ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրատարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կորսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը գրախոսման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

едакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

М. Б. БАЛК

О ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ЕЕ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

1°. В статье [1] с помощью аппарата мероморфных кривых был установлен следующий результат:

Утверждение 1. Целая полианалитическая* функция $f(z)$ произвольного порядка n, имеющая ограниченное множество нулей, представима в виде

$$f(z) \equiv P(z, \bar{z}) \exp E(z), \tag{1}$$

где $E(z)$ — целая аналитическая функция, а $P(z, \bar{z})$ — полином относительно z и $\bar{z}$.

Это утверждение позволило получить ряд теорем пикаровского типа (см. [2], [3], [4]). Оригинальное доказательство утверждения 1, также использующее некоторые сведения о мероморфных кривых, принадлежит И. В. Островскому [5].

Недавно американский математик П. Крайкевич [6], привлекая аппарат квазинормальных семейств аналитических функций, получил для функции, полианалитической порядка $n=2$ в окрестности своей изолированной особой точки, естественный аналог утверждения 1. Однако это доказательство не переносится на случай п. а. функций произвольного порядка n.

В данной заметке мы намерены показать, что накопленные в [1]—[6] методы и факты в сочетании с некоторыми ранними результатами Р. Неванлинны [7]—[8] позволяют обобщить утверждение 1 на случай функций, являющихся полианалитическими *произвольного* порядка n в проколотой окрестности какой-либо точки z_0. В частности, получим результат П. Крайкевича.

В основу заметки положен доклад, прочитанный 10 декабря 1973 года на семинаре по теории функций при МГУ.

Пусть каждая функция $a_k(z)$ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$ голоморфна в некоторой проколотой окрестности D точки z_0 $(|z_0| \leqslant \infty)$, причем хотя бы для одной из функций $a_k(z)$ точка z_0 — особая. Тогда точка z_0 называется (см. [9], [5]) изолированной особенностью п. а. функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \bar{z}^k,$$

---

* Ниже будем часто писать ради краткости „п. а." вместо „полианалитическая". Относительно используемых в данной статье понятий см. обзорную статью [10].

и притом существенно особой, если z_0 является таковой хотя бы для одной из функций $a_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

Теорема 1. *Пусть δ — замкнутая круговая окрестность точки z_0 $(|z_0| \leqslant \infty)$. Если функция $f(z)$ — однозначная полианалитическая в $D = \delta - \{z_0\}$ и точка z_0 не является предельной для множества всех нулей функции $f(z)$, то $f(z)$ в D представима в виде*

$$f(z) \equiv \pi(z, \bar{z}) \exp E(z),$$

где $E(z)$ — целая аналитическая функция относительно $1/(z-z_0)$ при $z_0 \neq \infty$ и относительно z при $z_0 = \infty$, а $\pi(z, \bar{z})$ — однозначная полианалитическая в D функция, не имеющая в точке z_0 существенной особенности.

Учитывая известную связь между п. а. функциями и псевдополиномами ([10], стр. 204), можно, очевидно, теорему 1 перефразировать так:

Теорема 1'. *Если все $a_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ голоморфны в $D = \{z : 0 < |z| \leqslant 1\}$ и псевдополином*

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\, w^k$$

не имеет нулей в плоскости $w = \bar{z}$ (при $0 < |z| \leqslant 1$), то $f(z, w) \equiv \equiv \pi(z, w) \exp E(z)$, где $\pi(z, w)$ — псевдополином (по w) с коэффициентами, мероморфными при $|z| \leqslant 1$, а $E(z)$ — целая функция от $1/z$.

2°. Нам потребуются некоторые вспомогательные факты.

Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в круговом кольце $D\{1 \leqslant \leqslant |z| < \infty\}$. Будем пользоваться, следуя Р. Неванлинне, такими обозначениями: $n(r, a, f)$ — число a-точек (с учетом их кратности) функции $f(z)$ в кольце $1 \leqslant |z| \leqslant r$;

$$N(r, a, f) = \int_1^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt, \quad N(r, f) \equiv N(r, \infty, f),$$

$$m(r, f) \equiv m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r e^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$m(r, a, f) \equiv m\left(r, \frac{1}{f(z) - a}\right).$$

Известная формула Иенсена была перенесена Р. Неванлинной на случай кольца (см. [7], стр. 40, формула (76)). Пусть функция $f(z)$ мероморфна в кольце $G\{\rho_0 \leqslant |z| \leqslant r\}$, $\{a_\lambda\}$ — ее нули в G, $\{b_\lambda\}$ — ее полюса. Тогда

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\sum\ln\frac{r}{|a_\mu|}+\sum\ln\frac{r}{|b_\mu|}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho_0 e^{i\theta})|\,d\theta-\ln\frac{r}{\rho_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}d\arg f(\rho_0 e^{i\theta}).$$

Нам понадобится следующий частный случай этого утверждения Неванлинны.

Замечание 1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце $D\{1\leqslant|z|\leqslant r\}$ и $f(z)\neq 0$ на $\gamma\{|z|=1\}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\,d\theta=N(r,0,f)+A\ln r,\tag{2}$$

где A — вращение функции $f(z)$ по контуру γ:

$$A=\mathrm{Вр}_\gamma f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d[\arg f(z)]=\mathrm{const}.$$

Замечание 2. (Первая основная теорема Р. Неванлинны для функций, мероморфных в окрестности точки ∞; см. [8], стр. 86). Каждой непостоянной функции $f(z)$, которая в кольце $D\{\rho_0\leqslant|z|<\infty\}$ однозначна и мероморфна, соответствует такая функция $T(r,f)$, определенная с точностью до аддитивной величины $O(\ln r)$ и (начиная с некоторого r) возрастающая, что имеет место зависимость

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+O(\ln r)$$

при каждом конечном или бесконечном a. Если точка ∞ является существенно особой для $f(z)$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\ln r}=\infty.\tag{3}$$

Функцию $\pi(z)\not\equiv 0$, голоморфную в $D\{\rho_0\leqslant|z|<\infty\}$ и не имеющую в точке ∞ существенной особенности, условимся называть, ради краткости *полиномоидом* (в D). В классе функций $\{f(z)\}$, голоморфных в D, полиномоиды характеризуются (как это видно из замечания 2) тем, что удовлетворяют условию

$$T(r,f)=O(\ln r)\text{ при } r\to\infty.$$

Полианалитическую (в D) функцию, не имеющую в точке ∞ существенной особенности, будем называть *полианалитическим* (короче: *п. а.*) *полиномоидом*.

Замечание 3. Каждый полиномоид (в D) представим в виде

$$\pi(z)=z^m P(z)\exp B\left(\frac{1}{z}\right),\tag{4}$$

где m — целое (необязательно положительное) число, $P(z)$ — полином, все корни которого (если таковые имеются) принадлежат D, а $B(t)$ — голоморфная функция при $|t| \leqslant \frac{1}{\rho_0}$ · Доказательство очевидно.

Замечание 4. (см. [8], стр. 78). Если функция $f(z)$ голоморфна и имеет ограниченное множество нулей в $D\{\rho_0 \leqslant |z| < \infty\}$, то она представима в виде

$$f(z) \equiv \pi(z) \exp E(z), \tag{5}$$

где $E(z)$ — целая аналитическая функция, а $\pi(z)$ — полиномоид.

3°. Рассмотрим голоморфную в $D\{1 \leqslant |z| < \infty\}$ кривую

$$g \equiv g(z) = \{g_1(z), \cdots, g_S(z)\}. \tag{6}$$

Всюду в дальнейшем будем подразумевать (не оговаривая это каждый раз особо), что функции $g_1(z), \cdots, g_S(z)$ линейно независимы и не имеют в D общего нуля, а $g_S(z) \neq 0$ на $\gamma\{|z| = 1\}$.

Пусть, далее, задана полиномиальная кривая

$$P \equiv p(c) = \{p_1(c), \cdots, p_S(c)\}, \tag{7}$$

где $c \in [1, \infty)$, причем полиномы $p_1(c), \cdots, p_S(c)$ будем предполагать линейно независимыми и, более того, монотонно возрастающих точных степеней $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$:

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_S.$$

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\|g\| = \sqrt{|g_1(z)|^2 + \cdots + |g_S(z)|^2}, \quad \|p\| = \sqrt{|p_1(c)|^2 + \cdots + |p_S(c)|^2}, \tag{8}$$

$$F_c(z) \equiv F(z; c) \equiv g \cdot p \equiv g_1(z) \cdot p_1(c) + \cdots + g_S(z) \cdot p_S(c). \tag{9}$$

(„свертка кривых (6) и (7)“), $n(t, c)$ — число нулей функции $F(z; c)$, расположенных в кольце $1 \leqslant |z| \leqslant t$ (с учетом их кратности),

$$N(r, c) = \int_1^r \frac{n(t, c)}{t} dt, \tag{10}$$

$$m(r, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|g(re^{i\theta})\| \, |g(e^{i\theta}) \cdot p(c)|}{\|g(e^{i\theta})\| \, |g(re^{i\theta}) \cdot p(c)|} d\theta, \tag{11}$$

$$T(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|g(re^{i\theta})\|}{\|g(e^{i\theta})\|} d\theta. \tag{12}$$

Замечание 5.

$$m(r, c) + N(r, c) = T(r, g) + A \ln r, \tag{13}$$

где $A = Bp_\gamma F(z; c)$.

Доказательство следует из (10) — (12) и (2).

Замечание 6. Если свертка (9) кривых (6) и (7) имеет на всех окружностях $\Gamma\{|z|=c>c_1\}$ ($c_1=\mathrm{const}$) одно и то же вращение q, то число $n(c,c)$ нулей (с учетом их кратности) свертки (9) в кольце $1\leqslant|z|\leqslant c$ при достаточно большом c ($c>c_0=\mathrm{const}$) не зависит от выбора c:

$$n(c,c)=h=\mathrm{const}\ (c>c_0).$$

Действительно, пусть $Bp_\gamma\, g_S(z)=l$. При $z\in\gamma$ имеем

$$\lim_{c\to\infty}\frac{F(z;c)}{c^{a_S}}=g_S(z)$$

(сходимость равномерная по z на γ). Отсюда и из теоремы Руше следует существование такого c_0, что при $c>c_0$

$$A=Bp_\gamma F(z;c)=Bp_\gamma[F(z;c)/c^{a_s}]=Bp_\gamma\, g_S(z)=l.$$

Но тогда $n(c,c)=q-l=\mathrm{const}$ при любом $c>c_0$.

Замечание 7. Если голоморфная кривая (9) такова, что $g_S(z)$ — полином и $T(r,g)=O(\ln r)$ при $r\to\infty$, то все функции $g_1(z),\cdots,g_{S-1}(z)$ — полиномоиды.

Доказательство. Учитывая замечания 2 и 1 и условие замечания 7, получаем при любом k, $1\leqslant k\leqslant s-1$

$$T\left(r,\frac{g_k}{g_s}\right)=m\left(r,\infty,\frac{g_k}{g_s}\right)+N\left(r,\infty,\frac{g_k}{g_s}\right)+O(\ln r)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\|g(re^{i\theta})\|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g_s(e^{i\theta})|d\theta+N(r,0,g_s)+$$

$$+O(\ln r)\leqslant T(r,g)+O(\ln r)=O(\ln r).$$

В силу заключительной части замечания 2 функция $g_k(z)/g_s(z)$, а вместе с ней и $g_k(z)$, не может иметь в точке ∞ существенной особенности, так что $g_k(z)$ — полиномоид.

Замечание 8. Пусть кривые (6) и (7) таковы, что

1) число нулей $n(c,c)$ их свертки (9) в кольце $1\leqslant|z|\leqslant c$ ограничено сверху при $c>c_0$:

$$n(c,c)\leqslant h=\mathrm{const}\ \text{при}\ c>c_0=\mathrm{const};$$

2) $g_s(z)$ является полиномом. Тогда все функции $g_1(z),\cdots,g_{s-1}(z)$ являются полиномоидами в $D\{1\leqslant|z|<\infty\}$.

Доказательство будет опираться на некоторые соображения И. В. Островского, использованные им в аналогичной ситуации в случае целых кривых (см. [5], стр. 196—201). Из тождества (13) следует, что

$$T(r,g)=I_1(r)+I_2(r)+O(\ln r),$$

где

$$I_1(r)=r\int_r^\infty N(r,c)\frac{dc}{c^2},\quad I_2(r)=r\int_r^\infty m(r,c)\frac{dc}{c^2}.$$

Так как (см. замечание 6) $n(t,c)\leqslant n(c,c)=h=\mathrm{const}$ ($c_0<r<c$), то

$N(r, c) = O(\ln r)$, $I_1(r) = O(\ln r)$. Полагая

$$L(r) = \sup_{|w_1|^2 + \cdots + |w_s|^2 = 1} \left| r \int_r^{\infty} \frac{1}{|w_1 p_1(c) + \cdots + w_s p_s(c)|} \frac{dc}{c^2} \right|,$$

легко проверить, что $I_2(r) \leqslant 2L(r)$.

Функция $L(r)$, как показал И. В. Островский ([5], стр. 198 — 200), удовлетворяет соотношению

$$L(r) = O(\ln r) \text{ (при } r \to \infty).$$

В итоге получаем

$$T(r, g) = O(\ln r).$$

Учитывая замечание 7, видим что все $g_k(z)$ $(k = 1, \cdots, s-1)$ — полиномоиды.

Замечание 9. (см. [1] или [5]). Всякую *приведенную* в некоторой области D п. а. функцию, т. е. функцию вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} |z|^{2\nu} \varphi_\nu(z),$$

где все $\varphi_\nu(z)$ голоморфны в D, можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{s} p_k(|z|^2) \psi_k(z),$$

где $\psi_1(z), \cdots, \psi_s(z)$ — линейно независимые голоморфные в D функции, каждая из которых совпадает с одной из функций $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_{n-1}(z)$, а $p_1(t), \cdots, p_s(t)$ — полиномы, точные степени которых $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ удовлетворяют условию

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s = n-1.$$

Замечание 10. (см. [6], [1]). Если функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \bar{z}^k$$

является полианалитической порядка n в $D\{\rho_0 \leqslant |z| < \infty\}$ имеет там ограниченное множество нулей и если $a_{n-1}(z) \not\equiv 0$, то $a_{n-1}(z)$ имеет в D лишь конечное множество нулей.

Доказательство теоремы 1. Достаточно ограничиться случаем $z_0 = \infty$; к нему сводится и случай $z_0 \neq \infty$ путем замены $\zeta = 1/(z - z_0)$. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \bar{z}^k,$$

где все $a_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ голоморфны в D и $a_{n-1}(z) \not\equiv 0$. Без потери общности можно считать, что $a_{n-1}(z)$ не имеет нулей на

$\gamma\,\{|z|=\rho_0\}$ и что $\rho_0=1$. Рассмотрим вспомогательную п. а. функцию

$$\Phi(z)=z^{n-1}f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}|z|^{2k}\varphi_k(z),$$

где

$$\varphi_k(z)=z^{n-1-k}\,a_k(z).$$

Она имеет в D те же нули (с учетом их кратности), что и $f(z)$. Можно $\Phi(z)$ представить в виде (см. замечание 9)

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{s}p_k(|z|^2)\,\psi_k(z),$$

где $\psi_k(z)$ и $p_k(t)$ $(k=1,\cdots,s)$ удовлетворяют условиям замечания 9, причем

$$\psi_s(z)\equiv\varphi_{n-1}(z)\equiv a_{n-1}(z).$$

Из условия теоремы 1 следует, что $\psi_s(z)$ имеет в D лишь конечное число нулей (см. замечание 10); поэтому (см. замечание 4 и 3) $\psi_s(z)$ представима в виде

$$\psi_s(z)=\exp E(z)\cdot z^m\,Q(z)\cdot g_s(z)\,\exp B\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $E(z)$ — целая функция, $Q(z)$ — полином, корнями которого служат все расположенные в D общие нули функций $\psi_1(z),\cdots,\psi_s(z)$; m — целое число; $B(t)$ — голоморфная функция при $|t|\leqslant 1$; $g_s(z)$ — полином с корнями в D.

Представим $\Phi(z)$ так:

$$\Phi(z)=\exp E(z)\cdot\exp B\left(\frac{1}{z}\right)\cdot Q(z)\,z^m\,F(z),$$

где

$$F(z)=\sum_{k=1}^{s}p_k(|z|^2)\,g_k(z),$$

причем функции $g_k(z)$ $(k=1,\cdots,s)$ — голоморфные линейно независимые функции без общих нулей. Ясно, что множество нулей функции $F(z)$ в D ограничено. Рассматривая кривые

$$g(z)=\{g_1(z),\cdots,g_s(z)\}\quad(z\in D),$$
$$p(c)=\{p_1(c^2),\cdots,p_s(c^2)\}\quad(c\in[1,\infty)),$$

видим, что их свертка $F(z;c)\equiv g(z)\cdot p(c)$ имеет на всех достаточно больших окружностях $\Gamma\,\{|z|=c>c_1=\mathrm{const}\}$ одно и то же вращение. В силу замечания 6 имеем $n(c,c)=h=\mathrm{const}$ при $c>c_0=\mathrm{const}$. Согласно замечанию 8 функции $g_1(z),\cdots,g_{s-1}(z)$ — полиномоиды. Но тогда ясно, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)\equiv e^{E(z)}\cdot\pi(z,\bar z),$$

где

$$\pi(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(z) \bar{z}^k,$$

а $\pi_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ — полиномоиды в D. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает справедливость большой теоремы Пикара для п. а. функций, имеющих существенную особенность (ранее эта теорема была установлена другими средствами в работах В. Боша и П. Крайкевича [12], [6], а в случае целых п. а. функций — в [11] и [4]).

Примечание. Более, чем через год после того, как настоящая статья поступила в редакцию, мне стало известно, что результат, аналогичный теореме 1 данной статьи, был недавно опубликован П. Крайкевичем (P. Krajkiewicz. Polyanalytic functions with exceptional values. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 197, October 1974, p.p 181—210). Однако доказательство, приведенное П. Крайкевичем, значительно сложнее нашего и использует другую идею.

Смоленский государственный педагогический институт им. К.Маркса

Поступила 29.1.1974

Մ. Բ. ԲԱԼԿ. Պոլիանալիտիկ ֆունկցիայի ֆակտորիզացիայի մասին մեկուսացված եզակիության շրջակայքում *(ամփոփում)*

Մերոմորֆ կորերի ապարատի օգնությամբ ապացուցվում է կամայական կարգի պոլիանալիտիկ ֆունկցիայի ներկայացման հնարավորությունը (a) մեկուսացված եզակիությամբ ծակված (D) շրջակայքում՝ հոլոմորֆ, առանց զրոների D-ում և պոլիանալիտիկ, չունեցող (a) կետում էական եզակիության ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով։

Այս պնդումը ընդհանրացնում է Ի. Կռայկևիչի կողմից նախապես ստացված (բիանալիտիկ ֆունկցիայի դեպքում) և հեղինակի կողմից (ամբողջ պոլիանալիտիկ ֆունկցիաների դեպքում) արդյունքները։ Այս արդյունքից հետևում է Պիկարի մեծ թեորեմը պոլիանալիտիկ ֆունկցիաների համար։

M. B. BALK. *Factorization of a polyanalytic function in the vicinity of an isolated singularity* (summary)

By use of the theory of meromorphic curves it is proved that every function which is polyanalytic of order n in the punctured vicinity (D) of its isolated singularity (a) may be presented as a product of two functions: one holomorphic and without zeros in D, the other polyanalytic in D and without essential singularity in a. This statement generalizes some earlier results obtained by P. Krajkiewicz (in the case $n = 2$) and the author (in the case of entire polyanalytic functions) and has the big Picard theorem for polyanalytic functions as its corollary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Б. Балк*. Целые полианалитические функции с ограниченным множеством нулей. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 1, № 5, 1966, 341—357.
2. *М. Б. Балк*. Некоторые следствия из теоремы о факторизации целых полианалитических функций, Смоленский математический сборник, 2, 1969, 3—7.

3. *М. Б. Балк, М. Ф. Зуев.* О числе значений, принимаемых целой полианалитической функцией неизолированно. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем, 7, № 5, 1972, 313—324.

4. *М. Б. Балк.* Большая теорема Пикара для целых бианалитических функций, УМН, 20, вып. 2, 1965, 159—165.

5. *И. В. Островский.* Об одной теореме М. Б. Балка. Математическая физика, функциональный анализ. (Сб. научных трудов ФТИИНТ АН УССР), 1, 1969, 191—203.

6. *P. Krajkiewicz.* Bianalytic functions with exceptional values, Proc. Amer. Math. Soc., 38, № 1, 1973, 75—79.

7. *R. Nevanlinna.* Untersuchungen über den Picardschen, Satz, Acta Societatis scientiarum Fennicae, 50, № 6, 1924.

8. *R. Nevanlinna.* Neuere Untersuchungen über den Picard'schen Satz, „Den sjette skandinaviske Matematikerkongres, Kobenhaven, 1925", 1926, 77—95.

9. *М. Б. Балк, А. А. Полухин.* Предельное множество бианалитической функции в ее изолированной особой точке, Смоленский матем. сборник, 3, 1970, 3—12.

10. *М. Б. Балк, М. Ф. Зуев.* О полианалитических функциях, УМН, 25, вып. 5, 1970, 203—226.

11. *М. Б. Балк.* О значениях, принимаемых целыми полианалитическими функциями, ДАН СССР, 167, 1966, 12—15.

12. *W. Bosch, P. Krajkiewicz.* The big Picard theorem for polyanalytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 26, 1970, 145—150.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

А. А. ЧУБАРЯН

О НЕКОТОРОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ И СЛОЖНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЫВОДОВ В КЛАССИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В работе предлагается схема построения вывода некоторой „нормальной“ формы в классическом исчислении высказываний гильбертовского типа для произвольной тождественно истинной формулы (т. и. ф.). Преимущество предлагаемых выводов заключается в том, что они могут быть „собраны из стандартных блоков“ и обладают в некотором смысле свойством „подформульности“, что позволяет оценить некоторые сложностные характеристики выводов произвольной т. и. ф. фиксированной длины.

Для построения вывода используется метод Кальмара доказатель ства полноты классического исчисления высказываний.

1°. Зафиксируем некоторую систему гильбертовского типа классического исчисления высказываний, которую мы впредь будем обозначать через $\sum$. Пропозициональные переменные (п. п.) введем как символы $x_1, x_2, x_3, \cdots$. Под пропозициональной формулой будем понимать слово, составленное по обычным правилам из 1) п. п., 2) логических связок &, V, $\supset$, $\neg$, 3) скобок. Аксиомами $\sum$ будем считать формулы, задаваемые по аксиомным схемам, приведенным, например, в гл. IV §19 работы [1]. Правилом вывода будет правило Modus ponens. Строчные латинские буквы a, b (возможно с индексами) будут использоваться для обозначения п. п., заглавные латинские буквы A, B, C, F, G (возможно с индексами), а также греческие буквы α, β, γ — для обозначения пропозициональных формул (п. ф.)

В соответствии с обычным пониманием длины слова мы будем понимать *длину формулы*. Длину произвольной формулы F будем обозначать через $l(F)$.

Под *логической длиной* формулы F мы будем понимать количество вхождений логических символов в формулу F и будем обозначать через $l_1(F)$.

Под *пропозициональной длиной* формулы F мы будем понимать количество вхождений пропозициональных переменных в формулу F и будем обозначать через $l_2(F)$.

Мы считаем известным понятие *подформулы*. Подформулу будем называть элементарной только в том случае, если она является пропозициональной переменной.

Нетрудно убедиться в том, что для произвольной формулы

$$l(F) = 3(l_1(F) + l_2(F)) - 2, \qquad (1)$$

$$l_2(F) \leqslant l_1(F) + 1. \qquad (2)$$

Действительно, в формуле, количество логических символов и пропозициональных переменных которой равны соответственно l_1 и l_2, необходимо присутствуют $2l_2$ скобок для каждой элементарной подформулы и $2(l_1 - 1)$ скобок для подформул, образованных всеми логическими символами, кроме самого внешнего. Неравенство (2) очевидно. Из (1) и (2) получаем

$$6l_2(F) - 5 \leqslant l(F). \qquad (3)$$

Если учесть, что количество переменных в формуле любой длины может равняться единице, то получим для произвольной формулы

$$3l_1(F) + 1 \leqslant l(F) = 6l_2(F) + 1. \qquad (4)$$

Напомним индуктивное определение глубины произвольной формулы F (будем обозначать глубину F через $h(F)$):

а) если F — элементарная формула, то $h(F) = 0$;

б) если F имеет вид $(F_1) \& (F_2)$, или $(F_1) \vee (F_2)$, или $(F_1) \supset (F_2)$, и $h(F_1)$ и $h(F_2)$ суть глубины формул F_1 и F_2 соответственно, то $h(F) = \max(h(F_1), h(F_2)) + 1$;

с) если F есть формула вида $\rceil(F_1)$ и $h(F_1)$ — глубина формулы F_1, то $h(F) = h(F_1) + 1$.

Мы будем говорить, что формула G является *сверткой* формулы F в том и только том случае, если существует список попарно различных пропозициональных переменных $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \leqslant l_2(G))$ и соответствующих им попарно различных пропозициональных формул $A_1, A_2, \cdots, A_n$, таких, что формулу F можно получить в результате одновременной подстановки вместо переменных $a_1, a_2, \cdots, a_n$ в формуле G формул $A_1, A_2, \cdots, A_n$ соответственно.

Формулу G назовем *правильной сверткой* т. и. ф. F, если

а) G является сверткой F,

б) G является т. и. формулой.

Будем говорить, что формула G является логическим ядром формулы F, если G является правильной сверткой формулы F, и не существует правильной свертки формулы F, имеющей глубину, меньшую чем G.

Следуя Черчу [2], мы будем называть *вариантами* формулы, получающиеся друг из друга переименованием переменных (при этом одинаковые переменные переименовываются в одинаковые).

Формулы мы будем называть одинаковыми, если они совпадают графически как слова или являются вариантами. В противном случае формулы называются различными.

Для каждой формулы A под εA (ε может быть также с индексом) будем понимать или саму формулу A, или $\rceil A$. Каждой формуле εA будем сопоставлять символ $\bar{\varepsilon}_A$, который определяется по правилу:

$$\bar{\varepsilon}_A = \begin{cases} \text{И тогда и только тогда, когда } \varepsilon A \text{ есть } A \\ \Lambda \text{ тогда и только тогда, когда } \varepsilon A \text{ есть } \rceil A. \end{cases}$$

2°. Используя метод Кальмара (см. стр. 121 — 124 русск. перев. работы [1]) доказательства полноты классического исчисления высказываний можно дать следующую схему выводов произвольной т. и. ф. F в системе $\sum$.

Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_k$ — все различные пропозициональные переменные формулы F. Составим 2^k комбинаций вида $\varepsilon_{j_1} a_1, \varepsilon_{j2} a_2, \cdots, \varepsilon_{jk} a_k$ $(j = 1, 2, \cdots, 2^k)$. Через A_j^p $(p \leqslant k, j = 1, 2, \cdots, 2^p)$ будем обозначать формулу $\varepsilon_{j_{k-p+1}} a_{l_{k-p+1}} \& (\varepsilon_{jk-p} a_{k-p} \& (\cdots \& (\varepsilon_{j_{k-1}} a_k + \& \varepsilon_{jk} a_k) \cdots))$. Для каждой из формул A_j^k поступаем следующим образом:

а) выводим формулы $A_j^k \supset \varepsilon_{ji} a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$; таким образом, для всех различных элементарных подформул α формулы F будут выведены все формулы вида $A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha$.

б) допустим для некоторой подформулы γ, имеющей вид $\alpha * \beta$ (под $*$ мы понимаем &, V, $\supset$), уже выведены формулы $A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha$ и $A_j^k \supset \varepsilon_\beta \beta$; возьмем $\bar{\varepsilon}_\gamma = \bar{\varepsilon}_\alpha * \bar{\varepsilon}_\beta$ и соответствующим образом возьмем $\varepsilon_\gamma \gamma$; для получения вывода формулы $A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma$ выведем еще формулу $(A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha) \supset ((A_j^k \supset \varepsilon_\beta \beta) \supset (A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma))$, которая выводима в силу выбора $\bar{\varepsilon}_\gamma$, и дважды применим правило $M.\ p.$;

с) допустим, что для некоторой подформулы γ, имеющей вид $\rceil \alpha$, уже выведена формула $A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha$; возьмем $\bar{\varepsilon}_\gamma = \rceil \bar{\varepsilon}_\alpha$ и соответствующим образом возьмем $\varepsilon_\gamma \gamma$, тогда для вывода формулы $A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma$ достаточно вывести еще формулу $(A_j^k \supset \varepsilon_\alpha \alpha) \supset (A_j^k \supset \varepsilon_\gamma \gamma)$ и применить правило М. р.

Поступая согласно пунктам а), б), с) для всех подформул формулы F (по мере возрастания их глубин), мы получим для каждого A_j^k вывод формулы $A_j^k \supset F$. Далее необходимо освободиться от посылок в выведенных импликациях. Для этого достаточно вывести еще формулы вида $((a_i \& A_j^{k-i}) \supset F) \supset (((\rceil a_i \& A_j^{k-i}) \supset F) \supset (A_j^{k-i} \supset F))$ $(i = 1, 2, \cdots, k-1;\ j = 1, 2, \cdots, 2^{k-i})$ и $(a_k \supset F) \supset ((\rceil a_k \supset F) \supset F)$ и каждый раз дважды применять правило М. р.

Итак, вывод произвольной т. и. ф. F может быть построен из выводов формул, задаваемых по схемам:

I. I. $B_1 \& (B_2 \& \cdots \& (B_{k-1} \& B_k) \cdots)) \supset B_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

II.
1. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha \& \beta)))$,
2. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \rceil \beta) \supset (A \supset \rceil (\alpha \& \beta)))$,
3. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset \rceil (\alpha \& \beta)))$,
4. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \supset \rceil \beta)) \supset (A \supset \rceil (\alpha \& \beta)))$,
5. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha V \beta)))$,
6. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \rceil \beta) \supset (A \supset (\alpha V \beta)))$,
7. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha V \beta)))$,
8. $(A \supset \rceil \alpha) \supset ((A \subset \rceil \beta) \supset (A \supset \rceil (\alpha V \beta)))$,
9. $(A \supset \alpha) \supset ((A \supset \beta) \supset (A \supset (\alpha \supset \beta)))$,

$$10.\ (A\supset\alpha)\supset((A\supset\neg\beta)\supset(A\supset\neg(\alpha\supset\beta))),$$
$$11.\ (A\supset\neg\alpha)\supset((A\supset\beta)\supset(A\supset(\alpha\supset\beta))),$$
$$12.\ (A\supset\neg\alpha)\supset((A\supset\neg\beta)\supset(A\supset(\alpha\supset\beta))),$$
$$13.\ (A\supset\alpha)\supset(A\supset\neg\neg\alpha),$$
$$14.\ (A\supset\neg\alpha)\supset(A\supset\neg\alpha).$$

III. $1. ((\alpha\&\gamma)\supset F)\supset(((\neg\alpha\&\gamma)\supset F)\supset(\gamma\supset F)),$

$2. (\alpha\supset F)\supset((\neg\alpha\supset F)\supset F).$

Стандартные блоки выводов формул, получаемых по этим схемам для формулы F, „склеиваются" правилами М. р., образуя вывод F.

3°. *Сложностные характеристики выводов.* Условимся букву W использовать в роли переменной, допустимыми значениями которой являются всевозможные выводы в системе $\sum$. Утверждение о том, что W является выводом формулы F будем обозначать через $W\to F$.

Для каждой выводимой формулы F можно поставить вопросы о „простой выводимости" этой формулы в том или ином смысле. Например, естественно напрашиваются вопросы: а) какое количество формул достаточно для вывода данной формулы? б) насколько „длинные" формулы необходимы для вывода данной формулы?

В связи с этим определим следующие сложностные характеристики выводов. Пусть W — вывод, состоящий из формул $F_1, F_2, \cdots F_n$.

Линейной сложностью вывода W назовем количество формул n в нем и будем обозначать через $T(W)$.

Емкостную сложность вывода W определим как максимум длин формул, входящих в этот вывод. Емкостную сложность будем обозначать через $S(W)$:

$$S(W)=\max(l(F_1), l(F_2), \cdots, l(F_n)).$$

Иногда оказывается полезной такая сложностная характеристика вывода, как сумма длин всех формул этого вывода. Эту характеристику вывода W будем обозначать через $L(W)$ и называть *полной сложностью вывода*:

$$L(W)=l(F_1)+l(F_2)+\cdots+l(F_n).$$

Исходя из вышеназванных сложностных характеристик выводов, определим соответствующие сложностные характеристики для произвольной т. и. ф. F.

1. $\overline{T}(F)=\min\limits_{W\to F} T(W)$ — линейная сложность формулы F по выводимости.

2. $\overline{S}(F)=\min\limits_{W\to F} S(W)$ — емкостная сложность формулы F по выводимости.

3. $\overline{L}(F)=\min\limits_{W\to F} L(W)$ — полная сложность формулы F по выводимости.

Определим следующие функции Шеннона:

$$Ш^{T}(n) = \max_{l(F)<n} \overline{T}(F),$$

$$Ш^{S}(n) = \max_{l(F)<n} \overline{S}(F),$$

$$Ш^{L}(n) = \max_{l(F)<n} \overline{L}(F).$$

В настоящей работе получены следующие оценки для этих функций Шеннона.

Теорема 1. *Существует такая константа* c_S, *что*

$$n \leqslant Ш^{S}(n) \leqslant c_S n^{*}.$$

Теорема 2. *Существует такая константа* c_T, *что*

$$Ш^{T}(n) \leqslant c_T \cdot 2^{n/6}(n+1).$$

Теорема 3. *Существует такая константа* c_L, *что*

$$Ш^{L}(n) \leqslant c_L \cdot 2^{n/6}(n+1)^2.$$

Отметим, что аналогичным образом могут быть определены еще три функции Шеннона вида

$$Ш_{1}^{\Pi}(n) = \max_{l_1(F)<n} \overline{\Pi}(F), \text{ где } \Pi \text{ есть } T,\ S \text{ или } L,$$

которые оценивают соответствующие сложностные характеристики выводов для множеств формул, логические длины которых не превышают n. Оценки для функций Шеннона $Ш_1^{\Pi}$ могут быть получены соответственно из оценок для трех предыдущих функций с учетом (1) — (4) пункта 1.

Отметим, что аналогичные функции Шеннона типа $Ш_2^{\Pi}$, по существу, невозможны, так как имеется бесконечно много формул с данным количеством вхождений переменных, причем среди них есть сколь угодно длинно выводимые.

Действительно, можно показать, например, что для произвольного m линейная сложность формулы

$$\underbrace{\rceil(\rceil(\cdots\rceil}_{2m \text{ раз}}((x_1)\supset(x_1))\cdots))$$

(впредь будем обозначать ее через G_m) не менее, чем $\frac{2m-1}{3}$.

Предварительно напомним несколько определений.

В работе [3] для каждой формулы F исчисления высказываний определено множество формул $\tau(F)$ такое, что $\tau(F) = \{F\} \cup \tau_1(F)$**, где $\tau_1(F) = \Lambda$ для элементарных формул F;

---

* Посредством часто встречающегося в литературе обозначения $\asymp$, это утверждение может быть записано в виде $Ш^{s}(n) \asymp n$.

** $\{F\}$ — означает множество, состоящее из одной формулы F.

$$\tau_1(F_1 \& F_2) = \tau(F_1) \cup \tau(F_2);$$
$$\tau_1(F_1 \vee F_2) = \tau(F_1) \cap \tau(F_2);$$
$$\tau_1(F_1 \supset F_2) = \tau(F_2) \setminus \tau(F_1);$$

$\tau_1(\rceil(F_1)) = \overline{\tau(F_1)}$ — дополнение к множеству $\tau(F_1)$.

Очевидно, для каждой аксиомы A системы $\sum$ мощность $\tau(A)$ не превышает 3. В работе [3] показано, что τ-множество формулы F, получаемой из формул G и $G \supset F$ по правилу М. р. содержит лишь формулы, входящие в множество $\tau(G) \cup \tau(G \supset F)$, в силу чего можно заключить, что в выводе произвольной формулы, мощность τ-множества которого равна p, содержится не менее $\frac{p}{3}$ аксиом.

Докажем индукцией по m, что

$$\tau(G_m) = \{G_m\} \cup \{G_{m-1}\} \cup \cdots \cup \{G_0\}.$$

По определению

$$\tau(G_0) = \tau((x_1) \supset (x_1)) = \{(x_1) \supset (x_1)\} = \{G_0\}.$$

Допустим утверждение верно для всех m', не превышающих $m-1$ Тогда имеем

$$\tau(G_m) = \{G_m\} \cup \tau(\rceil(G_{m-1})) = \{G_m\} \cup \overline{\{\rceil(G_{m-1})\} \cup \tau(G_{m-1})} =$$
$$= \{G_m\} \cup \tau(G_{m-1}) = \{G_m\} \cup \tau(G_{m-1}) =$$
$$= \{G_m\} \cup \{G_{m-1}\} \cup \cdots \cup \{G_0\},$$ что и требовалось.

Итак, для произвольного m мощность множества $\tau(G_m)$ равна $m+1$, а значит, количество аксиом в произвольном выводе формулы G_m не менее, чем $\frac{m+1}{3}$.

В работе [3] определяется понятие приведенного вывода произвольной т. и. ф., т. е. вывода, вычеркивание любой формулы, кроме последней, из которого дает последовательность формул, не являющуюся выводом данной т. и. ф. Там же доказано, что количество аксиом в приведенном выводе, состоящем из t формул, не превышает $\frac{t+1}{2}$, в силу чего для произвольного m и количества шагов t_m произвольного приведенного вывода формулы G_m имеем $\frac{m+1}{3} < \frac{t_m+1}{2}$, откуда $t_m \geqslant \frac{2m-1}{3}$, что и требовалось показать.

Если учесть еще, что при любом m $l_2(G_m) = 2$, а $l\,(G_m) = 6m+7$, то замечание относительно функций $Ш_2^T$ и $Ш_2^S$, а следовательно, и относительно $Ш_2^L$ оказывается справедливым.

4°. Чтобы оценить емкостную и линейную сложности для вывода произвольной т. и. ф. F длины, не превышающей n, оценим эти сложностные характеристики для формул, получаемых для F по схемам I — III.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть последовательность формул $C_1, C_2, \cdots, C_m$ является приведенным выводом формулы C_m из посылок $A_1, A_2, \cdots, A_k$, и пусть $max(l(C_1), \cdots, l(C_m), l(A_1), \cdots, l(A_k)) = s$. Тогда существует вывод формулы $(A_k) \supset (C_m)$ из посылок $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, количество шагов которого может не превышать $3m + 2$, а длина формул, участвующих в этом выводе, может не превышать $9s + 40$.*

Доказательство. Воспользуемся кратким доказательством теоремы дедукции, изложенным в [1] (русск. перев., стр. 87), согласно которому, для получения выводов $(A_k) \supset (C_m)$ из $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, достаточно приписать ко всем словам $(C_1), (C_2), \cdots, (C_m)$ слово $(A_k) \supset$ и превратить полученную последовательность формул в вывод формулы $(A_k) \supset (C_m)$ путем вставления добавочных формул:

а) если C_i является аксиомой или одной из формул $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, то вставляются формулы

$$C_i$$

$$C_i \supset (A_k \supset C_i),$$

б) если C_i совпадает с A_k, то вставляем

$$A_k \supset (A_k \supset A_k)$$

$$(A_k \supset (A_k \supset A_k)) \supset ((A_k \supset ((A_k \supset A_k) \supset A_k)) \supset (A_k \supset A_k)) \qquad (+)$$

$$(A_k \supset ((A_k \supset A_k) \supset A_k)) \supset (A_k \supset A_k)$$

$$A_k \supset ((A_k \supset A_k) \supset A_k),$$

с) если C_i получена по правилу М. р., то существуют формулы C_l и C_j $(l, j < i)$, причем C_j имеет вид $C_l \supset C_i$, тогда вставляем формулы

$$(A_k \supset C_l) \supset ((A_k \supset (C_l \supset C_i)) \supset (A_k \supset C_i))$$

$$(A_k \supset C_j) \supset (A_k \supset C_i).$$

Из вышесказанного следует, что количество шагов в выводе $(A_k) \supset (C_m)$ из $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$, не превышает $m + 2(m-1) + 4 = 3m + 2$, а длина формул не превышает $9s + 40$. Такую длину может иметь формула, отмеченная символом $(+)$, в случае, если длина A_k равна максимальной длине s (нужно учесть все скобки, некоторые из которых опущены для удобства).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G—произвольная т. и. ф., $b_1, b_2, \cdots, b_k$ суть все различные пропозициональные переменные формулы G и $B_1, B_2, \cdots, B_k$—произвольные формулы, причем:*

а) для некоторого вывода W формулы G

$$T(W) = m \text{ и } S(W) = s,$$

б) $\max\,(l(B_1),\ l(B_2), \cdots,\ l(B_k)) = n.$

Тогда, если F является результатом подстановки формул $B_1, B_2, \cdots, B_k$ вместо переменных $b_1, b_2, \cdots,\ b_k$ в G, то

$$\overline{T}(F) \leqslant m \text{ и } \overline{S}(F) \leqslant \frac{1}{6}\,(s+5)\cdot n + \frac{5}{6}\,(s-1).$$

Доказательство. Вывод формулы F можно получить из вывода формулы G, предварительно заменив в аксиомах этого вывода переменные $b_1,\ b_2, \cdots,\ b_k$ на соответствующие формулы $B_1, B_2, \cdots,\ B_k$. При этом количество формул в выводах обоих формул F и G одинаково, и каждая из формул вывода F является результатом подстановки в соответствующую формулу вывода G вместо переменных $b_1,\ b_2, \cdots$ $\cdots,\ b_k$, соответствующих формул $B_1,\ B_2, \cdots, B_k$. Учитывая, что количество переменных в формуле длины s не превышает $\dfrac{s+5}{6}$ (см. (3) пункта 1), получим, что емкостная сложность вывода формулы F не превышает $s - \dfrac{s+5}{6} + n\cdot \dfrac{s+5}{6} = \dfrac{1}{6}\ (s+5)\cdot n + \dfrac{5}{6}(s-1)$, что и требовалось.

Следствие: Пусть формула G является логическим ядром формулы F и

а) существует вывод W формулы G такой, что

$$T(W) = m \text{ и } S(W) = s,$$

б) $l(F) \leqslant n$,

тогда

$$\overline{T}(F) \leqslant m \text{ и } \overline{S}(F) \leqslant \frac{1}{6}\,(s+5)\cdot n + \frac{5}{6}\,(s-1).$$

Доказательство очевидно.

Теперь оценим линейную и емкостную сложности по выводимости формул, получаемых по схемам I — III для произвольной т. и. ф. F с $l(F) \leqslant n$. Обозначим количество различных переменных и число логических символов некоторой фиксированной формулы F с $l(F) \leqslant n$ через k и l соответственно.

Обозначим формулу $B_{k-q+1} \,\&\, (B_{k-q+2} \,\&\, \cdots \& \,(B_{k-1} \,\&\, B_k) \cdots)$, где каждое B_j или пропозициональная переменная или отрицание пропозициональной переменной, входящей в F, через B^q $(q = 1, 2, \cdots,\ k)$.

Рассмотрим следующий вывод:

$$\frac{B_1 \& (B_2 \& \cdots \& (B_{k-1} \& B_k) \cdots) \vdash}{B^k} \qquad \left.\begin{array}{ll} B^k & \\ B^k \vdash B^k \supset B_1 & \\ B^k \vdash B_1 & \\ B^k \vdash B^k \supset B^{k-1} & (+) \\ B^k \vdash B^{k-1} & \\ B^k \vdash B^{k-1} \supset B_2 & \\ B^k \vdash B_2 & \\ \vdots & \\ B^k \vdash B_{k-1} \& B_k & \\ B^k \vdash B_{k-1} \& B_k \supset B_{k-1} & \\ B^k \vdash B_{k-1} & \\ B^k \vdash B_{k-1} \& B_k \supset B_k & \\ B^k \vdash B_k & \end{array}\right| \; \begin{array}{c} 4k-3 \\ \text{формулы} \end{array}$$

(символом $(+)$ отмечена формула максимальной длины $\leqslant 2k-11$).

Если провести преобразования, описанные в лемме 1, получим вывод формулы $B^k \supset B_k$, содержащий также в качестве подвыводов выводы всех формул вида $B^k \supset B_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. Ввиду результатов леммы 1, линейная и емкостная сложности этого вывода не превышают $3 \cdot (4k-3) + 2 = 12k-7$ и $9(12k-11) + 40 = 108k-59$ соответственно. Таким образом, оценены сложностные характеристики для вывода, содержащего выводы всех формул типа 1 формулы F.

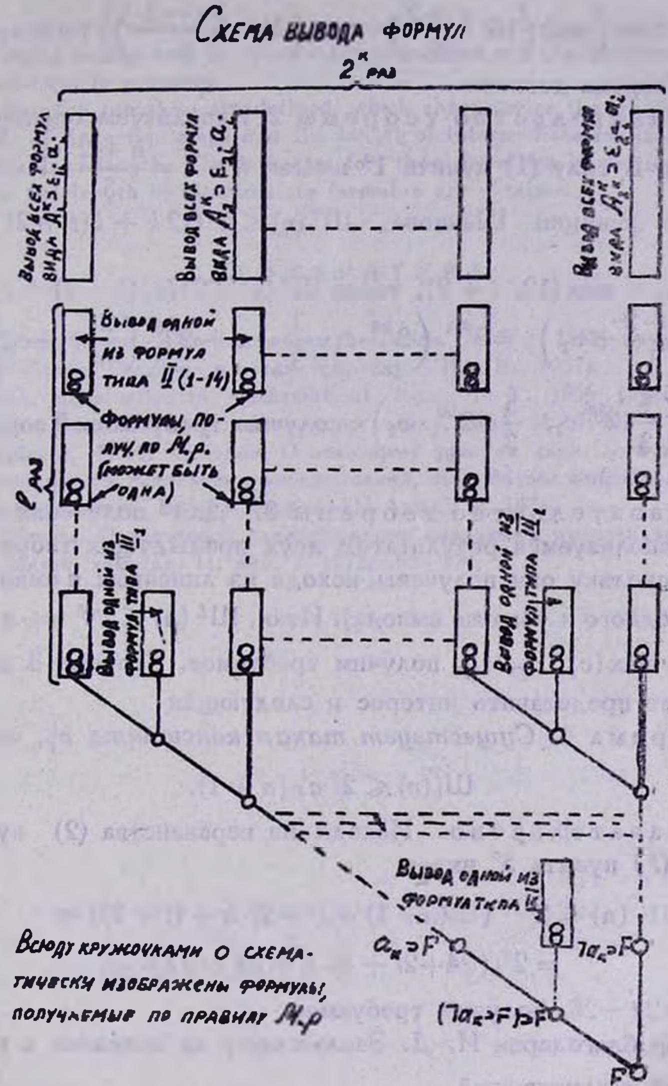
Для формул, получаемых по схемам II, III, выпишем соответствующие логические ядра, построим их выводы, оценим линейные и емкостные сложности этих выводов. Максимальную из линейных сложностей обозначим через t, максимальную из емкостных сложностей — через s. Воспользовавшись результатами следствия леммы 2, мы можем утверждать, что линейные и емкостные сложности по выводимости формул, получаемых по схемам II и III для формулы F, не превышают t и $\frac{1}{6}(s+5) \cdot n + \frac{5}{6}(s-1)$ соответственно. Действительно, в формулах, получаемых по схемам II, III для формулы F, вместо A и γ подставляются соответственно k-членные и $(k-i)$-членные $i \leqslant k-1$ конъюнкции, состоящие из пропозициональных переменных формулы F или их отрицаний, а вместо α и β — произвольные подформулы F, следовательно, длины подставляемых формул не превышают n.

5°. Для нашей фиксированной формулы F построим вывод по схеме, описанной в пункте 2° и оценим сложностные характеристики этого вывода, используя результаты пункта 4°.

Отметим, что количество неэлементарных подформул произвольной формулы равно количеству логических символов.

Вывод формулы F схематически приводится ниже.

Линейная сложность формулы F по выводимости оценивается следующим образом (см. схему и оценки пункта 4):



$$\overline{T}(F) \leqslant 2^k(12k-7+l(t+2)) + 2^{k-1}(t+2) + 2^{k-2}(t+2) + \cdots +$$
$$+ 2(t+2) + (t+2) < 2^k(12k+l(t+2)) + 2^k(t+2) = 2^k(12k+(t+2)(l+1)).$$

Для емкостной сложности имеем

$$\overline{S}(F) \leqslant \max\left[108k-59,\ \frac{1}{6}(s+5)\cdot n + \frac{5}{6}(s-1)\right].$$

6°. В этом пункте будут доказаны основные теоремы.

Доказательство теоремы 1. Поскольку сама формула длины n участвует в выводе, то $Ш^s(n) \geqslant n$.

Верхнюю оценку получаем, используя оценку пункта 5° д

$\overline{S}(F)$. Так как $108\,k - 59 \leqslant 108 \cdot \frac{n+5}{6} - 59 = 16\,n + 21$, то, взяв в качестве c_S $\max\left(\max\left(16, \frac{s+5}{6}\right), \max\left(21, \frac{5s-5}{6}\right)\right)$, получим требуемое. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Используем оценку пункта 5° для $\overline{T}(F)$. В силу (1) пункта 1° имеем $k + l = \frac{n+2}{3}$. Имеем, по определению функции Шеннона, $Ш^T(n) \leqslant 2^k (12\,k + l\,(t+2) + (t+2))$. Возьмем $c_1 = \max(12,\ t+2)$, тогда $Ш^T(n) \leqslant 2^k (c_1 (k+l) + c_1) \leqslant 2^{\frac{n+5}{6}} \times \left(c_1 \cdot \frac{n+2}{3} + c_1\right) = 2^{n/6} \left(2^{5/6} \cdot c_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot n + 2^{5/6} \left(\frac{2}{3} c_1 + c_1\right)\right)$. Взяв $c_T = \max\left(\frac{1}{3} 2^{5/6} c_1, \frac{5}{3} \cdot 2^{5/6} \cdot c_1\right)$, получим требуемое. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Для получения оценки для $Ш^L(n)$ воспользуемся результатом двух предыдущих теорем (это возможно, поскольку они получены, исходя из линейных и емкостных оценок для одного и того же вывода). Итак, $Ш^L(n) \leqslant 2^{n/6} (c_T \cdot n + \overline{c}_T) \cdot c_s \cdot n$. Взяв $\overline{c}_L = \max(c_T, \overline{c}_T, c_s)$, получим требуемое. Теорема 3 доказана.

Может представить интерес и следующая

Теорема 4. *Существует такая константа* c_T^1, *что*

$$Ш_1^T(n) \leqslant 2^n c_T^1 (n+1).$$

Доказательство. Исходя из неравенства (2) пункта 1° и оценки $T(F)$ пункта 5° имеем

$$Ш_1^T(n) \leqslant 2^{n+1} (12(n+1) + (t+2) \cdot n + (t+2)) =$$
$$= 2^n ((24 + 2t + 4) \cdot n + 24 + 2\,t + 4).$$

Взяв $c_T^1 = 2\,t + 28$, получим требуемое.

Автор благодарен И. Д. Заславскому за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 8.IV.1974

Ա. Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ. Ասույթների դասական հաշվում արտածումների որոշ նորմալ տեսքի և բարդության բնութագրերի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում առաջարկվում է ասույթների դասական հաշվում արտածումների կառուցման որոշ նորմալ եղանակ։ Առաջարկվող եղանակով կառուցված արտածումները օժտված են որոշ իմաստով ենթաբանաձևայնության հատկությամբ։

Սահմանվում են Շեննոնյան ֆունկցիաներ, որոնք բնութագրում են տվյալ երկարություն ունեցող կամայական բանաձևի արտածման միջանկյալ բանաձևերի երկարությունը, արտածման երկարությունը և քայլերի քանակը։ Տրվում են այդ ֆունկցիաների գնահատականները՝ մասնավորապես գծային գնահատականը միջանկյալ բանաձևերի երկարության համար։

A. A. CHUBARIAN. *On a normal form for deductions and the characterization of deduction complexity in propozitional calculus* (summary)

In the paper a normal method for constructing deductions in classical propositional calculus is proposed. So constructed deductions are characterized in a certain sense by sub-formula property.

The Shannon functions are defined, which characterize the length of deduction, the number of deduction steps and the length of intermediate formulae for a given formula of a fixed length. The estimates for these functions in particular a linear estimate for the length of intermediate formulae are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, N. Y., 1952 (русский перевод С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИИЛ, М., 1957).
2. *A. Church.* Introduction to mathematical logic, N. Y., 1956 (русский перевод: А. Чёрч, Введонио в математическую логику, ИИЛ, М., 1960).
3. *Г. С. Цейтин, А. А. Чубарян.* О некоторых оценках длин логических выводов в классическом исчислении высказываний, сб. „Матем. вопросы кибернетики и вычисл. техники", Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1974.
4. *А. С. Аникеев.* О некоторой классификации выводимых пропозициональных формул, Матем. заметки, 11, вып. 2, 1972, 165—174.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

Б. В. ГРИГОРЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

В настоящей работе доказывается теорема единственности для гармонических функций трех переменных, определенных в области вращения. Пусть эта область получена в результате вращения кривой Γ с непрерывно меняющейся касательной, уравнение которой в плоскости xoz задается формулой $z=\psi(x)$, где $0\leqslant x\leqslant a$, $\psi(0)=\psi(a)=0$ и $\psi(x)>0$ при $0<x<a$. Для удобства будем предполагать, что кривая Γ в окрестности $x=0$ задается в полярных координатах уравнением вида $\varphi=\Phi(\rho)$, где $0\leqslant\rho\leqslant\delta_0$ и функция $\Phi(\rho)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) существует непрерывная и ограниченная производная $\Phi'(\rho)$ при

$$\rho\in(0,\delta_0),$$

б) $$\lim_{\rho\to 0}\rho\Phi'(\rho)=\operatorname{tg}\gamma,\quad 0\leqslant\gamma<\frac{\pi}{2},$$

в) при $\gamma=0$ предположим, что

$$\int_0^{\delta_0} t\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2\frac{dt}{\theta(t)}<+\infty,$$

где $\theta(t)=2\Phi(t)$.

Введем следующие обозначения.

Тело, получаемое вращением кривой Γ вокруг оси ox, обозначим через Ω, а ее сечение плоскостью $y=0$ — через G. Далее через $D(0,\rho)$ обозначим шар с центром в начале координат и радиусом ρ и пусть $\Omega_\rho=\Omega\cap D(0,\rho)$.

Пусть функция $H(P)=H(x,y,z)$ гармонична в Ω.

Обозначим

$$\sup_{p\in\overline{\Omega}_\rho}|H(p)|=m(\rho).$$

Пусть $m(\rho)\downarrow 0$ при $\rho\downarrow 0$.

Теорема А. *Если*

$$J=\int_0^{\delta_0}\log m(t)\exp\left\{-\pi\int_0^{\delta_0}\frac{d\rho}{\rho\,\theta(\rho)}\right\}\frac{dt}{t\theta(t)}=-\infty,\tag{1}$$

то $H(P)\equiv 0$ в Ω.

Доказательство. Для доказательства теоремы заметим, что граница области G в окрестности точки $P=(0,0,0)$ имеет уравнение

$\varphi = \pm \Phi(\rho)$. Возьмем в области G подобласть G^* так, что уравнение границы в окрестности точки $P = (0, 0, 0)$ определяется уравнением $\varphi = \pm [\Phi(\rho) - \rho^2\Phi^2(\rho)] = \pm \Phi_1(\rho)$. Тело, получаемое вращением области G^* вокруг оси ox, обозначим Ω^*.

Очевидно, что $\Omega^* \subset \Omega$.

Возьмем произвольное значение $\rho_0 \in (0, \delta_0]$ и шар с центром в точке $P_0 \in \partial\Omega^*$ и радиуса $R = R(\rho_0) = \lambda\rho_0^3\Phi^2(\rho_0)$, где число $\lambda \in (0, 1)$ выбрано (независимо от ρ_0) так, чтобы шар $D[P_0, R(\rho_0)]$ целиком содержался в Ω.

В возможности такого выбора λ можно убедиться следующим образом. Если в точке $Q_0 = \rho_0 e^{i\Phi(\rho_0)} \in \partial G$ проведем касательную и прямую, угловой коэффициент которой по знаку противоположен угловому коэффициенту касательной, то расстояние точки P_0 от этих прямых имеет порядок $\rho_0^3\Phi^2(\rho_0)$. Легко видеть, что $D(P_0, R(\rho_0)] \subset \Omega_{\rho_0+R(\rho_0)}$, следовательно

$$\sup_{P \in D[P_0, R(\rho_0)]} |H(P)| \leqslant m(\rho_0 + R(\rho_0)]. \tag{2}$$

Используя теорему об оценке градиента (см., например, [1] стр. 126), получим

$$|\operatorname{grad} H(P_0)| \leqslant \frac{cm[\rho_0 + R(\rho_0)]}{P(\rho_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(\rho_0), \tag{3}$$

где c не зависит от ρ_0. Если учесть, что ρ_0 — произвольное значение из $(0, \delta_0)$, то в неравенствах (2) и (3) индекс можно опустить. Таким образом, функция $H(P)$ гармонична в Ω^* и удовлетворяет условию

$$\sup_{P \in \Omega^*_\rho} \{|H(P)|, |\operatorname{grad} H(P)|\} \leqslant \varepsilon(\rho).$$

где $0 < \rho \leqslant \delta_0$.

Опираясь на теоремы 1 и 2 работы [2], доказательство теоремы завершится, если покажем, что

$$\int_0^{\delta_0} \log \varepsilon(t) \exp\left\{-\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)}\right\} \frac{dt}{t\theta_1(t)} = -\infty, \tag{4}$$

где $\theta_1(\rho) = 2\Phi_1(\rho)$.

Действительно, подставляя в левую часть равенства (4) выражение (3) для $\varepsilon(t)$ через функцию $m(t)$, получим

$$\int_0^{\delta_0} \log \varepsilon(t) \exp\left\{-\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)}\right\} \frac{dt}{\rho\theta_1(t)} =$$

$$= \int_0^{\delta_0} \log m[t + R(t)] \exp\left\{-\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)}\right\} \frac{dt}{t\theta_1(t)} -$$

$$-\int_0^{\delta_0} \log \frac{R(t)}{c} \exp\left\{-\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)}\right\} \frac{dt}{t\,\theta_1(t)} = J_1 - J_2.$$

Покажем, что при условии (1) $J_1 = -\infty$, а J_2 — конечное число.

Действительно, по определению функции $\Phi_1(\rho)$ и по теореме о среднем значении имеем

$$\delta(t) = \int_{t+R(t)}^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)} - \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)} = -\int_t^{t+R(t)} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)} = -\frac{Rt}{\xi\theta_1(\xi)} = -\frac{\lambda t^3\Phi^2(t)}{2\,\xi\Phi_1(\xi)}, \tag{5}$$

где

$$t < \xi < t + \lambda t^3\Phi^2(t).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $t \to 0$, так как легко видеть, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{\Phi_1(t)} = 1, \quad \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{\Phi(\xi)} = 1.$$

Следовательно, оба интеграла в левой части (5) одновременно сходятся или расходятся.

В силу этих рассуждений, обозначая $t + \lambda t^3\Phi^2(t) = \mu(t)$, получим

$$J_1 = \int_0^{\delta_0} \log m[\mu(t)] \exp\left\{-\pi \int_{\mu(t)}^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)} + \delta(t)\right\} \frac{\theta[\mu(t)]}{\theta_1(t)} \cdot \frac{dt}{t\theta[\mu(t)]} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^{\delta_1} \log m[\mu(t)] \exp\left\{-\pi \int_{\mu(t)}^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta(\rho)}\right\} \frac{dt}{\mu(t)\,\theta[\mu(t)]} \leqslant cJ = -\infty.$$

Легко доказывается, что J_2 — конечное число.

Действительно, после интегрирования по частям J_2 примет вид

$$J_2 = \log \frac{\lambda t^3\Phi^2(t)}{c} \exp\left\{-\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)}\right\}\Bigg|_{t\to 0}^{\delta_0} -$$

$$-c \int_0^{\delta_0} \frac{3\Phi(t) + 2t\Phi'(t)}{t\Phi(t)} \exp\left\{-\pi \int_t^{\delta_0} \frac{d\rho}{\rho\theta_1(\rho)}\right\} dt.$$

Здесь конечность первого слагаемого можно проверить по правилу Лопиталя, а сходимость второго интеграла очевидна. Этим и завершается доказательство теоремы А.

Можно доказать, что утверждение теоремы А неулучшаемо.

Это показывается аналогично доказательству теоремы 3 работы [2].

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.II.1975

Բ. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Պատմական տիրույթներում հարմոնիկ ֆունկցիաների միակության մասին *(ամփոփում)*

[2] հոդվածում ապացուցված էր պտտման տիրույթներում հարմոնիկ ֆունկցիաների համար միակության թեորեմ հարմոնիկ ֆունկցիաների և նրա գրադիենտի նվազման արագության տերմիններով, երբ մոտենում ենք տիրույթի գագաթին։

Ներկա աշխատանքում, օգտագործելով այդ թեորեման, ցույց է տրվում որ կարելի է աղատվել գրադիենտի վրա դրված սահմանափակումից։

B. V. GRIGORIAN. *On the uniqueness of harmonic functions in the domains of revolution* (summary)

In [2] a uniqueness theorem has been established for harmonic functions in the domains of revolution in terms of the velocity of decrease of the function and its gradient when the point tends to the vertex of the domain. Using this theorems the present note proves that the restrictions on the gradient can be dropped.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Тиман, В. Н. Трофимов.* Введение в теорию гармонических функций, М., Изд. „Наука“, 1968.
2. *Б. В. Григорян.* Теоремы единственности для гармонических функций трех переменных в области вращения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 2, 1972. 81—89.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

D. A. EDINJIKLIAN

ON SOME FORMAL REPRESENTATIONS OF ALGORITHMS DEFINED BY GRAPH SCHEMES WITH MEMORY*

§ 0. Introduction. In this paper we shall consider some problems relating to the transformation of graph schemes with memory. The general concept of algorithmic schemes used here is based on the notions of the logical scheme (A. A. Ljapounov [8, 9], Ju. I. Ianov [5], L. A. Kaluznin [7], R. I. Podlovchenko [11, 12]; the concepts concerning the use of memory locations and of the classes of basic algorithms are founded on the notions introduced by A. P. Ershov [2, 3]; the definition of graph scheme with memory and the set of parallel definitions are same as in [15]. The general direction of investigations is in some aspects similar to that of the papers [1], [4], [6], [10], [13], [14].

In [15] definitions were given for the notion of normal closure for a given set of algorithms, and for graph schematic closure. The normal closure of a given set is the set of algorithms which can be obtained rom algorithms of a given set, plus some standard algorithms and the operations of Composition, Branching and Repetition of algorithms, including the adjoining and dropping of fictitious verlables. The graph schematic closure of a given set of algorithms is the set of those algorithms which are specified by graph schemes with memory constructed on the base of the algorithms belonging to the given set. It was proved that graph schematic closure and normal closure are equal for every given set of algorithms.

However, the method of obtaining the given graph schemes in the corresponding normal expression in [15] is essentially dependent on the interpretation of the schemes under consideration.

In the present paper we shall show that the analogous theorems can be obtained on a purely formal level, independently of the interpretations of graph schemes with memory defined in formal terms. In order to do this, the notion of normal closure has been slightly changed, for example, by rejecting the operation of the dropping of fictiti ous variables which cannot be given in formal terms. However, the whole concept of normal closure remains unchanged.

We shall prove that for every graph scheme with memory given in formal terms these exists an algebraical expression using the operations of normal closure and such that for every interpretation of elementary symbols in the given graph scheme, the same algorithm as described by our graph scheme will be expressed. For this purpose we shall

I wish to thank my advisor, I. D. Zaslavskii, for his help and encouragement in the preparation of this paper.

consider the notion of generalized graph scheme having some interest in itself, and we shall prove some theorems about standard forms of these schemes.

The transformations of graph schemes considered here may be useful in studying practical algorithmic languages.

§ 1. *Basic definitions.* In the interest of economy, we shall omit some of the definitions, and the proofs of some of the lemmas, which are similar to those of [15]. Such references will be noted by the symbol [15], followed by the page number. Eg. [15: 139].

We shall consider the following types of variables:

1) Algorithmic functor variables $f_1, f_2, f_3, \cdots$,

2) Algorithmic predicate veriables $p_1, p_2, p_3, \cdots$,

3) Object variables $x_1, x_2, x_3, \cdots$.

The dimensions of an algorithmic functor variable $f_{2^k(2l+1)}$ and of an algorithmic predicate variable $p_{2^k(2l+1)}$ is k.

Def. 1. Let us define F-terms and P-terms inductively as follows:

1) Every f_i is an F-term of corresponding dimension.

2) Every p_i is a P-term of corresponding dimension.

3) I is an F-term of dimension one.

4) D is an F-term of dimension zero.

5) T is a P-term of dimension zero.

6) L is a P-term of dimension zero.

7) If $T_1, \cdots, T_{m+1}$ are F-terms of dimensions $m, n, \cdots, n$ respectively, then Comp $(T_1, \cdots, T_{m+1})$ is an F-term of dimension n.

8) If T_1 is a P-term of dimension m and $T_2, \cdots, T_{m+1}$ are F-terms of dimension n, then Comp $(T_1, \cdots, T_{m+1})$ is a P-term of dimension n.

9) If T_1 is a P-term of dimension n and T_2 and T_3 are F-terms of dimension n, then Br (T_1, T_2, T_3) is an F-term of dimension n.

10) If T_1, T_2 and T_3 are P-terms of dimension n, then Br (T_1, T_2, T_3) is a P-term of dimension n.

11) If T_1 is a P-term of dimension n, and $T_2, \cdots, T_{n+1}$ are F-terms of dimension n, then Rep $(i, T_1, \cdots, T_{n+1})$, where $(1 \leqslant i \leqslant n)$ is an F-term of dimension n.

12) If T is an F-term or a P-term of dimension n, then Adj (i, T) $(0 \leqslant i \leqslant n)$ is correspondingly an F-term or a P-term of dimension $n+1$.

Def. 2. An expression of the form $[T_1, \cdots, T_n]$ is called an A-term of dimension n, iff every $T_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ is an F-term of dimension n.

Def. 3. An expression of the form $\alpha \leftarrow C$ is called a generalized memory transformation row iff either α is a functor skeleton variable ([15: 173]) and C is an A-term or α is a predicate skeleton variable ([15: 173]) and C is a P-term.

Def. 4. A system (possibly empty) of generalized memory transformation rows is called a generalized memory transformation table.

Def. 5. A quadruple of objects consisting of a skeleton scheme Σ, ([15: 174]), a generalized memory transformation table Ξ, a system of input variables W_1 and a system of output variable W_2 will be called a generalized memory transformation scheme of dimension n, denoted by (Σ, Ξ, W_1, W_2) iff the table Ξ is matched ([15: 178]) with the scheme Σ and every A-term or P-term in the right side of the rows of Ξ has a dimension n and all the object variables in each of the systems W_1, W_2 are distinct pairwise and their index set is a subset of $\{1, \cdots, n\}$.

Def. 6. A pair of objects is called a generalized graph scheme of dimension n in M, denoted by (Ψ, L), iff the first member of the ordered pair is a generalized memory transformation scheme Ψ of dimension n and the second is a matched table of algorithms L ([15: 182]) in the constructive set M ([15: 179]).

Def. 7. The value of an F-term or a P-term R in the state P ([15: 185]) of a generalized graph scheme by $P(R)$ is defined inductively as follows:

1) If the F-term R has the form $f_{2^n(2l+1)}$, then $P(R)$ is defined iff! $R(P(x_1), \cdots, P(x_n))$ and its value is $R(P(x_1), \cdots, P(x_n))$.

2) If the P-term R has the form $P_{2^n(2l+1)}$, then $P(R)$ is defined iff! $R(P(x_1), \cdots, P(x_n))$ and its value is $R(P(x_1), \cdots, P(x_n))$.

3) If the F-term R has the form I, then $P(R)$ is defined and its value is $P(x_1)$.

4) If the F-term R has the form D then $P(R)$ is undefined and has no value.

5) If the P-term R has the form T, then $P(R)$ is defined and its value is true.

6) If the P-term R has the form L, then $P(R)$ is defined and its value is false.

7) If the F-term or the P-term R has the form Comp $(T_1, \cdots, T_{m+1})$ of dimension n, then $P(R)$ is defined iff every $!\,T_i(P(x_1), \cdots, P(x_n))$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1)$ and if $T_i(P(x_1), \cdots, P(x_n)) = a_i$ then $!\,T_1(a_1, \cdots, a_m)$ and its value is $T_1(a_1, \cdots, a_m)$.

8) If the F-term or the P-term R has the form Br (T_1, T_2, T_3) of dimension n, then $P(R)$ is defined iff either (i) $!\,T_1(P(x_1), \cdots, P(x_n))$ and has the value true with $!\,T_2(P(x_1), \cdots, P(x_n))$ or (ii) $!\,T_1(P(x_1), \cdots$ $\cdots, P(x_n))$ and has the value false with $!\,T_3(P(x_1), \cdots, P(x_n))\cdot P(R)$ in the first case is $T_2(P(x_1), \cdots, P(x_n))$ and in the second case $T_3(P(x_1), \cdots, P(x_n))$.

9) If the P-term R has the form Rep $(k, T_1, \cdots, T_{n+1})$, then $P(R)$ is defined iff it is possible to construct a natural number $t \geqslant 0$ and a system of objects $a_i^{(j)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ and $(0 \leqslant j \leqslant t)$. Further for $t = 0$ we have $a_i^{(0)} = P(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $!\,T_1(a_1^{(0)}, \cdots, a_n^{(0)})$ and $T_1(a_1^{(0)}, \cdots, a_n^{(0)})$ is true, whereas for $t > 0$ we have $a_i^{(0)} = P(x_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$, $!\,T_{i+1}(a_1^{(j)}, \cdots$ $\cdots, a_n^{(j)})$ $((1 \leqslant i \leqslant n), \quad (0 \leqslant j < t))$, $a_i^{(j+1)} = T_{i+1}, (a_1^{(j)}, \cdots, a_n^{(j)})$ $((1 \leqslant i \leqslant n), (0 \leqslant j < t))$; $!\,T_1(a_1^{(j)}, \cdots, a_n^{(j)})$ $(0 \leqslant j \leqslant t)$; $T_1(a_1^{(j)}, \cdots, a_n^{(j)})$ is false $(0 \leqslant j \leqslant t-1)$; and $T_1(a_1^{(t)}, \cdots, a_n^{(t)})$ is true. The value of R in this case will be $a_k^{(t)}$.

10) If the F-term or the P-term R has the form Adj (i, T), then $P(R)$ will be defined iff $P^*(T)$ is defined, where P^* is a memory state such that $\overline{P^*} = \overline{P}$, $P^*(x_j) = P(x_j)$, when $(1 \leqslant j < i)$; and $P^*(x_j) = = P(x_{j \mp 1})$ when $j > i$. If $P(R)$ is defined, then the value $P(R)$ is $P^*(T)$.

The assertion "$P(R)$ is defined" will be denoted by $!\,P(R)$.

Note: In what follows, we shall use the F-terms I_m^j, where $(1 \leqslant j \leqslant m)$, which are defined recursively as (i) $I_1^1 = I$, (ii) $I_{n+1}^{k+1} = = \mathrm{Adj}\,(1, I_n^k)$ $(0 \leqslant 1 < k)$, (iii) $I_{n+1}^k = \mathrm{Adj}\ (1, I_n^k)$ $(k \leqslant 1 < n)$. It is easy to see that if $P = (\alpha, (a_1, \cdots, a_m))$ then $P(I_m^j) = a_j$.

Def. 8. A memory state P of a generalized graph scheme G of dimension n is said to be amenable to G and denoted by $!!\,G(P)$ if one of the following conditions holds:

(i) $\overline{P}$ is a starter.

(ii) $\overline{P}$ is a skeleton functor variable such that if $\overline{P}$ is $[T_1, \cdots, T_n]$ then $!\,P(T_1)$, $!\,P(T_2), \cdots, !\,P(T_n)$.

(iii) $\overline{P}$ is a predicate skeleton variable such that if $\overline{P}$ is Q, where Q is a P-term, then $!\,P(Q)$.

Def. 9. For any memory state P of a generalized graph scheme G of dimension n amenable to G, a direct successor memory state Q of G, denoted by $P \underset{G}{\vdash} Q$, is assigned as follows:

(i) If $\overline{P}$ is a starter, with $|\overline{P}| = (\overline{P}, \varsigma)$, we have $\overline{Q} = \varsigma$, and $Q(x_i) = P(x_i)\,(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(ii) If $\overline{P}$ is a functor skeleton variable with $|\overline{P}| = (\overline{P}, \varsigma)$ and $\overline{P} \leftrightarrow [T_1, \cdots, T_n]$ then $\overline{Q} = \varsigma$, and for every $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ $Q(x_i) = P(T_i)$.

(iii) If $\overline{P}$ is a predicate skeleton variable with $|\overline{P}| = (\overline{P}, \varsigma, \eta)$ and $\overline{P} \leftrightarrow R$, where R is a P-term, then $\overline{Q} = \begin{cases} \varsigma \text{ if } P(R) \text{ is true} \\ \eta \text{ if } P(R) \text{ is false} \end{cases}$ and $Q(x_i) = P(x_i)\,(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Def. 10. A generalized graph scheme G of dimension n is called regular iff G is equivalent ([15 : 188]) to itself.

Def. 11. A generalized memory transformation scheme (Σ, Ξ, W_1, W_2) of dimension n is called strongly regular iff for every algorithmic table L in the constructive set M, if $((\Sigma, \Xi, W_1, W_2), L)$ is a generalized graph scheme of dimension n, then it is regular.

Def. 12. Two generalized memory transformation schemes Ψ_1 and Ψ_2 of dimensions n and m respectively are said to be D-equivalent iff for every algorithmic table L, in the conslructive set M, if (Ψ_1, L) and (Ψ_2, L) are generalized graph schemes, then they are equivalent.

Def. 13. A generalized functor graph scheme G ([15 : 179]) in M of dimension n with input variables $x_1, \cdots, x_t$ and output variable r is said to specify a functor U in M of dimension t iff for every $a_1,\cdots$ $\cdots, a_t$ in M, the value of $U(a_1,\cdots,\cdots a_t)$ is obtained as follows:

(i) An initial memory state P of G is constructed such that $\overline{P}=H$ and $P(x_i)=a_i$ $(1\leqslant i\leqslant t)$ (For object variables other than $x_1,\cdots$ $\cdots, x_t$, $P(x_i)$ is taken arbitrary).

(ii) The generalized graph scheme is applied ([15:188]) to the state P, and if a terminal state Q is arrived at, then $Q(r)$ is the value of $U(a_1,\cdots,a_t)$.

Def. 14. A generalized predicate graph scheme ([15:179]) G in M of dimension n with input variables $x_1,\cdots, x_t$ is said to specify a predicate P in M of dimension t iff for every $a_1,\cdots, a_t$ in M, the value $P(a_1,\cdots, a_t)$ is obtained as follows:

(i) An initial memory state P of G is constructed such that $\overline{P}=H$ and $P(x_i)=a_i$ $(1\leqslant i\leqslant t)$.

(ii) The generalized graph scheme is applied to the state P, and if a terminal state Q is arrived at, then the value of $P(a_1,\cdots, a_t)$ is either true or false depending on whether Q is O_T or O_F respectively.

Def. 15. An F-term R of dimension n is said to realize an algorithm U with respect to L iff U is specified by the generalized graph scheme $((((H, \varphi_1), (\varphi_1, O_k)), \varphi_1 \leftarrow [R, \overline{I}_n^2,\cdots, \overline{I}_n^n]), (x_1,\cdots, x_n),(x_1)), L)$.

Def. 16. A P-term R of dimension n is said to realize an algorithm P with respect to L iff P is specified by the generalized predicate graph scheme $((((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi_1 \leftarrow R), (x_1,\cdots, x_n), (\ )), L)$.

2. *Substitution*: Let $\Psi=(\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ be a generalized memory transformation scheme of dimension n, with the skeleton scheme $\Sigma=(S_1,\cdots, S_k)$. Let Γ be a system consisting of some of its skeleton functor and predicate variables, and let E be a subscheme of Ψ generalized by Γ ([15: 194]).

Let E^* be a generalized memory transformation scheme of dimension m D-equivalent to E in which the systems of input and output variables coincide with the corresponding systems of the generalized memory transformation scheme E. The operation of substitution of a generalized memory transformation scheme E^* into a generalized transformation scheme Ψ instead of subscheme E will be defined as follows:

(i) By appropriate renaming ([15:195]) of skeleton and algorithmic variables of the transformation scheme E we obtain a transformation scheme $\overline{E}=(\overline{\Sigma}, \tilde{\Xi}, \tilde{W}_1, W_2)$ that differs from E^* only by the name of the variables, and such that all its skeleton functor and predicate variables and algorithmic variables are distinct from the skeleton and algorithmic variables of Ψ.

(ii) From the ske leton scheme Σ of the generalized memory transformation scheme Ψ we eliminate all the terms whose first member is contained in Γ, in each of the remaining skeleton Terms ([15:173]) S we perform the following replacements: If the second member of the term S occurs in Γ, we replace it by the second member of the (unique) skeleton term of the scheme $\bar{\Sigma}$ whose first member is υ'_i; if the third member of S occurs in Γ, we shall replace it by the second member of the skeleton term of the scheme $\bar{\Sigma}$ whose first member is υ''_i.

(*iii*) From the skeleton scheme $\tilde{\Sigma}$ of the generalized memory transformation scheme $\tilde{E}$ we eliminate all the initial terms; in each of the remaining skeleton terms we replace each stop ω'_i by the second member of the term S_i, and each stop ω''_i by the third member of s_i.

(*iv*) We construct a skeleton scheme $\bar{\Sigma}^*$ which is a union of the skeleton scheme obtained from Σ by the transformations indicated in step 2 and the skeleton scheme obtained from $\tilde{\Sigma}$ by the transformation indicated in step 3.

(*v*) The generalized memory transformation table $\bar{\Xi}^*$ is constructed as follows:

a) If $m = n$, then $\bar{\Xi}^*$ is the union of the generalized memory transformation tables Ξ and $\tilde{\Xi}$ of the generalized memory transformation schemes Ψ a and E^*.

b) If $m > n$, then a generalized memory transformation table Ξ' of dimension n is obtained by cancelling in Ξ all the rows whose left sides are not contained in Γ. Let us construct a generalited memory transformation table $\bar{\Xi}$ of dimension m, such that each row $\varphi_i \leftrightarrow [T_1, \cdots \cdots, T_n]$ in Ξ' is replaced by $\varphi_i \leftrightarrow [T'_1, \cdots, T'_m]$ where every F-term $T'_j (n+1 < j \leqslant m)$ is I^j_m, and every F-term T'_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ is Adj $(m-1$, Adj $(m-2, \cdots,$ Adj $(n, T_k)) \cdots)$. And thus $\bar{\Xi}^*$ is the union of the generalized transformation tables $\bar{\Xi}$ end $\tilde{\Xi}$.

c) Similarly for $n > m$.

(*vi*) We construct a system of objects $\bar{\Psi}^* = (\bar{\Sigma}^*, \bar{\Xi}^*, W_1, W_2)$ where W_1 and W_2 are the systems of input and output variables of the generalized memory transformation scheme Ψ.

It is easy to see that $\bar{\Psi}^*$ is a generalized memory transformation scheme of dimension max (m, n)

T h e o r e m 1. (*On substitution). Let Ψ be a strongly regular generalized memory transformation scheme of dimension n, Γ a system consisting of some of its skeleton functor and predicate variables, λ a subscheme of Ψ generalized by Γ, λ^* a generalized transformation scheme of dimension m, D-equivalent to λ with the system of input and output variables of λ^* coinciding with the systems of input and output variables of λ. Let Ψ^* be the result of substituting the generalized memory* *transformation scheme λ^* for the subscheme of λ into the generalized memory transformation scheme Ψ. Then Ψ^* will be D-equivalent to Ψ.*

Proof: Let L be any algorithmic table in the constructive set M such that (Ψ, L) and (Ψ^*, L) are generalized graph schemes of corresponding dimensions. The proof that the generalized graph schemes (Ψ, L) and (Ψ^*, L) are equivalent, is carried in a similar way, as in [15:198—200]. Thus Ψ and Ψ^* are D-equivalent.

§ 3. In this last section, with the aid of a series of lemmas we shall prove the main theorem of this paper.

Lemma 1. For any strongly regular generalized memory transformation scheme Ψ it is possible to construct a D-equivalent one-sided ([15:179]) generalized memory transformation scheme $\bar{\Psi}$, of the same dimension. Proof: The proof is carried in a way similar to the proof of lemma 6.3 of [15:232—233].

Lemma 2. For every one-sided pseudopredicate ([15:233]) strongly regular generalized memory transformation scheme $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ which does not contain any predicate skeleton variable in Σ it is possible to construct a D-eguivalent generalized memory transformation scheme, $\bar{\Psi} = (\Sigma', \Xi', W_1, W_2)$ of the same dimension as Ψ such that Σ' has the form $((v_1, \Phi_1), (\Phi_1, \omega_1))$.

Proof: The proof is carried in a way similar to the proof of lemma 6.4 of [15:234—235].

Lemma 3. For any generalized memory transformation scheme Ψ of dimension n that satisfies the conditions of lemma 2, it is possible to construct a primitive ([15:233]) generalized memory transformation scheme $\bar{\Psi}$ of dimension n which is D-equivalent to Ψ and has the same systems of input and output variables as Ψ.

Proof: The proof is carried in a way similar to the proof of lemma 6,5 of [15:235—236].

Lemma 4. For any one-sided pseudopredicate strongly regular generalized memory transformation scheme Ψ without cycles [15:234] it is possible to construct a primitive generalized memory transformation scheme $\bar{\Psi}$ D-equivalent to Ψ that has the same dimension and the same systems of input and output variables as Ψ.

Proof: The proof is carried in a way similar to the proof of lemma 6.6 of [15:236—241].

Lemma 5. For any primitive strongly regular generalized functor memory transformation scheme $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ of dimension n it is possible to construct a generalized functor memory transformation scheme Ψ' of dimension s, where s is the maximum index of the object variables in $W_1 \cup W_2$, which is D-equivalent to Ψ and has a skeleton scheme of the form $((H, \Phi_1), (\Phi_1, \omega_1))$.

Proof: Let Ψ be a primitive strongly regular generalized functor memory transformation scheme of dimension n, which has the form

$(((\upsilon_1, \Pi_1), (\Pi_1, \Phi_1, \Phi_2), (\Phi_1, \omega_1), (\Phi_2, \omega_2)), (\Pi_1 \dashrightarrow B, \Phi_1 \dashrightarrow [T_1, \cdots, T_n), \Phi_2 \dashrightarrow [T_1, \cdots, T_n]), W_1, W_2)$, where W_1 and W_2 are systems of pairwise distinct variables. Since Ψ is generalised functor memory transformation scheme, we have $\upsilon_1 = H$, $\omega_1 = O_k$ and $\omega_2 = O_k$, the system W_2 will consist of one variable, denoted by x_l, and W_1 will be either empty or have variables which are denoted by $x_{k_1}, \cdots, x_{k_t} (t \leqslant n)$.

Case 1: Suppose W_1 is empty and there exists at least a functor algorithmic variable (F-term), call it T_0, of dimension 0. Then the required generalized memory transformation scheme Ψ' is $(((H, \Phi_1), (\Phi_1, \omega_1)), (\Phi_1 \dashrightarrow [\dot{T_1}, \cdots, \dot{T_l}]), W_1, W_2)$, where $\dot{T_i} = \mathrm{Adj}\,(0, \mathrm{Comp}\,(Br\,(B, T_i, T_i), \overbrace{T_0, \cdots, T_0}^{n}) \cdots) (1 \leqslant i \leqslant l)$, which has dimension l.

Case 2: Suppose W_1 is empty and there is no functor algorithmic variable of dimension 0 in Ψ. Then Ψ' of dimension l is $(((H, \Phi_1), (\Phi_1, \omega_1)), (\Phi_1 \dashrightarrow [I_l^l, \cdots, I_l^{l-1}, \mathrm{Adj}\,(l-1, \cdots, \mathrm{Adj}\ (0, D) \cdots)], W_1, W_2)$.

Let us show that Ψ' is D-equivalent to Ψ. From the construction of Ψ', it is obvious that for any algorithmic table L in a constructive set M and for any initial memory state P of the generalized graph scheme (Ψ', L), (Ψ', L) is inapplicable to P. Hence Ψ' is strongly regular.

Subcase 1: Suppose Ψ is a generalized memory transformation scheme such that for every algorithmic table L in a constructive set M (Ψ, L) is a generalized graph scheme, and for every initial memory state P in M (Ψ, L) is inapplicable to P. Hence Ψ is strongly regular and D-equivalent to Ψ'.

Subcase 2: Suppose L is an algorithmic table in a constructive set M such that (Ψ, L) is a generalized graph scheme and there exists an initial memory state P in M such that (Ψ, L) is applicable to P. It is obvious that Ψ and Ψ' are not D-equivalent. In this case let us show that Ψ is not strongly regular.

(*i*) If L is empty, then Ψ is not strongly regular, since W_1 is empty and W_2 is non-empty.

(*ii*) If L is non-empty, let us construct a constructive set M^* from M such that $M^* = M \cup \{a^*\}$, where $a^* \& M$. Let us construct an algorithmic table L^* in M^* from L by replacing every algorithm U of dimension $k (k \leqslant n)$ in L by an algorithm U^* of the same dimension in M^* as follows:

$$U^*(r_1, \cdots, r_k) = \begin{cases} U(r_1, \cdots, r_k), & \text{if there exists no i } (1 \leqslant i \leqslant k) \\ & \text{such that } r_i = a^*; \\ \text{undefined, otherwise.} \end{cases}$$

Hence (Ψ, L^*) is a generalized graph scheme.

The initial memory state P is also applicable to (Ψ, L^*) in M. Let P be an initial memory state such $P^*(x_i) = a^* (1 \leqslant i \leqslant n)$, then P^* is inapplicable to (Ψ, L^*), since L is non-empty. Hence (Ψ, L^*) is not regular since W_1 is empty, and thus Ψ is not strongly regular.

Hence the only case that Ψ is strongly regular is in subcase 1 which is D-equivalent to Ψ'.

Case 3: Suppose W_1 is not empty, and let x_s is an object variable in $W_1 \cup W_2$ with maximum index. Then the required generalized memory transformation scheme Ψ' of dimension s, D-equivalent to Ψ is constructed as follows: $(((H, \Phi_1), (\Phi_1\ \omega_1))), \Phi_1 \leftrightarrow [T_1^*, \cdots, T_s^*]), W_1, W_2)$, where for every $i\,(1 \leqslant i \leqslant s)$ $T_i^* = \mathrm{Comp}\,(Br\,(B, T_i, T_i), I_s^1, \cdots, I_s^s)$.

It is easily seen that Ψ and Ψ' are D-equivalent.

This completes the proof of the lemma.

Lemma 6. For any premitive strongly regular generalized predicate memory transformation scheme $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ of dimension n, it is possible to construct a generalized predicate memory transformation scheme Ψ' of dimension s, where s is the maximum index of the object variable in $W_1 \cup W_2$, which is D-equivalent to Ψ and has a skeleton scheme of the form $((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2))$.

Proof: Let Ψ be a primitive strongly regular generalized predicate memory transformation scheme of dimension n, which has the form $(((\upsilon_1, \Pi_1), (\Pi_1, \varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \omega_1), (\varphi_2, \omega_2)), (\Pi_1 \leftrightarrow B, \varphi_1 \leftrightarrow [T, \cdots, T_n], \varphi_2 \leftrightarrow [T_1, \cdots \cdots, T_n]), W_1, W_2)$, where W_1 and W_2 are systems of pairwise distinct variables. Since Ψ is a generalized predicate memory transformation scheme, we have $\upsilon_1 = H$, and each of the stops ω_1 and ω_2 is equal either to O_T or O_F and W_2 is empty.

Case 1: Suppose W_1 is empty and there exists at least a functor algorithmic variable (F-term), call it T_0, of dimension 0 in Ψ. Then the required generalized transformation scheme Ψ' of dimension 0 is $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi_1 \leftrightarrow \mathrm{Comp}\,(Br\,(B, \mathrm{Comp}\,(R_1, T_1 \cdots, T_n), \mathrm{Comp}\,(R_2, T_1, \cdots, T_n)), \overbrace{T_0, \cdots, T_0}^{n})), W_1, W_2)$ where $R_i\,(i = 1, 2)$ is either $\mathrm{Adj}\,(n-1, \cdots, \mathrm{Adj}\,(0, \mathrm{T}) \cdots)$ or $\mathrm{Adj}\,(n-1, \mathrm{Adj}\,(n-2, \cdots \cdots, \mathrm{Adj}\,(0, \mathrm{L})) \cdots)$ in the cases $\omega_i = O_T$ or $\omega_i = O_F$ respectively. It is clear that Ψ' is D-equivalent to Ψ.

Case 2: Suppose W_1 is empty and there is no functor algorithmic variable with dimension 0 in Ψ. Then two subcases arise:

Subcase 1: Suppose Ψ is a generalized predicate memory transformation scheme such that Ψ does not contain D, and for an empty algorithmic table L in a constructive set M, (Ψ, L) is a generalized graph scheme. Then Ψ' is D-equivalent either to $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi_1 \leftrightarrow \mathrm{T}), W_1, W_2)$ if B is $\mathrm{Adj}\,(n-1, \cdots, \mathrm{Adj}\,(0, \mathrm{T}))$ or to $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi_1 \rightarrow \mathrm{L}), W_1, W_2)$ if B is $\mathrm{Adj}\,(n-1, \cdots, \mathrm{Adj}\,(0, \mathrm{L}) \cdots)$.

Subcase 2: Suppose Ψ is a generalised predicate memory transformation scheme, such that either Ψ contains the F-term D, or for an empty algorithmic table L, (Ψ, L) is not a generalized graph scheme. Then the required generalized predicate memory transformation scheme of dimension 0 is $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi_1 \leftrightarrow \mathrm{Comp}\,(\mathrm{Adj}\,(0, \mathrm{T}), \mathrm{D})), W_1, W_2)$.

We show that Ψ is D-equivalent to Ψ' by a similar method as in case 2 of lemma 5.

Case 3: Suppose W_1 is not empty. Let x_s be an object variable in W_1 with maximum index. Let us construct P-terms R_i $(i=1,2)$, such that each has one of either forms Adj $(n-1,\cdots,$ Adj$(0,T)\cdots)$ or Adj $(n-1,\cdots,$ Adj $(0, L))\cdots)$ in case $\omega_i = O_T$ or $\omega_i = O_F$ respectively. The required generalized predicate memory transformation scheme Ψ' of dimension s is constructed as follows: $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi_1 \leftrightarrow \mathrm{Comp}(Br(B, \mathrm{Comp}(R_1, T_1, \cdots, T_n), \mathrm{Comp}(R_2, T_1,\cdots,T_n), I'_s,\cdots, I^s_s)), W_1, W_2)$.

It is evident that Ψ' is D-equivalent to Ψ. This completes the proof of the lemma.

Lemma 7: For any one-sided pseudpredicate strongly regular generalized memory transformation scheme Ψ, it is possible to construct a one-sided strongly regular generalized memory transformation scheme $\tilde{\Psi}$ without cycles which is D-equivalent to Ψ and has the same dimension as Ψ.

Proof: Let $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ be a one-sided strongly regular generalized memory transformation scheme of dimension n that has a skeleton scheme $\Sigma = (S_1,\cdots, S_h)$.

We shall carry out the proof by induction on the number of inverse predicate skeleton variables occurring in Ψ. If this number is equal to zero, the assertion of the lemma is evident, since in this case Ψ is a generalized memory transformation scheme without cycles and we can write $\tilde{\Psi} = \Psi$.

Now let us assume that Ψ has inverse predicate skeleton variables. Let q be the smallest length of a cycle for the inverse predicate skeleton variables occurring in Ψ. We shall denote by $\alpha_1,\cdots, \alpha_h$ the first members, by $\beta_1,\cdots, \beta_h$ the second members, and by $\gamma_1,\cdots, \gamma_h$ the third members of skeleton terms $S_1,\cdots, S_h$.

Since Ψ is a one-sided pseudopredicate generalized memory transformation scheme, we have $\beta_i = \alpha_{i+1}$ for $(1 \leqslant i \leqslant h-1)$, and moreover α_1, will be a starter and β_h will be a stop. Let α_k be an inverse predicate skeleton variable whose cyclehas length q. By denoting the number $k-q+1$ by l, we can write the cycle of the variable α_k in the form $(\alpha_l,\cdots, \alpha_k)$.

Let us denote by λ a subscheme of Ψ generated by the system of skeleton variables $(\alpha_l, \cdots, \alpha_k)$.

Now we shall construct a generalized memory transformation scheme D-equivalent to λ such that by substituting it for λ in Ψ we obtain a generalized memory transformation scheme with a smaller number of inverse predicate skeleton variables as compared to Ψ.

In the skeleton scheme λ let us permute the skeleton terms in such a way that the initial terms precede all the others, whereas the skeleton terms which are not initial are located in the same order as in λ; the resulting generalized memory transformation scheme (evidently D-equivalent to λ) will be denoted by λ'. The skeleton scheme of λ' will be $R_1, R_2, \cdots, R_d, S_i', S_{i+1}', \cdots, S_k'$, where $R_1, R_2, \cdots, R_d$ are initial terms ($d \geqslant 1$) and $S_i', \cdots, S_k'$ are skeleton terms $S_i, \cdots, S_k$ that have been transformed in accordance with the definition of a subscheme. Let us denote the first, second and third member of each term S_i' by α_i', β_i' and γ_i'. Hence, in accordance with the definition of a subscheme, all the α_i' will coincide with α_i and each of the variables β_i', γ_i' will either coincide with β_i, γ_i or it will be a stop. Moreover, γ_k' coincides with α_i.

It is easy to see that λ' is one-sided. Since α_k is an inverse variable with smallest length of cycle in Ψ, the generalized memory transformation scheme λ' will have only one inverse predicate skeleton variable α_k'.

Let us construct a generalized memory transformation scheme Δ that can be obtained from λ' by the following transformation:

1) The group of initial terms $R_1, \cdots, R_d$ in the skeleton scheme λ' is replaced by the initial term (H, α_i').

2) The skeleton term $S_k' = (\alpha_k, \beta_k', \alpha_i)$ in the skeleton scheme of λ' is replaced by the skeleton term (α_k, O_T, O_F).

3) In all the skeleton terms other than S_1 all the stops are replaced by the stop O_T.

It is clear that Δ is a one-sided generalized memory transformation scheme. By construction, Δ is a pseudopredicate generalized memory transformation scheme without cycles. Since all the object variables contained in Δ belong to the system of its input variables, it follows that Δ is a strongly regular generalized memory transformation scheme. Hence according to lemma 4 we can construct a primitive generalized memory transformation scheme Δ' D-equivalent to Δ which have the form $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \omega_1), (\varphi_2, \omega_2)), (\Pi_1 \leftrightarrow R_1^*, \varphi_1 \leftrightarrow [T_1, \cdots, T_n], \varphi_2 \leftrightarrow [T_1, \cdots, T_n]), (x_1, \cdots, x_n), (x, \cdots, x_n))$, where each of the stops ω_1 and ω_2 is either O_T or O_F.

Let us construct a generalized memory transformation scheme Δ'' by replacing the system of output variables of Δ' by an empty system of variables. Hence Δ'' will be a primitive strongly regular generalized predicate memory transformation scheme of dimension n. Hence by lemma 6 it is possible to construct a generalized memory transformation scheme Δ^* of dimension n which is D-equivalent to Δ'' and have the form $(((H, \Pi_1), (\Pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\Pi \leftrightarrow \overline{R}_1), (x_1, \cdots, x_n), (\ ))$. For any algorithmic table L adjoined to λ' such that (λ', L) is a generalized graph scheme, it is easy to verify that the predicate U specified by (Δ^*, L) and realized by the P-term $\overline{R}_1$ has the following property: for any state P of the generalized graph scheme (λ', L) such that $\overline{P} = \alpha_i'$ we have $U(P(x_1),\cdots, P(x_n)) = F$ iff it is possible to construct a state Q of the graph scheme (λ', L) such that PtQ and $\overline{Q} = \alpha_l'$; moreover $U(P(x_1),\cdots, P(x_n)) = T$ iff it is possible to construct a finite sequence of states $P_1,\cdots, P_t$ of the generalized graph scheme (λ', L) such that $P_1 \underset{(\lambda', L)}{\vdash} P_2 \vdash \cdots \underset{(\lambda', L)}{\vdash} P_t$; $P_1 = P$; $\overline{P}_t$ is a stop and $\overline{P}_i \neq \alpha_l'$ for any i such that $2 \leqslant i \leqslant t$.

We can say that the P-term R_1 recognizes for a given state P and a given algorithmic table L whether or not the graph scheme (λ', L) "performs" a cycle by operating over the state P, or whether it "drops out" the cycle.

Let every $G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ denotes the F-term $B_r(\overline{R}_1, T_i, T_i)$. Then it is easy to verify that the algorithms $V_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ realized by the F-terms C_i in L have the property that for any finite non-empty sequence of states $P_1 \cdots, P_t$ of (λ', L) that satisfies the conditions

a) $P_1 \underset{(\lambda, L)}{\vdash} P_2 \underset{(\lambda', L)}{\vdash} \cdots \underset{(\lambda', L)}{\vdash} P_t \quad (t > 1)$, b) $\overline{P}_1 = \alpha_l'$,

c) $\overline{P}_t = \alpha_l'$ or $\overline{P}_t$ is a stop, d) $\overline{P}_i = \alpha_l'$ for $1 < i < t$,

we have $P_t(x_j) = V_j(P_1(x_1),\cdots, P_1(x_n)) \ (1 \leqslant j \leqslant n)$.

We can say that the F-terms $C_1,\cdots, C_n$ describe a transformation performed by the cycle contained in the generalized memory transformation scheme λ'.

Let us also construct F-terms $D_1,\cdots, D_n$ such that

$$D_i = \mathrm{Rep}\ (i, \overline{R}_1, C_1,\cdots, C_n)\ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Now we can construct a generalized memory transformation scheme λ^* as follows:

1) Let $\varepsilon_1,\cdots, \varepsilon_w$ be all the functor and predicate skeleton variables occurring in λ. Let us consider skeleton variables $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \cdots \cdots, \dot{\varepsilon}_w, \ddot{\varepsilon}_1, \cdots, \ddot{\varepsilon}_w$, that differ from one another and from all the variables ε_i, we shall select these variables in such a way that $\dot{\varepsilon}_i$ and $\ddot{\varepsilon}_i$ are functor (predicate) variable if ε_i is a functor (predicate) variable. We shall also consider a functor skeleton variable η and predicate skeleton variable θ which are distinct from all the variables ε_i, $\dot{\varepsilon}_i$, $\ddot{\varepsilon}_i$.

2) We construct skeleton terms $\dot{R}_1, \dot{R}_2, \cdots, \dot{R}_d$ that can be obtained from $R_1, R_2,\cdots, R_d$ by replacing all the ε_i by $\dot{\varepsilon}_i$.

3) We construct skeleton terms $S_1, \cdots, S_{k-1}$ by replacing all the ε_i by $\dot{\varepsilon}_i$ and all stops by $\dddot{\alpha}_j'$ in each term S_j'.

4) We construct the skeleton terms $\dot{S}_k = (\ddot{\alpha}_k, 0, \eta)$, $U = (\theta, \eta, \ddot{\alpha}_k)$ and $V = (\eta, \dddot{\alpha}_l')$.

5) We construct skeleton terms $S_l^{\cdot\cdot}, S_{l+1}^{\cdot\cdot}, \cdots, S_{k-1}^{\cdot\cdot}$ that can be obtained from $S_l^{\prime}, \cdots, S_{k-1}^{\prime}$ by replacing all the ε_l by $\varepsilon_l^{\cdot\cdot}$.

6) We construct the skeleton term $S_k^{\cdot\cdot}=(\alpha_k^{\cdot\cdot\cdot}, \beta_k, \beta_k^{\prime})$.

7) We construct the skeleton scheme Σ^* of the generalized memory transformation scheme λ^* as follows:

$$\Sigma^* = (R_1^{\cdot}, \cdots, R_d^{\cdot}, S_l^{\cdot}, \cdots, S_{k-1}^{\cdot}, U, V, S_l^{\cdot\cdot}, \cdots, S_{k-1}^{\cdot\cdot}, S_k^{\cdot\cdot}).$$

8) We construct the generalized memory transformation table Ξ^* of λ^* by adjoining to the generalized transformation table of λ, firstly all possible rows of the form $\varepsilon_l^{\cdot} \dashrightarrow [T_1^{\cdot}, \cdots, T_n^{\cdot}]$ and $\varepsilon_l^{\cdot\cdot} \dashrightarrow [T_1^{\cdot}, \cdots, T_n^{\cdot}]$ where $\varepsilon_l \dashrightarrow [T_1^{\cdot}, \cdots, T_n^{\cdot}]$ and secondly, the rows $\eta \dashrightarrow [D_1, \cdots, D_n]$ and $\theta \dashrightarrow \mathrm{Adj}\,(n-1, \cdots, \mathrm{Adj}\,(\theta, \mathbf{L}) \cdots)$.

9) We construct the generalized memory transformation scheme

$$\lambda^* = (\Sigma^*, \Xi^*, (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n)).$$

It is easy to see that λ^* is D-equivalent to λ and is a one-sided scheme without cycles.

It is evident that λ^* and λ satisfy all the conditions of theorem 1; and hence the generalized memory transformation scheme Ψ^* obtained as a result of the substitution of λ^* for subscheme λ in Ψ will be D-equivalent to Ψ. In accordance with the definition of substitution, the skeleton scheme of Ψ^* will be

$$(\overline{S}_1, \overline{S}_2, \cdots, \overline{S}_{l-1}, \overline{S}_{k+1}, \cdots, \overline{S}_h, \overline{S}_l^{\cdot}, \overline{S}_{l+1}^{\cdot}, \cdots, \overline{S}_{k-1}^{\cdot}, \overline{S}_k^{\cdot}, \overline{U}, \overline{V}, \overline{S}_l^{\cdot\cdot}, \cdots$$
$$\cdots, \overline{S}_k^{\cdot\cdot}),$$

where each symbol of the form $\overline{z}$ denotes a skeleton term z transformed in accordance with the operation of substitution of a generalized memory transformation scheme into a generalized memory transformation scheme. Let us permute the skeleton terms in the skeleton scheme of Ψ^* by arranging them in the folliwing order:

$$(\overline{S}_1, \overline{S}_2, \cdots, \overline{S}_{p-1}^{\cdot}, \overline{S}_l^{\cdot}, \cdots, \overline{S}_{k-1}^{\cdot}, \overline{S}_k, \overline{U}, \overline{V}, \overline{S}_l^{\cdot\cdot},$$
$$\overline{S}_{l+1}^{\cdot\cdot}, \cdots, \overline{S}_{k-1}^{\cdot\cdot}, \overline{S}_k^{\cdot\cdot}, \overline{S}_{k+1}, \cdots, \overline{S}_h).$$

As a result we obtiain a generalized memory transformation scheme $\overline{\Psi}^*$ which is evidently D-equivalent to Ψ and is one-sided, and the inverse predicate skeleton variable in $\overline{\Psi}^*$ being by one smaller than in Ψ. By the inductive assumption it is possible to construct a one-sided generalized memory transformation scheme $\widetilde{\Psi}$ without cycles which is D-equivalent to Ψ. This completes the proof of the lemma.

T h e o r e m 2: *For every strongly regular generalized functor or predicate memory transformation scheme* (Σ, Ξ, W_1, W_2) *of dimension* n *it is possible to construct a corresponding D-equivalent generalized* *memory transformation scheme* (Σ, Ξ, W_1, W_2) *of dimension* t, *where* it *is the maximum index of the object variables in* $W_1 \cup W_2$, *such that*

$$\Sigma' = \begin{cases} ((H, \Pi_1), (\Pi, \omega_1, \omega_2)) & \text{if } (\Sigma, \Xi, W_1, W_2) \text{ is a generalized predicate memory transformation scheme,} \\ ((H, \Phi_1), (\Phi_1, \omega_1)) & \text{if } (\Sigma, \Xi, W_1, W_2) \text{ is a generalized functor memory transformation scheme,} \end{cases}$$

and Ξ' *consists of a single row, and has only those functor and predicate variables which* (Σ, Ξ, W_1, W_2) *contains.*

Proof: Let Ψ be a generalized functor or predicate memory transformation scheme of dimension n. According to lemma 1 it is possible to construct a one-sided generalized memory transformation scheme Ψ_1 of the same dimension, D-equivalent to Ψ. Next, according to lemma 7 we can construct a one-sided generalized memory transformation scheme Ψ_2 of the same dimension as Ψ_1, without cycles, which is D-equivalent to Ψ. Since Ψ is a generalized functor or predicate memory transformation scheme and Ψ_2 is D-equivalent to Ψ, any superfluous stop which is produced in constructing Ψ_2 is replaced by the stop O_k of Ψ if Ψ is a generalized functor memory transformation scheme, or by a stop O_T if Ψ is a generalized predicate memory transformation scheme. Hence we obtain a one-sided pseudopredicate generalized memory transformation scheme Ψ_3 of dimension n, without cycles, D-equivalent to Ψ. By virtue of lemma 3 we can construct a primitive generalized memory transformation scheme Ψ_4 of dimension n D-equivalent to Ψ. Thus by lemma 5 or 6 we get the required generalized memory transformation scheme Ψ_5 of dimension t. This completes the proof of the theorem.

Lemma 8: For every strongly regular generalized functor memory transformation scheme Ψ of dimension n, with input variables $(x_{j_1}, \cdots, x_{j_t})(t \geqslant 0)$, it is possible to construct a strongly regular generalized functor memory transformation scheme Ψ' of dimension n, such that for every algorithmic table L in M matched with Ψ and Ψ' the generalized graph scheme (Ψ', L) specifies the same algorithmic functor as (Ψ, L) and the systems of input and output variables of Ψ' is $(x_1, \cdots, x_t)$ and (x_1) respectively.

Proof: Suppose $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ is a generalized functor memory transformation scheme of dimension n, where $W_1 = (x_{j_1}, \cdots, x_{j_t})$ and W_2 is x_l.

Let us construct the required generalized functor memory transformation scheme of dimension n as follows:

1) Let Φ_1^*, Φ_2^* be functor skeleton variables which are not contained in Σ. Let us construct a skeleton scheme Σ' obtained from Σ by replacing the initial skeleton term (H, η) of Σ by (H, Φ_1^*), (Φ_1^*, η) and each terminal term (Φ_i, O_k) by (Φ_i, Φ_2^*), (Φ_2^*, O_k).

2) Let us construct a generalized memory transformation table Ξ' obtained from Ξ by adjoining to it the rows;

$$\Phi_1^* \leftarrow [I_n^1, I_n^2, \cdots, I_n^{j_1-1}, I_n^1, I_n^{j_1+1}, I_n^{j_1+2}, \cdots, I_n^{j_2-1}, I_n^2, I_n^{j_2+1},$$

$$I_n^{j_2+2}, \cdots, I_n^{j_t-1}, I_n^t, I_n^{j_t+1}, I_n^{j_t+2}, \cdots, I_n^n], \text{ and}$$

$$\Phi_2^* \leftarrow [I_n^1, I_n^2, \cdots, I_n^n].$$

3) Let W_1' is $(x_1, \cdots, x_t)$ and W_2' is (x_1).

Then the required generalized functor memory transformation scheme is $(\Sigma, \Xi', W_1', W_2')$. It is evident that (Ψ', L) specifies the same functor as (Ψ, L).

Lemma 9: For every strongly regular generalized predicate memory transformation scheme Ψ of dimension n, it is possible to construct a strongly regular generalized predicate memory transformation scheme Ψ' of dimension n such that for every algorithmic table L in M matched with Ψ and Ψ' the generalized predicate graph scheme (Ψ', L) specifies the same predicate as (Ψ, L) and the system of input variables in Ψ' is $(x_1, \cdots, x_t)$, where t $(t > 0)$ is the number of input variables in Ψ.

Proof: Suppose $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ is a generalized predicate memory transformation scheme of dimension n, where $W_1 = (x_{j_1}, \cdots, x_{j_t})$ and W_2 is empty.

Let us construct the required generalised memory transformation scheme as follows:

(i) Let Φ_1^*, be a functor skeleton variable which is not contained in Σ. Let us construct a skeleton scheme Σ' from Σ by replacing the initial skeleton term (H, η) of Σ by (H, Φ_1^*), (Φ_1^*, η).

(ii) Let us construct a generalized memory transformation table Ξ' from Ξ by adjoining to it the row

$$\Phi_1^* \leftarrow [I_n^1, I_n^2, \cdots, I_n^{j_1-1}, I_n^1, I_n^{j_1+1}, I_n^{j_1+2}, \cdots, I_n^{j_2-1}, I_n^2, I_n^{j_2+1},$$

$$I_n^{j_2+2}, \cdots, I_n^{j_t-1}, I_n^t, I_n^{j_t+1}, I_n^{j_t+2}, \cdots, I_n^n].$$

(iii) Let W_1' is $(x_1, \cdots, x_t)$ and W_2' is ( ).

Then the required generalized predicate memory transformation scheme is $(\Sigma', \Xi', W_1', W_2')$. It is evident that (Ψ', L) specifies the same predicate as (Ψ, L).

Theorem 3: *For every strongly regular generalized functor (predicate) memory transformation scheme Ψ of dimension n it is possible to construct an F-term (P-term) T such that (i) for every algorithmic table L in M matched with Ψ, the term T realizes with respect to L the same functor (predicate) which is specified by (Ψ, L) and (ii) every functor or predicate variable contained in T is also contained in Ψ.*

Proof: Case (i) Suppose $\Psi=(\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ is a strongly regular generalized functor memory transformation scheme of dimension n. According to lemma 8, it is possible to construct a strongly regular generalized functor transformation scheme $\Psi_1=(\Sigma', \Xi', W_1^*, W_2^*)$ of dimension n, where W_1^* and W_2^* are $(x_1,\cdots, x_t)$ and (x_1) respectively, and t is the number of variables in W_1 such that for every algorithmic table L in M matched with Ψ and Ψ_1, (Ψ_1, L) specifies the same functor as (Ψ, L). Next according to theorem 2, we can construct a generalized memory transformation scheme of dimension t_1 D-equivalent to Ψ_1 and having the form $(((H, \Phi_1), (\Phi_1, \omega_1)), (\Phi_1 \leftrightarrow [T_1,\cdots, T_{t_1}]) W_1^*, W_2^*)$, where t_1 is the number of variables in $W_1^* \cup W_2^*$.

The required F-term is Br (Comp (Adj $(0,\cdots,$ Adj $(0, \mathrm{T})\cdots)$, $T_1,\cdots, T_t)$, T_1, $T_1)$, if W_1 is non-empty and Comp (T_1, R) if W_1 is empty, where R is a functor algorithmic variable of dimension zero if is contained is Ψ, otherwise R is $\mathbf{D}$.

Case (ii): Suppose $\Psi=(\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ is a strongly regular generalized predicate memory transformation scheme of dimension n. According to lemma 9 it is possible to construct a strongly regular generalized predicate transformation scheme $\Psi_1=(\Sigma_1', \Xi', W_1', W_2')$ of dimension n where W_1' is $(x_1,\cdots, x_t)$, and $t \geqslant 0$ is, the number of object variables in W_1 such that for every algorithmic table L in M matched with Ψ and Ψ_1 (Ψ_1, L) specifies the same predicate as (Ψ, L). Next according to theorem 2 we can construct a strongly regular generalized predicate transformation scheme Ψ_2 of dimension t, D-equivalent to Ψ_1 and having the form $(((H, \pi_2), (\pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\pi_1 \leftrightarrow R), W_1', W_2')$. Then the required P-term of dimension t is R-

This completes the proof of the theorem.

Def. 17. The depth of an F-term or P-terms is defined inductively as follows:

1) Every F-term of the form $f_{2^n(2l+1)}$, $\mathbf{D}$ or $\mathbf{I}$ has the depth zero.

2) Every P-term of the form $P_{2^n(2l+1)}$, $\mathbf{T}$ or $\mathbf{L}$ has the depth zero.

3) Every F-term or P-term of the form Comp $(T_1,\cdots, T_m)$ has $\sum_{k=1}^{m} t_k+1$ depth, where $t_k (1 \leqslant k \leqslant m)$ is the depth of T_k.

4) Every F-term or P-term of the form Br (T_1, T_2, T_3) has $\sum_{k=1}^{3} t_k+1$ depth, where t_k $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ is the depth of T_k.

5) Every F-term of P-term of the form Adj (i, T) has the same depth as T.

6) Every F-term of the form Rep $(i, T_1,\cdots, T_m)$ has $\sum_{k=1}^{m} t_k+1$ depth, where t_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ is the depth of T_k.

Def 18. The depth of an A-term $[T_1,\cdots, T_n]$ is defined as max $(t_1,\cdots, t_n)$ where $t_i\, (1 \leqslant i \leqslant n)$ is the depth of the F-term T_i.

Def. 19. The depth of a generalized memory transformation scheme is said to be k $(k>0)$ iff these exists an A-term or P-term in Ψ whose depth is k and every A-term or P-term in Ψ has a depth m such that $m \leqslant k$.

Theorem 4: *For every strongly regular generalized memory transformation scheme Ψ of dimension n it is always possible to construct a generalized memory transformation scheme Ψ' of dimension m $(m \geqslant n)$ and depth zero, which is D-equivalent to Ψ.*

Proof: Let $\Psi = (\Sigma, \Xi, W_1, W_2)$ be a strongly regular generalized memory trasformation scheme of dimension n with depth k. The proof is by induction on the depth of Ψ. If $k=0$, then Ψ' is Ψ.

Now let us assume that $k>0$. For every skeleton variable α in the skeleton scheme Σ of Ψ such that $(\alpha \leftarrow B) \in \Xi$, B is P-term or A-term of depth k in Ψ, let us construct a subscheme λ of dimension n with depth k generated by $\{\alpha\}$. Let us construct a generalized memory transformation scheme λ^* of dimension m with the same input and output variable as λ with depth k_1 $(k_1 < k)$, D-equivalent to λ as follows:

Case 1: Suppose α is a predicate skeleton variable, then without loss of generality let us assume that Ψ has the form $(((\nu_1, \alpha), (\nu_1, \alpha), \cdots \cdots, (\nu_l, \alpha), (\alpha, \omega_1, \omega_2)), (\alpha \leftarrow B), (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n))$.

Let us specify predicate skeleton variables π_1, π_2, π_3 and a functor skeleton variable Φ_1, that differ from one another and from all the skeleton variables of Ψ and λ.

Les R be a P-term defined as follows:

$$R = \begin{cases} B' & \text{if } B = \text{Adj}\,(i_1, \cdots, \text{Adj}(i_l, B') \cdots) \text{ where } l < n-1 \text{ and } B \\ & \quad \text{does not have the form Adj}\,(i_{l+1}, B''); \\ B & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Now let us construct the required generalized memory transformation scheme λ^* as follows:

(i) If R has the form $Br\,(T_1, T_2, T_3)$, then $\lambda^* = (((v_1, \pi_1), (v_2, \pi_1), \cdots, (v_l, \pi_1), (\pi_1, \pi_2, \pi_3), (\pi_2, \omega_1, \omega_2), (\pi_3, \omega_1, \omega_2)), (\pi_1 \leftarrow T_1^*, \pi_2 \leftarrow T_2^*, \pi_3 \leftarrow T_3^*), (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n))$, where T_i^* $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ is obtained from T_i by adjoining all those object variables from $x_1, \cdots, x_n$ which T_i does not contain.

(ii) If R has the form Comp $(T_1, T_2, \cdots, T_m)$, then $\lambda^* = (((v_1, \Phi), (v_2, \Phi_1) \cdots, (v_l, \Phi_1), \Phi_1, \pi_1), (\pi_1, \omega_1, \omega_2)), (\pi_1 \leftarrow T_1^*, \Phi_1 \leftarrow [L_1, L_2, \cdots \cdots, L_s]), (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n))$, where s is the number of all distinct object variables in $T_1, T_2, \cdots, T_m$ and $x_1, \cdots, x_n$, and every L_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ is obtained from T_j, by adjoining all the object variables from $x_1, \cdots, x_s$ which T_j does not contain, if x_i is the $(j-1)-th$ position of T_1, otherwise l_i is l_s; and T_1^* if obtained from T_1 by adjoining all those object variables from $x_1, \cdots, x_s$ which T_1 does not contain.

It is easy to see that the constructed generalized memory transformation scheme λ^* has the depth $k_1 < k$ and is D-equivalent to λ.

Case 2: Suppose α is a functor skeleton variable. Then without loss of generality we can assume that the subscheme λ has the form $(((v_1, \alpha), (v_2, \alpha), \cdots, (v_l, \alpha), (\alpha, \omega_1)), (\alpha \leftrightarrow [T_1, \cdots, T_n]), (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n))$. Since B is an A-term of depth k, we can assume without loss of generality that $T_{r_1}, \cdots, T_{r_p}$ are all the F-terms in $[T_1, \cdots, T_n]$ which have depth k.

1) Let us specify functor skeleton variables $\Phi_1, \cdots, \Phi_{n+1}$ that differ from one another and from all the skeleton variables λ and Ψ.

2) Let us construct a generalized memory transformation scheme $\bar{\lambda}$ with dimension $2n$ and depth k as follows: $\bar{\lambda} = (((v_1, \Phi_1), \cdots, (v_l, \Phi_1), (\Phi_1, \Phi_2), \cdots, (\Phi_n, \Phi_{n+1}), (\Phi_{n+1}, \omega_1)), (\Phi_1 \leftrightarrow [I'_{2n}, \cdots, I^n_{2n}, T^*_1, I^{n+2}_{2n}, \cdots, I^{2n}_{2n}], \cdots, \Phi_l \leftrightarrow [I'_{2n}, \cdots, I^{n+l-1}_{2n}, T^*_l, I^{n+l+1}_{2n}, \cdots, I^{2n}_{2n}], \cdots, \Phi_n \leftrightarrow [I'_{2n}, \cdots, I^{2n-1}_{2n}, T^*_n], \Phi_{n+1} \leftrightarrow [I^{n+1}_{2n}, I^{n+2}_{2n}, \cdots, I^{2n}_{2n}, I'_{2n}, \cdots, I^n_{2n}])$ $(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n))$, where for every i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $T^*_i = \mathrm{Adj}(2n-1, \mathrm{Adj}(2n-2, \cdots, \mathrm{Adj}(n, T_i)) \cdots)$.

It is obvious that $\bar{\lambda}$ is D-equivalent to λ.

3) Let us construct subschemes $\bar{\lambda}_{r_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ from $\bar{\lambda}$ generated by $\{\Phi_{r_i}\}$. Then every $\bar{\lambda}_{r_i}$ will have the form $(((v'_{r_i}, \Phi_{r_i}), \Phi_{r_i}, \omega'_{r_i})), (\Phi_{r_i} \leftrightarrow [I'_{2n}, \cdots, I^{n+i-1}_{2n}, T^*_i, I^{n+i+1}_{2n}, \cdots, I^{2n}_{2n}], (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots x_n))$ (except $\bar{\lambda}_1$ which contains t initial skeleton terms), where v'_{r_i} and ω'_{r_i} $(1 \leqslant i \leqslant p)$ are respectively initial and terminal skeleton variables which differ from one another and from all the initial and terminal skeleton variables of $\bar{\lambda}$.

4) We define F-terms

$$\bar{L}_{r_i} = \begin{cases} L' & \text{if } T^*_{r_i} = \mathrm{Adj}(s_1, \mathrm{Adj}(s_2, \cdots, \mathrm{Adj}(s_c, L')) \cdots) \text{ where} \\ & c+1 < 2n \text{ and } L' \text{ does not have the form } \mathrm{Adj}(s_{c+1}, L''), \\ T^*_{r_i} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

5) We specify functor skeleton variables $\varphi^{(r_i)}_m, \cdots, \varphi^{(r_i)}_1$ $(m > n)$ and predicate skeleton variables $\pi^{(r_i)}_1$ that differ from one another and from $\bar{\lambda}$ and $\bar{\lambda}_{r_i}$. Let us construct generalized memory transformation scheme $\tilde{\lambda}_{r_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ as follows:

(i) If $\bar{L}_{r_i}$ has the form $\mathrm{Comp}(s_1, \cdots, s_m)$ then $\tilde{\lambda}'_{r_i} = (((v'_{r_i}, \varphi^{(r_i)}_1), (\varphi^{(r_i)}_1, \varphi^{(r_i)}_2), \cdots, (\varphi^{(r_i)}_{m-1}, \varphi^{(r_i)}_m), (\varphi^{(r_i)}_m, \omega'_{r_i})), \varphi^{(r_i)}_1 \leftrightarrow [L^{(1)}_1, \cdots, L^{(1)}_s], \cdots$

$\dots, \varphi_m^{(r_l)} \to [L_1^{(m)}, \cdots, L_s^{(m)}]), (x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n))$, where s is the maximum index of the object variables in S_1 and $x_1, \cdots, x_{2n}$; $L_{r_l}^{(m)}$ is obtained from S_1 by adjoining all those variables from $x_1, \cdots, x_s$ which s_1 does not contain, and every $L_i^{(j)}$ $((1 \leqslant i \leqslant s), (1 < j \leqslant m))$ is obtained from S_{j+1} by adjoining all those variables from $x_1, \cdots, x_s$ which S_{j+1} does not contain, such that x_i is in the j^{th} position in S_1, otherwise $L_i^{(j)}$ is I_s^i.

(ii) If $\bar{L}_{r_l}$ has she form $Br\ (S_1, S_2, S_3)$, then $\tilde{\lambda}'_{r_l} = (((v'_{r_l}, \pi_1^{(r_l)}), (\pi_1^{(r_l)}, \varphi_1^{(l)}, \varphi_2^{(r_l)}), (\varphi_1^{(r_l)}, \omega'_{r_l}), (\varphi_2^{(r_l)}, \omega'_{r_l})), (\pi_1^{(r_l)} \to S_1^{*}, \varphi_1^{(r_l)} \to [L_1^{(1)}, \cdots$ $\cdots, L_{2n}^{(1)}], \varphi_2^{(r_l)} \to [L_1^{(2)}, \cdots, L_{2n}^{(1)}]), (x_1, \cdots, x_n), (x, \cdots, x_n))$, where S_1^{*}, $L_{r_l}^{(1)}$ and $L_{r_l}^{(2)}$ are obtained respectively from S_1, S_2 and S_3 and adjoining all those object variables from $x_1, \cdots, x_{2n}$ which S_1, S_2 and S_3 does not contain and every other $L_k^{(j)}$ $((1 \leqslant j \leqslant 2), (1 \leqslant k \leqslant 2n))$ has the form I_{2n}^k.

(iii) If $\bar{L}_{r_l}$ has the form Rep $(c, S_1, \cdots, S_t)$ $(1 < t \leqslant n+1)$ then $\tilde{\lambda}'_{r_l} = (((v_{r_l}, \pi_1^{(r_l)}), (\pi_1^{(r_l)}, \omega'_{r_l}, \varphi_1^{(r_l)}), (\varphi_1^{(r_l)}, \pi_1^{(r_l)})), (\pi_1^{(r_l)} \to S_1^{*}, \varphi_1^{(r_l)} \to$ $\to [S_2^{*}, \cdots, S_{2n+1}^{*}]), (x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n))$, where every S_k^{*} $(t < k \leqslant$ $\leqslant 2n+1)$ is I_{2n}^{k-1} and every S_k^{*} $(1 \leqslant k \leqslant t)$ is obtained from S_k by adjoining all those object variables from $x_1, \cdots, x_{2n}$ which S_k does not contain.

It is easy to see that the generalized memory transformation schemes $\bar{\lambda}_{r_l}$ and $\tilde{\lambda}'_{r_l}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ are D-equivalent. By substituting every $\tilde{\lambda}_{r_l}$ $(1 \leqslant i < p)$ in $\bar{\lambda}$ for the subscheme $\bar{\lambda}_{r_l}$ we obtain the required generalized memory transformation scheme λ^* with depth $k_1 < k$ and dimension $q \geqslant m$.

For every subscheme λ in Ψ with depth k, we substitute its D-equivalent generalized memory transformation scheme λ^* in Ψ. We obtain a generalized memory transformation scheme Ψ_1, of depth k_1 $(k_1 < k)$ and dimension q D-equivalent to Ψ. By repeating the same constructions for Ψ_1, we construct a generalized transformation scheme Ψ_2 with depth k_2 $(k_2 < k_1)$. By continuing this process h times $(h \leqslant k)$ we get our required generalized memory transformation scheme with depth zero and dimension m $(m > n)$, which is D-equivalens to the original generalized memory transformation scheme Ψ. This completes the proof of the theorem.

American University of Beirut,
Yerevan State University

Received 15.V.1974

Տ. Ա. ԷԴԻՆՋԻԿՅԱՆ. Հիշողություն ունեցող գրաֆ-սխեմաների միջոցով սահմանված ալգորիթմների որոշ ֆորմալ պատկերացումների մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում են հիշողություն ունեցող գրաֆ-սխեմաների միջոցով որոշված ալգորիթմների պատկերացումները բազմատեղանի ֆակտորների ու պրեդիկատների կոմպոզիցիայի, ճյուղավորման և կրկնման գործողությունների վրա հիմնված որոշ հանրահաշվական լեզվի միջոցով։ Ապացուցվում է թեորեմա այն մասին, որ ամեն մի ալգորիթմի համար, որը ֆորմալ նկարագրված է հիշողություն ունեցող ինչ-որ մի (ոչ մեկնաբանված) գրաֆ-սխեմայի միջոցով, միշտ հնարավոր է կառուցել նրան պատկերացնող արտահայտությունը՝ նշված լեզվի մեջ։

Այս թեորեմայի ապացուցման համար սահմանվում է ընդհանրացված գրաֆ-սխեմայի գաղափարը և հիմնավորվում են այսպիսի գրաֆ-սխեմաների պատկերացման հնարավորությունները որոշ ստանդարտ ձևերում։

Т. А. ЭДИНДЖИКЛЯН. *О некоторых формальных представлениях алгорифмов, определяемых граф-схемами с памятью* (резюме)

Рассматриваются представления алгорифмов, определяемых граф-схемами с памятью, в алгебраическом языке, построенном на основе операций композиции, разветвления и повторения многоместных функторов и предикатов. Доказывается теорема о том, что для всякого алгорифма, формально описанного некоторой (неинтерпретированной) граф-схемой с памятью, возможно построить представляющее его выражение в указанном языке. Для доказательства этой теоремы вводится понятие обобщенной граф-схемы и устанавливается возможность представления таких граф-схем в определенных стандартных формах.

REFERENCES

1. *E. Ashcroft* and *Z. Manna*. The translation of „GOTO" Programs to „WHILE" Programs, Information Processing '71 North Holland publ. company 1972, 150—155.
2. *A. P. Ershov*. Operator algorithms I. Basic notions, Problemy Kibernet, № 3, 1960, 5—48 (Russian).
3. *A. P. Ershov*. Operator algorithms. II. (A description of the fundamental constructions of programming), Problemy Kibernet, № 8, 1962, 211—233 (Russian).
4. *A. P. Ershov*. Operator algorithms. III. (On Ianov's operator-schemes) Problemy Kibernet., № 20, 1968, 191—200 (Russian).
5. *Ju. I. Ianov*. On logical schemes of algorithms, Poblemy Kibernet, № 8, 1962. 235—241 (Russian).
6. *V. E. Itkin*. Logico-Termal equivalence of program schemes, Kibernet, № 1, 1972, 5—27 (Russian).
7. *L. A. Kaluznin*. On the algorithmisation of mathematical problems, Problemy Kibernet., № 2, 1959, 51—67 (Russian).
8. *A. A. Ljapunov*. Logical program-schemes, Problemy Kibernet., № 1, 1958, 46—74 (Russian).
9. *A. A. Ljapunov*. The algebraic treatment of programming Problemy Kibernet., № 8, 1962, 235—241 (Russian).
10. *D. C. Luckham*, *D. M. R. Park*, and *H. S. Paterson*. On formalized computer programs, Computer and System Sciences, June 1970.
11. *R. I. Podlovchenko*. On a system of concepts of programming, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 132, 1960, 1287—1290 (Russian).
12. *R. I. Podlovchenko*. Transformations of program schemes and their use in programming, Problemy Kibernet., № 7, 1962, 161—188 (Russian).

13. *R. I. Podlovchenko, G . N. Petrossian, V. E. Khatchatrian.* The interpretation of algorithmic schemes and different relations of equivalence between the schemes, Izvestia AN Arm SSR, series Mathematica, vol. VII, № 2, 1972, 140—151 (Russian).
14. *J. D. Rutledge.* On Ianov's program schemata, J. Assoc. Comp. Mach., 11, 1964, 1—9.
15. *I. D. Zaslavskii.* Graph schemes with memory, translation of Trudy Math. Inst. Steklov, 72, 1964, 99—192. (Amer. Math. Soc. Trans. (2), vol. 98, 1971).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

Р. Р. БЕДЖАНЯН

О БЫСТРОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Согласно бескоординатной концепции А. Н. Колмогорова мы будем рассматривать бесконечномерный случайный стационарный процесс как пару $\{H, U^t\}$, где H—сепарабельное подпространство некоторого гильбертова пространства с группой унитарных операторов U^t, ограничиваясь случаем дискретного времени $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ [3]. Пусть $H_a^b(H)$ означает замкнутую в гильбертовом пространстве оболочку элементов $U^t x$, $x \in H$, $a \leqslant t \leqslant b$. Процесс $\{H, U^t\}$ называется вполне регулярным, если его коэффициент регулярности

$$\rho(\tau, H) = \rho(\tau) = \sup_{\xi, \eta} |(\xi, \eta)| \underset{\tau \to \infty}{\to} 0, \tag{1}$$

где sup берется по всем $\xi \in H_{-\infty}^0(H)$, $\eta \in H_\tau^\infty(H)$, таким, что $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| = 1$. Мы допустим, что имеется так называемая спектральная плотность, т. е. измеримая положительная операторнозначная функция $f(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$, такая, что равенство

$$(U^t x_1, x_2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (f(\lambda) x_1, x_2)\, d\lambda$$

выполняется для всех x_1, x_2 из H и $t \in (-\infty, \infty)$. Обозначим через $L^2(H)$ гильбертово пространство всех измеримых вектор-функций $x(\lambda)$, определенных на отрезке $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами и $\int_{-\pi}^{\pi} \|x(\lambda)\|^2 d\lambda \leqslant \infty$, со скалярным произведением

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (x_1(\lambda), x_2(\lambda))\, d\lambda,$$

$f^{1/2} H$ — подпространство в $L^2(H)$, образованное функциями $x(\lambda) \in \in f^{1/2}(\lambda) x$, $x \in H$, а $f^{1/2}(\lambda)$ — положительный квадратный корень от $f(\lambda)$. Пара $\{f^{1/2} H, e^{i\lambda t}\}$, где $e^{i\lambda t}$ означает унитарный оператор умножения, образует стационарный процесс, изометричный процессу $\{H, U^t\}$. Обозначим далее $H^2(H)$ подпространство $L^2(H)$, порожденное элементами $\{e^{i\lambda t} x : x \in H, \ t = 0, 1, 2, \cdots\}$, и $K^2(H)$—подпространство $L^2(H)$, порожденное элементами $\{e^{i\lambda t} x : x \in H, \ t = 0, -1, -2, \cdots\}$. Легко получить следующий вид коэффициента регулярности:

$$\rho(\tau)=\rho(\tau,\ f)=\sup\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau}\ (f(\lambda)\,\varphi(\lambda),\ \psi(\lambda))\,d\lambda\right|, \tag{2}$$

где $\varphi(\lambda)\in H^2(\mathrm{H})$, $\psi(\lambda)\in K^2(\mathrm{H})$ и удовлетворяют условиям нормировки

$$\begin{gathered}<\varphi,\ \varphi>_f=\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda)\,\varphi(\lambda),\ \varphi(\lambda))\,d\lambda=1,\\ <\psi,\ \psi>_f=\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda)\,\psi(\lambda),\ \psi(\lambda))\,d\lambda=1,\end{gathered} \tag{3}$$

$\rho(\tau)$ не изменится, если sup взять по каким-либо плотным в $H^2(\mathrm{H})$ и $K^2(\mathrm{H})$ подмножествам, в частности, по всем полиномам

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} e^{i\lambda k}\,x_k \quad \text{и} \quad \psi(\lambda)=\sum_{k=0}^{m} e^{i\lambda k}\,z_k,\ x_k \text{ и } z_k\in \mathrm{H}.$$

В настоящей статье мы дадим описание некоторых вполне регулярных процессов, коэффициенты регулярности которых убывают с различной скоростью. К сожалению, существует разрыв между необходимыми и достаточными условиями. Исчерпывающие характеристики спектральных плотностей конечномерных случайных процессов, имеющих различную скорость убывания, получены И. А. Ибрагимовым [1], [2].

Прежде чем сформулировать первую теорему, заметим, что операторная функция $W(\lambda)$ называется аналитической в области D, если для произвольных x и z из H скалярная функция $(W(\lambda)\,x,\ z)$ является аналитической в D. Пусть $B(\mathrm{H})$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов в H. Операторными полиномами будем называть полиномы $P_{nm}(\lambda)=\sum_{k=-n}^{m} A_k\,e^{i\lambda k}$, где $A_k\in B(\mathrm{H})$.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathrm{H},\ U^t\}$ *— стационарный случайный процесс со спектральной плотностью* $f(\lambda)$. *Для того чтобы*

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\,[\rho(\tau)]^{1/\tau}\leqslant e^{-\delta},\ \delta>0, \tag{4}$$

необходимо, чтобы $f(\lambda)$ *допускала аналитическое продолжение в полосу значений* $-\delta<\operatorname{Im} z<\delta$ *комплексного переменного* $z=\lambda+i\mu$. *Если* $(f(\lambda)\,x,\ x)\geqslant m\,(x,\ x)$, $m>0$, *для произвольного* $x\in\mathrm{H}$, *то это условие является также достаточным.*

Необходимость. Из представления бесконечномерного процесса следует, что вместе с процессом $\{\mathrm{H},\ U^t\}$ вполне регулярен процесс $\{\mathrm{H}',\ V^t\}$, где H' — произвольное подпространство H, а V^t — ограничение оператора U^t на H', причем H' является инвариантным подпространством оператора U^t (см. [3]). Очевидно, что удовлетворяется неравенство $\rho(\tau, H') \leqslant \rho(\tau, H)$. Выбрав, в частности, за H' подпространство, образованное элементами x и $z \in H$, мы получим согласно конечномерным результатам И. А. Ибрагимова [2], что $(f(\lambda)x, z)$ аналитически продолжается в полосу $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$.

Достаточность. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть для каждого $\lambda \in [-\pi, \pi]$ $\varphi_\lambda(x, z)$ является билинейным непрерывным функционалом в гильбертовом пространстве* H. *Если для произвольных x и z, принадлежащих* H, $\sup_\lambda |\varphi_\lambda(x, z)|$ *ограничен, то норма функционала* $\|\varphi_\lambda\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|z\|=1}} |\varphi_\lambda(x, z)|$ *ограничена равномерно относительно λ.*

В самом деле, $\psi_\lambda(x) = |\varphi_\lambda(x, z)|$ при фиксированном $z = y$ является непрерывным положительно-определенным полуаддитивным функционалом, т. е. удовлетворяет условиям

$$\psi_\lambda(x + y) \leqslant \psi_\lambda(x) + \psi_\lambda(y),$$
$$\psi_\lambda(\alpha x) = \alpha\, \psi_\lambda(x), \quad \alpha \geqslant 0.$$

Согласно принципу равномерной ограниченности ([4], стр. 65) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\varphi_\lambda(x, y)| < \varepsilon$ лишь $\|x\| < \delta$. Следовательно, для каждого z $|\varphi_\lambda(x, z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$ для всех $\|x\| \leqslant \delta$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Повторно применив этот принцип, получим $|\varphi_\lambda(x, z)| \leqslant M$ для произвольных $\|x\| \leqslant 1$, $\|z\| \leqslant 1$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$.

Лемма 2. *Если спектральная функция $f(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ непрерывна в равномерной топологии пространства B* (H) *и удовлетворяет условию $(f(\lambda)x, x) \geqslant m(x, x)$, $m > 0$, то существующий стационарный процесс вполне регулярен, причем*

$$\rho(\tau) \leqslant \frac{1}{m} E_{\tau-1}(f), \tag{5}$$

где $E_{\tau-1}(f)$ — величина наилучшего приближения к $f(\lambda)$ операторными полиномами степени $\tau - 1$.

Действительно, если $P_{\tau-1}(\lambda)$ — полином степени не выше $\tau-1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} (P_{\tau-1}(\lambda)\, \varphi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda = 0.$$

Следовательно

$$\rho(\tau) = \sup_{\substack{<\varphi, \varphi>_f < 1\\ <\psi, \psi>_f < 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} (f(\lambda)\, \varphi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda \right| =$$

$$= \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} ([f(\lambda) - P_{\tau-1}(\lambda)]\, \varphi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant E_{\lambda-1}(f) \sup_{\substack{<\varphi,\ \varphi>_f<1 \\ <\psi,\ \psi>_f<1}} \left\{ \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(\lambda), \varphi(\lambda))\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\psi(\lambda), \psi(\lambda))\, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{6}$$

Но из ограниченности снизу операторов $f(\lambda)$ следует неравенство

$$\int (f(\lambda)\, \varphi(\lambda), \varphi(\lambda)),\, d\lambda \geqslant m \int (\varphi(\lambda), \varphi(\lambda))\, d\lambda.$$

Подставив его в (6), получим требуемое неравенство (5).

Теперь перейдем к прямому доказательству достаточности. Пусть $f(\lambda)$ аналитически продолжима в полосу $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$. Очевидно, что периодическая функция $(f(\lambda)\, x, z)$ ограничена в любой полосе $-\delta' < \operatorname{Im} z < \delta'$, $\delta' < \delta$. Следовательно, по лемме 1 $\|f(\lambda)\| \leqslant M$ для произвольного $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Пусть

$$f_k(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (f(\lambda)\, x, z)\, d\lambda$$

будет k-ым коэффициентом Фурье для функции $(f(\lambda)\, x, z)$. Очевидно, что $f_k(x, z)$ является ограниченным билинейным функционалом, поэтому представима в виде $f_k(x, z) = (F_k x, z)$, где $F_k \in B(H)$. По теореме Лебега ([5], стр. 279) конечная сумма ряда Фурье $S_\tau(x, z) = \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} f_k, (x, z)$ удовлетворяет неравенству

$$|(f(\lambda)\, x, z) - S_\tau(x, z)| < C E_\tau \{(f(\lambda)\, x, z)\} \ln \tau,$$

где C — абсолютная постоянная, не зависящая от функции. По теореме Бернштейна [6] $E_\tau \{(f(\lambda)\, x, z)\} \leqslant e^{-\delta(1-\varepsilon)\tau}$ для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ и достаточно больших τ. Следовательно, билинейный функционал

$$\ln^{-1} \tau \cdot e^{\delta(1-\varepsilon)\tau} \left(\left[f(\lambda) - \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} F_k \right] x, z \right) =$$

$$= \frac{(f(\lambda)\, x, z) - \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} f_k(x, z)}{\ln \tau \cdot e^{-\delta(1-\varepsilon)\tau}}$$

удовлетворяет условию леммы 1. Отсюда вытекает неравенство

$$E_\tau(f) \leqslant \left\| f(\lambda) - \sum_{k=-\tau}^{\tau} e^{i\lambda k} F_k \right\| \leqslant M e^{-\delta(1-\varepsilon)\tau} \ln \tau. \tag{7}$$

Из неравенств (5) и (7) ввиду произвольности ε следует неравенство (4). Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть* $\{H, U^t\}$ — *стационарный процесс со спектральной плотностью* $f(\lambda)$. *Для того чтобы*

$$\rho(\tau) = O(\tau^{-r-\beta}),\ 0 < \beta < 1$$

необходимо, чтобы спектральная плотность была r раза дифференцируема и r-ая производная удовлетворяла условию Гёльдера порядка β. Это и достаточно, если $f(\lambda)$ удовлетворяет еще условию $(f(\lambda)x, x) \geqslant m(x, x)$, $m > 0$.

Необходимость. Пусть x — произвольный элемент H, тогда функция $(f(\lambda)x, x)$ является спектральной плотностью одномерного процесса и согласно результатам И. А. Ибрагимова ограничена [2]. А так как $|f(\lambda)x, z)| \leqslant (f(\lambda)x, x)^{1/2}(f(\lambda)z, z)^{1/2}$, то из леммы 1 следует, что $\|f(\lambda)\| \leqslant M$ для произвольного λ. Обозначим через

$$\sigma_N(f(\lambda, x, z); [N\theta]; \lambda) = \frac{1}{[N\theta]+1}\sum_{\nu=0}^{[N\theta]} S_{N-\nu}(\lambda),\ 0 < \theta < 1,$$

усеченную сумму Фейера для функции $f(\lambda, x, z) = (f(\lambda)x, z)$, где $S_n(\lambda)$ уже введенная в предыдущей теореме конечная сумма ряда Фурье. Тогда имеет место неравенство ([1], стр. 256):

$$\max_\lambda |(f(\lambda)x, x) - \sigma_\tau(f(\lambda, x, x); [\tau\theta]; \lambda)| \leqslant \frac{33M}{\theta^8}\sum_{k=0}^{\infty} \rho(2^k[\tau(1-\theta)]).$$

Но так как по условию теоремы $\rho(\tau) = O(\tau^{-r-\beta})$, то имеет место неравенство

$$\max_\lambda |(f(\lambda)x, x) - \sigma_\tau(f(\lambda, x, x); [\tau\theta]; \lambda)| < \mathrm{const}\cdot\tau^{-r-\beta}.$$

Заметив, что σ_τ — билинейный ограниченный функционал, легко получить

$$E_\tau(f) \leqslant \left\| f(\lambda) - \frac{1}{[\tau\theta]+1}\sum_{\nu=0}^{[\tau\theta]}\sum_{k=0}^{\tau-\nu} e^{i\lambda k}F_k \right\| = O(\tau^{-r-\beta}). \tag{8}$$

Пусть теперь $P_{2^n}(\lambda)$ — операторные полиномы наилучшего приближения или введенные выше конечные суммы Фейера. Легко проверить, что операторные полиномы имеют производные любого порядка p и удовлетворяют неравенству Бернштейна

$$\|P_{2^k}^{(p)}(\lambda)\| \leqslant 2^k \|P_{2^k}^{(p-1)}(\lambda)\|. \tag{9}$$

Составим ряд

$$P_1^{(p)}(\lambda) + \sum_{k=0}^{\infty} P_{2^{k+1}}^{(p)}(\lambda) - P_{2^k}^{(p)}(\lambda)\ (p = 0, 1, \cdots, r)$$

и, применяя последовательно неравенства (9) и (8), оценим k-ый член этого ряда

$$\|P_{2^k}^{(p)}(\lambda) - P_{2^{k-1}}^{(p)}(\lambda)\| < \|P_{2^k}(\lambda) - P_{2^{k-1}}(\lambda)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot 2^{kp}\cdot E_{2^{k-1}}(f) \leqslant C\cdot 2^{-k(r+\beta-p)}, \tag{10}$$

где C — некоторая постоянная величина. Теперь ясно, что для любого $p \leqslant r$ выше приведенный ряд сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $S_p(\lambda)$, причем $S_0(\lambda)$ почти всюду равен $f(\lambda)$. С другой стороны из равномерной сходимости следует, что

$$\int S_p(\lambda)\, d\lambda = \int |P_1^{(p)}(\lambda)\, d\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} \int (P_{2^k+1}^{(p)}(\lambda) - P_{2^k}^{(p)}(\lambda))\, d\lambda = S_{p-1}(\lambda).$$

Независимая постоянная интегрирования выбирается равной 0 для $p = 2, 3, \cdots, r$. Следовательно $f(\lambda)$ почти везде совпадает с функцией $S_0(\lambda)$, имеющей r производных. Остается проверить, что $S_r(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка β, а это легко следует из цепи неравенств

$$\left\| S_r(\lambda) - S_r\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\right\| \leqslant \| S_r(\lambda) - P_{2^m}^{(r)}(\lambda) \| + \left\| P_{2^m}^{(r)}(\lambda) - P_{2^m}^{(r)}\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\right\| +$$
$$+ \left\| P_{2^m}^{(r)}\left(\lambda + \frac{1}{n}\right) - S_r\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\right\| \leqslant C_1 2^{-m\beta} + C_2 \frac{1}{n} + C_3 2^{-m\beta},$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые постоянные. Выбрав m так, чтобы $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, мы получим требуемое неравенство.

Достаточность. Пусть $g(\lambda)$ является непрерывной периодической операторной функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$. Возьмем ядро Джексона $F_m(u) = \left[\frac{\sin mu}{m \sin u}\right]^4$ и построим интеграл

$$J_m(\lambda, x, z) = h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(\lambda + 2u)\, x, z)\, F_m(u)\, du =$$

$$= h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(\nu)\, x, z)\, F_m\left(\frac{1}{2}(\nu - \lambda)\right) d\lambda, \tag{11}$$

где $h_m^{-1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_m(u)\, du$. Так как $\|g(\lambda)\|$ равномерно ограничена, то нетрудно заметить, что $J_m(\lambda, x, z)$ является ограниченным билинейным функционалом в H. А оператор $J_m(\lambda)$, соответствующий этому билинейному функционалу в представлении $J_m(\lambda, x, z) = (J_m(\lambda)\, x, z)$, является операторным полиномом степени $2m-2$, то есть имеет вид $J_m(\lambda) = \sum_{k=-2m+2}^{2m-2} A_k e^{i\lambda k}$. Допустим сначала, что $g(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\lambda} |g(\lambda + u) - g(\lambda)| \leqslant K|u|^{\alpha}, \; 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{12}$$

Тогда

$$|J_m(\lambda) - g(\lambda)| \leqslant \left| h_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g(\lambda + 2u) - g(\lambda)| \, F_m(2u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2h_m K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |u|^{\alpha} F_m(u)\, du = 4K h_m \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} F_m(u)\, du. \tag{13}$$

Используя неравенства $0 < \sin u < u$ и $\frac{1}{\sin u} < \frac{\pi}{2u}$, при $0 < u < \frac{\pi}{2}$ и обозначив значения интегралов через

$$c_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt, \; c_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3}\, dt, \; c_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, dt, \tag{14}$$

мы можем получить следующие оценки:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_m(u)\, du \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin mu}{mu} \right)^4 du = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}m} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt \geqslant \frac{c_1}{m}, \tag{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} F_m(u)\, du \leqslant \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin mu}{mu} \right)^4 u^{\alpha}\, du = \frac{1}{m^{1+\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}m} \frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}}\, dt <$$

$$< \frac{1}{m^{1+\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^{4-\alpha}} dt \leqslant \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{c_1 + c_2}{m^{1+\alpha}}. \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в (13), получим

$$|J_m(\lambda) - g(\lambda)| \leqslant \frac{\pi^4}{8} \frac{c_1 + c_2}{c_1} \frac{K}{m^{\alpha}} \leqslant C \frac{K}{m^{\alpha}}. \tag{17}$$

Теперь заметим, что если $g(\lambda)$ является непрерывной производной от некоторой периодической функции $G(\lambda)$, то свободный член A_0 в разложении $J_m(\lambda) = \sum_{k=-2m+2}^{2m-2} A_k e^{i\lambda k}$ равен нулю, так как

$$A_0 = \text{const} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda = \text{const} \cdot (G(\pi) - G(-\pi)) = 0 \; ([8]).$$

В этом случае неопределенный интеграл от $J_m(\lambda)$ опять является полиномом того же вида и той же степени, если произвольную постоянную интегрирования принять равной нулю.

Теперь $f^{(r)}(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем β, поэтому из соотношения (18) следует

$$\sup_{\lambda}\|f^{(r)}(\lambda)-J_m(\lambda, f^{(r)})\|\leqslant C\frac{K}{m^{\beta}}=K'. \tag{18}$$

Обозначим

$$r(\lambda)=f^{(r-1)}(\lambda)-\int J_m(\lambda, f^{(r)})\,d\lambda,$$

тогда $r(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\|r(\lambda+u)-r(\lambda)\|\leqslant\sup_{\lambda}\|r'(\lambda)\|\cdot|u|=K'\cdot|u|.$$

В силу (12) и (17) существует полином $J_m(\lambda, r)$ такой, что

$$\left\|f^{r-1}(\lambda)-\int J_m(\lambda, f^{(r)})\,d\lambda-J_m(\lambda, r)\right\|\leqslant C\frac{K'}{m}=\frac{C^2K}{m^{1+\beta}}. \tag{19}$$

Так как $\int J_m(\lambda, f^{(r)})\,d\lambda$ также является полиномом степени $2m-2$ со свободным членом, равным нулю, то, применив этот процесс r раз, мы получим соотношение

$$\|f(\lambda)-P_{2m-2}(\lambda)\|\leqslant\frac{C^{r+1}K}{m^{r+\beta}}, \tag{20}$$

то есть

$$E_{2m-2}(f)\leqslant\frac{C^{r+1}\cdot K}{m^{r+\beta}}. \tag{21}$$

Поскольку

$$E_{2m-1}(f)\leqslant E_{2m-2}(f)\leqslant\frac{C^{r+1}\cdot K}{m^{r+\beta}},$$

то очевидно, что для любого n имеет место соотношение

$$E_n(f)=O(n^{r+\beta}).$$

Теперь остается применить лемму 2, чтобы завершить доказательство теоремы 2.

Из теоремы 1 вытекает следующее следствие: для того чтобы $\rho(\tau)=O(e^{-\tau\delta})$ при произвольном $\delta>0$, необходимо, чтобы $f(\lambda)$ было целой операторной функцией комплексного переменного, а при условии $(f(\lambda)x, x)\geqslant m\cdot(x, x)$, $m>0$, это условие является и достаточным.

Следует заметить, что нахождение необходимого и достаточного условия в бесконечномерном случае, наверное, будет нелегким делом, ибо даже в конечномерном случае условие полной регулярности получается довольно сложным методом и непосредственному обобщению не поддается. А то, что условие аналитичности недостаточно для вполне непрерывности непосредственно видно из примера, указанного И. А. Ибрагимовым.

Пусть бесконечномерный стационарный случайный процесс $\xi(t) = \{\xi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ состоит из независимых процессов $\xi_n(t)$ со спектральными плотностями $f_n(\lambda) = c_n|1 - e^{-i\lambda}|^{2n}$, $c_n = e^{-n^2}$, и математическими ожиданиями $M\xi_n(t) = 0$. Тогда бесконечномерная матрица

$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & f_3(\lambda) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

является оператором в гильбертовом пространстве $L^2(l_2)$, а процесс $\xi(t)$ изометричен процессу $\{f^{1/2}l_2, e^{i\lambda t}\}$. Если $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $z = \{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ являются произвольными элементами гильбертова пространства l_2, то функция $(f(\lambda)x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k z_k |1 - e^{i\lambda}|^{2k}$ будет целой аналитической функцией в комплексной плоскости $\zeta = \lambda + i\mu$, так как

$$E_{n-1}(f) \leqslant \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k x_k z_k |1 - e^{i\lambda}|^{2k}\right| \leqslant \|x\|_2 \cdot \|z\|_2 \cdot e^{-n^2 + n\ln 4} = O(e^{-n^2}).$$

Следовательно $f(\lambda)$ является целой операторной функцией.

С другой стороны, докажем, что условие вполне регулярности не выполняется. С этой целью рассмотрим функции

$$\varphi_n(\lambda) = \{x_{nk}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}, \quad x_{nk}(\lambda) = \frac{\delta_{nk}}{\sqrt{c_n}(1 - e^{i\lambda})^n},$$

$$\psi_n(\lambda) = \{z_{nk}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}, \quad z_{nk}(\lambda) = \frac{\delta_{nk}}{\sqrt{c_n}(1 - e^{i\lambda})^n},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера. Очевидно, что $\varphi_n(\lambda) \in H^2(l_2)$, а $\psi(\lambda) \in K^2(l_2)$, причем их нормы не превосходят единицы

$$\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda)\varphi_n(\lambda), \varphi_n(\lambda))\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{c_n|1 - e^{i\lambda}|^{2n}} c_n |1 - e^{i\lambda}|^{2n}\, d\lambda = 1,$$

$$\langle \psi_n, \psi_n \rangle_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda)\psi_n(\lambda), \psi_n(\lambda))\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{c_n\,|1 - e^{i\lambda}|^{2n}}\, c_n |1 - e^{i\lambda}|^{2n}\, d\lambda = 1.$$

Тогда

$$\rho(n) \geqslant \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} (f(\lambda)\,\varphi_n(\lambda),\ \psi_n(\lambda))\, d\lambda \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n}\cdot \frac{1}{c_n\,(1 - e^{i\lambda})^{2n}} \cdot c_n\,(1 - e^{i\lambda}|^{2n}\, d\lambda \right| = 1,$$

что и требовалось доказать

Автор благодарен профессору И. А. Ибрагимову за предложенную тему и постоянную помощь в работе.

Институт математики
АН Армянской ССР
Поступила 18.XII.1973

Ռ. Ռ. ԲԵՋԱՆՅԱՆ. Դիսկրետ ժամանակով անվերջ չափանի պատահական ստացիոնար պրոցեսների արագ խառնման մասին *(ամփոփում)*

Սահմանվում են հատկանիշներ, որոնց բավարարման դեպքում անվերջ չափանի պատահական ստացիոնար պրոցեսի ռեգուլյարության գործակիցը $\rho(\tau)$ ձգտում է զրոյի երբ $\tau \to \infty$ $e^{-\delta\tau}$ կամ $\tau^{-r-\beta}$ արագությամբ։

R. R. BEDJANIAN. *On rapid mixing of infinite dimensional rundom stationary processes with discrete time* (summary)

The analitie criteria are given under which the coefficient of regularity of infinite demensional stationary stochastic process $\rho(\tau)$ tends to zero as $e^{-\delta\tau}$ or $\tau^{-r-\beta}$, when $\tau \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Ибрагимов* и *Ю. А. Розанов.* Гауссовские стационарные процессы, Изд. „Наука", М., 1970.
2. *И. А. Ибрагимов.* Вполне рагулярные многомерные процессы с дискретным временем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, CXI, Теоретические задачи математической статистики.
3. *Ю. А. Розанов.* О линейном интерполировании в стационарных процессах с дискретным временем, ДАН СССР, 116, № 6, 1957.
4. *Н. Данфорд* и *Д. Т. Шварц.* Линейные операторы, т. 1, 1966.
5. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
6. *А. Ф. Тиман.* Теория приближений функций действительного переменного, М., 1961.
7. *H. Helson.* Lecture on invariant subspace, 1964.
8. *P. Jackson.* The theory of approximation, 1930.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X. № 5, 1975 Математика

В. Г. ВЕРДИЕВ

О ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ПРИ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть $C_{2\pi}$ — множество всех непрерывных 2π-периодических функций $f(t)$ с равномерной метрикой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max |f(t)|$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; $E_n^*(f)$ — наилучшее приближение функции $f(t) \in C_{2\pi}$ посредством тригонометрических многочленов порядка $\leqslant n$; $T_n^*(t)$ — тригонометрический многочлен, для которого достигается наилучшее приближение $E_n^*(f)$; $M_n^*(f)$—множество точек $\{u\}$ из $[0,2\pi]$, для которых $|f(u) - T_n^*(u)| = E_n^*(f)$. Как известно, множество $M_n^*(f)$ содержит не менее $2n+2$ точек $\{u_i\}_{i=1}^{2n+2} \subset [0, 2\pi)$, в которых значения разности $f(t) - T_n^*(t)$ попеременно положительны и отрицательны. Точки $\{u_i\} \subset M_n^*(f)$ называются точками максимального отклонения от нуля разности $f(t) - T_n^*(t)$. Множество $M^*(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n^*(f)$ назовем множеством точек максимального отклонения функции $f(t) \in C_{2\pi}$.

В работе [1] М. И. Кадец доказал теорему, из которой следует, что множество точек максимального отклонения при наилучшем приближении непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции алгебраическими многочленами всюду плотно на отрезке $[-1, 1]$. Цель настоящей работы — доказать, что множество $M^*(f)$ любой функции $f(t) \in C_{2\pi}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$.

2°. **Теорема 1** [2]. *Пусть $T(t)$ и $Q(t)$ — два тригонометрических многочлена порядка n; $(0\leqslant)\ x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}\ (<2\pi)$ — нули многочлена $T(t)$, $(0 \leqslant)\ t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n}\ (<2\pi)$ — нули его производной $T'(t)$; $(0 \leqslant)\ y_1 < y_2 < \cdots < y_{2n}\ (<2\pi)$ — нули многочлена $Q(t)$; $(0\leqslant)\ q_1 < q_2 < \cdots < q_{2n}\ (<2\pi)$ — нули его производной $Q'(t)$. Если*

$$\left.\begin{aligned} T(t_i) = Q(q_i) \text{ при } i = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, 2n, \\ T(t_j) > Q(q_j) \text{ при } Q(q_j) > 0 \text{ и } T(t_j) < Q(q_j) \text{ при } Q(q_j) < 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и $t_1 = q_1$, *то*

$$t_2 < q_2;\ t_3 < q_3; \cdots;\ t_{j-1} < q_{j-1};\ q_{j+1} < t_{j+1};\ q_{j+2} < t_{j+2}; \cdots;\ q_{2n} < t_{2n}, \quad (2)$$

$$x_1 < y_1;\ x_2 < y_2; \cdots;\ x_{j-1} < y_{j-1};\ y_j < x_j;\ y_{j+1} < x_{j+1}; \cdots;\ y_{2n} < x_{2n}, \quad (3)$$

$$y_1 - x_1 < y_2 - x_2 < \cdots < y_{j-1} - x_{j-1} \text{ и } x_j - y_j > x_{j+1} - y_{j+1} > \cdots > x_{2n} - y_{2n}, \quad (4)$$

$$q_2 - t_2 < q_3 - t_3 < \cdots < q_{j-1} - t_{j-1} \text{ и } t_{j+1} - q_{j+1} > t_{j+2} - q_{j+2} > \cdots > t_{2n} - q_{2n}. \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим многочлены $T^2(t)$ и $Q^2(t)$. Для доказательства неравенств (2) и (3) укажем процесс перехода от многочлена $T^2(t)$ к многочлену $Q^2(t)$, то есть построим последовательность тригонометрических многочленов $\{T_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ так, что $T_0(t) = T^2(t)$ и $\lim T_m(t) = Q^2(t)$ при $m \to \infty$ равномерно относительно $t \in [0, 2\pi]$. Для этого рассмотрим многочлен $T^2(t)$ как интерполяционный с узлами интерполяции в точках $t_1, x_1, t_2, x_2, \cdots, t_{2n}, x_{2n}$ и значениями $T^2(t_1)$, $T^2(x_1)$, $T^2(t_2)$, $T^2(x_2), \cdots$, $T^2(t_{2n})$, $T^2(x_{2n})$. Так как $T^2(t_j) > Q^2(q_j)$, то в промежутке (x_{j-1}, x_j) найдутся две точки μ_1 и η_1, причем $\mu_1 < \eta_1$, такие, что $T^2(\mu_1) = Q^2(q_j) = T^2(\eta_1)$. Выберем точки $\xi^{(1)}_{2j-1,1} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \mu_1)$ и $\xi^{(1)}_{2j-1,2} = \frac{2}{3}(\eta_1 + \mu_1)$. По теореме 3 из [3] для каждой из этих точек $\xi^{(1)}_{2j-1,i}$ $(i = 1, 2)$ существует единственный тригонометрический многочлен $T_{1,i}(t)$ порядка $2n$ и единственная система из $4n - 2$ точек

$$\xi^{(1)}_{2,i}, \ \xi^{(1)}_{3,i}, \cdots, \xi^{(1)}_{2j-2,i}, \ \xi^{(1)}_{2j,i}, \cdots, \xi^{(1)}_{4n,i}$$

таких, что

$$t_1 = \xi^{(1)}_{1,i} < \xi^{(1)}_{2,i} < \cdots < \xi^{(1)}_{2j-2,i} < \xi^{(1)}_{2j-1,i} < \xi^{(1)}_{2j,i} < \cdots < \xi^{(1)}_{4n,i} < 2\pi,$$

$$T_{1,i}(\xi^{(1)}_{2k-1,i}) = T^2(t_k) = Q^2(q_k) \text{ при } k = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, 2n,$$

$$T_{1,i}(\xi^{(1)}_{2k,i}) = T^2(x_k) = Q^2(y_k) \text{ при } k = 1, 2, \cdots, 2n,$$

$$T_{1,i}(\xi^{(1)}_{2j-1,i}) = Q^2(q_j) \text{ и } T'_{1,i}(\xi^{(1)}_{k,i}) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \cdots, 2j-2, 2j, \cdots, 4n.$$

При этом хотя бы для одного из многочленов $T_{1,1}(t)$ и $T_{1,2}(t)$ имеем $T'_{1,i}(\xi^{(1)}_{2j-1,i}) \neq 0$ или при $i = 1$, или при $i = 2$. Действительно, если одновременно $T'_{1,1}(\xi^{(1)}_{2j-1,1}) = 0$ и $T'_{1,2}(\xi^{(1)}_{2j-1,2}) = 0$, то по теореме 3 из [3] $T_{1,1}(t) \equiv T_{1,2}(t) \equiv Q^2(t)$ и $\xi^{(1)}_{2k-1,1} = \xi^{(1)}_{2k-1,2} = q_k$ при $k = 1, 2, \cdots, 2n$, $\xi^{(1)}_{2k,1} = \xi^{(1)}_{2k,2} = y_k$ при $k = 1, 2, \cdots, 2n$. Однако равенство $\xi^{(1)}_{2j-1,1} = \xi^{(1)}_{2j-1,2}$ противоречит определению точек $\xi^{(1)}_{2j-1,1}$ и $\xi^{(1)}_{2j-1,2}$. Пусть при $i = i_0$ $(i_0 = 1, 2)$ для $\xi^{(1)}_{2j-1,i}$ имеем $T'_{1,i_0}(\xi^{(1)}_{2j-1,i_0}) \neq 0$. Положим $T_1(t) = T_{1,i_0}(t)$ и $\xi^{(1)}_k = \xi^{(1)}_{k,i_0}$ $(k = 1, 2, \cdots, 4n)$. При $T'_{1,1}(\xi^{(1)}_{2j-1,1}) \neq 0$ и $T'_{1,2}(\xi^{(1)}_{2j-1,2}) \neq 0$ положим $T_1(t) = T_{1,1}(t)$ и $\xi^{(1)}_k = \xi^{(1)}_{k,1}$ $(k = 1, 2, \cdots, 4n)$. Ясно, что $T_1(\xi^{(1)}_{2j-1}) = Q^2(q_j)$. Из $T^2(t_j) > Q^2(q_j)$ и $T'_1(\xi^{(1)}_{2j-1}) \neq 0$ следует $\max\limits_{[x_{j-1}, x_j]} T_1(t) > Q^2(q_j)$. Поэтому кроме $\xi^{(1)}_{2j-1}$ найдется еще одна точка η_2 в промежутке $(\xi^{(1)}_{2j-1}, \eta_1)$ такая, что $T_1(\eta_2) = T_1(\xi^{(1)}_{2j-1}) = Q^2(q_j)$. Выберем $\xi^{(2)}_{2j-1,1} = \frac{1}{3}(\xi^{(1)}_{2j-1} + \eta_2)$ и $\xi^{(2)}_{2j-1,2} = \frac{2}{3}(\xi^{(1)}_{2j-1} + \eta_2)$. Опять по теореме 3 из [3] для каждой точки $\xi^{(2)}_{2j-1,i}$ $(i = 1, 2)$ существует единственный тригонометрический многочлен

$T_{2,i}(t)$ $(i=1, 2)$ и единственная система из $4n-2$ точек $\xi^{(2)}_{2,i}, \xi^{(2)}_{3,i}, \cdots$ $\cdots, \xi^{(2)}_{2j-2}, \xi^{(2)}_{2j}, \cdots, \xi^{(2)}_{4n,i}$ таких, что

$$t_1=\xi^{(2)}_{1,i}<\xi^{(2)}_{2,i}<\cdots<\xi^{(2)}_{2j-2,i}<\xi^{(2)}_{2j-1,i}<\xi^{(2)}_{2j,i}<\cdots<\xi^{(2)}_{4n,i}<2\pi,$$

$$T_{2,i}(\xi^{(2)}_{2k-1,i})=T^2(t_k)=Q^2(q_k) \text{ при } k=1, 2,\cdots, j-1, \ j+1,\cdots, 2n,$$

$$T_{2,i}(\xi^{(2)}_{2k,i})=T^2(x_k)=Q^2(y_k) \text{ при } k=1, 2,\cdots, 2n,$$

$$T_{2,i}(\xi^{(2)}_{2j-1,i})=Q^2(q_j) \text{ и } T'_{2,i}(\xi^{(2)}_{k,i})=0 \text{ при } k=1, 2,\cdots, 2j-2, 2j,\cdots, 4n.$$

При этом хотя бы для одного из многочленов $T_{2,1}(t)$ и $T_{2,2}(t)$ имеем $T'_{2,1}(\xi^{(2)}_{2j-1,1})\neq 0$ или $T'_{2,2}(\xi^{(2)}_{2j-1,2})\neq 0$. Если при $i=i_0$ $(i_0=1, 2)$ для точки $\xi^{(2)}_{2j-1,i_0}$ $T'_{2,i_0}(\xi^{(2)}_{2j-1,i_0})\neq 0$, то положим $T_2(t)=T_{2,i_0}(t)$ и $\xi^{(2)}_k=\xi^{(2)}_{k,i_0}$ $(k=1, 2,\cdots, 4n)$. При $T'_{2,1}(\xi^{(2)}_{2j-1,1})\neq 0$ и $T'_{2,2}(\xi^{(2)}_{2j-1,2})\neq 0$ положим $T_2(t)=T_{2,1}(t)$ и $\xi^{(2)}_k=\xi^{(2)}_{k,1}$ $(k=1, 2,\cdots, 4n)$.

Теперь покажем, что

$$\xi^{(1)}_2<\xi^{(2)}_2, \ \xi^{(1)}_3<\xi^{(2)}_3, \ \cdots, \ \xi^{(1)}_{2j-2}<\xi^{(2)}_{2j-2}; \ \xi^{(2)}_{2j}<\xi^{(1)}_{2j}, \cdots, \ \xi^{(2)}_{4n}<\xi^{(1)}_{4n}. \qquad (6)$$

Рассмотрим многочлен $T_2(t)$ как непрерывный образ многочлена $T_1(t)$, соответствующий непрерывному перемещению точки $\xi^{(1)}_{2j-1}$ в точку $\xi^{(2)}_{2j-1}$.

Сместим точку $\xi^{(1)}_{2j-1}$ в точку $\tilde{\xi}_{2j-1}\in(\xi^{(1)}_{2j-1}, \eta_1)$ и будем считать, что $|\xi^{(1)}_{2j-1}-\tilde{\xi}_{2j-1}|$ настолько мала, насколько нам понадобится. Для точки $\tilde{\xi}_{2j-1}$, по теореме 3 из [3] существует единственный тригонометрический многочлен $\tilde{T}(t)$ порядка $2n$ и единственная система из $4n-2$ точек $\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3,\cdots, \tilde{\xi}_{2j-2}, \tilde{\xi}_{2j},\cdots, \tilde{\xi}_{4n}$ такие, что

$$t_1=\tilde{\xi}_1<\tilde{\xi}_2<\cdots<\tilde{\xi}_{2j-2}<\tilde{\xi}_{2j-1}<\tilde{\xi}_{2j}<\cdots<\tilde{\xi}_{4n}<2\pi,$$

$$\tilde{T}(\tilde{\xi}_k)=T_1(\xi^{(1)}_k) \text{ при } k=1, 2,\cdots, 4n \text{ и } \tilde{T}'(\tilde{\xi}_k)=0$$

$$\text{при } k=1, 2,\cdots, 2j-2, 2j,\cdots, 4n.$$

Если $|\xi^{(1)}_k-\tilde{\xi}_k|$ при $k=2, 3,\cdots, 2j-2, 2j,\cdots, 4n$ достаточно малы, то

$$\xi^{(1)}_2<\tilde{\xi}_2, \ \xi^{(1)}_3<\tilde{\xi}_3, \cdots, \xi^{(1)}_{2j-2}<\tilde{\xi}_{2j-2}; \ \tilde{\xi}_{2j}<\xi^{(1)}_{2j},\cdots, \tilde{\xi}_{4n}<\xi^{(1)}_{4n}. \qquad (7)$$

Действительно, если бы при некотором l для $1<l<2j-1$ $\tilde{\xi}_l\leqslant\xi^{(1)}_l$ или для $2j-1<l\leqslant 4n$ $\tilde{\xi}_l\geqslant\xi^{(1)}_l$, то тригонометрический многочлен $T_1(t)-\tilde{T}(t)$ имел бы в окрестности точки $\xi^{(1)}_l$ два нуля. В окрестности же каждого из $\xi^{(1)}_k$ $(k\neq l)$ он имеет хотя бы один нуль, и, следовательно, общее число его нулей в $[0, 2\pi)$ было бы $\geqslant 4n+2$, так что в $[0, 2\pi)$ тригонометрический многочлен $T_1(t)-\tilde{T}(t)\not\equiv 0$ порядка $2n$

имел бы $\geqslant 4n+2$ нулей. Этим доказаны неравенства (6), так как неравенства (7) не могут нарушаться при $\xi_{2j-1}^{(1)} \to \widetilde{\xi}_{2j-1}$.

Ясно, что если продолжим процесс по той же схеме, то получим последовательность тригонометрических многочленов $\{T_m(t)\}$ с соответствующими точками экстремума $\{\xi_k^{(m)}\}$ $(k=2, 3, \cdots, 2j-2, 2j, \cdots, 4n$ и $\xi_1^{(m)} = t_1 = q_1)$, которые при фиксированном k будут монотонными, ограниченными и

$$\xi_2^{(m-1)} < \xi_2^{(m)},\ \xi_3^{(m-1)} < \xi_3^{(m)}, \cdots, \xi_{2j-2}^{(m-1)} < \xi_{2j-2}^{(m)};\ \xi_{2j}^{(m)} < \xi_{2j}^{(m-1)}, \cdots, \xi_{4n}^{(m)} < \xi_{4n}^{(m-1)}, \tag{8}$$

следовательно, существуют пределы и $\lim \xi_{2k-1}^{(m)} = q_k$, $\lim \xi_{2k}^{(m)} = y_k$ при $m \to \infty$ $(k = 1, 2, \cdots, 2n)$, а последовательность многочленов $\{T_m(t)\}$ сходится к $Q^2(t)$ равномерно относительно $t \in [0, 2\pi]$. Из приведенных рассуждений и из того, что неравенства (8) не могут нарушаться при $\xi_{2j-1}^{(m)} \to q_j$ следует справедливость неравенств (2) и (3).

Для доказательства утверждения (4) допустим, что одно из неравенств (4) нарушается, то есть при некотором фиксированном i (для определенности пусть $i<j$) имеет место неравенство

$$y_i - x_i \leqslant y_{i-1} - x_{i-1}. \tag{9}$$

Рассмотрим многочлен $F(t) = T(t) - Q(t + (y_{i-1} - x_{i-1}))$. Полагая для определенности $T(t_1) = Q(q_1) > 0$ и принимая во внимание (1), в точках $t_1, t_2, \cdots, t_{2n} \in [0, 2\pi]$ экстремума многочлена $T(t)$ имеем $(-1)^{l-1} F(t_l) \geqslant 0$, а в точках $q_1, q_2, \cdots, q_{j-1}, q_{j+1}, \cdots, q_{2n} \in [0, 2\pi)$ экстремума многочлена $Q(t)$ имеем $(-1)^{l-1} F(q_l) \geqslant 0$ $(l = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, 2n)$. Отсюда следует, что в промежутке $[t_1, x_{i-1})$ многочлен $F(t)$ имеет $\geqslant i-1$ нулей, а в интервале $(x_i, 2\pi)$ имеет $\geqslant 2n-i$. Заметим, что x_i тоже является нулем $F(t)$. Из неравенства $F(t_i) F(q_i) < 0$, которое вытекает из (1) и (9), следует, что в промежутке $(x_{i-1}, x_i]$ лежит не менее одного нуля. Значит, тригонометрический многочлен $F(t)$ порядка n имеет $\geqslant 2n+1$ нулей в $[0, 2\pi)$, что невозможно, так как $F(t) \not\equiv 0$, благодаря (1). Поэтому допущение (9) неверно. Таким же рассуждением можно установить неравенства (5). Теорема 1 доказана.

3°. Теорема 2. *Если* $f(t) \in C_{2\pi}$ *и*

$$E_p^*(f) = E_{p+1}^*(f) = \cdots = E_{r-1}^*(f) > E_r^*(f), \tag{10}$$

то: а) *многочлен* $\widetilde{T}_r(t) = T_p^*(t) - T_r^*(t)$ *имеет* $2r$ *простых нулей* $z_1 < z_2 < \cdots < z_{2r}$ *в промежутке* $[0, 2\pi)$; б) *точки* $\{u_l\}_{l=1}^{2r}$ *максимального отклонения от нуля разности* $f(t) - T_p^*(t) = R_p(t, f)$ *перемежаются с нулями* $\{z_l\}_{l=1}^{2r}$ *многочлена* $\widetilde{T}_r(t)$, *то есть*

$$0 \leqslant u_1 < z_1 < u_2 < z_2 < \cdots < u_{2r} < z_{2r} < 2\pi \tag{11}$$

или

$$0 \leqslant z_1 < u_1 < z_2 < u_2 < \cdots < z_{2r} < u_{2r} < 2\pi;$$

в) *для точек* $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$ *имеют место соотношения*

$$u_i \in [z_i,\ z_{i+1}] \cap \{t: |T_r(t)| \geqslant h \|\widetilde{T}_r\|_{c_{2\pi}}\}$$

или

$$u_i \in [z_{i-1},\ z_i] \cap \{t: |T_r(t)| \geqslant h \|\widetilde{T}_r\|_{c_{2\pi}}\},$$

где p *и* r $(r > p)$ — *целые положительные числа;*

$$z_0 = 0,\ z_{2r+1} = 2\pi \text{ и } h = \frac{E_p^*(f) - E_r^*(f)}{E_p^*(f) + E_r^*(f)}.$$

Аналогичная теорема в случае приближения непериодической непрерывной функции алгебраическими многочленами доказана С. Пашковским [4].

Доказательство. Из (10) следует, что $T_p^*(t) \equiv T_{r-1}^*(t)$, поэтому разность $R_p(t, f)$ имеет столько точек максимального отклонения с последовательно противоположными знаками, сколько их имеет разность $f(t) - T_{r-1}^*(t)$, то есть $2r$. Из (10) следует также, что многочлен $\widetilde{T}_r(t)$

$$\widetilde{T}_r(t) = T_p^*(t) - T_r^*(t) = [T_p^*(t) - f(t)] - [T_r^*(t) - f(t)]$$

в точках $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$ максимального отклонения от нуля разности $R_p(t, f)$ имеет тот же знак, что и разности

$$T_p^*(u_i) - f(u_i) = (-1)^i \rho E_p^*(f) \quad (\rho = \pm 1;\ i = 1, 2, \cdots, 2r).$$

Отсюда и из непрерывности $\widetilde{T}_r(t)$ на $[0, 2\pi]$ следует, что в каждом из $2r-1$ интервалов $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \cdots, (u_{2r-1}, u_{2r})$ многочлен $\widetilde{T}_r(t)$ имеет по крайней мере один нуль. Поэтому $\widetilde{T}_r(t)$ в интервале $(u_1, u_{2r}) \subset (0, 2\pi)$ имеет не менее $2r-1$ нулей, не менее одного нуля в каждом из промежутков $(u_{2r} - 2\pi, u_1)$ и $(u_{2r}, u_1 + 2\pi)$, причем только один из них попадает в интервал $(0, 2\pi)$. Так как тригонометрический многочлен $\widetilde{T}_r(t)$ имеет порядок r, то его нули $\{z_i\}_{i=1}^{2r} \subset [0, 2\pi)$ являются простыми, кроме того они перемежаются с точками максимального отклонения $\{u_i\}_{i=1}^{2r}$, то есть справедливы неравенства (11). Утверждения а) и б) доказаны.

Далее из приведенных рассуждений можно заключить, что точки максимального отклонения u_i принадлежат интервалам (z_{i-1}, z_i) или (z_i, z_{i+1}). Из определения точек u_i следует

$$|f(u_i) - T_p^*(u_i)| = E_p^*(f) \text{ и } |f(u_i) - T_r^*(u_i)| \leqslant E_r^*(f).$$

Кроме того, имеем

$$|\widetilde{T}_r(u_i)| \geqslant |T_p^*(u_i)-f(u_i)|-|T_r^*(u_i)-f(u_i)| \geqslant E_p^*(f)-E_r^*(f)$$
$$(i=1, 2, \cdots, 2r).$$

Так как

$$\|\widetilde{T}_r\| = \|T_p^* - T_r^*\| < \|T_p^* - f\| + \|f - T_r^*\| \leqslant E_p^*(f) + E_r^*(f),$$

то

$$\frac{|\widetilde{T}_r(u_i)|}{\|\widetilde{T}_r\|_{c_{2\pi}}} \geqslant \frac{E_p^*(f)-E_r^*(f)}{E_p^*(f)+E_r^*(f)} = h.$$

Отсюда вытекает утверждение в). Теорема 2 доказана.

Введем в рассмотрение класс $W_n(h)$ всех тригонометрических многочленов порядка n, обладающих следующими свойствами: многочлен $T(t) \in W_n(h)$, если

1) в $[0, 2\pi)$ он имеет $2n$ простых нулей $z_1 < z_2 < \cdots < z_{2n}$;

2) $\min\limits_{0 \leqslant l \leqslant 2n} \|T\|_{[z_l, z_{l+1}]} > h\|T\|_{[0, 2\pi]}$, где $0 < h \leqslant 1$;

$$z_0 = 0, \quad z_{2n+1} = 2\pi.$$

Обозначим через $\tau(t, i)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n)$ многочлен из класса $W_n(h)$ такой, что $\tau(\tau_l^{(i)}, i) = \{(-1)^{2n-l}h$ при $l=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, 2n$; $(-1)^{2n-l}$ при $l=i\}$ и $\tau'(\tau_j^{(i)}, i) = 0$ при $j=1, 2, \cdots, 2n$, где $\tau_j^{(i)} \in [0, 2\pi)$ и $\tau_1^{(i)}=0$. Существование и единственность таких многочленов вытекает из результатов работы [3].

Лемма 1. *Для многочленов $\tau(t, i)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n)$ справедливы соотношения*

$$\tau(t, i) = (-1)^{n-i}\tau(t+\alpha_i, n), \tag{12}$$

где α_i — постоянная, зависящая от i.

Доказательство. Заметим, что многочлен $\tau(t, i)$ имеет в промежутках $[0, \tau_i^{(i)})$ и $(\tau_i^{(i)}, 2\pi)$ соответственно i и $2n-i$ экстремумов. Выберем число α_i так, чтобы многочлен $\tau(t+\alpha_i, n)$ имел в $[0, \tau_i^{(i)})$ и $(\tau_i^{(i)}, 2\pi)$ соответственно i и $2n-i$ экстремумов и так, чтобы $\tau(2\pi, i) = (-1)^{n-i}\tau(2\pi+\alpha_i, n)$. Тогда многочлены $\tau(t, i)$ и $(-1)^{n-i}$ $\tau(t+\alpha_i, n)$ при $i=1, 2, \cdots, 2n$ удовлетворяют условиям теоремы 3 из [3]. Поэтому они тождественны. Лемма доказана.

При $i=n$ многочлен $\tau(t, n)$ может быть записан в явном виде (см., например, [5] и [6]):

$$\tau(t, n) = h\cos 2n\arccos\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\omega_n}{2}} = \frac{h}{2}\left[\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\omega_n}{2}}+\right.\right.$$

$$+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\omega_n}{2}}\right)^2-1}\,\Bigg)^n+\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\omega_n}{2}}-\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\omega_n}{2}}\right)^2-1}\right)^n\Bigg], \tag{13}$$

где $\omega_n \in (0, \pi)$ выбрано так, чтобы $\tau(\pi, n)=1$, то есть из условия

$$\operatorname{tg}^{2n}\frac{\omega_n}{4}+\operatorname{ctg}^{2n}\frac{\omega_n}{4}=\frac{2}{h}. \tag{14}$$

Положим $d_n(T, h)=\max\limits_{0\le i<2n}|z_i-z_{i+1}|$ и $D_n(h)=\sup\limits_{T(t)\in W_n(h)} d_n(T, h)$,

где $z_1, z_2, \cdots, z_{2n}$ — нули многочлена $T(t)\in W_n(h)$ и $z_0=0$, $z_{2n+1}=2\pi$.

Теорема 3. *Для тригонометрических многочленов из класса $W_n(h)$ $D_n(h)$ достигается на многочленах $\{\tau(t, i)\}_{i=1}^{2n}$ и равна*

$$D_n(h)=2\left(\pi-\arccos\left(\cos^2\frac{\omega_n}{2}+\sin^2\frac{\omega_n}{2}\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right)\right). \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что верхняя грань $D_n(h)$ действительно достигается на некотором многочлене из класса $W_n(h)$, так как коэффициенты многочленов, принадлежащих $W_n(h)$ ограничены в совокупности, а корни этих многочленов — суть непрерывные функции их коэффициентов.

Покажем, что $D_n(h)$ не может достигаться на многочлене $T(t)\in W_n(h)$, для которого $\|T\|_{C_{2\pi}}<1$. Допустим от противного, что $D_n(h)=|z_i^T-z_{i+1}^T|$, где z_i^T и z_{i+1}^T — соседние нули многочлена $T(t)$. Пусть $(0\leqslant)\ t_1<t_2<\cdots<t_{2n}\ (<2\pi)$ — нули производной $T'(t)$ многочлена $T(t)$ и пусть, для определенности, $T(t_{i+1})>0$, где $z_i^T<t_{i+1}<z_{i+1}^T$. Рассмотрим многочлен $S(t)\in W_n(h)$ такой, что $S(s_j)=T(t_j)$ при $j=1, 2, \cdots, i, i+2, \cdots, 2n$; $S(s_{i+1})=1$, где s_j — нули производной $S'(t)$, лежащие в промежутке $[0, 2\pi)$, и $s_1=t_1$. Пусть z_i^S и $z_{i+1}^S\in[0, 2\pi)$ — соседние нули многочлена $S(t)$. Тогда из теоремы 1 имеем $z_i^S<z_i^T$ и $z_{i+1}^T<z_{i+1}^S$ или $D_n(h)=|z_i^T-z_{i+1}^T|<|z_i^S-z_{i+1}^S|$. Покажем, что $D_n(h)$ не может достигаться и на многочлене $Q(t)\not\equiv\tau(t, i)$ из $W_n(h)$. Допустим от противного, что $D_n(h)$ достигается на многочлене $Q(t)\not\equiv\tau(t, i)$, для нулей z_i^q и z_{i+1}^q, то есть $D_n(h)=|z_i^q-z_{i+1}^q|$. Раз $Q(t)\not\equiv\tau(t, i)$, то справедливо хотя бы одно из неравенств $Q(q_l)\gtrless\tau(\tau_l^i, i)$ $(l=1, 2, \cdots, 2n)$, где $q_l\in[0, 2\pi)$ и $\tau_l^{(i)}\in[0, 2\pi)$ — соответственно точки экстремумов многочлена $Q(t)$ и $\tau(t, i)$.

Для определенности пусть $Q(q_j)>\tau(\tau_j^{(i)}, i)>0$. Тогда из теоремы 1 в силу неравенств (3) имеем $z_i^\tau<z_i^q<z_{i+1}^q<z_{i+1}^\tau$ или $|z_i^q-z_{i+1}^q|<|z_i^q-z_{i+1}^\tau|$, где z_i^τ и z_{i+1}^τ — i и $(i+1)$ — нули многочлена $\tau(t, i)$ из $[0, 2\pi)$. Величина $D_n(h)$ определяется непосредственными вычислениями. Теорема 3 доказана.

4°. Пусть последовательность чисел $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($h_n \in (0, 1)$ при $n = 1, 2, \cdots$) такова, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{h_n} = 1. \tag{16}$$

Далее, пусть $\{W_n(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность классов тригонометрических многочленов, соответствующая последовательности чисел $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, и $\{T_n(t)\}_{n=1}^{\infty} = \tau$ — последовательность многочленов таких, что при любом $n=1, 2, \cdots$, $T_n(t) \in W_n(h_n)$. Множество нулей многочлена $T_n(t) \in W_n(h_n)$, расположенных в промежутке $[0, 2\pi)$, обозначим через Z_n и положим $Z_\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Назовем Z_τ множеством нулей последовательности многочленов $\tau = \{T_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 4. *Множество нулей Z_τ последовательности тригонометрических многочленов τ всюду плотно на отрезке* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. По определению $D_n(h_n)$ для нулей $(0 \leqslant)$ $z_1 < z_2 < \cdots < z_{2n}$ $(< 2\pi)$ многочлена $T_n(t) \in \tau$ имеем $|z_i - z_{i+1}| \leqslant D_n(h_n)$ $(i=0, 1, \cdots, 2n)$, где $z_0=0$, $z_{2n+1} = 2\pi$. Далее из (13) и (16) вытекает, что $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, \omega_n = \pi$. Отсюда и из равенства (15) следует, что $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, D_n(h_n) = 0$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} |z_i - z_{i+1}| = 0$ $(i=0, 1, \cdots, 2n)$. Теорема 4 доказана.

Лемма 2. *Для последовательности $\{E_n^*(f)\}_{n=0}^{\infty}$ наилучших приближений непрерывной 2π-периодической функции $f(t)$ тригонометрическими многочленами, верно следующее предельное равенство:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)}} = 1. \tag{17}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{2E_{n-1}^*(f)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f)}\right). \tag{18}$$

Воспользуемся следующей теоремой из анализа (см., например, [7]): если $\{u_n\}$ — положительная монотонно возрастающая последовательность, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ сходится при условии ограниченности этой последовательности и расходится—в противном случае. Из нее следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f)}\right)$ расходится. Отсюда и из (18) вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E_{n-1}^*(f) - E_n^*(f)}{E_{n-1}^*(f) + E_n^*(f)}} \geqslant 1. \tag{19}$$

С другой стороны, так как $\dfrac{E^*_{n-1}(f) - E^*_n(f)}{E^*_{n-1}(f) + E^*_n(f)} < 1$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E^*_{n-1}(f) - E^*_n(f)}{E^*_{n-1}(f) + E^*_n(f)}} \leqslant 1. \tag{20}$$

Из сопоставления неравенств (19) и (20) получим (17). Лемма доказана.

Теорема 5. *Если $f(t) \in C_{2\pi}$, то множество точек максимального отклонения $M^*(f)$ функции $f(t)$ всюду плотно на отрезке* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Заметим, что многочлен $\widetilde{T}_{n_{k+1}}(t) = T^*_{n_k}(t) - T^*_{n_{k+1}}(t)$ принадлежит классу $W_{n_{k+1}}(h_{n_{k+1}})$, где

$$h_{n_{k+1}} = \frac{E^*_{n_k}(f) - E^*_{n_{k+1}}(f)}{E^*_{n_k}(f) + E^*_{n_{k+1}}(f)}$$

при $k = 0, 1, \cdots$; $E^*_{n_0}(f) = E^*_0(f)$. Так как $f(t) \in C_{2\pi}$, то по лемме 2 $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n_{k+1}]{h_{n_{k+1}}} = 1$. Следовательно, по теореме 4 множество нулей Z_τ последовательности многочленов $\{\widetilde{T}_{n_{k+1}}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$. В силу п. б) теоремы 2 нули многочленов $\widetilde{T}_{n_{k+1}}(t)$ перемежаются с точками максимального отклонения от нуля разностей $f(t) - T^*_{n_k}(t)$ при любом $k=1, 2, \cdots$, и так как множество нулей Z последовательности $\{\widetilde{T}_{n_{k+1}}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$, то отсюда следует, что на отрезке $[0, 2\pi]$ всюду плотно множество точек максимального отклонения $M^*(f)$ функции $f(t) \in C_{2\pi}$. Теорема доказана.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую признательность В. С. Виденскому за внимание к этой работе.

Чечено-ингушский
государственный университет

Поступила 4.VI.1973

Վ. Գ. ՎԵՐԴԻԵՎ. Անընդհատ ֆունկցիաների լավագույն մոտարկման դեպքում կետերի մաքսիմալ շեղման խտության մասին *(ամփոփում)*

Տվյալ աշխատանքում դիտարկվում են անընդհատ 2π-պարբերական ֆունկցիայի եռանկյունաչափական բազմանդամներով լավագույն մոտարկման ժամանակ մաքսիմալ շեղման կետերի բաշխման հարցեր։

Մասնավորապես ապացուցված է, որ անընդհատ 2π-պարբերական $f(t)$ ֆունկցիայի մաքսիմալ շեղման կետերի $M^*(f)$ բազմությունը ամենուրեք խիտ է $[0, 2\pi]$ հատվածում։

V. G. VERDIEV. *On the density of points of maximal deviation under best approximation of the continuous functions* (summary)

In this work some questions connected with distribution of the points of maximal deviation under best Chebyshev approximation of a continuous periodic function by trigonometrical polynomials are examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Кадец*. О расположении точек максимального уклонения при аппроксимации непрерывных функций многочленами, УМН, XV, 1 (91), 1960.
2. *В. Г. Вердиев*. О расположении точек максимального отклонения при чебышевском приближении непрерывных функций, ДАН СССР, 186, № 4, 1969, 747—749.
3. *В. С. Виденский*. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи, Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Сборник научных трудов Ленингр. Механ. ин-та, № 50, 1966, 29—41.
4. *С. Ф. Пашковский*. О расположении (е)-точек полиномов наилучшего приближения, ДАН СССР, 117, № 4, 1957, 576—577.
5. *В. С. Виденский*. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем, чем период, ДАН СССР, 130, № 1, 1960.
6. *В. Л. Гончаров*. Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
7. *Г. М. Фихтенгольц*. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2., М., Изд. „Наука", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 5, 1975 Математика

Р. О. НАЗАРЯН

МИНИМАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРУПП ЛИ

Тройка (G, G', G''), где G-группа, G', G'' — ее подгруппы, называется разложением, если $G = G' G''$. Аналогично, если $\mathfrak{M}$—алгебра Ли, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ — ее подалгебры и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, то тройка является, разложением.

В работе [8] был до конца изучен случай, когда G некомпактна, G', G'', либо обе редуктивны в G, либо обе максимальны в G.

Основной целью настоящей работы является изучение минимальных разложений (G, G', G''), т. е. таких, что не существует разложений вида (G, G_0', G_0''), где $G_0' \subset G'$, $G_0'' \subset G''$ и $G_0' \neq G'$, $G_0'' \neq G''$. Знание всех максимальных и всех минимальных разложений группы G дает возможность найти все разложения этой группы.

Мы находим в явном виде все минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, обладающие тем свойством, что полупростые части групп G' и G'' некомпактны. Здесь же изучается случай, когда G'—нередуктивная подгруппа с компактной полупростой частью, но указать явный вид радикала группы G' нам не удалось. Мы находим также разложения без пересечения всех простых вещественных классических групп Ли, т. е. такие разложения $G = G' G''$, что $\dim G' \cap G'' = 0$. Такое разложение является минимальным. Отметим, что Ван Прааг [9], [10] изучал разложения псевдоортогональных и псевдосимплектических групп над произвольным полем в произведение двух подгрупп, пересекающихся только по единице, при сильном дополнительном предположении.

С каждой k-подалгеброй $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ (см. [6]) связано разложение $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + R$, которое как показано в [5], соответствует разложению группы $G = G'K$. В частности, если $\mathfrak{M}'$—минимальная k-подалгебра (т. е. k-подалгебра, не содержащая никаких меньших k-подалгебр), то $\mathfrak{M}' \cap R = 0$, т. е. $G = G'K$—разложение с нулевым пересечением. Эти разложения мы будем называть обобщенными разложениями Ивасава, так как одним из них является разложение $G = T \cdot K$, где K—максимальная компактная в G подгруппа, а T—максимальная треугольная в G подгруппа, обычно называемая разложением Ивасава.

В таблице 3 мы приводим список всех простых алгебр Ли над R, причем на схемах Сатаке указывается нумерация простых корней, которой мы будем пользоваться. В этой же таблице даны схемы

Дынкина характеристических представлений полупростых частей соответствующих максимальных компактных подалгебр.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность А. Л. Онищику, который руководил его работой.

§ 1. Минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$

В настоящем параграфе будет дано явное описание минимальных некомпактных разложений групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$. Сперва опишем максимальные k-подалгебры u_Γ в алгебрах $so(p, q)$, $su(p, q)$, $sp(p, q)$. Их можно описать как алгебры всех линейных преобразований пространства k^{p+q} ($k = R, C, K$—соответственно), оставляющих инвариантным изотропное подпространство [2]. Приведем это описание для тех алгебр u_Γ, которые встречаются в таблице 3 работы [8]. Пусть $\mathfrak{M}$ записана в матрицах над k так, как это сделано в § 3 работы [3], и пусть $e_1, \cdots, e_{p+q}$ —стандартный базис в k^{p+q}.

Если $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$ $(k = K)$ $(p = q)$, $\{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(K = C)$ $(p < q)$, $\{\alpha_p\}$ $(k = R)$ $(q \neq p + 2)$, $\{\alpha_p, \alpha_{p+1}\}$ $(q = p + 2)$, то u_Γ переводит в себя равномерное изотропное подпространство, натянутое на $e_1 - e_{p+1}, \cdots$ $\cdots, e_p - e_{2p}$.

Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} X+Y & S+Y & H \\ S-Y & X-Y & -H \\ H^* & H^* & Z \end{pmatrix},$$

где $X^* = -X$, $Y^* = -Y$, $Z^* = -Z$, $S^* = S$. При этом

$$s_\Gamma^1 = \{Y=0,\ H=0,\ Z=0,\ TrS=0,\ TrX=0 \text{ при } k=C\},$$

$$c_\Gamma^- = \{X=Y=0,\ S=cE\ (c \in R),\ H=0,\ Z=0\},$$

$$n_\Gamma = \{X=S=0,\ Z=0\}.$$

Если $S_\Gamma^1 = l_\Gamma + p_\Gamma$—разложение Картана, то

$$l_\Gamma = \{Y=0,\ H=0,\ Z=0,\ S=0,\ TrX=0, \text{ при } k=C\},$$

$$p_\Gamma = \{Y=0,\ H=0,\ Z=0,\ X=0,\ TrS=0\}.$$

Пусть $b \subset n_\Gamma$—подпространство, выделяемое условием $Y=0$. Тогда имеем $n_\Gamma = b + [b, b]$, где $[b, b]$ выделяется условием $H=0$. Пространства b и $[b, b]$ инвариантны относительно $ad_{\mathfrak{M}}\ s_\Gamma'$ и в них индуцируются представления алгебры s_Γ' со следующими схемами:

k	S'_Γ	b	$[b, b]$
K	$su^*(2p)$	$\overset{1}{\circ}$—o—···—o $(q-p)$-раз	$\overset{2}{\circ}$—o—···—o
C	$sl(p, C)$	$\overset{1}{\circ}$—o—···—o $(q-p)$-раз	$\overset{1}{\circ}$—o—···—o o—o—···—$\overset{1}{\circ}$
R	$sl(p, R)$	$\overset{1}{\circ}$—o—···—o $(q-p)$-раз	o—$\overset{1}{\circ}$—···—o

При этом всюду, кроме случая b при $k = C$ указана схема комплексификации представления.

Если $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1, \alpha_{2p+2q-1}\}$ $(k = C)$, $\{\alpha_1\}$ $(k = R)$, то u_Γ переводит в себя 1-мерное изотропное подпространство, натянутое на $e_1 - e_{p+1}$. Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} x+y & F & s+y & H \\ -F^* & A & -F^* & B \\ s-y & -F & x-y & -H \\ H^* & B^* & H^* & Z \end{pmatrix},$$

где $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$, $\bar{s} = s$, $A^* = -A$, $Z^* = -Z$. При этом

$s'_\Gamma = \{x = y = s = 0,\ F = 0,\ H = 0,\ TrA = 0,\ TrZ = 0$ при $k = C\}$,

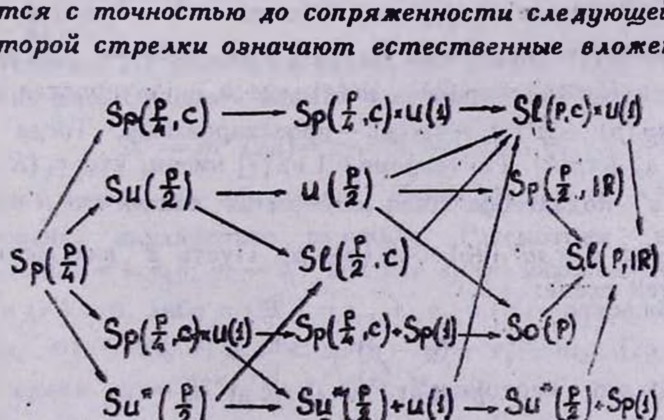
$c_\Gamma^- = \{x = y = 0,\ F = 0,\ H = 0,\ A = 0,\ B = 0,\ Z = 0\}$,

$n_\Gamma = \{x = s = 0,\ A = 0,\ B = 0,\ Z = 0\}$.

Пусть $b \subset n_\Gamma$ — подпространство, выделяемое условиями $x = y = 0$. Тогда $n_\Gamma = b \dotplus [b, b]$, где $[b, b]$ выделяется условиями $F = H = 0$. Пространства b и $[b, b]$ инвариантны относительно $ad_{\mathfrak{M}}\, s'_\Gamma$, причем в b индуцируется стандартное представление, а в $[b, b]$—нулевое представление. Имеем $\dim [b, b] = 1$ для $k = C$ и $[b, b] = 0$ для $k = R$.

Для дальнейшего полезно отметить следующий факт.

Лемма 1.1. *Все подалгебры* $sl(p, R)$, *содержащие* $su\left(\frac{p}{2}\right)$ *(если p—четно) и все ее подалгебры, содержащие* $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ *(если $4|p$) описываются с точностью до сопряженности следующей диаграммой, в которой стрелки означают естественные вложения*:



Доказательство. Пусть $h \subset sl(p, R)$ — подалгебра, содержащая $su\left(\frac{p}{2}\right)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$. Тогда h — алгебра Ли группы, транзитивной на S^{p-1}. Если h редуктивна в $\mathfrak{M}$, то из классификации редуктивных групп, транзитивных на сфере [6], легко видеть, что h содержится в нашей диаграмме. Нетрудно проверить также (например, с помощью явного описания максимальных k-подалгебр [8]), что всякая максимальная подалгебра в любой из алгебр диаграммы, содержащая $su\left(\frac{p}{2}\right)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$, редуктивна. Отсюда легко следует, что всякая подалгебра $h \subset sl(p, R)$, удовлетворяющая условиям леммы, редуктивна и, значит, содержится в диаграмме. Действительно, существует минимальная редуктивная подалгебра $\hat{h} \subset sl(p, R)$ такая, что $h \subset \hat{h}$. Алгебра $\hat{h}$ содержится в диаграмме.

Если $\tilde{h}$—ее максимальная подалгебра, содержащая h, то $\bar{h}$ редуктивна и поэтому $h = \bar{h}$.

Теорема 1.1. *Пусть $G = Sp(p, q)$ $(0 < p \leqslant q)$ и $G = G' \cdot G''$ — минимальное некомпактное разложение. Пусть $\mathfrak{M}' = s' + r'$ — разложение Леви, где s' полупроста. Если s' некомпактна, то $\mathfrak{M}' = su^*\times$ $\times(2p) + n_\Gamma$, где $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$, $\mathfrak{M}'' = sp(1, q)$. Обратно, такое разложение минимально. Если s' компактна, то s' — подалгебра в $sp(p) \times$ $\times sp(q-p)$, изоморфно проектирующаяся на $sp(p)$, $r' \subset sp(q-$ $-p) \dot{+} c_\Gamma \dot{+} n_\Gamma$ проектируется на c_Γ, а $\mathfrak{M}'' = sp(p-1, q)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1 из [3] имеем, что $\mathfrak{M}'' = a \times sp(k, q)$, где $a \subset sp(p-k)$, $0 \leqslant k < p$. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\bar{\mathfrak{M}}'$. Так как алгебра $sp(p, q)$ не допускает редуктивных разложений (см. теорему 4.1 из [8]), то $\bar{\mathfrak{M}}'$ является максималной k-подалгеброй и по теореме 6.1 из [8] $\bar{\mathfrak{M}}' = su^*(2p) \times sp(q-p) + c_\Gamma + n_\Gamma$, где $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$. Пусть R_0, R_0', R_0'' — максимальные полупростые компактные подалгебры в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ соответственно. Тогда $R_0 = R_0' + R_0''$. Имеем $R_0' \subset sp(p) \times$ $\times sp(q-p)$ и $R_0'' \subset a_0 \times sp(k) \times sp(q)$, где a_0—полупростая часть в a. Пусть π_1: $sp(p) \times sp(q) \to sp(p)$ — проектирование. Тогда $sp(p) =$ $= \pi_1(R_0') + a_0 + sp(k)$. По теореме 4.1 из [7] имеем, что $\pi_1(R_0') = sp(p)$.

Пусть s'—подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'$ такая, что $R' \subset s'$. Можно считать $s' \subset \bar{s}' = su^*(2p) \times sp(q-p)$. Пусть s' вкладывается в $\tilde{s}$, по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc} s_1 & & s_{12} & & s_2 \\ | & / & & \backslash & | \\ su^*(2p) & & & & sp(q-p) \end{array}$$

Так как $s_2' \subset \mathfrak{M}''$ и наше разложение минимально, то $s_2' = 0$. Проектируя s' на $su^*(2p)$, получим следующее включение $sp(p) \subset \pi_1(s') \subset \subset su^*(2p)$. Алгебра $sp(p)$ максимальна в $su^*(2p)$ как максимальная компактная подалгебра [1], поэтому $\pi_1(s') = sp(p)$ или $su^*(2p)$. Если s' компактна, то имеет место первый случай, а если некомпактна—то второй случай.

Рассмотрим случай, когда s' некомпактна. Имеем $s_1 \dotplus s_{12}' \approx su^*(2p)$. Но $su^*(2p)$ проста и некомпактна, а s_{12}' компактна. Значит $s_{12}' = 0$, $s_1' = su^*(2p)$. Следовательно, $s' = su^*(2p)$ и $\mathfrak{M}' = su^*(2p) \dotplus \dotplus r'$, где $r' \subset sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^- \dotplus n_\Gamma$. Рассмотрим прямое разложение $u_\Gamma = su^*(2p) \dotplus sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^- \dotplus b \dotplus [b, b]$ на подпространства, инвариантные относительно $ad_{\mathfrak{M}}\, su^*(2p)$.

Соответствие

$$H \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & -H \\ H^* & H^* & 0 \end{pmatrix}$$

отождествляет b с пространством $H^{p,\, q-p}(k)$, а представление алгебры $su^*(2p)$ в b отождествляется с суммой $q-p$ стандартных представлений. Из вида представления в $[b, b]$ следует, что $r' = r' \cap (sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^-) \dotplus (r' \cap b) + (r' \cap [b, b])$. Покажем, что $r' \cap b = b$. По лемме 1.2 из [3] имеем $u_\Gamma = (su^*(2p) \dotplus r') \dotplus (u_\Gamma \cap \mathfrak{M}'')$. Легко проверить, что $u_\Gamma \cap \mathfrak{M}'' = (su^*(2p) + c_\Gamma^- + [b, b]) \cap \mathfrak{M}'') + (b \cap \mathfrak{M}'') + sp(q-p)$, причем $b \cap \mathfrak{M}''$ отождествляется с подпространством матриц из $H^{p,\, q-p}(k)$, первые $p-k > 0$ строк которых равны 0. Имеем, $b = (b \cap \cap r') \dotplus (b \cap \mathfrak{M}'')$. Значит $b \cap r'$ содержит матрицы с произвольной первой строкой. Из леммы Шура легко следует, что для каждого неприводимого подпространства b первые строки входящих в него матриц образуют одномерное подпространство в k^{q-p}. Следовательно, инвариантное подпространство $b \cap r'$ должно разлагаться в сумму $q-p$ неприводимых подпространств, т. е. $b \cap r' = b$. Значит $r' = n_\Gamma \dotplus (r' \cap \cap (sp(q-p) \dotplus c_\Gamma^-)$.

Из теоремы 2.1 работы [3] видно, что $G = (SU^*(2p) \cdot N_\Gamma) \cdot Sp(1, q)$. Поэтому из минимальности нашего разложиния следует, что

$$\mathfrak{M}' = su^*(2p) = n_\Gamma, \quad \mathfrak{M}'' = sp(1, q).$$

Пусть теперь s' компактна. Пусть $\rho\colon u_\Gamma \to s_\Gamma'$— гомоморфизм проектирования параллельно радикалу. Рассмотрим гомоморфизм проектирования $\pi = \pi_1 \rho\colon u_\Gamma \to s_\Gamma'$. Так как $sp(p)$ максимальна в $su^*(2p)$, то либо $\pi(r') = 0$, либо $\pi(\mathfrak{M}') = s_\Gamma'$, т. е. $\pi(r')$—разрешимый идеал в s_Γ'. Итак, $\pi(r') = 0$, т. е. $r' \subset sp(q-p) + c_\Gamma^- + n_\Gamma$. По лемме 1.2 из [3] имеем $u_\Gamma = \mathfrak{M}' + (u_\Gamma \cap \mathfrak{M}'')$. Рассмотрим разложение $u_\Gamma = = l_\Gamma + p_\Gamma^- + c_\Gamma^- + n_\Gamma$ в прямую сумму подпространств. Пусть

$pr\colon u_\Gamma \to p_\Gamma + c_\Gamma^-$ соответственное проектирование. Мы должны иметь $p_\Gamma + c_\Gamma^- = pr\, \mathfrak{M}' + pr\, (\mathfrak{M}'' \cap u_\Gamma)$. Отождествим $p_\Gamma + c_\Gamma^-$ с пространством всех эрмитовых матриц над K порядка p. Легко проверить, что $pr\, (\mathfrak{M}'' \cap u_\Gamma)$ состоит из всех матриц $S = (s_{ij})$, где $s_{11} = s_{22} = \cdots$ $\cdots = s_{p-k\, p-k} = 0$. Далее из доказанного выше видно, что $pr\, \mathfrak{M}' \subset c_\Gamma^-$. Отсюда ясно, что $k = p-1$ и, что $pr\, \mathfrak{M}' = c_\Gamma^-$. Итак, $\mathfrak{M}'' = a \times sp\, (p-1,\ q)$, где $a \subset sp\, (1)$. Но ясно, что $a \subset \mathfrak{M}' + sp\, (p-1,\ q)$, так что $a = 0$.

Остается доказать, что разложение $G = G' \cdot Sp\, (1,\ q)$, где $G' =$ $= SU^*\, (2p) \cdot N_\Gamma$ минимально. Пусть $G = \hat{G}' \cdot \hat{G}''$ — содержащееся в нем минимальное разложение. Если $\hat{\mathfrak{M}}''$ компактна, то $\hat{\mathfrak{M}}'$ должна быть k-подалгеброй, что неверно. Значит, к минимальному разложению $\mathfrak{M} = \hat{\mathfrak{M}}' + \hat{\mathfrak{M}}''$ применима доказанная часть теоремы. Поскольку радикал алгебры $\hat{\mathfrak{M}}'$ содержится в $s_\Gamma + n_\Gamma$, имеем $\hat{\mathfrak{M}}' = \mathfrak{M}'$, $\hat{\mathfrak{M}}'' = \mathfrak{M}''$.

Теорема 1.2. *Пусть $G = SU\, (p,\ q)$ $(0 < p \leqslant q)$ и $G = G' \cdot G''$ — минимальное некомпактное разложение. Пусть $\mathfrak{M}' = s' + r'$ — разложение Леви, где s' полупроста. Если s' некомпактна, то разложение содержится в таблице 1. Обратно, все эти разложения минимальны. Если s' компактна, то s' — подалгебра в $su\, (p) \dotplus su\, (q-$ $-p)$, причем проектирование на первый сомножитель изоморфно отображает ее на $su\, (p)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$, $r' \subset su\, (q-p) + c_\Gamma^- \dotplus n_\Gamma$ проектируется на c_Γ^-, а $\mathfrak{M}'' = su\, (p-1,\ q)$.*

$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$su\, (p-1,\ q-1) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1,\ \alpha_{2p+2q-1}\}$ $su\, (p-1,\ q)$ $su\, (p,\ q-1)$	$sp\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$
$sl\, (p,\ C) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p,\ \alpha_q\}\ (p < q),\ \{\alpha_p\}\ (p = q))$	$su\, (1,\ q)$
$su\, (p-1,\ p)$	$sp\, (p,\ R)$
$su^*\, (p) + n_\Gamma\, (p,\ 2)$ $sp\left(\frac{p}{2},\ C\right) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p,\ \alpha_q\}\ (p < q),\ \{\alpha_p\}\ (p = q))$	$su\, (p-1,\ q)$

Таблица 1

Доказательство. Из теоремы 3.1 работы [3] имеем, что $\mathfrak{M}' = a \times su\, (k,\ q)$, где $0 < k < p$, $a \subset su\, (p-k) \times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $s(u(p-k)\times u(k+q))$ или $\mathfrak{M}''=a\times sp\left(k,\frac{q}{2}\right)$, где $k\leqslant\frac{p}{2}$, $a\subset su(p-2k)\times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $u(p-2k,\ 2k+q)$.

Разложение $R_0=R_0'+R_0''$ максимальных полупростых компактных подалгебр задается следующими схемами:

а) $$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
R'_{01} \arrow[d] & R'_{012} \arrow[dl] \arrow[dr] & R'_{02} \arrow[d] \\
su(p) \arrow[d] & & su(q) \arrow[d, equal] \\
a_0\times su(k) & & su(q)
\end{tikzcd}$$

б) $$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
R'_{01} \arrow[d] & R'_{012} \arrow[dl] \arrow[dr] & R'_{02} \arrow[d] \\
su(p) \arrow[d] & & su(q) \arrow[d] \\
a_0\times sp(k) & & sp\left(\frac{q}{2}\right)
\end{tikzcd}$$

Пусть $R'_{012}=0$. Проектируя наше разложение на $su(p)$, получим

а) $su(p)=R'_{01}+a_0\times su(k)$,

б) $su(p)=R'_{01}+a_0\times sp(k)$.

Из теоремы 4.1 работы [7] следует, что в случае б) либо $R'_{01}=su(p)$, либо $R'_{01}=sp\left(\frac{p}{2}\right)$ и $k=p-1$, а в случае б) либо $R'_{01}=su(p)$, либо $R'_{01}=su(p-1)$ и $k=\frac{p}{2}$.

В случае а) и в случае б) когда $R'_{01}=su(p)$ из лемм 3.2 и 3.4 работы [3] вытекает, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и следовательно, наше разложение совпадает с одним из тех, которые перечислены в таблице 2 работы [8]. Из этой таблицы видно, что $\mathfrak{M}'=su(p,\ q-1)$ или

$$su(p-1,\ q)\quad \text{и}\quad \mathfrak{M}''=sp\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right).$$

Пусть $k=\frac{p}{2}$, $R'_{01}=su(p-1)$. Можно считать, что $R'_{02}=su(q-1)$. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\widetilde{\mathfrak{M}}'$. Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то в силу теоремы 4.1 из [8] $\widetilde{\mathfrak{M}}'=su(p-1,\ q)$ или $su(p,\ q-1)$. Так как $su(q)\subset\mathfrak{M}'\subset su(p-1,\ q)$, $su(q-1)\subset\mathfrak{M}'\subset su(p,\ q-1)$, то из леммы 3.2 [3] следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. По теореме 4.1 из [8] этот случай невозможен. Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра, то из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что

$$\widetilde{\mathfrak{M}}'=su(p-1,\ q-1)\dotplus c_\Gamma\dotplus n_\Gamma,\ \text{где}\ \pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_1,\ \alpha_{2p+2q-1}\}.$$

Пусть s' — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'$ такая, что $R_0'\subset s'$.

Можно считать, что $s'\subset\widetilde{s}'=su(p-1,\ q-1)$. Имеем, что $su(p-1)\times su(q-1)\subset s'\subset su(p-1,\ q-1)$. Если s' некомпактна, то из классификации простых алгебр легко следует, что $s'=su(p-1,\ q-1)$.

Имеем $\mathfrak{M}' = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus r'$, где $r' \subset c_\Gamma \dotplus n_\Gamma$. Рассмотрим прямое разложение $u_\Gamma = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus c_\Gamma \dotplus b \dotplus [b,\ b]$ на подпространства, инвариантные относительно $ad_{\mathfrak{M}}\ su\,(p-1,\ q-1)$. Из данного выше описания представления алгебры s'_Γ в u_Γ видно, что $r' = (r' \cap b) \dotplus r' \cap \cap (c_\Gamma \dotplus [b,\ b])$. Так как b—неприводимое инвариантное подпространство, то $r' \cap b = b$, либо 0.

Рассмотрим разложение Картана $\mathfrak{M} = R \dotplus P$, $su\,(p-1,\ q-1) = R' \dotplus P'$, $\mathfrak{M}'' = R'' \dotplus P''$, где $R',\ R'' \subset R$, $P',\ P'' \subset P$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \dotplus \mathfrak{M}''$, то $P = P' \dotplus P'' \dotplus pr_{\mathfrak{M}}\,r'$. Отождествим P с $H^{p,\,q}\,(C)$ так, как это было сделано в § 3 из [3]. Тогда P' отождествляется с пространством $H^{p-1,\,q-1}\,(C)$ матриц, у которых первая строка и первый столбец—нулевые, а P''—с пространством матриц вида

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $pr_P\,(c_\Gamma \dotplus [b,\ b])$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} z & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix},\ \text{где } z \in C.$$

Отсюда видно, что $pr_P\,(c_\Gamma \dotplus [b,\ b]) \subset P' \dotplus P''$. Если $r' \cap b = 0$, то $P = P' \dotplus P''$, откуда $\mathfrak{M} = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus \mathfrak{M}''$. Но это невозможно (см. теорему 4.1 из [8]). Значит $r' \cap b = b$ и, следовательно, $r' = n_\Gamma + (r' \cap c_\Gamma)$, $\mathfrak{M}' = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus n_\Gamma + (r' \cap c_\Gamma)$. Очевидно, что $\mathfrak{M}'' = sp\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$, в силу минимальности разложения $\mathfrak{M}' = su\,(p-1,\ q-1) \dotplus n_\Gamma$. Разложения с указанными $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ существуют, в силу теоремы 2.1 работы [3].

Покажем, что случай, когда s' компактна, невозможен. Пусть ρ: $\tilde{\mathfrak{M}}' \to su\,(p-1,\ q-1)$—проектирование параллельно радикалу. По лемме 1.2 из [3] имеем $\tilde{\mathfrak{M}}' = \mathfrak{M}' + (\tilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{M}'')$, откуда

$$su\,(p-1,\ q-1) = s\,(u\,(p-1) \times u\,(q-1)) \dotplus \rho\,(\tilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{M}').$$

Очевидно, полупростая часть в $\rho\,(\tilde{\mathfrak{M}}' \cap \mathfrak{M}'')$ есть $sp\left(\frac{p}{2}-1,\ \frac{q}{2}-1\right)$ и не может быть полупростой частью k-подалгебры в $su\,(p-1,\ q-1)$, [8]. Пусть $R_{\mathfrak{M}2} \neq 0$. Рассмотрим максимальную собственную подалгебру $\tilde{\mathfrak{M}}' \supset \mathfrak{M}'$. Если $\tilde{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то из таблицы 2 работы [8] видно, что $p=q$ и $\widetilde{\mathfrak{M}}'=sp(p, R)$. Отсюда видно, что $R'_{01}=R'_{02}=0$, $R'_{012}\subset su(p)$. Из результатов работы [8] следует, что $R'_{012}=su(p)$ или $sp\left(\frac{p}{2}\right)$. Из леммы 1.1 следует, что $\mathfrak{M}'=sp(p, R)$.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра. Из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что $\widetilde{\mathfrak{M}}=sl(p, C)\times su(q-p)\dot{+}c_{\Gamma}\dot{+}n_{\Gamma}$, где $\pi_1\diagdown\Gamma=\{a_p\}$ $(p=q)$. Пусть s' — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'\subset\widetilde{\mathfrak{M}}'$ такая, что $\dot{R}_0\cap s'$. Рассуждая аналогично как в теореме 1.1, получаем следующие включения:

1) $su(p)\subset\pi_1(s')\subset sl(p, C)$ или $sp\left(\frac{p}{2}\right)\subset\pi_1(s')\subset sl(p, C)$ и

$k=p-1$, причем π_1: $s'\to\pi_1(s')$ — изоморфизм. Пусть ρ: $\widetilde{\mathfrak{M}}'\to sl(p, C)\times su(q-p)$ — проектирование параллельно радикалу, и пусть $\pi=\pi_1\cdot\rho$: $\widetilde{\mathfrak{M}}'\to sl(p, C)$. Применяя лемму 4.1 к подалгебре $\pi(\mathfrak{M}')\subset\subset sl(p, C)$ получаем, что $\pi(r')=0$, т. е. $r'\subset su(q-p)\dot{+}c_{\Gamma}\dot{+}n_{\Gamma}$.

Предположим, что s' некомпактна. Так как $su(p)$ максимальна в $sl(p, C)$, то в случае 1) $s'=sl(p, C)$. Рассуждая так же в теореме 1.1, получаем, что $\mathfrak{M}'=sl(p, C)\dot{+}n_{\Gamma}$, $\mathfrak{M}'=su(1, q)$. В случае 2) из леммы 1.1 видно, что $\pi(s')=su^*(p)$ или $sp\left(\frac{p}{2}, C\right)$, откуда так же как в теореме 1.1, получаем $s'=su^*(p)$ или $sp\left(\frac{p}{2}, C\right)$.

Пусть $s'=su^*(p)$. Разложим пространства u_{Γ} на неприводимые компоненты относительно ads'. Схемы комплексификации представлений имеют вид:

$$b\colon \overset{1}{\circ}-\circ-\cdots-\circ \quad (q-p)\text{— раз}$$

$$[b, b]\colon \overset{1}{\circ}-\circ-\cdots-\overset{1}{\circ}+N,$$

$c_{\Gamma}\dot{+}su(q-p)$ — нулевое представление.

Следовательно, $r'=(r'\cap b)\dot{+}(r'\cap(su(q-p)\dot{+}[b, b]+c_{\Gamma}))$. Так же, как и в теореме 4.1 доказываем, что $r'\cap b=b$. Значит, $n_{\Gamma}\subset r'$ и $r'=n_{\Gamma}\dot{+}r'\cap(su(q-p)+c_{\Gamma})$. Покажем, что $G=(SU^*(p)\cdot N_{\Gamma})\cdot SU(p-1, q)$. Легко проверить, что $\pi(su(p-1, q)\cap(sl(p, C+n_{\Gamma}))=sl(p-1, C)\dot{+}n_{\Delta}$, где $n_{\Delta}\subset sl(p, C)$ соответствует системе $\Delta=\pi_1\diagdown\{a_1, a_1\}$. Согласно теореме 6.1 из [8] $SL(p, C)=SU^*(p)\cdot U_{\Delta}$. По теореме 2.1 из [3] отсюда следует, что $SL(p, C)=SU^*(p)\cdot(SL(p-1, C)\cdot N_{\Delta})$. Но $SL(p-1, C)\, N_{\Delta}\subset N_{\Gamma}\, SU(p-1, q)$, откуда следует наше утверждение. Отсюда, как в теореме 1.1, получаем, что $r'=n_{\Gamma}$, $\mathfrak{M}'=su^*\times\times(p)+n_{\Gamma}$, а $\mathfrak{M}''=su(p-1, q)$.

Случай $s'=sp\left(\frac{p}{2}, C\right)$ рассматривается аналогично.

Случай, когда s' компактна, рассматривается так же, как в теореме 1.1. Аналогично проверяется и минимальность разложений.

Теорема 1.3. *Пусть* $G = SO(p, q)$ $(0 < p \leqslant q)$ *и* $G = G' \cdot G''$ — *минимальное некомпактное разложение. Пусть* $\mathfrak{M}' = s' + r'$ — *разложение Леви, где* s' *полупроста. Если* s' *некомпактна, то разложение содержится в таблице 2. Обратно, все эти разложения минимальны. Если* s' *компактна, то* s' — *подалгебра* в $so(p) \times \times so(q-p)$, *причем проектирование на первый сомножитель изоморфно отображает ее на* $so(p)$, $su\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ *или* $sp\left(\frac{p}{4}\right) \times \times sp(1)$, $r' \subset so(q-p) \dotplus c_\Gamma \dotplus n_\Gamma$ *при* $s' \cong so(p)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right) \times sp\ (1)$,

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$so(2p, 2q)$	$so(2p-1, 2q-1) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$, $so(2p-1, 2q)$ $so(2p, 2q-1)$	$su(p, q)$
$so(4p, 4q)$	$so(4p-1, 4q-1) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$ $so(4p-1, 4q)$ $so(4p, 4q-1)$	$sp(p, q)$
$so(p, p)$	$so(p-1, p)$	$sl(p, R)$
$so(2p, 2p)$	$so(2p-1, 2p)$	$sp(p, R)$
$so(p, q)$	$sl(p, R) + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p\}\ (q \neq p+2), \{\alpha_p, \alpha_{p+1}\}\ (q = p+2)$	$so(1, q)$
$so(p, q)$	$sl\left(\frac{p}{2}, C\right) + n_\Gamma\ (p > 2)$ $sp\left(\frac{p}{2}, R\right) + n_\Gamma$ $su^*\left(\frac{p}{2}\right) + n_\Gamma\ \ (p > 4)$ $sp\left(\frac{p}{4}, C\right) + n_\Gamma$	$so(p-1, q)$
$so(3, 4)$	$so(1, 4)$; $so(2, 3)$	G_2
$so(8, 8)$	$spin(1, 8)$; $spin(4, 5)$	$so(7, 8)$
$so(4, 4)$	$so(1, 4)$; $so(2, 3)$	$spin(3, 4)$

Таблица 2

проектируется на $\bar{c}_r$, а $\mathfrak{M}'' = so(p-1, q)$ и $r' \subset u(1) \times so(q-p) \dot{+} \bar{c}_r \dot{+} n_r$ *при* $s' \cong su\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ *причем* r' *проектируется на* $\bar{c}_r$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 [3] имеем

a) $\mathfrak{M}'' = a \times so(k, q)$, где $0 < k < p$, $a \subset so(p-k)$,

в) $\mathfrak{M}'' = a \times su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $0 < k \leqslant \frac{p}{2}$ и q — четно,

$a \subset so(p-2k) \times \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $u\left(k, \frac{q}{2}\right)$,

c) $\mathfrak{M}'' = a \times sp\left(k, \frac{q}{4}\right)$, где $4|q$, $0 < k \leqslant \frac{p}{4}$, $a \subset so(p-4k) \times$
$\times sp(1)$, $sp(1) \subset so(4k, q)$,

d) $\mathfrak{M}'' = G_2$ при $p = 3$, $q = 4$,

e) $\mathfrak{M}'' = spin(3, 4)$ при $p = q = 4$.

Разложение $R_0 = R'_0 + \dot{R}_0$ задается следующими схемами:

a)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, equal] \\
a_0 \times so(k) & & so(q)
\end{tikzcd}$$

(b)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, dash] \\
a_0 \times su(k) & & su\left(\frac{q}{2}\right)
\end{tikzcd}$$

(c)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, dash] \\
a_0 \times sp(k) & & sp\left(\frac{q}{4}\right)
\end{tikzcd}$$

d)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(3) \arrow[dr, equal] & & so(4) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
& sp(1) & sp(1)
\end{tikzcd}$$

(e)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
R'_{01} \arrow[d, dash] & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \arrow[d, dash] \\
so(4) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & so(4) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
sp(1) & sp(1) & sp(1),
\end{tikzcd}$$

где a_0 — полупростая часть в a.

Рассмотрим случаи a), b), c). Пусть $R'_{012} = 0$. Проектируя наше разложение на $so(p)$, получим

a) $so(p) = R'_{01} + a_0 \times so(k)$,

b) $so(p) = R'_{01} + a_0 \times su(k)$,

c) $so(p) = R'_{01} + a_0 \times sp(k)$.

Из теоремы 4.1 работы [7] имеем, что в случае a) возможны следующие варианты: $R'_{01} = so(p)$, $R'_{01} = su\left(\frac{p}{2}\right)$ при $k - p = 1$, $R'_{01} =$

$= sp\left(\frac{p}{4}\right)$ при $k = p-1$, $R'_{01} = G_2$, при $p = 7$, $k = 5$, 6, $R'_{01} = \mathrm{spin}\,(7)$, при $p = 8$, $k=5$, 6, 7; $R'_{01} = \mathrm{spin}\,(9)$, при $p = 16$, $k = 15$. Из результатов § 3 [3] следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и, следовательно, наше разложение содержится в одном из тех, которые перечислены в таблице 2 работы [8]. Отсюда видно, что разложение совпадает с одним из первых двух разложений таблиц 2.

В случаях б) и с), если $R'_{01} = so\,(p)$, из леммы 3.2 [3] также следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. Из таблицы 2 работы [8] видно, что получаются те же разложения, что в случае а). Рассмотрим случаи б) и с) при $R'_{01} \neq so\,(p)$. Тогда $R'_{01} = so\,(p-1)$, $k = \frac{p}{2}, \frac{p}{4}$ — соответственно. Очевидно, можно также считать, что $R'_{02} = so\,(q-1)$. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\bar{\mathfrak{M}}'$. Если $\bar{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то из теоремы 4.1 работы [8] имеем $\bar{\mathfrak{M}}' = so\,(p, q-1)$ или $so\,(p-1, q)$. Из включений $so\,(p-1) \subset \mathfrak{M}' \subset so\,(p-1, q)$; $so\,(q-1) \subset \mathfrak{M}' \subset so\,(p, q-1)$ и из леммы 3.2 работы [3] следует, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и, следовательно, по теореме 4.1 из [8] этот случай невозможен.

Если $\bar{\mathfrak{M}}'$—k-подалгебра, то из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что $\bar{\mathfrak{M}}' = so\,(p-1, q-1) \dotplus c_{\Gamma} + n_{\Gamma}$, где $\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\}$. Аналогично доказательству теоремы 4.2 получаем, что $\mathfrak{M}' = r' \dotplus so\,(p-1, q-1)$, где $r' = (r' \cap b) \dotplus (r' \cap c_{\Gamma})$, причем $r' \cap b = b = n_{\Gamma}$, либо 0. Если $r' \cap b = 0$, то алгебра $\mathfrak{M}'$ редуктивна, что противоречит теореме 4.1 из [8]. Значит $\mathfrak{M}' = so\,(p-1, q-1) \dotplus n_{\Gamma} \dotplus (r' \cap c_{\Gamma})$. Из минимальности разложения следует, что $\mathfrak{M}' = so\,(p-1, q-1) \dotplus n_{\Gamma}$, $\mathfrak{M}'' = su\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ или $\left(\frac{p}{4}, \frac{q}{4}\right)$.

Пусть $R'_{012} \neq 0$. Рассмотрим максимальную собственную подалгебру $\bar{\mathfrak{M}}' \supset \mathfrak{M}'$. Если $\bar{\mathfrak{M}}$ редуктивна, то из таблицы 2 работы [8] видно, что $p = q$ и возможны случаи: $\bar{\mathfrak{M}}' = sl\,(p, R)$, spin (1,8), spin (4,5) при $p = q = 8$, spin (3,4) при $p = q = 4$. В случае, когда $\bar{\mathfrak{M}}' = sl\,(p, R)$, из результатов работы [7] следует, что $R'_{012} = so\,(p)$, $su\left(\frac{p}{2}\right)$ или $sp\left(\frac{p}{4}\right)$. Из леммы 1.1 видно, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. Используя теорему 4.1 из [8], получаем, что $\mathfrak{M}' = sl\,(p, R)$ или $sp\left(\frac{p}{2}, R\right)$.

В случае, когда $\bar{\mathfrak{M}}' = \mathrm{spin}\,(1,8)$ или spin (4,5) при $p = q = 8$, для $R_0 = R'_0 + R''_0$ имеем

$$
\begin{array}{ccc}
 & so\,(8) & \\
 \diagup\!\!\diagup & & \diagdown \\
so\,(8) & & so\,(8) \\
| & & | \\
\dot R_{01} & & \dot R_{02}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
sp\,(1) & & sp\,(2) & & sp\,(1) \\
| & \diagup & & \diagdown & | \\
so\,(8) & & & & so\,(8) \\
| & & & & | \\
\dot R_{01} & & & & \dot R_{02}
\end{array}
$$

Отсюда и из результатов работы [7] нетрудно понять, что $R'_{012}=so\,(8)$, $su\,(4)$ или $sp\,(2)$ в первом случае и $sp\,(2)\cong so\,(5)$ во втором случае. В силу леммы 3.2 из [3] имеем, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна, и, следовательно, по теореме 4.1 из [8] $\mathfrak{M}'=\mathrm{spin}\,(1,8)$, $\mathfrak{M}'=\mathrm{spin}\,(4,5)$, а $\mathfrak{M}''=so\,(7,8)$.

Пусть $p=q=4$ и $\tilde{\mathfrak{M}}'=\mathrm{spin}\,(3,4)$. Схема разложения $R_0=\tilde{\dot R}_0\dot+\dot R_0$ имеет вид

$$
\begin{array}{ccccc}
sp\,(1) & & sp\,(1) & & sp\,(1) \\
| & \diagup & & \diagdown & | \\
so\,(4) & & & & so\,(4) \\
| & & & & | \\
\dot R_{01} & & & & \dot R_{02},
\end{array}
$$

причем, как видно из теоремы 4.1 работы [7], $\dot R_{01}\subset so\,(3)$. Проектируя это разложение на первое прямое слагаемое, убеждаемся в том, что R' содержит простой идеал алгебры $\tilde{\dot R}_0$, т. е. подалгебру $so\,(3)$ или $su\,(2)\subset so\,(3,4)$. По лемме 3.5 из [3] $\mathfrak{M}''$ редуктивна, и по теореме 4.1 из [8] имеем $\mathfrak{M}'=\mathrm{spin}\,(3.4)$, $\mathfrak{M}''=so\,(1,4)$, $so\,(2,3)$.

Пусть $\tilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра. Из теоремы 6.1 работы [8] имеем, что $\tilde{\mathfrak{M}}'=sl\,(p,R)\times so\,(q-p)\dot+c_{\bar\Gamma}\dot+n_\Gamma$, где $\pi_1\setminus\Gamma=\{\alpha_p\}$ $(q\neq p+2)$, $\{\alpha_p,\alpha_{p+1}\}$ $(q=p+2)$, $\{\alpha_p\}$ $(p=q)$. Пусть s'—подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{M}'\subset\tilde{\mathfrak{M}}'$, такая, что $R'_0\subset s'$. Аналогично как в теореме 1.1 получаем следующие включения:

1) $so\,(p)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,R)$ или

2) $su\left(\dfrac{p}{2}\right)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,R)$ и $k=p-1$ или

3) $sp\,\left(\dfrac{p}{4}\right)\subset\pi_1\,(s')\subset sl\,(p,R)$ и $k=p-1$,

причем π_1: $s'\to\pi_1\,(s')$—изоморфизм. Пусть $\rho:\tilde{\mathfrak{M}}'\to sl\,(p,R)\times so\,(q-p)$ —проектирование параллельно радикалу, и пусть $\pi=\pi_1\cdot\rho$: $\tilde{\mathfrak{M}}'\to sl\,(p,R)$. Применяя лемму 1.1 к подалгебре $\pi\,(\mathfrak{M}')\subset sl\,(p,R)$, получаем, что $\pi\,(r')=0$ или $\pi\,(r')=u\,(1)$ (при четном p). Итак, $r'\subset so\,(q-p)\dot+c_{\bar\Gamma}\dot+n_\Gamma$ или $r'\subset u\,(1)\times so\,(q-p)\dot+c_{\bar\Gamma}\dot+n_\Gamma$ (при четном p).

Предположим, что s' некомпактна. Так как $so\,(p)$ максимальна в $sl\,(p,R)$, то в случае 1) $s'\subset sl\,(p,R)$ и аналогично, как в теореме 1.1, получаем $\mathfrak{M}'=sl\,(p,R)\dot+n_\Gamma$. В случаях 2) и 3), в силу 1.1, прихо, дим к следующим вариантам:

$$R'_{012} = su\left(\frac{p}{2}\right), \quad s' = sl\left(\frac{p}{2}, C\right) \text{ или } sp\left(\frac{p}{2}, R\right),$$

$$R'_{012} = sp\left(\frac{p}{4}\right), \quad s' = su^*\left(\frac{p}{2}\right) \quad \text{или} \quad sp\left(\frac{p}{4}, C\right).$$

Ясно, что s' индуцирует в $b = n_\Gamma$ $(q-p)$-кратное стандартное представление. Следовательно, $r' = (r' \cap n_\Gamma) \dot{+} (r' \cap (c_{\bar{\Gamma}} \dot{+} so\,(q-p)))$ для $s' = sp\left(\frac{p}{2}, R\right)$ и $r' = (r' \cap n_\Gamma) \dot{+} (r' \cap (u\,(1) \dot{+} c_{\bar{\Gamma}} \dot{+} so\,(q-p)))$ для $s' = sl \times \times \left(\frac{p}{2}, C\right)$, $su^*\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}, C\right)$. Так же, как в теореме 1.1, доказывается, что $r' \cap n_\Gamma = n_\Gamma$.

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в теоремах 1.1 и 1.2. Аналогично теореме 1.1 разбирается случай компактной s'.

Рассмотрим случай d). Включим $\mathfrak{M}'$ в максимальную собственную подалгебру $\overline{\mathfrak{M}}'$. Если $\overline{\mathfrak{M}}'$ редуктивна, то из таблицы 2 работы [8] имеем, что $\overline{\mathfrak{M}}' = so\,(2.4)$, $so\,(2) \times so\,(1.4)$ или $so\,(3,3)$. Отсюда видно, что $R'_{012} = 0$. Из результатов работы [7] следует, что либо $R'_{01} = 0$, тогда $R'_{02} = so\,(4)$ или $su\,(2)$ либо $R'_{01} = so\,(3)$, тогда R'_{02} — произвольна. Пусть $R'_{01} = 0$, тогда $R'_{02} = so\,(4)$ или $su\,(2)$. В силу лемм 3.2 и 3.5 из [3] получаем, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна и, следовательно, как видно из таблицы 2 работы [8] $\mathfrak{M}' = so\,(1,4)$. Если $R'_{01} = so\,(3)$, имеем $so\,(3) \subset \mathfrak{M}' \subset so\,(3,3)$ и, в силу леммы 3.2 из [3], $\mathfrak{M}'$ редуктивна и, следовательно, как видно из таблицы 2 работы [8] $\mathfrak{M}' = so\,(3,2)$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра.

Из таблицы 3 работы [8] имеем $\overline{\mathfrak{M}}' = so\,(2,3) \dot{+} c_{\bar{\Gamma}} \dot{+} n_\Gamma$, где $\pi_1 \setminus \setminus \Gamma = \{\alpha_1\}$. Так как $so\,(2,3) \subset so\,(2,3) \dot{+} c_{\bar{\Gamma}} \dot{+} n_\Gamma$ и как мы уже показали, при $\mathfrak{M}' = so\,(2,3)$ получаем разложение, то у алгебры $so\,(3,4)$, кроме указанных редуктивных разложений, других минимальных разложений не существует.

Случай e) рассматривается аналогично.

Проверка минимальности разложений из таблицы делается так, как в теоремах 1.1 и 1.2.

§ 2. Разложения без пересечения

В этом параграфе будут найдены все разложения без пересечения всех простых вещественных классических групп Ли. Напомним, что такими разложениями являются, в частности, обобщенные разложения Ивасава.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ — разложение без пересечения простой алгебры Ли $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}'' = R$, то $\mathfrak{M}' = w + n$, где $w \subset \subset m_{\mathfrak{z}} \dot{+} h_-$ изоморфно проектируется на h_-, т. е. разложение яв-*

ляется обобщенным разложением Ивасава. Если R *не полупроста,* $R = R_0 \dotplus \mathfrak{z}$ *и* $\mathfrak{M}'' = R_0$, *то возможны следующие случаи:*

1) $\mathfrak{M}' = (m + w_{\mathfrak{z}}) \dotplus n$, *где* $m \subset m_{\mathfrak{z}} \subset R$ *изоморфно проектируется на* $\mathfrak{z}$, $w \subset m_{\mathfrak{z}} \dotplus h_-$ — *изоморфно проектируется на* h_-.

2) $\mathfrak{M}' = s'_\Gamma + w + n_\Gamma$, *где* $w \subset c_\Gamma^- \dotplus n_\Gamma$ *изоморфно проектируется на* c_Γ^-, Γ *состоит из одного элемента и максимальная компактная* $c \subset s'_\Gamma$ *изоморфно проектируется на* $\mathfrak{z}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}'' = R$, то $\mathfrak{M}'$ является минимальной k-подалгеброй и, как было отмечено в § 1 работы [3], имеет указанный выше вид. Пусть R не полупроста и $\mathfrak{M}'' = R_0$. Тогда $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ — k-подалгебра и по лемме из § 1 работы [3] имеем $R = R' + R_0$, $R' \cap R_0 = 0$. Отсюда следует, что $R' \subset R$ изоморфно проектируется на $\mathfrak{z}$. Пусть c — максимальная компактная подалгебра в s'_Γ. Тогда $\dim c = 1$. Значит $\Gamma = \varnothing$ или состоит из одного элемента, причем в первом случае $R' \subset m_{\mathfrak{z}}$, а во втором случае $R' = c$. Отсюда легко следует, что $\mathfrak{M}'$ имеет вид, указанный в лемме.

Пусть $G = G'$. G'' — разложение без пересечения простой группы G. По лемме 1.1 из [3] имеем разложение $R_0 = R'_0 + R''_0$ для максимальных полупростых компактных подалгебр в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$. Очевидно, $R'_0 \cap R''_0 = 0$. Мы будем пользоваться следующим результатом [4, 8].

Теорема. *Пусть* $R_0 = R'_0 + R''_0$, *где* R_0 — *полупростая компактная алгебра Ли,* $R'_0 \cap R''_0 = 0$. *Тогда* $R_0 \cong R'_0 \times R''_0$. *Если*

$$R_0 = \sum_{i=1}^{n}{}^{\cdot} R_{0i},\ R'_0 = \sum_{i=1}^{s}{}^{\cdot} R'_{0i},\ R''_0 = \sum_{i=1}^{t}{}^{\cdot} R''_{0i}$$

— *разложения алгебр в прямые суммы простых идеалов,* $\pi_i : R_0 \to R_{0i}$ — *соответствующее проектирование, то нумерацию простых идеалов можно выбрать так, что* $R'_{0i} \subset R_{0i} + \sum_{j=s-1}^{n}{}^{\cdot} R_{0j}$, $\pi_i R'_{0i} \to R_{0i}$, — *изоморфизм* $(i = 1, 2, \cdots, s)$, $R''_{0j} \subset R_{0s+j} + \sum_{i=1}^{s} R_{0i}$, $\pi_{s+j} : R''_{0j} \to R_{0s+j}$ — *изоморфизм* $(j = 1, 2, \cdots, t)$. *При этом из* $\pi_{s+j}(R'_{0i}) = 0$ *следует, что* $\pi_i(R''_{0j}) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, t)$.

Теорема 2.1. *Если* $G = SL(n, R)$ $(n \neq 4)$, $SU^*(2n)$, $SO(1, n)$ $(n > 4)$ *или простая комплексная группа Ли, то всякое ее разложение без пересечения является обобщенным разложением Ивасава. Если* $G = SO^*(4n+2)$, $SU(1, n)$, *то, кроме обобщенных разложений Ивасава, существуют разложения, описанные в лемме 2.1 (случай 1). Если* $G = Sp(n, R)$, $SO(2, n)$ $n > 4)$, $SO^*(4n)$, *то, кроме обобщенных разложений Ивасава, существуют следующие разложения (лемма 2.1, случай 2).*

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$sp(n, R)$	$sp(1, R) + c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$ $(\Gamma = \{\alpha_n\})$	$su(n)$
$so(2, n)$	$sl(2, R) \dot{+} w \dot{+} n_\Gamma$ $(\Gamma = \{\alpha_l\}$, $w \subset c_\Gamma^- + so(n-2)$ изоморфно проектируется на c_Γ^-	$so(n)$
$so^*(4n)$	$sl(2, R) \dot{+} w \dot{+} n_\Gamma$ $(\Gamma = \{\alpha_{2n}\}$, $w \subset c_\Gamma^- \dot{+} m_\Gamma$ — изоморфно проектируется на c_Γ^-	$su(2n)$

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$sp(p,q)$ $(p \leq q)$	$su^*(2p) + b + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$, $b \subset c_\Gamma + sp(q-p)$ изоморфно проектируется на c_Γ)	$sp(q)$
$su(p,q)$ $(1 < p = q)$	$sl(p, \mathbb{C}) + b + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(p<q)$, $\{\alpha_p\}$ $(p=q)$, $b \subset c_\Gamma + su(q-p)$ - изоморфно проектируется на c_Γ	$a + su(q)$ $(a \subset \mathfrak{z} + su(p)$ изоморфно проектируется в $\mathfrak{z}$)
$su(p,q)$ $(1 < p < q)$	$sl(p, \mathbb{C}) + c + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(p<q)$, $\{\alpha_p\}$ $(p=q)$, $c \subset c_\Gamma \times su(p-q)$ - изоморфно проектируется на c_Γ	$su(q)$
$so(p,q)$ $(2 < p \leq q)$	$sl(p, \mathbb{R}) + b + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p\}$ $(q \neq p+2)$, $b \subset c_\Gamma + so(q-p)$ изоморфно проектируется на c_Γ	$so(q)$
$so(4,q)$ $(q \geq 4)$	$sl(3, \mathbb{R}) + b + n_\Gamma$ $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$, $b \subset c_\Gamma + so(q-p)$ изоморфно проектируется на c_Γ	$su(2) \times so(q)$
$so(4,4)$	$sl(4, \mathbb{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$, $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\})$	$\cong su(2) \times su(2)$
$so(3,4)$	$sl(3, \mathbb{R}) + c_\Gamma + n_\Gamma$, $(\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_3\})$	$so(3) \times su(2)$

Доказательство. Если $\mathfrak{M} = sl(n, R)$ $(n \neq 4)$, $su^*(2n)$, $so(1,n)$ $(n > 4)$ или простая комплексная алгебра Ли, то R проста. Из сформулированной выше теоремы следует, что $\mathfrak{M}' \supset R$, откуда $\mathfrak{M}'' = R$ и применима лемма 2.1. В остальных случаях $R = R_0 + \mathfrak{z}$, где R_0 проста. Из сформулированной выше теоремы следует, что $\mathfrak{M}'' \supset R_0$. Из классификации простых алгебр легко вывести, что $\mathfrak{M}'' = R$ или R_0, и опять применима лемма 2.1. В случаях $\mathfrak{M} = su(1, n)$, $so^*(4n+2)$ имеем $m_{\mathfrak{z}} \subset R_0$ и поэтому существуют разложения, описанные в случае 1). В то же время легко проверить, что для любого $\alpha \in \pi_1$, для этих алгебр максимальная компактная подалгебра $c \subset s'_{\{\alpha_1\}}$ содержится в

R_0. Наоборот, если $\mathfrak{M} = sp(n, R)$, $so^*(4n)$, $so(2, n)$, то m_z — полупроста и потому $m_z \subset R_0$ и легко находятся те корни $\alpha \in \pi_1$, для которых $c \subset R_0$.

Теорема 2.2. *Пусть $G = G' \cdot G''$ разложения без пересечения, где $G = Sp(p, q)$, $SU(p, q)$ или $SO(p, q)$, причем $\mathfrak{M}'' = R$, R_0. Тогда разложение компактно и имеет следующий вид:*

$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{M}'$	$\mathfrak{M}''$
$sp(p, q)$ $(p \leqslant q)$	$su^*(2p) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_{2p}\}$, $b \subset c_\Gamma^- + sp(q-p)$ — изоморфно проектируется на c_Γ^-)	$sp(q)$
$su(p, q)$ $(1 < p \leqslant q)$	$sl(p, C) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_p, \alpha_q\}$ $(p < q)$, $\{\alpha_p\}$ $(p = q)$, $b \subset c_\Gamma^- \dot{+} su(q-p)$-изоморфно проектируется на c_Γ^-)	$a \times su(q)$ ($a \subset \mathfrak{z} \dot{+} (su(p)$-изоморфно проектируется в $\mathfrak{z}$)
$su(p, q)$ $(1 < p \leqslant q)$	$sl(p, C) \dot{+} c \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha p, \alpha q\}$ $(p < q)$, $\{\alpha p\}$ $(p = q)$, $c \subset c_\Gamma^+ \times su(q-p)$-изоморфно проектируется на c_Γ^+)	$su(q)$
$so(p, q)$ $(2 < p \leqslant q)$	$sl(q, R) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha p\}$ $(q \neq p+2)$, $b \subset c_\Gamma^- \dot{+} so(q-p)$-изоморфно проектируется на c_Γ^-)	$so(q)$
$so(4, q)$ $(q \geqslant 4)$	$sl(3, R) \dot{+} b \dot{+} n_\Gamma$ ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$, $b \subset c_\Gamma^- \dot{+} so(q-p)$ изоморно проектируется на c_Γ^-)	$su(2) \times so(q)$
$so(4, 4)$	$sl(4, R) \dot{+} c_\Gamma^- \dot{+} n_\Gamma$, ($\pi_1 \setminus \Gamma = \{\alpha_1\}$)	$\cong su(2) \times su(2)$
$so(3, 4)$	$sl(3, R) + c_\Gamma^- + n_\Gamma$; ($\pi_1 / \Gamma = \{\alpha_3\}$)	$so(3) \times su(2)$

Если $\mathfrak{M} = su(p, q)$, $\mathfrak{M}'' = R_0$, то существует разложение, удовлетворяющее условию 1) леммы 2.1, а при $p = q$ существует еще следующее разложение: $\mathfrak{M}' = su(1,1) + w + n_\Gamma$, где $\Gamma = \{\alpha_p\}$, $w \subset c_\Gamma^- + n_\Gamma$ изоморфно проектируется на c_Γ^-, $\mathfrak{M}'' = R_0$.

Доказательство. Если наше разложение некомпактно, то будучи минимальным, оно удовлетворяет условиям теорем 1.1, 1.2, 1.3. Но легко проверить, что все разложения, описанные в этих теоремах, имеют ненулевые пересечения.

Пусть $G = Sp(p, q)$, имеем $R_1 = sp(p)$, $R_0 = sp(q)$. Согласно теореме из § 2 имеем $R'' = sp(q)$, π_1: $R' \to sp(p)$— изоморфизм. Из леммы 3.2 работы [3] следует, что $\mathfrak{M}'' = sp(q)$. Значит, $\mathfrak{M}'$— k-под. алгебра. Из описания k-подалгебр легко понять, что $\mathfrak{M}'$ имеет указанный вид.

Пусть $\mathfrak{M} = su(p, q)$ $(1 < p \leqslant q)$, тогда $R_{01} = su(p)$, $R_{02} = su(q)$- Согласно теореме из § 2, имеем $R_0'' = su(q)$, π_1: $R_0' \to su(p)$—изоморфизм. Из леммы 3.2 работы [3] следует, что $\mathfrak{M}'' = a \times su(q)$ или $a \times su(1, q)$, где $a \subset su(p) \dotplus \mathfrak{z}$, $su(p-1) \dotplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ — центр R. Так как разложение компактно, то $\mathfrak{M}'' = a_1 \times su(q)$, а $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра. Из описания k-подалгебр ясно, что $\mathfrak{M}' = sl(p, C) \dotplus b + c \dotplus n_\Gamma$, где $b \subset c_\Gamma +$ $+ su(q-p)$ изоморфно проектируется на c_Γ^-, $c \subset c_\Gamma^+ + su(q-p)$. Согласно лемме из § 1 [3] мы должны иметь $R = R' + R''$, причем $R' \cap R'' = 0$. Имеем $R = \mathfrak{z} + su(p) + su(q)$, $R' = su(p) \dotplus c$, $R'' = a \dotplus$ $+ su(q)$.

Из соображений размерности ясно, что либо $c = 0$, $\dim a = 1$, либо наоборот. Далее a или $\mathfrak{z}$ должны проектироваться на $\mathfrak{z}$. Отсюда видно, что $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ имеют указанный вид.

Пусть $\mathfrak{M} = so(p, q)$. Рассмотрим случай, когда $q > 4$. Из сформулированной выше теоремы видно, что $\mathfrak{M}'' \supset so(q)$.

По лемме 3.2 из [3] $\mathfrak{M}'' = a \times so(k, q)$, где $a \subset so(p-k)$. Так как разложение компактно, то $k = 0$, т. е. $\mathfrak{M}'' = a \times so(q)$, где $a \subset so(p)$.

Пусть $p \neq 2{,}4$. Тогда $so(p)$ проста и из теоремы § 1 видно, что $a = 0$ и π_1: $R' \to so(p)$ — изоморфизм. Из описания k-подалгебр следует, что $\mathfrak{M}' = sl(p, R) \dotplus b \dotplus n_\Gamma$, где b изоморфно проектируется на c_Γ^-, $\Gamma = \{\alpha_p\}$ $(q \neq p + 2)$, $\{\alpha_p, \alpha_{p+1}\}$ $(q = p + 2)$. Если $p=4$, то возможны также случаи, когда $a = su(2)$. Тогда $\mathfrak{M}' = sl(3, R) \dotplus b \dotplus n_\Gamma$, где $\Gamma =$ $= \{\alpha_3, \alpha_4\}$.

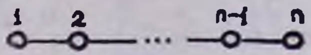
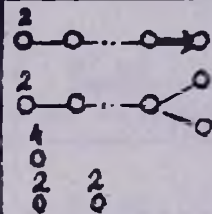
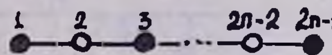
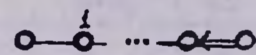
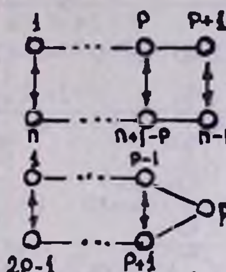
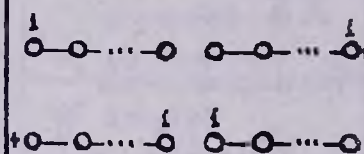
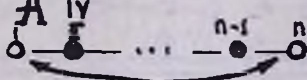
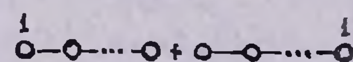
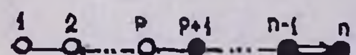
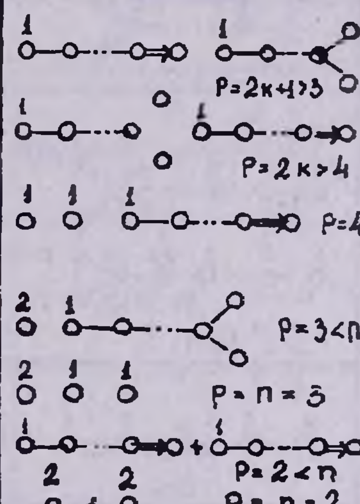
В случае $p=2$ по лемме из § 1 работы [3] имеем $R = R' \dotplus R''$, и дальше рассуждаем так же, как при $p \neq 2{,}4$.

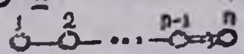
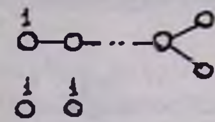
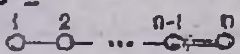
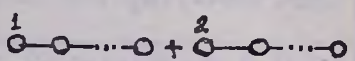
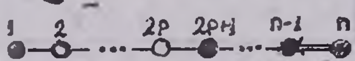
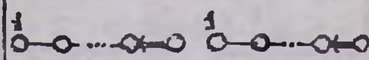
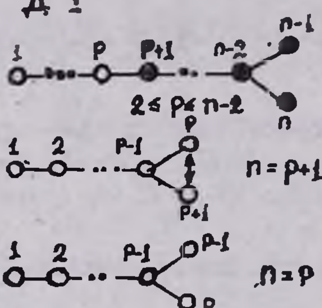
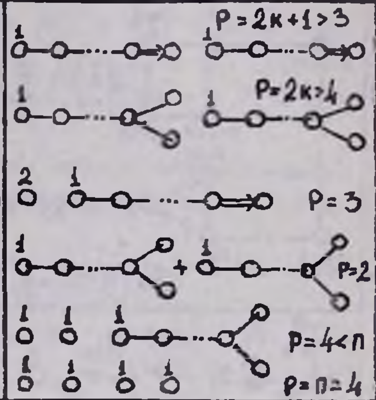
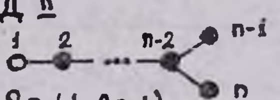
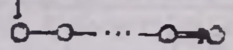
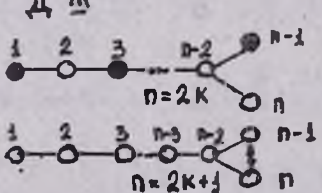
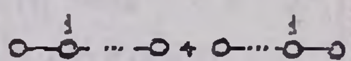
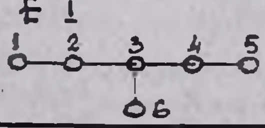
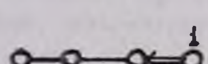
Если $p = q = 4$ и $\mathfrak{M}''$ компактно, то $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра и R' полупроста, откуда $\mathfrak{M}' = sl(4, R) + c_\Gamma^- + n_\Gamma$, где $\Gamma = \{\alpha_1\}$ или $\mathfrak{M}' =$ $= sl(3, R) \dotplus c_\Gamma^- \dotplus n_\Gamma$, где $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. В первом случае ясно, что $\mathfrak{M}''$— подалгебра в R, изоморфная $so(4)$ (возможно несколько вариантов), а во втором случае $\mathfrak{M}'' = su(2) \times so(4)$. Аналогично рассматривается случай $p = 3$, $q = 4$.

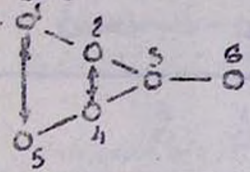
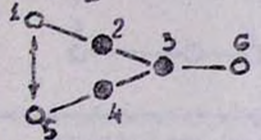
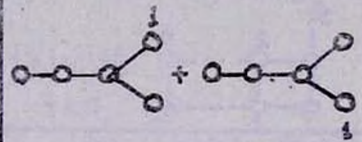
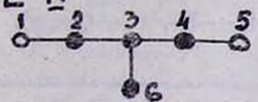
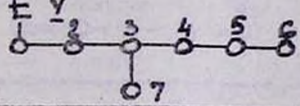
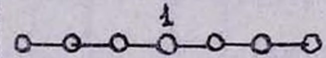
Армянский государственный педагогический институт
им. Х. Абовяна

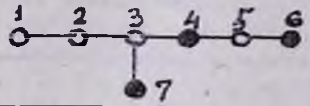
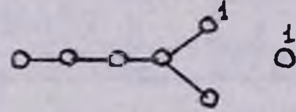
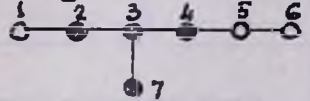
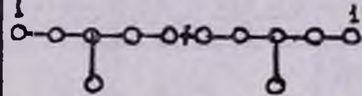
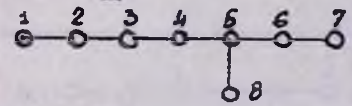
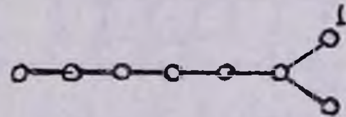
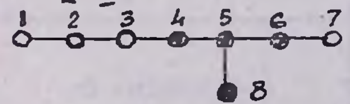
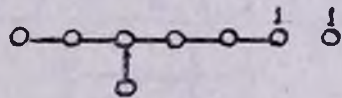
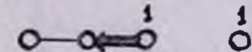
Поступила 9.IV.1974

ТАБЛИЦА 3

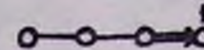
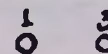
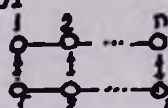
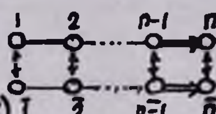
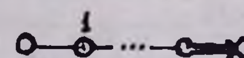
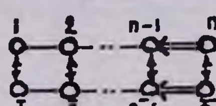
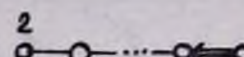
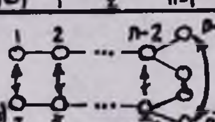
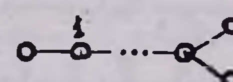
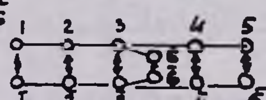
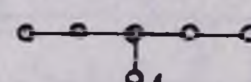
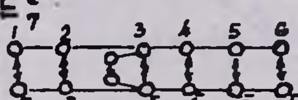
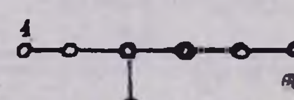
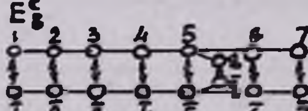
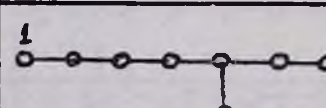
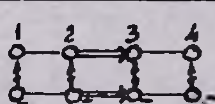
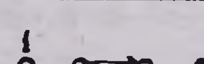
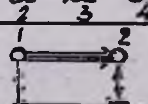
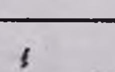
$\mathfrak{g}$	R	X
A I  $Sl(n+1, \mathbb{R})$	$So(n+1)$	 $n=2k>2$; $n=2k-1>3$; $n=2$; $n=3$
A II  $Su^*(2n)$	$Sp(n)$	
A III  $2 \le p \le \frac{n}{2}$; $n=2p-1$; $Su(p, n+1-p)$	$S(u(p)\times u(n+1-p))$	
A IV  $Su(1,n)$	$S(u(1)\times u(n))$	
B I  $2 \le p \le n$; $So(p, 2n+1-p)$	$So(p)\times So(2n+1-p)$	 $p=2k+1>3$; $p=2k>4$; $p=4$; $p=3<n$; $p=n=3$; $p=2<n$; $p=n=2$

$\mathfrak{ggg}$	R	X
B II  $So(1,2n)$	$So(2n)$	
C I  $Sp(n, \mathbb{R})$	$U(n)$	
C II  $Sp(p,n-p)$ $1 \le p \le \frac{n}{2}$	$Sp(p) \times Sp(n-p)$	
Д I  $So(p,2n-p)$ $n>3$	$So(p) \times So(2n-p)$	
Д II  $So(1,2n-1)$	$So(2n-1)$	
Д III  $So^*(2n)$	$U(n)$	
E I 	$Sp(4)$	

[illegible]	R	χ
E II 	$Su(6)\times Su(2)$	
E III 	$So(10)\times SO(2)$	
E IV 	F_4	
E V 	$Su(8)$	

E VI 	$So(12) \times Su(2)$	
E VII 	$E_6 \times So(2)$	
E VIII 	$So(16)$	
E IX 	$E_7 \times Su(2)$	
F_1 	$Sp(3) \times Su(2)$	

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТАБЛИЦЫ 3

$\mathfrak{g}\mathfrak{g}\mathfrak{g}$	R	X
F II 	$So(9)$	
G_2 	$So(4)$	
A^c  $Sl(n+1,C)$ $n>1$	$Su(n+1)$	
B^c  $n>2$ $So(2n+1,C)$	$So(2n+1)$	
C^c  $Sp(n,C)$	$Sp(n)$	
D^c  $n>3$ $So(2n,C)$	$So(2n)$	
E_6^c 	E_6	
E_7^c 	E_7	
E_8^c 	E_8	
F_4^c 	F_4	
G_2^c 	G_2	

Ռ. Օ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. Իրական պարզ Լիի խմբերի փոքրագույն վերլուծությունները *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում բացահայտ տեսքով գտնված են Լիի $SO(p, q)$, $SU(p, q)$ *և* $Sp(p, q)$ *խմբերի բոլոր փոքրագույն վերլուծությունները, ինչպես նաև Լիի դասական իրական պարզ խմբերի առանց հատման վերլուծությունները։*

R. O. NAZARIAN. *The minimal decompositions of real simple Lie groups*
(summary)

This paper is a study of the minimal decompositions for groups $SO(p, q)$ $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$, and the decompositions $G=G'\cdot G''$ for all classic real simple Lie groups, where dim $C'\cap G'=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Б. Дынкин.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, Матем. сб., 30 (72), 1952, 349—462.
2. *Н. П. Мушиц.* О максимальных приводимых подгруппах простых вещественных групп Ли, Уч. зап. Каз. ун-та, 114, кн. 2, 1954, 195—204.
3. *Р. О. Назарян.* О разложения некоторых простых вещественных групп Ли.
4. *D. Sternheimer.* Extensions et unifications dälgèbres de Lie, J. math. pures et appl; 47, 1968, 247—287.
5. *А. Л. Онищик.* О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях II, Матем. сб., 74 (116), 1967, 398—416.
6. *А. Л. Онищик.* О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях III, Матем. сб., 75 (117), 1968, 255—263.
7. *А. Л. Онищик.* Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований, Труды ММО, XI, 1962, 199—242.
8. *А. Л. Онищик.* Разложения редуктивных групп Ли, Матем. сб., 80 (122), № 4, 1969, 553—599.
9. *P. Van Praag.* Une décomposition des groupes orthogonaux et Symplectiques, C. r. Acad. sci., 262, 1966, 1037—1039.
10. *P. Van Praag.* Sous groupes non triangulables factorisant certaing groupes orthogonaux, C. r. Acad. sci., 263, 1966, 156—157.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS