

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՏԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԺՍԱՆԴՐՑԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՑԱՆ
Ի. Գ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՆՑԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՑԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՑԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՑԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոգվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոգվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոգվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական Հիշգրիտի հատուկ որոշումով։

2. Հոգվածները պետք է ներկայացվեն գլխավոր տեղեկագրով, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոգվածին առհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակներին հոգվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծերով վերևում։ Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոգվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոգվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոգվածի անունը, ամսագրերը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Մրցագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ քան շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոգվածը գերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոգվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոգվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոգվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոգվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր. սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале *Известия АН Армянской ССР*, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция *Известий АН Армянской ССР*, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DՅՐԲԱՏԻԱՆ

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespaced, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

М. М. ДЖРБАШЯН, Р. А. БАГИЯН

ՄԱՍ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԵՎ ՄԵՐԱՆԵՐԻ, ԱՍՏՈՑԻՈՐԵՐԱՆԱԿԱՆ ՄԱՍ ԲԱՍԿԱՆ ՄԱՍԻՆ ՄԻՏՏԱԳ—ԼԵՓՓԼԵՐԱ

Класс целых функций типа Миттаг—Леффлера

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{p}\right)} \quad (0 < p < +\infty, -\infty < \mu < +\infty) \quad (1)$$

порядка p и типа 1, их замечательные асимптотические свойства послужили основой в построении гармонического анализа в собственной комплексной области, теории представлений целых и аналитических функций конечного роста [1], и лишь недавно, в некоторых других задачах анализа [2], [3].

В настоящей статье приводятся ряд новых результатов о свойствах и интегральных представлениях этих функций и, в частности, устанавливаются явные выражения для конечных на полуоси $[0, +\infty)$ мер, служивших функциями распределения для характеристических функций вида $\Gamma(\mu) E_p(-ix, \mu)$.

В § 1 статьи, имеющем вспомогательный характер, сначала приводятся некоторые предварительные сведения, необходимые нам для дальнейшего изложения. Затем для любого p ($1 < p < +\infty$) и μ ($-\infty < \mu < +\infty$) посредством одного специального контурного интеграла вводится в рассмотрение целая функция $\Phi_{p, \mu}(s)$. Здесь приводятся леммы 1, 2 и 3, где устанавливается явный вид разложения этой функции в ряд Маклорена, точные значения для ее порядка $\lambda = \frac{p}{p-1}$ и

типа $\sigma = (1 - p^{-1}) p^{-\frac{1}{p-1}}$ и, наконец, доказывается, что на полуоси $0 \leq \tau < +\infty$ она убывает не менее как $\exp\{-c\tau^c\}$, где $c > 0$ — некоторая постоянная.

В § 2 сначала доказываются теоремы 1 и 2 о вполне монотонности и, следовательно, представимости функций типа $E_p(-x; \mu)$ ($1 < p < +\infty, \frac{1}{p} \leq \mu < +\infty$) интегралом Лапласа—Стилтьеса

$$E_p(-x; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-x\tau} d\Psi_{p, \mu}(\tau), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2)$$

где $\Psi_{p, \mu}(\tau)$ — некоторая конечная мера на полуоси $[0, +\infty)$.



Далее, на основании асимптотических свойств функций $E_p(z; \mu)$ ($1 < p < +\infty$, $-\infty < \mu < +\infty$), пользуясь также известной теоремой А Винера—Пэли, доказывается основная теорема 3.

Согласно теореме 3, эти функции на всей плоскости z представимы посредством функции $\Phi_{p, \mu}(\tau)$ интегралом Лапласа

$$E_p(z; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \Phi_{p, \mu}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

причем для значений $\frac{1}{p} \leq \mu < +\infty$ на полуоси $0 \leq \tau < +\infty$ $\Phi_{p, \mu}(\tau) \geq 0$.

Отсюда непосредственно следует, что в этих условиях функция

$$\Gamma(\mu) E_p(-ix; \mu) \left(1 < p < +\infty, \frac{1}{p} \leq \mu < +\infty \right)$$

является характеристической функцией распределения

$$\Gamma(\mu) \Psi_{p, \mu}(\tau) = \Gamma(\mu) \int_0^{\tau} \Phi_{p, \mu}(t) dt, \quad 0 \leq \tau < +\infty. \quad (4)$$

Теорема 3 позволяет нам установить ряд других результатов—о явном разрешении одной проблемы моментов типа Стильтьеса (теоремы 4 и 5), о неулучшаемости условия $\mu \geq \frac{1}{p}$ для вполне монотонности функции $E_p(-x; \mu)$ для $p \geq 1$ (теорема 6).

Наконец, устанавливается существенное обобщение самой теоремы 3—о явном интегральном представлении двух функций типа $E_{jp}(z; \mu_j)$ ($j = 1, 2$) посредством той же функции типа $\Phi_{p, \mu}(\tau)$.

В заключение отметим, что отдельные частные и менее полные результаты об интегральном представлении самой функции Миттаг—Леффлера $E_p(z) \equiv E_p(z; 1)$ были получены ранее Г. Поллардом ([4], [5]) и А. Уинтером ([6], [7]). Соответствующие более конкретные указания о результатах этих авторов, полученных ими существенно иными методами, будут приведены в тексте статьи.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1. Целые функции типа Миттаг—Леффлера определяются посредством разложения

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{p}\right)} \quad (p > 0, -\infty < \mu < +\infty) \quad (1.1)$$

и, как известно (см. [1], стр. 321), для любого значения параметра μ имеют порядок p , а их тип равен единице.

Предварительно введем некоторые нужные обозначения и приведем интегральное представление, а также асимптотическое поведение функции $E_r(z; \mu)$ в комплексной области.

(а) Для любого $\varepsilon > 0$ и β ($0 < \beta < \pi$) обозначим через $\gamma(\varepsilon, \beta)$ бесконечный контур плоскости ζ , пробегаемый в направлении неубывания $\arg \zeta$ и состоящий из следующих составных частей—двух лучей

$$L^{(\pm)}(\varepsilon; \beta) = \{\zeta, \arg \zeta = \pm \beta, \varepsilon \leq |\zeta| < +\infty\}$$

дуги окружности

$$I(\varepsilon; \beta) = \{\zeta; |\arg \zeta| \leq \beta; |\zeta| = \varepsilon\},$$

соединяющей концы $e^{\pm i\beta}$ этих лучей.

Очевидно, что контур $\gamma(\varepsilon; \beta)$ служит общей границей двух взаимно дополнительных областей— $G^{(-)}(\varepsilon; \beta)$ и $G^{(+)}(\varepsilon; \beta)$, лежащих соответственно слева и справа от него.

Всюду в дальнейшем для любого $\rho > \frac{1}{2}$ мы положим, что параметр ρ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{2\rho} < \beta \leq \pi = \min \left\{ \frac{\pi}{\rho}, \pi \right\}. \quad (1.2)$$

Отметим сначала же, что в этом случае справедлива следующая видоизмененная формула Ханкеля для эйлеровой гамма-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(s; \beta)} e^{\zeta^\rho} \zeta^{-\rho s + \rho - 1} d\zeta, \quad (1.3)$$

справедливая на всей плоскости комплексного переменного s (см. [1], стр. 128).

(б) Из определения (1.1) функции $E_r(z; \mu)$ с помощью формулы (1.3) следует интегральная формула

$$E_r(z; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(s; \beta)} \frac{e^{\zeta^\rho} \zeta^{\rho(1-\mu)}}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^{(-)}(\varepsilon, \beta). \quad (1.4)$$

Отметим, что поскольку интеграл (1.4), очевидно, не зависит от $\varepsilon > 0$, то при $\varepsilon > |z|$ формула (1.4) в состоянии представить функцию по существу в любой точке z комплексной плоскости (см. [1], лемму 3.2 (1°)).

(в) Асимптотическое поведение функции $E_r(z; \mu)$ для больших по модулю значений z формулируется следующим образом.

Пусть $\rho > \frac{1}{2}$ и $\mu \in (-\infty, +\infty)$ произвольны, а $p \geq 1$ —любое целое число. Тогда для любого $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2\rho}; \pi \right]$ равномерно относительно $\arg z$ будем иметь:

1°. При $|\arg z| \leq \pi$

$$E_p(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O(|z|^{-1-p}); \quad (1.5)$$

2°. При $\pi \leq |\arg z| \leq 2\pi$

$$E_p(z; \mu) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O(|z|^{-1-p}). \quad (1.6)$$

Отметим еще, что непосредственным почленным интегрированием разложения (1.1) функции $E_p\left(z; \frac{1}{\rho}\right)$ легко установить, что во всей комплексной плоскости z справедливо тождество

$$E_p(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma\left(\mu - \frac{1}{\rho}\right)} \int_0^1 (1-t)^{\mu - \frac{1}{\rho} - 1} E_p\left(zt^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho} - 1} dt, \quad \frac{1}{\rho} < \mu < +\infty. \quad (1.7)$$

1.2 (а) Пусть H_2^+ — класс аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < x < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dy \right\} < +\infty. \quad (1.8)$$

Известно, что теореме Винера-Пэли о представлении класса H_2^+ можно придать и такую формулировку (см. [1], стр. 444).

Теорема А. Класс H_2^+ и класс аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 dr \right\} < +\infty, \quad (1.8')$$

тождественны и совпадают с множеством функций $F(z)$, допускающих представление вида

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\tau} v(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.9)$$

где $v(\tau) \in L_2(0, +\infty)$ — произвольна.

(б) Как известно, имеются два разных, но эквивалентных между собой определения класса вполне монотонных на полуоси $[0, +\infty)$ функций (см., напр., [8], стр. 86 и [9], стр. 145–158).

Мы приведем здесь одну из них, необходимую нам в дальнейшем: непрерывная и бесконечно дифференцируемая на полуоси $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ вполне монотонна, если она удовлетворяет условиям:

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad x \in [0, +\infty), \quad 0 \leq k < +\infty. \quad (1.10)$$

Опираясь на свои результаты о разрешимости проблемы моментов на отрезке $[0, 1]$, еще в 1921 году Хаусдорф [10] установил следующую фундаментальную теорему (см. также [8], стр. 89—90, а также [9], стр. 144).

Теорема Б*. Класс абсолютно монотонных на полуоси $[0, +\infty)$ функций совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\tau} d\alpha(\tau), \quad x \in [0, +\infty), \quad (1.11)$$

где $\alpha(\tau)$ — произвольное конечное на $[0, +\infty)$ распределение.

1.3. Всюду в данном пункте будем полагать, что ρ и μ — произвольные параметры, подчиненные условиям

$$1 < \rho < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (1.12)$$

Заметим сначала же, что для определенного нами в пункте 1.1 (а) контура $\gamma(\varepsilon; \beta)$, в силу условия (1.2), при $\rho > 1$ будем иметь $\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \frac{\pi}{\rho}$. Поэтому на бесконечных лучах $L^{(\pm)}(\varepsilon; \beta)$, входящих в состав $\gamma(\varepsilon; \beta)$, справедливо равенство

$$|e^{\zeta}| = \exp \{ -|\cos \rho\beta| \cdot |\zeta|^\rho \}, \quad \zeta \in L^{(\pm)}(\varepsilon; \beta). \quad (1.13)$$

Теперь введем в рассмотрение функцию от комплексной переменной — $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ посредством интегральной формулы

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon; \beta)} e^{\zeta^{\rho-s}} \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta, \quad (1.14)$$

под ζ^ρ или $\zeta^{\rho(1-\mu)}$ понимая главные ветви этих функций.

В силу (1.13), а также интегральной теоремы Коши, легко видеть, что интеграл (1.14) действительно не зависит от параметров ε и β контура $\gamma(\varepsilon; \beta)$ для любых значений $\varepsilon \in (0, +\infty)$ и $\beta \in \left(\frac{\pi}{2\rho}; \frac{\pi}{\rho} \right]$.

Приведем три леммы относительно свойств целой функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$.

* Впоследствии, в 1928 году, С. Н. Бернштейн [11] предложил существенно отличное от Хаусдорфа доказательство этой теоремы.

(а) Лемма 1. Функция $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ — целая и разлагается в ряд Маклорена вида

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_k(\rho, \mu)}{\Gamma(1+k)} s^k, \quad (1.15)$$

где

$$c_k(\rho, \mu) = -\frac{1}{\pi} \Gamma\left(1-\mu + \frac{k+1}{\rho}\right) \sin \pi\left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) \quad (0 \leq k < +\infty). \quad (1.16)$$

Доказательство. Заметим, что интеграл

$$\Phi_0(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\Gamma(s, \beta)} e^{s\zeta - s^{\rho}} \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta \quad (1.17)$$

по дуге $|\arg \zeta| \leq \beta$ окружности $|\zeta| = \epsilon$, очевидно, является целой функцией от s . Интегралы же

$$\Phi_{\pm}(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{L\left(\frac{\pm 1}{\rho}; \beta\right)} e^{s\zeta - s^{\rho}} \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta, \quad (1.18)$$

в силу (1.13) абсолютно и равномерно сходятся в любом замкнутом круге $|s| \leq R < +\infty$. Поэтому $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ — сумма интегралов $\Phi_0(s)$, $\Phi_+(s)$ и $\Phi_-(s)$, также будет целой функцией.

Нам остается установить теперь справедливость разложения (1.15)–(1.16).

С этой целью, во-первых, отметим, что в силу формулы (1.3) и формулы дополнения Эйлера

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\Gamma(s, \beta)} e^{s\zeta} \zeta^{\rho(1-\mu)+k} d\zeta = \Gamma^{-1}\left(\mu - \frac{k+1}{\rho}\right) = \\ & = -\frac{1}{\pi} \Gamma\left(1-\mu + \frac{k+1}{\rho}\right) \sin \pi\left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) = c_k(\rho, \mu), \quad 0 \leq k < +\infty. \end{aligned}$$

Поэтому, обозначая

$$r_n(s) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\Gamma(s, \beta)} e^{s\zeta} \left\{ e^{-s^{\rho}} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(s^{\rho})^k}{\Gamma(1+k)} \right\} \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta, \quad (1.19)$$

мы приходим к тождеству

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{c_k(\rho, \mu)}{\Gamma(1+k)} s^k + r_n(s), \quad 1 \leq n < +\infty. \quad (1.20)$$

Таким образом, нам достаточно показать, что для любого R ($0 < R < +\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\max_{|s| \leq R} |r_n(s)|\} = 0. \quad (1.21)$$

С этой целью отметим, что в силу известной оценки

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k)} \leq \frac{x^{n+1} e^x}{\Gamma(2+n)}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \max_{|s| < R} \left| e^{-s} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (s^k)}{\Gamma(1+k)} \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R^k |z|^k}{\Gamma(1+k)} \leq \frac{R^{n+1} |z|^{n+1} e^{R|z|}}{\Gamma(2+n)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

В интеграле (1.14) положим $\varepsilon=1$ и представим его в качестве суммы по дуге $l(1; \beta)$ и по лучам $L^{(+)}(1, \beta)$, $L^{(-)}(1, \beta)$, входящим в состав контура $\gamma(1; \beta)$. Тогда, обозначив $c_\rho = \frac{1}{2} |\cos \rho \beta|$, в силу (1.22) будем иметь

$$\begin{aligned} \max_{|s| < R} |r_n(s)| &\leq \frac{\rho}{\pi} \frac{R^{n+1}}{\Gamma(2+n)} \int_1^{\infty} \exp \{-2c_\rho r^\rho + Rr\} r^{\rho(1-\mu)+n+1} dr + \\ &+ \frac{\rho \beta e^R}{\pi} \frac{R^{n+1}}{\Gamma(2+n)} = J_n^{(1)} + J_n^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

причем, очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n^{(2)} = 0. \quad (1.24)$$

Поскольку $\rho > 1$, то можно указать такое число $x_\rho = x_\rho(R; \mu) \geq 1$, чтобы имело место неравенство

$$x^{\frac{1}{\rho}} \exp \{R x^{\frac{1}{\rho}}\} \leq \exp \{c_\rho x\}, \quad x \geq x_\rho. \quad (1.25)$$

Но после замены переменной интегрирования $r = x^{1/\rho}$, в силу (1.25) будем иметь

$$\begin{aligned} U_n &\equiv \int_1^{\infty} \exp \{-2c_\rho r^\rho + Rr\} r^{\rho(1-\mu)+n+1} dr \leq \\ &\leq a_\rho x_\rho^{\frac{n+1}{\rho}} + \int_{x_\rho}^{\infty} e^{-c_\rho x} x^{\frac{n+1}{\rho}} dx, \end{aligned}$$

где $a_\rho = a_\rho(R; \mu) > 0$ не зависит от $n \geq 1$.

Заметив далее, что

$$\int_{x_\rho}^{\infty} e^{-c_\rho x} x^{\frac{n+1}{\rho}} dx < \Gamma\left(1 + \frac{n+1}{\rho}\right) c_\rho^{-1 - \frac{n+1}{\rho}},$$

из последнего неравенства заключаем, что справедлива оценка вида

$$U_n < b_p \cdot d_p^{\frac{n+1}{p}} \Gamma\left(1 + \frac{n+1}{p}\right), \quad n \geq 1. \quad (1.26)$$

где $b_p > 0$ и $d_p > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от n .

Далее, принимая во внимание значение $f_n^{(1)}$ из (1.23) и (1.26), получим

$$\begin{aligned} f_n^{(1)} &= \frac{p}{\pi} \frac{R^{n+1}}{\Gamma(2+n)} U_n < \\ &< \frac{p b_p}{\pi} \frac{R^{n+1} \Gamma\left(1 + \frac{n+1}{p}\right)}{\Gamma(2+n)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $p > 1$, то легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(1)} = 0,$$

откуда ввиду (1.24) и (1.23) вытекает соотношение (1.21), т. е. справедливость леммы.

(б) Лемма 2. Целая функция $\Phi_{p, \mu}(s)$ конечного порядка λ и нормального типа σ , где

$$\lambda \equiv \lambda(p) = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad \sigma \equiv \sigma(p) = (1 - p^{-1})^{\frac{1}{p-1}}. \quad (1.27)$$

Доказательство. Убедимся сначала, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{\left| \sin \pi \left(\frac{k+1}{p} - \mu \right) \right|} \right| = 1. \quad (1.28)$$

С этой целью впрямь полагая, что для данных значений $p > 1$ и $\mu \in (-\infty, +\infty)$ при $j \geq j_0$

$$p \left(2j + \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \geq 1,$$

рассмотрим возрастающую к $+\infty$ последовательность целых чисел

$$k_j = \left[p \left(2j + \mu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \right]; \quad j \geq j_0,$$

где $[x]$ — целая часть числа $x > 0$.

В силу выбора чисел k_j , следует, что

$$\frac{k_j + 1}{p} - \mu = 2j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} - \frac{\theta_j}{p}; \quad j \geq j_0,$$

где $0 \leq \theta_j < 1$.

Так как $-\frac{1}{2} \leq \theta_j - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, то будем иметь

$$\left| \sin \pi \left(\frac{k_j+1}{\rho} - \mu \right) \right| = \left| \cos \frac{\pi}{\rho} \left(\theta_j - \frac{1}{2} \right) \right| \geq \cos \frac{\pi}{2\rho}; j \geq j_0.$$

Из этих неравенств вытекает, что

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sqrt[k_j]{\left| \sin \pi \left(\frac{k_j+1}{\rho} - \mu \right) \right|} \geq 1,$$

откуда ввиду того, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\left| \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu \right) \right|} \leq 1,$$

следует (1.33).

Обозначим

$$\begin{aligned} a_k(\rho, \mu) &= (-1)^k \frac{c_k(\rho, \mu)}{\Gamma(1+k)} = \\ &= -\frac{1}{\pi} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu \right) \end{aligned}$$

и, пользуясь формулой Стирлинга

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{\theta_x}{12x}}, \quad x > 0,$$

заметим, что

$$\begin{aligned} |a_k(\rho, \mu)| &= \frac{1}{\pi} \rho^{\mu-\frac{1}{2}-\frac{k+1}{\rho}} k^{-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)k+\frac{1}{\rho}-\mu} \left(1+\frac{1-\mu\rho}{k}\right)^{\frac{k+1}{\rho}-\mu+\frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp \left\{ \mu - \frac{1}{\rho} + k \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right) \right\} \left| \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu \right) \right| \quad (k \geq 1). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Отсюда в силу (1.28) непосредственно следует соотношение

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|a_k|} = e^{1-\frac{1}{\rho}} \rho^{-\frac{1}{\rho}}. \quad (1.30)$$

Вместе с тем, из (1.29) имеем также

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{|a_k(\rho, \mu)|} &= \log \pi + \left(\frac{k+1}{\rho} + \frac{1}{2} - \mu \right) \log \rho + \\ &+ \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)k + \mu - \frac{1}{\rho} \right] \log k + \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) k - \\ &- \log \left| \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu \right) \right| + O\left(\frac{1}{k}\right), \end{aligned}$$

откуда, в силу (1.28), получим

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \log k}{\log \frac{1}{|a_k(\rho, \mu)|}} = \frac{1}{1 - \rho^{-1}},$$

т. е. целая функция $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ — порядка $\lambda = \frac{\rho}{\rho - 1}$.

Наконец, поскольку тип σ целой функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ порядка λ определяется из известного в теории целых функций соотношения

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{\frac{1}{\lambda}} \sqrt[\lambda]{|a_k(\rho, \mu)|} = (e\sigma\lambda)^{\frac{1}{\lambda}},$$

то в силу (1.35) получим $\sigma = (1 - \rho^{-1}) \rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$.

(в) Лемма 3.1°. Функция $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ допускает также представление

$$\Phi_{\rho, \mu}(re^{i\theta}) = (\rho^{-1}r)^{\nu} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(1, \beta)} \Omega(w; re^{i\theta}) w^{\rho(1-\mu)} dw, \quad (1.31)$$

$$\nu = \frac{\rho(1-\mu) + 1}{\rho - 1}, \text{ и}$$

$$\Omega(re^{i\theta}, w) = \exp[\sigma\lambda[\rho^{-1}w^{\rho} - e^{i\theta}w]r^{\lambda}]. \quad (1.32)$$

2°. Справедливо неравенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\log |\Phi_{\rho, \mu}(\tau)|}{\tau^{\lambda}} \leq -\sigma \cos \frac{\pi}{2\rho} < -\frac{\sigma}{\lambda}. \quad (1.33)$$

Доказательство. 1°. В интегральном представлении (1.14)

функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ при данном τ ($0 < \tau < +\infty$) положим $\varepsilon = \lambda\tau^{\frac{1}{\rho-1}}$, а за-

тем произведем замену переменной интегрирования $\zeta = \lambda\tau^{\frac{1}{\rho-1}}w$. Заметим, что в результате таких замен контур $\gamma(\varepsilon; \beta)$ перейдет в контур $\gamma(1; \beta)$ плоскости w и пользуясь тем, что, согласно лемме 2,

$\lambda = \frac{\rho}{\rho - 1}$ и $\sigma = \lambda^{-1} \rho^{-\frac{1}{\rho}}$, мы легко приходим к интегральной формуле (1.31)–(1.32).

2°. Представим функцию $\Phi_{\rho, \mu}(\tau)$ ($0 < \tau < +\infty$) в виде

$$\Phi_{\rho, \mu}(\tau) = \Phi_{\rho, \mu}^{(1)}(\tau) + \Phi_{\rho, \mu}^{(2)}(\tau), \quad (1.34)$$

положив

$$\Phi_{\rho, \mu}^{(1)}(\tau) = (\rho^{-1}\tau)^{\nu} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{L(1, \beta)} \Omega(\tau; w) w^{\rho(1-\mu)} dw \quad (1.35')$$

и

$$\Phi_{\rho, \mu}^{(2)}(\tau) = (\rho^{-1} \tau)^{\nu} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{l(1; \beta)} \Omega(\tau, w) w^{\rho(1-\mu)} dw, \quad (1.35'')$$

где $L(1, \beta) = L^{(+)}(1, \beta) + L^{(-)}(1, \beta)$ и $l(1, \beta)$ — совокупность бесконечных лучей и дуга единичной окружности, входящие в состав контура интегрирования формулы (1.31).

Ниже будем полагать, что параметр β вместо условия (1.2) удовлетворяет более ограничительному условию

$$\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \min \left\{ \frac{\pi}{\rho}, \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (1.36)$$

Принимая во внимание определение (1.32) функции $\Omega(\tau, w)$, из (1.35') и (1.35''), мы приходим к следующим неравенствам:

$$|\Phi_{\rho, \mu}^{(1)}(\tau)| \leq (\rho^{-1} \tau)^{\nu} \frac{\rho}{\pi} \int_1^{\infty} \exp \{ \sigma \lambda [\rho^{-1} r^{\rho} \cos \rho \beta - r \cos \beta] \tau^{\lambda} \} r^{\rho(1-\mu)} dr, \quad (1.37)$$

$$|\Phi_{\rho, \mu}^{(2)}(\tau)| \leq (\rho^{-1} \tau)^{\nu} \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\beta} \exp \{ \sigma \lambda [\rho^{-1} \cos \rho \varphi - \cos \varphi] \tau^{\lambda} \} d\varphi. \quad (1.38)$$

Займемся теперь оценкой интегралов, стоящих справа в этих неравенствах.

Так как ввиду условия (1.36)

$$\cos \beta > 0 \text{ и } \cos \rho \beta = -|\cos \rho \beta| < 0,$$

то из (1.37) получим при $\tau \geq 1$

$$|\Phi_{\rho, \mu}^{(1)}(\tau)| \leq \Delta_1 (\rho^{-1} \tau)^{\nu} \exp \{ -\sigma \lambda \cos \rho \beta \tau^{\lambda} \}, \quad (1.37')$$

где

$$\Delta_1 = \int_1^{\infty} \exp \{ -(\sigma \lambda \rho^{-1} |\cos \rho \beta|) \tau^{\rho} \} \tau^{\rho(1-\mu)} d\tau.$$

Далее заметим, что ввиду того же условия (1.36)

$$\cos \rho \varphi \leq \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta,$$

и поэтому

$$\sigma \lambda [\rho^{-1} \cos \rho \varphi - \cos \varphi] \leq \sigma \lambda (\rho^{-1} - 1) \cos \varphi = -\sigma \cos \varphi \leq -\sigma \cos \beta, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta.$$

Следовательно, из (1.38) вытекает оценка

$$|\Phi_{\rho, \mu}^{(2)}(\tau)| \leq \frac{\rho \beta}{\pi} (\rho^{-1} \tau)^{\nu} \exp \{ -\sigma \cos \beta \tau^{\lambda} \}. \quad (1.38')$$

Поскольку $\lambda = \frac{\rho}{\rho-1} > 1$, то из (1.37') и (1.38') окончательно следует, что

$$|\Phi_{\rho, \mu}(\tau)| \leq \Delta_2 \tau^\sigma \exp \{-\tau \cos \beta \tau^\lambda\}, \quad \tau \geq 1, \quad (1.39)$$

где $\Delta_2 > 0$ не зависит от τ .

Из (1.39) имеем далее, что

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\log |\Phi_{\rho, \mu}(\tau)|}{\tau^\lambda} \leq -\sigma \cos \beta,$$

откуда, ввиду произвольности $\beta > \frac{\pi}{2\rho}$, при $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2\rho} + 0$ мы приходим к первому из неравенств (1.33) леммы.

Наконец, так как

$$\cos \frac{\pi}{2\rho} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \right) > (1 - \rho^{-1}) = \frac{1}{\lambda},$$

то лемма полностью доказана.

В заключение приведем следующее

Замечание. Пусть

$$h(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |\Phi_{\rho, \mu}(re^{i\theta})|}{r^\lambda}$$

—индикатор целой функции $\Phi_{\rho, \mu}(s)$, являющийся, как известно (см., напр., [12], стр. 262), непрерывной функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющей условию

$$\max_{[-\pi, \pi]} h(\theta) = \sigma. \quad (1.40)$$

В связи с леммой 3 остается открытым вопрос о точности установленного нами неравенства $h(0) \leq -\sigma \cos \frac{\pi}{2\rho}$, а также вопрос о выявлении явного вида функции $h(\theta)$ и тех точек отрезка $[-\pi, \pi]$, где достигается равенство (1.40).

§ 2. Основные результаты

2.1 (а) Функция типа

$$E_1(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)} \quad (1 \leq \mu < +\infty), \quad (2.1)$$

как легко убедиться в этом, допускает интегральное представление посредством функции $E_1(z; 1) = e^z$ —простейшей среди них*:

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-2} e^{zt} dt \quad (1 < \mu < +\infty). \quad (2.2)$$

* См. [1], стр. 120.

Заметим, что формулу (2.2) можно записать также в виде интегралов Лапласа или Лапласа—Стилтьеса

$$E_1(-z; \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-z\tau} v_\mu(\tau) d\tau = \\ = \int_0^{+\infty} e^{-z\tau} da_\mu(\tau), \quad 1 \leq \mu < +\infty, \quad (2.3)$$

где

$$v_\mu(\tau) = \begin{cases} \frac{(1-\tau)^{\mu-2}}{\Gamma(\mu-1)}, & 0 \leq \tau < 1 \\ 0, & 1 < \tau < +\infty \end{cases} \quad (2.4')$$

в

$$x_\mu(\tau) = \int_0^\tau v_\mu(t) dt = \begin{cases} \frac{1-(1-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \frac{1}{\Gamma(\mu)}, & 1 \leq \tau \leq +\infty. \end{cases} \quad (2.4'')$$

Из (2.3), в частности, следует, что функции $E_1(-x; \mu)$ ($1 \leq \mu < +\infty$), допуская представление типа представления (1.12) теоремы Хаусдорфа B , вполне монотонны на полуоси*.

(6) Г. Поллард впервые установил, что функции типа $E_p(-x; 1)$ ($1 \leq p < +\infty$) вполне монотонны на полуоси $[0, +\infty)$, причем для $p=1$ это очевидно, поскольку $E_1(-x, 1) = e^{-x}$.

Докажем, что справедлива следующая общая
Теорема 1. 1°. Для любых значений

$$1 \leq p < +\infty, \quad \frac{1}{p} \leq \mu < +\infty$$

функция $E_p(-x; \mu)$ вполне монотонна на полуоси $[0, +\infty)$.

Доказательство. Положим, что $\{x_j\}_0^\infty$ — произвольная неубывающая последовательность неотрицательных чисел

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

С нею ассоциируем последовательность функций $\{E_n^{(p)}(x)\}_n^\infty$, положив

$$E_n^{(p)}(x) \equiv E^{(p)}(x, x_0, x_1, \dots, x_n) \equiv \\ \equiv \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(z, \beta)} \frac{e^{x\zeta} \zeta^{\rho-1}}{\prod_{j=0}^n (\zeta + x_j)} d\zeta, \quad x \in (0, +\infty), \quad 0 \leq n < +\infty. \quad (2.5)$$

В работе одного из авторов [2], в частности, было установлено важное свойство этих функций, а именно

* Этот простой факт отмечался в работе А. Уинтнера [6].

$$E_n^{(p)}(x; x_0, x_1, \dots, x_n) > 0; x \in [0, +\infty), 0 \leq n < +\infty. \quad (2.6)$$

Из интегральной формулы (2.5), очевидно, следует, что эти функции непрерывно зависят от параметров $\{x_j\} \in [0, +\infty)$.

Поэтому и ввиду свойства (2.6) можем утверждать, что

$$\lim_{\substack{x_j \rightarrow x \\ 0 \leq j < n}} E_n^{(p)}(1; x_0, x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha, \beta)} \frac{e^{-\rho} \zeta^{\rho-1}}{(\zeta + x)^{n+1}} d\zeta \geq 0, x \in (0, +\infty). \quad (2.7)$$

С другой стороны, из представления (1.4) функции $E_\rho(z; \mu)$, в частности, следует, что

$$E_\rho(-x; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha, \beta)} \frac{e^{-\rho} \zeta^{\rho-1}}{\zeta + x} d\zeta; x \in [0, +\infty).$$

Поэтому и в силу (2.7) для любого $n \geq 0$

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left\{ E_\rho \left(-x; \frac{1}{\rho} \right) \right\} = \\ = n! \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha, \beta)} \frac{e^{-\rho} \zeta^{\rho-1}}{(\zeta + x)^{n+1}} d\zeta \geq 0, x \in [0, +\infty). \quad (2.8)$$

Неравенства (2.8) означают, что функция $E_\rho \left(-x; \frac{1}{\rho} \right)$ монотонна на $[0, +\infty)$.

Положим теперь, что $\mu > \frac{1}{\rho}$, и воспользуемся тождеством (1.7) для $z = -x$

$$E_\rho(-x; \mu) = \\ = \frac{1}{\Gamma \left(\mu - \frac{1}{\rho} \right)} \int_0^1 (1-t)^{\mu - \frac{1}{\rho} - 1} E_\rho \left(-x t^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho} \right) t^{\frac{1}{\rho} - 1} dt, x \in (0, +\infty).$$

Отсюда дифференцированием по x и в силу (2.8) мы убеждаемся справедливости теоремы при любом $\mu > \frac{1}{\rho}$.

Из теоремы 1 в силу теоремы Хаусдорфа B непосредственно следует

Теорема 2. Пусть

$$1 \leq \rho < +\infty \text{ и } \frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty. \quad (2.9)$$

Тогда существует конечное на полуоси $[0, +\infty)$ распределение $\Psi_{\rho, \mu}(\tau)$ такое, что

$$E_p(-x; \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-x\tau} d\Psi_{p, \mu}(\tau), \quad x \in [0, +\infty). \quad (2.10)$$

Ниже мы докажем значительно более общую теорему о представлении функций типа $E_p(z; \mu)$ интегралом Лапласа на всей z -плоскости и для любых значений $1 < \rho < +\infty$ и $-\infty < \mu < +\infty$.

(в) Теорема 3. 1°. Пусть параметры ρ и μ таковы, что

$$1 < \rho < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (2.11)$$

Тогда во всей конечной плоскости z справедлива формула

$$E_p(z; \mu) = \int_0^{+\infty} e^{z\tau} \Phi_{p, \mu}(\tau) d\tau, \quad |z| < +\infty, \quad (2.12)$$

где $\Phi_{p, \mu}(s)$ — целая функция, определяемая из интеграла (1.14) или из разложения (1.15)–(1.16)

$$\Phi_{p, \mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1 - \mu + \frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) s^k. \quad (2.13)$$

При этом интеграл (2.12) абсолютно и равномерно сходится в любом круге $|z| \leq R$ ($0 < R < +\infty$).

2°. Если

$$1 < \rho < +\infty, \quad \frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty, \quad (2.14)$$

то будем иметь

$$\Phi_{p, \mu}(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (2.15)$$

причем целая функция $\Phi_{p, \mu}(s)$ на полуоси $[0, +\infty)$ будет функцией плотности распределения формулы (2.10) теоремы 2

$$\Psi'_{p, \mu}(\tau) = \Phi_{p, \mu}(\tau), \quad \tau \in [0, +\infty). \quad (2.16)$$

Доказательство. 1°. Из асимптотической формулы (1.6) для функции $E_p(z; \mu)$, в частности, вытекает:

$$\text{При } |\arg z| \leq \gamma < \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right) \text{ и } |z| \rightarrow \infty$$

$$E_p(-z; \mu) = O(|z|^{-1}),$$

при этом равномерно относительно $\arg z$.

Поскольку при $1 < \rho < +\infty$ мы имеем $1 - \frac{1}{2\rho} > \frac{1}{2}$, то отсюда, в частности, следует, что в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$

$$E_p(-z; \mu) = O(|z|^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Но из (2.17) непосредственно вытекает, что

$$\sup_{\epsilon < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |E_\epsilon(-re^{i\tau})|^2 d\tau \right\} < +\infty$$

и, наконец, согласно теореме А, функция $E_\rho(-z; \mu)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ допускает представление вида

$$E_\rho(-z; \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-z\tau} \Phi(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (2)$$

где $\Phi(\tau)$ — некоторая функция из класса $L_2(0, +\infty)$.

Из представления (2.18) по теореме Планшереля следует, по крайней мере почти всюду на мнимой оси $z = iy$ ($-\infty < y < +\infty$) будем иметь

$$E_\rho(-iy; \mu) = \frac{a}{dy} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iy\tau} - 1}{-i\tau} \Phi(\tau) d\tau$$

и, следовательно, почти для всех $\tau \in (-\infty, +\infty)$ справедлива та формула обращения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy\tau} - 1}{iy} E_\rho(-iy; \mu) dy = \\ = \begin{cases} \Phi(\tau), & \tau \in (0, +\infty) \\ 0, & \tau \in (-\infty, 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, из интегрального представления (1.4) функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho > 1$, в частности, следует, что

$$E_\rho(-iy; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha, \beta)} \frac{e^{-\tau y} \tau^{\rho(1-\mu)}}{\tau + iy} d\tau, \quad -\infty < y < +\infty$$

при любом $\alpha > 0$ и $\beta \in \left(\frac{\pi}{2\rho}; \frac{\pi}{\rho} \right]$.

Подставим это значение $E_\rho(-iy; \mu)$ в левую часть (2.19). Тогда интегрированием по τ приходим к тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \Phi_{\rho, \mu}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy\tau} - 1}{iy} E_\rho(-iy; \mu) dy = \\ = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\alpha, \beta)} e^{-\tau y} \tau^{\rho(1-\mu)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy\tau} - 1}{iy} \cdot \frac{dy}{iy + \tau} \right\} d\tau, \quad \tau \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

причем легко видеть, что произведенная нами здесь замена порядка интегрирования законна.

Отметим теперь, что, поскольку функция $\frac{e^{-z}-1}{z}$ при $z \in [0, +\infty)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и для любого $\zeta \in \gamma(\varepsilon, \beta)$, точка $z = -\zeta$ лежит в той же полуплоскости. Поэтому по теореме вычетов получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau y}-1}{iy} \frac{dy}{iy+\zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{-z}-1}{z} \frac{dz}{z+\zeta} = \\ &= \frac{e^{-\zeta}-1}{-\zeta}, \quad \tau \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.20) приходим к формуле

$$\int_0^{\tau} \Phi(\tau) d\tau = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} e^{i\rho\zeta} \zeta^{\rho(1-\mu)} \frac{e^{-\zeta}-1}{-\zeta} d\zeta, \quad \tau \in [0, +\infty),$$

дифференцированием которой по параметру τ будем иметь

$$\Phi(\tau) \equiv \Phi_{\rho, \mu}(\tau) = \frac{\rho}{2\pi} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} e^{i\rho\zeta} e^{-\zeta} \zeta^{\rho(1-\mu)} d\zeta, \quad \tau \in [0, +\infty).$$

Таким образом, справедливость представления (2.12) нами установлена, но пока что для полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Но в силу неравенства (1.33) леммы 3 при некотором $\tau_0 > 0$

$$|\Phi_{\rho, \mu}(\tau)| \leq \exp \left\{ -\frac{\sigma}{\lambda} \tau^{\lambda} \right\}, \quad \tau > \tau_0. \quad (2.21)$$

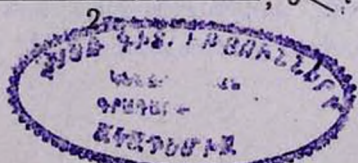
Далее, поскольку $\lambda > 1$, то для данного $R < +\infty$ можно указать число $\tau_1 = \tau_1(R) \geq \tau_0$ такое, чтобы имело место неравенство

$$\begin{aligned} |e^{z\tau} \Phi_{\rho, \mu}(\tau)| &\leq \exp \left\{ R\tau - \frac{\sigma}{\lambda} \tau^{\lambda} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\sigma}{2\lambda} \tau^{\lambda} \right\}; \quad |z| \leq R, \quad \tau \geq \tau_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует наше утверждение о природе сходимости интеграла (2.12) и, следовательно, аналитическим продолжением—справедливость этой формулы во всей конечной z -плоскости.

2°. Заметим сначала же, что конечное на $[0, +\infty)$ распределение $\Psi_{\rho, \mu}(\tau)$ теоремы 2 без ограничения общности можно считать нормализованным, т. е. удовлетворяющим условиям:

$$\Psi_{\rho, \mu}(0) = 0, \quad \Psi_{\rho, \mu}(\tau) = \frac{\Psi_{\rho, \mu}(\tau+0) + \Psi_{\rho, \mu}(\tau-0)}{2}, \quad 0 < \tau < +\infty.$$



Согласно теореме 2, при условии (2.14) мы имеем

$$d\Psi_{p,\mu}(\tau) > 0, \quad \int_0^{\infty} d\Psi_{p,\mu}(\tau) = E_p(0; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}. \quad (2.22)$$

Поэтому представление (2.9) теоремы 2 аналитическим продолжением можно распространить на всю полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$

$$E_p(-z; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-z\tau} d\Psi_{p,\mu}(\tau), \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$$

При этом, в силу (2.22), этот интеграл абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Отсюда, в частности, следует, что на всей мнимой оси $z = -iy$

$$E_p(-iy; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-iy\tau} d\Psi_{p,\mu}(\tau), \quad -\infty < y < +\infty. \quad (2.23)$$

С другой стороны, из нашей формулы (2.12) следует, что на мнимой оси $z = -iy$ справедливо также представление

$$E_p(-iy; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-iy\tau} \Phi_{p,\mu}(\tau) d\tau, \quad -\infty < y < +\infty, \quad (2.24)$$

причем как (2.23), так и этот интеграл абсолютно и равномерно сходятся на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Обозначая

$$a(\tau) = \Psi_{p,\mu}(\tau) - \int_0^{\tau} \Phi_{p,\mu}(t) dt, \quad 0 \leq \tau < +\infty, \quad (2.25)$$

в силу (2.22) и (2.21), ввиду того, что $\Phi_{p,\mu}(s)$ — целая функция, мы можем утверждать, что $a(\tau)$ на полуоси $[0, +\infty)$ является нормализованной функцией ограниченного изменения.

Наконец, из (2.23) и (2.24) следует тождество

$$\int_0^{\infty} e^{-iy\tau} da(\tau) = 0, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Отсюда по теореме единственности интегралов Лапласа—Стилтьеса (см., напр., [9]) и в силу (2.25) следует тождество

$$\Psi_{p,\mu}(\tau) = \int_0^{\tau} \Phi_{p,\mu}(t) dt, \quad 0 \leq \tau < +\infty$$

и, следовательно, утверждения (2.15) и (2.16) нашей теоремы.

В связи с теоремой 2 и утверждением 2^а теоремы 3 отметим следующее.

В заметках Г. Полларда [4, 5] были установлены вполне монотонность и представимость функции $E_p(-x; 1)$ в виде (2.10), а также тождество $\Psi_{p,1}'(\tau) \equiv \Phi_{p,1}(\tau)$.

Но метод, которым он пользовался при получении своего результата, принципиально не применим для семейства функций типа Миттаг—Леффлера $E_p(-x; \mu)$ для $\mu \neq 1$.

(г) Приведем теперь две теоремы — о преобразовании Меллина функции $\Phi_{p,\mu}(\tau)$ и о неулучшаемости условий теорем 1, 2 и 3 (2°).

Теорема 4. Пусть параметры p и μ удовлетворяют условию

$$1 < p < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Тогда справедлива формула

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma\left(\mu + \frac{z}{p}\right)} = \int_0^{\infty} \tau^z \Phi_{p,\mu}'(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} z > -1. \quad (2.26)$$

Доказательство. Заметим сначала, что интеграл (2.26), ввиду свойства (2.21) функции $\Phi_{p,\mu}(\tau)$, абсолютно сходится и представляет функцию, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -1$.

Вместе с тем, функция $\Gamma(1+z)/\Gamma\left(\mu + \frac{z}{p}\right)$ также аналитична в той же полуплоскости. Поэтому достаточно установить справедливость формулы (2.26) лишь для значений $z = x \geq 0$.

Однако, пользуясь определением (1.14) функции $\Phi_{p,\mu}(\tau)$, мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \tau^x \Phi_{p,\mu}'(\tau) d\tau &= \int_0^{\infty} \tau^x \left\{ \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(s;\beta)} e^{\zeta^p - \tau \zeta^{\rho(1-\mu)}} d\zeta \right\} d\tau = \\ &= \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(s;\beta)} e^{\zeta^p} \zeta^{\rho(1-\mu)} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\tau \zeta^{\rho(1-\mu)-x-1}} \tau^x d\tau \right\} d\zeta = \\ &= \Gamma(1+x) \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(s;\beta)} e^{\zeta^p} \zeta^{\rho(1-\mu)-x-1} d\zeta; \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

поскольку

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta^{\rho(1-\mu)-x-1} \tau^x} d\tau = \zeta^{-x-1} \Gamma(1+x), \quad \operatorname{Re} \zeta > 0,$$

а контур $\gamma(s;\beta)$ лежит внутри полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Что касается правомерности произведенной нами замены порядка интегрирования

при получении равенств (2.27), то в этом легко убедиться, ввиду того, что на совокупности бесконечных лучей $L^{(\pm)}(\varphi; \beta) \subset \gamma(\varphi; \beta)$ имеем

$$|e^{i\varphi}| = \exp \{ -|\cos \rho\beta| \cdot |\zeta|^\rho \}; \quad \zeta \in L^{(\pm)}(\varphi; \beta).$$

Наконец, пользуясь формулой (1.3), мы получим

$$\frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varphi, \beta)} e^{-\rho\zeta^{\rho(1-\mu)} - x^{-1}} d\zeta = \frac{1}{\Gamma\left(\mu + \frac{x}{\rho}\right)},$$

откуда и из (2.27) вытекает справедливость тождества (2.26) для значений $z = x \geq 0$, т. е. утверждения теоремы.

Из теорем 4 и 3 (2°) непосредственно следует

Теорема 5. 1°. Если $1 < \rho < +\infty$ и $-\infty < \mu < +\infty$, то проблема моментов

$$\mu_n = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{\rho})}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)} = \int_0^\infty \tau^n \omega(\tau) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.28)$$

в классе функций $\omega(\tau) \in L(0, +\infty)$ имеет единственное решение

$$\omega(\tau) = \Phi_{\rho, \mu}(\tau). \quad (2.29)$$

2°. Если $1 < \rho < +\infty$ и $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$, то решение

$$\omega(\tau) = \Phi_{\rho, \mu}(\tau) \geq 0. \quad (2.30)$$

В самом деле, достаточно воспользоваться тождеством (2.26) для значений $z = n \geq 0$ и утверждением 2° теоремы 3, чтобы убедиться в справедливости (2.29) и (2.30).

Но, пользуясь формулой Стирлинга, легко видеть, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\mu_n \sim e^{\frac{1}{2n}} \sim e^{-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right),$$

и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = +\infty.$$

Отсюда по известной теореме Рисса (см. [8], теорему 1.11) об определенности проблемы моментов Стильеса следует, что решение (2.29) проблемы (2.28) действительно единственное.

Из утверждения 2° этой теоремы вытекает следующее

Следствие. Если

$$1 < \rho < +\infty \text{ и } \frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty, \quad (2.31)$$

то справедливы неравенства

$$|E_{\rho}^{(n)}(-z; \mu)| \leq \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{\rho}\right)}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0 \quad (n=0, 1, \dots) \quad (2.32)$$

и все они достижимы в точке $z=0$.

По поводу теорем 4 и 5 отметим, что в работах А. Уинтнера (см. [6], стр. 177—180, а также [7], стр. 119) существенно отличным от изложенного здесь методом было установлено лишь существование некоторой конечной на $[0, +\infty)$ меры $\omega_{\rho}(\tau)$ такой, что

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma\left(1+\frac{z}{\rho}\right)} = \int_0^{\infty} \tau^z d\omega_{\rho}(\tau), \quad \operatorname{Re} z > -1. \quad (2.26')$$

Между тем из теорем 4 и 3 (2°), вообще для $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$, и, в частности, для значения $\mu=1$, вытекает абсолютная непрерывность, а также явный вид этой меры и также тождество

$$\omega'_{\rho}(\tau) \equiv \Phi_{\rho, 1}(\tau), \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

В заключение докажем, что условие $\frac{1}{\rho} \leq \mu < +\infty$ теоремы 1, или, что то же самое, теоремы 3 (2°) усилить нельзя.

Теорема 6. Если

$$1 < \rho < +\infty \text{ и } -\infty < \mu < \frac{1}{\rho}, \quad (2.33)$$

то функция $E_{\rho}(-x; \mu)$ на полуоси $[0, +\infty)$ заведомо не будет вполне монотонной.

Доказательство. При условии (2.33), положив $z = -\mu > -1$, из тождества (2.26) получим

$$\int_0^{\infty} \tau^{-\mu\rho} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau = \frac{\Gamma(1-\mu\rho)}{\Gamma(0)} = 0.$$

Отсюда следует, что функция $\Phi_{\rho, \mu}(\tau) \in L(0, +\infty)$ знакопеременна на $[0, +\infty)$.

С другой стороны, из представления (2.12) теоремы 3, справедливой и для значений $-\infty < \mu < \frac{1}{\rho}$, будем иметь

$$E_{\rho}(-x; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-x\tau} d\Psi_{\rho, \mu}(\tau), \quad 0 \leq x < +\infty,$$

где функция

$$\Psi_{\rho, \mu}(\tau) = \int_0^{\tau} \Phi_{\rho, \mu}(t) dt$$

всюду на $[0, +\infty)$ заведомо не может быть неубывающей, хотя и она, очевидно, имеет там ограниченное изменение.

Вопреки утверждению теоремы, положим теперь, что при некотором $\mu < \frac{1}{\rho}$ функция $E_{\rho}(-x; \mu)$ вполне монотонна на $[0, +\infty)$.

Тогда, согласно теореме Б, она должна допускать представление вида

$$E_{\rho}(-x; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-x\tau} d\alpha_{\mu}(\tau), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.35)$$

где $\alpha_{\mu}(\tau)$ — некоторая нормализованная и конечная мера на $[0, +\infty)$.

Но представления (2.34) и (2.35), очевидно, сохраняют силу во всей замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и, в частности, на мнимой оси $z = -iy$ ($-\infty < y < +\infty$).

Повтому справедливо тождество

$$\int_0^{\infty} e^{-iy\tau} d\{\Psi_{\rho, \mu}(\tau) - \alpha_{\mu}(\tau)\} = 0, \quad -\infty < y < +\infty,$$

откуда, ввиду единственности интегралов Лапласа—Стилтьеса, приходим к тождеству

$$\Psi_{\rho, \mu}(\tau) \equiv \alpha_{\mu}(\tau), \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию, что $\Psi_{\rho, \mu}(\tau)$ также неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, т. е. теорема доказана.

(д) В заключении статьи установим наиболее общую теорему об интегральном представлении функций типа Миттаг—Леффлера произвольных порядков $0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty$.

Теорема 7. Пусть ρ_1, ρ_2 и μ_1, μ_2 — произвольные параметры, подчиненные условиям

$$\begin{aligned} 0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty, \\ 0 < \mu_1 < +\infty, \quad -\infty < \mu_2 < +\infty. \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. Во всей конечной плоскости z имеет место интегральное соотношение

$$E_{\rho_1}(z; \mu_2) = \int_0^{\infty} E_{\rho_1}(z\tau^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1) \tau^{\mu_1-1} \Phi_{\rho_1, \mu_1}(\tau) d\tau, \quad |z| < +\infty, \quad (2.36)$$

где $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ — целая функция, определяемая интегралом (1.14), т. е. разложением

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1 - \mu + \frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) s^k,$$

а параметры ρ и μ — из соотношений

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \mu_1). \quad (2.37)$$

2°. При выполнении дополнительного условия

$$\mu_2 \geq \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1 \quad (2.38)$$

будем иметь

$$\Phi_{\rho, \mu}(\tau) \geq 0, \quad 0 \leq \tau < +\infty. \quad (2.39)$$

Доказательство. 1°. В тождестве (2.26) теоремы 4 положим

$$z = \mu_1 - 1 + \frac{k}{\rho_1} \quad (k \geq 0), \quad \mu = \mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \mu_1).$$

Тогда ввиду наших обозначений (2.37) будем иметь

$$\frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{k}{\rho_1}\right)}{\Gamma\left(\mu_2 + \frac{k}{\rho_2}\right)} = \int_0^{\infty} \tau^{\frac{k}{\rho_1} + \mu_1 - 1} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.40)$$

Положив далее

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (n \geq 0),$$

из (2.40) приходим к тождествам

$$S_n(z) = \int_0^{\infty} S_n\left(\tau^{\frac{1}{\rho_1}} z\right) \tau^{\mu_1 - 1} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau \quad (n \geq 0), \quad (2.41)$$

справедливым на всей плоскости z , причем, очевидно, что для $0 \leq \tau < +\infty$

$$\max_{|z| < R} |S_n(\tau^{\frac{1}{\rho_1}} z)| \leq E_{\rho_1}(R \tau^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1); \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.42)$$

Но из асимптотических свойств (1.5) и (1.6) функции $E_{\rho_1}(z; \mu)$, в частности, следует, что если $\rho_1 > \frac{1}{2}$, то для любого $R_1 > R$ при некотором $\tau^* = \tau(R_1) > 0$

$$E_{\rho_1}(R\tau^{\frac{1}{\rho_1}}; \mu_1) \leq \exp \{R^{\rho_1} \tau\}, \quad \tau \geq \tau^*. \quad (2.43)$$

Далее, пользуясь асимптотическими свойствами функции $E_{\rho_1}(z; \mu_1)$ для $0 < \rho_1 \leq \frac{1}{2}$ (см. [1], лемму 3.6), мы заключаем, что оценка вида

$$(2.43) \text{ остается справедливой и для значений } 0 < \rho_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Поэтому из (2.42), (2.41) и (2.21) заключаем, что для любого $\rho_1 > 0$ и $R_1 > R$

$$\max_{|z| \leq R} |S_n(\tau^{\frac{1}{\rho_1}} z) \Phi_{\rho, \mu}(\tau)| \leq \exp \left[R_1^{\rho} \tau - \frac{\rho}{\lambda} \tau^{\lambda} \right]; \quad \tau \geq \tau_1.$$

Поскольку $\lambda = \frac{\rho}{\rho-1} > 1$, то отсюда следует, что последовательность функций

$$|S_n(\tau^{\frac{1}{\rho_1}} z) \Phi_{\rho, \mu}(\tau)|_0^{\infty}, \quad |z| \leq R$$

на полуоси $0 \leq \tau < +\infty$ имеет интегрируемую мажоранту. Следовательно, переход к пределу под знаком интеграла (2.41) при $n \rightarrow +\infty$ нас приводит к интегральной формуле (2.36) теоремы.

2°. Так как у нас $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$, то, согласно теореме 3 (2°), при $\mu \geq \frac{1}{\rho}$ будем иметь $\Phi_{\rho, \mu}(\tau) \geq 0$, $0 \leq \tau < +\infty$.

Но согласно (2.37) условие $\mu \geq \frac{1}{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ эквивалентно условию (2.38) теоремы.

По поводу теоремы 7 отметим, что в работе А. Уинтнера (см. [7], стр. 118—119) при условии $0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty$ было установлено лишь *существование* некоторой конечной на $[0, +\infty)$ меры $\Psi_{\rho_1, \rho_2}(\tau)$ такой, что

$$E_{\rho_2}(z; 1) = \int_0^{\infty} E_{\rho_1}(z\tau; 1) d\Psi_{\rho_1, \rho_2}(\tau), \quad |z| < +\infty.$$

Но при $\rho_1 = \rho_2 = 1$ условие (2.38), очевидно, выполняется. Поэтому из теоремы 7 (2°), в частности, вытекает большее утверждение, а именно, что мера $\Psi_{\rho_1, \rho_2}(\tau)$ абсолютно непрерывна на $(0, +\infty)$, причем

$$\Psi'_{\rho_1, \rho_2}(\tau) = \rho_1 \Phi_{\rho, 1}(\tau^{\rho_1}) \tau^{\rho_1-1} \in L(0, +\infty),$$

где вновь $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$.

Основные результаты этой статьи без доказательств были опубликованы в заметке [13].

Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ, Ռ. Ա. ԲԱԴԻՅԱՆ. Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների հետ առաջիակած ինտեգրալ ներկայացումների և չափերի մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում բերվում են մի շարք նոր արդյունքներ Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիաների հատկությունների և ինտեգրալ ներկայացումների մասին, Ամենից ավելի ընդհանուր արդյունքը պարունակվում է հետևյալ թեորեմում:

Թեորեմ ρ_1, ρ_2 և μ_1, μ_2 -կամայական պարամետրներ են, որոնք ենթարկվում են

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty, \quad 0 < \mu_1 < +\infty, \quad -\infty < \mu_2 < +\infty$$

պայմաններին: Այդ դեպքում հիշտ են հետևյալ պնդումները:

1. Ամբողջ վերջավոր z -հարթության մեջ տեղի ունի ինտեգրալ առնչությունը

$$E_{\rho_2}(z, \mu_2) = \int_0^{\infty} E_{\rho_1}(z\tau^{\frac{1}{\rho_1}}, \mu_1) \tau^{\mu_1-1} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau, \quad |z| < \infty,$$

որտեղ $\Phi_{\rho, \mu}(s)$ ամբողջ ֆունկցիան ընդհանուր կարգի է և $(1-\rho)^{-1} \rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$ տիպի, որոշվող

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1-\mu + \frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) s^k$$

վերլուծումից, իսկ ρ և μ պարամետրները

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \mu_1)$$

առնչություններին:

2. Հրացուցիչ $\mu_2 > \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1$ պայմանի դեպքում կունենանք $\Phi_{\rho, \mu}(|z| > 0, 0 < \tau < +\infty$:

M. M. JRBASHIAN; R. A. BAGIAN. *On integral representations and measures associated with the functions of Mittag-Leffler type (summary)*

This paper presents a series of new results on properties and integral representations of Mittag-Leffler type entire functions. The most general result is contained in the following theorem.

Let ρ_1, ρ_2 and μ_1, μ_2 be arbitrary numbers satisfying the following restrictions

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty, \quad 0 < \mu_1 < +\infty, \quad -\infty < \mu_2 < +\infty.$$

Then the following assertions hold:

1°. In the whole finite part of z -plane the integral representation

$$E_{\rho_2}(z, \mu_2) = \int_0^{\infty} E_{\rho_1}(z\tau^{\frac{1}{\rho_1}}, \mu_1) \tau^{\mu_1-1} \Phi_{\rho, \mu}(\tau) d\tau, \quad |z| < +\infty$$

is valid, where

$$\Phi_{\rho, \mu}(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(1-\mu + \frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)} \sin \pi \left(\frac{k+1}{\rho} - \mu\right) s^k$$

is an entire function of order $\rho(\rho-1)$ and type

$$(1 - \rho^{-1}) \rho^{-\frac{1}{\rho-1}} \quad \text{and} \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} (1 - \mu_1).$$

2°. Provided $\mu_2 > \frac{\rho_1}{\rho_2} \mu_1$, so $\Phi_{\rho, \mu}(\tau) > 0$, $0 \leq \tau < +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука“, М., 1966.
2. М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян. Классы формул и разложения типа Тейлора—Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, № 1, 1975, 69—122.
3. М. М. Джрбашян. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
4. H. Pollard. The representation of e^{-x^2} as a Laplace integral, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52, 1946, 908—916.
5. H. Pollard. The completely monotonic character of the Mittag—Leffler function $E_\alpha(-x)$, Bul. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1948, 1115—1116.
6. A. Wintner. On Heaviside and Mittag—Leffler's generalizations of the exponential function, the symmetric stable distributions of Cauchy—Levy, and a property of the Γ -function, Journ. de Mathem. pures et appliquees, 1959, 165—182.
7. A. Wintner. Stratifications of Cauchy's „stable“ transcendents and of Mittag—Leffler entire functions, Amer. Jour. of Math., vol. LXXX, № 1, 1958, 111—124.
8. J. A. Shohat and J. D. Tamarkin. The problem of moments, Publ. Amer. Math. Soc., New York, 1943.
9. D. V. Widder. The Laplace transforms, Prinst. Univers. press, 1946.
10. F. Hausdorff. Summationsmethoden und momentenfolgen, Math. Zeitschrift, 9, 1921, I, 74—109; II, 280—299.
11. S. Bernstein. Sur les fonctions, absolument monotones, Acta Mathematica, 52, 1928, 1—66.
12. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968.
13. М. М. Джрбашян, Р. А. Багрян. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 223, № 6, 1975, 1297—1300.

Р. В. АМБАРЦУМЯН, В. К. ОГАНЯН

ОДНОРОДНЫЕ И ИЗОТРОПНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ ВОЛОКОН НА ПЛОСКОСТИ

Развиваемая в настоящей работе теория может рассматриваться как ветвь общей теории случайных множеств [1]. Случайные множества (поля волокон) рассматриваются в R^2 и принадлежат классу $\mathfrak{M}$ множеств, которым (локально) может быть приписана конечная «длина».

Исследование ведется с помощью аппарата, который в [1] получил название метода «ловушек». Основными случайными величинами являются $N(\tau, m) = \text{card } m \cap \tau$, где τ — генерическое обозначение прямолинейного отрезка на плоскости. Рассматриваются однородные и изотропные случайные поля волокон, т. е. поля волокон, распределение которых инвариантно относительно группы всех евклидовых движений плоскости, что дает возможность применять интегрально-геометрическую методику, предложенную в [2], [3] и [4]. Основные результаты касаются существования распределений Пальма, формул Пальма, суперпозиций независимых случайных полей волокон, классификации узлов и условий прямолинейности волокон.

§ 1. Основные определения и общие предложения

Введем обозначения:

R^2 — евклидова плоскость;

M — группа всех евклидовых движений плоскости, $M \in \mathfrak{M}$;

T — группа всех параллельных сдвигов R^2 , $t \in T$;

$B(R^2)$, $B(M)$ — классы борелевских подмножеств R^2 , M соответственно;

H_M — мера Хаара на $B(M)$;

dM — элемент меры H_M ;

MX , tX — образы $X \subset R^2$ при движении $M \in \mathfrak{M}$ и $t \in T$ соответственно;

K — множество всех кругов на плоскости; $K \in \mathfrak{K}$;

B_0 — класс ограниченных борелевских подмножеств R^2 ;

G — множество всех прямых на плоскости, $g \in G$;

dg — элемент инвариантной (относительно M) меры прямых на $B(G)$ — классе борелевских подмножеств G ;

$N(g \cap B, m)$ — число точек пересечения множества $m \subset R^2$ с

$g \cap B$, $g \in G$, $B \in B_0$.

Определение 1. Полеом волокон на плоскости назовем замкнутое множество $m \subset R^2$, для которого при фиксированном $B \in B_0$:

- $N(g \cap B, m)$ как функция от g измерима;
- существует постоянная $C(B) < \infty$ такая, что $N(g \cap B, m) \leq C(B)$ для $g \in G \setminus G_B$, где $\int_{G_B} dg = 0$.

Заметим, что если, например, m состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, то существуют $B \in B_0$ и прямые g , для которых G_B не пусто.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим класс всех полей волокон в R^2 . Пусть $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$. Через $A_1(\mathfrak{M}^*)$ обозначим минимальную τ -алгебру подмножеств $\mathfrak{M}^*$, относительно которой функции $4L_m(B) = \int_{\partial} N(g \cap B, m) dg$

измеримы для любого $B \in B_0$.

Для некоторых классов $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ можно определить τ -алгебру подмножеств $\mathfrak{M}^*$ еще и другим способом.

Пусть τ — прямолинейный отрезок на R^2 . Положим $s(\tau, m) =$ числу связных компонент в $\tau \cap m$, $\bar{\tau}$ — замыкание τ (изолированная точка также является связной компонентой).

По определению, $A'(\mathfrak{M}^*)$ есть минимальная τ -алгебра подмножеств $\mathfrak{M}^*$, относительно которой функции $s(\tau, m)$ оказываются измеримыми. Вопрос о соотношении между τ -алгебрами $A_1(\mathfrak{M}^*)$ и $A'(\mathfrak{M}^*)$ в общем случае не выяснен. Ситуация упрощается, если $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1$.

Определение 2. $\mathfrak{M}_1$ есть следующий класс подмножеств R^2 : для каждого $m \in \mathfrak{M}_1$, множество $m \cap K$, $K \in \mathcal{K}$ представимо в виде объединения конечного числа дифференцируемых дуг (дуга — гомеоморфный образ замкнутого интервала). Точка $w \in m$ называется *узлом*, если для любой окрестности ε точки w замыкание множества $m \cap \varepsilon$ не есть непрерывно дифференцируемая дуга. *Волокнами* данного $m \in \mathfrak{M}_1$ называются непересекающиеся связные компоненты множества $m \setminus \{w\}$ (объединение всех волокон образует $m \setminus \{w\}$). Очевидно, что $L_m(B)$ для $m \in \mathfrak{M}_1$ совпадает с длиной $m \cap B$.

Теорема 1. $A_1(\mathfrak{M}^*) = A'(\mathfrak{M}^*)$ для каждого $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}_1$.

В дальнейшем для краткости будем писать $A(\mathfrak{M}^*) = A_1(\mathfrak{M}^*) = A'(\mathfrak{M}^*)$, а также писать $A = A(\mathfrak{M}^*)$ в тех случаях, когда утверждение верно для каждого $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}_1$.

Доказательству теоремы 1 предположим следующую лемму. Для $A \subset \mathfrak{M}$ положим

$$I_A(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \in A \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1. Для каждого $A \in A_1(\mathfrak{M}^*)$ индикатор $I_A(Mm)$ как функция, определенная на $M \times \mathfrak{M}^*$, измерима относительно $B(M) \times A_1(\mathfrak{M}^*)$ каково бы ни было $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$.

Доказательство. При любом фиксированном $m \in \mathbb{M}$, L_m является мерой на B_0 . (Это следует из ограниченности и τ -аддитивности $N(g \cap B, m)$).

Потому при фиксированном $M \in \mathbb{M}$ и $B \in B_0$

$$L_{Mm}(B) = \int I_B(MP) \cdot L_m(dP) = \int I_{C_0}(M, P) L_m(dP).$$

Здесь I обозначают индикаторы (характ. функции) соответствующих множеств: $C_0 = \{(M, P): MP \in B\}$. Легко видеть, что $C_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{M}) \times \mathcal{B}$.

Если C есть прямоугольник, т. е.

$$C = B_1 \times B_2, \quad B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{M}), \quad B_2 \in \mathcal{B},$$

то интеграл

$$\int I_C(M, P) L_m(dP) = L_m(B_2) \cdot I_{B_1}(M)$$

оказывается $\mathcal{B}(\mathbb{M}) \times A_1(\mathbb{M}^*)$ -измеримой функцией.

Положим

$$F_1 = \left\{ C: C \subset \mathbb{M} \times \mathbb{R}^2, \text{ причем } \int I_C(M, P) L_m(dP) \right. \\ \left. \text{оказывается } \mathcal{B}(\mathbb{M}) \times A_1(\mathbb{M}^*)\text{-измеримой функцией} \right\}.$$

Все прямоугольники из $\mathcal{B}(\mathbb{M}) \times \mathcal{B}$ и их конечные объединения принадлежат F_1 . Очевидно F_1 есть монотонный класс. Поэтому F_1 содержит $\mathcal{B}(\mathbb{M}) \times \mathcal{B}$, т. е. $C_0 \in F_1$. Таким образом, $L_{Mm}(B)$ измерима относительно $\mathcal{B}(\mathbb{M}) \times A_1(\mathbb{M}^*)$.

Мы показали, что индикаторы $I_A(Mm)$ измеримы относительно $\mathcal{B}(\mathbb{M}) \times A_1(\mathbb{M}^*)$ для всех $A \in F_2$, где

$$F_2 = \{A: A = \{m \in \mathbb{M}^*: L_m(B) < x\}\}.$$

Тем же свойством обладает и булева алгебра, порожденная классом F_2 . Так как класс

$$F_3 = \{A \subset \mathbb{M}: I_A(Mm) \text{ измерима относительно } \mathcal{B}(\mathbb{M}) \times A_1(\mathbb{M}^*)\}$$

есть монотонный класс, то F_3 содержит минимальную τ -алгебру, порожденную F_2 , т. е. содержит $A_1(\mathbb{M}^*)$. Лемма доказана.

Замечание 1. Аналогично можно показать, что $L_{tm}(B)$, как функция, определенная на произведении $\{t \in T: tO \in \tau\} \times \mathbb{M}^*$, где τ — некоторый отрезок, измерима относительно произведения σ -алгебры борелевских подмножеств $\{t \in T: tO \in \tau\}$ на $A_1(\mathbb{M}^*)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть фиксирован отрезок $\tau \in \mathbb{R}^2$. Обозначим через W_k прямоугольник с центром в точке O , с длинами сторон, равными k^{-1} и 2^{-k} , причем длинная сторона W_k выбирается параллельной τ . Положим

$$I_+(B, m) = 1, \text{ если } L_m(B) > 0, \quad 0, \text{ если } L_m(B) = 0$$

$$\{\tau, k\} = \{m \in \mathbb{M}^*: s(\tau, m) = k\}.$$

В силу предыдущего замечания, из представления

$$s(\tau, m) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[\int_{t \in \tau} I_+(t W_k, m) dt - L_m(\tau) \right], \quad m \in \mathbb{M}^*.$$

следует измеримость $s(\tau, m)$ относительно $A_1(\mathbb{M}^*)$.

Теперь покажем, что для каждого $B \in \mathcal{B}_0$, $L_m(B)$ есть функция, измеримая относительно $A'(\mathbb{M}^*)$.

Для этого достаточно показать, что для каждой ограниченной области $D \subset R^2$, $L_m(D)$ есть $A'(\mathbb{M}^*)$ -измеримая функция.

Нетрудно видеть, что при фиксированном $m \in \mathbb{M}^*$ существует предел

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} |\tau|^{-1} \int_{M \in D} I_{\{M \in \tau, 1\}}(m) dM = 4L_m(D) + 2L_m(\partial D), \quad (1)$$

$\{\tau_n\}$ — последовательность отрезков с центрами в точке O и с длинами $|\tau_n|$, стремящимися к нулю. Пусть $\{D_k\}$ — монотонно возрастающая последовательность открытых подмножеств D , которая сходится к D . Легко видеть, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [4L_m(D_k) + 2L_m(\partial D_k)] = 4L_m(D). \quad (2)$$

Так как $m \in \mathbb{M}_1$, то $\int_{M \in D} I_{\{M \in \tau, 1\}}(m) dM$ существует в смысле Римана.

Поэтому из представления интеграла как предела интегральных сумм, следует, что $\int_{M \in D} I_{\{M \in \tau, 1\}}(m) dM$ измерима относительно $A'(\mathbb{M}^*)$.

Отсюда вытекает, что правая часть (1) как предел измеримых функций является измеримой функцией относительно $A'(\mathbb{M}^*)$. Тогда из (1) следует, что $L_m(D)$ (следовательно и $L_m(\partial D)$) есть функция, измеримая относительно $A'(\mathbb{M}^*)$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что для любого отрезка τ , $A_1 = \{m: L_m(\tau) > 0\} \in \mathcal{A}$. Рассмотрим также следующие события: $A_2 = \{m: \text{на } \tau \text{ лежит свободный конец волокна}\}$, $A_3 = \{m: \text{на } \tau \text{ лежит узел}\}$, $A_4 = \{m: \text{существует волокно из } m, \text{ касающееся } \tau\}$;

$$\{\tau, \Psi\} = \left\{ m: m \in \bigcup_{i=1}^4 A_i, s(\tau, m) = 1, \psi(m) \in \Psi \right\}.$$

В определении $\{\tau, \Psi\}$, Ψ есть борелевское из $(0, \pi)$, $\psi(m)$ есть угол пересечения τ с волокном в точке $m \cap \tau$.

Предложение 1. Множества A_i , $i = 2, 3, 4$, $\{\tau, \Psi\}$ принадлежат $\mathcal{A}$.

Доказательство. Не нарушая общности можно считать, что τ расположен на оси Ox , $\tau = \{x: 0 < x < |\tau|\}$. Рассмотрим событие

$A = \{\sum s(\tau_i, m) = 1\}$, где $\{\tau_i\}$ — стороны бесконечно малого квадрата с центром в O . Очевидно

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |\tau|^{-1} \int_{\tau \in \tau_i} I_A(t\tau) dt = 1 \quad \text{т. и т. т., когда } m \in A_2.$$

Пусть

$$W_\varepsilon = \{(x, y): -\varepsilon < x < |\tau| + \varepsilon, -\varepsilon < y < \varepsilon, \tau > 0\},$$

в таком случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \int_{M \in W_\varepsilon} I_{[M, \tau, 2]}(m) dM > 0 \quad \text{т. и т. т., когда } m \in A_3,$$

где τ_ε — отрезок длины ε . Но предел в левой части измерим относительно A в обоих случаях, поэтому $A_2, A_3 \in A$.

Далее рассмотрим предел

$$f(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{\tau \in K_r} I_\tau(tK_r, m) dt,$$

где K_r — круг радиуса r с центром в начале координат. Так как $f(m) = \sum \sin^{-1} \psi_i$, если $m \in A_1 \cup A_4$, ∞ — в противном случае, ψ_i — угол, под которым происходит пересечение отрезка в точке P_i [P_i] = $= m \cap \tau$, то измеримость A_4 и $\{\tau, \Psi\}$ следует из измеримости $f(m)$.

Определение 3. Пусть (Ω, F, μ) — вероятностное пространство. Случайным полем волокон (сл. п. в.) класса $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$ называется измеримое отображение $m(\omega): \Omega \rightarrow \mathcal{M}^*$, причем измеримость $m(\omega)$ может пониматься в двух смыслах: либо по отношению к $A_1(\mathcal{M}^*)$, либо по отношению к $A'(\mathcal{M}^*)$. Если $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}_1$ (именно этот случай и рассматривается в дальнейшем), то $A'(\mathcal{M}^*) = A_1(\mathcal{M}^*)$, то есть два определения измеримости эквивалентны.

Вероятность P на A , индуцированная отображением, называется распределением случайного поля волокон.

Определение 4. Суперпозицией двух случайных полей волокон $m_1(\omega)$ и $m_2(\omega)$ называется сл. п. в. $m_1(\omega) \cup m_2(\omega)$. Если $m_1(\omega)$ и $m_2(\omega)$ независимы, то распределение их суперпозиции называется сверткой распределений сл. п. в. $m_1(\omega)$ и $m_2(\omega)$.

Для каждого $M \in \mathcal{M}$ и каждого сл. п. в. $m(\omega)$ определено сл. п. в. $Mm(\omega)$. Его распределение будем обозначать через P_M .

Определение 5. Случайное поле волокон $m(\omega)$ (класса $\mathcal{M}^*$) называется однородным и изотропным, если

$$P_M \equiv P, \quad M \in \mathcal{M}.$$

В этом случае вероятность P называется M -инвариантной.

Следующее предложение непосредственно следует из теоремы Фубини.

Предложение 2. Если вероятность P на A M -инвариантна, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dots = P(A_i) = 0$ для всякого отрезка τ .

Из предложения 1 следует, что в M -инвариантном случае имеет смысл говорить о случайном маркированном процессе пересечений $\{P_i, \psi_i\}$ на прямой g : $|P_i| = m \cap g$, марками ψ_i служат углы, под которыми происходят пересечения волокон с g в точках P_i .

Через $A_K \in A$ обозначим минимальную τ -алгебру подмножеств $\mathcal{M}_1$, содержащую класс $\{\tau, \Psi\}$, $\tau \subset g$, $\Psi \subset (0, \pi)$. Очевидно, распределение маркированного точечного процесса пересечений $\{P_i, \psi_i\}$ определяется сужением P на A_K . Одна из основных задач состоит в определении, насколько широким является класс A_K , т. е. в определении, вероятности каких событий из A могут быть вычислены на основе знания распределений процесса $\{P_i, \psi_i\}$.

Заметим, что на данном этапе развития теории единственный способ задания нетривиальных конкретных вероятностей P на A состоит в построении конкретных отображений $m(\omega) \in \mathcal{M}^*$. Другой путь состоит в задании систем конечномерных распределений

$$P_{(\tau_1, \dots, \tau_m)}^{\psi_1, \dots, \psi_m} \left(= P \left(\bigcap_1^m \{\tau_i, k_i\} \right) \right)$$

или

$$P_{(B_1, \dots, B_m)}^{W_1, \dots, W_m} \left(= P \left(\bigcap_1^m \{L_m(W_i) \subset B_i\} \right) \right)$$

и их продолжения на A . Однако в настоящее время необходимые и достаточные условия, когда такое продолжение возможно остаются неизвестными.

§ 2. Случайные поля волокон конечной интенсивности, их распределения Пальма

Определение 6. Случайное поле волокон $m(\omega) \in \mathcal{M}_1$ называется полем конечной интенсивности, если $EL_m(B) < \infty$ для всякого $B \in \mathcal{B}_0$ (соответствующая вероятность P на A называется 1-финитной).

Предложение 3. Если $m(\omega)$ есть однородное и изотропное конечной интенсивности сл. п. волокон, то $|P_i| = m(\omega) \cap g$ есть случайное точечное поле на g конечной интенсивности λ и наоборот.

Доказательство. Выберем ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^2$.

По теореме Фубини $P\{m: L_m(\partial D)^* = 0\} = 1$. Для каждого m , принадлежащего множеству $\{m: L_m(\partial D) = 0\}$, выполняется

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} |\tau|^{-1} \int_{M \in D} s(M\tau, m) dM = 4L_m(D), \quad 0 \in \tau. \quad (3)$$

Отношение $|\tau|^{-1} \int_{M \in D} s dM$ имеет суммируемую мажоранту. Действительно, при $|\tau| < 1$ оно не превосходит $4L_m(D^+)$, где $D^+ = \bigcup_{M \in D, |\tau|=1} M\tau$. Это есть следствие известного результата из интегральной геометрии [5], согласно которому

$$\int_M s(M\tau, m \cap D^+) dM = 4|\tau| \cdot L_m(D^+).$$

Поэтому при вычислении математического ожидания от обеих частей (3) применима теорема Лебега об интегрировании под знаком предельного перехода при наличии суммируемой мажоранты. Вместе с теоремой Фубини это дает

$$\lambda = \lim |\tau|^{-1} Es(\tau, m) = \frac{2}{\pi} |D|^{-1} EL_m(D) < \infty.$$

Второе утверждение предложения вытекает из неравенства

$$\lim |\tau|^{-1} Es(\tau, m) \geq \frac{2}{\pi} |D|^{-1} EL_m(D),$$

которое следует из (3) по теореме Фату.

Предложение 3 доказано.

Условимся о некоторых обозначениях.

Для каждого поля волокон $m \in \mathfrak{M}_1$ через z будем обозначать одномерную координату точки из m такую, что dz пропорциональна длине вдоль волокна.

Δ всегда обозначает направленный отрезок на плоскости.

В дальнейшем мы будем использовать представление движений из множества $M_{m, \Delta} = \{M \in M: s(\Delta, Mm) = 1\}$ в виде $M = \varphi_{x, \psi} \cdot t_{x, z}$, где $t_{x, z}$ — параллельный сдвиг плоскости, переводящий точку z поля волокон в точку x отрезка Δ ; $\varphi_{x, \psi}$ — вращение плоскости вокруг точки $x \in \Delta$ на некоторый угол, отсчитываемый против часовой стрелки от направления Δ такой, что угол между Δ и Mm в точке x становится равным ψ , $\psi \in (0, \pi)$; для dM на $M_{m, \Delta}$ имеем: $dM = \sin \psi \cdot d\psi \cdot dz \cdot dx$.

Обозначим через $q = (Q, \eta)$ линейный элемент плоскости, т. е. пару, состоящую из точки $Q \in R^2$ и направления η , $\eta \in (0, 2\pi)$.

Нам понадобится также представление элементов M в виде

$$M = M_t \cdot M_g \quad (\text{коротко } M = t \cdot g),$$

где M_g — движение плоскости, которое переводит направленную прямую g на линейный элемент $q = (Q, \eta)$, причем основание перпендикуляра, опущенного из Q на прямую g переходит в точку Q . M_t — параллельный сдвиг вдоль η на вектор длины $|t|$. Имеет место представление $dM = dt \cdot dg$.

По-прежнему

$$D^+ = \{Q: Q \in R^2, \rho(Q, D) < 1\}, \rho - \text{расстояние.}$$

Символ $\Delta \rightarrow q$ означает, что последовательность направленных отрезков $|\Delta_n|$ стягивается к $q = (Q, \eta)$, т. е. $\bigcap_n \Delta_n = Q$, $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$, все Δ_n имеют направление η ; для $m \in [\Delta, 1]$ по-прежнему обозначим через $\psi(m)$ угол, под которым происходит пересечение отрезка Δ , измеряемый от Δ против часовой стрелки; аналогично множествам $[\Delta, \Psi] = \{m: s(1, m) = 1, \psi(m) \in \Psi\}$, Ψ — борелевское множество из $(0, \pi)$, введем множества

$$|q, \Psi| = \left\{ m \in \mathbb{M}_1: m \text{ проходит через точку } Q \text{ и угол между } \right. \\ \left. \text{направлением } \eta \text{ и } m \text{ в точке } Q \text{ принадлежит } \Psi \right\}.$$

Если $Q \in m$, то $\varphi_{q, \eta}$ есть вращение плоскости вокруг точки Q на некоторый угол, отсчитываемый против часовой стрелки от направления η такой, что угол между η и m в точке Q становится равным ψ , $\psi \in (0, \pi)$.

Предложение 4. Пусть P — M -инвариантная, I -финитная вероятность на A , $\Psi = (\psi, \psi + \varepsilon)$. Существует предел

$$\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \Delta \rightarrow 0}} |\Delta|^{-1} s^{-1} P\{| \Delta, \Psi \} = \lambda \cdot \sin \psi.$$

Доказательство. Выберем ограниченную область $D \subset R^2$. Зафиксируем $m \in \mathbb{M}_1$ такое, что $L_m(\partial D) = 0$ (последнее имеет место с вероятностью $P=1$).

Для удобства, точки данного m отождествим с их координатами z .

Выберем отрезок Δ с центром в O . Положим $Z = \{z \in m: \text{существует } M \in M \text{ такое, что } z \in M \text{ при } MO \in D\}$,

$$Z^- = \{z \in m: z \in M\Delta \text{ влечет } M\Delta \subset D\}.$$

Имеем

$$\int_{MO \in D} I_{|\Delta, \Psi|}(Mm) dM = \int_{Z^-} dz \int_0^{2\pi |\Delta|} I_{|\Delta, \Psi|}(\varphi_{x, \psi} \cdot t_{x, z} \cdot m) \sin \psi \cdot d\psi dx + \\ + \int_{Z^+ - Z^-} dz \iint_{\varphi_{x, \psi} \cdot t_{x, z} \cdot m \in D} I_{|\Delta, \Psi|}(\varphi_{x, \psi} \cdot t_{x, z} \cdot m) \cdot \sin \psi \cdot d\psi \cdot dx.$$

Легко видеть, что при фиксированном $z \in Z^+ - Z^-$

$$\iint_{\varphi_{x, \psi} \cdot t_{x, z} \cdot m \in D} I_{|\Delta, \Psi|}(\varphi_{x, \psi} \cdot t_{x, z} \cdot m) \sin \psi \cdot d\psi \cdot dx \leq |\Delta| \cdot |\cos(\psi + \varepsilon) - \cos \psi|.$$

Поскольку $\int_{Z^+ - Z^-} dz \rightarrow 0$ при $|\Delta| \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} |\Delta|^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{Z^+ - Z^-} dz \iint_{\substack{\varphi \in \Psi \\ z \in D}} I_{\Delta, \Psi}(\sin \psi d\psi) \cdot dx = 0.$$

В то же время

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{|\Delta|} \sin \psi \cdot I_{\Delta, \Psi}(\sin \psi d\psi) \cdot dx = 2 \cdot |\Delta| [\cos \psi - \cos(\psi + \varepsilon)].$$

Следовательно

$$\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} |\Delta|^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} \int_{M \in D} I_{\Delta, \Psi}(Mm) dM = 2 \sin \psi \cdot L_m(D). \quad (4)$$

Справедливы также следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\Delta|^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} \int_{M \in D} I_{\Delta, \Psi}(Mm) dM &\leq |\Delta|^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} \times \\ &\times \int_M I_{\Delta, \Psi}(M(m \cap D^+)) dM \leq 2L_m(D^+), \end{aligned}$$

предполагается, что $|\Delta| < 1$.

Следовательно при интегрировании (4) по мере P применима теорема Лебега. Вместе с теоремой Фубини это дает

$$\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} |\Delta|^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} \int_{M \in D} EI_{\Delta, \Psi}(Mm) dM = 2 \sin \psi \cdot EL_m(D).$$

Так как P предполагается M -инвариантной, то $EI_{\Delta, \Psi}(Mm) = P[\Delta, \Psi]$. Таким образом, согласно предложению 3

$$\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} |\Delta|^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} P[\Delta, \Psi] = 2 \sin \psi \frac{EL_m(D)}{2\pi \cdot |\Delta|} = \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin \psi.$$

Предложение 4 доказано.

Обозначим через $A_0, A_0 \subset A$ класс подмножеств $\mathfrak{M}_1$ вида $\bigcap_{l=1}^m [\tau_l, k_l]$, $\tau_l \in R^1$. Легко показать, что сужение на A_0 некоторой вероятности P на A определяет P на A однозначным образом,

Распределения Пальма (тонкое и грубое) данной вероятности P на A мы определим на A_0 с помощью некоторых предельных переходов.

Пользуясь получаемыми выражениями для распределений Пальма, последнее можно продолжать до мер на всем A . Однако вопросы, касающиеся такого продолжения мы оставляем в стороне.

Предложение 5. Пусть P — M -инвариантная, 1-финитная вероятность на A . Для каждого $A \in A_0$, $A = \bigcap_{l=1}^m [\tau_l, k_l]$ существует предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow q} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \pi_q(A), \quad B = |\Delta, 1|, \quad (5)$$

причем

$$\begin{aligned} \pi_q(A) = (2\pi \cdot \lambda \cdot |D|)^{-1} E \int_{m \cap D} dz \int_0^\pi \sin \psi [I_A(\varphi_q, \psi, t_{Q,z} \cdot m) + \\ + I_A(\varphi_q, \psi + \pi, t_{Q,z} \cdot m)] d\psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Выберем область $D \subset R^2$ и зафиксируем $m \in \mathcal{M}_1$ такое, что $L_m(\partial D) = 0$ (множество таких m имеет вероятность $P = 1$).

Покажем, что отношение $|\Delta|^{-1} \int_{tQ \in gD} I_{AB}(tgm) dt$ имеет предел для

почти всех g . Заметим, что в силу выбора m , $g \cap \partial D \cap m = \emptyset$ для почти всех g . Индикатор $I_{AB}(t \cdot g \cdot m)$ может обращаться в единицу лишь при t , лежащих в $|\Delta|$ -окрестности каждого из сдвигов $t_1 = Q - P_i$, $[P_i] = m \cap D \cap g$. Если для данного t_1 , $t_1 g \cdot m \cap \left[\bigcup_{i=1}^m \partial \tau_i \right] = \emptyset$, то при всех достаточно малых значениях Δ I_{AB} есть постоянная величина, равная $I_A(t_1 gm)$. Отсюда следует, что для всех g , для которых

$$t_1 gm \cap \left[\bigcup_{i=1}^m \partial \tau_i \right] = \emptyset \quad \text{для всех } t_1, \quad (7)$$

существует предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow q} |\Delta|^{-1} \int_{mQ \in D} I_{AB}(tgm) dt = \sum_{P_i \in m \cap D \cap g} I_A(t_1 gm). \quad (8)$$

Остается проверить, что множество тех движений g , для которых выполнено (7), есть множество полной меры.

Действительно, если прямую g задавать координатами (p, φ) $dg = dp \cdot d\varphi$, то множеству $\{g: g \cap \partial D \neq \emptyset\}$ соответствует некоторая область в полосе $\{(p, \varphi)\}$, площадь которой не равна нулю. Но множество тех g , для которых (7) не выполнено, изображается в полосе $\{(p, \varphi)\}$ одномерным многообразием, и повтому имеет нулевую площадь.

Легко видеть, что $|\Delta|^{-1} \int_{tQ \in gD} I_{AB}(t \cdot g \cdot m) \cdot dt \leq N(g \cap D^+, m)$,

в то время как

$$\iint N(g \cap D^+, m) dg P(dm) = \int L_m(D^+) P(dm) < \infty.$$

Поэтому равенство (6) получается интегрированием (8) относительно $dg \cdot P(dm)$ с применением теоремы Лебега и Фубини, с учетом того, что $P(B) = \lambda |\Delta| + o(|\Delta|)$ и равенства

$$\int \sum_{P_l \in m \cap D \cap g} I_A(t_l g \cdot m) dg = \int_0^\pi \int_{m \cap D} dz d\psi \cdot \sin \psi [I_A(\varphi_q, \psi, t_{Q,z} m) + I_A(\varphi_q, \psi + \pi, t_{Q,z} m)].$$

Предложение 5 доказано.

Предложение 6. Пусть P есть M -инвариантная, 1-финитная вероятность на A . Для каждого $A \in A_0$, $A = \bigcap_{l=1}^m [\tau_l, k_l]$ множество тех Q , для которых существует предел

$$\pi_{q, \Phi}(A) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow q \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{P(AB)}{P(B)},$$

$B = \{\Delta, \Psi\}$, $\Psi = (\Phi, \Phi + \varepsilon)$, $\Phi \in (0, \pi)$, $\varepsilon > 0$, равный (D -любая ограниченная область)

$$\pi_{q, \Phi}(A) = [2\pi \lambda |D|]^{-1} E \int_{m \cap D} [I_A(\varphi_q, \Phi, t_{Q,z} m) + I_A(\varphi_q, \Phi + \pi, t_{Q,z} m)] \cdot dz,$$

имеет полную одномерную меру Лебега на любом отрезке $\Delta_1 \subset R^2$, если направление последнего совпадает с направлением q .

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathcal{M}_1$, таким образом, что $L_m(\partial D) = 0$ (это имеет место с вероятностью $P=1$). Рассуждением, аналогичным использованному при доказательстве предложения 4, находим, что

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow q \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{M \cap Q \in D} I_{AB}(Mm) dM = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow q \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{m \cap D} dz \int_0^{2\pi} \int_{\Delta} I_{AB}(\varphi_x, \psi, t_{x,z} m) \sin \psi \cdot d\psi \cdot dx.$$

Так как для почти всех пар (z, ψ)

$$I_{AB}(\varphi_x, \psi, t_{x,z} m) \equiv I_{A \cap \{q, \Psi\}}(\varphi_q, \psi, t_{Q,z} m), \quad x \in \Delta,$$

то рассмотренный выше предел оказывается равным

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{m \cap D} dz \int_0^{2\pi} I_{A \cap \{q, \Psi\}}(\varphi_q, \psi, t_{Q,z} m) \sin \psi \cdot d\psi.$$

Рассмотрим отношение под знаком предела. Если для данного $t_{Q,z}$

$$\varphi_q, \Phi, t_{Q,z} m \cap \left[\bigcup_{l=1}^m \partial \tau_l \right] = \emptyset,$$

то при всех достаточно малых растворах ε

$$I_{AB}(\varphi, \psi, tQ, z, m) \equiv I_A(\varphi, \psi, tQ, z, m), \quad \psi \in \Psi.$$

Легко убедиться, что линейная мера множества

$$\left\{ z \in m: \varphi, \psi, tQ, z, m \cap \left[\bigcup_{i=1}^m \partial \tau_i \right] \neq \emptyset \right\}$$

может быть отлична от нуля для некоторых, специальным образом подобранных полей волокон $m \in \mathfrak{M}_1$. Однако, если мы выберем некоторый отрезок $\Delta_1 \subset R^2$ и будем менять q так, чтобы всегда Q лежало бы на Δ_1 , а направление q совпало бы с направлением Δ , то множество тех Q , для которых линейная лебегова мера

$$\left\{ z \in m: \varphi, \psi, tQ, z, m \cap \left[\bigcup_{i=1}^m \partial \tau_i \right] \neq \emptyset \right\} = 0 \quad (9)$$

есть множество полной меры на Δ_1 .

Действительно, каждой паре (z, Q) соответствует параллельный сдвиг tQ, z . При этом множеству $\{(z, Q): z \in m \cap D, Q \in \Delta_1\}$ соответствует некоторое множество параллельных сдвигов, которое обозначим через T_1 .

Если движение $t \in T_1$ таково, что

$$\varphi, \psi, t \cdot m \cap \left[\bigcup_{i=1}^m \partial \tau_i \right] \neq \emptyset, \quad \text{то} \quad m \cap \left[\bigcup_{i=1}^m t^{-1} \varphi, \psi \partial \tau_i \right] \neq \emptyset.$$

Обозначим через (x, y) декартовы координаты на плоскости одного из концов отрезков $t^{-1} \tau_i$. Легко подсчитать, что $dx dy = \sin \Phi dz dQ$, dQ — элемент длины на Δ_1 . Поэтому всякое множество ненулевой $dx \cdot dy$ -меры имеет прообраз ненулевой $dQ \cdot dz$ -меры. В частности, $dQ \cdot dz$ — мера прообраза $m \cap D$, т. е. множества $\{(z, Q): tQ, z, \partial \tau_i \in m\}$, равна нулю. Отсюда по теореме Фубини следует наше утверждение.

Обозначим через Z множество:

$Z = \{Q \in \Delta_1: \text{для } Q \text{ выполняется (9) с вероятностью 1}\}.$

Из сделанного замечания следует по теореме Фубини, что Z есть множество полной меры. Следовательно, при каждом $Q \in Z$

$$\lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} |\Delta|^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{m \cap Q \in D} I_{AB}(Mm) dM = \sin \Phi \int_{m \cap D} dz [I_A(\varphi, \psi, tQ, z, m) + I_A(\varphi, \psi, tQ, z, m)].$$

Так как имеют место неравенства

$$|\Delta|^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{m \cap Q \in D} I_{AB}(Mm) dM \leq |\Delta|^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{m \cap D^+} dz \int_{\Phi}^{\Phi+\pi} \sin \psi \cdot d\psi \int_0^{|\Delta|} dx \leq L_m(D^+),$$

то интегрированием последнего равенства относительно $P(dm)$ обычными приемами, в частности, на основании предложения 4, получаем утверждение. Предложение 6 доказано.

Замечание 2. Аналогично предложению 6 можно было бы доказать также, что при каждом фиксированном q , $A \in A_0$ множество тех Φ , для которых предел $\pi_{q, \Phi}(A)$ существует, имеет полную меру на $(0, \pi)$.

Определение 7. Грубым распределением Пальма случайного поля волокон называется $\pi_q(A)$, $A \in A_0$.

Тонким распределением Пальма случайного поля волокон называется $\Pi_q(A) = \pi_{q, \frac{\pi}{2}}(A)$, $A \in A_0$.

Из М-инвариантности P вытекает следующее равенство:

$$\pi_{q, \Phi}(A) = \Pi_q(A_{\frac{\pi}{2} - \Phi}), \quad (10)$$

где $A_\psi = \{m: \tau_{q, \psi}^{-1} m \in A\}$.

Найдем связь между тонким и грубым распределением Пальма. Дважды поменяв порядок интеграла и математического ожидания в выражении для $\pi_q(A)$, из предложения 5 получим

$$\pi_q(A) = \int_0^\pi \sin \psi \cdot d\psi \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \lambda \cdot |D|} E \int_{m \in D} [I_A(\tau_{q, \psi} t_{q, z} m) + I_A(\tau_{q, \psi + \pi} t_{q, z} m)] dz.$$

Из предложения 6 равенства (10) и из последнего соотношения следует, что

$$\pi_q(A) = \int_0^\pi \Pi_q(A_{\frac{\pi}{2} - \psi}) \sin \psi \cdot d\psi. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть $m(\omega)$ — однородное и изотропное случайное поле волокон конечной интенсивности, P — распределение $m(\omega)$. Грубое распределение Пальма $\pi_q(A)$, $A \in A_0$ вместе со значением λ полностью определяют P .

Доказательство теоремы основывается на выводе обобщенных формул Пальма, которые дают возможность определить P на A_0 с помощью $\pi_q(\cdot)$ и λ . Очевидно, что это эквивалентно утверждению теоремы.

Событие $A = \bigcap_1^m \{\tau_i, k_i\}$ будет рассматриваться как член однопараметрического семейства событий $\{A(\delta, k): 0 < \delta < \tau_1, k > 0\}$

$$A(\delta, k) = \{\tau_1(\delta), k\} \cap \left[\bigcap_2^m \{\tau_i, k_i\} \right].$$

Здесь $\tau_1(\delta)$ обозначает отрезок длины δ , являющийся частью отрезка τ_1 , причем $\tau_1(\delta)$ и $\tau(\delta)$ имеют общий (постоянный) конец.

Отрезок τ_h определяется следующим образом:

$$\tau_h = \tau_1(\delta + h) - \tau_1(\delta),$$

q_k — линейный элемент, для которого точка Q есть конец отрезка $\tau_1(\delta)$, в котором производится приращение τ_k , а τ_1 совпадает с направлением отрезка τ_1 .

Положим $B_k = |\tau_k, k|$. В силу предложения 5

$$P(A(\delta + h, k_1)) = P(A(\delta, k_1) \cap B_0) + P(A(\delta, k_1 - 1) \cap B_1) + o(h), \quad (12)$$

$$P(A(\delta, k_1)) = P(A(\delta, k_1) \cap B_0) + P(A(\delta, k_1) \cap B_1) + o(h). \quad (13)$$

Вычитая (13) из (12), деля результат на h , получим, согласно предложению 5, существование предела правой части результата при $h \rightarrow 0$, т. е. дифференциальное соотношение

$$\frac{d}{d\delta} P(A(\delta, k)) = \lambda \cdot \pi_{q_0}(A(\delta, k_1 - 1)) - \lambda \cdot \pi_{q_k}(A(\delta, k_1)). \quad (14)$$

В интегральной форме (14) принимает вид

$$P(A) = P(A(o, k_1)) + \lambda \int_0^{\tau_k} [\pi_{q_0}(A(\bar{\eta}, k_1 - 1)) - \pi_{q_k}(A(\bar{\eta}, k_1))] d\bar{\eta}. \quad (15)$$

Очевидно, что

$$P(A(o, k)) = 0 \text{ при } k > 0, P(A(o, o)) = \prod_{i=1}^m \{\tau_i, k_i\}.$$

Событие $A(o, o)$ зависит уже от $m - 1$ -го отрезка τ_i , и по отношению к $P(A(o, o))$ может быть проделано аналогичное преобразование, и т. д. На последнем шаге в качестве константы интегрирования появляется $P(|\emptyset, k|)$. Эта вероятность равна нулю при $k > 0$ и единице — при $k = 0$.

Следствие 1. Тонкое распределение Пальма $\Pi_q(\cdot)$, вместе со значением λ полностью определяет соответствующую М-инвариантную, 1-финитную вероятность на A .

Доказательство вытекает из теоремы 2 и (11).

Введем производящие функции $\left(A = \prod_{i=1}^m |\tau_i, k_i|\right)$

$$G(\bar{z}, \delta) = \sum \bar{z}^{\bar{k}} (P(A(\delta, k_1))),$$

$$g(\bar{z}, \delta) = \sum \bar{z}^{\bar{k}} \pi_{q_k}(A(\delta, k_1)),$$

где $\bar{z}^{\bar{k}} = z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$. Уравнение (14) для них запишется в виде

$$\frac{d}{d\delta} G(\bar{z}, \delta) = \lambda \cdot (z_1 - 1) \cdot g(\bar{z}, \delta). \quad (16)$$

Очевидно, его можно проинтегрировать следующим образом:

$$G(\bar{z}, |\tau_1|) = G(\bar{z}, \delta = 0) \cdot \exp \left\{ \lambda \cdot (z_1 - 1) \int_0^{|\tau_1|} \frac{g(\bar{z}, \delta)}{G(\bar{z}, \delta)} d\delta \right\}. \quad (17)$$

Пусть $m_1(\omega), \dots, m_l(\omega)$ суть независимые, одинаково распределенные однородные и изотропные сл. п. в. интенсивности $\lambda \cdot l^{-1}$ каждое. Пусть G_l и g_l относятся к каждому из $m_l(\omega)$. Тогда производящая функция G их суперпозиции будет l -той степенью функции G_l .

Таким образом, получаем

$$G(\bar{z}, |\bar{z}_1|) = G(\bar{z}, \delta = 0) \cdot \exp \left\{ \lambda \cdot (z_1 - 1) \int_0^{|\bar{z}_1|} \frac{g_l(\bar{z}, \delta)}{G_l(\bar{z}, \delta)} d\delta \right\}. \quad (18)$$

Одно из приложений формулы (18) состоит в получении предельных результатов, когда число независимых компонент стремится к бесконечности. При этом очевидно, что $G_l \rightarrow 1$, и формальный предельный переход в (18) дает (звездочкой помечены пределы)

$$G^*(\bar{z}, |\bar{z}_1|) = G^*(\bar{z}, \delta = 0) \cdot \exp \left\{ \lambda \cdot (z_1 - 1) \int_0^{|\bar{z}_1|} g^*(\bar{z}, \delta) d\delta \right\}. \quad (19)$$

Таким образом, предельная производящая функция грубого распределения Пальма g^* для независимых компонент вместе с λ вполне определяет производящую функцию предельного распределения суперпозиции; следовательно, предельное тонкое распределение Пальма для независимых компонент обладает тем же свойством.

§ 3. Случайные поля волокон классов $\mathfrak{X}_2$ и $\mathfrak{X}_3$

Зафиксируем волокно $u \subset R^2$ и отрезок Δ длины $|\Delta|$. На M зададим функцию $I_u(M\Delta)$ следующим образом:

$I_u(M\Delta) = 1$, если $\text{card } \{M\Delta \cap u\} = 2$, 0 — в противном случае.

Предположим, что в точке волокна u , отвечающей координате z , существует кривизна $k(z)$. В таком случае при фиксированном z

$$\int_{z \in M\Delta} I_u(M\Delta) \sin \psi d\psi \cdot dt = \frac{1}{12} k^2(z) |\Delta|^3 + o(|\Delta|^3). \quad (20)$$

Если предположить, что $k(z)$ существует во всех точках u , то формальным интегрированием (20) вдоль u получаем

$$\int I_u(M\Delta) dM = \frac{1}{12} |\Delta|^3 \int_u k^2(z) dz + o(|\Delta|^3). \quad (21)$$

Определение 8. Поле волокон m из $\mathfrak{X}_1$ принадлежит $\mathfrak{X}_2$, если m состоит из волокон, для каждого из которых выполнено асимптотическое равенство (21).

Каждый узел w поля волокон m характеризуется фигурой, которую образуют исходящие из w по направлениям касательных к волокнам в точке w лучи (своим типом). Обозначим через Γ класс узлов,

для которых упомянутые выше лучи попарно не совпадают. Простыми назовем узлы следующих четырех типов: X , Y , V , T (фигура X образована пересечением двух прямых).

Лемма* 2. Пусть поле волокон $m \in \mathfrak{M}$, обладает единственным узлом w . Если отрезок τ принадлежит ограниченной области D , $B_k = [\tau, k]$, то

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} |\tau|^{-2} \int_{Mw \in D} I_{B_k}(Mm) dM = \alpha_k(w), \quad k \geq 2.$$

Числа $\{\alpha_k\}_{k \geq 2}$ определяются типом узла w , причем $\alpha_k < \infty$ *т. и т.*, когда $w \in \Gamma$.

Доказательство. Если m состоит из прямолинейных волокон, то $w \in \Gamma$ и существование предела и неравенство $0 < \alpha_k(w) < \infty$ следует из соображений подобия, если же состоит из криволинейных волокон, то $I_{B_k}(Mm)$, $k \geq 2$ может обращаться в единицу и тогда, когда τ пересекается всего лишь одним волокном из m . Но H_m — мера соответствующего подмножества $\{M: Mw \in D\}$ имеет порядок $|\tau|^3$ (см. определение 8). Главный вклад (порядка $|\tau|^2$) в интеграл $\int I_{B_k}(Mm) dM$ вносит подмножество тех M , для которых Mm пересекает k волокон, исходящих из w , причем имеет место асимптотическое равенство ($k \geq 2$)

$$\int_{Mw \in D} I_{B_k}(Mm) dM = \int_{Mw \in D} I_{B_k}(M\tilde{m}) dM + O(|\tau|^3),$$

где $\tilde{m}$ — поле волокон, которое состоит из касательных к m в w . В случае, когда $w \notin \Gamma$, в последней формуле, при вычислении числа пересечений $M\tilde{m}$ с τ , пересечение хотя бы с одним из лучей $\tilde{m}$ должно зачитываться с кратностью, большей единицы (по числу касательных волокон к этому лучу в w). Допустим, что эта кратность равна $k_0 > 1$. В таком случае

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} |\tau|^{-2} \int_{Mw \in D} I_{B_k}(M\tilde{m}) dM = \infty.$$

Этому соответствует

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} |\tau|^{-2} \int_{Mw \in D} I_{B_k}(Mm) dM = \infty.$$

Лемма 2 доказана.

* Существуют пары волокон u_1, u_2 , для каждого из которых (21) выполняется и которые пересекаются в единственной точке w' , причем $\int I_{u_1 u_2}(M\Delta) dM = O(|\tau|^{1+\alpha})$, $0 < \alpha < 1$. В таком случае точка w' не является, согласно определению 2 узлом, и поэтому $u_1 u_2 \notin \mathfrak{M}_2$.

Совокупность величин $\{a_k(w)\}_{k \geq 2}$ определяется типом данного узла w . Легко видеть, в частности, что класс простых узлов определяется условием

$$z_2(w) > 0, \quad z_k(w) = 0 \text{ при } k \geq 3. \quad (22)$$

Следствием леммы 2 является следующее предельное соотношение:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} |\Delta|^{-2} \int_{M \in D} I_{\{\Delta, k\}}(Mm) dM = \sum_{w_l \in D} a_k(w_l), \quad k \geq 2. \quad (23)$$

Проинтегрируем (23) по мере P . Применением теоремы Фубини и Фату получаем

Предложение 7. Если P — распределение однородного и изотропного сл. п. в. $m(w)$ класса $\mathbb{M}_2$

$$E \sum_{w_l \in D} a_k(w_l) \leq \liminf_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{2\pi |D|}{|\Delta|^2} P\{\Delta, k\}. \quad (24)$$

Следствие 2. Если

$$\liminf_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-2} P\{\Delta, k_0\} = 0, \quad (25)$$

то распределение однородного и изотропного сл. п. в. класса $\mathbb{M}_2$ сосредоточено на множестве полей волокон, имеющих лишь узлы со свойством: $a_k(w) = 0$ для всех $k \geq k_0$, либо вообще не имеющих узлов.

Доказательство. Если (25) выполнено, то из (24) вытекает, что $E \sum_{w_l \in D} a_{k_0}(w) = 0$, т. е. с вероятностью 1 либо множество узлов в D

пусто (и тогда оно с вероятностью 1 пусто на всей плоскости), либо $a_{k_0}(w) = 0$ для каждого $w \in D$ и, следовательно, для каждого $w \in R^2$. Но из $a_{k_0}(w) = 0$ вытекает, что $a_k(w) = 0$ для всех $k \geq k_0$.

Следствие 3. Если $|P_I| = m(w) \cap g$ есть пуассоновское точечное поле пересечений, то с вероятностью 1 узлы $m(w)$ являются простыми, либо вовсе отсутствуют.

Доказательство следует из соотношения $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-2} P\{\Delta, 3\} = 0$, следствия 2 и замечания (22).

Следствие 4. Если $\liminf_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-2} P\{\Delta, k\} < \infty$ для всех $k_1 \geq 2$, то сл. поле волокон $m(w) \in \mathbb{M}_2$ с распределением P не образует узлов из $\bar{\Gamma}$.

Без доказательства приведем следующие две леммы.

Лемма 3. Если $w \in \Gamma$ есть единственный узел поля волокон $m(w) \in \mathbb{M}_2$, то при $\alpha > -2$ существует конечный предел $(\Delta \subset D)$,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-2} \int_{M \in D} I_A(Mm) [\sin^\alpha \psi_1 + \sin^\alpha \psi_2] dM,$$

где I_A есть индикатор события

$A = \{m \in \mathfrak{M}_2, s(\Delta, m) = 2, \Delta \text{ пересекает два различных волокна из } m\}$, ψ_1, ψ_2 — углы, под которыми происходит пересечение отрезка в точках $\{P_1, P_2\} = m \cap \Delta$.

Лемма 4. Если $u \subset R^2$ — волокно, для которого k и k' (k' — производная от кривизны по дуге) суть ограниченные функции, тогда при любом $\alpha > -2$

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} |\Delta|^{-(\alpha+3)} \int I_{\Delta, 2} (Mu) [\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2] dM = \frac{\int k^{\alpha+2}(z) dz}{(\alpha+2)(\alpha+3) \cdot 2^{\alpha+1}}.$$

Определение 9. Поле волокон m принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$, если для каждого волокна $u \subset m$ выполнены условия леммы 3.

Допустим, что некоторое $m \in \mathfrak{M}_2$ обладает узлами только класса Г. Из лемм 2 и 3 вытекает следующее предельное соотношение ($-2 < \alpha < -1$):

$$\lim_{\Delta \rightarrow q} |\Delta|^{-(\alpha+3)} \int_{m \cap \Delta} I_{\Delta, 2} (Mm) (\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2) dM = \frac{\int_{m \cap \Delta} k^{\alpha+2}(z) dz}{(\alpha+2)(\alpha+3) 2^{\alpha+1}} \quad (26)$$

(при таком выборе α , m узлы вклада не дают).

Теорема 3. Пусть $m(\omega)$ есть однородное и изотропное случайное поле волокон. Если в маркированном точечном процессе пересечений $\{P_i, \psi_i\}$ распределение углов пересечений не зависит от распределения точек пересечений и последние составляют пуассоновское точечное поле на прямой, то с вероятностью 1 $m(\omega)$ состоит из прямолинейных волокон.

Доказательство. Условием гарантируется, что с вероятностью $P=1$, $m(\omega)$ образует узлы только простых типов (следствие 3). Поэтому с вероятностью 1 справедливо соотношение (26). Вычислим математическое ожидание от обеих частей (26).

Применяя теоремы Фату и Фубини, получаем

$$E \int_{m \cap \Delta} k^{\alpha+2}(z) dz \leq \lim_{\Delta \rightarrow q} \frac{(\alpha+2)(\alpha+3) \cdot 2^{\alpha+2} \cdot \pi \cdot |D|}{|\Delta|^{\alpha+3}} E I_{\Delta, 2} (\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2). \quad (27)$$

В условиях теоремы предел в правой части оказывается равным нулю. Следовательно, с вероятностью 1 $\int_{m \cap \Delta} k^{\alpha+2}(z) dz = 0$, $\alpha > -2$, т. е.

$k(z) \equiv 0$ для каждого волокна из m . Отсюда следует прямолинейность волокон. Теорема 3 доказана.

Определим сл. п. волокон $m_0(\omega)$ тождеством $m_0(\omega) \equiv OY, P_0$ — распределение сл. поля волокон $m_0(\omega)$.

Рассмотрим класс полей волокон $\mathfrak{M}_4$: каждая $m \in \mathfrak{M}_4$ представляет собой объединение (не более чем счетного числа) бесконечных прямых линий.

Пусть P' — M -инвариантная вероятность на $A(\mathfrak{M}_4)$, описывающая пуассоновское поле прямых на плоскости [1], P' — ее тонкое распределение Пальма. Нетрудно показать, что

$$P' = P_0 * P'.$$

Теорема 4. Пусть P — M -инвариантная 1-финитная вероятность на $A(\mathfrak{M}_3)$, P — ее тонкое распределение Пальма. Если

$$P = P_0 * P, \quad (28)$$

то P сосредоточена на $\mathfrak{M}_4$ и $P = P'$.

Доказательство. Допустим, что существует P на $A(\mathfrak{M}_3)$, удовлетворяющая (28). Обозначим через π_q грубое распределение Пальма вероятности P . Пусть $G(\bar{z})$, $g(\bar{z})$ и $G_0(\bar{z})$ — производящие функции вероятностей событий $A \in A_0$ соответственно для P , π и P_0 . Интегрированием (28) по $(0, \pi)$ с учетом (11) получаем

$$g(\bar{z}) = G_0(\bar{z}) \cdot G(\bar{z}).$$

Из (16) легко следует, что

$$\frac{dG(\bar{z})}{dz_1} = \lambda \cdot (z_1 - 1) \cdot G_0(\bar{z}) \cdot G(\bar{z}).$$

Это уравнение интегрируется к аналогичному (19) виду

$$G(\bar{z}) = G_0(\bar{z}) \cdot \exp \left\{ \lambda \cdot (z_1 - 1) \int_0^1 G_0(\bar{z}) du \right\}.$$

Таким образом, P на $A_0(\mathfrak{M}_3)$ определяется условием (28) и, следовательно, совпадает со значениями P' на $A_0(\mathfrak{M}_4)$, для соответствующих событий.

Но легко показать, что значения P на A_0 однозначно определяют P на σ -алгебре A_g , другими словами, определяют распределение маркированного точечного процесса пересечений $\{P_i, \psi_i\}$. Таким образом, $P = P'$ на A_g . Но для пуассоновского процесса прямых линий $\{P_i, \psi_i\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Следовательно, P сосредоточена на поле прямолинейных волокон. Вероятность событий $\{m$ имеет узлы только типов $X\}$ и $\{m$ не имеет свободных концов} также определяются однозначно по значениям P на A_0 . Следовательно, вероятность обоих равна 1. Это означает, что $\mathfrak{M}_4$ измеримо относительно P и $P(\mathfrak{M}_4) = 1$.

Теорема доказана.

Замечание 3. После установления того факта, что (28) определяет P на A_0 однозначно, равенства $P(\mathfrak{M}_4) = 1$, $P = P'$ следовали

бы непосредственно (без ссылки на теорему 3) если бы предварительно было доказано, что $\mathcal{M}_4 \subset A(\mathcal{M}_3)$. В действительности, можно показать даже, что $\mathcal{M}_4 \in A(\mathcal{M}_1)$ (последнее эквивалентно утверждению теоремы 4 по отношению к классу $A(\mathcal{M}_1)$), однако для того чтобы продемонстрировать это, нам пришлось бы выйти из рамок используемой методики. Ради сохранения цельности изложения, мы довольствуемся более слабым результатом.

Институт математики АН Армянской ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 10.VI.1974

Ռ. Վ. ԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Վ. Կ. ՕՂԱՆՅԱՆ. Հարթության վրա բնիկների համասեռ և իզոտրոպ պատահական դաշտեր (ամփոփում)

Տվյալ աշխատանքում զարգացվող տեսությունը կարելի է դիտարկել որպես պատահական բազմությունների տեսության մի ճյուղ [1]։ Հետազոտումը տարվում է ապարատի օգնությամբ, որը [1] ստացել է «Մուղակի» մեթոդ անունը, Հիմնական պատահական մեծություններ են հանդիսանում $N(\tau, m) = \text{card } \Pi m$, որտեղ Π — հարթության վրա ուղղագիծ հատված է։ Դիտվում են բնիկների համասեռ և իզոտրոպ պատահական դաշտեր, որոնց բաշխումը ինվարիանտ է հարթության բոլոր էվկլիդեսյան շարժումների նկատմամբ, որը հնարավորություն է տալիս կիրառելու ինտեգրալ-երկրաչափական մեթոդիկան, որն առաջարկված է [2], [3] և [4] աշխատանքներում։ Հիմնական արդյունքները վերարկերվում են՝ Պալմա բաշխումների գոյությանը, Պալմայի բանաձևին, բնիկների անկախ պատահական դաշտերի սուպերպոզիցիային, հանգույցների դասակարգմանը և բնիկների ուղղագծության սլայմաններին։

R. V. AMBARTZUMIAN, V. K. OHANIAN. *Homogeneous and isotropic random fields of fibres on the plane (summary)*

The theory described in this article can be viewed as a special branch of the theory of random sets [1].

Random fields of fibers, distribution of which is invariant with respect to the group of euclidian motions of the plane are considered.

The main random values are $N(\tau, m) = \text{card } m\Pi$ where Π — is the generitical line segment on the plane is a field of fibers. The integral geometrical methodology suggested in [2], [3] and [4] is applied. The main results concern the existence of Palm's distributions, Palm's formulas, superpositions of independent random fields of fibres, classification of the knots and conditions to have linear fibers (prob 1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. D. G. Kendall. Foundations of a theory of Random sets, Stochastic Geometry, John Wiley & Sons, 1973.
2. R. V. Ambartzumian. Random fields of segments and random mosaics on a plane, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and probability, v. III.
3. Р. В. Амбарцумян. О случайных полях отрезков и случайных мозаиках на плоскости, Теория вероятностей и ее приложения, XVIII, вып. 3, 1973.
4. Р. В. Амбарцумян. О случайных полях волокон в R^n , ДАН СССР, 214, № 2, 1974.
5. Л. А. Сантало. Введение в интегральную геометрию, 1956.

G. A. ADOMIAN

OBTAINING FIRST AND SECOND ORDER STATISTICS $\langle y \rangle$ and $R_y(t_1, t_2)$ IN STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE NONLINEAR CASE

Previous papers [1, 2] by the author have recently developed a convergent method of successive approximation for determination of the first and second order statistics, $\langle y \rangle$ and $R_y(t_1, t_2)$ for the solution of the nonhomogeneous nonlinear stochastic differential equation

$$Ly + n(y, \dot{y}, \dots) = x(t) \quad (1)$$

where $x(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, a probability space, is a stochastic process; L is a linear stochastic operator [3, 4, 5] given by $L = \sum_{v=0}^n a_v(t, \omega) d^v/dt^v$, an n th order differential operator with stochastic coefficients $a_v(t, \omega)$, $t \in T$,

$$\omega \in (\Omega, \mathcal{F}, \mu), \text{ for } v = 0, 1, \dots, n-1 \text{ and } n(y, \dot{y}, \dots) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m_m} b_\mu(t, \omega) (y^{(\mu)})^{m_\mu}$$

representing a nonlinear operator with stochastic coefficients b_μ on $T \times \Omega$, where $y^{(\mu)}$ of course represents the μ th derivative. The processes may be complex and defined on different probability spaces as well but this will not be shown here.

We assume that the operator L is separable into a sum of deterministic and random parts, L and R respectively, i. e., $L = L + R$. Assuming $a_n > 0$ and is deterministic, while a_v , for $v = 0, 1, \dots, n-1$ may be stochastic, $a_v = \langle a_v \rangle + a_v(t, \omega)$ where a_v is a zero-mean random process, thus $L = \sum_{v=0}^n \langle a_v \rangle d^v/dt^v$ and $R = \sum_{v=0}^{n-1} a_v(t, \omega) d^v/dt^v$. We assume that $\langle a_v \rangle$ exists and is continuous on T . The development also assumes that L is invertible, i. e., a Green's function $e(t, \tau)$ exists. Further, $\langle b_\mu \rangle$ exists and the random or fluctuating parts of a_v and b_μ , given by a_v and β_μ , are continuous, a. e. We assume the input x is bounded on T and that derivatives of a_v and b_μ to the necessary order are bounded, and finally that the input process and coefficient processes are statistically independent. Now we write (1) as

$$y(t, \omega) = L^{-1} x(t, \omega) - L^{-1} R y(t, \omega) - L^{-1} n(y, \dot{y}, \dots) \quad (2)$$

or in terms of the Green's function

$$y(t, \omega) = \int_0^t e(t, \tau) \times (\tau, \omega) d\tau - \int_0^t e(t, \tau) \sum_{\nu=0}^{n-1} z_\nu(\tau, \omega) (d^\nu y(\tau, \omega)/d\tau^\nu) d\tau - \\ - \int_0^t e(t, \tau) \sum_{\mu=0}^{m-1} b_\mu(\tau, \omega) (d^\mu y(\tau, \omega)/d\tau^\mu)^{m,1} d\tau. \quad (3)$$

For the case of zero initial conditions [1, 3], Adomian's "stochastic Green's theorem" allows writing the second term in terms of an adjoint operator as

$$\int_0^t R_1^\dagger [e(t, \tau)] y(\tau, \omega) d\tau$$

where

$$R_1^\dagger [e(t, \tau)] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (d^k/d\tau^k) [z_k(\tau) e(t, \tau)] = K(t, \tau, \omega).$$

This term has also been given elsewhere in terms of a "stochastic resolvent kernel" by Sibul [6] and by Adomian [3]. Letting

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} (-i)^i y_i \text{ where } y_0 = F(t) = L^{-1} x(t) + \Phi \text{ where } \Phi$$

satisfies the homogeneous equation $Ly = 0$, and expanding n in a Taylor series, we obtain an iterative solution [1] with each term y_i for $i \geq 1$ depending on the *previous* y_{i-1} . Since we eventually work back to y_0 , ensemble averages will separate because of the statistical independence of x from the coefficient processes without closure approximations or white noise assumptions.

The objective of this paper is to show further details of the determination of the mean solution $\langle y \rangle$ and the twopoint correlation function $R_y(t_1, t_2)$, or the covariance $K_y(t_1, t_2)$, for $y(t, \omega)$. To obtain these statistical measures [3], y must, of course, be averaged over the space Ω . (If the probability space are different for z_ν , β_μ , x , then the averaging must be carried out over the appropriate spaces). Similarly to obtain $R_y(t_1, t_2)$, we find $\langle y(t_1) y(t_2) \rangle$ or $\langle y(t_1) \bar{y}(t_2) \rangle$ in the complex case. To correspond to earlier notation from the linear case, assume for the moment that $n = 0$ and in terms of the stochastic resolvent kernel Γ

$$y(t, \omega) = F(t, \omega) + \int_0^t K(t, \tau, \omega) y(\tau, \omega) d\tau = \\ = F(t, \omega) + \int_0^t \Gamma(t, \tau, \omega) F(\tau, \omega) d\tau$$

where

$$\Gamma(t, \tau, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} K_m(t, \tau, \omega),$$

$$K_m(t, \tau, \omega) = \int_0^t K(t, \tau_1, \omega) K_{m-1}(\tau_1, \tau, \omega) d\tau_1,$$

$$K_1 = K.$$

Now including the nonlinear term

$$\begin{aligned} \langle y \rangle &= \langle F(t) \rangle - \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle \langle F(\tau) \rangle d\tau - \\ &- \left\langle \int_0^t e(t, \tau) n(y, \dot{y}, \dots) d\tau \right\rangle. \end{aligned}$$

Let's examine the complicating last term for an example, say $n = \beta y^2$. The term becomes

$$- \left\langle \int_0^t e(t, \tau) \beta y^2(\tau) d\tau \right\rangle = - \langle L^{-1} \beta y^2 \rangle$$

$L^{-1} \beta y^2$ adds to the previous linear solution the terms

$$L^{-1} \beta (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots - 2y_0 y_1 + 2y_0 y_2 - 2y_1 y_2 + 2y_1 y_3 - \dots).$$

Thus the nonlinear term adds to $\langle y \rangle$ a series

$$\begin{aligned} &- \left\langle \int_0^t e(t, \tau) \beta y_0^2(\tau) d\tau \right\rangle + \dots = \\ &= - \int_0^t e(t, \tau) \langle \beta(\tau) \rangle \int_0^{\tau} \int_0^{\gamma} e(\tau, \gamma) e(\gamma, \sigma) \langle x(\gamma) x(\sigma) \rangle d\sigma d\gamma d\tau + \dots \end{aligned}$$

where the separation of averages takes place as before.

Now consider $R_y(t_1, t_2) = \langle y(t_1) y(t_2) \rangle$

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \langle [F(t_1, \omega) - \int_0^{t_1} \Gamma(t_1, \tau_1, \omega) F(\tau_1, \omega) d\tau_1 - \\ &- \int_0^{t_1} e(t_1, \tau_1) n(y(\tau_1), \dot{y}(\tau_1), \dots) d\tau_1] \cdot [F(t_2, \omega) - \\ &- \int_0^{t_2} \Gamma(t_2, \tau_2, \omega) F(\tau_2, \omega) d\tau_2 - \end{aligned}$$

$$- \int_0^{t_2} e(t_2, \tau_2) n(y(\tau_2), y(\tau_2), \dots) d\tau_2]^* \rangle.$$

For the linear case this gave

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) = R_{FF}(t_1, t_2) - \int_0^{t_1} \langle \Gamma(t_1, \tau_1, \omega) R_{FF}(\tau_1, t_2) d\tau_1 - \\ - \int_0^{t_1} \langle \Gamma(t_2, \tau_2, \omega) \rangle R_{FF}(t_1, \tau_2) d\tau_2 + \\ + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle \Gamma(t_1, \tau_1, \omega) \Gamma(t_2, \tau_2, \omega) \rangle R_{FF}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

which, as earlier work has shown [4] reduces to the result for perturbation theory *where perturbation theory is applicable*. In the nonlinear case, we obtain nine terms, five of which involve n .

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) = \langle F(t_1) \dot{F}(t_2) \rangle - \int_0^{t_1} \langle \Gamma(t_2, \tau_2) \rangle \langle F(t_1) \dot{F}(\tau_2) \rangle d\tau_2 - \\ - \int_0^{t_1} \langle \Gamma(t_1, \tau_1) \rangle \langle F(\tau_1) \dot{F}(t_2) \rangle d\tau_1 - \\ - \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle \Gamma(t_1, \tau_1) \Gamma(t_2, \tau_2) \rangle \langle F(\tau_1) \dot{F}(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 - \\ - \langle \int_0^{t_2} F(t_1) \dot{e}(t_2, \tau_2) n(y(\tau_2), \dots) d\tau_2 \rangle - \\ - \langle \int_0^{t_1} \dot{E}(t_2) e(t_1, \tau_1) n(y(\tau_1), \dots) d\tau_1 \rangle + \\ + \langle \int_0^{t_1} \Gamma(t_1, \tau_1) F(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} \dot{e}(t_2, \tau_2) n(y(\tau_2), \dots) d\tau_2 \rangle + \\ + \langle \int_0^{t_1} \dot{e}(t_1, \tau_1) n(y(\tau_1), \dots) d\tau_1 \int_0^{t_2} \Gamma(t_2, \tau_2) \dot{F}(\tau_2) d\tau_2 \rangle + \\ + \int_0^{t_1} \dot{e}(t_1, \tau_1) n(y(\tau_1), \dots) d\tau_1 \int_0^{t_2} \dot{e}(t_2, \tau_2) n(y(\tau_2), \dots) d\tau_2 \rangle. \end{aligned}$$

Thus the iterative process will, in the nonlinear case, add the terms (before averaging)

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{t_2} F(t_1) e^*(t_2, \tau_2) \dot{n}(y_0(\tau_2), \dots) d\tau_2 - \\
 & - \int_0^{t_1} \dot{F}(t_2) e(t_1, \tau_1) n(y_0(\tau_1), \dots) d\tau_1 + \\
 & + \int_0^{t_1} \Gamma(t_1, \tau_1) F(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} e^*(t_2, \tau_2) \dot{n}(y_0(\tau_2), \dots) d\tau_2 + \\
 & + \int_0^{t_2} \Gamma(t_2, \tau_2) \dot{F}(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{t_1} e(t_1, \tau_1) n(y_0(\tau_1), \dots) d\tau_1 + \\
 & + \int_0^{t_1} e(t_1, \tau_1) n(y_0(\tau_1), \dots) d\tau_1 \int_0^{t_2} e^*(t_2, \tau_2) \dot{n}(y_0(\tau_2), \dots) d\tau_2
 \end{aligned}$$

+ higher terms involving $y_1, y_2, \dots$.

Suppose as an example again $n(y(\tau)) = \beta y^2(\tau)$ we will obtain (after averaging them) the additional terms to $R_y(t_1, t_2)$ of

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{t_2} F(t_1) e^*(t_2, \tau_2) \beta y_0^2(\tau_2) d\tau_2 - \\
 & - \int_0^{t_1} \dot{F}(t_2) e(t_1, \tau_1) \beta y_0^2(\tau_1) d\tau_1 + \\
 & + \int_0^{t_1} \Gamma(t_1, \tau_1) F(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} e^*(t_2, \tau_2) \beta y_0^2(\tau_2) d\tau_2 + \\
 & + \int_0^{t_2} \Gamma(t_2, \tau_2) \dot{F}(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{t_1} e(t_1, \tau_1) \beta y_0^2(\tau_1) d\tau_1 + \\
 & + \int_0^{t_1} e(t_1, \tau_1) \beta y_0^2(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{t_2} e^*(t_2, \tau_2) \beta y_0^2(\tau_2) d\tau_2
 \end{aligned}$$

and the higher terms of the iteration [1]. We see averages will all separate.

In the linear case, $\langle y \rangle$ was a two-fold integral of $y(t, \omega)$ over the measure spaces of the x process and the coefficients α_i . In the nonlinear case, we have an additional integration because of the $b_\mu(t, \omega)$.

However, because of the statistical independence of coefficients and input and the iteration back to $F(t)$, the separations will occur as before the n term gives us an integral over the measure space of the b_n as discussed earlier [1]. A number of special cases have been considered and will appear elsewhere; the complete theory with applications will appear in a book edited by Richard Bellman.

University of Georgia
Athens, Georgia, U. S. A.

Received 8.X.1975

Գ. Ա. ԱԴՈՄՅԱՆ. Ոչ գծային ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումների առաջին և երկրորդ կարգի $\langle y \rangle$ և $R_y(t_1, t_2)$ ստատիստիկաների ստացումը (ամփոփում)

Հոգվածում ինտերացիայի մեթոդով ստացված են երկու կորելացիայի ֆունկցիաներ $R_y(t_1, t_2)$ և $\langle y \rangle$ միջին լուծումը ընդհանուր ոչ գծային ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարման համար:

Այդ մեթոդը հանդիսանում է Ադոմյանի (գծային հավասարման համար) մեթոդի ընդհանուրացումը:

Г. А. АДОМЯН. Получение статистик первого и второго порядка, $\langle y \rangle$ и $R_y(t_1, t_2)$ для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (резюме)

Для общего нелинейного стохастического дифференциального уравнения среднее решение $\langle y \rangle$ и две точечные функции корреляции $R_y(t_1, t_2)$ получены методом итерации, обобщающего метод Адомяна для линейного стохастического уравнения.

REFERENCES

1. G. Adomian. Nonlinear Stochastic Differential Equations, Jour. of Mathematical Analysis and Applications, in publication.
2. G. Adomian. Stochastic Systems Modelling, Third International Congress of Cybernetics and Systems, Bucharest, Romania, 25—29 August, 1975 (Proceedings to be published in book form).
3. G. Adomian. Random Operator Equations in Mathematical Physics I, Journal of Mathematical Physics, vol. 11, no. 3. pp. 1069—1084, March, 1970.
4. G. Adomian. Random Operator Equations in Mathematical Physics II, Journal of Mathematical Physics, vol. 12, no. 9, pp. 1944—48, September, 1971.
5. G. Adomian. The Closure Approximation in the Hierarchy Equations, Journal of Statistical Physics, vol. 3, no. 2, Summer, 1971.
6. L. H. Stul. Application of Linear Stochastic Operator Theory, Ph. D. Dissertation, Pennsylvania State University, 1968.

С. М. ОГАНЕСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ
 ОРТОГОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ, СУММИРУЕМЫМИ
 В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Пусть

$$T = \|a_{ij}\| \quad (1.1)$$

— линейный регулярный метод суммирования, то есть матрица (1.1) удовлетворяет условиям:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < H, \text{ где } H \text{ не зависит от } i, \quad (1.2)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 1. \quad (1.4)$$

Пусть далее $\varphi(y)$ — любая непрерывная функция, определенная на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(y) \uparrow, \quad \varphi(0) = 0, \quad (1.5)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\varphi(y)}{y} = 0, \quad (1.6)$$

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \text{ при любых } a, b \geq 0. \quad (1.7)$$

Определение. Измеримая функция $f(x)$, определенная почти всюду на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству $L_\varphi[0,1]$, если

$$\int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx < +\infty.$$

В работе [3] было установлено, что если линейный регулярный метод $T = \|a_{ij}\|$ удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^p < +\infty \text{ для каждого } i=1, 2, \dots, \text{ где } 0 < p < 1, \quad (1.8)$$

то для произвольной функции $f(x) \in L_p[0,1]$ ($0 < p < 1$) существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

и последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \dots$, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |A_{i_k}(x, T) - f(x)|^p dx = 0 \quad (0 < p < 1),$$

где T -средние $A_i(x, T)$ существуют в смысле сходимости в $L_p[0, 1]$ для всех $i = 1, 2, \dots$.

Можно доказать, что в указанном утверждении условие (1.8) на метод T излишне, и что вместо подпоследовательности i_k можно взять всю последовательность. Более того, верна

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС в $L_2[0, 1]$, $T = \|a_{ij}\|$ — линейный регулярный метод суммирования. Тогда для любой функции $f(x) \in L_p[0, 1]$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.9)$$

T -средние которого сходятся к $f(x)$ в метрике $L_p[0, 1]$, т. е.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi(|A_i(x, T) - f(x)|) dx = 0, \quad (1.10)$$

где

$$A_i(x, T) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x), \quad S_j(x) = \sum_{k=1}^j c_k \varphi_k(x), \quad (1.11)$$

причем $A_i(x, T)$ существуют в смысле сходимости в $L_2[0, 1]$ для всех $i = 1, 2, \dots$.

Эта теорема представляет также обобщение результатов А. А. Талаляна (см. [1], [2]) о том, что для любой измеримой функции $f(x)$ (соответственно $f(x) \in L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$) и для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$, который сходится по мере (соответственно в метрике $L_p[0, 1]$) к функции $f(x)$.

Действительно, эти теоремы получаются из теоремы 1, когда $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ и, соответственно, $\varphi(x) = x^p$, $0 < p < 1$.

Заметим (см. [3]), что из сходимости ортогональных рядов по мере или в метриках L_p не вытекает их суммируемость в тех же метриках линейными методами, и поэтому из результатов работ [1], [2] не вытекают вышеуказанные частные случаи теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 использована следующая лемма, доказанная в работе [1].

Лемма 1. Пусть $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ интегрируемы с квадратом на отрезке $\Delta \equiv [a, b]$ и $1 > \varepsilon > 0$, $\tau > 0$ — произвольные положительные числа.

Тогда существует функция $\psi(x) \in L_2[a, b]$, обладающая следующими свойствами:

$$1. \quad \psi(x) = 0 \text{ при } x \in \Delta - e, \quad (1.12)$$

где e — измеримое множество, такое, что

$$e \subset \Delta, \mu(e) \leq \varepsilon \mu(\Delta), \quad (1.13)$$

$$2. \quad \int_{\Delta} \psi^2(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Delta} f^2(x) dx, \quad (1.14)$$

$$3. \quad \left| \int_{\Delta} f(x) f_k(x) dx - \int_{\Delta} \psi(x) f_k(x) dx \right| < \sigma, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1.15)$$

причем, если $|f(x)| \leq M$ всюду на $[a, b]$, то функция ψ удовлетворяет неравенству

$$4. \quad |\psi(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}, \quad x \in [a, b]. \quad (1.16)$$

Выполнение условия 4 в формулировке, приведенной в [1], не указано, но оно непосредственно следует из определения функции $\psi(x)$.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — ПОНС в $L_2[0, 1]$, $\Phi(x) \in L_{\varphi}[0, 1]$, $T = \|a_{ij}\|$ — линейный регулярный метод суммирования, определяемый матрицей (1.1) и $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел. Тогда для всякого $0 < \eta < 1$ и любых натуральных N и q существуют конечное число полиномов по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$P_1(x) = \sum_{k=m_1}^{n_1} c_k \varphi_k(x), \quad P_2(x) = \sum_{k=m_2}^{n_2} c_k \varphi_k(x), \dots, \quad P_v(x) = \sum_{k=m_v}^{n_v} c_k \varphi_k(x), \quad (1.17)$$

$$N \leq m_1 < n_1 < m_2 < \dots < m_v < n_v,$$

и натуральные числа

$$m_{v+1}, \quad q < q_1 < q_2 < \dots < q_v, \quad (1.18)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1^\circ \quad \|P_k\|_{L_2} < \eta, \quad k = 1, 2, \dots, v, \quad (1.19)$$

$$2^\circ \quad \int_0^1 \varphi(|\Phi(x) - H(x)|) dx < \eta, \quad (1.20)$$

$$\text{где} \quad H(x) = \sum_{k=1}^v P_k(x), \quad (1.21)$$

$$3^\circ \quad \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_1}^n c_k \varphi_k(x) \right| \right) dx < \eta + \int_0^1 \varphi(|\Phi(x)|) dx, \quad m_1 \leq n \leq n_v, \quad (1.22)$$

$$\text{где} \quad c_k = 0 \text{ при } n_i < k < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, v-1, \quad (1.23)$$

$$4^\circ \quad |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{kn_k}, \quad 1 \leq j \leq n_k, \quad i \geq q_k, \quad k = 1, 2, \dots, v, \quad (1.24)$$

$$5^\circ \quad \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_k}{k}, \quad i > q_k, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1.25)$$

$$6^\circ \quad \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{k}, \quad 1 \leq i \leq q_k, \quad k = 1, 2, \dots, \nu. \quad (1.26)$$

Доказательство. Возьмем ограниченную функцию $|f(x)| \leq M$ такую, что

$$\int_0^1 \varphi(|f(x) - \Phi(x)|) dx < \frac{\eta}{4}. \quad (1.27)$$

Учитывая (1.6), выбираем $0 < \varepsilon < 1$, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon \cdot \varphi\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{4}. \quad (1.28)$$

Возьмем $\delta > 0$ такое, чтобы $\delta < \eta^2$ и для всякой функции $g(x) \in L_2[0, 1]$ из неравенства

$$\int_0^1 g^2(x) dx < \delta \quad (1.29)$$

вытекало бы неравенство

$$\int_0^1 \varphi(|g(x)|) dx < \frac{\eta}{4}. \quad (1.30)$$

Далее, отрезок $[0, 1]$ разделим на конечное число непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\nu$ таким образом, чтобы

$$\frac{4}{\varepsilon} \int_{\Delta_i} f^2(x) dx < \delta, \quad 1 \leq i \leq \nu. \quad (1.31)$$

Если m_k — заранее заданное натуральное число и $\sigma > 0$, то в силу леммы 1, существует $\psi_k(x) \in L_2[0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

$$\psi_k(x) = 0 \quad \text{при } x \in [0, 1] - e_k, \quad e_k \subset \Delta_k, \quad \mu(e_k) \leq \varepsilon \mu(\Delta_k), \quad (1.32)$$

$$\left| \int_{\Delta_k} [\psi_k(x) - f(x)] \varphi_i(x) dx \right| \leq \sigma, \quad 1 \leq i \leq m_k - 1, \quad (1.33)$$

$$\int_{\Delta_k} \psi_k^2(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Delta_k} f^2(x) dx, \quad (1.34)$$

$$|\psi_k(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}. \quad (1.35)$$

Положим

$$F_k(x) = \begin{cases} f(x) - \psi_k(x), & x \in \Delta_k \\ 0, & x \notin \Delta_k, \end{cases} \quad (1.36)$$

$$c_i = \int_0^1 F_k(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.37)$$

В неравенстве (1.33) число $\varepsilon > 0$ можно считать настолько малым, что

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=1}^{m_k-1} c_i \varphi_i(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{8\nu}, \quad (1.38)$$

с другой стороны, поскольку система $\{\varphi_i(x)\}$ полна, можно выбрать $n_k > m_k$ такое, что

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=1}^{n_k} c_i \varphi_i(x) - F_k(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{8\nu}. \quad (1.39)$$

Из (1.7), (1.38), (1.39) вытекает

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=m_k}^{n_k} c_i \varphi_i(x) - F_k(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{4\nu}. \quad (1.40)$$

Далее, из (1.31), (1.34) и (1.36) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=m_k}^n c_i \varphi_i(x) \right|^2 dx \leq \int_0^1 F_k^2(x) dx \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Delta_k} f^2(x) dx < \delta, \quad (1.41)$$

$$(m_k \leq n \leq n_k),$$

откуда, согласно выбору числа $\delta > 0$ (см. (1.29)), будем иметь

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{i=m_k}^n c_i \varphi_i(x) \right| \right) dx \leq \frac{\eta}{4} \quad (m_k \leq n \leq n_k). \quad (1.42)$$

Положим

$$P_k(x) = \sum_{i=m_k}^{n_k} c_i \varphi_i(x). \quad (1.43)$$

Таким образом, для каждого k ($1 \leq k \leq \nu$) определяется полином вида (1.43), который удовлетворяет условиям (1.40), (1.41) и (1.42). При этом важно то обстоятельство, что для каждого k число m_k , независимо от чисел $m_i, n_i, 1 \leq i < k$, можно взять сколь угодно большим.

Поэтому, очевидно, можно считать, что выбраны полиномы (1.43), где $m_1 = N$, $m_k < n_k$, $1 \leq k \leq v$, $m_{i+1} > n_i$, $1 \leq i \leq v-1$, а также числа $q < q_1 < q_2 < \dots < q_v$ и m_{i+1} такие, что наряду с условиями (1.40) — (1.42) для каждого k , $1 \leq k \leq v$, выполнены также неравенства

$$|a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{kn_k} \quad (i \geq q_k, 1 \leq j \leq n_k), \quad (1.44)$$

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\varepsilon_k}{k} \quad (i > q_k), \quad (1.45)$$

$$\sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_k}{k} \quad (1 \leq i \leq q_k). \quad (1.46)$$

Докажем, что полином

$$H(x) = \sum_{i=1}^v \sum_{k=m_i}^{n_i} c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=m_1}^{n_v} c_k \varphi_k(x), \quad (1.47)$$

где

$$c_k = 0 \text{ при } n_i < k < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, v-1, \quad (1.48)$$

удовлетворяет требованиям леммы.

Обозначим

$$Q_j(x) = \sum_{k=1}^j \psi_k(x) \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.49)$$

$$\Phi_j(x) = \sum_{k=1}^j F_k(x) \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.50)$$

$$A_j = \bigcup_{k=1}^j \Delta_k \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.51)$$

$$B_j = \bigcup_{k=1}^j e_k \quad (1 \leq j \leq v). \quad (1.52)$$

Из (1.7), (1.40) и (1.48) следует

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) - \Phi_j(x) \right| \right) dx = \\ & = \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=1}^j \left[\sum_{l=m_k}^{n_k} c_l \varphi_l(x) - F_k(x) \right] \right| \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^j \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_k}^{n_k} c_l \varphi_l(x) - F_k(x) \right| \right) dx \leq \sum_{k=1}^j \frac{\eta}{4v} \leq \frac{v}{4} \end{aligned} \quad (1.53)$$

($1 \leq j \leq v$).

С другой стороны (см. (1.32), (1.36), (1.49),

$$\int_{A_j} \varphi (|f(x) - \Phi_j(x)|) dx = \int_{B_j} \varphi (|Q_j(x)|) dx \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.54)$$

$$\mu(B_j) = \sum_{k=1}^j \mu(e_k) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^j \mu(\Delta_k) \leq \varepsilon, \quad (1.55)$$

и в силу (1.49), (1.35), (1.28)

$$\int_{B_j} \varphi (|Q_j(x)|) dx \leq \varphi\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) \mu(B_j) \leq \varepsilon \cdot \varphi\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) < \frac{\eta}{4} \quad (1 \leq j \leq v), \quad (1.56)$$

т. е. (см. (1.54))

$$\int_{A_j} \varphi (|f(x) - \Phi_j(x)|) dx < \frac{\eta}{4} \quad (1 \leq j \leq v). \quad (1.57)$$

Из (1.53) и (1.57) при $j = v$ получим

$$\int_0^1 \varphi (|f(x) - H(x)|) dx < \frac{\eta}{2}. \quad (1.58)$$

Тогда согласно (1.7), (1.27) и (1.58) будем иметь

$$\int_0^1 \varphi (|\Phi(x) - H(x)|) dx < \eta. \quad (1.59)$$

Это значит, что условие 2° выполнено.

Проверим выполнение условия 3°. Поскольку $\Phi_j(x) = 0$ при $x \notin A_j$, то из (1.53) и (1.57) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) \right| \right) dx &\leq \int_{A_j} \varphi (|\Phi_j(x)|) dx + \frac{\eta}{4} \leq \\ &\leq \int_0^1 \varphi (|f(x)|) dx + \frac{\eta}{2} \quad (1 \leq j \leq v). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Пусть $m_1 \leq n \leq n_v$ и число k ($1 \leq k \leq v$) выбрано так, что

$$m_k \leq n \leq n_k. \quad (1.61)$$

Тогда

$$\sum_{l=m_1}^n c_l \varphi_l(x) = \sum_{l=m_1}^{n_{k-1}} c_l \varphi_l(x) + \sum_{l=n_{k-1}+1}^n c_l \varphi_l(x)^*. \quad (1.62)$$

* при $k=1$ считается равной нулю.

Учитывая (1.42), (1.60) и (1.62) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_1}^n c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx &\leq \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_1}^{n_{k-1}} c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx + \\ &+ \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_k}^n c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx \leq \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx + \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_1}{4}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Отсюда и из (1.27) получаем

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_1}^n c_l \varphi_l(x) \right| \right) dx \leq \int_0^1 \varphi(|\Phi(x)|) dx + \tau_0, \quad (1.64)$$

$$m_1 \leq n \leq n_1,$$

т. е. условие 3° выполнено.

Условие 1° следует из (1.41), так как $\delta < \gamma_1^2$, а условия 4°, 5° и 6° следуют из (1.44)–(1.46). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(x) \in L_{\varphi}[0,1]$, $\{\gamma_{ik}\}$ и $\{\varepsilon_k\}$ — последовательности положительных чисел, где

$$1 > \gamma_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (2.1)$$

Для каждого ε_k , $k=1, 2, \dots$ возьмем δ_k такое, чтобы для всякой функции $g(x) \in L_2[0,1]$ из неравенства

$$\|g(x)\|_{L_2} < \delta_k \quad (2.2)$$

следовало неравенство

$$\int_0^1 \varphi(|g(x)|) dx < \varepsilon_k. \quad (2.3)$$

Потребуем также, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty. \quad (2.4)$$

Возьмем

$$\vartheta_1 = 1, \quad m_{\vartheta_1} = n_{\vartheta_1} = 1, \quad c_1 = 0, \quad P_{\vartheta_1}(x) = \sum_{k=m_{\vartheta_1}}^{n_{\vartheta_1}} c_k \varphi_k(x),$$

и определим $q_{\vartheta_1} > 1$ и m_{ϑ_1+1} такие, что

$$1. \quad |a_{ij}| < \frac{\delta_1}{1 \cdot n_1} \quad (1 \leq j \leq n_{\vartheta_1}, \quad i \geq q_{\vartheta_1}), \quad (2.5)$$

$$2. \quad \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\delta_1}{1} \quad (i \geq q_{\vartheta_1}), \quad (2.6)$$

$$3. \quad \sum_{j=m_{\vartheta_i}+1}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\delta_i}{2} \quad (1 \leq i \leq q_{\vartheta_i}). \quad (2.7)$$

Предположим, что для $\vartheta_e \geq 1$ определены полиномы

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_{\vartheta_e}(x), \quad P_i(x) = \sum_{k=m_i}^{n_i} c_k \varphi_k(x) \quad (1 \leq i \leq \vartheta_e) \quad (2.8)$$

и натуральные числа $m_{\vartheta_e+1}, q_i, 1 \leq i \leq \vartheta_e$, такие, что

$$1 < q_1 < q_2 < \dots < q_{\vartheta_e}, \\ 1 = m_1 = n_1 < m_2 < n_2 < \dots < m_{\vartheta_e} < n_{\vartheta_e} < m_{\vartheta_e+1}. \quad (2.9)$$

Обозначим

$$G_e(x) = \sum_{k=1}^{n_{\vartheta_e}} c_k \varphi_k(x),$$

где

$$c_k = 0 \text{ при } n_i < k < m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \vartheta_e - 1. \quad (2.10)$$

Полагая в формулировке леммы 2

$$\Phi(x) = f(x) - G_e(x), \quad \eta = \eta_{e+1}, \quad \{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\delta_k\}_{k=m_{\vartheta_e+1}}^{\infty},$$

$$N = m_{\vartheta_e+1}, \quad q = q_{\vartheta_e},$$

определим полиномы

$$P_{\vartheta_e+1}(x) = \sum_{k=m_{\vartheta_e+1}}^{n_{\vartheta_e+1}} c_k \varphi_k(x), \dots, P_{\vartheta_{e+1}}(x) = \sum_{k=m_{\vartheta_{e+1}}}^{n_{\vartheta_{e+1}}} c_k \varphi_k(x)$$

и натуральные числа,

$$m_{\vartheta_{e+1}+1}, q_{\vartheta_{e+1}} < q_{\vartheta_{e+2}} < \dots < q_{\vartheta_{e+1}} (q_{\vartheta_{e+1}} > q_{\vartheta_e}), \quad (2.11)$$

которые, после введения обозначений

$$H_{e+1}(x) = \sum_{j=\vartheta_e+1}^{\vartheta_{e+1}} P_j(x), \quad (2.12)$$

$$G_{e+1}(x) = G_e(x) + H_{e+1}(x) = \sum_{k=1}^{\vartheta_{e+1}} c_k \varphi_k(x), \quad (2.13)$$

где $c_k = 0$ при

$$m_{\vartheta_{e+1}} < k < m_{\vartheta_{e+1}+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e - 1, \quad (2.14)$$

удовлетворяют условиям

$$1' \quad \|P_k\|_{L_1} < \eta_{e+1} \quad (k = \vartheta_e + 1, \dots, \vartheta_{e+1}), \quad (2.15)$$

$$2' \quad \int_0^1 \varphi (|f(x) - G_{e+1}(x)|) dx < \eta_{e+1}, \quad (2.16)$$

$$3' \quad \int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{k=m_{\vartheta_e+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right| \right) dx < \eta_{e+1} + \int_0^1 \varphi (|f(x) - G_e(x)|) dx$$

$$(m_{\vartheta_e+1} \leq n \leq n_{\vartheta_e+1}), \quad (2.17)$$

$$4' \quad |a_{ij}| < \frac{\delta_{\vartheta_e+r}}{(\vartheta_e+r) n_{\vartheta_e+r}}$$

$$(r=1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e, j=1, 2, \dots, n_{\vartheta_e+r}, i \geq q_{\vartheta_e+r}), \quad (2.18)$$

$$5' \quad \left| \sum_{j=1}^{\vartheta_e+r} a_{ij} - 1 \right| < \frac{\delta_{\vartheta_e+r}}{\vartheta_e+r} \quad (r=1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e, i \geq q_{\vartheta_e+r}),$$

$$(2.19)$$

$$6' \quad \sum_{j=m_{\vartheta_e+r+1}}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\delta_{\vartheta_e+r}}{\vartheta_e+r+1}, \quad (2.20)$$

$$(r=1, 2, \dots, \vartheta_{e+1} - \vartheta_e, 1 \leq i \leq q_{\vartheta_e+r}).$$

Покажем, что для определенных нами полиномов $\{P_k(x)\}_1^\infty$, ряд

$$\sum_{e=1}^{\infty} \sum_{r=\vartheta_{e-1}+1}^{\vartheta_e} \sum_{k+m_r}^{m_{r+1}-1} c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (\vartheta_0=0) \quad (2.21)$$

удовлетворяет требованиям теоремы.

Сначала покажем, что ряды

$$A_i(x, T) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x), \quad i=1, 2, \dots,$$

где

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^j c_k \varphi_k(x) \quad (2.22)$$

сходятся в $L_2[0,1]$.

Из (2.1) и (2.15) следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_k\|_{L_2} = 0 \text{ и } \|P_k\|_{L_2} \leq 1 \quad (k=1, 2, \dots), \quad (2.23)$$

откуда получаем

$$\|S_j(x)\|_{L_2} \leq r \quad (m_r \leq j \leq m_{r+1} - 1, r=1, 2, \dots). \quad (2.24)$$

Пусть $\delta > 0$ и i — натуральное число.

Выбрав k и r так, чтобы выполнялись неравенства

$$q_{k-1} \leq i < q_k \quad (q_0 = 1), \quad (2.25)$$

$$r \geq k \text{ и } \sum_{e=r}^{\infty} \delta_e < \delta, \quad (2.26)$$

для произвольного натурального $N \geq m_{r+1}$ будем иметь

$$\left\| \sum_{j=m_{r+1}}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{e=r}^{r-2} \left\| \sum_{j=m_{e+1}}^{m_{e+2}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1}^* + \left\| \sum_{j=m_0}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1}, \quad (2.27)$$

где $\vartheta \geq r+1$ определено из неравенства

$$m_0 \leq N < m_{\vartheta+1}.$$

Учитывая, что в силу (2.24), (2.25) и (2.26) выполняются неравенства

$$\left\| \sum_{j=m_{e+1}}^{m_{e+2}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{j=m_{e+1}}^{m_{e+2}-1} |a_{ij}| (e+1) \leq (e+1) \sum_{j=m_{e+1}}^{\infty} |a_{ij}| \leq \delta_e \quad (e \geq r)$$

и

$$\left\| \sum_{j=m_0}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{j=m_0}^N |a_{ij}| \cdot \vartheta \leq \delta_{\vartheta-1}, \quad (2.28)$$

из (2.27) и (2.26) получаем

$$\left\| \sum_{j=m_{r+1}}^N a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_1} \leq \sum_{e=r}^{\infty} \delta_e < \delta. \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что T -средние ряда (2.21) сходятся в $L_2[0,1]$.

Теперь докажем, что $A_i(x, T)$ сходятся к $f(x)$ в метрике $L_\varphi[0,1]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем $\delta > 0$ такое, чтобы для всякой функции $g(x) \in L_2[0,1]$ из неравенства

$$\|g(x)\|_{L_1} < \delta \quad (2.30)$$

следовало бы неравенство

$$\int_0^1 \varphi(|g(x)|) dx < \varepsilon. \quad (2.31)$$

Из (2.1), (2.16) и (2.17) легко следует, что ряд (2.21) сходится к $f(x)$ в метрике $L_\varphi[0,1]$.

* $\sum_{e=r}^{r-2}$ при $\vartheta = 2$ считается равной нулю.

Тогда найдется такое N , что

$$\int_0^1 \varphi(|S_n(x) - f(x)|) dx < \varepsilon, \quad n \geq N. \quad (2.32)$$

Выберем ϑ настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$n_0 \geq N, \quad \sum_{e=0}^{\infty} \delta_e < \delta, \quad (2.33)$$

$$2\delta_k + \delta_{k+1} + \|P_{k+1}\|_{L_1} \cdot H < \delta \quad (k \geq \vartheta), \quad (2.34)$$

где H — константа, фигурирующая в (1.2).

Пусть теперь i — натуральное число такое, что

$$i > q_\vartheta, \quad (2.35)$$

а k удовлетворяет неравенствам

$$k > \vartheta, \quad q_k \leq i < q_{k+1}. \quad (2.36)$$

Представим $A_i(x, T) - f(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_i(x, T) - f(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) - f(x) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x) + \\ &+ \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} S_j(x) + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} S_j(x) + \sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) - \\ &- S_{n_k}(x) + S_{n_k}(x) - f(x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(|A_i(x, T) - f(x)|) dx &\leq \int_0^1 \varphi(|S_{n_k}(x) - f(x)|) dx + \\ &+ \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x)\right|\right) dx + \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} S_j(x) + \right.\right. \\ &\left. + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} S_j(x) - S_{n_k}(x)\right|) dx + \int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x)\right|\right) dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (2.41).

Учитывая (2.32), (2.33) и (2.36), имеем

$$\int_0^1 \varphi(|S_{n_k}(x) - f(x)|) dx < \varepsilon. \quad (2.39)$$

Из (2.18), (2.24) и (2.33) следует

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_2} \leq k \sum_{j=1}^{n_k} |a_{ij}| < \delta_k < \delta, \quad (2.40)$$

откуда (см. 2.30) и (2.31), получаем

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} S_j(x) \right| \right) dx < \varepsilon. \quad (2.41)$$

Рассмотрим теперь сумму $\sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x)$, где $e \geq k+2$. Так как $i < q_{k+1} \leq q_{e-1}$, то из (2.20) и (2.24) вытекает

$$\left\| \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_2} \leq e \sum_{j=m_e}^{\infty} |a_{ij}| < \delta_{e-1} (e \geq k+2), \quad (2.42)$$

Отсюда в силу (2.33), будем иметь

$$\left\| \sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) \right\|_{L_2} \leq \sum_{e=k+2}^{\infty} \delta_{e-1} < \delta, \quad (2.43)$$

которое вместе с (2.31) дает

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{e=k+2}^{\infty} \sum_{j=m_e}^{m_{e+1}-1} a_{ij} S_j(x) \right| \right) dx < \varepsilon. \quad (2.44)$$

Имея в виду (1.2), (2.18), (2.19) (2.20), (2.24) и (2.34), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} S_j(x) + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} S_j(x) - S_{n_k}(x) \right\|_{L_2} = \\ & = \left\| \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{ij} \sum_{s=1}^k P_s(x) + \sum_{j=m_{k+1}}^{m_{k+2}-1} a_{ij} \left(\sum_{s=1}^k P_s(x) + \sum_{e=m_{k+1}}^j c_e \varphi_e(x) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^k P_s(x) \right\|_{L_2} \leq \left\| \sum_{s=1}^k P_s(x) \right\|_{L_2} \left| 1 - \sum_{j=n_k+1}^{m_{k+2}-1} a_{ij} \right| + \|P_{k+1}\|_{L_2} \sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} |a_{ij}| \leq \\ & \leq k \left| 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| + k \sum_{j=1}^{n_k} |a_{ij}| + k \sum_{j=m_{k+2}}^{\infty} |a_{ij}| + \|P_{k+1}\|_{L_2} \cdot H \leq \\ & \leq k \cdot \frac{\delta_k}{k} + k \cdot \frac{\delta_k}{k \cdot n_k} + k \frac{\delta_{k+1}}{k+2} + \|P_{k+1}\|_{L_2} \cdot H < \delta. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Отсюда и из (2.31) следует

$$\int_0^1 \varphi \left(\left| \sum_{l=m_k+1}^{m_{k+1}-1} a_{lj} S_l(x) + \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+2}-1} a_{lj} S_j(x) - S_{n_k}(x) \right| \right) dx < \varepsilon. \quad (2.46)$$

Из (2.38), (2.39), (2.41), (2.44) и (2.46) окончательно получаем

$$\int_0^1 \varphi (|A_l(x, T) - f(x)|) dx < 4\varepsilon, \text{ при } l > q_0. \quad (2.47)$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. А. Талалаяну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.VI.1975

Ս. Մ. Հովհաննիսյան. Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը L_φ տարածություններում գումարվող շարքերով (ամփոփում)

Դիցուք φ -ն դանդաղ աճող անընդհատ ֆունկցիա է որոշված $[0, +\infty)$ -ում, T -ն գծային ռեզոլյար գումարման մեթոդ է, $\{\varphi_k\}$ -ն լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է $L_2[0,1]$ -ում և նպաստված է, որ ցանկացած

$$f \in L_\varphi = \left\{ f: \int_0^1 \varphi(|f(x)|) dx < +\infty \right\}$$

գոյություն ունի $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ շարք, որի T -միջինները ղուգամիտում են f -ին L_φ մետրիկայով:

S. M. HOVHANNISIAN. On the representation of measurable functions by orthogonal series summable in L_φ spaces (summary)

Let φ be a slowly increasing continuous function on $[0, \infty)$, be a linear regular summation method and $\{\varphi_k\}$ be a C.O.N.S. in $L_2[0,1]$. The following assertion is proved.

For any $f \in L_\varphi = \left\{ f: \int \varphi(|f|) dx < +\infty \right\}$ there exists a series $\sum c_k \varphi_k$ such that its T -means converge to f in the metric of L_φ .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958, 374—385.
2. А. А. Талалаян. Представление функций классов $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами, Acta Mathematica Academiae Scientarum Hungaricae 21 (1—2), 1970, 1—9.
3. Н. О. Синамян. Сходимость и суммируемость ортогональных рядов, кандидатская диссертация, Ереван, 1972.

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. Э. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С ОДНОКРАТНЫМ СПЕКТРОМ

В работе изучается вопрос о полноте заданной совокупности собственных элементов произвольного самосопряженного оператора A , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H . В предположении однократности спектра этого оператора, доказывается необходимое и достаточное условие полноты системы $\Phi = \{\varphi_k\}$ его собственных элементов φ_k , отвечающих собственным значениям λ_k , которое формулируется исключительно в терминах резольвенты R_λ рассматриваемого оператора A .

Представляется уместным особо подчеркнуть, что наше условие инвариантно относительно выбора фигурирующего в нем, так называемого, допустимого вспомогательного оператора G , а также и то, что при проверке выполнимости этого условия для конкретного самосопряженного оператора, достаточно знать лишь совокупность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ и нет необходимости находить саму систему Φ , полнота которой исследуется.

1°. В этом пункте приводится подробное доказательство нескольких вспомогательных предложений, используемых при установлении упомянутого выше критерия полноты, а также при доказательстве одного неравенства, аналогичного хорошо известному неравенству Бесселя для произвольных ортонормальных систем.

Пусть E_λ — соответствующее A спектральное семейство проекционных операторов, g — нормированный порождающий (циклический) элемент, $\rho(t) = \|E_t g\|^2$, а $\rho(t) = \rho_d(t) + \rho_a(t) + \rho_s(t)$ — каноническое разложение неубывающей функции $\rho(t)$ на дискретную, абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие, причем $\rho_c(t) = \rho_d(t) + \rho_s(t)$ — вся непрерывная составляющая.

Пусть далее $V: H \rightarrow L^2$ — изометрический оператор, существующий по основной спектральной теореме (см., например, [1]).

Условимся, наконец, неограниченный линейный оператор G с плотной в H областью определения D_G , называть допустимым вспомогательным оператором, если как его ядро, так и его коядро тривиальны ($\ker G = \operatorname{coker} G = \{0\}$), а обратный к нему оператор $G^{-1}: H \rightarrow D_G$ является оператором Гильберта-Шмидта, и поэтому допускает представление:

$$G^{-1}f = \sum_{(p)} \mu_p \cdot (f, \omega_p) \cdot \omega_p; \quad \forall f \in H, \quad (1)$$

где

$$\sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_H^2 < +\infty, \text{ а } \{\omega_p\} \text{ и } \{\omega_p\} — \text{полные в } H$$

ортонормальные системы (см., например, [2]).

Лемма 1. Пусть при некотором $p \in N$ $\rho(\lambda_p + 0) - \rho(\lambda_p - 0) = \Delta_p > 0$, и пусть $\bar{\omega}_k = V\omega_k$, тогда $\bar{\omega}_k(\lambda_p)$ определено при каждом $k \in N$ и имеет место неравенство

$$|\bar{\omega}_k(\lambda_p)|^2 \leq \frac{1}{\Delta_p}. \quad (2)$$

◀ Для доказательства прежде всего заметим, что точка λ_p по условию обладает положительной ρ -мерой, т. е. $\rho(\{\lambda_p\}) = \Delta_p > 0$, и поскольку $\bar{\omega}_k(t) \in L^2_\rho$, то $\bar{\omega}_k(\lambda_p)$ — вполне определенное число.

Далее, поскольку каждый из элементов ω_k имеет единичную норму в H , а оператор V изометрический, то справедлива нижеследующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} 1 &= \|\omega_k\|^2 = \|V\omega_k\|^2 = \int_k |V\omega_k|^2 d\rho(t) = \int_k |\bar{\omega}_k(t)|^2 d\rho(t) > \\ &> \int_k |\bar{\omega}_k(t)|^2 d\rho_d(t) > \sum_{(m)} |\bar{\omega}_k(\lambda_m)|^2 \Delta_m \geq |\bar{\omega}_k(\lambda_p)|^2 \cdot \Delta_p, \end{aligned}$$

откуда уже непосредственно следует неравенство (2). ▶

Лемма 2. Пусть для некоторого $p \in N$, $\Delta_p > 0$, тогда

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 \cdot |\bar{\omega}_k(\lambda_p)|^2 < +\infty. \quad (3)$$

◀ Доказательство непосредственно следует из предыдущей леммы и сходимости ряда $\sum_{(p)} \mu_p^2$. ▶

Лемма 3. Пусть для каждого $p \in N$, $\Delta_p > 0$, тогда нижеследующий двойной ряд

$$\sum_{k, p \in N} \mu_k^2 \cdot |\bar{\omega}_k(\lambda_p)|^2 \Delta_p < +\infty \quad (4)$$

сходится.

◀ Для доказательства прежде всего заметим, что поскольку все члены рассматриваемого двойного числового ряда (4) неотрицательны, то очевидно достаточно доказать его сходимость, например, в нижеследующем порядке суммирования:

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 \left(\sum_{(p)} |\tilde{w}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_p \right).$$

С другой стороны, при доказательстве леммы 1 мы уже видели, что

$$\sum_{(p)} |\tilde{w}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_p \leq \|w_k\|^2 = 1,$$

поэтому сходимость рассматриваемого двойного ряда (4) непосредственно следует опять из сходимости ряда $\sum_{(k)} \mu_k^2$. ►

Лемма 4. Пусть неотрицательная функция $f(t)$ принадлежит $L^1_+(R)$, тогда каждая точка непрерывности функции $\rho(t)$ является точкой непрерывности для

$$\bar{\rho}(x) = \int_{-\infty}^x f(t) d\rho(t),$$

если же

$$\rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0) = \Delta_0 > 0, \text{ то}$$

$$\bar{\rho}(\lambda_0 + 0) - \bar{\rho}(\lambda_0 - 0) = f(\lambda_0) \cdot \Delta_0. \quad (5)$$

◀ Пусть сначала λ_0 — точка непрерывности функции $\rho(t)$, что конечно равносильно тому, что мера $\rho([\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta])$ промежутка $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ стремится к нулю вместе с δ . С другой стороны, для каждого $\delta > 0$ очевидно имеем

$$\bar{\rho}(\lambda_0 + \delta) - \bar{\rho}(\lambda_0 - \delta) = \int_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} f(t) d\rho(t),$$

и так как $f(t)$ суммируема по мере ρ , а ρ -мера множества, по которому производится интегрирование, стремится к нулю вместе с δ , то первая часть утверждения леммы доказана.

Пусть теперь ρ -мера одноточечного подмножества $\{\lambda_0\}$ положительна и, стало быть, функция $f(t)$ обязана быть определена в точке $t = \lambda_0$.

В силу первой части леммы имеем

$$\bar{\rho}(\lambda_0 + 0) - \bar{\rho}(\lambda_0 - 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} f(t) d\rho_d(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{|\lambda_k - \lambda_0| < \delta} f(\lambda_k) \Delta_k, \quad (6)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ — последовательность всех точек разрыва функции $\rho(t)$. С другой стороны, из очевидного неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \Delta_k \leq \int_{\mathbb{R}} f(t) d\rho(t) < +\infty$$

следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $\sum_{k > N_\varepsilon} f(\lambda_k) \Delta_k < \varepsilon$.

Положив $\delta_\varepsilon = \inf_{1 \leq k \leq N_\varepsilon} |\lambda_k - \lambda_0|$, нетрудно понять, что для любого $\delta < \delta_\varepsilon$

будем иметь

$$\sum_{|\lambda_k - \lambda_0| < \delta} f(\lambda_k) \Delta_k = f(\lambda_0) \Delta_0 + \sum_{k \in N_\varepsilon^*} f(\lambda_k) \Delta_k, \quad (7)$$

где N_ε^* — совокупность таких $k > N_\varepsilon$, для которых $|\lambda_k - \lambda_0| \leq \delta$, и поэтому сумма, стоящая справа в (7), очевидно, меньше ε . Переходя в (7) к пределу при $\delta \rightarrow 0$, мы получим вторую часть утверждения леммы, если принять во внимание соотношение (6). ►

Лемма 5. Пусть $F(t)$ — произвольная функция из L_p , тогда для каждого λ_0 , являющегося точкой непрерывности функции $\rho(t)$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{|F(t)| d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = 0. \quad (8)$$

◄ Для доказательства разобьем промежуток интегрирования на две части, тогда будем иметь

$$\tau^2 \int_R \frac{|F(t)| d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = \tau^2 \int_{|t - \lambda_0| < \delta} \frac{|F(t)| d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} + \tau^2 \int_{|t - \lambda_0| > \delta} \frac{|F(t)| d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}. \quad (9)$$

Для первого, из стоящих в (9), интеграла $J_1(\tau)$ справедлива оценка

$$J_1(\tau) \leq \int_{|t - \lambda_0| < \delta} |F(t)| d\rho(t), \quad (9^*)$$

и поскольку $F(t)$ суммируема по мере ρ , а мера множества, по которому производится интегрирование в (9*), равна $\rho(\lambda_0 + \delta) - \rho(\lambda_0 - \delta)$ и, стало быть, стремится к нулю вместе с δ , то найдется $\delta_0 > 0$, зависящее от ε и такое, что $J_1(\tau) \leq \varepsilon/2$. Полагая в (9) $\delta = \delta_0$, для второго, из стоящих справа в (9), интеграла $J_2(\tau)$ справедлива оценка

$$J_2(\tau) \leq \tau^2 \int_R \frac{|F(t)| d\rho(t)}{\delta_0^2 + \tau^2} \leq \frac{\tau^2}{\delta_0^2} \int_R |F(t)| d\rho(t),$$

откуда непосредственно заключаем, что при

$$\tau \leq \frac{\delta_0}{\sqrt{\|F\|_{L_p}}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad J_2(\tau) \leq \varepsilon/2.$$

Итак, предельное соотношение (8) доказано.

Лемма 6. Пусть неотрицательные числа B_m таковы, что ряд $\sum_{m \in N} B_m$ сходится, тогда для любой последовательности $\{i_m\}$,

состоящей из попарно различных вещественных чисел, имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{m \neq k} \frac{B_m}{(\lambda_m - \lambda_k)^2 + \tau^2} = 0. \quad (10)$$

◀ Сначала рассмотрим случай, когда λ_k не является предельной точкой рассматриваемой последовательности, т. е. $\inf_{m \neq k} |\lambda_m - \lambda_k| = \delta > 0$, тогда легко понять, что справедлива оценка

$$\tau^2 \sum_{m \neq k} \frac{B_m}{(\lambda_m - \lambda_k)^2 + \tau^2} \leq \tau^2 \sum_{m \in N} \frac{B_m}{\delta^2},$$

откуда непосредственно следует искомое соотношение (10).

Рассмотрим теперь случай, когда λ_k — предельная точка последовательности $\{\lambda_m\}$, т. е. $\inf_{m \neq k} |\lambda_m - \lambda_k| = 0$. В этом случае при любом $\varepsilon > 0$ целесообразнее разбить участвующую в (10) сумму на две части следующим образом:

$$\tau^2 \sum_{m \in N_\varepsilon} \frac{B_m}{(\lambda_m - \lambda_k)^2 + \tau^2} + \tau^2 \sum_{m > N_\varepsilon} \frac{B_m}{(\lambda_m - \lambda_k)^2 + \tau^2}, \quad (11)$$

где N_ε выбрано так, что $\sum_{m > N_\varepsilon} B_m \leq \varepsilon/2$ (это очевидно возможно, так как ряд $\sum_{(m)} B_m$ сходится), и поэтому второе слагаемое в (11) тоже меньше $\varepsilon/2$. Для оценки первого слагаемого в (11) положим $\delta = \inf_{m \leq N_\varepsilon} |\lambda_m - \lambda_k|$, где нижняя грань берется по всем $m \leq N_\varepsilon$ и отличным от k , тогда ясно, что $\delta > 0$, и поэтому имеем оценку

$$\tau^2 \sum_{\substack{m \leq N_\varepsilon \\ m \neq k}} \frac{B_m}{(\lambda_m - \lambda_k)^2 + \tau^2} \leq \tau^2 \sum_{(m)} \frac{B_m}{\delta^2},$$

следовательно, при достаточно малом τ , первое слагаемое тоже будет меньше $\varepsilon/2$. Итак, предельное соотношение (10) доказано в полном объеме. ▶

Лемма 7. В каждой точке разрыва λ_0 функции ρ имеет место соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\bar{\omega}_p(\lambda_0)|^2 \cdot \Delta_0, \quad (12)$$

где $\Delta_0 = \rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0)$.

◀ Сначала докажем, что левая часть в (12) не превосходит правую часть, а затем докажем, что и правая часть не превосходит левую, чем и будет установлена справедливость соотношения (12).

Для этого, прежде всего, воспользуемся указанной в [3] формулой

$$\|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sup_{\{a\}} \int_R \left| \sum_{(p)} \frac{a_p \mu_p \bar{\omega}_p(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} \right|^2 dt, \quad (13)$$

где верхняя грань распространена на всевозможные последовательности $\{a_p\}$ такие, что $\sum_{(p)} |a_p|^2 = 1$. ►.

Из этой формулы, принимая во внимание неравенство Коши-Буняковского, легко следует оценка

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{F(t) d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}, \quad (14)$$

где положено $F(t) = \sum_{(p)} |a_p|^2 |\omega_p(t)|^2$ и, как показано в [3], $F(t) \in L^1_\rho(R)$.

Пусть теперь $\rho(t) = \rho_d(t) + \rho_c(t)$ — упомянутое выше разложение неубывающей функции $\rho(t)$ на функцию скачков $\rho_d(t)$ и на ее непрерывную составляющую $\rho_c(t)$, тогда очевидно будем иметь

$$\tau^2 \int_R \frac{F(t) d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = \tau^2 \int_R \frac{F(t) d\rho_d(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} + \tau^2 \int_R \frac{F(t) d\rho_c(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2}, \quad (15)$$

и в силу леммы 5 второе слагаемое справа в (15) будет стремиться к нулю при $\tau \rightarrow 0$, а интеграл в первом слагаемом превратиться в соответствующий ряд и поэтому будем иметь

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{F(t) d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{(m)} \frac{F(\lambda_m)}{(\lambda_m - \lambda_0)^2 + \tau^2} \Delta_m, \quad (16)$$

где суммирование распространено на все точки разрыва λ_m функции $\rho(t)$, а Δ_m — скачок $\rho(t)$ в точке λ_m . Поскольку λ_0 по условию тоже точка разрыва, то выделяя соответствующее ей одно слагаемое в правой части (16), получим

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{F(t) d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = F(\lambda_0) \cdot \Delta_0 + \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{\lambda_m \neq \lambda_0} \frac{B_m}{(\lambda_m - \lambda_0)^2 + \tau^2}, \quad (17)$$

где положено $B_m = F(\lambda_m) \Delta_m$, а суммирование распространено по всем λ_m отличным от λ_0 . Но так как ряд

$$\sum_{(m)} B_m = \sum_{(m)} F(\lambda_m) \Delta_m$$

очевидно сходится (его сумма не превосходит $\|F\|_{L^1_\rho}$), то в силу леммы 6 второе слагаемое в (17) стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$, следовательно, левая часть из (12) действительно не превосходит правую.

Перейдем теперь к доказательству обратного неравенства. Из (13) ясно, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 > \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{\left| \sum_{(p)} a_p |\omega_p(t)|^2 \right|^2 d\rho_d(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} +$$

$$+ \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_R \frac{\left| \sum_{(p)} a_p \mu_p \bar{\omega}_p(t) \right|^2}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} d\mu_c(t), \quad (18)$$

и поскольку $\left| \sum_{(p)} a_p \mu_p \bar{\omega}_p(t) \right|^2$ при любых $\{a_p\}$ таких, что $\sum_{(p)} |a_p|^2 = 1$, очевидно не превосходит функцию $F(t) \in L^1_R$, то в силу леммы 5, второе справа слагаемое в (18) стремится к нулю, поэтому это неравенство примет вид

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_0 + i\tau} G^{-1}\|^2 \geq \left| \sum_{(p)} a_p \mu_p \bar{\omega}_p(\lambda_0) \right|^2 \cdot \Delta_0 - \\ + \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{\lambda_m \neq \lambda_0} \frac{B_m^*}{(\lambda_m - \lambda_0)^2 + \tau^2}, \quad (19)$$

где $B_m^* = \left| \sum_{(p)} a_p \mu_p \bar{\omega}_p(\lambda_m) \right|^2 \Delta_m$.

Докажем, что ряд с неотрицательными членами

$$\sum_{(m)} B_m^* \quad (20)$$

сходится, и поэтому второе справа слагаемое в (19), в силу леммы 6, тоже стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$.

В самом деле, так как $\sum_{(p)} |a_p|^2 = 1$, то по неравенству Коши-Буняковского очевидно будем иметь

$$B_m^* \leq \sum_{(p)} \mu_p^2 |\bar{\omega}_p(\lambda_m)|^2 \Delta_m = B_m^{**},$$

и поэтому ряд

$$\sum_{(m)} \left(\sum_{(p)} \mu_p^2 |\bar{\omega}_p(\lambda_m)|^2 \Delta_m \right) = \sum_{(m)} B_m^{**}$$

будет мажорантным для ряда (20) и сходящимся в силу леммы 3.

Таким образом, обратное неравенство тоже установлено, чем и завершается доказательство соотношения (12). ►

2°. В этом пункте, опираясь на доказанные выше леммы, мы установим одно неравенство, которое можно рассматривать как некоторый аналог классического неравенства Бесселя, а именно, справедливо следующее

Предложение 1. Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в H с однократным спектром, R_λ — его резольвента, а G — некоторый допустимый вспомогательный оператор, тогда для любой совокупности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ собственных значений оператора A имеет место неравенство

$$\sum_{(k)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 \leq \|G^{-1}\|_S^2. \quad (21)$$

◀ Каждый из членов этого ряда, в силу леммы 7, может быть записан в виде

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k,$$

поэтому искомое неравенство (21) без труда следует из нижеследующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \sum_{(k)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 &= \sum_{(k)} \left(\sum_{(p)} \mu_p^2 |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right) = \\ &= \sum_{(p)} \mu_p^2 \left(\sum_{(k)} |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right) \leq \sum_{(p)} \mu_p^2 \int_R |\bar{\omega}_p(t)|^2 d\rho_d(t) \leq \\ &\leq \sum_{(p)} \mu_p^2 \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{(p)} \mu_p^2 \|\omega_p\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

3°. Доказанные выше леммы позволяют установить нижеследующий критерий полноты системы собственных элементов, являющийся основным результатом настоящей статьи.

Теорема. Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}$ — некоторая система собственных элементов самосопряженного оператора A с однократным спектром, отвечающих собственным значениям $\lambda_k \in \Lambda$, R_λ — его резольвента, а G — некоторый допустимый вспомогательный оператор, тогда эта система полна в H , если и только если

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 = \|G^{-1}\|_S^2. \quad (22)$$

◀ **Необходимость.** Пусть система Φ полна в H и, стало быть, непрерывный спектр отсутствует и вся спектральная мера сосредоточена в точках $\lambda_k \in \Lambda$, следовательно,

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \Delta_k = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} [\rho(\lambda_k + 0) - \rho(\lambda_k - 0)] = 1.$$

Докажем, что имеет место соотношение (22). В самом деле, по лемме 7 имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \cdot |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k, \quad (12)$$

следовательно

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \left(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right). \quad (23)$$

С другой стороны, поскольку $\rho(t) = \rho_d(t)$, имеет место цепочка равенств

$$1 = \|\omega_p\|^2 = \|V\omega_p\|^2 = \|\tilde{\omega}_p(t)\|_{L^2_F}^2 = \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho(t) =$$

$$= \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho_d(t) = \sum_{(k)} |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k,$$

и поэтому из (23) непосредственно заключаем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2.$$

Достаточность. Пусть теперь соотношение (22) выполнено. Докажем сначала, что непрерывная составляющая спектральной меры отсутствует.

Допустим, вопреки нашему утверждению, что некоторая положительная доля спектральной меры ρ принадлежит непрерывной составляющей, тогда найдется множество $M \subset R$ такое, что $\rho_d(M) = 0$, $\rho_c(M) > 0$, и так как система $\{\tilde{\omega}_p(t)\}$ полна в $L^2_\rho(R)$, то найдется хотя бы одна функция из этой системы, например, $\tilde{\omega}_{p_0}(t)$, которую можно без ограничения общности считать отличной от нуля почти всюду на M и, стало быть

$$\int_M |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 d\rho_c(t) > 0. \quad (24)$$

С другой стороны, как и выше, имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} 1 = \|\omega_{p_0}\|^2 &= \int_R |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 d\rho_d(t) + \int_R |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 d\rho_c(t) > \\ &\geq \sum_{(k)} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k + \int_M |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 d\rho_c(t), \end{aligned}$$

и поэтому, в силу (24), получаем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k < 1. \quad (25)$$

Теперь уже легко прийти к противоречию с соотношением (22). В самом деле

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 &= \sum_{(p)} \mu_p^2 \left(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right) = \\ &= \mu_{p_0}^2 \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k + \sum_{p \neq p_0} \mu_p^2 \int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho_d(t), \end{aligned}$$

но принимая во внимание строгое неравенство (25), а также и то, что

$\int_R |\tilde{\omega}_p(t)|^2 d\rho_d(t)$ очевидно меньше нормы $\|\omega_p\|^2 = 1$, получим неравенство

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 < \mu_{p_0}^2 + \sum_{p \neq p_0} \mu_p^2 = \|G^{-1}\|_S^2,$$

которое противоречит соотношению (22).

Докажем теперь, что система Φ полна в H , для чего очевидно достаточно установить, что $\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \Delta_k = 1$. Допустим, вопреки нашему утверждению, что $\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \Delta_k \leq 1 - \delta$, где $\delta > 0$.

В силу доказанного выше, имеем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 = \sum_{(p)} \mu_p^2 \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k. \quad (23)$$

С другой стороны, по только что доказанному, непрерывная составляющая спектральной меры отсутствует, а по предположению $\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \Delta_k \leq 1 - \delta$, поэтому найдется хотя бы одна точка $\lambda_0 \in \Lambda$ такая, что $\rho(\{\lambda_0\}) = \Delta_0 > 0$.

Далее, поскольку система $\{\bar{\omega}_p(t)\}$ полна в $L^2(R)$, то найдется функция $\tilde{\omega}_{p_0}(t)$ такая, что $\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_0) \neq 0$. Ясно, что для этой функции $\tilde{\omega}_{p_0}(t)$ имеет место неравенство:

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k \leq 1 - |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_0)|^2 \Delta_0. \quad (26)$$

В самом деле, это непосредственно следует из того, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k &< \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k + |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_0)|^2 \Delta_0 \leq \\ &\leq \int_R |\bar{\omega}_{p_0}(t)|^2 d\rho_d(t) = \int_R |\tilde{\omega}_{p_0}(t)|^2 d\rho(t) = 1. \end{aligned}$$

Теперь уже легко прийти к противоречию с соотношением (22), так как в силу (26) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} G^{-1}\|^2 &= \sum_{p \neq p_0} \mu_p^2 \left(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\bar{\omega}_p(\lambda_k)|^2 \Delta_k \right) + \mu_{p_0}^2 \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |\tilde{\omega}_{p_0}(\lambda_k)|^2 \Delta_k \leq \\ &\leq \sum_{p \neq p_0} \mu_p^2 + \mu_{p_0}^2 (1 - |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_0)|^2 \Delta_0) = \sum_{(p)} \mu_p^2 - \mu_{p_0}^2 |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_0)|^2 \Delta_0 = \\ &= \|G^{-1}\|_S^2 - \mu_{p_0}^2 \cdot |\bar{\omega}_{p_0}(\lambda_0)|^2 \Delta_0 < \|G^{-1}\|_S^2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻԱՆ, Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Միավորական ինֆինիտ-
մալույթ օպերատորի սեփական էլեմենտների սխեմայի լրիվության մի ճայտանիշի մասին
(ամփոփում)

Հետազոտվում է սեպարաբիլ հիլբերտյան տարածության մեջ զործող կամայական ինֆինի-
տմալույթ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության հարցը:

Անհրաժեշտ օպերատորի սպեկտրի միապատկերվածը, ապացուցված է լրիվության ան-
հրաժեշտ և բավարար պայման, որն ձևակերպված է միայն օպերատորի ռեզոլվենտի տեր-
միններով:

R. A. ALEXANDRIAN, R. Z. MKRTCHIAN. *On the criterion of completeness
of the system eigenelements general selfadjointed operator with simple spectrum*
(summary)

Completeness of given system of eigenelements of arbitrary selfadjointed operator in separable Hilbert space is studied.

Necessary and sufficient condition of completeness is proved in the case when the spectrum of operator is simple.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К. Морен. Методы гильбертова пространства, Изд. "Мир", М., 1965.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. "Наука", М., 1965.
3. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 2, 1970.

А. Х. МЕГРАВЯН

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Как известно [8, 9, 13, 14], теория линейных систем с дискретным временем основана на уравнениях вида

$$x_{n+1} = Tx_n + \Phi u_n,$$

$$v_n = \bar{\Phi} x_n + Ku_n,$$

где $T, \Phi, \bar{\Phi}, K$ — линейные операторы, отображающие гильбертовы пространства H и E снова в H и E :

$$T: H \rightarrow H, \Phi: E \rightarrow H, \bar{\Phi}: H \rightarrow E, K: E \rightarrow E.$$

Если входной сигнал u_n имеет вид $u_n = z^n u_0$, где z — комплексное число, то решения x_n и v_n можно искать также в виде $x_n = z^n x_0$, $v_n = z^n v_0$. Тогда мы получим для x_0, v_0 выражения вида: $x_0 = R(z) u_0$, $v_0 = S(z) u_0$, где $R(z)$ и $S(z)$ определяются равенствами

$$R(z) = (zI - T)^{-1} \Phi \quad (R: E \rightarrow H)$$

$$S(z) = K + \bar{\Phi} (zI - T)^{-1} \Phi \quad (S: E \rightarrow E).$$

Пара отображений $R(z), S(z)$ называется открытой системой F , ассоциированной с линейным узлом

$$L = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \bar{\Phi} & K \end{pmatrix},$$

а отображение $S(z)$ — передаточным оператором системы F . Здесь возникает следующая проблема. Пусть задана некоторая аналитическая функция $S(z)$. Требуется построить линейный узел L (и, следовательно, систему F), для которого $S(z)$ является передаточным оператором. В этом случае говорят, что узел L является реализацией оператор-функции $S(z)$. В настоящей статье эта задача рассматривается только для случая $\dim E = 1$, поэтому $S(z)$ — комплекснозначная функция.

Один из возможных методов реализации заключается в том, чтобы передаточную функцию представить в виде произведения $S(z) =$

$$= \prod_{k=1}^n S_k(z) \text{ более простых сомножителей, дать реализацию каждой}$$

функции $S_k(z)$ в виде системы F_k ($k=1, 2, \dots, n$); а затем, соединяя последовательно (сцепляя) системы F_k , получить некоторую реализацию функции $S(z)$. На этом пути появляется возможность использования известных мультипликативных представлений для различных классов мероморфных функций. В частности, если $S(z)$ удовлетворяет условию $|S(z)| < 1$ ($|z| < 1$), можно применить известное мультипликативное представление типа Бляшке

$$S(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - z}{1 - \bar{\lambda}_k z} \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta) \right\}.$$

При этом возникает, очевидно, дополнительная трудность, связанная с тем, что произведение Бляшке может быть бесконечным, а также с возможным присутствием экспоненциального сомножителя. Для функций указанного класса эта задача была решена в работах [2], [12].

Как известно, М. М. Джрбашян [6] построил теорию мультипликативных представлений, по существу, для сколь угодно широких классов мероморфных в единичном круге функций. Естественно возникает мысль использовать эти разложения для проблемы реализации различных классов функций, выходящих за рамки указанного выше класса, ограниченных в круге $|z| < 1$, а также выяснить физический смысл этих реализаций. Для некоторых специальных, но принципиально важных случаев эта задача была в работе М. С. Лившица [10]. Настоящая статья посвящена решению указанной задачи для классов М. М. Джрбашяна D_α и N_α при $\alpha=1, 2, \dots$.

§ 1. Предварительные сведения

1°. Пусть имеем пару гильбертовых пространств H (внутреннее) E (внешнее) и четыре линейных ограниченных оператора

$$T: H \rightarrow H, \Phi: E \rightarrow H, \bar{\Phi}: H \rightarrow E, K: E \rightarrow E.$$

Символ

$$L = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \bar{\Phi} & K \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

называется линейным узлом*.

Пара отображений

$$\left. \begin{aligned} R &= (zI - T)^{-1} \Phi & (R: E \rightarrow H) \\ S &= K + \bar{\Phi} (zI - T)^{-1} \Phi & (S: E \rightarrow E) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

* В отличие от узлов, рассматриваемых в работах [1], [2], [11], [12], [14], операторы в линейном узле не связаны дополнительными соотношениями.

называется открытой системой F , ассоциированной с узлом L , а отображение S — передаточным оператором системы F . Если

$$L_k = \begin{pmatrix} T_k & \Phi_k \\ \tilde{\Phi}_k & K_k \end{pmatrix} \quad (k=1, 2)$$

— узлы с одинаковым внешним пространством $E_1 = E_2 = E$ и внутренними пространствами H_k ($k=1, 2$), то узел $L = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \tilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$, задаваемый равенствами

$$\left. \begin{aligned} H &= H_1 + H_2, \\ T &= T_1 P_1 + T_2 P_2 + \Phi_2 \tilde{\Phi}_1 P_1, \\ \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 K_1, \\ \tilde{\Phi} &= K_2 \tilde{\Phi}_1 P_1 + \tilde{\Phi}_2 P_2, \\ K &= K_2 K_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

называется сцеплением узлов L_1, L_2 ($L = L_1 \vee L_2$).

Пусть $F_k = |R_k: E \rightarrow H_k, S_k: E \rightarrow E|$ ($k=1, 2$) — две открытые системы с общим внешним пространством E и внутренними пространствами H_k ($k=1, 2$). Система F , задаваемая отображениями $R: E \rightarrow H, S: E \rightarrow E$, называется сцеплением систем F_1, F_2 ($F = F_1 \vee F_2$), если R и S определены равенствами

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 S_1, \\ S &= S_2 S_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Имеет место теорема о сцеплении (композиции) узлов.

Теорема А. Если узел L является сцеплением узлов L_1, L_2 , то система F , ассоциированная с узлом L , является сцеплением систем F_1, F_2 .

В работе [10] вводятся линейные узлы специального вида. Пусть $\dim E=1$, $H \equiv H(t_1, t_2) = L_2(F; t_1, t_2)$ — пространство векторнозначных функций $f(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) со значениями в заданном гильбертовом пространстве F и со скалярным произведением

$$(f, g)_{H(t_1, t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), g(t))_F dt. \quad (1.5)$$

Строится семейство узлов $L(t_1, t_2)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) вида

$$T(t_1, t_2) f(x) = [\exp Q(x)] (Bf)(x) + \int_{t_1}^x \exp [\beta(x-t)] (f, P_0)_F q_0 dt, \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} q(t_1, t_2) &= q_0 \exp [\beta (x - t_1)], \\ p(t_1, t_2) &= p_0 \exp [\beta (t_2 - x)], \\ k(t_1, t_2) &= \exp [\beta (t_2 - t_1)], \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где $Q(x)$ — комплекснозначная функция, B — линейный оператор в F , p_0, q_0 (каналовые элементы) $\in H^*$.

Доказывается, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} L(t_1, t_3) &= L(t_2, t_3) \vee L(t_1, t_2) \quad (t_1 < t_2 < t_3), \\ F(t_1, t_3) &= F(t_2, t_3) \vee F(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Передаточная оператор-функция будет иметь следующий вид:

$$S(z) = \exp \left\{ \beta (t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} ((zI - [\exp Q(t)] B)^{-1} q_0, p_0) dt \right\}. \quad (1.8)$$

Реализовать функцию $f(z)$ означает построить линейный узел L так, чтобы передаточная функция системы F , ассоциированная с узлом L , совпадала бы с функцией $f(z)$.

2°. Существенную роль в теории мероморфных функций играют формула Иенсена—Неванлинны и выводимое из нее понятие характеристической функции $T(r, F)$. Как известно, класс N Р. Неванлинны определяется как множество мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} T(r, F) < \infty.$$

Известно также, что почленный предельный переход в формуле Иенсена—Неванлинны возможен для функций класса N и только для них. Именно таким и способом в свое время была получена классическая теорема Р. Неванлинны о факторизации класса N .

В связи с этим в свое время был поставлен вопрос—существуют ли более общие формулы типа Иенсена—Неванлинны и возможно ли определить ассоциированные с такими тождествами новые классы мероморфных в круге функций и установить их параметрическое представление? Постановка этой проблемы и первые результаты в направлении ее решения содержатся в ранней работе М. М. Джрбашяна (см. [4] и [5]). Здесь впервые были получены принципиально новые обобщенные формулы типа Иенсена—Неванлинны, определен класс D_α ($0 < \alpha < \infty$) мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых характеристика $T(r, F)$ удовлетворяет условию

* Если α -орт пространства E , то полагаем $\Phi(\alpha) = q$ ($q \in H$), $\tilde{\Phi}(x) = (x, p)$ α .
Передаточный оператор $S(z)$ записывается так:

$$S(z) = k + ((zI - T)^{-1} q, p).$$

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} T(r, F) dr < +\infty$$

и было установлено каноническое (но не параметрическое) представление этих классов.

Приведем некоторые из указанных результатов, на которые мы будем существенно опираться в дальнейшем.

Пусть

$$U_\alpha(z; \zeta) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \frac{\log \left| 1 - \frac{re^{i\theta}}{\zeta} \right|}{(1 - zre^{-i\theta})^{\alpha+1}} r dr d\theta. \quad (1.9)$$

Лемма А. При $|z| < 1$, $0 < |\zeta| < 1$ имеют место соотношения

$$U_{\alpha-1}(z; \zeta) - U_\alpha(z; \zeta) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^\alpha, \quad (1.10)$$

$$U_0(z; \zeta) = \log \frac{1 - \bar{\zeta}z}{|\zeta|^2}.$$

Лемма В. При целом $\alpha = p$ и $0 < |\zeta| < 1$

$$U_p(z; \zeta) = \log \frac{1 - \bar{\zeta}z}{|\zeta|^2} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^k. \quad (1.11)$$

Теорема В. Если функция $F(z)$ принадлежит классу D_α , то она представима в следующем каноническом виде:

$$F(z) = \frac{k_\alpha}{c_\lambda} z^\lambda \frac{\pi_\alpha(z; a_\mu)}{\pi_\alpha(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \frac{\log |F(re^{i\theta})|}{(1 - zre^{-i\theta})^{\alpha+1}} r dr d\theta \right\}, \quad (1.12)$$

где k_α, c_λ — константы, λ — целое число, $\{a_\mu\}, \{b_\nu\}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots$) отличные от $z=0$ нули и полюсы $F(z)$, а

$$\pi_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \left\{ -U_\alpha(z; z_k) \right\} \quad (0 < \alpha < \infty) \quad (1.13)$$

— аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, обращающаяся в нуль в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Позже М. М. Джрбашяном была построена стройная теория параметрического представления классов N_α ($-1 < \alpha < \infty$) мероморфных в единичном круге функций [6], которая затем была изложена в его монографии [7]. В этой работе естественным образом вводилось более общее понятие α -характеристической функции $T_\alpha(r, F)$, совпадающей с обычной характеристикой $T(r, F)$ при $\alpha = 0$. Классы N_α ($-1 < \alpha < \infty$) вводились как мероморфные в круге $|z| < 1$ функции $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 < r < 1} T_z(r, F) < +\infty.$$

Приведем основную теорему о параметрическом представлении этих классов (см. [7], теорема 9.9).

Теорема С. Класс N_z ($-1 < z < \infty$) совпадает с множеством функций, допускающих представление в круге $|z| < 1$

$$f(z) = cz^\lambda \frac{B_z(z; a_\mu)}{B_z(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{\Gamma(1+z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{(1 - ze^{-i\theta})^{a+1}} - 1 \right] d\psi(\theta) \right\}, \quad (1.14)$$

где

$$B_z(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left\{ -\frac{(1-x)^z}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+z+n)}{\Gamma(1+z)\Gamma(1+n)} \right. \\ \left. \left[z_k^{-n} \int_0^{|z_k|} (1-x)^z x^{n-1} dx - \overline{z_k}^n \int_{|z_k|}^1 (1-x)^z x^{-n-1} dx \right] z^n \right\} \quad (1.15)$$

— сходящееся произведение типа Бляшке, $\psi(\theta)$ — вещественная функция ограниченного изменения на $[0, 2\pi]$, c — комплексное число, λ — целое число.

§ 2. Реализация функций класса D_p

1°. Введем обозначение

$$M_p(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ -U_p(z; \zeta) + \frac{1}{2} U_p(0; \zeta) \right\} \quad (2.1) \\ (0 < |\zeta| < 1).$$

По теореме В функция $F(z)$ класса D_p представится в таком виде

$$F(z) = cz^\lambda \frac{\pi_p^*(z; a_\mu)}{\pi_p^*(z; b_\nu)} \exp \left\{ \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{p-1} \frac{\log |F(re^{i\theta})|}{(1 - zre^{-i\theta})^{p+1}} r dr d\theta \right\}, \quad (2.2)$$

где c — число, λ — целое число; $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots$) — отличные от $z=0$ нули и полюсы $F(z)$,

$$\pi_p^*(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} M_p(z; z_k) \quad (2.3)$$

— аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, обращающаяся в нуль в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Тогда из теоремы А следует, что для реализации функции (2.2) достаточно реализовать следующие множители:

$$f_1(z) = \pi_p^*(z; z_k), \quad (2.4)$$

$$f_2(z) = \exp \left\{ \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{p-1} \frac{\log |F(re^{i\theta})|}{(1-zre^{-i\theta})^{p+1}} r dr d\theta \right\} \quad (2.5)$$

$$(F(z) \in D_p),$$

$$f_3(z) = \frac{1}{\pi_p^*(z; z_k)}. \quad (2.6)$$

$$f_4(z) = c z^\lambda \quad (\lambda - \text{целое}). \quad (2.7)$$

2°. Реализуем множитель $f_1(z)$ (2.4).

Лемма 1. *Существует линейный узел с передаточной функцией $M_p(z; \zeta)$.*

Доказательство. Из выражений (1.11), (2.1) следует

$$M_p(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \left\{ \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{k} S_k(z; \zeta) \right\} \right\}, \quad (2.8)$$

где

$$S_k(z; \zeta) = \frac{2}{(1 - \bar{\zeta}z)^k} - 1 \quad (k=1, 2, \dots, p). \quad (2.9)$$

Отсюда

$$M_p(z; \zeta) = M_{p-1}(z; \zeta) \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1-|\zeta|^2)^p}{p} S_p(z; \zeta) \right\} \quad (2.10)$$

$$(p=1, 2, \dots),$$

где

$$M_0(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} - \text{фактор Бляшке}. \quad (2.11)$$

Поэтому, имея теорему о сцеплении узлов (теорема А), нам достаточно реализовать фактор Бляшке и функцию

$$L_p(z; \zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1-|\zeta|^2)^p}{p} S_p(z; \zeta) \right\}. \quad (2.12)$$

Пусть

$$E = H = C_1$$

(C_1 — комплексная плоскость).

Положим

$$L_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\zeta}} & \frac{\sqrt{1-|\zeta|^2}}{|\zeta|} \\ \frac{\sqrt{1-|\zeta|^2}}{\bar{\zeta}} & \frac{1}{|\zeta|} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Найдем

$$S(z) = K + \bar{\Phi} (zI - T)^{-1} \Phi = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta}$$

(см. (1.1), (1.2)). Значит узел L_0 реализует фактор Бляшке $M_0(z; \zeta)$.

Для реализации $L_p(z; \zeta)$ используем формулу (1.8). Пусть $\beta = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = l$ и $Q(t) \equiv 0$. Тогда

$$S(z) = \exp \{-l + l(zI - B)^{-1} q_0, p_0\}_F. \quad (1.8')$$

Положим

$$F = \underbrace{C_1 + C_1 + \dots + C_1}_{p \text{ — раз}}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\zeta}} & \rho_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{\zeta}} & \rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\bar{\zeta}} & \rho_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\bar{\zeta}} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

В качестве канальных элементов примем векторы

$$p_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad q_0 = (0, 0, \dots, 0, 1) \quad (p_0, q_0 \in F). \quad (2.15)$$

Резольвентный оператор $R_z(B)$ имеет вид

$$R_z(B) = \frac{\bar{\zeta}^p}{(\bar{\zeta}z - 1)^p} C,$$

где $C = (c_{ij})$ — верхняя треугольная матрица размерности p , причем

$$c_{1p} = \prod_{k=1}^{p-1} \rho_k. \quad \text{Пусть}$$

$$l = \frac{1}{2} \frac{(1 - |\zeta|^2)^p}{p}, \quad \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_{p-1} = \frac{2}{(-\bar{\zeta})^p}. \quad (2.16)$$

Подставляя выражения (2.14)—(2.16) в (1.8'), получим

$$S(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1 - |\zeta|^2)^p}{p} \left[-1 + \frac{2}{(1 - \bar{\zeta}z)^p} \right] \right\} = L_p(z; \zeta).$$

Значит узел

$$(Tf)(x) = (Bf)(x) + \int_0^x \exp(x-t)(f(t), p_0)_F q_0 dt \quad (0 < x < 1)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= q_0 \exp(-x), \\ p &= p_0 \exp(x-l), \\ k &= \exp(-l), \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

где B , p_0 , q_0 , l определяются из выражений (2.14) — (2.16), реализуют функцию $L_p(z; \zeta)$. А значит можно построить узлы $L_p(z)$, реализующие множители $M_p(z; \zeta)$. Лемма доказана.

В специальном случае при $p = 1$ фактор

$$M_1(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{2} \exp \left\{ \frac{1}{2} (1 - |\zeta|^2) \frac{1 + \zeta z}{1 - \bar{\zeta}z} \right\}$$

был реализован в работе [10].

Сцепляя узлы $L_p(z_k)$ ($0 < |z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$), мы получим линейный узел

$$L_p^n = L_p(z_1) V L_p(z_2) V \dots V L_p(z_n) \quad (2.18)$$

с передаточной функцией

$$\pi_p^n(z; z_k) = \sum_{k=1}^n M_p(z; z_k).$$

Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ такова, что $0 < |z_k| < 1$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{p+1} < \infty. \quad (2.19)$$

Известно ([5]), что тогда произведение (2.3) сходится равномерно и абсолютно в замкнутой части круга $|z| \leq r < 1$. Применяя теорему о сцеплении, можно получить четверку операторов

$$L^{(n)} = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \tilde{\Phi} & K \end{pmatrix} = L_p(z_1) V L_p(z_2) V \dots \quad (2.20)$$

такую, что

$$S(z) = K + \Phi(zI - T)^{-1} \Phi = f_1(z),$$

$L^{(n)}$, вообще говоря, не является узлом в смысле вышеприведенного определения, так как оператор T является неограниченным*. В таких случаях символ $\begin{pmatrix} T & \Phi \\ \tilde{\Phi} & K \end{pmatrix}$ будем называть неограниченным узлом. Итак, доказана

Теорема 1. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (2.19). Тогда существует узел (вообще говоря, неограниченный) с передаточной функцией

$$\pi_p(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} M_p(z; z_k),$$

где

$$M_p(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^p \frac{(1 - |\zeta|^2)^k}{2k} \left[\frac{2}{(1 - \bar{\zeta}z)^k} - 1 \right] \right\}.$$

* Этот факт доказан До Конг Ханем (см. следующий номер журнала).

3°. Для реализации функции $f_2(z)$ (2.5) рассмотрим более общее семейство узлов. Пусть, как и выше, $\dim E=1$, $H(t_1, t_2) \doteq L_2(F; t_1, t_2)$ — пространство векторнозначных функций $(t_1 < t < t_2)$ со значениями из заданного гильбертова пространства F . Узел $L(t_1, t_2)$ определим так:

$$\left. \begin{aligned} T(t_1, t_2) f(x) &= Q_1(x) (Bf)(x) + Q_0(x) \int_{t_1}^x e^{\beta(x-t)} (f, p_0)_F q_0 dt, \\ q(t_1, t_2) &= q_0 Q_0(x) e^{\beta(x-t_1)}, \\ p(t_1, t_2) &= p_0 e^{\beta(t_1-x)}, \\ k(t_1, t_2) &= e^{\beta(t_1-t_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

где B — линейный оператор в F ; $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ — комплекснозначные функции; p_0, q_0 — элементы из $H(t_1, t_2)$, β — число.

Нетрудно вывести, что тогда передаточная функция выразится формулой

$$S(z) = \exp \left\{ \beta(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} ((zI - Q_1(x)B)^{-1} q_0, p_0)_F Q_0(x) dx \right\}. \quad (2.22)$$

Пусть

$$F = \underbrace{L_2(0, 2\pi) + L_2(0, 2\pi) + \dots + L_2(0, 2\pi)}_{(p+1) \text{ раз}},$$

$$B = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \rho_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \rho_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta} \rho_p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$t_1 = \beta = 0, \quad t_2 = 1.$$

Известно, что если $F(z) \in D_p$ ($p = 0, 1, 2, \dots$), то

$$\log |F(re^{i\theta})| \in L(0, 2\pi) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

Значит элементы

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= (0, 0, \dots, 0, [\log |F(xe^{i\theta})|]^{1/2}), \\ p_0 &= ([\log |F(xe^{i\theta})|]^{1/2}, 0, \dots, 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

принадлежат пространству F .

Положим

$$Q_1(x) = x^{-1}, \quad Q_0(x) = (1 - x^2)^{p-1},$$

тогда передаточная функция $S(z)$ (2.22) примет вид

$$S(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 x^{-p} \prod_{k=1}^p \rho_k \frac{\log |F(xe^{i\theta})|}{(z - x^{-1} e^{i\theta})^{p+1}} (1 - x^2)^{p-1} dx d\theta \right\}.$$

Взяв ρ_k ($k = 1, 2, \dots, p$) так, чтобы

$$\prod_{k=1}^p \rho_k = 2\pi (-1)^{p+1} e^{i(p+1)\pi}, \quad (2.25)$$

получим

$$\Delta(z) = f_2(z).$$

Обращаясь к формулам (2.21), мы найдем узел $L^{(2)}$, дающий реализацию $f_2(z)$

$$\left. \begin{aligned} (Tf)(x) &= \frac{1}{x} (Bf)(x) + (1-x^2)^{p-1} \int_0^x (f, p_0)_F q_0 dt, \\ q &= (1-x^2)^{p-1} q_0, \\ p &= p_0, \\ k &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.25')$$

где B ; p_0 , q_0 — определяются из формул (2.23) — (2.25).

Отсюда видно, что оператор T неограничен, т. е. узел $L^{(2)}$ является неограниченным.

4°. Приведенные построения линейных узлов, реализующих фактор Бляшке (2.11), множители $L_p(z; \zeta)$ (2.12) показывают, что реализация функций

$$\frac{1}{M_p(z; \zeta)} = \frac{1-\bar{\zeta}z}{\zeta-z} \frac{\zeta}{|\zeta|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{(1-|\zeta|^2)^k}{k} S_k(z; \zeta) \right\} \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.26)$$

не представляет трудности. Действительно, для реализации, например,

множителя $\frac{1-\bar{\zeta}z}{\zeta-z} \frac{\zeta}{|\zeta|}$ вместо матрицы L_0 (2.13) берется матрица

$$L'_0 = \begin{pmatrix} \zeta & \sqrt{1-|\zeta|^2} \\ \frac{\zeta}{|\zeta|} \sqrt{1-|\zeta|^2} & |\zeta| \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Сцепляя узлы $L_p|z_k|$, реализующие множители $\frac{1}{M_p(z; z_k)}$ ($k=1, 2, \dots$), получим узел $L^{(3)}$, реализующий функцию

$$f_3(z) = \frac{1}{\pi_p(z; z_k)}.$$

5°. Из формулы (2) следует, что функция $f(z)$ такая, что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$$

нереализуема, т. е. не существует узла, передаточная функция которого является $f(z)$. Поэтому в определении функции $f_4(z)$ (2.7) требуем, чтобы $\lambda < 0$. Легко видеть, что узел

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

реализует функцию $f(z) = \frac{1}{z}$.

Итак, нами доказана

Теорема 2. Для любой функции $F(z) \in D_p$ ($F(0) \neq 0$) можно построить узел (вообще говоря, неограниченный) с передаточной функцией $F(z)$.

Замечание. Функции $L_p(z; \zeta)$ (2.12), $f_2(z)$ (2.5), $f_4(z)$ (2.7) (при λ — целым неотрицательным) можно реализовать через передаточную функцию

$$W(z) = S\left(\frac{1}{z}\right). \quad (2.29)$$

Действительно, формула (2.22) даст

$$W(z) = \exp \left\{ \beta(t_2 - t_1) + z \int_{t_1}^{t_2} ((I - zQ_1(x)B)^{-1} q_0, p_0)_F Q_1(x) dx \right\}.$$

Функции $L_p(z; \zeta)$ и $f_2(z)$ соответственно представимы в виде

$$L_p(z; \zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{(1 - |\zeta|^2)^p}{p} \left[1 + 2\bar{\zeta} z \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(1 - \bar{\zeta}z)^k} \right] \right\},$$

$$f_2(z) = \exp \left\{ \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{p-1} \log |F(re^{i\theta})| \left[1 + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{zre^{-i\theta}}{(1 - zre^{-i\theta})^k} \right] r dr d\theta \right\}.$$

Отсюда, поступая как и выше, получим реализацию этих функций. Очевидно, узел L (2.28) будет теперь реализовать функцию $f(z) = z$.

6°. Лемма 2. При любом α ($0 < \alpha < \infty$) имеет место равенство

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\alpha-1} \log |M_\alpha(re^{i\theta}; \zeta)| r dr d\theta = 0. \quad (2.30)$$

Доказательство. Из результатов работ [4], [5] следует

$$\operatorname{Re} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\alpha-1} U_\alpha(re^{i\theta}; \zeta) r dr d\theta = \frac{\pi}{\alpha} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{t} dt, \quad (2.31)$$

где $U_\alpha(z; \zeta)$ определяется по формуле (9).

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{re^{i\theta}}{\zeta} \right| d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r < |\zeta| \\ \log \frac{r}{|\zeta|} & \text{при } 0 < |\zeta| \leq r, \end{cases}$$

получим

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \log \left| 1 - \frac{re^{i\theta}}{\zeta} \right| r dr d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \int_{|\zeta|<1} \frac{(1-t)^{\alpha}}{t} dt. \quad (2.32)$$

Принимая во внимание представление (2.1) ($\alpha = p$), функции $M_{\alpha}(z; \zeta)$ и соотношения (2.31), (2.32), получим равенство (2.30).

Укажем физический смысл условия (2.30)*.

Пусть на вход открытой системы F подается сигнал $u_0(z) z^n$ со случайной частотой $\arg z$ и со случайным коэффициентом затухания $|z|$ ($|z| < 1$). Пусть

$$p(r, \theta) = 2p(1-r^2)^{p-1} \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (2.33)$$

— плотность распределения вероятности. Связь между входом $u_0(z) z^n$ и выходом $v_0(z) z^n$ системы можно выразить так:

$$v_0(re^{i\theta}) = s(re^{i\theta}) u_0(re^{i\theta}). \quad (2.34)$$

Логарифмируя и усредняя по r ($0 \leq r \leq 1$) и θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(r, \theta) \log |v_0(re^{i\theta})| r dr d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(r, \theta) \log |s(re^{i\theta})| r dr d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(r, \theta) \log |u_0(re^{i\theta})| r dr d\theta. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Обозначая через $E\{x\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p(r, \theta) x(r, \theta) r dr d\theta$ — математи-

ческое ожидание случайной величины $x(r, \theta)$, выражение (2.30) можно записать в таком виде:

$$\exp [E\{\log |v_0|\}] = \exp [E\{\log |s|\}] \exp [E\{\log |u_0|\}]. \quad (2.36)$$

Так как $\exp [E\{\log |x|\}] = |x|_{cp}$ — среднее геометрическое, то

$$|v_0|_{cp} = |s|_{cp} \cdot |u_0|_{cp}. \quad (2.37)$$

Значит условие (2.30) выражает, как и в работе [10], закон сохранения средней энергии при переходе от входа к выходу. Очевидно, $E\{\log |M_0|\} < 0$.

§ 3. Реализация функций класса N_p

1°. Из теоремы А и теоремы С следует, что для реализации любой функции $F(z)$ класса N_p достаточно реализовать функции

* По этому поводу см. [10], [11], [13].

$$a) \quad B_p(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_p(z; z_k), \quad (3.1)$$

где

$$A_p(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ - \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^p}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+n)!}{p! n!} \times \right. \\ \left. \times \left[\zeta^{-n} \int_0^{|\zeta|} (1-x)^p x^{n-1} dx - \bar{\zeta}^n \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^p x^{-n-1} dx \right] z^n \right\} \quad (0 < |\zeta| < 1), \quad (3.2)$$

а $\{z_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.19)

$$b) \quad g_1(z) = \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{(1 - ze^{-i\theta})^{p+1}} - 1 \right] d\psi(\theta) \right\}, \quad (3.3)$$

где $\psi(\theta)$ — функция ограниченного изменения на $[0, 2\pi]$,

$$c) \quad g_2(z) = \frac{1}{B_p(z; z_k)}, \quad (3.4)$$

$$d) \quad g_3(z) = cz^{\lambda} \quad (\lambda — \text{целое число}). \quad (3.5)$$

2°. Реализуем произведение $B_p(z; z_k)$.

Известно ([7]), что при $|z| < |\zeta| < 1$ фактор $A_p(z; \zeta)$ (3.2) представим в таком виде:

$$A_p(z; \zeta) = \exp \{-\omega_p(z; \zeta)\}, \quad (3.6)$$

где

$$\omega_p(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \left\{ \left(\frac{x}{x - \bar{\zeta}z} \right)^{p+1} + \left(\frac{\zeta}{\zeta - xz} \right)^{p+1} - 1 \right\} \frac{(1-x)^p}{x} dx^*. \quad (3.7)$$

Хотя $\omega_p(z; \zeta)$ определена в круге $|z| < |\zeta|$ и аналитична там, ее можно аналитически продолжить и вне этого круга — на всю плоскость. Особые точки полученной функции (мы вновь обозначим ее через $\omega_p(z; \zeta)$) будут лежать в множестве $\{re^{i \arg \zeta} : 1 \leq r \leq |\zeta|^{-1}\}$ и в точке $z = \zeta$. Функция же

$$\omega_p^*(z; \zeta) = \omega_p(z; \zeta) - \log \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \quad (3.8)$$

не имеет особенностей внутри круга $|z| < 1$. Если сделать разрез плоскости по отрезку, соединяющему точки $\frac{|\zeta|}{\zeta}$, $\frac{1}{\zeta}$, функция $\omega_p^*(z; \zeta)$ станет однозначной.

* Этот и последующие интегралы являются сингулярными и понимаются в смысле главного значения Коши.

Пусть $z = p$ ($p=1, 2, \dots$). Введем обозначения

$$J_1(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{x^p (1-x)^p}{(x - \bar{\zeta}z)^{p+1}} dx - \log \frac{1 - \bar{\zeta}z}{|\zeta| - \bar{\zeta}z}, \quad (3.9)$$

$$J_2(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \left(\frac{\zeta}{\zeta - xz} \right)^{p+1} \frac{(1-x)^p}{x} dx + \log \frac{\zeta - z}{\zeta - |\zeta|z}, \quad (3.10)$$

$$J_3(z; \zeta) = - \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^p}{x} dx. \quad (3.11)$$

Учитывая выражения (3.7), (3.9)–(3.11), можно записать

$$\omega_p^*(z; \zeta) = \sum_{j=1}^3 J_j(z; \zeta), \quad (3.12)$$

$$A_p(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^3 J_j(z; \zeta) \right\}. \quad (3.13)$$

Лемма 3. Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (2.19). Тогда для каждого n ($n < \infty$) существует линейный узел с передаточной функцией

$$\prod_{k=1}^n A_p(z; z_k).$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(x) = x^p (1-x)^p \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.14)$$

$$\psi(x) = (x-1)^p \quad (x \geq 1). \quad (3.15)$$

Произведя интегрирование по частям можно привести $J_1(z; \zeta)$ к виду

$$J_1(z; \zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\varphi^{(k)}(|\zeta|)}{(|\zeta| - \bar{\zeta}z)^{p-k}} \frac{(p-1-k)!}{p!} + \frac{1}{p!} \int_{|\zeta|}^1 \frac{\varphi^{(p)}(x)}{x - \bar{\zeta}z} dx - \log \frac{1 - \bar{\zeta}z}{|\zeta| - \bar{\zeta}z}.$$

Функция

$$\Phi(\bar{\zeta}z) = \log \frac{1 - \bar{\zeta}z}{|\zeta| - \bar{\zeta}z}$$

с особенностями в точках $\bar{\zeta}^{-1}, \bar{\zeta}^{-1}|\zeta|$ представима в виде интеграла типа Коши по отрезку $(|\zeta|, 1)$ через скачок $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 2\pi i$ по этому отрезку (см. [3])

$$\Phi(\bar{\zeta}z) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{dx}{x - \bar{\zeta}z}.$$

Тогда

$$J_1(z; \zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-1-k)!}{p!} \frac{\varphi^{(k)}(|\zeta|)}{(|\zeta| - \bar{\zeta}z)^{p-k}} + \frac{1}{p!} \int_{|\zeta|}^1 \frac{\varphi^{(p)}(x) - p!}{x - \bar{\zeta}z} dx.$$

Делая замену переменных и проинтегрировав по частям k -раз $J_1(z; \zeta)$ можно привести к такому виду:

$$J_2(z; \zeta) = - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-1-k)!}{p!} \frac{\psi^{(k)}(|\zeta|^{-1})}{(|\zeta|^{-1} - \bar{\zeta}^{-1}z)^{p-k}} + \\ + \frac{1}{p!} \int_{|\zeta|^{-1}}^1 \frac{\psi^{(p)}(x)}{x - \bar{\zeta}^{-1}z} dx + \log \frac{\zeta - z}{\zeta - |\zeta|z}.$$

Поступая так же, как и в случае $J_1(z; \zeta)$, и учитывая, что $\psi^{(p)}(x) = k!$ имеем

$$J_2(z; \zeta) = - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p-1-k)!}{p!} \frac{\psi^{(k)}(|\zeta|^{-1})}{(|\zeta|^{-1} - \bar{\zeta}^{-1}z)^{p-k}} - \log |\zeta|, \quad (3.17)$$

$$J_3(z; \zeta) = - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1} C_p^{k+1} \frac{1 - |\zeta|^{k+1}}{k+1} + \log |\zeta|. \quad (3.18)$$

Учитывая выражения (3.13), (3.16)–(3.18), получим

$$A_p(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{a_k}{(|\zeta| - \bar{\zeta}z)^{p-k}} + b_k \right] - \frac{1}{p!} \int_{|\zeta|}^1 \frac{\varphi^{(p)}(x) - p!}{x - \bar{\zeta}z} dx \right\}, \quad (3.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_k &= - \frac{(p-1-k)!}{p!} [\varphi^{(k)}(|\zeta|) - |\zeta|^{2(p-k)} \psi^{(k)}(|\zeta|^{-1})], \\ b_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} C_p^{k+1} (1 - |\zeta|^{k+1}), \\ \varphi(x) &= x^p (1-x)^p, \quad \psi(x) = (x-1)^p. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Построим линейный узел $L^{(1)}$ с передаточной функцией

$$f(z; \zeta) = \exp \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{a_k}{(|\zeta| - \bar{\zeta}z)^{p-k}} + b_k \right] \right\}. \quad (3.21)$$

Из реализации функции $L_p(z; \zeta)$ (2.7) следует, что если

$$\frac{F}{(p-k)\text{-раз}} = C_1 + \frac{C_1}{(p-k)\text{-раз}} + \dots + \frac{C_1}{(p-k)\text{-раз}} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1),$$

$$B = \begin{pmatrix} |\zeta| \bar{\zeta}^{-1} \rho_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & |\zeta| \bar{\zeta}^{-1} \rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & |\zeta| \bar{\zeta}^{-1} \rho_{p-k-1} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & |\zeta| \bar{\zeta}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$p_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad q_0 = (0, \dots, 0, 1) \quad (p_0, q_0 \in F),$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = C_p^{k+1} \frac{1 - |\zeta|^{k+k}}{k+1}; \quad \beta = (-1)^{k+1},$$

$$\prod_{j=1}^{p-k-1} \rho_j = \frac{a_k}{t_2 (-\bar{\zeta})^{p-k}}; \quad Q(t) \equiv 0,$$

то выражение (18) даст

$$S(z) = b_k + \frac{a_k}{(|\zeta| - \bar{\zeta} z)^{p-k}}.$$

По формулам (1.6) строим узел L_{p-k} . Беря сцепление

$$L^{(1)} = L_p V L_{p-1} V \dots V L_1, \quad (3.22)$$

получим узел, реализующий функцию $f(z; \zeta)$.

Пусть $F = C_1$, $B = 1$ — единичный оператор в пространстве F ,

$$Q_1(t) = \frac{t}{\bar{\zeta}}, \quad Q_0(t) = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\varphi^{(p)}(t) - p!}{p!},$$

$$p_0 = q_0 = 1, \quad (3.23)$$

$$t_1 = |\zeta|, \quad t_2 = 1, \quad \beta = 0.$$

Тогда передаточная функция модели (2.21) запишется в виде

$$S(z) = \exp \left\{ \frac{1}{p!} \int_{|\zeta|}^1 \frac{\varphi^{(p)}(t) - p!}{t - \zeta z} dt \right\}. \quad (3.24)$$

По формулам (2.21) запишем узел с передаточной функцией (3.24)

$$\left. \begin{aligned} (Tf)(x) &= \frac{x}{\bar{\zeta}} f(x) - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\varphi^{(p)}(x) - p!}{p!} \int_{|\zeta|}^x f(t) dt \quad (|\zeta| < x < 1), \\ q &= -\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\varphi^{(p)}(x) - p!}{p!}, \\ p &= 1, \\ k &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

где $\varphi(x) = x^p (1-x)^p$.

Сцепляя узлы (2.13), (3.22), (3.25), получим узел

$$L(\zeta) = L_0 V L^{(1)} V L^{(2)}, \quad (3.26)$$

реализующий фактор $A_p(z; \zeta)$ (3.2). А отсюда и следует, что линейный узел

$$L(z_1) V L(z_2) V \dots V L(z_n)$$

реализует произведение $\prod_{k=1}^n A_p(z; z_k)$. Лемма доказана.

В специальном, но принципиально важном случае, когда $p=1$, формулы (3.19) и (3.20) дают

$$A_1(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \exp \left(1 - |\zeta| - 2 \bar{\zeta} z \log \frac{|\zeta| - \bar{\zeta} z}{1 - \bar{\zeta} z} \right). \quad (3.27)$$

Эта функция удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \log |A_1(re^{i\theta}; \zeta)| dr = 0. \quad (3.28)$$

Реализация функции $A_1(z; \zeta)$ и физический смысл условия (3.28) были даны М. С. Лившицем (см. [10]).

Теорема 3. Пусть $0 < |z_k| < 1$ ($k=1, 2, \dots$) и

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{p+1} < +\infty. \quad (3.19)$$

Тогда узел (вообще говоря, неограниченный)

$$L = L(z_1) V L(z_2) V \dots \quad (3.29)$$

реализует функцию $B_p(z; z_k)$.

Доказательство. Как известно ([7]), при выполнении условия (2.19) произведение $\prod_{k=1}^{\infty} A_p(z; z_k)$ сходится абсолютно и равномерно в любом замкнутом круге $|z| \leq r < 1$ и представляет аналитическую в единичном круге функцию.

Из леммы 3 следует, что передаточная функция узла $L(z_k)$ (3.26) является $A_p(z; z_k)$. Поэтому, сцепляя узлы $L(z_k)$ ($k=1, 2, \dots$), мы получим узел L , реализующий произведение $B_p(z; z_k)$.

3°. Покажем реализуемость функций (3.4), (3.5). Из выражений (3.1), (3.13) следует, что построить узлы, реализующие функции

$$\frac{1}{z^k}, \frac{1}{\prod_{k=1}^n A_p(z; z_k)},$$

не представляет трудности. Это следует из реализации функции

$$\prod_{k=1}^n A_p(z; z_k) \quad (\text{лемма 3}) \text{ и узла (2.28).}$$

Поступая так же как в § 1, нетрудно привести узел (неограниченный), передаточная функция которого является $g_3(z)$.

4°. Линейный узел с передаточной функцией $g_1(z)$. В определении функции $g_1(z)$ (3.3) предполагалось, что $\psi(\vartheta)$ является вещественной функцией ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$. Поэтому

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi),$$

где $\psi_i(\vartheta)$ ($i = 1, 2$) — ограниченные неубывающие функции. Значит

$$g_1(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}, \quad (3.30)$$

где

$$h_i(z) = \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \frac{2}{(1 - ze^{-i\vartheta})^{p+1}} - 1 \right| d\psi_i(\vartheta) \right\} \quad (i=1, 2). \quad (3.31)$$

Реализуем $h_1(z)$. Положим $\psi_1(t) = s$, тогда имеем

$$h_1(z) = \exp \left\{ \int_0^l \left| \frac{2}{(1 - ze^{-i\sigma_1(s)})^{p+1}} - 1 \right| ds \right\},$$

где l — вариация функции $\psi_1(\vartheta)$ на интервале $[0, 2\pi]$, $\sigma_1(s)$ — непрерывная справа функция, обратная к функции $\psi_1(\vartheta) = s$, причем если ϑ_0 — точка разрыва $\psi_1(\vartheta)$, то в интервале $\psi_1(\vartheta_0 - 0) \leq s \leq \psi_1(\vartheta_0 + 0)$ функция $\sigma_1(s)$ доопределяется равенством $\sigma_1(s) = \vartheta_0$.

Для реализации воспользуемся формулой (2.22). Пусть

$$F = \underbrace{C_1 + C_1 + \dots + C_1}_{(p+1)\text{-раз}},$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = l; \quad \beta = 1; \quad Q_1(x) = e^{i\sigma_1(x)}, \quad Q_0(x) = (-1)^{p+1} e^{i\sigma(x)}. \quad (3.32)$$

В качестве оператора B примем одноклеточный оператор

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda^p = 1) \quad (3.33)$$

а канальных элементов

$$p_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad q_0 = (0, 0, \dots, 0, 1). \quad (3.34)$$

Тогда

$$S(z) = \exp \left\{ -l + 2 \int_0^l \frac{(-1)^{p+1} e^{i(p+1)\sigma_1(t)}}{(e^{i\sigma_1(t)} - z)^{p+1}} dt \right\},$$

т. е. функция $h_1(z)$ реализована.

Запишем линейный узел L_1 , реализующий $h_1(z)$

$$\begin{aligned}(Tf)(x) &= e^{i\alpha_1(x)} (Bf)(x) + (-1)^{p+1} e^{i\alpha_1(x)} \int_0^x e^{x-t} (f, p_0)_F q_0 dt, \\ q &= (-1)^{p+1} e^{i\alpha_1(x)} q_0, \\ p &= e^{i-x} p_0, \\ k &= e^{-i},\end{aligned}\tag{3.35}$$

где F ; B ; q_0 , p_0 определяются из выражений (3.32)–(3.34).

Очевидно, узел L_2 , реализующий функцию $h_2(z)$, запишется так

$$\begin{aligned}(Tf)(x) &= e^{i\alpha_2(x)} (Bf)(x) + (-1)^{p+1} e^{i\alpha_2(x)} \int_0^x e^{x-t} (f, p_0)_F q_0 dt, \\ q &= (-1)^{p+1} e^{i\alpha_2(x)} q_0, \\ p &= e^{i-x} p_0, \\ k &= e,\end{aligned}\tag{3.36}$$

где $\alpha_2(s)$ — обратная к функции $\psi_2(\theta) = s$, а F ; B ; p_0 , q_0 имеют прежний смысл. Итак, доказана

Теорема 4. Пусть функция $F(z)$, не имеющая нулей и полюсов в единичном круге, принадлежит классу N_p и поэтому представима в виде

$$F(z) = \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{(1 - ze^{i\theta})^{p+1}} - 1 \right] d[\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)] \right\}.$$

Тогда линейный узел

$$L = L_1 V L_2,$$

где L_j ($j = 1, 2$) определяются из формул (3.35), (3.36), реализует функцию $F(z)$.

Резюмируя полученные результаты этого параграфа, имеем теорему.

Теорема 5. Для всякой функции $F(z) \in N_p$ можно построить узел (вообще говоря, неограниченный), передаточная функция которого является $F(z)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю М. С. Лившицу и М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении настоящей работы.

Харьковский государственный
университет

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.I.1975

1. Խ. ՄԵՀՐԱԲՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի իրականացումը դիսկրետ ժամանակով սխեմաների տեսության մեջ (ամփոփում)

Դիցուք միավոր շրջանում արված է $F(z)$ մերոմորֆ ֆունկցիան. Դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. կառուցել գծային հանգույց, որի փոխանցվող ֆունկցիան հանդիսանում է $F(z)$ -ը. Այս հոդվածում այդ խնդիրը լուծված է Մ. Մ. Զրբաշյանի D_α և N_α ($\alpha = 1, 2, \dots$) դասերի ֆունկցիաների համար:

L. Kh. MEHRABIAN. *Realization of some classes of meromorphic functions in the theory of discret time systems (summary)*

Let a meromorphic function $F(z)$ be given in the unit disk. The problem of construction of a linear node with transmission function $F(z)$ is considered. The paper solves the problem for functions from the classes of M. M. Jrbashian D_α and N_α ($\alpha = 1, 2, \dots$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов, Изд. "Наука", М., 1969.
2. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 13, № 1, 1958.
3. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
4. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
5. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
6. М. М. Джрбашян. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
7. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. "Наука", М., 1966.
8. Л. Заде, Ч. Дезоэр. Теория линейных систем, Изд. "Наука", М., 1970.
9. В. Я. Катковник, Р. А. Полуэктов. Многомерные дискретные системы управления, Изд. "Наука", М., 1966.
10. М. С. Лившиц. Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна, ДАН СССР, 219, № 4, 1974, 793—796.
11. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. Изд. "Наука", М., 1966.
12. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах, Харьков, ХГУ, 1971.
13. A. V. Balakrishnan. On the State Space Theory of Linear Systems, Journal Math. Analys. and Apl., 14, 1966, 371—391.
14. J. W. Helton. Discrete Time Systems, Operator Models and Scattering Theory, Journal of Func. Analysis, 16, № 1, 1974.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Դիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր
«Մաթեմատիկա» ամսագրի 1975 թ., X, № 1—6

Վ. Ո. Աբրահամյան. Շրջանում անալիտիկ անվերջ կարգի ֆունկցիաների վրա Մոն-տելի մի թեորեմի տարածման մասին	2,170
Դ. Ա. Աղոմյան. Ոչ գծային ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումների առաջին և երկրորդ կարգի $\langle y \rangle$ և $K_y(t_1, t_2)$ ստոխաստիկականների ստացումը	6,529
Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան, Ռ. Ջ. Մկրտչյան. Միապատիկ սպեկտրով կամայական ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական էլեմենտների սխտեմի լրիվություն մի հայտանիշի մասին	6,549
Ա. Ա. Անդրյան. Հիպերբոլական տիպի հավասարումների սխտեմների համար մի եզրային խնդրի մասին	4,329
Վ. Ա. Անդրումյան. Ֆակտոր-վիճակներ, ըստ դինամիկ սխտեմի կառուցված խաչաձև արտադրյալների վրա	3,255
Ա. Վ. Ռախիսյան. Ռադեմախերի և Ուոլշի սխտեմների մի ընդհանրացման մասին	1, 85
Մ. Ռ. Բակլ. Պոլիանալիտիկ ֆունկցիայի ֆակտորիզացիայի մասին մեկուսացված եզակիության շրջակայքում	5,389
Հ. Գ. Բալաբյան. Կամայական տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակութ- թյան մասին	2,175
Ռ. Ռ. Բեջանյան. Դիսկրետ ժամանակով անվերջ չափանի պատահական ստացիոնար պրոցեսների արագ խառնման մասին	5,435
Վ. Ի. Դավթիլով. Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերաբերյալ մի միակության թեորեմի մասին	3,264
Ա. Պ. Դադյան. Կտոր առ կտոր պոլինոմիալ բազիսներով շարքերի գործակիցների մի բանի հատկությունների մասին	1, 61
Թ. Վ. Դրիգոյան. Պտտման տիրույթներում հարմոնիկ ֆունկցիաների միակության մասին	5,410
Ռ. Ս. Դավրյան, Ա. Ա. Խալաբյան. Լրիվ օրթոգոնալ սխտեմներով շարքերի դրական չափի բազմությունների վրա զուգամիտության մասին	4,342
Է. Ա. Իսեհիյան. $M_r / G_r / 1/\infty$ նախապատվություն միաստեմների զբաղվածության պարբերության և սպասման ժամանակի աշխմպոտիկ հեռազոտումը կրիտիկական ծանրարեոնվածության դեպքում	3,272
Դ. Ա. Լիդեյիկյան. Հիշողության ունեցող զրաֆ-սխեմաների միջոցով սահմանված ալգորիթմների որոշ ֆորմալ պատկերացումների մասին	5,414
Ա. Ա. Լալաբյան. Ըստ սահմանափակ լրիվ օրթոգոնալ սխտեմների Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության մասին	3,193
Ս. Յա. Խալիլևսոն. Զրոյական ունակությամբ կոմպակտների ունիվերսալ պոտենցիալը և նոսր բազմությունների ուրիշ ապրոքսիմացիոն բնութագրիչներ	4,356
Ի. Գ. Խաչատրյան. Թադանթի տեսության մի հակադարձ խնդրի մասին	4,307
Ի. Հ. Խաչատրյան. Կոմպլեքս տիրույթում կշռային հավասարաչափ մոտարկման դեպքում Միտտագ-Լեֆշերի տիպի ֆունկցիաների ընտանիքի փակման մասին	4,373
Ա. Ա. Կիրյուպյան. Քվադրանալիտիկության խնդիրը Դանտուա-Կապեմանի դասերում	3,207
Յու. Ա. Կուտոյանց. Լոկալ ասիմպոտոտիկ նորմալությունը դիֆուզիոն պրոցեսների համար	2,103
Ա. Ն. Հայրապետյան. Շրջանում անընդհատ, անընդհատորեն դիֆերենցելի և մերոմորֆ ֆունկցիաների վարքը լարերի երկայնքով	1, 77

Հ. Մ. Հայրապետյան. Կոմպլեքս տիրույթում որոշ բիօբիոգոնալ սիստեմների բազիսության մասին	2,133
Ա. Հ. Հովհաննիսյան. Կաշու խնդրի մասին բարձր կարգի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար	2,163
Դ. Ռ. Հովհաննիսյան. Կոշու խնդիրը առաջին կարգի թույլ հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ սիստեմների համար տվյալներով հիպերհարթության վրա	2, 97
Ս. Մ. Հովհաննիսյան. Ջափելի ֆունկցիաների ներկայացումը 1. տարածություններում գումարվող շարքերով	6,535
Ռ. Վ. Համբարձումյան, Վ. Կ. Օհանյան. Հարթության վրա թելիկների համասեռ և իզոտրոպ պատահական դաշտեր	6,509
Վ. Մ. Մառտիրոսյան. Աջ կիսահարթության մեջ անալիտիկ ֆունկցիաների երկու տարածությունների մասին	2,182
Վ. Հ. Մառտիրոսյան. Ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հնարավորության մասին	4,293
Լ. Խ. Մեհրաբյան. Մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի իրականացումը դիսկրետ ժամանակով սիստեմների տեսության մեջ	6,560
Ն. Խ. Մեսրոպյան. Ռ-չափանի ստացիոնար սլատահական պրոցեսով առաջացած տարածության կառուցվածքի մասին	4,317
Ռ. Զ. Մկրտչյան. Մի քանի ռացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների կառուցումը	1, 43
Է. Ա. Միրզախանյան. Հիբերտյան տարածության միավոր սֆերայի անվերջ չափանի կոմպակտ տիպի հոմոտոպիկ խմբերի հաշվումը	2,153
Ռ. Հ. Նազարյան. Լիի պարզ իրական խմբերի վերլուծությունների մասին	1, 3
Ռ. Հ. Նազարյան. Իրական պարզ Լիի խմբերի փոքրագույն վերլուծությունները	5,455
Ռ. Ս. Նաճապետյան. Դիսկրետ արդումենտով պատահական գիքսյան դաշտի ուժեղ խառնումը և նրա մի քանի կիրառությունները	3,242
Ս. Ա. Ջուրաբյան. Ասուլթների դասական հաշվում արտածումների որոշ նորմալ տեսքի և բարդության բնութագրերի մասին	5,396
Ա. Ա. Վաղարշակյան. Հարմոնիկ ֆունկցիաների մի քանի դասերի եզրային հատկությունները	1, 54
Վ. Դ. Վերդիև. Անընդհատ ֆունկցիաների լավագույն մոտարկման ղեկավարում կետերի մաքսիմալ շեղման խտության մասին	5,445
Ն. Հ. Սիճեանյան. Ընդհանուր օրթոգոնալ շարքերի գումարման և դուդամիտության փոխադարձ կապի մասին	1, 23
Մ. Շ. Յալինկո. Համապատասխանությունների կատեգորիաները կանոնավոր կատեգորիաների վրա	2,113
Մ. Մ. Ջրբաշյան, Ռ. Ա. Բաղդյան. Միտտագ-Լեֆլերի ափսի ֆունկցիաների հետ առցացված ինտեգրալ ներկայացումների և չափերի մասին	6,483

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“
за 1975 г., X, №№ 1—6

В. С. Абрамович. О распространении одной теоремы Монтеля на аналитические функции бесконечного порядка в круге	2, 170
Г. А. Адомян. Получение статистик первого и второго порядка $\langle y \rangle$ и $R_y(t_1, t_2)$ для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений	6, 529
А. Н. Айрапетян. О поведении вдоль хорд непрерывных, непрерывно дифференцируемых и мероморфных функций в круге	1, 77
Г. М. Айрапетян. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области	2, 133
Р. А. Александрян, Р. Э. Мкртчян. Об одном критерии полноты системы собственных элементов произвольного самосопряженного оператора с однократным спектром	6, 549
Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян. Однородные и изотропные случайные поля волокон на плоскости	6, 509
А. А. Андрян. Об одной граничной задаче для систем уравнений гиперболического типа	3, 329
В. А. Арзуманян. Фактор-состояния на скрещенных произведениях, построенных по динамической системе	3, 255
А. Г. Балакян. О единственности аналитических функций в произвольных областях	2, 175
М. Б. Балк. О факторизации полианалитической функции в окрестности ее изолированной особой точки	5, 389
А. В. Бахшеян. О некотором обобщении систем Радемахера и Уолша	1, 85
Р. Р. Беджаниян. О быстром перемешивании бесконечномерных случайных стационарных процессов с дискретным временем	5, 435
А. А. Вапаршакян. Граничные свойства некоторых классов гармонических функций	1, 54
В. Г. Бердиев. О плотности множества точек максимального отклонения при наилучшем приближении непрерывных периодических функций	5, 445
В. И. Гаврилов. Об одной теореме единственности для голоморфных функций	3, 264
А. П. Горючев. О некоторых свойствах коэффициентов рядов по кусочно-полиномиальным базисам	1, 61
Б. В. Григорян. О единственности гармонических функций в области вращения	5, 410
Р. С. Даветян, А. А. Талалаян. О сходимости рядов по полным ортогональным системам на множествах положительной меры	4, 342
Э. А. Даниелян. К асимптотике периода занятости и времени ожидания приоритетных систем $M_r/G_r/1/\infty$ при критической загрузке	3, 272
М. М. Джрбашян, Р. А. Багдян. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера	6, 483
А. А. Китбалян. Задача α -квазианалитичности в классах Данжуа-Карлемана	3, 207

Ю. А. Кутюлиц. Локальная асимптотическая нормальность для процессов диффузионного типа	2, 103
В. М. Мартиросян. О двух пространствах апериодических в полуплоскости функций	2, 182
В. А. Мартиросян. О возможности равномерного приближения многочленами по системе Мюнца с целыми коэффициентами	4, 293
Л. Х. Меграбян. Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем	6, 560
Н. Х. Месропян. О структуре пространства, порожденного n -мерным стационарным процессом	4, 317
Э. А. Мирзаханян. Вычисление бесконечномерных гомотопических групп компактного типа единичной сферы гильбертова пространства	2, 153
Р. Э. Мкртчян. Построение некоторых особых абсолютно непрерывных функций	1, 43
Р. О. Назарян. О разложениях простых вещественных групп Ли	1, 3
Р. О. Назарян. Минимальные разложения простых вещественных групп Ли	5, 466
Б. С. Нахпетян. Сильное перемешивание гиббсовского случайного поля с дискретным аргументом и некоторые его применения	3, 242
А. О. Оганесян. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений высокого порядка	2, 163
Г. Р. Оганесян. Задача Коши для слабо гиперболических псевдодифференциальных систем первого порядка с данными на гиперплоскости вырождения	2, 97
С. М. Оганесян. О представлении измеримых функций ортогональными рядами, суммируемыми в пространствах L_p	6, 535
Н. О. Синамян. О взаимосвязи сходимости и суммируемости общих ортогональных рядов	1, 23
А. А. Талалян. О сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам	3, 193
С. Я. Хавинсон. Универсальный потенциал для компактов нулевой емкости и другие аппроксимационные характеристики редких множеств	4, 356
И. Г. Хачатрян. Об одной обратной задаче теории оболочек	4, 307
И. О. Хачатрян. О замыкании семейства функций типа Миттаг-Леффлера при взвешенно-равномерном приближении в комплексной области	4, 373
М. Ш. Цаленко. Категории соответствий над регулярными категориями	2, 113
А. А. Чубарян. О некоторой нормальной форме и сложных характеристиках выводов в классическом исчислении высказываний	5, 398
Т. А. Эдинджиклян. О некоторых формальных представлениях алгоритмов, определяемых граф-схемами с памятью	5, 414

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR,
 seria "Matematika", 1975, vol. X, №№ 1—6

<i>V. S. Abramovich.</i> An extension of Montel's theorem on analytical functions of infinite order in the circle	2, 170
<i>G. A. Adomian.</i> Obtaining first and second order statistics $\langle y \rangle$ and $R_y(t_1, t_2)$ in stochastic differential equations for the nonlinear case	6, 529
<i>A. N. Ajrapetian.</i> On the behaviour of continuously differentiable and meromorphic in a circle functions along the chords	1, 77
<i>R. A. Alexandrian, R. Z. Mkrtchian.</i> On the criterion of completeness of the system eigenelements general selfadjointed operator with simple spectrum	6, 549
<i>R. V. Ambartzumian, V. K. Ohanian.</i> Homogeneous and isotropic random fields of fibres on the plane	6, 509
<i>A. A. Andrian.</i> A boundary value problem for the systems of hyperbolic type	3, 329
<i>V. A. Arzumantian.</i> Factor-states on the crossproducts constructed by dynamical systems	3, 255
<i>H. G. Balakian.</i> On the uniqueness of analytical functions in arbitrary domain	2, 175
<i>A. V. Bakshetstian.</i> On a generalisation of Rademacher and Walsh systems	1, 85
<i>M. B. Balk.</i> Factorization of palyanalytic function in the vicinity of an isolated singularity	5, 389
<i>R. R. Bedjanian.</i> On rapid mixing of infinite dimensional random stationary processes with discrete time	5, 435
<i>A. A. Chubartian.</i> On a normal form deductions and the characterization of deduction complexity propositional calculus	5, 398
<i>R. S. Davtian, A. A. Talalian.</i> On the convergence of series by complete orthogonal systems on the sets of positive measure	4, 342
<i>E. A. Daniltan.</i> Asymptotical investigation of the busy period and waiting time for the $\vec{M}_r/\vec{G}_r/1/\infty$ priority quenes in heavy traffic	3, 272
<i>D. A. Ediniklian.</i> On some formal representations of algorithms defined by graph schemes with memory	5, 414
<i>V. I. Gavrillov.</i> A uniqueness theorem for holomorphic functions	3, 264
<i>A. P. Goryachev.</i> On some properties of coefficients of series by piece-polynomial bases	1, 61
<i>B. V. Grigorian.</i> On the uniqueness of harmonic functions in the domains of revolution	5, 410
<i>H. M. Hatrapetian.</i> On the basisity of certain biorthogonal systems in the complex domain	2, 133
<i>S. Ja. Havinson.</i> Universal potential for compacta of zero capacity and other approximatinal characteristics of sparse sets	4, 356
<i>A. H. Hovhanesian.</i> On the Chauchy problem for high order weakly hyperbolic equations	2, 163
<i>G. R. Hovhanistan.</i> The Cauchy's problem for the first order weakly hyperbolic pseudodifferential systems with data on the hyperplane of degeneration	2, 97

<i>S. M. Hovhannistan.</i> On the representation of measurable functions by orthogonal series summable in spaces $L_{\vec{p}}$	6, 535
<i>M. M. Jrbushtan (Džrbashtan), R. A. Bagtjan.</i> On integral representations and measures associated with the functions of Mittag-Loefler type	6, 483
<i>I. G. Khachatryan.</i> On a converse problem in the theory of shells	4, 307
<i>I. O. Khachatryan.</i> On the closure of the families of Mittag-Loefler type functions in weighted-uniform approximation in complex domain	4, 373
<i>A. A. Kitballan.</i> The α -quasianaliticity problem in the Denjoy-Carleman classes	3, 207
<i>Iu. A. Kutoyants.</i> Local asymptotical normality for the diffusion type processes	3, 103
<i>V. H. Martirosian.</i> On the possibility of uniform approximations with polynomials by the Müntz system with integral coefficients	4, 293
<i>V. M. Martirosian.</i> On two spaces of functions analytical in a half-plane	2, 182
<i>L. Kh. Mehrubian.</i> Realization of some classes of meromorphic functions in the theory of discrete time systems	6, 560
<i>N. Kch. Mesropian.</i> On the structure of the space generated by n -dimensional stationary process	4, 317
<i>E. A. Mtsakchantan.</i> Calculation of the compact type infinite-dimensional groups of unit sphere in Hilbert spaces	3, 153
<i>R. Z. Mkrtchian.</i> Construction of certain special absolutely continuous functions	1, 43
<i>B. S. Nuhapettian.</i> Strong mixing property of the Gibbs random field and its applications	3, 242
<i>R. O. Nazartan.</i> On decompositions of simple real Lie groups	1, 3
<i>R. O. Nazartan.</i> The minimal decompositions of real simple Lie groups	4, 455
<i>N. O. Stniantan.</i> On the interconnection between the convergence and summability of general orthogonal series	1, 23
<i>A. A. Talalian.</i> On the convergence of Fourier series by bounded complete orthonormal systems	2, 193
<i>M. Sh. Tsalenko.</i> Categories of relations over regular categories	2, 113
<i>A. A. Vagarshaktan.</i> Boundary properties of some classes of harmonic functions	1, 54
<i>V. G. Verdiev.</i> On the density of points of maximal deviation under best approximation of the continuous functions	5, 445

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Մ. Մ. Զրբաշյան, Ռ. Ա. Բաղիյան. Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների հետ ասոցիացված ինտեգրալ ներկայացումների և չափերի մասին	483
Ռ. Վ. Համբարձումյան, Վ. Կ. Օհանյան. Հարթության վրա թելիկների համաձեռն ի իզոտրոպ պատահական դաշտեր	509
Գ. Ա. Աղոմյան. Ոչ գծային ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումների առաջին և երկրորդ կարգի $\langle y \rangle$ և $R_y(t_1, t_2)$ ստոխաստիկականների ստացումը	529
Ս. Մ. Հովհաննիսյան. Չափելի ֆունկցիաների ներկայացումը տարածություններում գումարվող շարքերով	535
Ռ. Ա. Ալեխանդրյան, Ռ. Զ. Մկրտչյան. Միապատիկ սպեկտրով կամայական ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական էլեմենտների սխեմների լրիվության մի հայտանիշի մասին	549
Լ. Խ. Մեհրաբյան. Մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի իրականացումը դիսկրետ ժամանակով սխեմների տեսության մեջ	560

С О Д Е Р Ж А Н И Е

М. М. Джрбашян, Р. А. Багян. Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг-Леффлера	483
Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян. Однородные и изотропные случайные поля волокон на плоскости	509
Г. А. Адомян. Получение статистик первого и второго порядка $\langle y \rangle$ и $R_y(t_1, t_2)$ для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений	529
С. М. Оганесян. О представлении измеримых функций ортогональными рядами, суммируемыми в пространствах L_p	535
Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Об одном критерии полноты системы собственных элементов произвольного самосопряженного оператора с однократным спектром	549
Л. Х. Мехрабян. Реализация некоторых классов мероморфных функций в теории систем с дискретным временем	560

C O N T E N T S

M. M. Jrbashian, R. A. Bagian. On integral representations and measures associated with the functions of Mittag-Leffler type	483
R. V. Ambartsumian, V. K. Ohanian. Homogeneous and isotropic random fields of fibres on the plane	509
G. A. Adomian. Obtaining first and second order statistics $\langle y \rangle$ and $R_y(t_1, t_2)$ in stochastic differential equations for the nonlinear case	529
S. M. Hovhannisian. On the representation of measurable functions by orthogonal series summable in spaces L_p	535
R. A. Alexandrian, R. Z. Mkrtchian. On the criterion of completeness of the system eigenelements general selfadjointed operator with simple spectrum	549
L. Kh. Mehrabian. Realization of some classes of meromorphic functions in the theory of discret time systems	560