ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

1976 T. 11 w2

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

Э. А. ДАНИЕЛЯН, Г. А. ИВАНОВ

ДЛИНА ОЧЕРЕДИ ОДНОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРИОРИТЕТОМ

Одной из важнейших характеристик систем массового обслуживания (СМО) является распределение длины очереди. Для изучения длины очереди в стационарном режиме большое распространение получил метод вложенных цепей Маркова [1]. Нестационарные распределения изучались в работах Н. К. Джейсуола [2] и Э. А. Даниеляна [3]. В этих работах рассматривались однолинейные двухприоритетные системы, использовался прием введения дополнительных переменных Кокса. Джейсуол сводил решение задачи к системе уравнений в частных производных 1-го порядка при различных краевых условиях. Даниелян достигал результатов более простыми средствами, используя прием введения дополнительных событий Климова [1].

В настоящей работе, посвященной изучению нестационарного распределения длины очереди, также используется прием введения дополнительных событий. Предлагаемые методы являются следующим существенным шагом к упрощению, кроме того они свободны от ограничений на число входящих потоков и предположений о существовании плотностей.

Описание систем

В СМО с ожиданием и одним надежным прибором поступают r независимых пуассоновских потоков вызовов $L_1, \cdots, L_r$ с параметрами $a_1, \cdots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов являются независимыми случайными величинами (сл. в.) с одинаковыми функциями распределения (ф.р.) $B_k(x)$ для вызовов одного потока L_k $(k=\overline{1, r})$. Между вызовами разных потоков установлены приоритеты. Это означает, что на освободившийся прибор поступает вызов наивысшего приоритета из имеющихся в системе. Потоки пронумерованы в порядке убывания приоритетов. Рассматривается система с относительным приоритетом (схема А) и системы с абсолютным приоритетом (схемы В). В *схеме* А обслуживание вызовов происходит без прерываний; в *схемах* В обслуживание вызова прерывается поступившим вызовом высшего приоритета, который начинает тотчас обслуживаться. Прерванный вызов может либо теряться (с х е м а В1), либо вновь поступать на прибор как только система освободится от вызовов высшего приоритета. В последнем случае он может либо дообслуживаться (с х е м а В2), либо обслуживаться заново (с х е м а В3), либо идентично (с прежней реализацией длительности обслуживания) обслуживаться заново (схема В4). Предполагается, что в начальный момент системы свободны от вызовов.

Предварительные понятия и обозначения

Вызов пуассоновского потока с параметром a будем называть a-вызовом. В частности, a_k-вызов—вызов приоритета k. В силу того, что потоки $L_i\,(i=\overline{1, r})$ являются независимыми и пуассоновскими, суммарный поток вызовов приоритета k и выше (σ_k-вызовов) будет также пуассоновским с параметром $\sigma_k = a_1 + \cdots + a_k$ ($\sigma_0 = 0$, $\sigma_r = \sigma$). Очевидно, σ_k-вызов является a_i-вызовом ($1 < i \leqslant k$) с вероятностью $\frac{a_i}{\sigma_k}$.

Приведем определения основных типов промежутков, встречающихся при изучении рассматриваемых систем. В случае СМО с относительным приоритетом считается, естественно, что вызов может поступать на прибор только один раз.

k-цикл. Начинается с момента первого поступления на прибор a_k-вызова; кончается как только система освободится от этого вызова и σ_{k-1}-вызовов.

k-период. Начинается с момента первого поступления на прибор некоторого σ_k-вызова, при отсутствии в системе других σ_k-вызовов; кончается, как только система освободится от всех σ_k-вызовов.

Период занятости системы есть r-период.

kkn-период. Начинается с момента первого поступления на прибор одного из n a_k-вызовов, находящихся в системе; кончается, как только система будет свободна от всех σ_k-вызовов.

kk-период есть $kk1$-период.

Период блокировки—период, в течение которого поступающие вызовы не обслуживаются (накапливаются).

(α, k)-цикл. Начинается с некоторого периода блокировки для σ_k-вызовов, при отсутствии в системе σ_k-вызовов; кончается, как только система освободится от σ_k-вызовов.

Хвост (α, k)-цикла есть та его часть, которая следует после периода блокировки.

Пусть $H_k(x)$, $\Pi_k(x)$, $\Pi(x)$, $\Pi_{kk}^{(n)}(x)$, $A(x)$, $\Pi_k[\alpha(\lambda); x]$ и $Q_k[\alpha(\lambda); x]$ есть ф.р. названных соответственно промежутков, а $h_k(s)$, $\pi_k(s)$, $\pi(s)$, $\pi_{kk}^{(n)}(s)$, $a(s)$, $\pi_k[\alpha(\lambda); s]$ и $q_k[\alpha(\lambda); s]$—преобразования Лапласа—Стилтьеса этих ф.р. Отметим, что $\pi_k[\alpha(\lambda); s]$ и $q_k[\alpha(\lambda); s]$ являются функциями s и не зависят от λ; функция $\alpha(\lambda)$ фигурирует в них лишь для конкретизации периода блокировки.

Обозначим через $P_m(t)$, где $m=(m_1, \cdots, m_r)$, вероятность того, что в момент времени t в системе находится m_k a_k-вызовов ($k=\overline{1, r}$). Пусть каждый поступающий a_k-вызов является либо красным с вероятностью z_k, либо синим ($0 \leqslant z_k \leqslant 1$, $k=\overline{1, r}$). Тогда производящую функцию $P(z, t) = \sum\limits_m P_m(t)\, z^m$, где $z^m = z_1^{m_1} \cdots z_r^{m_r}$, можно интерпретировать как вероятность того, что в момент t в системе находятся разве лишь красные вызовы (нет синих).

Будем предполагать также, что независимо от функционирования системы происходят „катастрофы", поток которых является пуассоновским с параметром $s>0$. Тогда

$$sp\,(z, s) = s\int_0^\infty e^{-st}\,P(z, t)\,dt$$

есть вероятность того, что первая „катастрофа" произошла в момент, когда в системе не было синих вызовов.

Будем называть промежуток отдельно взятым, или просто отдельным, если время отсчитывается с его начала. В случае отдельно взятого k-цикла, k-периода и т. д. в начальный момент в системе находится, естественно, только один начальный вызов — тот, с которого начинается указанный цикл или период. Лишь в случае отдельного kkn-периода в начальный момент в системе находится n a_k-вызовов. Для отдельного периода блокировки (k-периода, (α, k)-цикла и т. д.) обозначим через $s\alpha\,(z, s)$ ($s\pi_k\,(z, s)$, $s\pi_k\,[\alpha\,(\lambda);\ z, s]$ и т. д.) вероятность того, что первая „катастрофа" на нем (с момента его начала) произошла, когда в системе не было синих вызовов. Исключение составляет хвост (α, k)-цикла, который никогда не рассматривается отдельно взятым, а только как часть своего (α, k)-цикла. Выражение $s\,q_{k-1}\,[\alpha\,(\lambda);\ z, s]$ есть вероятность того, что на отдельном (α, k)-цикле первая „катастрофа" произошла на его хвосте, когда в системе не было синих вызовов.

Условимся также вместо слов „вероятность чего есть..." писать $<\cdots>$.

О распределении основных типов промежутков

Введем вспомогательную функцию

$$\gamma_k\,(s) = s + \sigma_k - \sigma_k\,\pi_k\,(s). \tag{1}$$

Функции $\pi_k\,(s)$ $(k=\overline{1, r})$ определяются

а) для схемы А из уравнений

$$\sigma_k\,\pi_k\,(s) = \sum_{l=1}^{k} a_l\,\beta_l[\gamma_l\,(s)], \tag{2}$$

где $\beta_l\,(s)$ — преобразование Лапласа—Стилтьеса ф.р. $B_l\,(x)$;

б) для схем В из рекуррентных соотношений

$$h_k\,(s) = \mathrm{H}\,[\sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(s)], \tag{3}$$

$$\pi_{kk}\,(s) = h_k\,[s + a_k - a_k\,\pi_{kk}\,(s)], \tag{4}$$

$$\sigma_k \pi_k (s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}[s + a_k - a_k \pi_{kk} (s)] + a_k \pi_{kk} (s), \tag{5}$$

где соотношение (3), выражающее $h_k (s)$ через $\sigma_{k-1} \pi_{k-1} (s)$, имеет следующий вид для каждой из схем B1, $\cdots$, B4, соответственно

$$h_k (s) = \beta_k (s+\sigma_{k-1}) - \frac{1 - \beta_k (s + \sigma_{k-1})}{s + \sigma_{k-1}} \sigma_{k-1} \pi_{k-1} (s), \tag{6}$$

$$h_k (s) = \beta_k [\gamma_{k-1} (s)], \tag{7}$$

$$h_k (s) = \frac{(s + \sigma_{k-1}) \beta_k (s + \sigma_{k-1})}{s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1} \pi_{k-1} (s) \cdot [1 - \beta_k (s+\sigma_{k-1})]}, \tag{8}$$

$$h_k (s) = (s + \sigma_{k-1}) \int_0^\infty \frac{e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}\, d B_k (\tau)}{s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1} \pi_{k-1} (s) \cdot [1 - e^{-(s+\sigma_{k-1})\tau}]}. \tag{9}$$

Известно [1], что функции $\pi_k (s)$, аналитические в $\operatorname{Re} s > 0$, где $|\pi_k (s)| < 1$, определяются вышеуказанным образом однозначно, причем $\pi_k (+0) = 1$, если выполняются условия стационарности системы

$$\rho_{r1} = \sum_{k=1}^{r} a_k b_{k1} < 1, \tag{10}$$

где b_{k1} — среднее время, проведенное a_k-вызовом на приборе.

При $k > 1$ для схем A, B1, $\cdots$, B4 соответственно

$$b_{k1} = \beta_{k1},\ b_{k1} = \frac{1 - \beta_k (\sigma_{k-1})}{\sigma_{k-1}},\ b_{k1} = \beta_{k1},$$

$$b_{k1} = \frac{1 - \beta_k (\sigma_{k-1})}{\sigma_{k-1} \beta_k (\sigma_{k-1})},\ b_{k1} = \frac{\beta_k (-\sigma_{k-1}) - 1}{\sigma_{k-1}};$$

для всех схем

$$b_{11} = \beta_{11} \left(b_{k1} = \int_0^\infty t d B_k (t) \right).$$

Отметим, что (4), (5), (7) имеют место и для схемы A. Методом введения дополнительных событий нетрудно убедиться также в справедливости следующих формул:

$$\pi_{kk}^{(n)} (s) = [\pi_{kk} (s)]^n, \tag{11}$$

$$\pi_k [\alpha (\lambda);\ s] = \alpha [\gamma_k (s)], \tag{12}$$

$$q_k [\alpha (\lambda);\ s] = \alpha [\sigma_k - \sigma_k \pi_k (s)]. \tag{13}$$

Поток синих вызовов приоритета ниже k является, очевидно, пуассоновским с параметром

$$[\sigma - az]_{k+1} = a_{k+1} (1 - z_{k+1}) + \cdots + a_r (1 - z_r),\ ([\sigma - az]_1 = [\sigma - az]).$$

Этот поток независим от потока „катастроф" и не оказывает никакого влияния на длительности k-периодов. Введем вспомогательную функцию

$$\gamma_k(s, z) = \gamma_k(s + [\sigma - az]_{k+1}) = s + [\sigma - az]_{k+1} + \sigma_k - \\ - \sigma_k \pi_k (s + [\sigma - az]_{k+1}). \tag{14}$$

Тогда

$$\pi_k[\alpha(t); s + [\sigma - az]_{k+1}] = \alpha[\gamma_k(s, z)] \tag{15}$$

можно интерпретировать как вероятность того, что за (α, k)-цикл не наступали „катастрофы" и поступали разве лишь красные вызовы приоритета ниже k.

Замечание 1. Функция $b_k(s)$, являющаяся преобразованием Лапласа—Стилтьеса ф.р. времени, проведенного a_k-вызовом на приборе, получается из соответствующей формулы для $h_k(s)$, если в последней положить $\pi_{k-1}(s) = 1$.

Лемма 1.

$$\pi_{kk}^{(n)}(z, s) = h_k(z, s) \frac{z_k^n - [\pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})]^n}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)}. \tag{16}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношений

$$\pi_{kk}^{(n)}(z, s) = \pi_{kk}(z, s) \frac{z_k^n - [\pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})]^n}{z_k - \pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})}, \tag{17}$$

$$\pi_{kk}(z, s) = h_k(z, s) \frac{z_k - \pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)}, \tag{18}$$

которые представляют и самостоятельный интерес.

Соотношение (18), представленное в виде

$$s\pi_{kk}^{(n)}(z, s) = \sum_{i=1}^{n} z_k^{n-i} [\pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})]^{i-1} s\pi_{kk}(z, s),$$

доказывается следующим вероятностным рассуждением. Пусть первая „катастрофа" на отдельном kkn-периоде произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{kk}^{(n)}(z, s) >$. Это может быть в том и только в том случае, если первая „катастрофа" на i-ом $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *отдельном* kk-периоде произошла в момент, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{kk}(z, s) >$; за предыдущие kk-периоды, связанные с начальными a_k-вызовами, не происходили „катастрофы" и не поступали синие вызовы приоритета ниже $k < [\pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})]^{i-1} >$, а оставшиеся a_k-вызовы (из n начальных) — красные $< z_k^{n-i} >$.

Покажем, что имеет место равенство

$$s\pi_{kk}(z, s) = sh_k(z, s) + \sum_{n \geq 1} s\pi_{kk}^{(n)}(z, s) \int_0^\infty e^{-(s + [\sigma - az]_{k+1})t} \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} dH_k(t).$$

Пусть первая „катастрофа“ на отдельном kk-периоде произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{kk}(z, s) >$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая „катастрофа“ наступила на k-цикле, с которого начинается kk-период, когда в системе не было синих вызовов $< sh_k(z, s) >$;

либо начальный k-цикл закончился через время $t < dH_k(t) >$ $(0 \leqslant t < \infty)$; за это время не происходили „катастрофы“ $< e^{-st} >$, не поступали синие вызовы приоритета ниже $k < e^{-[\sigma - az]_{k+1} t} >$, поступило n $(n \geqslant 1)$ a_k-вызовов $< \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} >$ и на последовавшем затем отдельном kkn-периоде первая „катастрофа“ произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{kn}^{(n)}(z, s) >$.

Воспользовавшись (17) и произведя суммирование под интегралом (суммирование можно вести от $n = 0$, так как при $n = 0$ формула (17) дает 0), а затем интегрирование, имеем

$$\pi_{kk}(z, s) = h_k(z, s) + \frac{\pi_{kk}(z, s)}{z_k - \pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})} \{h_k(s + [\sigma - az]_{k+1}) -$$

$$- h_k[s + [\sigma - az]_{k+1} + a_k - a_k \pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})]\}.$$

Используя (4) и выражая $\pi_{kk}(z, s)$, получаем (18).

Лемма 2.

$$\sigma_k \pi_k(z, s) = \sigma_{k-1} \pi_{k-1}(z, s) + h_k(z, s) \frac{\gamma_k(s, z) - \gamma_{k-1}(s, z)}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)}, \tag{19}$$

$$\sigma\pi(z, s) = \sum_{k=1}^{r} h_k(z, s) \frac{\gamma_k(s, z) - \gamma_{k-1}(s, z)}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)}. \tag{20}$$

Доказательство. Докажем соотношение

$$s\pi_k(z, s) = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} s\pi_{k-1}(z, s) + \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} \sum_{n \geq 1} s\pi_{kk}^{(n)}(z, s) \int_0^\infty e^{-(s + [\sigma - az]_{k+1}) t} \times$$

$$\times \frac{(a_k t)^n}{n!} c^{-a_k t} d\Pi_{k-1}(t) + \frac{a_k}{\sigma_k} s\pi_{kk}(z, s).$$

Для того чтобы на отдельном k-периоде первая „катастрофа“ произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_k(z, s) >$, необходимо и достаточно, чтобы

либо k-период начался с $(k-1)$-периода $< \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} >$ и первая „катастрофа“ произошла на нем ($(k-1)$-периоде), когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{k-1}(z, s) >$;

либо k-период начался с $(k-1)$-периода $< \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} >$, закончившегося через время $t < d\Pi_{k-1}(t) > (0 \leqslant t < \infty)$; до t не наступали „катастрофы" и не поступали синие вызовы приоритета ниже k $< e^{-(s+[\sigma-az]_{k+1})t} >$, поступило n $(n \geqslant 1)$ a_k-вызовов $< \frac{(a_k t)^n}{n!} e^{-a_k t} >$ и на последовавшем затем отдельном kkn-периоде первая „катастрофа" произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{kk}^{(n)}(z, s) >$;

либо k-период начался с kk-периода $< \frac{a_k}{\sigma_k} >$ и первая „катастрофа" произошла на нем, когда в системе не было синих вызовов $< s\,\pi_{kk}(z, s) >$.

Воспользовавшись (16) и произведя суммирование (от $n = 0$), а затем интегрирование, имеем

$$\sigma_k \pi_k(z, s) = \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s) + \frac{h_k(z, s)}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)} \cdot \{a_k z_k -$$

$$- a_k \pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1}) + \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k) - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}[s +$$
$$+ [\sigma - az]_{k+1} + a_k - a_k \pi_{kk}(s + [\sigma - az]_{k+1})]\}.$$

Используя (5) и (14), получаем (19).

Лемма 3.

$$\pi_k[\alpha(\lambda);\ z,\ s] = \alpha(z, s) + q_k[\alpha(\lambda);\ z,\ s], \tag{21}$$

$$q_k[\alpha(\lambda);\ z,\ s] = \sum_{l=1}^{k} h_l(z, s)\frac{\alpha[\gamma_{l-1}(s, z)] - \alpha[\gamma_l(s, z)]}{z_l - h_l(s + [\sigma - az]_l)}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $s\,\pi_{i-1,\,i}\ [\alpha(\lambda);\ z,\ s]$ есть вероятность того, что первая „катастрофа" на отдельном (α, i)-цикле произошла после $(\alpha, i-1)$-цикла, когда в системе не было синих вызовов. Тогда

$$\pi_{l-1,\,l}[\alpha(\lambda);\ z,\ s] = h_l(z, s)\ \frac{\alpha[\gamma_{l-1}(s, z)] - \alpha[\gamma_l(s, z)]}{z_l - h_l(s + [\sigma - az]_l)}. \tag{23}$$

Докажем сначала равенство

$$s\,\pi_{l-1,\,l}[\alpha(\lambda),\ z,\ s] = \sum_{n\geqslant 1} s\,\pi_{ll}^{(n)}(z, s)\int_0^\infty e^{-(s+[\sigma-az]_{l+1})t} \times$$

$$\times \frac{(a_l t)^n}{n!} e^{-a_l t}\ d\Pi_{l-1}[\alpha(\lambda);\ t].$$

Пусть первая „катастрофа" на отдельном (α, i)-цикле произошла после $(\alpha, i-1)$-цикла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{l-1,\,l}[\alpha(\lambda);\ z;\ s] >$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы за $(\alpha, i-1)$-цикл, длившийся время $t < d\Pi_{l-1}[\alpha(\lambda);\ t] >$ $(0 \leqslant t < \infty)$ не наступали „катастрофы" и не поступали синие вызовы приоритета ниже i $< e^{(s+[\sigma-az]_{l+1})t} >$, поступило n $(n \geqslant 1)$ a_i-вызовов $\left\langle \frac{(a_i t)^n}{n!} e^{-a_i t} \right\rangle$ и первая „катастрофа" произошла на последовавшем затем отдельном iin-периоде, когда в системе не было синих вызовов $\langle s\pi_{ii}^{(n)}(z, s) \rangle$.

Воспользовавшись (16) и произведя суммирование (от $n = 0$), а затем интегрирование, имеем

$$\pi_{i-1, i}[\alpha(\lambda); z, s] = \frac{h_i(z, s)}{z_i - h_i(s + [\sigma - az]_i)} \{\pi_{i-1}[\alpha(\lambda); s + [\sigma - az]_i] -$$

$$- \pi_{i-1}[\alpha(\lambda); s + [\sigma - az]_{i+1} + a_i - a_i \pi_{ii}(s + [\sigma - az]_{i+1})]\}.$$

Используя (12), (5) и (14), получаем (23).

Так как первая „катастрофа" на отдельном (α, k)-цикле может произойти либо на периоде блокировки, либо на хвосте, в последнем случае на каком-либо (α, i)-цикле $(0 \leqslant i \leqslant k)$ после $(\alpha, i-1)$-цикла ($(\alpha, 0)$-цикл совпадает, очевидно, с периодом блокировки), то

$$s\pi_k[\alpha(\lambda); z, s] = s\alpha(z, s) + \sum_{i=1}^{k} s\pi_{i-1, i}[\alpha(\lambda); z, s],$$

что и доказывает утверждения леммы.

Лемма 4.

$$\alpha(z, s) = \frac{1 - \alpha(s + [\sigma - az])}{s + [\sigma - az]}. \tag{24}$$

Доказательство. Соотношение (24), представленное в виде

$$s\alpha(z, s) = \int_0^{\infty} e^{-[\sigma - az]t} [1 - A(t)]\, d(1 - e^{-st}),$$

доказывается следующим образом. Для того чтобы на отдельном периоде блокировки первая „катастрофа" произошла, когда в системе не было синих вызовов $\langle s\alpha(z, s) \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы первая „катастрофа" произошла через время t $\langle d(1 - e^{-st}) \rangle$ от начала периода блокировки, когда он еще не закончился $\langle 1 - A(t) \rangle$, а до этого момента не поступала никаких синих вызовов $\langle e^{-[\sigma - az]t} \rangle$.

Замечание 2. Если ф.р. длительности периода блокировки является несобственной, т. е. $A(+\infty) < 1$, то

$$\alpha(z, s) = \frac{\alpha(+0) - \alpha(s + [\sigma - az])}{s + [\sigma - az]}. \tag{25}$$

Распределение длины очереди

Теорема. *Преобразование Лапласа производящей функции совместного распределения числа вызовов каждого приоритета, находящихся в системе в любой момент времени, задается формулой*

$$p(z, s) = \frac{1 + \sigma\pi(z, s)}{s + \sigma - \sigma\pi(s)}. \tag{26}$$

Здесь $\sigma\pi(z, s) = \sigma_r\,\pi_r(z, s)$ *находится:*

а) *для схемы* A *по формуле*

$$\sigma\pi(z, s) = \sum_{k=1}^{r} h_k(z, s)\,\frac{\gamma_k(s, z) - \gamma_{k-1}(s, z)}{z_k - \beta_k[\gamma_{k-1}, (s, z)]}, \tag{27}$$

где $h_k(z, s)$ $(k = \overline{1, r})$ *определяются из рекуррентных соотношений*

$$h_k(z, s) = z_k\,\frac{1 - \beta_k(s + [\sigma - az])}{z + [\sigma - az]} + \sum_{l=1}^{k-1} h_l(z, s) \times$$

$$\times \frac{\beta_k[\gamma_{l-1}(s, z)] - \beta_k[\gamma_l(s, z)]}{z_l - \beta_l[\gamma_{l-1}(s, z)]}, \tag{28}$$

б) *для схемы* $B1$ — *из рекуррентных соотношений*

$$\sigma_k\,\pi_k(z, s) = \sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(z, s) + [z_k + \sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(z, s)] \times$$

$$\times \frac{1 - h_k(s + [\sigma - az]_k)}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)} \cdot \frac{\gamma_k(s, z) - \gamma_{k-1}(s, z)}{\gamma_{k-1}(s, z)}, \tag{29}$$

в) *для схем* $B2$, $B3$, $B4$ — *из рекуррентных соотношений*

$$\sigma_k\,\pi_k(z, s) = \sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(z, s) + z_k\,[1 + \sigma_{k-1}\,\pi_{k-1}(z, s)] \times$$

$$\times \frac{1 - h_k(s + [\sigma - az]_k)}{z_k - h_k(s + [\sigma - az]_k)} \cdot \frac{\gamma_k(s, z) - \gamma_{k-1}(s, z)}{\gamma_{k-1}(s, z)}. \tag{30}$$

Доказательство. Формула (26), представленная в виде

$$sp(z, s) = \frac{s}{s + \sigma} + \frac{\sigma}{s + \sigma}\,s\pi(z, s) + \frac{\sigma}{s + \sigma}\,\pi(s)\,sp(z, s),$$

доказывается следующим образом. Пусть первая „катастрофа" произошла, когда в системе были разве лишь красные вызовы $\langle sp(z, s)\rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая „катастрофа" произошла до поступления в систему какого-либо вызова $\left\langle \frac{s}{s + \sigma} \right\rangle$;

либо до поступления первого вызова не наступали „катастрофы" $\left\langle \frac{\sigma}{s + \sigma} \right\rangle$ и первая „катастрофа" на начавшемся отдельном периоде занятости произошла, когда в системе не было синих вызовов $\langle s\pi(z, s)\rangle$;

либо „катастрофы" не наступали за первый период регенерации, т. е. до поступления первого вызова $\left\langle \frac{\sigma}{s + \sigma} \right\rangle$, и за последовавший затем период занятости $<\pi(s)>$, и первая „катастрофа“ произошла в момент (отсчитываемый от конца первого периода регенерации), когда в системе не было синих вызовов $<sp(z, s)>$.

Формула (27) следует из леммы 2 (20) и (7), (14).

Так как обслуживание a_k-вызова ($k=\overline{1, r}$) для схемы А происходит без прерываний, то оно является периодом блокировки для всех вызовов, поэтому согласно лемме 4 (24)

$$\beta_k(z, s) = z_k \frac{1-\beta_k(s+[\sigma-az])}{s+[\sigma-az]}. \tag{31}$$

Множитель z_k здесь появился потому, что в течение всего периода блокировки присутствует обслуживаемый a_k-вызов и он должен быть красным.

Очевидно, k-цикл является для схемы А (β_k, $k-1$)-циклом, поэтому (28) следует из утверждений леммы 3 (21), (23) и (7), (14), (31). Справедливость соотношений (29), (30) вытекает из (19), соответствующих формул (6)—(9) для $h_k(s)$ и нижеследующих формул, выражающих $h_k(z, s)$ через $\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)$ для схем В1, $\cdots$, В4 соответственно

$$h_k(z, s) = [z_k+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)]\cdot\frac{1-\beta_k(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})}{s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1}}, \tag{32}$$

$$h_k(z, s) = z_k[1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)]\cdot\frac{1-\beta_k[\gamma_{k-1}(s, z)]}{\gamma_{k-1}(s, z)}, \tag{33}$$

$$h_k(z, s) =$$

$$=\frac{z_k[1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)]\cdot[1-\beta_k(z+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})]}{s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k\cdot[1-\beta_k(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})]}, \tag{34}$$

$$h_k(z, s) = z_k[1+\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(z, s)]\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{[1-e^{-(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})\tau}]\,dB_k(\tau)}{s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1}-\sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)\cdot[1-e^{-(s+[\sigma-az]_k+\sigma_{k-1})\tau}]}. \tag{35}$$

Докажем эти формулы.

Схема В1 (прерванный вызов теряется).

Формула (32), представленная в виде

$$sh_k(z, s)=z_k\int_0^\infty e^{-(\sigma_{k-1}+[\sigma-az]_k)\cdot t}\cdot[1-B_k(t)]\,e^{-st}\,s\,dt+$$

$$+s\pi_{k-1}(z, s)\int_0^\infty e^{-(s+[\sigma-az]_k)t}\cdot[1-B_k(t)]\,e^{-\sigma_{k-1}t}\,\sigma_{k-1}\,dt,$$

доказывается следующим образом. Пусть первая „катастрофа" на отдельном k-цикле произошла, когда в системе не было синих вызовов $< sh_k(z, s) >$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо первая „катастрофа" произошла через время t от начала k-цикла $< e^{-st}\,sdt >$ $(0 \leqslant t < \infty)$, когда обслуживание a_k-вызова еще не закончилось $< 1 - B_k(t) >$ и не было прервано (не поступало σ_{k-1}-вызовов) $< e^{-\sigma_{k-1}t} >$, за это время в систему не поступало синих вызовов приоритета k и ниже $< e^{-[\sigma - az]_k t} >$, а обслуживаемый вызов красный $< z_k >$;

либо прерывающий σ_{k-1}-вызов поступил через время t $< e^{-\sigma_{k-1}t} \times$ $\times\, \sigma_{k-1}\,dt >$ $(0 \leqslant t < \infty)$, когда начальный вызов еще не обслуживался $< 1 - B_k(t) >$, до момента t не наступали „катастрофы" и не поступали синие вызовы приоритета k и ниже $< e^{-s + [\sigma - az]_k)\,t} >$, а первая „катастрофа" на начавшемся с этого момента отдельном $(k-1)$—периоде произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{k-1}(z, s) >$.

Схема В2 (прерванный вызов дообслуживается).

Если во время обслуживания a_k-вызова поступает σ_{k-1}-вызовов, то обслуживание a_k-вызова прерывается и возобновляется вновь, как только закончится $(k-1)$-период, связанный с σ_{k-1}-вызовом, вызвавшим прерывание. Назовем прерывающий σ_{k-1}-вызов „хорошим", если за $(k-1)$-период, связанный с ним, не происходило „катастроф", и поступали разве лишь красные вызовы приоритета k и ниже. В случае невыполнения хотя бы одного из этих условий вызов называем „плохим". Вероятность того, что прерывающий σ_{k-1}-вызов является „хорошим" („плохим"), есть $\pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)$ $(1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k))$. Поток „плохих" прерывающих σ_{k-1}-вызовов будет, очевидно, пуассоновским с параметром

$$\sigma_{k-1}\,[1 - \pi_{k-1}\,(s + [\sigma - az)_k].$$

Обозначим через x время, отсчитываемое (от начала k-цикла) только тогда, когда начальный a_k-вызов находится на приборе. Время, затраченное на $(k-1)$-периоды, связанные с прерывающими σ_{k-2}-вызовами, сюда не входит. Докажем равенство

$$sh_k\,(z, s) = z_k \int\limits_0^\infty [1 - B_k(x)]\, e^{-[\sigma - az]_k x}\, e^{-\sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)]\,x}\, e^{-sx}\, sdx +$$

$$+ z_k\, s\pi_{k-1}(z, s) \int\limits_0^\infty [1 - B_k(x)]\, e^{-(s + [\sigma - az]_k)\,x}\, e^{-\sigma_{k-1}[1 - \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)]\,x}\, \sigma_{k-1}\, dx.$$

Пусть первая „катастрофа" на отдельном k-цикле произошла, когда в системе не было синих вызовов $< sh_k(z, s) >$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы либо первая „катастрофа“ произошла во время обслуживания начального a_k-вызова $\langle 1-B_k(x)\rangle$, когда он провел на приборе время x $\langle e^{-sx}\, s\,dx\rangle$, начальный вызов при этом был красным $\langle z_k\rangle$, за время x не поступало синих вызовов приоритета k и ниже $\langle e^{-[\sigma-az]_k x}\rangle$, а также „плохих“ прерывающих σ_{k-1}-вызовов

$$\langle e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)]\,x}\rangle;$$

либо в промежутке $[x, x+dx)$ во время обслуживания a_k-вызова $\langle 1-B_k(x)\rangle$ поступил какой-нибудь прерывающий σ_{k-1}-вызов $\langle \sigma_{k-1}\,dx\rangle$, за время x (понимаемое в выше объясненном смысле) не наступали „катастрофы“ $\langle e^{-sx}\rangle$, не поступали синие вызовы приоритета k и ниже $\langle e^{-[\sigma-az]_k x}\rangle$, поступали разве лишь „хорошие“ прерывающие σ_{k-1}-вызовы $\langle e^{-\sigma_{k-1}[1-\pi_{k-1}(s+[\sigma-az]_k)]\,x}\rangle$, а первая „катастрофа“ на начавшемся с момента x отдельном $(k-1)$-периоде произошла, когда в системе не было синих вызовов $\langle s\pi_{k-1}(z, s)\rangle$, начальный вызов, который при этом еще остается в системе, должен быть красным $\langle z_k\rangle$.

Из доказанного равенства и (14) следует (33).

Схема ВЗ (прерванный вызов обслуживается заново).

В этом случае k-цикл может иметь начальный этап двух типов. Либо за время обслуживания начального вызова не поступают σ_{k-1}-вызовы и k-цикл оканчивается с окончанием обслуживания a_k-вызова (начальный этап концевой). Либо обслуживание начального вызова прерывается поступившим σ_{k-1}-вызовом (начальный этап неконцевой), затем следует $(k-1)$-период и после его окончания a_k-вызов вновь поступает на прибор и начинает обслуживаться заново, т. е. начинается новый k-цикл, вкладывающийся в первоначальный.

Пусть $\Phi_k(x)$ и $G_k(x)$ — условные ф.р. длительностей концевого и неконцевого начальных этапов соответственно, а $\varphi_k(s)$ и $g_k(s)$ — преобразования Лапласа—Стилтьеса этих ф.р. Тогда

$$\varphi_k(s) = \beta_k(s+\sigma_{k-1}) \tag{36}$$

есть вероятность того, что начальный этап концевой, и за него не наступали „катастрофы“, а

$$g_k(s) = \frac{\sigma_{k-1}}{s+\sigma_{k-1}}\,[1-\beta_k(s+\sigma_{k-1})] \tag{37}$$

есть вероятность того, что начальный этап неконцевой и за него не наступали „катастрофы“.

Докажем соотношение

$$sh_k(z, s) = z_k\int_0^\infty [\Phi_k(+\infty)-\Phi_k(t)]\, e^{-[\sigma-az]_k t}\; e^{-st}\, s\,dt +$$

$$+ z_k \int_0^\infty [G_k(+\infty) - G_k(t)]\, e^{[\sigma - az]_k t}\, e^{-st}\, s\,dt + z_k g_k(s + [\sigma -$$

$$- az]_k)\, s\pi_{k-1}(z, s) + g_k(s + [\sigma - az]_k)\, \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k)\, sh_k(z, s).$$

Пусть первая „катастрофа" на отдельном k-цикле произошла, когда в системе были только красные вызовы $< sh_k(z, s) >$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

либо начальный вызов красный $< z_k >$, начальный этап концевой и первая „катастрофа" произошла на нем $< \Phi_k(+\infty) - \Phi_k(t) >$ в промежутке времени $[t, t + dt)$ $< e^{-st}\, s\,dt >$, до которого не поступали синие вызовы приоритета k и ниже $< e^{-[\sigma - az]_k t} >$;

либо начальный вызов красный $< z_k >$, начальный этап неконцевой и первая „катастрофа" произошла на нем $< G_k(+\infty) - G_k(t) >$ в промежутке времени $[t, t + dt)$ $< e^{-st}\, s\,dt >$, до которого не поступали синие вызовы приоритета k и ниже $< e^{-[\sigma - az]_k t} >$;

либо начальный вызов красный $< z_k >$, начальный этап неконцевой и за него не наступали „катастрофы" и не поступали синие вызовы приоритета k и ниже $< g_k(s + [\sigma - az]_k) >$, а на последовавшем за ним отдельном $(k - 1)$-периоде первая „катастрофа" произошла, когда в системе не было синих вызовов $< s\pi_{k-1}(z, s >$;

либо начальный этап неконцевой, за него и за последовавший за ним $(k-1)$-период не наступали „катастрофы" и не поступали синие вызовы приоритета k и ниже $< g_k(s + [\sigma - az]_k)\, \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k) >$, а первая „катастрофа" произошла на начавшемся затем отдельном k-цикле, когда в системе не было вызовов $< sh_k(z, s) >$.

Из доказанного соотношения и (36), (37) получается (34).

Схема В4 (прерванный вызов идентично обслуживается заново.

При условии, что длительность обслуживания начального a_k-вызова есть фиксированная величина τ, имеют место формулы, аналогичные полученным в предыдущем случае

$$\phi_k(s/\tau) = e^{-(s + \sigma_{k-1})\tau}, \tag{38}$$

$$g_k(s/\tau) = \frac{\sigma_{k-1}}{s + \sigma_{k-1}} [1 - e^{-(s + \sigma_{k-1})\tau}], \tag{39}$$

$$h_k(z, s/\tau) = \{1 - g_k(s + [\sigma - az]_k/\tau)\, \pi_{k-1}(s + [\sigma - az]_k\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1 - \phi_k(s + [\sigma - az]_k/\tau) - g_k(s + [\sigma - az]_k/\tau)}{s + [\sigma - az]_k} + g_k(s + [\sigma - az]_k/\tau)\, \pi_{k-1}(z, s) \right\}. \tag{40}$$

Подставив (38), (39) в (40) и проинтегрировав последнее равенство по мере $dB_k(\tau)$, получаем (35).

Замечание 3. Очевидно $sh_k(1, s) = 1 - h_k(s)$ и $s\pi_{k-1}(1, s) = \pi_{k-1}(s)$. Поэтому формулу (9) для $h_k(s)$ можно получить, например, из (35).

Следствие. Можно показать, что при выполнении условий стационарности ($\rho_{r1} < 1$) существует

$$\lim_{t \to +\infty} P(z, t) = P(z) \text{ и } P(z) = \lim_{s \downarrow 0} sp(z, s).$$

Производящая функция распределения длины очереди в стационарном режиме

$$P(z) = (1 - \rho_{r1})\,[1 + \sigma\pi(z, 0)], \tag{41}$$

где $\sigma\pi(z, 0)$ определяется по соответствующим формулам приведенной теоремы, если в последних положить $s = 0$.

Ереванский государственный
университет,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 20.V.1974

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Գ. Ա. ԻՎԱՆՈՎ. Միալար նախապատվությամբ սպասարկման սիստեմների հերթի երկարությունը *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է նախապատվությամբ միալար մասսայական սպասարկման հերթով սիստեմների մի դաս, որ ներմտնող հոսքերը հանդիսանում են Պուասոնի հոսքեր, իսկ պահանջների սպասարկման ժամանակի բաշխումները ընդհանուր են։ Տրված դասի սիստեմների համար կամայական ժամանակի մոմենտին գտնված է տարբեր հոսքերի պահանջների քանակի համատեղ բաշխման ծնորդ ֆունկցիան։

E. A. DANIELIAN, G. A. IVANOV. *The queue length of the single server queueing systems with priority* (summary)

The purpose of this paper is to give a simple method for investigation of the queue length problem in single server priority queues. The $M_r\,|G_r\,|1|\,\infty$ systems with preemptive and head-of-the-line priority disciplines are considered. The quene length distributions in terms of Laplace—Stieltjes transform is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. П. Климов.* Стохастические системы обслуживания, М. Изд. „Наука", 1966.
2. *N. K. Jaiswal.* Priority queus, Academic press, New York and London, 1968 (русский перевод: Джейсуол Н. Очереди с приоритетами, М., Изд. „Мир", 1973).
3. *Э. А. Даниелян.* Приоритетные задачи в системах обслуживания одним прибором. ротапринт ВЦ МГУ, серия: стат. и стох. сист., вып. 13, 1971.
4. *Э. А. Даниелян, Г. А. Иванов.* О длине очереди приоритетных систем обслуживания, Теория вероятностей и ее применение, № 4, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

В. И. ГАВРИЛОВ, В. С. ЗАХАРЯН

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПОДКЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

1°. Пусть D обозначает круг $|z|<1$ и Γ—окружность $|z|=1$. Для произвольной точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ обозначим через Γ_θ окружность $\left|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right|=\frac{1}{2}$, через D_θ—круг $\left|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right|<\frac{1}{2}$, а для произвольного φ, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, обозначим через $h(\zeta,\varphi)$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки $\zeta=e^{i\theta}$ и $(1-e^{-i\varphi}\cos\varphi)\cdot e^{i\theta}$. Другими словами, $h(\zeta,\varphi)$ является хордой круга D_θ, оканчивающейся в точке $\zeta=e^{i\theta}$ и образующей с радиусом в этой точке направленный угол раствора φ, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$; длина хорды $h(\zeta,\varphi)$ равна $\cos\varphi$. Подобласть круга D, заключенная между двумя хордами $h(\zeta,\varphi_1)$, $h(\zeta,\varphi_2)$ и окружностью Γ_θ, обозначим через $\Delta(\zeta,\varphi_1,\varphi_2)$.

В дальнейшем условимся говорить, что непрерывная на $(0,+\infty)$ функция $H(t)\geqslant 0$ принадлежит классу C_H, если $\lim\limits_{t\to+0}H(t)=+\infty$, $H(t)$ не возрастает на $(0,+\infty)$,

$$\lim_{t\to+0}tH(t)=0, \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty}\frac{dt}{tH(t)}<+\infty.$$

Положим

$$\lambda_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)},\ n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

Пусть E—произвольное борелевское множество на Γ. Символом $\mathrm{cap}_H E$ мы будем обозначать выпуклую емкость множества E относительно последовательности $\{\lambda_n\}$ в смысле К. В. Темко (см. определение в [1], стр. 364). В случаях

$$H(t)=\frac{1}{t^{1-\alpha}} \text{ и } H(t)=\frac{1}{t}$$

мы получаем обычные α-емкость, $0<\alpha<1$, $\mathrm{cap}_\alpha E$ и логарифмическую емкость $\mathrm{cap}_0 E$ множества E.

Рассмотрим мероморфую в D функцию $f(z)$, принимающую значения на сфере Римана Ω. Сферическую производную функции $f(z)$ обозначим через $\rho(f(z))$,

$$\rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Если $f(z)$ стремится к определенному пределу, когда $z \to \zeta = e^{i\theta}$, оставаясь на хорде $h(\zeta, \varphi)$, то этот предел обозначим через $f(\zeta, \varphi)$. Если существует $\lim f(z)$, когда $z \to \zeta = e^{i\theta}$, $z \in \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, и предел не зависит от выбора угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$, то этот предел обозначим через $f(\zeta)$.

Рассмотрим (конечный или бесконечный) интеграл

$$\Lambda_f(\zeta, \varphi) = \int\limits_{h(\zeta, \varphi)} \rho(f(z))\,|dz|. \tag{2}$$

Очевидно, если для каких-то ζ и φ значение $\Lambda_f(\zeta, \varphi) < +\infty$, то существует определенный предел $f(\zeta, \varphi)$.

2°. Будем говорить, что мероморфная в D функция $f(z)$ принадлежит классу T_H, если $H \in C_H$ и

$$\iint\limits_{|z|<1} (1-|z|)\,H(1-|z|)[\rho(f(z))]^2\,dxdy < +\infty, \quad z = x+iy. \tag{3}$$

Это определение по форме несколько отличается от обычного определения класса T_H (см., например, [2]), согласно которому, $f \in T_H$, если

$$T_H(f) = \int_0^1 A(t)\,H(1-t)\,dt < +\infty \text{ при } \int_0^1 H(1-t)\,dt < +\infty$$

и

$$T_1(f) = \lim_{t \to 1-0} A(t) < +\infty \text{ при } \int_0^1 H(1-t)\,dt = +\infty,$$

где

$$A(t) = \iint\limits_{|z|<t} [\rho(f(z))]^2\,dxdy.$$

При этом от функции $H \in C_H$ требовалось дополнительно, чтобы

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(t)\,dt = c, \quad c \neq 0, \infty.$$

Для доказательства эквивалентности этих определений, поменяем порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 H(1-t)\,dt \iint\limits_{|z|<t} [\rho(f(re^{i\theta}))]^2\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint\limits_{|z|<1} [\rho(f(re^{i\theta}))]^2 \, rdr \, d\theta \int\limits_r^1 H(1-t) \, dt$$

и заметим, что

$$\int\limits_r^1 H(1-t) \, dt = \int\limits_0^{1-r} H(t) \, dt \sim c(1-r) H(1-r), \ r \to 1-0.$$

Голоморфную в D функцию $f(z)$ отнесем к классу T_H^*, если $H \in C_H$ и

$$\iint\limits_{|z|<1} (1-|z|) H(1-|z|) |f'(z)|^2 \, dxdy < +\infty. \tag{4}$$

Согласно определению, при каждой фиксированной $H \in C_H$ имеем $T_H^* \subset T_H$.

3°. А. Бэрлингу [3] и Л. Карлесону [4], стр. 69, принадлежит утверждение, что для любой функции $f(z)$, принадлежащей классу T_H,

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \ 0 \leqslant \alpha < 1,$$

точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $f(z)$ не имеет предела $f(\zeta)$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_\alpha E = 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$. (Случай $\alpha = 0$ принадлежит Бэрлингу; случай $0 < \alpha < 1$ — Карлесону). В статье [5] получено усиление этого факта: для любой функции $f(z)$, принадлежащей классу T_H,

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \ 0 \leqslant \alpha < 1,$$

точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $\Lambda_f(\theta, \varphi) = +\infty$ хотя бы для одного φ, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_\alpha E = 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$. (Случай $\alpha = 0$ ранее рассмотрен М. Цудзи [6]). В статье [2] доказано, что для любой функции $f(z) \in T_H$ точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $f(z)$ не имеет предела $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta})$, образуют множество E, $\mathrm{cap}_H E = 0$. Весьма правдоподобной гипотезой остается утверждение, что в точках $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, $\mathrm{cap}_H E = 0$, функция $f(z) \in T_H$ имеет определенный угловой предел $f(\zeta)$. В настоящей статье нам удается доказать следующие факты.

Теорема 1. *Пусть мероморфная в D функция $f(z)$ принадлежит классу T_H. Тогда в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\mathrm{cap}_H E = 0$, интегралы $\Lambda_f(\zeta, \varphi)$, определяемые* (2), *конечны для почти всех φ, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, и для этих значений φ существуют определенные пределы $f(\zeta, \varphi)$, равные между собой.*

Теорема 2. *Пусть голоморфная в D функция $f(z)$ принадлежит классу T_H^*. Тогда на Γ можно указать такое множество E,* $\operatorname{cap}_H E = 0$, *что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ существует конечный предел $f(\zeta)$ и интегралы*

$$\lambda_f(\zeta, \varphi) = \int\limits_{h(\zeta, \varphi)} |f'(z)|\,|dz| \tag{5}$$

конечны для всех φ, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

4°. В доказательствах теорем 1 и 2 мы будем придерживаться схемы, использованной в [5]. Вычислительные части доказательств мы выделим в виде лемм.

Основная лемма. *Пусть действительная функция $u(z) \geqslant 0$ определена и непрерывна в D и удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{|z|<1} (1-|z|)\, H(1-|z|)\,[u(z)]^2\, dxdy < +\infty, \tag{6}$$

где $H \in C_H$, и пусть

$$l(\zeta, \varphi) = \int\limits_{h(\zeta, \varphi)} u(z)\,|dz| \tag{7}$$

и

$$L(\zeta) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} l(\zeta, \varphi)\cos\varphi\, d\varphi. \tag{8}$$

Тогда точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $L(\zeta) = +\infty$, образуют множество E, $\operatorname{cap}_H E = 0$.

Доказательство. Допустим напротив, что $\operatorname{cap}_H E > 0$. Тогда, согласно определению ([1], стр. 364), на множестве $E_t = \{t \in [0, 2\pi], e^{it} \in E\}$ существует такое распределение $d\mu_H(t)$ единичной массы, что потенциал

$$V_H(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} Q(r, \theta - t)\, d\mu_H(t) \tag{9}$$

ограничен: $V_H(r, \theta) \leqslant V_H < +\infty$ в $|z| < 1$, где

$$Q(r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^n \cos nx$$

и последовательность $\{\lambda_n\}$ определяется формулами в (1). Рассмотрим также функцию

$$U_H(r,\theta)=\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|e^{it}-re^{i\theta}|}\,d\mu_H(t),$$

гармоническую и ограниченную, $|U_H(r,\theta)|\leqslant U_H<+\infty$ в $|z|<1$.

Нам понадобятся следующие два свойства распределения $d\mu_H(t)$ и функции $U_H(r,\theta)$.

Лемма 1. ([1], стр. 368). *Если*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\,d\mu_H(t),\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt\,d\mu_H(t),\ n=1,2,\cdots, \tag{10}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\,\lambda_n<+\infty. \tag{11}$$

Лемма 2. *Для функции* $U_H(r,\theta)$ *имеем*

$$\iint\limits_{|z|<1}\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 rdrd\theta\leqslant K_H<+\infty. \tag{12}$$

5°. Доказательство леммы 2. Имеем

$$\ln\frac{1}{|e^{i\theta}-re^{it}|}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta-t)}{n}r^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}(\cos n\theta\cdot\cos nt+\sin n\theta\cdot\sin nt).$$

Используя обозначения (10) и теорему Парсеваля, получим

$$\iint\limits_{|z|<1}\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 rdrd\theta=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\int_0^1\frac{r^{2n-1}}{(1-r)\,H(1-r)}\,dr=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\left[\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{r^{2n-1}}{(1-r)\,H(1-r)}\,dr+\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{r^{2n-1}\,dr}{(1-r)\,H(1-r)}\right]. \tag{13}$$

Оценим каждый из интегралов в квадратных скобках в (13).

Используя свойства функции $H(t)$ и (1), имеем

$$c_1 \lambda_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{tH(t)} = \int_n^{\infty} \frac{dt}{tH\left(\frac{1}{t}\right)} \leqslant c_2 \cdot \lambda_n, \quad n=1, 2, \cdots, \tag{14}$$

где $0 < c_1 < c_2 < +\infty$. Кроме того

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^{2n-1}}{(1-r)\, H(1-r)}\, dr = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(1-t)^{2n-1}}{tH(t)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\frac{1}{n} H\left(\frac{1}{n}\right)} \int_{\frac{1}{n}}^{1} (1-t)^{2n-1}\, dt \leqslant \frac{c_3}{H\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad n=1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Имеем также

$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \frac{r^{2n-1}\, dr}{(1-r)\, H(1-r)} \leqslant \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \frac{dr}{(1-r)\, H(1-r)} = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{tH(t)} \leqslant c_2 \lambda_n. \tag{16}$$

Из неравенства (14) следует, что

$$\lambda_n \geqslant \frac{1}{c_2} \int_0^{1/n} \frac{dt}{tH(t)} \geqslant \frac{1}{c_2} \frac{1}{\frac{1}{n} H\left(\frac{1}{n}\right)} \int_0^{1/n} dt = \frac{1}{c_2 H\left(\frac{1}{n}\right)}. \tag{17}$$

Объединяя (17) и (15), получим

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{r^{2n-1}}{(1-r)\, H(1-r)}\, dr \leqslant c_3 \cdot c_2 \cdot \lambda_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{18}$$

Подставляя (18) и (16) в неравенство (13), получим

$$\iint_{|z|<1} \frac{1}{(1-r)\, H(1-r)} \left[\frac{\partial U_H(r, \theta)}{\partial r} \right]^2 r dr d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)(c_2 \lambda_n + c_3 c_2 \lambda_n). \tag{19}$$

В силу леммы 1, правая часть в (19) конечна, и доказательство леммы 2 завершено.

6°. Продолжим доказательство основной леммы. Обозначим через I интеграл

$$I=\iint\limits_{|z|<1} u\,(re^{i\theta})\,\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\,rdrd\theta. \tag{20}$$

Используя интегральное неравенство Коши—Буняковского, неравенства (6) и (12), получим

$$I^2\leqslant \iint\limits_{|z|<1}(1-r)\,H(1-r)[u\,(re^{i\theta})]^2\,rdrd\theta\times$$

$$\times\iint\limits_{|z|<1}\frac{1}{(1-r)\,H(1-r)}\left|\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right|^2 rdrd\theta<+\infty. \tag{21}$$

Как и в ([5]), рассмотрим функцию $p\,(r,\,\theta,\,t)$,

$$p\,(r,\,\theta,\,t)=r\,\frac{\cos\,(\theta-t)-r}{1+r^2-2r\cos\,(\theta-t)}$$

и перепишем интеграл (20) в виде

$$I=\iint\limits_{|z|<1}u\,(re^{i\theta})\,drd\theta\int\limits_0^{2\pi}p\,(r,\theta,t)\,d\mu_H\,(t) \tag{22}$$

(ср. [5], формула (15)).

Докажем, что существует (не обязательно конечный) интеграл Лебега от функции $q\,(r,\,\theta,\,t)=u\,(re^{i\theta})\cdot p\,(r,\,\theta,\,t)$ в области $T=D\times\times[0,2\pi]$. Для этого достаточно показать, что функция $q\,(r,\,\theta,\,t)$ суммируема на подмножестве T^- множества T, на котором $q\,(r,\,\theta,\,t)\leqslant 0$. При фиксированном $t\in[0,2\pi]$ функция $p\,(r,\,\theta,\,t)$ отрицательна в точках $z=re^{i\theta}\in D\diagdown D_t$ и только в них и удовлетворяет неравенству $|p\,(r,\,\theta,\,t)|\leqslant r$ в $D\diagdown D_t$. Рассмотрим повторный интеграл

$$J=\int\limits_0^{2\pi}d\mu_H\,(t)\iint\limits_{D\diagdown D_t}|p\,(r,\theta,\,t)|\,u\,(re^{i\theta})\,drd\theta.$$

Используя оценку для $|p\,(r,\,\theta,\,t)|$ в $D\diagdown D_t$ и неравенство Коши—Буняковского, получим

$$J\leqslant\int\limits_0^{2\pi}d\mu_H\,(t)\iint\limits_{D\diagdown D_t}u\,(re^{i\theta})\,rdrd\theta\leqslant$$

$$\leqslant\iint\limits_{|z|<1}u\,(re^{i\theta})\,rdrd\theta\leqslant\left[\iint\limits_{|z|<1}\frac{rdrd\theta}{(1-r)\,H\,(1-r)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\iint\limits_{|z|<1}(1-r)\,H\,(1-r)[u\,(re^{i\theta})]^2\,rdrd\theta\right\}^{1/2}\leqslant K_H^1<+\infty.$$

Учитывая теорему Фубини, заключаем, что интеграл (20) и равный ему интеграл (22) можно переписать в виде

$$J=\int_0^{2\pi} d\psi_H(t)\iint_D u(re^{i\theta})\,p(r,\theta,t)\,drd\theta.$$

Дальнейшее доказательство основной леммы полностью совпадает с доказательством, приведенном в [5], стр. 7—8.

Замечание. Анализируя доказательство основной леммы, можно заключить, что ее утверждение остается справедливым, если считать функцию $u(z)\geqslant 0$ измеримой по Борелю в D.

7°. Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 и 2, отметим такое следствие основной леммы.

Теорема 3. *Пусть комплексная функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в D и удовлетворяет условию*

$$\iint_{|z|<1}(1-|z|)\,H(1-|z|)\,|\operatorname{grad} f(z)|^2\,dxdy<+\infty,$$

где $H\in C_H$. Тогда на Γ существует такое множество E, $\operatorname{cap}_H E=0$, что в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E$ для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ интегралы

$$m_f(\zeta,\varphi)=\int_{h(\zeta,\varphi)}|\operatorname{grad} f(z)|\,|dz|$$

конечны и существуют конечные и равные между собой пределы $f(\zeta,\varphi)$.

Действительно, согласно основной лемме, в которой $u(z)=$ $=|\operatorname{grad} f(z)|$, на Γ существует такое множество E_1, $\operatorname{cap}_H E_1=0$, что для каждой точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E_1$ функция $m_f(\zeta,\varphi)$ является суммируемой функцией аргумента $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значения $m_f(\zeta,\varphi)$ конечны для почти всех $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и для этих значений φ существуют конечные пределы $f(\zeta,\varphi)$. Рассмотрим точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma\setminus E_1$, в которой $f(\zeta,\varphi_1)\neq f(\zeta,\varphi_2)$ хотя бы для двух значений $\varphi_1\neq\varphi_2$, $\varphi_1,\varphi_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Такая точка $\zeta=e^{i\theta}$ является точкой неопределенности для $f(z)$. Согласно теореме Багемила (см., например, [7], стр. 74), множество точек неопределенности для произвольной функции $f(z)$ не более чем счетно. Поскольку счетное множество M точек на Γ имеет $\operatorname{cap}_H M=0$ для любой $H\in C_H$, доказательство теоремы 3 заканчивается.

8°. Доказательство теоремы 1 проводится совершенно так же, как и доказательство теоремы 3 с заменой функции $u(z) = |\operatorname{grad} f(z)|$ на функцию $u(z) = \varphi(f(z))$.

Утверждение теоремы 1 можно дополнить информацией о поведении функции $f(z)$ около хорды $h(\zeta, \varphi)$, $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, по которой $\Lambda_f(\zeta, \varphi) = +\infty$.

Для произвольных точек $a, b \in D$ положим

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|,$$

и обозначим через $D(a, \varepsilon) = \{z \in D, \sigma(z, a) < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, называют P-последовательностью для мероморфной функции $f(z)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой последовательности $\{z_{n_\nu}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении $\bigcup\limits_\nu D(z_{n_\nu}; \varepsilon)$ бесконечно часто каждое значение на Ω, за исключением самое большее двух значений. Каждую жорданову кривую $L \subset D$, содержащую по крайней мере одну P-последовательность функции $f(z)$, назовем P-кривой для $f(z)$.

Совершенно те же рассуждения, что и в [8], стр. 954, ведут к заключению в теореме 1, что

любая хорда $h(\zeta, \varphi)$, $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, по которой $\Lambda_f(\zeta, \varphi) = +\infty$, является P-хордой функции $f(z)$.

9°. Доказательство теоремы 2. Если в условиях основной леммы положить $u(z) = |f'(z)|$, то можно заключить, что существует такое множество $E_1 \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_{ll} E_1 = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$ интегралы $\lambda_f(\zeta, \varphi)$ конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и для этих значений φ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\zeta, \varphi)$.

Рассмотрим такие точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$, для которых можно указать по крайней мере один угол $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ такой, что предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ функции $f(z)$ вдоль угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ совпадает с Ω. Увеличив, если необходимо, раствор угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$, будем считать, что для значений φ_1 и φ_2 интегралы $\lambda_f(\zeta, \varphi_1)$ и $\lambda_f(\zeta, \varphi_2)$ конечны. Рассмотрим два множества

$$C_1(f, \zeta) = \bigcup_{z \in h(\zeta, \varphi_1)} \left\{ f(z);\ |z| \geqslant \frac{1}{2} \right\} \text{ и } C_2(f, \zeta) = \bigcup_{z \in h(\zeta, \varphi_2)} \{ f(z);\ |z| \geqslant 1/2 \},$$

и пусть $C(f, \zeta)$ обозначает замыкание множества $C_1(f, \zeta) \cup C_2(f, \zeta)$. Множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) \setminus C(f_1 \zeta)$ содержит значение ∞. Так как это значение является исключительным значением для $f(z)$, то согласно теореме Иверсена—Гросса ([7], стр. 100), значение ∞ является асимптотическим значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Следовательно, точка $\zeta = e^{i\theta}$ является точкой неопределенности функции $f(z)$, и множество таких точек счетно. Присоединяя это множество к множеству E_1, получим множество E, $\operatorname{cap}_H E = 0$.

В каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ по каждому углу $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ не совпадает с Ω, и по почти всем хордам $h(\zeta, \varphi)$ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\zeta, \varphi)$. Согласно теореме Линделефа ([7], стр. 17), в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ существует конечный предел $f(\zeta) = f(\zeta, \varphi)$. Теперь факт, что интегралы $\lambda_f(\zeta, \varphi)$ конечны для всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ в точках $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ устанавливается совершенно так же, как в [5], стр. 11.

10°. В статье [5] была доказана некоторая теорема единственности для мероморфных функций $f(z)$ в зависимости от классификации значений $a \in \Omega$, принимаемых функцией $f(z)$. Развивая эту классификацию, введем следующие обозначения. Пусть $\Omega(a, \delta)$ обозначает открытый круг на Ω с центром в точке $a \in \Omega$ и радиуса $\delta > 0$. Обозначим через $D(a, \delta)$ конечную или счетную совокупность областей, лежащих в D и представляющих собой полный прообраз круга $\Omega(a, \delta)$ при отображении $w = f(z)$. Для $H \in C_H$ положим

$$A_H(a, \delta) = \iint\limits_{D(a, \delta)} (1-r) H(1-r) [\rho(f(re^{i\theta}))]^2 \, r dr d\theta$$

и

$$n_H(a) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{A_H(a, \delta)}{\pi \delta^2}.$$

Будем говорить, что значение $a \in \Omega$ является B_H-нормальным значением функции $f(z)$, если $n_H(a) < +\infty$. В случае

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \; 0 < \alpha < 1,$$

получаем определение 1 из [5].

Теорема 4. *Если $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ мероморфна в D и $a \in \Omega$ является B_H-нормальным значением функции $f(z)$, то точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $f(\zeta) = a$, образуют множество E,* $\operatorname{cap}_H E = 0$.

Доказательство этой теоремы проводится совершенно так же, как доказательство ее в случае

$$H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \; 0 < \alpha < 1$$

(см. [5], стр. 13—15)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 24.XI.1974

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ, Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադասի բացառիկ բազմությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում դիտարկվում է միավոր շրջանում սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադաս, որը սահմանված է սֆերիկ ածանցյալի և դրական կիսաառանցքի վրա անընդհատ և ոչ-բացասական որոշ H(t) ֆունկցիայի օգնությամբ։

Այդ H(t) ֆունկցիայի միջոցով սահմանված որոշակի հաջորդականության նկատմամբ ուռուցիկ ունակության տերմիններով հնարավոր է լինում տալ նշված ենթադասի ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների բնութագրումը։

Վերջում բերվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների մասին միակության թեորեմա, կախված ֆունկցիայի կողմից ընդունված արժեքների տարբերակումից։

V. I. GAVRILOV, V. S. ZACHARIAN. *On exclusive sets of subclasses of meromorphic functions of bounded type* (summary)

The article considers a subclass of meromorphic functions in the unite disc.

Characterisation of the exclusive sets of the functions belonging to the subclass is obtained in terms of convex capacity by a sequence.

At the and a uniqueness theorem for meromorphic functions is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
2. *В. С. Захарян.* О радиальных предельных значениях одного класса функций, мероморфных в круге, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, №34, 1963, 801—818.
3. *A. Beurling.* Ensembles exceptionnels, Acta math., 72, 1—2, 1940, 1—13.
4. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.
5. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Бёрлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Матем. сб., 94 (136): № 5, I, 1974, 3—15.
6. *M. Tsuji.* Beurling's theorem on exceptional sets, Tôhoku math. J., 2, 1950, 113—125.
7. *К. Носиро.* Предельные множества, М., ИЛ, 1963.
8. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирск. матем. журнал, 14, № 5, 1973, 951—956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ КРАТНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ H^p

1°. Пусть $D=\{z: |z|<1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, Γ — его граница, пусть, далее, H^p — класс Харди с обычной L^p-нормой.

Определение. Будем говорить (см. [1]), что последовательность отличных друг от друга чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\alpha_j \in D$, $j=1, 2, \cdots$ удовлетворяет условию Карлесона, если существует такое число δ $(0<\delta<1)$, что

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\geqslant\delta. \tag{1}$$

В работе [2] Л. Карлесон (см. также [3]), доказал следующую теорему

Теорема А. Если последовательность $\{\alpha_j\}$ удовлетворяет условию (1), то для любого $f\in H^p$, $(0<p<+\infty)$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f(\alpha_j)|^p(1-|\alpha_j|)\leqslant C(\delta)\|f\|_{H^p}^p, \tag{2}$$

где $C(\delta)$ — положительное число, зависящее только от δ.

М. М. Джрбашян в недавней своей работе [4], в связи с задачей кратной интерполяции в пространстве H^2 установил следующую теорему.

Теорема Б. Пусть последовательность $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой функции $f\in H^2$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(r)}(\alpha_j)|^2(1-|\alpha_j|)^{2r+1}\leqslant C_r{}^*(\delta)\|f\|_{H^2}^2,\quad r=1, 2, \cdots. \tag{3}$$

Цель настоящей статьи—распространить теорему Б на пространства H^p $(0<p<+\infty)$. Необходимость в этом возникает в связи с постановкой задачи кратной интерполяции в пространствах H^p, $0<p<+\infty$, приведенной в конце указанной статьи М. М. Джрбашяна. Докажем следующую теорему.

---

* В дальнейшем $C_r(\alpha, \beta)$ будет обозначать положительное число, зависящее только от α, β.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (1). *Тогда для любой функции* $f \in H^p$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp-1} \leqslant C_r(\delta) \|f\|_{H^p}^p, \quad r=1, 2, \cdots. \tag{4}$$

Мы приведем два способа доказательства теоремы 1. Первый из них проходит для всех $0<p<+\infty$, а второй — только для $1 \leqslant p < +\infty$.

2°. Первый способ. Для любой точки $z \in D$ и для любого η, $0<\eta<1$ рассмотрим круг

$$K_\eta(z) = \{\zeta: |\zeta - z| \leqslant \eta(1-|z|)\}. \tag{5}$$

Сначала приведем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $u(z)$ — *неотрицательная гармоническая функция в* D. *Тогда справедлива следующая оценка*:

$$\max_{t \in K_\eta(z)} u(z) \leqslant \frac{1+\eta}{1-\eta} u(z). \tag{6}$$

Доказательство. Лемма непосредственно следует из неравенства Гарнака.

Доказательство теоремы 1. Согласно интегральной формуле Коши

$$f^{(r)}(\alpha_j) = \frac{r!}{2\pi i} \int_{\partial K_\eta(\alpha_j)} \frac{f(t)}{(t-\alpha_j)^{r+1}} dt, \quad j=1, 2, \cdots.$$

Поэтому имеем

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p \leqslant \left(\frac{r! \; (\max\limits_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f(t)|)}{\eta^{r+1}(1-|\alpha_j|)^r} \right)^p,$$

или же

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|^{rp+1} \leqslant \left(\frac{r!}{\eta^{r+1}}\right)^p (1-|\alpha_j|) (\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f(t)|^p). \tag{8}$$

Теперь предположим, что $1<p<+\infty$ и положим

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma P_z(t) |f(t)| \, |dt|,$$

где $P_z(t)$ — ядро Пуассона. Заметим, что $u \in h^p$*. Если $v(z)$, $v(0)=0$ сопряженная с u гармоническая функция, то по теореме Марселя Рисса (см. [1], стр. 215)

---

* h^p — класс гармонических функций u в D, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0<r<1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < +\infty.$$

$$\|v\|_{h^p} \leqslant C(p)\,\|u\|_{h^p}\,.$$

Очевидно, если положить $h(z)=u(z)+iv(z)$, то будем иметь $h(z)\in H^p$, пользуясь неравенством (6), получим

$$\max_{t\in K_\eta(\alpha_j)} |f(t)| \leqslant \max_{t\in K_\eta(\alpha_j)} u(t) \leqslant \frac{1+\eta}{1-\eta}\,u(\alpha_j) \leqslant \frac{1+\eta}{1-\eta}\,|h(\alpha_j)|. \qquad (9)$$

Теперь, комбинируя оценки (8) и (9), приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(r)}(\alpha_j)|^p(1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant \frac{C(p)\,(r!)^p\,(1+\eta)^p}{\eta^{p(r+1)}(1-\eta)^p}\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|)\,|h(\alpha_j)|^p.$$

Наконец, отсюда в силу теоремы А будем иметь

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(r)}(\alpha_j)|^p(1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\eta,\delta,p)\,\|h\|^p_{H^p} \leqslant C_r(\delta,\eta,p)\,\|f\|^p_{h^p},\ r=1,2,\cdots$$

и теорема 1 доказана в случае $1<p<+\infty$.

Пусть теперь $0<p\leqslant 1$, тогда по известной теореме о факторизации (см. [5], стр. 23) функция $f(z)$ представима в следующем виде:

$$f(z)=F(z)\;Q(z), \qquad (10)$$

где $F(z)$ — внутренняя функция, а $Q(z)$ — внешняя. Вновь применяя неравенство (8), получаем

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p(1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\eta)(1-|\alpha_j|)\,\big(\max_{t\in K_\eta(\alpha_j)}|\varphi(t)|^2\big),$$

где $\varphi(z)=[Q(z)]^{p/2}$, причем, легко видеть, что

$$\|f\|^p_{H^p}=\|Q\|^p_{H^p}=\|\varphi\|^2_{H^2}\cdot$$

Применяя к функции $\varphi(z)$ неравенство (9) для $p=2$ приходим к неравенству

$$\max_{t\in K_\eta(\alpha_j)}|\varphi(t)|^2 \leqslant \frac{(1+\eta)^2}{(1-\eta)^2}\,|\varphi_*(\alpha_j)|^2,$$

где

$$\operatorname{Re}\varphi_*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma P_z(t)\,|\varphi(t)|\,|dt|,$$

$$\operatorname{Im}\varphi_*(0)=0,\ \text{и поэтому}\ \varphi_*\in H^2.$$

Следовательно, справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f^{(r)}(\alpha_j)|^p(1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\eta)\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|)\,|\varphi_*(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_r(\eta,\delta)\,\|\varphi_*\|^2_{H^2} \leqslant C'_r(\delta,\eta)\,\|\varphi\|^2_{H^2}=C'_r(\delta,\eta)\,\|f\|^p_{H^p},\ r=1,2,\cdots,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Несложная модификация вышеизложенных рассуждений позволяет получить следующее усиление теорем А и 1.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\alpha_j\}$ *удовлетворяет условию* (1)

$$f \in H^p,\ 0 < p < +\infty,\ 0 < \eta < 1.$$

Тогда справедливо следующее неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\max_{t \in K_\eta(\alpha_j)} |f^{(r)}(t)|)^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\delta, \eta) \|f\|^p_{H^p},\ r=0, 1, 2, \cdots. \quad (11)$$

3°. Второй способ. Сначала докажем теорему для пространства H^1. Пусть $f \in H^1$ и $f(z) = F(z)\, Q(z)$, где F — внутренняя, а Q — внешняя часть функции f. Положив $f_1(z) = F(z)\,[Q(z)]^{1/2}$ $f_2(z) = [Q(z)]^{1/2}$, легко видеть, что $f_1, f_2 \in H^2$ и, кроме того, $\|f\|_{H^1} = \|f_1\|_{H^2} \|f_2\|_{H^2}$.

По формуле Лейбница

$$f^{(r)}(z) = \sum_{j=0}^{r} C_r^j f_1^{(r-j)}(z) f_2^{(j)}(z).$$

Следовательно

$$|f^{(r)}(z)| \leqslant C_r \sum_{j=0}^{r} |f_1^{(r-j)}(z)|\, |f_2^{(j)}(z)|.$$

Поэтому имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|\,(1-|\alpha_j|)^{r+1} \leqslant C_r \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_1^{(r-k)}(\alpha_j)|\,(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{2}-k} \times \right.$$

$$\left. \times |f_2^{(k)}(\alpha_j)|\ (1-|\alpha_j|)^{k+\frac{1}{2}} \right).$$

Пользуясь неравенством Шварца и теоремой Б, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|\,(1-|\alpha_j|)^{r+1} \leqslant$$

$$\leqslant C_r \sum_{k=0}^{r} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\infty} |f_1^{(r-k)}(\alpha_j)|^2 (1-|\alpha_j|)^{2(r-k)+1} \right]^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \left| \sum_{j=1}^{\infty} |f_2^{(k)}(\alpha_j)|^2 (1-|\alpha_j|)^{2k+1} \right|^{1/2} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_r(\delta) \|f_1\|_{H^2} \|f_2\|_{H^2} = C_r(\delta) \|f\|_{H^1},\ r = 1, 2, \cdots. \quad (12)$$

Теорема 1 доказана в случае $p = 1$. Пусть теперь μ — положительная мера на D, сосредоточенная в точках α_k, с нагрузками $(1-|\alpha_k|)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$,

$$\iint_D d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|) < +\infty.$$

Пусть, далее, L^p_μ — пространство всех функций, измеримых по мере μ, для которых $\iint_D |f|^p\, d\mu < +\infty$.

Тогда теорема 1 эквивалентна ограниченности оператора $(Tf)(z) = f^{(r)}(z)(1-|z|)^r$, из пространства H^p в L^p_μ.

Поскольку

$$\iint_D |Tf|^p\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{rp+1},$$

из теоремы Б, М. М. Джрбашяна и ввиду справедливости нашей теоремы для $p=1$ следует, что T ограничен как оператор из $H^1 \to L^1_\mu$ и $H^2 \to L^2_\mu$. Используя известную теорему Рисса—Торина (см. [6], стр. 144), получим ограниченность T: $H^p \to L^p_\mu$ при $1<p<2$. Следовательно, теорема 1 справедлива, если $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Предположим теперь, что $2<p<+\infty$. Тогда если

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то $1<q<2$. Пусть $f \in H^p$ и $g \in H^q$.

Легко видеть, что функция $\varphi(z)=f(z)\,g(z)$ принадлежит пространству H^1.

Ввиду того, что при $r=0$ теорема 1 совпадает с теоремой А, то применяя метод полной математической индукции, получим неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)\, g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|)^{r-k+\frac{1}{q}} |g^{(r-k)}(\alpha_j)|\cdot|f^{(k)}(\alpha_j)|\,(1-|\alpha_j|)^{k+\frac{1}{p}}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi^{(r)}(\alpha_j)|\,(1-|\alpha_j|)^{r+1}.$$

Пользуясь неравенством Гельдера и (12), получим

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{p}}\cdot g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{\frac{1}{q}}\right| \leqslant C_r(\delta)(\|\varphi\|_{H^1}+\|f\|_{H^p}\|g\|_{H^q}),$$

или же

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{p}} g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{\frac{1}{q}}\right| \leqslant C_r(\delta)\,\|f\|_{H^p}\,\|g\|_{H^q}.$$

Теперь применим интерполяционную теорему Шапиро и Шилдса (см. [3]):

Для любого элемента $w \in l^q$, $\|w\|_{l^q} = 1$ существует функция $g \in H^q$,

$\|g\|_{H^q} \leqslant A_q(\delta)$ такая, что $g(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{\frac{1}{q}} = w_j$, $j = 1, 2, \cdots$.

Следовательно

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1-|\alpha_j|)^{pr+1}\right)^{1/p} =$$

$$= \sup_{\|w\|_{l^q} \leqslant 1} \left|\sum_{j=1}^{\infty} f^{(r)}(\alpha_j)(1-|\alpha_j|)^{r+\frac{1}{p}} w_j\right| \leqslant C_r(\delta,\ p)\,\|f\|_{H^p},\ r = 1,\ 2, \cdots.$$

Доказательство закончено.

4°. Приведем, наконец, аналог теоремы 1 для других пространств аналитических функций.

Пусть Ω—любое открытое множество на комплексной плоскости и пусть $A^p(\Omega)$—множество аналитических в Ω функций, для которых

$$\|f\|_{A^p} = \left(\iint\limits_{\Omega} |f(x+iy)|^p\,dxdy\right)^{1/p} < +\infty.$$

Определение. Последовательность $\{\alpha_j\}$, $\alpha_j \in \Omega$, $j = 1, 2, \cdots$, удовлетворяет слабому условию Карлесона (или Δ^* условию), если существует такое положительное число δ, что

$$j \neq k,\ |\alpha_j - \alpha_k| > \delta\,(\max\,(d\,(\alpha_j\,\partial\,\Omega),\ d\,(\alpha_k\,\partial\,\Omega)), \tag{13}$$

где $d(z, \partial\Omega)$—расстояние от точки z до множества $\partial\Omega$.

Теорема 3. *Пусть* $\{\alpha_j\}$ *удовлетворяет условию* Δ^*, *тогда для любой функции* $f(z) \in A^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p\,[d\,(\alpha_j,\ \partial\,\Omega)]^{rp+2} \leqslant C_r(\delta)\,\|f\|^p_{A^p},\ r = 0,\ 1, \cdots. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $C_\rho(\alpha_j)$—окружность радиуса ρ с центром в точке α_j и пусть $0 < \rho < \dfrac{\delta}{2}\,d\,(\alpha_j\,\partial\,\Omega)$, тогда

$$f^{(r)}(\alpha_j) = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho} \frac{f(t)}{(t-\alpha_j)^{r+1}}\,dt,$$

или же

$$\rho^{rp+1} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p \leqslant \left(\frac{r!}{2\pi}\right)^p \int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha_j + \rho e^{i\theta})|^p \rho \, d\theta.$$

Интегрируя это неравенство по ρ в интервале $\left(0, \frac{\delta}{2} d(\alpha_j, \partial\Omega)\right)$, получим

$$|f^{(r)}(\alpha_j)|^p [d(\alpha_j, \partial\Omega)]^{rp+2} \leqslant \frac{(r!)^p}{\delta^{rp+2}} \iint_{K_j} |f(x+iy)|^p \, dx dy,$$

где

$$K_j = \left\{ t: |t - \alpha_j| \leqslant \frac{\delta}{2} d(\alpha_j, \partial\Omega) \right\}.$$

Используя тот факт, что $K_j \cap K_i = \varnothing$ при $j \neq i$, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p [d(\alpha_j, \partial\Omega)]^{rp+2} \leqslant C_r(\delta) \|f\|_{A^p}^p; \quad r = 0, 1, \cdots.$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за полезное обсуждение.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.IV.1975

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Ներդրման թեորեմներ, կապված H^p տարածություններում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի հետ *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե իրարից տարբեր կոմպլեքս թվերի $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, $(|\alpha_j| < 1$, $j = 1, 2, \cdots)$ *հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմանին*

$$\inf_k \prod_{j \neq k}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| \geqslant \delta > 0,$$

ապա ցանկացած $f \in H^p$, $0 < p < +\infty$ *տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(\alpha_j)|^p (1 - |\alpha_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\delta) \|f\|_{H^p}^p, \quad r = 1, 2, \cdots.$$

F. A. SHAMOIAN. *Imbedding theorems connected with problem of multiple interpolation in space* H^p (summary)

Let the sequence of comlpex numbers

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \; (|\alpha_k| < 1, \; \alpha_k \neq \alpha_j, \; j \neq k, \; k, j = 1, 2, \cdots,$$

satisfy the condition

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| \geqslant \delta > 0.$$

Then for any function $f \in H^p$ $(0 < p < +\infty)$ the following inequality holds

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^{(r)}(z_j)|^p (1 - |z_j|)^{rp+1} \leqslant C_r(\delta) \|f\|_{H^p}^p, \quad r = 1, 2, \cdots.$$

An analogous theorem for Bergman space A^p is also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, Изд. ИЛ, М., 1963.
2. *L. Carleson.* An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
3. *H. Shapiro, A. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
4. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974,
5. *P. Duren.* Theory H^p spaces, Ac. Press, New York, London, 1970.
6. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, Изд. „Мир“, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, В. Д. МОХОНЬКО

ОБ ОБОБЩЕННЫХ НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

1°. Пусть $f(z)$ — мероморфная в конечной плоскости функция, в дальнейшем такие функции будем просто называть мероморфными. Почти все, о чем будет идти речь в данной статье, переносится или непосредственно, или с естественными видоизменениями на случай функций, мероморфных в единичном круге, но мы для краткости ограничимся случаем конечной плоскости. Мы будем без пояснений пользоваться стандартными обозначениями неванлинновской теории распределения значений [1].

Всюду в дальнейшем $\omega(x)$ — положительная и невозрастающая функция на $[1, \infty)$. Следуя М. М. Джрбашяну [2], определим

$$N_\omega(r, f) = \int_1^r \frac{n(t, f)}{t}\,\omega(t)\,dt + \omega(1)\,N(1, f) =$$

$$= \int_1^r N(t, f)\,d(-\omega(t)) + \omega(r)\,N(r, f),$$

$$m_\omega(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_1^r \ln|f(te^{i\varphi})|\,d(-\omega(t)) + \omega(r)\ln|f(re^{i\varphi})| \right\}^+,$$

$$T_\omega(r, f) = N_\omega(r, f) + m_\omega(r, f).$$

Величины $N_\omega(r, a, f)$, $m_\omega(r, a, f)$, $\overline{N}_\omega(r, a, f)$ определяются, как обычно, то есть $N_\omega(r, a, f) = N_\omega(r, 1/(f-a))$ и т. д. Отметим, что эти характеристики отличаются от введенных в [2] ограниченными слагаемыми, но это отличие не существенно и упрощает дальнейшее изложение. Кроме того, по той же причине мы накладываем меньше требований на функцию $\omega(r)$, чем М. М. Джрбашян. При $\omega(x) \equiv 1$ получаем классические неванлинновские характеристики.

С помощью своего обобщения неванлинновских характеристик М. М. Джрбашян получил ряд очень важных результатов, главным образом в проблеме факторизации мероморфных функций. В работах М. М. Джрбашяна основное значение имели функции, для которых $T_\omega(r, f) = O(1)$ при $r \to \infty$, а также то обстоятельство, что за счет выбора функции ω можно добиться ограниченности характеристики

$T_\omega(r, f)$ для любой наперед заданной функции f. Это является одним из важнейших преимуществ характеристик $T_\omega(r, f)$ по сравнению с неванлинновскими, так как из $T(r, f)=O(1)$ следует, что $f(z)\equiv\mathrm{const}$.

Как известно, обе основные теоремы неванлинновской теории распределения значений содержательны лишь при неограниченных характеристиках $T(r, f)$. Нас будет интересовать, в какой степени эти основные теоремы переносятся на обобщенные характеристики М. М. Джрбашяна, поэтому мы рассматриваем функции $f(z)$, для которых $T_\omega(r, f)\to\infty$ при $r\to\infty$.

Прежде всего заметим, что имеет место такой аналог второй основной теоремы. Пусть $a_1, \cdots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости, функция $\omega(x)$ имеет непрерывную производную $\omega'(x)$, удовлетворяющую условию

$$\varliminf_{x\to\infty} x\omega'(x) > -\infty, \tag{1}$$

тогда вне некоторой последовательности интервалов Δ, для которой $\int\limits_\Delta d\ln r<\infty$, выполняется

$$(q-2)\, T_\omega(r, f)\leqslant\sum_{k=1}^{q}\overline{N}_\omega(r, a_k, f)+O\left(\int_1^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right)+$$
$$+O\left(\sqrt{T_\omega(r, f)\ln T_\omega(r, f)}\right),\quad r\to\infty. \tag{2}$$

Неравенство (2) следует из результатов Дингхаса [3], [4]. Дингхас определял*

$$\mathring{m}_\omega(r, f)=\int_1^r\mathring{m}(t, f)\,d(-\omega(t))+\omega(r)\,\mathring{m}(r, f).$$

Так как $\mathring{m}(r, f)=m(r, f)+O(1)$, то очевидно, что величина

$$\tilde{m}_\omega(r, f)=\int_1^r m(t, f)\,d(-\omega(t))+\omega(r)\,m(r, f)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\left\{\int_1^r\ln^+|f(te^{i\varphi})|\,d(-\omega(t))+\omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})|\right\}$$

отличается от $\mathring{m}_\omega(r, f)$ на несущественное ограниченное слагаемое. Нам будет удобнее пользоваться величиной $\tilde{m}_\omega(r, f)$, называя ее также характеристикой Дингхаса. Характеристическую функцию $\mathring{T}_\omega(r, f)$ Дингхас вводит с помощью $\mathring{A}(r, f)$ и доказывает (см., например, [4], (3.2)), что

* На самом деле свою характеристику Дингхас ассоциировал с другой функцией $\sigma(x)=\{x\omega(x)\}^{-1}$, подчинив ее довольно-таки жестким ограничениям *(прим. Ред.)*.

$$\mathring{T}_\omega(r, f) = N_\omega(r, f) + \mathring{m}_\omega(r, f) + O\left(\int_1^r \frac{\omega(t)}{t}\,dt\right).$$

Так как слагаемое $O\left(\int_1^r \omega(t)\,d\ln t\right)$ также не играет никакой роли для трансцендентных мероморфных функций, то мы для удобства будем называть характеристической функцией Дингхаса величину

$$\tilde{T}_\omega(r, f) = N_\omega(r, f) + \tilde{m}_\omega(r, f) = \int_1^r T(t, f)\,d(-\omega(t)) + \omega(r)\,T(r, f),$$

и, ссылаясь на результаты Дингхаса, без дополнительных оговорок будем заменять $\mathring{m}_\omega(r, f)$ на $\tilde{m}_\omega(r, f)$ и $\mathring{T}_\omega(r, f)$ на $\tilde{T}_\omega(r, f)$. При указанных выше условиях Дингхас доказал неравенство

$$(q-2)\,\tilde{T}_\omega(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_\omega(r, a_k, f) + O\left(\int_1^r \frac{\omega(t)}{t}\,dt\right) +$$

$$+ O\left(\sqrt{\tilde{T}_\omega(r, f)\ln \tilde{T}_\omega(r, f)}\right), \quad r \to \infty. \qquad (3)$$

Так как, очевидно, $m_\omega(r, f) \leqslant \tilde{m}_\omega(r, f)$ и $T_\omega(r, f) \leqslant \tilde{T}_\omega(r, f)$, а функция $(q-2)\,x - K\sqrt{x\ln x}$ при $q \geqslant 3$ — возрастающая функция для всех достаточно больших x, то из (3) сразу следует (2).

Отметим, что вопросы, которые изучали с помощью своих обобщенных характеристик Дингхас и М. М. Джрбашян, нигде не перекрываются. Существо различия характеристик А. Дингхаса и М. М. Джрбашяна, на наш взгляд, заключается в следующем. Характеристика $\tilde{m}_\omega(r, a, f)$ Дингхаса учитывает скорость приближения $f(z)$ к числу a в круге $\{|z| \leqslant r\}$. Характеристика же М. М. Джрбашяна $m_\omega(r, a, f)$ учитывает, кроме того, и способ приближения к числу a: она существенно зависит от конфигурации множества $\{z\colon |z| \leqslant r,\ |f(z)-a| < 1\}$ и от того, насколько отклоняется $f(z)$ от a на дополнении к этому множеству. Статья М. М. Джрбашяна, хотя и опубликована позже работ Дингхаса [3], [4], являлась завершением цикла статей, начатого в 1945 г. (ссылки см. в [2]).

В настоящей статье (п. 2°) будет показано, что в отличие от характеристик Дингхаса для характеристик М. М. Джрбашяна не выполняется аналог первой основной теоремы. М. М. Джрбашян [2] показал, что $T_\omega(r, 1/f) = T_\omega(r, f) + O(1)$. Опираясь на недавний результат С. К. Балашова [5], мы укажем пример целой функции $f(z)$ такой, что при $\omega(x) = 1/x$ для всех a, $0 < |a| < \infty$ выполняется

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{T_\omega(r, 1/(f-a))}{T_\omega(r, f)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N_\omega(r, a, f)}{T_\omega(r, f)} = A > 1, \tag{4}$$

$$\varlimsup_{r\to\infty} T_\omega(r, f) = \infty.$$

Далее мы докажем, что для характеристик Дингхаса при определенных ограничениях на $\omega(x)$, имеет место аналог известной леммы о логарифмической производной [1]. Это позволит получить вторую основную теорему (3) с иными ограничениями на $\omega(x)$, чем у Дингхаса и с лучшей оценкой остаточного члена, чем в (3). Отсюда очевидным образом будет следовать усиление неравенства (2) для характеристик М. М. Джрбашяна. С другой стороны, мы покажем, что без определенных дополнительных ограничений на $\omega(x)$ лемма о логарифмической производной неверна: можно указать пример целой функции $f(z)$ и $\omega(x)$ таких, что при $r\to\infty$ выполняется $\overline{T}_\omega(r, f) = o\ (\overline{m}_\omega(r, f'/f))$. Доказать лемму о логарифмической производной для характеристик Дингхаса при условии (1) нам не удалось. Лемма о логарифмической производной часто полезна и независимо от ее приложений при доказательстве второй основной теоремы, например, в аналитической теории дифференциальных уравнений. Поэтому мы приведем также один вариант леммы о логарифмической производной для характеристик М. М. Джрбашяна.

Наконец, отметим некоторые естественные вопросы, на которые мы в настоящее время не знаем ответа.

1) Справедлива ли для характеристик М. М. Джрбашяна при определенных ограничениях на $\omega(x)$ вторая основная теорема в форме

$$\sum_{k=1}^{q} m_\omega(r, a_k, f) \leqslant 2\ T_\omega(r, f) + o\ (T_\omega(r, f))?$$

Если бы была справедлива основная теорема, то это неравенство следовало бы из (2).

2) Существует ли мероморфная функция $f(z)$ и $\omega(x)$ такие, что для некоторого a, $0<|a|<\infty$ выполняется

$$\varlimsup_{r\to\infty} m_\omega(r, a, f)/T_\omega(r, f) > 1?$$

2°. Построим пример целой функции $f(z)$, для которой выполняется (4). Пусть c — положительное число такое, что c^2 — число нецелое. Обозначим $\rho = 1+c^2$, $p=[\rho]$, $\Delta = (\operatorname{sh}\pi c)/\pi$,

$$a_k = (k/\Delta)^{1/\rho} \exp\ [i\,(c/\rho)\ln(k/\Delta)],\ k=1, 2, \cdots.$$

Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}, p\right), \tag{5}$$

где $E(z, p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода p. Легко видеть, что

$$n(r, 0, f) = [\Delta r^{\rho}], \ N(r, 0, f) = \frac{\Delta}{\rho} r^{\rho} + O(\ln r), \ r \to \infty.$$

В силу известной теоремы Бореля ([1], стр. 81) выполняется

$$T(r, f) = O(r^{\rho}) \text{ и } \ln M(r, f) = O(r^{\rho}) \text{ при } r \to \infty,$$

поскольку ρ — нецелое число. Функция $f(z)$, определенная по (5), является частным случаем целых функций, асимптотическое поведение которых изучал С. К. Балашов [5]. Из теоремы 1 в [5] получаем следующее утверждение. Для произвольного η, $0 < \eta < \pi/2$ равномерно относительно $\theta \in [\eta, 2\pi - \eta]$ выполняется

$$\ln |f(re^{i(c \ln r + \theta)})| = r^{\rho} e^{c(\theta - \pi)} \sin \theta + o(r^{\rho}), \ r \to \infty. \tag{6}$$

Возьмем за $\omega(x)$ функцию $\omega(x) = 1/x$ и найдем асимптотику характеристики $T_{\omega}(r, f) = m_{\omega}(r, f)$. При фиксированном $\varphi \in [0, 2\pi)$ определим последовательности $r_k(\varphi) = \exp\{(\varphi + 2\pi k)/c\}$ и $r_k'(\varphi) = \exp\{(\varphi + 2\pi k + \pi)/c\}$, $k = 0, 1, \cdots$. Пусть $r > r_1(0)$. Из (6) нетрудно получить, что при

$$r_{k-1}(\varphi) e^{\eta/c} \leqslant r \leqslant r_k(\varphi) e^{-\eta/c}, \ k = 1, 2, \cdots$$

выполняется

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = -r^{\rho} \exp\{c(\varphi - c \ln r + (2k-1)\pi)\} \sin(\varphi - c \ln r) + $$
$$+ o(r^{\rho}) = -r \exp\{c(\varphi + (2k-1)\pi)\} \sin(\varphi - c \ln r) + o(r^{\rho}), \ r \to \infty. \tag{7}$$

Определим на $[r_0(\varphi), \infty)$ функцию $\psi(r, \varphi)$, равную

$$-r \exp\{c(\varphi + (2k-1)\pi) \sin(\varphi - c \ln r\} \text{ при}$$
$$r_{k-1}(\varphi) \leqslant r \leqslant r_k(\varphi). \text{ Пусть } q = q(r, \varphi) = [(c \ln r - \varphi)/2\pi].$$

Обозначим

$$E_{\eta} = \{re^{i\Phi}: r > 1, \ -\infty < \Phi < \infty, \ (|\Phi - c \ln r| < \eta) \vee$$
$$\vee (|\Phi - \pi - c \ln r| < \eta)\}.$$

Через $\chi(z)$ будем обозначать характеристическую функцию множества E_{η}. С помощью функции $\psi(r, \varphi)$ равенство (7) можно записать так:

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = \psi(r, \varphi) + o(r^{\rho}), \ r \to \infty, \ r \overline{\in} E_{\eta}(\varphi), \tag{8}$$

где $E_{\eta}(\varphi) = E_{\eta} \cap \{z: \arg z = \varphi\}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Пусть $a \in C \setminus \{0\}$. Из (7) следует, что

$$\ln |f(re^{i\varphi}) - a| = \psi^{+}(r, \varphi) + o(r^{\rho}), \ r \to \infty, \ r \overline{\in} E_{\eta}(\varphi). \tag{9}$$

Оценим снизу разность $m_{\omega}(r, f - a) - m_{\omega}(r, f)$. Мы имеем, учитывая (9)

$$\left\{\int\limits_{1}^{r} \ln|f(te^{i\varphi})-a|\,\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})-a|\right\}^+=$$

$$=\left\{\int\limits_{E_\eta(\varphi)\cap[1,\,r]} \ln|f(te^{i\varphi})-a|\,\frac{dt}{t^2}+\int\limits_{[r_0(\varphi),\,r]\setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t,\,\varphi)\,\frac{dt}{t^2}+\right.$$

$$\left.+(1-\chi(re^{i\varphi}))\,\frac{1}{r}\,\psi^+(r,\,\varphi)+\chi(re^{i\varphi})\,\frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})-a|+o(r^{\rho-1})\right\}^+\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{[r_0(\varphi),\,r]\setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t,\,\varphi)\frac{dt}{t^2}+(1-\chi(re^{i\varphi}))\frac{1}{r}\,\psi^+(r,\,\varphi)-$$

$$-\int\limits_{E_\eta(\varphi)\cap[1,\,r]} \ln^+\frac{1}{|f(te^{i\varphi})-a|}\cdot\frac{dt}{t^2}-\chi(re^{i\varphi})\,\frac{1}{r}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}+o(r^{\rho-1}). \quad (10)$$

Здесь мы использовали элементарное неравенство $(x+x_1+\dots+x_n)^+\geqslant$ $\geqslant x^+-(-x_1)^+-\dots-(-x_n)^+$. Аналогично получаем

$$\left\{\int\limits_{1}^{r}\ln|f(te^{i\varphi})|\,\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})|\right\}^+=$$

$$=\left\{\int\limits_{E_\eta(\varphi)\cap[1,\,r]}\ln|f(te^{i\varphi})|\,\frac{dt}{t^2}\int\limits_{[r_0(\varphi),\,r]\setminus E_\eta(\varphi)}\psi(t,\,\varphi)\,\frac{dt}{t^2}+(1-\chi(re^{i\varphi}))\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{r}\,\psi(r,\,\varphi)+\chi(re^{i\varphi})\,\frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})|+o(r^{\rho-1})\right\}^+\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{[r_0(\varphi),\,r_q(\varphi)]\setminus E_\eta(\varphi)}\psi(t,\,\varphi)\,\frac{dt}{t^2}\right\}^++\int\limits_{[r_q(\varphi),\,r]\setminus E_\eta(\varphi)}\psi^+(t,\,\varphi)\,\frac{dt}{t^2}+$$

$$+(1-\chi(re^{i\varphi}))\times\frac{1}{r}\,\psi(r,\,\varphi)+\int\limits_{E_\eta(\varphi)\cap[1,\,r]}\ln^+|f(te^{i\varphi})|\frac{dt}{t^2}+$$

$$+\chi(re^{i\varphi})\,\frac{1}{r}\ln^+|f(re^{i\varphi})|+o(r^{\rho-1}). \quad (11)$$

Заметим, что

$$\int\limits_{[r_0(\varphi),\,r_q(\varphi)]\setminus E_\eta(\varphi)}\psi(t,\,\varphi)\,\frac{dt}{t^2}=-\sum_{k=0}^{q-1}\int\limits_{r_k(\varphi)\,e^{\eta/c}}^{r'_k(\varphi)\,e^{-\eta/c}}\exp\,[c\,(\varphi+$$

$$+(2k+1)\,\pi]\sin(\varphi-c\ln t)\,d\ln t-$$

$$-\sum_{k=0}^{q-1}\int\limits_{r_k'(\varphi)e^{\eta/c}}^{r_{k+1}(\varphi)e^{-\eta/c}} \exp\{c(\varphi+(2k+1)\pi)\}\sin(\varphi-c\ln t)\,d\ln t=$$

$$=\sum_{k=0}^{q-1}\exp\{c(\varphi+(2k+1)\pi)\}\frac{2}{c}\cos\eta-$$

$$-\sum_{k=0}^{q-1}\exp\{c(\varphi+(2k+1)\pi)\}\frac{2}{c}\cos\eta=0. \qquad (12)$$

$$\int\limits_{[r_0(\varphi),\, r_q(\varphi)]\setminus E_\eta(\varphi)} \psi^+(t,\varphi)\frac{dt}{t^2}=\sum_{k=0}^{q-1}\exp\{c(\varphi+(2k+1)\pi)\}\frac{2}{c}\cos\eta=$$

$$=\frac{\cos\eta}{c\operatorname{sh}\pi c}e^{c\varphi}(e^{c2q\pi}-1)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{e^{-2\pi c}\cos\eta}{c\operatorname{sh}\pi c}r^{c^2}-\frac{e^{2\pi c}\cos\eta}{c\operatorname{sh}\pi c}. \qquad (13)$$

Из (10)—(13) следует, что

$$\left\{\int_1^r\ln|f(te^{i\varphi})-a|\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})-a|\right\}^+-$$

$$-\left\{\int_1^r\ln|f(te^{i\varphi})|\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})|\right\}^+\geqslant\frac{e^{-2\pi c}\cos\eta}{c\operatorname{sh}\pi c}r^{c^2}-$$

$$-\int\limits_{E_\eta(\varphi)\cap[1,r]}\ln^+\frac{1}{|f(te^{i\varphi})-a|}\frac{dt}{t^2}-\chi(re^{i\varphi})\frac{1}{r}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}-$$

$$-\int\limits_{E_\eta(\varphi)\cap[1,r]}\ln^+|f(te^{i\varphi})|\frac{dt}{t^2}-\chi(re^{i\varphi})\frac{1}{r}\ln^+|f(re^{i\varphi})|+o(r^{\rho-1}),$$

откуда

$$m_\omega(r,f-a)-m_\omega(r,f)\geqslant\frac{e^{-2\pi c}\cos\eta}{c\operatorname{sh}\pi c}r^{c^2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\{1<|z|<r\}\cap E_\eta}\ln^+\frac{1}{|f(te^{i\varphi})-a|}\frac{d\varphi dt}{t^2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\{1<|z|<r\}\cap E_\eta}\ln^+|f(te^{i\varphi})|\frac{d\varphi dt}{t^2}-$$

$$-\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\{|z|=r\}\cap E_\eta}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}\,d\varphi-\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\{|z|=r\}\cap E_\eta}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi+$$

$$+o(r^{\rho-1}). \qquad (14)$$

Существует такая постоянная $K>0$, что $T(r, f)\leqslant\ln M(r, f)\leqslant\leqslant Kr^\rho$ и $T(r, 1/(f-a))\leqslant Kr^\rho$ при $r\geqslant 1$. Так как

$$\iint\limits_{\{|z|=r\}\cap E_\eta} d\varphi=4\eta,$$

то

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\{|z|=r\}\cap E_\eta}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\frac{2\eta K}{\pi}r^{\rho-1},$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\{1<|z|<r\}\cap E_\eta}\ln^+|f(te^{i\varphi})|\frac{d\varphi\,dt}{t^2}\leqslant\frac{2\eta K}{\pi(\rho-1)}r^{\rho-1}.$$

Из одной теоремы Эдрея и Фукса ([1], стр. 58) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\{|z|=r\}\cap E_\eta}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}\,d\varphi\leqslant\frac{24}{\pi}\eta\ln\frac{\pi e}{2\eta}\cdot T\left(2r,\frac{1}{f-a}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{24K2^\rho}{\pi}\eta\ln\left(\frac{\pi e}{2\eta}\right)r^\rho,$$

а значит

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\{1<|z|<r\}\cap E_\eta}\ln^+\frac{1}{|f(te^{i\varphi})-a|}\frac{d\varphi\,dt}{t^2}\leqslant\frac{24K2^\rho}{\pi(\rho-1)}\eta\ln\frac{\pi e}{2\eta}r^{\rho-1}.$$

Следовательно

$$m_\infty(r, f-a)-m_\infty(r, f)\geqslant r^{\rho-1}\left\{\frac{e^{-2\pi c}\cos\eta}{c\,\mathrm{sh}\,\pi c}-\frac{2\eta\rho K}{\pi(\rho-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{24K2^\rho\rho}{\pi(\rho-1)}\eta\ln\left(\frac{\pi e}{2\eta}\right)\right\}+o(r^{\rho-1}),\ r\to\infty. \qquad (15)$$

Так как

$$m_\infty(r, f)=T_\infty(r, f)\leqslant\tilde{T}_\infty(r, f)=$$

$$=\int\limits_1^r T(t, f)\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{r}T(r, f)\leqslant\frac{K\rho\, r^{\rho-1}}{\rho-1},$$

то

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T_\infty(r, 1/(f-a))}{T_\infty(r, f)}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m_\infty(r, f-a)}{m_\infty(r, f)}\geqslant$$

$$\geqslant 1+\frac{ce^{-2\pi c}}{K\rho\,\mathrm{sh}\,\pi c}\cos\eta-\frac{2\eta}{\pi}-\frac{24\cdot 2^{\rho}}{\pi}\eta\ln\left(\frac{\pi e}{2\eta}\right).$$

Устремим здесь η к нулю. Получим

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{T_{\omega}(r,\,1/(f-a))}{T_{\omega}(r,\,f)}=A\geqslant 1+\frac{c\exp(-2\pi c)}{K(1+c^2)\,\mathrm{sh}\,\pi c}>1. \qquad (16)$$

С другой стороны

$$T_{\omega}(r,\,f)\geqslant N_{\omega}(r,\,0,\,f)+O(1)=\int\limits_{1}^{r}\Delta t^{\rho-2}\,dt+O(1)=$$

$$=\frac{\mathrm{sh}\,\pi c}{\pi c^2}r^{\rho-1}+O(1).$$

Из (7) следует, что

$$\ln^{+}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-a|}=o(r^{\rho}),\ r\to\infty,\ r\,\overline{\in}\,E_{\eta}.$$

Используя известные результаты ([1], стр. 59—60), легко получить, что $m(r,\,a,\,f)=o(r^{\rho})$ при

$$r\to\infty\ \text{и}\ m_{\omega}(r,\,a,\,f)\leqslant\tilde{m}_{\omega}(r,\,a,\,f)=o(r^{\rho-1}),\ r\to\infty.$$

Следовательно,

$$m_{\omega}(r,\,a,\,f)=o\,(T_{\omega}(r,\,1/(f-a))\ \text{и}\ T_{\omega}(r,\,1/(f-a))\sim N_{\omega}(r,\,a,f)$$

при $r\to\infty$. Поэтому (15) можно переписать так

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{N_{\omega}(r,\,a,\,f)}{T_{\omega}(r,\,f)}=A>1.$$

Таким образом, целая функция $f(z)$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Было бы интересно выяснить, существует ли мероморфная функция $f(z)$ и функция $\omega(x)$ такие, что $T_{\omega}(r,\,f)=o\,(N_{\omega}(r,\,a,\,f))$ при $r\to\infty$.

3°. Как уже отмечалось в пункте 1°, Дингхас [3], [4] доказал аналог второй основной теоремы—неравенство (2) при условии, что непрерывно дифференцируемая функция $\omega(x)$ удовлетворяет условию (1). В этих же статьях Дингхас показал, что некоторый аналог второй основной теоремы имеет место, если принять $\omega(x)=T(x,\,f)^{\alpha-1}$, $0\leqslant\alpha<1$. В этом разделе будет показано, что вторая основная теорема имеет место для характеристик Дингхаса при некоторых ограничениях на $\omega(x)$ и $T(r,\,f)$, не содержащихся в условиях Дингхаса, притом с лучшей, чем в (2) оценкой остаточного члена. Мы приведем здесь лишь доказательство аналога леммы о логарифмической производной для характеристик Дингхаса, с его помощью вторая основная теорема доказывается точно так, как в классическом случае [1].

Пусть нам заданы мероморфная функция $f(z)$ и положительная невозрастающая на $[1, \infty)$ функция $\omega(x)$. Обозначим $r_1 = r_1(r) = r + (T(r, f))^{-2}$. Скажем, что выполняется

Условие А: если существует такое положительное число M, что для всех r, начиная с некоторого, выполняется

$$T(r_1, f) \leqslant \{T(r, f)\}^{M}. \tag{17}$$

Условие А относится только к $T(r, f)$. Следующие четыре условия налагаются одновременно на $\omega(x)$ и на $T(r, f)$. Будем считать, что выполнено

Условие Б: если существует такое число τ, $0 < \tau < 1$, что для всех r, начиная с некоторого, выполняется

$$\omega(r) \geqslant \{T(r_1, f)\}^{-\tau}. \tag{18}$$

Условие В: если существует такое число τ, $0 < \tau < 1$, что для всех r, начиная с некоторого, выполняется

$$\omega(r) \leqslant \{T(r_1, f)\}^{-\tau}. \tag{19}$$

Условие Г: существуют такие числа τ, $0 < \tau < 1$ и M, $1 < M < \infty$, что для всех достаточно больших r, для которых выполняется (18), выполняется и (17).

Условие Д: существуют такие τ, τ_1, $0 < \tau, \tau_1 < 1$, что для всех достаточно больших r выполняется (19) или выполняется

$$\omega(r_1) \geqslant \{T(r_1, f)\}^{-\tau_1}. \tag{20}$$

Очевидно, если $\omega(x) = T(x, f)^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, то выполняется условие Б с $\tau = 1 - \alpha$.

Теорема 1. *Если выполнено хотя бы одно из условий А—Д, то для всех r, кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется*

$$\tilde{m}_\omega(r, f'/f) = O\left(\ln^+ \tilde{T}_\omega(r, f) + \int_1^r \omega(t)\, d \ln t\right), \quad r \to \infty. \tag{21}$$

Доказательство. Известно ([1], стр. 122, формула (1.11)), что

$$m(r, f'/f) = O(\ln^+ T(r_1, f) + \ln r), \quad r \to \infty. \tag{22}$$

Тогда

$$\tilde{m}_\omega(r, f'/f) = m(r, f'/f)\,\omega(r) + \int_1^r m(t, f'/f)\, d(-\omega(t)) =$$

$$= O\left[\omega(r)\ln^+ T(r_1, f) + \int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) +\right.$$

$$\left. + \int_1^r \omega(t)\, d\ln t\right], \quad r \to \infty. \tag{23}$$

По теореме Бореля—Неванлинны ([1], стр. 120) выполняется $T(r_1, f) \leqslant T(r, f) + 1$, кроме, возможно, множества конечной меры. Поэтому

$$\omega(r)\ln^+ T(r_1, f) \leqslant \omega(r)\ln^+ T(r, f) + O(1). \tag{24}$$

Если

$$\omega(r) > \{T(r, f)\}^{-1/2}, \text{ то } \omega(r)^{-1} < T(r, f)\,\omega(r) \leqslant \tilde{T}_\omega(r, f) \quad \text{и}$$

$$\omega(r)\ln^+ T(r, f) \leqslant \left\{\ln^+ (T(r, f)\omega(r)) + \ln^+ \frac{1}{\omega(r)}\right\} \leqslant 2\omega(1)\cdot\ln^+ T_\omega(r, f).$$

Если же

$$\omega(r) \leqslant \{T(r, f)\}^{-1/2}, \text{ то } \omega(r)\ln^+ T(r, f) = O(1).$$

Из (24) получаем, что для всех r, кроме, возможно, множества конечной меры, выполняется

$$\omega(r)\ln^+ T(r_1, f) = O(\ln^+ \tilde{T}_\omega(r, f)), \quad r \to \infty.$$

Чтобы вывести из (23) соотношение (21), остается доказать, что вне множества конечной меры выполняется

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) = O(\ln^+ \tilde{T}_\omega(r, f)), \quad r \to \infty. \tag{25}$$

Пусть выполнено условие А. Используя неравенство ($b > a$):

$$\frac{1}{\omega(a) - \omega(b)} \int_a^b \ln^+ f(x)\, d(-\omega(x)) \leqslant \ln^+ \left\{\frac{1}{\omega(a) - \omega(b)} \times\right.$$

$$\left. \times \int_a^b f(x)\, d(-\omega(x))\right\} + \ln 2,$$

где $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция (см. [1], стр. 116), получим

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) \leqslant$$

$$\leqslant M\int_1^r \ln^+ T(t, f)\, d(-\omega(t)) \leqslant O(1) +$$

$$+ M(\omega(1)-\omega(r)) \ln^+ \left\{\frac{1}{\omega(1)-\omega(r)}\int_1^r T(t, f)\, d(-\omega(t))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant M\omega(1) \ln^+ \int_1^r T(t, f)\, d(-\omega(t)) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant M\omega(1) \ln^+ \widetilde{T}_\omega(r, f) + O(1),$$

т. е. (25), причем без исключительного множества.

Пусть выполнено условие Б. Тогда для всех $r \geqslant r_0 \geqslant 1$ имеем

$$\{\omega(r)\, T(r, f)\}^\tau \geqslant \omega(r)^{\tau-1}. \tag{26}$$

Очевидно

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) \leqslant \omega(1) \ln^+ T(r_1, f).$$

Но вне множества конечной меры по теореме Бореля—Неванлинны имеем

$$\ln^+ T(r_1, f) \leqslant \ln^+ T(r, f) + O(1) \leqslant \ln^+ \{T(r, f)\, \omega(r)\} +$$

$$+ \ln^+ \frac{1}{\omega(r)} + O(1) \leqslant \ln^+ \{T(r, f)\, \omega(r)\} + O(1) +$$

$$+ \frac{\tau}{1-\tau} \ln^+ \{T(r, f)\,\omega(r)\} \leqslant \frac{1}{1-\tau} \ln^+ \widetilde{T}_\omega(r, f) + O(1), \tag{27}$$

здесь было использовано (26). Таким образом, и в этом случае доказано (25).

Предположим теперь, что при $r \geqslant r_3 \geqslant 1$ выполняется (19), тогда

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) = 2\int_{r_0}^r \ln^+ T(t_1, f) \sqrt{\omega(t)}\, d(-\sqrt{\omega(t)}) +$$

$$+ O(1) \leqslant 2\int_{r_0}^r \{T(t_1, f)\}^{-\tau/2} \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\sqrt{\omega(t)}) +$$

$$+ O(1) \leqslant C\int_{r_0}^r d(-\sqrt{\omega(t)}) + O(1) = O(1), \tag{28}$$

т. е. соотношение более сильное, чем (25).

Пусть выполняется условие Г. Не уменьшая общности, можно считать, что функция $\omega(r)$ непрерывна слева. Для всех достаточно больших r выполняется неравенство (18) или (19), соответствующие множества обозначим через E_1 и E_2. Пусть

$$\bar{r} = \max\{x \in E_1 : x \leqslant r\}.$$

Тогда

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) \leqslant \int_{E_1 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) +$$

$$+ \int_{E_2 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) + O(1) \leqslant O(1) +$$

$$+ \ln^+ T(r_1(\bar{r}), f) \int_{E_1 \cap [1, r]} d(-\omega(t)) \leqslant O(1) + \omega(1) \ln^+ T(r_1(\bar{r}), f).$$

Здесь интеграл по $E_2 \cap [1, r]$ мы оценили точно так, как (28). В силу условия Г при $r = \bar{r}$ выполняется (17), поэтому

$$\ln^+ T(r_1(\bar{r}), f) \leqslant M \ln^+ T(\bar{r}, f).$$

Используя (27), получаем

$$\ln^+ T(\bar{r}, f) \leqslant \frac{1}{1-\tau} \ln^+ \bar{T}_\omega(\tilde{r}, f) \leqslant \frac{1}{1-\tau} \ln^+ \bar{T}_\omega(r, f),$$

в силу неубывания характеристики $\bar{T}_\omega(r, f)$ [3]. Таким образом, и в случае Г доказано (25).

Предположим, что выполняется условие Д. Как и выше

$$\int_{E_2 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) = O(1).$$

Обозначим через E_3 множество тех значений r, для которых выполняется (20), причем снова можем считать функцию $\omega(r)$ непрерывной слева. Обозначим $\bar{r} = \max\{x \in E_3 : x \leqslant r\}$. Тогда

$$\int_{E_3 \cap [1, r]} \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) \leqslant \omega(1) \ln^+ T(r_1(\bar{r}), f) \leqslant$$

$$\leqslant \omega(1) \ln^+ \{T(r_1(\bar{r}), f)\, \omega(r_1(\bar{r}))\} + \omega(1) \ln^+ \frac{1}{\omega(r_1(\bar{r}))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \{T(r_1(\bar{r}), f)\, \omega(r_1(\bar{r}))\} \leqslant \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(r_1(\bar{r}), f).$$

Таким образом

$$\int_1^r \ln^+ T(t_1, f)\, d(-\omega(t)) \leqslant \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(r_1(\bar{r}), f) + O(1) \leqslant O(1) +$$

$$+ \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega\left(\bar{r} + \left\{\frac{\omega(1)}{\bar{T}_\omega(\bar{r}, f)}\right\}^2, f\right) \leqslant O(1) +$$

$$+ \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(\bar{r}, f) \leqslant \frac{\omega(1)}{1-\tau_1} \ln^+ \bar{T}_\omega(r, f) + O(1),$$

где предпоследнее неравенство справедливо вне множества конечной меры. Здесь мы снова использовали теорему Бореля—Неванлинны, а также неравенство

$$\bar{T}_\omega(r, f) = \omega(1)\, T(1, f) + \int_1^r T'(t, f)\, \omega(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega(1) \left\{ T(1, f) + \int_1^r T'(t, f)\, dt \right\} = \omega(1)\, T(r, f).$$

З а м е ч а н и е. Если функция $f(z)$ имеет конечный порядок, измеренный относительно $T(r, f)$, то

$$\tilde{m}_\omega(r, f'/f) = O\left(\int_1^r \omega(t)\, d \ln t\right), \quad r \to \infty. \tag{29}$$

Действительно, в этом случае имеем $m(r, f'/f) = O(\ln r)$ и, вместо (23), сразу получаем (29).

Из теоремы 1 и этого замечания обычным образом следует

Т е о р е м а 2. *Пусть $a_1, \cdots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости, $f(z)$—мероморфная функция. Если выполнено хотя бы одно из условий А—Д, то вне множества значений конечной меры выполняется*

$$(q-2)\, \bar{T}_\omega(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \bar{N}_\omega(r, a_k, f) + O(\ln \bar{T}_\omega(r, f) +$$

$$+ \int_1^r \omega(t)\, d \ln t), \quad r \to \infty. \tag{30}$$

Если $f(z)$—функция конечного порядка, то для любой функции $\omega(x)$ выполняется (без исключительных значений)

$$(q-2)\ \overline{T}_{\omega}(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_{\omega}(r, a_k, f) + O\left(\int_{1}^{r} \omega(t)\, d\ln t\right). \quad (31)$$

Эти соотношения (30) *и* (31) *остаются в силе, если в них заменить* $\overline{T}_{\omega}(r, f)$ *на* $T_{\omega}(r, f)$.

Замечание 1. Неравенство (31) легко получить и непосредственно из второй основной теоремы Р. Неванлинны

$$(q-2)\ T(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \overline{N}(r, a_k, f) + O(\ln r).$$

Замечание 2. Из неравенства (44), доказываемого в конце статьи, следует, что неравенство (30) справедливо вне множества конечной логарифмической меры, если вне множества конечной логарифмической меры выполняется

$$\ln \frac{1}{\omega(r)} = O\left(\int_{1}^{r} \omega(t)\, d\ln t\right),\ r \to \infty.$$

Легко видеть, что если $\overline{T}_{\omega}(r, f) \to \infty$, при $r \to \infty$, то

$$\int_{1}^{r} \omega(t)\, d\ln t = o\,(\overline{T}_{\omega}(r, f)),\ r \to \infty.$$

Из (30) обычным образом вытекает, что множество дефектных значений в смысле А. Дингхаса, т. е. тех $a \in \overline{C}$, для которых

$$\delta_{\omega}(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}}\ N_{\omega}(r, a, f)/\overline{T}_{\omega}(r, f) > 0,$$

не более чем счетно. Используя результат Хеймана [6], покажем, что если не накладывать некоторых ограничений на $f(z)$ и на $\omega(x)$, то для всех a из некоторого множества, имеющего мощность континуума, может быть $\delta_{\omega}(a, f) = 1$, следовательно, не выполняется и (30). Хейман, в частности, показал, что существует целая функция $f(z)$, множество $E \subset C$ мощности континуума и такая последовательность $r_k \to \infty$, что для всех $a \in E$ выполняется $N(r_k, a, f) \leqslant \ln^2 r_k$, а также $T(r_k, f) \geqslant r_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, не уменьшая общности, можно считать, что

$$r_1 > 1,\ T(r_1, f) > 1,\ T(r_{k+1}, f) > 2\ T(r_k, f) \ \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^{-1} \ln^2 f_k < \infty. \quad \text{Возьмем} \quad \omega(r) = \{T(r_1, f)\}^{-1}$$

при $r \leqslant r_1$,

$$\omega(r) = [T(r_{k+1}, f)]^{-1}$$

при $r_k < r \leqslant r_{k+1}$. Тогда при $r_n \leqslant r_{n+1}$ выполняется

$$\bar{T}_\omega(r, f) = T(r, f)\,\omega(r) + \int_1^r T(t, f)\, d(-\omega(t)) =$$

$$= O(1) + \sum_{k=1}^{n} T(r_k, f)\left(\frac{1}{T(r_k, f)} - \frac{1}{T(r_{k+1}, f)}\right) \geqslant O(1) + n/2,$$

т. е. $\bar{T}_\omega(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$. С другой стороны, для любого $a \in E$ и $r_n < r \leqslant r_{n+1}$ выполняется

$$N_\omega(r, a, f) = \omega(r)\, N(r, a, f) + \int_1^r N(t, a, f)\, d(-\omega(t)) =$$

$$= O(1) + \sum_{k=1}^{n} N(r_k, a, f)\left\{\frac{1}{T(r_k, f)} - \frac{1}{T(r_{k+1}, f)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant O(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^2 r_k}{T(r_k, f)} < O(1) + \sum_{k=1}^{n} r_k^{-1} \ln^2 r_k,$$

т. е. $N_\omega(r, a, f) = O(1)$ при $r \to \infty$ и $\delta_\omega(a, f) = 1$.

Функция $\omega(r)$, которой мы пользовались, имеет разрывы в точках r_k. Очевидно, ее можно „сгладить“ в достаточно малых окрестностях r_k так, что и для непрерывно дифференцируемой функции $\omega(r)$ будет выполняться $\bar{T}_\omega(r, f) \to \infty$ и $N_\omega(r, a, f) = O(1)$, при $a \in E$, $r \to \infty$.

Легко видеть, что при условиях теоремы 1 выполняется

$$\bar{m}_\omega(r, f'/f) = o(\bar{T}_\omega(r, f)), \quad r \to \infty. \tag{32}$$

Если проследить доказательство теоремы 2, повторяющее обычный вывод второй основной теоремы с помощью леммы о логарифмической производной, то нетрудно прийти к заключению, что в предыдущем примере выполняется

$$\bar{T}_\omega(r, f) = o(\bar{m}_\omega(r, f'/f)), \quad r \to \infty. \tag{33}$$

Покажем, что и для характеристик М. М. Джрбашяна для некоторых функций $f(z)$ и $\omega(x)$ может выполняться аналогичное соотношение

$$T_\omega(r, f) = o(m_\omega(r, f'/f)), \quad r \to \infty \tag{34}$$

вне множества конечной меры. В указываемом ниже примере будет выполняться также (33), что будет показано непосредственно.

Возьмем принадлежащий Хейману ([1], стр. 123) пример целой функции

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r_n}\right)^{\lambda_n},$$

где $r_n=2^{n-1}$, а λ_n — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $n^2\lambda_{n-1}^2=o(\ln\lambda_n)$ при $n\to\infty$. Известно ([1], стр. 124), что тогда $m(r_n, f'/f)>T^2(r_n, f)>1$, $n\geqslant n_0$. Пусть $\omega(r)=1$ при $r\leqslant r_{n_0}$, а при $r_n<r\leqslant r_{n+1}$, $n\geqslant n_0$, $\omega(r)=\{T(r_{n+1}, f)\}^{-1}$. Известно ([1], стр. 124, (1.15)), что $T(r_n, f)\leqslant(1+o(1))\,n\lambda_{n-1}\ln 2$. С другой стороны

$$|f(r_ne^{i\varphi})|\geqslant\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{\lambda_{n-1}}-\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{r_n}{r_k}\right)^{\lambda_k}-\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{r_n}{r_k}\right)^{\lambda_k}\geqslant$$

$$\geqslant 2^{\lambda_{n-1}}-(n-2)\,2^{(n-1)\lambda_{n-2}}-2=(1+o(1))\,2^{\lambda_{n-1}},$$

$$T(r_n, f)\geqslant\lambda_{n-1}\ln 2+o(1).$$

Поэтому

$$T(r_n, f)=o\left(T(r_{n+1}, f)\right),\quad n\to\infty.$$

Мы имеем

$$\bar{T}_\omega(r, f)=T(r, f)\,\omega(r)+\int_1^r T(t, f)\,d(-\omega(t))=$$

$$=O(1)+\sum_{n=n_0+1}^{[\ln r/\ln 2]}T(r_n, f)\left\{\frac{1}{T(r_n, f)}-\frac{1}{T(r_{n+1}, f)}\right\}=$$

$$=O(1)+\sum_{n=n_0+1}^{[\ln r/\ln 2]}(1+o(1))\to\infty,\quad r\to\infty.$$

Отсюда видим, что $\bar{T}_\omega(r, f)\to\infty$ и $\bar{T}_\omega(r, f)=O(\ln r)$ при $r\to\infty$. Зафиксируем $\nu>n_0$. Тогда при $r>r_\nu$

$$\bar{m}_\omega(r, f'/f)\geqslant\int_1^r m(t, f'/f)\,d(-\omega(t))\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=\nu}^{[\ln r/\ln 2]}m(r_n, f'/f)\left\{\frac{1}{T(r_n, f)}-\frac{1}{T(r_{n+1}, f)}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=\nu}^{[\ln r/\ln 2]}\{T(r_n, f)\}^2\left\{\frac{1}{T(r_n, f)}-\frac{1}{T(r_{n+1}, f)}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant T(r_\nu, f)\sum_{n=\nu}^{[\ln r/\ln 2]}T(r_n, f)\left\{\frac{1}{T(r_n, f)}-\frac{1}{T(r_{n+1}, f)}\right\}=$$

$$= T(r_\nu, f)\,[\bar{T}_\infty(r, f) + O(1)].$$

Следовательно

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\, \tilde{m}_\infty(r, f'/f)/\bar{T}_\infty(r, f) \geqslant T(r_\nu, f).$$

Перейдя здесь к пределу при $r_\nu \to \infty$, получаем (33). Покажем, что в этом примере выполняется (34). Действительно, при $|z| = r_n$, $n \geqslant n_0$, выполняется $|f'(z)/f(z)| > 1$ ([1], стр. 124), поэтому

$$\left\{\omega(r)\ln|f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi})| + \sum_{n=n_0}^{[\ln r/\ln 2]} \ln|f'(r_n e^{i\varphi})/f(r_n e^{i\varphi})|\,(\omega(r_n) -\right.$$

$$\left. -\,\omega(r_n+0))\right\}^+ \geqslant \omega(r)\ln^+|f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi})| +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{[\ln r/\ln 2]} \ln|f'(r_n e^{i\varphi})/f(r_n e^{i\varphi})|\,(\omega(r_n) - \omega(r_n+0)) -$$

$$-\,\omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})/f'(re^{i\varphi})|$$

и

$$m_\infty(r, f'/f) \geqslant \tilde{m}_\infty(r, f'/f) - \omega(r)\, m(r, f/f'),$$

но вне множества конечной меры

$$m(r, f/f') \leqslant T(r, f'/f) + O(1) \leqslant (2 + o(1))\, T(r, f)$$

и

$$\omega(r)\, m(r, f/f') \leqslant (2 + o(1))\,\omega(r)\, T(r, f) \leqslant 2 + o(1).$$

Из (33) следует

$$T_\infty(r, f) \leqslant \bar{T}_\infty(r, f) = o(\tilde{m}_\infty(r, f'/f)) =$$

$$= o(m_\infty(r, f'/f) + O(1)) = o(m_\infty(r, f'/f)),$$

т. е. имеет место (34).

З а м е ч а н и е. Из (33) следует, что $\ln r = o(\tilde{m}_\infty(r, f'/f))$ и

$$\int_1^r \omega(t)\, d\ln t = o(\tilde{m}_\infty(r, f'/f)),\quad r \to \infty.$$

Это показывает, что (29) может не иметь места, если конечен порядок функции $\bar{T}_\infty(r, f)$ (в нашем случае порядок $\bar{T}_\infty(r, f)$ равен нулю).

4°. Если функция $f(z)$ имеет конечный порядок, то, очевидно, выполняется (29), где характеристика $\tilde{m}_\infty(r, f'/f)$ заменена характеристикой М. М. Джрбашяна $m_\omega(r, f'/f)$. В случае, когда $f(z)$ имеет бесконечный порядок, нам удалось получить оценку (21), где вместо характеристик Дингхаса стоят характеристики М. М. Джрбашяна, лишь при условии, что

$$\ln \frac{1}{\omega(r)} = O\left(\int_1^r \omega(t)\, d\ln t\right), \quad r \to \infty.$$

Исключительно с целью сокращения записей будем предполагать, что: 1) $f(0)=1$; 2) $f(z)$ не имеет нулей и полюсов в единичном круге; 3) $\omega(1)=1$, и положим $\omega(x) \equiv 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Обозначим

$$\ln_\omega |f(Re^{i\varphi})| = \omega(R) \ln |f(Re^{i\varphi})| + \int_0^R \ln|f(te^{i\varphi})|\, d(-\omega(t)),$$

$$\ln^+_\omega |f(Re^{i\varphi})| = \omega(R) \ln^+ |f(Re^{i\varphi})| + \int_0^R \ln^+ |f(te^{i\varphi})|\, d(-\omega(t)).$$

Тогда

$$m_\omega(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln_\omega |f(Re^{i\varphi})|)^+\, d\varphi,$$

$$\tilde{m}_\omega(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+_\omega |f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Пусть a_μ — нули $f(z)$, b_ν — полюсы $f(z)$, c_m — последовательность, составленная из нулей и полюсов

$$f(z),\ \Delta_k(R) = \int_0^R \omega(x)\, dx^k,\ S_R(z, \omega) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k/\Delta_k(R).$$

М. М. Джрбашян ([2], теорема 3) доказал следующее обобщение формулы Шварца—Иенсена: при $|z| < R$

$$\ln f(z) = \sum_{|a_\mu|<R} \ln\left(1 - \frac{z}{a_\mu}\right) - \sum_{|b_\nu|<R} \ln\left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right) -$$

$$- \sum_{|a_\mu|<R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta} z, \omega) \ln_\omega \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{a_\mu} \right| d\theta +$$

$$+ \sum_{|b_\nu|<R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta} z, \omega) \ln_\omega \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{b_\nu} \right| d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta} z, \omega) \ln_\omega |f(Re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{35}$$

мы воспользовались здесь также формулой (1.56) из [7]. Так как $\Delta_k(R) \geqslant R^k \omega(R)$, то

$$|S_R'(z, \omega)| = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}/\Delta_k(R)\right| \leqslant \frac{2}{\omega(R)} \sum_{k=1}^{\infty} k|z|^{k-1}/R^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2R}{\omega(R)} \frac{1}{(R-|z|)^2}. \qquad (36)$$

Продифференцировав (35), принимая во внимание (36), получим

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \sum_{|c_m|<R} \frac{1}{|z-c_m|} + \frac{2R}{\omega(R)(R-|z|)^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{|c_m|<R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\ln_\omega \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right|\right| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\ln_\omega |f(Re^{i\theta})|\right| d\theta \right\}. \qquad (37)$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\ln_\omega |f(Re^{i\theta})|\right| d\theta = m_\omega(R, f) + m_\omega(R, 1/f), \qquad (38)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\ln_\omega \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right|\right| d\theta = m_\omega\left(R, 1 - \frac{z}{c_m}\right) + m_\omega\left(R, \left(1 - \frac{z}{c_m}\right)^{-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\, m_\omega\left(R, 1 - \frac{z}{c_m}\right) \leqslant 2\bar{m}_\omega\left(R, 1 - \frac{z}{c_m}\right) =$$

$$= 2\left\{ \omega(R)\, m\left(R, 1 - \frac{z}{c_m}\right) + \int_1^R m\left(t, 1 - \frac{z}{c_m}\right) d(-\omega(t)) \right\}.$$

Но

$$m\left(r, 1 - \frac{z}{c_m}\right) \leqslant m\left(r, \frac{z}{c_m}\right) + \ln 2 = \ln^+ \frac{r}{|c_m|} + \ln 2,$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\ln_\omega \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right|\right| d\theta \leqslant 2\left\{ \omega(R) \ln \frac{R}{|c_m|} + \int_1^R \ln^+ \frac{t}{|c_m|}\, d(-\omega(t)) \right\} + 2\ln 2,$$

$$\sum_{|c_m|<R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\ln_\omega \left| 1 - \frac{Re^{i\theta}}{c_m} \right|\right| d\theta \leqslant 2 N_\omega(R, f) + 2N_\omega(R, 1/f) +$$

$$+ 2\ln 2\,\{n(R, f) - n(R, 1/f)\}. \qquad (39)$$

Из (37) — (39) следует

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \sum_{|c_m|<R} \frac{1}{|z-c_m|} + \frac{8R}{\omega(R)(R-|z|)^2} T_\omega(R, f) +$$

$$+ \frac{4R\ln 2}{\omega(R)(R-|z|)^2} \{n(R, f) + n(R, 1/f)\}.$$

Так как при $R' > R$

$$n(R, f) \leqslant \frac{R'}{R'-R} N(R', f) \leqslant \frac{R'}{\omega(R')(R'-R)} N_\omega(R', f), \qquad (40)$$

а $T_\omega(r, f)$ — неубывающая функция, то

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \sum_{|c_m|<R} \frac{1}{|z-c_m|} + \frac{16R'^2}{\omega(R')^2(R-|z|)^2(R'-R)} T_\omega(R', f).$$

Пусть $|z| \leqslant r < R < R'$, $R-r = R'-R = (R'-r)/2$. Тогда

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \psi_R(z) + \frac{128R'^2}{\omega(R')^2(R'-r)^3} T_\omega(R', f),$$

где $\psi_R(z) = \sum\limits_{|c_m|<R} \frac{1}{|z-c_m|}$, и

$$\tilde{m}_\omega(r, f'/f) \leqslant \tilde{m}_\omega(r, \psi_R(z)) +$$

$$+ \ln^+\left\{\frac{128R'^2}{\omega(R')^2(R'-r)^3} T_\omega(R', f)\right\} + \ln 2. \qquad (41)$$

Учитывая известные соотношения ([1], стр. 116, 118) и (40), при $1 \leqslant t < r$ имеем

$$m(t, \psi_R(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \psi_R(te^{i\varphi})\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \{\psi_R(te^{i\varphi})\}^{1/2}\, d\varphi \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left\{\sum_{|c_m|<R} \frac{1}{|te^{i\varphi}-c_m|^{1/2}}\right\} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\ln^+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{|c_m|<R} \frac{1}{|te^{i\varphi}-c_m|^{1/2}}\right\} d\varphi\right) + 2\ln 2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\ln^+ 2\{n(t, f) + n(t, 1/f)\} + 2\ln 2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\ln^+ \frac{4R'\, T_\omega(R', f)}{\omega(R')(R'-r)} + 2\ln 2$$

и

$$\bar{m}_\omega(r, \psi_R(z)) = \omega(r)\, m(r, \psi_R) + \int_1^r m(t, \psi_R)\, d\{-\omega(t)\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\ \ln^{+} \frac{4R' T_{\omega}(R', f)}{\omega(R')(R'-r)} + 2 \ln 2. \tag{42}$$

Из (41) и (42) следует

$$\overline{m}_{\omega}(r, f'/f) \leqslant 3\ \ln^{+} T_{\omega}(R', f) + 4 \ln \frac{1}{\omega(R')} +$$

$$+ 5 \ln^{+} \frac{R'}{R'-r} + 14 \ln 2. \tag{43}$$

Предположим, что $T_{\omega}(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$. Выберем $R' = r + r \min \{(T_{\omega}(r, f))^{-2}, \omega(r)^{2}\}$. Из теоремы Бореля—Неванлинны легко вывести (ср. упражнение 2 на стр. 121 в [1]), что вне множества конечной логарифмической меры выполняются неравенства

$$\frac{1}{\omega(R')} \leqslant \frac{1}{\omega(R)} + 1 \ \text{ и } \ T_{\omega}(R', f) \leqslant T_{\omega}(r, f) + 1.$$

Учитывая (43), имеем

$$m_{\omega}(r, f'/f) \leqslant \overline{m}_{\omega}(r, f'/f) \leqslant 13\ \ln^{+} T_{\omega}(r, f) + 14 \ln \frac{1}{\omega(r)} + O(1), \tag{44}$$

вне множества конечной логарифмической меры. Наличие слагаемого $-\ln \omega(r)$ является основным недостатком оценки (44). Ее преимущество перед (21) — то, что вместо $\overline{T}_{\omega}(r, f)$ стоит $T_{\omega}(r, f)$.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступила 20.V.1974

Ա. Ա. ԳՈԼԴԲԵՐԳ, Վ. Դ. ՄՈԽՈՆԿՈ. Ընդհանրացված Նևանլիննայի բնութագրիչների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ չնայած նրան, որ Մ. Մ. Ջրբաշյանի ընդհանրացված բնութագրիչների համար տեղի ունի արժեքների բաշխման տեսության երկրորդ հիմնական թեորեմի որոշ տարբերակ, առաջին հիմնական թեորեմը կարող է տեղի չունենալ։

Ուսումնասիրվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում Դինգհասի և Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչների համար տեղի ունի լոգարիթմական ածանցյալների վերաբերյալ լեմման։

A. A. GOLDBERG, V. D. MOHONKO. *On generalized Nevanlinna's characteristics* (summary)

For generalized Nevanlinna's characteristics of M. M. Jrbashian a modification of the second main theorem of value distribution is shown to be true while the first main theorem may not be valid. Conditions when the lemma about logarithmic derivative for the characteristics of M. M. Jrbashian and A. Dinghas are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский*. Распределение значений мероморфных функций, Изд. „Наука", М., 1970.
2. *М. М. Джрбашян*. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 6, 1970, 453—485.
3. *A. Dinghas*. Über eine Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriffes, Kgl. norske vid. selsk. forhandl., 34, № 25, 1961, 116—123.

4. *A. Dinghas*. Über den Picard—Borelschen *S*atz und die Nevanlinnaschen Ungleichungen, J. math. pures et appl., 42, № 3, 1963, 223—251.
5. *С. К. Балашов*. О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 3, 1973, 603—629.
6. *W. K. Hayman*. On the Valiron deficiencies of integral functions of infinite order, Ark. för math., 10, № 2, 1972, 163—172.
7. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79, № 4, 1969, 517--615.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

ОБ ОБРАЗЕ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ И ОТКРЫТОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Как известно, непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен также и без предположения хаусдорфовости.

Известно также, что в классе хаусдорфовых пространств, образ локально бикомпактного пространства при непрерывном и открытом отображении локально бикомпактен.

Приводимый ниже простой пример показывает, что в более широких классах топологических пространств последний факт может не иметь места. Это обусловлено тем, что нижеследующие два свойства топологического пространства:

(i) каждая точка обладает окрестностью, замыкание которой бикомпактно;

(ii) каждая точка обладает бикомпактной окрестностью;

будучи эквивалентными для хаусдорфовых пространств, могут не быть эквивалентными для нехаусдорфовых пространств, так как, хотя из (i) всегда следует (ii), но из (ii) не всегда следует (i).

Далее очевидно, что свойство (ii) произвольного топологического пространства всегда сохраняется при непрерывном и открытом отображении. Однако, как показывает приведенный ниже пример, этого нельзя утверждать относительно свойства (i).

Поводом для построения этого примера послужило сделанное в книге [1] неверное заключение (см. стр. 199), утверждающее, что образ произвольного локально бикомпактного пространства при непрерывном и открытом отображении является локально бикомпактным, причем, как обычно, локально бикомпактное пространство определяется как произвольное топологическое пространство, обладающее свойством (i).

Пусть Y — топологическое пространство, образованное множеством всех точек единичного замкнутого круга B с центром в начале координат и топологией на этом множестве, имеющей предбазу, состоящую из всех радиусов этого круга.

Легко видеть, что пространство Y обладает свойством (ii) и не обладает свойством (i). В самом деле, каждая точка этого пространства содержится в некотором радиусе круга B, служащем для нее бикомпактной открытой окрестностью. С другой стороны, так как одноточечное подмножество, состоящее из центра круга B всюду плотно в пространстве Y, то замыкание каждой окрестности произвольной точки пространства Y совпадает со всем пространством Y, которое небикомпактно (покрытие пространства

Y, состоящее из указанной предбазы топологии не содержит истинного подпокрытия).

Таким образом, Y не является локально бикомпактным пространством, обладает свойством (ii), но не обладает свойством (i), следовательно, эти свойства в этом пространстве неэквивалентны.

Рассмотрим также топологическое пространство X, образованное множеством всех точек замкнутого концентрического кольца с центром в начале координат, с радиусами 2 и 3 и топологией на этом множестве, имеющей в качестве базы все одноточечные подмножества внутренней окружности и все замкнутые отрезки (отрезки $[a, b]$, см. рис. 1), являющиеся следами

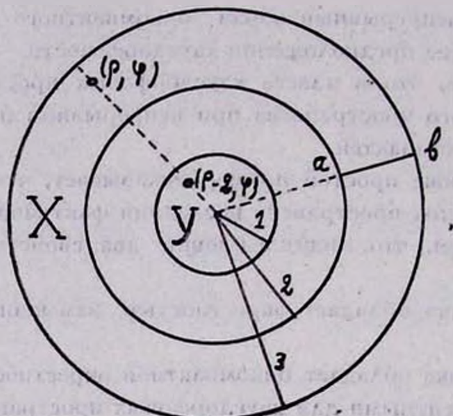

Рис. 1.

радиусов внешней окружности на это кольцо. Так как каждая точка пространства X содержится в некотором отрезке $[a, b]$, принадлежащем указанной базе, и, служащем для нее открыто-замкнутой, бикомпактной окрестностью, то пространство X локально бикомпактно.

Рассмотрим отображение $f: X \to Y$, которое произвольной точке пространства X с координатами (ρ, φ) в полярной системе координат, полюсом в начале координат, сопоставляет точку пространства Y, имеющую координаты $(\rho\text{-}2, \varphi)$ в той же системе координат.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что f — непрерывное и открытое отображение.

Таким образом, пространство Y, которое не является локально бикомпактным, является образом локально бикомпактного пространства X при непрерывном и открытом отображении f.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.X.1975

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Անընդհատ և բաց արտապատկերման դեպքում լոկալ բիկոմպակտ տարածության պատկերի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում կառուցվում է օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ լոկալ բիկոմպակտ տարածության պատկերն անընդհատ և բաց արտապատկերման դեպքում կարող է լոկալ բիկոմպակտ *լինի։ Օրինակի կառուցման առիթը հանդիսացել է [1] գրքում արված ոչ ճիշտ եզրակացությունը, որը պնդում է, թե լոկալ բիկոմպակտ տարածության պատկերն անընդհատ և բաց արտապատկերման դեպքում միշտ լոկալ բիկոմպակտ է։*

S. G. HOVSEPIAN. *On the image of locally bicompact space under continuous and open mapping* (summary)

An example is constructed, which proves that the image of a locally bicompact space needs not be locally bicompact under continuous and open mapping. This example is constructed in connection with a wrong assertion contained in [1], which states that the image of a locally bicompact space under continuous and open mapping is necessari by locally bicompact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дж. Л. Келли.* Общая топология, Изд. «Наука», М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 2, 1976 Математика

Г. А. МАРТИРОСЯН

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Введение

Пусть D — плоская односвязная область (конечная или бесконечная), ограниченная одним простым контуром Γ, на котором зафиксированы некоторые точки $t_1, t_2, \cdots, t_n$.

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$, заданная в $D+\Gamma$, принадлежит классу $H^*(t_1, \cdots, t_n)$, если

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^*(z)}{|z-t_1|^\alpha \cdots |z-t_n|^\alpha}, \quad 0<\alpha<1,$$

где $\varphi^*(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности контура Γ. В случае бесконечной области от функции $\varphi(z)$ требуется ограниченность на бесконечности.

Обозначим через Γ_k замкнутую дугу контура Γ, заключенную между точками t_k и t_{k+1}. Если

$$\alpha(t) = \alpha_k(t) \text{ при } t \in \Gamma_k, \quad k=1, 2, \cdots, n,$$

а функция $\alpha_k(t)$ при любом k принадлежит классу $H(\Gamma_k)$ (т. е. удовлетворяет условию Гёльдера на Γ), то скажем, что функция $\alpha(t)$ принадлежит классу $H_0(t_1, \cdots, t_n)$ (см. [3], стр. 31).

Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $H_m(\Gamma)$, если $\dfrac{d^kf}{ds^k}$ (s — длина дуги контура Γ) удовлетворяет условию Гёльдера на Γ при $k \leqslant m$.

В области D рассмотрим следующее эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2 — комплексные числа, а решение ищется в классе ограниченных комплексных функций.

Напомним, что эллиптичность означает следующее: $A_2 \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 = 0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

Пусть λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения (2). Будем говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию нормальности, если $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, что то же самое, что и условие правильной эллиптичности.

В настоящей работе рассматриваются некоторые смешанные краевые задачи для уравнения (1) как при выполнении условия нормальности, так и при его нарушении.

В § 1 приводится общее решение уравнения (1) в бесконечной области. В § 2 рассматривается следующая задача.

Найти в области $D = \{|z| > 1\}$ ограниченное дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), первые производные которого принадлежат классу $H^*(t_1, \cdots, t_n)$ $(t_1, \cdots, t_n \in \Gamma)$, по граничному условию

$$(\alpha(t) u_x + \beta(t) u_y)|_\Gamma = f(t), \tag{3}$$

где функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $H_0(t_1, \cdots, t_n)$.

При выполнении условия нормальности, используя общее решение уравнения (1), краевая задача (1), (3) сводится к задаче сопряжения, впоследствии получаются формулы для вычисления индекса и для решения задачи (1), (3). Во второй части этого параграфа рассматривается частный случай задачи (1), (3).

В § 3 при нарушении условия нормальности ставится следующая задача; найти в области $D = \{|z| > 1\}$ ограниченное дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), первые производные которого принадлежат классу $H^*(t_1, \cdots, t_n)$ $(t_1, \cdots, t_n \in \Gamma)$, по граничному условию

$$(P_1(t) u_x + P_2(t) u_y + P_3(t) u + \alpha(t) \bar{u})/_\Gamma = f(t), \tag{4}$$

где $P_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ — произвольные полиномы порядка n_k $(k = 1, 2, 3)$, $f(t)$, $\alpha(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_n)$ и $\alpha(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$, а $\bar{u}(x, y)$ — сопряженная функция к функции $u(x, y)$.

При некотором предположении на $P_1(t)$, $P_2(t)$ доказывается, что задача (1), (4) нётерова, и дается алгоритм для ее решения.

В § 4 при выполнении условия нормальности рассматривается следующая задача: требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области $D = \{|z| < 1\}$, первые производные которого принадлежат классу $H^*(t_1, t_2)$ $(t_1, t_2 \in \Gamma)$, по граничным условиям

$$u/_{\Gamma_1} = f_1(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = f_2(t), \tag{6}$$

где $f_1(t) \in H_1(\Gamma_1)$, а $f_2(t) \in H(\Gamma_2)$.

При помощи общего решения уравнения (1) в области $D = \{|z| < 1\}$ задача (1), (5), (6) сводится к системе двух фредгольмовых интегральных уравнений.

§ 1. Общее решение уравнения (1) в бесконечной области

1°. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как $A_2 \neq 0$, то без ограничения общности можем считать, что $A_2 = -1$. В обозначениях

$$v_1(x, y) = u_x(x, y)$$

$$v_2(x, y) = u_y(x, y) \tag{7}$$

уравнение (1) (где в дальнейшем положим $A_2 = -1$) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial y} = A\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8}$$

где $v = (v_1, v_2)$, а $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что неособое преобразование

$$v = B\omega, \tag{9}$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, а $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, приводит систему (8) к каноническому виду

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x}. \tag{10}$$

Как известно, общее решение системы (10) в области D дается формулой

$$\omega_k(z) = \varphi_k(x + \lambda_k y) \quad (k = 1, 2), \tag{11}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ — аналитические функции в областях $D_k = \{x + \lambda_k y : z \in D\}$.

На основании (7), (9), (11) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \lambda_2\varphi_2(x + \lambda_2 y). \tag{12}$$

Как известно, если решение $u(x, y)$ уравнения (1) ограничено в окрестности бесконечно удаленной точки, то первые производные $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ исчезают на бесконечности. Следовательно, из (12) следует, что функции $\varphi_k(x + \lambda_k y)$ $(k = 1, 2)$ тоже исчезают на бесконечности, т. е.

$$\varphi_k(x + \lambda_k y) = \frac{a_k}{x + \lambda_k y} + h_k(x + \lambda_k y) \quad (k = 1, 2), \tag{13}$$

где a_k $(k=1,\ 2)$ — некоторые комплексные постоянные, а функции $h_k(\zeta)$ $(k=1,\ 2)$ аналитичны соответственно в областях D_k и

$$|h_k(\zeta)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\zeta|^2} \quad (\zeta \in D_k,\ k=1,\ 2). \tag{14}$$

В силу (12), (13) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a_1}{x+\lambda_1 y} + \frac{a_2}{x+\lambda_2 y} + h_1(x+\lambda_1 y) + h_2(x+\lambda_2 y),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\lambda_1 a_1}{x+\lambda_1 y} + \frac{\lambda_2 a_2}{x+\lambda_2 y} + \lambda_1 h_1(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 h_2(x+\lambda_2 y).
\end{aligned} \tag{15}$$

Легко видеть, что общее решение системы (15) имеет вид

$$u(x,\ y) = a_1 \ln(x+\lambda_1 y) + a_2 \ln(x+\lambda_2 y) + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\,d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\,d\zeta + a_0, \tag{16}$$

где a_0 — произвольная комплексная постоянная.

Теперь, требуя от функции $u(x,\ y)$ однозначности и ограниченности в области D, будем иметь:

I. При $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, $a_1 = a_2 = 0$, следовательно, в случае выполнения условия нормальности общее решение уравнения (1) и его производные, в силу (15), (16), даются формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= h_1(x+\lambda_1 y) + h_2(x+\lambda_2 y),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda_1 h_1(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 h_2(x+\lambda_2 y),\\
u(x,\ y) &= \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\,d\zeta + a_0.
\end{aligned} \tag{17}$$

В этом случае получается, что из ограниченности решения $u(x,\ y)$ следует

$$|u_x(x,\ y)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^2},\ |u_y(x,\ y)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^2}.$$

Вообще этот факт имеет место и для систем эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см. [1], стр. 604—605, формула (26), при выполнении условия Лопатинского);

II. При $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, $a_1 + a_2 = 0$, и поэтому в случае нарушения условия нормальности общее решение уравнения (1) и его производные в силу (15), (16) даются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1}{x+\lambda_1 y} - \frac{a_1}{x+\lambda_2 y} + h_1(x+\lambda_1 y) + h_2(x+\lambda_2 y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\lambda_1 a_1}{x+\lambda_1 y} - \frac{\lambda_2 a_1}{x+\lambda_2 y} + \lambda_1 h_1(x+\lambda_1 y) + \lambda_2 h_2(x+\lambda_2 y), \tag{18}$$

$$u(x, y) = a_1 \ln\frac{x+\lambda_1 y}{x+\lambda_2 y} + \int_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\,d\zeta + \int_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\,d\zeta + a_0.$$

2°. Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В этом случае система (8) при помощи неособого преобразования

$$v = B\omega, \tag{19}$$

где на этот раз $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x}. \tag{20}$$

Решение первого уравнения системы (20) будет

$$\omega_1(z) = \varphi_1(x+\lambda y), \tag{21}$$

где $\varphi_1(\zeta)$ аналитична в области $\tilde{D} = \{x+\lambda y\colon z = x+iy \in D\}$.

Тогда второе уравнение системы (20) примет вид

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \varphi_1'(x+\lambda y),$$

решением которого будет

$$\omega_2(z) = \varphi_2(x+\lambda y) + y\varphi_1'(x+\lambda y). \tag{22}$$

На основании (7), (19), (21), (22) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x+\lambda y) + y\varphi_1'(x+\lambda y) + \varphi_2(x+\lambda y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (1+\lambda)\varphi_1(x+\lambda y) + \lambda y\varphi_1'(x+\lambda y) + \lambda\varphi_2(x+\lambda y). \tag{23}$$

Отсюда вытекает, что функции $\varphi_k(\zeta)$ исчезают на бесконечности

$$\varphi_k(x+\lambda y) = \frac{a_k}{x+\lambda y} + h_k(x+\lambda y)\ (k=1, 2),$$

где a_k $(k=1,\ 2)$ — произвольные постоянные, а аналитические функции $h_k(\zeta)$ $(k=1,\ 2)$ удовлетворяют неравенству (14). Так что (23) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a_1+a_2}{x+\lambda y}-\frac{a_1 y}{(x+\lambda y)^2}+h_1(x+\lambda y)+yh_1'(x+\lambda y)+h_2(x+\lambda y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(1+\lambda)\,a_1+a_2\lambda}{x+\lambda y}-\frac{\lambda a_1 y}{(x+\lambda y)^2}+(1+\lambda)\,h_1(x+\lambda y)+\lambda y\,h_1'(x+$$

$$+\lambda y)+\lambda h_2(x+\lambda y). \tag{24}$$

Положим

$$v_0(x,\ y)=(a_1+a_2)\ln(x+\lambda y)+\frac{a_1 y}{x+\lambda y}+yh_1(x+\lambda y)+$$

$$+\int\limits_{\infty}^{x+\lambda y}[h_1(\zeta)+h_2(\zeta)]\,d\zeta.$$

Непосредственно проверяется, что $u(x,\ y)=v_0(x,\ y)$ удовлетворяет системе (24), поэтому общее решение системы (24) имеет вид

$$u(x,\ y)=(a_1+a_2)\ln(x+\lambda y)+\frac{a_1 y}{x+\lambda y}+yh_1(x+\lambda y)+$$

$$+\int\limits_{\infty}^{x+\lambda y}[h_1(\zeta)+h_2(\zeta)]\,d\zeta+a_0, \tag{25}$$

где a_0 — произвольное комплексное число.

Требуя от $u(x,\ y)$ ограниченности и однозначности, получим

$$a_1+a_2=0.$$

Следовательно в силу (24), (25) получим для общего решения уравнения (1) и его производных формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{a_1 y}{(x+\lambda y)^2}+yh_1'(x+\lambda y)+h_1(x+\lambda y)+h_2(x+\lambda y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{a_1 x}{(x+\lambda y)^2}+\lambda yh_1'(x+\lambda y)+(1+\lambda)\,h_1(x+\lambda y)+\lambda h_2(x+\lambda y), \tag{26}$$

$$u(x,\ y)=\frac{a_1 y}{x+\lambda y}+yh_1(x+\lambda y)+\int\limits_{\infty}^{x+\lambda y}[h_1(\zeta)+h_2(\zeta)]\,d\zeta+a_0.$$

§ 2. Смешанная краевая задача для уравнения (1) вне круга в случае выполнения условия нормальности

1°. Рассмотрим задачу (1), (3) в области $D=\{|z|>1\}$ в случае выполнения условия нормальности: $\operatorname{Im}\lambda_1>0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2<0$.

Предположим также, что для задачи (1), (3) выполняются условия Лопатинского

$$\alpha(t) + \lambda_k \beta(t) \neq 0 \text{ для любого } t \in \Gamma \ (k = 1, 2). \tag{27}$$

Положительным направлением на Γ относительно области D мы будем считать то, которое оставляет область D слева.

Подставляя выражения для u_x и u_y из формулы (17) в краевое условие (3), будем иметь

$$(\alpha(t) + \lambda_1 \beta(t))\, h_1(\xi + \lambda_1 \eta) + (\alpha(t) + \lambda_2 \beta(t))\, h_2(\xi + \lambda_2 \eta) = f(t), \tag{28}$$

где $t = \xi + i\eta \in \Gamma$.

Ясно, что при $t \in \Gamma = \{|t| = 1\}$

$$\xi + \lambda_1 \eta = \frac{i + \lambda_1}{2i}\left(t + \frac{\nu_1}{t}\right),$$

$$\xi + \lambda_2 \eta = \frac{i - \lambda_2}{2i}\left(\nu_2 t + \frac{1}{t}\right),$$

где $\nu_1 = \dfrac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}$, $\nu_2 = \dfrac{i + \lambda_2}{i - \lambda_2}$, причем $|\nu_k| < 1$ $(k = 1, 2)$.

Непосредственно проверяется, что функция $\zeta = \dfrac{i + \lambda_1}{2i}\left(z + \dfrac{\nu_1}{z}\right)$ взаимно однозначно отображает область $\{|z| > 1\}$ в D_1, а функция $\zeta = \dfrac{i - \lambda_2}{2i}\left(\nu_2 z + \dfrac{1}{z}\right)$ взаимно однозначно отображает область $\{|z| < 1\}$ в D_2.

Отсюда будем иметь, что функции

$$\psi_1(z) = h_1\left(\frac{i + \lambda_1}{2i}\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right)\right),$$

$$\psi_2(z) = h_2\left(\frac{i - \lambda_2}{2i}\left(\nu_2 z + \frac{1}{z}\right)\right) \tag{29}$$

аналитичны соответственно в областях $\{|z| > 1\}$ и $\{|z| < 1\}$.

Из (13) следует, что

$$\lim_{z \to \infty} z\, \psi_1(z) = 0,$$

$$\lim_{z \to 0} z^{-2}\, \psi_2(z) = \text{const}. \tag{30}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\chi(z) = \begin{cases} z\psi_1(z), & |z| > 1, \\ z^{-2}\psi_2(z), & |z| < 1, \end{cases} \tag{31}$$

которая в силу (30) исчезает на бесконечности — $\chi(\infty) = 0$.

В обозначениях (31) краевое условие (28) примет вид

$$\chi^+(t) = G(t)\, \chi^-(t) + g(t), \tag{32}$$

где

$$G(t) = -\frac{t^3(\alpha(t) + \lambda_2 \beta(t))}{\alpha(t) + \lambda_1 \beta(t)},$$

$$g(t) = \frac{tf(t)}{\alpha(t) + \lambda_1 \beta(t)}. \qquad (33)$$

Из условий $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_n)$ и (27) следует, что функции $G(t)$, $g(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_n)$, причем $G(t) \neq 0$ при любом $t \in \Gamma$.

Таким образом, получили задачу сопряжения для кусочно-аналитической функции $\chi(z)$, исчезающей на бесконечности, которая на границе удовлетворяет граничному условию (32).

Используя результаты теории задачи сопряжения (см. [3], стр. 261, 268—271), при надлежащем выборе ветви функции $\ln G(t)$ имеем:

1) индекс $\varkappa$ задачи (32) вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_\Gamma, \qquad (34)$$

где символ $[\ln G(t)]_\Gamma$ обозначает приращение $\ln G(t)$ при обходе линии Γ один раз в положительном направлении.

2) Общее решение задачи сопряжения (32), исчезающее на бесконечности, при $\varkappa \geqslant 0$ существует для любого $g(t)$ и задается формулой

$$\chi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)\,Q_{\varkappa-1}(z), \qquad (35)$$

где $Q_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$ ($Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ при $\varkappa = 0$), а каноническая функция $X(z)$ задачи сопряжения (32) определяется формулой

$$X(z) = \begin{cases} z^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } |z| > 1 \\ e^{\Gamma(z)} & \text{при } |z| < 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \qquad (36)$$

$$\ln G_0(t) = \varkappa \ln t + \ln G(t).$$

3) При $\varkappa < 0$ решение задачи сопряжения (32) существует тогда и только тогда, когда соблюдены следующие условия:

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^j g(t)\,dt}{X^+(t)} = 0, \; j = 0, 1, \cdots, -\varkappa - 1, \qquad (37)$$

а решение определяется формулой (35), где $Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$.

Теперь восстановим функции $h_k(\zeta)$ ($k = 1, 2$).

В силу (31)

$$\psi_1(z) = z^{-1}\chi(z),$$
$$\psi_2(z) = z^2\chi(z), \tag{38}$$

где $\chi(z)$ определяется формулой (35).

Отсюда на основании (29) получим выражения для $h_k(\zeta)$ $(k=1, 2)$. Как отметили выше, аналитическая функция

$$\zeta = \frac{i+\lambda_1}{2i}\left(z + \frac{\nu_1}{z}\right) \tag{39}$$

взаимно однозначно отображает область $\{|z|>1\}$ в бесконечную область D_1, границей которой является эллипс

$$(\zeta_1 \operatorname{Im}\lambda_1 - \zeta_2 \operatorname{Re}\lambda_1)^2 + \zeta_2^2 = (\operatorname{Im}\lambda_1)^2 \quad (\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2).$$

Точки $\pm\sqrt{1+\lambda_1^2}$ являются фокусами этого эллипса. Следовательно, ветвь функции $\sqrt{\zeta^2 - (1+\lambda_1^2)}$ можно выбрать так, чтобы она была аналитична в области D_1 и

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_1^2)}}{\zeta} = 1.$$

Тогда функция

$$z = \omega_1(\zeta) \equiv \frac{i}{i+\lambda_1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - (1+\lambda_1^2)}\right), \ \zeta \in D_1 \tag{40}$$

является обратной к функции (39). Аналогично функция

$$z = \omega_2(\zeta) \equiv \frac{i-\lambda_2}{i}\,\frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_2^2)}}, \ \zeta \in D_2 \tag{41}$$

является обратной к фуниции

$$\zeta = \frac{i-\lambda_2}{2i}\left(\nu_2 z + \frac{1}{z}\right) \ (|z|<1).$$

Окончательно, в силу (29), (38)—(40) получим

$$h_1(\zeta) = (\omega_1(\zeta))^{-1}\chi(\omega_1(\zeta)), \ \zeta \in D_1,$$
$$h_2(\zeta) = (\omega_2(\zeta))^2\chi(\omega_2(\zeta)), \ \zeta \in D_2, \tag{42}$$

где $\chi(z)$ определяется формулой (35).

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 1. *При $\varkappa \geqslant 0$ однородная задача, соответствующая задаче* (1), (3), *имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача* (1), (3) *имеет решения при любом $f(t)$.*

При $\varkappa<0$ однородная задача имеет только одно ненулевое решение, а именно: $u(x, y) = \text{const}$, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнения $-\varkappa$ условий на $f(t)$

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^{j+1} f(t)\, dt}{X^{+}(t)(\alpha(t)+i\lambda_1\beta(t))} = 0,\ j=0, 1, \cdots, -\varkappa-1.$$

В обоих случаях решение определяется при помощи формул (17), (42), *а* $\varkappa$ — *формулой* (34).

2°. Рассмотрим частный случай задачи (1), (3).

В формулировке задачи (1), (3) краевое условие (3) заменим следующим условиям:

$$u|_{\Gamma_{2k-1}} = f_{2k-1}(t),\ t\in\Gamma_{2k-1}, \tag{43}$$

$$(k=1, 2, \cdots, n)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_{2k}} = f_{2k}(t),\ t\in\Gamma_{2k}, \tag{44}$$

где $f_{2k}(t)\in H(\Gamma_{2k})$, $f_{2k-1}(t)\in H_1(\Gamma_{2k-1})$ $(k=1, 2, \cdots, n)$, а Γ_j — замкнутая дуга $[t_j, t_{j+1}]$ линии $\Gamma=\{|t|=1\}$ $(j=1, 2, \cdots, 2n)$, $t_k=\xi_k+i\eta_k$.

Условия (43) эквивалентны следующим:

$$u(\xi_{2k-1}, \eta_{2k-1}) = f_{2k-1}(t_{2k-1}) \tag{45}$$

$$(k=1, 2, \cdots, n)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\Gamma_{2k-1}} = itf'_{2k-1}(t). \tag{46}$$

Так как

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\Gamma_{2k-1}} = \left.\left(y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{\Gamma_{2k-1}} = \frac{t^2-1}{2it}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_{2k-1}} -$$

$$-\frac{t^2+1}{2t}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_{2k-1}},\ t\in\Gamma_{2k-1},$$

$$(k=1, 2, \cdots, n)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_{2k}} = \left.\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{\Gamma_{2k}} = \frac{t^2+1}{2t}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma_{2k}} + \frac{t^2-1}{2it}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_{2k}},\ t\in\Gamma_{2k},$$

то условия (44), (46) примут вид

$$(\alpha(t)u_x + \beta(t)u_y)|_{\Gamma} = f(t),\ t\in\Gamma,$$

где

$$\alpha(t) = \begin{cases} i(t^2-1), & t\in\Gamma_{2k-1} \\ i(t^2+1), & t\in\Gamma_{2k}, \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} t^2+1, & t\in\Gamma_{2k-1} \\ t^2-1, & t\in\Gamma_{2k}, \end{cases} \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{47}$$

$$f(t) = \begin{cases} -2it^2 f'_{2k-1}(t), & t\in\Gamma_{2k-1} \\ 2itf_{2k}(t), & t\in\Gamma_{2k}. \end{cases}$$

Так что краевое условие (44), (46) имеет вид условия (3). Ясно, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t) \in H_0(t_1, \cdots, t_{2n})$. Из формул (47) легко вывести, что условие Лопатинского (27) выполняется, а именно:

$$\alpha(t) + \lambda_j \beta(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma \quad (j = 1, 2).$$

Таким образом, результаты предыдущего пункта имеют место для задачи (1), (44), (46), решение которой будет решением для задачи (1), (43), (44), если требовать, чтобы оно удовлетворяло условиям (45).

Коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ задачи сопряжения (32) на этот раз, в силу (33) и (47), определяются формулами

$$G(t) = \begin{cases} \nu \dfrac{t(1-\nu_2 t^2)}{1-\nu_1 t^2}, & t \in \Gamma_{2k-1} \\ -\nu \dfrac{t(1+\nu_2 t^2)}{1+\nu_1 \bar{t}^2}, & t \in \Gamma_{2k} \end{cases} \quad \left(\nu = \frac{i-\lambda_2}{i+\lambda_1}\right),$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \tag{48}$$

$$g(t) = \begin{cases} -\dfrac{2it f_{2k-1}(t)}{(i+\lambda_1)(1-\nu_1 \bar{t}^2)}, & t \in \Gamma_{2k-1}, \\ \dfrac{2i f_{2k}(t)}{(i+\lambda_1)(1+\nu_1 \bar{t}^2)}, & t \in \Gamma_{2k}. \end{cases}$$

Вычисляя индекс $\varkappa$ задачи сопряжения (32), где $G(t)$, $g(t)$ определяются формулами (48), по формуле (34) получим

$$\varkappa = n - 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 будем иметь, что однородная задача, соответствующая задаче (1), (44), (46), имеет ровно n линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (44), (46) при любом $f(t)$ имеет решение, которое дается формулой (17)

$$u(x, y) = \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\infty}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\, d\zeta + a_0, \tag{49}$$

где $h_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ определяются формулами (42), (35), в выражения которых входят $n-1$ коэффициентов полинома $Q_{\varkappa-1}(z)$ — $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$. Из первого условия (45) и из (49) получим

$$u(x, y) = \int\limits_{\xi_1+\lambda_1\eta_1}^{x+\lambda_1 y} h_1(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\xi_1+\lambda_2\eta_1}^{x+\lambda_2 y} h_2(\zeta)\, d\zeta + f_1(t_1). \tag{50}$$

Подставляя значение $u(x, y)$ из (50) в остальные условия (45), для определения постоянных $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ получим систему алгебраических уравнений

$$\delta c = d, \tag{51}$$

где δ — квадратная матрица порядка $n-1$, $d=(d_1,\cdots,d_{n-1})$ — определенный вектор, а $c=(c_1,\cdots,c_{n-1})$ — искомый вектор.

Пусть ранг матрицы δ равен r, тогда, как известно, однородная система, которая соответствует системе (51), имеет $(n-r-1)$ линейно независимых решений, а система (51) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено $n-r-1$ условий на d. Но однородной задаче (1), (43), (44) соответствует однородная алгебраическая система (52), поэтому однородная задача (1), (43), (44) имеет $n-r-1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (43), (44) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено $n-r-1$ условий на $f_j(t)(j=1, 2,\cdots, 2n)$. Отсюда следует, что индекс $\varkappa_0$ задачи (1), (43), (44) равен нулю: $\varkappa_0=0$.

При $n=1$ имеем: задача (1), (43), (44) однозначно и везде разрешима.

При $n\geqslant 2$: для того чтобы задача (1), (43), (44) была однозначно и везде разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $r=n-1$, то есть $\det\delta\neq 0$.

§ 3. Смешанная краевая задача для уравнения (1) вне круга в случае нарушения условия нормальности

В области $D=\{|z|>1\}$ рассмотрим задачу (1), (4), когда нарушается условие нормальности: $\operatorname{Im}\lambda_k>0$ $(k=1, 2)$.

Как видно из краевого условия (4), линейную независимость следует взять в поле действительных чисел.

1°. Пусть $\lambda_1\neq\lambda_2$. Подставляя выражения для $u(x, y)$, u_x и u_y из формулы (18) в краевое условие (4), будем иметь

$$[P_1(t)+\lambda_1 P_2(t)]\,h_1(\xi+\lambda_1\eta)+[P_1(t)+\lambda_2 P_2(t)]\,h_2(\xi+\lambda_2\eta)+$$

$$+P_3(t)\left[\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_1\eta} h_1(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_2\eta} h_2(\zeta)\,d\zeta\right]+\alpha(t)\overline{\left[\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_1\eta} h_1(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{\infty}^{\xi+\lambda_2\eta} h_2(\zeta)\,d\zeta\right]}=$$

$$=f(t)-a_0 P_3(t)-\bar a_0\,\alpha(t)-\frac{a_1}{\xi+\lambda_1\eta}\,[P_1(t)+\lambda_1 P_2(t)]+$$

$$+\frac{a_1}{\xi+\lambda_2\eta}\,[P_1(t)+\lambda_2 P_2(t)]-a_1 P_3(t)\ln\frac{\xi+\lambda_1\eta}{\xi+\lambda_2\eta}-\bar a_1\,\alpha(t)\ln\frac{\overline{\xi+\lambda_1\eta}}{\xi+\lambda_2\eta}, \tag{52}$$

где $t=\xi+i\eta$.

Положим

$$\psi_k(z)=\int\limits_{\infty}^{\frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z+\frac{\nu_k}{z}\right)} h_k(\zeta)\,d\zeta\quad(k=1, 2), \tag{53}$$

где $\nu_k=\dfrac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k}$, причем $|\nu_k|<1$ $(k=1, 2)$.

Поскольку функции $h_k(\zeta)$ $(k=1,\ 2)$ аналитичны соответственно в областях $D_k=\{x+\lambda_k y:\ z=x+iy\in D\}$ $(k=1,\ 2)$, а функции

$$\zeta=\frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z+\frac{\nu_k}{z}\right)\ (k=1,\ 2)$$

взаимно однозначно отображают область $\{|z|>1\}$ в D_k соответственно, то $\psi_k(z)$ $(k=1,\ 2)$ аналитичны в области $\{|z|>1\}$ и исчезают на бесконечности.

Из (53) имеем

$$\psi_k'(z)=\frac{i+\lambda_k}{2i}\left(1-\frac{\nu_k}{z^2}\right)h_k\left(\frac{i+\lambda_k}{2i}\left(z+\frac{\nu_k}{z}\right)\right),\ (k=1,\ 2). \qquad (54)$$

В силу (53), (54) краевое условие (52) примет вид

$$\frac{P_1(t)+\lambda_1P_2(t)}{\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(1-\frac{\nu_1}{t^2}\right)}\psi_1'(t)+\frac{P_1(t)+\lambda_2P_2(t)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1-\frac{\nu_2}{t^2}\right)}\psi_2'(t)+[\psi_1(t)+\psi_2(t)]\,P_3(t)+$$

$$+\overline{[\psi_1(t)+\psi_2(t)]}\,\alpha(t)=g(t), \qquad (55)$$

где

$$g(t)=f(t)-\frac{a_1[P_1(t)+\lambda_1P_2(t)]}{\frac{i+\lambda_1}{2i}(1+\nu_1\bar{t}^2)\,t}+\frac{a_1[P_1(t)+\lambda_2P_2(t)]}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\,t\,(1+\nu_2\bar{t}^2)}-a_0P_3(t)-$$

$$-\bar{a}_0\,\alpha(t)-a_1P_3(t)\ln\frac{(i+\lambda_1)(1+\nu_1\bar{t}^2)}{(i+\lambda_2)(1+\nu_2\bar{t}^2)}-\bar{a}_1\,\alpha(t)\ln\frac{(i-\bar{\lambda}_1)(1+\bar{\nu}_1t^2)}{(i-\bar{\lambda}_2)(1+\bar{\nu}_2t^2)}. \qquad (56)$$

Положим

$$\Phi(z)=\frac{P_1(z)+\lambda_1P_2(z)}{\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(1-\frac{\nu_1}{z^2}\right)}\psi_1'(z)+\frac{P_1(z)+\lambda_2P_2(z)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1-\frac{\nu_2}{z^2}\right)}\psi_2'(z)+$$

$$+[\psi_1(z)+\psi_2(z)]\,P_3(z), \qquad (57)$$

$$F(z)=\overline{\psi_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)+\psi_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \qquad (58)$$

Как видно из (57), порядок $\Phi(z)$ на бесконечности не превышает числа

$$m=\max[\max(n_1,\ n_2)-2;\ n_3-1]. \qquad (59)$$

Так как $\psi_k(z)(k=1,\ 2)$ аналитичны в области $\{|z|>1\}$, а $P_j(z)(j=1,\ 2,\ 3)$ полиномы, то $\Phi(z)$ аналитична в области $\{|z|>1\}$, а $F(z)$ — аналитична в области $\{|z|<1\}$, причем $F(0)=0$.

В новых обозначениях (57), (58) граничное условие (55) примет вид

$$\Phi(t) = -\alpha(t) F(t) + g(t). \tag{60}$$

Положим, наконец

$$\chi(z) = \begin{cases} z^{-1} F(z), & |z| < 1 \\ z^{-(m+1)} \Phi(z), & |z| > 1. \end{cases} \tag{61}$$

Ясно, что $\chi(\infty) = 0$.

Таким образом, на основании (60), (61) получаем задачу сопряжения

$$\chi^+(t) = -t^{-m} \alpha(t) \chi^-(t) + t^{-(m+1)} g(t) \tag{62}$$

для кусочно-аналитической функции $\chi(z)$, исчезающей в бесконечности, причем в силу условия задачи (1), (4) $(\alpha(t) \neq 0)$ имеем, что

$$G(t) \equiv -t^{-m} \alpha(t) \neq 0 \text{ при любом } t \in \Gamma.$$

При надлежащем выборе ветви функции $\ln G(t)$ (см. [3], стр. 268—271) имеем:

1) Индекс $\varkappa$ задачи (62) дается формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} [\ln(-t^{-m} \alpha(t))]_\Gamma. \tag{63}$$

2) Общее решение задачи сопряжения (62), исчезающее на бесконечности, при $\varkappa \geqslant 0$ всегда существует и дается формулой

$$\chi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{t^{-(m+1)} g(t)\, dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z) Q_{\varkappa-1}(z), \tag{64}$$

где $g(t)$ определяется формулой (56), $Q_{\varkappa-1}(z)$ — полином степени не выше $\varkappa - 1$ $(Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ при $\varkappa = 0)$, а каноническая функция $X(z)$ определяется формулой

$$X(z) = \begin{cases} z^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, & |z| > 1, \\ e^{\Gamma(z)}, & |z| < 1, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\ln G_0(t)\, dt}{t - z}, \tag{65}$$

$$\ln G_0(t) = \varkappa \ln t + \ln G(t).$$

3) При $\varkappa < 0$ задача сопряжения (62) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{t^{j-(m+1)} g(t)\, dt}{X^+(t)} = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, -\varkappa - 1. \tag{66}$$

При соблюдении этих условий решение задачи (62), исчезающее в бесконечности, дается формулой (64), где $Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$:

Из (61) следует, что

$$\Phi(z) = z^{m+1}\chi(z), \ |z|>1,$$
$$F(z) = z\chi(z), \ |z|<1. \tag{67}$$

В силу (57), (58) имеем

$$\left[\frac{P_1(z)+\lambda_1 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_1}{2i}\left(1-\frac{\nu_1}{z^2}\right)} - \frac{P_1(z)+\lambda_2 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1-\frac{\nu_2}{z^2}\right)}\right]\psi_1'(z) = \Theta(z), \tag{68}$$

$$\psi_2(z) = -\psi_1(z) + \overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \tag{69}$$

где

$$\Theta(z) = \Phi(z) - \overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}P_3(z) - \frac{P_1(z)+\lambda_2 P_2(z)}{\frac{i+\lambda_2}{2i}\left(1-\frac{\nu_2}{z^2}\right)}\left(\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right)_z'. \tag{70}$$

В силу (59) ясно, что порядок $\Theta(z)$ на бесконечности не превышает m. После необходимых упрощений в (68) получим

$$[(z^2+1)P_1(z) - i(z^2-1)P_2(z)]\psi_1'(z) = \Theta_0(z), \tag{71}$$

где

$$\Theta_0(z) = \frac{(i+\lambda_1)(i+\lambda_2)}{2i(\lambda_2-\lambda_1)}\left(1-\frac{\nu_1}{z^2}\right)\left(1-\frac{\nu_2}{z^2}\right)z^2\Theta(z). \tag{72}$$

Обозначим через m_0 порядок полинома

$$R(z) = (z^2+1)P_1(z) - i(z^2-1)P_2(z). \tag{73}$$

На основании (59) $m_0 \leqslant \max(n_1, n_2)+2 \leqslant m+4$.

Дополнительно требуем, чтобы полином $R(z)$ не имел корней на Γ, то есть

$$R(t) \neq 0 \text{ при любом } t \in \Gamma. \tag{74}$$

Из (71) получим

$$\psi_1'(z) = \frac{\Theta_0(z)}{R(z)}. \tag{75}$$

Так как порядок полинома $R(z)$ равен m_0, а порядок функции $\Theta_0(z)$ на бесконечности не превышает $m+2$ (см. (72), (73)), то для того чтобы функция $\psi_1(z)$, которая получается из (75), исчезла в бесконечности, была аналитичной в области $\{|z|>1\}$ и удовлетворяла уравнению (71), необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

$$\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{\Theta_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{k+1}} = 0 \ (R<1, \ k=m_0-1, \cdots, m+2),$$

$$\Theta_0^{(l)}(z_j) = 0 \ (l=0, 1, \cdots, \beta_j-1; \ j=1, 2, \cdots, r), \tag{76}$$

где $z_1, \cdots, z_r$ — корни полинома $R(z)$ с кратностями $\beta_1, \cdots, \beta_r$, которые находятся в области $\{|z| > 1\}$.

Выражение $\Theta_0(z)$, которое зависит от $f(t)$, a_0, a_1 и от коэффициентов полинома $\Theta_{\varkappa-1}(z)$ — $c_1, c_2, \cdots, c_\varkappa$ (при $\varkappa \leqslant 0$ $Q_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$, так что $c_1, \cdots, c_\varkappa$ отсутствуют), из (72) подставляя в (76) для определения действительного вектора

$$a = \{\operatorname{Re} a_0, \operatorname{Re} a_1, \operatorname{Re} c_1, \cdots, \operatorname{Re} c_\varkappa, \operatorname{Im} a_0, \operatorname{Im} a_1, \operatorname{Im} c_1, \cdots, \operatorname{Im} c_\varkappa\}$$

получим алгебраическое уравниние

$$Aa = b_0, \tag{77}$$

где A — $(2\varkappa + 4) \times 2k_0$ — действительная постоянная матрица (k_0 — число условий в (76)), b_0 — действительный вектор следующего типа:

$$b_0 = \int\limits_{|t|=1} \left(K(t) f(t) + \overline{K(t) f(t)}\right) dt \quad (K(t) \text{— вектор-функция}).$$

Как известно, если ранг матрицы A равен r_0, то для разрешимости уравнения (77) необходимо и достаточно соблюдение $2k_0 - r_0$ условий ортогональности на b_0. При соблюдении этих условий общее решение уравнения (77) будет

$$a = a^{(0)} + \alpha_1 a^{(1)} + \cdots + \alpha_{2\varkappa+4-r_0} a^{(2\varkappa+4-r_0)}, \tag{78}$$

где $a^{(0)}$ — частное решение уравнения (77), $a^{(k)}$ — линейно независимые решения однородного уравнения (77) ($Aa = 0$), а α_k — произвольные действительные постоянные.

Из вида вектора b_0 видно, что условия ортогональности на b_0 дают условия ортогональности на $f(t)$, ясно, что число k' линейно независимых условий на $f(t)$ не превышает числа $2k_0 - r_0$, т. е. $k' \leqslant 2k_0 - r_0$.

Подставляя общее решение (78) уравнения (77) в (75), получим функцию $\psi_1'(z)$, а из (69) получим

$$\psi_2'(z) = -\frac{\Theta_0(z)}{R(z)} + \left(\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right)_z'. \tag{79}$$

Обозначим через $\omega_k(\zeta)$ обратные аналитические функции относительно функций

$$\zeta = \frac{i + \lambda_k}{2i}\left(z + \frac{\nu_k}{z}\right) \quad (k = 1, 2) \text{ (см. формулы (39), (40))},$$

а именно:

$$z = \omega_k(\zeta) \equiv \frac{i}{i + \lambda_k}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - (1 + \lambda_k^2)}\right) \quad (k = 1, 2),$$

где под $\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_k^2)}$ понимается ветвь, аналитичная в области D_k и $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\dfrac{\sqrt{\zeta^2-(1+\lambda_k^2)}}{\zeta}=1$.

Отсюда на основании (54), (74), (79) будем иметь

$$h_1(\zeta)=\frac{i\omega_1(\zeta)\,\Theta_0(\omega_1(\zeta))}{(i+\lambda_1)(\omega_1(\zeta)-\zeta)\,R(\omega_1(\zeta))},$$

$$h_2(\zeta)=\frac{i\omega_2(\zeta)}{(i+\lambda_2)(\omega_2(\zeta)-\zeta)}\left[-\frac{\Theta_0(\omega_2(\zeta))}{R(\omega_2(\zeta))}+\left(\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right)'_z\Bigg|_{z=\omega_2(\zeta)}\right]. \tag{80}$$

Тем самым мы получили решение задачи (1), (4), которое дается при помощи формул (18), (80).

Итак, при $\varkappa\geqslant 0$ однородная задача (1), (4) имеет ровно $2\varkappa+4-r_0$ линейно независимых решений, а для разрешимости задачи (1), (4) необходимо и достаточно соблюдение k' линейно независимых условий ортогональности на $f(t)$.

При $\varkappa<0$ подставляя общее решение (78), которое содержит $4-r_0$ произвольных действительных постоянных, в условия (66), получим относительно действительного вектора $\alpha=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{4-r_0}\}$ алгебраическое уравнение

$$B\alpha=b_1, \tag{81}$$

где $B-(4-r_0)\times(-\varkappa)$ — действительная матрица, b_1 — определенный вектор типа b_0. Пусть ранг матрицы B равен r_1, тогда однородное уравнение (81) ($b_1=0$) имеет $4-r_0-r_1$ линейно независимых решений, а неоднородное уравнение (81) разрешимо тогда и только тогда, когда соблюдено $-\varkappa-r_1$ линейно независимых условий ортогональности на b_1 или, что то же самое, $k''\leqslant-\varkappa-r_1$ линейно независимых условий ортогональности на $f(t)$. Подставляя общее решение уравнения (81) в (80), при помощи формул (18), (80) получим решение задачи (1), (4).

Таким образом, доказали, что если

$$R(t)\neq 0 \text{ для любого } t\in\Gamma,$$

то задача (1), (4) нетерова, и при соблюдении необходимых и достаточных условий ортогональности на $f(t)$, решение задачи (1), (4) дается при помощи формул (18), (80), (72), (67), (64), (55).

2°. В случае $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ задача (1), (4) решается аналогично, только в граничное условие (4) на этот раз надо подставить выражения для $u(x, y)$, u_x, u_y из формул (26).

В заключение параграфа отметим, что полученные результаты остаются в силе, если в граничном условии вместо $P_k(t)$ $(k=1, 2, 3)$ взять функции $f_k(t)$ $(k=1, 2, 3)$, которые аналитически продолжаются в область $\{|z|>1\}$, а на бесконечности имеют конечные порядки.

§ 4. Смешанная краевая задача для уравнения (1) внутри круга в случае выполнения условия нормальности

В конечной области $\{|z|<1\}$ в случае выполнения условия нормальности: $\operatorname{Im}\lambda_1>0$, $\operatorname{Im}\lambda_2<0$, рассмотрим задачу (1), (5), (6).

Для вывода интегрального представления решения уравнения (1) понадобится следующая

Лемма. *Пусть $\varphi(x+\lambda y)$ аналитична относительно аргумента $x+\lambda y$ ($|x+iy|<1$) и принадлежит классу $H^*(t_1,\cdots,t_n)$ $(t_1,\cdots,t_n\in\Gamma)$. Тогда она представима в виде:*

$$\varphi(x+\lambda y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi(t)\,dt}{\xi+\lambda\eta-x-\lambda y}\qquad \text{при}\quad \operatorname{Im}\lambda>0,$$

$$\varphi(x+\lambda y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi(t)\,dt}{\xi-\lambda\eta-x-\lambda y}\qquad \text{при}\quad \operatorname{Im}\lambda<0,$$

где в обоих случаях $\Phi(t)$ — аналитическая функция в области $\{|z|<1\}$ и принадлежит классу $H^*(t_1,\cdots,t_n)$, причем $\Phi(t)$ определяется по $\varphi(x+\lambda y)$ единственным образом.

Непосредственно проверяется, что доказательство леммы 1, данное Н. Е. Товмасяном в работе [2], проходит и в этом случае.

Аналогично формуле (17) получим, что общее решение уравнения (1) представляется в следующем виде:

$$u(x,y)=\int\limits_0^{x+\lambda_1 y}\varphi_1(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_0^{x+\lambda_2 y}\varphi_2(\zeta)\,d\zeta+a_0,\tag{82}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ $(k=1,2)$ аналитичны соответственно в областях $D_k=\{x+\lambda_k y\colon |x+iy|<1\}$, а a_0 — произвольная комплексная постоянная.

Так как по условию задачи (1), (5), (6) $u_x, u_y\in H^*(t_1,t_2)$, то из (82) получим, что $\varphi_k(x+\lambda_k y)\in H^*(t_1,t_2)$ $(k=1,2)$. Следовательно, в силу леммы имеем

$$\varphi_1(x+\lambda_1 y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_1(t)\,dt}{\xi+\lambda_1\eta-x-\lambda_1 y},$$

$$\varphi_2(x+\lambda_2 y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_2(t)\,dt}{\xi-\lambda_2\eta-x-\lambda_2 y},\quad t=\xi+i\eta,\tag{83}$$

где $\Phi_k(z)$ аналитичны в области $\{|z|<1\}$ и принадлежат классу $H^*(t_1,t_2)$.

Подставляя значения $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ $(k=1,2)$ из (83) в (82), получим интегральное представление для решения уравнения (1).

Теперь перейдем к исследованию задачи (1), (5), (6).

Условие (5) эквивалентно условиям

$$u(\xi_1, \eta_1) = f_1(t_1), \; t_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in \Gamma_1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\Gamma_1} = itf_1'(t), \; t = \xi + i\eta \in \Gamma_1. \tag{84}$$

Из первого условия и из (82) находим, что решение $u(x, y)$ задачи (1), (5), (6) имеет вид

$$u(x, y) = \int\limits_{\xi_1+\lambda_1\eta_1}^{x+\lambda_1 y} \varphi_1(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\xi_1+\lambda_2\eta_1}^{x+\lambda_2 y} \varphi_2(\zeta)\, d\zeta + f_1(t_1), \tag{85}$$

Подставляя (85) в краевое условие (84), (6), получим

$$\frac{i+\lambda_1}{2} t(1-\nu_1\bar{t}^2)\varphi_1(\xi+\lambda_1\eta) - \frac{i-\lambda_2}{2t}(1-\nu_2 t^2)\varphi_2(\xi+\lambda_2\eta) = itf_1'(t), \; t \in \Gamma_1,$$

$$-\frac{i+\lambda_1}{2i} t(1+\nu_1\bar{t}^2)\varphi_1(\xi+\lambda_1\eta) - \frac{\bar{i}-\lambda_2}{2it}(1+\nu_2 t^2)\varphi_2(\xi+\lambda_2\eta) = f_2(t), \; t \in \Gamma_2. \tag{86}$$

Граничные значения функций $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ $(k = 1, 2)$ из (83) непосредственно вычисляются при помощи формул Сохоцкого—Племеля (см. [3], стр. 55), а именно:

$$\lim_{z\to t_0} \varphi_1(x+\lambda_1 y) = \frac{2i}{(i+\lambda_1)(1-\nu_1\bar{t}_0^2)}\Phi_1(t_0) - \frac{2i\nu_1\bar{t}_0^2}{(i+\lambda_1)(1-\nu_1\bar{t}_0^2)}\Phi_1(\nu_1\bar{t}_0),$$

$$\lim_{z\to t_0} \varphi_2(x+\lambda_2 y) = \frac{2i}{(\bar{i}-\lambda_2)(1-\nu_2 t_0^2)}\Phi_2(\bar{t}_0) - \frac{2i\nu_2 t_0^2}{(\bar{i}-\lambda_2)(1-\nu_2 t_0^2)}\Phi_2(\nu_2 t_0), \tag{87}$$

где $t_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in \Gamma$ и $t_0 \neq t_k$ $(k = 1, 2)$.

Подставляя граничные значения $\varphi_k(x+\lambda_k y)$ $(k = 1, 2)$ из (87) в (86), получим

$$it\Phi_1(t) - \frac{i\nu_1}{t}\Phi_1(\nu_1\bar{t}) - \frac{i}{t}\Phi_2(\bar{t}) + i\nu_2 t\Phi_2(\nu_2 t) = itf_1'(t), \; t \in \Gamma_1,$$

$$-\frac{1+\nu_1\bar{t}^2}{1-\nu_1\bar{t}^2} t\Phi_1(t) + \frac{1+\nu_1\bar{t}^2}{1-\nu_1\bar{t}^2}\cdot\frac{\nu_1}{t}\Phi_1(\nu_1\bar{t}) - \frac{1+\nu_2 t^2}{1-\nu_2 t^2}\frac{1}{t}\Phi_2(\bar{t}) +$$

$$+\frac{1+\nu_2 t^2}{1-\nu_2 t^2}\nu_2 t\Phi_2(\nu_2 t) = f_2(t), \; t \in \Gamma_2 \tag{88}$$

или, полагая

$$\chi(z) = \begin{cases} \Phi_1(z), & |z| < 1, \\ z^{-1}\Phi_2\left(\dfrac{1}{z}\right), & |z| > 1, \end{cases} \tag{89}$$

из (88) получим задачу сопряжения для кусочно-аналитической функции $\chi(z)$, исчезающей в бесконечности

$$\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t) + \frac{\nu_1}{t^2}\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right) - \nu_2 t G(t)\Phi_2(\nu_2 t) + g(t), \qquad (90)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{при} \quad t \in \Gamma_1 \\ -\dfrac{(1+\nu_2 t^2)(1-\nu_1 \bar{t}^2)}{t(1-\nu_2 t^2)(1+\nu_1 \bar{t}^2)} & \text{при } t \in \Gamma_2, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \Gamma_1 \\ -\dfrac{1-\nu_1 \bar{t}^2}{t(1+\nu_1 \bar{t}^2)} f_2(t), \ t \in \Gamma_2. \end{cases} \qquad (91)$$

Решение ищем в виде (см. [3], стр. 318)

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\psi(t)\,dt}{t-z},$$

где $\psi(t)$ принадлежит классу $H^*(t_1, t_2)$ на Γ.

Тогда из (90) получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\psi(t)$

$$K\psi \equiv K^0\psi + k\psi = g(t), \qquad (92)$$

где K^0 — характеристическая часть оператора K, а k — вполне непрерывный оператор, который получается от членов $\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)$, $\Phi_2(\nu_2 t)$, входящих в (90). Как известно (см. [3], стр. 320, 325, теорема 2), индекс уравнения (92) равен индексу соответствующего характеристического уравнения $K^0\psi = g(t)$, а его индекс—индексу соответствующей задачи сопряжения

$$\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t) + g(t),$$

индекс которого равен нулю.

Таким образом, индекс задачи (90) равен нулю, а задачу сопряжения (90) сводим к системе двух фредгольмовых интегральных уравнений следующим методом.

Считая, что значения $\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)$ и $\Phi_2(\nu_2 t)$ известны и выбирая надлежащим образом ветвь функции $\ln G(t)$, для решения задачи (90), как решение задачи сопряжения с индексом нуль, будем иметь

$$\chi(z) = \frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\frac{\nu_1}{t^2}\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right) - \nu_2 t G(t)\Phi_2(\nu_2 t) + g(t)}{e^{\gamma(t)}(t-z)}\,dt, \qquad (93)$$

где

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}.$$

Граничное значение $e^{\gamma(z)}$ имеет вид (см. [3], стр. 257)

$$e^{\gamma(t)}=e^{\frac{1}{2}\ln G(t)}\,\omega(t)(t-t_1)^{\alpha_1+i\beta_1}(t-t_2)^{\alpha_2+i\beta_2},\tag{94}$$

где $\omega(t)\in H_0(t_1,t_2)$ и $\omega(t)\neq 0$ для любого $t\in\Gamma$, а

$$\alpha_k+i\beta_k=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t_k-0)-\ln G(t_k+0)\right]\quad(k=1,2),$$

причем в силу выбора ветви $\ln G(t)$ имеем

$$-1<\alpha_k<0\quad(k=1,\ 2).$$

На основании (93), (89) имеем

$$\Phi_1(z)=\frac{\nu_1 e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)dt}{t^2e^{\gamma(t)}(t-z)}-\frac{\nu_2 e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\Phi_2(\nu_2 t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(t-z)}+$$

$$+\frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(t-z)},\tag{95}$$

$$\Phi_2(z)=-\frac{\nu_1 e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)dt}{t^2e^{\gamma(t)}(1-tz)}+\frac{\nu_2 e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\Phi_2(\nu_2 t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(1-tz)}-$$

$$-\frac{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(1-tz)},$$

так как $|\nu_1\bar{t}|<1$ и $|\nu_2 t|<1$, то

$$\Phi_1\left(\frac{\nu_1}{t}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Phi_1(\tau)\,d\tau}{\tau-\frac{\nu_1}{t}};\quad \Phi_2(\nu_2 t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Phi_2(\tau)\,d\tau}{\tau-\nu_2 t}.$$

Подставляя эти выражения в (95) и заменяя порядок интегрирования, получим следующую систему функциональных уравнений:

$$\Phi_1(z)=\frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{11}(\tau,z)\,\Phi_1(\tau)\,d\tau+\frac{e^{\gamma(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{12}(\tau,z)\,\Phi_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+e^{\gamma(z)}Q_1(z),\tag{96}$$

$$\Phi_2(z)=\frac{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{21}(\tau, z)\,\Phi_1(\tau)\,d\tau+\frac{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K_{22}(\tau, z)\,\Phi_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}Q_2(z),$$

где

$$Q_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=2}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(t-z)};\quad Q_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{g(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(1-tz)}$$

—известные функции, а ядра $K_{ij}(\tau, z)$ даются формулами

$$K_{11}(\tau, z)=\frac{\nu_1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t^2e^{\gamma(t)}\left(\tau-\frac{\nu_1}{t}\right)(t-z)};$$

$$K_{12}(\tau, z)=-\frac{\nu_2}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(\tau-\nu_2 t)(t-z)};$$

$$K_{21}(\tau, z)=-\frac{\nu_1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t^2e^{\gamma(t)}\left(\tau-\frac{\nu_1}{t}\right)(1-tz)},$$

$$K_{22}(\tau, z)=\frac{\nu_2}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{tG(t)\,dt}{e^{\gamma(t)}(\tau-\nu_2 t)(1-tz)}.\qquad(97)$$

Из (94) следует, что $K_{ij}(\tau, z)$ принадлежат по τ классу H, а относительно z аналитичны в области $\{|z|<1\}$ и непрерывно продолжаются на границу Γ, значения которых принадлежат классу H.

Введем функции

$$F_1(z)=\frac{\Phi_1(z)}{e^{\gamma(z)}},\quad F_2(z)=\frac{\Phi_2(z)}{e^{\gamma\left(\frac{1}{z}\right)}}.\qquad(98)$$

Тогда система (96) в матричной записи примет вид

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}K(\tau, z)\,F(\tau)\,d\tau+Q(z),\qquad(99)$$

где $F(z)=(F_1(z), F_2(z))$; $Q(z)=(Q_1\,z), Q_2(z))$ — аналитичные вектор функции, причем, как видно из (98), (93), (89), $F(z)$ ограничена в окрестностях узлов t_1, t_2, следовательно $F(z)$—непрерывная функция в замкнутой области $\{|z|\leqslant 1\}$, а $K(\tau, z)$ — матрица второго порядка:

$$K(\tau, z)=\begin{pmatrix}K_{11}(\tau, z)\,e^{\gamma(\tau)} & K_{12}(\tau, z)\,e^{\gamma\left(\frac{1}{\tau}\right)}\\ K_{21}(\tau, z)\,e^{\gamma(\tau)} & K_{22}(\tau, z)\,e^{\gamma\left(\frac{1}{\tau}\right)}\end{pmatrix}.\qquad(100)$$

Ясно, что любое непрерывное решение в замкнутой области $\{|z|\leqslant 1\}$ системы (99) будет аналитичным в области $\{|z|<1\}$. Далее, так как граничные значения $K_{ij}(\tau, z)$ принадлежат классу H по обеим переменным, то на основании (94) граничное значение матрицы $K(\tau, z)$ имеет вид

$$K(\tau, t)=\frac{K^*(\tau, t)}{(\tau-t_1)^{-\alpha_1}(\tau-t_2)^{-\alpha_2}},\ |\tau|=|t|=1,$$

где $K^*(\tau, t)$ принадлежит классу H по обеим переменным.

Рассмотрим систему фредгольмовых уравнений

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} K(\tau, t)\,\psi(\tau)\,d\tau+Q(t) \tag{101}$$

в классе непрерывных функций на Г, где $Q(t)$—граничное значение $Q(z)$. Легко проверить, что если $\psi(t)$ является решением системы (101), то

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} K(\tau, z)\,\psi(\tau)\,d\tau+Q(z) \tag{102}$$

будет аналитическим решением системы (99), и наоборот, любое аналитическое решение системы (99) представляется в виде (102).

Таким образом, решение задачи (1), (5), (6) привели к системе двух фредгольмовых интегральных уравнений (101) в классе непрерывных функций.

Если $\psi(t)$— решение системы (101), то при помощи формул (102), (98), (83), (85) получим решение задачи (1), (5), (6).

З а м е ч а н и е 1. Если в задаче (1), (5), (6) граничное условие (5), (6) заменим более общим краевым условием

$$(\alpha(t)\,u_x+\beta(t)\,u_y)/_\Gamma=f(t), \tag{103}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $H_0(t_1,\cdots, t_n)$, то задачу (1), (103) этим же методом можно свести к системе фредгольмовых интегральных уравнений.

З а м е ч а н и е 2. Из (97) легко видеть, что ядра $K_{ij}(\tau, z)$ на границе имеют следующий вид:

$$K_{ij}(\tau, t)=\frac{\nu_j}{\tau t\left(1-\frac{\nu_j}{\tau t}\right)}(A_{jj}(t)+B_{jj}(\tau)),\ (j=1, 2),$$

$$K_{ij}(\tau, t)=\frac{1}{1-\frac{\nu_j t}{\tau}}(A_{ij}(t)+B_{ij}(\tau))\ \ (i\neq j,\ i,\ j=1, 2), \tag{104}$$

где функций $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(\tau)$ ограничены на Г.

Отсюда и из (100), (104) следует, что $K(t, \tau)$ можно представить в виде

$$K(\tau, t) = K_1(\tau, t) + K_2(\tau, t),$$

где $K_1(\tau, t)$ — вырожденное ядро, а норма оператора, соответствующего ядру $K_2(\tau, t)$ меньше единицы. Следовательно решение системы (101) известным методом можно свести к решению алгебраических уравнений.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 15.I.1975

Հ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Խառը եզրային խնդիրներ երկրորդ կարգի էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարման համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում են հետևյալ տիպի եզրային խնդիրներ։ Պահանջվում է D տիրույթում գտնել

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0$$

(A_0, A_1, A_2 կոմպլեքս թվեր են) էլիպտիկ հավասարման սահմանափակ, երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի այն լուծումը, որի առաջին կարգի ածանցյալները պատկանում են $H^*(t_1, \cdots, t_n)$ ($t_1, \cdots, t_n$ ինչ-որ կետեր են D տիրույթի Γ եզրագծի վրա) դասին հետևյալ եզրային պայմանով՝

$$(\alpha(t) u_x + \beta(t) u_y)/_\Gamma = f(t),$$

որտեղ $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $f(t)$ կտոր-առ-կտոր անընդհատ ֆունկցիաներ են եզրագծի վրա։

Նորմալության պայմանի բավարարման դեպքում $D = \{|z|>1\}$ տիրույթում խնդրի ինդեքսի հաշվման և լուծման համար ստացվում են բանաձևեր, իսկ $D = \{|z|<1\}$ տիրույթում խնդիրը բերվում է երկու Ֆրեդհոլմյան ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։

Նորմալության պայմանի խախտման դեպքում $D = \{|z|>1\}$ տիրույթում, որոշ ենթադրության դեպքում, ցույց է տրվում, որ կարելի է դնել Նետերյան եզրային խնդիր և գրված խնդրի լուծման համար տրվում է ալգորիթմ։

H. A. MARTIROSIAN. *Mixed boundary value problems for second order elliptic differential equation on the plane* (summary)

The mixed boundary problem for an elliptical equation of the form

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0$$

with the boundary condition

$$(\alpha(t) u_x + \beta(t) u_y)/_\Gamma = f(t)$$

is contidered.

Under condition of normality the problem is solved for the domains $|z|<1$ and $|z|>1$. For the domain $|z|>1$ a formula for calculation of the index of problem is also given for the domain $|z|<1$ the problem is reduced to system of Fredholm integral equation.

In the case, when the normality condition is violated, an algorithm is given for the solution of the Noether problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сборник, 89 (131), 1972, 599—615.
2. *Н. Е. Товмасян.* Эффективные методы решения задачи Дирихле, Дифф. уравнения, т. V, № 1, 1972, 60—71.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. „Наука", М., 1968.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS