ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика»,

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.
Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics — with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference lise should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika"
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 1, 1976 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, М. М. ДЖРБАШЯН, С. Н. МЕРГЕЛЯН, А. А. ТАЛАЛЯН

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В АРМЕНИИ ЗА ПЕРИОД С 1971 ПО 1975 ГОДЫ

В течение 1971—1975 годов в научных учреждениях и ВУЗ'ах республики продолжались научные исследования по математике как в направлениях, ставших уже традиционными (§§ 1—5), так и в ряде новых направлений (§§ 6—8).

Настоящий обзор ни в коей мере не претендует на полноту и, естественно, в определенной мере отражает научные интересы и вкусы его авторов.

§ 1. Общие вопросы теории функций комплексного переменного

1°. Теория мероморфных функций. В [1] дан обзор основных результатов автора по теории факторизации мероморфных функций. В отличие от классической теоремы Неванлинны о факторизации мероморфных функций ограниченного вида, развитая здесь теория классов $N(\omega)$ охватывает функции с произвольно быстро растущей характеристикой, а также функции с произвольно редким или произвольно плотным распределением нулей и полюсов. Опираясь на эту теорию, в [2], [3] было положено начало исследованию граничных свойств некоторых подклассов мероморфных функций ограниченного вида в терминах введенного авторами понятия ω-емкости.

В [4] исследованы граничные и некоторые другие свойства мероморфных в единичном круге функций, принадлежащих классам $N\{\omega\}$.

В [5] построены нового типа бесконечные произведения, принадлежащие классу $N\{\omega\}$, изучены асимптотические свойства этих произведений, а также некоторые другие вопросы, относящиеся к теории этих классов.

В [6] доказывается, что любая мероморфная в многосвязной области функция допускает представление в виде произведения функций, мероморфных в односвязных областях.

В случае кругового кольца получены первая и вторая основные теоремы, параметрическое представление мероморфных функций ограниченного вида, теорема типа Карлемана и т. д.

В [7] доказывается общая теорема о граничном поведении произвольной положительной и непрерывной в круге функции, а также мероморфных функций, удовлетворяющих некоторому интегральному условию, в терминах ω-емкости.

В [8] построен пример мероморфной функции нулевого порядка с неасимптотическим дефектным значением.

2°. Теоремы единственности и граничные свойства аналитических и гармонических функций. В [9] [10] построен аппарат теории примыкания и единственности для общих рядов типа Дирихле—Тейлора для полосообразных областей, а также в том критическом случае, когда полоса вырождается в полуось, и поэтому известный метод Мандельбройта оказывается неприменимым даже в случае рядов Дирихле. Предложенная новая конструкция существенно опирается на построении системы, биортогональной с системой $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k - 1}\}_1^{\infty}$.

В [11], опираясь на метод интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, установлены теоремы единственности типа Данжуа-Карлемана для некоторых общих классов функций, аналитических в угловых областях произвольного раствора на римановой поверхности логарифма.

В [12] получены новые применения функций типа Миттаг-Леффлера к построению аппарата формул и частично разложений типа Тейлора-Маклорена, ассоциированных со специальными дифференциальными операторами дробного порядка. Вводится также понятие $<\rho>$-абсолютно монотонной функции и доказывается их разложимость в обобщенный ряд типа Тейлора, откуда, в частности, следует известная теорема С. Н. Бернштейна об абсолютно монотонных функциях.

В [13], [14] изучены классы обобщенно-квазианалитических функций, введенные на основе определенных дифференциальных операций. Получены также критерии единственности для решения проблемы Ватсона на полуплоскости и для определенного класса аналитических функций.

В [15] понятие α-квазианалитичности, введенное М. М. Джрбашяном, распространяется на более широкий класс функций. С этой целью вводятся операторы последовательного дифференцирования в смысле Вейля порядков n/ρ ($n = 0, 1, 2, \cdots$), при $1/2 < \rho < 1$. Определяются соответствующие классы функций $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ в случае $-1 < \alpha < 0$ и указываются необходимые и достаточные условия для их α-квазианалитичности.

В [16], [16*] доказано, что любая голоморфная вне некоторого компакта E функция $f(z)$ комплексной плоскости ($E \subset (-\infty, +\infty)$) представима введенным ранее теми же авторами специальным рядом на верхней полуплоскости и в ряде областей, зависящих от E. Этот ряд находится в том же отношении к функции $f(z)$ на дополнении к E, как и ряды Фурье к периодическим функциям, в частности, для них имеют место такие основные свойства рядов Фурье, как принцип локализации Римана, критерий сходимости, оценка частных сумм, теорема Фейера о суммируемости рядов методом Фейера и т. д.

В [17] построены примеры гармонических и градиентных отображений трехмерного шара, обладающих максимальными особенностями у граничной сферы, в терминах криволинейных предельных множеств. Кроме того получены необходимые и достаточные условия на множество E из R^3, при которых любое непрерывное векторное поле на E допускает равномерную аппроксимацию градиентами гармонических в R^3 функций.

В [18] доказываются теоремы единственности для гармонических функций в различного типа областях вращения в трехмерном пространстве. Указываются близкие к точным скорости стремления к нулю гармонической функции и ее градиента при приближении к граничной точке, которые обеспечивают ее единственность. В [19] рассматриваются гармонические вне $(n-1)$-мерного диска, лежащего в гиперплоскости $x_n=0$, функции пространства R^n. Установлено, что если такая функция вместе со своей нормальной производной стремится к нулю при приближении к $(n-2)$-мерной границе диска с определенной скоростью, то она—тождественный нуль.

В [20] рассматривается класс гармонических в n-мерном шаре функций, допускающих специального вида интегральное представление через фиксированную неотрицательную меру и произвольную функцию, представимую в виде двух неотрицательных гармонических функций. При $n=2$ этот класс тесно связан с известным классом $N\{\omega\}$ мероморфных функций. Для этих классов получены некоторые результаты (в терминах, аналогичных мерам Хаусдорфа), касающиеся граничных значений.

В [37] приводится приложение теории обращения интеграла Фурье на системе лучей с помощью интегральных преобразований с ядром Миттаг-Леффлера и параметрического представления целых функций через их значения на системе лучей, к некоторым задачам теоретической радиофизики, а именно к расчету и синтезу антенн, имеющих форму звездообразной системы отрезков.

В [38] вводится понятие полуаналитических в бицилиндре функций $f(z_1, z_2)$ и доказывается теорема об их интегральном представлении, аналогичная представлению М. М. Джрбашяна гармонических в круге функций. Эта теорема является расширением известной теоремы Герглотца.

В [39] описаны крайние точки множества тех голоморфных в круге функций, значения которых лежат в выпуклом компакте.

3°. Биортогональные системы и их приложения. Основой для большинства исследований этого раздела служат основные результаты по гармоническому анализу в собственно комплексной области, развитые в более ранних исследованиях М. М. Джрбашяна [109], [214]. В [21], [22] изучается задача представления ядра Коши с помощью простейших рациональных дробей с фиксированными полюсами наперед заданной кратности. Сначала строится биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, указывается явная формула для представления ядра Коши и доказывается ряд следствий из него. Затем, отправляясь от этой системы, по произвольно заданному ограниченному континууму строится простейшая система рациональных дробей и биортогональная с ней система, которые позволяют установить искомое представление.

В [23] изучается вопрос о разрешимости общей интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах Харди. Опираясь на построенные ранее автором специальные системы аналитических и ограниченных в единичном круге функции $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, образующих на границе биортогональную систему, предложен новый аналитический метод решения этой задачи в классе H_2.

В [24], опираясь на методику и результаты работ [21—23], исследуется вопрос о базисности неполной системы простейших рациональных функций $r_k(z)$ с заданными полюсами, в их замкнутой линейной оболочке, для случая негильбертовых классов Харди в предположении, что исходная последовательность точек удовлетворяет условию отделимости Карлесона. В [25] исследован аналогичный вопрос о базисности неполной системы функций в подпространствах известных классов $E_p(1<p<+\infty)$ аналитических в односвязной области G функций с границей Ляпунова в метрике L_p. В [26] доказывается, что выполнимость условия Карлесона необходима и достаточна для того, чтобы система $r_k(z)$ и биортогональная с ней система образовывала базис в их линейной оболочке и в том случае, когда каждое из чисел исходной последовательности может много раз повторяться. Такого же характера результаты получены относительно базисности системы, являющейся существенным обобщением полиномов Фабера, введенных в работе [21].

§ 2. Теория приближений в комплексной области

1°. Равномерные и касательные приближения. Задача о возможности равномерного приближения аналитическими в данной области функциями на относительно замкнутых подмножествах области была ранее решена в работе [27]. Ряд общих результатов и постановок новых задач относительно касательного приближения, а также новые подходы к решению этих задач содержатся в [28] и [29].

В [30] найдены необходимые и достаточные условия на замкнутое подмножество области, при которых возможно касательное приближение аналитическими в области функциями с произвольной скоростью касания. В терминах аналитической емкости в [31] получены необходимые и достаточные условия для равномерного и касательного приближения (для множеств без внутренних точек) произвольных непрерывных на замкнутом подмножестве функций мероморфными в области функциями.

В [32] указаны необходимые и достаточные условия на множество E, при которых возможно равномерное и касательное (с произвольной скоростью касания) приближения произвольных непрерывных на $E\subset G\subset R^n$ функций гармоническими в G функциями.

В [33] изучена новая задача приближения мероморфными функциями с оценкой роста их характеристики. Для случая равномерной аппроксимации голоморфной в угле функции мероморфными на всей плоскости функциями, получена близкая к точной оценка характеристики приближающей функции через порядок и тип аппроксимируемой функции.

В [34] получены новые общие результаты о наилучшем приближении кусочно-аналитических функций рациональными, в некотором смысле обобщающие результаты Д. Ньюмена и А. А. Гончара об аппроксимации на отрезке.

В [35] доказывается, что при некоторых ограничениях на компакт, любая непрерывная на нем и аналитическая во внутренних точках функция допускает равномерное приближение рациональными дробями специального вида.

Вышел первый выпуск курса лекций [36] по теории приближений в комплексной области, в котором излагаются классические результаты по теории равномерных приближений, в том числе и метод вывода полюсов, т. е. замены аналитических функций близкими к ним, но с перемещенными особенностями.

В [40] предложена новая методика изучения вопросов факторизации аналитических в круге и гладких вплоть до границы функций и установлено, в частности, что отображение $g \to P(g \cdot h)$, где P—проектор М. Рисса, сохраняет гладкость. В [41] это же отображение изучено в пространствах A_n^p функций, n-ая производная которых принадлежит классу Бергмана A^p. Доказано, что это отображение является ограниченным оператором из A_n^p в A_n^p, кроме случая пространства A_1^1, а в последнем случае дана полная характеристика тех $h \in H^\infty$, при которых это все же имеет место.

В [42] дано полное описание замкнутых идеалов в алгебрах функций, n-ая производная которых принадлежит классам Харди H^p или классам Липшица в замкнутом круге.

В [43] описаны все неотрицательные в единичном круге U меры $d\mu$, при которых оператор $Du(z) = u(z, z, \ldots, z)$ является ограниченным оператором из $H^p(U^n)$ в $L^p(U, d\mu)$, где U^n—полицилиндр, откуда получается решение одной задачи У. Рудина.

2°. Вопросы полноты систем аналитических функций. В [44] изучается вопрос о замкнутости некоторых общих систем, порожденных целыми функциями типа Миттаг-Леффлера. Из полученного автором необходимого и достаточного условия замкнутости системы $\{\omega_\rho^*(x, \lambda_j)\}$ в $L_{2,\infty}(0, \infty)$, следует, в частности, известная теорема Саса в более общей формулировке.

В [45], [46] доказываются новые результаты, относящиеся к вполне монотонности функций типа Миттаг-Леффлера и устанавливаются новые интегральные представления этих функций. Кроме того указываются явные выражения мер, которые служат функциями распределения для характеристических функций типа $E_\rho(-x, \mu)$. Из полученных результатов следует, в частности, ряд известных фактов, принадлежащих Полларду и Уинтеру.

В [47] доказывается аналог теоремы Винера—Пэли для пространства $H_2(\alpha)$ функций, аналитических в угловой области. Указывается критерий полноты системы рациональных функций в гильбертовом пространстве $H_2(\rho)$ при $1/2 < \rho < \infty$, откуда, в частности, следует обобщение известной теоремы Мюнца—Сасса в комплексной области. Кроме того дается полное внутреннее описание неполной в $L_2(0, \infty)$ обобщенной системы Мюнца—Сасса.

В [48] дано полное внутреннее описание замыкания линейной оболочки неполной системы функций $\{E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu) \cdot x^{s_k-1}\}_1^\infty$ в $L_{2,\infty}(0, \infty)$. Доказано, что это замыкание состоит из тех и только тех функций, обобщенное преобразование Лапласа которых почти всюду на границе угла $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2\rho}$ некоторой функции $\Phi^+(z) \in H_2[\rho, -\omega]$, а с другой стороны, с граничными значениями мероморфной в $|\arg(-z)| < \dfrac{\pi}{2\alpha}$ функции $\Phi^{-1}(z)$ с возможными полюсами в точках $z = -\lambda_k$.

В [49], [50] изучается задача описания замыкания системы функций типа Миттаг-Леффлера $\{E_\rho(ut;\mu)\}$ в пространстве $C_\varphi(L_\rho)$, где $\varphi(t)$ — весовая функция на $L_\rho = \left\{z;\ \arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}\right\}$.

Найдено необходимое и достаточное условие на весовую функцию, при котором замыкание этой системы совпадает со всем пространством. В том случае, когда такого совпадения нет, дано полное описание этого замыкания.

В [51] исследованы системы типа Мюнца с точки зрения их полноты и приближения на произвольных множествах. Доказано, что если рассматриваемое множество достаточно плотно в определенном смысле, то система Мюнца сохраняет свои основные свойства, известные в случае интервала.

В [52] исследованы лакунарные системы Дирихле на измеримых подмножествах вещественной оси и установлены некоторые свойства функций, аппроксимируемых этой системой в метрике L_2.

В [53] исследуется вопрос о возможности равномерного приближения непрерывных на сегменте из $[0, \infty)$ функций посредством полиномов по системе Мюнца с целочисленными коэффициентами. Рассмотрен также и случай, когда такая аппроксимация возможна на любом таком сегменте.

В [54] приводится новое применение функций типа Миттага—Леффлера, а именно, строятся ассоциированные с ними квази-полиномы типа Бернштейна—Хаусдорфа и устанавливается их равномерная сходимость для функций из определенного класса. Обобщаются известные теоремы Хаусдорфа о проблеме моментов и доказываются необходимые и достаточные условия разрешимости обобщенной $<\rho, \mu>$-проблемы моментов.

§. 3. Метрическая теория функций действительного переменного

1°. Представления измеримых функций рядами и сходимость ортогональных рядов. Установлено, что функции пространств L_p, $0<p<1$, а также более общих пространств L_φ, где $\varphi(x)$ выпукла и $\varphi(x)=o(x)$, представимы рядами по полным системам, сходящимися в метриках этих пространств [55], [56].

Доказано, что почти всюду сходящимися тригонометрическими рядами (а также рядами по некоторым полным системам) представимы все измеримые функции, причем когда представимая функция строго положительна представляющий ее ряд имеет неотрицательные частные суммы [57]. Этот результат содержит, как частный случай, теорему Кацнельсона (представляющей решение проблемы Литтльвуда) о существовании тригонометрического ряда, который не является рядом Фурье и имеет неотрицательные частные суммы. Вместе с тем оказалось, что результат Кацнельсона в вышеуказанной усиленной форме можно распространить на некоторые классы ортогональных рядов и на ряды по любым базисам пространства C [0.1]. [57], [58].

Ряд работ посвящен исследованию вопроса представления измеримых функций почти всюду сходящимися ортогональными рядами, когда допускаются перестановки членов соответствующего ряда в зависимости от представимой функции.

Оказалось, что вышеуказанный вопрос имеет положительное решение для всех ограниченных полных систем и для некоторых конкретных систем (система Хаара и т. д.), причем в этих теоремах (в отличие от ранее известных) представимая функция может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры. В частности, определяется переставленная тригонометрическая система $\{\cos \nu_k x, \sin \nu_k x\}$ такая, что для любой измеримой функции $f(x)$, почти везде конечной на $[0, 2\pi]$ или принимающей значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры, существует ряд по этой системе, который сходится к $f(x)$ почти всюду [57], [59], [60].

Исследованы также системы $\{\varphi_n(x)\}$, которые не являются базисами пространств $L_p(0,1)$ или $C[0,1]$, но ряды по которым представляют функции этих пространств в метриках $L_p(0, 1)$. На такие системы распространены теоремы о представлении измеримых функций рядами по базисам пространства $L_p(0, 1)$, а также теоремы Колмогорова, Загорского, Ульянова и Олевского о расходимости ортогональных или базисных разложений после перестановок членов ряда. При этом выявлено, что последние свойства рядов по базисам основаны исключительно на том, что первоначальный класс представимых в метрике L_p функций должен быть достаточно широким (его можно сузить с $L_p(0, 1)$ до $C[0, 1]$, но не до класса аналитических на $[0, 1]$ функций [55].

К этому кругу вопросов относится также результат о том, что ряд по любой полной ортогональной системе может сходиться в L_2 на множествах меры сколь угодно близкой к мере отрезка ортогональности и, вместе с тем, расходиться почти всюду на этом отрезке. При этом, на примере системы Хаара выяснено, что вышеуказанные ряды, вообще говоря, должны сходиться в среднем на нигде неплотных и разреженных множествах [61].

Установлены также теоремы о представлении измеримых функций интегралом Фурье и о сходимости ортогональных рядов к $+\infty$. Найдены точные оценки скорости стремления к нулю коэффициентов этих рядов [62], [63].

Несколько работ относятся к теории кратных рядов Фурье. Найдены достаточные условия (менее ограничительные чем ранее известные), при выполнении которых двойной ряд Фурье сходится к значению функции в данной точке. Установлены теоремы об абсолютной сходимости двойных и n-кратных тригонометрических рядов [64], [65].

Ряд работ посвящен вопросам сходимости и суммируемости линейными методами как общих ортогональных рядов, так и рядов по конкретным системам. В частности, для суммируемых методом Чезаро рядов Уолша установлены теоремы, представляющие усиление результатов Моргенталера и распространение на ряды Уолша теорем Зигмунда о пределах неопределенности тригонометрических рядов в более общей формулировке [66], [67], [68].

Исследованы также множества предельных функций общих функциональных рядов. Установлено, что любое наперед заданное семейство функций мощности континуум является множеством предельных функций некоторого ряда [69].

2°. Единственность ортогональных рядов. Была установлена общая теорема, согласно которой, если система измеримых функций $\{\varphi_n(x)\}$ является системой представления всех измеримых функций в каком-нибудь естественном смысле сходимости (сходимость по мере, почти всюду и т. д.), то представляющий функцию ряд не может быть единственным [55]. Известно, что иначе обстоит дело, когда требуется сходимость в каждой точке.

Установлено существование всюду сходящегося к суммируемой функции ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x)$ по переставленной системе Хаара, коэффициенты которого (хотя они и единственны) не являются коэффициентами Фурье—Лебега этой функции [70]. Таким образом, обнаружено новое явление, заключающееся в том, что интеграл Лебега не позволяет восстановить «коэффициенты Фурье» интегрируемой в смысле Лебега функции. Доказано также, что теорема Валле—Пуссена о восстановлении коэффициентов всюду сходящегося тригонометрического ряда, вообще говоря, не верна для переставленных тригонометрических систем [71].

Доказано, что как для двойных, так и для n-кратных рядов Уолша и Хаара имеют место аналоги теорем Кантора и Валле—Пуссена, причем в более общих формулировках [72].

3°. Разложения по базисам и ряды в абстрактных пространствах. Доказан ряд теорем о взаимосвязи безусловной суммируемости линейными методами и безусловной сходимости рядов в линейных топологических пространствах. В частности, получены также результаты о взаимосвязи понятий безусловного базиса суммирования и обычного безусловного базиса банахового пространства, и в указанных терминах получен критерий конечномерности пространств Банаха [73]. Получены также простые доказательства теорем Пелчинского и Карлина о несуществовании безусловных базисов в пространствах L_1 и $C[0, 1]$ [74].

Установлено, что если в гильбертовом пространстве ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ при некоторой перестановке расходится, то для всех перестановок, за исключением множества первой категории, он неограниченно расходится [75].

В работе [76] (совместно с польским математиком Пелчинским) решена одна задача Банаха, поставленная еще в 1932 году, а именно доказано, что в любом сепарабельном пространстве Банаха существует биортогональная система (x_n, x_n^*), обладающая свойствами: $\{x_n\}$ — замкнута, а $\{x_n^*\}$ — тотальна в B, причем $\|x_n\|\cdot\|x_n^*\| \leqslant M < +\infty$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

§ 4. Функциональный анализ

1°. Спектральная теория операторов. Развивая предложенные ранее в работах [77], [78] подходы в спектральной теории общих самосопряженных операторов, в [79] дано усовершенствованное определение ядра спектра произвольного самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Обнаружено, что в ряде случаев ядро спектра получается из классического спектра удалением множества точек положительной (или даже полной) лебеговской меры, что позволяет при исследовании конкретных операторов à priori исключить из рассмотрения достаточно «массивные» подмножества, не дающие вклада в спектральное разложение. Найдены некоторые достаточные признаки полноты системы собственных элементов, отсутствия в данном интервале сингулярного спектра, а также лебеговости или чистой сингулярности спектра в терминах так называемой спектральной плотности, а иногда и в терминах лишь самого ядра.

В [80], в терминах резольвенты самосопряженного оператора с однократным спектром, доказано соотношение представляющее собой обобщение классического неравенства Бесселя и равенства Парсеваля, из которого следует новое необходимое и достаточное условие полноты системы собственных элементов.

В [81] обнаружена тесная связь между теорией представления эрмитовых операторов М. Г. Крейна и теорией характеристической оператор-функции частично-изометрических операторов Секефальви—Надь-Фояша.

2°. Операторные уравнения. В [82], [83] изучается поведение решений широкого класса нестационарных операторных уравнений. Доказывается новый критерий асимптотической почти-периодичности а. п.-п.) функций со значениями в банаховом пространстве, опираясь на который устанавливается а. п.-п. решений одного класса операторных уравнений, включающего в себя классическое уравнение Шредингера.

В [84] получены новые результаты, касающиеся гладкости и разрешимости пары операторных уравнений в банаховых пространствах, а также установлена связь между размерностями ядер и коядер участвующих в уравнении операторов. Эти общие результаты применяются для установления нормальной разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями в классе аналитических функций.

В [85] получены признаки обобщенной факторизации функций и матриц-функций, заданных на единичной окружности в пространствах l_p с весом и указаны применения для обращения теплицевых матриц.

3°. Операторные алгебры и аксиоматическая теория поля. В [86] изучаются фактор-состояния на скрещенных произведениях, построенных по динамической системе (X, S), где S — счетная группа, свободно действующая гомеоморфизмами на метризуемом компакте X без изолированных точек. Описан конкретный способ построения подалгебр Сакаи, получено обобщение известной леммы Халмоша—Рохлина на случай преобразований, не сохраняющих меру, и установлено, что каждое фактор-состояние может быть получено из некоторого диагонализируемого состояния соответствующего индуктивного предела при подходящем выборе алгебры Сакаи.

В [87] изучается класс представлений алгебры наблюдаемых, в котором каждый векторный функционал слабо аппроксимируем чистыми состояниями. Доказано, что множество суперотборных операторов совпадает с множеством самосопряженных операторов, присоединенных к центру алгебры наблюдаемых фон Неймана.

В [88] изучались некоторые специальные вопросы теории C^*-алгебр, связанных с алгеброй наблюдаемых и аксиоматикой Леммана—Симанзика—Циммермана. Найдено необходимое и достаточное условие существования симметрии в C^*-алгебраическом подходе, являющееся обобщением известной теоремы Вигнера. Указаны необходимые и достаточные условия существования иордановского изоморфизма C^*-алгебры наблюдаемых.

В [89] изучается алгебраическая структура одного класса несамосопряженных операторов. Установлена возможность разложения каждого элемента операторной алгебры, содержащей нетривиальный компактный оператор, в ортогональную сумму примарных операторов из той же алгебры.

§. 5. Дифференциальные уравнения

1°. Краевые задачи для эллиптических уравнений. В работе [90] предложена новая методика, позволяющая эффективно решать краевые задачи Дирихле, Неймана, а также общие краевые задачи (в том числе и с кусочно-постоянными коэффициентами в краевых условиях [91]) для эллиптических уравнений и систем с постоянными коэффициентами в двумерных областях, причем в широком классе случаев указываются явные формулы для решения. В [92] исследованы краевые задачи для эллиптических уравнений и систем второго порядка, которые могут вырождаться как на границе области, так и внутри ее.

В работах [93], [94], развивая предложенную ранее в [95] методику, исследованы сингулярные интегральные уравнения (с кусочно-непрерывными коэффициентами) и в тех случаях, когда условие нормальности может нарушаться всюду. Указаны условия на коэффициенты, обеспечивающие нетеровость рассматриваемого оператора, и получена формула для индекса.

Недавно в работах [96], [97] были получены новые результаты, относящиеся к краевым задачам для эллиптических операторов с бесконечным числом независимых переменных. В случае операторов второго порядка с постоянными коэффициентами были установлены существование и единственность решения краевой задачи в подходящим образом построенных функциональных пространствах при достаточно больших значениях участвовавшего в уравнении параметра [96]. Затем, в [97] эти результаты удалось обобщить уже на случай переменных коэффициентов и общих краевых условий.

2°. Задача Коши для гиперболических уравнений. В [98]—[103] изучены различные задачи с начальными условиями для слабо гиперболических дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений и систем, т. е. в случае действительных, но не обязательно различных характеристик. Основой для этих исследований послужила предложенная в [98] методика, позволяющая в одномерном случае строить эффективный метод последовательных приближений, а в многомерном—выводить энергетические оценки [99]—[101]. Найдены достаточные условия на младшие коэффициенты, обеспечивающие корректность задачи Коши и являющиеся близкими к необходимым в случае нарушения условия строгой гиперболичности как на нехарактеристическом начальном многообразии, так и в случае касания характеристиками начального многообразия в отдельных точках, когда задача Коши ставится с весом [102]—[103].

В [102] изучена задача Коши для общих, симметрических по Фридрихсу, слабо гиперболических систем. В [104]—[105] начато изучение краевых задач для слабо гиперболических уравнений.

В [106] исследована задача Коши для одного класса гиперболических псевдодифференциальных операторов. Доказаны априорные оценки, на основе которых установлена однозначная разрешимость поставленной задачи.

В [107], [108] изучается поведение решений некоторого класса нестационарных уравнений в зависимости от поведения коэффициентов при $t \to +\infty$. Доказаны некоторые энергетические оценки, с помощью которых установлена асимптотическая почти-периодичность решений рассматриваемого класса уравнений, содержащего, в частности, уравнения гиперболического и параболического типов.

3°. Однородные пучки дифференциальных операторов с индефинитной квадратичной формой. Линейная теория таких пучков была в основном разработана еще в [77], но совсем недавно в [110] получено доказательство теоремы единственности для простейшего линейного гиперболического пучка в любой допустимой области и в классе произвольных измеримых функций. Для одного класса квадратичных операторных пучков в [111] установлена возможность факторизации, а также доказана теорема о полноте системы собственных векторов. В работе [112] рассмотрена первая однородная краевая задача для специального вида пучка дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, мероморфно зависящего от параметра, и установлена кратная полнота собственных функций в эллипсоидальных областях. Недавно, в [113] найдено одно достаточное условие, при котором полиномиальный операторный пучок допускает разложение на линейные множители.

В [114] изучаются краевые задачи общего вида для гиперболического уравнения четного порядка с двойными характеристиками на простейшем двумерном многообразии с краем, гомеоморфном круговом цилиндру. Методом характеристик, в сочетании с техникой интегральных уравнений, доказывается нормальная разрешимость рассматриваемых краевых задач. Для некоторого подкласса вышеуказанных уравнений, с помощью метода эллиптической регуляризации доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле в обобщенном смысле.

4°. Сравнение дифференциальных операторов и признаки гипоэллиптичности. В [115] получены достаточные условия, при которых один дифференциальный оператор сильнее (в смысле Л. Хёрмандера) или мощнее другого. При этом, в отличие от рассмотренных ранее случаев, впервые допускается, что мажорирующий оператор был существенно не эллиптическим. Здесь найдены также условия, при которых оператор с переменными коэффициентами имеет постоянную силу.

В [116] для двумерных обобщенно однородных дифференциальных операторов получены необходимые и достаточные условия сравнения мощности и силы.

В [116], [117] получены необходимые и достаточные условия гипоэллиптичности для определенного класса операторов.

В [118] найден критерий того, чтобы оптимальный набор производных функций оценивался через дифференциальный оператор от этих же функций в норме L_2.

5°. Спектральная теория дифференциальных операторов. В [119] исследована задача восстановления потенциала штурм-лиувиллевского оператора по так называемой функции спектрального сдвига, являющаяся более общей, чем хорошо изученная обратная задача спектрального анализа (восстановления потенциала по двум спектрам).

В [120] получена асимптотика спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, уточняющая ранее известные асимптотики.

В [121] решается обратная задача теории рассеяния для канонической системы и для матричного уравнения Шредингера, рассматриваемых на всей вещественной оси.

В [122] изучается некоторый вариант теории рассеяния для канонического дифференциального оператора с суммируемым потенциалом.

В [123] строится ядро спектра оператора Штурма-Лиувилля на полуоси и доказывается несколько теорем о лебеговости, сингулярности или чистой точечности спектра, формулируемых в терминах известной функции $m(z)$.

В [124] рассматривается задача определения меридиана оболочки вращения, мало отличающейся от цилиндрической, по известному спектру частот ее осесимметрических колебаний. Доказывается, что меридиан однозначно восстанавливается по двум спектрам, соответствующим разным краевым условиям, а иногда и одним спектром.

В [125], [126] исследован спектр безмоментного оператора в теории тонких оболочек. Для оболочек произвольного очертания установлена связь между асимптотикой функции распределения собственных значений невырожденной задачи и непрерывным спектром безмоментной задачи. Кроме того эффективно найден весь предельный спектр безмоментной задачи.

6°. Уравнения Винера—Хопфа В [127] исследуется особое интегральное уравнение Винера—Хопфа в случае, когда его символ в конечном числе точек обращается в нуль произвольного конечного порядка. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости и явная формула для искомого решения.

В [128] выводятся и изучаются нелинейные функциональные уравнения факторизации для интегральных операторов Винера—Хопфа второго рода. Указывается связь этих уравнений с известным уравнением В. А. Амбарцумяна и с задачей факторизации на оси.

7°. Отдельные вопросы математической физики. В [129] решена плоская стационарная задача теплопроводности в стреловидных призматических телах. В [130] получено решение задачи распространения тепла в шаре, состоящем из неподвижной полой сферы и находящегося внутри нее вращающегося шара. В [131] решена нестационарная задача теплопроводности в движущемся призматическом теле с учетом теплообмена с окружающей средой.

В [132] с помощью методов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений исследована гамильтонова динамическая система, описывающая однородную космологическую модель V типа (по классификации Бианки) с движением частиц, а также модель типа IX.

§ 6. Теория вероятностей и теория информации

1°. Стохастическая геометрия. Основываясь на предложенном в [133], [134] решении классической задачи Бюффона—Сильвестра, проводились исследования по стохастической геометрии. Основной результат состоит в обнаружении жестких статистических зависимостей между точечными процессами пересечений прямыми границ случайных множеств и последовательностями углов, под которыми эти пересечения происходят [135]. С этой точки зрения рассматривались, в частности, задачи о случайном разбиении многомерного пространства многообразиями меньшего числа измерений [136], а также случайные поля одномерных волокон [137].

2°. Теория информации и кодирования. При исследовании свойств полиномов над конечными полями $GF(q)$ получена полная факторизация функции $F(x)=f(x^{\theta})$, где $f(x)$ является неприводимым полиномом, а θ—произвольное натуральное число.

Разработана конструктивная теория приводимости полиномов над полем Галуа, позволяющая строить в явном виде неприводимые полиномы любой наперед заданной степени и определять порядок их корней. Полностью исследован специальный класс самодвойственных полиномов над полем $GF(2)$ и получена рекуррентная формула для функции А. Вейля $N_n(\{a\})$, где N_n—общее число всевозможных неприводимых в поле $GF(2)$ полиномов степени n, коэффициенты которых принимают заранее заданное значение из $GF(2)$ [138], [139].

Найдены рекуррентные формулы типа циклических и p-адических представителей произвольных циклических кодов над полем $GF(q=p^n)$ и выявлена количественная структура равновесных представителей циклических кодов над $GF(q)$ путем описания их H-орбит [140].

Доказана теорема об инвариантности максимальных линейных подпространств относительно характера искажений. Разработан общий метод построения асимметрических систем кодирования, корректирующий многократные асимметрические ошибки, основанный на решении комбинаторной проблемы Диксона, поставленной более 60 лет назад [141]—[144].

В [145] получено уточнение нижней границы вероятности ошибки при передаче информации по каналам с обратной связью.

3°. Теория случайных процессов и полей. В [146] изучались слабо зависимые случайные поля. Доказано, что такими объектами, при определенных ограничениях на потенциал, являются гиббсовские случайные поля.

В [147] найдены условия выполнимости центральной предельной теоремы для слабо зависимых случайных полей. Полученные результаты применяются к исследованию гиббсовских случайных полей.

В [148], [149] изучаются вопросы непрерывности, а также различные регуляризации решений краевых задач для уравнений, вырождающихся в отдельных точках.

В [150] изучается поведение диффузионного процесса в неограниченной области, когда он возмущается другим диффузионным процессом с малым параметром.

В [151] исследуются вопросы аппроксимации дифференцируемых стационарных процессов ломаными. В [152] построены простые асимптотически оптимальные эквивалентные полиномиальные оценки произвольной степени для параметров стандартной схемы регрессии.

В [153] доказано, что однородные и изотропные черно-белые случайные марковские раскраски плоскости можно получить, закрашивая черным цветом объединения случайных кругов и многоугольников, разбросанных на плоскости согласно закону Пуассона.

4°. Теория массового обслуживания. В работе [154] предложен метод получения длины очереди, пригодный для анализа многих одноканальных приоритетных систем. Дана модификация метода виртуального времени ожидания, примененная к нескольким приоритетным системам. Предложен аналитический метод асимптотического изучения «хвостов» распределений.

Исследовались приоритетные системы массового обслуживания в условиях «малой» и критической загрузок [155], [156].

§ 7. Топология, алгебра, геометрия и алгебраическая геометрия

1°. Теория расширений топологических пространств. В [157] построена новая категория так называемых псевдотопологических пространств, а также функтор из этой категории в категорию топологических пространств. В [158] предложен новый метод построения расширений топологических пространств, основанный на введенном в [157] понятии псевдотопологического пространства. В [159], развивая предложенный в [158] метод, полностью решена проблема построения всех хаусдорфовых и всех H-замкнутых расширений топологических пространств. Кроме того, для любого полурегулярного пространства построены все хаусдорфово полурегулярные и, в частности, все неуплотняемые расширения.

В [160] введена естественная структура упорядочения на множестве всех хаусдорфовых и H-замкнутых расширений и установлен аналог известной теоремы Маггила о связи между гомеоморфизмами наростов и изоморфизмами соответствующих структур. Установлено также, что всякое H-замкнутое расширение с точностью до θ-эквивалентности, является факторпространством катетовского расширения.

2°. Бесконечномерные гомотопические инварианты. В [161] предложено два определения бесконечномерных гомотопических групп $\Pi^{\infty}_{q}(X, x_0)$, а также групп компактного типа $\Pi^{c}_{q}(X, x_0)$ для подмножеств сепарабельного гильбертового пространства и установлена эквивалентность этих определений, откуда, в частности, следует независимость построенных групп от выбора базиса пространства конечного дефекта. В [162] построена теория топологической степени для непрерывных отображений подмножеств гильбертового пространства, принадлежащих классам В. Г. Болтянского и удовлетворяющих условиям компактности прообразов точек и не обращения в нуль терминальных производных.

В [163] доказана теорема о том, что бесконечномерные гомотопические группы единичной сферы гильбертового пространства изоморфны стабильным (конечномерным) гомотопическим группам конечномерных сфер соответствующих индексов.

В [164] предложено два эквивалентных подхода к определению бесконечномерных относительных гомотопических групп общего и компактного типа для пар подмножеств сепарабельного гильбертового пространства.

3°. Теория универсальных алгебр и алгебр второй ступени. В связи с проблемой А. И. Мальцева, касающейся разработки теории языка второй ступени (в которой кванторные символы относятся и к предикатам) в [165] исследована выполнимость некоторых формул второй ступени в определенных классах универсальных алгебр. Обнаружено, что исследование ряда формул второй ступени выходит за рамки универсальных алгебр, в связи с чем в [166], [167] введено понятие алгебры второй ступени и положено начало теории таких алгебр. Оказалось [168], что из теории алгебр второй ступени возникает совершенно новая теория обычных универсальных алгебр.

4°. Теория групп, полугрупп, квазигрупп и категорий. В [169] применяется аксиоматический метод к теории силовских баз бесконечных групп. Вводится общее понятие силовской LQ-базы, в разных направлениях обобщающее классическое понятие. Полученные результаты выявляют природу силовских теорем вне связи с арифметикой группы, обобщают теоремы Бэра и Гольберга. Получены также новые утверждения о сопряженности классических силовских баз.

В [170], [171] введено понятие Q-картеровой подгруппы, изучается их существование и сопряженность в локально конечных группах с Q-радикалом конечного индекса. Из этих результатов, в случае классических картеровых подгрупп, получается усиление известной теоремы Стоунхевера.

В [172] ,[173] описываются комплексные представления полугрупп матриц над конечным полем и изучаются вопросы полупростоты некоторых алгебр. В [174] вводится понятие единала квазигруппы с помощью которого строятся нормальные ряды и устанавливается аналог известной теоремы Шрейера для квазигрупп.

В [175] доказано, что все полугруппы некоторого многообразия коммутативных полугрупп финитно-аппроксимируемы тогда и только тогда, когда тождество $(xy)^{d+1}$ является тождеством этого многообразия. Для конечных нильпотентных и коммутативных полугрупп найдены необходимые и достаточные условия, чтобы порожденные ими многообразия и квазимногообразия совпадали.

В [176] рассмотрена категория модулей над всеми кольцами и найдено явное выражение свободного произведения произвольного семейства объектов этой категории. Исследован ряд свойств этой категории, установлена, в частности, справедливость в ней известной теоремы Биркгофа для многообразий.

5°. Группы Ли. В [177], [178] изучаются разложения некомпактных простых вещественных групп Ли. Доказывается, в частности, что в любом разложении каждой из групп $SO(p, q)$, и $SU(p, q)$ одна из подгрупп непременно редуктивна и имеет вполне определенный вид. Находятся в явном виде все минимальные разложения указанных групп, обладающие тем свойством, что их полупростые части некомпактны, а также все дизъюнктные разложения классических простых вещественных групп Ли.

В [179] изучается разложимость комплексных многообразий Штифеля $W_{n,k} (k>2)$ в прямое произведение. Доказывается, что $W_{n,3}$ при $n \equiv 0 \pmod{24}$ не разлагается в прямое произведение однородных пространств.

6°. Геометрия и алгебраическая геометрия. В [180] дана геометрическая характеристика расслояемых пространств и развита теория поверхностей, вложенных в эти пространства. В [181] построена геометрия изотропных поверхностей, имеющая приложение в теории относительности, а также дано их инвариантное оснащение. В [182] строятся инвариантные оснащения r-мерных гиперполос в проективном пространстве и исследуется геометрия некоторых частных гиперполос (плоских, конических или квадратичных). В [183] изучаются аффинные связности без кручения, индуцированные оснащением гиперполос, а также взаимная связь между геодезическим соответствием поверхностей V_r и V_{n-1}^r и сопряженностью связностей на них.

В [184] вычисляется главно поляризованное многообразие Прима неразветвленного двулистного накрытия гиперэллиптической кривой, которое оказывается канонически поляризованным якобиевым многообразием кривой или произведением двух таких якобианов. В [185] установлен такой же результат для многообразия Прима гиперэллиптической кривой с двумя точками ветвления. Предложенная конструкция позволила установить также, что для таких многообразий Прима теорема Торелли не верна.

§ 8. Математическая логика и теория алгорифмов

1°. Теория алгорифмов. Исследован ряд новых методов оптимального кодирования алгорифмов в универсальных алгорифмических языках. Доказано, что язык нормальных алгорифмов асимптотически оптимален, язык рекурсивных функций, соответствующий алгебре Робинсона, как и язык Клини, мультипликативно оптимален, но не асимптотически оптимален [186], [203].

Доказана равномерная ограниченность вычислимых нижних оценок сложности натуральных чисел относительно асимптотически оптимальных функций. Выяснена невозможность эффективной оптимизации алгорифмов в универсальных алгорифмических языках [187], [188], [204], [205].

Построен пример замкнутой конструктивной кривой, для которой некоторая точка, удаленная от нее, не является ни внешней ни внутренней.

Доказана невозможность алгорифма, выдающего по всякой равномерно непрерывной дуге точку вне ее. Установлены условия конструктивной перечислимости и неперечислимости классов конструктивных действительных псевдочисел при классификации их по конструктивным ординалам [189], [190], [191], [206].

Выявлены зависимости между аксиомами числового выбора в системе интуиционистской математики, принадлежащей Клини и Вэсли. Доказано, что теоремы Коши и Вейерштрасса о непрерывных функциях не доказуемы и не опровержимы в ней [192].

2°. Математическая логика. Исследовалась симметрическая конструктивная логика, дающая более подробную классификацию суждений по сравнению с традиционной конструктивной логикой и классической логикой. Исследованы соответствующие предикатные исчисления, системы формальной арифметики и системы реализуемости. Доказаны аналоги теорем логической неполноты при реализации булевых функций в формальных системах [193], [194], [207], [208].

Построен пример полугруппы с разрешимой проблемой тождества, изоморфно вложимой в группу с теми же определяющими соотношениями, но неразрешимой проблемой тождества. Доказана возможность аналогичного явления в широком классе полугрупп [195].

3°. Автоматический синтез алгорифмов. Разработана единая дискретная детерминистская модель процесса индуктивного обобщения в конечных множествах и формальные критерии классифицирования индукторов-алгорифмов индуктивного обобщения.

В рамках модели получены интерпретации ряда известных индукторов. Получены общие ограничительные теоремы о невозможности универсальных индукторов и оптимальных алгорифмов порождения примеров при проверке гипотез в индуктивных выводах. Построены классы конечных множеств, оптимальная расшифровка которых возможна, соответственно индукторами, согласующими гипотезу с исходной информацией и не обладающими указанным свойством [196], [197], [209], [210].

4°. Дискретная математика. Рассмотрены задачи двух этапов автоматизации проектирования ЭВМ: логического этапа проектирования и конструкторского этапа проектирования. В логическом этапе охвачены вопросы проектирования микрокоманд, автоматическое размещение микропрограмм в памяти машины и генерации тестов для больших схем. В конструкторском этапе проектирования охвачены задачи разбиения схем, компоновки и трассировки. Все задачи приведены к математическим задачам и для них предложены алгорифмы решения, а для большинства из них — алгорифмы нахождения оптимальных решений [198], [211].

Решена задача получения требуемой надежности при минимальных затратах (по стоимости) избыточной аппаратуры [199].

Построен алгорифм распознавания, основанный на анализе характера расположения противоположных значений булевых функций. Дано сведение алгорифма к соответствующим сокращенным дизъюнктивным нормальным формам. Получена оценка мощности обучающего множества, при котором требуется учет дополнительных свойств функций [200].

Получены различные описания сильно базируемых графов, точны нижние и верхние оценки для количества различных базирующих, сильн базирующих и структурно базирующих ориентаций, опровергнута гипотез А. Коцига, конструктивно доказаны теоремы о существовании критически не сильно базируемых графов с теми или иными дополнительными свой ствами и описан класс базируемых графов, имеющих только бисвязные ба зирующие ориентации [201], [212].

Получены необходимые и достаточные условия существования крити ческих (по раскраске) графов со связностью меньшей хроматического чис ла, а также алгорифмы разложения графа на минимальное число остовны лесов и выделения максимального количества каркасов [202], [213].

В заключение обзора приведем также нижеследующие учебные пособия

Г. А. Амбарцумян, «Учебник теории вероятностей» (на армянском языке), издание второе, переработанное, Изд. «Луйс», 1971.

Г. А. Амбарцумян, «Случайные процессы» (на армянском языке), Изд «Луйс», 1974.

А. В. Петросян, «Лекции по теоретико-алгоритмическим задачам авто матизации проектирования ЭВМ», Изд. ЕГУ, 1975.

Р. Н. Тоноян, «Лекции по дискретной математике» (на армянском язы ке), Изд ЕГУ, 1974.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* УМН, XXVIII, № 4, 1973.
2. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 2, 1970.
3. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 2—3, 1971.
4. *Р. И. Галоян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 5, 1972.
5. *Р. И. Галоян.* ДАН Арм.ССР, LIX, № 2, 1974.
6. *Г. У. Матевосян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 5, 1974.
7. *А. Н. Айрапетян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 1, 1975.
8. *Л. А. Тер-Исраелян.* Матем. заметки, 13, № 2, 1973.
9. *М. М. Джрбашян.* Изв. АН Арм.ССР. сер. Математика, VII, № 4, 1972.
10. *М. М. Джрбашян.* Мат. сборник, 91, № 4, 1973.
11. *М. М. Джрбашян, Г. С. Кочарян.* Изв. АН СССР, сер. матем., 37 № 1, 1973.
12. *М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян.* Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 1, 1975.
13. *Г. В. Бадалян.* Изв. АН СССР, сер. матем., 38, № 2, 1974.
14. *Г. В. Бадалян.* Матем. заметки, 14, № 5, 1973.
15. *А. А. Китбалян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 3, 1975.
16. *С. С. Агаян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 4, 1973.

16*. *С. Н. Мергелян, С. С. Агаян.* Тезисы докл. Международной конференции «Комплекс-ный анализ», ГДР, г. Галле, 1975.

17. *А. А. Шагинян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, №№ 2—3, 1971.
18. *Б. В. Григорян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 2, 1972.
19. *Б. В. Григорян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 6, 1973.
20. *А. А. Вагаршакян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 1, 1975.
21. *М. М. Джрбашян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 5, 1973.
22. *М. М. Джрбашян.* Мат. сборник, 95, № 3, 1974.
23. *М. М. Джрбашян.* Изв. АН Арм:ССР, сер. Математика, IX, № 5, 1974.
24. *Г. М. Айрапетян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 6, 1973.
25. *Г. М. Айрапетян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 3, 1974.
26. *Г. М. Айрапетян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 2, 1975.

27. *Н. У. Аракелян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, III, №№ 4—5, 1968.
28. *Н. У. Аракелян.* Actes Congrès intern. Math., 1970, Tome 2, 1971.
29. *Н. У. Аракелян.* Матем. заметки, 9, № 4, 1971.
30. *А. А. Нерсесян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 6, 1971.
31. *А. А. Нерсесян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 6, 1972.
32. *А. А. Шагинян.* Матем. заметки. 9, № 2, 1971.
33. *Л. А. Тер-Исраелян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 1, 1971.
34. *Л. А. Тер-Исраелян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 3, 1974.
35. *Г. У. Матевосян.* УМН, XXX, № 3, 1975.
36. *А. Л. Шагинян.* Теория приближений в комплексной области (равномерные приближения), Курс лекций, ЕГУ, 1974.
37. *Л. Д. Бахрах, М. М. Джрбашян, О. С. Литвинов.* ДАН СССР, 218, № 2, 1974.
38. *А. И. Петросян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 1, 1974.
39. *А. И. Петросян.* ДАН Арм.ССР (в печати).
40. *Ф. А. Шамоян.* Записки научн. семин. ЛОМИ, 22, 1971.
41. *Ф. А. Шамоян.* ДАН Арм.ССР, LX, № 3, 1975.
42. *Ф. А. Шамоян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 6, 1973.
43. *Ф. А. Шамоян.* ДАН Арм.ССР, LXIII, № 3, 1976.
44. *М. М. Джрбашян.* ДАН СССР, 219, № 6, 1975.
45. *М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян.* ДАН СССР, 223, № 6, 1975.
46. *М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 6, 1975.
47. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* ДАН СССР, 225, № 5, 1975.
48. *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976.
49. *И. О. Хачатрян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 4, 1975.
50. *И. О. Хачатрян.* Матем. заметки, 18, № 5, 1975.
51. *В. Х. Мусоян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 2, 1974.
52. *В. Х. Мусоян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 2, 1972.
53. *В. А. Мартиросян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 4, 1975.
54. *Р. А. Багиян.* ДАН Арм.ССР, LXI, № 3, 1975.
55. *А. А. Талалян.* Матем. анализ серии «Итоги науки», М., 1971.
56. *А. А. Талалян.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 21, (1—2) 1970.
57. *Ф. Г. Арутюнян.* Матем. сборник, 90(132):4, 1973.
58. *Р. И. Овсепян.* Доклады АН Арм.ССР, LVII, № 1, 1973.
59. *Н. Б. Погосян.* Матем. сборник, 98 (140), № 1 (9), 1975.
60. *Н. Б. Погосян.* Матем. заметки. 17, № 5, 1975.
61. *Р. С. Давтян, А. А. Талалян.* Известия АН Арм. ССР, X, № 4, 1975.
62. *Р. С. Давтян.* Известия АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 4, 1971.
63. *Р. И. Овсепян.* Матем. заметки, II, № 5, 1972.
64. *Р. А. Аветисян.* Матем. заметки, 17, № 4, 1975.
65. *Р. А. Аветисян.* Матем. заметки, 13, № 5, 1973.
66. *Л. А. Шагинян.* Матем. сборник, 95 (137), № 2 (10), 1974.
67. *Л. А. Шагинян.* Матем. заметки, 15, № 3, 1974.
68. *А. В. Бахщецян.* Известия АН Арм. ССР, сер. Математика, X, № 1, 1975.
69. *Ф. А. Талалян.* Матем. заметки, 10, № 1, 1971.
70. *Г. М. Мушегян.* Известия АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 1, 1971.
71. *Г. М. Мушегян.* Известия АН СССР (в печати).
72. *Х. О. Мовсисян.* Известия АН Арм.ССР, сер. Математика, 9. № 1, 1974.
73. *Р. И. Овсепян.* Доклады АН Арм. ССР, LIX, № 1, 1974.
74. *Ф. Г. Арутюнян.* Матем. заметки, 11, № 3, 1972.
75. *Ф. А. Талалян.* Матем. заметки, 12, № 3, 1973.
76. *Р. И. Овсепян, А. Пельчински.* Studia Mathematica, LIV, № 2, 1975.
77. *Р. А. Александрян.* Докторская диссертация, МГУ, 1962.
78. *Р. А. Александрян.* ДАН СССР, 162, № 1, 1965.
79. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 1, 1972.

80. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 6, 1975.
81. *Ш. Н. Саакян*. ДАН Арм.ССР (в печати).
82. *Б. Г. Араркцян*. ДАН СССР, 205, № 3, 1972.
83. *Б. Г. Араркцян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 3, 1973.
84. *Н. Е. Товмасян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 3, 1973.
85. *Г. В. Амбарцумян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 4, 1974.
86. *В. А. Арзуманов*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 3, 1975.
87. *С. Г. Харатян*. ТМФ, 14, № 3, 1973.
88. *С. Г. Харатян*. ТМФ, 20, № 2, 1974.
89. *Л. Э. Геворкян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика (в печати).
90. *Н. Е. Товмасян*. Матем. сб., 89 (131), № 4, 1972.
91. *Г. А. Мартиросян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, XI, № 1, 1976.
92. *С. К. Афян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика (в печати).
93. *С. Г. Рубанович*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 2, 1972.
94. *С. Г. Рубанович*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 3, 1972.
95. *Н. Е. Товмасян*. Диф. уравнения, 3, № 1, 1967.
96. *Р. Л. Шахбагян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, XI, № 1, 1976.
97. *Р. Л. Шахбагян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика (в печати).
98. *А. Б. Нерсесян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, III, № 2, 1968.
99. *А. Б. Нерсесян*. ДАН СССР, 196, № 2, 1971.
100. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 3, 1973.
101. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 2, 1974.
102. *Г. Р. Оганесян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 2, 1975.
103. *А. О. Оганесян*. ДАН Арм.ССР, 61, № 1, 1975.
104. *К. А. Ягджян*. Изв. АН Арм.ССР, Математика (в печати).
105. *Р. Г. Айрапетян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика (в печати).
106. *Р. Л. Шахбагян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 4, 1972.
107. *Б. Г. Араркцян*. Диф. уравнения, 8, № 4, 1972.
108. *Б. Г. Араркцян*. ДАН СССР, 205, № 3, 1972.
109. *М. М. Джрбашян*. «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области», Изд. «Наука», 1966.
110. *Р. А. Александрян*. ДАН Арм.ССР (в печати).
111. *Г. В. Вирабян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 3, 1974.
112. *Г. В. Вирабян*. ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1975.
113. *Г. В. Вирабян*. ДАН Арм. ССР (в печати).
114. *М. Д. Давтян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 4, 1974.
115. *Г. Г. Казарян*. Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 131, 1974.
116. *Г. Г. Казарян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 6, 1974.
117. *Г. Г. Казарян*. ДАН СССР, 214, № 5, 1974.
118. *Г. Г. Казарян*. ДАН СССР, 222, № 3, 1975.
119. *В. А. Яврян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, №№ 2—3, 1971.
120. *В. А. Яврян*. ДАН Арм.ССР, LVI, № 3, 1973.
121. *П. Э. Мелик-Адамян*. ДАН Арм.ССР, LVIII, № 4, 1974.
122. *Ф. Э. Мелик-Адамян*. ДАН Арм.ССР, (в печати).
123. *Р. З. Мкртчян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 3, 1973.
124. *И. Г. Хачатрян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 4, 1975.
125. *Г. Р. Гулгазарян, В. Б. Лидский, Г. И. Эскин*. СМЖ, XIV, № 5, 1973.
126. *Г. Р. Гулгазарян*. Диф. уравнения, X, № 1, 1974.
127. *Н. Е. Товмасян*. СМЖ (в печати).
128. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян*. Мат. сб., 97 (139), № 1, 1975.
129. *Р. С. Минасян*. Сб. «Тепло и массоперенос», VIII, Минск, 1972.
130. *Р. С. Минасян*. ДАН АрмССР, LVI, № 1, 1973.
131. *Р. С. Минасян*. ДАН Арм.ССР, LIX, № 3, 1975.
132. *С. Д. Григорян*. Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика (в печати).

133. *R. V. Ambartzumian.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 27, 1973.
134. *R. V. Ambartzumian.* Z. Wahrscheinlichkitsthorie verw. Gebiete, 27, 1973.
135. *R. V. Ambartzumian.* Международный конгресс математиков, Ванкувер, 1974.
136. *Р. В. Амбарцумян.* ДАН СССР, 200, № 2, 1971.
137. *Р. В. Амбарцумян.* ДАН СССР, 214, № 2, 1974.
138. *Р. Р. Варшамов.* ДАН СССР, 211, № 4, 1973.
139. *Р. Р. Варшамов.* Проблемы кибернетики, вып. 27, 1973.
140. *В. И. Таирян, Г. Г. Хачатрян.* ДАН Арм.ССР, VIII, № 3, 1974.
141. *R. R. Varshamov.* IEEE Trans, IT, IT—9, № 1, 1973.
142. *Р. Р. Варшамов.* Studia Scientarum Hungarica, 8, 1973.
143. *Р. Р. Варшамов, Д. Н. Геворкян.* Сообщ. АН Груз.ССР, 77, № 11, 1975.
144. *Р. Р. Варшамов.* ДАН СССР, 223, № 1, 1975.
145. *Е. А. Арутюнян.* Тезисы докл. II Межд. симпоз. теор. информации, Цахкадзор 1971.
146. *Б. С. Нахапетян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 3, 1975.
147. *Б. С. Нахапетян.* ДАН Арм.ССР, 61, № 4, 1975.
148. *В. В. Сарафян* Теор. вероят. и ее применен., XVII, № 4, 1972.
149. *В. В. Сарафян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 1, 1973.
150. *В. В. Сарафян.* Труды советско-японского симпоз. по теор. вероят., Ташкент, 1975.
151. *А. Х. Симонян.* ДАН Арм.ССР, LXI, № 4, 1975.
152. *А. В. Какосян.* Записки науч. семин. ЛОМИ, 53, Л., 1975.
153. *В. К. Оганян.* ДАН Арм.ССР, LVI, № 4, 1973.
154. *Э. А. Даниелян.* Приоритетные задачи в системах обслуживания одним прибором, препринт МГУ, сер.: Статистика и стохаст. системы, вып. 13, 1971.
155. *Э. А. Даниелян, Б. М. Димитров.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 1, 1972.
156. *Э. А. Даниелян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 3, 1975.
157. *С. Г. Овсепян.* ДАН Арм.ССР, 55, № 5, 1972.
158. *С. Г. Овсепян.* Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, VIII, № 3, 1973.
159. *С. Г. Овсепян.* ДАН СССР, 224, № 4, 1975.
160. *С. Г. Овсепян.* ДАН СССР, 227, № 3, 1976.
161. *Э. А. Мирзаханян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика. VIII, № 3, 1973.
162. *Э. А. Мирзаханян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 5, 1974.
163. *Э. А. Мирзаханян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 2, 1975.
164. *Э. А. Мирзаханян.* ДАН Арм.ССР, LVIII, № 1, 1974.
165. *В. Д. Белоусов, Ю. М. Мовсисян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 2, 1974.
166. *Ю. М. Мовсисян.* Мат. исследования АН МССР, IX, 1 (31), 1974.
167. *Ю. М. Мовсисян.* Мат. исследования АН МССР, X, 2 (36), 1975.
168. *Ю. М. Мовсисян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, XI, № 3, 1976.
169. *Г. С. Микаелян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 5, 1971.
170. *Г. С. Микаелян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 6, 1972.
171. *Г. С. Микаелян.* ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1975.
172. *Б. М. Едигарян, Д. К. Фаддеев.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 2, 1971.
173. *Б. М. Едигарян, Д. К. Фаддеев.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 5, 1974.
174. *В. А. Бегларян.* ДАН Арм.ССР, LVIII, № 3, 1974.
175. *С. Г. Мамиконян.* Мат. сб., 88 (130), 1972.
176. *Г. Г. Эмин.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, IX, № 3, 1974.
177. *Р. О. Назарян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 1, 1975.
178. *Р. О. Назарян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, X, № 5, 1975.
179. *В. Г. Мхитарян.* ДАН Арм.ССР, LII, № 1, 1971.
180. *Л. А. Матевосян.* ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1974.
181. *Н. Г. Галстян.* ДАН Арм.ССР, LI, № 4, 1971.
182. *М. А. Басилян.* Изв. АН Арм.ССР, сер. Математика, VI, № 6, 1971 (реферат).

183. *М. А. Василян.* ДАН Арм.ССР, LVIII, № 4, 1974.
184. *С. Г. Далалян.* УМН (в печати).
185. *С. Г. Далалян.* Матем. сб., 98 (140), вып. 2, 1975.
186. *Н. П. Тер-Захарян.* Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, VIII, 1975.
187. *Г. Б. Маранджян.* Известия АН Арм.ССР, сер. Математика, VII, № 6, 1972.
188. *Г. Б. Маранджян.* ДАН СССР, 213, № 4, 1973.
189. *С. Н. Манукян.* ДАН СССР, 220, № 6, 1975.
190. *С. Н. Манукян.* Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, VIII, 1975.
191. *С. М. Меликян.* ДАН Арм.ССР, LIX, № 5, 1974.
192. *М. А. Хачатрян.* Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума «Теория логическо вывода», часть II, М., 1974.
193. *И. Д. Заславский.* 4-th Symposium „Mathematical Foundation of comput science, Marianske Lazne, 1975.
194. *И. Д. Заславский.* Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ, VIII, 1975.
195. *О. А. Саркисян.* Тезисы докладов Всесоюзного алгебраического симпозиума, [illegible] мель, 1975.
196. *Э. М. Погосян.* ДАН Арм.ССР, LX, № 3, 1975.
197. *Э. М. Погосян.* ДАН Арм.ССР, LX, № 5, 1975.
198. *А. В. Петросян.* Лекции по теоретико-алгоритмическим задачам автоматизац проектирования ЭВМ, изд. ЕГУ, Ереван, 1975.
199. *А В. Петросян, Ш. Е. Бозоян.* ДАН Арм.ССР, LXII, № 1, 1976.
200. *Л. А. Асланян.* Кибернетика, № 5, 1975.
201. *К. М. Мосесян.* ДАН Арм.ССР, LVII, № 5, 1973.
202. *С. М. Гюлумян.* ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1975.
203. *Н. П. Тер-Захарян.* ДАН СССР, 210, № 3, 1973.
204. *Г. Б. Маранджян.* Исследования по теории алгорифмов и математической логи ВЦ АН СССР, т. 1, М., 1973.
205. *Г. Б. Маранджян.* ДАН Арм.ССР, 61, № 4, 193—197, 1975.
206. *С. Н. Манукян.* Известия АН Арм.ССР, сер. Математика, VIII, № 4, 1973.
207. *И. Д. Заславский.* ДАН СССР, 210, № 3, 1973.
208. *И. Д. Заславский.* Тезисы докл. III Всесоюзной конференции по математическ логике, Новосибирск, 1974.
209. *Э. М. Погосян.* ДАН Арм.ССР, 58, № 1, 1974.
210. *Э. М. Погосян.* Труды ВЦ АН Арм.ССР, VIII, 1975.
212. *К. М. Мосесян.* ДАН Арм.ССР, LVI, № 5, 1973.
213. *Ж. Г. Никогосян.* ДАН Арм.ССР, LXI, № 1, 1975.
214. *М. М. Джрбашян.* International conference, Madras, Springer—Verlag, Be lin—Hedelberg—New York, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 1, 1976 Математика

А. Н. АЙРАПЕТЯН

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПОДКЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть D означает круг $|z|<1$ и Γ — окружность $|z|=1$. Обозначим через Ω сферу Римана, а через $\rho(z_1, z_2)$ — неэвклидово расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$. Положим $D(\zeta) = \{z; |z-\rho\zeta| < 1-\rho\}$, где $\zeta \in \Gamma$, а ρ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $1/2 < \rho < 1$. Обозначим через $l(\zeta, \varphi)$ сегмент круга $D(\zeta)$, оканчивающийся в точке $\zeta \in \Gamma$ и образующий угол $\varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ с диаметром круга D в точке ζ. Подобласть круга D, ограниченная двумя хордами $l(\zeta, \varphi_1)$ и $l(\zeta, \varphi_2)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ и границей круга $D(\zeta)$, обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. В случае, если $f(z)$ имеет предел, когда $z \to e^{i\theta}$, $z \in l(\zeta, \varphi)$, то его будем обозначать через $f(\theta, \varphi)$. *Отрезок* $l(\zeta, \varphi)$ назовем отрезком Жюлиа для функции $f(z)$, если для любых $\varphi_1, \varphi_2 \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(z)$ принимает в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение $W \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ называют P-последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $\{z; \rho(z, z_{n_k}) < \varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $W \in \Omega$, кроме быть может, двух значений (см. [1]). *Сегмент* $l(\zeta, \varphi)$ назовем P-сегментом для $f(z)$, если $l(\zeta, \varphi)$ содержит хотя бы одну P-последовательность функции $f(z)$.

Пусть M есть произвольное борелевское множество на Γ. Положим $\sigma = \bigcup\limits_{\zeta \in M} D(\zeta)$.

Следуя К. Темко, введем понятие выпуклой емкости множества Для этого рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, обладающую двумя свойствами:

1) $\lambda_n \to 0$,

2) $\{\lambda_n\}$ выпукла, т. е. $\lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \geqslant 0$.

Известно [2], что в этом случае ряд $Q(x) = \lambda_0 + \sum \lambda_n \cos nx$ сходится всюду, кроме, быть может, точки $x=0$ и является неотрицательной суммируемой функцией. Следовательно, функция

$$Q(r, x) = \lambda_0 + \sum \lambda_n r^n \cos nx$$

как пуассоновская сумма от $Q(x)$ удовлетворяет условию $Q(r, x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r < 1$. Измеримое по Борелю множество $E \subset \Gamma$ имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если существует такое распределение μ массы на E, для которой функция

$$V(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x-t)\, d\mu(t)$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1$. В случае отсутствия такой меры μ, считаем выпуклую емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равной нулю.

В дальнейшем условимся говорить, что непрерывная и монотонная на (0,1) функция $H(t) \geqslant 0$ принадлежит C_H, если

$$H(0) = \infty,\ tH(t) \downarrow 0 \text{ при } t \to 0,\ \int_0 \frac{dt}{tH(t)} < +\infty,\ \int_0 H(t)\, dt < +\infty.$$

Обозначим $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{H(1/k)}}$, а выпуклую емкость множества $E \subset \Gamma$ относительно этой последовательности—через $\mathrm{cap}_H E$. Для функции $f(z)$, мероморфной в D, через $\delta(r, \theta)$ обозначают выражение

$$\delta(r, \theta) \equiv \frac{|f'(re^{i\theta})|}{1 + |f(re^{i\theta})|^2}.$$

Теорема 1. *Пусть M — произвольное борелевское множество на Γ. Если непрерывная в D функция $U(re^{i\theta}) \geqslant 0$ удовлетворяет условию*

$$\iint_D [U(re^{i\theta})]^2 (1-r) H(1-r)\, r dr d\theta < +\infty, \tag{1}$$

то существует такое подмножество $E \subset M$ $\mathrm{cap}_H E = 0$, что в каждой точке $\zeta \in M \setminus E$

$$\int_{l(\zeta, \varphi)} U(re^{i\theta})\, |dz| < +\infty \quad (z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi))$$

для почти всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В нижеследующем доказательстве используются схемы из [3] и [4].

Пусть $e^{i\theta_0} \in M$ и $z = re^{i\theta} \in D$. Положим

$$h(r, \theta) = \begin{cases} U(re^{i\theta}), & z \in \sigma \\ 0, & z \in D \setminus \sigma. \end{cases}$$

Обозначим через $\psi \equiv \psi(r, \theta) = \pi - \arg(re^{i\theta} - 1)$, где $0 < r < 1$, $|\theta| < \pi$. Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r(\cos \theta - r)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$B(\omega, r, \theta) = h(r, \omega + \theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \tag{3}$$

Функция $B(\omega, r, \theta)$ измерима для любого фиксированного ω, как функция от r и θ, $0 < r < 1$, $|\theta| < \pi$. Из (2) следует, что $B(\omega, r, \theta) > 0$ в $S = \{re^{i\theta};\ \cos \theta > r\}$ и $B(\omega, r, \theta) \leqslant 0$ в $D \setminus S$. Обозначим через

$$J_1(\omega) = \iint_{(S)} B(\omega, r, \theta)\, dr d\theta,$$

$$J_2(\omega) = -\iint_{(D-S)} B(\omega, r, \theta)\, dr d\theta.$$

По определению $J_1(\omega) \geqslant 0$, $J_2(\omega) \geqslant 0$ для $e^{i\omega} \in M$. Введем функцию $J(\omega) \equiv J_1(\omega) - J_2(\omega)$.

Пусть C_r — окружность $|z| = r$, $0 < r < 1$, тогда

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r(r - \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leqslant \frac{r}{1 + r} < r \quad \text{для} \quad re^{i\theta} \in C_r \setminus S.$$

Оценим сверху интеграл $J_2(\omega)$, используя неравенство Коши—Буняковского и условие (1). Имеем

$$J_2(\omega) = -\int_0^1 dr \int_{C_r \setminus S} B(\omega, r, \theta)\, d\theta \leqslant \int_0^1 dr \int_{C_r \setminus S} rh(r, \theta + \omega)\, d\theta =$$

$$= \iint_{(D-S)} h(r, \theta + \omega)\, r dr d\theta \leqslant \iint_{D} h(r, \theta + \omega)\, r dr d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \iint_{D} h^2(r, \theta + \omega)(1 - r) H(1 - r)\, r dr d\theta \right\}^{1/2},$$

$$\left\{ \iint_{D} \frac{r dr d\theta}{(1 - r) H(1 - r)} \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \iint_{\sigma} [U(re^{i\theta})]^2 (1 - r) H(1 - r)\, r dr d\theta \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \sqrt{2\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{dr}{(1 - r) H(1 - r)} \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Положим для $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$L(\omega, \varphi) = \int\limits_{l(\omega, \varphi)} U(re^{i\varphi}) \, |dz| \quad (z = re^{i\theta} \in l(\omega, \varphi)),$$

$$\chi(\omega) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L(\omega, \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

В статье [3] при условии $U(re^{i\theta}) = \delta(r, \theta)$ доказано, что

1) $\chi(\omega)$ измеримо по Борелю,

2) $J(\omega) > (2\rho - 1)\, \chi(\omega)$.

Единственное свойство функции $\delta(r, \theta)$, которое используется при доказательстве—это ее непрерывность, а так как в нашем случае $U(re^{i\theta})$ непрерывна, то условия 1) и 2) выполнены. Докажем, что множество $E = \{e^{i\omega} \in M;\ \chi(\omega) = \infty\}$ имеет емкость $\mathrm{cap}_H\, E = 0$. Допустим напротив, что $\mathrm{cap}_H\, E > 0$. По определению множество E должно содержать замкнутое подмножество F такое, что $\mathrm{cap}_H\, F > 0$. Тогда на F существует такое распределение единичной массы, что потенциал

$$V_H(r, \theta) = \int\limits_F Q(r, \theta - \omega)\, d\mu_H(\omega) \text{ ограничен.} \tag{4}$$

В формуле (4) функция $Q(r, \theta - \omega)$ определяется формулой, где

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_H(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} \log \frac{1}{|re^{i\theta} - e^{i\omega}|}\, d\mu_H(\omega). \tag{5}$$

Интеграл (5) существует и представляет функцию, гармоническую и ограниченную: $|U_H(r, \theta)| \leqslant U_H < +\infty$. В статье [5] доказана следующая

Лемма 2.

$$\iint\limits_D \frac{1}{(1-r)\, H(1-r)} \left[\frac{\partial U_H(r, \theta)}{\partial r}\right]^2 r dr d\theta \leqslant K_H < +\infty.$$

Заметим, что

$$r\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}=-\int_F\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left(re^{i\theta}-e^{i\omega}\right)d\mu_H(\omega).$$

Обозначим

$$R(\omega,r,\theta)\equiv B(\omega,r,\theta-\omega)=$$

$$=h(r,Q)\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left(re^{i\theta}-e^{i\omega}\right)=\frac{rh(r,\theta)\{\cos(\theta-\omega)-r\}}{1-2z\cos(\theta-\omega)+r^2},$$

где $z=re^{i\theta}$, $e^{i\omega}\in F$. Легко видеть, что

$$h(r,\theta)\,r\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}=\int_F R(\omega,r,\theta)\,d\mu_H(\omega).$$

Рассмотрим интеграл

$$J=\iint_D drd\theta\int_F R(\omega,r,\theta)\,d\mu_H(\omega)=\iint_D h(r,\theta)\,r\frac{\partial U_H}{\partial r}(r,\theta)\,drd\theta. \qquad (6)$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского к интегралу (6), получим

$$J^2\leqslant\iint_D[h(r,\theta)]^2(1-r)H(1-r)\,drd\theta, \qquad (7)$$

$$\iint_D\frac{1}{(1-r)H(1-r)}\left[\frac{\partial U_H(r,\theta)}{\partial r}\right]^2drd\theta<+\infty.$$

Применяя теорему Фубини к отрицательной и положительной частям функции $R(\omega,r,\theta)$ можем написать

$$J=\int_F d\mu_H(\omega)\iint_D R(\omega,r,\theta)\,drd\theta.$$

Но

$$J(\omega)=\iint_D h(r,\theta+\omega)\frac{\partial}{\partial\theta}\{-\arg(re^{i\theta}-1)\}\,drd\theta=$$

$$=\iint_D h(r,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\{-\arg(re^{i\theta}-e^{i\omega})\}\,drd\theta=\iint_D R(\omega,r,\theta)\,drd\theta.$$

Отсюда, с учетом (6), будем иметь

$$J=\int_F J(\omega)\,d\mu_H(\omega),$$

откуда следует, что $J=+\infty$, так как по предположению для всех $e^{i\omega}\in F$ $J(\omega)=+\infty$. А это противоречит неравенству (7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $F(z)$ непрерывна в D и имеет непрерывные частные производные первого порядка в D. Если*

$$\iint_{\sigma} (1-r)\, H(1-r)\, |\mathrm{grad}\, F|^2\, r dr d\theta < +\infty,$$

то

1° *на M существует такое множество E* $\mathrm{cap}_H\, E = 0$, *что в каждой точке* $\zeta \in M \setminus E$

$$\int_{l(\zeta,\varphi)} |\mathrm{grad}\, F|\, |dz| < +\infty \text{ для почти всех } \varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right). \qquad (8)$$

2° *существуют конечные пределы* $F(\omega, \varphi)$ *для всех* φ, *для которых интеграл* (8) *конечен и эти пределы равны.*

Доказательство. Положив в теореме 1 $U(re^{i\theta}) = |\mathrm{grad}\, F|$ и заметив, что $|\mathrm{grad}\, F|$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, мы получим справедливость утверждения 1° теоремы 2. Конечность величины $L(\omega, \varphi)$ означает, в частности, существование определенного конечного предела $F(\omega, \varphi)$. В силу теоремы 1, на множестве M существует такое подмножество E_1, $\mathrm{cap}_H\, E_1 = 0$, что для любого $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$ $L(\omega, \varphi)$ является суммируемой функцией аргумента $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значения $L(\omega, \varphi)$ конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим точки $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$, в которых $F(\omega, \varphi_1) \neq F(\omega, \varphi_2)$, хотя бы для двух значений

$$\varphi_1 \neq \varphi_2, \ \varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Такая точка называется точкой неопределенности для $F(z)$. Согласно теореме Багемила [6] множество точек неопределенности для произвольной функции не более, чем счетно. Поскольку счетное множество точек на Γ имеет нулевую H-емкость для любого $H \in C_H$, то теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если мероморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{\sigma} (1-r)\, H(1-r)\, [\delta(r, \theta)]^2\, r dr d\theta < +\infty,$$

то существует такое подмножество $E \subset M$, $\mathrm{cap}_H\, E = 0$, *что в каждой точке* $\zeta \in M \setminus E$

1° $$\int_{l(\zeta,\varphi)} \delta(r, \theta)\, |dz| < +\infty, \ z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi)$$

для почти всех $\varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$;

2° *существуют пределы* $f(\omega, \varphi_1)$, $f(\omega, \varphi_2)$ *и* $f(\omega, \varphi_1) = f(\omega, \varphi_2)$ *для всех* $e^{i\omega} \in M \setminus E$ *и* $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3° *для любых* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $\zeta \in M \setminus E$, *для которых* $L(\omega, \varphi) = \infty$, *сегменты* $l(\zeta, \varphi) \equiv l(\omega, \varphi)$ *являются сегментами Жюлиа функции* $f(z)$.

Доказательство. Полагая в теореме 1 $U(re^{i\theta}) = \delta(r, \theta)$, получаем справедливость утверждения 1°. Утверждение 2° доказывается точно так же, как и во второй теореме. Пусть $L(\omega, \varphi_0) = \infty$ для каких-то $e^{i\omega} \in M$ и $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем значения $\varphi_1, \varphi_2 \in \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ таким образом, чтобы

$$L(\omega, \varphi_i) < +\infty, \ i = 1, 2, \ -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$$

и рассмотрим область $\Delta(\omega, \varphi_1, \varphi_2)$. Согласно лемме 5 из статьи Цудзи [7], если $f(z)$ не принимает в $\Delta(\omega, \varphi_1, \varphi_2)$ три различных значения и $L(\omega, \varphi_i) < +\infty$, $i = 1, 2$, то $L(\omega, \varphi) < +\infty$ для всех φ, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Поэтому $f(z)$ должна принимать в $\Delta(\omega, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Точно так, как в статье [8] можно доказать, что отрезки $l(\omega, \varphi_0)$, для которых $L(\omega, \varphi_0) = +\infty$, являются P-сегментами для функции $f(z)$.

Замечание 2. Теорему 3 можно усилить, если предположить, что

$$\iint\limits_{\sigma} (1-r) H(1-r) [\delta(r, \theta)]^4 \, r dr d\theta < +\infty.$$

Действительно, конечность $\chi(\omega)$ означает, что для любого $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \int\limits_{l(\omega, \varphi)} [\delta(r, \theta)]^2 \, r dr d\theta < +\infty.$$

Хорошо известно, что если функция $f(z)$ имеет конечный интеграл Дирихле, то ее асимптотическое значение в точке $e^{i\omega} = \zeta \in M$ совпадает с угловым предельным значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\omega}$. Следовательно, $f(z)$ имеет угловые предельные значения на множестве M всюду, кроме, быть может, некоторого подмножества

$$E_1 \subset M, \ \mathrm{cap}_H E_1 = 0.$$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в D. Если в теореме 3 вместо $\delta(r, \theta)$ положить $|f'(z)|$, то ее можно усилить. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{\varphi} (1-r)\, H(1-r)\, |f'(re^{i\theta})|^2\, r dr d\theta < +\infty.$$

Тогда существует такое подмножество $E \subset M$, $\mathrm{cap}_{ij} E = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E$ существует конечный угловой предел $f(\zeta)$ и интегралы

$$L(\omega, \varphi) = \int_{l(\omega, \varphi)} |f'(z)|\, |dz| \quad (\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E)$$

конечны для всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Положим в теореме 1 $u(re^{i\theta}) = |f'(re^{i\theta})|$. Согласно теореме 1, существует такое множество $E_1 \subset M$, $\mathrm{cap}_{H} E_1 = 0$, что в каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$ интегралы

$$L(\omega, \varphi) = \int_{l(\omega, \varphi)} |f'(z)|\, |dz|,$$

конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Для этих значений φ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\omega, \varphi)$. Рассмотрим те точки $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$, для которых можно указать хотя бы один угол $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с вершиной в точке $\zeta = e^{i\omega}$, что предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ функции $f(z)$ вдоль угла $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ совпадает с Ω. Рассмотрим следующие множества:

$$C_1(f, \zeta) = \bigcup_z \{f(z);\ z \in l(\zeta, \varphi_1) \cap \sigma\},$$

$$C_2(f, \zeta) = \bigcup_z \{f(z);\ z \in l(\zeta, \varphi_2) \cap \sigma\}.$$

Замыкание множества $C_1(f, \zeta) \cup C_2(f, \zeta)$ обозначим через $C(f, \zeta)$. Тогда множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)) \setminus C(f, \zeta)$ содержит значение ∞. Так как функция $f(z)$ голоморфна, то это значение является исключительным значением для $f(z)$. Согласно теореме Иверсена—Гросса ([9], стр. 100) значение ∞ является асимптотическим значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\omega}$. Следовательно, точка $\zeta = e^{i\omega}$ является точкой неопределенности для функции $f(z)$, и множество таких точек счетно. Присоединяя это к множеству E_1, получим множество E, $\mathrm{cap}_H E = 0$. В каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E$ предельное множество $C(f, \Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2))$ по каждому углу $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ не совпадает с Ω и по почти всем хордам $l(\omega, \varphi)$ существуют конечные и равные между собой пределы $f(\omega, \varphi)$. Согласно теореме Линделефа ([9], стр. 17) в каждой точке $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E$ существует конечный предел $f(\zeta) = f(\omega, \varphi)$. Опять используя лемму Цудзи ([7], лемма 5) получим, что $L(\omega, \varphi)$ конечны для всех значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В заключение выражаю благодарность В. И. Гаврилову, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 15.VII. 1974

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադասերի բացառիկ բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Ուռուցիկ ունակության տերմիններով ապացուցվում է ընդհանուր թեորեմ միավոր շրջանում անընդհատ կամայական ֆունկցիայի համար, որը բավարարում է որոշ ինտեգրալ պայմանի։ Օգտագործելով այդ թեորեմը, ապացուցվում է երկու թեորեմ դիտարկվող ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին։

A. N. AJRAPETIAN. *On exceptional sets of subclasses of meromorphic functions* (summary)

In terms convex capacity a general theorem concerning continuous function satisfyine an integral equation in the unite circle is proved.

This is employed in the proof of two theorems on boundary properties of functions considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Мат. сб., 67 (209), № 3, 1965, 408—427.
2. *Н. Бари.* Тригонометрические ряды, ИИЛ, М., 1961.
3. *Y. Yamashita.* S. Function—theoric metrics and boundary behaviour functions meromorphic or holomorphic in the unit disk, Nogoya Math. J., 1972, 45, 1972, 105—117.
4. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Берлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Мат. сб., 94 (136), № 1 (5), 1974.
5. *В. С. Захарян, В. И. Гаврилов.* Об исключительных множествах подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., в печати.
6. *F. Bagemihl.* Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41, 1955, 379—382.
7. *M. Tsuji.* Beurlings theorem on exceptional sets, Tohoki math. J., 2. 1950, 113—125.
8. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирск. матем. журн., 14, № 5, 1973.
9. *К. Носиро.* Предельные множества, М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XI, № 1, 1976 Математика

К. Н. ХАЧАТРЯН

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА, УБЫВАЮЩИХ В УГЛЕ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ

В настоящей работе нас интересует вопрос о построении нетривиальных целых функций $\omega_\alpha(z)$, имеющих по возможности медленный рост на плоскости и убывающих в угле $\Delta_\alpha = \left\{ z \in C;\ |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2} \right\}$, $\alpha \in (0, 2\pi)$ с заданной скоростью

$$|\omega_\alpha(z)| < \exp\{-p(|z|)\},\ z \in \Delta_\alpha, \tag{1}$$

где $p(t)$ — положительная неубывающая функция на полуоси $[0, \infty)$. Из теоремы единственности Карлемана [1] следует, что для существования такой функции $\omega_\alpha(z)$ на рост функции $p(t)$ необходимо наложить следующее ограничение:

$$\int_1^\infty t^{-\pi/\alpha-1} p(t)\, dt < \infty. \tag{2}$$

В работе Н. У. Аракеляна [2] были построены целые функции порядка $\rho_\alpha = \max\{\pi/\alpha, \pi/(2\pi-\alpha)\}$ и нормального типа, удовлетворяющие в угле Δ_α неравенствам

$$\exp(-c|z|^{\pi/\alpha}) < |\omega_\alpha(z)| < \exp\{-\operatorname{Re} z^{\pi/\alpha} - p(|z|)\},\ |z| > 1^*, \tag{3}$$

где вместо монотонности функция $p(t)$ подчинена условию

$$t^{-\pi/\alpha} p(t) \downarrow 0, \text{ при } t \uparrow +\infty.$$

При этом было показано, что указанный порядок или тип нельзя улучшить.

Однако оказывается, что если правую часть неравенства (3) заменить неравенством (1), то тогда возможно понижение как порядка, так и типа искомой целой функции. Справедлива следующая основная в настоящей работе

Теорема А. *Пусть* $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p(r)$ — *положительная и неубывающая функция на полуоси* $[1, \infty)$, *подчиненная условию* (2), *и*

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log p(r)}{\log r}.$$

---

* Буквами $c, c', c'', c_1, c_2, \cdots$ всюду в этой статье обозначены положительные константы.

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ *порядка* $\max\{\pi/(2\pi-\alpha), \rho\}$ *(и нормального типа в случае* $\rho<\pi/(2\pi-\alpha)$*), удовлетворяющая в угле* Δ_α *неравенствам*

$$\exp\left\{-c|z|^{\pi/\alpha}\int_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha-1}p(t)\,dt\right\}<|\omega_\alpha(z)|<\exp(-p(|z|)),\ |z|\geq 1. \tag{4}$$

Указанный порядок $\left(\text{и тип в случае } \rho<\dfrac{\pi}{2\pi-\alpha}\right)$ *нельзя понизить.*

Заметим, что в силу (2) при $\alpha\in(\pi, 2\pi)$ ρ всегда меньше величины $\pi/(2\pi-\alpha)$, так что построенная целая функция будет иметь порядок $\pi/(2\pi-\alpha)$ и нормальный тип.

В настоящей работе целая функция $\omega_\alpha(z)$ строится предложенной Н. У. Аракеляном следующей (новой) схемой: сначала строится голоморфная в некоторой области $D\supset\Delta_\alpha$ функция $f(z)$, возрастающая там примерно как $e^{p(|z|)}$. Затем эта функция аппроксимируется на Δ_α мероморфной функцией $F(z)$ с оценкой ее роста. Требуемая целая функция $\omega_\alpha(z)$ получается умножением мероморфной функции $\dfrac{1}{F(z)}$, которая убывает в угле Δ_α примерно как $e^{-p(|z|)}$) на некоторую нетривиальную целую функцию $B(z)$, множество нулей которой содержит множество полюсов функции $\dfrac{1}{F(z)}$ и которая ограничена в Δ_α (разумеется, функция $B(z)$ (как и $F(z)$) должна иметь по возможности медленный рост в плоскости).

Ниже, в пунктах 1°—4°, приводится доказательство теоремы А в согласии с указанной схемой.

1. Построение возрастающей голоморфной функции $f(z)$

Пусть $\varphi(r)\in C^{(1)}[1, \infty)$ — положительная неубывающая функция на $[1, \infty)$, удовлетворяющая условию (2) и неравенству $r^{-\pi/\alpha}\varphi(r)<$ $<\min\{\pi-\alpha/2, \alpha/2\}$.

Положим $\varphi(r)=r^{\pi/\alpha}\varphi(1)$ при $0<r<1$ и обозначим

$$D(\varphi)=\{z=re^{i\theta}\in C;\ |\theta|<\alpha/2+r^{-\pi/\alpha}\varphi(r)\}.$$

Покажем, что для указанной в теореме А функции p существует голоморфная в области $D(\varphi)$ и непрерывная на замыкании $\overline{D}(\varphi)$ (кроме, быть может, точек $z=0$, $z=e^{\pm i(\alpha/2+\varphi(1))}$) функция $f(z)$ такая, что

$$\exp(p(|z|))<|f(z)|<\exp\left\{c|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}\int_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha-1}p(t)\,dt\right\},$$

$$\text{для } z\in\overline{D}(\varphi),\ |z|>1. \tag{5}$$

С этой целью докажем предварительно следующую лемму об оценке интеграла Пуассона.

Лемма 1. *Пусть $q(r)$ — определенная на $(-\infty, \infty)$ неотрицательная четная функция, не убывающая на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяющая условию*

$$\int_1^{\infty} t^{-2} q(t)\, dt < \infty.$$

Тогда функция

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(t)}{x^2+(t-y)^2}\, dt,\ z = x+iy,\ x > 0$$

— интеграл Пуассона функции q для правой полуплоскости — удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{4} q(r) < u(z) < 3r \int_r^{\infty} \frac{q(t)}{t^2}\, dt,\ r = |z| > 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0. \tag{6}$$

Доказательство. Для произвольной точки $z = x+iy$, $x > 0$ имеем

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t-|y|)+q(t+|y|)}{t^2+x^2}\, dt < \frac{2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2+x^2}\, dt.$$

Если теперь $|y| \leqslant x$ $\left(\text{и следовательно } |y| \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant r\right)$, то

$$\frac{2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2+x^2}\, dt = \frac{2}{\pi} x \left(\int_0^{x} + \int_x^{\infty}\right) < \frac{1}{2} q(x+|y|) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} r \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(2t)}{t^2}\, dt < \frac{1}{2} q(2r) + 2r \int_{r\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(t)}{t^2}\, dt < 3r \int_r^{\infty} \frac{q(t)}{t^2}\, dt.$$

Если же $0 < x < |y|$ $\left(\text{и следовательно } x \leqslant \frac{r}{\sqrt{2}} \leqslant |y| \leqslant r\right)$, то

$$\frac{2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{q(t+|y|)}{t^2+x^2}\, dt = \frac{2}{\pi} x \left(\int_0^{|y|} + \int_{|y|}^{\infty}\right) < q(2|y|) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} r \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(2t)}{t^2}\, dt < q(2r) + r \int_{r\sqrt{2}}^{\infty} \frac{q(t)}{t^2}\, dt < 3r \int_r^{\infty} \frac{q(t)}{t^2}\, dt.$$

Оценим теперь функцию $u(z)$ снизу. Имеем

$$u(z) = \frac{x}{\pi}\int_0^\infty \frac{q(t-|y|)+q(t+|y|)}{t^2+x^2}\,dt \geqslant \frac{x}{\pi}\int_x^\infty \frac{q(t+|y|)}{t^2+x^2}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\,q(x+|y|) > \frac{1}{4}\,q(r).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\zeta(t)$ ($\zeta(0)=0$, $\zeta(\infty)=\infty$), конформно отображающую полученную из $D(\varphi)$ преобразованием $t=z^{\pi/\alpha}$ область

$$\Omega = \left\{t=re^{i\theta}\in C;\ |\theta|<\frac{\pi}{2}+\frac{\tilde{\varphi}(r)}{r}\right\},\quad \text{где}\quad \tilde{\varphi}(r)=\frac{\pi}{\alpha}\,\varphi\left(r^{\alpha/\pi}\right),$$

на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta>0$. Так как функция $\tilde{\varphi}(r)$ обладает свойствами

$$\tilde{\varphi}(r)\uparrow \ \text{при}\ r\uparrow\infty,\ \int_1^\infty \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t^2}\,dt<\infty,\ \int_1^\infty \left|d\frac{\tilde{\varphi}(t)}{t}\right|<\infty,$$

то согласно теоремам искажения Альфорса и Варшавского [3] (гл. 2, теоремы 5 и 6) получаем оценки

$$|z| < c_1\,|\zeta(z)| \leqslant c_2\,|z|,\ \text{для}\ z\in\Omega,\ |z|\geqslant 1. \tag{7}$$

Для доказательства нашего утверждения введем функцию

$$p^*(r)=\int_r^{er}\frac{dt_3}{t_3}\int_{t_3}^{et_3}\frac{dt_2}{t_2}\int_{t_2}^{et_2}\frac{p(t_1)}{t_1}\,dt_1$$

и положим в лемме 1 $q(t) = p^*\left(|t|^{\alpha/\pi}\right)$.

Пусть теперь $f_1(z)$ — голоморфная в правой полуплоскости функция такая, что $\operatorname{Re} f_1(z) = u(z)$. Искомую функцию $f(z)$ определим формулой

$$f(z) = \exp\{4 f_1(c_1\zeta(z^{\pi/\alpha}))\},\ \text{для}\ z\in D(\varphi).$$

Непрерывность функции $f(z)$ на замыкании $D(\varphi)$ следует из непрерывности производных соответственно первого и второго порядков функций $\varphi(t)$ и $q(t)$, а оценки (5) следуют из (6) и (7) и очевидного неравенства $p(r)\leqslant p^*(r)\leqslant p(e^3 r)$.

2. Равномерное приближение мероморфными функциями

В настоящем пункте в согласии с приведенной вначале схемой нам необходимо осуществить равномерную аппроксимацию на Δ_α мероморфными функциями функции $f(z)$, построенной в пункте 1°, с оценкой роста аппроксимирующих функций. Отметим, что аппроксимируемая функция $f(z)$ голоморфна не только в Δ_α, но и в несколько более широкой области $D(\varphi)$. Задача такого типа о приближении мероморфными функциями в случае, когда $D(\varphi)$ имеет вид $\Delta_{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, была исследована в работе Л. А. Тер-Исраеляна [4]. Применяя метод построения работы [4] в несколько модифицированном виде, сформулируем одну общую теорему в этом направлении.

Теорема В. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области*

$$D_\beta=\{z=re^{i\theta}\in C;\ |\theta|<\alpha/2+\beta(r),\ r>0\}$$

и непрерывна на $\overline{D}_\beta$, где $\alpha\in(0,2\pi)$, $\beta(r)$ — положительная дифференцируемая функция на полуоси $[0,\infty)$, удовлетворяющая там условиям

$$|r\beta'(r)|<c',\ \sup\{\beta(r);\ r\in[0,\infty)\}<\min\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}c',\ \pi-\frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{8}$$

Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ и некоторого натурального числа q существует мероморфная функция $F(z)$, удовлетворяющая условию

$$|F(z)-f(z)|<\varepsilon,\ \text{для } z\in D_{q^{-1}\beta},\ |z|>1,$$

неванлинновская характеристика $T(r;F)$ которой оценивается неравенством

$$T(r;F)\leqslant c''\left\{\int_1^r\int_1^t\frac{\log M_L(2s;f)}{st}\cdot\frac{dsdt}{\beta(s)}+\int_1^r\frac{\log M_L(2t;f)}{t}\,dt+\right.$$

$$+\log M(2r;f)+\int_1^r\int_1^t\frac{\log s}{st}\cdot\frac{ds\,dt}{\beta(s)}+\int_1^r\int_1^t\frac{|\log\beta(s)|}{\beta(s)}\cdot\frac{dsdt}{st}+$$

$$\left.+\int_1^r\frac{|\log\beta(t)|}{t}\,dt+|\log\beta(r)|+\log^2 r\right\}, \tag{9}$$

где $M_L(r;f)=\max\{|f(z)|;\ z\in\partial D_\beta,\ |z|\leqslant r\}$, $M(r;f)=\max\{|f(z)|;\ z\in D_\beta,\ |z|\leqslant r\}$.

Доказательство разобьем на три части. В первой докажем лемму о граничной кривой L области D_β, во второй дадим построение функции $F(z)$, в третьей—оценку $T(r;F)$.

1) Заметим, что в силу (8) существует положительное число δ такое, что для всех $r\in[0,\infty)$

$$\beta(r)\leqslant\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}c'-\delta.$$

Следовательно

$$\beta(r)+\operatorname{arctg} c' < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} c' = \gamma < \frac{\pi}{2},\ \beta(r)+\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}-\delta. \tag{10}$$

Теперь построим на L последовательности точек $\{\zeta_k\}$ и $\{\zeta'_k\}$ ($k=0, 1, 2,\cdots$) следующим образом. Пусть $\zeta_0 \neq 0$ — произвольная точка на кривой $\left\{z=re^{i\theta},\ \theta=\frac{\pi}{2}+\beta(r),\ r>0\right\}$. Далее, если уже построена точка ζ_k, определим ζ_{k+1} из условий

$$|\zeta_{k+1}|>|\zeta_k|,\ |\zeta_{k+1}-\zeta_k|=\frac{1}{eq}|\zeta_k|\,\beta(|\zeta_k|), \tag{11}$$

где q — целое число такое, что

$$q \geqslant \max\left\{\frac{5\sin\gamma}{\sin\delta},\ \pi+\sqrt{\frac{2}{\delta}}\right\}.$$

Комплексно сопряженные с ζ_k ($k=0, 1, 2,\cdots$) точки обозначим через ζ'_k, а круги с радиусом $\rho_{\zeta_k}=\frac{1}{q}|\zeta_k|\,\beta(|\zeta_k|)$ и с центрами ζ_k и ζ'_k — соответственно через V_k и V'_k. Очевидно, что точки ζ_k, ζ'_k простираются на L до бесконечности, когда $k\to\infty$.

Лемма 2. *Граница области $D_{q-1\beta}$ не пересекается с совокупностью кругов $\overline{V}_k$, $\overline{V}'_k$ ($k=0, 1, 2,\cdots$). Существуют ограниченные целочисленные функции $k_j(h)$, $0<k_j(h)\leqslant K$, $j=1, 2$, где*

$$K=\max\left\{\left[\frac{eq}{c'\sin\delta\sin\gamma}\right]+1;\ \left[\frac{eq}{(q-2)\cos\gamma}\right]+2\right\}^{*},$$ *такие,*

что для каждого целого $h\geqslant K$:

а) *круги $V_{h+k_1(h)}$ и $V_{h-k_2(h)}$ лежат соответственно в областях $\{z;\ |z|>|\zeta_{h+1}|\}$ и $\{z;\ |z|<|\zeta_h|\}$;*

б) *точки $\zeta_{h+1+k_1(h)}$ и $\zeta_{h+1-k_2(h)}$ находятся соответственно вне кругов V_{h+1} и V_h;*

в) *для всех натуральных k из промежутка $(h-k_2(h),\ h+k_1(h)+1)$*

$$\beta(|\zeta_k|)\geqslant c_3\,\beta(|\zeta_h|),$$

где постоянная c_3 не зависит от h.

Доказательство. Пусть окружность ∂V_k пересекается с границей области $D_{q-1\beta}$. Исходя из геометрического смысла неравенств (10) (первое из которых означает, что острый угол, составленный касательной кривой L с ближней стороной угла Δ_σ, не больше

---

* Квадратные скобки здесь и в доказательстве этой леммы означают взятие целой части находящейся в них величины.

γ), легко заметить, что на находящейся в угле $\left\{z;\ \frac{\alpha}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\alpha}{2} + \beta(|\zeta_k|)\right\}$ половине ∂V_k будет находиться по крайней мере одна точка пересечения (a). Обозначим через ζ' находящуюся на L точку $|a|\,e^{i q \arg a}$. Подсчитывая наибольшее возможное значение аргумента (в интервале $(0, 2\pi)$) комплексного числа $\zeta' - \zeta_k$, заключаем, на основании теоремы Лагранжа, о существовании точки ζ'' на кривой L $(|\zeta'| < |\zeta''| < |\zeta_k|)$, для которой

$$\beta'' + \operatorname{arctg} c' > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\beta' + \beta) - \frac{\beta}{2(q-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta' - \beta)},$$

где $\beta = \beta(|\zeta_k|)$, $\beta' = \beta(|\zeta'|)$ и $\beta'' = \beta(|\zeta''|)$. Но $\beta' > q\left(\beta - \arcsin\frac{1}{q}\beta\right)$, а тогда $\beta\left\{2(q-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta' - \beta)\right\}^{-1} < \delta$, так что

$$\gamma > \beta'' + \operatorname{arc\,tg} c' > \frac{\pi}{2} - \beta' - \delta,$$

что противоречит условию (10).

Докажем теперь второе утверждение леммы. Пусть длина отрезка касательной T в точке ζ_{h+1} к окружности $\{z;\ |z| = |\zeta_{h+1}|\}$, заключенная между ζ_{h+1} и лучом $\{z;\ \arg z = \alpha/2\}$, равна $\sin 2\gamma$. Рассмотрим лежащую в области $\{z;\ |z| > |\zeta_{h+1}|\}$ прямую l, проходящую на расстоянии $\cos\gamma\,\cos(\gamma - \beta)$ от точки ζ_{h+1} $(\beta = \beta(|\zeta_{h+1}|)$ и перпендикулярную к лучу $\{z;\ \arg z = \alpha/2\}$. Пусть d_ζ — расстояние точки ζ пересечения кривой $\left\{z = re^{i\theta};\ \theta = \frac{\alpha}{2} + \beta(r)\right\}$ с прямой l от касательной T. Очевидно, что

$$d_\zeta : \rho_\zeta > \cos(\gamma + \beta)\cos(\gamma - \beta) : \frac{\beta(|\zeta|)}{q\sin\beta(|\zeta|)}\{\cos(\gamma+\beta) + 2\cos(\gamma - \beta)\}\sin\gamma,$$

откуда в силу $q > \frac{5\sin\gamma}{\sin\delta}$ получаем, что $d_\zeta > \rho_\zeta$. С другой стороны находим, что $\rho_\zeta > \frac{1}{q}\cos(\gamma + \beta)\sin\gamma$, так что, пройдя кривую L по точкам ζ_k, самое большее через

$$\left[\frac{\cos(\gamma - \beta)\cos\gamma}{(eq)^{-1}\cos(\gamma + \beta)\sin\gamma\cos\gamma}\right] + 1 \leqslant \left[\frac{eq}{(1 + c')\sin\delta}\,\frac{}{\sin\gamma}\right] + 1$$

шагов переходим точку ζ, а за прямой l расстояние точки ζ_k от окружности $\{z;\ |z| = |\zeta_{h+1}|\}$ больше ρ_{ζ_k}. За точку $\zeta_{h+k_1(h)}$ берем первую из точек ζ_k, которые попадают в другую (по сравнению с ζ_h) сторону l.

Таким образом, $V_{h+k_1(h)}$ находится в области $\{z;\ |z| > |\zeta_{h+1}|\}$ (первая часть утверждения а)) и $k_1(h) \leqslant K$. Заметим еще, что расстояние точки ζ от касательной T, равное самое меньшее $\cos(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)$, в силу $q \geqslant \frac{5\sin\gamma}{\sin\delta}$ больше $\rho_{\zeta_{h+1}}$. Это доказывает, что точка $\zeta_{h+k_1(h)}$ (а значит и точка $\zeta_{h+k_1(h)+1}$) находится вне круга V_{h+1} (первая часть утверждения б)), но и одновременно с этим, что круг V_{h-K} лежит в области $\{z;\ |z| < |\zeta_h|\}$.

Рассмотрим теперь лежащую в угле $W=\left\{z;\ \frac{\alpha}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} - -\gamma-\delta\right\}$ непрерывную дугу $\tilde{l}$, которая в угле $\left\{z;\ \frac{\alpha}{2} \leqslant \arg z \leqslant \beta\right\}$, ($\beta= =\beta(|\zeta_h|)$) совпадает с перпендикулярной к лучу $\{z;\ \arg z = \alpha/2\}$ прямой, проходящей через точку $z = (|\zeta_h| - \rho_{\zeta_h})\, e^{i\beta}$, а в угле $\left\{z;\ \beta \leqslant \arg z \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2} - \gamma - \delta\right\}$ определяется уравнением $r = |\zeta_h|\left(1 - \frac{1}{q}\theta\right)$, $(r = re^{i\theta})$.

$\tilde{l}$ делит W на две части, из которых содержащую ζ_h будем считать правой. Пройдем точки ζ_k по направлению убывания индексов, начиная с точки ζ_h. Пусть $\zeta_{h-\tilde{k}_2(h)+1}$ — последняя из точек ζ_k, принадлежащих V_h. Легко видеть, что из этой точки до ζ_h можно дойти самое большее через

$$\left[\frac{1}{q}|\zeta_h|\,\beta:\ \frac{1}{eq}|\zeta_h|\left(\beta - \arcsin\frac{1}{q}\beta\right)\cos\gamma\right] \leqslant \left[\frac{eq}{(q-1)\cos\gamma}\right]$$

шагов, то есть $\tilde{k}_2(h) \leqslant K-1$. Если $V_{h-\tilde{k}_2(h)-1} \subset \{z;\ |z| < |\zeta_h|\}$, то положим $k_2(h) = \tilde{k}_2(h) + 1$. Если это не имеет места (что возможно только при $\tilde{k}_2(h) < K-1$), то берем первую из следующих точек, считая ее за $\zeta_{h-k_2(h)}$, для которой это условие выполняется, то есть $V_{h-k_2(h)} \subset \{z;\ |z| < |\zeta_h|\}$. Очевидно, точка $\zeta_{h-k_2(h)+1}$ будет находиться правее кривой $\tilde{l}$, так как в противном случае мы имели бы, что $V_{h-k_2(h)+1} \subset \{z;\ |z| < |\zeta_h|\}$. Наконец, так как

$$V_{h-K} \subset \{z;\ |z| < |\zeta_h|\},\ \text{а}\ \tilde{k}_2(h) < K-1,\ \text{то}\ k_2(h) \leqslant K.$$

Таким образом, определены функции $k_j(h)$, $j = 1, 2$, и доказаны утверждения а) и б). Докажем теперь утверждение в).

Очевидно, что во всех случаях точки ζ_k; $h - k_2(h) < k \leqslant h$ находятся правее кривой $\tilde{l}$, где они имеют самое меньшее аргумент

$$\operatorname{arctg}\frac{|\zeta|\sin\beta - q^{-1}|\zeta|\,\beta\cos\beta\operatorname{tg}\gamma}{(|\zeta| - q^{-1}|\zeta|\,\beta)\cos\beta} > \operatorname{arctg}(\sin\beta - q^{-1}\beta\operatorname{tg}\gamma),$$

которое в силу условия $q \geqslant \frac{5\sin\gamma}{\sin\delta} > 5\operatorname{tg}\gamma$ больше величины $\operatorname{arctg}(2/\pi - 1/5)\,\beta > \frac{1}{3}\beta$.

Аналогично, для точек ζ_k: $h < k < h + k_1(h)$ получаем

$$\beta(|\zeta_k|) \geqslant \operatorname{arctg} \frac{\sin\gamma\cos(\gamma+\beta')}{\sin 2\gamma\cos\beta'\operatorname{ctg}\beta' + \cos\gamma\cos(\gamma-\beta)} >$$

$$> \frac{\sin\delta\sin\gamma}{3}\beta',$$

где $\beta' = \beta(|\zeta_{h+1}|)$. Учитывая еще простое соотношение (16), приводимое ниже, можем написать

$$\beta(|\zeta_k|) > c_3\beta(|\zeta_h|),\ (h - k_2(h) < k \leqslant h + k_1(h));$$

заканчивая доказательство леммы.

2) Припишем кривой L направление, при движении по которому область D_3 остается слева. Обозначим через L_k дугу кривой L между точками ζ_k и ζ_k', через l_k — разность $L_{k+1} \setminus L_k$, через s_k и s_k' — соответственно верхнюю и нижнюю половины l_k. Наконец, через Γ_k обозначим пробегаемую против часовой стрелки дугу окружности $\{z;\ |z|=|\zeta_k|\}$ между точками ζ_k' и ζ_k.

Вводим функцию

$$Q(\zeta, z) = \begin{cases} Q_k(\zeta, z), & \text{при } \zeta \in s_k \setminus \zeta_{k+1};\quad k = 1, 2, \cdots \\ Q_k'(\zeta, z), & \text{при } \zeta \in s_k' \setminus \zeta_{k+1}';\quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

где

$$Q_k(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{n_k} \frac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}},\quad Q_k'(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{n_k} \frac{(\zeta-\zeta_k')^j}{(z-\zeta_k')^{j+1}}$$

($\{n_k\}$ — подлежащая определению последовательность натуральных чисел). Очевидно, что

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - Q(\zeta, z)\right| < \frac{1}{\rho_{\zeta_k}} \cdot \frac{1}{e^{n_k}}, \tag{12}$$

когда $\zeta \in s_k \setminus \zeta_{k+1}$, $z \overline{\in} V_k$ или $\zeta \in s_k' \setminus \zeta_{k+1}'$, $z \overline{\in} V_k'$.

Пусть ρ_0 — положительное число такое, что ρ_0-окрестность L_0 лежит целиком вне области $D_{q^{-1}\beta} \setminus \{z;\ |z| \leqslant 1\}$, и пусть $R_1(z)$ — рациональная функция, для которой вне этой окрестности

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - R_1(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Введем последовательность функций

$$F_n(z) = R_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n+1} \setminus L_0} f(\zeta)\, Q(\zeta, z)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad n = 0, 1, \cdots$$

и покажем, что при подходящем выборе $\{n_k\}$ она будет равномерно сходиться в любом круге $\{z;\ |z| < R\}$. В самом деле, выбирая n таким, чтобы имело место $|\zeta_n| - \rho_{\zeta_n} > R$, для любого натурального $m > n$ будем иметь

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=n+1}^{m} \int\limits_{l_k} |f(\zeta)| \cdot \left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| \cdot |d\zeta|. \tag{13}$$

Заметим, что на l_k

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right) |\zeta_k|\, \beta(|\zeta_k|) < |\zeta|\, \beta(|\zeta|) < \left(1 + \frac{1}{q}\right) |\zeta_k|\, \beta(|\zeta_k|). \tag{14}$$

Тогда, с учетом (12), из (13) получим

$$|F_m(z) - F_n(z)| < c_4 \sum_{k=n+1}^{m} \int\limits_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+1}|} \frac{M_L(r)}{r\beta(r)} \cdot \frac{dr}{e^{n_k}}, \tag{15}$$

где $M_L(r) = M_L(r; f)$ и $c_4 = \dfrac{(c' + 1)(q + 1)}{\pi}$. Выберем числа n_k такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{M_L(r)}{e^{n_k}} \leqslant \frac{\beta(r)}{r} \quad \text{при} \quad |\zeta_k| \leqslant r < |\zeta_{k+1}|,$$

а следовательно и неравенство

$$c_4 \int\limits_{|\zeta_0|}^{\infty} \frac{M_L(r)}{r\beta(r)} \cdot \frac{dr}{e^{n_k}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

предполагая, что $|\zeta_0|$ достаточно большой. За такое n_k можно взять целую часть выражения

$$\log M_L(|\zeta_{k+1}|) + \log |\zeta_{k+1}| + \log \frac{2}{\beta(|\zeta_k|)} + 1,$$

следовательно, в силу (11)

$$n_k < \log M_L(2|\zeta_k|) + \log |\zeta_k| + \log \frac{4e}{\beta(|\zeta_k|)} \cdot$$

Построенная этими n_k последовательность $\{F_n(z)\}$ будет, таким образом, равномерно сходиться в любом конечном круге плоскости.

Предел ее $F(z)$ будет, очевидно, мероморфной функцией, имеющей с $R_1(z)$ общие, а в точках ζ_k, ζ_k' — n_k-кратные полюсы. Она аппроксимирует $f(z)$ на $D_{q-1\beta} \setminus \{z;\ |z| \leqslant 1\}$ с точностью ε. Действительно, по лемме 2 точка $z \in D_{q-1\beta}$, $|z| > 1$, находится вне всех кругов V_k, V_k'. Поэтому, выбирая n_{α}' таким, чтобы имело место: $|z| < |\zeta_n|$ и $|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon/3$, и используя равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n+1} \cup \Gamma_{n+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

можем написать

$$|F(z) - f(z)| \leqslant |F(z) - F_n(z)| + \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - R_1(z) \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n+1} \setminus L_0} f(\zeta) \left(Q(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \right| < \varepsilon.$$

3) Оценим теперь

$$N(r, F) = \int\limits_0^r \frac{n(t, F)}{t}\, dt \text{ и } m(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Пусть N_1 — число полюсов $R_1(z)$, и $r > |\zeta_0|$. Тогда

$$n(r, F) = N_1 + 2 \sum_{|\zeta_k| < r} n_k < N_1 + 2 \sum_{|\zeta_k| < r} \Big\{ \log M_L(2|\zeta_k|) + \log |\zeta_k| +$$

$$+ \log \frac{4e}{\beta(|\zeta_k|)} \Big\}.$$

Чтобы устранить $|\zeta_k|$, заметим, как это легко следует из (11) и (14), что

$$|\zeta_{k+1}| - |\zeta_k| > |\zeta_k|\, \beta(|\zeta_k|) \cdot \frac{\sin \delta}{eq},$$

и

$$\frac{1}{2} \beta(|\zeta_k|) < \beta(|\zeta|) < 2\beta(|\zeta_k|), \text{ при } |\zeta_k| \leqslant |\zeta| \leqslant |\zeta_{k+1}|. \tag{16}$$

Далее, если $\psi(t)$ — неубывающая, то

$$\sum_{|\zeta_k| < r} \psi(|\zeta_k|) = \sum_{|\zeta_{k+1}| < r} \frac{\psi(|\zeta_k|)}{|\zeta_{k+1}| - |\zeta_k|} \int\limits_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+1}|} dt + \psi(r) <$$

$$< \frac{eq}{\sin \delta} \sum_{|\zeta_{k+1}| < r} \frac{1}{|\zeta_k|\, \beta(|\zeta_k'|)} \int\limits_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+1}|} \psi(t)\, dt + \psi(r) <$$

$$< \frac{e(q+1)}{\sin \delta} \int_1^r \frac{\psi(t)\, dt}{t\beta(t)} + \psi(r).$$

Пользуясь этими замечаниями, можем написать

$$n(r, F) < c_5 \left\{ \int_1^r \frac{\log M_L(2t)}{t} \cdot \frac{dt}{\beta(t)} + \log M_L(2r) + \log r + \right.$$

$$\left. + \int_1^r \frac{\log t}{t\beta(t)} dt + \int_1^r \frac{|\log \beta(t)|}{t\beta(t)} dt + |\log \beta(r)| \right\},$$

из которого получается оценка для $N(r, F)$:

$$N(r, F) \leqslant c_5 \left\{ \int_1^r \int_1^t \frac{\log M_L(2s)}{st} \frac{dsdt}{\beta(s)} + \int_1^r \frac{\log M_L(2t)}{t} dt + \right.$$

$$\left. + \int_1^r \int_1^t \frac{\log s}{st} \frac{dsdt}{\beta(s)} + \int_1^r \int_1^t \frac{|\log \beta(s)|}{\beta(s)} \frac{dsdt}{st} + \int_1^r \frac{|\log \beta(t)|}{t} dt + \log^2 r \right\} \tag{17}$$

Оценим теперь $m(r, F)$.

Пусть h то целое число, для которого $|\zeta_h| \leqslant r < |\zeta_{h+1}|$. Если $r \geqslant |\zeta_k|$, то по лемме 2 $re^{i\theta} \overline{\in} V_{h+k_1(h)} \cup V'_{h+k_1(h)}$, а также $re^{i\theta} \overline{\in} V_{h-k_2(h)} \cup$ $\cup V'_{h-k_2(h)}$. Тогда $|F(re^{i\theta}) - F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta})| < 1$ и, следовательно

$$\log^+ |F(re^{i\theta})| \leqslant \log^+ |F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta})| + \log 2.$$

С другой стороны, как позволяет заметить равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h-k_2+1} \cup \Gamma_{h-k_2+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - re^{i\theta}} d\zeta = 0,$$

имеет место $|F_{h-k_2(h)}(re^{i\theta})| < 1$, так что

$$\log^+ |F(re^{i\theta})| \leqslant \log^+ |F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta}) - F_{h-k_2(h)}(re^{i\theta})| + 2\log 2.$$

Далее

$$|F_{h+k_1(h)}(re^{i\theta}) - F_{h-k_2(h)}(re^{i\theta})| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_2+1}} f(\zeta)\, Q(\zeta, re^{i\theta})\, d\zeta \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{h-k_2+1}} |f(\zeta)| \cdot \left| \frac{1}{\zeta - re^{i\theta}} \right| \cdot |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{h+k_1+1}} |f(\zeta)| \cdot \left| \frac{1}{\zeta - re^{i\theta}} \right| \cdot |d\zeta|. \tag{18}$$

Для оценки последних двух интегралов вспомним, что по лемме 2 $\zeta_{h-k_2(h)+1} \overline{\in} V_h$ и $\zeta_{h+k_1(h)+1} \overline{\in} V_{h+1}$. Следовательно

$$\frac{|\zeta_h|}{|\zeta_h|-|\zeta_{h-k_2+1}|} \leqslant \frac{|\zeta_h|}{q^{-1}|\zeta_h|\,\beta(|\zeta_h|)} < \frac{2q}{\beta(r)} \text{ и } \frac{|\zeta_{h+1}|}{|\zeta_{h+k_1+1}|-|\zeta_{h+1}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{\beta(|\zeta_{h+1}|)} < \frac{4q}{\beta(r)},$$

вследствие которых

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h-k_2+1}} |f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-re^{i\theta}}\right| |d\zeta| < M(r)\,\frac{2q}{\beta(r)} \tag{19}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h+k_1+1}} |f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-re^{i\theta}}\right| |d\zeta| < M(2r)\,\frac{4q+1}{\beta(r)}, \tag{20}$$

где $M(r) = M(r;\ f)$.

Оценим теперь первый интеграл в (18). Имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{h+k_1+1}\setminus L_{h-k_2+1}} f(\zeta)\,Q(\zeta,\ re^{i\theta})\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=h-k_2+1}^{h+k_1}\int\limits_{l_k} |f(\zeta)|\cdot|Q(\zeta,\ re^{i\theta})|\cdot|d\zeta|.$$

Пользуясь неравенством

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{a^j}{b^{j+1}} \leqslant \frac{n+1}{b}\left(1+\frac{a^n}{b^n}\right),$$

получим оценку для $|Q(\zeta,\ re^{i\theta})|$ при $\zeta\in l_k;\ h-k_2(h)+1\leqslant k<h+k_1(h)$;

$$|Q(\zeta,\ re^{i\theta})| < \frac{n_k+1}{\delta(re^{i\theta})}\left(1+\frac{\left\{\frac{1}{eq}|\zeta_k|\,\beta(|\zeta_k|)\right\}^{n_k}}{\{\delta(re^{i\theta})\}^{n_k}}\right) <$$

$$< \frac{n_k+1}{\delta(re^{i\theta})}\left(1+\frac{\{r\beta(r)\}^{n_k}}{\{\delta(re^{i\theta})\}^{n_k}}\right),$$

где $\delta(re^{i\theta}) = \min\{|re^{i\theta}-\zeta_k|,\ |re^{i\theta}-\zeta_k'|;\ h-k_2(h)<k\leqslant h+k_1(h)\}$.

Следовательно, для рассматриваемых k

$$\int\limits_{l_k} |f(\zeta)|\cdot|Q(\zeta,\ re^{i\theta})|\cdot|d\zeta| < 2(c'+1)\,M_L(2r)\,\frac{n_k+1}{\delta(re^{i\theta})} \times$$

$$\times\left(1+\left\{\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\right\}^{n_k}\right)(|\zeta_{k+1}|-|\zeta_k|).$$

Продолжая заметим, что для тех же k, как непосредственно следует из утверждения „в“ леммы 2, все n_k ограничены сверху величиной

$$n(r) = \log M_L(2r) + \log r + \log \frac{1}{\beta(r)} + c_6,$$

что вместе с предыдущим приведет к следующей оценке:

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_2+1}} f(\zeta)\, Q(\zeta, re^{i\theta})\, d\zeta\right| < (c'+1)\, M_L(2r)\, n(r) \times$$

$$\times \frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\left(1 + \left\{\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\right\}^{n(r)}\right).$$

Отсюда

$$\log^+ \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{h+k_1+1} \setminus L_{h-k_2+1}} f(\zeta)\, Q(\zeta, re^{i\theta})\, d\zeta\right| < 2 \log^+ M_L(2r) +$$

$$+ \log\log r + (n(r)+1) \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} + \log\log \frac{1}{\beta(r)} + c_7,$$

что с ранее полученными неравенствами (19), (20) дает окончательную оценку для $\log^+ |F(re^{i\theta})|$:

$$\log^+ |F(re^{i\theta})| < 2 \log^+ M_L(2r) + 2 \log^+ M(2r) + (n(r)+$$

$$+1) \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} + \log\log r + 2 \log \frac{1}{\beta(r)} + \log\log \frac{1}{\beta(r)} + c_8.$$

Обращаясь к $m(r, F)$, отметим, что интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\, d\theta$ оценивается независимо от r [5]:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\, d\theta \leqslant 2 \log 2K + \frac{1}{2},$$

следовательно, для $m(r, F)$ получится оценка

$$m(r, F) \leqslant c_9 \left(\log^+ M(2r) + \log \frac{1}{\beta(r)} + \log\log r\right),$$

приводящая вместе с (17) к оценке (9) для $T(r; F)$. Теорема доказана.

К тому, как выглядит (9) в зависимости от $M_L(r; f)$, $M(r; f)$ и $\beta(r)$ при применении его к построенной нами в пункте 1° функции $f(z)$, мы вернемся в пункте 4°, а сейчас приступим к решению последней задачи нашей схемы—к построению функции $B(z)$.

3. Построение вспомогательной целой функции $B(z)$

Пусть z_k $(k = 1, 2, \cdots)$ — точки из $C\Delta_\alpha$. Введем обозначение:

$$\vartheta_k = \left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - |\pi - \arg z_k|;\ k = 1, 2, \cdots.$$

Предполагая, что ϑ_k; $k=1, 2,\cdots$ подчинены условиям

$$\vartheta_k > \left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\log^2 |z_i|},$$

построим и оценим целую функцию $B(z)$ порядка

$$\max\left\{\frac{\pi}{2\pi-\alpha},\ \rho(n) = \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r)}{\log r}\right\}$$

($n(r)$ — счетная функция точек z_k) с условиями

$$B(z_k)=0 \quad \text{(с учетом кратности)}, \tag{21}$$

$$|B(z)| \leqslant 1, \quad \text{для} \quad z \in \Delta_\alpha. \tag{22}$$

Вводя обозначения

$$D_R = \Delta_\alpha \cup \{z \in C;\ |z| < R\},\ \Gamma_R = \partial D_R,$$

$$\delta_\zeta = (p+1)\frac{\log^3 |\zeta|}{|\zeta|^{\pi/(2\pi-\alpha)}},\ \zeta \neq 0, \text{ и } \psi(t) = (-t)^{\pi/(2\pi-\alpha)},$$

где p — произвольное число, большее $\rho(n)$, определим в области D_R функцию $g_\zeta(z)$ следующим равенством:

$$g_\zeta(z) = (z-\zeta)\frac{\zeta e^{-\delta_\zeta \psi(\zeta)}}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t-\zeta)(t-z)}\,dt \quad (R > |\zeta|), \tag{23}$$

где кривой Γ_R приписано направление, при движении по которому область D_R остается с правой стороны. По теореме Коши в определении $g_\zeta(z)$ кривую Γ_k можно заменить кривой $\Gamma_{R'}$ $(R' > R)$, то есть функция $g_\zeta(z)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость $\{z;\ |z| < \infty\}$ и, таким образом, определяет целую функцию. Под $g_\zeta(z)$ будем понимать эту целую функцию. Ясно, что $g_\zeta(\zeta)=0$.

Лемма 3. *В области* $\Omega_\zeta = \Delta_\alpha \cup \left\{z;\ |z| < \dfrac{|\zeta|}{\log^4 |\zeta|}\right\}$ *при* $|\operatorname{Im}(\zeta - t)| \geqslant 1$; $t \in \partial\Delta_\alpha$, *справедлива оценка*

$$|g_\zeta(z) - 1| \leqslant c_{10}|\zeta| \exp\{-\delta_\zeta \operatorname{Re}\psi(\zeta)\}. \tag{24}$$

Доказательство. Оценим интеграл $\displaystyle\int_r^\infty \frac{dx}{x|x-w|}$ для значений $|w| > r > 0 \left(w = u + iv = \dfrac{1}{a-ib}\right)$. Имеем

$$\int_r^\infty \frac{dx}{x|x-w|} = \frac{1}{|w|}\int_{-a}^{\frac{1}{r}-a}\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{1}{||w|} \times$$

$$\times \log \frac{\left\{\left(\frac{1}{r}-a\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{r}-a\right)^2+b^2}\right\}(\sqrt{a^2+b^2}+a)}{b^2},$$

откуда

$$\int_r^{\infty} \frac{dx}{x|x-w|} \leqslant \frac{1}{|w|} \log \frac{4\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\left(\frac{1}{r}-a\right)^2+b^2}}{b^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|w|} \log \frac{8}{r} \frac{|w|^3}{v^2}. \tag{25}$$

Заметим, что из этого неравенства следует равномерная ограниченность интеграла для всех $r \geqslant 1$ и $|w| \geqslant 1$ в области $\{w;\ |v| \geqslant e^{-|w|}\}$.

Обозначим $r = \dfrac{2|\zeta|}{\log^4 |\zeta|}$. Если $z \in \Omega_\zeta$, то

$$g_\zeta(z) = 1 + (z-\zeta)\frac{\zeta e^{-\delta_\zeta \psi(\zeta)}}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t-\zeta)(t-z)}\, dt.$$

Используя разложение

$$\frac{z-\zeta}{(t-\zeta)(t-z)} = \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\zeta}$$

и обозначения

$$\Gamma_r' = \Gamma_r \cap \{z;\ |z| = r\} \text{ и } \Gamma_r'' = \Gamma_r \cap \{z;\ |z| > r\},$$

можем написать

$$|g_\zeta(z)-1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\zeta}{e^{\delta_\zeta \psi(\zeta)}}\right| \left(\int_{\Gamma_r'} \frac{e^{\operatorname{Re} \delta_\zeta \psi(t)}}{|t|\,|t-z|}|dt| + \int_{\Gamma_r'} \frac{e^{\operatorname{Re} \delta_\zeta \psi(t)}}{|t|\,|t-\zeta|}|dt| + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_r''} \frac{|dt|}{|t|\,|t-z|} + \int_{\Gamma_r''} \frac{|dt|}{|t|\,|t-\zeta|} \right). \tag{26}$$

Когда $z \in \left\{z;\ |z| < \dfrac{|\zeta|}{\log^4 |\zeta|}\right\}$, первые два интеграла правой части неравенства (26) оцениваются величиной

$$2\pi \frac{\log^4 |\zeta|}{|\zeta|} \exp\left\{ \frac{2^{\pi/(2\pi-\alpha)} \cdot (p+1)}{(\log |\zeta|)^{2\alpha/(2\pi-\alpha)}} \cdot \log |\zeta| \right\},$$

которая равномерно ограничена для значений $|\zeta| > 2$. И так как третий интеграл меньше $\dfrac{4 \log^4 |\zeta|}{|\zeta|}$, а четвертый — $\dfrac{2}{|\zeta|} \log 4|\zeta|^3$ (согласно (25)), то (24) доказана в рассматриваемом случае.

В случае $z \in \Delta_\alpha$ положим в (26) $r=1$. Тогда для значений $|z| > 2$ получим

$$|g_\zeta(z)-1| \leqslant \left|\frac{\zeta}{e^{\delta_\zeta\psi(\zeta)}}\right| \cdot \left(\frac{e^{\delta_\zeta}}{|z|-1} + \frac{e^{\delta_\zeta}}{|\zeta|-1} + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{d\,|t|}{|t|\,|t-\zeta|} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{d\,|t|}{|t|\,|t-z|}\right),$$

из которого согласно (25) следует справедливость оценки (24) в той подобласти угла Δ_α, точки z которой находятся от сторон угла на расстоянии не ближе, чем $e^{-|z|}$. Для доказательства (24) в тех точках $z \in \Delta_\alpha$, которые находятся вне этой подобласти, часть Γ_r в (23) ($r=1$), отсекаемая окружностью радиуса $e^{-|z|}$ с центром в z, заменим дугой σ_z этой окружности, лежащей вне Δ_α (что допустимо согласно теореме Коши). Ясно, что это добавит к предыдущей оценке только такой член:

$$\left|\frac{\zeta e^{-\delta_\zeta\psi(\zeta)}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_z} \frac{e^{\delta_\zeta\psi(t)}}{t\,(t-z)}\,dt\right|.$$

Простое вычисление показывает, что интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_z}\frac{e^{\delta_\zeta\psi(t)}}{t\,(t-z)}\,dt$ оценивается величиной

$$\frac{1}{|z|}\exp\left\{\delta_\zeta\,\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\,e^{-|z|}\,|z|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}\right\},$$

откуда вытекает (24) и в этом случае. Лемма доказана.

Условимся теперь писать δ_k и $g_k(z)$ вместо δ_{z_k} и $g_{z_k}(z)$.

Теорема С. *При достаточно малом* $\sigma>0$ *произведение* $B(z) = \sigma\prod\limits_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *представляет целую функцию порядка* $\max\left\{\frac{\pi}{2\pi-\alpha},\ \rho_{(n)}\right\}$ $\left(\right.$*и нормального типа в случае* $\rho_{(n)} < \frac{\pi}{2\pi-\alpha}\left.\right)$, *обладающую свойствами* (21) *и* (22).

Доказательство. Покажем сначала равномерную сходимость произведения в любом конечном круге $\{z;\ |z|<R\}$ плоскости. Пусть $k_R>0$ такое, что $\frac{|z_k|}{\log^4|z_k|} > R$ для всех $k \geqslant k_R$. Тогда

$$|g_k(z)-1| \leqslant c_{10}\,|z_k|\exp\left\{-\delta_k\left(\sin\frac{\pi\theta_k}{2\pi-\alpha}\right)|z_k|^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}\right\} \leqslant \frac{c_{11}}{|z_k|^{\rho}}, \tag{27}$$

что и доказывает наше утверждение, так как $p > \rho(\alpha)$. Если теперь вместо круга $\{z;\ |z| < R\}$ рассматривать угол Δ_2, то здесь оценки (27) имеют место для всех k, и сходимость произведения $\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1+\frac{c_{11}}{|z_k|^p}\right)$ доказывает ограниченность $B(z)$ в угле Δ_2.

Остается только оценить рост $B(z)$, так как выполнение (21) очевидно. Ясно также, что для этого следует рассматривать только точки $z \in C\Delta_2$. Ограничиваясь здесь значениями $|z| > 1$ и считая $|\zeta| > 1$, можем написать

$$g_\zeta(z) = 1 - \frac{\zeta}{e^{\delta_\zeta \psi(\zeta)}} \cdot \frac{e^{\delta_\zeta \psi(z)}}{z} + (z-\zeta)\,\frac{\zeta e^{-\delta_\zeta \psi(\zeta)}}{2\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{e^{\delta_\zeta \psi(t)}}{t(t-\zeta)(t-z)}\, dt.$$

Ясно, что для последнего слагаемого опять справедлива оценка (24) $\Big($откуда, между прочим, следует, что $g_\zeta(z)$ нормального типа порядка $\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\Big)$, следовательно, обозначая $\lambda = \pi/(2\pi-\alpha)$, можем написать

$$\prod_{k=1}^{\infty} |g_k(z)| \leqslant \prod_{1}^{N-1} |g_k(z)| \cdot \prod_{N}^{\infty}\left\{1 + \left|\frac{z_k}{e^{\delta_k \psi(z_k)}}\right|\left(c_{12} + \left|\frac{e^{\delta_k \psi(z)}}{z}\right|\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{N-1} |g_k(z)| \cdot \prod_{N}^{\infty}\left\{1 + \frac{1}{|z_k|^p}\left(c_{12} + \frac{e^{\delta_k r^\lambda}}{r}\right)\right\},$$

где $r = |z|$, а N такое, что $|z_k| > 1$ для $k \geqslant N$.

Если $n(r)$ — число точек z_k круга $\{z;\ |z| < r\}$, то

$$\log \prod_{N}^{\infty}\left\{1 + \frac{1}{|z_k|^p}\left(c_{12} + \frac{e^{\delta_k r^\lambda}}{r}\right)\right\} = \int\limits_{|z_N|}^{\infty} \log\left\{1 + \frac{1}{t^p}\left(c_{12} + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{1}{r}\exp\left[(p+1)\left(\frac{r}{t}\right)^\lambda \log^3 t\right]\right)\right\} dn(t) < O(r^\lambda) +$$

$$+ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{n(t)}{t} \cdot \frac{p + \lambda(p+1)\left(\frac{r}{t}\right)^\lambda \log^3 t}{rt^p + \exp[\cdots]} \exp[\cdots]\, dt. \qquad (28)$$

Заметим, что при достаточно большом r $\log^3 t \exp[\cdots] < rt^p$ для $t > 2r\log^{2/\lambda} r$ и $r^\lambda \log^3 t < 2t^\lambda$ для $t \geqslant r\log^{3/\lambda} r$. Это позволяет получить из (28) окончательную оценку $B(z)$ в следующем виде:

$$\log|B(z)| < O(r^\lambda) + (\lambda+1)(p+1)\, r^\lambda \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{1}^{2r\log^{2/\lambda} r} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} \log^3 t\, dt + \int\limits_{2r\log^{2/\lambda} r}^{r\log^{3/\lambda} r} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt\right\}. \qquad (29)$$

Очевидно, что в случае $\lambda > \rho_{(n)}$ правая часть (29) равна $O(r^{\lambda})$, а в случае $\lambda \leqslant \rho_{(n)}$ она есть величина порядка $\rho_{(n)}$. Теорема доказана.

4. Построение функции $\omega_\alpha(z)$

Вернемся теперь к теореме А. Положим

$$\beta(r) = \begin{cases} 10 \ (\pi - \alpha/2) \log^{-2} r, & \text{для } r \in [e^{10}, \infty) \\ 10^{-1} (\pi - \alpha/2), & \text{для } r \in (0, e^{10}). \end{cases}$$

Неравенства (8) и (10) для $\beta(r)$ будут удовлетворены, если взять $c' = \operatorname{tg}\frac{\pi}{50}$, $\delta = \frac{7\pi}{50}$ $\left(\text{тогда } \gamma = \frac{13\pi}{50}\right)$. За целое число q можно взять число 10, так как

$$\max\left\{\frac{5 \sin 13\pi/50}{\sin 7\pi/50}, \ \pi + \sqrt{\frac{100}{7\pi}}\right\} < 10.$$

Функцию $f(z)$ пункта 1° будем считать построенной в области $D(\varphi) = D_\beta$ $(\varphi(r) = r^{\pi/\alpha}\beta(r))$ для функции $\log(e^{p(r)} + 1)$ (вместо $p(r)$).

Рассмотрим мероморфную функцию $\frac{1}{F(z)}$, где $F(z)$ — аппроксимирующая $f(z)$ с точностью до 1 функция пункта 2°. Она имеет ту же характеристику, что и $F(z)$ (с точностью до постоянного слагаемого), и в силу (5) удовлетворяет в области $D_{10^{-1}\beta} \setminus \{z;\ |z| \leqslant 1\}$ неравенствам

$$\exp\left\{- c_{13} |z|^{\pi/\alpha} \int\limits_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha - 1} p(t)\, dt\right\} < \left|\frac{1}{F(z)}\right| < \exp\{-p(|z|)\}. \tag{30}$$

Кроме того, полюсы ее z_k; $k = 1, 2, \cdots$, как следует из (30), лежат вне этой области, следовательно $\vartheta_k = (\pi - \alpha/2) - |\pi - \arg z_k|$, начиная с некоторого номера, будут удовлетворять условиям

$$\vartheta_k > (\pi - \alpha/2)\frac{1}{\log^2 |z_k|}.$$

Если среди z_k имеются m равных нулю ($z_k = 0$; $k = 1, 2, \cdots, m$), в произведении $B(z)$ положим $g_k(z) = g_{m+1}(z) - g_{m+1}(0)$ для $k = 1, 2, \cdots, m$. Этим произведением и вышеуказанной мероморфной функцией $\frac{1}{F(z)}$ и определяем искомую целую функцию:

$$\omega_\alpha(z) = \frac{1}{F(z)} \cdot B(z).$$

Убедимся, что она удовлетворяет требованиям теоремы А. Действительно: (4) следует из (30) и (22). Далее, так как $|f(z)|$ принимает на $L = \partial D_{\beta}$ значение $e^{4u\,(c_1:\,(z^{\pi/\alpha}))} \leqslant e^{4p^*\,(c_2{}^{\alpha/\pi}|z|)} < e^{4p\,(c_{14}|z|)}$, то есть $\log M_L(r; f) < 4p\,(c_{14}|z|)$, а согласно (5)

$$\log M(r;\, f) < c\,|z|^{\pi/\alpha} \int\limits_{|z|}^{\infty} t^{-\pi/\alpha - 1}\, p(t)\, dt,$$

то для характеристики $T(r;\, F)$ имеем из (9)

$$T(r;\, F) \leqslant c_{15} \left\{ \int\limits_1^r \int\limits_1^t \frac{p\,(c_{15}\, s) \log^2 s}{st}\, ds dt + \int\limits_1^r \frac{p\,(c_{15}\, t)}{t}\, dt + \right.$$

$$\left. + r^{\pi/\alpha} \int\limits_r^{\infty} \frac{p(t)}{t^{\pi/\alpha + 1}}\, dt + \log^5 r \right\}, \tag{31}$$

откуда видно, что она порядка $\rho = \varlimsup\limits_{r \to \infty} \dfrac{\log p(r)}{\log r}$ (можно было $\beta(r)$ подобрать таким, чтобы $T(r;\, F)$ было не только порядка, но и типа $p(r)$, но это для нас неважно). Имея эту оценку, можем говорить и об оценке $n(r)$-счетной функции нулей $F(z)$:

$$n(r) \leqslant N(er,\, 0) \leqslant T(er;\, F) + \text{const}. \tag{32}$$

Так как $T(r;\, F)$ порядка ρ, то $\rho_{(n)} \leqslant \rho$, откуда следует, что $B(z)$ самое большее порядка $\max\{\pi/(2\pi - \alpha),\, \rho\}$.

Теперь можем написать и искомую оценку функции $\omega_\alpha(z)$. Имеем

$$T(r;\, \omega) \leqslant T(r;\, F) + \log|B(z)| + \text{const}, \tag{33}$$

откуда прежде всего видно, что $\omega_\alpha(z)$ имеет порядок не больше $\max\{\pi/(2\pi - \alpha),\, \rho\}$ (что он не может быть и меньше его, показывается ниже). Ясно, что в случае $\rho < \pi/(2\pi - \alpha)$, когда $B(z)$ нормального типа, $\omega_\alpha(z)$ также будет нормального типа порядка $\pi/(2\pi - \alpha)$ — наименьший рост при условии (4) (теорема Фрагмена—Линделёфа). Этот случай содержит в себе, как отмечали вначале, случай $\alpha \in (\pi,\, 2\pi)$, иначе говоря для этих α полученный результат улучшить нельзя (в смысле порядка и типа).

Покажем теперь, что в общем случае порядок построенной функции минимальный.

В самом деле, если целая функция $\omega(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \cdots \neq 0$ удовлетворяет в угле $\{z;\, |\arg z| \leqslant \alpha\}$ неравенству $|\omega(z)| \leqslant \leqslant \exp(-p(|z|))$, где $p(r)$ — положительная функция порядка ρ, то ее порядок не может быть меньше $\max\{\pi/(2\pi - \alpha),\, \rho\}$. Это следует из теоремы Фрагмена—Линделёфа и следующей цепи неравенств

$$\log M(r;\, \omega) \geqslant T(r;\, \omega) \geqslant m(r,\, 0) + \log|c_\lambda| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \log\left|\frac{1}{\omega(re^{i\theta})}\right| d\theta + \log|c_\lambda| \geqslant \frac{\alpha}{\pi}\, p(r) + \log|c_\lambda|.$$

Этим уже доказаны все утверждения теоремы А. Покажем еще на примере справедливость высказанного во введении утверждения о возможном понижении типа (когда $\rho = \pi/\alpha$, $\alpha < \pi$) функции $\omega_\alpha(z)$ по сравнению с построенной в работе [2] функцией, происходящее вследствие замены правой части неравенства (3) неравенством (1).

Действительно, пусть

$$p(r) \leqslant \frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma+1} r} \quad (r \geqslant r_0 > 1),$$

где

$$\sigma > \max\left\{\frac{4\pi}{\alpha}, \frac{6\pi}{\alpha} - 5\right\}.$$

Тогда, пользуясь неравенством

$$\int_2^r \frac{t^{\alpha-1}}{\log^\beta t} dt < \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{r^\alpha}{\log^\beta r},$$

справедливым для достаточно больших r, получим из (31)

$$T(r; F) \leqslant c_{16} \frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma-1} r}.$$

Согласно (32), такую же оценку имеем и для $n(r)$, в силу чего из (29) получим

$$\log|B(z)| < c_{17}\left(\frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma - \frac{4\pi}{\alpha}} r} + \frac{r^{\pi/\alpha}}{\log^{\sigma+5-\frac{6\pi}{\alpha}} r}\right).$$

Остальное следует из соотношения (33).

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 4.XI.1974

Կ. Ն. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Անկյան մեջ տրված արագությամբ նվազող մինիմալ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների կառուցումը *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցվում են $\alpha \in (0, 2\pi)$ բացվածքի անկյան մեջ տրված արագությամբ նվազող այնպիսի ամբողջ ֆունկցիաներ, որոնք ունեն այդ արագությամբ թույլատրվող նվազագույն կարգը։ Ցույց է տրվում, որ $\alpha > \pi$ բացվածքի անկյունների դեպքում կառուցված ֆունկցիաները լավագույնն են նաև ըստ տիպի (նորմալ տիպ)։ Որոշ արագությունների դեպքում տիպը լավագույնն է նաև մյուս դեպքերում ($\alpha < \pi$)։

K. N. KHACHATRIAN. *The construction of entire functions of minimal order decreasing in the angle with given rate* (summary)

Integral functions decreasing in the angle of opening $\alpha \in (0, 2\pi)$ with given rate and having minimal possible order are constructed. It is shown that in case when

$\alpha > \pi$ the constructed functions are minimal also in relation to the type (the normal type). For some rates the type is the best in the remaining ($\alpha < \pi$) cases also.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Мандельбройт.* Квазианалитические классы функций, ОНТИ, М.—Л., 1937.
2. *Н. У. Аракелян.* Построение целых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угле, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 3, 1966, 162—191.
3. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИЛ, М., 1962.
4. *Л. А. Тер-Исраелян.* Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 1, 1971, 67—80.
5. *У. К. Хейман.* Мероморфные функции, Изд. „Мир", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 1, 1976 Математика

Б. Л. ГОЛИНСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Введение

Рассмотрим многочлены

$$\Phi_n(z) = \varkappa_n z^n + \cdots; \ \varkappa_n \equiv \varkappa_n(\varphi) > 0, \ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

ортонормированные на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ (сокращенно о.н.м.) относительно 2π-периодической неотрицательной суммируемой функции $\varphi(\theta)$, то есть удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(e^{i\theta})\overline{\Phi_m(e^{i\theta})}\,\varphi(\theta)\,d\theta = \delta_{nm}, \ n=0, 1, 2, \cdots.$$

Функцию $\varphi(\theta)$ называют весом.

Как ведут себя многочлены $\Phi_n(z)$ при $n \to \infty$?

На этот вопрос впервые ответил Г. Сегё (см. [1], гл. XII): если

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \varphi(t)\,dt > -\infty,$$

то равномерно для $|\zeta| \geqslant R > 1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \zeta^{-n}\Phi_n(\zeta) = \{\overline{D}(\zeta^{-1}; \varphi)\}^{-1}; \ \lim_{n\to\infty}\Phi_n(z) = 0 \ \ (|z| \leqslant r < 1), \tag{0.1}$$

где функция Г. Сегё

$$D(z, \varphi) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\ln\varphi(t)\,dt\right\}, \ z = re^{i\theta}.$$

Известно, что

$$D^{-1}(0, \varphi) \equiv \varkappa = \lim_{n\to\infty}\varkappa_n.$$

Граничные значения функции Г. Сегё

$$D(e^{i\theta}; \varphi) = \lim_{r\to 1-0} D(re^{i\theta}, \varphi) = \sqrt{\varphi(\theta)}\exp\left\{\frac{i}{2}\tilde{f}(\theta)\right\},$$

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\,dt, \ f(t) = \ln\varphi(t)$$

существуют для почти всех $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Важное значение в теории о.н.м. имеет задача тауберова типа: возможность замены порядка предельного перехода

$$\lim_{n\to\infty}\{\Phi_n(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\} = \lim_{n\to\infty}\lim_{R\to 1-0}\{\Phi_n(\zeta)\,\zeta^{-n}\} = \lim_{R\to 1+0}\lim\{\Phi_n(\zeta)\,\zeta^{-n}\} =$$

$$= \lim_{R\to 1+0}\{\overline{D}(\zeta^{-1},\varphi\} = \overline{\{D(e^{i\theta};\varphi)\}}^{-1},\ \zeta = Re^{i\theta},$$

то есть получения асимптотического представления (а.п.) для о.н.м.:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}\ \overline{\{D(e^{i\theta},\varphi)\}}^{-1} + o(1)\ \ (n\to\infty) \tag{0.2}$$

равномерно на всей единичной окружности $K_{2\pi}$: $z = e^{i\theta}$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ или на части ее $K_{(\alpha,\beta)}$: $z = e^{i\theta}$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, $[\alpha,\beta]\subset(-\pi,\pi)$.

Более тонкая задача состоит в получении асимптотической формулы (а.ф.)

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}\ \overline{\{D(e^{i\theta},\varphi)\}}^{-1} + \rho_{n,0}(\theta) \tag{0.3}$$

с оценкой (сверху) для $\rho_{n,0}(\theta)$ в зависимости от структурных свойств веса.

Первую задачу (а.п. (0.2)) решил впервые Г. Сегё (в 1921 г.), совершив предельный переход при $R\to 1+0$ в формуле (0.1), но для существования граничных значений функции Г. Сегё потребовалось (при этом методе), чтобы положительный вес был дважды дифференцируем.

В 1931 г. Г. Сегё, опираясь на идеи С. Н. Бернштейна (см. [2]), усовершенствовал свой метод (см. [1], стр. 311) и получил а.ф. (0.3) с $\rho_{n,0}(\theta)\leqslant B(\ln n)^{-\varepsilon}$ при условии, что вес положителен и удовлетворяет условию Дини—Липшица:

$$|\varphi(\theta+\delta)-\varphi(\theta)|\leqslant B_0\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-1-\varepsilon},\ B,\ B_0,\ \varepsilon>0;\ \theta,\ \theta+\delta\in[-\pi,\pi].$$

Такое резкое снижение ограничений на вес оказалось возможным потому, что Г. Сегё производил все вычисления на единичной окружности.

В дальнейшем а.ф. (0.3) для $K_{(\alpha,\beta)}$ при условии, что вес положителен на отрезке $[\alpha,\beta]$ и на нем удовлетворяет условию Дини—Липшица, была доказана Я. Л. Геронимусом (см. [3], стр. 91), а при других и более общих условиях на вес для $K_{2\pi}$ и $K_{(\alpha,\beta)}$— автором (см. [4]). Для о.н.м. на достаточно гладком замкнутом контуре а.ф. при весьма общих условиях была получена П. К. Суетиным (см. [5], [6]).

Х. Хёруп впервые (см. [7]) получил а.п. для производных от о.н.м. в точке $z = e^{i\theta_0}$:

$$\Phi_n'(z_0) = n\,z_0^{n-1}\overline{\{D(z_0;\varphi)\}}^{-1} + o(n) \tag{0.4}$$

при условиях:

(а) $0<m_0\leqslant\varphi(\theta)\leqslant M$, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, (б) $\varphi(\theta)\in V(-\pi,\pi)$ (*функция* $\varphi(\theta)$ с ограниченным изменением на $[-\pi,\pi]$), (в) существует $\tilde f(\theta_0) = \overline{\ln\varphi(\theta_0)}$.

Доказательство (0.4) в [7] связано с обобщением известного неравенства Г. Сегё (см. [1], стр. 314) и с применением тригонометрических сумм Г. Фройда — Т. Ганеллиуса [8], односторонне приближающих функцию $\varphi(\theta)$ из $V(-\pi, \pi)$. Заметим, что при тех же условиях на вес а.п. (0.2) в точке $e^{i\theta_0}$ было ранее получено Г. Фройдом (см. [9]).

На первый взгляд может показаться, что а.п. (0.4) можно получить, продифференцировав обе части формулы (0.1). (Это сделать можно для $|\zeta| \geqslant R > 1$, так как в этой области имеет место равномерная сходимость левой ее части к правой) с последующим предельным переходом на единичную окружность $|\zeta|=1$. Однако при таком методе появляется производная от функции Г. Сегё, которая, будучи регулярной в области $|\zeta| \geqslant R > 1$, может вообще не существовать при $|\zeta|=1$ и для ее существования потребовались бы дополнительные ограничения на вес.

В настоящей работе получена а.ф.

$$\Phi_n'(z) = nz^{n-1} \overline{[D(z; \varphi)]}^{-1} + n \rho_{n,1}(\theta), \quad z = e^{i\theta} \tag{0.5}$$

для $K_{2\pi}$ и $K_{(\alpha, \beta)}$ с применением усовершенствованного метода Г. Сегё.

Это связано с весьма громоздкими вычислениями (даже если в случае первой производной) и с применением теорем конструктивной теории функций вещественной переменной, но зато этот метод позволяет получить а.ф. (0.5) при тех же условиях на вес, при которых получена а.ф. для самих о.н.м. (см. [4]).

В этом смысле здесь проявляется аналогия между результатами X. Хёрупа и Г. Фройда.

Введем некоторые обозначения.

Класс 2π-периодических непрерывных на всей числовой оси функций обозначим через $C_{2\pi}$.

Если $\|G\| = \max\limits_{-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi} |G(\theta)|$, то

$$\Omega(\delta, G) = \max_{|h| \leqslant \delta} \|G(\theta+h) - G(\theta)\|, \quad G(\theta) \in C_{2\pi}.$$

Если $g(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$: $g(\theta) \in C(\alpha, \beta)$, то

$$\|g\|_{(\alpha, \beta)} = \max_{\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta} |g(\theta)|, \quad \omega(\delta, g) = \max_{|h| \leqslant \delta \leqslant \delta_0} \|g(\theta+h) - g(\theta)\|_{(\alpha', \beta')},$$

$$\delta_0 = \min(\alpha' - \alpha, \beta - \beta'). \tag{0.6}$$

Если $F(\theta) \in L_p(-\pi, \pi)$ для всякого p $(1 \leqslant p < \infty)$, то

$$\|F\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^p \, dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \Omega_p(\delta, F) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \|F(\theta+h) - F(\theta)\|_p. \tag{0.7}$$

Известна формула Кристоффеля—Дарбу (см. [1], стр. 300):

$$K_n(z, \zeta; \varphi) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Phi_\nu(z)\overline{\Phi_\nu(\zeta)} = \frac{\Phi_n^*(z)\overline{\Phi_n^*(\zeta)} - \Phi_n(z)\overline{\Phi_n(\zeta)}}{1 - z\overline{\zeta}}, \tag{0.8}$$

где

$$\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

В § 1 настоящей работы применяется следующая *теорема* (*А*) (*см.* [10]). *Для тригонометрических сумм $T_n(\theta)$ порядка $\leqslant n$ таких, что*

$$\|G - T_n\| \leqslant B_1 \varepsilon_n^{(1)}, \quad G(\theta) \in C_{2\pi} \tag{0.9}$$

имеем

$$\|T_n^{(m)}\| \leqslant B_2 \left\{ \varepsilon_n^{(1)} + \Omega^{(m)}\left(\frac{1}{n}, G\right) \right\} n^m, \tag{0.10}$$

m — целое число, $\Omega^{(m)}(\delta, G)$ — m-ый модуль непрерывности в пространстве $C_{2\pi}$, $\Omega^{(1)}(\delta, G) \equiv \Omega(\delta, G)$.

В § 2 применяется локальный аналог теоремы (А):

Теорема (А′) (см. [11]). *Для тригонометрических сумм $t_n(\theta)$ порядка $\leqslant n$ таких, что*

$$\|g - t_n\|_{(\alpha, \beta)} \leqslant B_3 \varepsilon_n^{(2)}, \quad g(\theta) \in C(\alpha, \beta), \tag{0.9′}$$

имеем

$$\|t_n^{(m)}\|_{(\alpha', \beta')} \leqslant B_4(\alpha, \alpha', \beta', \beta) \left\{ \varepsilon_n^{(2)} + \omega^{(m)}\left(\frac{1}{n}, g\right) \right\} n^m, \tag{0.10′}$$

где $\omega^{(m)}(\delta, g)$ — m-ый модуль непрерывности в пространстве $C(\alpha, \beta)$.

Здесь B, B_0, $B_1, \cdots$, а в дальнейшем C_0, $C_1, \cdots$ — различные положительные постоянные. В § 3 постоянные C_k ($k = 1, 2, \cdots$) отличны от постоянных, обозначенных теми же буквами в § 2.

§ 1. Асимптотические формулы для производных от о.н.м. на всем отрезке $[-\pi, \pi]$

Лемма 1.1. *Рассмотрим вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и тригонометрические суммы $T_\nu(\theta)$ порядка $\leqslant \nu$, удовлетворяющие условию*

$$\left| \frac{1}{\varphi(\theta)} - T_\nu(\theta) \right| \leqslant B_5 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad n = k\nu + \nu_0. \tag{1.1}$$

Здесь k, n, ν, ν_0 — целые числа, причем $n \gtrless \nu$, $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(\theta) \in C_{2\pi}$ с помощью тригонометрических сумм порядка $\leqslant n$. Введем новый вес $\psi(\theta) \equiv T_\nu^{-1}(\theta)$, тогда начиная с некоторого $n \geqslant n_0$, имеем

$$0 < \frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} - 1 \leqslant B_6 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \tag{1.2}$$

$$0 < \frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\varphi)} - 1 \leqslant B_7 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \tag{1.3}$$

$$\left|\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} - 1\right| \leqslant B_8 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{1.4}$$

Доказательство. По теореме Г. Сегё (см. [12], стр. 73—76)

$$\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\ln\frac{1}{\varphi(t)} - \ln T_\nu(t)\right]dt\right\}. \tag{1.5}$$

Для достаточно больших $\nu \geqslant \nu_0$ имеем согласно (1.1)

$$T_\nu(t) > 0, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Обозначим

$$\delta_n \equiv \left\|\ln\frac{1}{\varphi} - \ln T_\nu\right\|.$$

Если $0 < m_0 \leqslant \varphi(\theta) \leqslant M$, то для $\nu \geqslant \nu_0$ можно считать, что

$$\frac{1}{2M} \leqslant T_\nu(\theta) \leqslant \frac{2}{m_0}, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{1.6}$$

$$\min_{-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi} T_\nu(\theta) \geqslant \frac{1}{2M}, \quad \min_{-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi} \frac{1}{\varphi(\theta)} = \frac{1}{M}.$$

По неравенству для логарифмов и (1.1) имеем

$$\delta_n \leqslant \frac{B_5}{2M} E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Но

$$1 - B_9\delta_n \leqslant \exp(-\delta_n) \leqslant \frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} \leqslant \exp(\delta_n) \leqslant 1 + B_{10}\delta_n.$$

Последовательность $\left\{\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\right\}\downarrow$, и поэтому она стремится к пределу и при $n \geqslant n_0$

$$\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} \geqslant 1.$$

Этим доказано (1.2).

Для доказательства (1.3) воспроизведем рассуждения Г. Сегё (см. [12], стр. 75).

Имеем (см. [12], стр. 55):

$$\varkappa_n^{-2}(\varphi) = \min_{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n|^2 \varphi(t)\, dt, \quad z = e^{it}.$$

Положим

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n = \frac{1}{\varkappa_n(\varphi)} \Psi_n(z),$$

где $\{\Psi_n(z)\}_0^\infty$ — о. н. м., соответствующие весу $\psi(\theta)$.

В силу выбора $\psi(\theta)$ имеет место тождество Г. Сегё (см. [1], стр. 297)

$$|\Psi_n(e^{i\theta})|^2 = T_\nu(\theta) \quad (n \geqslant \nu). \tag{1.7}$$

Значит

$$\varkappa_n^{-2}(\varphi) \leqslant \varkappa_n^{-2}(\psi)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(e^{it})|^2\varphi(t)\,dt = \varkappa_n^{-2}(\psi)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_\nu(t)|\varphi(t)\,dt.$$

На основании (1.1) можно считать, что

$$\varphi(t)\,T_\nu(t) \leqslant 1 + 2MB_5E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right),\quad \nu > n_0.$$

Поэтому

$$\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} \leqslant \frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\left\{1 + MB_5E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\}. \tag{1.8}$$

Объединяя (1.2) и (1.8), получим (1.3) для $n \geqslant n_0$.

Для доказательства (1.4) исходим из тождества

$$\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} - 1 = \frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa(\varphi)}\left\{\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} - 1\right\} + \left\{\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa(\varphi)} - 1\right\} \tag{1.9}$$

и неравенства (1.3).

Лемма 1.2. *Если вес* $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ *и*

$$\ln n\,E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) = o(1)\quad (n \to \infty), \tag{1.10}$$

то

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \leqslant B_{11},\quad n = 0, 1, 2, \cdots;\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{1.11}$$

Доказательство. Воспроизведем рассуждения Г. Сегё (см. [12], стр. 73—76) и применим лемму 1.1.

Лемма 1.3. *Пусть* $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$, $\psi(\theta) \equiv T_\nu^{-1}(\theta)$. *Тогда*

$$|D^{-1}(e^{i\theta};\varphi) - D^{-1}(e^{i\theta};\psi)| \leqslant B_{12}J(\theta;\eta;f) + B_{13}\ln\frac{1}{\eta}E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) + B_{14}n\eta, \tag{1.12}$$

где

$$J(\theta;\eta;f) = \left|\int_0^\eta [f(\theta+t) - f(\theta-t)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt\right|,\ f(t) = \ln\varphi(t),\ n\eta = o(1). \tag{1.13}$$

Доказательство. Имеем очевидное неравенство

$$|D^{-1}(e^{i\theta};\varphi) - D^{-1}(e^{i\theta};\psi)| \leqslant \| D^{-1}(e^{i\theta},\varphi)| - |D^{-1}(e^{i\theta};\psi)\| + |D^{-1}(e^{i\theta};\varphi)|^{1/2}|D^{-1}(e^{i\theta};\psi)|\,|\arg D^{-1}(e^{i\theta};\varphi) - \arg D^{-1}(e^{i\theta};\psi)|. \tag{1.14}$$

В силу определения граничного значения функции Г. Сегё и выбора веса $\psi(\theta)$ следует, что

$$\left| |D^{-1}(e^{i\theta}, \varphi)| - |D^{-1}(e^{i\theta}; \psi)| \right| = \left| \sqrt{T_\nu(\theta)} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}} \right| \leqslant B_{15} \left| T_\nu(\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varphi(\theta)} \right| \leqslant B_{16} E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right), \tag{1.15}$$

$$\arg D^{-1}(e^{i\theta}; \psi) - \arg D^{-1}(e^{i\theta}; \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln T_\nu(t) - \right.$$

$$\left. - \ln \frac{1}{\varphi(t)} \right| \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}\, dt. \tag{1.16}$$

Отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ разложим на два отрезка:

$$e\colon |\theta - t| \leqslant \eta \quad \text{и} \quad e'\colon \eta < |\theta - t| \leqslant \pi.$$

Теперь интеграл справа в (1.16) представим в виде суммы двух интегралов $J_e(\theta)$ и $J_{e'}(\theta)$, взятых по соответствующим отрезкам.

Так как

$$\int_e \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt = 0,$$

то $J_e(\theta)$ можно представить также в виде суммы двух интегралов:

$$J_e(\theta) = J_{1,e}(\theta) + J_{2,e}(\theta), \tag{1.17}$$

где

$$J_{1,e}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_e [\ln T_\nu(t) - \ln T_\nu(\theta)] \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}\, dt,$$

$$J_2(\theta) = \frac{1}{4\pi} \int_e \left[\ln \frac{1}{\varphi(t)} - \ln \frac{1}{\varphi(\theta)} \right] \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2}\, dt.$$

Но

$$|\ln T_\nu(t) - \ln T_\nu(\theta)| \leqslant \frac{1}{2M} |T_\nu(\theta) - T_\nu(t)|.$$

По неравенству С. Н. Бернштейна

$$|T_\nu(t) - T_\nu(\theta)| < |\theta - t| \, \|T'_\nu\| \leqslant \frac{2}{m_0} \nu |\theta - t|. \tag{1.18}$$

Поэтому

$$|J_{2,e}(\theta)| \leqslant \int_e |\ln T_\nu(t) - \ln T_\nu(\theta)| \left| \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} \right| dt \leqslant B_{17}\, n\eta \tag{1.19}$$

и

$$|J_{1,e}(\theta)| \leqslant \left| \int_e [f(\theta) - f(t)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt \right|. \tag{1.20}$$

Так как из (1.6) следует, что $T_\nu(\theta)$, $\dfrac{1}{\varphi(\theta)} > \dfrac{1}{2M}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, то применяя неравенство для логарифмов, получим следующую оценку для $|J_{e'}(\theta)|$:

$$|J_{e'}(\theta)| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int\limits_{e'}\left|T_\nu(t)-\frac{1}{\varphi(t)}\right|\left|\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant B_k E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)\frac{M}{2\pi}\int\limits_{e'}\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\right|dt \leqslant B_{18}\ln\frac{1}{\eta}\,E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \qquad (1.21)$$

Объединяя (1.14) — (1.18), получим (1.12). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Имеет место следующее неравенство при* $0<\varphi(\theta)\in C_{2\pi}$:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{d}{d\theta}\Phi_n(e^{i\theta})-\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d}{d\theta}\Psi_n(e^{i\theta})\right| \leqslant B_{19}\ln n\, E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \qquad (1.22)$$

Доказательство. Применим легко проверяемое тождество Сегё—Корауса:

$$\Phi_n(e^{i\theta})-\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\Psi_n(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[T_\nu^{-1}(t)-\varphi(t)]\,\Phi_n(e^{it})\,K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)\,dt, \qquad (1.23)$$

где $\psi(\theta)$ и $\{\Psi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ имеют прежние значения.

После дифференцирования (1.23) получим

$$\frac{d}{d\theta}\Phi_n(e^{i\theta})-\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d}{d\theta}\Psi_n(e^{i\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[T_\nu^{-1}(t)-\varphi(t)]\,\Phi_n(e^{it})\frac{d}{d\theta}K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)\,dt. \qquad (1.24)$$

В силу (1.6) и (1.1) имеем

$$|T_\nu^{-1}(t)-\varphi(t)| = \left|\frac{\varphi(t)}{T_\nu(t)}\left(\frac{1}{\varphi(t)}-T_\nu(t)\right)\right| \leqslant 2M^2B_kE_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) = B_{20}E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Так как по (1.6): $\frac{m_0}{2}\leqslant\psi(\theta)\ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ и

$$|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)| \leqslant K_{n-1}^{1/2}(e^{i\theta}, e^{i\theta}; \psi)\, K_{n-1}^{1/2}(e^{it}, e^{it}; \psi),$$

то по известной теореме (см. [3], стр. 54—55)

$$|K_{n-1}(e^{it}, e^{i\theta}, \psi| \leqslant B_{21}n, \ -\pi\leqslant\theta,\ t\leqslant\pi. \qquad (1.25)$$

Представим интеграл в правой части (1.24) в виде суммы двух интегралов: i_1 — по отрезку e: $|\theta-t|\leqslant n^{-1}$ и i_2 — по отрезку e': $n^{-1}\leqslant|\theta-t|\leqslant\pi$.

Воспользуемся известным неравенством О. Сасса*

$$\|P_n^{(m)}(z)\| < n^m\|P_n(z)\|,\ z=e^{i\theta},\ m=1,\ 2,\cdots, \qquad (1.26)$$

$P_n(z)$ — многочлен n-ой степени. Если учесть, что

---

* Легко получаемого из неравенства С. Н. Бернштейна (см. [3], стр. 222).

$$P_n'(z) = \frac{1}{iz}\frac{d}{d\theta} P_n(e^{i\theta}),$$

то с учетом (1.25) получим

$$\left|\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)\right| \leqslant B_{22} n. \tag{1.27}$$

Последнее неравенство, леммы 1.1 и 1.2, неравенства для $\varphi(\theta)$ и $T_\nu^{-1}(\theta)$ позволяют получить следующую оценку:

$$|i_1| \leqslant B_{23}\, n E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{1.28}$$

Рассмотрим интеграл по отрезку e'. Теперь для получения оценки правой части (1.24) продифференцируем обе части формулы Кристоффеля-Дарбу для $K_n(z, \xi; \psi)$ (см. 0.8):

$$\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi) = \frac{ie^{i\theta}[\Psi_n^{*'}(z)\overline{\Psi_n^*(e^{it})} - \Psi_n'(z)\overline{\Psi_n(e^{it})}]}{1 - e^{i(\theta-t)}} +$$

$$+ \frac{ie^{i(\theta-t)} K_n(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)}{1 - e^{i(\theta-t)}}. \tag{1.29}$$

Применим неравенство О. Сасса (см. (1.26) для $|\Phi_n'(z)|$. Получим

$$\left|\frac{d}{d\theta} K_n(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)\right| \leqslant 2 \max_{-\pi<\theta<\pi} |\Psi_n(e^{i\theta})| \frac{n|\Psi_n(e^{it})|}{|e^{i\theta} - e^{it}|} + \frac{|K_n(e^{i\theta}, e^{it}, \psi)|}{|e^{i\theta} - e^{it}|}.$$

Так как

$$|\Psi_n(e^{i\theta})|^2 = T_\nu(\theta) \leqslant \frac{2}{m_0}, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad n > n_0,$$

то с учетом (1.25) будем иметь

$$\left|\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)\right| \leqslant \frac{8}{m_0^2} \frac{n}{|e^{i\theta} - e^{it}|} + \frac{B_{22}(n+1)}{|e^{i\theta} - e^{it}|} \leqslant \frac{B_{23}\, n}{|e^{i\theta} - e^{it}|}.$$

Так как

$$\int\limits_{0 < n^{-1} < |\theta - t| < \pi} \frac{dt}{|e^{it} - e^{i\theta}|} \leqslant B_{24} \ln n,$$

то для оценки интеграла i_2 имеем

$$|i_2| \leqslant B_{25}\, n \ln n\, E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{1.30}$$

Объединяя (1.28) и (1.30), получим (1.22). Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Справедлива следующая оценка при* $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}; \psi)\right| \leqslant B_{26}\, \Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi_0\right), \quad n \geqslant n_0. \tag{1.31}$$

Доказательство. Так как

$$D(e^{i\theta};\ \psi) = T_\nu^{-1/2}(\theta) \exp\left\{\frac{i}{2} \widetilde{\ln \psi(\theta)}\right\},$$

то

$$\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta};\ \psi) = -D(e^{i\theta};\ \psi)\left\{\frac{1}{2}\frac{T_\nu'(\theta)}{T_\nu(\theta)} + i\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{d\theta}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\ln T_\nu^{-1}(t)\,dt\right\}. \tag{1.32}$$

Исходя из того, что

$$\frac{d}{d\theta}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2} = -\frac{d}{dt}\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}$$

и интегрируя по частям, получим

$$\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta};\ \psi) = -\frac{1}{2} D(e^{i\theta};\ \psi)\left\{\frac{T_\nu'(\theta)}{T_\nu(\theta)} + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{dt}[\ln T_\nu(t)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt\right\}. \tag{1.33}$$

Заменим отрезок интегрирования $[-\pi,\ \pi]$ отрезком $[\theta-\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]$, а его представим в виде суммы двух: $[\theta-\tau_n,\ \theta+\tau_n]$ и $[\theta+\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]$. В соответствии с этим интеграл в правой части (1.33) представится в виде суммы двух интегралов

$$J = J_{[\theta-\tau_n,\ \theta+\tau_n]} + J_{[\theta+\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]},$$

а

$$J_{[\theta-\tau_n,\ \theta+\tau_n]} = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n}\frac{T_\nu'(t)-T_\nu'(\theta)}{T_\nu(t)}\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt,\quad J_2 = \int_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n}\frac{T_\nu'(\theta)}{T_\nu(\theta)}\,\frac{T_\nu(\theta)-T_\nu(t)}{T_\nu(t)}\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt. \tag{1.34}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n}\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt = 0.$$

Применяя теорему (А) и условия (1.6), будем иметь

$$|J_1|,\ |J_2| < B_{27}n^2\varepsilon_n\tau_n,\quad \varepsilon_n = E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) + 2\Omega\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{\varphi}\right) \leqslant B_{28}\Omega\left(\frac{1}{n},\ \varphi\right).$$

Пусть $\tau_n = n^{-1}\varepsilon_n^{-1/2}$. Тогда

$$|J| < B_{29}\, n\, \varepsilon_n^{1/2}. \tag{1.35}$$

Рассмотрим

$$J_{[\theta+\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]} = \int\limits_{\theta+\tau_n}^{2\pi+\theta-\tau_n} \frac{d}{dt}[\ln T_\nu(t)] \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\,dt =$$

$$= \ln T_\nu(t) \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\Big|_{\theta+\tau_n}^{2\pi+\theta-\tau_n} + \frac{1}{2}\int\limits_{\theta+\tau_n}^{2\pi+\theta-\tau_n} \ln T_\nu(t)\left[\sin\frac{t-\theta}{2}\right]^{-2} dt. \quad (1.36)$$

Первое слагаемое правой части (1.36) обозначим через $A_1(\theta)$, второе — через $A_2(\theta)$. Применяем снова теорему (А).

После простых вычислений получим

$$|A_1(\theta)| = \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau_n}{2}[\ln T_\nu(\theta+\tau_n) - \ln T_\nu(\theta-\tau_n)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \operatorname{ctg}\frac{\tau_n}{2}\,|\,T_\nu(\theta+\tau_n) - T_\nu(\theta-\tau_n)\,| \leqslant \frac{4M}{\pi}\|T_\nu'\| \leqslant B_{30}\varepsilon_n n. \quad (1.37)$$

Для второго слагаемого имеем

$$|A_2(\theta)| \leqslant B_{31}\int\limits_{\tau_n/2}^{\pi/2} \sin^{-2} t\,dt \leqslant B_{32}\, n\,\varepsilon_n^{1/2} + B_{33}. \quad (1.38)$$

Так как

$$\frac{m_0}{2} \leqslant |D(e^{i\theta},\ \psi)|^2 = \psi(\theta) \leqslant 2M, \quad (1.39)$$

то по теореме (А)

$$\|T_\nu' T_\nu^{-1}\| \leqslant 2MB_2\varepsilon_n n. \quad (1.40)$$

Объединяя (1.33) — (1.40), будем иметь

$$\frac{1}{n}\left|\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta},\ \psi)\right| \leqslant B_{34}\,\varepsilon_n^{1/2} + \frac{1}{n} B_{35}. \quad (1.41)$$

Но $\varepsilon_n \leqslant B_{36}\,\Omega\left(\frac{1}{n},\ \varphi\right)$, $\frac{1}{n} \leqslant B_{37}\,\Omega\left(\frac{1}{n},\ \varphi\right)$, поэтому (1.41) приводит к (1.31). Заметим, что $\tau_n \leqslant B_{38}\,\Omega\left(\frac{1}{n},\ \varphi\right)$ и поэтому при достаточно большом $n\ (\geqslant n_0)$ τ_n достаточно мало и во всяком случае $< \pi$.

Лемма 1.6. *При* $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ *имеем*

$$\frac{1}{n}\left|\frac{d}{d\theta}\,\Psi_n(e^{i\theta})\right| \leqslant B_{39}\,\Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\ \varphi\right) B_{40}, \quad n \geqslant n_0. \quad (1.42)$$

Доказательство. Известны (см. [7]) тождества

$$\Psi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}\,[\overline{D(e^{i\theta},\ \psi)}]^{-1},\quad \{\overline{D(e^{i\theta},\ \psi)}\}^{-1} = D(e^{i\theta},\ \psi)\,T_\nu(\theta). \quad (1.43)$$

Поэтому

$$\frac{d}{d\theta}\,\Psi_n(e^{i\theta}) = ine^{in\theta}[\overline{D'(e^{i\theta},\psi)}]^{-1} + e^{in\theta}\frac{d}{d\theta}[\overline{D(e^{i\theta},\ \psi)}]^{-1}. \quad (1.44)$$

Применяя второе из тождеств (1.43), получим:

$$\frac{d}{d\theta}|\overline{D(e^{i\theta},\psi)}|^{-1}=\frac{d}{d\theta}D(e^{i\theta},\psi)\,T_{\cdot}(\theta)+D(e^{i\theta},\psi)\,T_{\cdot}'(\theta). \tag{1.45}$$

С помощью теоремы (A) и оценок (1.6) будем иметь

$$\left|\frac{d}{d\theta}|D(e^{i\theta},\psi)|^{-1}\right|\leqslant\frac{2}{m_0}\left|\frac{d}{d\theta}D(e^{i\theta},\psi)\right|+B_{41}\,n\,\varepsilon_n. \tag{1.46}$$

Переходя в (1.44) к модулям в обеих частях равенства, применяя оценки (1.46) и (1.39) и лемму 1.5, получим (1.42)

Теорема 1.1. *Пусть* $0<\varphi(\theta)\in C_{2\pi}$ *и*

$$\ln n\,E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)=o(1),\quad n\to\infty. \tag{1.47}$$

Тогда имеет место а. ф. (0.5) *с*

$$|\rho_{n,1}(\theta)|\leqslant B_0\left|J(\theta;\eta;f)+\ln n\,E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)+n\eta+\Omega^{1,2}\left(\frac{1}{n},\varphi\right)\right|,$$

$$n\eta=o(1). \tag{1.48}$$

Доказательство. Применяя тождество (1.44), запишем новое тождество:

$$\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}\Phi_n(e^{i\theta})-ie^{in\theta}\{\overline{De^{i\theta};\varphi)}\}^{-1}=\frac{1}{n}\left\{\frac{d}{d\theta}\Phi_n(e^{i\theta})-\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d}{d\theta}\Psi_n(e^{i\theta})\right\}+$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}-1\right\}\frac{d}{d\theta}\Psi_n(e^{i\theta})+\frac{1}{n}e^{in\theta}\frac{d}{d\theta}\overline{\{D(e^{i\theta};\psi)\}}^{-1}+$$

$$+ie^{in\theta}\left[\overline{\{D(e^{i\theta};\psi)\}}^{-1}-\overline{\{D(e^{i\theta};\varphi)\}}^{-1}\right]. \tag{1.49}$$

Возьмем модули обеих частей (1.49) и применим к каждому слагаемому соответственно леммы 1.4, 1.1 и 1.6, 1.5, 1.3. После этого получим

$$\left|\frac{1}{n}\Phi_n'(z)-z^{n-1}\overline{\{D(z;\varphi)\}}^{-1}\right|\leqslant B_{41}\,|\rho_{n,1}(\theta)|,$$

где $|\rho_{n,1}(\theta)|$ оценивается по (1.48). Теорема 1.1 доказана.

Следствие 1.1. *Если вес* $0<\varphi(\theta)\in C_{2\pi}$ *и выполняются условия:*

$$\lim_{\eta\to0}\ln n\,E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)=0. \tag{1.47'}$$

Равномерно относительно $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\lim_{\eta\to0}J(\theta;\eta;f)=0, \tag{1.50}$$

($J(\theta;\eta;f)$ *имеет значение* (1.13)), *то равномерно относительно* $\theta\in[-\pi,\pi]$ *имеет место а.п.* (0.4) (*это те же условия, при которых имеет место а.п.* (0.2) (*см.* [4]).

Следствие 1.2. *Если вес* $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ *и*

$$\frac{\Omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \pi), \tag{1.51}$$

то для $\theta \in [-\pi, \pi]$ *имеет место а.ф.* (0.5) *с*

$$|\rho_{n,1}(\theta)| \leqslant B_{42}\left\{\int_0^{1/n} \frac{\Omega(t, \varphi)}{t}\,dt + \ln n\,\Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)\right\} \tag{1.52}$$

и

$$|\rho_{n,1}(\theta)| = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Действительно, положим в (1.48) $\eta = n^{-2}$ и учтем, что

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\delta} = \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{dt}{t}, \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\delta}\,\Omega(\delta, \varphi) \leqslant \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{\Omega(t, \varphi)}{t}\,dt = o(1)(\delta \to 0).$$

Заметим также, что по теореме Джексона

$$E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) \leqslant B_{44}\,\Omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right).$$

При $\varphi(\theta) \geqslant \frac{m_0}{2}$ имеем

$$\Omega\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) \leqslant B_{45}\,\Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right).$$

§ 2. Асимптотические формулы для производных от о.н.м. на отрезке $[\alpha, \beta]$

Теорема 2.1. *Если*

$$\varphi(\theta) \leqslant M\,(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi), \quad \frac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi), \tag{2.1}$$

на отрезке $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$:

$$0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta), \quad \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)\ln n = o(1) \tag{2.2}$$

и равномерно относительно $\theta \in [\alpha, \beta]$:

$$\lim_{\eta \to 0} J(\theta, \eta; f) = 0, \quad n\eta = o(0),$$

то для $\theta \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ *имеет место а.ф.* (0.5) *и*

$$|\rho_{n,1}(\theta)| \leqslant C_0\left|J(\theta, \eta; f) + \ln n\,\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) + n\eta\right|, \tag{2.3}$$

$J(\theta, \eta; f)$ *имеет значение* (1.13).

Для доказательства теоремы 2.1 нам потребуется несколько лемм, которые (за исключением первой из них) являются локальными аналогами соответствующих лемм предыдушего параграфа.

Лемма 2.1. *При условиях* (2.1) *имеем*

$$\left|\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}-1\right| \leqslant C_1\Omega_2\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.4}$$

Известно (см. [3], стр. 89—90), что если $F(\theta)\in L_p(-\pi,\ \pi)$, $1 < p < \infty$, то

$$\|U_n(F)-F\|_p \leqslant C_2\,\Omega_p\left(\frac{1}{n},\ F\right). \tag{2.5}$$

Так как

$$U_n\left(\theta,\ \frac{1}{\varphi}\right),\ \frac{1}{\varphi(\theta)} \geqslant \frac{1}{M}\ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi), \tag{2.6}$$

то

$$\delta_{2,n} \leqslant M\left\|\frac{1}{\varphi}-U_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_2 \leqslant C_3\Omega_2\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.7}$$

По (1.5) получим

$$\left|\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}-1\right| \leqslant C_4\Omega_2\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.8}$$

При условии (2.1) имеем (см. [3], стр. 199)

$$\frac{\varkappa(\varphi)}{\varkappa_n(\varphi)}-1 \leqslant C_5\,\Omega_2\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.9}$$

Применяя тождество (1.8), оценки (2.8) и (2.9), получим (2.4). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2 (см. [13]). *При условиях* $\dfrac{1}{\varphi(\theta)}\in L_1(-\pi,\ \pi)$ *и* (2.2) *имеем*

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \leqslant C_5,\ n=1,\ 2,\cdots;\ \theta\in[\alpha',\ \beta']\subset(\alpha,\ \beta). \tag{2.10}$$

При доказательстве остальных лемм мы будем обращаться к доказательству соответствующих лемм предыдущего параграфа.

Лемма 2.3. *При условии* $\varphi(\theta)\leqslant M\,(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$, $\dfrac{1}{\varphi(\theta)}\in L_1(-\pi,\ \pi)$ *и*

$$0<\varphi(\theta)\in C(\alpha,\ \beta),\ \omega\left(\frac{1}{n},\ \varphi\right)\ln\eta^{-1}=o(1) \tag{2.11}$$

имеем для $\theta\in[\alpha_1,\ \beta_1]\subset(\alpha',\ \beta')\subset(\alpha,\ \beta)$ *следующее неравенство:*

$$|D^{-1}(e^{i\theta};\varphi)-D^{-1}(e^{i\theta},\psi)|\leqslant C_6\ln\eta^{-1}\omega\left(\frac{1}{n},\varphi\right)+$$

$$+C_7\Omega_1\left(\frac{1}{n},\frac{1}{\varphi}\right)+C_8 n\eta,\ n\eta=o(1). \tag{2.12}$$

Доказательство. Известно (см. [3], стр. 90), что если $\frac{1}{\varphi(t)}\in L_1(-\pi,\pi)$, $0<\varphi(\theta)\in C(\alpha,\beta)$, то для $\theta\in[\alpha',\beta']\subset(\alpha,\beta)$

$$\left|U_\nu\left(\theta,\frac{1}{\varphi}\right)-\frac{1}{\varphi(\theta)}\right|\leqslant C_9\,\omega\left(\frac{1}{n},\frac{1}{\varphi}\right)\leqslant C_{10}\omega\left(\frac{1}{n},\varphi\right). \tag{2.13}$$

Поэтому

$$||D^{-1}(e^{i\theta};\varphi)|-|D^{-1}(e^{i\theta};\psi)||=\left|\sqrt{U_\nu\left(\theta,\frac{1}{\varphi}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}}\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{M}}\left|U_\nu\left(\theta,\frac{1}{\varphi}\right)-\frac{1}{\varphi(\theta)}\right|\leqslant C_{11}\,\omega\left(\frac{1}{n},\varphi\right). \tag{2.14}$$

Перейдем к оценке разности (1.16). Оценка интеграла $J_\varepsilon(\theta)$ при $\alpha'\leqslant\theta\leqslant\beta'$ производится аналогично тому, как при доказательстве леммы 1.3, только с применением локального аналога неравенства С. Н. Бернштейна — неравенства И. И. Привалова (см. [14], стр. 896—898):

$$\left\|U_\nu'\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_{(\alpha',\beta')}\leqslant C_{12}(\alpha,\alpha',\beta',\beta)\,\nu\left\|U_\nu\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_{(\alpha,\beta)}. \tag{2.15}$$

Будем считать, что при заданном $\theta\in[\alpha',\beta']$ t меняется так, что $|\theta-t|\leqslant\eta\leqslant\delta_0$, $\delta_0=\min(\alpha'-\alpha,\beta-\beta')$. Теперь можно написать:

$$\left|U_\nu\left(\theta,\frac{1}{\varphi}\right)-U_\nu\left(t,\frac{1}{\varphi}\right)\right|=\left|\int_t^\theta U_\nu'\left(\tau,\frac{1}{\varphi}\right)d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\theta-t|\left\|U_\nu'\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_{(\alpha'+\delta_0,\beta'-\delta_0)}. \tag{2.16}$$

В [15] доказано, что если $g(\theta)\in L_1(-\pi,\pi)$, $0<g(\theta)\in C(\alpha,\beta)$, то

$$0<C_{14}(\alpha,\alpha',\beta',\beta)\leqslant U_\nu(\theta,g)\leqslant C_{13}(\alpha,\alpha',\beta',\beta),\ \alpha'\leqslant\theta\leqslant\beta',\ \nu\geqslant n_0. \tag{2.17}$$

Поэтому (2.15) — (2.17) приводят к оценке

$$\left|U_\nu\left(\theta,\frac{1}{\varphi}\right)-U_\nu\left(t,\frac{1}{\varphi}\right)\right|<\nu\,|\theta-t|\,C_{15}(\alpha,\alpha',\beta',\beta)$$

и

$$|J_{2,\varepsilon}(\theta)|<C_{16}\,n\eta. \tag{2.18}$$

Отрезок e' разложим на два, каждый из которых определяется неравенствами: $0<\eta^{-1}\leqslant|\theta-t|\leqslant\delta_0$ и $\delta_0\leqslant|\theta-t|\leqslant\pi$. Так как по свойству сумм Джексона из условия: $\frac{1}{\varphi(t)}\geqslant\frac{1}{M}$ следует, что и $U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{M}$, то по неравенству для логарифмов получим

$$|J_{e'}(\theta)|\leqslant\frac{M}{2\pi}\int\limits_{\eta^{-1}<|\theta-t|<\delta_0}\left|U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)-\frac{1}{\varphi(t)}\right|\left|\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\right|dt+$$

$$+\frac{M}{2\pi}\int\limits_{\delta_0<|\theta-t|<\pi}\left|U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)-\frac{1}{\varphi(t)}\right|\left|\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}\right|dt. \tag{2.19}$$

Воспользуемся неравенством

$$\int\limits_{0<\eta^{-1}<|\theta-t|<\delta_0}\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\right|dt\leqslant C_{17}\ln\eta^{-1} \tag{2.20}$$

и оценкой (2.5). Теперь (2.19) запишется так:

$$|J_{e'}(\theta)|<C_{18}\,\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)\ln\eta^{-1}+C_{19}(\delta_0)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)-\frac{1}{\varphi(t)}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant C_{20}\,\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)\ln\eta^{-1}+C_{21}\,\Omega_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.21}$$

Так как

$$|D^{-1}(e^{i\theta};\psi)|=U_\nu^{-1/2}\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right),\ |D^{-1}(e^{i\theta};\varphi)|=\frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)}},$$

а $\varphi(\theta)\geqslant m_1>0$, $\theta\in[\alpha', \beta']$, то применяя (2.17), получим

$$U_\nu\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right)\leqslant M_1,\ \theta\in[\alpha', \beta']. \tag{2.21'}$$

Применяя неравенства (1.14), оценки (2.18) и (2.14), получим лемму 2.3.

Лемма 2.4. *При условиях* $\frac{1}{\varphi(\theta)}\in L_2(-\pi, \pi)$, $\varphi(\theta)\leqslant M$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$, $0<\varphi(\theta)\in C(\alpha, \beta)$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\frac{1}{n}\left|\frac{d}{d\theta}\Phi_n(e^{i\theta})-\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d}{d\theta}\Psi_n(e^{i\theta})\right|\leqslant C_{22}\ln n\,\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)+C_{23}\Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right),$$

$$\alpha_1\leqslant\theta\leqslant\beta_1,\ [\alpha_1, \beta_1]\subset(\alpha', \beta').$$

Доказательство. Воспроизведем рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых была доказана лемма 1.4. В силу (1.7) и (2.17) имеем для $\theta\in[\alpha', \beta']$

$$\psi(\theta) \equiv U_\nu^{-1}\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right) \geqslant C_{24}, \quad \nu \geqslant n_0. \tag{2.22}$$

Применим локальный аналог неравенства (1.25) (см. [3], стр. 55):

$$|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)| \leqslant C_{25}\, n, \quad \alpha' \leqslant t, \ \theta \leqslant \beta' \tag{2.23}$$

и локальный аналог неравенства О. Сасса (см. (1.26)), который легко получить с помощью локального аналога неравенства С. Н. Бернштейна (см. (2.15)). Получим

$$\left|\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)\right| \leqslant C_{26}(\alpha', \alpha_1, \beta_1, \beta')\, n^2, \quad \alpha_1 \leqslant \theta, \ t \leqslant \beta_1. \tag{2.24}$$

Разложим интеграл в правой части (1.24) на три: $j_1(\theta)$, $j_2(\theta)$, $j_3(\theta)$, соответственно по отрезкам, каждый из которых определяется неравенствами

$$|\theta - t| \leqslant n^{-1}, \quad 0 < n^{-1} \leqslant |\theta - t| \leqslant \delta_1, \quad \delta_1 \leqslant |\theta - t| \leqslant \pi; \quad \delta_1 = \min(\alpha_1 - \alpha', \beta' - \beta_1),$$
$$\theta \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha', \beta').$$

Для оценки первого интеграла применяем (2.10), (2.24) и (2.13). Получим

$$|j_1(\theta)| \leqslant C_{27}\, n \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right). \tag{2.25}$$

Для оценки второго интеграла применяем неравенство (1.29), только вместо $\max|\Psi_n(e^{i\theta})|$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, будет стоять $\max|\Psi_n(e^{i\theta})|$, $\alpha' \leqslant \theta \leqslant \beta'$, и так как

$$|\Psi_n(e^{i\theta})|^2 = U_\nu\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right), \tag{2.26}$$

то

$$\max_{\alpha' \leqslant \theta \leqslant \beta'} |\Psi_n(e^{i\theta})| \leqslant \sqrt{C_{13}(\alpha, \alpha', \beta', \beta)}\,. \tag{2.27}$$

Оценки (2.27), (2.23) (2.13) и (2.20) приводят к оценке

$$|j_2(\theta)| \leqslant C_{28}\, n \ln n\, \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right). \tag{2.28}$$

Для оценки интеграла $j_3(\theta)$ запишем его в таком виде:

$$j_3(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta_1 \leqslant |\theta - t| \leqslant \pi} \left[U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi(t)}\right] \sqrt{\varphi(t)}\, \Phi_n(e^{it}) \times$$
$$\times \frac{\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)}{\sqrt{U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} \sqrt{\frac{\varphi(t)}{U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}}\, dt. \tag{2.29}$$

При $\alpha_1 \leqslant \theta < \beta_1$, $\delta_1 \leqslant |\theta - t| \leqslant \pi$ получим, с учетом (2.26) и (1.29):

$$\sqrt{\frac{\varphi(t)}{U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} \leqslant M, \left|\frac{\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)}{\sqrt{U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}}\right| \leqslant \max_{\alpha_1 < \theta < \beta_1} |\Phi_n(e^{i\theta})| \times$$

$$\times \frac{n\,|\Psi_n(e^{it})|}{|e^{i\theta} - e^{it}| \sqrt{U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} + 2 \max_{\alpha_1 < \theta < \beta_1} |\Psi_n(e^{i\theta})| \frac{|\Psi_n(e^{it})|}{\sqrt{U_\nu\left(t, \frac{1}{\varphi}\right)}} \times$$

$$\times \frac{1}{|e^{it} - e^{i\theta}|^2} \leqslant C_{29}(\delta_1)\, n. \tag{2.30}$$

Теперь применяем оценки (2.30) и (2.5). Имеем

$$|j_3(\theta)| \leqslant C_{30}\, n \left\| U_\nu\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi} \right\|_2 \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(e^{it})|^2 \varphi(t)\, dt \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{31}\, n\, \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right). \tag{2.31}$$

Объединяя (2.25), (2.28) и (2.31), получим лемму 2.4.

Лемма 2.5. *При условии леммы* 2.4 *имеем для* $\theta \in [\alpha', \beta']$

$$\frac{1}{n} \left| \frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}; \psi) \right| \leqslant C_{32}\, \omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right), \quad n > n_0. \tag{2.32}$$

Доказательство. Рассмотрим (1.33), где вместо $T_n(\theta)$ нужно взять $U_\nu\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right)$. Оценки для $J_1(\theta)$ и $J_2(\theta)$ аналогичны прежним, только теперь считаем $\theta \in [\alpha', \beta']$ и полагаем $\varepsilon_n = 2\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)$. Вместо теоремы (А) применяем теорему (А'), а вместо неравенства С. Н. Бернштейна — неравенство И. И. Привалова. Изменится несколько способ получения оценки $A_2(\theta)$. Представим $A_2(\theta)$ в виде

$$A_2(\theta) = A_2^{(1)}(\theta) + A_2^{(2)}(\theta),$$

где

$$A_2^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\tau_n}^{\delta_0} \left[\ln U_\nu\left(\theta + t, \frac{1}{\varphi}\right) - \ln U_\nu\left(\theta - t, \frac{1}{\varphi}\right) \right] \sin^{-2} \frac{t}{2}\, dt,$$

$$A_2^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\delta_0}^{\pi} \left[\ln U_\nu\left(\theta + t, \frac{1}{\varphi}\right) - \ln U_\nu\left(\theta - t, \frac{1}{\varphi}\right) \right] \sin^{-2} \frac{t}{2}\, dt.$$

Так как $\theta \in [\alpha', \beta']$, то в пределах изменения t в $A_2^{(1)}(\theta)$: $\tau_n \leqslant t \leqslant \delta_0$, $\theta \pm t \in (\alpha, \beta)$ (при достаточно большом n). Действительно

$$\tau_n = \frac{1}{n\sqrt{\varepsilon_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n\,\omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\,\varphi\right)} \leqslant C_{33}\,\omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\,\varphi\right)$$

$$\left(\frac{1}{n} \leqslant \sqrt{2}\,C_{33}\,\omega\left(\frac{1}{n},\,\varphi\right)\right),$$

значит $\tau_n < \delta_0$ $(n \geqslant n_0)$. Учитывая (2.17), получим

$$|A_2^{(1)}(\theta)| \leqslant C_{34}\int_{\tau_n}^{\delta_0} \sin^{-2}\frac{t}{2}\,dt \leqslant C_{35}\int_{\tau_n}^{\delta_0} t^{-2}\,dt \leqslant C_{36}\,n\sqrt{\varepsilon_n} + C_{37},$$

$$|A_2^{(2)}(\theta)| \leqslant \sin^{-2}\frac{\delta_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln U_\nu\left(t,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right| dt.$$

Но

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln U_\nu\left(t,\frac{1}{\varphi}\right)\right| dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln U_\nu\left(t,\,\frac{1}{\varphi}\right) - \ln U_\nu\left(\theta_0,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right| dt +$$

$$+ 2\pi\left|\ln U_\nu\left(\theta_0,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right|,$$

$$\left|\ln U_\nu\left(t,\,\frac{1}{\varphi}\right) - \ln U_\nu\left(\theta_0,\frac{1}{\varphi}\right)\right| \leqslant M\left|U_\nu\left(t,\frac{1}{\varphi}\right) - U_\nu\left(\theta_0,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right|.$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln U_\nu\left(t,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right| dt \leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}\left|U_\nu\left(t,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right| dt + 2\pi M\left|U_\nu\left(\theta_0,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right| +$$

$$+ 2\pi\left|\ln U_\nu\left(\theta_0,\,\frac{1}{\varphi}\right)\right|. \tag{2.33}$$

Выбираем $\theta_0 \in [\alpha,\,\beta]$. По (2.17) два последних слагаемых ограничены и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U_\nu\left(t,\,\frac{1}{\varphi}\right) dt \leqslant \left\|U_\nu\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right\|_1 \leqslant \left\|\frac{1}{\varphi}\right\|_1 \leqslant \left\|\frac{1}{\varphi}\right\|_2 \leqslant C_{38}.$$

Таким образом

$$|A_2(\theta)| \leqslant C_{38}\,n\sqrt{\varepsilon_n} + C_{39},\quad \alpha' \leqslant \theta \leqslant \beta'.$$

Заканчиваем доказательство так же, как лемму 1.5.

Лемма 2.6. *Имеем (при условиях леммы 2.4):*

$$\frac{1}{n}\left|\frac{d}{d\theta}\Psi_n(e^{i\theta})\right| \leqslant C_{40}\,\omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\,\varphi\right) + C_{41},\quad \alpha' \leqslant \theta \leqslant \beta',\quad n > n_0.$$

Доказательство. Воспроизводим рассуждения, связанные с доказательством леммы 1.6. Только теперь вместо тригонометрических сумм $T_n(\theta)$ рассматриваем тригонометрические суммы $U_\nu\left(\theta, \frac{1}{\varphi}\right)$. Вместо теоремы (A) — теорему (A′), вместо оценки (1.6) — оценку (2.17), где $C_{14} \equiv M$, а вместо леммы 1.5 — лемму 2.5.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим тождество (1.49). Возьмем модули обеих его частей и применим к каждому слагаемому, соответственно, леммы 2.4, 2.1 и 2.6, 2.5, 2.3. После чего получим неравенство (2.3), то есть теорему 2.1.

Следствие 2.1. *Если выполняются условия*

1) $\varphi(\theta) \leqslant M \ (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi), \ \dfrac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi),$

2) *на отрезке* $[\alpha, \beta]$

$$0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta), \ \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) \ln n = o(1) \ (n \to \infty),$$

3) *равномерно относительно* $\theta \in [\alpha, \beta]$

$$\lim_{\eta \to 0} J(\theta; \eta; f) = 0,$$

то равномерно относительно $\theta \in [\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$ *имеет место а.п.* (0.4).

Следствие 2.2. *При выполнении условий*

1) $\varphi(\theta) \leqslant M \ (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi), \ \dfrac{1}{\varphi(\theta)} \in L_2(-\pi, \pi),$

2) *на отрезке* $[\alpha, \beta]$

$$0 < \varphi(\theta) \in C(\alpha, \beta), \quad \frac{\omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \delta_0),$$

имеем а.ф. (0.5) *и*

$$|\rho_{n,1}(\theta)| \leqslant C_0 \left| \int_0^{1/n} \frac{\omega(t, \varphi)}{t} dt + \ln n\, \omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\varphi}\right) \right|,$$

$$\theta \in [\alpha_1, \beta_1].$$

§ 3. О возможности асимптотического представления производных любого порядка от ортогональных многочленов

В связи с задачами, рассмотренными в §§ 1—2, возникает вопрос: *можно ли считать, что в условиях каждой из теорем* 1.1, 2.1 *имеет место а.п.*

$$\Phi_n^{(m)}(z) = n^m z^{n-m} [\overline{D(z, \varphi)}]^{-1} + o(n^m), \quad z = e^{i\theta} \tag{3.1}$$

для произвольного $m > 1$?

Этот вопрос, как нам кажется, представляет интерес еще и потому, что при условиях каждой из указанных теорем имеет место а.п. (3.1) с $m = 0$ ([4]).

Применяя метод, изложенный в настоящей работе, докажем справедливость а.п. (3.1) при $\theta \in [-\pi, \pi]$ для случая $m = 2$ при условии что вес $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ и $\frac{\omega(t, \varphi)}{t} \in L_1(0, \pi)$.

Случай $m = 2$ *типичен и для общего случая.*

Установим справедливость лемм 3.1, 3.2, 3.3, аналогичных соответственно леммам 1.4, 1.5, 1.6.

Лемма 3.1. *При условиях леммы* 4.1 *имеем*

$$\frac{1}{n^2}\left|\frac{d^2\Phi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2} - \frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d^2\Psi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2}\right| \leqslant C_1 \ln n\, E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{3.2}$$

Доказательство. Имеем тождество

$$\frac{d^2\Phi_n(e^{i\theta})}{d\theta} - \frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Psi_n(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[T_*^{-1}(t) - \varphi(t)\right]\Phi_n(e^{it}) \times$$

$$\times \frac{d^2}{d\theta^2} K_{n-1}(e^{i\theta} e^{it}; \psi)\, dt. \tag{3.3}$$

Воспроизведя рассуждения, с помощью которых получена оценка для $|i_1|$ в лемме 1.4, получим

$$|i_1| \leqslant C_2 n^2 E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{3.4}$$

Для оценки $|i_2|$ продифференцируем обе части тождества (1.29), после чего, применив неравенство С. Н. Бернштейна, получим

$$\left|\frac{d^2}{d\theta^2} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)\right| \leqslant \frac{C_3 n^2}{|e^{i\theta} - e^{it}|} + \frac{C_4 n}{|e^{i\theta} - e^{it}|^2} +$$

$$+ \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{it}|}\left|\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)\right| + \frac{|K_n(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)|}{|e^{i\theta} - e^{it}|^2} +$$

$$+ \left|\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)\right|.$$

Но (см. стр. 63 и 64)

$$\left|\frac{d}{d\theta} K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)\right| \leqslant C_5 |e^{i\theta} - e^{it}|^{-1}, \quad |K_n(e^{i\theta}, e^{it}; \psi)| \leqslant$$

$$\leqslant C_6 n, \quad \theta, t \in [-\pi, \pi].$$

И так как

$$\int\limits_{\frac{1}{n}<|\theta-t|<\pi} \frac{dt}{|e^{i\theta}-e^{it}|} \leqslant C_6 \ln n,\ |e^{i\theta}-e^{it}|^{-1} \leqslant C_7 n \left(\frac{1}{n} \leqslant |\theta-t| \leqslant \pi\right),$$

то

$$|i_2| \leqslant C_8 n^2 \ln n\, E_n\left(\frac{1}{\varphi}\right). \tag{3.5}$$

Объединяя (3.5) и (3.4), получим (3.2).

Лемма 3.2. *При условиях леммы* 1.5 *справедлива оценка*

$$\frac{1}{n^2}\left|\frac{d^2}{d\theta^2} D(e^{i\theta}, \psi)\right| \leqslant C_9 \Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n}, \varphi\right),\ n \geqslant n_0. \tag{3.6}$$

Доказательство: Применяя (1.33) и интегрируя по частям, будем иметь

$$\frac{d^2}{d\theta^2} D(e^{i\theta}, \psi) = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta} D(e^{i\theta}, \psi)\left\{\frac{T'_\nu(\theta)}{T_\nu(\theta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt}[\ln T_\nu(t)] \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\, dt\right\} -$$

$$-\frac{1}{2} D(e^{i\theta}, \psi)\left\{\frac{T''_\nu(\theta)\, T_\nu(\theta) - T'^2_\nu(\theta)}{T^2_\nu(\theta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{dt^2}\, [\ln T_\nu(t)] \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\, dt\right\}. \tag{3.7}$$

Оценка модуля выражения внутри первой фигурной скобки в правой части (3.7) известна и получена при доказательстве леммы 1.5, и поэтому модуль всего первого слагаемого $\leqslant C_{10} n^2 \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)$. На основании теоремы (A) и того, что $T_\nu(\theta) \geqslant \dfrac{1}{2m_0}$, имеем

$$\left|\frac{T''_\nu(\theta)\, T_\nu(\theta) - T'^2_\nu(\theta)}{T^2_\nu(\theta)}\right| < C_{11} n^2 \Omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right).$$

Перейдем к оценке модуля интеграла

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{dt^2}[\ln T_\nu(t)] \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\, dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{T''_\nu(t)\, T_\nu(t) - T'^2_\nu(t)}{T^2_\nu(t)} \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\, dt.$$

Заменим отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ на сумму двух отрезков $[\theta-\tau_n, \theta+\tau_n]$ и $[\theta+\tau_n, 2\pi+\theta-\tau_n]$. Тогда интеграл представится в виде суммы двух интегралов

$$I = I_{[\theta-\tau_n,\ \theta+\tau_n]} + I_{[\theta+\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]},$$

а

$$I_{[\theta-\tau_n,\ \theta+\tau_n]} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n} \frac{T_\nu''(t) - T_\nu''(\theta)}{T_\nu(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n} \frac{T_\nu''(\theta)}{T_\nu(\theta)} \left[\frac{T_\nu(\theta) - T_\nu(t)}{T_\nu(t)}\right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n} \frac{T_\nu'^2(\theta) - T_\nu'^2(t)}{T_\nu^2(t)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\theta-\tau_n}^{\theta+\tau_n} T_\nu'^2(t) \left[\frac{T_\nu^2(t) - T_\nu^2(\theta)}{T_\nu^2(\theta)\, T_\nu^2(t)}\right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt,$$

τ_n имеет то же значение, что и на стр. 65.

Применяя теорему (А), будем иметь

$$|I_1|,\ |I_2|,\ |I_3|,\ |I_4| \leqslant C_{12}\, n^3 \varepsilon_n \tau_n = C_{13}\, n^2 \varepsilon_n^{1/2}.$$

Таким образом

$$|I_{[\theta-\tau_n,\ \theta+\tau_n]}| \leqslant C_{13}\, n^2 \varepsilon_n^{1/2}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим

$$I_{[\theta+\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]} = \int\limits_{\theta+\tau_n}^{2\pi+\theta-\tau_n} \frac{d\tau(t)}{dt} \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\, dt = \tau(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2}\Bigg|_{\theta+\tau_n}^{2\pi+\theta-\tau_n} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\theta+\tau_n}^{2\pi+\theta-\tau_n} \tau(t) \left[\sin \frac{t - \theta}{2}\right]^{-2} dt,\quad \tau(t) = T_\nu'(t)\, T_\nu^{-1}(t). \tag{3.9}$$

Обозначим первое слагаемое в (3.9) через $B_1(\theta)$, второе—через $B_2(\theta)$. Применяя теорему (А), получим

$$|B_1(\theta)| = \left|[\tau(\theta+\tau_n) - \tau(\theta-\tau_n)] \operatorname{ctg} \frac{\tau_n}{2}\right| \leqslant C_{14}\, \|\tau'\| = C_{14} \left\| \frac{T_\nu'' T_\nu - T_\nu'^2}{T_\nu^2} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\, n^2 \varepsilon_n,\quad |B_2(\theta)| \leqslant C_{16}\, \|\tau\| \int\limits_{\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-2} t\, dt \leqslant C_{17}\, n^2 \varepsilon_n^{1/2} + C_{18}\, n.$$

Таким образом

$$|I_{[\theta+\tau_n,\ 2\pi+\theta-\tau_n]}| \leqslant C_{19}\, n^2\, \varepsilon_n^{1/2} + C_{20}\, n. \tag{3.10}$$

Объединяя (3.8) и (3.10), получим (3.6).

Лемма 4.3. *При условиях леммы 1.6 имеем*

$$\frac{1}{n^2}\left|\frac{d^2}{d\theta^2}\Psi_n(e^{i\theta})\right| \leqslant C_{21}\,\Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\varphi\right) + C_{22},\ n \geqslant n_0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Продифференцируем второе тождество (1.43). Получим

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\overline{\{D(e^{i\theta},\psi)\}}^{-1} = \frac{d^2}{d\theta^2}D(e^{i\theta},\psi)\,T_\nu(\theta) + 2\frac{d}{d\theta}D(e^{i\theta},\psi)\,T_\nu'(\theta) +$$

$$+ D(e^{i\theta},\psi)\,T_\nu''(\theta). \tag{3.12}$$

Продифференцируем первое тождество (1.43). Получим

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Psi_n(e^{i\theta}) \equiv -n^2 e^{in\theta}\,\overline{\{D(e^{i\theta},\psi)\}}^{-1} + 2\,ine^{in\theta}\frac{d}{d\theta}\{D(e^{i\theta},\psi)\}^{-1} +$$

$$+ \frac{d^2}{d\theta^2}\overline{\{D(e^{i\theta},\psi)\}}^{-1}\,e^{in\theta}. \tag{3.13}$$

Оценим модуль правой части (3.13), применяя (3.12), лемму 3.2, тождество (1.43), лемму 1.5 и теорему (А). Получим

$$\left|\frac{d^2\Psi_n(e^{i\theta})}{d\theta^2}\right| \leqslant C_{23}\,n^2 + C_{24}\,n^2\,\Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\varphi\right) + C_{25}\,n^2\,\varepsilon_n + C_0\,n^2 \times$$

$$\times\Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\varphi\right) + C_{26}\,n^2\varepsilon_n\Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\varphi\right) + C_{27}n^2\varepsilon_n \leqslant n^2\left\{C_{20}\,\Omega^{1/2}\left(\frac{1}{n},\varphi\right) + C_{21}\right\},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.1. *Если вес* $0 < \varphi(\theta) \in C_{2\pi}$ *и* $\dfrac{\omega(t,\varphi)}{t} \in L_1(0,\pi)$, *то имеет место а.п.* (3.1) *при* $\theta \in [-\pi,\pi]$ *для* $m = 2$.

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{d\theta}\Phi_n(e^{i\theta}) = iz\,\Phi_n'(z),$$

то

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi_n(e^{i\theta}) = -z^2\,\Phi_n''(z) - z\Phi_n'(z).$$

Поэтому

$$\Phi_n''(z) = -z^{-2}\,\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi_n(e^{i\theta}) - z^{-1}\,\Phi_n'(z).$$

Рассмотрим

$$n^{-2}\,\Phi_n''(z) - z^{n-2}\,\overline{\{D(z,\varphi)\}}^{-1} = -z^{-2}\left\{n^{-2}\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi_n(e^{i\theta}) +\right.$$

$$\left. + e^{in\theta}\,\overline{[D(z,\varphi)]}^{-1} - n^{-1}\,z^{-1}\,\Phi_n(z)\right). \tag{3.14}$$

Применяя тождество (1.49), напишем новое тождество

$$\frac{1}{n^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi_n(e^{i\theta}) + e^{in\theta}\,\overline{\{D(e^{i\theta},\varphi)\}}^{-1} = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi_n(e^{i\theta}) - \right.$$

$$\left. -\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Psi_n(e^{i\theta})\right\} + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{\varkappa_n(\varphi)}{\varkappa_n(\psi)} - 1\right\}\frac{d^2}{d\theta^2}\Psi_n(e^{i\theta}) - \tag{3.15}$$

$$-\frac{e^{in\theta}}{n}\left[\overline{\{D(e^{i\theta},\varphi)\}}^{-1} - \overline{\{D(e^{i\theta},\psi)\}}^{-1}\right] +$$

$$+\frac{e^{in\theta}}{n^2}\left[2in\frac{d}{d\theta}\overline{\{D(e^{i\theta},\psi)\}}^{-1} + \frac{d^2}{d\theta^2}\overline{\{D(e^{i\theta},\varphi)\}}^{-1}\right].$$

Применим к модулям слагаемых правой части, соответственно, леммы 3.1, 3.3 и 3.1, 1.3, 1.5, 3.2.

Воспользуемся тождеством (3.14), ко второму слагаемому которого применим теорему 1.1. Таким образом, убеждаемся в справедливости теоремы 3.1.

Харьковский авиационный
институт

Поступила 6.I.1975

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Ասիմպտոտիկ բանաձևեր օրթոգոնալ բազմանդամների ածանցյալների համար (ամփոփում)

Աշխատանքում ստացված են պայմաններ, դրված կշռի վրա, որոնց դեպքում տեղի ունի ասիմպտոտիկ ներկայացում ամբողջ [−π, π] հատվածում և նրա [α, β] մասում բազմանդամների ածանցյալների համար, որոնք օրթոնորմալ են միավոր շրջանագծի վրա տրված կշռի նկատմամբ։

Էականն այն է, որ այդ պայմանները համընկնում են այն պայմանների հետ, որոնց դեպքում գոյություն ունի ասիմպտոտիկ ներկայացում օրթոգոնալ բազմանդամների համար [4]։

Մեթոդը, որը կիրառված է աշխատանքում, պատկանում է Գ. Սեգեին, միայն այդ մեթոդը այստեղ ստացել է իր հետագա զարգացումը և խորացումը կոնստրուկտիվ ֆունկցիաների տեսության որոշ ընդհանուր թեորեմների կիրառման շնորհիվ։

B. L. GOLINSKII. *On the weight under which asymptotic presentation is valid* (summary)

The present work obtaines conditions imposed on the whole segment [—π, π] and on its parts [α, β] for the derivatives of orthogonal polynomials on the unit circle

It is of importance that these conditions are similar to those under which asymptotic presentation for the very orthogonal polynomials [4] exists.

The method used in the work begins with G. Sege, however, here it is developed further and deepened through application of some general theorems of the constructiv theory of functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Сеге*. Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.
2. *С. Н. Бернштейн*. О многочленах, ортогональных в конечном интервале. Соб. соч., т. II, 1954, 7—106.

3. *Я. Л. Геронимус.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., Физматгиз, 1958.
4. *Б. Л. Голинский.* Уточнение асимптотических формул Г. Сегё и С. Н. Бернштейна, Известия вузов, Математика, № 11 (78), 1968, 70—82.
5. *П. К. Суетин.* Некоторые вопросы теории ортогональных многочленов в комплексной области, Автореф. докт. дисс., Новосибирск, 1963.
6. *П. К. Суетин.* Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру, УМН, XXI, вып. 2 (128), 1966, 41—88.
7. *C. Hörup.* An asymptotic formula for the derivatives of orthogonal polynomials on the unit circle, Math. Scand., v, 20, 1967, 32—41.
8. *G. Freud* and *T. Ganelius.* Some remarks on one-sided approximation, Math. Scand., 5, 1957, 276—284.
9. *G. Freud.* Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen, Math. Scand., 5, 1957, 285—290.
10. *С. Б. Стечкин.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 212—242.
11. *Б. Л. Голинский.* О быстроте сходимости последовательности ортогональных многочленов к предельной функции, Укр. матем. журн., 19, № 4, 1967, 11—28.
12. *У. Гренандер, Г. Сегё.* Теплицевы формы и их приложения, М., ИИЛ, 1961.
13. *Я. Л. Геронимус, Б. Л. Голинский.* Асимптотические формулы для ортогональных многочленов, Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. I, 1965, 141—163.
14. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XI, № 1, 1976 Математика

Р. Л. ШАХБАГЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

Статья посвящена исследованию разрешимости краевых задач в полупространстве для эллиптических операторов с параметром второго порядка с бесконечным числом независимых переменных.

Интерес к изучению уравнений в частных производных с бесконечным числом независимых переменных возник в связи с тем, что к таким уравнениям приводит изучение марковских процессов с бесконечномерным пространством состояний, а также задачи квантовой электродинамики, теории турбулентности и ряд других задач.

В работах М. И. Вишика [1], П. М. Блехера и М. И. Вишика [2] изучены некоторые классы эллиптических и параболических операторов, а также псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом независимых переменных. При этом выявлено, что при переходе от конечномерного случая к бесконечномерному в теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов возникает ряд принципиально новых явлений. Так, например, известно, что параметрикс эллиптических дифференциальных операторов порождается суммируемой функцией, в то время как в бесконечномерном случае он порождается мерой в соответствующем пространстве.

Далее, нетривиальным становится вопрос о существовании замыкания рассматриваемых операторов, поскольку в случае бесконечного числа переменных нет естественного скалярного произведения функций в соответствующих функциональных пространствах.

В работе [3] М. И. Вишиком и А. В. Марченко изучена задача Дирихле для эллиптических операторов второго порядка с параметром с бесконечным числом независимых переменных на так называемых CL-многообразиях с краем, а также первая краевая задача для параболических уравнений.

При изучении краевых задач для эллиптических и параболических операторов на многообразиях с краем, как и в конечномерном случае, основную роль играет исследование соответствующей задачи в полупространстве.

В § 1 настоящей статьи вводится ряд функциональных пространств, связанных с изучением поставленной задачи. В § 2 рассматриваются классы символов и порождаемые ими псевдодифференциальные операторы. Третий параграф посвящен постановке краевой задачи и доказательству ее однозначной разрешимости.

§ 1. Функциональные пространства

1°. Пространства H и H_1. Обозначим через H сепарабельное вещественное гильбертово пространство l_2^∞ последовательностей $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, где $x_i \in R^1$ ($i = 1, 2, \cdots$) с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}\,.$$

Пусть $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^{-2} < +\infty$.

H_1 — гильбертово пространство последовательностей вида $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|y\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\, b_i^{-2}} < +\infty.$$

(Очевидно вложение $H \subset H_1$ и справедливость оценки $\|y\|_1 \leqslant C\|y\|$). Через H^N обозначим подпространство пространства H_1 элементов вида $y = (y_1, y_2, \cdots, y_N, 0, 0, \cdots)$. Пусть P^N — ортопроектор H_1 на H^N: $P^N\colon H_1 \to H^N$.

2°. Определение цилиндрической функции. Функцию $f(x)$, заданную на H_1, назовем цилиндрической, если для любого $x \in H_1$ $f(x) = f(P_x^N)$.

Комплекснозначная функция $f(x)$, определенная на H_1, принадлежит пространству C, если она непрерывна в топологии H_1 в каждой точке $x \in H_1$.

Пусть J — множество мультииндексов вида $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots)$ (все α_i — целые и неотрицательные). Пусть, далее

$$D^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Мы скажем, что $f \in C^k$, если $\forall \alpha \in J$, $|\alpha| \leqslant k$, $D^\alpha f \in C$. Пересечение всех C^k обозначим через C^∞.

Класс C_Φ. Через C_Φ обозначим пространство всех финитных цилиндрических функций класса C^∞, точнее для любой функции $f \in C_\Phi$ существует N такое, что $f(x) = f(P^N x)$ и $f(P^N x) \in C_0^\infty(H^N)$.

3°. Пространства CL^s. Обозначим

$$\|f\|_{0,R} = \sup_{\|x\|_1 < R} |f(x)|, \quad 0 < R \leqslant +\infty.$$

Функция $f(x)$ принадлежит пространству CL^0, если $f \in C$ и для нее существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C_\Phi$ такая, что

$$\text{а)} \qquad \sup_n \|f_n\|_{0,\infty} < M < +\infty,$$

$$\text{в)} \qquad \|f_n - f\|_{0,R} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall R,\ 0 < R < +\infty.$$

Положим

$$\|f\|_{s,R} = \sum_{|\alpha|<s} \|D^\alpha f\|_{0,R},\ 0 < R \leqslant +\infty.$$

Функция $f(x) \in CL^s$ ($s \geqslant 0$ — целое), если $f \in C^s$ и для нее существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C_\Phi$ такая, что

$$\text{а}') \qquad \sup_n \|f_n\|_{s,\infty} < M < +\infty,$$

$$\text{в}') \qquad \|f_n - f\|_{s,R} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ 0 < R < +\infty.$$

Сходимость в пространстве CL^s вводится следующим образом: $f_n \in CL^s$ сходится к $f \in CL^s$, если для нее выполнены условия а'), в').

Можно доказать (см. [2]), что пространство CL^s полное и является кольцом.

4°. Пространства $CL^s(H_1^+)$. Обозначим через H_1^+ полупространство

$$H_1^+ = \{x \in H_1,\ x_1 > 0\},\ \text{а}\ \overline{H}_1^+ = \{x \in H_1,\ x_1 \geqslant 0\}.$$

Пусть P^+ — оператор сужения функции, заданной на H_1, на полупространство H_1^+: $P^+ \colon H_1 \to H_1^+$. Иными словами, если $f \in C$, то $P^+ f(x) = f_1(x)$ и $f_1(x) = f(x)$ при $x \in H_1^+$.

Определение. Мы скажем, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $CL^s(H_1^+)$, если она является сужением функции, принадлежащей пространству CL^s.

Замечание 1. Сформулированное определение равносильно тому, что если $f \in CL^s(H_1^+)$, то для нее существует продолжение $lf \in CL^s$.

Сходимость в пространстве $CL^s(H_1^+)$ вводится естественным образом, а именно, пусть

$$\|f\|_{0,R}^+ = \sup_{\substack{\|x\|_1 < R \\ x_1 > 0}} |f(x)|,\ 0 < R \leqslant +\infty$$

и

$$\|f\|_{s,R}^+ = \sum_{|\alpha| < s} \|D^\alpha f\|_{0,R}^+,\ 0 < R \leqslant +\infty.$$

Мы скажем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in CL^s(H_1^+)$ сходится к $f \in CL^s(H_1^+)$, если a″) $\sup\limits_{n} \|f_n\|^{+}_{s,\infty} < +\infty$,

в″) $\|f_n - f\|^{+}_{s,R} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ 0 < R < +\infty$.

При любом целом $s \geqslant 0$ пространство $CL^s(H_1^+)$ — полное и является кольцом.

Замечание 2. Легко убедиться в том, что функции пространства $CL^s(H_1^+)$ непрерывны вместе со своими производными до порядка s включительно в замкнутом полупространстве $\overline{H}_1^+$.

Действительно, возьмем произвольную точку $x = (0, x_2, x_3, \cdots)$, принадлежащую гиперплоскости $x_1 = 0$, и пусть последовательность $\{x^\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $x^\nu = (x_1^\nu, x_2^\nu, \cdots) \in H_1^+$ сходится в метрике H_1 к x: $\|x^\nu - x\|_1 \to$ $\xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, а $f \in CL^s(H_1^+)$, тогда $f(x^\nu) = lf(x^\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} lf(x)$ (здесь в качестве lf взято произвольное гладкое продолжение функции f на H_1. Полагая $f(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f(x^\nu) = lf(x)$, получим, что $f(x)$ непрерывна на $\overline{H}_1^+$.

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что производные $D^\alpha f(x)$, $\forall\alpha$, $|\alpha| \leqslant s$ также непрерывны в $\overline{H}_1^+$.

§ 2. Классы символов и порождаемые ими псевдодифференциальные операторы

1°. Рассмотрим квадратичную форму вида

$$A(\xi, \lambda) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_j\xi_k + \lambda,\quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_{jk} постоянны, матрица $\|a_{jk}\|$ симметрична,

$$a_{11} \neq 0,\ a_{1n} = 0,\ n = 2, 3, \cdots,\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in H. \tag{2.2}$$

Пусть выполнено условие эллиптичности: существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\forall\xi \in H$

$$\gamma^{-1}\|\xi\|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_j\xi_k \leqslant \gamma\|\xi\|^2. \tag{2.3}$$

В силу условия (2.2), считая $a_{11} = 1$, запишем символ $A(\xi, \lambda)$ в виде

$$A(\xi, \lambda) = \xi_1^2 + \sum_{j,k=2}^{\infty} a_{jk}\xi_j\xi_k + \lambda. \tag{2.4}$$

Мы рассматриваем в полупространстве H_1^+ следующую краевую задачу для операторов, порожденных символами (2.4).

Пусть на гиперплоскости $x_1 = 0$ задан оператор первого порядка с коэффициентами, зависящими от x_1, символ которого имеет вид

$$B(x_1, \xi, \lambda) = \xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x_1)\,\xi_k + \lambda, \tag{2.5}$$

где $b = \{b_k(x_1)\} \in H$ при $\forall x_1 \in R^1$, $b_k(x_1) \in C^\infty(R^1)$.

Как показано в работе [3] при изучении первой краевой задачи в полупространстве возникают символы специального вида. В связи с этим, введем в рассмотрение следующие классы символов.

Класс $\sum_A^{q,s}$. Пусть функция $Q(x, \xi, \lambda)$, определенная на

$$H_1(x) \times \{H(\xi)\setminus 0\} \times C_+(\lambda), \text{ где } C_+(\lambda) = \{\lambda \in C,\ \operatorname{Re}\lambda > 0\},$$

принадлежит C^∞, через $Q(x, \xi^N, \lambda) = Q(x, P^N\xi, \lambda)$ обозначим ограничение $Q(x, \xi, \lambda)$ на $H_1(x) \times H^N \times C_+$.

Рассмотрим обратное преобразование Фурье функции $Q(x, \xi^N, \lambda)$:

$$G^N(x, z^N, \lambda) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N, \lambda) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{H^N} e^{i(\xi^N, z^N)} Q(x, \xi^N, \lambda)\, d\xi^N. \tag{2.6}$$

Допустим, далее, что $\forall N \in Z_+$* и $\lambda \in C_+$ соответствующее символу $Q(x, \xi^N, \lambda)$ ядро $G^N(x, z^N, \lambda)$ принадлежит пространству $L_1(H_z^N)$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\xi_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \xi_3, \cdots)$. Введем обозначения:

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N, \lambda)\|_{L_1(H_z^N)} \tag{2.7}$$

и

$$|||Q(x, \xi, \lambda)|||_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda)\, D_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta\, Q(x, \xi, \lambda)\|_0, \tag{2.8}$$

где верхняя грань берется по всевозможным $\alpha \leqslant \alpha_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$, $\operatorname{Re}\lambda > a > 0$. Заметим, что норма (2.8) зависит от параметров α_0, β_0, a.

Положим

$$|||Q(x, \xi, \lambda)|||_{s, R}^{q} = \sum_{|\alpha| < s} \sup_{\substack{\|x\|_1 < R \\ \operatorname{Re}\lambda > a}} |||D_x^\alpha Q(x, \xi, \lambda)|||_0^{(q)}. \tag{2.9}$$

Определение 1. Символ $Q(x, \xi, \lambda)$ принадлежит классу $\sum_A^{q,s}$, если при любых α_0, β_0, a выполняются следующие условия:

1. $|||Q(x, \xi, \lambda)|||_{s,\infty}^{(q)} < +\infty$ и $\forall N\ |||Q(x^N, \xi, \lambda)|||_{s,\infty}^{(q)} < +\infty$;
2. $\lim\limits_{N\to\infty} |||Q(x, \xi, \lambda) - Q(x^N, \xi, \lambda)|||_{s,R}^{(q)} = 0$, $\forall R$, $0 < R < +\infty$.

---

* Z_+ — совокупность всех целых неотрицательных чисел.

Топология в пространстве $\sum_A^{q,s}$ вводится следующим образом. Последовательность символов $Q_k(x, \xi, \lambda) \in \sum_A^{q,s}$ сходится к нулю, если

а) $\sup\limits_k ||| Q_k(x, \xi, \lambda) |||_{s,\infty}^{(q)} < +\infty$,

в) $\lim\limits_{k\to\infty} ||| Q_k(x, \xi, \lambda) |||_{s,R}^{(q)} = 0, \ \forall R, \ 0 < R < +\infty$.

Как доказано в [2], пространство $\sum_A^{q,s}$ полно в смысле введенной сходимости.

В связи с изучением краевой задачи в полупространстве, нам понадобится еще один класс символов.

Класс $'\sum_{A(\xi',\lambda)}^{q,s}$. По определению $P(x, \xi') \in {}'\sum_{A(\xi',\lambda)}^{q,s}$, если выполняются условия 1, 2 определения 1, при этом преобразование Фурье берется по $(\xi')^{N-1} = (\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_N)$, а нормы (2.7) берутся в $L_1(H_{(z')^{N-1}}^{N-1})$, $((z')^{N-1} = (z_2, z_3, \cdots, z_N)$, под знаком нормы в (2.8) стоит дифференцирование по ξ'.

2°. Псевдодифференциальные операторы. Пусть $\varphi \in C_\Phi$, $\varphi(x) = \varphi(x^N) \in C_0^\infty(H^N)$. Псевдодифференциальный оператор $\hat{Q}(x, \xi, \lambda)$, порожденный символом $Q(x, \xi, \lambda)$, определяется следующим образом:

$$\hat{Q}\varphi(x^N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{H^N} Q(x, \xi^N, \lambda)\, \tilde{\varphi}(\xi^N)\, e^{i(x^N, \xi^N)}\, d\xi^N, \tag{2.10}$$

где $\tilde{\varphi}(\xi^N) = F_{x^N \to \xi^N}\, \varphi(x^N)$.

Как доказано в [2] (см. также [3], теорему 2.1), псевдодифференциальные операторы, порожденные символами класса $\sum_A^{q,s}$, продолжаются до непрерывных операторов, действующих в пространствах CL^s, точнее, справедлива

Теорема 1. Оператор $\hat{Q}$, отображающий $C_\Phi(H_1)$ в $CL^\infty(H_1)$ и порожденный символом $Q \in \sum_A^{q,s}$, продолжается до непрерывного оператора

$$\hat{Q}: CL^s(H_1) \to CL^t(H_1),$$

где $s = t + r$, $r = [q] + 2$, при $q > 0$ и $r = 0$, при $q < 0$. При этом справедлива оценка

$$\|\hat{Q} u\|_{t,R} \leqslant K ||| Q |||_{s,R}^{(q)} \left(\|u\|_{s,R+R_1} + (1 + R_1^2)^{-1} \|u\|_{s,\infty}\right),$$

где $R, R_1 \in (0, +\infty)$.

Далее в [2] установлено, что символы класса $\sum_A^{q,s}$ порождают счетно-аддативную меру в H_1.

Теорема 2. ([2], теорема 3.3). Пусть $Q(x, \xi, \lambda) \in \sum_A^{0,0}$ и $G^N(x, z^N, \lambda) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N, \lambda)$, тогда при каждом фиксированном $x \in H_1$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ меры $\mu_N(x, dz, \lambda) = G^N(x, z^N, \lambda)\, dz^N$, порождают счетно-аддитивную меру $\mu(x, dz, \lambda)$ в H_1 и для любой функции $\varphi(x) \in CL^0(H_1)$

$$\hat{Q}(x, \xi, \lambda)\, \varphi(x) = \int \varphi(x - z)\, \mu(x, dz, \lambda). \tag{2.11}$$

3°. Замыкание операторов $\hat{A}(\xi, \lambda)$ и $\hat{B}(x_1, \xi, \lambda)$.

Пусть $\hat{A}(\xi, \lambda)$ и $\hat{B}(x_1, \xi, \lambda)$ — операторы, построенные, соответственно, по символам $A(\xi, \lambda)$ и $B(x_1, \xi, \lambda)$, заданным выражениями (2.4) и (2.5).

Очевидно, операторы $\hat{A}(\xi, \lambda)$ и $\hat{B}(x_1, \xi, \lambda)$ определены на C_Φ и отображают C_Φ в CL^∞:

$$\hat{A}: C_\Phi \to CL^\infty, \quad \hat{B}: C_\Phi \to CL^\infty.$$

Докажем, что операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ допускают замыкание в $CL^0(\overline{H}_1^+)$.

Теорема 3. *Оператор* $\hat{A}$, *порожденный символом* $A(\xi, \lambda)$, *удовлетворяющим условиям* (2.2) *и* (2.3), *допускает замыкание в* $CL^0(\overline{H}_1^+)$.

Доказательство. Заметим, что оператор $\hat{A}$ определен на множестве $C_\Phi(\overline{H}_1^+)$ и отображает его в $CL^0(\overline{H}_1^+)$:

$$\hat{A}: C_\Phi(H_1^+) \to CL^0(\overline{H}_1^+).$$

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $u_n \in C_\Phi(\overline{H}_1^+)$ — последовательность, стремящаяся к нулю в $CL^0(\overline{H}_1^+)$: $u_n \to 0$ в $CL^0(\overline{H}_1^+)$ и $Au_n(x) \to f(x)$ в $CL^0(\overline{H}_1^+)$. Докажем, что $f(x) \equiv 0$, $x \in \overline{H}_1^+$.

С этой целью продолжим функции $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ на полупространство $H_1^- = \{x \in H_1,\ x_1 < 0\}$ гладким образом, а именно, построим продолжение lu_n функций u_n на H_1, принадлежащее $C^2(H_1)$. Как известно, это продолжение имеет следующий вид:

$$lu_n(x) = \begin{cases} u_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), & x_1 \geqslant 0 \\ \sum\limits_{m=1}^{3} c_m u_n\left(-\dfrac{1}{m} x_1, x_2, \cdots, x_n\right), & x_1 < 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

где коэффициенты c_m однозначно определяются из условия равенства производных:

$$\frac{\partial^j}{\partial x_1^j} lu_n \Big|_{x_1 = +0} = \frac{\partial^j}{\partial x_1^j} lu_n \Big|_{x_1 = -0}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Из (2.12) очевидным образом следует, что $\forall\alpha$, $|\alpha|\leqslant 2$

$$\sup_x |D^\alpha lu_n(x)| \leqslant K \sup_x |D^\alpha u_n(x)|, \tag{2.13}$$

где $K>0$ — некоторая постоянная. Отсюда имеем

$$lu_n \to 0 \text{ в } CL^0(H_1) \text{ и } \hat{A}\, lu_n \to lf \text{ в } CL^0(H_1), \tag{2.14}$$

где lf — продолжение функции $f(x)\in CL^0(H_1)$ на пространство H_1. Но тогда можно построить последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$ такую, что

$$\varphi_n \to 0 \text{ в } CL^0(H_1) \text{ и } \hat{A}\varphi_n \to lf \text{ в } CL^0(H_1), \tag{2.15}$$

В самом деле, пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n>0$ — последовательность, стремящаяся к нулю. Для каждой функции lu_n подберем $\varphi_n\in C_\Phi(H_1)$ такую, что

$$|\varphi_n - lu_n| < \varepsilon_n, \left|\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 lu_n}{\partial x_i\,\partial x_j}\right| < \varepsilon_n\gamma_{ij} \quad (i,\ j=1,\ 2,\cdots), \tag{2.16}$$

где $\gamma_{ij}>0$ — постоянные и $\sum\limits_{i,\,j=1}^{\infty}\gamma_{ij}<+\infty$.

Тогда, в силу оценки (2.13) $\varphi_n\to 0$ в $CL^0(H_1)$. Докажем, что $\hat{A}\varphi_n\to lf$ в $CL^0(H_1)$. Имеем

$$\hat{A}\varphi_n = \hat{A}\, lu_n + \hat{A}(\varphi_n - lu_n). \tag{2.17}$$

Оценим

$$|\hat{A}(\varphi_n - lu_n)| = \left|\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2(\varphi_n - lu_n)}{\partial x_i\,\partial x_j} + \lambda(\varphi_n - lu_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \sum_{i,\,j=1}^{n} |a_{ij}|\,\gamma_{ij} + |\lambda|\,\varepsilon_n \leqslant K\varepsilon_n \sum_{i,\,j=1}^{\infty}\gamma_{ij} + |\lambda|\,\varepsilon_n \leqslant (K_1+|\lambda|)\,\varepsilon_n.$$

При выводе этой оценки мы воспользовались неравенством (2.16). Переходя к пределу в (2.17), мы получим, что $\hat{A}\varphi_n\to lf$ в $CL^0(H_1)$.

Как установлено в [2] (см. теорему 1.1) оператор $\hat{A}$, определенный на $C_\Phi(H_1)$ с символом, удовлетворяющим условию (2.3), допускает замыкание в $CL^0(H_1)$. Следовательно, из (2.15) вытекает, что $lf\equiv 0$ и, значит, $f(x)\equiv 0$. Теорема доказана.

Докажем теперь, что аналогичным свойством обладает оператор $\hat{B}$, а именно, справедлива

Теорема 4. *Оператор $\hat{B}$, порожденный символом* (2.5), *допускает замыкание в CL^0.*

Доказательство. Легко видеть, что символ $B(x_1, \xi, \lambda) \in \Sigma_{\Lambda}^{1+\varepsilon, s}$, где $\varepsilon > 0$, а $s \geqslant 0$ — любое целое число. Действительно, при достаточно больших $\|\xi\|$ справедливо неравенство

$$|A^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda)\, D_{x_1}^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} B(x_1, \xi, \lambda)| \leqslant K \|\xi\|^{-q+1},$$

где K — постоянная, откуда следует конечность нормы

$$\|| B(x_1, \xi, \lambda) \||_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \| A^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda)\, D_{x_1}^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} B(x_1, \xi, \lambda) \|_0 < +\infty$$

и норм $\|| B(x_1, \xi, \lambda) \||_{s, R}^{(q)}$ для любого $0 < R < +\infty$, $s \geqslant 0$, если положить $q = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Но тогда как установлено в [2], при $s > 3 + \varepsilon$ оператор $\hat{B}$ допускает замыкание в CL^0. Теорема доказана.

§ 3. Постановка и решение краевой задачи

1°. Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, действующий следующим образом:

$$\mathfrak{M} u(x) = \{\hat{A} u(x),\ x \in H_1^+,\ Bu|_{x_1=0}\}. \tag{3.1}$$

Как доказано выше (см. теоремы 3 и 4) операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ допускают замыкание в CL^0. Область определения замыкания оператора $\mathfrak{M}$ обозначим через $\Omega_{\mathfrak{M}}$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\hat{A} u(x) = f(x),\ \ x \in H_1^+, \tag{3.2}$$

$$\hat{B} u|_{x_1=0} = g(x'),\ \ x' \in H_1', \tag{3.3}$$

где $u \in \Omega_{\mathfrak{M}}$, $f \in CL^0(H_1^+)$ — заданная функция, $x' = (x_2, x_3, \cdots)$ $g(x')$ — функция, определенная на гиперплоскости $H_1' = \{x \in H_1,\ x_1 = 0\}$.

Рассмотрим соответствующее (3.2) однородное уравнение

$$\hat{A} u(x) = 0,\ \ x \in H_1^+. \tag{3.2'}$$

Пусть $u \in C_{\text{ц}}(H_1^+)$, т. е. $u(x) = u(P^N x)$. Произведем в (3.2′) и (3.3) преобразование Фурье по переменным $(x')^{N-1} = (x_2, x_3, \cdots, x_N)$. Имеем

$$-\frac{d^2 \tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1})}{dx_1^2} + \left[\sum_{j, k=2}^{N} a_{jk} \xi_j \xi_k + \lambda\right] \tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1}) = 0,\ x_1 > 0; \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{i} \frac{d\tilde{u}(0, (\xi')^{N-1})}{dx_1} + \left[\sum_{k=2}^{N} b_k(0)\xi_k + \lambda\right] \tilde{u}(0, (\xi')^{N-1}) = \tilde{g}((\xi')^{N-1}), \tag{3.5}$$

где $\tilde{u}$ — преобразование Фурье функции $u(x_1, (x')^{N-1})$ по $(x')^{N-1}$:

$$\tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1}) = F_{(x')^{N-1} \to (\xi')^{N-1}} u(x_1, (x')^{N-1}) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N-1}{2}} \int\limits_{H^{N-1}} e^{-i((x')^{N-1}, (\xi')^{N-1})} u(x_1, (x')^{N-1}) d(x')^{N-1},$$

$$\tilde{g}((\xi')^{N-1}) = F_{(x')^{N-1} \to (\xi')^{N-1}} g(P^N x').$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.4) имеет вид

$$\tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1}, \lambda) = C_1^N((\xi')^{N-1}, \lambda) e^{-S_N x_1} + C_2^N((\xi')^{N-1}, \lambda) e^{S_N x_1}, \quad (3.6)$$

где

$$S_N = \left(\sum_{j,\, k=2}^{N} a_{jk} \xi_j \xi_k + \lambda \right)^{1/2},$$

C_1^N и C_2^N — произвольные постоянные, зависящие от $(\xi')^{N-1}$ и λ как от параметра. Поскольку $\operatorname{Re} \lambda > 0$, а символ $A(\xi, \lambda)$ удовлетворяет условию эллиптичности, то стремящееся к нулю при $x_1 \to +\infty$ решение найдем из (3.6), полагая $C_2^N \equiv 0$. Подставляя $\tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1}, \lambda) = C_1^N (\xi')^{N-1}, \lambda) e^{-S_N x_1}$ в граничное условие (3.5) и требуя его выполнения, найдем C_1^N. Действительно

$$-\frac{1}{i} S_N C_1^N + \left(\sum_{k=2}^{N} b_k(0) \xi_k + \lambda \right) C_1^N = \tilde{g}(\xi')^{N-1}),$$

откуда

$$C_1^N (\xi')^{N-1}, \lambda) = \frac{\tilde{g}((\xi')^{N-1})}{iS_N + \sum\limits_{k=2}^{N} b_k(0) \xi_k + \lambda}. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получим

$$\tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1}, \lambda) = \frac{\tilde{g}((\xi')^{N-1})}{i S_N + \sum\limits_{k=2}^{N} b_k(0) \xi_k + \lambda} e^{-S_N x_1}. \quad (3.8)$$

Таким образом, $F^{-1}_{(\xi')^{N-1} \to (x')^{N-1}} \tilde{u}(x_1, (\xi')^{N-1}, \lambda)$ является решением задачи (3.2′), (3.3) при условии

$$iS_N + \sum_{k=2}^{N} b_k(0) \xi_k + \lambda \neq 0, \quad |(\xi')^{N-1}| + |\lambda| \neq 0.$$

2°. Укажем идею построения решения задачи (3.2), (3.3).

По аналогии с конечномерным случаем (см. [4]), вначале рассмотрим однородную задачу (3.2′), (3.3). Ее решение будем искать в виде

$$v(x) = P^{+} \, ' \frac{e^{-S(\xi', \lambda) x_1}}{iS(\xi', \lambda) + (b^{(1)}(0), \xi') + \lambda} g \tag{3.9}$$

в предположении, что

$$iS(\xi', \lambda) + (b^{(1)}(0), \xi') + \lambda \neq 0 \text{ при } \|\xi'\| + \lambda \neq 0, \tag{3.10}$$

где

$$S(\xi', \lambda) = (\sum_{j, k \geq 2} a_{jk} \xi_j \xi_k + \lambda)^{1/2}, \quad b^{(1)}(0) = (b_2(0), \ b_3(0), \cdots).$$

Построим частное решение уравнения (3.2). С этой целью продолжим функцию $f(x)$ на H_1 с сохранением гладкости и обозначим это продолжение через lf ($lf \in CL^0$).

Пусть $u_0(x)$ — частное решение уравнения (3.2) вида

$$u_0(x) = {}^{*} A^{-1}(\xi, \lambda) \, lf. \tag{3.11}$$

Применим к этой функции граничный оператор, имеем

$$\overset{*}{B} u_0|_{x_1=0} = g_1(x'). \tag{3.12}$$

Представим решение задачи (3.2), (3.3) в виде

$$u = u_0 + u_1,$$

тогда, учитывая (3.12), для u_1 получим следующую задачу:

$$\overset{*}{A} u_1(x) = 0, \quad x \in H_1^{+}, \tag{3.13}$$

$$\overset{*}{B} u_1|_{x_1=0} = g(x') - g_1(x'). \tag{3.14}$$

Воспользовавшись представлением (3.9), решение задачи (3.13), (3.14) запишем следующим образом:

$$u_1(x) = P^{+} \, {}^{*} \frac{e^{-Sx_1}}{iS + (b^{(1)}(0), \xi') + \lambda} (g - g_1). \tag{3.15}$$

Таким образом, естественно искать решение u нашей задачи в виде

$$u(x) = P^{+} \left[{}^{*} A^{-1}(\xi, \lambda) \, lf + {}^{*} \frac{e^{-S(\xi', \lambda) x_1}}{iS(\xi', \lambda) + (b^{(1)}(0), \xi') + \lambda} (g - g_1) \right]. \tag{3.16}$$

3°. Обозначим через Ω_A область определения замыкания оператора $\overset{*}{A}$. Справедлива

Лемма 1. *Оператор $P^{+} \overset{*}{A}{}_0^{-1} l$ отображает пространство $CL^2(H_1^{+})$ в $CL^2(H_1^{+}) \cap \Omega_A$:*

$$P^{+} \overset{*}{A}{}_0^{-1} l: CL^2(H_1^{+}) \to CL^2(H_1^{+}) \cap \Omega_A. \tag{3.17}$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\colon CL^2(H_1)\to CL^2(H_1^+).$$

Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n\in C_\Phi(H_1)$ сходится к φ в пространстве $CL^2(H_1)$. Рассмотрим последовательность $\{P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно

$$\psi_n(x^n)=P^+(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{H^n}e^{i(\xi^n,x^n)}A^{-1}(\xi^n,\lambda)\tilde{\varphi}_m(\xi^n)\,d\xi^n$$

принадлежит $CL^\infty(H_1^+)\subset CL^2(H_1^+)$. Поскольку

$$A^{-1}\in\Sigma_A^{-2+\varepsilon,s}\ (\varepsilon>0)\ \text{и}\ \varphi_n\to\varphi\ \text{в}\ CL^2(H_1),$$

то в силу теоремы 1

$$\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\varphi_n\to\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\varphi\ \text{в}\ CL^2(H_1).\tag{3.18}$$

Нам надо доказать, что $\psi_n(x^n)\to\psi$ в $CL^2(H_1^+)$.

С этой целью продифференцируем ψ_n, имеем

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\varphi_n=P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_k}\right),\ k=1,2,\cdots,$$

откуда, в силу (3.18), вытекает, что

$$\psi_n\to\psi=P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\varphi\ \text{в}\ CL^1(H_1^+).\tag{3.19}$$

Совершенно аналогично можно убедиться, что сходимость имеет место также в $CL^2(H_1^+)$. Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно заметить, что оператор продолжения l отображает пространство $CL^2(H_1^+)$ в $CL^2(H_1)$. Действительно, поскольку $\psi_n\in\Omega_A$ и в силу (3.19), получаем

$$P^+\overset{\blacktriangle}{A}\circ l\colon\ CL^2(H_1)\to CL^2(H_1)\cap\Omega_A.$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Совершенно аналогично можно доказать, что оператор $P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\circ l$ отображает непрерывным образом пространство $CL^0(H_1^+)$ в себя.

Замечание 4. Как известно [5], в конечномерном случае оператор $P^+\overset{\blacktriangle}{A}{}^{-1}\circ l$ не зависит от выбора продолжения. В этом просто убедиться, рассматривая оператор на цилиндрических функциях, а затем совершить предельный переход в пространстве $CL^0(H_1^+)$.

Из доказанной леммы, теоремы 2 и замечания 3 непосредственно вытекает

Теорема 5. *Для любого $\lambda \in C_+$ существует счетно-аддитивная мера $\mu(dz, \lambda)$ в H_1 такая, что для любого $f \in CL^0(H_1^+)$ имеет место представление*

$$P^+ \hat{A}^{-1} lf(x) = P^+ \int_{H_1} lf(x - z)\, \mu(dz, \lambda). \tag{3.20}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости утверждения теоремы, достаточно заметить, что $A^{-1}(\xi, \lambda) \in \sum_A^{-2+\varepsilon, 0} \subset \sum_A^{0, 0}$ и воспользоваться теоремой 2.

4°. Перейдем к рассмотрению второго слагаемого представления (3.16) решения задачи (3.2), (3.3):

$$u_1(x) = P^+ \, \hat{} \, \frac{e^{-Sx_1}}{iS + (b^{(1)}(0), \xi') + \lambda} (g - g_1).$$

Обозначим символ этого оператора (представляющего собой оператор типа поверхностного потенциала) через $B_1(x_1, \xi', \lambda)$.

Лемма 2. *Оператор $P^+\hat{B}_1$ отображает непрерывным образом пространство $CL^0(H_1')$ в пространство $CL^0(H_1^+)$.*

Доказательство. Возьмем сходящуюся в $CL^0(H_1)$ последовательность $\{\varphi_n(x')^{n-1})\}_{n=2}^{\infty}$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1')$ и рассмотрим последовательность

$$\psi_n(x^n) = P^+ \hat{B}_1 \varphi_n = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} P^+ \int e^{i((\xi')^{n-1}, (x')^{n-1})} B_1(x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \times$$
$$\times \tilde{\varphi}_n((\xi')^{n-1})\, d(\xi')^{n-1}.$$

Поскольку

$$|S(\xi', \lambda)| \leqslant K(\|\xi'\| + |\lambda|^{1/2}),$$

где $K > 0$ — постоянная и $\operatorname{Re} S > 0$, то $B_1 \in {}'\sum_{A(\xi', \lambda)}^{-1+\varepsilon, s}$ $(s \geqslant 0$ — любое$)$ при $x_1 > 0$.

Заметим, далее, что для любого $\alpha \in J\ \partial^\alpha_{(\xi')^{n-1}} B_1(x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \in$ $\in L_1(H^{n-1}_{(\xi')^{n-1}})$, откуда вытекает, что ядро оператора $\hat{B}_1$:

$$G_1(x_1, (z')^{n-1}, \lambda) = F^{-1} B_1(x, (\xi')^{n-1}, \lambda) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int e^{i((\xi')^{n-1}, (x')^{n-1})} B_1(x_1, (\xi')^{n-1}, \lambda)\, d(\xi')^{n-1}$$

принадлежит $L_1(H^{n-1}_{(z')^{n-1}})$, и $z_k^m G_1 \in L_1(H^{n-1}_{(z')^{n-1}}$, $m > 0$ — любое, $k = 2, 3, \cdots, n-1$, при этом

$$\int |G_1(x_1, (z')^{n-1}, \lambda)|\, d(z')^{n-1} \leqslant K_1,$$

$$\sup_{k\geq 2} \int |z_k^2 G_1, (x_1 (z')^{n-1}, \lambda)| \, d(z')^{n-1} \leqslant K_2,$$

где константы K_1 и K_2 от x_1 не зависят. Отсюда, аналогично тому, как это было показано в [2], можно вывести, что последовательность $\{\psi_n (x^n)\}$ сходится в $CL^0 (H_1^+)$.

Лемма доказана.

Замечание 5. Совершенно аналогично доказывается, что оператор $P^+ \hat{B}_1$ отображает пространство $CL^2 (H_1^{'})$ в $CL^2 (H_1^+)$.

Из доказанной леммы и теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 6. *Для любого* $\lambda \in C_+$ *существует счетно-аддитивная мера* $\mu_1 (x_1, dz', \lambda)$ *в* H_1 *такая, что для любого* $g \in CL^0 (H_1^{'})$ *имеет место представление*

$$P^+ \hat{B}_1 g(x') = P^+ \int_{H_1^{'}} g (x' - z') \, \mu_1 (x_1, dz', \lambda). \tag{3.21}$$

5°. В этом пункте будет установлен основной результат статьи, а именно, доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи (3.2), (3.3).

Введем обозначения

$$\|f\|_{C(H_1^+)} = \sup_{x \in H_1^+} |f(x)|,$$

$$\|g\|_{C(H_1^{'})} = \sup_{x' \in H_1^{'}} |g(x')|.$$

Теорема 7. *Пусть операторы* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *с символами, задаваемыми формулами* (2.4), (2.5), *удовлетворяют условиям* (2.3), (3.10).

Тогда при любом $\lambda \in C_+$ *и для любых функций* $f \in CL^0 (H_1^+)$ *и* $g \in CL^0 (H_1^{'})$ *существует единственное решение* $u(x)$ *задачи* (3.2), (3.3), *принадлежащее пространству* $CL^0 (H_1^+) \cap \Omega_{\mathfrak{M}}$ *и определяемое формулой* (3.16). *При этом для любого* λ, $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_0 > 0$ (λ_0 — *произвольное число*) *имеет место оценка*

$$\|u\|_{C(H_1^+)} \leqslant K (\|f\|_{C(H_1^+)} + \|g\|_{C(H_1^{'})}), \tag{3.22}$$

где K — *постоянная, не зависящая от* u *и* λ.

Доказательство. Тот факт, что функция $u(x)$, определяемая формулой (3.16), является решением задачи (3.2), (3.3), проверяется непосредственно (вначале надо проверить его на цилиндрических функциях, а затем совершить предельный переход в CL^0).

Оценка (3.22) следует из замечания 3, леммы 2 и неравенства

$$\|g_1\|_{C(H_1^{'})} = \|\hat{B} u_0|_{x_1=0}\|_{C(H_1^{'})} \leqslant K_1 \|f\|_{C(H_1^+)},$$

справедливого при любом $\lambda \in C_+$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_0 > 0$.

Из оценки (3.22) очевидно вытекает единственность решения задачи.

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет,
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.VI.1975

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Եզրային խնդիր կիսատարածությունում անվերջ թվով անկախ փոփոխականներից կախված երկրորդ կարգի էլիպտիկ տիպի օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրված է եզրային խնդիրը կիսատարածությունում անվերջ թվով անկախ փոփոխականներից կախված երկրորդ կարգի էլիպտիկ տիպի հավասարման համար, կախված կոմպլեքս պարամետրից։

Ապացուցված է ուսումնասիրվող խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմ CL տիպի ֆունկցիոնալ տարածություններում։

R. L. SHAHBAGIAN. *The boundary problem on the half-plane for elliptic operators of second order with infinitely many independent variables* (summary)

The paper investigates the boundary problem on the half-plane for elliptic equation of second order (with infinitely many independent variables) depending on a comlex parameter.

The existance and uniqueness theorem is proved in CL type function spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик.* Параметрикс эллиптических операторов с бесконечным числом независимых переменных, УМН, XXVI, вып. 2 (158), 1971, 155—174.
2. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.
3. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Краевые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразиях с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
4. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX, вып. 3 (117), 1964, 53—161.
5. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области УМН, XX, вып. 3 (123), 1965, 89—152.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS