ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված թեկուզ թե չատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գին 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

С. К. АФЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Рассмотрим в круге $|z|\leqslant 1$ $(z=x+iy)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[q(z)\frac{\partial \bar u}{\partial z}\right]+a_1(z)\frac{\partial u}{\partial \bar z}+a_2(z)\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}+a_3(z)\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z}+a_4(z)\frac{\partial \bar u}{\partial z}+$$
$$+a_5(z)u+a_6(z)\bar u=h(z), \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$u(z)=u_1(x,y)+iu_2(x,y)$$

— искомая функция, $q(z)$, $h(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$, $\cdots$, $a_6(z)$ — заданные функции класса $C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)$, $0<\alpha\leqslant 1$ и $q(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $|q(z)|<1$ при $|z|<1$, $|q(z)|=1$ при $|z|=1$;

2) $1-q(z)\overline{q(z)}=(1-z\bar z)^\mu q_1(z)$, где $q_1(z)\neq 0$ при $|z|=1$

и $0<\mu\leqslant 1$.

Уравнение (1) есть комплексная запись некоторой системы дифференциальных уравнений, которая эллиптична внутри круга $|z|<1$ и вырождается на всей границе $|z|=1$.

В работе [3] изучена задача Римана—Гильберта в том частном случае, когда $q(z)$ — аналитическая в $|z|<1$ функция, а функции $h(z)$ $a_1(z)$, $a_2(z)$, $\cdots$, $a_6(z)$ — тождественные нули.

В настоящей работе рассматривается краевая задача Римана — Гильберта: найти решение $u(z)$ уравнения (1) в классе $C^1_\alpha(|z|\leqslant 1)\cap$ $\cap\, C^2(|z|<1)$, удовлетворяющее краевому условию

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(z)}\,u(z)\right]=g(z)\ \text{при}\ |z|=1, \tag{2}$$

где $\lambda(z)$ и $g(z)$ — заданные функции класса $C^1_\alpha(|z|=1)$, $0<\alpha\leqslant 1$, причем $\lambda(z)\neq 0$ при любом z.

Введем обозначения

$$m = \frac{1}{2\pi} [\arg q(z)]_{|z|=1}, \quad n = \frac{1}{2\pi} [\arg \lambda(z)]_{|z|=1}, \tag{3}$$

где символ $[\ ]_{|z|=1}$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при однократном обходе единичной окружности в направлении против часовой стрелки.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда краевое условие (2) имеет следующий простой вид (см. [1]):

$$\operatorname{Re}[z^{-n} u(z)] = 0 \text{ при } |z| = 1. \tag{2*}$$

Рассматриваемую задачу будем коротко называть задачей (1)—(2*).

Определение. Индексом $\varkappa$ задачи (1)—(2*) называется разность $k_0 - k_1$, где k_0 — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи ($h(z) = 0$), а k_1 — число линейно независимых условий, при которых разрешима неоднородная задача.

В § 1 задача (1)—(2*) приведена к операторному уравнению вида $u + Au = f$ с вполне непрерывным оператором A (в том или ином пространстве, в зависимости от чисел m и n).

В § 2 получена оценка для индекса задачи (1)—(2*).

§ 1. Приведение задачи (1)—(2*) к уравнению вида $u + Au = f$ с вполне непрерывным оператором A

Рассмотрим сначала одну вспомогательную краевую задачу: найти аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую условию

$$\Phi(z) - q(z)\overline{\Phi(z)} = F(z) - q(z)\overline{F(z)} \text{ при } |z| = 1, \tag{4}$$

где $F(z)$ — заданная на границе $|z| = 1$ функция класса C_α ($|z| = 1$), $0 < \alpha \leqslant 1$.

Эта задача легко решается с помощью сведения ее к известной задаче сопряжения. В самом деле, вводя функцию

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{при } |z| < 1 \\ \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)} & \text{при } |z| > 1, \end{cases} \tag{5}$$

краевое условие (4) примет вид

$$\Omega^+(z) - q(z)\Omega^-(z) = F(z) - q(z)\overline{F(z)} \text{ при } |z| = 1. \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$\overline{\Omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = \Omega(z) \text{ при } |z| = 1. \tag{7}$$

С другой стороны, если кусочно аналитическая и ограниченная на бесконечности функция $\Omega(z)$ является решением задачи (6) — (7), то функция $\Omega(z) = \Omega(z)$ $(|z|<1)$ является решением краевой задачи (4). Следовательно краевые задачи (4) и (6) — (7) эквивалентны. Решения задачи (6)—(7) получим следующим образом: пусть $\Omega(z)$ есть решение задачи (6), тогда в силу условия $|q(z)| = 1$ при $|z| = 1$ легко получаем, что функция $\Omega_*(z) = \Omega\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ также является решением задачи (6), а тогда функция $\frac{1}{2}[\Omega(z) + \Omega_*(z)]$ будет, очевидно, решением задачи (6)—(7). С другой стороны любое решение задачи (6) — (7) можно написать в виде $\Omega(z) = \frac{1}{2}[\Omega(z) + \Omega_*(z)]$, так как по условию (7) $\Omega_*(z) = \Omega(z)$. Следовательно, любое решение $\Phi(z)$ задачи (4) дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[\Omega(z) + \Omega_*(z)] \quad (|z|<1), \tag{8}$$

где $\Omega(z)$ — произвольное решение краевой задачи (6).

Задача (6) полностью решена в монографии [2]. Используя решение задачи (6) и формулу (8), получим следующую лемму.

Лемма 1. *При $m \geqslant -1$ общее решение задачи (4) дается формулой*

$$\Phi(z) = \begin{cases} BF + X(z)\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu & \text{при } m \geqslant 0 \\ BF & \text{при } m = -1 \end{cases} \quad (|z| \leqslant 1), \tag{9}$$

где

$$BF = \frac{X(z)}{4\pi i}\int_{|t|=1}\left[\frac{F(t) - q(t)\overline{F(t)}}{X^*(t)(t-z)} + z^{m+1}\frac{\overline{F(t)} - \overline{q(t)}F(t)}{\overline{X^+(t)}(t-z)t}\right]dt, \tag{10}$$

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{\ln[t^{-m}q(t)]}{t-z}dt\right\} \tag{11}$$

и коэффициенты $c_0, c_1, \cdots, c_m$ удовлетворяют условию

$$c_{m-\nu} = \bar{c}_\nu, \quad \nu = 0, 1, \cdots, m. \tag{12}$$

При $m < -1$ задача (4) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{|t|=1}\frac{t^\nu[F(t) - q(t)\overline{F(t)}]}{X^+(t)}dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, -m-2. \tag{13}$$

При выполнении условия (13) решение дается формулой

$$\Phi(z) = BF, \ |z| < 1. \tag{14}$$

Лемма 2. *Если функция* $u(z)$ *класса* $C_\alpha^1(|z| \leqslant 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ *равна нулю на границе* $|z| = 1$, *то функция* $\frac{u(z)}{1-|z|}$ *принадлежит классу* $C_\alpha(|z| \leqslant 1)$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы в кольце $r_0 \leqslant |z| \leqslant 1$. Вводя полярные координаты r и φ $(z = re^{i\varphi})$, заметим, что функция $v(r, \varphi) = u(re^{i\varphi})$ принадлежит классу $C_\alpha^1(\Pi)$ и $v(1, \varphi) = 0$; где Π—прямоугольник $[r_0 \leqslant r \leqslant 1;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi]$. Тем самым доказательство леммы сводится к доказательству принадлежности функции $(1-r)^{-1}v(r, \varphi)$ классу $C_\alpha(\Pi)$. Для этого достаточно проверить, что

$$|(1-r_1)^{-1}v(r_1, \varphi) - (1-r_2)^{-1}v(r_2, \varphi)| \leqslant C \cdot |r_1 - r_2|^\alpha \tag{15}$$

и

$$|(1-r)^{-1}[v(r, \varphi_1) - v(r, \varphi_2)]| \leqslant C\,|\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha, \tag{16}$$

где C — постоянная.

Поскольку $v(1, \varphi) = 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $v(r, \varphi) \in C_\alpha^1(\Pi)$, то

$$\int_0^\varphi \lim_{r \to 1} \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi}\, d\varphi = \lim_{r \to 1} \int_0^\varphi \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi}\, d\varphi = \lim_{r \to 1}[v(r, \varphi) - v(r, 0)] =$$

$$= v(1, \varphi) - v(1, 0) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по φ, получим $\lim\limits_{r \to 1} \frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$ и, тем самым, $\frac{\partial v(1, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$ (в граничных точках производные определяются как пределы одноименных производных внутри области).

Сначала докажем неравенство (16). В случае $|\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant 1 - r$, используя равенство $\frac{\partial v(1, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$, теорему Лагранжа и условие Гельдера, получим

$$|(1-r)^{-1}[v(r, \varphi_1) - v(r, \varphi_2)]| = (1-r)^{-1}\left|\frac{\partial v(r, \varphi^*)}{\partial \varphi}(\varphi_1 - \varphi_2)\right| =$$

$$= (1-r)^{-1}\left|\frac{\partial v(r, \varphi^*)}{\partial \varphi} - \frac{\partial v(1, \varphi^*)}{\partial \varphi}\right| \cdot |\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant C(1-r)^{\alpha-1}|\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant$$

$$\leqslant C\,|\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha.$$

В случае же $|\varphi_1 - \varphi_2| > 1 - r$ имеем

$$(1-r)^{-1}v(r, \varphi_1) = (1-r)^{-1}[v(r, \varphi_1) - v(1, \varphi_1)] =$$

$$= -\frac{\partial v(r_2^*, \varphi_1)}{\partial r}, \ r < r_1^* < 1 \tag{17}$$

и аналогично

$$(1-r)^{-1} v(r, \varphi_2) = -\frac{\partial v(r_2^*, \varphi_2)}{\partial r}, \quad r < r_2^* < 1. \tag{18}$$

В силу (17) и (18) будем иметь

$$|(1-r)^{-1}[v(r, \varphi_1) - v(r, \varphi_2)]| = \left|\frac{\partial v(r_1^*, \varphi_1)}{\partial r} - \frac{\partial v(r_2^*, \varphi_2)}{\partial r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C[(r_1^* - r_2^*)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2]^{\alpha/2} \leqslant C[(1-r)^2 +$$

$$+ (\varphi_1 - \varphi_2)^2]^{\alpha/2} < C \cdot 2^{\alpha/2} |\varphi_1 - \varphi_2|^\alpha.$$

Следовательно, неравенство (16) доказано.

Теперь докажем неравенство (15).

Случай I. Пусть $r_1 - r_2 \leqslant 1 - r_1$, $r_1 > r_2$, тогда

$$|(1-r_1)^{-1} v(r_1, \varphi) - (1-r_2)^{-1} v(r_2, \varphi)| = \left|\frac{\partial}{\partial r}[(1-r)^{-1} v(r, \varphi)]_{r=r^*} \times\right.$$

$$\left.\times (r_1 - r_2)\right| = \left|(1-r^*)^{-1}\frac{\partial v(r^*, \varphi)}{\partial r} + (1-r^*)^{-2} v(r^*, \varphi)\right|(r_1 - r_2) =$$

$$= \left|\frac{\partial v(r^*, \varphi)}{\partial r} - \frac{v(1, \varphi) - v(r^*, \varphi)}{1-r^*}\right|(1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) =$$

$$= \left|\frac{\partial v(r^*, \varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v(r^{**}, \varphi)}{\partial r}\right|(1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) \leqslant$$

$$\leqslant C|r^* - r^{**}|^\alpha (1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) \leqslant$$

$$\leqslant C(1-r^*)^\alpha (1-r^*)^{-1}(r_1 - r_2) \leqslant C(r_1 - r_2)^\alpha,$$

где $r_2 < r^* < r_1$, $r^* < r^{**} < 1$.

Случай II. $r_1 - r_2 > 1 - r_1$. В силу (17) и (18) имеем

$$|(1-r_1)^{-1} v(r_1, \varphi) - (1-r_2)^{-1} v(r_2, \varphi)| = \left|-\frac{\partial v(r_1^*, \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial v(r_2^*, \varphi)}{\partial r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C|r_2^* - r_1^*|^\alpha \leqslant C(1-r_2)^\alpha = C(r_1 - r_2 + 1 - r_1)^\alpha < 2C(r_1 - r_2)^\alpha.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если функция $u(z)$ принадлежит классу $C_\alpha^1(|z| \leqslant 1)$, то имеет место равенство*

$$Ku = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta - z}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_2\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\zeta}} + a_3\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} + a_4\frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} + a_5 u + a_6 \bar{u}\right) d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta - z}\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial a_3}{\partial \bar{\zeta}} - a_5\right) u + \left(\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial a_4}{\partial \zeta} - a_6\right)\bar{u}\right] d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{a_1(\zeta)\,u(\zeta)+a_4(\zeta)\,\overline{u(\zeta)}-a_1(z)\,u(z)-a_4(z)\,\overline{u(z)}}{(\zeta-z)^2}\,d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_1u+a_4\bar u}{(\zeta-z)\,\zeta^2}\,d\zeta+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_2u+a_3u}{\zeta-z}\,d\zeta-a_2(z)\,\overline{u(z)}-$$

$$-a_3(z)\,u(z),\ \zeta=\xi+i\eta. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть G_ε есть область, получившаяся после удаления из круга $|\zeta|<1$ круг $|\zeta-z|<\varepsilon$, а Γ_ε — окружность $|\zeta-z|=\varepsilon$, тогда

$$Ku=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\left(a_1\frac{\partial u}{\partial\zeta}+a_2\frac{\partial u}{\partial\zeta}+a_3\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta}+a_4\frac{\partial u}{\partial\zeta}\,a_5u+a_6\bar u\right)d\xi d\eta=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}\left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial a_3}{\partial\bar\zeta}-a_5\right)u+\left(\frac{\partial a_2}{\partial\bar\zeta}+\frac{\partial a_4}{\partial\zeta}-a_6\right)\bar u\right]d\xi d\eta+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{a_1u+a_4\bar u}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{a_2\bar u+a_3u}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{a_1u+a_4\bar u}{(\zeta-z)^2}\,d\xi d\eta. \tag{20}$$

В силу известных формул (см. [1], ст. 41) будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{a_1u+a_4\bar u}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_1u+a_4\bar u}{\zeta-z}\,d\bar\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{a_1u+a_4\bar u}{\zeta-z}\,d\bar\zeta, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left(\frac{a_2\bar u+a_3u}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{a_2\bar u+a_3u}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{a_2\bar u+a_3u}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{22}$$

где обе окружности обходятся по направлению против часовой стрелки. Для вычисления пределов интегралов по Γ_ε заметим, что если $f(z)\in C_\alpha(|z|\leqslant1)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\bar\zeta=0 \text{ и } \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z). \tag{23}$$

Действительно, поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\overline{d\zeta}}{\zeta-z}=0 \text{ и } \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=1,$$

то

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\overline{d\zeta}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\overline{d\zeta}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{C\cdot|\zeta-z|^\alpha}{|\zeta-z|}|\overline{d\zeta}|=C\cdot\varepsilon^\alpha$$

и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{C\,|\zeta-z|^\alpha}{|\zeta-z|}\,|d\zeta|=C\cdot\varepsilon^\alpha,$$

т. е. имеет место (23). В силу (20)—(23) получаем (19).

Лемма 4. *Операторы S и R, определяемые формулами*

$$Sf=(1-q\bar{q})^{-1}\,(Kf-q\overline{Kf}-BKf+q\,\overline{BKf}),\tag{24}$$

$$Rf=(1-q\bar{q})^{-1}\,(Tf-q\,\overline{Tf}-BTf+q\overline{BTf}),\tag{25}$$

линейны относительно поля вещественных чисел и отображают соответственно пространства $C^1_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$ и $C_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$ в пространство $C_\alpha\,(|z|\leqslant 1)$ (под значениями Sf и Rf в граничных точках понимаются пределы соответствующих величин изнутри области, где

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta,\tag{26}$$

а операторы B и K определены формулами (10) *и* (19).

Доказательство. Пусть $f\in C^1_\alpha\,(|z|\leqslant1)$, тогда $Kf\in C^1_\alpha\,(|z|\leqslant1)$ (см. [1], стр. 73). Далее, используя известное свойство интеграла типа Коши (см., например, [1], стр. 38), легко убедиться, что $BKf\in C^1_\alpha(|z|\leqslant1)$. Следовательно, второй множитель в правой части (24) принадлежит классу C^1_α $(|z|\leqslant1)$. С другой стороны, этот же множитель равен нулю на границе $|z|=1$, поскольку BKf является решением краевой задачи (4), если в качестве функции F взята функция Kf. Отсюда, в силу леммы 2, получим $Sf\in C_\alpha\,(|z|\leqslant1)$, потому что $q_1(z)=(1-z\bar{z})^{-\mu}[1-q\,\overline{(z)}\,q(z)]\neq0$ по предположению и принадлежит классу $C_\alpha\,(|z|\leqslant1)$, в силу той же леммы. Аналогично доказывается утверждение, относящееся к оператору R. Линейность операторов S и R очевидна.

Перейдем теперь к рассмотрению следующих четырех возможных случаев:

Случай I: $m \geqslant -1$, $n \geqslant 0$. Ограничимся случаем, когда $m > -1$ — нечетное число. Если m — четное число или $m = -1$, все утверждения можно получить аналогичными рассуждениями.

Пусть функция $u(z)$ есть произвольное решение задачи (1)—(2*). Тогда, с учетом (19) из (1), будем иметь (см. [1])

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} + q(z)\frac{\partial \bar u}{\partial \bar z} = Ku + Th + \Psi(z), \tag{27}$$

где $\Psi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, принадлежащая, очевидно, классу $C_\alpha(|z| \leqslant 1)$. Перейдя в (27) к комплексно сопряженным величинам, получим

$$\frac{\partial \bar u}{\partial z} + \bar q(z)\frac{\partial u}{\partial z} = \overline{Ku} + \overline{Th} + \overline{\Psi(z)}, \tag{28}$$

а из (27) и (28)

$$[1 - q(z)\overline{q(z)}]\frac{\partial u}{\partial \bar z} = Ku - q(z)\overline{Ku} + Th - q(z)\overline{Th} + \Psi(z) - q(z)\overline{\Psi(z)}. \tag{29}$$

Поскольку левая часть (29) стремится к нулю при $|z| \to 1$, будем иметь

$$\Psi(z) - q(z)\overline{\Psi(z)} = -Ku + q(z)\overline{Ku} - Th + q(z)\overline{Th} \quad \text{при } |z| = 1, \tag{30}$$

т. е. $\Psi(z)$ будет являться решением краевой задачи (4) при $F(z) = (-Ku - Th)_{|z|=1}$. Тогда согласно лемме 1

$$\Psi(z) = -BKu - BTh + X(z)\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu, \tag{31}$$

где $c_0, c_1, \cdots, c_m$ — некоторые комплексные числа, удовлетворяющие условию (12). Подставляя (31) в (27) и учитывая (24) и (25), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = Su + Rh + \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(z), \tag{32}$$

где

$$\alpha_\nu = \operatorname{Re} c_\nu \ \text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant \frac{m-1}{2}; \quad \alpha_\nu = \operatorname{Im} c_{\nu - \frac{m+1}{2}} \ \text{при } \frac{m+1}{2} \leqslant \nu \leqslant m, \tag{33}$$

$$h_\nu(z) = \begin{cases} [X(z)(z^\nu + z^{m-\nu}) - q(z)\bar X(z)(\bar z^\nu + \bar z^{m-\nu})][1 - q(z)\overline{q(z)}]^{-1} \\ \qquad \text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant \dfrac{m-1}{2} \\ [iX(z)(z^{\nu - \frac{m+1}{2}} - z^{\frac{3m+1}{2} - \nu}) + iq(z)\bar X(z)(\bar z^{\nu - \frac{m+1}{2}} - \\ - \bar z^{\frac{3m+1}{2} - \nu})](1 - q\bar q)^{-1} \quad \text{при } \dfrac{m+1}{2} \leqslant \nu \leqslant m. \end{cases} \tag{34}$$

Из (32) получим

$$u(z) = TSu + TRh + TH + \varphi(z), \tag{35}$$

где

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(z) = (1 - q\bar{q})^{-1}\left(X(z)\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu - q\bar{X}(z)\sum_{\nu=0}^{m} \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu\right) \tag{36}$$

и $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция.

Покажем, что она принадлежит классу $C^1_\alpha(|z| \leqslant 1)$. В самом деле, поскольку функция $X(z)\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu z^\nu$ является решением однородной краевой задачи (4), то второй множитель в (36) равен нулю при $|z| = 1$. Поэтому в силу леммы 2 $H(z) \in C_\alpha(|z| \leqslant 1)$.

Далее, в силу леммы 4 $Su \in C_\alpha(|z| \leqslant 1)$. Тогда из (35) следует, что $\varphi(z) \in C^1_\alpha(|z| \leqslant 1)$.

Теперь представим функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) - \frac{z^{2n+1}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\overline{Su}}{1 - z\bar{\zeta}}\, d\xi d\eta - \frac{z^{2n+1}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\overline{Rh}\, d\xi d\eta}{1 - z\bar{\zeta}} -$$

$$- \frac{z^{2n+1}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\bar{H}\, d\xi d\eta}{1 - z\bar{\zeta}}, \tag{37}$$

где $\varphi_0(z)$ — новая искомая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция. Подставляя выражение (37) в (35), получим, что функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u(z) - P_n Su = \varphi_0(z) + P_n Rh + P_n H, \tag{38}$$

где

$$P_n f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + z^{2n+1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}}\right] d\xi d\eta. \tag{39}$$

В силу свойства оператора (39) и леммы 4 линейный оператор $Af = P_n Sf$ вполне непрерывен в пространстве $C^1_\alpha(|z| \leqslant 1)$ и отображает его в себя [1].

Легко видеть, что для любой функции f из класса $C^1_\alpha(|z| \leqslant 1)$ выполняется равенство $\mathrm{Re}\,(z^{-n} P_n f) = 0$ при $|z| = 1$. Поэтому в силу (2*) из (38) следует

$$\mathrm{Re}\,[z^{-n}\varphi_0(z)] = 0 \text{ при } |z| = 1. \tag{40}$$

Подставляя в (38) вместо $\varphi_0(z)$ решение задачи Римана—Гильберта (40) получим

$$u - P_n Su = P_n Rh + \sum_{\nu=1}^{\sigma} \gamma_\nu H_\nu(z), \quad \sigma = m + 2n + 2, \tag{41}$$

где

$$H_\nu(z)=\begin{cases} P_n h_{\nu-1} & \text{при } 1\leqslant\nu\leqslant m+1 \\ z^{\nu-m-2}-z^{\sigma-\nu} & \text{при } m+2\leqslant\nu\leqslant m+n+1,\ n\geqslant 1 \\ i z^n & \text{при } \nu=m+n+2,\ n\geqslant 0 \\ i\left(z^{\nu-m-n-3}-z^{m+3n+3-\nu}\right) & \text{при } m+n+3\leqslant\nu\leqslant\sigma,\ n\geqslant 1 \end{cases} \tag{42}$$

и $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$ — некоторые вещественные числа. Итак, решение задачи (1)—(2*) удовлетворяет уравнению (41) при соответственно выбранных вещественных $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$. Легко проверить, что справедливо и обратное утверждение: если функция $u(z)\in C_\alpha^1(|z|\leqslant 1)\cap$ $\cap\, C^2(|z|<1)$ удовлетворяет уравнению (41) при произвольно заданных вещественных числах $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$, то она является решением задачи (1)—(2*).

Случай II: $m\geqslant -1$, $n<0$. Как и выше ограничимся случаем нечетных $m>-1$. Пусть функция $u(z)$ — произвольное решение задачи (1)—(2*). Тогда она будет удовлетворять уравнению (32), умножением которого на z^k $(k=-n)$, получаем

$$\frac{\partial (z^k u)}{\partial \bar z} = z^k Su + z^k Rh + z^k \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(z).$$

Отсюда, как и в случае I, будем иметь

$$z^k u = P_0(z^k Su) + P_0(z^k Rh) + P_0\left[z^k \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(z)\right] + i\beta,$$

где β — некоторое вещественное число, а $P_0 f$ определяется по формуле (39). Последнее равенство можно представить в виде (см. [1], стр. 298)

$$u - P_k^* Su = P_k^*\left(\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu\right) + \sum_{j=1}^{k} B_j\left(Su + Rh + \sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu h_\nu\right) z^{-j}, \tag{43}$$

где

$$P_k^* f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \bar\zeta^{2k-1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{1 - z\bar\zeta}\right] d\xi d\eta, \tag{44}$$

$$B_j(f)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\zeta^{j-1} f(\zeta) + \bar\zeta^{2k-j-1}\overline{f(\zeta)}\right] d\xi d\eta & \text{при } 1\leqslant j\leqslant k-1 \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint\limits_{|\zeta|<1}\zeta^{k-1} f(\zeta)\, d\xi d\eta + j\beta & \text{при } j=k. \end{cases} \tag{45}$$

Согласно лемме 4 и известному свойству оператора P_k^*, оператор $P_k^* S$ вполне непрерывен в пространстве $C_\alpha^1(|z|<1)$ и отображает его в себя [1].

Поскольку $u(z) \in C^1_\alpha(|z| \leqslant 1)$, то из (43) следует, что

$$B_j\left(Su + Rh + \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k-1 \\ -j\beta & \text{при } j = k, \end{cases} \tag{46}$$

и следовательно

$$u - P_k^* Su = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu P_k^* h_\nu. \tag{47}$$

Таким образом, каждое решение задачи (1)—(2*) удовлетворяет функциональным уравнениям (46) для некоторых вещественных чисел β и $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ и операторному уравнению (47) для тех же чисел $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$.

Непосредственной проверкой можно убедиться также в *обратном*: если для произвольно заданных вещественных чисел β и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ $\cdots, \alpha_m$ функция $u(z) \in C^1_\alpha(|z| \leqslant 1) \cap C^2(|z| < 1)$, удовлетворяющая равенствам (46), является решением уравнения (47), то она будет также решением задачи (1)—(2*).

Случай III: $m < -1$, $n \geqslant 0$. Пусть функция $u(z)$ есть решение задачи (1)—(2*). Тогда она будет удовлетворять уравнению (29) и следовательно задача (30) будет разрешимой. В таком случае необходимо будут выполняться равенства

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^\nu (Ku - q\overline{Ku})}{X^+(t)} dt = -\int\limits_{|t|=1} \frac{t^\nu (Th - q\overline{Th})}{X^+(t)} dt, \quad \nu = 0, 1, \cdots, -m-2, \tag{48}$$

и функция $u(z)$ будет удовлетворять уравнению

$$u - P_n Su = \sum_{\nu=0}^{2n} \beta_\nu q_\nu(z) \tag{49}$$

для некоторых вещественных чисел $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{2n}$, где

$$q_\nu(z) = \begin{cases} z^\nu - z^{2n-\nu} & \text{при } 0 \leqslant \nu \leqslant n-1, \ n \geqslant 1 \\ iz^n & \text{при } \nu = n, \ n \geqslant 0 \\ i(z^{\nu-n-1} + z^{3n-1-\nu}) & \text{при } n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{50}$$

В этом случае тоже легко проверить, что имеет место и обратное утверждение: если функция $u(z) \in C^1_\alpha(|z| \leqslant 1) \cap C^2(|z| < 1)$, удовлетворяющая равенствам (48), является решением уравнения (49) для произвольно заданных вещественных чисел $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{2n}$, то она будет и решением задачи (1)—(2*).

Случай IV: $m < -1$, $n < 0$. С помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным, легко получаем:

если функция $u(z)$ является решением задачи (1)—(2*), то имеют место равенства (48), равенства

$$B_j(Su+Rh)=\begin{cases} 0 & \text{при } 1\leqslant j\leqslant k-1 \\ -i\beta & \text{при } j=k, \end{cases} \tag{51}$$

где $k=-n$, β — некоторое вещественное число, и функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$u-P_b^* Su=0. \tag{52}$$

Обратно — если функция $u(z)\in C_\alpha^1(|z|\leqslant 1)\cap C^2(|z|<1)$, удовлетворяющая равенствам (48) и (51) для произвольно заданного вещественного числа β, является решением уравнения (52), то она будет также решением задачи (1)—(2*).

§ 2. Об индексе задачи (1)—(2*)

Как было показано в случае I, задача (1) — (2*) эквивалентна уравнению (41). Легко убедиться, что функции $H_1(z), H_2(z),\cdots, H_\sigma(z)$, входящие в уравнение (41), линейно независимы. Здесь и в дальнейшем линейная зависимость и независимость понимаются относительно поля вещественных чисел.

Пусть линейные функционалы $v_1, v_2,\cdots, v_\tau$, определенные в пространстве $C_\alpha^1(|z|\leqslant 1)$, составляют полную систему линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения, соответствующего уравнению (41).

Тогда для разрешимости уравнения (41) необходимо и достаточно, чтобы $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma)$ являлось решением системы

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} v_j(H_\nu)\gamma_\nu=-v_j(P_n Rh),\ j=1, 2,\cdots, \tau. \tag{53}$$

Для разрешимости же системы (53) необходимы и достаточны следующие условия:

$$\sum_{\nu=1}^{\tau} v_\nu(P_n Rh)\beta_\nu^{(j)}=0,\ j=1, 2,\cdots, \tau-r, \tag{54}$$

где $(\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)},\cdots, \beta_\tau^{(j)})$, $j=1, 2,\cdots, \tau-r$ является полной системой линейно независимых решений сопряженной однородной системы, соответствующей системе (53), а $r=\mathrm{Rang}\,\|v_j(H_\nu)\|$.

Предположим, что свободными из $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\sigma$ являются $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,\cdots, \gamma_{\sigma-r}$. Выражая остальные через эти и подставляя в (41), получим

$$u-P_n Su=P_n Rh+\sum_{\nu=1}^{\sigma-r} H_\nu^*\cdot\gamma_\nu, \tag{55}$$

где H_ν^*, $\nu=1, 2,\cdots, \sigma-r$ есть определенная линейная комбинация функций $H_\nu, H_{\sigma-r+1}, \cdots, H_\sigma$. Очевидно функции $H_1^*, H_2^*, \cdots, H_{\sigma-r}^*$ также будут линейно независимыми.

Легко видеть, что общее решение уравнения (55) будет иметь вид

$$u = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \cdots + \delta_\tau u_\tau + u_0 + \gamma_1 u_1^* + \cdots + \gamma_{\sigma-r} u_{\sigma-r}^*, \qquad (56)$$

где $u_1, u_2, \cdots, u_\tau$ — полная система линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, $u_0, u_1^*, \cdots, u_{\sigma-r}^*$ являются частными решениями неоднородных уравнений типа (55) соответственно с правыми частями $P_n Rh,\ H_1^*, \cdots, H_{\sigma-r}^*$. Очевидно, что линейно независимых решений однородной задачи (1) — (2*) ($h(z)=0$) будет $\tau + \sigma - r$, а число линейно независимых условий, наложенных на функцию $h(z)$ (см. (54)) меньше или равно $\tau - r$. Отсюда для индекса $\varkappa$ задачи (1)—(2*) при $m \geqslant -1$, $n \geqslant 0$ получаем оценку

$$\varkappa \geqslant m + 2n + 2. \qquad (57)$$

Аналогичными рассуждениями в остальных случаях легко получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\varkappa \geqslant m + n + 2 \quad \text{при} \quad n < 0, \\ &\varkappa \geqslant m + 2n + 3 \ \text{при} \ m < -1,\ n \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (58)$$

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.I.1975

Ս. Կ. ԱՓՅԱՆ. Ռիմանի-Հիլբերտի եզրային խնդիրը վերածվող էլիպտական երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի համար *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի համար։ Բերված է այդ խնդիրը u+Au=f *տեսքի հավասարման, որտեղ* A*-ն լիովին անընդհատ օպերատոր է։ Հնարավոր դեպքերից մեկում խնդրի ինդեքսի համար ստացված է բանաձև, իսկ մնացած դեպքերում — գնահատականներ։*

S. K. AFIAN. *The Rieman—Hilbert boundary problem for a class of elliptical differential equations of the second order with degeneration* (summary)

In the paper the Rieman—Hilbert problem for a class of elliptical systems of differential equations of the second order with degeneration on the boundary is considered. This problem is reduced to the equation $u - Au = f$ where A is a complitely continuous operator. For the index of the same problem a formula is obtained in one of the possible cases and in all other cases evaluations are made.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
2. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
3. *С. К. Афян.* Задача Римана –Гильберта для одного класса вырождающихся на границе области эллиптических систем дифференциальных уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 4, 1973, 322 –328.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

ДО КОНГ ХАНЬ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ, РЕАЛИЗУЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

1°. Известно, что мультипликативные представления J-нерастягивающих оператор-функций играют большую роль в теории операторных узлов и линейных систем. С их помощью были построены и изучены модели широких классов операторов [2, 7].

В связи с открытием М. М. Джрбашяном [3—5] новых классов мероморфных функций, возникает вопрос об их интерпретации с точки зрения линейных систем.

В работах [1, 6] в рамках теории линейных узлов даются реализации некоторых классов мероморфных функций М. М. Джрбашяна. Настоящая работа продолжает исследование этих работ, она посвящена изучению операторов, реализующих функции классов D_p $(p = 0, 1, 2, \cdots)$. В работе показано, что операторы, дающие реализацию предельных множителей и конечных произведений элементарных множителей Джрбашяна будут ограниченными. Операторы, реализующие бесконечные произведения классов D_p $(p > 0)$ при условии $\sum (1-|\zeta_k|) = \infty$, оказываются неограниченными, однако можно ввести новую метрику, в которой эти операторы становятся ограниченными. В работе исследуются также резольвента и спектр соответствующих операторов.

2°. Мы приведем здесь некоторые определения и результаты из [1, 6], необходимые для дальнейшего.

Определение 1: Совокупность L, состоящая из двух линейных пространств H, E и четырех линейных операторов T; $H \to H$; Φ: $E \to H$; Ψ: $H \to E$; K: $E \to E$ называется линейным узлом, а оператор-функция

$$W(z;\ L) = K + z\Psi\ (I - zT)^{-1}\ \Phi\colon\ E \to E. \tag{0.1}$$

называется передаточной функцией узла L.

Если пространства гильбертовы, а операторы непрерывны и $\dim E = l$, a — орт в E, то $\Phi(ua) = uq$, $\Psi x = (x, p)\,a$, $K(ua) = uka$ $(q, p, x \in H;\ k, u \in E)$. В этом случае будем писать $L = (T, H, q, p, E, k)$. Передаточная функция имеет вид:

$$W(z;\ L) = k + z\,((I - zT)^{-1}\,q,\ p).$$

Определение 2: Будем говорить, что линейный узел L является реализацией заданной в единичном круге функции $f(z)$, если $f(z)$ совпадает с передаточной функцией узла L.

Функция $F(z) \in D_p$ допускает представление [5, 6]

$$F(z) = Cz^n \frac{\pi_p(z;\ a_k)}{\pi_p(z;\ b_k)} S(z),$$

где

$$\pi_p(z;\ \zeta_k) = \prod_{k=1}^{\infty} M_p(z;\ \zeta_k),$$

$$M_p(z;\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} \frac{(1-|\zeta|^2)^j}{j} \left| \frac{2}{(1-\bar{\zeta} z)^j} - 1 \right| \right\}, \qquad (0.2)$$

$$S(z) = \exp\left\{\frac{2p}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{p-1} \frac{\log |F(\rho e^{i\theta})|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{p+1}} \rho\, d\rho d\theta \right\}. \qquad (0.3)$$

Здесь произведение $\pi_p(z;\ \zeta_k)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\zeta_k|)^{p+1} < \infty,\ 0 < |\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}| < 1.$$

В работе рассматриваются последовательности, удовлетворяющие этому условию.

Множитель $M_p(z;\ \zeta)$ вида (0.2) (с точностью до постоянного множителя) был введен М. М. Джрбашяном [5].

Учитывая, что

$$\frac{2}{(1-\bar{\zeta}z)^j} - 1 = \frac{1+\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z} + \sum_{k=2}^{j} \frac{2\,\bar{\zeta} z}{(1-\bar{\zeta}z)^k}, \qquad (0.4)$$

представим $M_p(z;\ \zeta)$ в виде

$$M_p(z;\ \zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp\left\{\frac{1}{2} e_1(\zeta) \frac{1+\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z} + \sum_{k=2}^{p} e_k(\zeta) \frac{\bar{\zeta} z}{(1-\bar{\zeta} z)^k}\right\}, \quad (0.5)$$

где

$$e_k(\zeta) = \sum_{i=k}^{p} \frac{(1-|\zeta|^2)^i}{i}. \qquad (0.6)$$

Приведем известные [1,6] реализации элементарных множителей, которые нам понадобятся в дальнейшем.

а) Функция $\exp\left\{\frac{1}{2} e_1(\zeta) \frac{1+\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z}\right\}$ реализуется узлом [1]

$$H_1(\zeta) = L^2\left(0,\ \frac{1}{2} e_1(\zeta)\right),\ E = C_1,$$

$$[T_1(\zeta) f](x) = \bar{\zeta} f(x) + 2\bar{\zeta} \int_0^x \exp(x-t) f(t)\, dt, \tag{0.7}$$

$$q_1(\zeta) = \exp x;\ p_1(\zeta) = 2\bar{\zeta} \exp\left(\frac{1}{2} e_1(\zeta) - x\right);\ k_1(\zeta) = \exp \frac{1}{2} e_1(\zeta).$$

Этот узел будем обозначать через $L(\zeta)$.

b) Множитель $\exp\left\{e_1(\zeta)\dfrac{\bar{\zeta} z}{(1-\bar{\zeta} z)^k}\right\}$ может быть реализован следующим узлом $L_k(\zeta)$ $(k = 2, 3, \cdots, p)$:

$$H_k(\zeta) = L^2(R^k, [0, e_k(\zeta)], E = C_1,$$

$$[T_k(\zeta) f](x) = Bf(x) + \int_0^x (f(t), p_0)_{R^k} q_0\, dt, \tag{0.8}$$

$$q_k(\zeta) = q_0,\ p_k(\zeta) = p_0,\ k_k(\zeta) = 1,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} & \bar{\zeta} & \cdots & \bar{\zeta} \\ 0 & \bar{\zeta} & \cdots & \bar{\zeta} \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\zeta} \end{pmatrix},\ q_0 = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ \bar{\zeta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix},\ p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.9}$$

Несущественное отличие выражений (0.8) и (0.9) от соответствующих формул в работе [6] вызвано принятым нами определением (0.1) передаточной функции $W(z; L)$, в то время как Л. Меграбян [6] исходит из функции $S(z; L) = W(z^{-1}; L)$.

c) Множитель Бляшке $\dfrac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta} z}\dfrac{|\zeta|}{\zeta}$ реализуется узлом $L_{p+1}(\zeta)$

$$H_{p+1}(\zeta) = E = C_1;\ T_{p+1}(\zeta) f = \bar{\zeta} f, \tag{0.10}$$

$$q_{p+1}(\zeta) = \sqrt{1-|\zeta|^2};\ p_{p+1}(\zeta) = -\frac{|\zeta|}{\zeta}\sqrt{1-|\zeta|^2};\ k_{p+1}(\zeta) = |\zeta|.$$

§ 1. Сцепление линейных узлов

Пусть имеются N $(N \leqslant \infty)$ узлов $L^{(n)} = (T^{(n)}, H^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n)}, E, K^{(n)})$, $(n = 1, 2, \cdots, N)$ с общим внешним одномерным пространством $E = C_1$. Пусть далее $H^{(n)}$ — гильбертовы пространства с метриками $(\cdot\,,\cdot)_n$ и сходится произведение $\prod_{n=1}^{N} k^{(n)}$. Тогда, применяя правило сцепления узлов, введенное в [1], можем образовать узлы:

$$L = L^{(1)} \vee L^{(2)} \vee \cdots \vee L^{(N)} = (T, X, q, p, E, k), \tag{1.1}$$

$$\widetilde{L} = L^{(N)} V \cdots V L^{(2)} V L^{(1)} = (\widetilde{T}, \widetilde{X}, \widetilde{q}, \widetilde{p}, E, \widetilde{k}). \tag{1.2}$$

Пространства X и $\widetilde{X}$ представляют линейное многообразие элементов вида $\{x_n\}_{n=1}^{N} = (X_1, X_2, \cdots, X_N)$, где $x_n \in H^{(n)}$. В случае $N < \infty$ мы будем считать, что $X = \widetilde{X} = \bigoplus_{n=1}^{N} H^{(n)}$ (см. [1]), а когда $N = \infty$ будем рассматривать X как линейное пространство.

Лемма 1.1. *Операторы T, $\widetilde{T}$, элементы q, p, $\widetilde{q}$, $\widetilde{p}$ и числа k, $\widetilde{k}$ определяются следующими равенствами:*

$$(TX)_n = T^{(n)} X_n + q^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1} (x_k, p^{(k)})_k \prod_{s=k+1}^{n-1} k^{(s)}, \tag{1.3}$$

$$q = \left\{ q^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}, \quad p = \left\{ p^{(n)} \prod_{s=n+1}^{N} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}, \tag{1.4}$$

$$k = \widetilde{k} = \prod_{s=1}^{N} k^{(s)},$$

$$(\widetilde{T} X)_n = T^{(n)} x_n + q^{(n)} \sum_{k=n+1}^{N} (x_k, p^{(k)})_k \prod_{s=n+1}^{k-1} k^{(s)}, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{q} = \left\{ q^{(n)} \prod_{s=n+1}^{N} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}, \quad \widetilde{p} = \left\{ p^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)} \right\}_{n=1}^{N}. \tag{1.6}$$

Отсюда видно, что оператор Ψ, который определяется по формуле

$$\Psi x = a \sum_{k=1}^{N} (x_k, p_k)_k \equiv a\,(x, p), \tag{1.7}$$

определен только на векторах x, для которых сходится ряд в правой части (1.7). А операторы $\widetilde{T}$ и $\widetilde{\Psi}$ определены на векторах x, для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n, \widetilde{p}_n)_n. \tag{1.8}$$

Найдем формулы для операторов $(zI - T)^{-1}$ и $(zI - \widetilde{T})^{-1}$. Пусть $(zI - T)^{-1} x = f$, тогда

$$(zI - T^{(n)}) f_n - q^{(n)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(f_k, p^{(k)} \prod_{s=k+1}^{n-1} k^{(s)} \right)_k = x_n. \tag{1.9}$$

Обозначая через y_n сумму

$$y_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f_k,\ p^{(k)}\prod_{s=k+1}^{n-1}k^{(s)}\right)_k, \tag{1.10}$$

будем искать решение y_n в виде $y_n=v_n B(z;\ n)$, где

$$B(z;\ n)=\prod_{l=1}^{n-1}W(z^{-1};\ L^{(l)}). \tag{1.11}$$

Учитывая (1.9)—(1.11) и соотношение $y_n-y_{n-1}k_{n-1}=(f_{n-1},\ p^{(n-1)})$, получим

$$f_n=(zI-T^{(n)})^{-1}x_n+$$

$$+(zI-T^{(n)})^{-1}q^{(n)}\sum_{k=1}^{n-1}((zI-T^{(k)})^{-1}x_k,\ p^{(k)})_k\,B(z;\ k+1,\ n), \tag{1.12}$$

где

$$B(z;\ k+1,\ n)=\prod_{s=k+1}^{n-1}W(z^{-1};\ L^{(s)}).$$

Аналогично для $(zI-\tilde{T})^{-1}x=g$ мы имеем

$$g_n=(zI-T^{(n)})^{-1}x_n+$$

$$+(zI-T^{(n)})^{-1}q^{(n)}\sum_{k=n+1}^{N}((zI-T^{(k)})^{-1}x_k,\ p^{(k)})_k\,B(z;\ n+1,\ k). \tag{1.13}$$

Имеет место

Предложение 1.1. *Пусть* $z\bar{\in}\sigma(T^{(n)})$ *и сходится произведение* $\prod_{n=1}^{N}W(z;\ L^{(n)})$, *тогда* $(I-z\tilde{T})^{-1}\tilde{q}\in D(\Psi)$ *и* $(I-z\tilde{T})^{-1}\tilde{q}\in D(\Psi)$ *и имеет место соотношение*

$$W(z,\ L)=W(z;\ \tilde{L})=\prod_{n=1}^{N}W(z;\ L^{(n)}).$$

Доказательство. В случае $N<\infty$ эти утверждения очевидны, они вытекают из теоремы умножения передаточных функций ([1], теорема 1). Итак, пусть $N=\infty$ и $(I-zT)^{-1}q=y$, имеем

$$(I-zT^{(n)})\,y_n-zq^{(n)}\sum_{k=1}^{n-1}(y_k,\ p^{(k)})_k\prod_{s=k+1}^{n-1}k^{(s)}=q^{(n)}\prod_{s=1}^{n-1}k^{(s)}. \tag{1.14}$$

Откуда, если $q^{(n)}=0$, то $y_n=0$ $(z\bar{\in}\sigma(T^{(n)}))$. Будем искать решение y_n (для тех n, для которых $q^{(n)}\neq 0$) в виде

$$y_n=(I-zT^{(n)})^{-1}q^{(n)}\prod_{s=1}^{n-1}k^{(s)}\cdot v_n. \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в (1.14) и учитывая, что $q^{(n)} \neq 0$, имеем

$$v_n - z \sum_{s=1}^{n-1} ((I - z\,T^{(s)})^{-1} q^{(s)},\ p^{(s)})_s \frac{v_s}{k^{(s)}} = 1, \tag{1.16}$$

откуда получим

$$v_n = \left[\prod_{s=1}^{n-1} k^{(s)}\right]^{-1} \prod_{s=1}^{n-1} W(z;\ L^{(s)}), \tag{1.17}$$

и

$$y_n = (I - z\,T^{(n)})^{-1}\ q^{(n)} \prod_{s=1}^{n-1} W(z;\ L^{(s)}). \tag{1.18}$$

Из (1.15) и (1.4) имеем

$$(y,\ p) = k \sum_{k=1}^{\infty} ((I - z\ T^{(k)})^{-1}\ q^{(k)},\ p^{(k)})_k\ \frac{v_k}{k^{(k)}}\cdot \tag{1.19}$$

Отсюда и из (1.16) при $n \to \infty$ получим

$$(y,\ p) = \frac{1}{z}(k\,v_\infty - 1),$$

что вместе с определением 1 передаточной функции дает доказательство предложения 1.1 для L. Аналогично доказываются утверждения, относящиеся к узлу $\tilde{L}$.

§ 2. Свойства операторов, реализующих произведение Джрбашяна класса D_p

1°. Чтобы получить реализацию для элементарного множителя $M_p(z;\ \zeta)$ вида (0.5) достаточно взять сцепление:

$$L(\zeta) := L_1(\zeta) \vee L_2(\zeta) \vee \cdots \vee L_{p+1}(\zeta) \equiv (T(\zeta),\ H(\zeta),\ q(\zeta),\ p(\zeta),\ E,\ k(\zeta)), \tag{2.1}$$

где $L_k(\zeta)$ $(k = 1,\ 2, \cdots,\ p+1)$ определены по (0.7)—(0.10), пространство $H(\zeta)$ гильбертово $\left(H(\zeta) = \bigoplus_{k=1}^{p+1} H_k(\zeta)\right)$.

Для оператора $T(\zeta)$ узла (2.1) справедливы следующие простые предложения, доказательство которых следует из явного вида оператора.

Лемма 2.1. а) *Существует число C, не зависящее от ζ $(|\zeta| < 1)$ такое, что*

$$\|T(\zeta)\| \leqslant C.$$

б) *Спектр оператора $T(\zeta)$ состоит из единственной точки $\bar{\zeta}$. Точка $\bar{\zeta}$ является одновременно собственным значением и су-*

щественной особой точкой резольвенты $(zI - T(\zeta))^{-1}$. *Собственные элементы оператора* $T(\zeta)$ *имеют вид* $(0, 0, \cdots, h_{p+1})$, *где* $h_{p+1} \in H_{p+1}(\zeta)$.

в) *Пусть* ζ *пробегает множество* M *точек из круга* $|\zeta| < 1$, *и точка* z *не принадлежит замыканию множества сопряженных точек* $\bar{\zeta}$ $(\zeta \in M)$, *тогда существует число* A, *не зависящее от* ζ, *такое, что*

$$\|zI - T(\zeta))^{-1}\| \leqslant A.$$

г) *При* $p > 0$ *область значений оператора* $\bar{\zeta} I - T(\zeta)$ *плотна в* $H(\zeta)$.

2°. Приступаем к рассмотрению оператора, реализующего произведение М. М. Джрбашяна. Согласно теореме умножения передаточных функций (предложение 1.1), произведение $\pi_p(z; \zeta_k)$ имеет реализации

$$L = \bigvee_{n=1}^{\widehat{\infty}} L(\zeta_n), \quad \tilde{L} = \bigvee_{n=1}^{\widehat{\infty}} L(\zeta_n). \tag{2.2}$$

Составляющие элементы узлов L и $\tilde{L}$ выражаются по (1.3) – (1.6), но вместо узлов $L^{(n)}$ надо взять $L(\zeta_n)$. Основные пространства X и $\tilde{X}$ представляют пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in \in H(\zeta_n))$. Мы будем считать как и в $n°\,1$, что пространства $H(\zeta_n)$ снабжены гильбертовыми метриками. Обозначим через H пространство последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \in H(\zeta_n))$ с нормой $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty$, и будем изучать свойства операторов T, $\tilde{T}$ узлов L, $\tilde{L}$ в этом пространстве H. Как было показано в п. 1 точка $\bar{\zeta}$ есть точка спектра оператора $T(\zeta)$. Введем обозначчние

$$\Lambda = \{\bar{\zeta}_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2.3}$$

Имеет место предложение.

Лемма 2.2. *Пусть* $z \in \bar{\Lambda}$ *(замыкание множества* Λ*) и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) = \infty, \tag{2.4}$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)\|^2 = \infty, \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(\bar{z} I - T^*(\zeta_n))^{-1} p(\zeta_n)\|^2 = \infty. \tag{2.6}$$

Доказательство. Докажем сначала (2.5). Если рассматривать $L(\zeta_n)$ как сцепление $(p+1)$ узлов, то формула (1.18) дает

$$[(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)]_k = (zI - T_k(\zeta_n))^{-1} q_k(\zeta_n) v_k(\zeta_n; z), \tag{2.7}$$

где

$$v_k(\zeta_n; z) = \prod_{s=1}^{k-1} W(z^{-1}; L_s(\zeta_n)).$$

В силу сходимости произведения Джрбашяна $\lim\limits_{|\zeta_n| \to 1} |v_k(\zeta_n; z)| = 1.$ Так как $z \overline{\in} \Lambda$, то $|(z-\bar{\zeta}_k)^{-1}| > C$, где C не зависит от ζ_k. Тогда из (2.7) имеем

$$\|(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)\|^2_{H(\zeta_n)} \geqslant \|[(zI - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n)]_{p+1}\|^2_{H_{p+1}(\zeta_n)} =$$

$$= |(z - \bar{\zeta}_n)^{-1}|^2 (1 - |\zeta_n|^2) |v_{p+1}(\zeta_n; z)|^2 \geqslant C' (1 - |\zeta_n|)\cdot$$

Отсюда следует (2.5). Равенство (2.6) доказывается аналогично.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) = \infty,$$

тогда

1) *Каналовые векторы p, q и $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ соответственно узлов L и $\tilde{L}$ не принадлежат H.*

2) *Операторы T и $\tilde{T}$ неограничены и их области определения плотны в H, и спектр каждого из них покрывает всю комплексную плоскость.*

Доказательство 1. Учитывая (0.5)—(0.8) и (1.3), имеем

$$\|q(\zeta_n)\|^2_{H(\zeta_n)} = \frac{1}{2}[\exp e_1(\zeta_n) - 1] + (1 - |\zeta_n|^2) \exp e_1(\zeta_n) -$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} k |\zeta_n|^2 e_k(\zeta_n) \exp e_1(\zeta_n), \tag{2.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q(\zeta_n)\|^2_n \prod_{l=1}^{n-1} k^2(\zeta_l) > C \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|).$$

Последнее неравенство следует из (2.8) и из сходимости произведения $\prod\limits_{l=1}^{\infty} k^2(\zeta_l)$. Значит $q \overline{\in} H$. Для p, $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ доказательство аналогично.

2. Оператор $\tilde{T}$ определен на плотном множестве элементов вида

$$(x_1, x_2, \cdots, x_N, 0, 0, \cdots) \quad \forall N < \infty. \tag{2.9}$$

Оператор T определен на векторах вида (2.9) с дополнительным условием

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k,\ p_k)_k = 0, \tag{2.10}$$

где $p_k = p(\zeta_k) \prod\limits_{l=k+1}^{\infty} k(\zeta_l)$ — k-ая компонента вектора p. Если некоторый вектор $y \in H$ ортогонален ко всем векторам вида (2.9) и (2.10), то он должен иметь вид $y = cp$. С другой стороны, как было показано в 1) вектор p не принадлежит H, следовательно $c = 0$, значит $y = 0$.

Пусть $z \overline{\in} \bar{\Lambda}$, резольвенту $(zI - T)^{-1}$, в силу (1.12), можно рассматривать как сумму двух операторов, первый из которых ограничен в силу леммы 2.1 (в). Поэтому достаточно рассматривать второй оператор, который обозначаем через $R_2(z,\ T)$.

Полагая $\dot{x} = (x_1, 0, \cdots)$, где x_1 удовлетворяет условию

$$s = ((zI - T(\zeta_1))^{-1} x_1,\ p(\zeta_1)) \neq 0,$$

имеем

$$[R_2(z,\ T)\dot{x}]_n = s\,(zI - T(\zeta_n))^{-1}\, q(\zeta_n)\, B(z;\ 2,\ n).$$

В силу сходимости $B(z;\ 2,\ n)$ из леммы 2.2 следует, что вектор $\dot{x}$ не принадлежит области определения оператора $R_2(z,\ T)$. Таким образом, мы показали, что $z \in \sigma(T)$, значит

$$C \setminus \bar{\Lambda} \subset \sigma(T).$$

С другой стороны, поскольку множество $\bar{\Lambda}$ нигде не плотно в C, то из замкнутости спектра мы получим $C = \sigma(T)$. Что касается $\tilde{T}$, то из (1.13) и леммы 2.2 (формула 2.6) можно показать, что $(zI - \tilde{T})^{-1}$ также неограничен при $z \overline{\in} \bar{\Lambda}$, следовательно $C = \sigma(\tilde{T})$. Так как спектры $\sigma(T)$ и $\sigma(\tilde{T})$ покрывают всю плоскость, то операторы T и $\tilde{T}$ неограничены. Теорема доказана.

Следующая теорема дает более точную характеристику спектров операторов T и $\tilde{T}$. Для этого обозначим через $P_\sigma(A)$ и $C_\sigma(A)$ соответственно точечный и непрерывный спектры оператора A в смысле [13].

Теорема 2.2. *Пусть* $\sum (1 - |\zeta_n|) = \infty$, *тогда*

$$1.\qquad P_\sigma(\tilde{T}) = \Lambda,\ C_\sigma(\tilde{T}) = C \setminus \Lambda, \tag{2.11}$$

$$2.\qquad C_\sigma(T) \supset C \setminus \Lambda. \tag{2.12}$$

Если последовательность ζ_n такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{m} \left[M_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_m};\ \zeta_k\right) - M_p(0;\ \zeta_k) \right] \prod_{l=k+1}^{\infty} M_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_m};\ \zeta_l\right) + 1 \neq 0, \tag{2.13}$$

где $\sum^m$ обозначает сумму с пропущенным m-ым членом, элементарный множитель Джрбашяна, определяющийся по (0.2), то

$$\bar{\zeta}_m \in C_0(T). \tag{2.14}$$

Таким образом, если (2.13) имеет место для всех натуральных m, то

$$C = C_0(T). \tag{2.15}$$

Замечание. Ряд (2.13) сходится в силу сходимости произведения М. М. Джрбашяна.

Доказательство. Соотношения (2.11) следуют из формулы сцепления (1.5) и того, что $\bar{\zeta}_n$ есть собственное значение оператора $T(\zeta_n)$.

2. Для $z \in \Lambda$ неограниченный оператор $(zI - T)^{-1}$ определен на векторах вида (2.9) с дополнительным условием

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k,\ s_k)_k = 0,$$

причем

$$s_k = (\bar{z} I - T^*(\zeta_k))^{-1} p(\zeta_k)\ B(z;\ k+1,\ \infty).$$

В силу леммы 2.2 и сходимости $B(z;\ k+1,\ \infty)$ последовательность $s = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ не принадлежит H, тогда как в теореме 2.1 получим, что область определения оператора $(zI - T)^{-1}$ плотна в H.

Докажем теперь (2.14). Решение уравнения $(\bar{\zeta}_m I - T)\, x = y$ имеет вид

$$x_n = \begin{cases} (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1} y_n + \\ \quad + (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n) \sum\limits_{k=1}^{n-1} ((\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_k))^{-1} y_k,\ p(\zeta_k))_k \times \\ \qquad \times B(\bar{\zeta}_m;\ k+1,\ n), \quad (n < m) \\ (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1}\ y_n + (\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1} \times \\ \quad \times \sum\limits_{k=1}^{n-1}{}^{m} ((\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_k))^{-1} y_k,\ p(\zeta_k))_k\, B(\bar{\zeta}_m;\ k+1,\ n) + \\ \quad + A(\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_n))^{-1} q(\zeta_n) \prod\limits_{s=m+1}^{n-1} k(\zeta_s) \Big[1 + \\ \quad + \sum\limits_{k=1}^{n-1}{}^{m} ((\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_k))^{-1} q(\zeta_k),\ p(\zeta_k))_k\, B(\bar{\zeta}_m;\ k+1,\ n) \Big], \\ \qquad (n > m) \end{cases} \tag{2.16}$$

где

$$A = (x_m,\ p(\zeta_m)).$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, в силу (2.13) сходится к некоторому отличному от нуля числу. Следовательно, если $y = 0$, то $A = 0$, иначе $x \overline{\in} H$. В случае $y = 0$ x_m будет собственным вектором оператора $T(\zeta_m)$, тогда в силу общего вида собственного вектора (лемма 2.1) и $A = 0$ следует $x_m = 0$, таким образом $x = 0$.

Докажем плотность области определения оператора $(\bar{\zeta}_m I - T)^{-1}$. Действительно, этот оператор определен на векторах вида (см. (2.16))

$$y = (y_1,\ y_2, \cdots,\ y_N,\ 0,\ 0, \cdots),\ \forall N < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{N}{}^{m} (y_k,\ (\bar{\zeta}_m I - T^*(\zeta_k))^{-1} p(\zeta_k))_k\, B(\bar{\zeta}_m;\ k+1,\ \infty) = 0, \tag{2.17}$$

и y_m взята из области значений оператора $(\bar{\zeta}_m I - T(\zeta_m))$, которая сама плотна в $H(\zeta_m)$ по лемме 2.1 (в рассматриваемом случае $p > 0$, поэтому лемма 2.1 применима). Следует отметить также, что вектор $x = (\bar{\zeta}_m I - T)^{-1} y$ в этом случае имеет вид

$$x = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_N,\ 0, \cdots),$$

а компонента x_n должна удовлетворять условию

$$(x_m,\ p(\zeta_m)) = 0.$$

Совокупность векторов (2.17), в силу леммы 2.2, будет плотна в H, теорема доказана.

Теорема 2.3. *Если*

$$\sum_{m=1}^{\infty} (1 - |\zeta_m|) < \infty,$$

то операторы T и $\tilde{T}$ ограничены и

$$\sigma(T) = P_\sigma(T) \cup C_\sigma(T) = \bar{\Lambda} = \sigma(\tilde{T}) = P_\sigma(\tilde{T}) \cup C_\sigma(\tilde{T}),$$

$$P_\sigma(T) = P_\sigma(\tilde{T}) = \Lambda.$$

Доказательство. Из (2.8), учитывая (0.5), мы получим

$$\|q(\zeta_n)\|^2_{H(\zeta_n)} \leqslant C(1 - |\zeta_n|), \tag{2.18}$$

C не зависит от ζ_n. Отсюда $q \in H$ (из условия теоремы), аналогичным образом имеем также $p,\ \tilde{q},\ \tilde{p} \in H$.

Из формул сцеплений (1.3), (1.5) и (2.18), а также из условия теоремы следует ограниченность операторов T и $\tilde{T}$. Пусть $z \in \bar{\Lambda}$, тогда с помощью (1.12)—(1.13), леммы 2.1 и условия теоремы нетрудно показать ограниченность операторов $(zI-T)^{-1}$ и $(zI-\tilde{T})^{-1}$, т. е. $z\in\rho(T)$ и $z\in\rho(\tilde{T})$.

То, что $\zeta_m\in P_\sigma(\tilde{T})$ очевидно, а $\zeta_m\in P_\sigma(T)$ следует из (2.16) и условия теоремы. Таким образом

$$\sigma(T)=\overline{\Lambda}=\sigma(\tilde{T}),$$

а предельная точка множества Λ (если она имеется), очевидно, принадлежит непрерывному спектру $C_\sigma(T)$, $C_\sigma(\tilde{T})$. Теорема доказана.

§ 3. Введение новой метрики

Как было показано в § 2, операторы T и $\tilde{T}$ вообще неограничены. В этом параграфе покажем, что можно ввести новую метрику, в которой операторы окажутся ограниченными.

Напомним, что H есть пространство последовательностей $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\in H(\zeta_n)$ с нормой

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_n^2<\infty. \tag{3.1}$$

Будем рассматривать еще совокупность H_+ векторов $x\in H$, для которых сходится ряд

$$\|x\|_+^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_n^2(1-|\zeta_n|)^{-2pn}<\infty. \tag{3.2}$$

Очевидно, что H_+ всюду плотно в H и является полным гильбертовым пространством относительно метрики

$$(x, y)_+=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k, y_k)_k(1-|\zeta_k|)^{-2pk}.$$

Как нетрудно видеть, сопряженное к нему пространство будет обладать нормой

$$\|x\|_-^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_n^2(1-|\zeta_n|)^{2pn}. \tag{3.3}$$

Это пространство обозначается через H_-. Из (3.1)—(3.3) видно, что

$$\|x\|_-\leqslant\|x\|\leqslant\|x\|_+,\quad x\in H_+,$$

значит $H_+\subseteq H\subseteq H_-$.

Пространства H_+ и H_-, согласно Ю. М. Березанскому [12], называются соответственно пространствами с позитивной и негативной метриками, или пространствами основных и обобщенных элементов гильбертова пространства H.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Каналовые векторы* q, p *и* $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ *узлов* $L = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} L(\zeta_n)$ *и* $\tilde{L} = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{L}(\zeta_n)$, *соответственно, являются обобщенными элементами гильбертова пространства* H, *т. е. они принадлежат* H_-.

2. *Оператор* $\tilde{T}$ *узла* $\tilde{L}$ *ограничен в метрике* $(\cdot,\cdot)_+$ *(т. е.* $\tilde{T}$, *рассматриваемый как оператор из* H_+ *в* H_+, *будет ограниченным).*

3. *Оператор* T *узла* L *ограничен в метрике* $(\cdot,\cdot)_-$.

4. *В соответствующих метриках для их спектров имеют место соотношения:*

$$\sigma_+(\tilde{T}) = P_{\sigma_+}(\tilde{T}) \cup C_{\sigma_+}(\tilde{T}) = \bar{\Lambda} = \sigma_-(T) =$$

$$= P_{\sigma_-}(T) \cup C_{\sigma_-}(T); \; P_{\sigma_+}(\tilde{T}) = P_{\sigma_-}(T) = \Lambda.$$

Доказательство 1. Следует из (2.24) и сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\zeta_n|)^{p+1} < \infty$$

(и из явных формул (1.4), (1.6) для p, q, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$).

2. Так как оператор $\tilde{T}$ есть сумма двух операторов, в силу леммы 2.1 (a) первый оператор ограничен. Рассмотрим второй оператор $\tilde{T}_2$:

$$\|\tilde{T} x\|_+^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |q(\zeta_n)|_{E_n}^2 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k, p(\zeta_k))_k \prod_{l=n+1}^{k-1} k(\zeta_l) \right|^2 (1-|\zeta_n|)^{-2pn}, \tag{3.4}$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \in H_+.$$

Имеем

$$(1-|\zeta_n|)^{-2pn-p} \left| \sum_{k=n+1}^{N} (x_k, p(\zeta_k))_k \prod_{l=n+1}^{k-1} k(\zeta_l) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1-|\zeta_n|)^{-2pn-p} \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-p} \sum_{k=n+1}^{N} \|p(\zeta_k)\|^2 (1-|\zeta_k|)^p \sum_{l=n+1}^{k-1} k^2(\zeta_l). \tag{3.5}$$

Учитывая, что

$$|\zeta_1| \leqslant |\zeta_2| \leqslant \cdots \leqslant |\zeta_n| \leqslant |\zeta_{n+1}| \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

мы имеем

$$(1-|\zeta_n|)^{-2np-p} \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-2p(n+1)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \|x_k\|^2 (1-|\zeta_k|)^{-2pk} \leqslant \|x\|_+^2. \qquad (3.6)$$

В силу сходимости произведения $\prod_{l=1}^{\infty} k(\zeta_l)$ и из (3.4)—(3.6), имеем

$$\|\tilde{T} x\|_+^2 \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \|q(\zeta_n)\|^2 (1-|\zeta_n|)^p \sum_{k=1}^{\infty} \|p(\zeta_k)\|^2 (1-|\zeta_k|)^p \cdot \|x\|_+^2.$$

Ряды в правой части сходятся в силу (2.8), значит $\tilde{T}$ ограничен.

Доказательства утверждений 3 и 4 аналогичны доказательству утверждения 2 и теоремы 2.3.

§ 4. Предельный множитель

Из (0.5) и (0.4) следует, что предельный множитель $S(z)$ с точностью до постоянного множителя представляется в виде

$$S(z) = \exp\left\{\frac{2p}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho(1-\rho)^{p-1}\log|F(\rho e^{i\theta})| \sum_{k=1}^{p+1} \frac{z\rho e^{-i\theta}}{(1-z\rho e^{-i\theta})^k}\, d\rho d\theta\right\}. \qquad (4.1)$$

Для краткости введем обозначение

$$G(\rho, \theta) = \frac{2p\rho}{\pi}(1-\rho^2)^{p-1}\log|F(\rho e^{i\theta})|. \qquad (4.2)$$

Множитель

$$S(z) = \exp\left\{\int_0^1\int_0^{2\pi} G(\rho, \theta)\frac{z\rho e^{-i\theta}}{(1-z\rho e^{-i\theta})^k}\, d\rho d\theta\right\} \qquad (4.3)$$

имеет реализацию

$$H_k = L^2(R_k, [0, 1]\times[0, 2\pi]);\ E = C_1,$$

$$(A_k f)(\rho, \theta) = B(\rho, \theta) f(\rho, \theta) + G^{1/2}(\rho, \theta)\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} (f(x, t), p_0)_{R^k}\, q_0\, \overline{G}^{1/2}(x, t)\, dx dt, \qquad (4.4)$$

$$q_k(\rho, \vartheta) = G^{1/2}(\rho, \vartheta)\, q_0, \quad p_k(\rho, \vartheta) = G^{1/2}(\rho, \vartheta)\, p_0; \quad k_k = 1, \tag{4.5}$$

$$B(\rho, \vartheta) = \rho e^{-i\vartheta} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Этот узел будем обозначать через S_k. Эта реализация несущественно отличается от соответствующей реализации, полученной в [6]. Это отличие вызвано различными определениями передаточной функции (см. [6] и наше определение 1).

Имеет место утверждение.

Предложение 4.1. *Предельный множитель $S(z)$ имеет реализацию*

$$S = S_1 \vee S_2 \vee \cdots \vee S_{p+1},$$

где S_k определены по (4.4)—(4.6). *Каналовые векторы являются обычными элементами основного гильбертова пространства H узла S. Оператор (основной) A ограничен, его спектр составляет весь замкнутый единичный круг.*

Доказательство. То, что каналовые векторы принадлежат пространству H, следует из сходимости интеграла (см. [5], стр. 28)

$$\frac{2p}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^{p-1} \left|\log |F(\rho e^{i\vartheta})|\right| \rho\, d\rho\, d\vartheta < \infty.$$

Остальные утверждения непосредственно следуют из (4.4)—(4.6).

Пусть $F(z) \in D_p$ и не имеет особенности в нуле, тогда она допускает представление

$$F(z) = C\, z^n \frac{\pi_p(z;\ a_k)}{\pi_p(z;\ b_k)}\, S(z).$$

Отсюда и из полученных выше результатов имеем: любая функция класса D_p, не имеющая особенности в нуле обладает (вообще говоря неограниченной) реализацией, однако в основное пространство можно ввести новую метрику, в которой основной оператор становится ограниченным.

§ 5. Об устойчивости операторов, реализующих элементарные множители М. М. Джрбашяна

Будем говорить, что оператор T сильно устойчивый, если его степени T^n сильно стремятся к нулю при $n \to \infty$. Инвариантное подпространство оператора T, на котором T^n сильно стремится к нулю при $n \to \infty$, будем называть подпространством сильной устойчивости.

1°. Как мы уже видели оператор T, реализующий элементарный множитель $M_\rho(z;\,\zeta)$ класса D_ρ имеет спектр, сосредоточенный в одной точке ζ. Так как $|\zeta|<1$, то согласно теореме Рота [11], он подобен некоторому истинному сжатию A (т. е. $\|A\|<1$). Следовательно T сильно устойчив.

2°. Рассмотрим этот вопрос для самого простого не неванлинновского класса N_1.

Как известно, элементарный множитель $A_1(z;\,\zeta)$ класса N_1 имеет вид (см. [3], [1])

$$A_1(z,\,\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\,\frac{|\zeta|}{\zeta}\,\tilde{A}_1(z;\,\zeta), \tag{5.1}$$

где

$$\tilde{A}_1(z;\,\zeta)=\exp\left(1-|\zeta|-2\bar{\zeta}z\log\frac{|\zeta|-\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z}\right). \tag{5.2}$$

Как показано в [1], множитель $\tilde{A}_1(z,\,\zeta)$ имеет реализацию

$$H=L^2(0,\,l),\ E=C_1,$$

$$(Tf)(x)=\zeta(\exp cx)f(x)+2c\zeta\int_0^x\exp(x-t)f(t)\,dt, \tag{5.3}$$

$$q=q_0\exp x;\ p=p_0\exp(l-x),\ k=\exp l, \tag{5.4}$$

где

$$l=1-|\zeta|,\ q_0\bar{p}_0=2c\bar{\zeta},\ c=-(1-|\zeta|)^{-1}\log|\zeta|. \tag{5.5}$$

Для простоты мы предполагаем, что $\zeta>0$, тогда спектром оператора T вида (5.3) будет отрезок $[\zeta,\,1]$.

Предложение 5.1. 1) *Пусть* $\zeta\geqslant\frac{1}{2}$ *и* $f(x)\geqslant 0$ (*причем не почти всюду* $=0$). *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n f\|=\infty.$$

2) *Имеет место оценка для степеней оператора*

$$\|T^n\|\leqslant Mn^{3/2}$$

M — некоторая постоянная.

Доказательство. 1. Из (5.5) имеем

$$\zeta\exp cx\geqslant cx+b,\ \zeta\exp(x-t)\geqslant 1,\ \text{где } b=1+\ln\zeta.$$

Далее

$$(T^n f)(x)\geqslant(T_1^n f)(x), \tag{5.6}$$

где

$$(T_1 f)(x)=(cx+b)f(x)+c\int_0^x f(t)\,dt,$$

$$(T_1^n f)(x) = (cx+b)^n f(x) + nc\,(cx+b)^{n-1}\int\limits_0^x f(t)\,dt. \qquad (5.7)$$

Из (5.6)—(5.7) следует утверждение 1).

2. Так как

$$\zeta \exp cx \leqslant x + \zeta, \quad c\zeta \leqslant 1,$$

то имеем

$$\|T^n f\| \leqslant \|T^n |f|\| \leqslant \|T_2^n |f|\|, \qquad (5.8)$$

где

$$(T_2 f)(x) = (x+\zeta) f(x) + 2\int\limits_0^x f(t)\,dt,$$

$$(T_2^n f)(x) = (x+\zeta)^n f(x) + n\,(n+1)(x+\zeta)^{n-1}\int\limits_0^x f(t)\,dt -$$

$$- n\,(n-1)(x+\zeta)^{n-1}\int\limits_0^x (\zeta+t)\, f(t)\,dt. \qquad (5.9)$$

Из (5.8)—(5.9) следует утверждение 2).

Покажем, что оператор T обладает подпространством сильной устойчивости.

Резольвента оператора T дается следующей формулой [7]:

$$[(\lambda I - T)^{-1} f](x) = \frac{f(x)}{\lambda - \alpha(x)} + \frac{e^x S(x,\lambda)}{\lambda - \alpha(x)}\, 2\zeta c \int\limits_0^x \frac{S^{-1}(t,\lambda)\, e^{-t} f(t)}{\lambda - \alpha(t)}\,dt. \qquad (5.10)$$

Пусть $\lambda = \xi + i\eta$, тогда

$$|S(x,\lambda)| = \exp\left\{2\zeta c \int\limits_0^x \frac{\xi - \alpha(t)}{[\xi - \alpha(t)]^2 + \eta^2}\,dt\right\},$$

отсюда

$$|S(x,\lambda)| \leqslant \exp\,(c/|\eta|), \quad c \text{ — постоянная}. \qquad (5.11)$$

Такая же оценка верна и для $|S^{-1}(x,\lambda)|$. Так как $\alpha(x)$ — вещественна, то

$$|\lambda - \alpha(x)| \geqslant |\eta|. \qquad (5.12)$$

Из (5.10)—(5.12) имеем

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \frac{\exp\,(A/|\eta|)}{|\eta|^2} \leqslant \exp\,(B/|\eta|^2).$$

A, B — некоторые постоянные.

Значит, для малых δ

$$M(\delta) = \sup_{|\mathrm{Im}\,\lambda| = |\eta| = \delta} \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leqslant \exp(c'/\delta^2)$$

и

$$\int \ln \ln M(\delta)\, d\delta < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Любича—Мацаева [10], T является S-оператором, поэтому для любого сегмента $\Delta \subset [\zeta, 1] = \sigma(T)$ существует инвариантное (спектральное) подпространство $L(\Delta)$ относительно T такое, что $T(\Delta) = T|L(\Delta)$ принимает Δ за своим спектром. Если Δ строго лежит в единичном круге, то $T(\Delta)$ подобен истинному сжатию [11]. Следовательно, подпространство $L(\Delta)$ есть подпространство сильной устойчивости.

Таким образом, доказана

Теорема 5.1. *Оператор T вида* (5.3) *не является сильно устойчивым, но обладает континуумом инвариантных подпространств сильной устойчивости.*

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание к работе.

Харьковский государственный
университет

Поступила 15.IV.1975

ԴՈ ԿՈՆԳ ԽԱՆ. Որոշ մերոմորֆ ֆունկցիաների դասերի ռեալիզացնող օպերատորների հատկությունները (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքը նվիրված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի D_p ($p=0, 1, 2, \ldots$) *դասերի ռեալիզացնող օպերատորների սպեկտրալ և սահմանափակության հարցերին տարբեր մետրիկաներում։*

DO CONG KHANH. *Operators realizising some classes of meromorphic functions* (summary)

Spectrum properties and problems of continuity of operators realizising functions of classes D_p ($p=0, 1, 2, \cdots$) of M. M. Jrbashian are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Лившиц.* Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна, ДАН СССР, 219, № 4, 1974.
2. *М. С. Лившиц.* Операторы, колебания, волны, Изд. „Наука", М., 1966.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
4. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации мероморфных функций в круге, Матем. сб. 79 (121), 4 (5), 1969.
5. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
6. *Л. Х. Меграбян.* Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 6, 1975, 560—580.

7. *М. С. Бродский, М. С. Лившиц.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 13, 1, 1958, 3—85.
8. *М. С. Бродский.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов, Изд. „Наука", М., 1969.
9. *В. М. Бродский.* Об операторных узлах и их характеристических функциях, ДАН СССР, 191, № 1, 1971.
10. *Ю. И. Любич, В. И. Мацаев.* К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве, ДАН СССР, 131, № 1, 1956.
11. *G. Rota.* On models for linear operators, Comm. Pure Appl. Math, 13, 1960, 469—472.
12. *Ю. М. Березанский.* Пространства с негативной метрикой, УМН, 18, вып. 1, 1963.
13. *К. Иосида.* Функциональный анализ, Изд. „Мир", 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

Р. А. АВЕТИСЯН

О D-СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В настоящей работе мы приводим одно сравнительно простое доказательство аналога классической теоремы Лузина—Данжуа для кратных тригонометрических рядов. Для двойных рядов эта теорема другим методом доказана в работе [1].

Далее мы приводим несколько теорем о D-свойстве кратных функциональных последовательностей.

Сначала приведем следующее

Определение 1. Будем говорить, что система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$ обладает свойством D, если из абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

на множестве положительной меры следует неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

(см. [5], стр. 330).

Аналогично определяется D-свойство для кратных последовательностей.

Теорема Лузина—Данжуа утверждает, что система $\{\cos(nx + \alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$, где α_n — произвольные действительные числа, обладает свойством D.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Кратная тригонометрическая система обладает свойством D.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две леммы. Чтобы сформулировать первую лемму, дадим следующее

Определение 2. Будем говорить, что измеримая функция $T(x)$, отображающая $[0, 1]$ на измеримое множество $T([0, 1])$, принадлежит классу (B, α) если $\exists \alpha < \infty$ такое, что для любого измеримого $E \subset T([0, 1])$

$$\mu(T^{-1} E) \leqslant \alpha \cdot \mu(E),$$

где $T^{-1} E$ — полный прообраз множества E при отображении T, а μ — мера Лебега.

Лемма 1. *Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — измеримые функции, определенные на* $[0, 1]$, *а* $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательности измеримых отображений отрезка* $[0, 1]$ *на себя, причем*

1) $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *отличны от нуля почти всюду на* $[0, 1]$,

2) $T_m \in (B, \alpha)$ *и* $Q_n \in (B, \alpha)$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$.

Тогда для любого множества $E \subset ([0, 1])$, $\mu E = \delta > 0$ *имеет место неравенство*

$$\int_E |\varphi_1(T_m x)| |\varphi_2(Q_n x)| \, dx \geqslant C(\delta) > 0,$$

где $C(\delta)$ *не зависит от* m *и* n.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$F_m = (x \in [0, 1]: |\varphi_1(T_m x)| \leqslant \varepsilon) = T_m^{-1}(x \in [0, 1]: |\varphi_1(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Отсюда, используя условие 2) леммы 1, получим

$$\mu E_m \leqslant \alpha \cdot \mu (x \in [0, 1]: |\varphi_1(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Точно так же

$$\mu(G_n) = \mu(x \in [0, 1]: |\varphi_2(Q_n x)| \leqslant \varepsilon) \leqslant \alpha \cdot \mu(x \in [0, 1]: |\varphi_2(x)| \leqslant \varepsilon).$$

Выберем и зафиксируем настолько малое значение $\varepsilon = \varepsilon_0(\delta)$, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu F_m \leqslant \frac{\delta}{4}, \ \mu G_n < \frac{\delta}{4} \ (m, n = 1, 2, \cdots).$$

Этого можно добиться, поскольку по условию 1)

$$\mu(x \in [0, 1]: |\varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon) \to 0 \ (i = 1, 2)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Обозначив дополнения множеств $E \cap F_m$ и $E \cap G_n$ в E соответственно через L_m и K_n, будем иметь

$$\mu(L_m \cap K_n) \geqslant \delta - \left(\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right) = \frac{\delta}{2} \ (m, n = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда получаем

$$\int_E |\varphi_1(T_m(x))| |\varphi_2(Q_n x)| \, dx \geqslant \int_{L_m \cap K_n} |\varphi_1(T_m x)| |\varphi_2(Q_n x)| \, dx \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_0^2(\delta) \cdot \mu(L_m \cap K_n) = \frac{\delta}{2} \cdot \varepsilon_0^2(\delta) > 0.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Классы (B, α) не пусты. Действительно, любое измеримое, сохраняющее меру преобразование отрезка $[0, 1]$ принадлежит классу $(B, 1)$. Отображение $ax+b \pmod 1$ входит в некоторый класс (B, α). Более нетривиальным примером является отображение $y=f(x)$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, где $f(x)$ — строго монотонная функция, причем $f'(x) > p$ всюду на $[0, 1]$. Это отображение принадлежит классу $\left(B, \frac{1}{p}\right)$ (см. [6], стр. 196 и [7], стр. 895). Ясно, что суперпозиция отображений из классов (B, α) и (B, β) принадлежит классу (B, α, β). Для дальнейшего отметим также, что отображение $nx+\beta_n$, где n — целое, является сохраняющим меру измеримым преобразованием отрезка $[0, 1]$.

Замечание 2. Очевидно, лемма 1 верна для любого конечного числа функций $\varphi_i(x)$ и последовательностей T^i_m $(i=1, \cdots, s)$.

Отметим, что для одного частного случая эта лемма по существу доказана нами в работе [4].

Чтобы сформулировать лемму 2, сделаем несколько обозначений: через $x=(x_1, \cdots, x_k)$ будем обозначать точку k-мерного пространства; $n=(n_1, \cdots, n_k)$ — точка с целыми положительными координатами; $A_n(x)$ — общий член k-кратного тригонометрического ряда (см. [3], стр. 75). Очевидно

$$A_n(x) = a_n(x^{(1)}) \cdot \cos n_k x_k + b_n(x^{(1)}) \cdot \sin n_k x_k, \tag{1}$$

где $x^{(j)} = (x_1, \cdots, x_{k-j})$, $k \geqslant 2$, $1 \leqslant j < k$, а $a_n(x^{(1)})$ и $b_n(x^{(1)})$ — общие члены $(k-1)$-кратного тригонометрического ряда с k-мерными числовыми коэффициентами (например, первое слагаемое в выражении $a_n(x^{(1)})$ имеет вид $\overset{1}{a}_{n_1, \ldots, n_k} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_{k-1} x_{k-1}$).

Лемма 2. *Из сходимости ряда*

$$\sum_{n>0} |a_n(x^{(j)})| \quad (1 \leqslant j < k)$$

на множестве $G \subset [0, 2\pi] \times \cdots \times [0, 2\pi] = [0, 2\pi]^{k-j}$, $\mu G > 0$ *следует неравенство*

$$\sum_{n>0} \sum_{l=1}^{2^{k-j}} |\overset{l}{a}_n| < \infty,$$

где $\overset{l}{a}_n$ — *числовые коэффициенты в выражении* $a_n(x^{(j)})$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по размерности пространства.

Пусть $k=2$, тогда по условию леммы ряд

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \overset{1}{a}_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 + \overset{2}{a}_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \tag{2}$$

абсолютно сходится на $G \subset [0, 2\pi]$, $\mu G > 0$.

Обозначим

$$\rho_{n_1 n_2} = \sqrt{a_{n_1 n_2}^{1^2} + a_{n_1 n_2}^{2^2}},$$

$$a_{n_1 n_2}^1 = \rho_{n_1 n_2} \cdot \sin \alpha_{n_1 n_2}, \quad a_{n_1 n_2}^2 = \rho_{n_1 n_2} \cdot \cos \alpha_{n_1 n_2}.$$

Абсолютная сходимость ряда (2) на G означает, что

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} \cdot |\sin (n_1 x_1 + \alpha_{n_1 n_2})| < \infty, \quad x_1 \in G. \tag{3}$$

По теореме Егорова можно найти множество $P \subset G$, $\mu P > 0$, на котором ряд (3) сходится равномерно.

Значит

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} \int_P |\sin (n_1 x_1 + \alpha_{n_1 n_2})| \, dx < \infty.$$

Из этого неравенства и из леммы 1 (при $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = 1$, $T_n x = nx + \alpha_n \pmod 1$) следует, что

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \rho_{n_1 n_2} < \infty.$$

А это эквивалентно неравенству

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} |a_{n_1 n_2}^1| + |a_{n_1 n_2}^2| < \infty.$$

Пусть утверждение леммы справедливо для $k = s$. Докажем его справедливость для $k = s + 1$. Имеем

$$a_{n_1, \ldots, n_{s+1}}(x_1, \cdots, x_{s-j+1}) = b_{n_1, \ldots, n_{s+1}}(x_1, \cdots, x_{s-j}) \cdot \cos n_{s-j+1} x_{s-j+1} +$$
$$+ c_{n_1, \ldots, n_{s+1}}(x_1, \cdots, x_{s-j}) \sin n_{s-j+1} x_{s-j+1} = \rho_{n_1, \ldots, n_{s+1}}(x_1, \cdots, x_{s-j}) \times$$
$$\times \sin (n_{s-j+1} x_{s-j+1} + \alpha_{n_1, \ldots, n_{s+1}}(x_1, \cdots, x_{s-j}).$$

Пусть, по условию леммы, ряд

$$\sum_{n_1, \cdots, n_{s+1}=1}^{\infty} | a_{n_1, \ldots, n_{s+1}}(x_1, \cdots, x_{s-j+1}) |$$

равномерно сходится на множестве $P \subset G \subset R^{s-j+1}$.

По теореме Фубини множество

$$Q = \left\{ (x_1, \cdots, x_{s-j}) \in R^{s-j}: \int_0^{2\pi} \chi_P(x_1, \cdots, x_{s-j+1}) \, dx_{s-j+1} > 0 \right\}$$

имеет положительную меру в R^{s-j}, где $\chi_P(x_1, \cdots, x_{s-j+1})$ — характеристическая функция множества P.

Пользуясь леммой 1, получаем, что в каждой точке множества Q сходится ряд

$$\sum_{n_1,\ldots,n_{s+1}=1}^{\infty} \rho_{n_1,\ldots,n_{s+1}}(x_1,\cdots,x_{s-j}).$$

Отсюда следует сходимость рядов

$$\sum_{n_1,\ldots,n_{s+1}=1}^{\infty} |b_{n_1,\ldots,n_{s+1}}(x_1,\cdots,x_{s-j})| \text{ и } \sum_{n_1,\ldots,n_{s+1}=1}^{\infty} |c_{n_1,\ldots,n_{s+1}}(x_1,\cdots,x_{s-j})|.$$

По предположению индукции отсюда следует, что

$$\sum_{n_1,\ldots,n_{s+1}=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{s-j}} |b^l_{n_1,\ldots,n_{s+1}}| < \infty \text{ и } \sum_{n_1,\ldots,n_{s+1}=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{s-j}} |c^l_{n_1,\ldots,n_{s+1}}| < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя (1) и предыдущие рассуждения, заключаем, что из сходимости ряда

$$\sum_{n\geq 0} |A_n(x)|$$

на множестве положительной меры $E \subset R^k$, вытекает сходимость рядов

$$\sum_{n>0} |a_n(x^{(1)})| \text{ и } \sum_{n>0} |b_n(x^{(1)})|$$

на некотором множестве положительной меры $F \subset R^{k-1}$.

Отсюда, по лемме 2, следует утверждение теоремы.

Для функциональных последовательностей известна следующая

Теорема Привалова. Чтобы система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$ обладала свойством D необходимо и достаточно выполнение условия

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)|\, dx > 0$$

для всех множеств E с положительной мерой (см. [5], стр. 330).

Пусть $\varphi(x)$ — измеримая, периодическая (с периодом 1) функция, определенная на $[0, 1]$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 |\varphi(x)|\, dx > 0. \tag{4}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Чтобы последовательность* $\{\varphi(A_n x + B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *обладала свойством* D *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim_{n\to\infty} |A_n| = \infty$ (*см.* [2], *теорему* 1). *Отсюда, в частности, следует, что система* $\varphi(nx)$ *обладает свойством* D.

Теорема Привалова легко переносится на кратные функциональные последовательности. Для простоты сформулируем ее для последовательности $\{f_n(x) f_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Теорема. Чтобы система $\{f_n(x) f_m(y)\}_{n, m=1}^{\infty}$ обладала свойством D необходимо и достаточно выполнение условия

$$\varliminf_{\max(m, n) \to \infty} \iint_E |f_n(x) f_m(y)| \, dxdy > 0$$

для всех множеств E положилельной плоской меры.

Интересно отметить, что для случая систем $\{\varphi(nx) \varphi(my)\}_{n, m=1}^{\infty}$ условие (4) уже не является достаточным для того, чтобы эта система обладала свойством D, в чем легко убедиться построением примера. В этом случае легко доказывается следующая

Теорема 3. *Чтобы система* $\{\varphi(nx) \varphi(my)\}_{n, m=1}^{\infty}$ *обладала свойством* D *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(x) \neq 0 \qquad \text{почти всюду на } [0, 1]. \tag{5}$$

Необходимость условия (5) очевидна, а достаточность следует из леммы 1.

Отметим еще одно следствие из леммы 1.

Следствие. При условиях леммы 1 система $\{\varphi_1(T_m(f_1(x)) \times \times \varphi_2(Q_n f_2(x))\}_{m, n=1}^{\infty}$ обладает свойством D, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ $(0 \leqslant \leqslant f_1, f_2 \leqslant 1)$—строго монотонные функции, с почти всюду отличными от нуля производными.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.I.1975

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների D-հատկության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում բերված է բազմապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի համար Լուզինի-Դանժուայի թեորեմի նոր ապացույց։ Կրկնակի շարքերի համար այլ մեթոդով դա ապացուցված էր [1]-ում։

Այնուհետև բերված են մի քանի պարզագույն թեորեմներ բազմապատիկ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների D-հատկության մասին։

R. A. AVETISIAN. *On the D-property sequences of functions* (summary)

The paper gives a new proof of Lousin—Denjoi theorem for multiple trigonometrical series. Some simple theorems on the D-property multiple functional sequences are also proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Reva* and *O. Szász.* Some theorems on double trigonometric series, Duke Math. J. 9, 1942, 693—705.

2. *J. R. Mclaughlin.* The Denjoy—Luzin theorem on trigonometric series, Acta Sci. Math., 35, 1973, 123—126.
3. *Л. В. Жижиашвили.* О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, XXVIII, вып. 2 (170), 1973, 65—119.
4. *Р. А. Аветисян.* О множествах абсолютной сходимости кратных тригонометрических рядов, Мат. заметки, 13, вып. 5, 1973, 625—637.
5. *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИИЛ, М., 1963.
6. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, Изд. „Наука", М., 1974.
7. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

Н. П. ТЕР-ЗАХАРЯН

О НЕКОТОРЫХ НЕОПТИМАЛЬНЫХ ЯЗЫКАХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье [3] доказано, что язык многоместных рекурсивных функций (ЯМРФ) не является асимптотически оптимальным. Возникает вопрос о том, нельзя ли выделить из ЯМРФ асиптотически оптимальный подъязык или, иначе говоря, „сжать" ЯМРФ, удалив из него некоторые сообщения (для которых имеются в языке более короткие эквиваленты) так, чтобы полученный язык был асимптотически оптимален.

Один из естественных способов „сжатия" языка заключается в удалении из него конечного числа фиксированных сообщений (о которых заведомо известно, что они имеют в языке более короткие эквиваленты), а также всех иных сообщений, конструируемых с их помощью. В настоящей статье исследуются подъязыки ЯМРФ, получаемые вышеописанным способом, и доказывается, что ни один из них не является асимптотически оптимальным. Таким образом, для получения асимптотически оптимальных подъязыков ЯМРФ (если они вообще существуют) нужны более сильные средства „сжатия" языка по сравнению с указанными выше.

Мы будем пользоваться понятиями, введенными в работах [1], [2], [3], а также придерживаться их символики и сокращений.

1°. **Определение 1.** Пусть $Я$ — некоторый алгорифмический язык, R — его радиус сходимости, н.а. $\mathbf{A}$ перерабатывает всякое н.ч. n в количество сообщений языка $Я$ длины n. КФКП F, удовлетворяющую условию

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}(n)\,z^n \text{ при } |z|<R,$$

будем называть **производящей функцией языка** $Я$, а н.а. $\mathbf{A}$ — **структурной функцией языка** $Я$.

В заметке [2] определен ЯМРФ, как четверка элементов

$$\{0,|\},\ A,\ \Delta,\ W,$$

где $\{0,|\}$ — двубуквенный алфавит, A — алфавит сообщений ЯМРФ, Δ — множество всех сообщений ЯМРФ, W — н.а., описывающий работу алгорифмов (сообщений) в этом языке.

Пусть $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_r$ — фиксированные сообщения ЯМРФ и $\Delta_{P_1,\dots,P_r}$ — множество всех таких сообщений X ЯМРФ, что $P_1,\cdots,P_r$ не входят в X. Язык

$$\{0, |\},\ \mathcal{A},\ \Delta_{P_1,\ldots,P_r},\ \mathcal{W}$$

мы будем обозначать через $Я_{P_1,\ldots,P_r}$.

В статье будут рассматриваьтся только такие списки $P_1, \cdots, P_r$ сообщений ЯМРФ, для которых $Я_{P_1,\ldots,P_r}$ является подъязыком ЯМРФ.

В [3] показывается, что структурная функция А ЯМРФ при $m \geqslant 5$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\mathrm{A}(m) = (m-4)\,2^{m-4} + \mathrm{A}(m-5) + \sum_{i+j=m-6} \mathrm{A}(i)\,\mathrm{A}(j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i+i_1+\cdots+i_j=m-j-5} \mathrm{A}(i)\,\mathrm{A}(i_1)\cdots\mathrm{A}(i_j). \tag{1}$$

Нетрудно убедиться в том, что существует такое н.ч. m_0, что структурная функция $Я_{P_1,\ldots,P_r}$ при $m > m_0$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и А.

Определение 2. Пусть s — фиксированное н.ч. Сообщение языка $Я_{P_1,\ldots,P_r}$ назовем s-правильным, если в него не входит слово O^s, имеющее следующий вид

$$[00, [|\,0, [0, 2^s-1, 0]].$$

(Напомним, что $[|\,0, [0, 2^s-1, 0]]$ — код нигде не определенной функции от (2^s-2) аргументов).

Обозначим через $\Delta_{P_1,\ldots,P_r;\,s}$ множество всех s-правильных сообщений $Я_{P_1,\ldots,P_r}$. Язык

$$\{0, |\},\ \mathcal{A},\ \Delta_{P_1,\ldots,P_r;\,s},\ \mathcal{W},$$

второй и четвертый элементы которого были определены выше, будем обозначать впредь через $Я_{P_1,\ldots,P_r;\,s}$.

Теорема 1. *При* $s > \max\limits_{1<i<r} l(P_i)$ $Я_{P_1,\ldots,P_r;\,s}$ *является подъязыком* $Я_{P_1,\ldots,P_r}$.

Доказательство. Фиксируем н.ч. s, удовлетворяющее условию теоремы. Ясно, что ни одно из $P_i\ (i=1,\cdots,r)$ не входит в O^s. Для доказательства теоремы достаточно указать для всякого сообщения X языка $Я_{P_1,\ldots,P_r}$ эквивалентное ему s-правильное сообщение с длиной, не большей $l(X)$. Пусть сообщение X языка $Я_{P_1,\ldots,P_r}$ содержит в себе слово

$$O^s\,Q_1,\cdots,Q_q], \tag{2}$$

где q — некоторое н.ч., а $Q_1,\cdots,Q_q$ — сообщения $Я_{P_1,\ldots,P_r}$. Из структуры слова (2) следует, что

$$l(X) \geqslant 16 + s + q.$$

Пусть $q \neq 1$ или Q_1 имеет размерность, отличную от 2^s-1. Тогда сообщению X поставим в соответствие эквивалентное ему s-правильное сообщение $[|, 0, 2^s - 1]$, длина которого равна $(6 + s)$. Если же $q = 1$ и размерность Q_1 равна $2^s - 1$, то сообщению X поставим в соответствие эквивалентное сообщение меньшей длины, получаемое из X подстановкой Q_1 вместо первого вхождения (2). Очевидно, что, производя конечное число подстановок вышеуказанного типа, мы придем к s-правильному сообщению, эквивалентному данному и имеющему не бо́льшую длину. Теорема доказана.

2°. Аналитические свойства подъязыков $Я_{P_1, \ldots, P_r}$. Рассмотрим следующий конструктивный степенной ряд комплексной переменной z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_{P_1, \ldots, P_r}(n) z^n, \tag{3}$$

где н.а. $\mathbf{A}_{P_1, \ldots, P_r}$ — структурная функция языка $Я_{P_1, \ldots, P_r}$.

Нетрудно убедиться в том, что ряд (3) сходится при $|z| < \frac{1}{5}$ (напомним, что алфавит A состоит из пяти букв). Покажем, что ряд (3) расходится в точке $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}$. Пусть $s_0 = \max(4, l(P_1), \cdots \cdots, l(P_r))$. Построим подмножество Δ^1 сообщений $Я_{P_1, \ldots, P_r}$ с помощью следующих порождающих правил:

1) для всяких n и m, таких что $l(n) + l(m) > s_0 - 5$, $[|, n, m] \in \in \Delta^1$;

2) если $Q \in \Delta^1$ и $R \in \Delta^1$, то $[0|, Q, R] \in \Delta^1$. Очевидно, что $\Delta^1 \subset \subset \Delta_{P_1, \ldots, P_r}$. Обозначим через C структурную функцию языка

$$[0, |], A, \Delta^1, W.$$

Исходя из порождающих правил множества Δ^1 нетрудно показать, что

$$C(n) = 0 \text{ при } 0 \leqslant n \leqslant s_0. \tag{4}$$

$$C(n) = (n-4) \cdot 2^{n-5} + \sum_{i+j=n-6} C(i)\, C(j) \quad \text{при } n > s_0.$$

Очевидно, что

$$\forall n (\mathbf{A}_{P_1, \ldots, P_r}(n) \geqslant C(n)). \tag{5}$$

Введем в рассмотрение следующий конструктивный степенной ряд комплексной переменной z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C(n) z^n. \tag{6}$$

Предположим, что ряд (3) сходится в точке $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{12}}\right)$. Тогда, в силу условия (5), ряд (6) также должен сходиться в этой точке. Обозначим через Ф КФКП, такую что при $|z|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C(n) z^n.$$

Исходя из равенств (4), нетрудно показать, что КФКП ф при $|z|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$ удовлетворяет условию

$$\Phi(z)=\frac{2^{s_0-4} z^{s_0+1}(s_0-3-2zs_0+8z)}{(1-2z)^2}+z^6\Phi^2(z).$$

При $z\neq 0$ это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(1-2z)^2(2z^6\Phi(z)-1)^2=(1-2z)^2-2^{s_0-2}z^{s_0+7}(s_0-3-2zs_0+8z). \qquad (7)$$

В предположении сходимости ряда (3) в точке $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$ равенство (7) должно было бы иметь место для всякого z, такого что $0<|z|<\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$. Докажем, что при $z_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{11}}$ равенство (7) нарушается. В самом деле, используя неравенство $s_0\geqslant 4$, легко убедиться в том, что при $z_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{11}}$ правая часть (7) принимает отрицательное значение, т. е. что

$$2^{s_0-2}z_0^{s_0+7}(s_0-4)>1-2z_0,$$

а это противоречит (7), поскольку левая часть этого равенства положительная. Следовательно, ряд (3) расходится в точке $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{12}}$.

Согласно лемме 4 из [3] квазиосуществим радиус сходимости $R_{P_1,\ldots,P_r}$ языка $Я_{P_1,\ldots,P_r}$. Как было доказано выше $R_{P_1,\ldots,P_r}<\frac{1}{2}$.

3°. Неоптимальность языка $Я_{P_1,\ldots,P_r}$. Пусть н.ч. m_0 таково, что при $m>m_0$ функция $\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и структурная функция $\mathbf{A}$ языка ЯМРФ. (Существование такого m_0 утверждалось в пункте 1°). Поэтому тем более, при $m>\overline{m}_0$, где $\overline{m}_0=\max(m_0, 16, l(P_1),\cdots, l(P_r))$, $\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(m)=(m-4)2^{m-4}+\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(m-5)+$$
$$+\sum_{i+j=m-6}\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(i)\,\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(j)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i+i_1+\cdots+i_j=m-j-5}\times$$
$$\times\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(i)\,\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(i_1)\cdots\mathbf{A}_{P_1,\ldots,P_r}(i_j). \qquad (7)$$

Используя этот факт, после несложных выкладок получаем, что производящая функция $F_{p_1,\ldots,p_r}(z)$ языка $Я_{p_1,\ldots,p_r}$ в круге $|z|<R_{p_1,\ldots,p_r}$ удовлетворяет уравнению

$$z^7 F^3_{p_1,\ldots,p_r}(z)-(z^6+z)\,F^2_{p_1,\ldots,p_r}(z)+\left(\frac{z\,\mathrm{P}^{(\bar m_0)}(z)}{(1-2z)^2}-z^5+1\right)\times$$

$$\times F_{p_1,\ldots,p_r}(z)-\frac{\mathrm{P}^{(\bar m_0)}(z)}{(1-2z)^2}=0, \tag{8}$$

где $\mathrm{P}^{(\bar m_0)}(z)$—некоторый полином, зависящий от $\bar m_0$.

Обозначим через $G_{p_1,\ldots,p_r}$ КФКП, определенную в открытом кольце $0<|z|<R_{p_1,\ldots,p_r}$ следующим образом:

$$G_{p_1,\ldots,p_r}(z)=F_{p_1,\ldots,p_r}(z)-\frac{1+z^5}{3z^6}.$$

В результате вычислений получаем, что при $0<|z|<R_{p_1,\ldots,p_r}$ КФКП $G_{p_1,\ldots,p_r}$ удовлетворяет приведенной форме уравнения (8), а именно

$$G^3_{p_1,\ldots,p_r}(z)+S(z)\,G_{p_1,\ldots,p_r}(z)+T(z)=0, \tag{9}$$

где S и T — КФКП, такие что при всяком z, принадлежащем кольцу $0<|z|<\frac{1}{2}$

$$S(z)=\frac{\mathrm{P}^{(\bar m_0)}(z)}{z^6(1-2z)^2}+\frac{1-z^5}{z^7}-\frac{(1+z^5)^2}{3z^{12}},$$

$$T(z)=\frac{(1-2z^5)\,\mathrm{P}^{(\bar m_0)}(z)}{z^6(1-2z)^2}-\frac{2\,(1+z^5)^3}{27\,z^{18}}+\frac{1-z^{10}}{3z^{13}}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть $P_1,\cdots,P_r$ — такие фиксированные сообщения ЯМРФ, что $Я_{p_1,\ldots,p_r}$— подъязык ЯМРФ. Тогда неверно, что $Я_{p_1,\ldots,p_r}$ — асимптотически оптимальный язык.*

Доказательство. Рассмотрим семейство языков $\{Я_{p_1,\ldots,p_r;s}\}$ при $s>\bar m_0+16$, где $\bar m_0$ — н.ч., определенное выше. Согласно теореме 1 все эти языки являются подъязыками $Я_{p_1,\ldots,p_r}$. Учитывая (7′), нетрудно убедиться в том, что структурная функция $\mathbf{A}_{p_1,\ldots,p_r;s}$ языка $Я_{p_1,\ldots,p_r;s}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{A}_{p_1,\ldots,p_r;s}(m)=\mathbf{A}_{p_1,\ldots,p_r}(m) \text{ при } m\leqslant 16+s, \tag{11}$$

а при $m>16+s$

$$\mathbf{A}_{p_1,\ldots,p_r;s}(m)=(m-4)\,2^{m-4}+\mathbf{A}_{p_1,\ldots,p_r;s}(m-5)+$$

$$+\sum_{i+j=m-6} \mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(i)\,\mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(j)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i+i_1+\dots+i_j=m-(j+5)} \mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(i)\,\mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(i_1)\cdots\mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(i_j)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\ \sum_{i_1+\dots+i_j=m-(16+s+j)} \mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(i_1)\cdots\mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(i_j).$$

Аналогично тому, как было доказано в [3], можно показать, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A}_{p_1,\dots,p_r;s}(m)\,z^m$$

сходится в некотором круге $|z|<R$, причем $\frac{1}{5}\leqslant R<\frac{1}{2}$. Используя равенства (11) и лемму 4 из [3], легко установить квазиосуществимость радиуса сходимости $R_{p_1,\dots,p_r;s}$ языка $Я_{p_1,\dots,p_r;s}$ и существование производящей функции $F_{p_1,\dots,p_r;s}$ этого языка. Из (11) следует, что при $|z|<R_{p_1,\dots,p_r;s}$ КФКП $F_{p_1,\dots,p_r;s}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$z^7 F^3_{p_1,\dots,p_r;s}(z)-(z^6+z)F^2_{p_1,\dots,p_r;s}(z)+$$

$$+\left(\frac{z\mathbf{P}^{(\bar{m}_0)}(z)}{(1-2z)^2}-z^5+1+z^{17+r}\right)F_{p_1,\dots,p_r;s}(z)+\frac{\mathbf{P}^{(\bar{m}_0)}(z)}{(1-2z)^2}=0, \quad (12)$$

где $\mathbf{P}^{(\bar{m}_0)}(z)$ — полином, определенный в уравнении (8).

Обозначим через $G_{p_1,\dots,p_r;s}$ КФКП, определенную в кольце $0<|z|<R_{p_1,\dots,p_r;s}$ и такую, что

$$G_{p_1,\dots,p_r;s}(z)=F_{p_1,\dots,p_r;s}(z)-\frac{1+z^5}{3z^6}.$$

Очевидно, что при $0<|z|<R_{p_1,\dots,p_r;s}$ КФКП $G_{p_1,\dots,p_r;s}$ удовлетворяет приведенной форме уравнения (12), а именно

$$G^3_{p_1,\dots,p_r;s}(z)+S_{p_1,\dots,p_r;s}(z)\,G_{p_1,\dots,p_r;s}(z)+T_{p_1,\dots,p_r;s}(z)=0,$$

где $S_{p_1,\dots,p_r;s}$ и $T_{p_1,\dots,p_r;s}$ — такие КФКП, что при $0<|z|<\frac{1}{2}$ имеют место следующие равенства:

$$S_{p_1,\dots,p_r;s}(z)=S_{p_1,\dots,p_r}(z)+z^{10+s}, \quad (13)$$

$$T_{p_1,\dots,p_r;s}(z)=T_{p_1,\dots,p_r}(z)+\frac{z^{4+s}(1+z^5)}{3}.$$

Аналогично теореме 4 из [3] доказываем, что невозможно, чтобы при любом н.ч. s, таком что

$$\overline{m}_0 - 16 \leqslant s \leqslant (\overline{m}_0 - 16) + 2,$$

$R_{p_1, \ldots, p_r; s}$ совпадал бы $R_{p_1, \ldots, p_r}$. Следовательно, квазиосуществим язык $Я_{p_1, \ldots, p_r; s_0}$, радиус сходимости которого больше $R_{p_1, \ldots, p_r}$.

Итак, FR-числа $\dfrac{1}{R_{p_1, \ldots, p_r}}$ и $\dfrac{1}{R_{p_1, \ldots, p_r; s}}$ удовлетворяют всем трем условиям теоремы 3 из [2]. Следовательно, неверно, что $Я_{p_1, \ldots, p_r}$ асимптотически оптимален. Теорема доказана.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и ЕГУ

Поступила 15.I.1975

Ն. Պ. ՏԵՐ-ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Ռեկուրսիվ ֆունկցիաների որոշ ոչ օպտիմալ լեզուների մասին (ամփոփում)

Հետազոտվում են բազմատեղանի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների լեզվի այնպիսի ենթալեզուները, որոնք ստացվում են նրանից վերջավոր թվով հաղորդումների և նրանց օգնությամբ կառուցվող բոլոր այլ հաղորդումների հեռացման միջոցով։ Ապացուցվում է, որ այս ենթալեզուներից ոչ մեկը ասիմպտոտիկ օպտիմալ չէ։

N. P. TER-ZAHARIAN. *On some non-optimal languages of recursive functions* (summary)

The sublanguages of the language of multi-place locus recursive functions which can be obtained from the original language the elimination of the finite number of fixed messages, aswell as of all the messages, employing these are investigated. It is proved, that such sublanguages can be asymptotically optimal.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. П. Тер-Захарян.* Об энтропийных свойствах алгорифмических языков. Исследования по теории алгорифмов и математической логике, М., 1973, 178—204.
2. *Н. П. Тер-Захарян.* О языке многоместных рекурсивных функций, ДАН СССР, 210, № 3, 1973, 541—542.
3. *Н. П. Тер-Захарян.* Количественные характеристики языка многоместных рекурсивных функций, Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, VIII, 1975, 9—35.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

Б. Т. БАТИКЯН

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

1°. Пусть A — равномерная алгебра на хаусдорфовом компакте X. Это означает, что A является замкнутой подалгеброй алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на X, содержит все постоянные функции и разделяет точки компакта X. Равномерная алгебра наделяется обычной sup-нормой, которая превращает ее в банахову алгебру. Как известно, пространство максимальных идеалов $M(A)$ равномерной алгебры A есть компакт в гельфандовской топологии, причем X гомеоморфно вкладывается в $M(A)$ и содержит в качестве замкнутого подмножества границу Шилова $S(A)$.

Равномерная алгебра A называется максимальной подалгеброй алгебры $C(X)$, если $A \neq C(X)$ и не существует такой равномерной алгебры B, отличной от A и от $C(X)$, которая удовлетворяла бы условию $A \subset B \subset C(X)$. Если обозначить через $[A, h]$ равномерную алгебру на X, порожденную алгеброй A и функцией $h \in C(X)$ (каждый элемент алгебры $[A, h]$ представляется в виде равномерного предела полиномов $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k h^k$, $f_k \in A$), то A в том и только в том случае образует максимальную подалгебру в $C(X)$, когда $[A, h] = C(X)$ для всякой непрерывной функции h, не принадлежащей к A.

Теория максимальных подалгебр берет свое начало с работы Дж. Вермера [1], который установил, что совокупность непрерывных функций на единичной окружности Γ, допускающих голоморфное продолжение внутрь круга, образует максимальную подалгебру в $C(\Gamma)$. Теорема Вермера, выявив важность понятия максимальной подалгебры, вызвала большое количество работ, посвященных теории максимальных подалгебр.

Укажем, например, на работы В. Рудина [2], К. Гофмана и И. Зингера [3], [4], И. Гликсберга [5], Е. А. Горина и В. М. Золотаревского [6]. В последней работе приводится, в частности, многомерный аналог теоремы Вермера.

В работе [7] С. А. Григоряном и автором было введено понятие подалгебры конечного типа, обобщающее понятие максимальной подалгебры. Это определение заключается в следующем.

Пусть A — равномерная алгебра на компакте X. Рассмотрим следующую конечную цепочку равномерных алгебр, заданных на X (включения строгие)

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = C(X). \qquad (1)$$

Если при всех $i\ (0 \leqslant i \leqslant k-1)$ между A_i и A_{i+1} не существует промежуточных равномерных подалгебр, то цепочка (1) называется неуплотняемой цепочкой. Говорят, что цепочка (1) имеет длину k.

Равномерная алгебра A называется подалгеброй конечного типа, а именно типа n, алгебры $C(X)$, если всякая цепочка вида (1) имеет длину $\leqslant n$ и существует хотя бы одна неуплотняемая цепочка в точности длины n.

Будем обозначать через $t(A)$ тип алгебры A, так что выражение „$t(A) = n$ на X“ будет означать, что равномерная алгебра A является подалгеброй типа n в $C(X)$.

Очевидно, максимальные подалгебры суть подалгебры типа 1. Если же, например, $X = \{z \in \mathbf{C}: |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbf{C}: |z-2| = 1\}$ и A — алгебра непрерывных функций на X, допускающих голоморфное продолжение внутрь обоих кругов, то по теореме Вермера $t(A)=2$ на X.

В работе [7] было показано, что на подалгебры конечного типа в своеобразной форме распространяется ряд результатов из теории максимальных подалгебр. Так, например, если A—максимальная подалгебра $C(X)$, то как указано в [4] компакт X совпадает с границей Шилова $S(A)$ алгебры A, а согласно предложению 1 из [7], если $t(A) = n$ на X, то множество $X \setminus S(A)$ может содержать не более чем n—1 точек. Далее, согласно предложению 4 из той же работы для подалгебры типа n в X не может существовать более n неодноточечных максимальных множеств антисимметрии (соответствующий результат для максимальных подалгебр приводится, например, в [8], стр. 175).

Настоящая работа содержит обобщения (а также некоторые уточнения) описанных выше результатов. В частности, в п. 3 изучается вопрос о связи между разбиениями компакта X на максимальные множества антисимметрии, осуществляемые алгебрами A и B в предположении, что A образовывает максимальную подалгебру в B, т. е. между A и B не существует промежуточных равномерных подалгебр. Кроме того, отдельно рассматривается частный случай, когда $\dim B/A=1$. Оказывается, что при этом множество $S(B) \setminus S(A)$ не более чем одноточечно (п. 2), и если алгебра A антисимметрична, то число максимальных множеств антисимметрии алгебры B не превосходит 2 (п. 3).

Приведем необходимые сведения о подалгебрах коразмерности 1, содержащиеся в работе [9]. Пусть A и B—равномерные алгебры на компакте X, и пусть A образует подалгебру коразмерности 1 в алгебре B. Тогда A совпадает с ядром некоторого непрерывного линейного функционала ψ на B. При этом ψ либо имеет вид $\psi = c(\varphi_1 - \varphi_2)$, где c—константа, а φ_1 и φ_2—мультипликативные функционалы на B, т. е. ненулевые гомоморфизмы алгебры B в поле комплексных чисел, либо функционал ψ есть точечная производная на B, т. е. существует такой мультипликативный функционал φ, что $\psi(fg)=\psi(f)\varphi(g)+\psi(g)\varphi(f)$ для всех $f, g\in B$. В первом случае $A=\{f\in B: \varphi_1(f)=\varphi_2(f)\}$ и, отождествляя мультипликативные функционалы с соответствующими точками пространства $M(B)$, будем говорить, что алгебра A получается из B „склеиванием" точки φ_1 с точкой φ_2. Поскольку алгебра A разделяет точки X, хотя бы один из функционалов φ_1 или φ_2 должен принадлежать к множеству $M(B)\setminus X$.

Через A_E будем обозначать равномерное замыкание сужения $A|E$ равномерной алгебры A на замкнутое подмножество E компакта X. Очевидно, A_E образует равномерную алгебру на E.

2°. Предположим, что на компакте X задана равномерная алгебра A, причем X не исчерпывает все пространство $M(A)$ максимальных идеалов алгебры A. Выделим произвольные точки $y_1, \cdots, y_k$ из множества $M(A)\setminus X$ и образуем компакт $Y=X\cup\{y_1, \cdots, y_k\}$. Алгебра A является равномерной алгеброй также и на компакте Y, поскольку, как известно, каждая функция из A продолжается непрерывно с X на пространство $M(A)$.

Теорема 1. *Если $t(A)=n$ на X, то $t(A)=n+k$ на Y.*

Доказательство. Для доказательства теоремы проведем индукцию по n, при этом, очевидно, можно ограничиться случаем $k=1$, когда $Y=X\cup\{y\}$, $y\in M(A)\setminus X$. Обозначим через B равномерную алгебру на Y, содержащую A и не совпадающую с $C(Y)$.

Пусть сперва $n=1$, т. е. алгебра A максимальна в $C(X)$. Если $y\overline{\in} S(B)$, то $S(B)\subset X$, и потому сужение $B|X$ замкнуто в $C(X)$. Из максимальности алгебры A следует, что $B|X=A|X$, т. е. $B=A$. Рассмотрим тот случай, когда $y\in S(B)$. Поскольку в то же время точка y является изолированной точкой в Y, в алгебре B найдется функция h, удовлетворяющая условиям $h(y)=1$, $h=0$ на X. Функция h не может принадлежать к A, так как $S(A)\subset X$, поэтому алгебра $[A, h]$ не совпадает с A. С другой стороны, как нетрудно убедиться, $[A, h]$ образует максимальную подалгебру в $C(Y)$, в частности, $[A, h]=B$. Таким образом, всякая нетривиальная равномерная алгебра, содержащая в себе A, является максимальной подалгеброй в $C(Y)$. Это и означает, что $t(A)=2$ на Y.

Пусть теперь $n>1$. Достаточно показать, что если алгебра B не совпадает с A, то $t(B)\leqslant n$ на Y. Если $y\overline{\in} S(B)$, то B образует равномерную алгебру на компакте X, и поскольку $A\subset B$, $t(B)\leqslant n-1$ на X. Тогда в силу индуктивного предположения $t(B)\leqslant n$ на Y. Если же $y\in S(B)$, то в алгебре B содержится характеристическая функция h точки y. Ясно, что $t([A, h])=n$ на Y (алгебра $[A, h]$ образует в $C(Y)$ подалгебру такого же типа, что и алгебра A в $C(X)$), следовательно, $t(B)\leqslant n$ на Y. Теорема доказана.

Содержащееся в работе [7] предложение 1 оказывается простым следствием теоремы 1.

Следствие. Если $t(A)=n$ на X, то множество $X\setminus S(A)$ содержит не более $n-1$ точек.

Доказательство. Положим $m = t(A)$ на $S(A)$. Если множество $X \setminus S(A)$ состоит из k точек, то согласно теореме 1 $n = m + k$, т. е. $k = n - m \leqslant n - 1$.

В частности, если компакт X не содержит изолированных точек и $t(A) < \infty$ на X, то $S(A) = X$.

Следующая теорема дает информацию об изменении границы Шилова равномерной алгебры при переходе к ее подалгебре конечной коразмерности.

Теорема 2. *Пусть A и B—равномерные алгебры на компакте X. Если A образует подалгебру коразмерности n в алгебре B, то множество $S(B) \setminus S(A)$ не может содержать более n точек.*

Доказательство. Если $\dim B/A = n$, то согласно [9] существует неуплотняемая цепочка

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = B$$

длины n, причем $\dim A_{i+1} / A_i = 1$. В силу этого достаточно рассмотреть случай $n = 1$.

Очевидно, $S(A) \subset S(B)$. Предположим, что множество $S(B) \setminus S(A)$, вопреки утверждению теоремы, содержит хотя бы две точки: x_1 и x_2. Положим $E = \{x_1, x_2\} \cup S(A)$. Легко показать, что $A_E = A|E$ образует подалгебру коразмерности 1 в алгебре B_E (например, путем рассмотрения пространств ортогональных мер к алгебрам A_E и B_E), и что множество E, содержащее изолированные точки x_1 и x_2, служит границей Шилова для алгебры B_E. Следовательно, B_E содержит характеристическую функцию h_1 точки x_1 и характеристическую функцию h_2 точки x_2 (см. доказательство теоремы 1), причем $h_2 = f + \lambda h_1$, где $f \in A_E$ и λ — комплексное число. Другими словами, ненулевая функция f принимает значение 0 всюду на $S(A) = S(A_E)$, что невозможно.

Следствие. Если компакт X не содержит изолированных точек и $\dim B/A < \infty$, то $S(A) = S(B)$.

Замечание. Пусть $\dim B/A = 1$ и $S(B) \neq S(A)$. Тогда по теореме 2 $S(B) = S(A) \cup \{x_0\}$, $x_0 \in X$, и алгебра B содержит характеристическую функцию точки x_0. Это означает, как нетрудно убедиться, что алгебра A получается из B „склеиванием" точки x_0 с какой-то точкой из $M(B) \setminus X$. Таким образом, если A совпадает с ядром точечной производной на B, то $S(A) = S(B)$.

3°. Пусть на компакте X определены две равномерные алгебры A и B, и пусть A — максимальная подалгебра алгебры B, т. е. между A и B не существует промежуточных равномерных подалгебр. Оказывается, это обстоятельство обуславливает зависимость между разбиениями компакта X на максимальные множества антисимметрии, осуществляемые этими алгебрами.

Теорема 3. *Если A образует максимальную подалгебру в B, то все, кроме быть может одного, максимальные множества* *антисимметрии алгебры A служат максимальными множествами антисимметрии и для B.*

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ обозначает совокупность (вообще говоря, бесконечную) всех неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A. Компакт E_i представляется в виде пересечения множеств пика алгебры A, а значит и B, поэтому $A_{E_i} = A|E_i$ и $B_{E_i} = B|E_i$ при всяком i (см. [10], стр. 83, 85, 87). Покажем, что $A|E_i = B|E_i$ для всех индексов i, кроме одного.

Допустим, что существуют два таких индекса i_1 и i_2, что $A|E_{i_1} \neq B|E_{i_1}$ и $A|E_{i_2} \neq B|E_{i_2}$. Рассмотрим равномерную алгебру

$$A_1 = \{f \in C(X): f|E_i \in \setminus AE_i \text{ при } i \neq i_1 \text{ и } f|E_{i_1} \in B|E_{i_1}\}.$$

По теореме Шилова—Бишопа ([10], стр. 87) $A \subset A_1$, причем $A \neq A_1$, поскольку $A|E_{i_1} \neq A_1|E_{i_1} = B|E_{i_1}$. С другой стороны, $A_1 \subset B$. Действительно, каждое неодноточечное максимальное множество антисимметрии F_j алгебры B содержится в каком-то E_i. Если $f \in A_1$, то $f|E_i \in B|E_i$ при всех i, и, следовательно, $f|F_j \in B|F_j$ при всех j, т. е. $f \in B$. Однако $A_1 \neq B$, так как $A_1|E_{i_2} = A|E_{i_2} \neq B|E_{i_2}$. Существование такой алгебры A_1 противоречит максимальности A в B.

Таким образом, существует такой индекс i_1, что $A|E_i = B|E_i$ при $i \neq i_1$, а $A|E_{i_1} \neq B|E_{i_1}$. В частности, при $i \neq i_1$ компакт E_i служит максимальным множеством антисимметрии и для алгебры B. Теорема доказана.

В п. 1 отмечалось, что относительно подалгебр конечного типа в работе [7] получен следующий результат: если $t(A) = n$ на X, то в X существует не более чем n неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A.

Это утверждение вытекает из теоремы 3. Действительно, согласно определению существует неуплотняемая цепочка равномерных алгебр, имеющая длину n и соединяющая алгебры A и $C(X)$:

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = C(X).$$

Последовательно применяя теорему 3 (сперва к алгебрам A_{n-1} и $C(X)$, затем к алгебрам A_{n-2} и A_{n-1}, и т. д.) и имея в виду то обстоятельство, что все максимальные множества антисимметрии алгебры $C(X)$ одноточечны, легко получаем требуемый факт.

Следующее замечание уточняет результат следствия из теоремы 1.

Замечание. Пусть A — подалгебра типа n в алгебре $C(X)$. Если число неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A равно k ($k \leqslant n$), то множество $X \setminus S(A)$ содержит не более $n-k$ точек. В самом деле, для $i = 1, \cdots, k$ положим

$$A_i = \{f \in C(X): f|E_i \in A|E_i\},$$

где E_i обозначает неодноточечное максимальное множество антисимметрии алгебры A. Согласно теореме Шилова—Бишопа $A=\prod_{i=1}^{k} A_i$, поэтому если $m_i = t(A_i)$ на X, то $n=\sum_{i=1}^{k} m_i$. В силу следствия из теоремы 1 множество $X \setminus S(A)$ содержит не более $\sum_{i=1}^{k}(m_i-1)=n-k$ точек.

По теореме 3 максимальная подалгебра A равномерной алгебры B обладает только одним неодноточечным максимальным множеством антисимметрии E_{i_1}, для которого $A|E_{i_1} \neq B|E_{i_1}$. Компакт E_{i_1} может служить максимальным множеством антисимметрии и для алгебры B, и в этом случае эти алгебры будут одинаковым образом разбивать X на максимальные множества антисимметрии. Если же это не так, то в E_{i_1} будут выделяться максимальные множества антисимметрии (возможно, и неодноточечные) алгебры B, причем „число" таких множеств совершенно произвольно.

Эта ситуация значительно упрощается при предположении, что подалгебра A имеет коразмерность 1 в B.

Теорема 4. *Пусть* $\dim B/A=1$. *Если алгебра A антисимметрична на X, то число максимальных множеств антисимметрии алгебры B не превосходит* 2.

Доказательство. Предположим сперва, что алгебра A совпадает с ядром точечной производной на B в точке $\varphi \in M(B)$. В этом случае из антисимметричности A следует антисимметричность B. Действительно, пусть функция $h \in B$ принимает вещественные значения на X. Тогда, как легко видеть, вещественная функция $f=(h-\varphi(h))^2$ принадлежит к A, поэтому $f=0$, т. е. $h=\varphi(h)$.

Пусть теперь $A=\ker(\varphi_1-\varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 — мультипликативные функционалы на B, и пусть h — непостоянная вещественная функция из B. Можно считать, что $\varphi_1(h)=0$ и $\varphi_2(h)=1$. Тогда $(2h-1)^2 \in A$, и в силу антисимметрии алгебры A $(2h-1)^2=1$, откуда $h^2=h$. Таким образом, всякая вещественная функция из B может принимать не более двух значений, в частности функция h принимает значения 0 и 1. Положим

$$F_0=\{x \in X\colon h(x)=0\},\quad F_1=\{x \in X\colon h(x)=1\}.$$

Легко заметить, что $B|F_0=A|F_0$, $B|F_1=A|F_1$ и что эти сужения замкнуты.

Чтобы доказать теорему, достаточно убедиться, что сужения $A|F_0$ и $A|F_1$ являются антисимметричными алгебрами. Допустим, что функция $f \in A$ вещественна на F_1. Тогда, как было показано, функция fh может принимать два значения: 0 и какое-то μ. Поскольку $fh=g+\lambda h$, где $g \in A$, λ — комплексное число, функция $fg \in A$ на компакте X принимает два значения: 0 или $\mu(\mu-\lambda)$. Но алгебра A антисимметрична, поэтому $\mu(\mu-\lambda)=0$, откуда следует, что функция f постоянна на F_1. Аналогично доказывается, что алгебра $A|F_0$ не содержит непостоянных вещественных функций.

Следствие 1. Если $\dim B/A = n$, то число максимальных множеств антисимметрии алгебры B, не являющихся максимальными множествами антисимметрии алгебры A, не превосходит $2n$.

Доказательство. Обозначим через $E_1, \cdots, E_k$ совокупность всех тех неодноточечных максимальных множеств антисимметрии алгебры A, для которых $A_{E_l} = B_{E_l}$. Ясно, что $k \leqslant n$ (теорема 3), и если $m_l = \dim B_{E_l} / A_{E_l}$, то $\sum\limits_{l=1}^{k} m_l = n$. В силу теоремы 4 компакт E_l может разбиться на не более чем $m_l + 1$ максимальных множеств антисимметрии алгебры B_{E_l}, или, что то же, алгебры B. Поэтому число максимальных множеств антисимметрии алгебры B, не являющихся максимальными множествами антисимметрии алгебры A, не больше

$$\sum_{l=1}^{k} (m_l + 1) \leqslant 2n.$$

В то же время согласно теореме 3 число максимальных множеств антисимметрии алгебры A, не являющихся максимальными множествами антисимметрии алгебры B, не превосходит n.

Следствие 2. Если компакт X связен и $\dim B/A < \infty$, то из антисимметричности алгебры A вытекает антисимметричность алгебры B.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Поступила 15.I.1975

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ. Հավասարաչափ հանրահաշիվների մաքսիմալ ենթահանրահաշիվները (ամփոփում)

Ապացուցվում են թեորեմներ B *հավասարաչափ հանրահաշվի* A *մաքսիմալ ենթահանրահաշվի Շիլովի եզրի և անտիսիմետրիկ բազմությունների ամբողջության վերաբերյալ։ Առանձին դիտարկվում է մասնավոր դեպքը, երբ* dim B/A= 1.

B. T. BATIKIAN. *Maximal subalgebras of uniform algebras* (summary)

Theorems on Silov boundary and totality of sets of antisymmetry for maximal subalgebra A of uniform algebra B are proved.

The special case, when $\dim B/A = 1$ is considered separately.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer.* On algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1953, 866—869.
2. *W. Rudin.* Subalgebras of space of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, 825—830,
3. *K. Hoffman, I. M. Singer.* Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Am. J. Math., 79, 1957, 295—305

4. *K. Hoffman, I. M. Singer.* Maximal subalgebras of continuous functions. Acta Math., 103, 1960, 217—241.
5. *I. Glicksberg.* Maximal algebras and a theorem of Rado, Pacif. J. Math., 14, 1964, 919—941.
6. *Е. А. Горин, В. М. Золотаревский.* Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией, Матем. сб., 85, № 3, 1971, 373—387.
7. *Б. Т. Батикян, С. А. Григорян.* Функциональные алгебры конечного типа. УМН, № 6, 1974, 155—156.
8. *G. M. Leibowitz.* Lectures on complex function algebras, Scott—Foresman, Chicago, 1970.
9. *Е. А. Горин.* Подалгебры конечной коразмерности, Матем. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.
10. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, Изд. „Мир", М., 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

Е. А. ГОРИН, М. И. КАРАХАНЯН

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРЫ ВСЕХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЛОКАЛЬНО СВЯЗНОМ КОМПАКТЕ

1°. В этой работе мы будем рассматривать полупростые коммутативные банаховы алгебры с единицей (или без единицы) над полем C комплексных чисел. Как известно, каждая такая алгебра A может быть реализована в виде алгебры (не обязательно всех) непрерывных функций на пространстве M_A ее максимальных регулярных идеалов. Практически однако алгебра A зачастую предъявляется в виде некоторой подалгебры алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X. При этом X естественно отображается в M_A, но не обязательно совпадает со всем этим пространством. В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такой ситуацией, и факт или требование совпадения X с M_A будет специально оговариваться.

Данная работа тесно связана с заметками Е. М. Чирки [1], [2]. Побудительным мотивом нам послужило желание получить возможно более прозрачное доказательство содержащихся там результатов. Напомним, что один из основных результатов Чирки таков. Пусть Γ — простая жорданова дуга в $\mathbf{C}^2$, обладающая тем свойством, что ее проекция на одну из координатных плоскостей не содержит внутренних точек. Тогда каждая непрерывная функция на Γ допускает равномерную аппроксимацию функциями, голоморфными в окрестности Γ. Попутно в [1] и [2] отмечается следующая теорема. Пусть A — некоторая sup-алгебра на произвольном локально связном компакте X. Если в алгебре A разрешимы все квадратные уравнения, то $A = C(X)$. Фактически первое из этих утверждений сравнительно просто вытекает из второго.

Быть может, нелишне сопоставить сформулированную выше теорему с другими похожими результатами. Хорошо известно, что суперпозиции с голоморфными функциями не выводят за пределы коммутативной банаховой алгебры и что класс голоморфных функций в этом смысле, вообще говоря, не расширяем. Более того, в ряде случаев удается сделать заключение о совпадении A с $C(X)$ в предположении, что в пределах алгебры A допустимы суперпозиции с некоторой функцией, искажающей модуль непрерывности. Один из первых результатов такого сорта принадлежит И. Кацнельсону [3] и состоит в следующем. Предположим, что $\omega\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ — такая непрерывная функция, для которой $\omega(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(t)}{t} = \infty$. Пусть

A — полупростая симметричная регулярная банахова алгебра с единицей, реализованная в виде алгебры функций на M_A. Оказывается, $A = C(M_A)$, если $\omega(f) \in A$ для любой функции $f \in A$ с множеством значений на отрезке [0,1]. Имеется вариант этой теоремы и для несимметричных алгебр (см. [4] и [5]). Любопытно отметить, что условие $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\omega(t)}{t} = \infty$ здесь нельзя ослабить до $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\frac{\omega(t)}{t} = \infty$.

Дж. Вермер [6] показал, что $A = C(X)$, если A — разделяющая точки и содержащая константы замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ и функции вида $\operatorname{Re} f$, $f \in A$, образуют кольцо. В серии работ А. Бернара (см., в частности, [7]) среди прочего обнаружено, что эта теорема Вермера распространяется на более широкие классы алгебр.

Теорема Чирки в одном пункте существенно отличается от перечисленных результатов. Действительно, ее основное условие заключается не в предположении, что некоторая однозначная функция действует в алгебре (как в теореме Кацнельсона), а в требовании разрешимости уравнений $g^2 = f$, $f \in A$. Такое уравнение даже в простейшем случае $A = C([0,1])$ может допускать континуум различных решений (скажем, при правой части $f(t) = t \sin\frac{1}{t}$), и обстоятельства такого сорта делают довольно запутанным прямое доказательство, использующее выбор „подходящих ветвей".

Другое важное отличие — предположение о локальной связности компакта X. Это предположение существенно с разных точек зрения. С одной стороны, имеется пример Б. Коула (см. [8], добавление) нетривиальной sup-алгебры, в которой разрешимы все двучленные уравнения. С другой стороны, согласно теореме Р. Каунтримана [9], если X—связный метризуемый компакт и алгебра $C(X)$ алгебраически замкнута, то компакт X локально связен и наследственно уникогерентен. Последнее условие означает, что для любых связных замкнутых подмножеств X_1, $X_2 \subset X$ их пересечение связно. Легко показать, что в предположении локальной связности это условие равносильно тривиальности групп $H^1(Y, \mathbf{Z})$ одномерных целочисленных когомологий для всех замкнутых подмножеств $Y \subset X$. Кроме того, алгебраическая замкнутость алгебры $C(X)$ для метризуемых связных компактов X вытекает из локальной связности и наследственной уникогерентности, а также эквивалентна разрешимости всех квадратных уравнений. Между прочим, последнее контрастирует с положением дел в проблеме глобальной разрешимости алгебраических уравнений с простыми корнями в каждой точке [10].

Дальнейший план статьи таков. В п. 2 фиксируются обозначения и для удобства напоминаются некоторые стандартные факты. Основной результат, обобщающий теорему Чирки, содержится в п. 3. Наш подход основан на привлечении обычных в этих вопросах дополнительных средств: теоремы Рисса и рассмотрении минимальных носителей мер, отвечающих крайним точкам шара, ортогонального к алгебре. Хотя мы сохраняем некоторые элементы рассуждений Чирки, в частности, „радикалы" типа $(1+f^n)^{1/n}$ и многократное использование диагонального процесса, привлечение таких средств, делает доказательства в целом, на наш взгляд, более прозрачными.

Считая компакт X локально связным, мы предполагаем, что для каждого элемента f некоторой замкнутой подалгебры A алгебры $C(X)$ существует такое целое $k=k(f)\geqslant 2$ и такой элемент $g\in A$, для которых $g^{k(f)}=f$. В этом предположении элементы алгебры A постоянны на носителях указанных выше мер. В сочетании с теоремой Хана—Банаха и теоремой Крейна—Мильмана о крайних точках последнее просто означает, что алгебра A симметрична.

Наиболее важные следствия этого обстоятельства содержатся в п. 4. Разумеется, проверка разрешимости уравнений $g^k=f$ для любых $f\in A$ весьма затруднительна. Однако при некоторых дополнительных предположениях ее удается избежать. Пусть X — локально связный компакт и A—замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, содержащая константы. Предположим, что $H^1(M_A, \mathbf{Z})=0$. Если теперь $\operatorname{int}\hat{f}(M_A)=$ $=\varnothing$, где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда элемента $f\in A$, то, как оказывается, $\bar{f}\in A$.

Последний результат довольно хорошо приспособлен для доказательства некоторых теорем о голоморфной аппроксимации, и мы приводим в качестве следствий доказательства теоремы Чирки об аппроксимации в $\mathbf{C}^2$ и варианта теоремы типа Г. Штольценберга [11]. Отметим один промежуточный ход: если компакт $K\subset\mathbf{C}^n$ таков, что $H^1(K, \mathbf{Z})=0$, то для алгебры $A(K)$ пределов голоморфных функций имеем $H^1(M_{A(K)}, \mathbf{Z})=0$ и $f(K)=\hat{f}(M_{A(K)})$.

Сопоставление теоремы Чирки с результатами Бернара наводит на мысль, что в условиях теоремы Чирки можно освободиться от жесткого предположения относительно нормы. Этот вопрос до конца не выяснен, но в п. 5 мы приводим один предварительный результат.

Для простоты мы считаем рассматриваемые компакты метризуемыми, хотя в большинстве случаев это не существенно.

2°. Пусть X—компакт и $C(X)$—пространство всех непрерывных комплексных функций на X. Рассмотрим непрерывный линейный функционал ψ на пространстве $C(X)$. Замкнутое подмножество $Y\subset X$ называется носителем функционала ψ, если $\psi|I(Y)=0$, где $I(Y)=\{f\in$ $\in C(X)\colon f|Y=0\}$. Пересечение любых двух носителей есть снова носитель. Поэтому для каждого функционала ψ существует наименьший замкнутый носитель, который обозначается через $\operatorname{supp}(\psi)$. Если $\operatorname{supp}(\psi)=\varnothing$, то $\psi=0$; если $\operatorname{supp}(\psi)$ сводится к единственной точке x_0, то $\psi(f)=cf(x_0)$, где c — константа. По теореме Рисса функционал ψ допускает интегральное представление при помощи конечной комплексной бэровской меры ν, сосредоточенной на $\operatorname{supp}(\psi)$. В сочетании с теоремой Жордана о разложении это гарантирует существование такой вероятностной меры μ, сосредоточенной на $\operatorname{supp}(\psi)$, и такой функции $Q \in L^\infty(\mu)$, что $d\nu = Q d\mu$ и

$$\psi(f) = \int\limits_X Qf d\mu. \tag{1}$$

При этом

$$\|\psi\| = \int\limits_X |Q|\, d\mu \tag{2}$$

и, кроме того, $\int\limits_U |Q|\, d\mu > 0$, если U — такое (открытое) множество, для которого $\mu(U) > 0$. Формула (2) имеет место для любого функционала ψ, представленного в виде (1) с вероятностной мерой μ и произвольным ядром $Q \in L^1(\mu)$. В частности, если Q_1 и Q_2 — такие ядра из $L^1(\mu)$, что μ-почти всюду $Q_1 Q_2 = 0$, то для соответствующих функционалов ψ_1, ψ_2 имеем $\|\psi_1 + \psi_2\| = \|\psi_1\| + \|\psi_2\|$.

Каждое топологическое пространство разбивается на компоненты—максимальные связные подмножества. Компоненты топологического пространства замкнуты. Пространство называется локально связным, когда для каждой точки и любой ее окрестности компонента окрестности, содержащая данную точку, является окрестностью этой точки. Заметим, что в соответствии с терминологией Дж. Келли [12] окрестностью точки называется произвольное (не обязательно открытое) множество, открытое ядро которого содержит данную точку. Компоненты открытых множеств локально связного пространства открыты. В локально связном компакте семейство открытых связных подмножеств, а также семейство компактных связных подмножеств образует базу топологии.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Совокупность обратимых относительно умножения элементов алгебры A образует группу, которая обозначается через $G(A)$. Группа $G(A)$ наделяется топологией, индуцированной вложением в A, и превращается тем самым в топологическую группу. Компонентой единицы в $G(A)$ служит подгруппа $\exp(A)$, состоящая из экспонент элементов алгебры A. Согласно теореме Аренса—Ройдена (см., например, [13], стр. 123) факторгруппа $G(A)$ по $\exp(A)$ полностью определяется пространством M_A максимальных идеалов алгебры A. Именно, указанная факторгруппа изоморфна группе $H^1(M_A, \mathbb{Z})$ одномерных целочисленных (чеховских) когомологий компакта M_A. В частном случае $A = C(X)$ это классический результат Брушлинского—Эйленберга. Напомним еще, что для достаточно „хороших" компактов X группа $H^1(X, \mathbb{Z})$ изоморфна группе $\operatorname{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z})$, где $\pi_1(X)$ — фундаментальная группа. Легко показать (см. приводимые ниже леммы), что в случае локально связных компактов группа $H^1(X, \mathbb{Z})$ тривиальна, если каждый обратимый элемент f алгебры $C(X)$ представим в виде $g^{k(f)}$, где $g \in C(X)$ и $k(f) \geqslant 2$.

3°. Теорема 1. *Пусть X—локально связный компакт и A—такая замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, что для каждого элемента $f \in A$ существует такое целое $k = k(f) \geqslant 2$ и такой элемент $g \in A$, что $g^{k(f)} = f$. Тогда алгебра A симметрична.*

Очевидно, что если в условиях теоремы алгебра A разделяет компакт X, то она содержит максимальный идеал алгебры $C(X)$, а если к тому же она обладает единицей, то $A = C(X)$. Теорема Чирки о корнях получается отсюда в частном случае $k(f) = 2$.

Утверждение теоремы 1 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме. Пусть ψ — крайняя точка множества функционалов на $C(X)$ с нормой $\leqslant 1$, аннулирующих алгебру A. Тогда на supp (ψ) все функции из алгебры A сохраняют постоянное значение. Действительно, с одной стороны, если ψ—крайняя точка, то supp (ψ) является множеством антисимметрии относительно A (см., например, [13], стр. 87). Поэтому, если алгебра A симметрична, то все функции из A постоянны на supp (ψ). С другой стороны, если выполняется сформулированное выше условие, то каждый из указанных там функционалов ψ будет аннулировать любую функцию, равную нулю на общих нулях и постоянную на общих линиях уровней элементов алгебры A. Поэтому из теоремы Хана—Банаха и теоремы Крейна—Мильмана вытекает, что алгебра A содержит все такие функции и, следовательно, симметрична. Мы будем доказывать теорему 1 именно в последней формулировке.

Доказательству теоремы мы предпошлем три простые леммы, которые можно было бы и объединить за счет некоторого усложнения формулировки.

Лемма 1. *Пусть X—связное локально связное и локально компактное сепарабельное метрическое пространство. Предположим, что последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций равномерно на компактных подмножествах сходится к функции f, отличной от 0 всюду на X. Пусть $\{g_n\}$—такая последовательность непрерывных функций на X, что $g_n^{k_n} = f_n$, где $\{k_n\}$—возрастающая к бесконечности последовательность натуральных чисел. Тогда из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая равномерно сходится на компактных подмножествах к константе с единичным модулем.*

Доказательство. Имея в виду диагональный процесс, достаточно установить существование подпоследовательности с указанными свойствами для некоторой окрестности данной точки $x_0 \in X$. Но так как $f(x_0) \neq 0$, то найдется такое n_0 и такая связная компактная окрестность V точки x_0, что $|f_n(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2} |f(x_0)|$ при всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in V$. Из представления

$$f_n(x) = f(x)\left|1 - \frac{f(x) - f_n(x)}{f(x)}\right|$$

ясно существование таких функций $h_n \in C(V)$, что $f_n = \exp h_n$ всюду на V. При этом функции h_n можно считать ограниченными в совокупности. Из связности окрестности V вытекает, что при всех $x \in V$ имеем $g_n(x) = c_n \exp \dfrac{h_n(x)}{k_n}$, где c_n — константа с модулем 1. Теперь достаточно выбрать сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{c_n\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть X — локально связный компакт и последовательность функций $f_n \in C(X)$ равномерно сходится к некоторой функции f. Пусть $g_n \in C(X)$ и $g_n^{k_n} = f_n$, где $\{k_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Тогда из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах, расположенных внутри множества $\{x: f(x) \neq 0\}$. Если $k_n \to \infty$, то предел этой подпоследовательности на компонентах множества $\{x: f(x) \neq 0\}$ сохраняет постоянное значение с модулем 1. Если $k_n \equiv k$, то подпоследовательность можно выбрать равномерно сходящейся всюду на X и ее предел g таков, что $g^k = f$.*

Доказательство. Два первых утверждения непосредственно вытекают из леммы 1: достаточно рассмотреть компоненты множества $\{x: f(x) \neq 0\}$ и затем использовать диагональный процесс. Для доказательства последнего утверждения теперь достаточно заметить, что множества $\{x: |f(x)| \geqslant \varepsilon > 0\}$ компактны и что $|g_n(x)| \leqslant \varepsilon^{1/k}$, если $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть X — локально связный компакт и A — такая замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, что для любого $f \in A$ существует такое натуральное $k = k(f) \geqslant 2$ и такой элемент $g \in A$, что $g^{k(f)} = f$. Тогда для любого $f \in A$ и любого натурального p существует такой элемент $h \in A$, что $uh^p = f$, где u — функция на X, модуль которой всюду равен 1 и которая постоянна на компонентах связности множества $\{x: f(x) \neq 0\}$.*

Доказательство. Положим $N(f) = \{x: f(x) = 0\}$ и пусть $X \setminus N(f) = \bigcup_i X_i$ — разбиение на компоненты связности. Итерируя условие леммы, мы можем для данного элемента $f \in A$ указать такую последовательность элементов $g_n \in A$ и такую последовательность натуральных чисел $k_n \to \infty$, что $g_n^{k_n} = f$. Согласно лемме 2 мы можем считать, переходя если необходимо к подпоследовательности, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится на компактах, расположенных внутри подпространства $X \setminus N(f)$. При этом $\lim g_n(x) = c_i$, где c_i — константа, $|c_i| = 1$, когда $x \in X_i$. Положим теперь $k_n = pl_n + r_n$ с $0 \leqslant r_n < p$. Не ограничивая общности последовательность r_n можно считать стационарной, $r_n = r$. Положим

$h_n = g_n^{l_n}$. Тогда $g_n^r h_n^p = f$. Последовательность $\{h_n\}$, снова по лемме 2, можно считать равномерно сходящейся на компактных подмножествах в $X \setminus N(f)$. Кроме того

$$|h_n| = |f|^{\frac{l_n}{k_n}} = |f|^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{r}{k_n}\right)}.$$

Таким образом, последовательность $\{h_n\}$ оказывается равномерно сходящейся всюду на X, и ее предел h принадлежит алгебре A Положим функцию u равной 1 на $N(f)$ и равной $\lim g_n^r$ вне $N(f)$. Ясно, что $|u| = 1$ всюду и что $f = uh^p$. Лемма доказана.

Замечания. (1) Фактически лемма имеет индивидуальный характер: для данного элемента $f \in A$ достаточно предположить существование таких последовательностей $g_n \in A$ и $k_n \to \infty$, что $g_n^{k_n} = f$. (2) В случае $A = C(X)$, исправляя h, можно добиться выполнения равенства $h^p = f$. Вместе с теоремой 1 аналогичный факт будет установлен и в общем случае.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функционал ψ и представим его в соответствии со сказанным в п. 2 мерой $d\nu = Qd\mu$. Достаточно установить, что функционал ψ сосредоточен на пересечении множеств уровня функций вида $|f|$, $f \in A$, поскольку затем мы сможем воспользоваться тождеством $|f e^f| = |f| e^{\operatorname{Re} f}$ и тем обстоятельством, что $fe^f \in A$, если $f \in A$. Введем следующие обозначения:

$$N(f) = \{x\colon f(x) = 0\},$$
$$E(f) = \{x\colon |f(x)| = 1\},$$
$$E^+(f) = \{x\colon |f(x)| > 1\},$$
$$E^-(f) = \{x\colon |f(x)| < 1\}.$$

Предположим, что теорема неверна. Тогда найдется такая функция $f \in A$, для которой $\mu(E(f)) = 0$ и $\mu(E^{\pm}(f)) > 0$. Далее мы будем различать два случая в зависимости от того $\mu(N(f)) > 0$ или $\mu(N(f)) = 0$. Первый случай проще, но на нем уже видны некоторые основные моменты доказательства.

Итак, пусть сначала $\mu(N(f)) > 0$.

В соответствии с леммой 3 имеет место представление $f = u_n g_n^n$, где $g_n \in A$ и $n \to \infty$. Пусть $X \setminus N(f) = \bigcup_j X_j$ — разбиение на компоненты связности. В силу леммы 2 из последовательности $\{g_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах, расположенных внутри множества $X \setminus N(f)$. Будем считать переход к подпоследовательности совершенным. Поскольку $g_n | N(f) = 0$ последовательность $\{g_n\}$ оказывается сходящейся всюду на X. Кроме того, нормы элементов g_n ограничены в совокупности и, если положить $v(x) = \lim g_n(x)$, то мы будем иметь $v | N(f) = 0$ и $|v(x)| = 1$ вне

$N(f)$. По теореме Лебега $\int\limits_X v^l h d\nu = 0$ для всех натуральных l и всех $h \in A$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\mu(X_1) > 0$ и $v|X_1 = 1$. Положим

$$w(x) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} (v(x) + \cdots + v^r(x)).$$

Ясно, что предел существует для каждого $x \in X$. Кроме того, $w(x) = 1$ при $v(x) = 1$ и $w(x) = 0$ в остальных точках. Пусть

$$\psi_1(h) = \int\limits_X hw d\nu, \quad \psi_2(h) = \int\limits_X h(1 - w) d\nu. \tag{3}$$

Очевидно, что $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Так как при всех натуральных l и всех $h \in A$ имеем $\int\limits_X hv^l d\nu = 0$, то

$$\psi_1(h) = \psi_2(h) = 0 \text{ для всех } h \in A. \tag{4}$$

Далее

$$\|\psi_1\| = \int\limits_X |wQ| d\mu > 0, \quad \|\psi_2\| = \int\limits_X |(1 - w) Q| d\mu > 0 \tag{5}$$

и

$$\|\psi\| = \int\limits_X |Q| d\mu = \int\limits_X |wQ| d\mu + \int\limits_X |(1 - w) Q| d\mu = \|\psi_1\| + \|\psi_2\|. \tag{6}$$

Но по условию, ψ — крайняя точка. Поэтому разложение $\psi = \psi_1 + \psi_2$ с условиями (4), (5), (6) невозможно.

Предположим теперь, что $\mu(N(f)) = 0$.

Пусть $X \setminus (N(f) \cup E(f)) = \bigcup\limits_j X_j$ — разбиение на компоненты связности. Рассмотрим последовательность функций $f^n + f^{2n}$. В соответствии с леммой 3 положим $u_n g_n^n = f^n + f^{2n}$. Здесь $g_n \in A$ и u_n постоянны на множествах X_j. На каждом компактном подмножестве множества $X_j \subseteq E^-(f)$ правая часть равенства

$$\left(\frac{g_n}{f}\right)^n = \bar{u}_n (1 + f^n) \tag{7}$$

равномерно стремится к ненулевой константе. Поэтому, используя лемму 1 и диагональный процесс, можно перейти к подпоследовательности последовательности $\frac{g_n}{f}$, которая равномерно сходится на компактных подмножествах каждого из множеств $X_j \subseteq E^-(f)$. Аналогично можно поступить с последовательностью $\frac{g_n}{f^2}$ на множествах $X_j \subseteq E^+(f)$. Не меняя для краткости обозначений, будем считать переход к подпоследовательностям совершенным. Тогда всюду на $\bigcup\limits_j X_j$ существует $\lim g_n(x)$, причем сходимость равномерна на компактах. Ясно, что

$$\lim g_n(x) = \begin{cases} c_j f(x), \text{ если } x \in X_j \subseteq E^-(f), \\ c_j f(x)^2, \text{ если } x \in X_j \subseteq E^+(f), \end{cases} \tag{8}$$

где c_j — константы, $|c_j| = 1$. Отметим, что множество, на котором предел может не существовать, содержится в $E(f)$ и, следовательно, имеет нулевую μ-меру. Нам потребуется следующее легко проверяемое неравенство: если $|\zeta| < 1$, то

$$|(1+\zeta)^{1/n} - 1| \leqslant \frac{|\zeta|}{n(1-|\zeta|)^2} \tag{9}$$

(имеется в виду главное значение корня). Из (7), (8) и (9) вытекает, что при $x \in X_j \subseteq E^-(f)$

$$g_n(x) = c_{nj} f(x) + R_{nj}(x), \tag{10}$$

где c_{nj} — константа

$$|c_{nj}| = 1, \; c_{nj} \to c_j \text{ и } |R_{nj}(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^n}{n(1-|f(x)|^n)^2}.$$

Аналогично, при $x \in X_j \subseteq E^+(f)$

$$g_n(x) = c_{nj} f(x) + R_{nj}(x) \tag{11}$$

с теми же условиями на

$$c_{nj} \text{ и } |R_{nj}(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^{-n}}{n(1-|f(x)|^{-n})^2}.$$

Для определенности будем считать, что $X_1 \subseteq E^-(f)$ и $\mu(X_1) > 0$. По всякому счетному набору числовых последовательностей, стремящихся к бесконечности, можно указать последовательность, стремящуюся к бесконечности медленнее любой последовательности набора. Поэтому существует такая последовательность $m_n \to \infty$, что $\frac{m_n}{n} \to 0$ и

$$|c_{nj} - c_{n1}|^{1/m_n} \to 0 \text{ при всех } j, \text{ для которых } c_j = c_1. \tag{12}$$

В соответствии с леммой 3 выберем такие $h_n \in A$ и $\dot{u}_n$, что

$$\dot{u}_n h_n^{m_n} = g_n - c_{n1} f.$$

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $0 \leqslant \varepsilon < 1$, то $(a+b)^\varepsilon \leqslant a^\varepsilon + b^\varepsilon$. Поэтому, если $x \in X_j \subseteq E^-(f)$ и $c_j = c_1$, то, согласно (10) и (12)

$$|h_n(x)| \leqslant |c_{nj} - c_{n1}|^{1/m_n} + |R_{nj}(x)|^{1/m_n} \to 0.$$

Если же $x \in X_j \subseteq E^-(f)$ и $c_j \neq c_1$ или $x \in X_j \subseteq E^+(f)$, то ввиду (8) и (11)

$$\lim (g_n(x) - c_{n1} f(x)) \neq 0,$$

причем во всех трех ситуациях сходимость является равномерной на компактах, внутренних к X_j. Из леммы 1 теперь вытекает, что подходящая подпоследовательность последовательности $\{h_n\}$ будет равномерно сходиться на компактных подмножествах множества $X \setminus (N(f) \cup \cup E(f))$. Считая, что переход к подпоследовательности совершен, положим $v(x) = \lim h_n(x)$. Тогда $v \in L^\infty(\mu)$, $|v(x)| \leq 1$ почти всюду по мере μ и $v|X_j = 0$, если $X_j \subseteq E^-(f)$ и $c_j = c_1$. Вместе с тем, если, например, $X_j \subseteq E^+(f)$, то $v|X_j$ — константа, модуль которой равен 1. Будем для определенности считать, что $X_2 \subseteq E^+(f)$ и $\mu(X_2) > 0$. Пусть $v|X_2 = e^{i\theta}$ и $\bar{v} = ve^{-i\theta}$. Как и в первом случае, меры $\bar{v}' d\nu$ ортогональны к алгебре A. Построим по функции $\bar{v}$ функцию w в соответствии с построением функции w в первом случае. Тогда в силу условий $\mu(X_1) > 0$, $\mu(X_2) > 0$ меры $w d\nu$ и $(1-w)\, d\nu$ зададут пару функционалов, в сумме дающих ψ и удовлетворяющих условиям (4), (5), (6). Тем самым снова возникает противоречие. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. (1). Предположение о метризуемости компакта X легко снимается. Действительно, все множества X_j являются σ-компактными и, кроме того, среди чисел $\mu(X_j)$ не может быть несчетного множества положительных даже в том случае, когда семейство $\{X_j\}$ несчетно. (2) Легко видеть, что в условиях теоремы алгебра A, даже если она не разделяет компакта X, естественно изоморфна $C(Y)$ или максимальному идеалу в $C(Y)$, где Y получается из X отождествлением общих линий уровня. (3) Основным случаем в теореме 1 можно считать тот, когда предполагается разрешимость уравнений $g^k = f$ с фиксированным $k \geqslant 2$. Это условие вытекает из формально более общего условия разрешимости уравнений

$$g^k + a_1 g^{k-1} + \cdots + a_k = f$$

с некоторыми фиксированными коэффициентами $a_1, \cdots, a_k \in C(X)$. Действительно, пусть $f \in A$ и пусть для натуральных m функции $g_m \in A$ таковы, что

$$g_m^k + a_1 g_m^{k-1} + \cdots + a_k = m^k f.$$

Полагая $g_m = mh_m$, мы получим

$$h_m^k + \frac{a_1}{m} h_m^{k-1} + \cdots + \frac{a_k}{m^k} = f. \tag{13}$$

Для каждой точки $x \in X \setminus N(f)$ существует такая связная компактная окрестность, на которой решения h_m уравнения (13) равномерно сходятся при $m \to \infty$. Вместе с тем, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность V_ε множества $N(f)$, что $|h_m(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in V_\varepsilon$ и всех достаточно больших m. Отсюда следует, что из семейства $\{h_m\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на X подпоследовательность. Пусть h — предел этой последовательности. Тогда $h \in A$ и $h^k = f$.

4°. Основное условие теоремы 1, состоящее в разрешимости всех уравнений $g^k = f$, $f \in A$, трудно проверяемо. Гораздо чаще удается проследить за разрешимостью таких уравнений с правыми частями $f \in G(A)$. Напомним, что $G(A)$ — совокупность обратимых элементов алгебры A. Например, если $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$, то $G(A) = \exp(A)$ и, следовательно, уравнения $g^k = f$ разрешимы в A при любых натуральных k и $f \in G(A)$. Вместе с тем, из разрешимости указанных уравнений с обратимыми правыми частями в специальных ситуациях может последовать разрешимость таких уравнений с произвольными правыми частями, и теорема 1 начинает работать. Следующий весьма простой результат иллюстрирует сказанное.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры всех непрерывных функций на локально связном компакте X, причем $X = M_A$. Если $G(A)$ плотно в A и $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, то $A = C(X)$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 нам достаточно установить разрешимость уравнений $g^2 = f$. Пусть $f \in A$. По условию найдется такая последовательность элементов $f_l \in G(A)$, которая равномерно сходится к f. Так как группа $H^1(X, \mathbf{Z})$ тривиальна (здесь хватило бы делимости, но в данной ситуации делимость равносильна тривиальности), то существуют такие элементы $g_l \in A$, что $g_l^2 = f_l$. По лемме 2, из последовательности g_l можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, и ее предел $g \in A$ удовлетворяет соотношению $g^2 = f$. Теорема доказана.

Следствие. *Если A — такая замкнутая подалгебра в $C([0, 1])$, что $M_A = [0, 1]$ и $G(A)$ плотно в A, то $A = C([0, 1])$.*

Следующий пример показывает, что условие $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$ в теореме 2 существенно. Пусть X — „швейцарский сыр", т. е. плоский компакт без внутренних точек, который получается из единичного диска в результате удаления из него последовательности $\{\Delta_l\}$ открытых дисков, замыкания которых не пересекаются (см., например, [13], стр. 42). Пусть $R(X)$ — алгебра равномерных пределов на X рациональных функций с полюсами вне X. Всегда $M_{R(X)} = X$. Очевидно, что в рассматриваемой ситуации $G(R(X))$ плотно в $R(X)$. Далее, швейцарский сыр X локально связен: если $\zeta_1, \zeta_2 \in X$, то заменяя отдельные участки отрезка $[\zeta_1, \zeta_2]$ подходящими дугами окружностей $\bar{\Delta}_l \setminus \Delta_l$, мы получим проходящую в X кривую длины $\leqslant \pi |\zeta_2 - \zeta_1|$, соединяющую ζ_1 с ζ_2. Вместе с тем, если $\sum \rho_l < \infty$, где ρ_l — радиус диска Δ_l, то $R(X) \neq C(X)$.

Условие $X = M_A$ в теореме 2, конечно, обременительно. Если алгебра A предъявлена в виде (замкнутой) подалгебры алгебры $C(X)$, то возникает необходимость сравнивать поведение функций $f \in A$ на X и $\hat{f}$ на M_A, где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда, с точки зрения выполнения условий $f \neq 0$, $\hat{f} \neq 0$ и логарифмируемости. Обычно поведение f нагляднее, но полная информация заключается в поведении $\hat{f}$. Следующие примеры (первый из них принадлежит Вермеру, см. [14], второй указал нам В. Я. Лин) демонстрируют, что связь между f и $\hat{f}$ может оказаться весьма причудливой.

(1) Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^2$ компакт $X = X_1 \cup X_2$, где

$$X_1 = \{(z_1, z_2): z_1 = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, |z_2| = 1\},$$

$$X_2 = \{z_1, z_2): z_1 = e^{i\theta}, \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, z_2 = 0\}.$$

Пусть A — алгебра равномерных пределов полиномов от z_1, z_2 на X. Ясно, что $z_1|X \in \exp(C(X))$. Однако полиномиальная оболочка компакта X содержит точку (0, 0) и, следовательно, $z_1 \overline{\in} G(A)$.

(2) Рассмотрим афинную часть эллиптической кривой $z_2^2 = z_1^3 + a_1 z_1 + a_2$ в $\mathbf{C}^2$. Это многообразие X гомеоморфно проколотому тору и его фундаментальная группа $\pi_1(X)$ — свободная группа ранга 2. Пусть $a \in \mathbf{C}^2$ и $r_a = \|z - a\|^2$. Согласно лемме Андреотти—Френкеля [15], при почти всех $a \in \mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$ особенности функции $r_a|X$ не вырождены. Отсюда следует [16], что при подходящих a и R многообразие $X_R = X \cap \{r_a \leqslant R^2\}$ гомотопически эквивалентно X. Пусть A —алгебра равномерных пределов полиномов от z_1, z_2 на X_R, где a и R выбраны в соответствии со сказанным выше. Так как X_R — полиномиально выпукло, то $M_A = X_R$. Ясно, что край ∂X_R многообразия X_R совпадает с границей Шилова ∂M_A алгебры A. Хотя этот цикл не гомотопен нулю, он когомологичен (и даже гомологичен) нулю, так как реализует элемент коммутанта фундаментальной группы. Отсюда следует, что если $f \in G(A)$, то $f|\partial X_R \in \exp(C(X_R))$. С другой стороны, так как

$$H^1(M_A, \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X_R), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \neq 0,$$

то, согласно теореме Аренса — Ройдена, $G(A) \setminus \exp(A)$ не пусто. Таким образом, мы встречаемся здесь со следующей ситуацией: сужение каждого обратимого элемента на границу Шилова логарифмируемо, но не каждый обратимый элемент логарифмируем на пространстве максимальных идеалов.

Пусть A—банахова алгебра с единицей непрерывных функций на компакте X. Пару (A, X) мы называем *контактной парой*, если любой элемент $f \in A$, для которого $f(x) \neq 0$ при всех $x \in X$, обратим в алгебре A. Другими словами, (A, X)— контактная пара, если $\hat{f}(M_A) = f(X)$ для любого $f \in A$. Хорошо известны нетривиальные ($X \neq M_A$) примеры контактных пар: алгебры на дугах Вермера (см. [13], стр. 46, 47), алгебра, порожденная ζ и $|\zeta|$ на диске $|\zeta| \leqslant 1$, замыкание по равномерной сходимости на сфере $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1$ в $\mathbf{C}^2$ полиномов от ζ_1, ζ_2 и другие.

Опишем еще один класс контактных пар. Пусть K — компакт в $\mathbf{C}^n$ и $O(K)$ — алгебра функций, голоморфных в окрестности K. Обозначим через $A(K)$ замыкание $O(K)$ по равномерной сходимости на K.

Лемма 4. *Если* $H^1(K, Z) = 0$, *то* $(A(K), K)$ — *контактная пара и, кроме того,* $H^1(M_{A(K)}, Z) = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $f \in A = A(K)$ и $f(x) \neq 0$ при всех $x \in K$, то $f \in \exp(A)$. Пусть c — такая константа, что $|f(x)| > c > 0$ при всех $x \in K$. Продолжим функцию f до непрерывной функции в некоторой открытой окрестности V компакта K. Поскольку группа $H^1(K, Z)$ тривиальна, то для продолженной функции мы будем иметь $f \in \exp(C(V))$, если окрестность V достаточно мала. Кроме того, можно считать, что неравенство $|f(x)| > c$ сохраняется на V. Пусть $0 < 2\varepsilon < c$. Еще уменьшая, если необходимо, окрестность V, мы сможем указать такую голоморфную на V функцию h, что $|f - h| < \varepsilon$ всюду в этой окрестности. Так как

$$h = f\left[1 - \frac{f-h}{f}\right] \text{ на } V, \text{ то } h \in \exp(A).$$

Пусть теперь $\varphi \in M_A$ и μ — представляющая мера на K (например, мера Иенсена, см. [13], стр. 52) для гомоморфизма φ. Тогда

$$\log|\varphi(h)| = \int\limits_K \log|h|\, d\mu,$$

и поэтому $|\varphi(h)| > c - \varepsilon$. Таким образом, $|\hat{h}| > c - \varepsilon$ всюду на M_A. Теперь ясно, что $f \in \exp(A)$, ибо

$$\hat{f} = \hat{h}\left[1 - \frac{\hat{h} - \hat{f}}{\hat{h}}\right] \text{ и } \max_{M_A} |\hat{f} - \hat{h}| \leqslant \max_K |f - h| < \varepsilon.$$

Для локально связных компактов X имеет место следующий „абстрактный" вариант предыдущей леммы.

Лемма 5. *Пусть* X — *локально связный компакт и пусть* A — *замкнутая подалгебра алгебры* $C(X)$, *содержащая единицу. Предположим, что функция* $f \in A$ *не имеет нулей на* X *и что уравнение* $g^k = f$ *разрешимо в* A *для некоторой последовательности показателей* $k = k_l \to \infty$. *Тогда* $f \in \exp(A)$. *В частности, если для любого* $f \in A$ *без нулей на* X *существует такое* $g \in A$, *что* $g^{k(f)} = f$ *при некотором* $k(f) \geqslant 2$, *то* (A, X) — *контактная пара и* $H^1(M_A, Z) = 0$.

Доказательство. Это легко вытекает из леммы 1. Пусть $g_l^{k_l} = f$. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $|g_l|$ равномерно на X сходится. Предельная функция g принадлежит A и локально постоянна. Так как всегда

$$\partial\hat{g}(M_A) \subseteq \hat{g}(\partial M_A) \subseteq g(X),$$

то $g \in \exp(A)$. Следовательно, $g_l \in \exp(A)$ для достаточно далеких номеров, а потому и $f \in \exp(A)$.

Замечания. (1) Лемма 4 применима, в частности, к простым дугам K. Хорошо известно, что если простая дуга K является достаточно гладкой, то $A(K) = C(K)$, и в этом случае утверждение леммы становится тривиальным. Однако, как показал недавно Г. М. Хенкин, вообще говоря, для простых дуг $A(K) \neq C(K)$. (2) Леммы 4 и 5, разумеется, весьма близки по содержанию. Тем не менее, лемма 5 может работать в ситуациях, когда $H^1(X, \mathbf{Z}) \neq 0$. Пусть, например, A — вермеровская алгебра на *замкнутой* дуге $X \subset S^2$. Согласно теореме Аренса (см., [13], стр. 49) пространство M_A совпадает со сферой S^2. Поэтому, формально говоря, лемма 5 здесь применима, хотя $H^1(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

Следующая элементарная лемма потребуется нам для получения основного результата данного пункта. Она позволяет заменить трансцендентную конструкцию „алгебраического расширения" из [1] и [2] явным построением нужного объекта.

Лемма 6. *Пусть K — плоский компакт, причем* $\operatorname{int} K = \varnothing$. *Если функция w на K удовлетворяет алгебраическому уравнению*

$$w^n + p_1(\zeta)\, w^{n-1} + \cdots + p_n(\zeta) = 0,$$

где $p_1, \cdots, p_n$ — полиномы, то $\operatorname{int} w(K) = \varnothing$.

Доказательство. Не ограничивая общности, функцию w можно считать следом алгебраической функции. Поэтому с точностью до замен

$$\zeta \to \alpha\zeta^k + \beta,$$
$$w \to a w^l + b$$

она локально осуществляет гомеоморфизм. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть X — локально связный компакт и A — содержащая константы замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$. Предположим, что $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$. Пусть $f \in A$ и* $\operatorname{int} \hat{f}(M_A) = \varnothing$. *Тогда $\bar{f} \in A$.*

Доказательство. Обозначим через B_0 множество целых алгебраических над f элементов $w \in A$. Другими словами, $w \in B_0$ тогда и только тогда, когда $w \in A$ и для подходящих полиномов $p_1, \cdots, p_n$

$$w^n + p_1(f)\, w^{n-1} + \cdots + p_n(f) = 0.$$

Хорошо известно, что B_0 — подалгебра в A. Кроме того, очевидно, что $w \in B_0$, если $w \in A$ и $w^k \in B_0$ при некотором натуральном k. Согласно лемме 6, для любого элемента $w \in B_0$ имеем $\operatorname{int} \hat{w}(M_A) = \varnothing$. Пусть B — замыкание B_0 в A. Покажем, что для любого элемента $w \in B$ существует такой элемент $g \in B$, что $g^2 = w$. Действительно, для данного $w \in B$ найдется такая последовательность элементов $w_l \in B_0$, что $w_l \to w$ и $\hat{w}_l \neq 0$ всюду на M_A. Поэтому существуют такие $g_l \in A$, что $\hat{g}_l^2 = w_l$. При этом $g_l \in B_0$. Согласно лемме 2, последовательность $\{g_l\}$ можно считать равномерно сходящейся на X. Если g — предел этой последовательности, то $g \in B$ и $g^2 = w$. Таким образом, алгебра B удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, симметрична. Поэтому $\bar{f} \in B \subseteq A$.

Как и в случае теоремы 1, теорему 3 можно сформулировать иначе: если в условиях теоремы 3 функционал ψ на $C(X)$ есть крайняя точка единичного шара, аннулирующего A, то $f|\text{supp}(\psi) = \text{const}$.

Наше первое следствие теоремы 3 аналогично теореме 2.

Следствие 1. *Пусть* A — *равномерная алгебра, реализованная в виде алгебры непрерывных функций на своем пространстве максимальных идеалов. Предположим, что* M_A *локально связно и что* $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$. *Если функции* $f \in A$, *для которых* $\operatorname{int} f(M_A) = \varnothing$, *разделяют компакт* M_A, *то* $A = C(M_A)$.

Здесь можно повторить все сказанное непосредственно после теоремы 2. В частности, как показывает приведенный там пример со швейцарским сыром, условие $H^1(M_A, \mathbf{Z}) = 0$ существенно.

Следствие 2. *Пусть* K — *локально связный компакт в* $\mathbf{C}^n$, *для которого* $H^1(K, \mathbf{Z}) = 0$, *и пусть* $A(K)$ — *равномерное замыкание на* K *алгебры функций, голоморфных в окрестности* K. *Если функции* $f \in A(K)$, *для которых* $\operatorname{int} f(K) = \varnothing$, *разделяют компакт* K, *то* $A(K) = C(K)$.

Действительно, согласно лемме 4, группа $H^1(M_{A(K)}, \mathbf{Z})$ тривиальна и, кроме того, $(A(K), K)$ — контактная пара. Поэтому компакт K разделяет функции из A, для которых $\operatorname{int} \hat{f}(M_A) = \varnothing$, и остается воспользоваться теоремой 3.

В частности, $A(K) = C(K)$, если K — простая дуга, проекции которой на каждую из координатных плоскостей не имеют внутренних точек (именно так интерпретируется многомерный результат Чирки из [1] и [2] на стр. 100 в книге [13]). Разумеется, это верно, когда K — непрерывно дифференцируемая простая дуга, но в этом случае работа Штольценберга [11] дает больше — в ней дополнительно устанавливается, что K полиномиально выпукло.

Следствие 3 (теорема Чирки для $\mathbf{C}^2$). *Пусть* Γ — *простая дуга в* $\mathbf{C}^2$ *и* z_1*-проекция этой дуги не имеет внутренних точек. Тогда* $A(\Gamma) = C(\Gamma)$.

Действительно, согласно теореме 3, минимальный носитель крайней точки единичного ортогонального шара содержится в одной из плоскостей $z_1 = \text{const}$, и остается применить теорему Лаврентьева. Доказательство можно закончить и по-другому: использовать теорему Бишопа об антисимметрии и снова теорему 3 (или 1).

5°. Если в условиях теоремы 1 алгебра A разделяет точки и содержит константы, то $A = C(X)$. Имеются веские основания (см., например, [3], [4], [5], [7]) считать, что априорное предположение о совпадении нормы в алгебре A с sup-нормой на самом деле излишне. В данном пункте мы обсудим этот вопрос, ограничившись для простоты случаем, когда в алгебре A разрешимы уравнения $g^2 = f$. Разумеется, согласно теореме 1 и лемме 2, *замыкание* алгебры A по равномерной сходимости на X совпадает с $C(X)$, и весь вопрос в том, не вытекает ли из разрешимости уравнений $g^2 = f$ дополнительно эквивалентность нормы с sup-нормой.

Мы не знаем полного ответа на поставленный вопрос, однако из приводимой ниже теоремы 4 вытекает, что ответ будет положительным для нормальных алгебр, в которых нет нетривиальных замкнутых примарных идеалов.

Итак, всюду ниже A — банахова алгебра непрерывных функций на компакте X с поточечными операциями, содержащая константы и разделяющая точки. Относительно нормы предполагается, что сходимость по норме мажорирует равномерную сходимость, т. е., что $\max\limits_X |f| \leqslant C\|f\|$. Напомним, что алгебра A называется *нормальной* на X, если для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств $Y_1, Y_2 \subseteq X$ существует такой элемент $f \in A$, что $f|Y_1 = 0$ и $f|Y_2 = 1$.

Теорема 4. *Пусть X — локально связный компакт и A — банахова алгебра непрерывных функций на компакте X. Предположим, что алгебра A нормальна и что для любого элемента $f \in A$ в алгебре A разрешимо уравнение $g^2 = f$. Тогда найдется такое конечное множество $\Phi = \{x_1, \cdots, x_p\} \subset X$, что алгебра A будет содержать все непрерывные функции, равные нулю в окрестности этого множества Φ.*

Мы предпошлем доказательству теоремы 4 несколько определений и лемму, вполне аналогичную, например, предположению 10 из работы Бернара [7].

Для любого замкнутого подмножества $Y \subset X$ через $A|Y$ мы будем обозначать алгебру сужений элементов из A на Y. Алгебра $A|Y$ естественно отождествляется с факторалгеброй алгебры A по замкнутому идеалу $I(Y)$ функций из A, обращающихся в нуль всюду на Y, и в соответствии с этим снабжается нормой (относительно которой она является банаховой алгеброй).

Пусть B — произвольная банахова алгебра. Будем говорить, что в алгебре B уравнение $\xi^2 = \eta$ *ограниченно разрешимо*, если для любого элемента $\eta \in B$ существует такой элемент $\xi \in B$, что $\xi^2 = \eta$ и $\|\xi\| \leqslant c\|\eta\|^{1/2}$, где константа c не зависит от η.

Легко видеть, что если уравнение $\xi^2 = \eta$ ограниченно разрешимо в $A|Y_1$ и если $Y_2 \subseteq Y_1$, то алгебра $A|Y_2$ также обладает этим свойством. Будем говорить, что уравнение $\xi^2 = \eta$ *ограниченно разрешимо в точке* $x_0 \in X$, если существует такая замкнутая окрестность Y этой точки, что уравнение $\xi^2 = \eta$ ограниченно разрешимо в алгебре $A|Y$.

Лемма 7. *В условиях теоремы 4 уравнение $\xi^2 = \eta$ ограниченно разрешимо в каждой точке $x \in X$, кроме, быть может, конечного подмножества $\Phi \subset X$.*

Доказательство. Если предположить противное, то найдется такая бесконечная последовательность Y_k замкнутых подмножеств в X, что $Y_k \cap Y_k' = \varnothing$, где $Y_k' = \overline{\bigcup_{l \neq k} Y_l}$ (черта означает замыкание), и уравнение $\xi^2 = \eta$ не является ограниченно разрешимым в $A|Y_k$ при каждом k. Так как алгебра A нормальна, то отображение $I(Y_k') \to A|Y_k$ сюръективно. Поэтому, в силу теоремы о замкнутом графике, найдется такая последовательность элементов $f_k \in I(Y_k') \subset A$, что $\|f_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}$ и

$$\|g\| \geqslant k, \text{ если } g \in A \text{ и } g^2|Y_k = f_k|Y_k. \tag{14}$$

Так как $\sum \|f_k\| < \infty$, то $f = \sum f_k \in A$. Но ввиду (14) уравнение $g^2 = f$ не может иметь решений в A, и мы получаем противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть Φ — конечное множество, указанное в лемме 7. Покажем сначала, что если $x_0 \overline{\in} \Phi$, то $A|Y = C(Y)$ для подходящей замкнутой окрестности этой точки. Так как X локально связно, то по лемме 7 существует такая замкнутая связная окрестность Y точки x_0, что в алгебре $A|Y$ уравнение $\xi^2 = \eta$ ограниченно разрешимо. Пусть $\eta \in A|Y$ и $\eta(t) \neq 0$ при всех $t \in Y$. По условию существует такой элемент $\xi \in A|Y$, что $\xi^2 = \eta^2$ и $\|\xi\| \leqslant c\|\eta^2\|^{1/2}$, где c не зависит от η. Но так как Y связно и $\eta(t) \neq 0$, то $\xi = \pm\eta$. Таким образом, если $\eta(t) \neq 0$, то $\|\eta\| \leqslant c\|\eta^2\|^{1/2}$. Мы утверждаем, что аналогичное неравенство выполняется для всех $\eta \in A|Y$. Действительно, иначе нашлась бы такая последовательность элементов $\eta_l \in A|Y$, что $\|\eta_l\| = 1$, но $\|\eta_l^2\| \to 0$. Положим $\alpha_l = \max_Y |\eta_l(t)|$. Тогда $\alpha_l > 0$ и $\alpha_l \to 0$. Поэтому, учитывая уже установленное неравенство для элементов без нулей, мы будем иметь

$$\|\eta_l\| \leqslant 2\alpha_l + \|\eta_l + 2\alpha_l\| \leqslant 2\alpha_l + c\,[\|\eta_l^2\| + 4\alpha_l\|\eta_l\| + 4\alpha_l^2]^{1/2} \to 0,$$

что приводит к противоречию. Итак, сходимость по норме в $A|Y$ эквивалентна равномерной сходимости на Y. С другой стороны, согласно теореме 1, семейство A плотно в $C(X)$ и поэтому $A|Y$ плотно в $C(Y)$. Сопоставляя эти обстоятельства, мы получаем, что $A|Y = C(Y)$.

Поскольку алгебра A нормальна, отсюда легко вытекает следующее: для каждой точки $x_0 \overline{\in} \Phi$ существует такая окрестность V, что если $f \in C(X)$ и $f|(X \setminus V) = 0$, то $f \in A$.

Теперь легко закончить доказательство. Пусть $f \in C(X)$ и $f(x) = 0$ в некоторой открытой окрестности V_0 множества Φ. Для каждой точки $x_0 \in X \setminus V_0$ отметим открытую окрестность V, обладающую указанным выше свойством. Вместе с окрестностью V_0 окрестности V образуют открытое покрытие компакта X. Выберем из него конечное покрытие $V_0, V_1, \cdots, V_m$ и пусть $\{e_0, \cdots, e_m\}$ — подчиненное разбиение единицы. Тогда $e_0 f = 0$ и $e_i f \in A$ при $i \geqslant 1$ по доказанному. Следовательно, $f = e_0 f + e_1 f + \cdots + e_m f \in A$. Теорема доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Ереванский государственный
университет

Поступила 15.VII.1974

Ե. Ա. ԳՈՐԻՆ, Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ. Բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների հանրահաշվի մի քանի բնութագրիչ հատկությունների մասին լոկալ կապակցված կոմպակտների վրա *(ամփոփում)*

Տրվում է նոր ապացույց և բերվում են մի քանի ընդհանրացումներ Չիրկայի թեորեմի մասին հավասարաչափ հանրահաշիվների համար, որոնցում լուծելի են երկանդամ հավասարումներ։

Արդյունքներն օգտագործվում են հոլոմորֆ մոտարկման մի քանի խնդիրներում։

E. A. GORIN, M. I. KARAKHANIAN. *On some characteristic properties of the algebra of all continuous functions on a locally connected compact* (summary)

A new proof and some generalizations of the Chirka's theorem concerning the radically—closed algebras is given. The results are applied to some problems of the holomorphic approximation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. М. Чирка.* Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, ДАН СССР, 167, № 1, 1966, 38—40.
2. *Е. М. Чирка.* Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, сб. „Современные проблемы теории аналитических функций“ (по материалам Международной конференции по теории функций, Ереван, 1965), М., Изд. „Наука“, 1966, 324—326.
3. *I. Katznelson.* A characterization of the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff Space, Bull. Am. Math. Soc., 66, № 4, 1960, 313—315.
4. *Е. А. Горин.* Характеристика кольца всех непрерывных функций на бикомпакте, ДАН СССР, 142, № 4, 1962, 781—784.
5. *Е. А. Горин.* О некоторых характеристических свойствах $C(X)$. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 14, 1971, 186—195.
6. *J. Wermer.* The space of real parts of a function algebra, Pacif. J. Math., 13, 1963, 1423—1426.
7. *A. Bernard.* Espace de parties rèelles des éléments d'une algèbre de Banach de fonctions, J. of Funct. Anal., 10, 1972, 387—409.
8. *R. S. Countryman, Jr.* On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed, Pacif, J. Math., 20, 1967, 433—448.
9. *A. Browder.* Introduction to Function Algebras, N.—I., Benjamin, 1969.
10. *Е. А. Горин* и *В. Я. Лин.* Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос. Мат. сб., 78, № 4, 1969, 579—610.

11. *G. Stolzenberg.* Uniform approximation on smooth curves. Acta Math., 115, 1966, 185—198.
12. *Дж. Л. Келли.* Общая топология, М., Изд. „Наука", 1968.
13. *Т. Гимелин.* Равномерные алгебры, М., Изд. „Мир", 1973.
14. *G. Stolzenberg.* Polynomially and rationally convex sets, Acta Math., 109, 1963. 259—289.
15. *Дж. Милнор.* Особые точки комплексных гиперповерхностей, М., Изд. „Мир", 1971.
16. *Дж. Милнор.* Теория Морса, М., Изд. „Мир", 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

С. Г. СИМОНЯН

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

1°. Как известно [1], в спектральной теории дифференциальных операторов теория возмущений исследует приращения собственных значений и собственных функций некоторой задачи, вызываемых небольшим изменением условий задачи.

В этой заметке мы рассматриваем возмущенную дифференциальную систему

$$\left[I\frac{d}{dt}+\varepsilon A(t)\right]x=\lambda x;\ t\in R=(-\infty;\infty), \tag{1.1}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} p(t) & q(t)\\ q(t) & -p(t)\end{pmatrix}=A(t+a);\ I=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Цель настоящей работы — получить асимптотические разложения решений уравнения (1.1) при $\lambda\to\infty$, установить асимптотику длин лакун в спектре одномерного периодического оператора Дирака.

Ниже мы получим явные асимптотические формулы для ширины лакун щели Δ_m и выясним процесс возникновения лакун при возбуждении матрицей $\varepsilon A(t)$ оператора $I\dfrac{d}{dt}$ невозмущенной системы

$$I\cdot\frac{dx}{dt}=\lambda x. \tag{1.2}$$

Аналогичная задача для скалярного уравнения Хилла решена в монографии Титчмарша [1].

Заметим, что методика получения фундаментальной матрицы решений задачи Коши (1.1) и $X(0,\lambda,\varepsilon)=E$, а также асимптотические формулы для решений $\theta(t,\lambda,\varepsilon)$ и $\varphi(t,\lambda,\varepsilon)$ существенно отличаются от применяемой методики Титчмарша [1]. Здесь мы пользуемся основными положениями теории L-диагональных преобразований [2], которые позволяют явно написать главные члены асимптотических разложений основных величин. Основные результаты этой статьи: лемма 2.1, теорема 3.5 и вытекающие из них следствия. Основные обозначения заимствованы из монографии [1].

Заметим, что система (1.2) имеет непрерывный спектр, так как она распадается на следующие два уравнения:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \lambda^2 x_k = 0, \ k = 1, \ 2.$$

2°. Асимптотика фундаментальной матрицы системы (1.1). Представим систему (1.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda I x + IA(t)\, x. \tag{2.1}$$

Преобразование

$$X(t) = T \exp(\lambda t Л)\, Z(t), \tag{2.2}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}; \quad Л = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

приводит систему (2.1) к виду

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \varepsilon K(t, \lambda)\, Z(t), \tag{2.4}$$

где

$$K(t, \lambda) = \exp(-\lambda t \Lambda)\, T^{-1} IA(t)\, T \ \exp(\lambda t \Lambda)$$

или

$$K(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & [q(t) - ip(t)] \exp(-2\lambda i t) \\ [q(t) + ip(t)] \exp(2\lambda i t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица решений системы (2.4) с выбранным начальным условием

$$Z(0, \lambda, \varepsilon) = Z_0 = T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

удовлетворяет интегральному уравнению типа Вольтерра

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon \int_0^t K(\tau, \lambda)\, Z(\tau)\, d\tau.$$

Решая это интегральное уравнение методом последовательных приближений, мы получим для решений $Z(t, \lambda, \varepsilon)$ ряд

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (Z_{k+1} - Z_k), \tag{2.6}$$

где

$$Z_k(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon \int_0^t K(\tau, \lambda)\, Z_{k-1}(\tau)\, d\tau.$$

Легко устанавливается, что ряд (2.6) сходится $\forall b > 0 \ (b < \infty)$ по норме в области $J_b = \{|t| \leqslant b; \ |\lambda| < \infty; \ |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$, так как числовой ряд

$$2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\lambda|^{-k} (\alpha \varepsilon_0)^k \right) = 2e^{\alpha \varepsilon_0 / |\lambda|}$$

является мажорантой для ряда (2.6). Следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса матрица-функция $Z(t, \lambda, \varepsilon)$ при любом фиксированном t есть целая матрица-функция от параметров ε и λ.

Заметим, что если $2\lambda = \xi + i\eta$ $(\eta > 0)$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \tau \leqslant t \leqslant a$, то справедливы следующие оценки:

$$\|e^{-\eta t}[Z_1(t, \lambda, \varepsilon) - Z_0]\| \leqslant 2\frac{\alpha\varepsilon_0}{|\lambda|}, \cdots,$$

$$\|e^{-k\eta t}[Z_k(t, \lambda, \varepsilon) - Z_{k-1}(t, \lambda, \varepsilon)]\| \leqslant 2\frac{(\alpha\varepsilon_0)^k}{k!\,|\lambda|^k} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

где

$$\alpha = \max_{0 < t < a}\left(\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}\right),$$

а в качестве нормы некоторой матрицы $B(t)$ принята

$$\|B(t)\|_{[0,\,t]} = \max_{0 < \tau < t}\sum_{k,\,j}|b_{kj}(t)|.$$

Таким образом, при любом комплексном λ справедливы асимптотические формулы $(0 \leqslant t \leqslant a;\ \lambda \to \infty)$

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + O[|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1}\exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)], \tag{2.7}$$

$$Z(t, \lambda, \varepsilon) = Z_0 + \varepsilon\int_0^t K(\tau, \lambda)\, Z_0\, d\tau + O\left[\frac{|\varepsilon|^2}{|\lambda|^2}\exp(2\,|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right]. \tag{2.8}$$

Подытожив результаты пункта 2°, мы приходим к лемме.

Лемма 2.1. *Пусть* $A(t) \in C[0; a]$; $A(t + a) = A(t)$ *при* $t \in R = (-\infty, \infty)$.

Тогда при любом $b > 0$ *для фундаментальной матрицы* $X(t, \lambda, \varepsilon)$ *решений системы* (1.1), *удовлетворяющей условию* $X(0, \lambda, \varepsilon) = E$, *в области* J_b *справедлива асимптотическая формула*

$$X(t, \lambda, \varepsilon) = T\exp(\lambda t \Lambda)\left\{E + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|}\exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right]\right\}T^{-1}, \tag{2.9}$$

где T *и* Λ *определяются, соответственно, по формулам* (2.3).

Матрица $X(t, \lambda, \varepsilon)$ *есть целая аналитическая матрица-функция по* λ *и* ε.

Заметим, что асимптотику фундаментальной матрицы системы (1.1) вида (2.9) можно переписать в виде

$$X(t, \lambda, \varepsilon) = Y(t, \lambda)\left\{E + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|}\exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|\,t)\right]\right\}, \tag{2.10}$$

где

$$Y(t, \lambda) = \begin{pmatrix}\cos\lambda t & -\sin\lambda t\\ \sin\lambda t & \cos\lambda t\end{pmatrix},$$

причем $Y(t, \lambda)$ есть фундаментальная матрица решений невозмущенной системы (1.2), удовлетворяющая начальному условию

$$Y(0, \lambda) = E; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, если в (2.9) перейти к координатному виду и воспользоваться формулой Эйлера $\exp(\pm iz) = \cos z + i \sin z$, то мы приходим к (2.10).

Заметим также, что к виду (2.10) мы могли бы прийти с помощью подстановки в (1.1) $X = YZ$ и затем применением метода вариации постоянных.

Следствие 2.2. Обозначив два столбца фундаментальной матрицы $X(t, \lambda, \varepsilon)$, соответственно, $\theta(t, \lambda, \varepsilon)$ и $\varphi(t, \lambda, \varepsilon)$, получаем

$$\theta(t, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \end{pmatrix} + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|} \exp(|\operatorname{Im} \lambda| t)\right], \tag{2.11}$$

$$\varphi(t, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda t \\ \cos \lambda t \end{pmatrix} + O\left[\frac{|\varepsilon|}{|\lambda|} \exp(|\operatorname{Im} \lambda| t)\right], \tag{2.12}$$

причем $\theta(t, \lambda, \varepsilon)$ и $\varphi(t, \lambda, \varepsilon)$ представляют два линейно независимых решения системы (1.1), удовлетворяющих начальным условиям

$$\theta(0, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \varphi(0, \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2.3. В силу асимптотических формул (2.2), (2.8) и (2.9), при вещественном λ и ε для фундаментальной матрицы $X(t, \lambda, \varepsilon)$ системы (1.1) справедлива асимптотическая формула (E — единичная матрица)

$$X(t, \lambda, \varepsilon) = Y(t, \lambda) \, [E +$$

$$+ \varepsilon \begin{bmatrix} \int_0^t [q(\tau) \cos 2\lambda\tau - p(\tau) \sin 2\lambda\tau] \, d\tau & - \int_0^t [q(\tau) \sin 2\lambda\tau + p(\tau) \cos 2\lambda\tau] \, d\tau \\ -\int_0^t [q(\tau) \sin 2\lambda\tau + p(\tau) \cos 2\lambda\tau] \, d\tau & - \int_0^t [q(\tau) \cos 2\lambda\tau - p(\tau) \sin 2\lambda\tau] d\tau \end{bmatrix} +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t [q(\tau) \cos 2\lambda\tau - p(\tau) \sin 2\lambda\tau] \, d\tau \right\}^2 + \\ - \int_0^t \int_0^\tau [p(\tau) \, q(s) - q(\tau) \, p(s)] \cos 2\lambda (\tau - s) \, ds d\tau - \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} + \dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\int_0^t [q(\tau)\sin 2\lambda\tau + p(\tau)\cos 2\lambda\tau]\, d\tau\right\}^2 \\ - \displaystyle\int_0^t\int_0^\tau [p(\tau)\, p(s) + q(\tau)\, q(s)] \sin 2\lambda(\tau - s)\, ds\, d\tau \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t\int_0^\tau [p(\tau)\, q(s) - q(\tau)\, p(s)] \cos 2\lambda(\tau - s)\, ds\, d\tau + \\ \dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\int_0^t [q(\tau)\cos 2\lambda\tau - p(\tau)\sin 2\lambda\tau]\, d\tau\right\}^2 + \\ + \displaystyle\int_0^t\int_0^\tau [p(\tau)\, p(s) + q(\tau)\, q(s)] \sin 2\lambda(\tau - s)\, ds\, d\tau \\ + \dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\int_0^t [q(\tau)\sin 2\lambda\tau + p(\tau)\cos 2\lambda\tau]\, d\tau\right\}^2 \end{array}\right] +$$

$$+ O(\varepsilon^3 \lambda^{-3}). \tag{2.13}$$

3°. Обозначим через θ и φ соответственно $\theta(a, \lambda, \varepsilon)$ и $\varphi(a, \lambda, \varepsilon)$. Аналогично [1] (гл. XXI, стр. 348) мы построим два решения системы (1.1) в виде Флоке:

$$x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = (\varphi_1 - m_2\varphi_2)^{t/a}\, \chi^{(1)}(t), \tag{3.1}$$

$$x^{(2)}(t, \lambda, \varepsilon) = (\varphi_1 - m_1\varphi_2)^{t/a}\, \chi^{(2)}(t), \tag{3.2}$$

где $\chi^{(1)}(t)$ и $\chi^{(2)}(t)$ — периодические вектор-функции с периодом $a > 0$, а $m_{1,2}(\lambda, \varepsilon)$ определяется из следующего квадратного уравнения $\varphi_1 m^2 + (\theta_1 - \varphi_2)\, m - \theta_2 = 0$ или по формуле

$$m = m(\lambda, \varepsilon) = \frac{\varphi_2 - \theta_1}{2\varphi_1} \pm \frac{\sqrt{(\theta_1 + \varphi_2)^2 - 4(\theta_1\varphi_2 - \theta_2\varphi_1)}}{2\varphi_1}.$$

Ввиду того, что $\theta_1\varphi_2 - \theta_2\varphi_1 = 1$, имеем

$$m(\lambda, \varepsilon) = \frac{(\varphi_2 - \theta_1) \pm \sqrt{F^2(\lambda, \varepsilon) - 4}}{2\varphi_1}, \tag{3.3}$$

где обозначено

$$F(\lambda, \varepsilon) = \mathrm{sp}\, X(a, \lambda, \varepsilon) = \theta_1(a, \lambda, \varepsilon) + \varphi_2(a, \lambda, \varepsilon), \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Для аналитической функции $F(\lambda, \varepsilon)$ при $\lambda \neq \dfrac{n\pi}{a}$ и при $|\;| \to \infty$ справедливы асимптотические формулы*

$$F(\lambda, \varepsilon) = 2\cos\lambda a + O\left[|\varepsilon|\cdot|\lambda|^{-1}\exp\left(|\mathrm{Im}\,\lambda|\cdot a\right)\right], \tag{3.5'}$$

$$F(\lambda, \varepsilon) = 2\cos\lambda a + \varepsilon^2\cos\lambda a\left\{\left[\int_0^a (q(t)\cos 2\lambda t - p(t)\sin 2\lambda t)\,dt\right]^2 + \right.$$

$$+\left[\int_0^a q(t)\sin 2\lambda t + p(t)\cos 2\lambda t)\,dt\right]^2\Big\} +$$

$$+ 2\varepsilon^2\sin\lambda a\left\{\int_0^a\int_0^t [p(t)\,p(s) + q(t)\,q(s)]\sin 2\lambda(t-s)\,ds dt + \right.$$

$$+\int_0^a\int_0^t [p(t)\,q(s) - q(t)\,p(s)]\cos 2\lambda(t-s)\,ds dt + O\left(\frac{\varepsilon^4}{\lambda^4}\right). \tag{3.5''}$$

Формула (3.5″) записана для вещественных λ, ε. Доказательство леммы непосредственно следует из асимптотических формул (2.11)—(2.13) и из формулы (3.4).

Заметим, что если $\varepsilon = 0$, то $F(\lambda, 0) = 2\cos\lambda a$ и выражение $F^2(\lambda, 0) - 4 = 4\cos^2\lambda a - 4$ имеет только вещественные двукратные корни в точках $\lambda = \dfrac{n\pi}{a}$, поэтому ожидается, что в возмущенном случае будут появляться пары вещественных корней в окрестностях этих точек. Далее предположим, что ε принимает значение в интервале $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Заметим, что функции $m_1(\lambda, \varepsilon)$, $m_2(\lambda, \varepsilon)$ имеют точки ветвления второго порядка в нулях функций $F(\lambda, \varepsilon) - 2$ и $F(\lambda, \varepsilon) + 2$. Ниже установим, что каждая из этих функций имеет бесконечно много вещественных нулей, которые мы обозначим соответственно через $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ и $\mu_0, \mu_1, \dots$.

Дифференцируя уравнение (1.1) по λ, получаем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\partial t} + Ix + \lambda I\frac{\partial x}{\partial\lambda} - \varepsilon IA(t)\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0. \tag{3.6}$$

Ищем решение (3.6), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{\partial x(0, \lambda, \varepsilon)}{\partial\lambda} = 0.$$

Система (3.6) с указанным начальным условием равносильна интегральному уравнению

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = \int_0^t [\varphi(t, \lambda, \varepsilon)\,\theta^{\mathrm{T}}(\tau, \lambda, \varepsilon) - \theta(t, \lambda, \varepsilon)\,\varphi^{\mathrm{T}}(\tau, \lambda, \varepsilon)]\,x(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \int_0^t [\varphi(t, \lambda, \varepsilon)\, \theta^{\tau}(\tau, \lambda, \varepsilon) - \theta(\tau, \lambda, \varepsilon)\, \varphi^{\tau}(\tau, \lambda, \varepsilon)]\, \theta(\tau)\, d\tau; \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \int_0^t [\varphi(t, \lambda, \varepsilon)\, \theta^{\tau}(\tau, \lambda, \varepsilon) - \theta(t, \lambda, \varepsilon)\, \varphi^{\tau}(\tau, \lambda, \varepsilon)]\, \varphi(\tau)\, d\tau. \qquad (3.8)$$

Напомним, что если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то $x^{\tau} = (x_1;\ x_2)$. В силу (3.7), (3.8) из 3.5) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = \frac{\partial\theta_1}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda} = \int_0^a \{\varphi_1 [\theta_1^2(t) + \theta_2^2(t)] +$$

$$+ (\varphi_2 - \theta_1)[\varphi_1(t)\,\theta_1(t) + \varphi_2(t)\,\theta_2(t)] - \theta_2 [\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)]\}\, dt. \qquad (3.9)$$

После преобразования (3.9) получим

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = -\theta_2 \int_0^a \sum_{j=1}^{2} \left\{\left[\varphi_j(t) + \frac{\theta_1 - \varphi_2}{2\theta_2}\cdot\theta_j(t)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4 - F^2(\lambda, \varepsilon)}{4\theta_2^2}\cdot\theta_j^2(t)\right\} dt. \qquad (3.10)$$

Предположим, что λ — вещественное число, а $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Если λ удовлетворяет также условию $-2 < F(\lambda, \varepsilon) < 2$, то $\theta_1^2 + 2\theta_1\varphi_2 + \varphi_2^2 < 4 = 4(\theta_1\varphi_2 - \varphi_1\theta_2)$, или $(\theta_1 - \varphi_2)^2 < -4\varphi_1\theta_2$. Отсюда $\theta_2 \neq 0$, $\varphi_1 \neq 0$, а θ_2, φ_1 имеют противоположные знаки. Правая часть (3.10) отлична от нуля, а ее знак противоположен знаку θ_2, поэтому $F(\lambda, \varepsilon)$ не имеет экстремума в тех точках λ, где $-2 < F(\lambda, \varepsilon) < 2$.

Если $|F(\lambda, \varepsilon)| = 2$, то из (3.10) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = \theta_2 \int_0^a \sum_{j=1}^{2} \left\{\left[\varphi_j(t) + \frac{\theta_1 - \varphi_2}{2\theta_2}\,\theta_j(t)\right]^2\right\} dt, \qquad (3.11)$$

и следовательно, $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda} = 0$, если только $\theta_2 = \theta_2(a, \lambda, \varepsilon) = 0$.

Аналогичным образом, если в (3.9) вынесем за скобки $\varphi_1 = \varphi_1(a, \lambda, \varepsilon)$ и выделим полный квадрат, то убедимся, что $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda} = 0$ лишь только $\varphi_1(a, \lambda, \varepsilon) = 0$.

Имеем также, что $\theta_1\varphi_2 - \theta_2\varphi_1 = 1$. Откуда следует, что если

$$F(\lambda, \varepsilon) = 2,\ \ \frac{\partial F}{\partial\lambda} = 0, \text{ то } \theta_1(a, \lambda, \varepsilon) = 1,\ \theta_2(a, \lambda, \varepsilon) = 0;$$

$$\varphi_1(a, \lambda, \varepsilon) = 0, \ \varphi_2(a, \lambda, \varepsilon) = 1.$$

И если

$$F(\lambda, \varepsilon) = -2, \ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \ \text{то} \ \theta_1(a, \lambda, \varepsilon) = -1,$$

$$\theta_2(a, \lambda, \varepsilon) = 0, \ \varphi_1(a, \lambda, \varepsilon) = 0, \ \varphi_2(a, \lambda, \varepsilon) = -1.$$

Таким образом, если λ является собственным значением периодической или антипериодической краевых задач, порожденных уравнениями (1.1) и условиями $\theta(0, \lambda, \varepsilon) = \pm\theta(a, \lambda, \varepsilon)$, $\varphi(0, \lambda, \varepsilon) = \pm\varphi(a, \lambda, \varepsilon)$, то в такой точке $\lambda(\varepsilon)$ график функций $F(\lambda, \varepsilon)$ касается прямой $F = 2$ и $F = -2$, а в остальных нулях $|F(\lambda, \varepsilon)| = 2$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \neq 0$.

Построим $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}$ при условии $|F(\lambda, \varepsilon)| = 2$. Подобно формуле 3.11 получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = \int_0^a dt \int_0^t \left\{\varphi^{\tau}(t)\,[\varphi(t)\theta^{\tau}(\tau) - \theta(t)\varphi^{\tau}(\tau)]\,\theta(\tau)\,d\tau = \right.$$

$$= -\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_0^a \left\{\int_0^t [\varphi_m(t)\,\theta_j(\tau) - \theta_m(t)\,\varphi_j(\tau)]^2\,d\tau\right\} dt < 0.$$

Следовательно, для значений λ, удовлетворяющих условиям $F(\lambda, \varepsilon) = 2$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, функция $F(\lambda, \varepsilon)$ имеет максимальное значение. Кроме того, в рассматриваемой точке λ функция $F(\lambda, \varepsilon) - 2$ не может иметь больше двух нулей.

Аналогичным образом показываем, что если $F(\lambda, \varepsilon) = -2$ и $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, то $F(\lambda, \varepsilon) + 2$ будет иметь минимальное значение и не больше двух нулей.

Из асимптотической формулы (3.5′) имеем

$$F(\lambda, \varepsilon) - 2 = -4\sin^2\frac{\lambda a}{2} + O\{|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1}\exp(a\,|\operatorname{Im}\lambda|)\}.$$

Обозначим

$$f(\lambda) = 4\sin^2\frac{\lambda a}{2}, \quad g(\lambda) = F(\lambda, \varepsilon) - 2 + 4\sin^2\frac{\lambda a}{2}.$$

На плоскости $\xi + i\eta$ выделим контур

$$\Gamma_n: \left\{|\operatorname{Re}\lambda| = (2n+1)\frac{\pi}{a};\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant (2n+1)\frac{\pi}{a}\right\}.$$

На этом контуре Γ_n относительно функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ выполняются все условия теоремы Руше, и поскольку $|g(\lambda)| < |f(\lambda)|$ для достаточно больших λ, то $f(\lambda)$ и $f(\lambda) + g(\lambda)$ имеют внутри контура Γ_n одинаковое число нулей. Но $f(\lambda)$ внутри Γ_n имеет $4n + 2$ нулей, причем $\lambda = 0$ есть двукратный нуль, а наибольший нуль есть $|\lambda| = \frac{2n\pi}{a}$.

Переходим теперь к асимптотическому вычислению корней целых функций $F(\lambda, \varepsilon) \pm 2$. Заметим, что в правой части (3.5″) слагаемые, кроме первого, имеют порядок $\varepsilon^2 \lambda^{-2}$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно, корни уравнения $F(\lambda, \varepsilon) - 2 = 0$ расположены вблизи корней уравнения $\sin^2 \frac{\lambda a}{2} = 0$. Поэтому ищем решения уравнения $F(\lambda, \varepsilon) = 2$ в окрестности точек $\lambda = 2n\pi$. Положим в уравнении

$$\lambda a = 2n\pi + \delta, \quad -\pi < \delta \leqslant \pi. \tag{3.12}$$

Для неизвестного числа δ получаем уравнение

$$\delta^2 - 4\varepsilon^2 r(n)\, \delta - \frac{a^2\varepsilon^2}{4}\left[(a_{q,2n} - b_{p,2n})^2 + (b_{q,2n} + a_{p,2n})^2\right] = O\left(\frac{\varepsilon^4}{n^4}\right), \tag{3.13}$$

где $a_{q,2n}$, $b_{q,2n}$, $a_{p,2n}$, $b_{p,2n}$ — коэффициенты Фурье функций $q(t)$ и $p(t)$ на интервале $[0, a]$, т. е.

$$a_{p,q,2n} = \frac{2}{a}\int_0^a \begin{Bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} \cos\frac{4n\pi}{a}t\,dt; \quad b_{p,q,2n} = \frac{2}{a}\int_0^a \begin{Bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} \sin\frac{4n\pi}{a}t\,dt. \tag{3.14}$$

Функция $r(n)$ имеет порядок n^{-2} и определяется по формуле

$$r(n) = \int_0^a dt \int_0^t [p(t)\, q(s) - p(s)\, q(t)] \cos\frac{4n\pi}{a}(t - s)\, ds +$$

$$+ \int_0^a dt \int_0^t [p(t)\, p(s) + q(t)\, q(s)] \sin\frac{4n\pi}{a}(t - s)\, ds.$$

Из (3.13) для величины δ получаем оценку $\delta = O(\varepsilon n^{-1})$. Следовательно, порядок второго члена уравнения (3.13) есть $O(\varepsilon^3 n^{-3})$, в силу чего уравнение (3.13) можно записать в виде

$$\delta^2 = \frac{a^2\varepsilon^2}{4}\left[(a_{q,2n} - b_{p,2n})^2 + (b_{q,2n} + a_{p,2n})^2\right] + O(\varepsilon^3 n^{-3}). \tag{3.15}$$

Решив уравнение (3.15), получим следующую асимптотическую формулу

$$\delta = \pm \frac{a\varepsilon}{2} [(a_{q,\,2n} - b_{p,\,2n})^2 + (a_{p,\,2n} + b_{q,\,2n})^2]^{1/2} + O(\varepsilon^2 n^{-2}). \qquad (3.16)$$

В силу (3.16), из (3.12) для соответствующих значений λ получаем формулу

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{a} \pm \frac{a\varepsilon}{2} [(a_{q,\,2n} - b_{p,\,2n})^2 + (a_{p,\,2n} + b_{q,\,2n})^2]^{1/2} + O(\varepsilon^2 \cdot n^{-2}). \qquad (3.17)$$

Аналогичным образом, решив уравнение $F(\mu, \varepsilon) + 2 = 0$ получим асимптотические формулы:

$$\mu_n = \frac{(2n+1)}{a}\pi \pm \frac{a\varepsilon}{2} [a_{q,\,2n+1} - b_{p,\,2n+1})^2 + (a_{p,\,2n+1} + b_{q,\,2n+1})^2]^{1/2} + O(\varepsilon^2 \cdot n^{-2}). \qquad (3.18)$$

Подытожив результаты пункта 3°, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.5. *Если в системе* (1.1) *матрица* $A(t) \in C[0, a]$,

$$A(t+a) = A(t),\ \forall t \in R = (-\infty; +\infty);\ -\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0;$$

ε — *некоторый малый парамгтр, то спектр этой системы непрерывен с лакунами (пропусками). Крайние точки спектра определяются по асимптотичгским формулам* (3.17) *и* (3.18). *Ширина каждой лакуны* Δ_m *определяется по асимптотической формуле*

$$\Delta_m = |a \cdot \varepsilon| [(a_{q,\,m} - b_{p,\,m})^2 + (b_{q,\,m} + a_{p,\,m})^2]^{1/2} + O(m^{-2} \cdot \varepsilon^2), \qquad (3.19)$$

где коэффициенты $a_{p,\,m}$, $b_{p,\,m}$, $a_{q,\,m}$, $b_{q,\,m}$ *определяются по формулам* (3.14) *и являются соответствующими коэффициентами рядов Фурье функции* $p(t)$ *и* $q(t)$ *в интервале* $[0, a]$.

Доказательство теоремы мы закончим, если убедимся, что два линейно независимых решения (3.1) и (3.2) вида Флоке остаются ограниченными на всей оси $t \in R$ и на непрерывных множествах оси λ, где $|F(\lambda, \varepsilon)| < 2$. Для этого заметим, что если $|F(\lambda, \varepsilon)| < 2$, то из (3.13), (3.3) и (3.5'), предположив, что $\operatorname{Im} \lambda > 0$, получим

$$m_{1,2}(\lambda, \varepsilon) = \mp i + O[|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1} \exp(a \cdot \operatorname{Im} \lambda)],$$

$$\varphi_1 - m_1\varphi_2 = \exp(-i\lambda a)[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})],$$

$$\varphi_1 - m_2\varphi_2 = \exp(i\lambda a)[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})].$$

В силу последних асимптотических формул из (3.1) и (3.2) при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ имеем

$$x^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon) = e^{-i\lambda t} \chi^{(1)}(t, \lambda, \varepsilon)[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})], \qquad (3.20)$$

$$x^{(2)}(t, \lambda, \varepsilon) = e^{i\lambda t} \chi^{(2)}(t, \lambda, \varepsilon)[1 + O(|\varepsilon|\,|\lambda|^{-1})]. \qquad (3.21)$$

Как следует из (3.20) и (3.21), решения $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ системы (1.1) ограничены на всей оси $t \in R = (-\infty, +\infty)$ при всех λ, удовлетворяющих соотношению $|F(\lambda, \varepsilon)| < 2$. Но последнее неравенство выполняется на всей вещественной оси λ, кроме счетного числа отрезков (см. (3.19)) Δ_m, $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Теорема доказана.

Следствие 3.6. В частности, если примем $\varepsilon = 0$, то мы вернемся к невозмущенной системе (1.2) и из выведенных формул (3.17), (3.18) получим кратные точки непрерывного спектра (1.2). А из (3.19) следует, что лакуны Δ_m сводятся к точке.

Следствие 3.7. Если рассмотреть невозмущенную систему Дирака (1.1) при значении $\varepsilon = 1$, то все полученные результаты (3.17), (3.19) будут верны для такой системы, если положить в этих формулах $\varepsilon = 1$. В самом деле, все построенные нами выше формулы при малых $|\varepsilon| = \varepsilon_0$ являются целыми функциями по ε и непрерывно зависят от ε, откуда и следует наше утверждение.

Замечание 1. Рассмотренный нами вопрос относится к природе спектра минимального замкнутого оператора L в пространстве $H = L^2(-\infty, +\infty) \oplus L^2(-\infty; \infty)$, порожденного дифференциальным выражением $l = J\dfrac{d}{dt} + A(t)$, где $A(t)$ мала на всем периоде, ее запишем в виде $\varepsilon A(t)$. В случае $\varepsilon = 0$ непрерывная часть спектра покрывает ось $-\infty < \lambda < \infty$. При больших λ в спектре образуется щель, длина которой приближенно равна $|\varepsilon\alpha| [(a_{q,m} - b_{p,m})^2 + (b_{q,m} + a_{p,m})^2]^{1/2}$, где $a_{p,q,m}$, $b_{p,q,m}$ — коэффициенты Фурье функций $p(t)$ и $q(t)$.

Замечание 2. Корни целых функций $F(\lambda) - 2$ и $F(\mu) + 2$ совпадают, соответственно, с собственными числами периодической и антипериодической краевой задачи уравнения (1.1) и на вещественной оси λ расположены так:

$$\cdots, \lambda_{2n-2} < \mu_{2n-2} \leqslant \mu_{2n-1} \leqslant \lambda_{2n-1} \leqslant \lambda_{2n}, \cdots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Замечание 3. Теорема 3.5 остается верной также для более широкого класса функций $A(t)$, чем класс $C[0, a]$; например, для функций $A(t)$ с ограниченной вариацией.

Замечание 4. Оценка (3.19) теряет эффективность, если, например, матрица-функция $A(t)$ имеет всюду ограниченную производную. В этом случае, как известно, коэффициенты Фурье, а вместе с ними и главный член формулы (3.19) суть $O(m^{-2})$ и оценка (3.19) дает не более, чем $\Delta_m = O(\varepsilon^2 m^{-2})$. Для распространения эффективной оценки лакун спектра одномерного периодического оператора Дирака на более гладкие функции $A(t)$ следует в исходных асимптотических формулах (2.8), (2.13) и (3.5) использовать большее число членов, чем используется в настоящей работе. Для бесконечно дифференцируемых функций $A(t)$ нужно построить асимптотический ряд фундаментальной матрицы $X(t, \lambda, \varepsilon)$ решений системы (1.1).

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института

Поступила 15.I.197

Ս. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ. Պարբերական գրգռվածությամբ դիֆերենցիալ սիստեմի մի քանի ասիմպտոտիկ գնահատականներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հիմնավորված է Դիրակի պարբերական դիֆերենցիալ միաչափ սիստեմի լակունների գոյությունն անընդհատ սպեկտրում, ինչպես նաև ստացված են ճշգրիտ ասիմպտոտիկ բանաձևեր սպեկտրի եզրային կետերի համար։ Ցանկացած Δ_m, $m=\pm 1,\pm 2,\dots$ *լակունի երկարության համար ստացվել է ասիմպտոտիկ գնահատական, ընդ որում, ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամի գործակիցն արտահայտվում է սիստեմի պոտենցյալ մատրիցայի առաջին և երկրորդ սյուների էլեմենտների գումարների Ֆուրյեի շարքերի գործակիցներով։ Ստացված է նաև սպեկտրի տեղաշարժման չափը չգրգռված սիստեմից գրգռված սիստեմին անցնելիս։*

S. G. SIMONIAN. *Some asymptotic estimates of differential system with periodic disturbance* (summary)

In the paper the existence of lacunal in the continuous spectrum of Dirac's onedimensional differential system is established and the exact asymptotic formulae for the extreme points of spectrum. Are obtained also the asymptotic estimate for the with of any lacuna Δ_m is obtained the main term being expressed by the coefficients of Fourier series of the elements of the potential matrix.

The shifts of the points of spectrum due to the introduction of disturbances are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Ч. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, том II, гл. XXI, ИИЛ, М., 1961.
2. *И. М. Раппопорт.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Гл. I, Изд. АН УССР, Киев, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 3, 1976 Математика

Л. В. МИКАЕЛЯН

О МНОГОМЕРНОМ КОНТИНУАЛЬНОМ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Г. СЕГЕ

Пусть $D_n(f)$ — детерминат теплицевой матрицы

$$\|c_{i-j}(f)\|_{i,\,j=0}^{n},$$

образованной коэффициентами Фурье

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

произвольной неотрицательной функции $f(t) \in L_1(-\pi, \pi)$.

В работе [1] Г. Сеге установил формулу

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{D_{n-1}(f)} = G(f),$$

где

$$G(f) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(t)\, dt\right\} & \text{при } \ln f(t) \in L_1(-\pi, \pi) \\ 0 & \text{при } \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(t)\, dt = -\infty. \end{cases}$$

Пусть задана непрерывная $n\times n$-матрица-функция $H(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$f(t) + \lambda \int_0^r H(t-s)\, f(s)\, ds = g(t). \tag{0.1}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} F(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } 0 < t \leqslant r \\ f_2(t-r) & \text{при } r < t \leqslant 2r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_n(t-(n-1)r) & \text{при } (n-1)r < t \leqslant nr, \end{cases} \\ G(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{при } 0 < t \leqslant r \\ g_2(t-r) & \text{при } r < t \leqslant 2r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ g_n(t-(n-1)r) & \text{при } (n-1)r < t \leqslant nr, \end{cases} \\ \widetilde{H}(t, s) = h_{ij}(t-(i-1)r - s + (j-1)r) \quad \text{при } \begin{array}{l} (i-1)r < t \leqslant ir, \\ (j-1)r < s \leqslant jr, \end{array} \end{cases} \tag{0.2}$$

где $h_{ij}(t)$ — элементы матрицы $H(t)$.

Тогда система (0.1) эквивалентна следующему уравнению:

$$F(t)+\lambda\int_0^{nr}\widetilde{H}(t-s)\,F(s)\,ds=G(t)\quad(0\leqslant t\leqslant nr). \tag{0.3}$$

Детерминант Фредгольма уравнения (0.3)

$$D_{nr}(\lambda,\ \widetilde{H})=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^{nr}\cdots\int_0^{nr}\widetilde{H}\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_n\\ s_1 & \cdots & s_n\end{pmatrix}ds_1\cdots ds_n \tag{0.4}$$

является многомерным континуальным аналогом детерминанта Теплица.

Для скалярного случая ($n=1$) асимптотические свойства детерминанта (0.4) при $r\to\infty$ впервые изучал М. Кац [2]. Новые результаты в этом направлении были получены Н. И. Ахиезером [3], Хиршманом [4] и др.*

В настоящей заметке при более общих предположениях, чем в [2], [3], получена следующая формула:

$$\lim_{r\to\infty}[D_r(H)]^{1/r}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\det[I+\hat{H}(\lambda)]\,d\lambda\right\},$$

где

$$D_r(H)=D_{nr}(1,\ \widetilde{H})\ \text{ и }\ \hat{H}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}H(t)\,dt.$$

1°. Пусть $K(t,\ s)=\|k_{ij}(t,\ s)\|_{i,\ j=1}^{n}$ — непрерывная матрица-функция в квадрате $[0,\ R]\times[0,\ R]$. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$f(t)+\lambda\int_0^r K(t,\ s)f(s)\,ds=g(t). \tag{1.1}$$

Предположим, что операторы

$$(K_r f)(t)=\int_0^r K(t,\ s)f(s)\,ds\quad(0<r<\infty) \tag{1.2}$$

ядерные в пространствах $L_2(0,\ r)$ $(0<r<R)$. Тогда, как известно, детерминант Фредгольма $D_{nr}(\lambda,\ \widetilde{K})$, определенный как (0.4), совпадает с выражением

$$D_r(\lambda,\ K)=\prod_j(1+\lambda\lambda_j(r)),$$

где $\lambda_j(r)$ — собственные значения оператора K_r.

---

* Как стало известно автору, при произвольном n этими вопросами занимался И. Ю. Линник [9].

При $|\lambda| < \frac{1}{Mr}$, где $M = \max\limits_{0 \le t, s \le R} \|K(t, s)\|$*, ядро резольвенты $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ системы (1.1) разлагается в ряд

$$\Gamma_r(t, s, \lambda) = K(t, s) + \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda)^k \int_0^r \cdots \int_0^r K(t, s_1) \cdots K(s_k, s)\, ds_1 \cdots ds_k$$

и является голоморфной матрицей-функцией от λ в круге $|\lambda| < \frac{1}{Mr}$.

Легко проверяется, что

$$\ln D_r(\lambda, K) = \operatorname{sp} \ln [I + \lambda K_r] = \operatorname{sp} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p K_r^p =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \operatorname{sp} K_r^p .$$

Как известно, [5]

$$\operatorname{sp} K_r^p = \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_p, s_1) K(s_1, s_2) \cdots K(s_{p-1}, s_p)]\, ds_1 \cdots ds_p.$$

Поэтому

$$\ln D_r(\lambda, K) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_p, s_1) \cdots$$

$$\cdots K(s_{p-1}, s_p)]\, ds_1 \cdots ds_p.$$

Этот ряд сходится равномерно по $r \in [0, R]$, при $|\lambda| < \frac{1}{MR}$.

Покажем, что его можно почленно дифференцировать.

В самом деле, ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \frac{d}{dr} \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_p, s_1) \cdots K(s_{p-1}, s_p)]\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \lambda \operatorname{sp} K(r, r) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \sum_{j=1}^{p} \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_p, s_1) \cdots K(s_{j-1}, r) \times$$

$$\times K(r, s_{j+1}) \cdots (K(s_{p-1}, s_p)]\, ds_1 \cdots ds_{j-1}\, ds_{j+1} \cdots ds_p =$$

---

* Под символом $\|\cdot\|$ понимаем гильбертову норму в пространстве матриц порядка $n \times n$.

$$= \lambda \,\mathrm{sp}\, K(r, r) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \sum_{j=1}^{p} \int_0^r \cdots \int_0^r \mathrm{sp}\, [K(r, s_{j+1}) K(s_p, s_1) \times$$

$$\times K(s_1, s_2) \cdots K(s_{p-1}, s_p) K(s_{j-1}, r)]\, ds_1 \cdots ds_{j-1}\, ds_{j+1} \cdots ds_p =$$

$$= \lambda \left\{ \mathrm{sp}\; K(r, r) + \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^p \int_0^r \cdots \int_0^r \mathrm{sp}\, [K(r, s_1) \cdots \right.$$

$$\left. \cdots K(s_{p-1}, r)]\, ds_1 \cdots ds_{p-1} \right\}$$

сходится равномерно по $r \in [0, R]$. Следовательно, для всех λ, принадлежащих кругу $|\lambda| < \frac{1}{MR}$, имеет место

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(\lambda, K) = \lambda \,\mathrm{sp}\, \Gamma_r(r, r, \lambda). \tag{1.3}$$

Докажем, что $\mathrm{sp}\, \Gamma_r(r, r, \lambda)$ является голоморфной функцией от λ во всей комплексной плоскости, кроме нулей $D_r(\lambda, K)$.

Используя обозначения, аналогичные (0.2), легко убедиться, что система (1.1) эквивалентна одному уравнению

$$F(t) + \lambda \int_0^{nr} \tilde{K}(t, s) F(s)\, ds = G(t).$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$ ядро резольвенты этого уравнения. Тогда

$$\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda) = \frac{D_{nr}(t, s, \lambda)}{D_{nr}(\lambda, \tilde{K})}, \tag{1.4}$$

где $D_{nr}(t, s, \lambda)$ — минор Фредгольма, $D_{nr}(\lambda, \tilde{K})$ — детерминант Фредгольма этого уравнения. Так как они—целые функции от λ и $D_{nr}(\lambda, \tilde{K}) = D_r(\lambda, K)$, то $\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$ голоморфна всюду, кроме нулей $D_r(\lambda, K)$.

Поскольку ядро резольвенты системы (1.1) связано с $\tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$ следующим образом:

$$\Gamma_r(t, s, \lambda) = \|\gamma_{ij}(t, s, \lambda)\|_{i, j=1}^{n},$$

где

$$\gamma_{ij}(t, s, \lambda) = \tilde{\Gamma}(t + (i-1) r, s + (j-1) r; \lambda) \quad (0 \leqslant t, s \leqslant r),$$

то

$$\mathrm{sp}\, \Gamma_r(t, s, \lambda) \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}(t, s, \lambda)$$

имеет одинаковую область голоморфности.

2°. Пусть $H(t)$—непрерывная $n \times n$ матрица-функция такая, что $H(t) \in L_1^{n\times n}(-\infty, \infty)$, $H^*(t) = H(-t)$ и ее преобразование Фурье

$$\hat{H}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t)\, dt$$

удовлетворяет условию

$$\det [I + \hat{H}(\lambda)] \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{2.1}$$

При этих предположениях легко заметить, что матрица-функция $I + \hat{H}(\lambda)$ положительно определенная при всех $-\infty < \lambda < \infty$. Это, в свою очередь, означает, что при всех $0 < r \leqslant \infty$ система (0.1) имеет единственное решение $f_r(t)$ и вектор-функции

$$\tilde{f}_r(t) = \begin{cases} f_r(t), & 0 < t \leqslant r \\ 0, & r < t < \infty \end{cases}$$

сходятся при $r \to \infty$ по норме пространства $L_p^{n\times 1}$ к решению уравнения

$$f(t) + \int_0^{\infty} H(t-s) f(s)\, ds = g(t)$$

какова бы ни была вектор-функция $g(t) \in L_p^{n\times 1}(0, \infty)$.

Значит, резольвента системы (0.1) определена при всех $0 < p \leqslant \infty$ и ядро ее $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ голоморфно по λ в верхней полуплоскости и в некоторых окрестностях нуля и единицы.

Используя неравенство Адамара [6], из (1.4) получаем, что $\operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda)$—интегрируемая функция от r и

$$\int_{r_0}^{r} \operatorname{sp} \Gamma_\tau(\tau, \tau, \lambda)\, d\tau$$

является голоморфной функцией в верхней полуплоскости и в некоторой окрестности единицы.

Из формулы (1.3) следует, что

$$D_r(\lambda, H) = \exp\left[\ln D_{r_0}(\lambda, H) + \lambda \int_{r_0}^{1} \operatorname{sp} \Gamma_\tau(\tau, \tau, \lambda)\, d\tau\right] \tag{2.2}$$

при $|\lambda| < \dfrac{1}{MR}$ и $r \in [r_0, R]$ $(r_0 < R < \infty)$.

Так как $D_r(\lambda, H)$ — целая функция и равенство (2.2) имеет место в некоторой окрестности нуля, то оно верно там, где голоморфна правая часть.

В частности

$$D_r(1, H) = \exp\{\ln D_{r_0}(1, H) + \int_{r_0}^{r} \operatorname{sp} \Gamma_\tau(\tau, \tau, 1)\, d\tau\}.$$

Если обозначить $D_r(1, H) = D_r(H)$ и $\Gamma_r(t, s, 1) = \Gamma_r(t, s)$, то получим

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(H) = \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r).$$

3°. Пусть $F_r(t, s)$—решение уравнения

$$F_r(t, s) + \int_0^r H^*(t-\tau) F_r(\tau, s)\, d\tau = H^*(t-s). \tag{3.1}$$

Очевидно, $F_r^*(0, 0) = F_r(r, r)$. Полагая в (3.1) $s = 0$, получим

$$F_r(t, 0) + \int_0^r H^*(t-\tau) F_r(\tau, 0)\, d\tau = H^*(t).$$

Рассмотрим уравнение

$$F(t) + \int_0^\infty H^*(t-\tau) F(\tau)\, d\tau = H^*(t). \tag{3.2}$$

Из оценки

$$\|F_r(t, 0) - F(t)\| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|H^*(t)\|^2\, dt \cdot \int_0^\infty \|F_r(s, 0) - F(s)\|^2\, ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \|H^*(t)\|^2\, dt \cdot \int_r^\infty \|F(t)\|^2\, dt$$

следует, что при $r \to \infty$ $F_r(t, 0) \to F(t)$ по метрике $C^{n\times n}(0, \infty)$, так как $F(t) \in L_2^{n\times n}(0, \infty)$ и $F_r(s, 0) \to F(s)$ по метрике $L_2^{n\times n}(0, \infty)$. В частности

$$\lim_{r\to\infty} \frac{D_r'(H)}{D_r(H)} = \operatorname{sp} F^*(0).$$

Легко заметить, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(H)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{D_r'(H)}{D_r(H)}.$$

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp[\operatorname{sp} F^*(0)].$$

Остается вычислить sp $F^*(0)$.

4°. Рассмотрим систему

$$\Gamma(t) + \int_0^\infty H(t-s)\,\Gamma(s)\,ds = H(t),\ 0 \leqslant t < \infty. \tag{4.1}$$

Обозначим через

$$B(t) = \begin{cases} \int_0^\infty H(t-s)\,\Gamma(s)\,ds - H(t), & t < 0 \\ 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Положим $\Gamma(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда систему (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-s)\,\Gamma(s)\,ds = H(t) + B(t),\ -\infty < t < \infty.$$

Переходя к преобразованию Фурье, получим

$$\int_0^\infty \Gamma(t)\,e^{i\lambda t}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \cdot \int_0^\infty \Gamma(t)\,e^{i\lambda t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,e^{i\lambda t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} B(t)\,e^{i\lambda t}\,dt. \tag{4.2}$$

Введем обозначения

$$\hat{\Gamma}(\lambda) = \int_0^\infty \Gamma(t)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

$$\hat{H}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

$$\hat{B}(\lambda) = \int_0^\infty B(-t)\,e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Тогда (4.2) принимает вид

$$[I + \hat{H}(\lambda)]\,[I - \hat{\Gamma}(\lambda)] = I - \hat{B}(\lambda). \tag{4.3}$$

Как известно [7], при наших предположениях на матрицу-функцию $H(t)$ матрица-функция $I + \hat{H}(\lambda)$ допускает следующую факторизацию:

$$I+\hat{H}(\lambda)=G^{*}(\lambda)\,G(\lambda),$$

где

$$G^{\pm 1}(\lambda)\in R_{+}^{n\times n}(-\infty,\infty)\ \text{и}\ [G^{*}(\lambda)]^{\pm 1}\in R_{-}^{n\times n}(-\infty,\infty).$$

Здесь $R_{\pm}^{n\times n}(-\infty,\infty)$ — класс функций, допускающих представление

$$I+\int_{0}^{\infty}e^{\pm i\lambda t}\gamma(t)\,dt,$$

где $\gamma(t)\in L_{1}^{n\times n}(0,\infty)$.

Из (4.3) следует, что

$$G(\lambda)\,[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]=[G^{*}(\lambda)]^{-1}[I-\hat{B}(\lambda)].$$

Отсюда

$$I-\hat{\Gamma}(\lambda)=G^{-1}(\lambda),$$

$$I-\hat{B}(\lambda)=G^{*}(\lambda).$$

Поэтому

$$I+\hat{H}(\lambda)=[I-\hat{\Gamma}^{*}(\lambda)]^{-1}\,[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]^{-1},$$

и следовательно

$$\det[I+\hat{H}(\lambda)]=|\det[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]|^{-2},$$

$\det[I+\hat{H}(\lambda)]$ является функцией класса $R(-\infty,\infty)$, т. е.

$$\det[I+\hat{H}(\lambda)]=1+\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,e^{i\lambda t}\,dt. \tag{4.4}$$

Предположим, что матрица-функция $\hat{H}(\lambda)$ кроме условия $\det[I+\hat{H}(\lambda)]\neq 0$ удовлетворяет условию

$$\hat{H}(\lambda)\in L_{1}^{n\times n}(-\infty,\infty).$$

Тогда $1-\det[I+\hat{H}(\lambda)]\in L_{1}(-\infty,\infty)$ и поэтому функцию $h(t)$ можно считать непрерывной. Кроме того, ясно, что $h(-t)=\overline{h(t)}$.

Очевидно

$$\det[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]\in R^{+}(-\infty,\infty),$$

т. е. он представим в виде

$$\det[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]=1-\int_{0}^{\infty}\gamma(t)\,e^{i\lambda t}\,dt,\ \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0. \tag{4.5}$$

Здесь функция $\gamma(t)$ непрерывна, так как она является решением уравнения

$$\gamma(t) + \int_0^\infty h(t-s)\,\gamma(s)\,ds = h(t).$$

По теореме Винера—Леви [8]

$$\ln\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\,l(t)\,dt, \tag{4.6}$$

где $l(t)$—непрерывная функция из $L_1(-\infty, \infty)$.

Отсюда

$$1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\,l(t)\,dt\right\}.$$

Поэтому

$$\exp\left\{\int_0^\infty e^{i\lambda t}\,l(t)\,dt\right\}\left\{1 - \int_0^\infty \gamma(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_0^\infty e^{-i\lambda t}\,l(-t)\,dt\right\}\left\{1 - \int_0^\infty \overline{\gamma(t)}\,e^{-i\lambda t}\,dt\right\}^{-1},$$

откуда следует

$$1 - \int_0^\infty \gamma(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = \exp\left\{-\int_0^\infty e^{i\lambda t}\,l(t)\,dt\right\}.$$

Разлагая правую часть в ряд и, используя теорему единственности для преобразования Фурье, получим

$$\gamma(t) = l(t) + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int\limits_{\substack{s_1>0,\dots,s_{n-1}>0\\ s_1+\dots+s_{n-1}<t}} \cdots \int l(t-s_1-\dots-s_{n-1})\,l(s_1)\cdots$$

$$\cdots l(s_{n-1})\,ds_1\cdots ds_{n-1}.$$

Отсюда и из (4.6) следует, что

$$\gamma(0) = l(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\det\left[I + \overset{+}{H}(\lambda)\right]d\lambda.$$

С другой стороны, из (4.5) имеем

$$\gamma(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[1-\det[-\hat{\Gamma}(\lambda)]]\,d\lambda,$$

так как $\hat{\Gamma}(\lambda)\in L_1(-\infty,\infty)$.

Пусть $\Gamma(t)=\|\gamma_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n}$, тогда

$$I-\hat{\Gamma}(\lambda)=\|\delta_{ij}-\int_0^{\infty}\gamma_{ij}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\|_{i,j=1}^{n}.$$

Поэтому

$$\det[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]=\left(1-\int_0^{\infty}\gamma_{11}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right)\cdots\left(1-\int_0^{\infty}\gamma_{nn}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right)+$$

$$+R(\lambda)=1-\int_0^{\infty}\gamma_{11}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt-\cdots-\int_0^{\infty}\gamma_{nn}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt+R_1(\lambda).$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[1-\det[I-\hat{\Gamma}(\lambda)]]\,d\lambda=\gamma_{11}(0)+\cdots+\gamma_{nn}(0)=\operatorname{sp}\Gamma(0),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R_1(\lambda)\,d\lambda=0.$$

В самом деле, функция $R_1(\lambda)$ состоит из слагаемых следующего вида:

$$\int_0^{\infty}\gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\cdots\int_0^{\infty}\gamma_p(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\int_0^{\infty}e^{i\lambda t}f(t)\,dt,$$

где

$$f(t)=\underset{\substack{s_1>0\cdots s_{p-1}>0\\ s_1+\cdots+s_{p-1}<t}}{\int\cdots\int}\gamma_1(t-s_1-\cdots-s_{p-1})\,\gamma_2(s_1)\cdots\gamma_p(s_{p-1})\,ds_1\cdots ds_{p-1}$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R_1(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{i\lambda t}f(t)\,dt\right]d\lambda=f(0)=0.$$

Итак

$$\operatorname{sp}\Gamma(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\det[I+\hat{H}(\lambda)]\,d\lambda.$$

Обращаясь к уравнению (3.2), заметим, что

$$\operatorname{sp} F^*(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \hat{H}(\lambda)]\, d\lambda.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть* $H(t)$ — *непрерывная матрица-функция класса* $L_1^{n\times n}(-\infty, \infty)$ *такая, что*

1) $H^*(t) = H(-t)$,

2) $\det [I + \hat{H}(\lambda)] \neq 0$,

3) $\hat{H}(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$,

4) *операторы*

$$(K_r f)(t) = \int_0^r H(t-s) f(s)\, ds$$

ядерны в пространствах $L_2^{n\times n}(0, r)$ $(0 < r < \infty)$.

Тогда

$$\lim_{r\to\infty} [D_r(H)]^{1/r} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det [I + \hat{H}(\lambda)]\, d\lambda\right\}.$$

Замечание. Можно показать, что результат работы [3] допускает обобщение на многомерный случай. Именно, при условиях аналогичных условиям работы [3], справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{D_r(H)}{\exp\left\{\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\det[I + \hat{H}(\lambda)]\, d\lambda\right\}} =$$

$$= \exp\left\{\int_0^{\infty} t \operatorname{sp}[F_t^*(t, 0) F_t(t, 0)]\, dt\right\},$$

где $F_r(t, 0)$ — решение уравнения

$$F_r(t, 0) + \int_0^r H^*(t-s) F_r(s, 0)\, ds = H^*(t).$$

Автор выражает искреннюю благодарность М. Г. Крейну за постановку задачи и В. М. Адамяну за ценные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.V.1975

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Գ. Սեգյոի մի թեորեմի բազմաչափ կոնտինուալ անալոգի մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է (0,1) ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի Ֆրեդհոլմի $D_r(H)$ դետերմինանտի ասիմպտոտիկան, երբ $r\to\infty$։ $H(t)$ կորիզի վրա որոշակի պայմանների դեպքում ստացված է հետևյալ բանաձևը․

$$\lim_{r\to\infty}[D_r(H)]^{1/2}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\det[I+\hat{H}(\lambda)]\,d\lambda\right\}.$$

L. V. MIKAELIAN. *On the multidimensional continual analogue of a theorem of G. Szegö* (summary)

The asymptotical behaviour of the Fredholm determinant $D_r(H)$ of a system of integral equations (0.1) is considered when $r\to\infty$. Under certain assumptions about the kernel $H(t)$ the following formula

$$\lim_{r\to\infty}[D_r(H)]^{1/2}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\det[I+\hat{H}(\lambda)]\,d\lambda\right\}$$

is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Szegö*. Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reelen positiven Funktion, Math. Ann., 76, 1915, 490–503.
2. *M. Kac*. Teoplitz matrices, translation Kernels and a related problem in probability theory, Duke Math. J., 21, № 3, 1954, 501—509.
3. *Н. И. Ахиезер*. Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах, УМЖ, XVI, № 4, 1964, 445—462.
4. *J. J. Hirschman*. Jr. On a formula of Kac and Achiezer, Journal of math. and mech., 16, № 2, 1966, 167—196.
5. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. „Наука", 1965.
6. *Ф. Р. Гантмахер*. Теория матриц, М., Изд. „Наука", 1967.
7. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, № 2, 1958, 66—72.
8. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, М., Гостехиздат, 1947.
9. *И. Ю. Линник*. Пространственное обобщение одной теоремы о теплицевом операторе, Мат. заметки, 6, вып. 14, 1973, 895—900.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS