\leqslant$$
$$\leqslant(iJx_+,\ x_+)=-\|x_+\|^2,$$

т. е. $\|x_+\|=0$, что противоречит допущению.

В силу замечания 1.1 имеем $S_+^{-1}(r,\lambda)\in\mathbf{R}_+(H_+,\Pi_+)$. Из равномерной сходимости последовательности $P_+A(r,\lambda)$ к функции $P_+A(\lambda)$ следует равномерная сходимость $S_+(r,\lambda)$ к функции $S_+(\lambda)$, голоморфной в верхней полуплоскости.

Из неравенства (1.5) при $\operatorname{Im}\lambda=0$ имеем

$$\|S_+(r,\lambda)x_+\|=\|2P_+E(r,\lambda)P_Kx_+\|>\sqrt{2}\,e^{-\int\limits_0^\infty\|V(s)\|\,ds}\|P_Kx_+\|=$$
$$=e^{-\int\limits_0^\infty\|V(s)\|\,ds}\|x_+\|.$$

Отсюда

$$\|x_+\|=\|S_+(r,\lambda)S_+^{-1}(r,\lambda)\ x_+\|\geqslant e^{-\int\limits_0^\infty\|V(s)\|\,ds}\|S_+^{-1}(r,\lambda)x_+\|.$$

Следовательно

$$\|S_+^{-1}(r,\lambda)x_+\|\leqslant e^{\int\limits_0^\infty\|V(s)\|\,ds}\|x_+\|,$$

значит

$$\|S_+^{-1}(r, \lambda)\| \leqslant e^{\int_0^\infty \|V(s)\|\,ds}. \tag{1.11}$$

Используя полученную оценку и принцип максимума модуля голоморфной функции, для $\lambda \in \Pi_+$ имеем

$$|(S_+^{-1}(r, \lambda)\,x_+, y_+)| < \max_{\operatorname{Im}\lambda=0} |(S_+^{-1}(r, \lambda)\,x_+, y_+)| \leqslant \max_{\operatorname{Im}\lambda=0} \|S_+^{-1}(r, \lambda)\|\,\|x_+\|\,\|y_+\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\int_0^\infty \|V(s)\|\,ds}\,\|x_+\|\cdot\|y_+\|.$$

Следовательно, оценка (1.11) имеет место и для всех $\lambda \in \Pi_+$. Из равномерной по $\lambda \in \Pi_+$ сходимости последовательности $S_+(r, \lambda)$ отсюда следует, что функции $S_+^{-1}(r, \lambda)$ равномерно по $\lambda \in \Pi_+$ сходятся к некоторой ограниченной голоморфной в $\Pi_+$ функции $\Sigma_+(\lambda)$. Так как

$$I_+ = \lim_{r\to\infty} S_+(r, \lambda)\, S_+^{-1}(r, \lambda) = S_+(\lambda)\,\Sigma_+(\lambda),$$

то $S_+^{-1}(\lambda) = \Sigma_+(\lambda)$. Теорема доказана.

1.3. Рассмотрим самосопряженный канонический оператор $\mathbf{L}$ и оператор $\mathbf{L}_0$, соответствующий случаю $V(r) \equiv 0$. Через $U(t) = {}^{i\mathbf{L}t}$ и $U_0(t) = e^{i\mathbf{L}_0 t}$ $(-\infty < t < \infty)$ обозначим сильно непрерывные группы унитарных операторов, порожденные операторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_0$. Операторы $W_{\pm}(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0) = s - \lim\limits_{t\to\pm\infty} U(t)\,U_0(-t)$ называются волновыми. Оператор рассеяния $S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0)$ определяется через волновые при помощи соотношения

$$S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0) = W_+^*(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0)\,W_-(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0).$$

Обозначим $Z_+ = \sqrt{2}\,P_+ P_K$, $\Phi(r, \lambda) = E(r, \lambda)\,P_K$,

$$\Delta(\lambda) = 2P_+ (P_K A^*(\lambda)\,A(\lambda)\,P_K)^{-1} P_+,\ \|f\|_\Delta = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta(\lambda)\,f(\lambda), f(\lambda))\,d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из результатов работы [2] следует, что формулами

$$\left\{\begin{aligned} & f(r) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \Phi(r, \lambda)\,Z_+^*\,\Delta(\lambda)\,f_+(\lambda)\,d\lambda,\ f_+(\lambda) \in L_2^\Delta(-\infty, \infty; H_+) \\ & f_+(\lambda) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R Z_+\,\Phi^*(r, \lambda)\,f(r)\,dr,\ f(r) \in L_2(0, \infty; H) \end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

задается изометрическое отображение пространства $L_2(0, \infty; H)$ на $L_2^{\Delta}(-\infty, \infty; H_+)$ такое, что оператор **L** при этом отображении переходит в оператор умножения на независимое переменное $\lambda$. Действие оператора рассеяния при таком отображении задается формулой

$$\left|\begin{array}{l} (S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0) f)(r) = \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-R}^{R} \Phi_0(r, \lambda) Z_+^* \bar{S}_-(\lambda) \bar{S}_+^{-1}(\lambda) f_+(\lambda)\, d\lambda \\ f_+(\lambda) = \lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_0^R Z_+ \Phi_0^*(r, \lambda) f(r)\, dr, \end{array}\right.$$

где $\bar{S}_\pm(\lambda) = 4P_+ P_K P_\pm A(\lambda) P_K P_+$. Функция $\tilde{S}(\lambda) = \bar{S}_-(\lambda) \bar{S}_+^{-1}(\lambda)$ называется субоператором оператора рассеяния $S(\mathbf{L}, \mathbf{L}_0)$. Из (0.2) видно, что $\bar{S}_+(\lambda) = S_+(\lambda)$, $\tilde{S}_-(\lambda) = K^* S_-(\lambda)$, где $S_\pm(\lambda)$ являются факторизующими множителями $S$-матрицы, определенной с помощью асимптотических свойств решения задачи (0.6)—(0.5). Отсюда видно, что $S$-матрица совпадает с субоператором рассеяния с точностью до постоянного изометрического оператора.

Непосредственно проверяется, что $\Delta(\lambda) = (S_\pm^*(\lambda) S_\pm(\lambda))^{-1}$, следовательно, если $f(\lambda) \in L_2^{\Delta}(-\infty, \infty; H_+)$, то функции $S_\pm^{*-1}(\lambda) f(\lambda)$ принадлежат соответственно пространствам $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$.

Для дальнейших рассмотрений формулы (1.12) удобно записывать в виде

$$\left|\begin{array}{l} f(r) = \lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-R}^{R} \Phi_\pm(r, \lambda) f_\pm(\lambda)\, d\lambda, \quad f_\pm(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; H_+) \\ f_\pm(\lambda) = \lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_0^R \Phi_\pm^*(r, \lambda) f(r)\, dr, \quad f(r) \in L_2(0, \infty; H), \end{array}\right. \qquad (1.13_\pm)$$

где $\Phi_\pm(r, \lambda) = \Phi(r, \lambda) Z_+^* S_\pm^{-1}(\lambda) = \sqrt{2}\, E(r, \lambda) P_K P_+ S_\pm^{-1}(\lambda)$.

Формулы $(1.13_\pm)$ будем называть соответственно $(\pm)$-спектральными представлениями оператора **L**.

1.4. Рассмотрим задачу Коши

$$-i \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = J \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} - V(r) f(r, t) \quad (0 \leqslant r < \infty, \ -\infty < t < \infty),$$

$$f(r, 0) = f_0(r) \in L_2(0, \infty; H). \qquad (1.14)$$

Ее решением является функция $f(r, t) = U(t) f_0(r)$. В $(\pm)$-спектральных представлениях группа $U(t)$ переходит в изоморфные ей группы $\bar{U}_\pm(t)$ операторов умножения на $e^{i\lambda t}$ в пространствах $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$.

Используя ($1.13_\pm$), решение задачи (1.14) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
f(r, t) &= \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda t} \Phi_\pm(r, \lambda) f_{0\pm}(\lambda)\, d\lambda, \\
f_{0\pm}(\lambda) &= \mathrm{l.i.m} \int_0^R \Phi_\pm^*(r, \lambda) f_0(r)\, dr.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Через $D_+$ ($D_-$), как и в [4], обозначим совокупность начальных данных из $L_2(0, \infty; H)$ таких, что отвечающие им решения задачи (1.14) обращаются в нуль при $r < t$, $t > 0$ ($r < -t$, $t < 0$).

Через $\mathrm{H}_2^{-}(-\infty, \infty; H_\pm)$ обозначим классы вектор-функций $\tilde f_\pm(\lambda)$, представимых в виде

$$\tilde f_\pm(\lambda) = \int_0^\infty e^{\pm i\lambda t} f_\mp(t)\, dt,$$

где $f_\pm(t) \in L_2(0, \infty; H_\pm)$.

Спектральные представления ($1.13_\pm$) позволяют описать множества $D_\pm$. Справедлива следующая

**Теорема 1.2.** *Подпространства $D_\pm$ являются прообразами подпространств $\mathrm{H}_2^\pm(-\infty, \infty; H_\pm)$ при отображениях* ($1.13_\pm$).

**Доказательство.** Так как отображение ($1.13_+$) изометрично, достаточно рассмотреть функции $\bar f_+(\lambda)$ из плотного в $\mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$ подмножества $\mathrm{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+) \cap L_1(-\infty, \infty; H_+)$.

Пусть $t = r + \tau$, $\tau > 0$. Тогда

$$f(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} e^{i\lambda r} \Phi_+(r, \lambda) \tilde f_+(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.16}$$

Здесь $\Phi_+(r, \lambda) = \sqrt{2}\, E(r, \lambda) P_K P_+ S_+^{-1}(\lambda)$. Из (1.3) имеем

$$e^{i\lambda r} E(r, \lambda) = P_+ + P_- e^{2i\lambda r} + \int_0^r e^{2i\lambda s} [P_+ \Gamma(r, s) + P_- \Gamma(r, r - s)]\, ds.$$

Подставляя верхнее выражение в (1.16), получим

$$
\begin{aligned}
f(r, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\tau + 2r)} P_- P_K S_+^{-1}(\lambda) \tilde f_+(\lambda)\, d\lambda &+ \\
+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} [P_+ + \int_0^r e^{2i\lambda s} (P_+ \Gamma(r, s) + P_- \Gamma(r, r - s)\, ds] &\times \\
\times P_K S_+^{-1}(\lambda) \bar f_+(\lambda)\, d\lambda.
\end{aligned}
$$

Так как $S_+^{-1}(\lambda) \in \mathbf{R}_+ (H_+, \Pi_+)$, то $S_+^{-1}(\lambda)\tilde{f}_+(\lambda) \in \mathbf{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. Поэтому первое слагаемое обращается в нуль по теореме Пэли—Винера. Выражение в квадратных скобках второго слагаемого также является элементом кольца $\mathbf{R}_+ (H, \Pi_+)$. Следовательно, подынтегральное выражение также принадлежит $\mathbf{H}_2^+(-\infty, \infty; H)$ и по той же теореме обращается в нуль и второе слагаемое. Отсюда $f(r, t) = 0$ при $r < t$.

Пусть теперь $\tilde{f}(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; H_+) \cap L_1(-\infty, \infty; H_+)$ и

$$f(r, t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Phi_+(r, \lambda)\,\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda = 0$$

при $r < t$. Покажем, что $\tilde{f}(\lambda) \in \mathbf{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. Так как $P_+ f(r, t) = 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau}\, e^{i\lambda r} P_+ E(r, \lambda) P_K P_+ S_+^{-1}(\lambda) f(\lambda)\,d\lambda = 0, \quad \tau = t - r.$$

Но $e^{i\lambda r} P_+ E(r, \lambda) P_K P_+ = S_+(r, \lambda)$. Из верхнего равенства следует, что $S_+(r, \lambda) S_+^{-1}(\lambda)\tilde{f}(\lambda) = g(\lambda) \in \mathbf{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. При доказательстве теоремы 1.1 было установлено, что $S_+^{-1}(r, \lambda) \in \mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$. Поэтому $\tilde{f}(\lambda) = S_+(\lambda) S_+^{-1}(r, \lambda) g(\lambda) \in \mathbf{H}_2^+(-\infty, \infty; H_+)$. Аналогично доказывается, что $D_-$ является прообразом подпространства $\mathbf{H}_2^-(-\infty, \infty; H_-)$. Теорема доказана.

Пусть $U(t)$ — группа унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty; H)$, порожденная самосопряженным оператором $\mathbf{L}$, а $D_\pm$ те же, что и в теореме 1.2.

Покажем, что имеют место

1). $U(\pm t) D_\pm \subset D_\pm$, $t > 0$,

2). $\bigcap\limits_{t>0} U(\pm t) D_\pm = \{0\}$,

3). $\overline{\bigcup\limits_{t} U(t) D_\pm} = L_2(0, \infty; H)$.

Действительно, формулы ($1.13_\pm$) задают изометрические отображения пространства $L_2(0, \infty; H)$ на $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$ такие, что группа $U(t)$ переходит в умножение на $e^{i\lambda t}$ в пространствах $L_2(-\infty, \infty; H_\pm)$, а образами подпространств $D_\pm$ по теореме 1.2 являются подпространства $\mathbf{H}_2^\pm(-\infty, \infty; H_\pm)$. Для этих объектов соотношения 1)—3) очевидны. Поэтому, в силу изометричности отображений ($1.13_\pm$), условия 1)—3) выполняются и для $U(t)$, $D_\pm$.

В схеме теории рассеяния Лакса—Филлипса [4] рассматривается группа унитарных операторов, действующая в гильбертовом пространстве $N$, для которой существуют ортогональные в $N$ подпространства $D_+$ и $D_-$, называемые соответственно уходящим и приходящим, такие, что для них имеют место соотношения 1)—3). Из этих соотношений следует, что с каждым из $D_\pm$ связывается специальное (уходящее и приходящее) спектральное представление группы. В уходящем представлении подпространство $D_+$ представлено вектор-функциями, голоморфными в верхней полуплоскости, а в приходящем представлении — $D_-$ представлено вектор-функциями, голоморфными в нижней полуплоскости. Матрица рассеяния $S$ определяется как оператор, переводящий уходящий представитель $f_+$ элемента из $N$ в его приходящий представитель $f_-$, т. е. $Sf_+ = f_-$.

Заметим, что условие ортогональности подпространств $D_\pm$ не играет роли при построении спектральных представлений. Для задач, рассмотренных в [4], ортогональность подпространств $D_\pm$ была обусловлена ограниченностью носителя возмущения.

Предыдущие рассмотрения показывают, что отображения $(1.13_\pm)$ являются, соответственно, уходящим и приходящим представлениями группы $U(t)$. Из формул $(1.13_\pm)$ видно, что соответствие $Sf_+ = f_-$ в нашем случае задается соотношением $S(\lambda)\bar{f}_+(\lambda) = \bar{f}_-(\lambda)$, где $S(\lambda) = S_-^{*-1}(\lambda)\, S_+^*(\lambda) = S_-(\lambda)\, S_+^{-1}(\lambda)$. Последнее и доказывает, что матрица рассеяния, определяемая по этой схеме, совпадает с введенными ранее.

## § 2. $S$-матрицы канонического оператора, отвечающие самосопряженным расширениям с выходом на полную ось

2.1. Пусть задан канонический дифференциальный оператор

$$J\frac{dx(r)}{dr} - V(r)\,x(r) \quad (-\infty < r < \infty) \tag{2.1}$$

с суммируемым нормализованным потенциалом $V(r)$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty; H)$. Рассмотрим сдвоенное пространство $\mathbf{H} = H \oplus H$. Оператор (2.1) эквивалентен оператору в $L_2(0, \infty; \mathbf{H})$, который задается дифференциальным выражением

$$\mathbf{J}\frac{dX(r)}{dr} - \mathbf{V}(r)\,X(r), \quad (0 \leqslant r < \infty) \tag{2.2}$$

и граничным условием

$$\mathbf{P}\,X(0) = X(0). \tag{2.3}$$

Здесь

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(r) = \begin{pmatrix} V_+(r) & 0 \\ 0 & V_-(r) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_\pm(r) = V(\pm r), \; r > 0, \; X(r) = \begin{pmatrix} x_1(r) \\ x_2(r) \end{pmatrix} \in L_2(0, \infty; \mathbf{H}).$$

Очевидно, потенциал $\mathbf{V}(r)$ суммируем на полуоси и $\mathbf{J}\mathbf{V}(r) = -\mathbf{V}(r)\mathbf{J}$. Проектор $\mathbf{P}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{J}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{J} = \mathbf{J}.$$

Следовательно, оператор (2.2) — (2.3), а значит и (2.1), является самосопряженным. Одновременно оператор (2.1) можно рассматривать как самосопряженное расширение с выходом дифференциального выражения (0.3) с потенциалом $V_+(r)$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{J}\frac{dX(r,\lambda)}{dr} = \lambda X(r, \lambda) + \mathbf{V}(r) X(r, \lambda) \quad (0 \leqslant r < \infty) \tag{2.4}$$

с граничным условием (2.3). Обозначим через $\mathbf{E}(r, \lambda)$ и $\mathbf{A}(\lambda)$, соответственно, оператор Коши и $A$-оператор уравнения (2.4). Известно (см. [9]), что $\mathbf{E}(r, \lambda)$ и $\mathbf{A}(\lambda)$ блочно-диагональны, т. е.

$$\mathbf{E}(r, \lambda) = \begin{pmatrix} E_+(r, \lambda) & 0 \\ 0 & E_-(r, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_+(\lambda) & 0 \\ 0 & A_-(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $E_\pm(r, \lambda)$, $A_\pm(\lambda)$ — соответственно операторы Коши и $A$-операторы уравнений вида (0.6) с потенциалами $V_\pm(r)$ и $J_\pm = \pm J$. При разложении (1.6) функции $A_\pm(\lambda)$ записываются в виде

$$A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad A_-(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим разложение пространства $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ \oplus \mathbf{H}_-, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{H}_\pm = \mathbf{P}_\pm \mathbf{H}$, $\mathbf{P}_\pm = \frac{1}{2}(I_{\mathbf{H}} \mp i\mathbf{J})$. Введем следующие обозначения: $iP_+^+ - iP_-^+ = J$, $iP_+^- - iP_-^- = -J$. Тогда $\mathbf{P}_\pm = P_\pm^\pm + P_\pm^\mp$, поэтому $\mathbf{H}_\pm = H_\pm^\pm \oplus H_\pm^\mp$, где $H_\pm^\pm = P_\pm^\pm H$. (Заметим, что $H_+^+ = H_-^-$, $H_-^+ = H_+^-$, следовательно $\mathbf{H}_+ = \mathbf{H}_-$, но мы будем пользоваться этими обозначениями, чтобы отличать в $\mathbf{H}$ те подпространства, которые связаны с положительной и отрицательной полуосями в уравнении (2.4)).

При разложении (2.6) асимптотика решения задачи (2.4) — (2.3) запишется в виде

$$X(r, \lambda) = e^{i\lambda r}\, \mathbf{S}(\lambda) X_+ + e^{-i\lambda r} X_- + o(1), \quad r \to \infty,$$

где

$$X_+ \in \mathbf{H}_+, \quad \mathbf{S}(\lambda) = (P_-^+ A_+(\lambda) + P_-^- A_-(\lambda))(P_+^+ A_+(\lambda) + P_+^- A_-(\lambda))^{-1}.$$

Функция $\mathbf{S}(\lambda)$ ($S$-матрица уравнения (2.4)), является изометрическим отображением пространства $\mathbf{H}_+$ на $\mathbf{H}_-$. Рассмотрим функции

$$\mathbf{S}_\pm(\lambda) = P_\pm^+ A_+(\lambda) + P_\pm^- A_-(\lambda). \tag{2.7}$$

Из (2.5) имеем

$$\mathrm{S}_{+}(\lambda)=\begin{pmatrix}A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda)\\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda)\end{pmatrix},\quad \mathrm{S}_{-}(\lambda)=\begin{pmatrix}B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda)\\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{2.7'}$$

Аналогично формулам ($1.13_{\pm}$), спектральные представления оператора (2.2)—(2.3) в пространствах $L_2(-\infty, \infty; \mathrm{H}_{\pm})$ запишем в виде

$$\left|\begin{aligned} &F(r)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R}\Phi_{\pm}(r,\lambda)\,F_{\pm}(\lambda)\,d\lambda,\quad F_{\pm}(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty;\mathrm{H}_{\pm})\\ &F_{\pm}(\lambda)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int\limits_{0}^{R}\Phi^{*}_{\pm}(r,\lambda)\,F(r)\,dr,\quad F(r)\in L_2(0,\infty;\mathrm{H}),\end{aligned}\right. \tag{$2.8_{\pm}$}$$

где $\Phi_{\pm}(r,\lambda)=\sqrt{2}\,\mathrm{E}(r,\lambda)\,\mathrm{P}\,\mathrm{P}_{+}\,\mathrm{S}_{\pm}^{-1}(\lambda)$.

2.2. Как и в § 1, обозначим через $\mathrm{U}(t)$ группу унитарных операторов, порожденную самосопряженным оператором (2.2)—(2.3), а через $\mathrm{D}_{\pm}$ — начальные данные $F_0(r)$ задачи Коши

$$-i\frac{\partial F(r,t)}{\partial t}=\mathrm{J}\frac{\partial F(r,t)}{\partial r}-\mathrm{V}(r)\,F(r,t)\quad (0\leqslant r<\infty;\ -\infty<t<\infty),$$

$$F(r,0)=F_0(r)\in L_2(0,\infty;\mathrm{H})$$

такие, что отвечающие им решения обращаются в нуль при $r<t$, $t>0$ и $r<-t$, $t<0$.

В пространстве H рассмотрим проектор $\mathrm{P}^{+}$, который при разложении (2.6) выделяет подпространство $\mathrm{H}^{+}=H^{+}_{+}\oplus H^{+}_{-}$, связанное с положительной полуосью в уравнении (2.4). Образуем подпространства $D^{+}_{\pm}=\mathrm{P}^{+}\,\mathrm{D}_{\mp}$. Функции из $D^{+}_{\pm}$ могут рассматриваться как элементы пространства $L_2(0,\infty;H)$. Из свойств подпространств $\mathrm{D}_{\pm}$ следует, что решения задачи Коши (1.14) с потенциалом $V_{+}(r)$, отвечающие начальным условиям из $D^{+}_{\pm}$, обращаются в нуль при $r<t$, $t>0$; $r<-t$, $t<0$. С другой стороны, функции из $L_2(0,\infty;\mathrm{H})$, совпадающие с такими начальными условиями на $L_2(0,\infty;\mathrm{H}^{+})$ и равные нулю на $L_2(0,\infty;\mathrm{H}^{-})$, принадлежат $\mathrm{D}_{\mp}$. Это означает, что подпространства $D^{+}_{\pm}$ совпадают с подпространствами $D_{\pm}$, введенными в § 1, если в (1.14) потенциал равен $V_{+}(r)$.

Найдем образы подпространств $D^{+}_{\pm}$ при отображениях ($1.13_{\pm}$) и ($2.8_{\pm}$). Так как $\mathrm{D}_{\pm}$ являются прообразами пространств $\mathrm{H}^{\pm}_{2}(-\infty,\infty;\mathrm{H}_{\pm})$ при отображениях ($2.8_{\pm}$), то

$$D^{+}_{\pm}\ni f_{\pm}(r)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\pi}\mathrm{P}^{+}\int\limits_{-R}^{R}\Phi_{\pm}(r,\lambda)\,F_{\pm}(\lambda)\,d\lambda,$$

где $F_{\pm}(\lambda) \in \mathbf{H}_2^{\pm}(-\infty, \infty; \mathbf{H}_{\pm})$. Поэтому образами $D_{\pm}^{-}$ при отображениях ($1.13_{\pm}$) и ($2.8_{-}$) будут функции

$$\hat{f}_{\pm}(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\pi} \int_0^R \Phi_{\pm}(r, \lambda) \left\{ \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-N}^{N} \mathbf{P}^{+} \Phi_{\pm}(r, \mu) F_{\pm}(\mu)\, d\mu \right\} dr, \qquad (2.9)$$

$$\tilde{f}_{\pm}(\lambda) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{\pi} \int_0^R \Phi_{\pm}(r, \lambda) \left\{ \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-N}^{N} \mathbf{P}^{+} \Phi_{\pm}(r, \mu) F_{\pm}(\mu)\, d\mu \right\} dr. \qquad (2.10)$$

В силу изометричности этих отображений, в формулах (2.9) и (2.10) достаточно брать функции $F_{\pm}(\mu)$ из плотного в $\mathbf{H}_2^{\pm}(-\infty, \infty; \mathbf{H}_{\pm})$ подмножества $\mathbf{H}_2^{\pm}(-\infty, \infty; \mathbf{H}_{\pm}) \cap L_1(-\infty, \infty; \mathbf{H}_{\pm})$. Рассмотрим $f_{+}(r) \in D_{+}^{+}$. Из (2.10) имеем

$$\tilde{f}_{+}(R, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^R \Phi_{+}^{*}(r, \lambda)\, \mathbf{P}^{+} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{+}(r, \mu) F_{+}(\mu)\, d\mu\, dr.$$

Так как функция $\Phi_{+}^{*}(r, \lambda)\, \mathbf{P}^{+} \Phi_{+}(r, \mu) F_{+}(\mu)$ интегрируема по Бохнеру в полосе $(0 \leqslant r < R,\ -\infty < \mu < \infty)$, то, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\tilde{f}_{+}(R, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^R \Phi_{+}(r, \lambda)\, \mathbf{P}^{+} \Phi_{+}(r, \mu)\, dr \right\} F_{+}(\mu)\, d\mu.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$\tilde{f}_{+}(R, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{+}^{*-1}(\lambda) \left\{ \int_0^R E_{+}^{*}(r, \lambda)\, E_{+}(r, \mu)\, dr \right\} \mathbf{S}_{+}^{-1}(\mu)\, F_{+}(\mu)\, d\mu. \qquad (2.11)$$

Из уравнения (0.6) имеем соотношение

$$\int_0^R E_{+}^{*}(r, \lambda)\, E_{+}(r, \mu)\, dr = \frac{1}{\mu - \lambda} [E_{+}^{*}(R, \lambda)\, J E_{+}(R, \mu) - J],$$

которое перепишем в виде

$$\int_0^R E_{+}^{*}(r, \lambda)\, E_{+}(r, \mu)\, dr = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} + \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} \right) \times$$
$$\times [E_{+}^{*}(R, \lambda)\, J E_{+}(R, \mu) - J]. \qquad (2.12)$$

Используя оценку (1.2), получим

$$\left\| \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu - \lambda - i\varepsilon} + \frac{1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} \right) [E_{+}^{*}(R, \lambda)\, J E_{+}(R, \mu) - J] \right\| =$$

$$=\left\|\frac{E_+^*(R,\lambda)\,JE_+(R,\mu)-J}{\mu-\lambda}\right\|\frac{(\mu-\lambda)^2}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}<$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^R E_+^*(r,\lambda)\,E_+(r,\mu)\,dr\right\|\leqslant R\,e^{2\int\limits_0^R\|V_+(r)\|\,dr}. \tag{2.13}$$

Подставим (2.12) в (2.11). Учитывая неравенство (2.13), в полученном интеграле можно перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$ под знаком интеграла. Получим

$$\bar{f}_+(R,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_+^{*-1}(\lambda)\left(\frac{1}{\mu-\lambda-i0}+\frac{1}{\mu-\lambda+i0}\right)\times$$

$$\times E_+^*(R,\lambda)\,JE_+(R,\mu)\,S_+^{-1}(\mu)\,F_+(\mu)\,d\mu-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_+^{*-1}(\lambda)\left(\frac{1}{\mu-\lambda-i0}+\frac{1}{\mu-\lambda+i0}\right)JS_+^{-1}(\mu)\,F_+(\mu)\,d\mu.$$

Так как функция $S_+^{-1}(\mu)\,F_+(\mu)$ голоморфна в верхней полуплоскости, то второе слагаемое в верхнем равенстве есть

$$-\frac{1}{2}S_+^{*-1}(\lambda)\,iJ\,S_+^{-1}(\lambda)\,F_+(\lambda).$$

Рассмотрим первое слагаемое. Так как

$$\|E_+(R,\lambda)-e^{-J\lambda R}A_+(\lambda)\|=\|A_+(R,\lambda)-A_+(\lambda)\|$$

и функция $A_+(R,\lambda)$ при $R\to\infty$ стремится к $A_+(\lambda)$ равномерно по $\lambda$, имеем

$$\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_+^{*-1}(\lambda)\left(\frac{1}{\mu-\lambda-i0}+\frac{1}{\mu-\lambda+i0}\right)\times$$

$$\times E_+^*(R,\lambda)\,JE_+(R,\mu)\,S_+^{-1}(\mu)\,F_+(\mu)\,d\mu=$$

$$=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_+^{*-1}(\lambda)\left(\frac{1}{\mu-\lambda-i0}+\frac{1}{\mu-\lambda+i0}\right)\times$$

$$\times A_+^*(\lambda)\,e^{J\lambda R}\,J\,e^{-J\mu R}A_+(\mu)\,S_+^{-1}(\mu)\,F_+(\mu)\,d\mu. \tag{2.14}$$

Но

$$A_+^*(\lambda)\,e^{J\lambda R}J\,e^{-J\mu R}A_+(\mu)=-i\,[e^{i(\mu-\lambda)R}A_+^*(\lambda)\,P_-A_+(\mu)-$$

$$-e^{-i(\mu-\lambda)R}A_+^*(\lambda)\,P_+A_+(\mu)].$$

Поэтому (2.14) можно переписать в виде

$$\underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} S_{+}^{*-1}(\lambda)\left(\frac{1}{\mu-\lambda-i0}+\frac{1}{\mu-\lambda+i0}\right)\times$$

$$\times\left(e^{i(\mu-\lambda)R}A_{+}^{*}(\lambda)P_{-}A_{+}(\mu)-e^{-i(\mu-\lambda)R}A_{+}^{*}(\lambda)P_{-}A_{-}(\mu)\right)\times$$

$$\times S_{+}^{-1}(\mu)F_{-}(\mu)\,d\mu. \tag{2.15}$$

В силу соотношений (см. [5])

$$\underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm i(\mu-\lambda)R}f(\mu)}{\mu-(\lambda\pm i0)}\,d\mu=\pm f(\lambda),$$

$$\text{l.i.m}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm i(\mu-\lambda)R}f(\mu)}{\mu-(\lambda\mp i0)}\,d\mu=0,\ f(\lambda)\in \mathbf{H}_2^{\pm}(-\infty,\ \infty;\ N),$$

интеграл (2.15) равен

$$\frac{1}{2}S_{+}^{*-1}(\lambda)\left[A_{+}^{*}(\lambda)P_{-}A_{+}(\lambda)+A_{+}^{*}(\lambda)P_{+}A_{+}(\lambda)\right]S_{+}^{-1}(\lambda)F_{+}(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{2}S_{+}^{*-1}(\lambda)A_{+}^{*}(\lambda)A_{+}(\lambda)S_{+}^{-1}(\lambda)F_{+}(\lambda).$$

Таким образом, для функции $f_{+}(\lambda)$ в (2.10) получим

$$\bar{f}_{-}(\lambda)=\frac{1}{2}S_{+}^{*-1}(\lambda)\left(A_{+}^{*}(\lambda)A_{+}(\lambda)-iJ\right)S_{+}^{-1}(\lambda)F_{+}(\lambda).$$

Из (2.7) видно, что

$$S_{+}^{*}(\lambda)P_{+}S_{+}(\lambda)=A_{+}^{*}(\lambda)P_{+}A_{+}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(A_{+}^{*}(\lambda)A_{+}(\lambda)-iJ\right).$$

Следовательно

$$\bar{f}_{+}(\lambda)=S_{+}^{*-1}(\lambda)S_{+}^{*}(\lambda)P_{+}S_{+}(\lambda)\ S_{+}^{-1}(\lambda)F_{+}(\lambda)=P_{+}F_{+}(\lambda).$$

Аналогично можно показать, что образом $D_{-}^{+}$ при отображении (2.8$_{-}$) является функция

$$\bar{f}_{-}(\lambda)=P_{-}F_{-}(\lambda).$$

Определим функцию $f_{+}(\lambda)$ из равенства (2.9). Имеем

$$\Phi_{+}^{*}(r,\lambda)P^{+}\Phi_{+}(r,\mu)=2S_{+}^{*-1}(\lambda)P_{+}P_{K}E_{+}^{*}(r,\lambda)\,\mathbf{P}\,\mathbf{E}(r,\mu)\mathbf{P}\mathbf{P}_{+}\mathbf{S}_{+}^{-1}(\mu).$$

Записав $E_{+}^{*}(r,\lambda)$ при разложении (2.6), получим

$$E_{+}^{*}(r,\lambda)\,\mathbf{P}^{+}\ \mathbf{E}(r,\mu)=E_{+}^{*}(r,\lambda)E_{+}(r,\mu).$$

Повторяя те же вычисления, что и выше, нетрудно убедиться, что

$$\hat{f}_+(\lambda) = 4\, S_+^{*\,-1}(\lambda)\ P_+\, P_K\, \mathbf{S}_+^*(\lambda)\, \mathbf{P}_+\, S_+(\lambda)\, \mathbf{P}\mathbf{P}_+\mathbf{S}_+^{-1}(\lambda)\, F_+(\lambda) =$$

$$= 2\, S_+^{*\,-1}(\lambda)\ P_+\, P_K\, \mathbf{S}_+^*(\lambda)\ P_+\, F_+(\lambda).$$

Но $\mathbf{S}_+^*(\lambda)\, P_+ = A_-^*(\lambda)\, P_+$, $2P_+\, P_K$, $A_+^*(\lambda)\, P_+ = S_+^*(\lambda)$. Следовательно, $\hat{f}_-(\lambda) = P_+\, F_+(\lambda)$. Аналогично доказывается, что $\hat{f}_-(\lambda) = P_-F_-(\lambda)$. Этим доказана следующая

Теорема 2.1. *Подпространства* $D_\pm^+ = \mathbf{P}^+\,\mathbf{D}_\pm$ *совпадают с уходящим и приходящим подпространствами для группы* $U(t)$, *связанной с оператором* $\mathbf{L}$, *потенциал которого равен* $V_+(r)$. *Спектральные представления* (1.13$_\pm$) *и* (2.8$_\pm$) *совпадают на* $D_\pm^+$.

Поэтому в дальнейшем вместо $D_\pm^+$ можно писать $D_\pm$.

Замечание 2.1. Так как образами пространств $\mathbf{D}_\pm$ являются пространства $\mathbf{H}_2^\pm(-\infty, \infty; \mathbf{H}_\pm)$, то из теоремы 2.1 следует, что образами $D_\pm$ при отображениях (2.8$_\pm$) будут пространства $\mathbf{H}_2^\pm(-\infty, \infty; H_\pm^+)$.

Обозначим через $\mathbf{N}$ гильбертово пространство $L_2(0, \infty; \mathbf{H})$, а через $\mathbf{N}_\pm$ — подпространства $\overline{\bigcup_t \mathbf{U}(t)\, D_\pm}$. Покажем, что

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_+ + \mathbf{N}_-. \tag{2.16}$$

В силу изометричности отображений (2.8$_\pm$), достаточно доказать (2.16), например, для (+)-образов этих пространств.

Образом пространства $\mathbf{N}$ в (+)-представлении является пространство $L_2(-\infty, \infty; \mathbf{H}_+)$. Так как $\mathbf{H}_\pm = H_\pm^\pm \oplus H_\pm^\mp$, то в силу замечания 2.1 (±)-образами $\mathbf{N}_\pm$ являются пространства $L_2(-\infty, \infty; H_\pm^+)$ Найдем образ пространства $\mathbf{N}_-$ в (+)-представлении. Пусть $F(r) \in \mathbf{N}_-$. Его (—)-образ обозначим $F_-(\lambda)$. Тогда

$$P_-\, F_-(\lambda) = F_-(\lambda) = \mathbf{S}^{*\,-1}(\lambda)\, F_0(\lambda),$$

где

$$F_0(\lambda) = \sqrt{2}\, \mathbf{P}_+\, \mathbf{P} \int_0^\infty \mathbf{E}^*(r, \lambda)\, F(r)\, dr, \quad F_0(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty; \mathbf{H}_+).$$

Поэтому

$$F_0(\lambda) = \mathbf{S}_-^*(\lambda)\, F_-(\lambda) = \mathbf{S}_-^*(\lambda)\, P_-\, F_-(\lambda).$$

В (+)-представлении образом функции $F(r)$ является функция

$$F_+(\lambda) = \mathbf{S}_+^{*\,-1}(\lambda)\, F_0(\lambda) = \mathbf{S}_+^{*\,-1}(\lambda)\, \mathbf{S}_-^*(\lambda)\, P_-\, F_-(\lambda) = \mathbf{S}^*(\lambda)\, P_-\, F_-(\lambda).$$

Записав функцию $\mathbf{S}(\lambda)$ в матричном виде, получим

$$F_+(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & S^{\bullet}_{21}(\lambda)\\ 0 & S^{\bullet}_{22}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ f_0(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S^{\bullet}_{21}(\lambda)\,f_0(\lambda)\\ S^{\bullet}_{22}(\lambda)\,f_0(\lambda)\end{pmatrix},$$

где $f_0(\lambda)\in L_2(-\infty,\ \infty;\ H^{+}_{-})$.

Пусть $G(\lambda)=\begin{pmatrix}g_+(\lambda)\\ g_-(\lambda)\end{pmatrix}\in L_2(-\infty,\ \infty;\ \mathbf{H}_+)$. Покажем, что существуют функции $f_{\pm}(\lambda)\in L_2(-\infty,\ \infty;\ H^{+}_{\pm})$, для которых имеет место

$$\begin{pmatrix}g_+(\lambda)\\ g_-(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_+(\lambda)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S^{\bullet}_{21}(\lambda)\,f_-(\lambda)\\ S^{\bullet}_{22}(\lambda)\,f_-(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Из $J$-унитарности $A_+(\lambda)$ следует обратимость функции $S^{\bullet}_{22}(\lambda)$. Поэтому функции $f_-(\lambda)=S^{\bullet\,-1}_{22}(\lambda)\,g_-(\lambda)$, $f_+(\lambda)=S^{\bullet}_{21}(\lambda)\,S^{\bullet\,-1}_{22}(\lambda)\,g_-(\lambda)-g_+(\lambda)$, очевидно, удовлетворяют равенству (2.17), что и доказывает (2.16).

Таким образом, мы показали, что подпространства $D_{\pm}$, связанные с группой $\mathbf{U}(t)$, удовлетворяют соотношениям

1′) $\mathbf{U}(\pm t)\,D_{\pm}\subset D_{\pm},\ t>0,$

2′) $\bigcap\limits_{t>0}\mathbf{U}(\pm t)\,D_{\pm}=\{0\},$

3′) $\mathbf{N}=\mathbf{N}_++\mathbf{N}_-,\ \mathbf{N}_{\pm}=\overline{\bigcup\limits_{t}\ \mathbf{U}(t)\,D_{\pm}}\,.$

Если положить $\mathbf{V}_{\pm}(t)=\mathbf{U}(\pm t)|_{D_{\pm}},\ t>0$, то 1′) — 3″) означают, что группа $\mathbf{U}(t)$ является минимальным унитарным сцеплением в пространстве $\mathbf{N}$ полугрупп $\mathbf{V}_{\pm}(t),\ t>0$ полуунитарных операторов (см. [5]). В рамках теории сцеплений $S$-матрица (субоператор рассеяния) определяется по правилу: для любого элемента $f\in\mathbf{N}_+$ (—)-образ $f_-$ его проекции на $\mathbf{N}_-$ связан с (+)-образом $f_+$ самого $f$ соотношением $f_-=Sf_+$.

Имея теорему 2.1, матрицу рассеяния, определенную таким образом, будем называть $S$-матрицей канонического оператора (0.3), соответствующей самосопряженному расширению с выходом в пространство $L_2(-\infty,\ \infty;\ H)$.

Найдем $S$-матрицу $S(\lambda)$. Обозначим через $F_0(\lambda)$ функцию

$$F_0(\lambda)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\sqrt{2}\,\mathbf{P}_+\mathbf{P}\int\limits_0^R\mathbf{E}(r,\lambda)\,F(r)\,dr,$$

где $F(r)\in\mathbf{N}$. С помощью $F_0(\lambda)$ $(\pm)$-представители $F_{\pm}(\lambda)$ элемента $F(r)$ получаются следующим образом:

$$F_{\pm}(\lambda)=\mathbf{S}^{\bullet\,-1}_{\pm}(\lambda)\,F_0(\lambda).$$

Если $F(r)\in\mathbf{N}_+$, то его (+)-представитель $F_+(\lambda)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty,\ \infty;\ H_+)$, поэтому

$$f_+(\lambda)=F_+(\lambda)=P_+F_+(\lambda)=\mathbf{S}^{\bullet\,-1}_{+}(\lambda)\,F_0(\lambda).$$

Отсюда

$$F_0(\lambda)=\mathbf{S}^{\bullet}_{+}(\lambda)\,P_+F_+(\lambda).$$

(—)-представитель $F_-(\lambda)$ элемента $F(r)$ есть

$$F_-(\lambda) = \dot{\mathbf{S}}_-^{-1}(\lambda)\, F_0(\lambda).$$

Следовательно, его проекцией на (—)-образ подпространства $\mathbf{N}_+$ будет функция

$$f_-(\lambda) = P_- F_-(\lambda) = P_- \dot{\mathbf{S}}_-^{-1}(\lambda)\, F_0(\lambda) = P_- \dot{\mathbf{S}}_-^{-1}(\lambda)\, \dot{\mathbf{S}}_+(\lambda)\, P_+ F_+(\lambda) =$$

$$= P_- \dot{\mathbf{S}}_-^{-1}(\lambda)\, \dot{\mathbf{S}}_+(\lambda)\, P_+ f_+(\lambda) = P_- \mathbf{S}(\lambda)\, P_+ f_+(\lambda).$$

Отсюда следует, что матрица рассеяния $S(\lambda)$ совпадает с блоком $S_{21}(\lambda)$ функции $\mathbf{S}(\lambda)$. Воспользовавшись формулами (2.7′), для функции $S(\lambda)$ можно получить выражение

$$S(\lambda) = (A_{21}(\lambda) - A_{22}(\lambda)\, \Theta(\lambda))(A_{11}(\lambda) - A_{12}(\lambda)\, \Theta(\lambda))^{-1}, \qquad (2.18)$$

где $\Theta(\lambda) = B_{22}^{-1}(\lambda)\, B_{21}(\lambda)$. Из $J$-унитарности функции $A_-(\lambda)$ следует, что $\|\Theta(\lambda)\| < 1$.

Из (2.18) видно, что $S(\lambda)$ является дробно-линейным преобразованием сжимающей функции $\Theta(\lambda)$, ассоциированным с матрицей оператора $A_+(\lambda)$, поэтому сжимающей будет и функция $S(\lambda)$ (см. [7]). При $\Theta(\lambda)$, равном постоянному изометрическому отображению $H_+$ на $H_-$, функция $S(\lambda)$ совпадает с $S$-матрицей, введенной в § 1.

Замечание 2.2. Формула, аналогичная (2.18), уже фигурировала в работах [10] и [11]. В первой из них эта формула описывала субоператоры рассеяния эквивалентных сцеплений. В другой—давала описание сжимающих функций на вещественной оси, представимых в виде суммы фиксированной функции класса $\mathbf{R}_+(N, \Pi_+)$ и функций, являющихся граничными значениями на оси ограниченных, голоморфных в верхней полуплоскости функций.

Изучим свойства функции $\Theta(\lambda)$. Так как $\Theta(\lambda) = B_{22}^{-1}(\lambda)\, B_{21}(\lambda)$ и функции $A_\pm(\lambda)$ имеют одинаковые свойства, то исследование функции $\Theta(\lambda)$ сводится к исследованию $A$-оператора уравнения (0.6). Пусть $A$-оператор $A(\lambda)$ при разложении (1.6) имеет вид

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $A(\lambda)$ $J$-унитарна и имеет представление (1.4). Рассмотрим функцию $A_{11}(\lambda) = P_+ A(\lambda) P_+$. Из (1.4) видно, что

$$A_{11}(\lambda) = I_+ + \int_0^\infty e^{2i\lambda t}\, \Gamma_{11}(t)\, dt, \quad \Gamma_{11}(t) = P_+ \Gamma(t) P_+. \qquad (2.19)$$

Следовательно, формулой (2.19) функция $A_{11}(\lambda)$ голоморфно продолжается в верхнюю полуплоскость. Следуя схеме доказательства теоремы 1.1 можно показать, что $A_{11}(\lambda)$ ограниченно обратима в верхней полуплоскости. Поэтому функция $A_{11}^{-1}(\lambda)$ принадлежит кольцу $\mathbf{R}_+(H_+, \Pi_+)$. Учитывая представление (1.14), отсюда имеем

$$\Theta(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t}\, Q(t)\, dt,\quad Q(t) \in L_1(0, \infty; [H_+; H_-]). \tag{2.20}$$

Из $J$-унитарности функции $A(\lambda)$ имеем

$$\|\Theta(\lambda)\| < 1,\ \lambda \in \Pi_+. \tag{2.21}$$

Обозначим через $\mathrm{R}(N)$ кольцо операторных функций $F(\lambda)$, представимых в виде

$$F(\lambda) = C_0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, C(t)\, dt,$$

где $C(t) \in L_1(-\infty, \infty; [N])$, $C_0 \in [N]$.

Рассмотрим $(I_+ - \Theta(\lambda)\Theta^*(\lambda)) \in \mathrm{R}(H_+)$ и $(I_- - \Theta^*(\lambda)\Theta(\lambda)) \in \in \mathrm{R}(H_-)$. Из $J$-унитарности $A(\lambda)$ имеем

$$I_+ - \Theta(\lambda)\Theta^*(\lambda) = A_{11}^{-1}(\lambda)(A_{11}(\lambda)\ A_{11}^*(\lambda) - A_{12}(\lambda) A_{12}^*(\lambda)) A_{11}^{*-1}(\lambda) =$$

$$= A_{11}^{-1}(\lambda) A_{11}^{*-1}(\lambda) > 0,$$

$$I_- - \Theta^*(\lambda)\Theta(\lambda) = A_{22}^{-1}(\lambda)(A_{22}(\lambda) A_{22}^*(\lambda) - A_{21}(\lambda) A_{21}^*(\lambda)) A_{21}^{*-1}(\lambda) =$$

$$= A_{22}^{-1}(\lambda) A_{22}^{*-1}(\lambda) > 0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 0 &< (I_+ - \Theta(\lambda)\Theta^*(\lambda))^{-1} \in \mathrm{R}(H_+), \\ 0 &< (I_- - \Theta^*(\lambda)\Theta(\lambda))^{-1} \in \mathrm{R}(H_-). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.2. *Матрицы рассеяния канонического оператора* (0.3), *соответствующие самосопряженным расширениям вида* (2.1) *с выходом на всю вещественную ось, задаются формулой* (2.18), *где* $\Theta(\lambda)$*—операторная функция со значениями из* $[H_+: H_-]$, *удовлетворяющая условиям* (2.20) — (2.22).

*В случае, когда вместо* $\Theta(\lambda)$ *берется не зависящее от* $\lambda$ *изометрическое отображение пространства* $H_+$ *на* $H_-$, *функция* $S(\lambda)$ *в формуле* (2.18) *является* $S$*-матрицей канонического оператора* (0.3), *соответствующей самосопряженным расширениям без выхода.*

2.3. Здесь мы рассмотрим случай, когда значениями функции $V(r)$ при $r < 0$ являются операторы, действующие в некотором конечномерном подпространстве $H_0 \subset H$ таком, что $\dim H_0^+ = \dim H_0^-$, где $H_0^\pm = P_0 H_\pm$, а $P_0$ — проектор на подпространство $H_0$. Ясно, что в этом случае функция $\Theta(\lambda)$ является некоторой матрицей-функцией. Из условий (2.22) и теоремы 8.2 работы [12] следует, что функции $(I_+ - \Theta(\lambda)\Theta^*(\lambda))^{-1}$, $(I_- - \Theta^*(\lambda)\Theta(\lambda))^{-1}$ допускают единственные факторизации

$$(I_+ - \Theta(\lambda)\,\Theta^*(\lambda))^{-1} = G_+^*(\lambda)\,G_+(\lambda),$$

$$(I_- - \Theta^*(\lambda)\,\Theta(\lambda))^{-1} = G_-^*(\lambda)\,G_-(\lambda)$$

такие, что функции $G_{\pm}^{-1} \in R_{\mp}(H_0^{\mp}, \Pi_{\pm})$. Образуем функции $G_+(\lambda)\,\Theta(\lambda)$, $G_-(\lambda)\,\Theta^*(\lambda)$. В силу (2.20) они представимы в виде

$$G_+(\lambda)\,\Theta(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda t}\,\Gamma_1(t)\,dt, \tag{2.23}$$

$$G_-(\lambda)\Theta(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{-i\lambda t}\,\Gamma_2(t)\,dt.$$

Нетрудно проверить, что матрица-функция

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(\lambda) & \tilde{A}_{12}(\lambda) \\ \tilde{A}_{21}(\lambda) & \tilde{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_+(\lambda) & G_+(\lambda)\,\Theta(\lambda) \\ G_-(\lambda)\,\Theta^*(\lambda) & G_-(\lambda) \end{pmatrix}$$

$J_0$-унитарна, где $J_0 = P_0 J$. В силу (2.23) и того, что $G_{\mp}(\lambda) \in R_{\pm}(H_0^{\pm}, \Pi_{\mp})$, функция $\tilde{A}(\lambda)$ представима в виде (1.4) с $J = J_0$. Поэтому, учитывая условие (2.21), можно утверждать (см. [9]), что по матрице-функции $\tilde{A}(\lambda)$ однозначно определяется потенциал канонического уравнения вида (0.6) такого, что $A$-матрицей этого уравнения является функция $\tilde{A}(\lambda)$. Таким образом, по матрице-функции $\Theta(\lambda)$ со свойствами (2.20)—(2.22) восстанавливается потенциал канонического уравнения на полуоси.

Рассмотрим некоторое самосопряженное расширение с выходом вида (2.1) оператора, задаваемого дифференциальным выражением (0.3) с потенциалом $V_+(r)$ и $S$-матрицу $S(\lambda)$, соответствующую этому расширению. По этим данным, обращая дробно-линейное преобразование (2.18), определим функцию

$$\Theta(\lambda) = -(A_{12}(\lambda) - S(\lambda)\,A_{22}(\lambda))^{-1}\,(A_{11}(\lambda) - S(\lambda)\,A_{21}(\lambda)).$$

Здесь $A(\lambda) = \|A_{ij}(\lambda)\|_{ij=1,2}$ — $A$-матрица канонического уравнения на полуоси с потенциалом $V_+(r)$.

Выше было показано, что по функции $\Theta(\lambda)$ можно восстановить потенциал $V_-(r)$ на полуоси $(0, \infty)$. Рассматривая каноническое уравнение на всей оси с потенциалом

$$V(r) = \begin{cases} V_+(r) & \text{при } r > 0 \\ V_-(-r) & \text{при } r < 0 \end{cases}$$

и следуя рассуждениям п. 2.2 можно показать, что матрица рассеяния, соответствующая такому расширению оператора на полуоси с потенциалом $V_+(r)$, совпадает с заданной функцией $S(\lambda)$.

Рассмотрения настоящего пункта вместе с теоремой 2.2 приводят к следующему предложению:

Теорема 2.3. *Формулой* (2.18), *где* $\Theta(\lambda)$—*матрица-функция, удовлетворяющая условиям* (2.20)—(2.22), *дается описание $S$-матриц канонического оператора* (0.3), *соответствующих таким самосопряженным расширениям с выходом вида* (2.1), *что значениями потенциальной функции $V(r)$ при $r<0$ являются конечномерные операторы.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.VIII.1975

Պ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ. Կանոնական դիֆերենցիալ օպերատորների ցրման տեսության մասին (*ամփոփում*)

*Աշխատանքը նվիրված է (0.3) տեսքի դիֆերենցիալ արտահայտությամբ որոշվող օպերատորների ցրման տեսությանը։*

*(0.3)—(0.5) դիֆերենցիալ օպերատորի համար դիտարկվում են ասիմպտոտական մոտեցման դեպքում, ալիքային օպերատորների օգնությամբ և ըստ Լաքս-Ֆիլիպսի սխեմայի առաջացող S-մատրիցները և ապացուցվում է նրանց համընկնումը։*

*Այնուհետև, ամբողջ առանցքի վրա (2.1) արտահայտությամբ որոշված օպերատորը դիտարկվում է որպես (0.3) դիֆերենցիալ արտահայտությամբ կիսաառանցքի վրա տրված օպերատորի ինքնահամալուծ լայնացում։ Ապացուցվում է, որ այդպիսի լայնացումներին համապատասխանող S-մատրիցները ներկայացվում են (2.22) տեսքով։*

*Այն դեպքում, երբ բացասական կիսաառանցքի վրա լայնացումները տրվում են հանրագումարելի մատրից-ֆունկցիայով, լուծվում է V(r) պոտենցիալի վերականգնման հակադարձ խնդիրը, ըստ տրված S(λ) ֆունկցիայի։*

P. E. MELIK-ADAMIAN. *On the scattering theory of canonical differential operators* (summary)

The paper investigates some problem of the theory of scattering for the operators generated by the differential expression of the type (0.3).

The coincidense of $S$-matrices $S(\lambda)$ which arise in the asimptotical scattering theory under wave operator and Lax-Phillips schemes is proved.

Further the operator defined by (2.1) on the whole axis is considered as a selfadjoint extension of the operator, difined by (0.3) on the half axis. It is proved that the $S$-matrices corresponding to such extensions admit representation in the form (2.22). In the case, when the extensions on the negative half axis are given by summable matrix functions the inverse problem, for the potential $V(r)$ on the negative half axis given the function $S(\lambda)$ is solved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* Введение в геометрию индефинитных $J$-пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летняя матем. школа, 1, Киев, „Наукова думка“, 1965.
2. *В. М. Адамян.* К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 178, № 1, 1966.
3. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* К теории $S$-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом, ДАН Арм.ССР, 46, № 4, 1968.
4. *П. Лакс, Р. Филлипс.* Теория рассеяния, Изд. „Мир“, М., 1971.

5. *В. М. Адамян, Д. З. Аров.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов, Матем. исследования, 1, 2, Кишинев, 1966.

6. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд. „Наука", М., 1970.

7. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Матем. исследования, 2, 3, Кишинев, 1967.

8. *S. Bocher, R. S. Phillips.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings, Ann. of Math., 2, 43, 1942.

9. *П. Э. Мелик-Адамян.* О свойствах $S$-матрицы канонических дифференциальных уравнений на всей оси, ДАН Арм.ССР, 58, № 4, 1974.

10. *В. М. Адамян.* Невырожденные унитарные сцепления полуунитарных операторов, Функц. анализ, 7, № 4, 1973.

11. *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян.* Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функц. анализ, 4, № 4, 1970.

12. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 2, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 4, 1976 Математика

Х. О. МОВСИСЯН

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОВТОРНО СХОДЯЩИХСЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ХААРА

## § 1. Введение

Будем рассматривать в единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]\equiv[0,1]^2$ двойной ряд по системе Хаара

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}\chi_{nm}(x, y). \tag{1.1}$$

Мы скажем, что ряд (1.1) повторно суммируется по строкам к функции $f(x, y)$ на множестве $E=E_1\times E_2\subset[0,1]^2$, если при каждом фиксированном $m$, $m=0, 1, 2,\cdots$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}\chi_n(x) \tag{1.2}$$

сходится к функции $\varphi_m(x)$ на множестве $E_1$, и ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x)\chi_m(y) \tag{1.3}$$

сходится к функции $f(x, y)$ на множестве $E=E_1\times E_2$.

Аналогично определяется повторная суммируемость по столбцам.

Обозначим через $[x_0]$ ($[y_0]$) отрезок, являющийся пересечением прямой $x=x_0$ ($y=y_0$) с единичным квадратом $[0,1]^2$.

В § 2 доказывается теорема единственности для рядов (1.1), повторно суммирующихся к нулю, а именно

**Теорема 1.** *Пусть*

1°. *Ряд* (1.1) *повторно суммируется к нулю по строкам всюду на единичном квадрате* $[0,1]^2$ *, кроме, быть может, точек счетного числа отрезков* $[x_n]$, $n=1, 2,\cdots$.

2°. *Для любой точки* $(x_0, y_0)\in[0,1]^2$ *и для любого фиксированного значения* $m$, $m=0, 1, 2,\cdots$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k m}}{\chi_{n_k m}(x_0, y_0)}=0, \tag{1.4}$$

*где* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность всех номеров* $n$, *для которых* $\chi_{nm}(x_0, y_0)\neq 0$.

*Тогда* $a_{nm}=0$ *при всех* $n, m=0, 1, 2,\cdots$.

Далее в § 2 приводится пример двойного ряда по системе Хаара, который показывает, что в формулировке теоремы 1 надо потребовать повторную суммируемость ряда (1.1) по строкам для всех $y\in[0,1]$. А именно, существует ряд

$$\sum_{n,\, m=0}^{\infty} b_{nm}\chi_{nm}(x, y), \tag{1.5}$$

обладающий свойствами:

а) для любой точки $(x_0, y_0)\in[0,1]^2$ и для любого фиксированного значения $m$, $m=0, 1, 2,\cdots$

$$\lim_{n\to\infty} b_{nm}\chi_{nm}(x_0, y_0)=0; \tag{1.6}$$

в) Для любой точки $(x_0, y_0)\in[0,1]^2$ и для любого фиксированного значения $n$, $n=0, 1, 2,\cdots$

$$\lim_{m\to\infty} b_{nm}\chi_{nm}(x_0, y_0)=0; \tag{1.7}$$

с) Ряд (1.5) повторно суммируется к нулю по строкам всюду на единичном квадрате $[0,1]^2$, за исключением точек счетного числ отрезков $[y_n]$, $n=1, 2,\cdots$;

d) Не все коэффициенты $b_{nm}$ равны нулю.

Этот пример доказывает также, что для двойных рядов Хаара не верны результаты работ [1], [2] о том, что если для каждой точки $x\in[0, 1]$, кроме, быть может счетного множества точек, некоторая зависящая от точки $x$ подпоследовательность $S_{n_k(x)}(x)$ частных сумм ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$$

сходится к функции $f(x)$*, то

$$a_n=\int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx.$$

В самом деле, если построен ряд (1.5), удовлетворяющий условиям а), b), с), d), то для каждой точки $(x, y)\in[0,1]^2$, за исключением точек счетного числа отрезков $[y_n]$, $n=1, 2,\cdots$, очевидно существуют возрастающие последовательности натуральных чисел $\{N_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что прямоугольные частичные суммы

$$S_{N_k(x,y),\, M_k(x,y)}(x, y)$$

ряда (1.5) стремятся к нулю при $k\to\infty$.

---

[*] В работе [1] предполагается ограниченность $f(x)$, а в [2], при более сильных ограничениях на коэффициенты $a_n$, полагается $f(x)\in L_1$.

В § 3 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть ряд* (1.1) *обладает свойствами:*

1) *Для каждой точки* $(x, y) \in [0,1]^2$, *за исключением точек счетного числа отрезков* $[x_n]$ *и* $[y_n]$, $n = 1, 2, \cdots$ *существует (зависящая от точки* $(x, y)$*) возрастающоя последовательность* $\{N_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} S_{N_k(x, y), N_k(x, y)}(x, y) = f(x, y), \tag{1.8}$$

*где* $f(x, y)$ *— ограниченная функция.*

2) *Для любой точки* $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$

$$\lim_{n+m\to\infty} a_{nm}\chi_{nm}(x_0, y_0) = 0. \tag{1.9}$$

*Тогда ряд* (1.1) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Хаара, т. е.*

$$a_{nm} = (L)\iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y)\chi_{nm}(x, y)\,dxdy.$$

§ 2. Доказательство теоремы 1. Будем использовать следующую теорему, доказанную Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном (см. [3]).

Теорема А. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x), \tag{*}$$

где $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система Хаара, обладает свойствами:

1. Некоторая последовательность $\{S_{N_j}(x)\}$ частных сумм ряда (*) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0.1]$, кроме, быть может, счетного множества точек.

2. Для любой точки $x \in [0,1]$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x)},$$

где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ суть все те номера $n$, для которых $\chi_n(x) \neq 0$.

Тогда ряд ( * ) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара.

Заметим тот очевидный факт, что условие (1.4) равносильно условию

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k m}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0 \tag{2.1}$$

для любой точки $x_0 \in [0,1]$ и для любого фиксированного $m$, $m = 0, 1, \cdots$.

Тогда, в силу теоремы А, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что при любом $m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$

$$\varphi_m(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{lm}\chi_l(x) = 0$$

почти всюду на [0.1].

Пусть при некотором $m_0 \geqslant 0$

$$\varphi_{m_0}(x)\neq 0,\ x\in G,\ \text{mes}\, G>0. \qquad (2.2)$$

Выберем точку $x_0$ так, чтобы

$$x_0 \in G,\ x_0\neq x_n,\ n=1,2,\cdots. \qquad (2.3)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(x_0)\chi_m(y),$$

который сходится к нулю всюду на отрезке [0.1]. Следовательно (см. [4], теорему 1)

$$\varphi_m(x_0)=0;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

что противоречит условиям (2.2) и (2.3). Теорема 1 доказана.

Перед тем, как перейти к построению ряда (1.5), дадим несколько определений и докажем несколько простых лемм.

Интервалы вида

$$\left(\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k}\right),\ 1\leqslant i\leqslant 2^k,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

будем называть интервалами Хаара ранга $k$.

Наибольший интервал, на котором функция Хаара $\chi_n(x)\neq 0$ почти всюду назовем носителем функции $\chi_n(x)$.

Через $(\Delta)_x$ и $(\Delta)_y$ будем обозначать проекции прямоугольника $\Delta$ на оси $x$ и $y$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть даны положительное число* $\varepsilon$, *натуральные числа* $d_1$, $p'$ *и двоично-рациональный интервал* $(a,\ b)$. *Тогда существует полином по системе Хаара*

$$P(x)=\sum_{l=p_1}^{p_2} c_l\chi_l(x) \qquad (2.4)$$

*и множества* $E$, $F$, *обладающие следующими свойствами:*

1°. $p_2>p_1>p'$, $\chi_l(x)=0$ *при* $x\overline{\in}(a,\ b)$ *для всех* $l$, $p_1\leqslant l\leqslant p_2$.

2°. *Множество* $E$ *есть сумма конечного числа непересекающихся двоично-рациональных интервалов, причем*

$$d_1\varepsilon+P(x)=0,\ x\in E.$$

3°. $F=[a,\ b]\setminus E=\bigcup_{l=1}^{q}\overline{\gamma}_l$, *где* $\gamma_l$, $l=1,\ 2,\cdots,\ q$ — *непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем*

$$0<d_1\varepsilon+P(x)=b_i\varepsilon\leqslant d_1\varepsilon+\varepsilon=(d_1+1)\varepsilon,\ x\in\gamma_i,\ i=1,\ 2,\cdots,\ q,$$

*где $b_i$ — некоторые натуральные числа.*

4°. $\max\limits_{x\in(a,\,b)}|c_i\chi_i(x)|=\varepsilon,\ p_1\leqslant i\leqslant p'.$

Доказательство. Интервал $(a,\ b)$ разобьем на интервалы такого ранга $k$, что $2^k>p'$ и перенумеруем их слева направо: $\Delta_k^{(1)}$, $\Delta_k^{(2)},\cdots,\ \Delta_k^{(m)}$.

Пусть $\chi_{p_1}(x)$ — функция системы Хаара, носителем которой является интервал $\Delta_k^{(1)}$. Выберем $c_{p_1}$ так, чтобы

$$c_{p_1}\max_{\Delta_k^{(1)}}|\chi_{p_1}(x)|=\varepsilon.$$

Обозначим через $\delta_1'$ и $\delta_1''$ те интервалы, на которых функция $\chi_{p_1}(x)$ принимает соответственно положительные и отрицательные значения. Будем иметь

$$d_1\varepsilon+c_{p_1}\chi_{p_1}(x)=\begin{cases}(d_1+1)\varepsilon & \text{при } x\in\delta_1'\\ (d_1-1)\varepsilon & \text{при } x\in\delta_1''.\end{cases}$$

Далее, через $\chi_{p_1}^{(1)}(x)$ обозначим ту функцию системы Хаара, носителем которой является интервал $\delta_1''$. Выберем $c_{p_1}^{(1)}$ так, чтобы

$$c_{p_1}^{(1)}\max_{\delta_1''}|\chi_{p_1}^{(1)}(x)|=\varepsilon.$$

Тогда будем иметь

$$d_1\varepsilon+c_{p_1}\chi_{p_1}(x)=c_{p_1}^{(1)}\chi_{p_1}^{(1)}(x)=\begin{cases}d_1\varepsilon & \text{при } x\in\delta_2'\\ (d_1-2)\varepsilon & \text{при } x\in\delta_2'',\end{cases}$$

где $\delta_2'$ и $\delta_2''$ те интервалы, на которых функция $\chi_{p_1}^{(1)}(x)$ принимает соответственно положительные и отрицательные значения.

Продолжая аналогичные построения, через $d_1$ шагов получим полином

$$Q_1(x)=c_{p_1}\chi_{p_1}(x)+\sum_{j=1}^{d_1-1}c_{p_1}^{(j)}\chi_{p_1}^{(j)}(x),$$

множества $E$ и $F_1$, обладающие следующими свойствами:

а) $d_1\varepsilon+Q_1(x)=0$ при $x\in E_1\subset\Delta_k^{(1)}$, где $E_1$ — некоторый двоично-рациональный интервал.

в) $F_1=\Delta_k^{(1)}\setminus E_1=\bigcup\limits_{i=1}^{q_1}\overline{\gamma}_i^{(1)}$, где $\gamma_i^{(1)},\ i=1,\ 2,\cdots,q_1$ — непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем

$$0<d_1\varepsilon+Q_1(x)=b_i^{(1)}\varepsilon\leqslant(d_1+1)\varepsilon\ \text{при}\ x\in\gamma_i^{(1)},\ i=1,\ 2,\cdots,\ q_1,$$

где $b_i^{(1)}$ — некоторые натуральные числа.

c) $\max\limits_{x\in(a,\, b)} |c^{(j)}_{p_1}\chi^{(j)}_{p_1}(x)| = \varepsilon,\ j = 1,\ 2, \cdots, (d_1 - 1),\ \max\limits_{x\in(a.\, b)} |c_{p_1}\chi_{p_1}(x)| = \varepsilon.$

При помощи аналогичных построений на интервалах $\Delta^{(i)}_k$, $i = 2, 3, \cdots, m$, получим полиномы $Q_2(x), \cdots, Q_m(x)$ и множества $E_i$, $F_i$, $i = 2, 3, \cdots, m$, обладающие свойствами, аналогичные свойствам a), в), c).

Положим

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(x) \equiv \sum_{l=p_1}^{p_2} c_l\chi_l(x),$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i,\quad F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i.$$

Ясно, что полином $P(x)$, множества $E$ и $F$ удовлетворяют всем требованиям леммы 1.

Лемма 2. *Существует ряд*

$$\chi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x), \tag{2.5}$$

*обладающий следующими свойствами:*

1°. *Ряд* (2.5) *сходится к некоторой ограниченной, неотрицательной функции* $F(x)$ *всюду на отрезке* [0,1], *причем* $F(x) = 0$ *вне некоторого нигде не плотного совершенного множества* $P \subset [0,1]$ *положительной меры.*

2°. $\max |c_k\chi_k(x)| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Возьмем последовательность чисел

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2^k},\quad k = 1,\ 2, \cdots.$$

Положим $c_0\chi_0(x) = 1$ при $x \in [0,1]$. Применяя лемму 1, где вместо $\varepsilon$, $d_1$, $p'$, $(a,\ b)$ взяты, соответственно, $\varepsilon_1$, 2, 0, (0,1), получим полином $P_1(x)$ и множества $E$, $F_1$.

Пусть после $n$-кратного применения леммы 1 получен полином

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{q_n} c_l\chi_l(x),\quad c_0 = 1,$$

множества $E_n$ и $F_n$ такие, что:

Множество $E_n$ есть сумма конечного числа непересекающихся двоично-рациональных интервалов, причем

$$P_n(x) = 0 \text{ при } x \in E_n;$$

$F_n = [0,1] \setminus E_n = \bigcup\limits_{i=1}^{m_n} \overline{\gamma}^{(n)}_i$, где $\gamma^{(n)}_i$, $i = 1,\ 2, \cdots, m_n$ — непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем

$$0 < P_n(x) = b_i^{(n)}\varepsilon_{n+1} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \quad \text{при } x \in \gamma_i^{(n)},$$

где $b_i^{(n)}$ — натуральные числа.

Применяя лемму 1 в каждом интервале $\gamma_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \cdots, m_n$, взяв вместо $\varepsilon$, $d_i\varepsilon$, $p'$, соответственно, $\varepsilon_{n+1}$, $b_i^{(n)}\varepsilon_{n+1}$, $q_n$, получим полином

$$P_{n+1}(x) = \sum_{l=0}^{q_{n+1}} c_l \chi_l(x), \quad q_{n+1} > q_n$$

и множества $E_{n-1}$, $F_{n+1}$, обладающие свойствами:

Множество $E_{n+1}$ есть сумма конечного числа двоично-рациональных интервалов (полуоткрытых или открытых), причем

$$P_{n+1}(x) = 0, \quad x \in E_{n+1} \supset E_n;$$

$F_{n+1} = [0,1] \setminus E_{n+1} = \bigcup\limits_{i=1}^{m_{n+1}} \gamma_i^{(n+1)}$, где $\gamma_i^{(n+1)}$, $i = 1, 2, \cdots, m_{n+1}$ — непересекающиеся двоично-рациональные интервалы, причем

$$0 < P_{n+1}(x) = b_i^{(n+1)}\varepsilon_{n+2} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \quad \text{при } x \in \gamma_i^{(n+1)};$$

$$\max_{x \in [0,1]} |c_l \chi_l(x)| \leqslant \varepsilon_{n+1} \quad \text{при } q_n < l \leqslant q_{n+1}.$$

Легко убедиться в том, что полученный таким образом ряд удовлетворяет условиям 1°, 2°.

**Лемма 3.** *Пусть ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

*сходится к ограниченной, неотрицательной функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$ причем $f(x) = 0$ вне некоторого совершенного нигде не плотного множества $Q \subset [0,1]$.*

*Тогда для любого натурального числа $m \geqslant 1$ существует ряд*

$$\sum_{n=m}^{\infty} b_n \chi_n(x) \tag{A}$$

*и совершенное, нигде не плотное множество $P \subset [0,1]$, такие, что*

а) $P \cap Q = \varnothing$;

в) *ряд* (A) *сходится к ограниченной неотрицательной функции $F(x)$ всюду на отрезке* $[0,1]$, *причем*

$$F(x) = f(x) \quad \text{при } x \overline{\in} P.$$

**Доказательство.** Пусть $\{\Delta_l\}_{l=1}^{m}$ — интервалы постоянств множества функций $\chi_0(x), \chi_1(x), \cdots, \chi_{m-1}(x)$, причем

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bar{\Delta}_i = [0,1], \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Эти интервалы определяются следующим образом.

Если $m-1 = 2^k - 1$, где $k \geqslant 0$, то

$$\Delta_i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Если $m-1 = 2^k + p$, где $0 \leqslant p < 2^k - 1$, то

$$\Delta_i = \left(\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}}\right) \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant 2p+2,$$

$$\Delta_i = \left(\frac{i-p-2}{2^k}, \frac{i-p-1}{2^k}\right) \text{ при } 2p+2 < i \leqslant m.$$

Так как множество $Q$ нигде не плотно на $[0,1]$, то существуют интервалы Хаара $\{\delta_i\}_{i=1}^{m}$ такие, что

$$\delta_i \subset \Delta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \text{ и } Q \cap \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i = \varnothing.$$

Положим

$$F_1(x) = \begin{cases} m_i & \text{при } x \in \delta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ f(x) & \text{при } x \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \delta_i, \end{cases}$$

причем числа $m_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, выбраны так, чтобы

$$\int_{\Delta_i} F_1(x)\, dx = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.6}$$

Если через $\Delta^{(k)}$ обозначить носитель функции $\chi_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, то

$$\Delta_+^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{r_k} \Delta_{i_n}, \quad \Delta_-^{(k)} = \bigcup_{n=1}^{s_k} \Delta_{j_n}, \quad 1 \leqslant i_n, \; j_n \leqslant m-1,$$

где $\Delta_+^{(k)} = \{x;\ \chi_k(x) > 0\}$, $\Delta_-^{(k)} = \{x;\ \chi_k(x) < 0\}$.

Тогда, в силу (2.6)

$$\int_0^1 F_1(x)\, \chi_k(x)\, dx = \max|\chi_k(x)| \int_{\Delta_+^{(k)}} F_1(x)\, dx - \max|\chi_k(x)| \int_{\Delta_-^{(k)}} F_1(x)\, dx =$$

$$= \max|\chi_k(x)| \sum_{n=1}^{r_k} \int_{\Delta_{i_n}} F_1(x)\, dx - \max|\chi_k(x)| \sum_{n=1}^{s_k} \int_{\Delta_{j_n}} F_1(x)\, dx = 0. \tag{2.7}$$

Для каждого $i = 1, 2, \cdots, m$ ряд (2.5) отобразим на отрезок $\bar{\delta}_i$, заранее умножая на $m_i$. Тогда получится ряд

$$m_i + \sum_{k=k_i}^{\infty} c_k^{(i)} \chi_k(x), \tag{2.8}$$

причем $c_k^{(i)} = 0$, когда носитель функции $\chi_k(x)$ не содержится в $\delta_i$. Ряд (2.8) при каждом $i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, всюду сходится к ограниченной, неотрицательной функции $\varphi_i(x)$ на отрезке $\bar{\delta}_i$, причем $\varphi_i(x) = 0$ вне некоторого совершенного, нигде не плотного множества $P_i \subset \delta_i$.

Положим

$$F(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) \text{ при } x \in \delta_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ f(x) \text{ при } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i. \end{cases}$$

Обозначим через $b_n$ коэффициенты Фурье функции $F(x)$ по системе Хаара. В силу условия (2.7) и определения ряда (2.8)

$$b_k = \int_0^1 F(x) \chi_k(x)\, dx = \int_0^1 F_1(x) \chi_k(x)\, dx = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m-1,$$

так как

$$\int_{\delta_i} \varphi_i(x)\, dx = \int_{\delta_i} m_i\, dx.$$

Ряд

$$\sum_{n=m}^{\infty} b_n \chi_n(x), \tag{2.9}$$

являющийся суммой рядов Фурье функций $f(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, m$, сходится к функции $F(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$.

Положим

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Ясно, что ряд (2.9) и множество $P$ удовлетворяют требованиям леммы 3.

Перейдем к построению ряда (1.5).

Положим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n0} \chi_n(x) \chi_0(y) \equiv \chi_0(y) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x), \tag{2.10}$$

где ряд, стоящий в правой части (2.10), совпадает с рядом (2.5). Этот одномерный ряд сходится всюду на отрезке $[0,1]$ к ограниченной, неотрицательной функции $F_0(x)$, причем $F_0(x) = 0$ вне некоторого совершенного, нигде не плотного множества $P_0 \subset [0,1]$. Поэтому ряд (2.10) будет сходиться всюду на единичном квадрате $[0,1]^2$ к ограниченной функции $F_0(x) \chi_0(y)$, причем $F_0(x) \chi_0(y) = 0$ вне множества $P_0 \times [0,1]$.

Пусть уже построены ряды

$$\sum_{n=i}^{\infty} b_{ni} \chi_n (x), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, s. \tag{2.11}$$

обладающие следующими свойствами:

для каждого $i$, $i = 0, 1, \cdots, s$, ряд (2.11) сходится всюду на $[0,1]$ к ограниченной функции $F_i(x)$;

$F_i(x) = 0$ вне множества $\bigcup\limits_{k=0}^{i} P_k$, где $P_k$, $k = 0, 1, \cdots, i$ — непересекающиеся, совершенные, нигде не плотные множества.

Построим ряд

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} b_{n,\, s+1} \chi_n (x) \tag{2.12}$$

следующим образом.

Положим

$$\sigma_s (x, y) = \sum_{i=0}^{s} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_{ni} \chi_n (x) \right] \chi_i (y) = \sum_{i=0}^{s} F_i (x) \chi_i (y). \tag{2.13}$$

Пусть $\{\chi_{i_k} (y)\}_{k=0}^{\tau_s}$* — все функции системы Хаара носители которых содержат внутри себя интервал $\Delta_{s+1}$, являющийся носителем функции $\chi_{s+1} (y)$. Положим

$$\Phi_{i_k} (x) = \max_{y \in [0,1]} |\chi_{i_k} (y)| \, F_{i_k} (x), \quad k = 0, 1, \cdots, \tau_s. \tag{2.14}$$

Тогда, так как при $(x, y) \in [0,1] \times \Delta_{s+1}$

$$\sigma_s (x, y) = \sum_{k=0}^{\tau_s} F_{i_k} (x) \chi_{i_k} (y),$$

то

$$\sigma_s (x, y) = \sum_{k=0}^{\tau_s} \lambda_k \Phi_{i_k} (x), \tag{2.15}$$

где

$$\lambda_k = 1, \text{ когда } \Delta_{s+1} \subset \Delta_{i_k}^{+} \equiv \{y;\ \chi_{i_k} (y) > 0\},$$

$$\lambda_k = -1, \text{ когда } \Delta_{s+1} \subset \Delta_{i_k}^{-} \equiv \{y;\ \chi_{i_k} (y) < 0\}. \tag{2.16}$$

Ясно, что при любом фиксированном $x \in [0,1]$

$$\sigma_s (x, y) = \text{const при } y \in \Delta_{s+1}. \tag{2.17}$$

Положим

$$f_s (x) = \frac{1}{\max\limits_{[0,1]} |\chi_{s+1} (y)|} \sum_{k=0}^{\tau_s} \lambda_k \Phi_{i_k} (x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} d_k \chi_k (x). \tag{2.18}$$

---

* Ясно, что $\chi_{i_0} (y) \equiv \chi_0 (y)$.

Ряд (2.18) сходится всюду на отрезке [0,1], причем

$$f_s(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} Q_s = \bigcup_{l=0}^{s} P_l. \tag{2.19}$$

Применяя лемму 3, где вместо $f(x)$, $Q$, $m$ взяты, соответственно, $f_s(x)$, $Q_s$, $s+1$, получим всюду сходящийся на [0,1] ряд

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} b_{n,s+1} \chi_n(x) = F_{s+1}(x) \tag{2.20}$$

и совершенное, нигде не плотное множество $P_{s+1}$, такие, что

$$P_{s+1} \cap \bigcup_{l=0}^{s} P_l = \varnothing, \tag{2.21}$$

$$F_{s+1}(x) = f_s(x) \text{ при } x \overline{\in} P_{s+1}. \tag{2.22}$$

Таким образом, ряд (2.12) построен.

Докажем, что если $x_0 \overline{\in} P_{s+1}$, то $\sigma_{s+1}(x_0, y) = 0$ при $y \in \Delta_{s+1}^-$. Из (2.15), (2.18), (2.19), (2.20), (2.22) следует, что

$$\sigma_{s+1},(x_0, y) = \sigma_s(x_0, y) + \chi_{s+1}(y) \sum_{n=s+1}^{\infty} b_{n,s+1} \chi_n(x_0) = \sigma_s(x_0, y) +$$

$$+ \chi_{s+1}(y) F_{s+1}(x_0) = \sigma_s(x_0, y) + \chi_{s+1}(y) f_s(x_0) = \sum_{k=0}^{r_s} \lambda_k \Phi_{i_k}(x_0) +$$

$$+ \frac{\chi_{s+1}(y)}{\max |\chi_{s+1}(y)|} \sum_{k=0}^{r_s} \lambda_k \Phi_{i_k}(x_0) = 0$$

при $y \in \Delta_{s+1}^-$

Применим лемму 3 бесконечное число раз. Докажем, что построенный таким образом двойной ряд повторно суммируется к нулю всюду на единичном квадрате $[0,1]^2$, за исключением точек счетного числа отрезков $[y_n]$, $n=1, 2, \cdots$, где $y_n$ — все двоично-рациональные точки отрезка [0,1].

Пусть $y_0 \in [0,1]$ — произвольное двоично-иррациональное число. Покажем, что построенный двойной ряд повторно суммируется к нулю в произвольно взятой точке $(x_0, y_0) \in [y_0]$.

Если $x_0 \overline{\in} \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$, то утверждение очевидно. Пусть $k_0$ — то наименьшее целое число ($k_0 \geqslant 0$), что $x_0 \in P_{k_0}$. Обозначим через $\{\Delta_{k_l}\}_{l=0}^{\infty}$ последовательность вложенных интервалов Хаара, которые стягиваются в точке $y_0$ ($\Delta_{k_l}$ — носитель функции $\chi_{k_l}(y)$). Обозначим через $\Delta_{m_1}$ тот первый интервал из последовательности $\{\Delta_{k_l}\}_{l=0}^{\infty}$, для которого $y_0 \in \Delta_{m_1}^-$ (такой интервал существует, так как $y_0$ — двоично-иррациональное число).

Так как $P_{k_0} \cap P_{m_1} = \varnothing$, то $x_0 \overline{\in} P_{m_1}$. Тогда по вышеуказанному свойству будем иметь $\sigma_{m_1}(x_0, y) = 0$ при $y \in \Delta_{m_1}^-$ и, в частности, $\sigma_{m_1}(x_0, y_0) = 0$.

Так как $P_j \cap \bigcup_{i=0}^{m_1} P_i = \varnothing$ при $j > m_1$, то $s_j(x_0, y_0) = 0$ при $j > m_1$, т. е. построенный двойной ряд повторно суммируется к нулю в точке $(x_0, y_0)$.

§ 3. **Доказательство теоремы 2.** Предварительно докажем следующие леммы.

**Лемма 3.1.** *Пусть при некотором* $p_0$

$$S_{p_0p_0}(x, y) > c > 0 \tag{3.1}$$

*при* $(x, y) \in \Delta_{p_0p_0}$, *где* $\Delta_{p_0p_0}$ — *некоторый прямоугольник постоянства частной суммы* $S_{p_0p_0}(x, y)$. *Тогда для любого отрезка* $[x_0]$ *можно найти число* $p > p_0$ *и прямоугольник* $\Delta_{pp}$ *такие, что*

1°. $\bar{\Delta}_{pp} \subset \bar{\Delta}_{p_0p_0}$,
2°. $[x_0] \cap \bar{\Delta}_{pp} = \varnothing$,
3°. $S_{nn}(x, y) > c$ *при* $(x, y) \in \Delta_{pp}$, $p_0 \leqslant n \leqslant p$.

**Лемма 3.2.** *Пусть при некотором* $p$

$$S_{pp}(x, y) > c > 0$$

*при* $(x, y) \in \Delta_{pp}$, *где* $\Delta_{pp}$ — *некоторый прямоугольник постоянства частной суммы* $S_{pp}(x, y)$. *Тогда для любого отрезка* $[y_0]$ *можно найти число* $p_1 > p$ *и прямоугольник* $\Delta_{p_1p_1}$ *такие, что*

1°. $\bar{\Delta}_{p_1p_1} \subset \bar{\Delta}_{pp}$,
2°. $[y_0] \cap \bar{\Delta}_{p_1p_1} = \varnothing$,
3°. $S_{nn}(x, y) > c$ *при* $(x, y) \in \Delta_{p_1p_1}$, $p \leqslant n \leqslant p_1$.

**Лемма 3.3.** *Пусть при некотором* $p_0$ $S_{p_0p_0}(x, y) > c > 0$ *при* $(x, y) \in \Delta_{p_0p_0}$, *где* $\Delta_{p_0p_0}$ — *некоторый прямоугольник постоянства частной суммы* $S_{p_0p_0}(x, y)$. *Тогда для любых отрезков* $[x_0]$ *и* $[y_0]$ *можно найти число* $p_1 > p_0$ *и прямоугольник* $\Delta_{p_1p_1}$ *такие, что*

1°. $\bar{\Delta}_{p_1p_1} \subset \bar{\Delta}_{p_0p_0}$,

2°. $[x_0] \cap \bar{\Delta}_{p_1p_1} = \varnothing$, $[y_0] \cap \bar{\Delta}_{p_1p_1} = \varnothing$,

3°. $S_{nn}(x, y) > c$ *при* $(x, y) \in \Delta_{p_1p_1}$, $p_0 \leqslant n \leqslant p_1$.

Лемма 3.3 вытекает из лемм 3.1 и 3.2. Докажем лемму 3.1. Лемма 3.2 доказывается аналогично.

Возьмем $\varepsilon$ такое, что

$$S_{p_0p_0}(x, y) = c + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Пусть $\chi_{k_1}(x)$ и $\chi_{m_1}(y)$ — первые функции системы Хаара, равные нулю вне интервалов $(\Delta_{p_0p_0})_x$ и $(\Delta_{p_0p_0})_y$ соответственно.

Допустим, что

$$k_1 \geqslant m_1. \tag{3.3}$$

Если $k_1 < m_1$, то лемма доказывается аналогичными рассуждениями.

При $(x, y) \in \Delta_{p_0p_0}$ будем иметь

$$S_{p_0m_1}(x, y) = S_{p_0p_0}(x, y) + \chi_{m_1}(y) \sum_{l=0}^{p_0} a_{lm_1} \chi_l(x) = c + \varepsilon +$$

$$+ \chi_{m_1}(y) \sum_{l=0}^{p_0} a_{lm_1} \chi_l(x). \tag{3.4}$$

Ясно, что

$$\sum_{l=0}^{p_0} a_{lm_1} \chi_l(x) \equiv \mathrm{const} \tag{3.5}$$

при $x \in (\Delta_{p_0p_0})_x$. Поэтому

$$S_{p_0m_1}(x, y) \geqslant c + \varepsilon \tag{3.6}$$

на некотором своем прямоугольнике постоянства $\Delta_{p_0m_1}$, причем

$$\Delta_{p_0m_1} \subset \Delta_{p_0p_0}, \ (\Delta_{p_0p_0})_x \equiv (\Delta_{p_0m_1})_x, \ \mathrm{mes}\, \Delta_{p_0m_1} = \frac{1}{2} \mathrm{mes}\, \Delta_{p_0p_0}. \tag{3.7}$$

При $(x, y) \in \Delta_{p_0m_1}$ будем иметь

$$S_{k_1m_1}(x, y) = S_{p_0m_1}(x, y) + \chi_{k_1}(x) \sum_{l=\rho}^{m_1} a_{k_1l} \chi_l(y). \tag{3.8}$$

Обозначим через $\Delta^{(i)}_{k_1m_1}$, $i = 1, 2$, те прямоугольники постоянства частной суммы $S_{k_1m_1}(x, y)$, для которых

$$\Delta^{(i)}_{k_1m_1} \subset \Delta_{p_0m_1}, \ (\Delta^{(1)}_{k_1m_1})_y \equiv (\Delta^{(2)}_{k_1m_1})_y, \ \mathrm{mes}\, \Delta^{(i)}_{k_1m_1} = \frac{1}{2} \mathrm{mes}\, \Delta_{p_0m_1}, \ i=1, 2. \tag{3.9}$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{m_1} a_{k_1l} \chi_l(y) \equiv \mathrm{const} \quad \text{при } y \in (\Delta_{p_0m_1})_y,$$

то априори возможны два случая:

I) $S_{k_1m_1}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta^{(i)}_{k_1m_1}$, $i = 1, 2$,

II) $S_{k_1m_1}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_1m_1}$ и $S_{k_1m_1}(x, y) < c$ при $(x, y) \in \Delta^{(2)}_{k_1m_1}$.

Предположим, что имеет место случай II). Тогда ясно, что

$$\max_{(x, y) \in \Delta_{p_0m_1}} \left| \chi_{k_1}(x) \sum_{l=0}^{m_1} a_{k_1l} \chi_l(y) \right| > \varepsilon, \tag{3.10}$$

и поэтому

$$\max_{[0, 1]^2} |a_{k_1l_1} \chi_{k_1}(x) \chi_{l_1}(y)| > \frac{\varepsilon}{m_1} \tag{3.11}$$

при некотором $i_1$, $0 \leqslant i_1 \leqslant m_1$.

Ясно, что тогда

$$S_{k_1 m_1}(x, y) > c + 2\varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_1 m_1}. \tag{3.12}$$

Пусть $\chi_{k_2}(x)$ и $\chi_{m_2}(y)$ — первые функции системы Хаара, равные нулю вне интервалов $(\Delta_{k_1 m_1})_x$ и $(\Delta_{k_1 m_1})_y$, соответственно. Из условия (3.3) вытекает, что $k_2 \geqslant m_2$, а из (3.12) ясно, что

$$S_{k_2 m_2}(x, y) > c + 2\varepsilon \tag{3.13}$$

на некотором своем прямоугольнике постоянства $\Delta_{k_2 m_2}$, причем

$$\Delta_{k_2 m_2} \subset \Delta_{k_1 m_1}, \ (\Delta_{k_1 m_1})_x \equiv (\Delta_{k_2 m_2})_x, \ \text{mes}\, \Delta_{k_2 m_2} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{k_1 m_1}. \tag{3.14}$$

Обозначим через $\Delta^{(i)}_{k_2 m_2}$, $i = 1, 2$, те прямоугольники постоянства частной суммы $S_{k_2 m_2}(x, y)$, для которых

$$\Delta^{(i)}_{k_2 m_2} \subset \Delta_{k_2 m_2}, \ (\Delta^{(1)}_{k_2 m_2})_y \equiv (\Delta^{(2)}_{k_2 m_2})_y, \ \text{mes}\, \Delta^{(i)}_{k_2 m_2} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{k_2 m_2}, \ i = 1, 2. \tag{3.15}$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{m_2} a_{k_2, l}\, \chi_l(y) \equiv \text{const} \quad \text{при } y \in (\Delta_{k_2 m_2})_y,$$

то опять возможны только два случая

I) $S_{k_2 m_2}(x, y) > c$ при $(x, y) \in \Delta^{(i)}_{k_2 m_2}$, $i = 1, 2$;

II) $S_{k_2 m_2}(x, y) > c + 2\varepsilon$ при $(x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_2 m_2}$

и $S_{k_2 m_2}(x, y) < c$ при $(x, y) \in \Delta^{(2)}_{k_2 m_2}$.

Предположим, что опять имеет место случай II). Тогда аналогично предыдущему (см. (3.10) и (3.11)) будем иметь

$$\max_{[0,1]^2} |a_{k_2 i_2} \chi_{k_2}(x)\, \chi_{i_2}(y)| > \frac{2\varepsilon}{m_1 + 1}, \ 0 \leqslant i_2 \leqslant m_2, \tag{3.16}$$

$$S_{k_2 m_2}(x, y) > c + 4\varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_2 m_2}. \tag{3.17}$$

Проведем аналогичные рассуждения при условии, что на любом $i$-ом шагу $i = 1, 2, 3, \cdots$ имеет место случай II). Тогда на $n$-ом шагу будем иметь:

$$S_{k_n m_n}(x, y) > c + 2^{n-1} \cdot \varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_n m_n} \text{ и } S_{k_n m_n}(x, y) < c$$

при $(x, y) \in \Delta^{(2)}_{k_n m_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, $k_n \geqslant m_n$.

Ясно, что при некотором $i_n$

$$\max_{[0,1]^2} |a_{k_n i_n} \chi_{k_n}(x) \cdot \chi_{i_n}(y)| > \frac{2^{n-1}\varepsilon}{m_1 + n - 1}, \ 0 < i_n < m_n, \ n = 1, 2, \cdots, \tag{3.18}$$

$$S_{k_n m_n}(x, y) > c + 2^n \varepsilon \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(1)}_{k_n m_n}, \tag{3.19}$$

причем

$$\Delta^{(i)}_{k_n m_n} \subset \Delta_{k_{n-1} m_n}, \ (\Delta^{(1)}_{k_n m_n})_y \equiv (\Delta^{(2)}_{k_n m_n})_y, \tag{3.20}$$

$$\operatorname{mes} \Delta^{(i)}_{k_n m_n} = \frac{1}{2} \operatorname{mes} \Delta_{k_{n-1} m_n}, \ i = 1, 2, \ n = 1, 2, \cdots.$$

Из условия (3.20) вытекает, что прямоугольники $\overline{\Delta}_{k_n m_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, имеют некоторую общую точку $(\xi_0, \eta_0) \in [0,1]^2$. Так как

$$|a_{k_n l_n} \chi_{k_n}(\xi_0) \chi_{l_n}(\eta_0)| \geqslant \frac{1}{4} \max_{[0,1]^2} |a_{k_n l_n} \chi_{k_n}(x) \chi_{l_n}(y)|,$$

то из (3.18) следует, что в точке $(\xi_0, \eta_0)$ нарушается условие (1.9). Следовательно, на некотором шагу должен иметь место случай I.

Пусть $n_0$—наименьшее натуральное число, при котором имеет место случай I, т. е.

$$S_{k_{n_0} m_{n_0}}(x, y) > c \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(i)}_{k_{n_0} m_{n_0}}, \ i = 1, 2.$$

Если

$$[x_0] \cap \{\overline{\Delta}^{(1)}_{k_{n_0} m_{n_0}} \cap \overline{\Delta}^{(2)}_{k_{n_0} m_{n_0}}\} = \varnothing, \tag{3.21}$$

то в качестве $\Delta_{pp}$ возьмем тот из $\Delta^{(i)}_{k_{n_0} m_{n_0}}$, $i = 1, 2$, который не пересекается с отрезком $[x_0]$. В качестве $S_{pp}(x, y)$ возьмем $S_{k_{n_0} k_{n_0}}(x, y)$. Ясно, что прямоугольник $\Delta_{k_{n_0} m_{n_0}}$ является прямоугольником постоянства для частной суммы $S_{k_{n_0} k_{n_0}}(x, y)$, причем

$$S_{k_{n_0} k_{n_0}}(x, y) = S_{k_{n_0} m_{n_0}}(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Delta_{k_{n_0} m_{n_0}}.$$

Выполнение условия 3° следует из (3.19).

Если

$$[x_0] \cap \{\overline{\Delta}^{(1)}_{k_{n_0} m_{n_0}} \cap \overline{\Delta}^{(2)}_{k_{n_0} m_{n_0}}\} \neq \varnothing,$$

то путем аналогичных рассуждений в любом из прямоугольников $\Delta^{(i)}_{k_{n_0} m_{n_0}}$, $i = 1, 2$, придем к условию, аналогичному (3.21).

Лемма 3.1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Не нарушая общности можно считать, что

$$|f(x, y)| \leqslant 1 \text{ при } (x, y) \in [0,1]^2. \tag{3.22}$$

Положим

$$b_{ij} = \iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y) \chi_i(x) \chi_j(y) \, dxdy$$

и,

$$\sigma_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y). \tag{3.23}$$

Нетрудно доказать, что частные суммы $\sigma_{nm}(x, y)$ на своих прямоугольниках постоянства равны интегральному среднему функции $f(x, y)$ в соответствующих прямоугольниках. Тогда по теореме 5 работы [5]

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{nn}(x, y) = f(x, y) \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \qquad (3.24)$$

В силу (3.22) и вышеуказанного свойства частичных сумм $\sigma_{nm}(x, y)$

$$|\sigma_{nm}(x, y)| \leqslant 1, \ (x, y) \in [0,1]^2, \ n, \ m = 0, 1, 2, \cdots. \qquad (3.25)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} c_{nm} \chi_{nm}(x, y), \qquad (3.26)$$

где $c_{nm} = a_{nm} - b_{nm}$ и положим

$$Q_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y).$$

А'priори возможны два случая.

I) Частные суммы $Q_{nn}(x, y)$ равномерно ограничены на $[0,1]^2$.

II) Частные суммы $Q_{nn}(x, y)$ не ограничены в совокупности.

Пусть имеет место случай II. Тогда существует точка $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ с двоично-иррациональными координатами и число $p_0$ такие, что

$$|Q_{p_0 p_0}(x_0, y_0)| > 3. \qquad (3.27)$$

В силу (3.26)

$$Q_{nn}(x, y) = S_{nn}(x, y) - \sigma_{nn}(x, y), \qquad (3.28)$$

а ввиду (3.25) и (3.28)

$$S_{p_0 p_0}(x_0, y_0) \geqslant 2 \text{ или } S_{p_0 p_0}(x_0, y_0) \leqslant -2. \qquad (3.29)$$

Не нарушая общности можно предполагать, что имеет место первое неравенство. В противном случае нужно рассматривать ряд

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} - a_{nm} \chi_{nm}(x, y).$$

Так как $x_0$ и $y_0$—двоично-иррациональные числа, то

$$S_{p_0 p_0}(x, y) > 2 \qquad (3.30)$$

при $(x, y) \in \Delta_{p_0 p_0}$, где $\Delta_{p_0 p_0}$ — прямоугольник постоянства частной суммы $S_{p_0 p_0}(x, y)$, содержащий точку $(x_0, y_0)$.

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество абсцисс всех точек, в которых не выполняется условие (1.8), и всех двоично-рациональных точек на [0,1], а $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество ординат всех точек, в которых не выполняется условие (1.8), и всех двоично-рациональных точек на [0,1].

Из (3.30) с применением леммы 3.3 при $[x_0] \equiv [\xi_i]$, $[y_0] \equiv [\eta_k]$ найдем натуральное число $p_1 > p_0$ такое, что

$$[\xi_1]\cap\bar{\Delta}_{p_1p_1}=\varnothing,\ [\eta_1]\cap\bar{\Delta}_{p_1p_1}=\varnothing,\ \bar{\Delta}_{p_1p_1}\subset\bar{\Delta}_{p_0p_0},$$

$$S_{nn}(x,\ y)>2 \text{ при } (x,\ y)\in\Delta_{p_1p_1},\ p_0\leqslant n\leqslant p_1.$$

Далее, применяя лемму 3.3 при $p_0=p_1$, $c=2$, $[x_0]\equiv[\xi_2]$, $[y_0]\equiv\equiv[\eta_2]$, найдем натуральное число $p_2$ такое, что

$$[\xi_2]\cap\bar{\Delta}_{p_2p_2}=\varnothing,\ [\eta_2]\cap\bar{\Delta}_{p_2p_2}=\varnothing,\ \bar{\Delta}_{p_2p_2}\subset\bar{\Delta}_{p_1p_1},$$

$$S_{nn}(x,\ y)>2 \text{ при } (x,\ y)\in\Delta_{p_2p_2},\ p_1\leqslant n\leqslant p_2.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, построим последовательность натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$p_0<p_1<\cdots<p_n<\cdots, \tag{3.31}$$

$$[\xi_k]\cap\bar{\Delta}_{p_kp_k}=\varnothing,\ [\eta_k]\cap\bar{\Delta}_{p_kp_k}=\varnothing,\ \bar{\Delta}_{p_kp_k}\subset\bar{\Delta}_{p_{k-1}\,p_{k-1}},\ k=1,\ 2,\cdots, \tag{3.32}$$

$$S_{nn}(x,\ y)>2 \text{ при } (x,\ y)\in\Delta_{p_kp_k},\ p_0\leqslant n\leqslant p_k,\ k=1,2,\cdots. \tag{3.33}$$

Ясно, что пересечение всех $\bar{\Delta}_{p_kp_k}$, $k=1,\ 2,\cdots$, состоит из некоторой точки $(\xi_0,\ \eta_0)$ с двоично-иррациональными координатами, отличной от всех точек, где не выполняется условие (1.8).

Так как $(\xi_0,\ \eta_0)\in\Delta_{p_kp_k}$ при всех $k=1,\ 2,\cdots$, то, в силу (3.31) и (3.33), будем иметь

$$S_{nn}(\xi_0,\ \eta_0)>2 \text{ при всех } n\geqslant p_0,$$

которое противоречит условию 1) теоремы 2 и (3.22).

Таким образом, случай II) не может выполняться.

Пусть имеет место случай I). Тогда по теореме Рисс—Фишера ряд (3.26) является рядом Фурье некоторой функции $F(x,\ y)\in L_2[0,1]^2$ и, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} Q_{nn}(x,\ y)=F(x,\ y) \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.34}$$

В силу условия 1) теоремы 2 и (3.24)

$$\lim_{k\to\infty} Q_{N_{\nu_k}(x,y)\,N_k(x,y)}(x,\ y)=0 \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.35}$$

Из (3.34) и (3.35) следует, что

$$F(x,\ y)=0 \text{ почти всюду на } [0,1]^2. \tag{3.36}$$

Так как ряд (3.26) является рядом Фурье функции $F(x,\ y)$, то $c_{nm}=0$ при $n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots$ и, следовательно, $a_{nm}=b_{nm}$, $n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots$.

Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.X.1975

### Խ. Հ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Հաջորդաբար զուգամիտող Հաարի կրկնակի շարքերի միակության մասին *(ամփոփում)*

*Ապացուցվում է ըստ տողերի հաջորդաբար զուգամիտող Հաարի կրկնակի շարքերի միակության թեորեմ։ Բերվում է Հաարի կրկնակի շարքի օրինակ, որը ցույց է տալիս նշված միակության թեորեմի որոշ իմաստով վերջնական լինելը։*

*Այդ օրինակը նաև ցույց է տալիս, որ կետից կախված ենթահամարներով զուգամիտող Հաարի միապատիկ շարքերի միակության հայտնի թեորեմները չեն տարածվում Հաարի կրկնակի շարքերի վրա։*

### Kch. H. MOVSISIAN. *On the uniqueness of successively convergent double Haar series* (summary)

A uniqueness theorem is proved about the Haar series successively convergent over lines. An example of double Haar series is given showing that the mentioned theorem is in some sence final.

The some example shows also tbat the known uniqueness theorems for onedimensional Haar series, converging over sequences depending on points, can not be extended to double Haar series.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. А. Талалян.* О единственности рядов по некоторым ортогональным системам, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 5, 1970, 401—418.
2. *В. А. Скворцов.* Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша, Матем. заметки, 13, № 3, 1973, 367—372.
3. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
4. *В. А. Скворцов.* Теорема типа Кантора для системы Хаара, Вестник МГУ, серия I, № 5, 1964, 3—6.
5. *О. П. Дзагнидзе.* Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами, Сообщения АН Груз. ССР, XXXIV, № 2, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 4, 1976 Математика

А. А. АНДРЯН

# НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

В настоящей работе рассматриваются некоторые граничные задачи для систем уравнений составного типа первого порядка. Граничные задачи ставятся в ограниченной области. Доказывается нетеровость поставленных задач и вычисляется их индекс. Нам удается также с помощью определения сопряженного граничного условия, данного в работе [6], построить сопряженные граничные задачи и сформулировать результаты в терминах сопряженных задач. Отметим, что граничные задачи для частного случая системы из двух или трех уравнений составного типа первого порядка в ограниченной области изучены в работе [8].

Отметим также, что метод исследования граничных задач для систем уравнений составного типа первого порядка, используемый в работе [8]. в применении к нашему случаю связан с рядом трудностей. В связи с этим, в работе предлагается другой метод исследования рассматриваемых задач.

## § 1. Постановка граничных задач

Через $D$ обозначим конечную область, ограниченную замкнутой гладкой кривой Г. Если $f(x, y)$—функция двух переменных $x$ и $y$, то будем иногда представлять ее в виде $f(z)$, где $z = x + iy$.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка, записанную в виде

$$u_x - A(x, y)\, u_y - B(x, y)\, u = g(x, y), \qquad (1.1)$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$ — заданные в области $D$ вещественные квадратные матрицы порядка $k$, $g(x, y)$— заданная, а $u(x, y)$—искомая $k$-мерные вещественные вектор-функции.

Рассмотрим соответствующее системе (1.1) характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \qquad (1.2)$$

где $E$ — единичная матрица порядка $k$.

Предположим, что число действительных корней характеристического уравнения (1.2) и число линейно независимых действительных собственных векторов матрицы $A(x, y)$ для всех точек области $D$ равно $m$, где $0 < m < k$. Тогда, следуя работе [8], мы можем систему уравнений (1.1) в области $D$ привести к следующему виду:

$$v_x - Q_1 v_y = A_1 v + \operatorname{Re}(B_1 w) + f, \tag{1.3}$$

$$w_{\bar{z}} - Q_2 w_z = A_2 v + B_2 w + C_2 \overline{w} + F, \tag{1.4}$$

где $Q_1$ — диагональная, а $Q_2$ — квазидиагональная матрицы с элементами на диагонали $\lambda_1(z), \cdots, \lambda_m(z)$; $q_1(z), \cdots, q_n(z)$ соответственно, причем $\lambda_1(z), \cdots, \lambda_m(z)$ — действительные функции, а $|q_i(z)| < \mathrm{const} < 1$, $i = 1, \cdots, n$.

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать систему уравнений вида (1.3), (1.4), где $Q_1$, $Q_2 \in C^1_\nu(D+\Gamma)$ $(0 < \nu \leqslant 1)$, $A_1(z)$, $B_1(z)$, $A_2(z)$, $B_2(z)$, $C_2(z)$ — матрицы-функции, принадлежащие классу $C^1(D+\Gamma)$ размерности $(m, m)$, $(n, m)$, $(m, n)$, $(n, n)$, $(n, n)$, соответственно, причем $A_1(z)$ — действительная матрица: $f(z) \in C^1(D+\Gamma)$ — $m$-мерная действительная, а $F(z) \in C_\alpha(D+\Gamma)$ $\left\{0 < \alpha < \min\left(\nu, \frac{1}{2}\right)\right\}$ — $n$-мерная комплексная заданные вектор-функции; $v = (v_1, \cdots, v_m)$ — действительная, а $w = (w_1, \cdots, w_n)$ — комплексная искомые вектор-функции из класса $C^1(D) \cap C_\alpha(D+\Gamma)$.

В работе подробно рассматривается случай, когда $Q_1$ — постоянная матрица, а область $D$ — единичный круг. Но нетрудно будет заметить, что полученные результаты справедливы и для $Q_1 \in C^1_\nu(D+\Gamma)$ $(0 < \nu \leqslant 1)$. А в качестве $D$ можно брать любую такую область, что каждая характеристика системы (1.3) пересекает ее границу $\Gamma$ ровно в двух точках.

Проведем произвольный луч $l_0$ с вершиной в центре окружности $\Gamma$. Через $\Gamma_i$ обозначим ту часть окружности $\Gamma$, которая заключена между касательными, параллельными прямой $y + \lambda_i x = 0$ и имеет общую точку с лучом, выходящим из центра окружности $\Gamma$ параллельно прямой $y + \lambda_i x = 0$ и образующим с $l_0$ угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$.

**Граничная задача** *A*. Требуется найти решение системы (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$v_i \big|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Re}(\overline{G} w)|_\Gamma = 0, \tag{1.6}$$

где $G(z) \in C_\alpha(\Gamma)$ — заданная матрица-функция размерности $(n, n)$ с $\det G(z) \neq 0$ всюду на $\Gamma$.

**Граничная задача** *B*. Требуется найти решение системы (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left[ v_i + \operatorname{Re}\left( \sum_{j=1}^{n} a^i_j w_j \right) \right] \Bigg|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Re}(\overline{G} w)|_\Gamma = 0, \tag{1.8}$$

где $a^i_j(z)$ — функции класса $C^1(\Gamma)$ для всех $i = 1, \cdots, m$ и $j = 1, \cdots, n$, остальные обозначения те же, что и выше.

**Граничная задача** $C$. Требуется найти решение системы (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$v_i|_{\Gamma_i}=0, \ i=1,\cdots, m, \tag{1.9}$$

$$[Hv+\operatorname{Re}(\overline{G}w)]_\Gamma=0, \tag{1.10}$$

где $H(z)$ — заданная действительная матрица-функция размерности $(m, n)$, принадлежащая классу $C^1(\Gamma)$, остальные обозначения те же, что и в задаче $A$.

Имеет место

**Теорема 1.** *Однородная задача $A$ имеет конечное число линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородной задачи $A$ необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum_{j=1}^{m}\iint_D f_j(z)\cdot v_{ij}(z)\,dxdy+\operatorname{Re}\sum_{j=m+1}^{m+n}\iint_D F_j(z)\,v_{ij}(z)\,dxdy=0 \tag{1.11}$$

$$(i=1,\cdots, k_0'),$$

*где $v_i^0=(v_{i,1},\ \cdots,\ v_{i,\,m+n})$ $(i=1,\cdots,\ k_0')$ — вектор-функции (первые $m$ компонент которых действительны), являющиеся полной линейно независимой системой решений сопряженной к $A$ однородной задачи $A^*$.*

Теорема 1 справедлива также и для граничных задач $B$ и $C$.

**Теорема 2.** *Индексы граничных задач $A$, $B$ и $C$ равны*

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}[\arg\det G(z)]_\Gamma+n, \tag{1.12}$$

*где символ $[\ \ ]_\Gamma$ обозначает приращение выражения, стоящего в квадратных скобках, при обходе контура $\Gamma$ один раз в положительном направлении.*

## § 2. Исследование граничных задач $A$, $B$ и $C$

Рассмотрим задачу Римана—Гильберта для эллиптической системы, т. е. задачу нахождения непрерывно дифференцируемого в области $D$ решения $w$ эллиптической системы

$$w_{\bar z}-Q_2\,w_z=B_2\,w+C_2\overline{w}+F, \tag{2.1}$$

удовлетворяющего граничному условию

$$\operatorname{Re}(\overline{G}\,w)|_\Gamma=g, \tag{2.2}$$

где $g(z)\in C_\alpha(\Gamma)$ — заданная вектор-функция, остальные обозначения те же, что и в задаче $A$.

Тогда, как известно [1], задача (2.1), (2.2) нетерова, необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи имеют вид

$$N_j(F)+M_j(g)=0,\ j=1,\cdots,\ p, \tag{2.3}$$

где $N_1,\cdots,\ N_p$ — линейно независимые непрерывные функционалы на пространстве $C_\alpha(D+\Gamma)$, а $M_1,\cdots,\ M_p$ — непрерывные функционалы на $C_\alpha(\Gamma)$. Общее решение задачи (2.1), (2.2) представляется формулой

$$w=KF+Mg+\sum_{j=1}^{q}c_j w_j^0, \tag{2.4}$$

где $w_1^0,\cdots,\ w_q^0$ — полная система линейно независимых решений однородной задачи (2.1), (2.2), $c_1,\cdots,\ c_q$ — произвольные вещественные постоянные; $K$ — вполне непрерывный оператор в $C_\alpha(D+\Gamma)$, $M$ — ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(D+\Gamma)$, а индекс задачи определяется формулой (1.12)

Известно также [2], что добавление в систему уравнений (2.1) членов вида $K_1w$, а в граничное условие (2.2) членов вида $\operatorname{Re}(K_2w)$, где $K_1$ — ограниченный оператор в $C_\alpha(D+\Gamma)$, а $K_2$ — вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(D+\Gamma)$ в $C_\alpha(\Gamma)$, не меняет вышеупомянутых результатов.

Далее, как следует из работы [3] автора, граничная задача

$$v_x-Q_1v_y=A_1v+f, \tag{2.5}$$

$$v_i|_{\Gamma_i}=\psi_i,\ i=1,\cdots,m, \tag{2.6}$$

поставлена корректно, где $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_m)\in C^1(\Gamma)$, остальные обозначения те же, что и в задаче $A$. Общее решение задачи (2.5), (2.6) выражается формулой

$$v=Nf+Tf+P\psi, \tag{2.7}$$

где $N$ — вполне непрерывный оператор в $C_\alpha(D+\Gamma)$, $P$—ограниченный оператор, действующий из пространства $C^1(\Gamma)$ в $C_\alpha(D+\Gamma)$, $Tf=(T_1f_1,\cdots,T_mf_m)$,

$$(T_if_i)(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}\int\limits_{l_i(x,y)}f_i(\xi,\ \eta)\,ds,\ i=1,\cdots,m,$$

здесь $l_i\ (x,\ y)$ — часть $i$-ой характеристики системы (2.5), соединяющая точку $(x,\ y)$ с границей $\Gamma_i$.

Пользуясь вышеупомянутыми результатами, исследуем граничную задачу $A$. Рассматривая граничную задачу (1.3), (1.5) как задачу (2.5), (2.6) с правой частью $\operatorname{Re}(B_1w)+f$, в силу (2.7) будем иметь

$$v=N\operatorname{Re}(B_1w)+T\operatorname{Re}(B_1w)+(N+T)f. \tag{2.8}$$

Подставим $v$ из (2.8) в систему уравнений (1.4), получим

$$w_{\bar z}-Q_2w_z=B_2w+C_2\bar w+A_2N\operatorname{Re}(B_1w)+A_2T\operatorname{Re}(B_1w)+$$
$$+A_2(N+T)f+F. \tag{2.9}$$

Задача (2.9), (1.6) представляет собой задачу Римана—Гильберта для эллиптической системы (2.1) с ограниченным возмущением в системе уравнений, откуда и следует нетеровость задачи $A$.

Покажем, что индекс задачи $A$ определяется формулой (1.12). Действительно, очевидно, что число линейно независимых решений однородной задачи $A$ равно числу $k_0$ линейно независимых решений однородной задачи (2.9), (2.2). С другой стороны, необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи (2.9), (2.2) записываются в виде

$$\tilde{N}_j\,[A_2\,(N+T)\,f+F]=0,\ j=1,\cdots,k_0', \tag{2.10}$$

где $\tilde{N}_1,\cdots,\tilde{N}_{k_0'}$ — линейно независимые непрерывные функционалы от своего аргумента на пространстве $C_\varkappa\,(D+\Gamma)$, причем $k_0-k_0'=\varkappa$, а $\varkappa$ дается формулой (1.12). Очевидно, что условия (2.10) являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородной задачи $A$. Отсюда и из того, что функционалы

$$p_j\,(f;\,F)=\tilde{N}_j\,[A_2\,(N+T)\,f+F],\ j=1,\cdots,k_0'$$

—линейно независимые непрерывные функционалы на прямой сумме пространств $C^1\,(D+\Gamma)$ и $C_\alpha\,(D+\Gamma)$ следует, что индекс задачи $A$ определяется формулой (1.12).

Аналогичным образом, используя формулу (2.7), можно показать, что задача $B$ нетерова с индексом, определяемым формулой (1.12).

Докажем, что задача $C$ нетерова и ее индекс также определяется формулой (1.12).

Как мы убедились, решение задачи (1.3), (1.9) выражается формулой (2.8). Подставим $v$ из (2.8) в граничные условия (1.10) и систему (1.4), получим

$$w_{\bar z}-Q_2w=B_2w_z+C_2\bar{w}+A_2N\operatorname{Re}(B_1w)+A_2T\operatorname{Re}(B_1w)+A_2(N+T)\,f+F \tag{2.11}$$

$$\{Ч\,[N\operatorname{Re}(B_1w)+T\operatorname{Re}(B_1w)+(N+T)\,f]+\operatorname{Re}(\bar{G}\,w)\}_\Gamma=0. \tag{2.12}$$

Очевидно задача $C$ эквивалентна граничной задаче (2.11), (2.12), которую мы будем исследовать методом, использованным в работе [1]. В силу результата, приведенного в начале § 2 и леммы 2.1, доказываемой ниже, легко убедиться, что задача (2.11), (2.12) нетерова и ее индекс определяется формулой (1.12).

Лемма 2.1. *Пусть $E$ — пространство аналитических в области $D$ функций класса $C_\alpha\,(D+\Gamma)$. Тогда оператор $S$, действующий по формуле*

$$(S\varphi)\,(x,y)=\operatorname{Re}\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x}\varphi\,(\tau,\,y)\,d\tau\quad(\varphi\in E)$$

*вполне непрерывен из $E$ в $C_\alpha\,(\Gamma)$.*

**Доказательство.** Так как $\varphi(z)$ — аналитическая функция, то по теореме Коши имеем

$$\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} \varphi(\tau, y)\, d\tau = \int\limits_{AB} \varphi(z)\, dz, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{2.13}$$

где $AB$ — дуга окружности $\Gamma$, соединяющая точку $A(x, y)$ с точкой $B(\sqrt{1-y^2}, y)$ при движении по $\Gamma$, в положительном направлении.

Легко показать, что оператор $S$ удовлетворяет неравенствам

$$|(S\varphi)(x, y)| \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{C_\alpha(D+\Gamma)}, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{2.14}$$

$$|(S\varphi)(x_1, y_1) - (S\varphi)(x_2, y_2)| \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{C_\alpha(D+\Gamma)} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|). \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.14), (2.15), на основании теоремы о вполне непрерывности оператора вложения $C_{\mu} \to C_\alpha$ при $\mu > \alpha$, следует вполне непрерывность оператора $S$: $E \to C_\alpha(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Вполне непрерывность операторов $T_1, \cdots, T_m$ доказывается аналогично.

Заметим, что решения задачи (2.11), (2.12) представляются в виде

$$w = \varphi + \psi, \tag{2.16}$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в области $D$ вектор-функция класса $C_\alpha(D + \Gamma)$, а $\psi(z)$—вектор-функция класса $C^1(D + \Gamma)$.

Подставляя (2.16) в (2.7) и учитывая аналитичность вектор-функции $\varphi(z)$, легко убедиться в том, что решение $v$ граничной задачи (1.3), (1.9) принадлежит классу $C^1(D) \cap C_\alpha(D + \Gamma)$.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.1.** *Граничные задачи $A$, $B$ и $C$ нетеровы, их индексы равны* $\varkappa = \dfrac{1}{\pi}[\arg \det G(z)]_\Gamma + n$.

**Замечание 1.** Пусть $\Gamma_l$ — часть окружности $\Gamma$, заключенная между касательными к окружности $\Gamma$, параллельными прямой $y + \lambda_l x = 0$. Других дополнительных условий на $\Gamma_l$ мы не налагаем. В этом случае справедливость теоремы 2.1 доказывается с помощью результатов, полученных выше, и леммы 2.2, приводимой ниже.

Пусть $H_1$ и $H_2$— нетеровые операторы, действующие из банаховых пространств $E_1$ и $E_2$ в банаховые пространства $F_1$ и $F_2$ соответственно.

Пусть $T$ — ограниченный оператор, действующий из $E_2$ в $F_1$, а $K$ — вполне непрерывный оператор—из $E_1$ в $F_2$.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$H_1 v = Tw + f, \tag{2.17}$$

$$H_2 w = Kv + g, \tag{2.18}$$

где $v \in E_1$, $w \in E_2$ — искомые, а $f \in F_1$, $g \in F_2$ — заданные элементы.

Под нетеровостью системы уравнений (2.17), (2.18) и ее индексом понимаются общепринятые определения (см., например, [5]). Имеет место

Лемма 2.2. *Система уравнений* (2.17), (2.18) *нетерова, ее индекс равен сумме индексов операторов* $H_1$ *и* $H_2$.

Доказательство. Поскольку оператор $K$ вполне непрерывен, то лемму достаточно доказать для следующей системы уравнений:

$$H_1 v = Tw + f, \tag{2.19}$$

$$H_2 w = g. \tag{2.20}$$

Так как оператор $H_2$ нетеров, то существует ограниченный оператор $B$: $F_2 \to E_2$ такой, что оператор $BH_2$ канонически фредгольмовый, т. е. имеет вид $J - N$, где $J$ — тождественный, а $N$ — вполне непрерывный операторы в $E_2$. Применяя оператор $B$ к обеим частям уравнения (2.20), получим

$$w = Nw + Bg. \tag{2.21}$$

Подставим в (2.19) вместо $w$ ее выражение через правую часть равенства (2.21), получим эквивалентную систему

$$H_1 v = TNw + TBg + f,$$

$$H_2 w = g.$$

Так как оператор $TN$: $E_2 \to F_1$ вполне непрерывен, то отсюда следует справедливость леммы 2.2.

## § 3. Построение граничных задач $A^*$, $B^*$ и $C^*$, сопряженных к задачам $A$, $B$ и $C$

Пусть $L$ — дифференциальный оператор первого порядка, определенный на функциях, заданных в области $D$ и принадлежащих к какому-либо классу функций.

Если $u = (u_1, \cdots, u_m)$ и $v = (v_1, \cdots, v_m)$ — две $m$-мерные вектор-функции, то через $[u, v]$ обозначим

$$[u, v] = \operatorname{Re} \iint_D \sum_{i=1}^{m} u_i(z)\, v_i(z)\, dxdy.$$

Сопряженным оператором $L^*$ назовем дифференциальный оператор первого порядка, удовлетворяющий тождеству

$$[\varphi, L\psi] = [\psi, L^*\varphi] \quad \forall\ \varphi,\ \psi \in C_0^\infty(D).$$

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$Lu = f, \tag{3.1}$$

$$Mu|_\Gamma = 0. \tag{3.2}$$

**Определение 1.** Граничное условие

$$M^* v|_\Gamma = 0 \tag{3.3}$$

будем называть сопряженным к граничному условию (3.2) относительно оператора $L$, если равенство

$$[Lu, v] = [u, L^* v] \tag{3.4}$$

выполняется для любой вектор-функции $u$, удовлетворяющей на $\Gamma$ условию (3.2), тогда и только тогда, когда на границе $\Gamma$ вектор-функция $v$ удовлетворяет условию (3.3) (см. работу [6]).

Граничную задачу

$$L^* v = g \tag{3.5}$$

$$M^* v|_\Gamma = 0 \tag{3.6}$$

назовем сопряженной граничной задачей к задаче (3.1), (3.2).

Требование принадлежности решений сопряженной задачи к какому-то определенному классу функций в каждом случае зависит от задачи (3.1), (3.2).

Сопряженные граничные задачи $A^*$, $B^*$ и $C^*$ будем строить, исходя из определения 1.

Вначале найдем сопряженную систему уравнений к системе (1.3), (1.4). Для этого, вводя матрицы $\tilde{Q} = E + iQ_1$, где $E$ — единичная матрица порядка $m$,

$$Q = \left|\begin{array}{ccc|c} \frac{i\lambda_1-1}{i\lambda_1+1} & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \frac{i\lambda_m-1}{i\lambda_m+1} & \\ \hline & 0 & & Q_2 \end{array}\right|, \quad A = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^{-1} A_1 & \frac{\tilde{Q}^{-1} B_1}{2} \\ \frac{A_3}{2} & B_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{Q}^{-1} A_1}{2} & \frac{\tilde{Q}^{-1} \bar{B}_1}{2} \\ \frac{A_2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

и векторы $g = (f;\ F)$, $u = (v;\ w)$, перепишем систему уравнений (1.3), (1.4) в виде одного уравнения

$$Lu = g, \tag{3.7}$$

где

$$Lu = u_{\bar z} - Q u_z - Au - B\bar{u}.$$

Используя формулу Грина, нетрудно проверить [8], что

$$[Lu,\ \omega] = [u,\ L^*\omega] - \operatorname{Re}\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} \omega(t)\,\Lambda(t)\,u(t)\,ds, \tag{3.8}$$

где $\Lambda(t) = E\,t'(s) + Q\overline{t'(s)}$, $t(s) = x(s) + iy(s)$, $E$ — единичная матрица $m+n$-го порядка, а

$$L^*\omega = -\omega_{\bar z} + Q\omega_z - A'\omega - \overline{B'}\,\bar\omega,$$

здесь ($'$) означает транспонирование. Из (3.8) следует, что оператор $L^*$ является сопряженным к оператору $L$.

Пользуясь определением 1 сопряженного граничного условия и тождеством (3.8), легко убедиться, что сопряженные граничные условия к условиям (1.5), (1.6) имеют вид

$$\omega_i\big|_{\Gamma\setminus\Gamma_i} = 0,\quad i = 1,\cdots, m, \tag{3.9}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{G}'^{\,-1}\Lambda^1\tilde{\bar\omega}}{2i}\right)\Bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{3.10}$$

где $\Lambda^1$ — $n$-мерная диагональная матрица с элементами на диагонали, совпадающими с последними $n$ диагональными элементами матрицы $\Lambda$ в том порядке, в каком они присутствуют в $\Lambda$, а

$$\omega = (\omega_1,\cdots,\omega_m,\ \bar\omega),\quad \bar\omega = (\omega_{m+1},\cdots,\omega_{m+n}).$$

Граничная задача $A^*$. Найти непрерывно дифференцируемое в области $D$ решение системы

$$L^*\omega = h, \tag{3.11}$$

принадлежащее классу $C_\alpha(D+\Gamma)$ $\left(0<\alpha<\min\left(\nu,\ \frac{1}{2}\right)\right)$ и удовлетворяющее граничным условиям (3.9), (3.10).

Далее, поскольку характеристики системы (1.3) касаясь окружности $\Gamma$, делят ее на $2m$ частей $\gamma_1,\cdots,\gamma_{2m}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$), то не ограничивая общности, можем предположить, что $\Gamma_i = \bigcup\limits_{j=i}^{i+m-1}$, $i=1,\cdots,m$.

Определим невырожденные матрицы $G_k$ порядка $m+n$ для $k=1,\cdots,2m$; (см. след. стр.)

$$G_k=\left|\begin{array}{ccc:ccc:c}
1\ \cdot & 0 & & & & & \\
& \cdot & & & 0 & & \\
& & \cdot\,1 & i\cdot & & & 0\\
& 0 & & & \cdot & & \\
& & & & & \cdot\ i & \\
\hline
a_1^1\cdot & \cdot & \cdot\ a_k^1 & & & & \\
\vdots & & \vdots & & 0 & & \overline{G}\\
a_1^n & & a_k^n & & & &
\end{array}\right| \quad \text{на } \gamma_k \text{ при } 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$G_{m+p}=\left|\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} i\cdot & & 0\\ & \cdot & \\ & & \cdot\, i\\ 0 & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & 0\\ 1\cdot & & \\ & \cdot & \\ 0 & & \cdot\,1\end{matrix} & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix} a^1_{p+1} & \cdots & a^1_m\\ \cdot & & \cdot\\ - & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ a^n_{p+1} & \cdots & a^n_m\end{matrix} & \overline{G}
\end{array}\right| \quad \text{на } \gamma_{m+p} \text{ при } 1\leqslant p\leqslant m-1,$$

$$G_{2m}=\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} i & \cdot & 0\\ & \cdot & \\ 0 & & \cdot\, i\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \overline{G}\end{array}\right| \quad \text{на } \gamma_{2m}.$$

Аналогично предыдущему получаем, что сопряженная граничная задача $B^*$ имеет следующий вид:

Граничная задача $B^*$. Найти непрерывно дифференцируемое в области $D$ решение системы (3.11), принадлежащее классу $C_\alpha(D+\Gamma)$ $\left(0<\alpha<\min\left(\nu,\frac{1}{2}\right)\right)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\operatorname{Im}\left(\frac{G_k'^{-1}\Lambda\omega}{2i}\right)\Big|_{\gamma_k}=0,\ k=1,\cdots,2m, \tag{3.12}$$

где (3.12) есть сопряженное граничное условие к граничному условию (1.7), (1.8).

Вводя для $k=1,\cdots,2m$ матрицы $G_k$:

$$G_k=\left|\begin{array}{c|c}\begin{matrix} \left.\begin{matrix}1\cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot\,1\end{matrix}\right\}k & 0 \\ 0 & \begin{matrix} i\cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot\, i\end{matrix}\end{matrix} & H \\ \hline 0 & \overline{G}\end{array}\right| \quad \text{на } \gamma_k \text{ при } 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$G_{m+p}=\left|\begin{array}{c|c}\begin{matrix} \left.\begin{matrix}i\cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot\,i\end{matrix}\right\}p & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1\cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot\, 1\end{matrix}\end{matrix} & H \\ \hline 0 & \overline{G}\end{array}\right| \quad \text{на } \gamma_{m+p} \text{ при } 1\leqslant p\leqslant m,$$

получим сопряженную к $C$ граничную задачу $C^*$:

**Граничная задача** $C^*$. Найти непрерывно дифференцируемое в области $D$ решение системы (3.11), принадлежащее классу $C_\alpha(D+\Gamma)$ $\left(0<\alpha<\min\left(\frac{1}{2}, \nu\right)\right)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\operatorname{Im}\left(\frac{G_k'^{-1}\Lambda\omega}{2i}\right)\Bigg|_{\gamma_k}=0,\ k=1,\cdots,2m, \tag{3.13}$$

где (3.13) есть условие, сопряженное к граничному условию (1.9), (1.10).

**Замечание** 2. Легко проверить, что граничные задачи $A^*$, $B^*$ и $C^*$ являются задачами типа задач $A$, $B$ и $C$ для системы составного типа (3.11).

Таким образом, справедлива

**Теорема** 3.1. *Граничные задачи $A^*$, $B^*$ и $C^*$ нетеровы, их индексы равны между собой и равны*

$$-\frac{1}{\pi}[\arg\det G(t)]_\Gamma-n.$$

Для того чтобы доказать, что условия разрешимости задач $A$, $B$ и $C$ действительно записываются в виде (1.11), нам потребуется следующий факт [7].

Пусть $B_j$ и $G_j$ — банаховы пространства, $G_j^*$ — сопряжнное пространство к $G_j$ $(j=1,\ 2)$. Рассмотрим уравнения

$$A_1(x)=T_1(\alpha), \tag{3.14}$$

$$A_2(y)=T_2(\beta), \tag{3.15}$$

где $A_j$ — нетеровые операторы, действующие из $B_j$ в $F_j$, $T_j$ — линейный оператор, действующий из $G_j$ в $F_j$, $\alpha$, $\beta$ — заданные элементы из $G_1$ и $G_2$, $x$, $y$ — искомые элементы из $B_1$ и $B_2$. Имеет место [7]

**Теорема** 3.2. Если $\operatorname{ind}A_1+\operatorname{ind}A_3=0$ и для разрешимости уравнений (3.14), (3.15) необходимы условия

$$\alpha\perp v_j\ (j=1,\cdots,k_2,\ k_2=\dim N(A_2)),\ \beta\perp w_j\ (j=1,\cdots,k_1,$$
$$k_1=\dim N(A_1)),$$

где $v_1,\cdots,v_{k_2}$, $w_1,\cdots,w_{k_1}$ — некоторые линейно независимые элементы из $G_1^*$ и $G_2^*$ соответственно, то эти же условия достаточны для разрешимости уравнений (3.14), (3.15) и имеют место соотношения

$$\dim N(A_1)=\dim N(A_2^*),\ \dim N(A_3)=\dim N(A_1^*).$$

Пусть $E_1$ и $E_2$ — банаховы пространства вектор-функций $u=(v\ w)$, $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_m;\ \breve{\omega})$ класса $C_\alpha(D+\Gamma)$, удовлетворяющих на $\Gamma$ условиям (1.5), (1.6) и (3.9), (3.10), соответственно. $G$ — банахово пространство вектор-функций $(f;\ F)$ класса $C^1(D+\Gamma)+C_\alpha(D+\Gamma)$.

Дифференциальные операторы $L$ и $L^*$ можно рассматривать как линейные операторы, действующие из $E_1$ в $G$ и из $E_2$ в $G$, соответственно, с областями определения $D(L) = \{u \in E_1 \cap C^1(D) | L\ u \in G\}$ и $D(L^*) = \{\omega \in E_2 \cap C^1(D) | L^* \omega \in G\}$.

При таком подходе задачи $A$ и $A^*$ эквивалентны, соответственно, уравнениям

$$Lu = g, \tag{3.16}$$

$$L^*\omega = h, \tag{3.17}$$

где $g$ и $h$ — заданные элементы пространства $G$, а $u$ и $\omega$ — искомые элементы из $D(L)$ и $D(L^*)$ соответственно.

Теоремы 2.1 и 3.1 эквивалентны тому, что операторы $L$ и $L^*$ как операторы, действующие из $E_1$ в $G$ и из $E_2$ в $G$, соответственно, нетеровы, причем $\operatorname{ind} L + \operatorname{ind} L^* = 0$.

Обращаясь к равенству (3.8), нетрудно заметить, что для разрешимости уравнений (3.16), (3.17) необходимы условия

$$[g, \omega_j^*] = 0 \ (j = 1, \cdots, k_1,\ k_1 = \dim N(L^*)), \tag{3.18}$$

$$[h, u_i^*] = 0 \ (i = 1, \cdots, k_2,\ k_2 = \dim N(L)), \tag{3.19}$$

где $\omega_1^*, \cdots, \omega_{k_1}^*$ и $u_1^*, \cdots, u_{k_2}^*$ являются полной линейно независимой системой решений однородных задач $A$ и $A^*$ соответственно. Далее, заметим, что теорема 3.2 справедлива и в том случае, когда операторы $A_1$ и $A_2$ не обязательно ограниченные, но имеют всюду плотную область определения.

Используя теорему 3.2, получим, что условия (3.18), (3.19) достаточны для разрешимости уравнений (3.16), (3.17).

Таким образом, справедливость теоремы 1 установлена.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задач и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13.VII.1974

Ա. Ա. Անդրյան. Մի քանի եզրային խնդիրներ բաղադրյալ տիպի հավասարումների սիստեմի համար (*ամփոփում*)

*Առաջին կարգի բաղադրյալ տիպի հավասարումների սիստեմի համար (հավասարումների թիվը ցանկացած է) ուսումնասիրվում են եզրային խնդիրներ սահմանափակ տիրույթներում։*

*Ապացուցված է, որ դրված խնդիրները Նյոտերի տիպի են։ Ինդեքսի համար ստացված է բանաձև։*

*Անհամասեռ խնդրի լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները ձևակերպվում են համալուծ խնդրի լեզվով։*

## A. A. ANDRIAN. *Some boundary value problems for the systems of composite type* (summary)

For the systems of first order of composite type, with arbitrary number of equations, the boundary value problems in finite domain are considered.

All problems considered are of Njoter type.

The formula for the index is given and the theory of conjugate problems is constructed.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. В. Боярский*. Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, 124, № 1, 1959, 15—18.
2. *И. Н. Векуа*. Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
3. *А. А. Андрян*. Об одной граничной задаче для системы уравнений гиперболического типа, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 4, 1975, 329—341.
4. *Н. И. Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1972.
5. *С. Г. Крейн*. Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
6. *Н. Е. Товмасян*. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, 11, № 1, 1966, 3—23.
7. *Н. Е. Товмасян*. Некоторые уравнения в банаховом пространстве и их применения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 3, 1973, 181—189.
8. *А. Джураев*. Системы уравнений составного типа, М., 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 4, 1976 Математика

В. С. ВИДЕНСКИЙ

# О СИСТЕМАХ ЧЕБЫШЕВА, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

1. В заметке [1] было доказано, что система функций Чебышева

$$\varphi_0(x) = \omega_0(x),$$

$$\varphi_i(x) = \omega_0(x) \int_a^x \omega_1(t_1)\, dt_1 \int_a^{t_1} \omega_2(t_2)\, dt_2 \cdots \int_a^{t_{i-1}} \omega_i(t_i)\, dt_i \tag{1.1}$$

$$(i = 1, \cdots, n),$$

где $\{\omega_k\}_{k=0}^n$ — положительные и непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, обладает $D^*$-базисом. Иными словами, были построены многочлены $\{\psi_k\}_{k=0}^n$ по системе (1.1), которые удовлетворяют условиям

1°. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\psi_{k+1}(x)}{\psi_k(x)} = 0, \lim\limits_{x\to b} \dfrac{\psi_k(x)}{\psi_{k+1}(x)} = 0 \ (k=0, \cdots, n-1),$

2° $\psi_k(x) > 0, \ x \in (a, b) \quad (k=0, \cdots, n).$

Будем говорить, что функция $f$ непрерывно дифференцируема $n$ раз относительно последовательности $\{\omega_k\}$ на $[a, b]$ и писать $f \in C^n\{\omega_k\}$, если существуют и непрерывны

$$L_0 f = f, \ L_k f = \left(\frac{L_{k-1} f}{\omega_{k-1}}\right)' \quad (k = 1, \cdots, n). \tag{1.2}$$

Назовем точку $x_0 \in [a, b]$ нулем обобщенной кратности $r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ функции $f \in C^n\{\omega_k\}$ относительно операторов (1.2), если

$$(L_0 f)(x_0) = \cdots = (L_{r-1} f)(x_0) = 0, \ (L_r f)(x_0) \neq 0. \tag{1.3}$$

Если точка $x_0$, удовлетворяющая условиям (1.3), лежит внутри $(a, b)$, то при переходе через нее функция $f$ меняет знак, когда $r$ — число нечетное, и сохраняет его при четном $r$. Это непосредственно вытекает из указанного в заметке [2] обобщения формулы Банга:

$$\frac{f(x)}{\omega_0(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(L_k f)(x_0)}{\omega_k(x_0)} \alpha_k(x; x_0) +$$

$$+ (-1)^n \int_x^{x_0} (L_n f)(t)\, \alpha_{n-1}(x; t)\, dt = S_n(x) + R_n(x), \tag{1.4}$$

где $\alpha_0(x; t) = 1$,

$$\alpha_k(x;\ t) = \int_x^t \alpha_{k-1}(x;\ \tau)\,\omega_k(\tau)\,d\tau = \int_x^t \omega_k(\tau_k)\,d\tau_k \cdots \int_x^{\tau_2} \omega_1(\tau_1)\,d\tau_1. \qquad (1.5)$$

Формула (1.4) доказывается по индукции. При $r=1$ мы имеем

$$\frac{f(x)}{\omega_0(x)} = \frac{f(x_0)}{\omega_0(x_0)} - \int_x^{x_0} (L_1 f)(t)\,\alpha_0(x;\ t)\,dt.$$

Предположим, что (1.4) справедливо при некотором $r < n$. Интегрируя по частям остаточный член, получим

$$\int_x^{x_0} (L_r f)(t)\,\alpha_{r-1}(x;\ t)\,dt = \frac{(L_r f)(x_0)}{\omega_r(x_0)}\,\alpha_r(x;\ x_0) - \int_x^{x_r} (L_{r+1} f)(t)\,\alpha_r(x;\ t)\,dt,$$

чем завершается вывод (1.4) для числа $r+1$.

Применяя к функции

$$f_k(x;\ x_0) = \omega_0(x) \int_{x_0}^{x} \omega_1(t_1)\,dt_1 \cdots \int_{x_0}^{t_{k-1}} \omega_k(t_k)\,dt_k, \qquad (1.6)$$

которая является многочленом по системе (1.1), формулу (1.4), находим

$$\omega_0(x)\,\alpha_k(x;\ x_0) = (-1)^k f_k(x;\ x_0). \qquad (1.7)$$

Переписывая (1.4) в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L_k f)(x_0)}{\omega_k(x_0)}\,f_k(x;\ x_0) + \omega_0(x)\,R_n(x), \qquad (1.8)$$

мы получаем выражение, более явным образом связанное с формулой Тейлора. Формула, аналогичная (1.8), при $\omega_k \in C^{n-k}$ приведена в монографии [3].

Ясно также, что для $f \in C^n\{\omega_k\}$ справедливо следующее обобщение теоремы Ролля. Если $f \in C^n\{\omega_k\}$ имеет $s$ $(s \leqslant n+1)$ нулей на $[a,\ b]$ с учетом их обобщенной кратности, то $(L_{s-1} f)(x)$ имеет по крайней мере один нуль.

Если $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ — многочлен по системе (1.1), то $P \in C^{n+1}\{\omega_k\}$, причем $P$ может иметь $\leqslant n$ нулей с учетом их обобщенной кратности, так как

$$(L_n P)(x) = a_n\,\omega_n(x) \neq 0 \text{ при } a_n \neq 0.$$

2. Здесь мы рассмотрим такие системы функций Чебышева $\{u_k\}_{k=0}^n$, $u_k \in C^n\{\omega_i\}$ на $[a,\ b]$, что любой не равный нулю тождественно многочлен $U$ по $\{u_k\}_{k=0}^n$ имеет $\leqslant n$ нулей на $[a,\ b]$, если считать нули с учетом их обобщенной кратности относительно операторов

(1.2). Такие системы функций будем называть $ET_n^\infty$-системами; в случае, когда все $\omega_l = 1$, будем писать просто $ET_n$, следуя обозначению, принятому в [3].

Хотя заранее не предполагается представимость $ET_n^\infty$-системы $\{u_k\}_{k=0}^n$ по формулам (1.1), однако, как выяснится в дальнейшем ее можно линейно преобразовать в систему $\{v_k\}_{k=0}^n$, для которой справедливы формулы вида (1.1) с некоторыми функциями $\{\Omega_k\}_{k=0}^n$, положительными в $(a, b)$.

**Теорема 1.** *Если $\{u_k\}_{k=0}^n$ образует $ET_n^\infty$-систему на $[a, b]$, то она обладает $D^*$-базисом, который определяется формулами*

$$v_k(x) = c_k \det \| u_l(x) (L_0 u_l)(a) \cdots (L_{k-1} u_l)(a) (L_0 u_l)(b) \cdots (L_{n-k-1} u_l)(b) \|_{l=0}^n, \tag{2.1}$$

*где числа $c_k$ берутся равными $+1$ или $-1$ так, чтобы $v_k(x) > 0$ при $a < x < b$.*

Теоремы 1—3 представляют собой обобщение результатов С. Н. Бернштейна [4] (см. также [5], где дано более полное изложение, чем в монографии [4]).

Для доказательства теоремы 1 нужно установить прежде всего, что многочлены $v_k$, определенные формулами (2.1), не равны нулю тождественно, то есть нужно проверить, что ранг матрицы

$$\| (L_0 u_l)(a) \cdots (L_{k-1} u_l)(a) (L_0 u_l)(b) \cdots (L_{n-k-1} u_l)(b) \|_{l=0}^n$$

равен $n$. Допустим от противного, что этот ранг $\leqslant n-1$, тогда

$$\det \| (L_0 u_l)(a) \cdots (L_{k-1} u_l)(a) (L_0 u_l)(b) \cdots (L_{n-k} u_l)(b) \|_{l=0}^n = 0. \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что существуют числа $\{\alpha_l\}_{l=0}^n$ $(\sum |\alpha_l| > 0)$, такие что при $s = 0, \cdots, k-1$; $r = 0, \cdots, n-k$

$$\sum_{l=0}^{n} \alpha_l (L_s u_l)(a) = 0, \quad \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (L_r u_l)(b) = 0. \tag{2.3}$$

Но (2.3) означает, что многочлен $U(x) = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l u_l(x)$ имеет в точке $a$ нуль обобщенной кратности $\geqslant k$, а в точке $b$ — нуль обобщенной кратности $\geqslant n-k+1$, но это невозможно, так как $\{u_l\}_{l=0}^n$ образуют $ET_n^\infty$-систему.

Из формулы (2.1) следует, что

$$(L_0 v_k)(a) = \cdots = (L_{k-1} v_k)(a) = 0, \; (L_0 v_k)(b) = \cdots = (L_{n-k-1} v_k)(b) = 0, \tag{2.4}$$

то есть многочлен $v_k$ имеет в точке $a$ нуль кратности $k$, а в точке $b$ — нуль кратности $n-k$ и, стало быть, $v_k(x) \neq 0$ при $a < x < b$; выбирая $c_k$ равными $+1$ или $-1$, добьемся того, чтобы $v_k(x) > 0$ при $a < x < b$. Поскольку $(L_k v_k)(a) \neq 0$, $(L_{n-k} v_k)(b) \neq 0$, то благодаря условиям (2.4), применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{v_{k+1}(x)}{v_k(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(L_k v_{k+1})(x)}{(L_k v_k)(x)}=0,$$

$$\lim_{x\to b}\frac{v_k(x)}{v_{k+1}(x)}=\lim_{x\to b}\frac{(L_{n-k-1}v_k)(x)}{(L_{n-k-1}v_{k+1})(x)}=0.$$

Итак, система $\{v_k\}_{k=0}^n$ удовлетворяет условиям 1° и 2°, и следовательно, образует $D^*$-базис.

В случае, когда $ET_n^\infty$-система $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$ определена формулами (1.1), ее $D^*$-базис может быть записан в виде (см. [1]):

$$\psi_k(x)=\det\|\varphi_l(x)(L_0\varphi_l)(b)\cdots(L_{n-k-1}\varphi_l)(b)\|_{l=k}^n.$$

Систему функций $\{y_k\}_{k=0}^n$, $y_k\in C^n\{\omega_l\}$ в интервале $(a, b)$ назовем декартовой системой в $(a, b)$ в смысле Бернштейна (кратко $DB_n^\infty$-системой), если

I. Любые $r+1$ $(0\leqslant r\leqslant n)$ функций $\{y_{k_l}\}_{l=0}^r$ образуют $ET_r^\infty$-систему в $(a, b)$;

II. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{y_{k+1}(x)}{y_k(x)}=0$;

III. $y_k(x)>0$ при $a<x<b$.

Рассмотрим многочлен

$$Y(x)=\sum_{k=0}^n a_k y_k(x) \tag{2.5}$$

и обозначим через $Z(Y)$ число его нулей с учетом их обобщенной кратности в интервале $(a, b)$, а через $V(Y)$ — число перемен знака в последовательности его коэффициентов $\{a_k\}_{k=0}^n$.

Теорема 2. *Для того чтобы функции* $\{y_k\}_{k=0}^n$, $y_k\in C^n\{\omega_l\}$, *удовлетворяющие условиям* II *и* III, *образовали* $DB_n^\infty$-*систему в* $(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена* $Y$ *по этой системе выполнялось неравенство*

$$V(Y)-Z(Y)\geqslant 0. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) называется правилом знаков Декарта. Достаточность условия (2.6) проверяется непосредственно. В самом деле, для многочлена $Q(x)=\sum\limits_{l=0}^r a_l y_{k_l}(x)$ по системе $\{y_{k_l}\}_{l=0}^r$ имеем $V(Q)\leqslant r$, а значит в силу (2.6), $Z(Q)\leqslant r$.

Для доказательства необходимости рассмотрим матрицу

$$\|y_i(x_j)\|_{i,\,j=0}^n,\quad a<x_0<x_1<\cdots<x_n<b \tag{2.7}$$

и докажем, что она вполне положительна, то есть, что все ее миноры любого порядка положительны; то, что они все отличны от нуля, следует из условия I. Благодаря условию III, все миноры первого порядка положительны.

Примем обозначение

$$\Delta\begin{pmatrix} f_1 \cdots f_m \\ t_1 \cdots t_m \end{pmatrix} = \det \| f_i(t_j) \|_{i,j=1}^{m}.$$

Допустим по индукции, что все миноры матрицы (2.7) порядка $p\ (1 \leqslant p)$ положительны.

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \Delta\begin{pmatrix} y_{i_0}\, y_{i_1} \cdots y_{i_p} \\ x\ \ x_{j_1} \cdots x_{j_p} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{p} a_k y_{i_k}(x), \tag{2.8}$$

у которого при $y_{i_0}$ стоит положительный коэффициент

$$a_0 = \Delta\begin{pmatrix} y_{i_1} \cdots y_{i_p} \\ x_{j_1} \cdots x_{j_p} \end{pmatrix} > 0.$$

Благодаря условию II, многочлен $P(x) = a_0 y_{i_0}(x)[1 + o(1)]$ при $x \to a$, откуда следует, что $\operatorname{sign} P(x) = \operatorname{sign} a_0 = +1$ в достаточно малой окрестности точки $a$. Но многочлен (2.8) по $ET_p^{\omega}$-системе $\{y_{i_k}\}_{k=0}^{p}$ имеет $p$ нулей в точках $x_{j_1} < \cdots < x_{j_p}$, а потому не обращается в нуль в интервале $(a, x_{j_1})$, и мы имеем $P(x) > 0$ при $a < x < x_{j_1}$, а значит и подавно

$$P(x_{j_0}) = \Delta\begin{pmatrix} y_{i_0}\, g_{i_1} \cdots y_{i_p} \\ x_{j_0}\, x_{j_1} \cdots x_{j_p} \end{pmatrix} > 0,$$

чем и завершается индукция.

Для того чтобы вывести правило знаков Декарта, допустим, что коэффициенты многочлена (2.5) имеют $p$ перемен знака, то есть, что $V(Y) = p$. Пусть для определенности первый отличный от нуля коэффициент $a_{k_0} > 0$, и пусть

$$\begin{gathered} a_0 \geqslant 0, \cdots, a_{k_1} \geqslant 0; \quad a_{k_1+1} < 0, \quad a_{k_1+2} \leqslant 0, \cdots, a_{k_2} \leqslant 0; \cdots, \\ (-1)^p a_{k_p+1} > 0, \quad (-1)^p a_{k_p+2} \geqslant 0, \cdots, \quad (-1)^p a_n \geqslant 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Полагая

$$f_r(x) = \sum_{i=k_r+1}^{k_{r+1}} |a_i|\, y_i(x),$$

замечаем, что эти функции образуют $ET_p^{\omega}$-систему, так как при любых $a < x_0 < \cdots < x_p < b$ имеем

$$\Delta\begin{pmatrix} f_0 \cdots f_p \\ x_0 \cdots x_p \end{pmatrix} = \sum |a_{i_0} \cdots a_{i_p}|\ \Delta\begin{pmatrix} y_{i_0} \cdots y_{i_p} \\ x_0 \cdots x_p \end{pmatrix} > 0.$$

Поскольку (2.5) можно написать в виде $Y(x) = \sum\limits_{r=0}^{p} (-1)^r f_r(x)$, то есть $Y$ является многочленом по $ET_p^{\omega}$-системе $\{f_r\}_{r=0}^{p}$, то $Z(Y) \leqslant p = V(Y)$, и теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Если* $\{u_k\}_{k=0}^n$ *образует* $ET_n^\infty$*-систему на* $[a, b]$, *а* $\{v_k\}_{k=0}^n$ *является ее* $D^*$*-базисом, то* $\{v_k\}_{k=0}^n$ *образует в* $(a, b)$ $DB_n^\infty$*-систему, причем для любого многочлена*

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k(x) \tag{2.10}$$

*справедливо правило знаков Декарта в форме*

$$V(R) - Z(R) = 2m \geqslant 0, \tag{2.11}$$

*где* $m$ *— целое неотрицательное число.*

Таким образом, для $D^*$-базиса правило знаков Декарта принимает точно такую же форму, как для алгебраических многочленов на полупрямой $(0, \infty)$.

Так как $\{v_k\}_{k=0}^n$ образует $D^*$-базис, то выполнены условия II и III. Для того чтобы проверить, что выполняется условие I, докажем, что вполне положительна матрица

$$\|v_i(x_j)\|_{i,\,j=0}^n, \quad a < x_0 < \cdots < x_n < b. \tag{2.12}$$

Сначала рассмотрим многочлен из $r+1$ соседних функций $S(x) = \sum_{i=0}^{r} a_{k+i} v_{k+i}(x)$, который, благодаря (2.4), имеет в точке $a$ нуль обобщенной кратности $\geqslant k$, а в точке $b$ — нуль обобщенной кратности $\geqslant n-k-r$, и, значит, в $(a, b)$ число его нулей $Z(S) \leqslant r$, то есть $\{v_{k+i}\}_{i=0}^r$ образует $ET_r^\infty$-систему. Поэтому не обращается в нуль, а благодаря рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 2, положителен определитель

$$\Delta\begin{pmatrix} v_k v_{k+1} \cdots v_{k+r} \\ x_{j_0} x_{j_1} \cdots x_{j_r} \end{pmatrix} > 0. \tag{2.13}$$

Таким образом, все миноры матрицы (2.12), составленные из соседних строк, положительны, но этого достаточно для того, чтобы заключить, что все ее миноры положительны (см. [5], [6]). Следует заметить, что если в (2.13) допустить равенства $x_{j_p} = x_{j_{p+1}} = \cdots = x_{j_{p+m}}$, заменив соответствующую группу столбцов такими $(L_i v_k)(x_{j_p}), \cdots, (L_i v_{k+r})(x_{j_p})$ $(i=1, \cdots, m)$, то полученные определители также будут положительными. В самом деле, так как $\{v_{k+i}\}_{i=0}^r$ образует $ET_r^\infty$-систему, то эти определители отличны от нуля; но с другой стороны их можно рассматривать как пределы определителей (2.13) с различными $x_j$, а потому они положительны. В частности, если мы положим $x_0 = \cdots = x_{j_r} = x$, то получим

$$W^L(v_k, \cdots, v_{k+r})(x) = \begin{vmatrix} v_k(x) & (L_1 v_k)(x) \cdots (L_r v_k)(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{k+r}(x) & (L_1 v_{k+r})(x) \cdots (L_r v_{k+r})(x) \end{vmatrix} > 0. \tag{2.14}$$

Определитель (2.14) будем называть обобщенным определителем Вронского функций $v_k$, $v_{k+1}, \cdots, v_{k+r}$. Так как неравенства (2.14) имеют место при любых $k$ и $r$, то из этого следует, что положительны все обобщенные определители Вронского

$$W^L(v_{i_0}, \cdots, v_{i_m})(x) > 0 \quad (i_0 < i_1 < \cdots < i_m). \tag{2.15}$$

Убедившись, что $D^*$-базис $\{v_k\}_{k=0}^n$ образует $DB_n^\infty$-систему, перейдем к доказательству уточненного правила знаков Декарта (2.11) для многочлена (2.10). Пусть $V(R) = p$, $Z(R) = s$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_s$ — все нули многочлена $R$ в $(a, b)$. Если коэффициенты многочлена $R$ удовлетворяют условиям (2.9), причем $a_{k_0}$ — первый его отличный от нуля коэффициент, а $a_l$ — последний отличный от нуля коэффициент, то, благодаря условиям 1°, имеем

$$\operatorname{sign} R(x') = \operatorname{sign} a_{k_0} = +1 \quad \text{при} \quad a < x' < x_1,$$
$$\operatorname{sign} R(x'') = \operatorname{sign} a_l = (-1)^p \quad \text{при} \quad x_s < x'' < b.$$

Но между $x'$ и $x''$ лежит $s$ нулей многочлена $R$ и, если учесть, что при переходе через нуль обобщенной кратности $r$ знак многочлена $R$ умножается на $(-1)^r$, то

$$1 = \operatorname{sign} R(x') = (-1)^s \operatorname{sign} R(x'') = (-1)^{s+p};$$

отсюда, принимая во внимание (2.6), окончательно получаем

$$p - s = V(R) - Z(R) = 2m \geqslant 0.$$

3. Систему функций $\{z_k\}_{k=0}^n$, $\{z_k\} \in C^n\{\omega_i\}$ в $(a, b)$ будем называть $EM_n^\infty$-системой Маркова, если при любом $r$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$ функции $\{z_k\}_{k=0}^r$ образуют $ET_r^\infty$-систему в $(a, b)$. Если $\{u_k\}_{k=0}^n$ является $ET_n^\infty$-системой на $[a, b]$, то ее $D^*$-базис $\{v_k\}_{k=0}^n$, будучи $DB_n^\infty$-системой в $(a, b)$, и подавно образует $EM_n^\infty$-систему.

Выбирая последовательно знаки функций $z_0, \cdots, z_n$, можно всегда добиться, чтобы были положительными при любых $a < x_0 < \cdots < x_r < b$ определители

$$\Delta\begin{pmatrix} z_0\, z_1 \cdots z_r \\ x_0 x_1 \cdots x_r \end{pmatrix} > 0. \tag{3.1}$$

В дальнейшем мы всегда будем считать, что $EM_n^\infty$-система нормирована условием (3.1). Если между точками $x_i$ допустить равенства, то это приведет к определителям, содержащим столбцы $(L_s z_0)(x_l), \cdots, (L_s z_r)(x_l)$, причем и эти определители будут положительными. В частности, положительны все обобщенные определители Вронского:

$$W^L(z_0, z_1, \cdots, z_r) > 0 \quad (r = 0, 1, \cdots, n). \tag{3.2}$$

Теорема 4. *Для того чтобы система* $\{z_k\}_{k=0}^n$, $z_k \in C^n\{\omega_i\}$ *в* $(a, b)$, *была* $EM_n^\infty$-*системой, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям* (3.2).

Эта теорема является обобщением теоремы А. А. Маркова [7], доказанной им для случая, когда $z_i \in C^n$ и обычных определителей Вронского (см. также [3]). Указание на возможность обобщений в рассматриваемом здесь направлении имеется в монографии [8].

Необходимость условия (3.2) установлена рассуждением, предшествующим формулировке теоремы 4. Для доказательства достаточности не удается применить метод А. А. Маркова, так как он основан на вычислении $(f\varphi)^{(n)}$ по формуле Лейбница, которая не имеет аналога для оператора $L_n(f\varphi)$. Однако можно воспользоваться формулами Пойа [9] (отд. VII, №№ 59—62; отд. V, № 93), которые непосредственно распространяются на обобщенные определители Вронского. А именно, для любой функции $y \in C^n\{\omega_i\}$ справедливы равенства

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{W^L(y)}{W^L(z_0)}\right\} = \frac{W^L(z_0,\ y)\,\omega_0(x)}{[W^L(z_0)]^2};$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-2},\ y)}{W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-2},\ z_{k-1})}\right\} = \tag{3.3}$$

$$= \frac{W^L(z_0,\cdots,z_{k-2})\,W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-1},\ y)\,\omega_{k-1}}{[W^L(z_0,\cdots,z_{k-2},\ z_{k-1})]^2} \quad (k=2,\cdots,\ n).$$

Хотя отдельно производные от числителя и от знаменателя, вообще говоря, не существуют, но, деля числитель и знаменатель на $\omega_0\omega_1\cdots\omega_{k-1}$, замечаем что рассматриваемая дробь непрерывно дифференцируема. Полагая $W_k^L = W^L(z_0,\cdots,\ z_k)$ и, применяя последовательно формулы (3.3), получим

$$W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-1},\ y) = \frac{(W_{k-1}^L)^2}{W_{k-2}^L\,\omega_{k-1}}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-2},\ y)}{W_{k-1}^L}\right\} =$$

$$= \frac{(W_{k-1}^L)^2}{W_{k-2}^L\,\omega_{k-1}}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{(W_{k-2}^L)^2}{W_{k-1}^L\,W_{k-3}^L\,\omega_{k-2}}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-3},\ y)}{W_{k-2}^L}\right\}\right\} =$$

$$= \frac{(W_{k-1}^L)^2}{W_{k-2}^L\,\omega_{k-1}}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{(W_{k-2}^L)^2}{W_{k-1}^L\,W_{k-3}^L\,\omega_{k-2}}\cdots\frac{d}{dx}\left\{\frac{(W_0^L)^2}{W_1^L\,\omega_0}\,\frac{d}{dx}\,\frac{y}{W_0^L}\right\}\right\}. \tag{3.4}$$

Если мы положим

$$\Omega_0 = W_0^L,\ \Omega_1 = \frac{W_1^L\,\omega_0}{(W_0^L)^2},\quad \Omega_k = \frac{W_k^L\,W_{k-2}^L\,\omega_{k-1}}{(W_{k-1}^L)^2}\ (k=2,\cdots,\ n) \tag{3.5}$$

и введем операторы

$$\Lambda_0 y = y,\ \Lambda_k y = \left(\frac{\Lambda_{k-1}y}{\Omega_{k-1}}\right)' \quad (k = 1,\cdots,\ n+1), \tag{3.6}$$

то можем переписать (3.4) в виде

$$\Omega_k\,W^L(z_0,\cdots,\ z_{k-1},\ y) = W_k^L\,\Lambda_k y. \tag{3.7}$$

Полагая, в частности, $y = z_k$, из (3.7) получаем

$$\Lambda_k z_k = \Omega_k, \tag{3.8}$$

а следовательно, имеем также

$$\Lambda_{m+1} z_k = 0 \quad (m = k,\ k+1, \cdots, n). \tag{3.9}$$

Пусть

$$P(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i z_i(x), \quad a_r \neq 0.$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что $(\Lambda_r P)(x) = a_r \Omega_r(x) \neq 0$, и в силу обобщенной теоремы Ролля, примененной к операторам (3.6), имеем $Z(P) \leqslant r$. Нужно заметить, что благодаря (3.7), если точка $x_0$ является нулем функции $y$ кратности $s$ относительно операторов $\{L_k\}$, то она является также ее нулем кратности $s$ относительно операторов $\{\Lambda_k\}$ и обратно. Теорема 4 доказана.

По теореме М. А. Рутмана [10] (см. также [8]) для всякой системы Маркова $\{z_k\}_{k=0}^{n}$ существует система многочленов $\{\Phi_k\}_{k=0}^{n}$ по ней, которые могут быть представлены по формулам вида (1.1), где, однако, вообще говоря произведения $\omega_i(t)\,dt$ надо заменить дифференциалами Стилтьеса $d\sigma_i(t)$.

В рассматриваемом здесь случае, когда $\{z_k\}_{k=0}^{n}$ образует $EM_n^{\infty}$-систему, легко указать, используя (3.5) — (3.9), явные формулы для системы многочленов $\{\Phi_k\}_{k=0}^{n}$. В самом деле, из (3.9) следует, что при любом фиксированном $k$ $(k = 1, \cdots, n+1)$ функции $\{z_i\}_{i=0}^{k-1}$ образуют систему фундаментальных решений уравнения

$$\Lambda_k y = 0. \tag{3.10}$$

С другой стороны, полагая

$$\begin{gathered} \Phi_0(x) = \Phi_0(x), \\ \Phi_i(x) = \Omega_0(x) \int\limits_a^x \Omega_1(t_1)\,dt_1 \cdots \int\limits_a^{t_{i-1}} \Omega_i(t_i)\,dt_i, \quad a < x < b, \end{gathered} \tag{3.11}$$

мы видим, что $\{\Phi_i\}_{i=0}^{k-1}$ также образует фундаментальную систему уравнения (3.10). Следовательно, справедливы равенства

$$\Phi_i(x) = \sum_{j=0}^{i} a_{ij} z_j(x), \quad a_{ii} \neq 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n). \tag{3.12}$$

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступила 15.IV.1974

**Վ. Ս. ՎԻԴԵՆՍԿԻ. Տրված ֆունկցիաների հաջորդականության նկատմամբ դիֆերենցելի Չեբիշևի սիստեմների մասին** *(ամփոփում)*

*Հոդվածում սահմանվում են $ET_n^\infty$ Չեբիշևի սիստեմներ և ապացուցվում է, որ կամայական $ET_n^\infty$-սիստեմ ունի $D^*$-բազիս։ Սահմանվում են $EM_n^\infty$ Մարկովի սիստեմներ։ Ապացուցվում է, որ $\{x_k\}_{k=0}^n$ սիստեմը հանդիսանում է $EM_n^\infty$-սիստեմ, երբ (3.2) դետերմինանտները դրական են։*

V. S. VIDENSKY. *Tchebycheff systems differentiable with respect to the given set of functions* (summary)

In the article $ET_n^\infty$-Tchebycheff systems are defined and it is proved that any $ET_n^\infty$-system has a $D^*$-basis. $EM_n^\infty$ Markov systems are defined and a theorem is proved; stating that the system $\{x_k\}_{k=0}^n$ is $EM_n^\infty$-system if and only if the determinants (3.2) are positive.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Виденский*. О системах Чебышева, которые обладают декартовым базисом, Сб. исследований по теории функций и диф. ур-ям, Владимирский пединститут, 1974.
2. *В. С. Виденский*. Об одном новом квазианалитическом классе функций, ДАН СССР, 219, № 2, 1974, 282—285.
3. *S. Karlin, W. J. Studden*. Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics, N. Y., 1966.
4. *С. Н. Бернштейн*. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, М.—Л., 1937.
5. *В. С. Виденский*. К двум работам С. Н. Бернштейна о декартовом базисе системы функций Чебышева, Часть 1, Современный анализ и геометрия, Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена, том 541, 1972, 36—52. Часть 2, Современный анализ и геометрия, Сборник научных трудов ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1972, 31—44.
6. *Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн*. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, М.—Л., 1950.
7. *А. А. Марков*. О предельных величинах интегралов в связи с интегрированием, Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля, М.—Л., 1948.
8. *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман*. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие, М., 1973.
9. *Г. Полиа, Г. Сегё*. Задачи и теоремы из анализа, М., 1956.
10. *М. А. Рутман*. Интегральное представление функций, образующих ряд Маркова ДАН СССР, 164; № 5, 1965, 989—992.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 4, 1976 Математика

Г. А. НАЗАРЯН

# НЕКОТОРЫЕ СРАВНИТЕЛЬНЫЕ СЛОЖНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫЧИСЛЕНИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются вопросы реализации булевых функций (б. ф.) в универсальных и неуниверсальных алгорифмических языках [1], или, что почти равносильно, в различных нумерациях рекурсивных функций. В этой связи сравниваются возможности реализации б. ф., с одной стороны, в сравнительно „богатых“ нумерациях, допустимых нумерациях по Роджерсу [2], и, с другой стороны, в сравнительно „бедных“ нумерациях, таких, в которых для всякой рекурсивной функции с заданным номером мы можем распознать, задает ли она (в естественном смысле) какую-либо фиксированную б. ф. или нет. Нумерации, удовлетворяющие некоторому условию только что упомянутого рода, будем называть булевски разрешимыми (точное определение будет дано ниже). Булевски разрешимые нумерации будем называть регулярными, если для всякой б. ф. мы можем указать номер рекурсивной функции, которая вычисляет данную б. ф. При сравнении реализации б. ф. в универсальных и булевски разрешимых нумерациях обнаруживаются следующие два „эффекта“: „эффект сжатия объемов“ и „перекрестный эффект“. „Эффект сжатия объемов“ заключается в том, что существуют б. ф., достаточно коротко кодируемые в нумерациях первого типа и достаточно длинно—в нумерациях второго типа. „Перекрестный эффект“ заключается в том, что существуют пары б. ф., из которых первая кодируется значительно короче второй в нумерациях первого типа и значительно длиннее—в нумерациях второго типа. Мы будем изучать указанные „эффекты“ в связи с поведением сигнализирующих функций, описывающих работу алгорифмов, вычисляющих б. ф. В дальнейшем, рассматривая поведение произвольной сигнализирующей Ф в смысле Блюма [8], мы будем иногда для краткости называть ее „время вычислений“ или просто „время“ (хотя на самом деле в роли Ф может фигурировать любая сигнализирующая). Сравнивая реализацию б. ф. в разрешимой и допустимой нумерациях и говоря при этом о поведении сигнализирующих или о времени вычислений, мы будем всегда подразумевать, что эти характеристики рассматриваются по отношению к допустимой нумерации. Поведение сигнализирующих функций по отношению к разрешимой нумерации нас, как правило, интересовать не будет. (Если с регулярной булевски разрешемой нумерацией ассоциирована некоторая сигнализирующая функция („времени“), то, как нетрудно убедиться, можно указать общерекурсивную функцию, которая для всякого $n$ мажорирует „время“ вычисления всех б. ф. от $n$ аргументов схемами минимальной сложности, или иначе говоря, б. ф. в регулярной булевски разрешимой нумерации, так сказать, „предсказуемо вычислимы“). Мы покажем (теорема 1), что существуют конструктивные последовательности б. ф., на которых при наличии „эффекта сжатия объема“ время вычислений остается на некоторых булевых векторах достаточно большим. Вместе с тем (при некоторых ограничениях на допустимые нумерации) оказывается (теорема 2), что существуют такие конструктивные последовательности б. ф., на которых, при наличии „эффекта сжатия обьема“, сложность схем в допустимой нумерации, вычисляющих б. ф. этих последовательностей и время их вычислений могут быть ограничены независимо от заданной степени „сжатия объемов“. В отношении „перекрестного эффекта“ мы опишем (теорема 3) две псевдопоследовательности* [3], [4] б. ф., для которых имеет место „перекрестный эффект“, такой, что удлинение кодов в допустимой нумерации сопровождается также существенным увеличением времени.

Основное содержание статьи относится к такому определению вычисления б. ф. в заданной нумерации, при котором каждая частично рекурсивная функция (чрф) может определять не более одной б. ф. (2-вычислимость). В заключительном разделе статьи рассматривается иное определение вычисления б. ф., в соответствии с которым фиксированная чрф может одновременно вычислять различные б. ф. разных размерностей (1-вычислимость).

1°. Всюду далее чрф есть сокращение для выражения „частично рекурсивная функция“, орф — „общерекурсивная функция“, б. ф.—„булева функция“, н. ч. — „натуральное число“. Определим н. ч. как слова в алфавите $\{0,1\}$ так, как это сделано, например, в [5]. Булевы функции и связанные с ними понятия, здесь не определяемые, будем понимать как в [6] (в частности, понятие б. ф. рассматривается как частный случай понятия н. ч.). Длину н. ч. $x$ будем обозначать через $l(x)$. Размерность б. ф. будем указывать верхним индексом: так, если $F$ есть б. ф. размерности $n$, то будем писать $F^n$ наряду с $F$. Если $A$ есть конечное множество н. ч., то через $d(A)$ будем обозначать мощность этого множества. Если $M$ — множество б. ф., то через $M_n$ будем обозначать множество б. ф. размерности $n$, принадлежащих $M$. Пусть $\alpha$ и $\beta$ — какие-либо псевдофункции ([3], [4]), определенные для н. ч. и принимающие в качестве значений также н. ч. Через $\alpha(n) \underset{n}{\to} \infty$ и $\alpha(n) \underset{n}{\lesssim} \beta(n)$ будем обозначать соответственно суждения:

---

* Для читателя, незнакомого с терминологией конструктивной математики отметим, что понятия псевдопоследовательности и псевдофункции приблизительно соответствуют применяемым в классической математике понятиям последовательности и функции.

$$\forall m \exists k (n > k \supset \alpha(n) > m)$$

и
$$\forall m \exists d \forall n (n > d \supset \alpha(n) < (1+2^{-m}) \beta(n)).$$

Пусть $P$—одноместный предикат, допустимыми значениями переменной которого являются н. ч. Посредством $\overset{\infty}{\forall}_n P(n)$ будем обозначать суждение $\exists k\ \forall n (n > k \supset P(n))$. Через $D_x$ будем обозначать множество, имеющее номер $x$ в канонической нумерации конечных множеств ([2], [7]). Говорим, что чрф $\alpha$ 1-вычисляет б. ф. $F^n$, если для всех н. ч. $x$ длины $n$ выполнено $\alpha(x) = F^n(x)$. Говорим, что чфф $\alpha$ 2-вычисляет б. ф. $F$, если для всех н. ч. $x$ длины $n$ $\alpha(x) = F(x)$ и $\alpha(x) = 2$ для всех н. ч. $x$ с длиной, отличной от $n$. (Заметим, что формулируемые ниже утверждения сохранили бы свою силу и при несколько более общем определении 2-вычислимости, а именно, мы могли бы определить 2-вычислимость, например, следующим образом: пусть $g$ — какая-либо фиксированная двуместная чрф; говорим, что $\alpha$ 2-вычисляет $F^n$, если $\alpha(x) = F^n(x)$ при $l(x) = n$ и $\alpha(x) = g(n, x)$ в противном случае). Про нумерацию $\varphi$ чрф говорим, что она булевски разрешима, если существует такая орф $\gamma$, что для любого н. ч. $i$ и любой б. ф. $F$ оказывается: $\gamma(i, F) = 0$ в том и только в том случае, когда $\varphi_i$ 1-вычисляет $F$. В дальнейшем предполагаем, что $\varphi$-фиксированная булевски разрешимая нумерация. Для простоты изложения (при этом мы несущественно теряем в общности) будем предполагать также, что в $\varphi$ 2-вычисляются, а следовательно, и 1-вычисляются все б. ф., т. е. для любой б. ф. $F$ в $\varphi$ имеется функция, вычисляющая данную б. ф.

Зафиксируем некоторую допустимую в смысле [2\ нумерацию $\psi$ Пусть заданы меры объема $s_\varphi$ и $s_\psi$; для нумерации $\psi$ зафиксируем конструктивную последовательность $\Phi$ сигнализирующих [8]. В п.п. 2 и 3 мы будем рассматривать, соответственно, свойства 2-вычислимости и 1-вычислимости. В приводимых ниже определениях под вычислимостью б. ф. будем понимать соответственно 2-вычислимость для п. 2 и 1-вычислимость для п. 3. Через $\bar{s}_\psi$ (соответственно $\bar{s}_\varphi$) будем обозначать псевдофункцию*, такую, что для любой б. ф. $F$ и любого н. ч. $c$ $\bar{s}_\psi(F) = c$ в том и только в том случае, когда $\neg\neg\exists i (s_\psi(i) = c \,\&\, \psi_i$ вычисляет $F) \,\&\forall c' (c' < c \supset \neg\exists i (s_\psi(i) = c' \,\&\, \psi_i$ вычисляет $F)$ и, кроме того, если $F$ не есть б. ф., то $\bar{s}_\psi(F) = c$ равносильно $c = 0$.

Пусть $\xi$ — некоторая орф, $t$ — н. ч., $\psi$ — нумерация, $s_\psi$ и $\Phi$ — соответственно мера объема и последовательность сигнализирующих, ассоциированных с $\psi$. Говорим, что б. ф. $F^m(\xi, t)$ — неулучшаема в $(\psi, s_\psi, \Phi)$, если $\forall z ((s_\psi(z) < \xi(\bar{s}_\psi(F)) \,\&\, \psi_z$ вычисляет $F) \supset \neg\neg\exists x (l(x) = m \,\&\, \Phi_z(x) > t)$. В дальнейшем мы будем говорить, что $F(\xi, t)$ — не-

---

* С классической точки зрения определение $\bar{s}_\psi$ может быть записано в виде:

$$\bar{s}_\psi(F) = \begin{cases} \min \{ s_\psi(t) | \psi_t \text{ вычисляет } F \}, \text{ если } F \text{—б. ф.} \\ 0, \quad \text{если } F \text{ не б. ф.} \end{cases}$$

улучшаема, подразумевая, что $F(\xi, t)$ — неулучшаема в $(\psi, s_\psi, \Phi)$. Пусть $\delta_\psi$ (соответственно $\delta_\varphi$) есть орф, такая, что $D_{\delta_\psi(k)} = \{i \mid s_\psi(i) \leqslant k\}$. Говорим, что мера объема $s$ монотонна, если для любых н. ч. $i, j, k, l$ таких, что $k < l$, $i \in D_{\rho(k)}$, $j \in D_{\rho(l)}$ оказывается $i < j$ (здесь $\rho$ есть орф такая, что для всякого $m$ и для всякого $n$ имеет место $m \in D_{\rho(n)} \equiv s(m) = n$). Меру объема $s$ будем называть стандартной, если $\forall i (s(i) = l(i))$. Легко видеть, что всякая стандартная мера объема монотонна. Если П — некоторое рекурсивно перечислимое множество б. ф., то через $Ш_П$ будем обозначать псевдофункцию, удовлетворяющую условию: если $П_n$ не пусто, то $Ш_П(n) = \max\limits_{F \in П_n} \bar{s}_\varphi(F)$, если $П_n$ пусто, то $Ш_П(n) = 0$. Говорим, что орф $g$ совместима с нумерацией $\varphi$ относительно меры объема $s_\varphi$, если существуют рекурсивное множество П такое, что $d(П_n)$ — неограниченная и неубывающая орф, и конструктивная последовательность $F$ б. ф. такая, что $F_n$ имеет размерность $n$, для которых выполнено $g(Ш_П(n)) < \bar{s}_\varphi(F^n)$. Про рекурсивное множество П б. ф. и последовательность б. ф. $F$, удовлетворяющих только что указанным условиям, будем говорить, что они удовлетворяют условию совместимости орф $g$ с нумерацией $\varphi$ относительно меры объема $s_\varphi$.

2°. В этом пункте мы будем рассматривать 2-вычислимость б. ф.

Теорема 1. *Для любых орф $f$, $h$ и $\xi$ существуют конструктивные последовательности б. ф. $F_k^{m_k}$ и н. ч. $z_k$ такие, что для всех $k$ $\psi_{z_k}$ вычисляет $F_k^{m_k}$ и*

(*а*) $\forall_k (f(s_\psi(z_k)) < \bar{s}_\varphi(F_k^{m_k}))$,

(*б*) $\forall_k \forall_z (s_\psi(z) < \xi(s_\psi(z_k))$ & ($\psi_z$ *вычисляет* $F_k^{m_k}) \supset \neg \neg \exists x (l(x) = m_k \,\&\, \Phi_z(x) > h(m_k)))$.

Доказательство. (ср. [13], теорема 1). Не нарушая общности, можем считать, что $\xi$ и $f$ — неубывающие орф. Зададим трехместную орф $t$ инструкциями. Для вычисления $t(k, x, y)$ мы поступаем следующим образом. Вычисляем $C_y = d(D_{\delta_\psi(\xi(s_\psi(y)))}) + d(D_{\delta_\varphi(f(s_\psi(y)))})$. Пусть двухместная орф $\nu$ такова, что $\forall yij (2^{2^{\nu(y, i)}} > C_y) \,\&\, (i < j \supset \nu(y, i) < \nu(y, j))$.

Из $M_{\nu(y, k)}$ (здесь $M$ — множество всех б. ф.) выберем б. ф. $F_k^{\nu(y, k)}$ такую, что выполнено: 1) $\forall i (i \in D_{\delta_\psi(\xi(s_\psi(y)))}$ & $\psi_i$ вычисляет $F_k^{\nu(y, k)} \supset \neg \forall x (l(x) = \nu(y, k) \supset \Phi_i(x) \leqslant h(\nu(y, k))$ и 2) $F_k$ не вычисляется ни одной функцией $\varphi_i$ такой, что $i \in D_{\delta_\varphi(f(s_\psi(y)))}$. Выбор подобной функции возможен, поскольку количество б. ф. в множестве $M_{\nu(y, k)}$ больше, чем $C_y$; с другой стороны, условие 1) исключает не более $d(D_{\delta_\psi(\xi(s_\psi(y)))})$, а условие 2) исключает не более $d(D_{\delta_\varphi(f(s_\psi(y)))})$ б. ф. Далее, для $x$ с $l(x) = \nu(y, k)$ полагаем $t(k, x, y) = F_k(x)$ и равной 2 для $x$ таких, что $l(x) \neq \nu(y, k)$. По теореме о рекурсии существует такая орф $\theta$, что для любых $k$ и $x$ $\psi_{\theta(k)} = t(k, x, \theta(k))$. Нетрудно убедиться, что для б. ф. $F_k^{\nu(\theta(k), k)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ выполнены условия теоремы.

Пусть $\psi$ и $\theta$ — нумерации и $\nu$ — неубывающая орф. Говорим, что $\theta$ $\nu$-сводится к $\psi$, если существует орф $\beta$ такая, что $\forall i(\psi_{\beta(i)} = \theta_i)$ & & $l(\beta(k)) \underset{k}{\lesssim} \nu(l(k))$. Говорим, что $\psi$ $\nu$-оптимальна, если любая нумерация $\nu$-сводится к $\psi$. Нетрудно убедиться, что для любой допустимой нумерации $\psi$ можно указать орф $\nu$ такую, что $\psi$ $\nu$-оптимальна. В случае, если для $\nu$ выполнено $\forall c(\nu(l+c) \lesssim \nu(l))$ и $U$ (некоторая аддитивно оптимальная нумерация одноместных чрф) $\nu$-сводится к $\psi$, то, как нетрудно убедиться, $\psi$ $\nu$-оптимальна.

Теорема 2. *Пусть $\nu$ есть неубывающая орф и $\psi$ — $\nu$-оптимальная нумерация. Тогда существует орф $h$ такая, что для любой орф $f$ существует конструктивная последовательность б. ф. $F_k^{m_k}$ и конструктивная последовательность н. ч. $q_k$ и константа $C$ такие, что для любого $k$ функция $\psi_{q_k}$ вычисляет $F_k^{m_k}$ и*

(1) $$f(s_\psi(q_k)) < \overline{s_\varphi}(F_k),$$

(2) $$l(q_k) \underset{k}{\lesssim} \nu(l(k) + c),$$

(3) $$\forall x(l(x) = m_k \supset \Phi_{q_k}(x) < h(m_k)).$$

Лемма 1. (Эта лемма есть слегка модифицированный вариант леммы Я. М. Барздиня ([9], гл. 1, § 4, лемма 6)). *Если нумерация $\psi$ $\nu$-оптимальна и $\nu$ — неубывающая орф, то для любой конструктивной последовательности $h$ орф существует константа $C$ и последовательность $a$ н. ч. такие, что*

$$\forall k(\psi_{h_k(a_k)} = \psi_{a_k}) \,\&\, l(a_k) \underset{k}{\lesssim} \nu(l(k) + C).$$

Доказательство леммы. Пусть $A$ — некоторая четырехместная, универсальная для трехместных чрф функция и $B$ — трехместная чрф такая, что для всех $s, x, y, z$ выполнено $B(2^s(2x+1)-1, y, z) = A(s, x, y, z)$. Как известно, чрф $B$, получаемая таким образом, является аддитивно оптимальной для трехместных чрф и для любой трехместной чрф $b$ может быть указана орф $d$ и константа $C$ такие, что $\forall nxy((B(d(n), x, y) = b(n, x, y))$, $\forall n(d(n) > n)$ и $\forall n(l(d(n)) < l(n) + C)$. Из $\nu$-оптимальности $\psi$ имеем $\exists\beta\forall nx(B(n, n, x) = \psi(\beta(n), x) \,\&\, l(\beta(n)) \lesssim \nu(l(n))$. Из аддитивной оптимальности $B$ имеем $\exists q \exists C \forall k(B(q(k), n, x) = \psi(h_k(\beta(n)), x) \,\&\, l(q(k)) < l(k) + C)$. Для $n_k = q(k)$ имеем $\psi(\beta(q(k)), x) = B(q(k), q(k), x) = \psi(h_k(\beta(q(k))), x)$. Из $\nu$-оптимальности $\psi$, аддитивной оптимальности $B$ и того, что $\nu$ по предположению неубывающая и $\forall k(q(k) > k)$ имеем требуемое: $l(\beta(q(k)) \lesssim \nu(l(q(k))) \lesssim \nu(l(k) + C)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы ([7], § 9.2, гл. IV).

Лемма 2. *Для любой допустимой нумерации $\psi$ можно указать орф $B$, удовлетворяющую следующим условиям:*

(1) $\forall xz(\psi_{B(x, z)} = \psi_x)$,

(2) $\mathrm{A} x_1x_2z_1z_2(B(x_1, z_1) = B(x_2, z_2) \equiv x_1 = x_2 \,\&\, z_1 = z_2$,

(3) *для любого н. ч. $m$ можно указать такие $x$ и $z$, что $B(x, z) = m$.*

*Доказательство теоремы.* Пусть фиксированы некоторые нумерации $n$-ок н. ч. ($n = 1,2,\cdots$), причем для нумерации пар выполнено: $\forall x \exists C(l(< x, y >) < l(y) + C)$ (мы используем символ $<>$ [2] для обозначения кодов $n$-ок и буквы $\pi_1, \cdots, \pi_n$ для инверсных функций нумераций $n$-ок, т. е. таких, что $\forall y (y = < \pi_1(y), \cdots, \pi_n(y) >)$. Определим одноместную орф $\sigma$, принимающую каждое натуральное значение бесконечно много раз. Определим также двухместную орф $\tau$ такую, что

$$\forall wi (\sigma(\tau(w, i)) = w) \& \forall ij (i < j \supset \tau(w, i) < \tau(w, j)) \&$$

$$\& \forall wy (\sigma(y) = w \supset \exists i (y = \tau(w, i))).$$

Пусть $t$ — чрф, определяемая следующими инструкциями: для вычисления $t(i, x, z)$ вычисляем сначала $\psi_l(s_\psi(z))$, затем (если процесс вычисления $\psi_l(s_\psi(z))$ закончился) по тройке $< i, z, \Phi_l(s_\psi(z)) > = w$ находим $\mu p [2^{2\tau(w, p)} > d(D_{b_\varphi(\psi_l(s_\psi(z)))})]$. Из множества $M_{\tau(w, p)}$ (здесь $M$ — множество всех б. ф.) выберем б. ф. $F$ ($F = F_{l, z}$) размерности $\tau(w, p)$ такую, что $F$ не вычисляется ни одной $\psi_j$ с $j \in D_{b_\varphi(\psi_l(s_\psi(z)))}$ и положим $t(i, x, z)$ равной $F$, если $l(x) = \tau(w, p)$ и двойке в противном случае. Вследствие допустимости нумерации $\psi$ существует двухместная орф $r$ такая, что $t(i, x, z) = \psi_{r(l, z)}(x)$. Пусть далее $B$ — функция, удовлетворяющая условию леммы 2 для нумерации $\psi$, и пусть $G$ — орф, такая, что $\forall y (G(y) = B(\pi_1(y), \pi_2(y))$. Как следует из свойств $B$, функция $G$ есть орф, взаимно-однозначно отображающая натуральный ряд на себя. Через $R$ обозначим нумерацию такую, что для любых $y$ и $j$ будет $R_y(j) = r(G(y), j)$. Применим лемму 1 к последовательности орф $R$. Тогда существует одноместная орф $a$ такая, что всегда $\psi_{a(y)} = \psi_{R_y(a(y))}$ и $l(a(y)) \lesssim \nu(l(y) + c)$. Пусть $\bar{i}$ таково, что $\psi_{\bar{i}} = f$. Рассмотрим последовательность функций $R_{<\bar{i}, k>}$. По предположению, сделанному про функцию пересчета пар $<>$, имеем $\exists c \forall k (l(< \bar{i}, k >) < l(k) + C)$. Обозначим $a(< \bar{i}, k >)$ через $q_k$. Нетрудно убедиться, что для б. ф. $F_{B(\bar{i}, k), q_k}$ и н. ч. $q_k$ ($k = 1,2,\cdots$) выполнены условия (1) и (2) теоремы.

Определим функцию $h$. Зададим процедуру вычисления $h$ в точке $n$. Найдем такие $w$ и $l$, что $n = \tau(w, l)$. Пусть $w_1$, $w_2$ и $w_3$ такие н. ч., что $w = < w_1, w_2, w_3 >$. Найдем $y$ такое, что $G(y) = w_1$. Далее, если

$$w_2 = a(y) \text{ и } w_3 = \Phi_{w_1}(s_\psi(w_2)) \text{ и } l = \mu p [2^{2\tau(w, p)} > d(D_{b_\varphi(\psi_{w_1}(s_\psi(w_3)))})],$$

то полагаем $h(n) = \max\limits_{l(x) = n} \Phi_{w_1}(x)$, и полагаем $h(n) = 0$ в противном случае. Нетрудно убедиться, что $h$ искомая. Теорема доказана.

*Для иллюстрации теоремы* обратимся к языку машин Тьюринга(м. т.). В [10] на основании результатов из [11], было показано, что нумерация м. т. с числом внешних символов, равным $k$ (м. т. упорядочены по возрастанию числа внутренних состояний), является $\nu$-оптимальной, где $\nu(l) = \frac{k}{k-1} l$, и эта оценка непонижаема из мощностных соображений. Если в качестве допустимой нумерации в теореме 2 рассматривается нумерация м. т., то, как следует из теоремы, оценки для м. т., коротко кодирующих б. ф. по сравнению с некоторым булевски разрешимым языком, асимптотически наилучшие, причем при некотором общерекурсивном ограничении на время их работы.

**Теорема 3.** *Пусть орф $g$ совместима с нумерацией $\varphi$ относительно меры объема $s_\varphi$, $\psi$ — аддитивно оптимальная нумерация и $s_\psi$ — стандартная мера сложности. Тогда для любых орф $\xi$, $f$, $h$ (где для всех $n$ $\xi(n) > n$) существуют псевдопоследовательности $F_k^{m_k}$ и $G_k^{m_k}$ б. ф. и $z_k$ н. ч. такие, что для всех $k$ $\psi_{z_k}$ вычисляет $G_k^{m_k}$ и*

(а) $g(\bar{s}_\varphi(F_k^{m_k})) < \bar{s}_\varphi(G_k^{m_k})$,

(б) $f(s_\psi(z_k)) \leqslant \bar{s}_\psi(F_k^{m_k})$,

(в) $F_k^{m_k}$ — $(\xi, h(\max\limits_{l(x)=m_k} \Phi_{z_k}(x)))$ — *неулучшаема.*

**Замечание 1.** Теорема осталась бы верной, если бы про $\psi$ мы предположили, что она равномерная нумерация [10]. (в [10] определяется понятие $\gamma$-равности нумерации, равномерной мы будем называть такую нумерацию, которая $\gamma$-равномерна для некоторой $\gamma$), и $s_\varphi$ — произвольная монотонная мера объема.

**Доказательство теоремы.** Пусть рекурсивное множество б. ф. П и последовательность $P$ б. ф. удовлетворяют условию совместимости орф $g$ с нумерацией $\varphi$ относительно меры объема $s_\varphi$. Через $\xi^{-1}$ будем обозначать чрф, связанную с чрф $\xi$ соотношением $\xi^{-1}(n) = \mu m[\xi(m) > n] - 1$. Так как по предположению $\xi(n) > n$ для всех $n$, то $\xi^{-1}(n) < n$ и $\xi(\xi^{-1}(n)) < n$. Пусть $\nu_1$ и $\nu_2$ — произвольные неограниченные и неубывающие орф. Определим возрастающую последовательность н. ч. $n$. Для всякого $k$ $n_k = \mu m[f(l(k) + \nu_1(k)) < \xi^{-1}(l(\gamma(m)) - 4) - \nu_2(k)]$ (здесь $\gamma$ — орф такая, что $\gamma(n) = d(\Pi_n)$). В силу аддитивной оптимальности нумерации $\psi$ выполнено $\exists C_1 \forall k \exists z_k ((\psi_{z_k}$ вычисляет $P_k^{n_k}) \& (l(z_k) < l(k) + C_1)$. Определим последовательность $R$ б. ф. Пусть $H$ — орф такая, что для всех $n$: если $n = n_k$ для некоторого $k$, то $H(n_k) = h(\max\limits_{l<k}(\max\limits_{l(x)=n_l} \Phi_{z_l}(x)))$ и $H(n) = 0$ в противном случае.

Пусть далее $Q$ есть рекурсивное множество б. ф., удовлетворяющее следующим условиям: если $n = n_k$ для некоторого $k$, то $Q_{n_k}$ есть множество б. ф., мощность $d(Q_{n_k})$ которого удовлетворяет условию $l(d(Q_{n_k})) = \xi^{-1}(l(\gamma(n_k)) - 4) - \nu_2(k)$, и $Q_{n_k} \subset \Pi_{n_k}$ и б. ф. из $Q_{n_k}$ „не вычисляются функциями $\psi_z$ с $z < \frac{\gamma(n_k)}{2}$ за время, меньшее, чем $H(n_k)$“, т. е. для б. ф. $E$ из $Q_{n_k}$ выполнено: $\forall z\,(z < \gamma(n_k)/2\,\&\,\psi_z$ вычисляет $E \supset \neg\forall x\,(l(x) = n_k \supset \Phi_z(x) < H(n_k))$. Построение такого множества возможно, поскольку количество б. ф. в множестве $\Pi_{n_k}$ равно $\gamma(n_k)$, с другой стороны, условие невычислимости их функциями $\psi_z$ с номерами $z < \gamma(n_k)/2$ за время, меньшее, чем $H(n_k)$, исключает не более, чем $\gamma(n_k)/2$ б. ф., и, кроме того, из $l(d(Q_{n_k})) = \xi^{-1}(l(\gamma(n_k)) - 4) - \nu_2(k) \leqslant \xi^{-1}(l(\gamma(n_k)) - 4) \leqslant l(\gamma(n_k)) - 4)$ имеем $d(Q_{n_k}) < \gamma(n_k)/2$. Пусть $R_k^{n_k}$ есть псевдопоследовательность „самых сложных“ б. ф. из $Q_{n_k}$, т. е. таких, что $s_\psi(R_k^{n_k}) = \max\limits_{E \in Q_{n_k}} \bar{s}_\psi(E)$. Из оптимальности нумерации $\psi$ имеем $\exists C_2 \forall k\,(l(d(Q_{n_k})) \leqslant \bar{s}_\psi(R_k) \leqslant l(d(Q_{n_k})) + C_2)$.

Пусть $k_0 = \mu k[\nu_1(k) > c_1\,\&\,\nu_2(k) > c_2]$. Для псевдопоследовательностей $F_k^{m_k} = R_{k+k_0}^{n_{k+k_0}}$, $G_k^{m_k} = P_{k+k_0}^{n_{k+k_0}}$ и $y_k = z_{k+k_0}$ условия теоремы выполнены. Убедимся в этом. Пункт (а) выполнен, и в этом нетрудно убедиться.

Пункт (б). Имеем

$$\forall k\,(f(s_\psi(y_k)) = f(s_\psi(z_{k+k_0})) \leqslant f(l(k + k_0) + C_1) \leqslant f(l(k + k_0) +$$

$$+ \nu_1(k + k_0)) \leqslant \xi^{-1}(l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4) - \nu_2(k) \leqslant l(d(Q_{n_{k+k_0}})) \leqslant \bar{s}_\psi(F_k^{m_k}).$$

Пункт (в).

$$\xi(\bar{s}_\psi(F_k^{m_k})) = \xi(\bar{s}_\psi(G_{k+k_0}^{n_{k+k_0}})) \leqslant \xi(l(d(Q_{n_{k+k_0}})) + C_2) \leqslant$$

$$\leqslant \xi(\xi^{-1}l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4) - \nu_2(k) + C_2) \leqslant \xi(\xi^{-1}(l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4))) \leqslant l(\gamma(n_{k+k_0})) - 4).$$

Так как мера объема $s_\psi$ — стандартная, т. е. $\forall z\,(s_\psi(z) = l(z))$, то, как убедились, индексы $z$, объем которых $(l(z))$ не более, чем в $\xi$ раз превосходит $\bar{s}_\psi(F_k)$, ограничены числом $\gamma(n_{k+k_0})/2$; но по определению множества $Q$, все б. ф. из $Q_{n_{k-k_0}}$ индексами $z < \gamma(n_{k+k_0})/2$ „вычисляются не быстрее“, чем $H(n_{k+k_0})$, и, таким образом, функция $F_k^{m_k}$ — $(\xi, H(m_k))$ неулучшаема.

3°. В этом пункте мы будем рассматривать 1-вычислимость б. ф. Легко видеть, что при переходе от булевски разрешимой нумерации $\varphi$ к допустимой нумерации $\psi$ имеет место „сжатие объемов“. Действительно, для всякой конструктивной последовательности б. ф. $F$ можно указать орф (т. е. указать номер орф), вычисляющую б. ф. последовательности $F_n^n$ для всех $n$, а следовательно, можно указать константу $C$ такую, что $\forall n\,(\bar{s}_\psi(F_n^n) < C)$. С другой стороны, так как нумерация $\varphi$ булевски разрешимая, то можно строить конструктивные последовательности $F_n^n$ б. ф. таких, что $\bar{s}_\varphi(F_n^n) \to \infty$, и, таким образом, для них будут иметь место „сжатия объемов“. Нетрудно убедиться, что для 1-вычислимости справедливы дословные аналоги утверждений п. 2.

Как уже говорилось в начале этого пункта, если для конструктивной последовательности $F_n^n$ б. ф. выполнено $\bar{s}_\varphi(F_n^n) > q(n)$, где $q$

орф такая, что $q(n) \to \infty$, то для б. ф. $F_n^n$ имеет место „сжатие объемов" при переходе от нумерации $\varphi$ к $\psi$ (для б. ф. конструктивной последовательности $F_n^n$ выполнено $\exists C \forall n (\bar{s}_\psi (F_n^n) < C)$, и „степень сжатия объемов" для б. ф. конструктивной последовательности $F_n^n$ зависит от того, насколько „быстро растет" функция $q$ с ростом $n$. Дальше мы будем интересоваться временными характеристиками вычислений конструктивных последовательностей б. ф. и, в частности, тем, насколько они связаны со „степенью сжатия объемов". Двухместный предикат $P$, допустимыми значениями аргументов которого является н. ч. (напомним, что б. ф. рассматриваются как н. ч.), будем называть упорядочивающим б. ф., если:

(а) $\forall n$, для любой б. ф. $F$ от $n$ аргументов, $\exists k (1 \leqslant k \leqslant 2^{2^n}) \& P(F, k)$,

(б) $\forall k \forall F_1^n F_2^n (1 \leqslant k \leqslant 2^{2^n} \& P(F_1^n, k) \& P(F_2^n, k) \supset F_1^n = F_2^n)$.

Например, предикатом, упорядочивающим б. ф., является предикат $P_0$, определяемый следующим образом: для всяких н. ч. $k$, $n$ и всякой б. ф. $F^n$, $P_0(F^n, k)$ в том и только в том случае, когда мощность множества б. ф. $G$ от $n$ аргументов, удовлетворяющих условию $[(\bar{s}_\varphi (G) < \bar{s}_\varphi (F^n)) V (\bar{s}_\varphi (G) = \bar{s}_\varphi (F^n) \& (G$ лексикографически предшествует $F^n)]$, в точности равна $k-1$. Дальнейшие наши формулировки мы будем связывать с предикатом $P_0$, хотя они будут справедливы и для случая произвольного предиката $P$, упорядочивающего б. ф. Так, мы будем называть орф $\gamma$ следящей (следящей для конструктивной последовательности $F_n^n$), если $\forall n (1 \leqslant \gamma(n) \leqslant 2^{2^n})$ (если выполнено $\forall n P_0(F_n^n, \gamma(n))$. В последнем случае последовательность $F_n^n$ будем называть $\gamma$-последовательностью. В [12], [2] строится взаимно-однозначное соответствие между $N$ и $N^\infty$, где $N$ — множество н. ч., $N^\infty = \underset{s \in N}{U} N^s$ (здесь $N^s$ — множество кортежей над $N$ длины $s$, мы их будем называть $s$-ками н. ч.). Натуральное число $y$, соответствующее $n$-ке н. ч. $x_1, \cdots, x_n$, будем называть кодом этой $n$-ки и обозначать $< x_1, \cdots, x_n >$. $K$-тое н. ч. в лексикографической упорядоченности (напомним, что н. ч. суть слова в алфавите $\{0,1\}$) длины $n$ среди чисел такой же длины будем обозначать через $x_{n,k}$ $(\bar{k} = 1, \cdots, 2^n)$. Мы будем использовать запись $![q, n]$ для обозначения того факта, что чрф $q$ определена на всех н. ч. длины $n$, и если $![q, n]$, то через $[q, n]$ будем обозначать $< q(x_{n,1}), \cdots, q(x_{n,2^n}) >$.

Легко доказываются следующие леммы.

**Лемма 1.** *Пусть орф* $\sigma$ *удовлетворяет условию* $\forall i \forall n (!\psi_{\sigma(i)}(n) \equiv ![\psi_i, n])$, *тогда существует орф* $H$, *для которой выполнено:*

(а) $\forall i \forall_n^\infty (!\Phi_{\sigma(i)}(n) \supset \Phi_{\sigma(i)}(n) \leqslant H([\Phi_i, n]))$,

(б) $H$ — *неубывающая и неограниченная.*

**Лемма 2.** *Пусть орф* $\sigma$ *удовлетворяет условию* $\forall i \forall n (!\psi_i(n) \equiv ![\psi_{\sigma(i)} n])$, *тогда существует орф* $H$, *для которой выполнено:*

(а) $\forall i \forall_n^\infty (![\Phi_{\sigma(i)}, n] \supset [\Phi_{\sigma(i)}, n] \leqslant H(\Phi_i(n)))$,

(б) $H$ — *неубывающая и неограниченная.*

Из лемм 1 и 2 имеем

Следствие. *Существует орф $H$, удовлетворяющая условию: для любой орф $\gamma$ такой, что всегда $\gamma(n) \leqslant 2^{2^n}$ выполнено — если $F_n^n$ есть $\gamma$-последовательность, то*

(а) $\forall_i (\forall_n (\psi_i$ *вычисляет* $F_n^n) \supset \exists_j (\psi_j = \gamma \& \overset{\sim}{\forall}_n (\Phi_j(n) < H([\Phi_i, n])))$.

(б) $\forall_j (\psi_j = \gamma \supset \exists_i (\forall_n (\psi_i$ *вычисляет* $F_n^n) \& [\Phi_i, n] < H(\Phi_j(n))))$.

Следствие, говоря в принципе, утверждает, что всякая конструктивная последовательность б. ф. вычисляется не за существенно большее время, чем следящая функция для данной последовательности и наоборот. Чтобы убедиться в справедливости следствия, достаточно определить орф $\sigma_1$ и $\sigma_2$, удовлетворяющие условиям лемм 1 и 2, такие, что $\sigma_1$ по индексу $z$ орф (в нумерации $\psi$), вычисляющей б. ф. некоторой последовательности (если $\psi_z$ является таковой) выдает индекс орф, следящей для данной последовательности $F_n^n$, $\sigma_2$ же делает обратное; если далее функции $H_1$ и $H_2$ удовлетворяют утверждениям лемм 1 и 2 для орф $\sigma_1$ и $\sigma_2$ соответственно, то искомая функция $H$ может быть определена как $\max(H_1, H_2)$.

Из следствия вытекает, например, что для всякой разрешимой нумерации $\varphi$ можно выбрать такую последовательность б. ф. $F_n^n$, что при упорядочении б. ф. по сложности в $\varphi$ номера $F_n^n$ отличаются от номеров самых простых (относительно $\varphi$) б. ф. не более чем на 1, и вместе с тем время их вычисления в нумерации $\psi$ будет превосходить время вычисления булевых функций, самых сложных относительно $\varphi$.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. Д. Заславскому за постановку задачи и внимание к работе.

Вычислительный центр
МАТ Арм.ССР

Поступила 4.XI.1974

Հ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. Բուլյան ֆունկցիաների հաշվման բարդությունների որոշ համեմատական բնութագրեր *(ամփոփում)*

*Նկարագրվում են «Ծավալի սեղմման էֆեկտը» և «խաչման էֆեկտը», Բուլյան ֆունկցիաների իրացման ժամանակ ունիվերսալ և բուլյան լուծելի ալգորիթմիկ լեզուներում։*

*Ուսումնասիրվում են նշված էֆեկտները կախված ալգորիթմների ժամանակային բնութագրերից։*

G. A NAZARIAN. *Some comparative complexity characteristics of boolean functions computations* (summary)

"Cross effect" and "size shrinkage effect" are described when realization of boolean functions in universal and boolean solvable languages are compared. The mentioned effects are considered from the point of view of computation time.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Д. Заславский.* О реализации булевых функций с помощью автоматов, ДАН Арм.ССР, XLVII, № 3, 1968, 129—133.

2. *Х. Роджерс.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Изд. „Мир", 1972.
3. *И. Д. Заславский.* О псевдофункциях Шеннона, Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 16, 1969, 65—76.
4. *М. Г. Гельфэнд.* О конструктивных псевдофункциях, Зап. научн. семинаров, ЛОМИ АН СССР, 16, 1969, 20—28.
5. *А. К. Звонкин, Л. А. Левин.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгорифмов, УМН, 25, вып. 2, 1970, 85—127.
6. *Г. А. Назарян.* Некоторые оценки реализации булевых функций в алгорифмических языках, ДАН Арм.ССРL, V, № 3, 1972, 129—133.
7. *А. И. Мальцев.* Алгоритмы и рекурсивные функции, Изд. „Наука", М., 1965.
8. *M. A. Blum.* A machine-independent theory of the complexity of recursive functions, JACM, 14, № 2, 1967, 322—336.
9. *Я. М. Барздинь.* Сложность и частотное решение некоторых алгоритмически неразрешимых массовых проблем, Докторская диссертация, ВЦ Латвийского ГУ, Рига, 1971.
10. *Г. А. Назарян.* О реализации булевых функций в алгорифмических языках, „Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники", Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕрГУ, VIII, 1974.
11. *G. J. Chaitin.* On the length of programs for computing finite binary Sequences, JACM, 13, 1966, 547—570.
12. *В. А. Успенский.* Лекции о вычислимых функциях, „Изд. ФМЛ", М., 1960.
13. *M. A. Blum.* On the size of machines, Information and Control. 11, № 3, 1967, 257—265.

# ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

# СОДЕРЖАНИЕ

# CONTENTS