ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серии «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

1975 ...

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaying of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

В. А. МАРТИРОСЯН

О ВОЗМОЖНОСТИ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ПО СИСТЕМЕ МЮНЦА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть монотонно возрастающая последовательность положительных действительных чисел, причем $\lambda_0 = 0$. Многочленом по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $0 < x < \infty$, назовем конечную сумму вида $\sum c_i x^{\lambda_i}$, где c_i — произвольные действительные числа. Через $C_R(I)$ обозначается банахово пространство действительных непрерывных функций на сегменте $I \subset [0, +\infty)$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in I} |f(x)|$.

Классическая теорема Мюнца [1], как известно, дает необходимое и достаточное условие на скорость роста последовательности чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, при котором совокупность всех многочленов по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ является плотным в $C_R(I)$ множеством. Естественно, в этой связи, спросить: что можно сказать о возможности аппроксимации функций из $C_R(I)$ многочленами по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с целыми коэффициентами?

Именно исследование этого вопроса является содержанием настоящей работы.

Отметим, что эффективное решение задачи возможности аппроксимации многочленами по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с целыми коэффициентами, в некоторых случаях, дано в работе [2].

Возможность аппроксимации многочленами по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с целыми коэффициентами по сравнению с теоремой Мюнца приводит, вообще говоря, к дополнительным ограничениям: с одной стороны, это ограничение на значения аппроксимируемой функции принимаемые в определенных точках сегмента I, с другой стороны — на длину сегмента I. Дальнейшее изложение, в связи с этим, удобно разбить на три части: 1) особые точки; 2) метрические ограничения; 3) возможность аппроксимации.

Для краткости записи, под $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_+$, N и R будем понимать, соответственно, совокупности из целых, целых неотрицательных, натуральных и действительных чисел.

§ 1. Особые точки

Условимся обозначать через Λ последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ чисел из R, удовлетворяющую условию

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \tag{1}$$

Определение 1. *Для* $n = 1, 2, 3, \cdots$ введем связанные с Λ множества

$$A_\Lambda^n = \{a : a \geqslant 0;\ a^{\lambda_m} \in Z_+, \text{ при } m = n, n+1, \cdots\}$$

и положим

$$A_\Lambda^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_\Lambda^n \cdot$$

Будем называть A_Λ^∞ множеством особых точек последовательности Λ (мотивы будут ясны несколько ниже).

Рассмотрим некоторые свойства множества A_Λ^∞. Из определения 1 следует, что $\{0, 1\} \subset A_\Lambda^\infty$ и, если $a \in R$, $0 < a < 1$, то $a \,\overline{\in}\, A_\Lambda^\infty$.

Предложение 1. *Либо* $A_\Lambda^\infty = \{0,1\}$, *либо* A_Λ^∞ *есть счетное множество.*

Доказательство. Покажем, во-первых, что A_Λ^∞ не более счетного множества. Так как A_Λ^∞ есть объединение счетного числа множеств A_Λ^n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, то достаточно увидеть, что каждое A_Λ^n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, не более, чем счетно.

Итак, возьмем некоторое A_Λ^m. Допустим, сперва, что $\lambda_m \leqslant 1$. Пусть a, $b \in A_\Lambda^m$, $b > a$. Из определения A_Λ^m следует, что $b^{\lambda_m} - a^{\lambda_m} \geqslant 1$. Так как из теоремы Лагранжа о конечном приращении вытекает, что $b^{\lambda_m} - a^{\lambda_m} \leqslant \lambda_m b^{\lambda_m - 1} (b - a)$, то $b - a \geqslant \lambda_m^{-1} b^{1 - \lambda_m}$. Однако, $1 - \lambda_m \geqslant 0$ и $b > 1$, следовательно, $b - a \geqslant \lambda_m^{-1}$, а значит A_Λ^m не более счетного множества, при $\lambda_m \leqslant 1$.

Пусть теперь $\lambda_m > 1$; этот случай сводится к разобранному выше. В самом деле, рассмотрим множество $B = \{b \colon b = a^{\lambda_m},\ a \in A_\Lambda^m\}$. Множества A_Λ^m и B — одинаковой мощности. Однако B является множеством $A_{\Lambda'}^m$ для последовательности $\Lambda' = \left\{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_m}\right\}_{n=1}^{\infty}$, причем m-ый член для Λ' равен 1. По доказанному следует, что B не более счетного множества, значит таково же и A_Λ^m.

Для завершения доказательства остается показать, что если $A_\Lambda^\infty \neq \{0,1\}$, то A_Λ^∞ не менее счетного множества. Пусть $A_\Lambda^\infty \neq \{0,1\}$; тогда найдется $m \in N$ такое, что $A_\Lambda^m \neq \{0,1\}$. Значит существует $a > 1$, $a \in A_\Lambda^m$. Очевидно, что элементом A_Λ^m будет также каждое число a^k, $k = 2, 3, 4, \cdots$. Таким образом, A_Λ^m не менее счетного множества, значит таково же и A_Λ^∞. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Если для последовательности* Λ

а) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} = \infty,$$

то $A_\Lambda^\infty = \{0,1\}$;

в) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ *и среди членов* Λ *имеются одновременно числа рациональные и иррациональные алгебраические, тогда* $A_\Lambda^1 = \{0,1\}$.

Доказательство. а) Достаточно установить, что $A^n_\Lambda = [0,1]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Допустим противное: пусть существует $m \in N$ такое, что $A^m_\Lambda \neq [0,1]$. Тогда найдется $a \in A^m_\Lambda$, $a > 1$, ибо $A^m_\Lambda \cap [0,1] = [0,1]$. Очевидно, что $\{a^{\lambda_n}\}_{n=m}^{\infty}$ есть монотонно возрастающая последовательность чисел из N (по определению A^m_Λ). Пусть τ есть показатель сходимости этой последовательности. Так как $a^{\lambda_n} \in N$ и различны при $n = m, m+1, \cdots$, то $\tau \leqslant 1$, с одной стороны. С другой стороны, известно [3], что $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\log n}{\lambda_n \log a}$. Поэтому получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} \leqslant \log a,$$

что противоречит условию. Итак, а) доказано.

в) Пусть λ_{n_1} и λ_{n_2} есть, соответственно, рациональный и иррациональный алгебраический члены для Λ. Допустим противное: $A^1_\Lambda \neq [0,1]$, тогда существует $a \in A^1_\Lambda$, $a > 1$. По определению A^1_Λ $a^{\lambda_{n_1}} = m \in N$, откуда следует, что a есть число алгебраическое. Поэтому, по теореме Гельфонда-Шнейдера [4], $a^{\lambda_{n_2}}$ трансцендентное число. Однако это противоречит определению A^1_Λ, в силу которого $a^{\lambda_{n_2}} \in N$. в) доказано.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность Λ обладает устойчивым множеством особых точек, если $A^{\infty}_\Lambda = A^1_\Lambda$ (целесообразность этого определения будет видна несколько ниже).

Примеры:

а) Последовательность Λ, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} = \infty$$

обладает устойчивым множеством особых точек, причем $A^{\infty}_\Lambda = [0,1]$.

В самом деле, включения $[0,1] \subset A^1_\Lambda \subset A^{\infty}_\Lambda$ — тривиальны. Поэтому, утверждение следует из предложения 2 (а).

в) Последовательность Λ, где $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ обладает устойчивым множеством особых точек, причем $A^{\infty}_\Lambda = Z_+$.

Достаточно показать, что $A^n_\Lambda = Z_+$, $n = 1, 2, 3, \cdots$; а это есть следствие следующего утверждения:

если Λ есть подпоследовательность из N, содержащая хотя бы одно простое число p и не состоящая целиком из целых кратных этого числа, тогда $A^1_\Lambda = Z_+$.

В самом деле, включение $Z_+ \subset A^1_\Lambda$ очевидно; убедимся в обратном: $A^1_\Lambda \subset Z_+$. Пусть $a \in A^1_\Lambda$, тогда $a^p = m \in Z_+$. Значит, или $a \in Z_+$, или a — иррационально, как корень многочлена $x^p - m$ [5]. Если допустить, что a иррационально, то оно есть алгебраическое число порядка ровно p) p — простое, поэтому многочлен с целыми коэффициентами

$x^p - m$ неприводим над полем рациональных чисел). Возьмем теперь число $s \in \Lambda$, не кратное p: $s = kp + p'$, где $k, p' \in N$, $k > 0$ и $0 < p' < p$. Так как $a \in A^1_\Lambda$, то $a^s = n \in Z_+$, т. е. $(a^p)^k \cdot a^{p'} = n$; но $a^p = m$, значит $m^k \ a^{p'} = n$. Итак, a есть корень многочлена $m^k x^{p'} - n$ с целыми коэффициентами, где $0 < p' < p$. Это противоречит тому, что a есть алгебраическое число порядка p. Следовательно, $a \in Z_+$. Ввиду произвольности a, включение $A^1_\Lambda \subset Z_+$ доказано.

c) Приведем пример последовательности, не обладающей устойчивым множеством особых точек. Такова, например, последовательность Λ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1, 2, $\cdots$.

В самом деле, по предложению 2 (в) $A^1_\Lambda = \{0,1\}$; однако, в силу примера в), $A^2_\Lambda = Z_+$. Значит $A^\infty_\Lambda \neq A^1_\Lambda$, так как $A^2_\Lambda \subset A^\infty_\Lambda$.

Обратимся теперь к выяснению роли множества A^∞_Λ в вопросе возможности аппроксимации многочленами с коэффициентами из Z.

Для последовательности $\{0\} \cup \Lambda$, ($\lambda_0 = 0$), введем множество $\tilde{A}_\Lambda = \{a : a \geqslant 0$, для любого многочлена $p(x)$ по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^\infty$ с коэффициентами из Z $p(a) \in Z\}$. Очевидно, что $\tilde{A}_\Lambda = A^1_\Lambda$.

Предложение 3. *Пусть последовательность Λ обладает устойчивым множеством особых точек. Допустим, что функция $f \in C_R(I)$ аппроксимируется многочленами по системе $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^\infty$ с коэффициентами из Z (здесь $\lambda_0 = 0$). Тогда существует многочлен $p(x)$ по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^\infty$ с коэффициентами из Z такой, что*

$$f(x) = p(x), \text{ для любого } x \in A^\infty_\Lambda \cap I. \tag{2}$$

Доказательство. Для $f \in C_R(I)$ существует такая последовательность $\{p_n(x)\}_{n=1}^\infty$ многочленов по системе $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^\infty$ с коэффициентами из Z, что

$$\|f - p_n\| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда

$$\|p_n - p_m\| \to 0, \text{ при } n, m \to \infty.$$

Поэтому найдется такое $n_0 \in N$, что при любых $n > m > n_0$

$$\|p_n - p_m\| < 1.$$

Зафиксируем такие n и m. Так как $p_n(x) - p_m(x)$ для $x \in \tilde{A}_\Lambda \cap I$ принимает значения из Z, то

$$p_n(x) - p_m(x) = 0, \ x \in \tilde{A}_\Lambda \cap I.$$

Если в этом равенстве устремить $n \to \infty$, фиксируя $x \in \tilde{A}_\Lambda \cap I$, то получим

$$f(x) - p_m(x) = 0, \ x \in \tilde{A}_\Lambda \cap I.$$

Остается заметить, что $\overline{A}_\Lambda = A_\Lambda^\infty$, так как $\overline{A}_\Lambda = A_\Lambda^1$ и Λ обладает устойчивым множеством A_Λ^∞. Предложение 3 доказано.

Допустим теперь, что Λ не обладает устойчивым множеством особых точек. В этом случае возможность аппроксимации многочленами по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^\infty$ $(\lambda_0=0)$ с коэффициентами из Z, вообще говоря, приводит также к ограничениям на значения аппроксимируемой функции, принимаемые на множестве $A_\Lambda^\infty - A_\Lambda^1$.

Пример. Возьмем за $\{0\} \cup \Lambda$ последовательность чисел

$$0, 1, \log_{\frac{3}{2}} 2, \log_{\frac{3}{2}} 3, \cdots, \log_{\frac{3}{2}} n, \cdots.$$

Так как $\frac{3}{2} \in A_\Lambda^2 \subset A_\Lambda^\infty$ и $\frac{3}{2} \overline{\in} A_\Lambda^1$, то Λ не обладает устойчивым множеством особых точек.

Пусть $f \in C_R(I)$, причем сегмент I таков, что $\frac{3}{2} \in I$; пусть далее для последовательности $\{p_n(x)\}_{n=1}^\infty$ многочленов по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^\infty$ с коэффициентами из Z (здесь $\lambda_0=0$)

$$\|f(x) - p_n(x)\| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда для $x = \frac{3}{2}$ получим

$$\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - p_n \cdot \frac{3}{2} - q_n \right| \to 0, \text{ при } n \to \infty,$$

где $p_n, q_n \in Z$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Очевидно, что множество $E = \left\{ s:\ s = k \cdot \frac{1}{2},\ k \in Z \right\}$ содержит все свои конечные предельные точки относительно естественной топологии на $R \cdot f\left(\frac{3}{2}\right)$ — конечно, $p_n \cdot \frac{3}{2} + q_n \in E$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, поэтому для числа $\frac{3}{2} \in A_\Lambda^\infty - A_\Lambda^1$ должно быть: $f\left(\frac{3}{2}\right) \in E$.

§ 2. Метрические ограничения

Для последовательности $\{0\} \cup \Lambda$ через $t_{\lambda_n}(x)$ обозначим многочлен Чебышева степени λ_n по системе функций $\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^n$ на сегменте I $(\lambda_0 = 0)$, т. е. такой линейный агрегат от функций $\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^n$ с коэффициентом 1 при x^{λ_n}, что

$$m_{\lambda_n}(I) = \|t_{\lambda_n}(x)\| = \inf_{\{c_i\}} \|x^{\lambda_n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{\lambda_i}\|;$$

здесь c_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ есть произвольные числа из R.

Существование $t_{\lambda_n}(x)$ является известным фактом [6].

Предложение 4. *Пусть для последовательности* $\{0\} \cup \Lambda$ *и для сегмента* I

$$\varliminf_{n\to\infty} m_{\lambda_n}(I) > 0. \tag{3}$$

Функцию $f \in C_R(I)$ *можно аппроксимировать многочленами по системе функций* $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ *с коэффициентами из* Z *тогда и только тогда, если она сама есть такой многочлен.*

Доказательство. Пусть функция $f \in C_R(I)$, не являющаяся многочленом по $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с коэффициентами из Z, аппроксимируется многочленами по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. Тогда, в чем нетрудно убедиться, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен

$$q_{\lambda_n}(x) = x^{\lambda_n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{\lambda_i},\ c_i \in R,\ i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$q_{\lambda_n}(x) \not\equiv 0,\ x \in I \text{ и } \|q_{\lambda_n}(x)\| < \varepsilon.$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\varepsilon_j \downarrow 0$ при $j \to \infty$. Для каждого ε_j построим соответствующий многочлен $q_{\lambda_{n_j}}(x)$ как упомянуто выше. Невозможно, чтобы для некоторого $\bar{j}$ было $\lambda_{n_j} \leqslant \lambda_{n_{\bar{j}}}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$. В самом деле, отсюда следовало бы, что для некоторого $\tilde{j}$, $0 \leqslant \tilde{j} \leqslant \bar{j}$, $m_{\lambda_{n_{\tilde{j}}}}(I) = 0$. Однако, это противоречит известному факту о том, что система функций $\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^{n}$ линейно независима на $I \subset [0, +\infty)$, так как отсюда следует, что $m_{\lambda_n}(I) > 0$ для любого n. Таким образом, найдется такая подпоследовательность $\{n_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, что $\lambda_{n_{j_k}} \uparrow$ вместе с $k \to \infty$. Вследствие выбора многочленов $q_{\lambda_{n_{j_k}}}(x)$

$$m_{\lambda_{n_{j_k}}}(I) \leqslant \|q_{\lambda_{n_{j_k}}}(x)\| \leqslant \varepsilon_{j_k}.$$

Устремив здесь $k \to \infty$, получим $\varliminf_{n\to\infty} m_{\lambda_n}(I) = 0$, что противоречит условию (3). Предложение 4 доказано.

Предложение 4 показывает, что возможность аппроксимации многочленами по $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с коэффициентами из Z функций из $C_R(I)$, отличных от многочленов по системе $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с коэффициентами из Z, приводит к необходимому условию:

$$\varliminf_{n\to\infty} m_{\lambda_n}(I) = 0. \tag{4}$$

Вообще говоря, условием (4) на сегмент I накладывается определенное метрическое ограничение. Так при $\lambda_n = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, (4) равносильно условию: длина $I < 4$ [7].

Рассмотрим теперь вопрос о выделении класса последовательностей, для которых условие (4) выполняется на любом сегменте

$I \subset [0, +\infty)$. Легко видеть, что для последовательности $\{0\} \cup \Lambda$ с $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n < \infty$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} m_{\lambda_n}(I) = 0$ для любого сегмента $I \subset [0, +\infty)$.

Лемма 1. *Пусть для последовательности* $\{0\} \cup \Lambda$ $(\lambda_0 = 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, *и* $b \in R$, $b \geqslant 1$, *имеем*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} < \frac{1}{\log b}. \tag{5}$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} m_{\lambda_n}[0, b] = 0.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$m_{\lambda_n}[0, b] = b^{\lambda_n} \cdot m_{\lambda_n}[0, 1]. \tag{6}$$

Так как $m_{\lambda_n}[0,1] = m_{\lambda_n \cdot r}[0,1]$, где $r > 0$, то не умаляя общности можно считать, что $\lambda_1 \geqslant 1$. Используя это и результаты из [6], (глава 1, п. 27), получим следующую оценку:

$$m_{\lambda_n}[0,1] \leqslant C_1 \sqrt{\lambda_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n + \lambda_k + 1}, \tag{7}$$

где C_1 — постоянная. Для произведения из (7) имеем

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\lambda_n + \lambda_k + 1} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right\} \leqslant C_2 \exp\left\{-\frac{\sum\limits_{1}^{n} \lambda_k}{\lambda_n}\right\}, \tag{8}$$

где C_2 — постоянная. (Здесь применено элементарное неравенство $\log(1-x) \leqslant -x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$).

Таким образом, (6), (7) и (8) приводят к неравенству

$$m_{\lambda_n}[0, b] \leqslant C \cdot K_n, \tag{9}$$

где C — постоянная, а

$$K_n = \exp\left\{\frac{1}{2} \log \lambda_n + \lambda_n \log b - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k}{\lambda_n}\right\}.$$

Достаточно показать, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} K_n = 0$. Для этого представим K_n в виде

$$K_n = \exp\left\{-\frac{\sum_1^n \lambda_k}{\lambda_n}(1-\mu_n)\right\}, \text{ где } \mu_n = \frac{\lambda_n^2}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}\cdot\log b + \frac{\lambda_n \log \lambda_n}{2\cdot\sum_{k=0}^n \lambda_k}.$$

В силу условия (5) существует подпоследовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\lambda_{n_i}^2}{\sum_{k=1}^{n_i}\lambda_k} < \frac{1}{\log b}.$$

Отсюда следует, что $1-\mu_{n_i}>0$ для достаточно больших i и

$$\sum_{k=1}^{n_i}\lambda_k/\lambda_{n_i}\to\infty \quad \text{при } i\to\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty} K_{n_i}=0$. Однако, $K_n>0$, $n=1, 2, 3,\cdots$, а значит $\underline{\lim}_{n\to\infty} K_n = 0$. Лемма 1 доказана.

Предложение 5. *Пусть для последовательности* $\{0\}\cup\Lambda$ $(\lambda_0=0)$ *с* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ *имеем*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^2}{\sum_{k=1}^n\lambda_k}=0. \tag{10}$$

Тогда для любого сегмента $I\subset[0,+\infty)$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} m_{\lambda_n}(I)=0.$$

Доказательство. При условии (10) условие (5) из леммы 1 выполняется для каждого $b>1$. Поэтому по лемме 1 $\underline{\lim}_{n\to\infty} m_{\lambda_n}[0,b]=0$ для любого $b\geqslant 1$. Остается отметить, что для любого сегмента $I\subset[0,+\infty)$ можно найти $b\geqslant 1$ такое, что $m_{\lambda_n}(I)\leqslant m_{\lambda_n}[0,b]$, $n=0, 1, 2,\cdots$. Предложение 5 доказано.

Замечание. Отметим, что при условии

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^2}{\sum_{k=1}^n\lambda_k}=0$$

имеем более сильное заключение: для любого сегмента $I\subset[0,+\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} m_{\lambda_n}(I)=0$. Это получается аналогичным образом, путем вполне ясного видоизменения леммы 1.

§ 3. Возможность аппроксимации

Лемма 2. *Пусть для последовательности* Λ *и* $b \in R$, $b > 1$, *сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^{\lambda_n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2, \tag{11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^{\lambda_n} \cdot |\lambda_{n+2} - 2 \cdot \lambda_{n+1} + \lambda_n|. \tag{12}$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{\lambda_n} - 2 \cdot x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}|, \quad x \in [0, b], \tag{13}$$

сходится равномерно.

Доказательство. Согласно тождеству $x^{\lambda_n} - 2 \cdot x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}} = x^{\lambda_n}(1 - x^{\lambda_{n+1} - \lambda_n})^2 + x^{\lambda_{n+2}} - x^{2\lambda_{n+1} - \lambda_n} \equiv y_{1,n}(x) + y_{2,n}(x)$ достаточно установить равномерную сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_{1,n}(x)| \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |y_{2,n}(x)|, \quad x \in [0, b]. \tag{14}$$

Для каждого из рядов (14) построим мажорантный ряд. Отметим, что сходимость ряда (11) влечет $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$.

Фиксируем n, $y_{1,n}(0) = y_{1,n}(1) = 0$ и $y_{1,n}(x) \geqslant 0$, при $0 \leqslant x \leqslant 1$, значит функция $y_{1,n}(x) \in C_R[0, b]$ имеет точку максимума x_n, $0 < x_n < 1$. Методами дифференциального исчисления находим, что $x_n = \left(\dfrac{\lambda_n}{2 \cdot \lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^{\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}}$. Отсюда, учитывая условие $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$, получим

$$y_{1,n}(x_n) \leqslant C_1 \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^2, \tag{15}$$

где постоянная C_1 от n не зависит.

Из теоремы Лагранжа о конечном приращении следует, что $y_{1,n}(b) \leqslant b^{2\lambda_{n+1} - \lambda_n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 \cdot \log^2 b$. Однако, в силу условия $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$, имеем $\lim\limits_{n \to \infty} b^{2\lambda_{n+1} - \lambda_n} / b^{\lambda_n} = 1$. Следовательно

$$y_{1,n}(b) \leqslant C_2\, b^{\lambda_n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2, \tag{16}$$

где постоянная C_2 от n не зависит.

Таким образом, из (15) и (16) видно, что первый из рядов (14) мажорируется рядом, отличающимся от ряда (11) постоянным множителем. Аналогично получается, что второй из рядов (14) мажорируется рядом, отличающимся от ряда (12) постоянным множителем. Но ряды (11) и (12) сходятся. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть функция $\psi(z)$ регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|\psi(z)| \leqslant M e^{a \cdot \operatorname{Im} z},$$

где M, $a > 0$ — постоянные. Допустим, что для последовательности Λ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty. \tag{17}$$

Если $\psi(i\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, *то* $\psi(z) \equiv 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Доказательство. Функция

$$g(z) = \frac{1}{M} e^{iaz} \psi(z) \cdot \prod_{n=1}^{p} \frac{z + i\lambda_n}{z - i\lambda_n}$$

также будет регулярной в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. По теороме Фрагмена — Линделефа $|g(z)| \leqslant 1$, $\operatorname{Im} z > 0$. Следовательно, для каждого $p \in N$

$$|\psi(z)| \leqslant M e^{a \operatorname{Im} z} \cdot \prod_{n=\lambda}^{p} \left| \frac{z - i\lambda_n}{z + i\lambda_n} \right|, \ \operatorname{Im} z > 0.$$

Легко проверить, что для фиксированного z, $\operatorname{Im} z > 0$, и достаточно больших λ_n

$$\left| \frac{z - i\lambda_n}{z + i\lambda_n} \right| < 1 - \operatorname{Im} z \cdot \frac{1}{\lambda_n}.$$

Поэтому, в силу (17), получим: $\psi(z) = 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Лемма 3 доказана.

Обозначим через $C_R^*(I)$ множество тех функций $f \in C_R(I)$, для которых $f(I \cap \{0, 1\}) \subset \{0\}$. Ясно, что $C_R^*(I)$ является подпространством для $C_R(I)$, причем $C_R^*(I) = C_R(I)$, если $I \cap \{0, 1\} = \varnothing$.

Лемма 4. *Пусть для последовательности* Λ $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$. *Если для* $b \in R$, $b \geqslant 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b^{\lambda_n}}{n} = 0, \tag{18}$$

то для любого $m_0 \in N$ *система функций* $\{x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}\}_{n=m_0}^{\infty}$ *замкнута в* $C_R^*[0, b]$.

Доказательство. Допустим, что для $n = m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \cdots$

$$\int_0^b \{x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}\}\, d\mu(x) = 0,$$

где $\mu(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации на $[0, b]$. Введем функцию $\varphi(\lambda)=\int\limits_0^b x^\lambda\,d\mu(x)$, регулярную при $Re\,\lambda>0$. Ясно, что при $Re\,\lambda>0$

$$|\varphi(\lambda)|\leqslant Mb^{Re\,\lambda}, \tag{19}$$

где M — постоянная. Соотношения же выше влекут

$$\varphi(\lambda_n)=c_1 n+c_2,\ n=m_0,\ m_0+1,\ m_0+2,\cdots, \tag{20}$$

где постоянные c_1, c_2 от n не зависят. Из (19) и (20) имеем

$$\frac{|\varphi(\lambda_n)|}{n}=\left|c_1+\frac{c_2}{n}\right|<M\frac{b^{\lambda_n}}{n},$$

поэтому в силу условия (18) $c_1=0$. Значит

$$\varphi(\lambda_n)=c_2,\ n=m_0,\ m_0+1,\ m_0+2,\cdots.$$

Нетрудно проверить, что функция $\psi(z)=\varphi(-iz)-c_2$, $\operatorname{Im} z>0$, удовлетворяет всем условиям леммы 3. Поэтому по лемме 3 $\psi(z)\equiv 0$, $\operatorname{Im} z>0$, или, другими словами

$$\varphi(\lambda)\equiv c_2 \text{ при } Re\,\lambda>0. \tag{21}$$

Для нахождения c_2 устремим в (21) λ к 0, $\operatorname{Im}\lambda=0$. Предельный переход под знаком интеграла дает: $c_2=\int\limits_0^b d\mu(x)$. Итак, (21) примет следующий вид:

$$\int\limits_0^b (x^\lambda-1)\,d\mu(x)\equiv 0,\ Re\,\lambda>0,$$

где $\mu(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации на $[0,b]$. Отсюда следует, что $\int\limits_0^b f(x)\,d\mu(x)=0$ для любой функции $f\in C_R^*[0,b]$. Тем самым лемма 4 доказана (по известной теореме Хана-Банаха [6]).

Замечание. Условие (18) существенно для справедливости заключения леммы 4. В самом деле, возьмем, например, $\lambda_n=\log n$, $n=2,3,4,\cdots$ и $b>e$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^{\log n}}{n}=\infty$. Система функций $\{x^{\log n}-2x^{\log(n+1)}+x^{\log(n+2)}\}_{n=m_0}^{\infty}$, где $m_0\in N$ и $m_0\geqslant 2$, не замкнута в $C_R^*[0,b]$, так как каждый член системы обращается в 0 при $x=e$.

Теорема 1. *Пусть для последовательности* $\{0\}\cup\Lambda$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, *и* $b\in R$, $b>1$, *сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^{\lambda_n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b^{\lambda_n} |(\lambda_{n+2} - 2 \cdot \lambda_{n+1} + \lambda_n|.$$

Если $f \in C_R [0, b]$ и $f(0), f(1) \in Z$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p(x)$ по системе функций $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ ($\lambda_0 = 0$) с коэффициентами из Z такой, что

$$\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно аппроксимировать функцию $\tilde{f}(x) = f(x) - r(x)$, где $r(x) = f(0) + x^{\lambda_1} [f(1) - f(0)]$ есть многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с коэффициентами из Z; $\tilde{f}(x) \in C_R^{*} [0, b]$. По лемме 2 для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $m_0 \in N$, что

$$\sum_{n=m_0}^{\infty} |x^{\lambda_n} - 2 x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0, b].$$

Согласно лемме 4 (расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ следует из условия $\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$ условие (18) гарантирует лемма 2), существует такой многочлен

$$p_1(x) = \sum_{n=m_0}^{q} c_n (x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}), \quad c_n \in R$$

при $n = m_0, \cdots, q$, что

$$\|\tilde{f}(x) - p_1(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Функция

$$p(x) = \sum_{n=m_1}^{q} [c_n] (x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}),$$

где $[c_n]$ есть целая часть от c_n, является многочленом по системе $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора m_0

$$|p_1(x) - p(x)| \leqslant \sum_{n=m_0}^{\infty} |x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0, b],$$

следовательно, (22) дает

$$\|\tilde{f}(x) - p(x)\| < \varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При условиях теоремы 1 необходимое условие (4) выполняется. В самом деле, сходимость ряда (11) влечет

$\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$. Отсюда на основе теоремы Штольца, имеем

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\lambda_n^2}{n}}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}=0$. Остается сослаться на предложение 5.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что если для последовательности Λ, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, и $b\in R$, $b\geqslant 1$, имеем $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b^{\lambda_n}}{n}=0$, то $[0, b]\cap A^{*}_{\Lambda}=\{0, 1\}$. Этим проясняется тот факт, что в теореме 1 ограничения на значения аппроксимируемой функции наложены только в точках 0 и 1.

Следствие. *Пусть для последовательности* $\{0\}\cup\Lambda$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, *выполняются условия*

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\downarrow 0\ (\textit{невозрастая}), \tag{23}$$

и

$$\frac{\lambda_n}{\log n}\downarrow 0\ (\textit{невозрастая})\ \textit{при}\ n\to\infty. \tag{24}$$

Пусть $f\in C_R(I)$, $f(I\cap\{0,1\})\subset \mathbb{Z}$, *где* I *есть сегмент произвольной длины на полуоси* $[0,+\infty)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такой многочлен* $p(x)$ *по системе функций* $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ $(\lambda_0=0)$ *с коэффициентами из* $\mathbb{Z}$, *что*

$$\|f(x)-p(x)\|<\varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что условия теоремы 1 выполняются при любом $b\geqslant 1$. Обозначим $\varepsilon_n=\dfrac{\lambda_n}{\log n}$.

Преобразование Абеля дает

$$\sum_{n=1}^{m} b^{\lambda_n}(\lambda_{n+2}-2\lambda_{n+1}+\lambda_n)=\mathrm{const}+b^{\lambda_{m+1}}(\lambda_{m+2}-\lambda_{m+1})-$$

$$-\sum_{n=2}^{m+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(b^{\lambda_n}-b^{\lambda_{n-1}}). \tag{25}$$

Условие (24), т. е. $\varepsilon_n\downarrow 0$ влечет $\lim_{n\to\infty}b^{\lambda_n}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=0$ для любого $b\geqslant 1$; из теоремы Лагранжа о конечном приращении с учетом (23) имеем $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(b^{\lambda_n}-b^{\lambda_{n-1}})\leqslant C_3 b^{\lambda_{n-1}}\cdot(\lambda_n-\lambda_{n-1})^2$, где постоянная C_3 от n не зависит. Следовательно, как видно из (25), сходимость ряда (12) сводится к сходимости ряда (11). Таким образом, остается показать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b^{\lambda_n}\cdot(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^2$ при любом $b\geqslant 1$. Последнее следует из неравенства

$$b^{\lambda_n} \cdot (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 \leqslant C_4 \frac{\varepsilon_n^2}{n^{2-\varepsilon_n \log b}},$$

где C_4 от n не зависит (здесь использовано условие $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$) Следствие доказано.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 14.X.1974

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հնարավորության մասին (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է իրական $[0, +\infty)$ *կիսաառանցքի հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հնարավորության հարցը։ Դիտարկված է դեպքը, երբ մոտարկումը հնարավոր է կամայական երկարության հատվածի վրա։*

V. H. MARTIROSIAN. *On the possibility of uniform approximations with polynoms by the Müntz system with integral coefficients* (summary)

The possibility of uniform approximation of functions continuous on an interval from $[0, +\infty)$ with polynoms by Muntz system with integral coefficients is investigated. The case when approximation is possible for the interval of arbitrary length is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Rudin.* Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, London, 1966.
2. *В. А. Мартиросян.* О равномерном приближении многочленами по системе Мюнца с целыми коэффициентами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 2, 1973, 167—175.
3. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, 2, Изд. „Наука“, М., 1968.
4. *С. Ленг.* Алгебра, Изд. „Мир“, М., 1968.
5. *А. А. Бухштаб.* Теория чисел, Изд. „Просвещение“, 1966.
6. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, Изд. „Наука“, М., 1965.
7. *А. Ф. Тиман.* Теория приближения функций действительного переменного, „Физматгиз“, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается задача определения меридиана оболочки вращения, мало отличающаяся по форме от цилиндрической, если известен спектр частот ее осесимметрических колебаний. Применяется метод малого параметра (см. [1] и [3]).

Если в качестве оси абсцисс взять ось вращения, то осесимметрические колебания оболочки вращения описываются следующими уравнениями:

$$-\frac{1}{A}\frac{d}{dx}\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}Bu-\frac{1-\sigma}{R_1R_2}u+\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right]w'+$$

$$+\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]'w=\lambda u,$$

$$-\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right]u'-\frac{1}{A}\left[\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]\frac{B'}{B}u+\mu\left[\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}\frac{B}{A}\frac{d}{dx}\right]^2w+$$

$$+\left[\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right]w=\lambda w. \qquad (1)$$

Здесь $B(x)$ — ордината точки меридиана, $A(x)=\sqrt{1+B'^2}$, $R_1^{-1}(x)$ и $R_2^{-1}(x)$ — главные кривизны оболочки:

$$\frac{1}{R_1}=-\frac{B''}{(1+B'^2)^{3/2}},\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{B\sqrt{1+B'^2}},$$

$u(x)$ и $w(x)$ — перемещения, λ — параметр частоты, $|\sigma|<\frac{1}{2}$ — коэффициент Пуассона, $\mu=\frac{h^2}{12}$, где h — толщина оболочки. Пусть $0\leqslant x\leqslant\pi$, и краевые условия задачи имеют вид

$$u'(0)=u'(\pi)=w(0)=w(\pi)=w''(0)=w''(\pi)=0. \qquad (2)$$

Одновременно будем рассматривать также следующие краевые условия:

$$u'(0)=u(\pi)=w(0)=w'(\pi)=w''(0)=w'''(\pi)=0. \qquad (3)$$

Предположим, что функция $B(x,\varepsilon)$ аналитически зависит от параметра ε в некотором интервале $-\delta<\varepsilon<\delta$, и ее разложение в ряд по степеням ε имеет вид

$$B(x,\varepsilon)=B_0+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j B_j(x),$$

где B_0 — положительная постоянная. Будем предполагать, что этот ряд можно четыре раза почленно дифференцировать по x.

Спектры задач (1), (2) и (1), (3) дискретны и собственные значения $\lambda_s(\varepsilon)$, $s=0,1,2,\cdots$, аналитически зависят от ε. При $\varepsilon=0$ система уравнений (1) сводится к системе уравнений колебания круговой цилиндрической оболочки радиуса B_0

$$\begin{aligned} &-u''+\frac{\sigma}{B_0}w'=\lambda u,\\ &-\frac{\sigma}{B_0}u'+\mu w^{IV}+\frac{1}{B_0^2}w=\lambda w. \end{aligned}\tag{4}$$

Число B_0 предполагается таким, что спектры задач (4), (2) и (4), (3) были простыми.

Настоящая статья посвящена доказательству следующих теорем:

Теорема 1. *Если функция $B(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условию $B(x,\varepsilon)=B(\pi-x,\varepsilon)$, то она спектром задачи* (1), (2) *определяется однозначно.*

Теорема 2. *Функция $B(x,\varepsilon)$ спектрами задач* (1), (2) и (1), (3) *определяется однозначно.*

В доказательстве этих теорем описывается также процесс нахождения коэффициентов $B_j(x)$ разложения $B(x,\varepsilon)$ в ряд по степеням ε. Укажем еще, что, как можно показать примером, заданием конечного числа частот $\lambda_s(\varepsilon)$ функция $B(x,\varepsilon)$ не определяется (см. по этому поводу [2]).

§ 1. Доказательство теоремы 1

Задача (4), (2) — самосопряженная, ее спектр состоит из двух последовательностей собственных значений λ_{00}, $\lambda_{k_0}^-$ и $\lambda_{k_0}^+$, $k=1,2,3,\cdots$

$$\lambda_{00}=0,\ \lambda_{k_0}^{\pm}=\frac{1}{2}\left[\mu k^4+k^2+\frac{1}{B_0^2}\pm\sqrt{\left(\mu k^4-k^2+\frac{1}{B_0^2}\right)^2+\frac{4\sigma^2}{B_0^2}k^2}\right],\tag{5}$$

которым соответствуют собственные вектор-функции

$$\begin{pmatrix} u_{00}(x)\\ w_{00}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} u_{k_0}^{\pm}(x)\\ w_{k_0}^{\pm}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos kx\\ \dfrac{B_0}{\sigma}\dfrac{1}{k}\left(\lambda_{k_0}^{\pm}-k^2\right)\sin kx\end{pmatrix}.\tag{6}$$

При $k\to\infty$ числа $\lambda_{k_0}^-$ и $\lambda_{k_0}^+$ имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_{k_0}^-=k^2-\frac{\sigma^2}{\mu B_0^2}\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right),\quad \lambda_{k_0}^+=\mu k^4+\frac{1}{B_0^2}+\frac{\sigma^2}{\mu B_0^2}\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right).\tag{7}$$

Отметим, что, зная любое из собственных значений (5) (кроме λ_{00}) и его номер, можно однозначно определить число B_0.

Задача (1), (2) является самосопряженной с весом AB, ее спектр состоит из двух последовательностей собственных значений $\lambda_0(\varepsilon)$, $\lambda_k^-(\varepsilon)$ и $\lambda_k^+(\varepsilon)$, $k=1, 2, 3, \cdots$. Пусть

$$\lambda_0(\varepsilon)=\lambda_{00}+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_{0j},\quad \lambda_k^{\pm}(\varepsilon)=\lambda_{k_0}^{\pm}+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\lambda_{kj}^{\pm},$$

$$u_0(x,\varepsilon)=u_{00}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j u_{0j}(x),\quad u_k^{\pm}(x,\varepsilon)=u_{k_0}^{\pm}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j u_{kj}^{\pm}(x),$$

$$w_0(x,\varepsilon)=w_{00}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j w_{0j}(x),\quad w_k^{\pm}(x,\varepsilon)=w_{k_0}^{\pm}(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j w_{kj}^{\pm}(x)$$

являются разложениями собственных значений и собственных векторфункций задачи (1), (2).

Для удобства в дальнейшем запись верхних индексов $(\pm)$ будем сохранять только тогда, когда это необходимо.

С учетом сделанных выше обозначений имеем

$$-\dot{u}_k-\lambda_{k_0}u_k+\frac{\sigma}{B_0}w_k'=F_k^{(1)}(x,\varepsilon),$$

$$-\frac{\sigma}{B_0}u_k'+\mu w_k^{IV}+\left(\frac{1}{B_0^2}-\lambda_{k0}\right)w_k=F_k^{(2)}(x,\varepsilon), \tag{8}$$

где

$$F_k^{(1)}(x,\varepsilon)=-\dot{u}_k+\frac{1}{A}\frac{d}{dx}\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}Bu_k+\left[\frac{1-\sigma}{R_1R_2}+(\lambda_k-\lambda_{k0})\right]u_k-$$
$$-\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)-\frac{\sigma}{B_0}\right]w_k'-\frac{1}{A}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]'w_k,$$

$$F_k^{(2)}(x,\varepsilon)=\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)-\frac{\sigma}{B_0}\right]u_k'+\frac{1}{A}\left[\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]\frac{B'}{B}u_k+\mu w_k^{IV}-$$
$$-\mu\left[\frac{1}{AB}\frac{d}{dx}\frac{B}{A}\frac{d}{dx}\right]^2 w_k-\left[\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{B_0^2}-(\lambda_k-\lambda_{k0})\right]w_k.$$

Так как задача (4), (2) самосопряженная, то должно выполняться следующее условие совместности:

$$\int_0^{\pi}\left[u_{k0}(x)F_k^{(1)}(x,\varepsilon)+w_{k0}(x)F_k^{(2)}(x,\varepsilon)\right]dx=0, \tag{9}$$

$$k=0, 1, 2, \cdots.$$

Применяя к системе уравнений (8) метод вариации произвольных постоянных, получим

$$u_k(x,\varepsilon)=u_{k0}(x)+\int\limits_0^\pi \omega_k^{(1)}(x,t)\,F_k^{(1)}(t,\varepsilon)\,dt+\int\limits_0^\pi \omega_k^{(2)}(x,t)\,F_k^{(2)}(t,\varepsilon)\,dt,$$

$$w_k(x,\varepsilon)=w_{k0}(x)+\int\limits_0^\pi \omega_k^{(3)}(x,t)\,F_k^{(1)}(t,\varepsilon)\,dt+\int\limits_0^\pi \omega_k^{(4)}(x,t)\,F_k^{(2)}(t,\varepsilon)\,dt,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\cdots. \tag{10}$$

При $k\geqslant 1$ функции $\omega_k^{(\nu)}(x,t)$, $\nu=1,\ 2,\ 3,\ 4$, определяются следующим образом: при $t\leqslant x$

$$\omega_k^{(1)}(x,t)=\frac{\sigma^2}{\mu B_0^2}\frac{1}{p_k^2-q_k^2}\left[-\frac{k(p_k^2-q_k^2)}{(\lambda_{k0}-k^2)(p_k^2+k^2)(q_k^2+k^2)}\cos kx\sin kt+\right.$$

$$+\frac{p_k}{(\lambda_{k0}+p_k^2)(p_k^2+k^2)}\frac{\operatorname{ch} p_k t\operatorname{ch} p_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} p_k\pi}-\frac{q_k}{(\lambda_{k0}+q_k^2)(q_k^2+k^2)}\times$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{ch} q_k t\operatorname{ch} q_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} q_k^\pi}\right],$$

$$\omega_k^{(2)}(x,t)=\frac{\sigma}{\mu B_0}\frac{1}{p_k^2-q_k^2}\left[\frac{p_k^2-q_k^2}{(p_k^2+k^2)(q_k^2+k^2)}\cos kx\cos kt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p_k^2+k^2}\frac{\operatorname{sh} p_k t\operatorname{ch} p_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} p_k\pi}-\frac{1}{q_k^2+k^2}\frac{\operatorname{sh} q_k t\operatorname{ch} q_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} q_k^\pi}\right],$$

$$\omega_k^{(3)}(x,t)=\frac{\sigma}{\mu B_0}\frac{1}{p_k^2-q_k^2}\left[-\frac{p_k^2-q_k^2}{(p_k^2+k^2)(q_k^2+k^2)}\sin kx\sin kt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p_k^2+k^2}\frac{\operatorname{ch} p_k\ \operatorname{sh} p_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} p_k\pi}+\frac{1}{q_k^2+k^2}\frac{\operatorname{ch} q_k t\operatorname{sh} q_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} q_k\pi}\right],$$

$$\omega_k^{(4)}(x,t)=\frac{1}{\mu}\frac{1}{p_k^2-q_k^2}\left[\frac{(\lambda_{k0}-k^2)(p_k^2-q_k^2)}{k(q_k^2+k^2)(q_k^2+k^2)}\sin kx\cos kt-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_{k0}+p_k^2}{p_k(p_k^2+k^2)}\frac{\operatorname{sh} p_k t\operatorname{sh} p_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} p_k\pi}+\frac{\lambda_{k0}+q_k^2}{q_k(q_k^2+k^2)}\frac{\operatorname{sh} q_k t\operatorname{sh} q_k(\pi-x)}{\operatorname{sh} q_k\pi}\right],$$

где

$$p_k^2=-\frac{1}{2}\left[\lambda_{k0}-k^2+\sqrt{(\lambda_{k0}-k^2)^2+\frac{4}{\mu}\frac{\lambda_{k0}}{k^2}\left(\lambda_{k0}-\frac{1}{B_0^2}\right)}\right],$$

$$q_k^2=-\frac{1}{2}\left[\lambda_{k0}-k^2-\sqrt{(\lambda_{k0}-k^2)^2+\frac{4}{\mu}\frac{\lambda_{k0}}{k^2}\left(\lambda_{k0}-\frac{1}{B_0^2}\right)}\right],$$

а при $x<t$

$$\omega_k^{(1)}(x,t)=\omega_k^{(1)}(t,x),\ \omega_k^{(2)}(x,t)=\omega_k^{(3)}(t,x),\ \omega_k^{(3)}(x,t)=\omega_k^{(2)}(t,x),$$

$$\omega_k^{(4)}(x,t)=\omega_k^{(4)}(t,x).$$

Функцию $\omega_0^{(\nu)}(x, t)$ можно получить из $\omega_k^{(\nu)-}(x, t)$ формальным предельным переходом, когда $k \to 0$.

Нетрудно убедиться, что разложения функций $F_k^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $F_k^{(2)}(x, \varepsilon)$ по степеням параметра ε имеют следующую структуру:

$$F_k^{(1)}(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left[\psi_{kj}^{(1)}(x) + \Phi_{kj}^{(1)}(x)\right],$$

$$F_k^{(2)}(x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left[\psi_{kj}^{(2)}(x) + \Phi_{kj}^{(2)}(x)\right], \tag{11}$$

где

$$\psi_{kj}^{(1)}(x) = \frac{B_j'}{B_0} u_{k0}' + \left[c \frac{B_j''}{B_0} + \lambda_{kj}\right] u_{k0} + \left[B_j'' + \sigma \frac{B_j}{B_0^2}\right] w_{k0}' +$$
$$+ \left[B_j''' + \frac{B_j'}{B_0^2}\right] w_{k0}, \tag{12}$$

$$\psi_{kj}^{(2)}(x) = -\left[B_j'' + \sigma \frac{B_j}{B_0^2}\right] u_{k0}' + \frac{B_j'}{B_0^2} u_{k0} - 2\mu \frac{B_j'}{B_0} w_{k0}''' - 2\mu \frac{B_j''}{B_0} w_{k0}'' -$$
$$- \mu \frac{B_j'''}{B_0} w_{k0}' + \left[2\sigma \frac{B_j''}{B_0} + 2 \frac{B_j}{B_0^3} + \lambda_{kj}\right] w_{k0},$$

$\Phi_{k1}^{(1)}(x) \equiv 0$, $\Phi_{k1}^{(2)}(x) \equiv 0$, а в выражения функций $\Phi_{kj}^{(1)}(x)$ и $\Phi_{kj}^{(2)}(x)$, при $j \geqslant 2$, входят функции $B_n^{(s)}(x)$, $w_{kn}^{(s)}(x)$, $u_{kn}^{(r)}(x)$, $(s = 0, 1, 2, 3, 4,$ $r = 0, 1, 2)$ и числа λ_{kn} с $n \leqslant j - 1$.

В силу (11), формулу (9) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \left\{ \int_0^{\pi} \left[u_{k0}(x) \psi_{kj}^{(1)}(x) + w_{k0}(x) \psi_{kj}^{(2)}(x)\right] dx + \int_0^{\pi} \left[u_{k0}(x) \Phi_{kj}^{(1)}(x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + w_{k0}(x) \Phi_{kj}^{(2)}(x)\right] dx \right\} = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots.$$

В этой формуле, приравнивая нулю коэффициент при ε^j, и имея в виду формулы (6) и (12), получим

$$B_j'(\pi) - B_j'(0) = -\pi \frac{B_0}{\sigma} \lambda_{0j} - \frac{B_0}{\sigma} \int_0^{\pi} \Phi_{0j}^{(1)}(x)\, dx, \quad j = 1, 2, 3, \cdots, \tag{13}$$

$$a_k \int_0^{\pi} \cos 2kx\, B_j(x)\, dx = b_k \lambda_{kj} + c_k \left[B_j'(\pi) - B_j'(0)\right] + d_k \int_0^{\pi} B_j(x)\, dx + E_{kj},$$
$$k, j = 1, 2, 3, \cdots, \tag{14}$$

где

$$a_k = -\frac{1-2\sigma}{B_0}k^2 + \frac{2}{\sigma B_0}(\lambda_{k0}-k^2) - \frac{4B_0}{\sigma}\lambda_{k0}(\lambda_{k0}-k^2) +$$

$$+\frac{1}{\sigma^2 B_0}\cdot\frac{1}{k^2}(\lambda_{k0}-k^2)^2 + \frac{2\mu B_0}{\sigma^2}k^2(\lambda_{k0}-k^2)^2,$$

$$b_k = \frac{\pi}{2}\left[1+\frac{B_0^2}{\sigma^2 k^2}(\lambda_{k0}-k^2)^2\right],$$

$$c_k = \frac{\sigma}{B_0} + \frac{\mu B_0}{\sigma^2}(\lambda_{k0}-k^2)^2,$$

$$d_k = \frac{1}{B_0}(\lambda_{k0}-k^2)\left[1+\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{k^2}(\lambda_{k0}-k^2)\right],$$

$$E_{kj} = \int_0^\pi\left[\cos kx\,\Phi_{kj}^{(1)}(x) + \frac{B_0}{\sigma}\frac{1}{k}(\lambda_{k0}-k^2)\sin kx\,\Phi_{kj}^{(2)}(x)\right]dx.$$

Если учесть опущенные индексы $(\pm)$, то формула (14) на самом деле представляет собой две формулы (14^+) и (14^-). Важно отметить, что числа a_k^+ и a_k^- одновременно не обращаются в нуль: $|a_k^+| + |a_k^-| \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \cdots$. Обозначим $M = \{k; a_k^+ d_k^- - a_k^- d_k^+ = 0\}$. Множество M может содержать не более двух элементов, так как $a_k^+ d_k^- - a_k^- d_k^+ = 0$ эквивалентно относительно k^2 уравнению второго порядка. Взяв $k \overline{\in} M$, из формул (14^+) и (14^-) получим

$$\int_0^\pi B_j(x)\,dx = \frac{1}{a_k^+ d_k^- - a_k^- d_k^+}\{(a_k^- b_k^+ \lambda_{kj}^+ - a_k^+ b_k^- \lambda_{kj}^-) +$$

$$+ (a_k^- c_k^+ - a_k^+ c_k^-)[B_j'(\pi) - B_j'(0)] + (a_k^- E_{kj}^+ - a_k^+ E_{kj}^-)\}. \tag{15}$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots.$$

Теперь опишем процесс нахождения функций $B_j(x)$, $j = 1, 2, 3, \cdots$. При $j = 1$ из формулы (13) находим число $[B_1'(\pi) - B_1'(0)]$, затем из формул (15) и (14) -- интегралы

$$\int_0^\pi \cos 2kx\, B_1(x)\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Но значениями этих интегралов, в силу условия теоремы, однозначно определяется функция $B_1(x)$. Когда $B_1(x)$ уже известна, из формул (10) находим функции $u_{k1}(x)$ и $w_{k1}(x)$. После этого становятся известными как функции $\Phi_{k2}^{(1)}(x)$, $\Phi_{k2}^{(2)}(x)$, так и числа E_{k2}. Далее из формул (13), (15), (14) при $j = 2$ найдем функцию $B_2(x)$. Продолжая этот процесс, найдем все функции $B_j(x)$, $j = 1, 2, 3, \cdots$, т. е. функцию $B(x, \varepsilon)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Как уточнение теоремы 1 отметим, что для определения функции $B(x, \varepsilon)$ не обязательно использовать весь спектр задачи (1), (2). Прежде всего покажем, что можно обойтись без собственного значения $\lambda_0(\varepsilon)$. Действительно, интегрируя левую часть формулы (14) два раза по частям, получим

$$B'_j(\pi) - B'_j(0) = \frac{1}{\frac{a_k}{4k^2} - c_k} \left[b_k \lambda_{kj} + E_{kj} + d_k \int_0^\pi B_j(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{a_k}{4k^3} \int_0^\pi \cos 2kx\, B'_j(x)\, dx \right].$$

В этой формуле переходя к пределу, когда $k \to \infty$ и учитывая (7), а также выражения чисел a_k, b_k, c_k, d_k, получим

$$B'_j(\pi) - B'_j(0) = -\pi \frac{2B_0}{1+2\sigma} \lim_{k\to\infty} \left[\lambda^-_{kj} + \frac{1}{b^-_k} E^-_{kj} \right] =$$

$$= -\pi \frac{B_0}{\mu} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} \left[\lambda^+_{kj} + \frac{1}{b^+_k} E^+_{kj} \right], \tag{16}$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots,$$

после чего вместо формулы (13) можно использовать формулу (16). Обозначим $N^- = \{k;\ a^-_k = 0\}$ и $N^+ = \{k;\ a^+_k = 0\}$. Множество $N^- \cup N^+$ может содержать не более шести элементов. При $k > 1$, кроме некоторого значения $k = k_0$, $k_0 \in M$, из собственных значений $\lambda^-_k(\varepsilon)$ и $\lambda^+_k(\varepsilon)$ можно использовать только одно: при $k \in N^-$ используется $\lambda^+_k(\varepsilon)$, а при $k \in N^+ - \lambda^-_k(\varepsilon)$.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим задачу (1), (3). Обозначения в этом случае оставим те же, что в § 1, добавляя всюду значок ($\hat{}$). Чтобы не повторять рассуждений, сделанных в § 1, приведем здесь только некоторые формулы. Собственными значениями и собственными вектор-функциями задачи (4), (3) являются

$$\hat{\lambda}^\pm_{k0} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(k - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{B_0^2} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left[\mu\left(k - \frac{1}{2}\right)^4 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{B_0^2} \right]^2 + \frac{4\sigma^2}{B_0^2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{k0}^{\pm}(x) \\ \hat{w}_{k0}^{\pm}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x \\ \frac{B_0}{\sigma}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\left[\hat{\lambda}_{k0}^{\pm}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \end{pmatrix},$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Для нахождения функций $\hat{u}_{kj}(x)$ и $\hat{w}_{kj}(x)$ получаем формулы

$$\hat{u}_k(x,\varepsilon)=\hat{u}_{k0}(x)+\int_0^{\pi}\hat{\omega}_k^{(1)}(x,t)\hat{F}_k^{(1)}(t,\varepsilon)\,dt+\int_0^{\pi}\hat{\omega}_k^{(2)}(x,t)\hat{F}_k^{(2)}(t,\varepsilon)\,dt,$$

$$\hat{w}_k(x,\varepsilon)=\hat{w}_{k0}(x)+\int_0^{\pi}\hat{\omega}_k^{(3)}(x,t)\hat{F}_k^{(1)}(t,\varepsilon)\,dt+\int_0^{\pi}\hat{\omega}_k^{(4)}(x,t)\hat{F}_k^{(2)}(t,\varepsilon)\,dt,$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\cdots. \tag{17}$$

Функцию $\hat{\omega}_k^{(\nu)}(x,t)$ можно получить из $\omega_k^{(\nu)}(x,t)$, если в выражение последней вместо k, λ_{k0}, p_k, q_k, $\operatorname{sh}p_k\pi$, $\operatorname{sh}q_k\pi$, $\operatorname{sh}p_k(\pi-x)$, $\operatorname{sh}q_k(\pi-x)$, $\operatorname{ch}p_k(\pi-x)$, $\operatorname{ch}q_k(\pi-x)$ подставить соответственно

$$k-\frac{1}{2},\ \hat{\lambda}_{k0},\ \hat{p}_k,\ \hat{q}_k,\ \operatorname{ch}\hat{p}_k\pi,\ \operatorname{ch}\hat{q}_k\pi,\ \operatorname{ch}\hat{p}_k(\pi-x),\ \operatorname{ch}\hat{q}_k(\pi-x),$$

$$\operatorname{sh}\hat{p}_k(\pi-x),\ \operatorname{sh}\hat{q}_k(\pi-x),$$

где числа $\hat{p}_k$ и $\hat{q}_k$ определяются по аналогии с p_k и q_k.

Формула (14) в этом случае заменяется следующей

$$\hat{a}_k\int_0^{\pi}\cos(2k-1)x\,B_j(x)\,dx=\hat{b}_k\hat{\lambda}_{kj}+c_k'\left[B_j'(\pi)+B_j'(0)\right]+$$

$$+c_k''\left[B_j'(\pi)-B_j'(0)\right]+\hat{d}_k\int_0^{\pi}B_j(x)\,dx+\hat{E}_{kj}, \tag{18}$$

$$k,\ j=1,\ 2,\ 3,\cdots,$$

где

$$c_k'=-\frac{\sigma}{2B_0}+\frac{B_0}{\sigma}\frac{\hat{\lambda}_{k0}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\left[\hat{\lambda}_{k0}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$c_k''=\frac{\sigma}{2B_0}+\frac{B_0}{\sigma}\frac{\hat{\lambda}_{k0}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\left[\hat{\lambda}_{k0}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{\mu B_0}{\sigma^2}\left[\hat{\lambda}_{k0}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2,$$

а числа $\hat{a}_k$, $\hat{b}_k$, $\hat{d}_k$ получаются из выражения для чисел a_k, b_k, d_k, если вместо k и λ_{k0} подставить соответственно $k-\frac{1}{2}$ и $\hat{\lambda}_{k0}$. Здесь тоже $|\hat{a}_k^+|+|\hat{a}_k^-|\neq 0$, $k=1, 2, 3,\cdots$. Для нахождения чисел $[B_j'(\pi)+B_j'(0)]$ получаем формулу

$$B_j'(\pi)+B_j'(0)=2\sigma\,[B_j'(\pi)-B_j'(0)]+2\pi B_0\lim_{k\to\infty}\left[\hat{\lambda}_{kj}^-+\frac{1}{\hat{b}_k^-}\hat{E}_{kj}^-\right]=$$

$$=-2\,[B_j'(\pi)-B_j'(0)]-\pi\frac{B_0}{\mu}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\left[\hat{\lambda}_{kj}^++\frac{1}{\hat{b}_k^+}\hat{E}_{kj}^+\right], \tag{19}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Определение функций $B_j(x)$ осуществляется с помощью формул (13), (15), (19), (14), (18), (10), (17). В этом случае используется тот факт, что значениями интегралов

$$\int\limits_0^\pi \cos kx\, B_j(x)\,dx,\quad k=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

функция $B_j(x)$ определяется однозначно. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Замечание 1 остается в силе и в этом случае. Что касается спектра задачи (1), (3), то из собственных значений $\hat{\lambda}_k^-(\varepsilon)$ и $\hat{\lambda}_k^+(\varepsilon)$ можно использовать только одно, причем, если множества $\hat{N}^-$ и $\hat{N}^+$ определены по аналогии с N^- и N^+, то при $k\in\hat{N}^-$ используется $\hat{\lambda}_k^+(\varepsilon)$, а при $k\in\hat{N}^+$ — $\hat{\lambda}_k^-(\varepsilon)$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить признательность моему научному руководителю профессору В. Б. Лидскому за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Институт проблем механики
АН СССР
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3.IX.1974

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Թաղանթների տեսության մի հակադարձ խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Քննարկվում է պտտման թաղանթի միջօրեականի որոշման հարցը, եթե հայտնի է թաղանթի առանցքասիմետրիկ տատանումների հաճախականությունների սպեկտրը։ Հոդվածում ապացուցվում է, որ որոշ ենթադրությունների դեպքում միջօրեականը տարբեր եզրային պայմաններին համապատասխանող երկու սպեկտրի միջոցով որոշվում է միակ ձևով։ Մի ուրիշ ենթադրությունների դեպքում այն որոշվում է մեկ սպեկտրի միջոցով։

I. G. KHACHATRIAN. *On a converse problem in the theory of shells*
(summary)

The paper consideres the problem of finding the meridian of a shell of rotation when the frequency spectrum of its axissymmetrical oscillations is assumed to be known. It is proved that under some assumptions the meridian is reconstructed uniquely from two spectra, corresponding to different boundary conditions.

However sometimes the knowledge of one spectrum suffices for the purpose.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Я. Айнола.* К обратной задаче о собственных колебаниях упругих оболочек, ПММ, 1971, 35, вып. 2, 358—364.
2. *М. Л. Гервер, Д. А. Каждан.* О нахождении функции $\rho(x)$ по собственному числу $s_i = s(p)$ уравнения $y'' + [p\rho(x) - s]\, y = 0$, Мат. сб. 73, вып. 2, 1967, 227—235.
3. *F. J. Niordson.* A method for solving inverse eingenvalue problems, Recent Progress in Applied Mechanics, The Folk Odquist Volume, Stockholm, 1967, 373—382.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

Н. Х. МЕСРОПЯН

О СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО n-МЕРНЫМ СТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССОМ

Гильбертово пространство $H_T(x)$, порожденное значениями процесса $x(t)$, $t \in T$ со спектральной мерой $F(d\lambda)$, изометрично пространству $L_T(F)$ — действительной линейной оболочке функций $e^{i\lambda t}$ от $\lambda \in [-\pi, \pi]$ для целочисленного t и $\lambda \in (-\infty, \infty)$ в случае непрерывного t, замкнутой в среднем квадратичном. Аналитическая структура пространства $L_T(F)$ для одномерного стационарного процесса довольно хорошо изучена (см., напр., [1]).

Здесь приводятся некоторые результаты, являющиеся многомерным обобщением соответствующих результатов, содержащихся в книге И. А. Ибрагимова и Ю. А. Розанова „Гауссовские случайные процессы“.

Пусть $x(t) = \{x_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$, $t \in T$ — n-мерный стационарный процесс, $H_T(F)$ — замкнутая линейная оболочка $x_k(t)$, $t \in T$, $k=\overline{1,n}$, $F(d\lambda) = \{F_{kj}(d\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ — спектральная мера процесса $x(t)$, $f(\lambda) = \{f_{kj}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} = \left\{\dfrac{F_{kj}(d\lambda)}{d\lambda}\right\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ — спектральная плотность (с.п.) $x(t)$.

Обозначим через $L^2_T(F) = L_T = L$ пространство вектор-функций $\varphi(\lambda) = (\varphi_1(\lambda), \cdots, \varphi_n(\lambda))$, определенных на $[-\pi, \pi]$ для целочисленного $t = 0, \pm 1, \cdots$, (на $(-\infty, \infty)$ — для непрерывного t) и удовлетворяющих условию

$$\int \varphi F(d\lambda) \varphi^* = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) \varphi^*(\lambda) d\lambda = \int \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i(\lambda) f_{ij}(\lambda) \overline{\varphi_j(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

Если не различать вектор-функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, разность которых удовлетворяет условию

$$\int [\varphi - \psi] F(d\lambda) [\varphi - \psi]^* = 0,$$

и ввести скалярное произведение как

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) \psi^*(\lambda) d\lambda,$$

то $L^2(F)$ станет гильбертовым пространством с нормой $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$. Пространство $H(x)$ изометрично пространству $L_T(F)$ ([2]). Таким образом, исследование стационарных процессов сводится к изучению аналитической структуры пространства $L_T(F) = L$.

Введем обозначения:

$H_a^b(x)$ — замкнутая в ср. кв. линейная оболочка величин $x_k(t)$, $k=\overline{1,\ n}$, $a \leqslant t < b$;

$H_{-\infty}^0(x)$ — пространство прошлого процесса $x(t)$;

$H_0^\infty(x)$ — пространство будущего процесса $x(t)$;

$H^{+/-}(x) = P_{H_{-\infty}^0(x)} H_0^\infty(x)$, где $P(\cdot)$ — проектор на $(\cdot)$, — проекция пространства будущего $x(t)$ на пространство прошлого;

$L^- = L_{-\infty}^0$, $L^+ = L_0^\infty$, $L^{+/-}$ $(L^{-/+})$ — подпространства L, изометричные соответственно подпространствам $H_{-\infty}^0$, H_0^∞, $H^{+/-}$ $(H^{-/+})$;

$(L^-)^\perp$ — пространство, ортогональное L^-.

Обозначим через H^{2+} — класс функций $\varphi(z)$, аналитических внутри единичного круга $|z|<1$, таких, что

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(re^{i\lambda})|^2 \, d\lambda < \infty;$$

$H_{(n)}^{2+}$ — класс аналитических внутри единичного круга вектор-функций $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \cdots, \varphi_n(z))$ таких, что

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \|\varphi(re^{i\lambda})\|^2 \, d\lambda < \infty, \ z = re^{i\lambda};$$

$\mathbf{H}_{(n)}^{2+}$ — класс аналитических при $|z|<1$ матриц-функций $\varphi(z)$ конечного порядка n с $\det \varphi(z) \not\equiv 0$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \|\varphi(re^{i\lambda})\|^2 \, d\lambda < \infty, \ z = re^{i\lambda}.$$

Матрица-функция $\varphi(z)$ принадлежит $H_{(n)}^{2+}$ тогда и только тогда, когда ее элементы принадлежат скалярному классу H^{2+} ([3]).

Пусть $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в круге. Тогда функция $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ — аналитична вне круга. Сопоставив указанным образом каждой функции из H^{2+} функцию, аналитическую вне единичного круга, мы получим класс H^{2-} функций, аналитических вне единичного круга.

Образом класса H^{2+} (H^{2-}) при конформном отображении круга на верхнюю полуплоскость является класс $\widetilde{H}^{2+}$ ($\widetilde{H}^{2-}$) аналитических в верхней (нижней) полуплоскости функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+iy)|^2\, dx \leqslant M < \infty,\ y > 0,$$

где постоянная M не зависит от x и y.

Матрица-функция $\varphi(z) \in H^{2+}_{(n)}$ называется внешней, если для всякой матрицы-функции $\psi(z) \in H^{2+}_{(n)}$, удовлетворяющей почти всюду на $[-\pi, \pi]$ соотношению

$$\psi^*(e^{i\lambda})\, \psi(e^{i\lambda}) = \varphi^*(e^{i\lambda})\, \varphi(e^{i\lambda})$$

справедливо неравенство

$$\psi^*(z)\, \psi(z) \leqslant \varphi^*(z)\, \varphi(z),\ |z| < 1.$$

Матрица-функция, принадлежащая $H^{2+}_{(n)}$, называется внутренней, если ее предельные значения почти всюду на единичной окружности унитарны.

Процесс $x(t)$ называется процессом ранга m, если его с.п. $f(\lambda)$ почти при всех λ имеет конечный ранг m. Процесс $x(t)$ называется регулярным, если $\bigcap_t H^t_{-\infty}(x) = \{0\}$, причем, если $\operatorname{def} f(\lambda) \neq 0$ и процесс конечномерен, то отсюда можно получить, что и $\bigcap_t H^-_t(x) = \{0\}$. Матрица с. п. $f(\lambda)$ для регулярного процесса полного ранга допускает факторизацию

$$f(\lambda) = G(e^{i\lambda})\, G^*(e^{i\lambda}) = \Gamma^*(e^{i\lambda})\, \Gamma(e^{i\lambda}),$$

где $G(z)$ и $\Gamma(z)$ — внешние матрицы-функции из $H^{2+}_{(n)}$, $|z| < 1$ связаны между собой соотношением $G = \Gamma^* U$, $|z| = 1$, где $U(z)$ — унитарная на единичной окружности матрица-функция.

На пространстве $H(x)$ действует унитарный оператор U такой, что

$$U x(t) = x(t+1).$$

Теорема 1. *Если $x(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, n-мерный регулярный процесс полного ранга, то*

$$L^- = H^{2-}_{(n)} \Gamma^{*-1},\ L^+ = H^{2+}_{(n)} G^{-1},$$

где $\Gamma(z)$ и $G(z)$ — внешние матрицы-функции из класса $H^{2+}_{(n)}$, факторизирующие с.п. процесса $x(t)$.

Доказательство. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in L^+$. Тогда существует последовательность полиномиальных векторов $P_n(e^{i\lambda})$ таких, что $\|\varphi - P_n\|_F \to 0$. Имеем

$$\|\varphi G - P_n G\|^{(2)} = \|\varphi - P_n\|_F \to 0, \ n \to \infty.$$

Функции $\{P_n G\}_n$ всюду плотны в пространстве $H^{2+}_{(n)}$ ([5]). Поэтому $\varphi G \in H^{2+}_{(n)}$.

Обратно, пусть $\varphi \in H^{2+}_{(n)} G^{-1}$. Так как G — внешняя матрица-функция, множество функций $\{P_n G\}_n$ всюду плотно в $H^{2+}_{(n)}$ и $\|\varphi G - P_n G\|^{(2)} = \|\varphi - P_n\|_F \to 0$, $n \to \infty$. Значит $\varphi \in L^+$. Учитывая, что с.п. $f(\lambda)$ можно факторизовать и внешней матрицей-функцией $\Gamma(z)$ из $\mathbf{H}^2_{(n)}$, можно аналогичным образом доказать второе утверждение теоремы.

Теорема 1′: *Пусть $x(t)$—n-мерный регулярный процесс полного ранга с непрерывным t. Тогда*

$$L^- = \widetilde{H}^{2-}_n \Gamma^{*-1}, \quad L^+ = \widetilde{H}^{2+}_{(n)} G^{-1},$$

где $G(z)$ и $\Gamma(z)$—внешние матрицы-функции из класса $\widetilde{H}^{2+}_{(n)}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $x(t)$ — одномерный регулярный процесс со с.п. $f(\lambda)$, $\varepsilon(t)$ — ортогональный процесс из разложения Вольда

$$\left(x(t) = \sum_{s=0}^{\infty} a(s)\,\varepsilon(s-t), \ H^t_{-\infty}(x) = H^t_{-\infty}(\varepsilon)\right).$$

Теорема 2. *Несовпадение пространства $H^{+/-}$ с пространством H^- эквивалентно регулярности процесса $y(t) = (x(t), \varepsilon(t))$; пространство $H^{+/-}$ не совпадает с пространством H^- (или $H^{-/+} \neq H^+$) тогда и только тогда, когда с.п. $f(\lambda)$ совпадает с граничным значением функции ограниченной характеристики.*

Доказательство. Приведем доказательство для процессов с дискретным временем. Для непрерывного t доказательство то же. Пусть $y(t) = (x(t), \varepsilon(t))$ — заданный регулярный процесс. Построим процесс $z(t) = (x(t), \tilde{\varepsilon}(t))$, где $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t+1)$. Регулярность процесса $y(t)$ эквивалентна регулярности процесса $z(t)$. Регулярность последнего эквивалентна условию $H_0^\infty(z) \neq H^\infty_{-\infty}(z)$. Представим пространство $H_0^\infty(z)$ в виде ортогональной суммы

$$H_0^\infty(z) = H_0^\infty(\tilde{\varepsilon}) \oplus P_{H^{-1}_{-\infty}(\tilde{\varepsilon})} H_0^\infty(x) = H_0^\infty(\tilde{\varepsilon}) \oplus P_{H^0_{-\infty}(\tilde{\varepsilon})} H_0^\infty(x) =$$

$$= H_0^\infty(\tilde{\varepsilon}) \oplus H^{+/-}(x).$$

Условие регулярности процесса $z(t)$ эквивалентно тому, что $H^{+/-}(x) = H^{-0}_{-\infty}(\varepsilon) = H^{-1}_{-\infty}(\tilde{\varepsilon})$.

Следовательно

$$H^{+/-}(x) \neq H^-(x).$$

В силу изометричности пространств $H(x)$ и L, условие $H^{+/-}(x) = H^{-}(x)$ эквивалентно условию $L^{-/-} \neq L^{-}$.

Доказательство второй части теоремы приводится для пространств $L^{-/+}$ и L^{+}. Случай $L^{+/-} = L^{-}$ рассматривается аналогично. Итак, пусть $L^{-/+} \neq L^{+}$. Обозначим ортогональное дополнение к $L^{-/+}$ до L^{+} через $\hat{L}$:

$$L^{+} = L^{-/+} \oplus \hat{L}.$$

Воспользовавшись представлением ([1]) пространств L^{-} и L^{+}, можно написать

$$\hat{L} = L^{+} \cap (L^{-})^{\perp} = \frac{1}{g} H^{2+} \cap \frac{1}{\bar{g}} H^{2+}.$$

Введем пространство $\tilde{L} = g\hat{L}$. Пространство $\tilde{L} \subset H^{2+}$ z-инвариантно и имеет вид

$$\tilde{L} = H^{2+} \cap \frac{g}{\bar{g}} H^{2+}.$$

По известной теореме ([7]) z-инвариантное в H^{2+} подпространство $\tilde{L}$ представимо в виде

$$\tilde{L} = \theta(z) \cdot H^{2+},$$

где $\theta(z)$ — внутренняя функция из H^{2+}. Тогда $\frac{\bar{g}}{g}\theta = \psi$, где $\psi \in H^{2+}$.

Поэтому $\frac{\bar{g}}{g}$ является функцией ограниченной характеристики, а именно, $\frac{\bar{g}}{g} = \frac{\theta}{\psi}$, где $\theta(z)$ и $\psi(z)$ из H^{∞}. Отсюда следует, что $\bar{g}(z)$ — функция ограниченной характеристики, а $f(\lambda) = g(e^{i\lambda})\,\bar{g}(e^{i\lambda})$ — граничным значением функции ограниченной характеристики.

Обратно, пусть с. п. $f(\lambda)$ является граничным значением функции ограниченной характеристики $\frac{r_1(z)}{r_2(z)}$, $r_i \in H^{\infty}$, $i = 1, 2$. Тогда, так как $\ln f(\lambda) \in L^1$, функцию $\frac{r_1(z)}{r_2(z)}$ можно факторизовать

$$\frac{r_1(z)}{r_2(z)} = g(z)\,\bar{g}(z),$$

где $g(z)$ — внешняя функция из класса H^{2+}. Отсюда следует, что функции

$$\bar{g} = \frac{r_1(z)}{r_2(z) \cdot g(z)} \quad \text{и} \quad \frac{g(z)}{\bar{g}(z)}$$

являются функциями ограниченной характеристики.

Так как это отношение по модулю равно единице на $|z|=1$, можно считать, что $\frac{g(z)}{\bar{g}(z)}$ есть отношение двух внутренних функций из H^{2+}. Тогда $L^{+/-} \neq L^{-}$ ([1]).

Пример. Пусть $x(t)$ — регулярный процесс, для которого $L^{-/+}(x) \neq L^{+}(x)$, а $y(t)$ — процесс, ортогональный $x(t)$, такой, что $L^{-/+}(y) = L^{+}(y)$. Ясно, что процесс $z = (x(t), y(t))$ не является регулярным, хотя $L^{-/+}(z) \neq L^{+}(z)$.

Этот пример показывает, что теорема 2 для n-мерного случая, вообще говоря, неверна.

Пусть $x(t)$ — n-мерный регулярный процесс, U — унитарный оператор действующий на $H(x)$, $\hat{H}$ — ортогональное дополнение $H^{+/-}$ до $H^{0}_{-\infty}$:

$$H^{0}_{-\infty} = H^{+/-} \oplus \hat{H}.$$

Обозначим $\tilde{H}$ — наибольшее U^*-инвариантное пространство в $H^{+/-}$ и $\hat{r} = \dim\ (\hat{H} \ominus U^* \hat{H})$, $\tilde{r} = \dim\ (\tilde{H} \ominus U^* \tilde{H})$.

Лемма 1. *Условие $\tilde{r} = 0$ эквивалентно $\tilde{H} = \{0\}$, $\hat{r} = 0$ эквивалентно $\hat{H} = \{0\}$).*

Доказательство. Пусть $\tilde{r} = 0$, тогда $\tilde{H} = U^* \tilde{H}$ и $\tilde{H} = U\tilde{H}$. Но тогда подпространство $H^{0}_{-\infty}(x)$ содержало бы подпространство, приводящее оператор U, что невозможно в случае нетривиального $\tilde{H}$, ввиду регулярности процесса $x(t)$.

Для $\hat{r} = 0$ доказательство аналогично.

Лемма 2. *$\hat{r} + \tilde{r} = n$, где $n = \dim (H^{0}_{-\infty} \ominus U^* H^{0}_{-\infty})$.*

Доказательство. Разложим пространство $H^{0}_{-\infty}$ в ортогональную сумму

$$H^{0}_{-\infty} = \tilde{H}^{+/-} \oplus \tilde{H} \oplus \hat{H},$$

где $\tilde{H}^{+/-} = H^{+/-} \ominus \tilde{H}$.

Пространства $\hat{H}$ и $\tilde{H}$ U^*-инвариантны. В силу их ортогональности $\tilde{r} + \hat{r} \leqslant n$. Предположим, $\tilde{r} + \hat{r} < n$. Тогда в пространстве $H^{0}_{-\infty}$ нашлось бы подпространство $\check{H}$, U^*-инвариантное и такое, что $\check{H} \perp \hat{H} \oplus \tilde{H}$, т. е. $\check{H} \subset H^{+/-}$. Это противоречит тому, что $\tilde{H}$ — наибольшее U^*-инвариантное подпространство. Лемма доказана.

Построим процесс из разложения Вольда n-мерного процесса $x(t)$.

Теорема 3. *Регулярность процесса $y(t)$ эквивалентна условию $\tilde{r} = 0$, $\tilde{r} = 0$ тогда и только тогда, когда с. п. $f(\lambda)$, $\det f(\lambda) \overset{n.b.}{\neq} 0$ совпадает с граничными значениями функции ограниченной характеристики.*

Доказательство. Пусть $y(t) = (x(-t), \varepsilon(-t))$ — регулярный процесс.

Это эквивалентно тому, что $H^0_{-\infty}(y)$ не содержит подпространств, приводящих оператор U. Обозначим $\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t+1)$ и $z(t) = (x(-t), \tilde{\varepsilon}(-t))$. Процесс $z(t)$ регулярен одновременно с $y(t)$. Тогда

$$H^0_{-\infty}(z) = H_0^-(\tilde{\varepsilon}) \oplus P_{H^{-1}_{-\infty}(\tilde{\varepsilon})} H_0^-(x) =$$

$$= H_0^-(\tilde{\varepsilon}) + P_{H^0_{-\infty}(\varepsilon)} H_0^-(x) = H_0^-(\tilde{\varepsilon}) \oplus H^{+/-}(x).$$

Пространство $H^0_{-\infty}(z)$ U-инвариантно. Предположим $\tilde{r} \neq 0$. Тогда $\tilde{H} \neq \{0\}$. Заметим, что $H_0^-(\tilde{\varepsilon}) = (H^0_{-\infty}(x))^\perp$. Поэтому

$$H^0_{-\infty}(z) = L\{H_0^-(x), H_0^-(\varepsilon)\} \supset H^{+/-}(x) \supset \tilde{H} \supset (U^*)^k \tilde{H} \quad (k=0, 1, 2, \cdots),$$

где $L\{\cdot\}$ — линейная оболочка $\{\cdot\}$, и, следовательно, поскольку $H^0_{-\infty}(x)$ U-инвариантно, то

$$H^0_{-\infty}(z) = L\{U^k \tilde{H},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\},$$

т. е. $H^0_{-\infty}(z)$ содержит подпространство, приводящее оператор U. Это противоречит регулярности $z(t)$.

Доказательству второй части теоремы 3 предпошлем лемму.

Лемма 3. *Пусть $f(z)$ — функция ограниченной характеристики из класса L^2. Тогда найдется такая внутренняя функция $v(z)$, что $v(z) f(z) \in H^{2+}$.*

Доказательство. По условию $f(z) = \dfrac{r_1(z)}{r_2(z)}$, где $r_1, r_2 \in H^\infty \subset H^2$. Факторизуя функции $r_1(z)$ и $r_2(z)$, получим $r_1(z) = u(z)\varphi(z)$, $r_2(z) = v(z) \cdot \psi(z)$, где φ, ψ — внешние, а u и v — внутренние из H^{2+}. Тогда

$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Отношение $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} \in H^{2+}$, так как $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} \in L^2$, ψ — внешняя ([7]). Тогда

$$f(z) \cdot v(z) = u(z) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \in H^{2+}.$$

Лемма 3 доказана.

Пусть $\tilde{r} = 0$. По лемме 1 $\tilde{H} = \{0\}$ и в силу изометричности

$$L^- = L^{+/-} \oplus \hat{L},\ \hat{L} = \{0\}.$$

Представим подпространство $\hat{L}$ в виде

$$\hat{L} = (L^{+})^{\perp} \cap L^{-} = H^{2-}_{(n)} G^{-1} \cap H^{2-}_{(n)} \Gamma^{*-1}.$$

Рассмотрим пространство

$$\tilde{L} = \hat{L}\,\Gamma^{*} = H^{2-}_{(n)} G^{-1}\, \Gamma^{*} \cap H^{2-}_{(n)}.$$

Пространство $\tilde{L}$ $\bar{z}$-инвариантно в $H^{2-}_{(n)}$. Тогда ([7]) в $H^{2}_{(n)}$ существует матрица-функция $V(z)$ такая, что V — частичная изометрия и при почти всех z, $|z|<1$ $\tilde{L} = H^{2-}_{(n)} V^{*}$. Поскольку $\dim(\hat{H} \ominus U^{*}\,\hat{H}) = \hat{r} = n$, $V(z)$ — унитарная матрица при почти всех z, $|z| = 1$. Следовательно, $H^{2-}_{(n)}\; U^{*} \cap H^{2-}_{(n)} = H^{2-}_{(n)} V^{*}$. Отсюда следует, что $V^{*}U \in H^{2-}_{(n)}$. Так как $U = \Gamma^{*-1} G$, то $V^{*}\Gamma^{*-1} G \in H^{2-}_{(n)}$, т. е. $G^{*}\Gamma^{-1}\; V = \psi$, $\psi \in H^{2+}_{(n)}$. Тогда $G^{*} = \psi\, V^{*}\Gamma$. Здесь V^{*} —матрица-функция ограниченной характеристики (так как V — внутренняя), ψ, $\Gamma \in H^{2+}_{(n)}$ и, следовательно, являются матрицами-функциями ограниченной характеристики. Таким образом, $G^{*}(z)$ — функция ограниченной характеристики, а $f(\lambda) = G(e^{i\lambda})\, G(e^{i\lambda})$ является граничным значением функции ограниченной характеристики.

Обратно, пусть $f(\lambda)$ совпадает с граничным значением функции ограниченной характеристики и $\det f(\lambda) \neq 0$ почти всюду. Тогда $\ln \det f(\lambda) \in L^{1}$ и, следовательно, $f(\lambda)$ факторизуема

$$f(\lambda) = \Gamma^{*}(e^{i\lambda})\,\Gamma(e^{i\lambda}),$$

где $\Gamma(z)$ — функция ограниченной характеристики. Поэтому $u = \Gamma^{*-1}G$, где $G \in H^{2+}_{(n)}$ тоже функция ограниченной характеристики.

Пусть $u(z) = \{u_{ij}(z)\}_{i=1,\,n}^{j=1,\,n}$, u_{ij} — функция ограниченной характеристики. Тогда по лемме 3 существуют $\varepsilon_{ij}(z)$ $(i,\ j = \overline{1,\ n})$—внутренние функции такие, что $u_{ij}\,\varepsilon_{ij} \in H^{2+}$. Обозначим $\prod\limits_{i,\,j} \varepsilon_{ij}(z) = \varepsilon(z)$. Тогда $\varepsilon(z)\,u(z) \in H^{2+}_{(n)}$. Заметим, что

$$H^{2-}_{(n)} \cap H^{2-}_{(n)}\, U^{*} \supset H^{2-}_{(n)}\, \varepsilon\, U^{*}.$$

Поскольку

$$\dim\ (H^{2-}_{(n)}\, \varepsilon^{*}\, U^{*} \ominus H^{2-}_{(n)}\, \bar{z}\, \bar{\varepsilon}\, U_{*}) = n,$$

то $\hat{r} = n$, а $\check{r} = 0$.

Доказательство для процессов с непрерывным временем аналогично приведенному.

Теорема 4. *Пусть спектральная мера $F(d\lambda)$ n-мерного стационарного случайного процесса $x(t)$ с непрерывным (дискретным) временем абсолютно непрерывна. Пространство $L^{+/-}(F)$ имеет конечную размерность в том и только в том случае, если спектральная плотность $f(\lambda) = \{f_{ij}(\lambda)\}_{i=\overline{1,\,n}}^{j=\overline{1,\,n}}$ рациональна относительно λ $(e^{i\lambda})$ конечной степени. В случае, если $f_{ij}(\lambda)$ рациональны относительно λ $(e^{i\lambda})$ степени $2k_{ij}$, то*

$$\max_i (\min_j k_{ij}) \leqslant \dim L^{+/-}(F) \leqslant \sum_i (\min_j k_{ij}).$$

Доказательство. Эта теорема является аналогом теоремы Кронкера ([4]) для n-мерного случая. Пусть $\dim L^{+/-}(F) = k < \infty$ и $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ — базис в $L^{+/-}$. Положим P—проектор $H(x)$ на $H^-(x)$. Составим корреляционную матрицу

$$B(t) = \begin{Vmatrix} B_{11}(t) & \cdots & B_{1n}(t) \\ B_{21}(t) & \cdots & B_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1}(t) & \cdots & B_{nn}(t) \end{Vmatrix}$$

с элементами

$$B_{ld}(t+s) = E x_l(t) x_d(-s) = (x_l(t), P x_d(-s)) = (Px_l(t), x_d(-s)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c_{jl}(t) (\eta_j, x_d(-s)) \sum_{j=1}^{k} c_{jl}(t) \mu_{jd}(s), \tag{1}$$

где $\mu_{ld}(s) = (\eta_l, x_d(-s))$, $(j = \overline{1, k}, \ d = \overline{1, n})$.

Для любых $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$ случайные величины $Px(t_0), \cdots$ $\cdots, Px(t_k)$ линейно зависимы, т. е. найдутся такие числа $a_0, a_1, \cdots$ $\cdots, a_k$, что

$$\sum_{l=0}^{k} a_l B(t_l+s) = \sum_{l=0}^{k} a_l \, \| B_{ld}(t_l+s) \| =$$

$$= \left\| \left(\sum_{l=0}^{k} a_l P x(t_l), x_d(-s) \right\| = 0 \tag{2}$$

(1) и (2) определяют $B(t)$. Покажем сначала, что $B(t)$ бесконечно дифференцируема при $t > 0$. Выберем nk бесконечно дифференцируемых функций $g_{di}(s)$ $(d = \overline{1, n}, \ i = \overline{1, k})$, таких, что

$$\det \left\| \int_0^\infty \mu_{ld}(s) g_{di}(s) \, ds \right\|_{d=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,k}} \neq 0$$

и $g_{dj}(s) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля. Из (1)

$$\int_0^\infty B_{ld}(t+s) g_{di}(s) \, ds = \int_0^\infty \sum_{j=1}^{n} c_{jl}(t) \mu_{jd}(s) g_{di}(s) \, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_{jl}(t) \int_0^\infty \mu_{jd}(s) g_{di}(s) \, ds.$$

Из равенства

$$\int_0^\infty B_{ld}(t+s) g_{di}(s) \, ds = \int_t^\infty B_{ld}(u) g_{di}(u-t) \, du$$

ясно, что

$$\int_0^\infty B_{ld}(t+s)\, g_{dl}(s)\, ds,$$

а вместе с этим и $c_{jl}(t)$ бесконечно дифференцируемы по t. Поэтому по (1) $B_{ld}(t)$ тоже бесконечно дифференцируем по t. Дифференцируя тождество (2), получим

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \frac{d^u}{ds^u} B(t_j+s)=0 \quad (u=\overline{0,k}),$$

что равносильно

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \frac{d^u}{ds^u} B_{ld}(t_j+s)=0 \quad (u=\overline{0,k},\ l,\ d=\overline{1,n}). \tag{3}$$

Из существования решения (3) вытекает, что

$$\det\begin{Vmatrix} B_{ld}(t_0+s) & B_{ld}(t_1+s) & \cdots & B_{ld}(t_k+s) \\ B'_{ld}(t_0+s) & B'_{ld}(t_1+s) & \cdots & B'_{ld}(t_k+s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B^{(k)}_{ld}(t_0+s) & B^{(k)}_{ld}(t_1+s) & \cdots & B^{(k)}_{ld}(t_k+s) \end{Vmatrix}_{(l,\ d=\overline{1,n})}=0. \tag{4}$$

Замечая, что

$$\int_0^t B^{(m)}_{ld}(u+s)du=B^{(m-1)}_{ld}(t+s)-B^{(m-1)}_{ld}(s),$$

и, выражая $B^{(n)}_{ld}(t_j+s)$ через $B^{(n)}_{ld}(s)$ $(n=\overline{0,k})$, $s>0$, можно переписать (4) так:

$$P\left(\frac{d}{ds} B_{ld}(s)\right)=0 \quad (l,d=\overline{1,n}),\ s>0, \tag{5}$$

где $P(z)$ — полином степени не выше k.

Фундаментальной системой решений (5) являются функции вида

$$e^{\lambda_{ld,1}} R_{ld,1}(s),\cdots,\ e^{\lambda_{ld,m_{ld}}}\cdot R_{ld,m_{ld}}(s), \tag{6}$$

где числа $\lambda_{ld,k}$ $(l,\ d=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m_{ld}})$ различны, $R_{ld\,m_{ld}}(s)$—полиномы степени $k_{m_{ld}}-1(\sum\limits_{l,d} k_{m_{ld}}=$ степени полинома $P)$.

Элементы корреляционной матрицы $B(s)$ суть линейные комбинации функций (6). По теореме Римана-Лебега при $s\to\infty$

$$B_{ld}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} f_{ld}(\lambda)\, d\lambda \to 0.$$

Поэтому все $Re\,\lambda_{ld}<0$. Заметим еще, что

$$B_{ld}(s)=\overline{B_{ld}(-s)},\quad s<0.$$

Очевидно

$$\int_{0}^{\infty} e^{i\lambda s} e^{\lambda_{ld, m_{ld}} s} R_{ld, m_{ld}}(s)\, ds = \widetilde{R}_{ld, m_{ld}}\left(\frac{1}{\lambda_{ld, m_{ld}} - i\lambda}\right), \tag{7}$$

где $\widetilde{R}_{ld, m_{ld}}(\lambda)$ — рациональная функция степени не выше $2k_{m_{ld}}$. Поэтому

$$\| f_{ld}(\lambda) \|_{l=\overline{1,n}}^{d=\overline{1,n}} = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} B_{ld}(s)\, ds \right\|_{l=\overline{1,n}}^{d=\overline{1,n}}$$

— рациональная относительно λ матрица-функция степени не выше $2k$.

Обратно, пусть $\| f_{ld}(\lambda) \|_{l=\overline{1,n}}^{d=\overline{1,n}}$ — рациональная относительно λ матрица, т. е. $f_{ld}(\lambda)$ $(l, d = \overline{1, n})$ — рациональные относительно λ функции степени $2k_{m_{ld}}$. Разложим $f_{ld}(\lambda)$ в сумму по степеням α, $\dfrac{1}{(\lambda^{l}{}_{d, m_{ld}} - i\lambda)^{\alpha}}$, $Re\,\lambda_{ld, m_{ld}} < 0$), а α — целое, не превосходящее кратности $k_{ld, m_{ld}}$ сопряженных полюсов $\pm i\lambda_{ld, m_{ld}}$. После применения преобразования Фурье к (7) получим, что $B_{ld}(s)$, $s > 0$ — снова сумма функций вида (6). Значит, $B(s)$ — решение системы дифференциальных уравнений вида (5) степени не выше k_{ld}. Любые $(k_{ld} + 1)$ решений $B_{ld}(t_0 + s), \cdots, B_{ld}(t_{k_{ld}} + s)$, $t_l > 0$ уравнения (5) линейно зависимы, т. е. существуют числа $a_0, a_1, \cdots, a_{ld}$ такие, что

$$\sum_{j=0}^{k_{ld}} a_j B_{ld}(t_j + s) = 0, \; s > 0, \; 0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_{k_{ld}}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k_{ld}} a_j E x_l(t_j) \overline{x_d(-s)} = \sum_{j=0}^{k_{ld}} a_j (Px_l(t_j), x_d(-s)) = \left(\sum_{j=0}^{k_{ld}} a_j Px_l(t_j), x_d(-s) \right) =$$

$$= 0, \; s > 0.$$

Значит

$$\sum_{j=0}^{k_{ld}} a_j P x_l(t_j) = 0 \text{ и } \dim H^{+/-}(x_l) \leqslant \min_{d} k_{ld},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы для дискретного времени аналогично изложенному выше. Снова верно (2), но уже для целых t_l и s. И если определить оператор Δ равенством

$$\Delta B(s) = B(s+1) - B(s), \; B(s) = \| B_{lj}(s) \|_{l=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}, \tag{2'}$$

можно получить аналог (3)

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \Delta^n B(t_j + s) = 0, \tag{3'}$$

откуда

$$P(\Delta) B(s) = 0. \tag{5'}$$

Решением (5) является линейная комбинация (6), s — целое. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22.IV.1974

Ն. Խ. ՄԵՍՐՈՊՅԱՆ. *n-չափանի ստացիոնար պատահական պրոցեսով առաջացած տարածության կառուցվածքի մասին (ամփոփում)*

Ստացված է n-չափանի ստացիոնար պատահական պրոցեսով առաջացած տարածության անալիտիկ ներկայացումը։

Բերված են $L^-(F)$ ու $L^{+/-}F$ և $L^{+/-}(F)$ ու $L^-(F)\cap L^+(F)$ տարածությունների համընկնելության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները և $L^{+/-}(F)$ տարածության վերջավոր չափողականության պայմանները։

N. Kch. MESROPIAN. *On the structure of the space generated by n-dimensional stationary process* (summary)

An analytical representation of the space $L_T(F)$ wich is isometrical to the space H_ξ generated by n-dimensional stationary random process $\xi(t)$, $t \in T$ is obtained

The conditions under which the pairs of spaces $L^-(F)$ and $L^{+/-}(F)$, $L^{+/-}(F)$ and $L(F) \cap L^+(F)$ coincide, as well as conditions under wich $L^{+/-}(F)$ happens to be finite dimensional are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов.* Гауссовские случайные процессы, М., 1970.
2. *Ю. А. Розанов.* Спектральная теория многомерных стационарных процессов, УМН, XIII, 2 (80), 1958, 93—142.
3. *Ю. П. Гинзбург.* О факторизации аналитических матриц-функций, ДАН СССР, 159, № 3, 1964.
4. *Ю. П. Гинзбург.* О делителях и минорантах оператор-функций ограниченного вида, Мат. исследов., т. II, вып. 4, 1968, Кишинев.
5. *H. Helson.* Lectures on inwariant subspaces, N.—Y., London, 1964.
6. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, часть II, М., 1965.
7. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

А. А. АНДРЯН

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей статье мы рассматриваем граничную задачу типа задачи Коши для систем уравнений гиперболического типа первого порядка.

Задачи такого типа в случае системы из двух уравнений первого порядка с различными характеристиками или произвольного числа уравнений с одной кратной характеристикой рассматриваются, например, в работе [1].

При изучении этой задачи в общем случае методом, данным в работе [1], встречается ряд трудностей. Мы предлагаем другой метод решения этой задачи в общем случае.

Рассматриваем два случая задачи Коши. В первом из них доказывается корректность поставленной задачи путем доказательства сходимости метода последовательных приближений для системы интегральных уравнений, к которой сводится граничная задача. Во втором случае доказывается фредгольмовость.

§ 1. Постановка задачи

Пусть D — конечная область, ограниченная гладкой кривой Γ. Если $u=(u_1,\ldots,u_m)$, $v=(v_1,\ldots,v_m)$ — две m-мерные действительные вектор-функции, то под их скалярным произведением будем понимать

$$[u, v]=\iint\limits_D (u, v)\,dx\,dy, \qquad (u, v \in L_2(D)) \tag{1.1}$$

где через (u, v) обозначена сумма

$$(u, v)=\sum_{i=1}^{m} u_i v_i.$$

Рассмотрим систему уравнений первого порядка, записанную в виде

$$v_x - A(x, y)\, v_y - B(x, y)\, v = g(x, y), \tag{1.2}$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$ — заданные в области D вещественные квадратные матрицы порядка m, $g(x, y)$ — заданная, а $v(x, y)$ — искомая m-мерные вещественные вектор-функции.

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (1.2), записывается в виде

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{1.3}$$

где E — является m-мерной единичной матрицей.

Определение 1. Система (1.2) называется гиперболической, если все корни $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_m(x, y)$ характеристического уравнения (1.3) действительны и матрица $A(x, y)$ в каждой точке области D имеет m линейно независимых собственных векторов.

Систему (1.2) можно привести к каноническому виду [3]

$$u_x - Q_1 u_y = A_1 u + f, \tag{1.4}$$

где $Q_1(x, y)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_m(x, y)$ на диагонали.

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать систему (1.4), где $Q_1 \in C^1_*(D+\Gamma)$; $A_1 \in C^1(D+\Gamma)$ — квадратная матрица порядка m, $f \in C^1(D+\Gamma)$ — заданная, а $u \in C^1(D) \cap C_\alpha(D+\Gamma)\left(0 < \alpha < min\left(\frac{1}{2}, \nu\right)\right)$ — искомая m-мерные вектор-функции.

Вначале предположим, что матрица Q_1 постоянная, а область D — единичный круг.

Граничная задача P. Требуется найти решение u системы (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

где Γ_i — часть окружности Γ, заключенная между касательными, параллельными прямой $y + \lambda_i x = 0$.

§ 2. Исследование граничной задачи P

В условиях (1.5) выберем Γ_i специальным образом.

Пусть l_0 — произвольный луч с вершиной в центре окружности Γ. Через Γ_i мы обозначим ту часть окружности Γ, которая заключена между касательными, параллельными прямой $y + \lambda_i x = 0$ и имеет общую точку с лучом, выходящим из центра окружности Γ параллельно прямой $y + \lambda_i x = 0$ и образующим с l_0 угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$.

Исследуем задачу P при таким образом выбранных Γ_i в условиях (1.5).

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что i-ая компонента вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_m)$ в i-ом уравнении системы (1.4) присутствует только в левой части. Далее, заметим, что левая часть i-го уравнения системы (1.4) есть, с точностью до постоянного множителя, производная функции $u_i(x, y)$ по направлению i-ой характеристики. Интегрируя i-ое уравнение системы (1.4) вдоль i-ой характеристики от внутренней точки $M(x_0, y_0)$ до границы Γ_i $(i = 1, \cdots, m)$ и учитывая граничные условия (1.5), получим следующую систему интегральных уравнений:

$$u_i(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int\limits_{l_i(x_0, y_0)} \sum_{k \neq i}^{m} a_{ik}(x, y)\, u_k(x, y)\, ds -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int\limits_{l_i(x_0, y_0)} f_i(x, y)\, ds, \tag{2.1}$$

$$(i = 1, \cdots, m),$$

где $l_i(x_0, y_0)$—часть i-ой характеристики, соединяющая точку $M(x_0, y_0)$ с Γ_i.

Случай различных характеристик. Покажем, что однородная система интегральных уравнений (2.1) в классе $C(D+\Gamma)$ имеет только нулевое решение. Для этого введем в рассмотрение набор операторов, действующих по формуле

$$(T_{ik}\varphi)(x_0, y_0) = \int\limits_{l_i(x_0, y_0)} \tilde{a}_{ik}(x, y)\, \varphi(x, y)\, ds, \tag{2.2}$$

где $\varphi(x, y) \in C(D+\Gamma)$, $\tilde{a}_{ik}(x, y) = -a_{ik}(x, y)/\sqrt{1+\lambda_i^2}$.

Через $D_{ij}(x, y)$ будем обозначать область, ограниченную отрезками $l_i(x, y)$, $l_j(x, y)$ $(i \neq j)$ и дугой $\bigcup\limits_{l=1}^{m} \Gamma_l$.

Легко видеть, что

$$(T_{ik} T_{jp} \varphi)(x_0, y_0) = \int\limits_{l_i(x_0, y_0)} \tilde{a}_{ik}(x, y) \int\limits_{l_j(x, y)} \tilde{a}_{jp}(\xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, ds_{\xi\eta})\, ds_{xy} =$$

$$= \iint\limits_{D_{ij}(x_0, y_0)} K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{2.3}$$

где ядро $K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)$ однозначно определяется при помощи ядер операторов T_{ik} и T_{jp}. Обратно, если есть двойной интеграл вида (2.3), то его всегда можно представить в виде

$$\int\limits_{l_i(x_0, y_0)} \left(\int\limits_{l_j(x, y)} K_{ij}^1(x_0, y_0, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, ds_{\xi\eta} \right) ds_{xy}$$

с ядром $K_{ij}^1(x_0, y_0, \xi, \eta)$ того же класса, что и $K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)$, определяемым через $K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)$ однозначно.

Лемма 2.1. *$(T_{lp} T_{jk} T_{rs} \varphi)(x, y)$ $(j \neq r)$ всегда можно представить в виде*

$$\iint\limits_{D_{ij}(x, y)} K(x, y, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $D_1(x, y)$ — *область, ограниченная дугой* $\bigcup\limits_{l=1}^{m} \Gamma_l$ *и теми отрезками из* $l_l(x, y), l_j(x, y)$ *и* $l_r(x, y)$, *которые составляют наибольший угол,* $K(x, y, \xi, \eta)$ *непрерывна по* (x, y) *и ограничена по совокупности переменных* (x, y, ξ, η).

Действительно, имеем

$$(T_{jk}\, T_{rs}\, \varphi)(x_0, y_0) = \iint\limits_{D_{jr}(x_0, y_0)} K_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D} K^0_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{2.4}$$

где

$$K^0_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta) = \begin{cases} K_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in D_{jr}(x_0, y_0), \\ 0, & (\xi, \eta) \in D \setminus D_{jr}(x_0, y_0). \end{cases}$$

С другой стороны, на основании (2.4)

$$(T_{lp}\, T_{jk}\, T_{rs}\, \varphi)(x, y) = \int\limits_{l_l(x, y)} \tilde{a}_{lp}(x_0, y_0) \left(\iint\limits_{D} K^0_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right) \times$$

$$\times\, ds_{x_0, y_0} = \iint\limits_{D} \left(\int\limits_{l_l(x, y)} \tilde{a}_{lp}(x_0, y_0)\, K^0_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, ds_{x_0, y_0} \right) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{D} K_1(x, y, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$K_1(x, y, \xi, \eta) = \int\limits_{l_l(x, y)} \tilde{a}_{lp}(x_0, y_0)\, K^0_{jr}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, ds_{x_0, y_0}.$$

Из выбора Γ_l следует, что все l_l находятся в одной и той же полуплоскости, следовательно функция $K_1(x, y, \xi, \eta)$ обращается в нуль по крайней мере в области $(\xi, \eta) \in D \setminus (D_{ll}(x, y) \cup D_{jr}(x, y))$, т. е.

$$(T_{lp}\, T_{jk}\, T_{rs}\, \varphi)(x, y) = \iint\limits_{D_1(x, y)} K(x, y, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. *Пусть имеем оператор, действующий по формуле*

$$(T\varphi)(x, y) = \iint\limits_{D_{lj}(x, y)} K(x, y, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где ядро $K(x, y, \xi, \eta)$ — *непрерывная функция по* (x, y), *ограниченная по совокупности переменных* (x, y, ξ, η). *Тогда уравнение* $\varphi = T\varphi$ *в* $C(D + \Gamma)$ *имеет только нулевое решение.*

Не ограничивая общности, можно предположить, что отрезки $l_{i_0}(x, y)$ и $l_j(x, y)$ параллельны осям ox и oy соответственно, так как в противном случае этого можно добиться заменой переменных (x, y) и (ξ, η). Тогда оператор T можно переписать в виде

$$(T\varphi)(x, y)=\int\limits_{x}^{\sqrt{1-y^2}}\int\limits_{y}^{\sqrt{1-\xi^2}} K(x, y, \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Очевидно, что оператор T действует из $C(D+\Gamma)$ в $C(D+\Gamma)$ и ограничен. Обозначая через $M=2\sup\limits_{D+\Gamma}|K(x, y, \xi, \eta)|$, получаем

$$|(T\varphi)(x, y)|\leqslant \frac{M}{2}\|\varphi\|_{C(D+\Gamma)}\int\limits_{x}^{\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{1-\xi^2}-y)\,d\xi\leqslant M(1-x)\|\varphi\|_{C(D+\Gamma)}.$$

Последовательно применяя такие оценки, мы приходим к неравенствам

$$|(T^n_{\varphi})(x, y)|\leqslant \frac{M^n(1-x)^n}{n!}\|\varphi\|_{C(D+\Gamma)}. \tag{2.5}$$

Из оценки (2. 5) легко следует справедливость леммы 2.2.

Далее, однородную систему (2.1) преобразуем в эквивалентную ей систему следующим образом: подставим в первое уравнение вместо функций $u_2, \cdots, u_m$ их выражения в правой части однородной системы (2.1), а остальные оставим без изменения, в новой системе то же самое проделаем со вторым уравнением и т. д. Через m шагов на основании леммы 2.1 получим систему интегральных уравнений, имеющую вид

$$u=Ku, \tag{2.6}$$

где $u=(u_1, \cdots, u_m)$- искомая вектор-функция класса $C(D+\Gamma)$, $K=(K^{ij})$ – матрица из операторов интегрирования по областям $D_{ij}(x, y)$ с ядрами $K_{ij}(x, y, \xi, \eta)$ класса $C^1(D+\Gamma)$ по (x, y) и кусочно-непрерывными по (ξ, η). Из выбора Γ_i следует, что существует область $D_{i_0 j_0}(x, y)$ из областей $D_{ij}(x, y)$ $(i, j=1, \cdots, m)$, которая содержит все остальные.

Изменяя ядра операторов K^{ij} (полагая равными нулю на $D_{i_0 j_0}(x, y)$ $D_{ij}(x, y)$), мы можем считать, что область интегрирования для всех операторов K^{ij} есть область $D_{i_0 j_0}(x, y)$. Мы также, не ограничивая общности, можем считать, что отрезки $l_{i_0}(x, y)$; $l_{j_0}(x, y)$ параллельны осям ox и oy соответственно.

Обозначая через $M=2\max\{\sup\limits_{D+\Gamma}|K_{ij}(x, y, \xi, \eta)|; i, j=1, \cdots, m\}$ и используя оценку (2.5), получим

$$|(K^n u)(x, y)|\leqslant \frac{(Mm^2)^n}{n!}(1-x)^n\|u\|_{C(D+\Gamma)}. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.7) следует, что уравнение

$$u=Ku+g,$$

имеет единственное решение в $C(D+\Gamma)$ при каждом $g(x, y) \in \in C(D+\Gamma)$ и это решение представляется в виде

$$u = g + Rg,$$

где $R = K + K^2 + \cdots + K^n + \cdots$ — ограниченный в $C(D+\Gamma)$ оператор.

Случай одной кратной характеристики. Как мы отмечали, задача P в этом случае может быть решена методом, данным в работе [1]. Мы применяем метод характеристик лишь потому, что хотим получить решение задачи P в специальном виде, который существенно используется при изучении задачи P в общем случае.

Не ограничивая общности, можем считать, что семейство характеристик совпадает с семейством прямых $y = \text{const}$. В этом случае система интегральных уравнений (2.1) запишется в виде

$$u_i(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} \sum_{k \neq i}^{m} a_{ik}(\tau, y) u_k(\tau, y)\, d\tau - $$

$$- \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} f_i(\tau, y)\, d\tau, \tag{2.8}$$

$$(i = 1, \cdots, m).$$

Если через $N = (N_{ij})$ обозначим матрицу из операторов N_{ij}, где

$$(N_{ij}\varphi)(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} a_{ij}(\tau, y)\varphi(\tau, y)\, d\tau,$$

$$(i, j = 1, \cdots, m),$$

то аналогично (2.7) получим

$$|(N^n u)(x, y)| \leqslant \frac{(Mm^2)^n}{n!} (1-x)^n \|u\|_{C(D+\Gamma)}. \tag{2.9}$$

Из оценки (2.9) следует однозначная и везде разрешимость системы интегральных уравнений (2.8) в классе $C(D+\Gamma)$. Из этой же оценки следует, что решение системы (2.8) определяется формулой

$$u = g + Ng + \cdots + N^n g + \cdots = g(x, y) + \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} \gamma(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta)\, ds_{\xi\eta}, \tag{2.10}$$

где $\gamma(x, y, \xi, \eta) = (\gamma_{ij})$ — резольвента системы (2.8), непрерывная по (x, y, ξ, η), $g = (g_1, \cdots, g_m)$ — заданная вектор-функция (правая часть).

Если $g \in C^1(D+\Gamma)$ и обращается в нуль на кривой $x = \sqrt{1-y^2}$ ($|y| \leqslant 1$), то легко показать равномерную сходимость формально продифференцированного ряда (2.10) в D, это означает, что $u \in C^1(D) \cap \cap C(D+\Gamma)$.

Покажем, что для таких правых частей решение u системы (2.8) на самом деле принадлежит классу $C^1(D) \cap C_\alpha(D+\Gamma)$. Действительно, очевидно, что функции $u_1, \cdots, u_m$ удовлетворяют условию Гёльдера по переменной x равномерно относительно y. Убедимся в том, что функции $u_1, \cdots, u_m$ удовлетворяют условию Гельдера и по переменной y равномерно относительно x. Действительно

$$u_l(x, y_1) - u_l(x, y_0) = \int\limits_{\sqrt{1-y_1^2}}^{x} \sum_{k \neq l}^{m} (a_{lk}(\tau, y_1) - a_{lk}(\tau, y_0))\, u_k(\tau, y_1)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\sqrt{1-y_0^2}}^{x} \sum_{k \neq l}^{m} a_{lk}(\tau, y_0)\,(u_k(\tau, y_1) - u_k(\tau, y_0))\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\sqrt{1-y_0^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} \sum_{k \neq l}^{m} a_{lk}(\tau, y_0)\, u_k(\tau, y_1)\, d\tau + g_l(x, y_1) - g_l(x, y_0).$$

Отсюда

$$|u_l(x, y_1) - u_l(x, y_0)| \leqslant C_1 |y_0 - y_1|^{\alpha} + C_2 \sum_{k \neq l}^{m} \int\limits_{\sqrt{1-y_0^2}}^{x} |u_k(\tau, y_1) - u_k(\tau, y_0)|\, d\tau. \tag{2.11}$$

Суммируя неравенства (2.11) по l от 1 до m, получим

$$\sum_{l=1}^{m} |u_l(x, y_1) - u_l(x, y_0)| \leqslant m\, C_1 |y_0 - y_1|^{\alpha} +$$

$$+ (m-1)\, C_2 \int\limits_{\sqrt{1-y_0^2}}^{x} \sum_{l=1}^{m} |u_l(\tau, y_1) - u_l(\tau, y_0)|\, d\tau.$$

По лемме Гронуолла [2] имеем отсюда

$$\sum_{l=1}^{m} |u_l(x, y_1) - u_l(x, y_0)| \leqslant C |y_0 - y_1|^{\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Случай нескольких кратных характеристик. Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r_1}$ — собственные значения матрицы Q_1 с кратностями $p_1, \cdots, p_{r_1}$ соответственно. Однородную систему интегральных уравнений (2.1) в этом случае можно переписать в виде

$$u_{k_j+l}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_l^2}} \int\limits_{l_j(x_0, y_0)} \sum_{k \neq k_j + l}^{m} a_{k_j+l,\, k}(x, y)\, u_k(x, y)\, ds,$$

$$i = 1, \cdots, p_j;\ j = 1, \cdots, r_1;\ k_1 = 0;\ k_j = p_1 + \cdots + p_{j-1}. \tag{2.12}$$

В системе (2.12) рассмотрим уравнения при $j = 1$. Подставив в эти уравнения вместо функций $u_{k_j+i}(x, y)$ $(j \geqslant 2)$ их выражения в правой части системы (2.12), получим

$$u_{k_1+i}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \int\limits_{l_1(x_0, y_0)} \sum_{k \neq i}^{p_1} a_{ik}(x, y) u_k(x, y)\, ds +$$

$$+ \sum_{j=2}^{r_1} \iint\limits_{D_{1j}(x_0, y_0)} \sum_{r=1}^{m} K_{jr}^{i}(x, y, \xi, \eta)\, u_r(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{2.13}$$

$$i = 1, \cdots, p_1.$$

Используя предыдущий результат, систему (2.13) можем разрешить относительно функций $u_1, \cdots, u_{p_1}$, в результате получим

$$u_i(x_0, y_0) = \sum_{j=2}^{r_1} \sum_{r=1}^{m} \iint\limits_{D_{1j}(x_0, y_0)} K_{jr}^{i}(x, y, \xi, \eta)\, u_r(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p_1} \int\limits_{l_1(x_0, y_0)} \gamma_{i\alpha}(x_0, y_0, \xi, \eta) \left(\sum_{j=2}^{r_1} \sum_{r=1}^{m} \iint\limits_{D_{1j}(\xi, \eta)} K_{jr}^{\alpha}(\tau, \sigma, \xi, \eta)\, u_r(\tau, \sigma)\, d\tau\, d\sigma \right) ds, \tag{2.14}$$

$$i = 1, \cdots, p_1.$$

На основании леммы 2.1 систему интегральных уравнений (2.14) можно переписать в виде

$$u_i(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{D_{l_0 l_0}(x_0, y_0)} K_{ij}(x_0, y_0, \xi, \eta)\, u_j(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{2.15}$$

$$i = 1, \cdots, p_1,$$

где $D_{l_0 l_0}(x_0, y_0)$ — область, определенная выше.

Очевидно система (2.12) эквивалентна новой системе, у которой первые p_1 уравнений заменены уравнениями (2.15). В этой новой системе аналогичную процедуру проделаем с уравнениями с $j = 2$ и т. д. Через r_1 шагов систему (2.12) приведем к эквивалентной ей системе, имеющую вид (2.6).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.1. *Система интегральных уравнений* (2.1) *при любой правой части класса* $C(D+\Gamma)$ *имеет решение в классе* $C(D+\Gamma)$ *и оно единственно.*

Имеет место

Лемма 2.3. *Оператор* $T_{ip}\, T_{jk}$ (*см.* (2.2)) *переводит пространство* $C(D+\Gamma)$ *в пространство* $C^1(D+\Gamma)$ *при всех* $i \neq j$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что

$$(T_{ip}\varphi)(x, y) = \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} a(\tau, y)\, \varphi(\tau, y)\, d\tau, \quad (T_{jk}\varphi)(x, y) = \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{y} b(x, \eta)\, \varphi(x, \eta)\, d\eta.$$

Тогда

$$(T_{lp}T_{jk}\varphi)(x, y)=\int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{x} a(\tau, y)\left(\int\limits_{\sqrt{1-\tau^2}}^{y} b(\tau, \eta)\varphi(\tau, \eta)\,d\eta\right)d\tau. \qquad (2.16)$$

Поменяв пределы интегрирования в (2.16), получим

$$(T_{lp}T_{jk}\varphi)(x, y)=\int\limits_{y}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int\limits_{x}^{\sqrt{1-\eta^2}} a(\tau, y)\,b(\tau, \eta)\,\varphi(\tau, \eta)\,d\tau\right)d\eta+$$

$$+\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-\eta^2}}^{\sqrt{1-\eta^2}} a(\tau, y)\,b(\tau, \eta)\,\varphi(\tau, \eta)\,d\tau\right)d\eta. \qquad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что $\dfrac{\partial}{\partial x}(T_{lp}\ T_{jk}\varphi)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}(T_{lp}\ T_{jk}\varphi)$ существуют и непрерывны в $D+\Gamma$, что и требовалось доказать.

Из результата, полученного в случае одной кратной характеристики, теоремы 2.1 и леммы 2.3 следует

Теорема 2.2. *Граничная задача P при любой $f\in C^1(D+\Gamma)$ имеет решение из класса $C^1(D)\cap C_\alpha(D+\Gamma)$ и оно единственно.*

Если в граничных условиях (1.5) функцию $u_l(x, y)$ мы будем задавать на части Γ_l окружности Γ (мы не требуем дополнительных условий) на Γ_l, которые налагали раньше), то преобразовывая аналогичным образом систему интегральных уравнений (2.1) к виду (2.6), нетрудно убедиться в том, что оператор K в системе (2.6) вполне непрерывен в классе $C_\alpha(D+\Gamma)$. Поэтому однородная граничная задача P имеет конечное число линейно независимых решений.

Для получения необходимых и достаточных условий разрешимости неоднородной задачи P, построим сопряженную граничную задачу к задаче P.

Формально сопряженная система уравнений к системе (1.4) относительно скалярного произведения (1.1)имеет вид

$$L^*v\equiv -v_x+Q_1v_y-A_1'v=g,\ (g\in C^1(D+\Gamma),\ v\in C^1(D)\cap C_\alpha(D+\Gamma)), \qquad (2.18)$$

где $A_1'(x, y)$ — обозначает матрицу, транспонированную к матрице $A_1(x, y)$.

Согласно работе [5] введем

Определение 2. Граничное условие

$$Mv=0 \text{ на } \Gamma \qquad (2.19)$$

будем называть сопряженным к граничному условию (1.5) относительно оператора L, где

$$Lu=u_x-Q_1u_y-A_1u,$$

если равенство $[Lu, v]=[u, L^*v]$ выполняется для любой вектор-функции u, удовлетворяющей на Г условию (1.5), тогда и только тогда, когда на границе Г вектор-функция v удовлетворяет условию (2.19).

Задачу (2.18), (2.19) мы будем называть сопряженной к задаче P.

Легко видеть, что граничное условие (2.19) имеет вид

$$v_i = 0 \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_i,\ i=1,\cdots,m, \tag{2.20}$$

то есть сопряженная граничная задача (2.18), (2.20) есть граничная задача P для гиперболической системы (2.18).

Из определения сопряженной задачи следует, что условия

$$[f,\ v_i^*]=0,\ i=1,\cdots,m_0, \tag{2.21}$$

где вектор-функции $v_1^*,\cdots,v_{m_0}^*$ являются полной линейно независимой системой решений однородной сопряженной задачи (2.18), (2.20), необходимы для разрешимости неоднородной задачи P, а условия

$$[g,\ u_i^*]=0,\ i=1,\cdots,m_0, \tag{2.22}$$

где вектор-функции $u_1^*,\cdots,u_{m_0}^*$, являются полной линейно независимой системой решений однородной задачи P, необходимы для разрешимости неоднородной задачи (2.18), (2.20).

Отсюда, на основании теоремы 2 работы [6], следует

Теорема 2.3. *Однородная граничная задача P имеет конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи P необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий* (2.21).

Замечание. Аналогичным образом можно показать справедливость теорем 2.2, 2.3 и в случае, когда матрица Q_1 переменная, принадлежащая классу $C_\mu^1(D+\Gamma)$ $(\mu>\alpha)$, а область D такова, что каждая характеристика системы (1.4) пересекает ее границу Г (гладкую) ровно в двух точках.

В случае одной кратной характеристики мы все граничные условия задавали на одной и той же части Γ_1 окружности Г.

Приведем примеры, показывающие, что если некоторые граничные условия зададим на Γ_1, а остальные—на $\Gamma\setminus\Gamma_1$, то граничная задача P может оказаться, вообще говоря, не нетеровой. Нетеровость такой задачи сильно зависит от конфигурации области D и коэффициентов системы (1.4).

Пример 1. Рассмотрим следующую однородную граничную задачу:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{1}{\varphi_1^2-\varphi_2^2}\left[\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx}-\varphi_2\frac{d\varphi_2}{dx}\right)u_1+\left(\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dx}-\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dx}\right)u_2\right], \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{1}{\varphi_1^2-\varphi_2^2}\left[\left(\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dx}-\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dx}\right)u_1+\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx}-\varphi_2\frac{d\varphi_2}{dx}\right)u_2\right], \tag{2.24}$$

$$u_1=0 \text{ на } \Gamma_1,\ u_2=0 \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_1, \tag{2.25}$$

где Г — единичная окружность, Γ_1 — правая полуокружность, а

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \exp(x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \exp\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \exp(-x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ -\exp\left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{cases} \tag{2.26}$$

Легко видеть, что вектор-функции $y_1 = (\varphi_1, \varphi_2)$ и $y_2 = (\varphi_2, \varphi_1)$ линейно независимы и удовлетворяют системе (2.23), (2.24). Отсюда [2], общее решение системы (2.23), (2.24) запишется в виде

$$u_1(x, y) = C_1(y)\varphi_1(x) + C_2(y)\varphi_2(x), \tag{2.27}$$

$$u_2(x, y) = C_1(y)\varphi_2(x) + C_2(y)\varphi_1(x), \tag{2.28}$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ — произвольные функции от y, непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ и дифференцируемые на $(-1, 1)$.

Подставим общее решение (2.27), (2.28) системы (2.23), (2.24) в граничные условия (2.25), получим

$$C_1(y)\varphi_1(\sqrt{1-y^2}) + C_2(y)\varphi_2(\sqrt{1-y^2}) = 0 \quad (|y| \leqslant 1), \tag{2.29}$$

$$C_1(y)\varphi_1(-\sqrt{1-y^2}) + C_2(y)\varphi_2(-\sqrt{1-y^2}) = 0 \quad (|y| \leqslant 1). \tag{2.30}$$

В силу обозначений (2.26), система (2.29), (2.30) на отрезке $|y| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ запишется в виде

$$C_1(y)\exp(\sqrt{1-y^2}) + C_2(y)\exp(-\sqrt{1-y^2}) = 0, \tag{2.31}$$

$$C_1(y))\exp(\sqrt{1-y^2}) + C_2(y)\exp(-\sqrt{1-y^2}) = 0. \tag{2.32}$$

Поскольку определитель системы (2.31), (2.32) равен тождественно нулю на отрезке $|y| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, то за $C_1(y)$ можно взять любую функцию из $C_0^\infty(-\infty + \infty)$, сосредоточенную на отрезке $|y| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $C_2(y)$ определить из (2.31).

Подставим $C_1(y)$ и $C_2(y)$ в (2.27), (2.28). Получим некоторый набор решений однородной задачи (2.23), (2.24), (2.25), среди которых, в силу произвольности $C_1(y)$, есть бесчисленное множество линейно независимых. То есть задача (2.23), (2.24), (2.25) не является нетеровой.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 3u_2 - 2u_1, \quad (u_1, u_2 \in C^1(D) \cap C_2(D + \Gamma)). \tag{2.34}$$

Покажем, что граничная задача: найти решение (u_1, u_2) системы (2.33), (2.34), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_1 = \varphi_1 \text{ на } \Gamma_1, \quad u_2 = \varphi_2 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_1, \tag{2.35}$$

где $\varphi_1 \in C^1_\alpha(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C^1_\alpha(\Gamma \setminus \Gamma_1)$ — заданные функции, является нетеровой.

Действительно, общее решение системы (2.33), (2.34) имеет вид [2]

$$u_1(x, y) = c_1(y)\exp(x) + c_2(y)\exp(2x), \tag{2.36}$$

$$u_2(x, y) = c_1(y)\exp(x) + 2c_2(y)\exp(2x), \tag{2.37}$$

где $c_1(y)$ и $c_2(y)$ — произвольные функции от y, принадлежащие классу $C^1(-1, 1) \cap C_\alpha[-1, 1]$. Подставляя u_1 и u_2 из (2.36), (2.37) в граничные условия (2.35), получим

$$c_1(y)\exp(\sqrt{1-y^2}) + c_2(y)\exp(2\sqrt{1-y^2}) = \varphi_1(\sqrt{1-y^2}, y), \tag{2.38}$$

$$c_1(y)\exp(-\sqrt{1-y^2}) + 2c_2(y)\exp(-2\sqrt{1-y^2}) = \varphi_2(-\sqrt{1-y^2}, y). \tag{2.39}$$

Легко видеть, что нули определителя системы (2.38), (2.39)—простые. Отсюда нетрудно заключить, что однородная задача (2.33), (2.34), (2.35) имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи (2.33), (2.34), (2.35) необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий на правые части.

Пример 3. Пусть граница Γ области D симметрична относительно оси oy и содержит отрезки, параллельные оси oy, скажем отрезки $x = \pm 1$, $|y| \leqslant \frac{1}{2}$. Рассмотрим граничную задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u_2, \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\pi^2}{16}u_1, \tag{2.41}$$

$$u_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad u_2 = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_1, \tag{2.42}$$

где Γ_1 — часть границы Γ, лежащая в правой полуплоскости.

Решениями этой задачи являются, например, функции

$$u_1(x, y) = A(y)\sin\left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$u_2(x, y) = -A(y)\cdot\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $A(y) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, причем носитель функции $A(y)$ содержится в отрезке $|y| \leqslant \frac{1}{2}$. Выбирая функции $A(y)$ линейно независимыми, мы получим бесчисленное множество линейно независимых решений однородной задачи (2.40), (2.41), (2.42).

В заключение автор искренне благодарит своего научного руководителя профессора Н.Е. Товмасяна за постановку задачи и ценные обсуждения в ходе выполнения работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22.VII.1974

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ. Հիպերբոլական տիպի հավասարումների սիստեմների համար մի եզրային խնդրի մասին *(ամփոփում)*։

Հիպերբոլական տիպի հավասարումների սիստեմների համար սահմանափակ տիրույթում դրվում է եզրային խնդիր։ Այդ խնդիրը լինում է կոռեկտ կամ ֆրեդհոլմի տիպի, նայած տիրույթի եզրի որ մասերի վրա են տրվում եզրային պայմանները։

A. A. ANDRIAN. *A boundary value problem for the systems of hyperbolic type* (summary)

Let

$$u_x - Q_1 u_t = A_1 u + f \tag{1}$$

be a system of the hyperbolic type, Γ_i — be parts of unit circle Γ (the choice of Γ_i depeneds on the charactertstics of the system [1]).

Whether the boundary value problem

$$u_i = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_i, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{2}$$

or [1] happens to be correct or Fredholm type depends on the choice of Γ_i.

When the problem [1], [2] is correct, the solution may be obtained by successive iterations approach.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Джураев.* Системы уравнений составного типа, М., 1972.
2. *И. Г. Петровский.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1970.
3. *Р. Курант.* Уравнения с частными производными, М., 1964.
4. *И. Г. Петровский.* Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1961.
5. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 2, № 1, 1965, 3—23.
6. *Н. Е. Товмасян.* Некоторые уравнения в банаховых пространствах и их применения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 3, 1973, 181—189.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

Р. С. ДАВТЯН, А. А. ТАЛАЛЯН

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ПОЛНЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

В настоящей статье изучается вопрос о зависимости сходимости почти всюду на множестве положительной меры ортогонального ряда по полной системе от его сходимости в среднем на том же множестве.

Этот вопрос не тривиален для полных в L_2 [0, 1] систем $\{\varphi_n(x)\}$, являющихся системами сходимости — когда из условия $\sum a_k^2 < +\infty$ следует сходимость ряда $\sum a_k \varphi_k(x)$ почти всюду на [0, 1]. Оказывается, что ряд $\sum a_k \varphi_k(x)$ по такой системе может сходиться в среднем на множестве $E \subset [0, 1]$ меры сколь угодно близкой к мере отрезка [0, 1] и расходиться почти всюду на этом множестве, хотя, как это следует из определения систем сходимости, этого не может быть, когда $\mu(E) = \mu([0, 1])$.

Верна следующая

Теорема 1. *Для любой полной в* $L_2[0, 1]$ *ортонормированной системы* $\{\varphi_n(x)\}$* *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

который расходится почти всюду на [0, 1] *и сходится асимптотически в метрике* L_2 *на отрезке* [0, 1], *т. е. для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $\mu(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, *такое, что ряд* (1) *сходится в метрике* L_2 *на множестве* E.

Можно добиться того, чтобы коэффициенты ряда (1) стремились к нулю, а в случаях некоторых конкретных систем сходимости, например для системы Хаара, коэффициенты соответствующих рядов (1) могут стремиться к нулю со скоростью, близкой к максимально возможной скорости.

Соответствующая теорема для системы Хаара формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Существует расходящийся почти всюду на* [0, 1] *ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x), \tag{2}$$

* В дальнейшем для краткости будем писать $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС.

который сходится асимптотически в метрике L_2 *на отрезке* [0, 1] *и коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Множества E положительной меры, на которых ряд $\sum a_n \varphi_n(x)$ по системе сходимости $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в среднем и расходится почти всюду, вообще говоря, должны иметь малую плотность. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть F — замкнутое множество отрезка* [0, 1] *и его дополнительные интервалы $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, перенумерованные в каком-нибудь порядке, удовлетворяют условию*

$$\mu(\Delta_k) \leqslant \frac{C}{2^k} \quad (k = 1, 2, \cdots)^*.$$

Тогда, если частные суммы $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(x)$ ряда по системе Хаара удовлетворяют неравенствам

$$\int_F |S_n(x)|^p \, dx \leqslant M \; (n = 1, 2, \cdots),$$

где $p > 1$ и M — постоянная, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ сходится почти всюду на множестве F.

Легко показать, что в случае $p = 1$ теорема 3 не верна. Более того, для любой последовательности $a_k \to 0$ существуют последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся интервалов и расходящийся почти всюду на множестве $F = [0, 1] - \bigcup \delta_k$ ряд по системе Хаара такие, что $\mu(\delta_k) < a_k \; (k = 1, 2, \cdots)$ и $\int_F |S_n(x)| \, dx \leqslant M \; (n = 1, 2, \cdots)$.

§ 1. Доказательство лемм

При доказательстве теоремы 1 мы пользуемся следующей леммой, установленной в работе [1] (см. там стр. 86).

Лемма 1. Пусть $f(x)$, $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)$ — произвольные функции (N конечное), принадлежащие классу $L_2(\Delta)$, где Δ — некоторый отрезок. Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $f^*(x)$ и множество e, обладающие следующими свойствами:

а) $f^*(x) = f(x)$ при $x \overline{\in} e$, где $e \subset \Delta$, $\mu(e) < \varepsilon_0 \cdot \mu(\Delta)$,

* Когда имеется конечное число дополнительных интервалов, то начиная с некоторого места Δ_k считаются пустыми.

b) $\int\limits_{\Delta} |f^*|^2\, dx \leqslant \frac{2}{\varepsilon_0} \int\limits_{\Delta} f^2\, dx,$

c) $\left| \int\limits_{\Delta} f^*(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant N).$

При помощи леммы 1 доказывается

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ПОНС на отрезке* $[0, 1]$ *и* $\Delta \subset \subset [0, 1]$ — *некоторый отрезок. Тогда для любого* $1 > \delta > 0$ *и любого натурального* N *существуют измеримое множество* E, *полином вида* $\sum\limits_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x)$ $(L > N)$ *и натуральное число* N' $(L \geqslant N' > N)$, *для которых выполняются следующие условия:*

$$E \subset [0, 1],\ \mu(E) < \delta \cdot \mu(\Delta), \tag{1.1}$$

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{r} a_n \varphi_n(x) \right\| < 8 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} \quad (N < r < L)^*, \tag{1.2}$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \right| < \frac{\delta}{2} \mu(\Delta), \quad (x \overline{\in} E), \tag{1.3}$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) \right| > 1 - \delta \quad (x \in \Delta - E). \tag{1.4}$$

Доказательство. Определим измеримое множество E_1 и положительное число ε, удовлетворяющие условиям

$$E_1 \subset [0, 1],\ \mu(E_1) < \frac{\delta}{8} \mu(\Delta), \tag{1.5}$$

$$\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{N} |\varphi_n(x)| < \frac{\delta}{8} \mu(\Delta) \quad (x \overline{\in} E_1). \tag{1.6}$$

Применяя лемму 1, когда в ее формулировке положено $f(x) \equiv \chi_\Delta(x)^{**}$, $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{8}$, найдем множество E_2 и функцию $f^*(x)$, для которых согласно a), b) и c) выполняются условия:

$$E_2 \subset \Delta, \quad \mu(E_2) < \frac{\delta}{8} \mu(\Delta), \tag{1.7}$$

$$f^*(x) = \chi_\Delta(x) \quad (x \overline{\in} E_2), \tag{1.8}$$

$$\int\limits_{\Delta} |f^*(x)|^2\, dx \leqslant \frac{16}{\delta} \int\limits_{\Delta} \chi_\Delta^2(x)\, dx = \frac{16\, \mu(\Delta)}{\delta}, \tag{1.9}$$

$$\left| \int\limits_{\Delta} f^*(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant N). \tag{1.10}$$

---

* Через $\|f\|$ обозначается норма в $L_2\,[0, 1]$ функции $f(x)$.

** Через $\chi_\Delta(x)$ обозначается характеристическая функция множества Δ.

В силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ существуют измеримое множество E_3 и натуральное число N' $(N' > N)$ такие, что

$$E_3 \subset [0,\ 1], \quad \mu(E_3) < \frac{\delta}{8}\,\mu(\Delta), \tag{1.11}$$

$$|S_{N'}(x,\ f^*) - f^*(x)| < \frac{\delta}{8}\,\mu(\Delta) \quad (x \overline{\in} E_3). \tag{1.12}$$

Положим

$$a_k = \int_0^1 f^*(x)\,\varphi_k(x)\,dx \quad (N < k \leqslant N'), \tag{1.13}$$

$$E_4 = E_1 \cup E_2 \cup E_3. \tag{1.14}$$

Тогда согласно (1.5), (1.7) и (1.11) будем иметь

$$E_4 \subset [0,\ 1], \quad \mu(E_4) < \frac{3\delta}{8}\,\mu(\Delta), \tag{1.15}$$

а из (1.9) получаем

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{r} a_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant 4 \cdot \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} \qquad (N < r \leqslant N'). \tag{1.16}$$

Далее из (1.14), (1.12), (1.10), (1.8) и (1.6) следует

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - f^*(x) \right| < \frac{\delta}{4}\,\mu(\Delta) \qquad (x \overline{\in} E_4).$$

Учитывая теперь (1.8) и (1.14), из последнего неравенства получим

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| < \frac{\delta}{4}\,\mu(\Delta) \qquad (x \overline{\in} E_4). \tag{1.17}$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых были построены удовлетворяющие условиям (1.15)—(1.17) полином $\sum\limits_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x)$ и множество E_4, можно определить полином вида $\sum\limits_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x)$ $(L > N')$ и множество E_4', обладающие следующими свойствами, аналогичными (1.15)—(1.17):

$$E_4' \subset [0,\ 1], \quad \mu(E_4') < \frac{3\delta}{8}\,\mu(\Delta), \tag{1.18}$$

$$\left\| \sum_{n=N'+1}^{r} b_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant 4 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} \quad (N' < r \leqslant L), \tag{1.19}$$

$$\left| \sum_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| < \frac{\delta}{4}\,\mu(\Delta) \qquad (x \overline{\in} E_4'). \tag{1.20}$$

Легко видеть, что полином

$$\sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \equiv \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) + \sum_{n=N'+1}^{L} - b_n \varphi_n(x) \tag{1.21}$$

и множество

$$E = E_4 \cup E_4' \tag{1.22}$$

удовлетворяет всем условиям леммы 2.

Действительно, (1.1) следует из (1.15), (1.18) и (1.22). Далее, при тех r, для которых $N < r \leqslant N'$, условие (1.2) леммы 2 выполняется в силу (1.16). Пусть теперь $N < r \leqslant L$, тогда учитывая (1.21), (1.16), (1.19), будем иметь:

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{r} a_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) \right\| + \left\| \sum_{n=N'+1}^{r} b_n \varphi_n(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} + 4 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2} = 8 \left(\frac{\mu(\Delta)}{\delta} \right)^{1/2},$$

так что и в этом случае выполняется условие (1.2). Используя (1.21), (1.22), (1.17) и (1.20), при $x \overline{\in} E$ получим

$$\left| \sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - \sum_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x) + \right.$$

$$\left. + \chi_\Delta(x) - \chi_\Delta(x) \right| \leqslant \left| \sum_{n=N+1}^{N'} a_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n=N'+1}^{L} b_n \varphi_n(x) - \chi_\Delta(x) \right| < \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) + \frac{\delta}{4} \mu(\Delta) = \frac{\delta}{2} \mu(\Delta).$$

Наконец, условие (1.4) леммы 2 тоже выполнено в силу (1.17).

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ПОНС на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда для любого* $1 > \varepsilon > 0$ *и любого натурального* N *существуют измеримое множество* E *и полином вида* $\sum_{k=N+1}^{L} a_k \varphi_k(x)$ $(L > N)$, *для которых выполняются условия:*

$$E \subset [0, 1], \quad \mu(E) < \varepsilon, \tag{1.23}$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0, 1] - E} < \varepsilon \quad (N < r \leqslant L), \tag{1.24}$$

для любого $x \in [0, 1] - E$ *существуют натуральные числа* $n(x)$ *и* $m(x)$ *такие, что* $N < n(x) < m(x) \leqslant L$ *и*

$$\left| \sum_{k=n(x)}^{m(x)} a_k \varphi_k(x) \right| > 1 - \varepsilon. \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ — попарно непересекающиеся интервалы, удовлетворяющие условиям

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = [0, 1], \tag{1.26}$$

$$8\left(\frac{\mu(\Delta_i)}{\varepsilon}\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.27}$$

Применяя лемму 2, в формулировке которой последовательно полагается $\Delta \equiv \Delta_i$, $\delta \equiv \varepsilon$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, можно определить полиномы

$$\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.28}$$

множества E_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ и натуральные числа N_i' $(i = 1, 2, \cdots, n)$ так, чтобы

$$N_0 = N, \quad N_0 < N_1 < \cdots < N_n, \tag{1.29}$$

$$N_{i-1} < N_i' \leqslant N_i \; (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.30}$$

$$E_i \subset [0, 1], \quad \mu(E_i) < \varepsilon \cdot \mu(\Delta_i) \; (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.31}$$

$$\left\|\sum_{k=N_{i-1}+1}^{r} a_k \varphi_k(x)\right\| < 8 \cdot \left(\frac{\mu(\Delta_i)}{\varepsilon}\right)^{1/2} (N_{i-1} < r \leqslant N_i, \; i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.32}$$

$$\left|\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \mu(\Delta_i) \quad (x \,\overline{\in}\, E_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.33}$$

$$\left|\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i'} a_k \varphi_k(x)\right| > 1 - \varepsilon \quad (x \in \Delta_i - E_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.34}$$

Обозначим $L \equiv N_n$ и покажем, что полином

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \tag{1.35}$$

и множество

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \tag{1.36}$$

удовлетворяют всем условиям леммы 3. Выполнение условия (1.23) очевидно.

Пусть теперь $N < r \leqslant L$, тогда для некоторого i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$ будет $N_{i_0-1} < r \leqslant N_{i_0}$.

Поскольку

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{r} a_k\varphi_k(x)\right\|_{[0,1]-E} \leqslant \sum_{l=1}^{l_0-1}\left\|\sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k\varphi_k(x)\right\|_{[0,1]-E} + \left\|\sum_{k=N_{l_0-1}+1}^{r} a_k\varphi_k(x)\right\|_{[0,1]-E}^{*},$$

то в силу (1.32) и (1.27), (1.26), (1.33) и (1.36) будем иметь

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{r} a_k\varphi_k(x)\right\|_{[0,1]-E} \leqslant \sum_{l=1}^{l_0-1}\frac{\varepsilon}{2}\mu(\Delta_l) + 8\cdot\left(\frac{\mu(\Delta_l)}{\varepsilon}\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, условие (1.24) выполняется.

Наконец, выполнение последнего условия (1.25) леммы 3 следует из (1.34), так как если $x\in[0,1]-E$, то $x\in\Delta_l-E$ для некоторого l и тогда можно полагать $n(x)=N_{l-1}+1$, $m(x)=N_l$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $\{\chi_n(x)\}$ — система Хаара (см. [2]). Для любого положительного числа $\delta<1$ можно определить $M>0$ такое, что каковы бы ни было натуральное число N и отрезок $\Delta\subset[0,1]$, являющийся носителем некоторой функции Хаара, существуют измеримое множество E, полином вида $\sum_{n=N+1}^{L} a_n\chi_n(x)$ $(L>N)$ и натуральное число N' $(N<N'\leqslant L)$, для которых выполняются следующие условия:*

$$E\subset\Delta,\quad \mu(E)<\delta\cdot\mu(\Delta), \tag{1.37}$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{r} a_n\chi_n(x)\right|<M\cdot\mu(\Delta)\quad (N<r\leqslant L), \tag{1.38}$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{L} a_n\chi_n(x)\right|=0\quad (x\overline{\in}E), \tag{1.39}$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N'} a_n\chi_n(x)\right|=1\quad (x\in\Delta-E), \tag{1.40}$$

$$|a_n\chi_n(x)|\leqslant 1\quad (x\in[0,1],\ N<n\leqslant L). \tag{1.41}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n\chi_n(x)=\chi_0^{(1)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\chi_n^{(k)}(x), \tag{1.42}$$

где коэффициенты b_n определены из равенства (1.42) и, следовательно, удовлетворяют условию

$$\max_{x\in[0,1]}|b_n\chi_n(x)|=1\quad (n=2,3,\cdots). \tag{1.43}$$

---

* Сумма $\sum_{l=1}^{l_0-1}$ при $l_0=1$ считается равной нулю.

Так как этот ряд расходится почти всюду на [0, 1], то почти всюду на [0, 1] будем иметь (см. [3], следствие 3 или [4])

$$\limsup_{n>2} S_n(x) = +\infty, \quad \liminf_{n>2} S_n(x) = -\infty, \tag{1.44}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{j=3}^{n} b_j \chi_j(x) \quad (n > 2).$$

Положим

$$A_n = \{x: S_n(x) = 0, \quad S_1(x) \neq 0, \cdots, S_{n-1}(x) \neq 0\} \ (n \geqslant 3). \tag{1.45}$$

Множества A_n $(n \geqslant 3)$ попарно не пересекаются и из (1.43) и (1.44) легко следует (см. [5] или [6]), что

$$\sum_{n=3}^{\infty} \mu(A_n) = 1. \tag{1.46}$$

Положим $F = \bigcup\limits_{n=n_0+1}^{\infty} A_n$, где n_0 выбрано так, что

$$\mu(F) < \delta, \tag{1.47}$$

и рассмотрим полином

$$\sum_{n=2}^{n_0} c_n \chi_n(x), \tag{1.48}$$

где $c_n = 0$, если для некоторого j $(3 \leqslant j \leqslant n_0)$ имеет место равенство

$$\mu(\{x: \chi_n(x) \neq 0\} - A_j) = 0, \tag{1.49}$$

и $c_n = b_n$ — для остальных n.

Отметим некоторые свойства полинома (1.48):

$$\sum_{n=2}^{n_0} c_n \chi_n(x) = 0 \quad (x \overline{\in} F), \tag{1.50}$$

$$|c_2 \chi_2(x)| = 1 \quad (\text{почти всюду на } [0,1]). \tag{1.51}$$

$$\max_{x \in [0,\,1]} |c_n \chi_n(x)| \leqslant 1 \quad (x \in [0,\ 1], \quad 2 \leqslant n \leqslant n_0). \tag{1.52}$$

Обозначим

$$M = \sup_{2 \leqslant j \leqslant n_0} \sup_{x \in [0,\,1]} \left| \sum_{n=2}^{j} c_n \chi_n(x) \right|. \tag{1.53}$$

Пусть теперь N — некоторое натуральное число, а Δ—носитель некоторой функции Хаара. Разделим Δ на непересекающиеся равные отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_q$, являющиеся носителями некоторых функций Хаара $\chi_n(x)$ $(n > N)$.

Обозначим через $\chi_n(\Delta_i, x)$ $(n = 1, 2, \cdots, i = 1, 2, \cdots, q)$ — функцию, полученную из $\chi_n(x)$ при линейном отображении отрезка [0, 1] на отрезок Δ_i и через $F(\Delta_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ — множество, полученное из F при том же отображении. Для некоторых действительных Q_j и натурального L имеем

$$\sum_{n=2}^{n_0}\left(\sum_{l=1}^{q} c_n \chi_n(\Delta_l),\ x\right) \equiv \sum_{j=N+1}^{L} a_j \chi_j(x), \tag{1.54}$$

причем

$$|a_j \chi_j(x)| \leqslant 1 \quad (N < j \leqslant L, \quad x \in [0,\ 1]).$$

Положим, далее $E = \bigcup_{l=1}^{q} F(\Delta_l)$ и возьмем N' $(N < N' < L)$ такое, что

$$\sum_{j=N+1}^{N'} a_j \chi_j(x) = \sum_{l=1}^{q} c_2 \chi_2(\Delta_l,\ x).$$

Тогда, определенные таким образом множество E, число N' и полином (1.54) будут удовлетворять всем условиям леммы 4, причем фигурирующее в ее формулировке число M определяется из равенства (1.53) и очевидно зависит только от δ. Этот факт является непосредственным следствием свойств (1.50)—(1.52) полинома (1.48).

Из леммы 4 вытекает, что в случае системы Хаара, доказанную выше лемму 3 можно усилить, потребовав, чтобы помимо условий (1.23)—(1.25), где положено $\varphi_k(x) = \chi_k(x)$, выполнялось также условие

$$|a_k \chi_k(x)| \leqslant 1 \quad (x \in [0,\ 1]). \tag{1.55}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно отрезок $[0,\ 1]$ представить в виде суммы $\bigcup_{l=1}^{2^n} \Delta_l$ попарно непересекающихся интервалов длины 2^{-n}, где $2^{-n} \cdot M < \varepsilon$, и применяя лемму 4, для каждого Δ_l определить полиномы $\sum_{k=N_l+1}^{L_l} a_k \chi_k(x)$, $N = N_l$, $N_l < L_l \leqslant N_{l+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1)$, удовлетворяющие требованиям леммы 4, когда $\Delta = \Delta_l$, $N = N_l$ и $\delta = \varepsilon$. Тогда полином $\sum_{l=1}^{2^n} \sum_{k=N_l+1}^{L_l} a_k \chi_k(x)$ $(L = L_{2^n})$ будет обладать требуемыми свойствами.

§ 2. Доказательство теорем

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС на отрезке $[0,\ 1]$, ε_l — положительные числа такие, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l < 1. \tag{2.1}$$

Последовательным применением леммы 3, предварительно полагая в ее формулировке $\varepsilon = \varepsilon_l$ $(i = 1,\ 2, \cdots)$, можно определить полиномы

$$\sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \varphi_k(x) \quad (i = 1,\ 2, \cdots) \tag{2.2}$$

и множества E_i $(i = 1, 2, \cdots)$ такие, что

$$N_0 = 1, \qquad N_0 < N_1 < \cdots, \tag{2.3}$$

$$E_i \subset [0, 1], \quad \mu(E_i) < \varepsilon_i, \tag{2.4}$$

$$\left\| \sum_{k=N_{i-1}+1}^{r} a_k \varphi_k(x) \right\|_{[0,1]-E_i} < \varepsilon_i \quad (N_{i-1} < r \leqslant N_i); \tag{2.5}$$

для любого $x \in [0, 1] - E_i$ существуют натуральные числа $n_i(x)$ и $m_i(x)$ такие, что $N_{i-1} < n_i(x) < m_i(x) \leqslant N_i$ и

$$\left| \sum_{k=n_i(x)}^{m_i(x)} a_k \varphi_k(x) \right| > 1 - \varepsilon_i. \tag{2.6}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \tag{2.7}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.

Положим

$$B = \lim \sup \{[0, 1] - E_i\} \tag{2.8}$$

и, учитывая (2.6), заметим, что ряд (2.7) расходится на множестве B, которое, в силу (2.4) и (2.1), имеет полную меру.

Для завершения доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что ряд (2.7) сходится в метрике L_2 на множествах

$$B_\nu = \bigcap_{i=\nu}^{\infty} ([0, 1] - E_i) \quad (\nu = 1, 2, \cdots),$$

$$\text{ибо } \mu(B_\nu) > 1 - \sum_{i=\nu}^{\infty} \varepsilon_i \text{ и } \sum_{i=\nu}^{\infty} \varepsilon_i \to 0 \quad \text{при } \nu \to \infty.$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=N}^{m} a_k \varphi_k(x)$, где $N_\nu < N < m$. Если $N_p < N \leqslant N_{p+1}$, $N_q < m \leqslant N_{q+1}$, где $p \geqslant \nu$ и $q \geqslant p$, то можно написать

$$\sum_{k=N}^{m} a_k \varphi_k(x) = \sum_{i=p+1}^{q} \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_q+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - \sum_{k=N_p+1}^{N-1} a_k \varphi_k(x)^*. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $B_\nu \subset [0, 1] - E_i$ при $i \geqslant \nu$, из условий (2.5) получим

$$\left\| \sum_{k=N}^{m} a_k \varphi_k(x) \right\|_{B_\nu} \leqslant \sum_{i=p+1}^{q} \left\| \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_{B_\nu} +$$

---

* Первая сумма в правой части при $p = q$, а последняя — при $N = N_p + 1$, считаются равными нулю.

$$+\left\|\sum_{k=N_q+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|+\left\|\sum_{k=N_p+1}^{N} a_k\varphi_k(x)\right\|_{B_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=p+1}^{q}\left\|\sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k\varphi_k(x)\right\|_{([0,1]-E_l)}+\left\|\sum_{k=N_q+1}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_{([0,1]-E_{q+1})}+$$

$$+\left\|\sum_{k=N_p+1}^{N} a_k\varphi_k(x)\right\|_{([0,1]-E_{p+1})}\leqslant\varepsilon_{p+1}+\sum_{l=p+1}^{\infty}\varepsilon_l.$$

Так как $p\to\infty$ при $N\to\infty$, из последнего неравенства вытекает, что $\left\|\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k(x)\right\|_{B_\nu}\to 0$ при $N,\ m\to\infty$. Таким образом, ряд (2.7) сходится в метрике $L_2(B_\nu)$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что в случае системы Хаара лемма 3 верна и при дополнительном требовании (1.55). Поэтому при построении ряда (2.7) для системы Хаара (когда $\varphi_k=\chi_k$) можно добиться того, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условию $\max\limits_{x\in[0,1]}|a_n\chi_n(x)|\leqslant C$ или, что то же самое, $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Из вышеуказанного следует, что теорема 2 также доказана.

Доказательство теоремы 3. Как будет видно из дальнейших рассуждений, без ограничения общности можно полагать, что

$$\mu(\Delta_i)<\frac{1}{2^i}\ (i=1,\ 2,\cdots). \tag{2.10}$$

Обозначим

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_i,\quad F=[0,\ 1]-G$$

и допустим, что частные суммы $S_n(x)$ некоторого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x) \tag{2.11}$$

удовлетворяют условию

$$\int\limits_F|S_k(x)|^p\,dx<M\quad(k=1,\ 2,\cdots), \tag{2.12}$$

где $p>1$, M — постоянная.

Обозначим через $\mathbf{F}_k$ множество попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых постоянны первые 2^k функций Хаара $\chi_1(x),\ \chi_2(x),\cdots,\ \chi_{2^k}(x)$ и которые удовлетворяют условиям:

$$\mu(\Delta)=\frac{1}{2^k}\ \text{для всех}\ \Delta\in\mathbf{F}_k, \tag{2.13}$$

$$\mu\Big(\bigcup_{\Delta\in\mathbf{F}_k}\Delta\Big)=1. \tag{2.14}$$

Пусть $n_0 > 1$ — фиксированное натуральное число. Определим последовательность множеств $\{A_i\}$ $(i = n_0, n_0+1, \cdots)$ следующим образом:

$$A_{n_0} = \bigcup \left\{\Delta : \Delta \in F_{n_0},\ \mu\left(\Delta \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{n_0+2} \Delta_\nu\right)\right) > 0\right\} \tag{2.15}$$

и

$$A_i = H_{i-1} \cap (\Delta_1^i \cup \Delta_2^i) \quad \text{при} \quad i > n_0, \tag{2.16}$$

где

$$H_{i-1} = [0, 1] - \sum_{\nu=n_0}^{i-1} A_\nu \quad (i = n_0+1, \cdots), \tag{2.17}$$

$$\Delta_1^i,\ \Delta_2^i \in F_i,\ \Delta_1^i \cup \Delta_2^i \supset \Delta_{i+2}. \tag{2.18}$$

Существование интервалов Δ_1^i, Δ_2^i, удовлетворяющих (2.18), следует из (2.13), (2.14) и (2.10).

Из определения множеств A_i $(i = n_0, n_0+1, \cdots)$, непосредственно следуют неравенства

$$\mu(A_{n_0} \cap F) \leqslant \mu\left(A_{n_0} \cap \left([0, 1] - \bigcup_{l=1}^{n_0+2} \Delta_l\right)\right) \leqslant \frac{2(n_0+2)}{2^{n_0}}, \tag{2.19}$$

$$\mu(A_i) \leqslant \frac{2}{2^i} \quad (i = n_0+1,\ n_0+2, \cdots), \tag{2.20}$$

из которых получаем

$$\mu\left(F \cap \bigcup_{l=n_0}^{\infty} (\Delta_l)\right) \leqslant \frac{2n_0+6}{2^{n_0}}. \tag{2.21}$$

Положим теперь

$$T_n(x) = S_{2^n}(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.22}$$

$$T_n'(x) = \begin{cases} T_n(x), & x \in H_{n-1} \\ T_i(x), & x \in A_i \ (i = n_0, n_0+1, \cdots, n-1), \end{cases} \tag{2.23}$$

$$(n = n_0+1, \quad n_0+2, \cdots).$$

Пусть $1 < r < p$, тогда для любого $n > n_0$

$$\int_0^1 |T_n'(x)|^r dx = \int_{H_{n-1}} |T_n(x)|^r dx + \int_{A_{n_0}} |T_{n_0}(x)|^r dx + \sum_{l=n_0+1}^{n-1} \int_{A_l} |T_l(x)|^r dx. \tag{2.24}$$

Из определения H_{n-1} следует, что

$$H_{n-1} \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{n+1} \Delta_\nu\right) = \varnothing,$$

$$H_{n-1} \cap G = H_{n-1} \cap \left(\bigcup_{\nu=n+2}^{\infty} \Delta_\nu\right).$$

Поэтому в силу (2.10)

$$\mu(H_{n-1} \cap G) < \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{2.25}$$

Отсюда и из (2.13) при $k = n$ следует, что если $\Delta \in \mathrm{F}_n$ и $\Delta \subset H_{n-1}$, то $\mu(\Delta \cap F) > \frac{1}{2}\mu(\Delta)$, и, так как $T_n(x)$ постоянна на каждом $\Delta \in \mathrm{F}_n$, имеем

$$\int_{H_{n-1}} |T_n(x)|^r dx \leqslant 2 \int_{H_{n-1} \cap F} |T_n(x)|^r dx. \tag{2.26}$$

Аналогичными рассуждениями получим

$$\int_{A_i} |T_i(x)|^r dx \leqslant 2 \int_{A_i \cap F} |T_i(x)|^r dx \quad (i = n_0 + 1, \cdots, n-1). \tag{2.27}$$

Учитывая (2.22), (2.12) и (2.20), из последних двух неравенств получаем

$$\int_{H_{n-1}} |T_n(x)|^r dx \leqslant 2[\mu(F)]^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_F |T_n(x)|^p dx\right)^{\frac{r}{p}} \leqslant 2 \cdot M^{\frac{r}{p}},$$

$$\int_{A_i} |T_i(x)|^r dx \leqslant 2[\mu(A_i \cap F)]^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_{A_i \cap F} |T_i(x)|^p dx\right)^{\frac{r}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left(\frac{2}{2^i}\right)^{1-\frac{r}{p}} \cdot M^{\frac{r}{p}} \quad (i = n_0 + 1, \cdots, n-1).$$

Подставляя эти оценки в (2.24), будем иметь

$$\int_0^1 |T_n'(x)| dx \leqslant 2 \cdot M^{\frac{r}{p}} + \int_0^1 |T_{n_0}(x)|^r dx +$$

$$+ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2 \cdot M^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\frac{2}{2^i}\right)^{1-\frac{r}{p}} < C_1. \tag{2.28}$$

Из определения $T_n'(x)$ (см. (2.22), (2.23)) видно, что они являются частными суммами ряда по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x),$$

который отличается от ряда (2.11) лишь тем, что для функций $\chi_n(x)$, носители которых лежат внутри множеств A_i, $i \geqslant n_0$, положено $b_n = 0$ ($b_n = a_n$ для остальных n). Поэтому из (2.28) следует сходимость последовательности $T_n'(x)$ почти всюду на [0, 1]. Но из (2.25) и (2.17) видно, что

$$T_n(x) = T_n'(x) \quad (x \in F - \bigcup_{i=n_1}^{\infty} A_i, \ n > n_0),$$

где согласно (2.21)

$$\mu\left(F - \sum_{i=n_0}^{\infty} A_i\right) > \mu(F) - \frac{2n_0 + 6}{2^{n_0}}. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что последовательность $\{T_n(x)\}$ сходится почти всюду на $F - \bigcup_{l=n_0} A_l$, мера которого, ввиду произвольности n_0, можно сделать сколь угодно близкой к $\mu(F)$ (см. (2.29)). Из только что сказанного заключаем, что последовательность $\{T_n(x) = S_{2^n}(x)\}$ сходится почти всюду на F. Отсюда следует сходимость почти всюду на F ряда (2.11) и теорема 3 доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.V.1974

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Լրիվ օրթոգոնալ սիստեմներով շարքերի դրական չափի բազմությունների վրա զուգամիտության մասին (*ամփոփում*)

Ապացուցվում է, որ $L_2[0,1]$*-ում լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմներով շարքերը կարող են միջին իմաստով զուգամիտել մեկին բավականաչափ մոտ չափ ունեցող բազմությունների վրա և տարամիտել համարյա ամենուրեք [0,1] հատվածում։*

R. S. DAVTIAN, A. A. TALALIAN. *On the convergence of series by complete orthogonal systems on the sets of positive measure* (summary)

It is proved, that the series by complete in L_2 (0, 1) orthonormal systems may converge in the mean on the sets with measures arbitrarily close to the measure of [0, 1] and diverge almost everywhere on [0, 1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 1960, 77—141.
2. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
3. *Y. S. Chow.* Convergence Theorems of Martingales, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1, 1963, 340—346.
4. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН Арм.ССР, 42, № 3, 1963, 134—140.
5. *М. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, серия матем., 28, 1964, 773—798.
6. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Мат. сб., 90 (132) : 4, 1973, 483—520.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

С. Я. ХАВИНСОН

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЛЯ КОМПАКТОВ НУЛЕВОЙ ЁМКОСТИ И ДРУГИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕДКИХ МНОЖЕСТВ

Введение

Хорошо известен критерий Эванса для компактов нулевой емкости (см. [1]). Он состоит в том, что существует потенциал, обращающийся в ∞ на таком компакте, а вне его имеющий конечные значения. В работе [2] Валлин дал другую характеристику компактов нулевой ёмкости, показав, что на них любую непрерывную функцию можно рассматривать, как сужение на этот компакт потенциала меры, обладающей произвольно малой вариацией. Правда, этот результат был получен при некоторых дополнительных предположениях о ядре, с помощью которого строится теория потециала. В работе автора [3], являющейся изложением доклада на Ереванской международной конференции по теории функций в 1965 году, приведена теорема (теорема 6), усиливающая результат Валлина и объединяющая его с критерием Эванса (теорема об универсальном потенциале). Теорема эта была получена при тех же дополнительных ограничениях, что и результат Валлина. Для произвольного ядра в [3] была приведена близкая к результату Валлина аппроксимационная характеристика (теорема 4), являющаяся, однако, менее точным результатом, чем теорема Валлина. (Все результаты в [3] сообщались без доказательств). В настоящей статье мы даем доказательство теоремы об универсальном потенциале, снимая указанные дополнительные ограничевия на ядро. Обсуждаются некоторые следствия и эквиваленты полученной характеристики нуль-множеств. Все эти результаты можно рассматривать в свете теории усложненной полноты систем, построенной в работах Фань-Цзи и Дейвиса [4] и автора [5] — [8]. В этой теории в расчет принимается не только близость аппроксимирующего полинома к приближаемой функции, но и величины коэффициентов полинома. С помощью таких аппроксимирующих процессов оказалась также возможной характеристика множеств аналитической емкости нуль [9] — [11], областей класса S В. И. Смирнова [7], [8]. Обзор ряда результатов подобного рода дан в [3]. В последнем § настоящей статьи мы приводим некоторые новые простые результаты, связанные с аппроксимационным критерием множеств нулевой аналитической ёмкости.

§ 1. Предварительные сведения и формулировка основной теоремы

Пусть $K(r)$ — заданная на $(0, +\infty)$ невозрастающая положительная непрерывная функция, удовлетворяющая требованию

$$\lim_{r \to 0+0} K(r) = +\infty. \tag{1}$$

Такую функцию будем называть ядром. Мы будем рассматривать в m-мерном вещественном пространстве R^m потенциалы с ядром $K(r)$. Поэтому функцию $K(r)$ подчиним дополнительно требованию

$$\int_0 K(r)\, r^{m-1}\, dr < +\infty. \tag{2}$$

Если μ — некоторая бэровская вещественная мера (заряд) в R^m, то под потенциалом $U^\mu(x)$ этой меры понимаем

$$U^\mu(x) = \int K(|x-y|)\, d\mu_y, \tag{3}$$

где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y в R^m. Интегрирование в (3) ведется по носителю μ; замкнутый носитель μ обозначается через $S(\mu)$. Далее рассматриваем лишь заряды, для которых $S(\mu)$ — — компакт.

(Заметим тут же, что в дальнейшем, если не оговорено противное, мерой мы называем лишь неотрицательную меру, а термин заряд сохраняем для вещественных мер). Условие (2) обеспечивает локальную суммируемость потенциалов. Интеграл

$$E(\mu) = \int_{S(\mu)} U^\mu(x)\, d\mu_x \tag{4}$$

есть интеграл энергии для μ. Для компакта Γ величина

$$\gamma_k(\Gamma) = [V(\Gamma)]^{-1}, \quad V(\Gamma) = \inf E(\mu) \tag{5}$$

и inf взята по всем мерам $\mu \geqslant 0$, удовлетворяющим условиям

$$S(\mu) \subseteq \Gamma, \int_\Gamma d\mu = 1 \tag{6}$$

называется K-емкостью компакта Γ. Для произвольного множества Q положим $\gamma_k(Q) = \sup \gamma_k(\Gamma)$, где sup берется по всевозможным компактам $\Gamma \subseteq Q$. Если какое-то свойство имеет место всюду, кроме быть может множества K-емкости нуль, то говорят, что оно имеет место K-квази всюду. Справедливы [14], [12] следующие результаты (для мер $\mu \geqslant 0$):

$$\text{Если } U^\mu(x) \leqslant M, \ x \in S(\mu), \text{ то } U^\mu(x) \leqslant AM, \ \forall x. \tag{7}$$

Здесь A зависит только от размерности пространства R^m (но может считаться независимой от вида $K(r)$; например, в случае $m = 2$ имеем $A = 6$).

Если сужение $U^{\mu}(x)$ на $S(\mu)$ непрерывно там, то $U^{\mu}(x)$ — непрерывен во всем пространстве.

Пусть $\gamma_k(\Gamma)>0$ и μ^* — мера, экстремальная в задаче о K-емкости (5). Тогда

$$U^{\mu^*}(x) \geqslant V(\Gamma) \text{ } K\text{-квази всюду на } \Gamma, \tag{8}$$

$$U^{\mu^*}(x) \leqslant V(\Gamma) \text{ всюду на } S(\mu), \tag{9}$$

таким образом, на $S(\mu)$:

$$U^{\mu^*}(x) = V(\Gamma) \text{ } K\text{-квази всюду.} \tag{10}$$

Потенциал $U^{\mu^*}(x)$ называют емкостным потенциалом. Если ядро $K(r)$ удовлетворяет определенным дополнительным условиям, то для Γ, являющегося объединением конечного числа замкнутых шаров, неравенство (8) имеет место везде на Γ (а не только K-квази всюду).

В частности, указанное свойство выполняется, если ядро $K(r)$ удовлетворяет неравенству

$$K(r) \leqslant C K(2r), \ \forall r>0 \tag{11}$$

с некоторым C.

Хорошо известен следующий критерий Эванса ([1], [12]): для того чтобы $\gamma_k(\Gamma)=0$ необходимо и достаточно, чтобы существовал потенциал $U^{\mu}(x)$, $\mu\geqslant 0$ такой, что

$$U^{\mu}(x)=\infty, \ x\in\Gamma, \ U^{\mu}(x)<+\infty, \ x\overline{\in}\Gamma. \tag{12}$$

В работе [2] Валлин доказал следующую теорему: если ядро $K(r)$ таково, что для Γ, являющегося объединением конечного числа замкнутых шаров, неравенство (8) выполняется везде на Γ (в частности, если имеет место (11)), и $V_k(\Gamma)=0$, то для произвольной непрерывной на Γ функции $\varphi(x)>0$, произвольной окрестности $G\supset\Gamma$ и любого $\varepsilon>0$ существует мера $\mu\geqslant 0$ со следующими свойствами:

$$S(\mu)\subset G, \int\limits_{S(\mu)} d\mu<\varepsilon, \ u^{\mu}(x) \text{ — непрерывен в } R^m, \tag{13}$$

$$u^{\mu}(x)=\varphi(x), \ x\in\Gamma.$$

При этом мера μ может считаться абсолютно-непрерывной относительно лебеговой меры в R^m и обладает бесконечно дифференцируемой вне Γ плотностью.

Условимся для дальнейшего в следующем обозначении. Если функция $F(x)$ задана на каком-то множестве $\Gamma_1\supset\Gamma$, то через $F(x)/_\Gamma$ будем обозначать сужение этой функции на Γ.

Распространим еще понятие непрерывности функции на случай функций, принимающих бесконечные значения, считая, что такая функция $F(x)$ непрерывна (в обобщенном смысле) в точке x_0, когда $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$ (в частности, при $F(x_0)=\infty$). Наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\gamma_k(\Gamma)=0$. Для произвольного открытого множества $C\subset\Gamma$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует мера $\mu\geqslant 0$ со следующими свойствами:*

1. $S(\mu)\subset G$, $\int\limits_{S(\mu)} d\mu<\varepsilon$, *$\mu$ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и её плотность бесконечно дифференцируема вне* Γ.

2. $U^{\mu}(x)=+\infty,\ x\in\Gamma,\ U^{\mu}(x)<+\infty,\ x\overline{\in}\Gamma,$

$u^{\mu}(x)$ *— непрерывен в R^m (в обобщенном смысле).*

3. *Пусть $F(x)>0$ — произвольная полунепрерывная снизу в некоторой окрестности Γ функция и $\varphi(x)=F(x)/_{\Gamma}$. Существует замкнутое подмножество T_{φ} множества $S(\mu)$ такое, что если μ_{φ} — сужение (μ на T_{φ}, то $U^{\mu_{\varphi}}(x)/_{\Gamma}=\varphi(x)$ и потенциал $U^{\mu_{\varphi}}(x)$ непрерывен вне Γ и непрерывен в обобщенном смысле в тех точках Γ, в которых $F(x)$ является таковой. Плотность меры μ_{φ} бесконечно дифференцируема вне* Γ.

4. *Для произвольной непрерывной на Γ функции $\varphi(x)>0$ имеет место утверждение п. 3 с непрерывным в R^m потенциалом $U^{\mu_{\varphi}}(x)$.*

Заметим, что никаких дополнительных предположений о ядре (кроме положительности, монотонности и (2)) мы не делаем. Таким образом, сформулированная теорема усиливает результат Валлина в следующих направлениях:

а) снимает ограничения на ядро, б) доводит конструкцию до „универсального“ потенциала, „обслуживающего“ сразу все функции и охватывающего, к тому же, и результат Эванса, в) рассматривает полунепрерывные функции, а не только непрерывные.

Основную роль в наших рассуждениях будет играть построение Валлина [2], однако мы сумеем обойтись без его дополнительных предположений.

§ 2. Леммы

Будем называть канонической окрестностью компакта Γ объединение D конечного числа (замкнутых) шаров, причем такое, что точки Γ являются внутренними к D. Если D — каноническая окрестность Γ и $a>0$ — число, то aD — множество, получающееся из D растяжением каждого шара, входящего в D в a раз (относительно центра!)

Лемма 1. Пусть для компакта Γ

$$\gamma_k(\Gamma)=0. \tag{14}$$

Для произвольного открытого множества $G\supset\Gamma$ и произвольных чисел $a>0$ и $\delta>0$ существует мера μ, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, обладающая бесконечно дифференцируемой плотностью и такая, что ее потенциал непрерывен в R^m) и*

* Из приводимой ниже леммы 3 ясно, что условие (2) обеспечивает непрерывность потенциала абсолютно непрерывной меры с ограниченной плотностью.

$$S(\mu) \subset G, \int\limits_{S(\mu)} d\mu < \delta, U^{(\mu)}(x) \geqslant a, \; x \in \Gamma,$$

$$U^{\mu}(x) \leqslant Aa, \; \forall x \in R^m \tag{15}$$

(*константа* A *из* (7)).

Доказательство. Подберем число $V_0 > 0$ так, чтобы $\frac{a}{V_0} < \delta$ и построим такую каноническую окрестность D_1 множества Γ, что $V(D_1) \geqslant V_0$. Это возможно сделать, так как при стягивании D_1 к Γ величина $V(D_1) \to \infty$ (из-за того, что $\gamma_k(\Gamma) = 0$). В D_1 построим каноническую окрестность D такую, что $2D \subset D_1$. Тогда $V(2D) \geqslant V(D_1) > V_0$. Пусть мера ν решает задачу о емкости для множества $2D$. Тогда

$$U^{\nu}(x) \geqslant V(2D) \geqslant V_0 \tag{16}$$

K-квази всюду на множестве $2D$ и

$$U^{\nu}(x) \leqslant A\, V(2D) \text{ везде в } R^m,$$

причем $\int d\nu = 1$.

Неравенство (16), выполняясь K-квази всюду, выполняется на $2D$, в частности, почти везде относительно меры Лебега. (В силу условия (2) множество положительной лебеговой меры не может иметь нулевой емкости). Если взять теперь меру σ: $d\sigma = \frac{a}{V(2D)} d\nu$, то для нее: $U^{\sigma}(x) \geqslant a$ почти везде на множестве $2D$,

$$U^{\sigma}(x) \leqslant Aa, \; \forall x \in R^m,$$

$$\int d\sigma = \frac{a}{V(2D)} < \frac{a}{V_0} < \delta. \tag{17}$$

Пусть теперь r_0 — наименьший из радиусов шаров, составляющих D. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x) \geqslant 0$ с компактным носителем, лежащем в шаре $|x| < r < r_0$, причем

$$\int\limits_{|x|<r} \varphi(x)\, dx = 1 \tag{18}$$

(dx — дифференциал меры Лебега в R^m). Рассмотрим свертки (см., например, [1]):

$$U^{\sigma} * \varphi \text{ и } \sigma * \varphi \overset{def}{=} \mu. \tag{19}$$

Так как $U^{\sigma} = K * \sigma$, то

$$U^{\sigma} * \varphi = K * \sigma * \varphi = K * \mu = U^{\mu}. \tag{20}$$

Мера μ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и обладает бесконечно дифференцируемой плотностью, причем

$$\int d\mu = \int d\sigma < \delta.$$

Потенциал $U^{\mu}(x)$, в силу (19) и (20) непрерывен во всей плоскости, ибо его значения получаются осреднением значений суммируемой функции $U'(x)$ с хорошим весом $\varphi(x)$. По этой же причине и так как $r < r_0$, $U^{\mu}(x) > a$ на D и, тем более, на Г. Наконец, $U^{\mu}(x) \leqslant Aa$ везде. Очевидно также, что можно считать $3D \subset G$ и тогда, $S(\mu) \subset G$. Доказательство завершено.

Теперь мы можем дать доказательство основной леммы, использующей конструкцию Валлина [2], но без дополнительных ограничений на ядро, сделанных в [2].

Пусть $f(x) > 0$ — непрерывная функция на Г. Продолжим ее непрерывно на все пространство и возьмем компакт $D \supset \Gamma$ такой, что $f(x) > 0$ на D и каждая точка Г является внутренней для D.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $G \supset \Gamma$ существует мера $\nu > 0$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, обладающая бесконечно дифференцируемой плотностью и следующими свойствами:*

$$U^{\nu}(x) < f(x),\ x \in D,\ U^{\nu}(x) \geqslant f(x) - \varepsilon,\ x \in \Gamma,$$

$$\int\limits_{S(\nu)} d\nu < \varepsilon,\ S(\nu) \subset G. \tag{21}$$

(*Потенциал $U^{\nu}(x)$ непрерывен в R^m*).

Доказательство. Обозначим $M = 3^m A + 4$, где A — число из оценки (7). Будем рассматривать последовательность $\{\eta_i\}$, $i = 0, 1, \cdots$ разбиений пространства R^m на замкнутые кубы. При этом η_0 состоит из всех замкнутых кубов со стороной единица, вершины которых имеют целые координаты, а η_i, $i > 0$ состоит из всех кубов, которые получаются делением каждого куба из η_{i-1} на 2^m равных кубов гиперплоскостями размерности $(m-1)$, параллельными координатным плоскостям.

Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$ и возьмем такую есть η_i, чтобы на каждом кубе этой сети, пересекающемся с D, колебание $f(x)$ было менее ε_1. Пусть $\omega_1, \cdots, \omega_e$ все кубы этой сети, пересекающиеся с D. Можно считать размеры кубов столь малыми, что

$$\min_{x \in \bigcup\limits_{l=1}^{e} \omega_l} f(x) = \delta > 0. \tag{22}$$

Разобьем теперь кубы $\omega_1, \cdots, \omega_e$ на три категории:

1. Куб ω_l отнесем первой категории ($\omega_l \in I$), если

$$\max_{x \in \omega_l \cap \Gamma} f(x) > \varepsilon.$$

2. $\omega_l \in II$, если ω_l граничит с некоторым кубом первой категории, но при этом $\overline{\omega_l} \in I$.

3. К третьей категории отнесем все те кубы из $\omega_1, \cdots, \omega_e$, которые не вошли в I и II категории.

Если кубов первой категории вообще нет, то полагая $\nu \equiv 0$, удовлетворим требованиям леммы. Поэтому будем считать, что существует $s > 0$ кубов первой категории и что ими являются кубы $\omega_1, \cdots, \omega_s$. Пусть $\omega_l \in I$. Так как

$$\gamma_k (\omega_l \cap \Gamma) = 0,$$

то, использовав предыдущую лемму, построим меру $\mu_l \geqslant 0$ со следующими свойствами:

$$S(\mu_l) \subset G', \ U^{\mu_l}(x) \geqslant \varepsilon_1, \ x \in \Gamma \cap \omega_l, \ U^{\mu}(x) \leqslant A\varepsilon_1, \ \forall x, \tag{23}$$

причем $U^{\mu_l}(x)$ непрерывен и вариация (μ_l) сколь угодно мала. Мы будем, в частности, считать вариацию μ_l столь малой, чтобы в любой точке x, не лежащей в кубах непосредственно граничащих с данным ω_l, выполнялось неравенство

$$U^{\mu_l}(x) < \min\left(\frac{\delta}{2s}, \quad \frac{\varepsilon_1}{s}\right). \tag{24}$$

Кроме того, считаем, что

$$\int\limits_{S(\mu_l)} d\mu_l < \frac{\varepsilon}{2s}. \tag{25}$$

Указанное построение осуществим для всех $i = 1, \cdots, s$ и положим $\nu^1 = \mu_1 + \cdots + \mu_s$. Рассмотрим потенциал $U^{\nu_1}(x)$. Ясно, что

$$S(\nu_1) \subset G, \ \int d\nu^1 < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

Потенциал $U^{\nu^1}(x)$ непрерывен во всей плоскости. Дадим его оценку в сравнении с величиной $f(x)$. Если x входит в куб ω_l первой или второй категории, то, как легко усмотреть из построения

$$f(x) > \varepsilon - 2\varepsilon_1 = (3^m A + 2)\varepsilon_1. \tag{27}$$

В то же время наш куб может быть соседним менее, чем для 3^m кубов первой категории, и поэтому

$$U^{\nu^1}(x) < 3^m A\varepsilon_1 + s\frac{\varepsilon_1}{s} = (3^m A + 1)\varepsilon_1. \tag{28}$$

Если x входит в куб третьей категории, то

$$f(x) > \delta, \ U^{\nu^1}(x) < s\frac{\delta}{2s} = \frac{\delta}{2}.$$

С другой стороны, если $x \in \omega_l \cap \Gamma$, $i = 1, \cdots, s$, то

$$U^{\nu'}(x) \geqslant U^{\nu_1}(x) \geqslant \varepsilon_1. \tag{29}$$

Во всех остальных точках Г, т. е. в точках Г, не принадлежащих кубам первой категории, будем иметь

$$f(x) \leqslant \varepsilon = M\varepsilon_1, \quad U^{\nu'}(x) > 0. \tag{30}$$

Сопоставив (27) — (30), приходим к заключению, что построенный нами потенциал удовлетворяет неравенствам

$$U^{\nu'}(x) < f(x), \quad x \in D,$$
$$U^{\nu'}(x) > \min(f(x) - \varepsilon, \ \varepsilon_1) \quad x \in \Gamma. \tag{31}$$

Если второе из неравенств (21) еще не удовлетворено, то повторяем конструкцию с заменой $f(x)$ на $f(x) - U^{\nu'}(x)$.

Таким образом, построим меру ν^2 со следующими свойствами:

$$S(\nu^2) \subset G, \int d\nu^2 < \frac{\varepsilon}{2^2},$$
$$U^{\nu^2}(x) < f(x) - U^{\nu'}(x), \quad x \in D, \tag{32}$$
$$U^{\nu^2}(x) > \min(f(x) - U^{\nu'}(x) - \varepsilon, \ \varepsilon_1), \quad x \in \Gamma,$$

причем потенциал $U^{\nu^2}(x)$ непрерывен в R^m. Последние неравенства, используя (31), можно переписать так:

$$U^{\nu^1+\nu^2}(x) < f(x), \quad x \in D,$$
$$U^{\nu^1+\nu^2}(x) > \min(f(x) - \varepsilon, \ 2\varepsilon_1).$$

Если неравенства (21) еще не выполняются для меры $\nu^1 + \nu^2$, то продолжаем построение с использованием взамен $f(x) - U^{\nu'}(x)$ функции $f(x) - U^{\nu^1+\nu^2}(x)$ и т. д. При этом заботимся, чтобы для построенной на k-ом шаге меры ν^k выполнялись условия

$$S(\nu^k) \subset G, \int d\nu^k < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{33}$$

Пусть $\sup_{x \in D} f(x) = N$. При натуральном n таком, что $n\varepsilon_1 > N$, будем иметь

$$U^{\nu^1+\dots+\nu^n}(x) < f(x), \quad x \in D,$$
$$U^{\nu^1+\dots+\nu^n}(x) > \min(f(x) - \varepsilon, \ n\varepsilon_1) = f(x) - \varepsilon. \tag{34}$$

Кроме того, для меры $\nu = \nu^1 + \dots + \nu^n$ имеем

$$S(\nu) \subset G, \int d\nu < \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \tag{35}$$

Наконец, из леммы 1 и описанной конструкции следует, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и ее плотность есть бесконечно дифференцируемая функция. Потенциал $U^{\nu}(x)$ непрерывен во всем пространстве. Доказательство завершено.

Лемма 3. *Пусть D — какое-либо измеримое (по мере Лебега dx) множество в R^m и*

$$U_D^{dx}(x) = \int\limits_D K(|x-t|)\, dt. \tag{36}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\operatorname{mes} D < \delta \rightrightarrows U_D^{dx}(x) < \varepsilon \ \forall x. \tag{37}$$

Доказательство. Обозначим, ради краткости, $\operatorname{mes} D = q$, и пусть $R(q)$ — такое число, что

$$K(r) \leqslant (q)^{-\frac{1}{2}}, \text{ при } r > R(q). \tag{38}$$

Очевидно, что $R(q) \to 0$, при $q \to 0$. Опишем из произвольной точки x как из центра, шар радиуса $R(q)$, и пусть D_1 — та часть D, которая лежит вне этого шара. Тогда

$$U_D^{dx}(x) \leqslant B \int\limits_0^{R(q)} K(r) r^{m-1}\, dr + \int\limits_{D_1} K(|t-x|)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant B \int\limits_0^{R(q)} K(r) r^{m-1}\, dr + \sqrt{q}\,. \tag{39}$$

Здесь B—абсолютная константа, зависящая только от размерности m. В силу сходимости интеграла (2) первый член в оценке (39) стремится к нулю вместе с q. Лемма доказана.

Лемма 4. *В условиях леммы* 2 *можно считать, что носитель* $S(\nu)$ *меры* ν *не пересекается с* Γ.

Дказательство. Так как $\gamma_k(\Gamma) = 0$, то и $\operatorname{mes}\Gamma = 0$.

Так как мера ν, построенная в лемме 2, абсолютно непрерывна относительно dx и имеет бесконечно дифференцируемую плотность (нам хватило бы здесь и ограниченности этой плотности), то можно взять окрестность $D \supset \Gamma$ сколь угодно малой меры. Если ν_1 — сужение ν на D, то потенциал $U^{\nu_1}(x)$ равномерно сколь угодно мал при достаточной малости $\operatorname{mes} D$. Поэтому для меры $\nu_2 = \nu - \nu_1$ потенциал $U^{\nu_2}(x)$ сколь угодно близок к $U^{\nu}(x)$. Однако, $S(\nu_2)$ лежит вне Γ и лемма доказана.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Мы можем любую непрерывную функцию $f(x)$, заданную и положительную на Γ, считать непрерывной и положительной на некотором, одном и том же для всех $f(x)$, замкнутом шаре $S \supset \Gamma$, для которого каждая точка Γ является внутренней. Каждая полунепрерывная снизу на Γ функция может быть продолжена до функции, полунепрерывной снизу на S.

Построим счетное множество непрерывных на S положительных функций $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ таким образом, чтобы для любой положительной непрерывной на S функции $f(x)$ нашлась подпоследовательность

$\{\varphi_{n_j}(x)\}$ последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, равномерно сходящаяся к $f(x)$ на S, причем

$$\varphi_{n_j}(x) < f(x). \tag{40}$$

Разумеется построение последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ с требуемыми свойствами возможно и может быть сделано разными приемами. Запишем функции $\{\varphi_n(x)\}$ в треугольную таблицу

$$\begin{array}{c} \varphi_1(x) \\ \varphi_1(x)\ \ \varphi_2(x) \\ \varphi_1(x)\ \ \varphi_2(x)\ \ \varphi_3(x) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

и изменим обозначения, положив

$$f_1(x) = \varphi_1(x),\ f_2(x) = \varphi_1(x),\ f_3(x) = \varphi_2(x),$$
$$f_4(x) = \varphi_1(x),\ f_5(x) = \varphi_2(x),\ f_6(x) = \varphi_3(x), \cdots. \tag{41}$$

Основываясь на леммах $1-4$, построим последовательность положительных мер $\{\mu_j\}$, являющихся абсолютно непрерывными относительно меры Лебега, обладающих бесконечно дифференцируемыми плотностями и непрерывными в R^m потенциалами $U^{\mu_j}(x)$ и имеющих, кроме того, следующие свойства:

$$\int d\mu_j < \frac{\varepsilon}{2j};\ S(\mu_j) \subset G;\ S(\mu_j) \cap \Gamma = \varnothing,\ S(\mu_j) \cap S(\mu_i) = \varnothing;$$

$$j \neq i;\ U^{\mu_j}(x) < f_j(x),\ x \in S;\ U^{\mu_j}(x) > f_j(x) - \frac{1}{2^j},\ x \in \Gamma. \tag{42}$$

Построение мер μ_j ведем последовательно, накачивая меру μ_{j+1} в „зазор" между $S(\mu_j)$ и Γ.

Ясно также, что процесс построения $\{\mu_j\}$ можно вести таким путем, чтобы

$$\rho_j = \max_{x \in S(\mu_j)} |\rho(x, \Gamma)| \to 0, \tag{43}$$

где $\rho(x, \Gamma)$ — расстояние от x до Γ.

Положим

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j. \tag{44}$$

Ряд (44) сходится по вариации; можно понимать также сходимость ряда (44) в смысле сходимости ряда из плотностей μ_j в смысле метрики $L_1(S, dx)$ (пространство суммируемых на S по мере Лебега dx функций). Ясно, что μ — абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и ее плотность бесконечно дифференцируема вне Γ. Очевидно также, что $S(\mu) \subset G$ и $\int d\mu < \varepsilon$. Из оценок (42) и (43) вытекает, что

$$U^{\mu}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}U^{\mu j}(x)<+\infty,\ x\overline{\in}\Gamma. \tag{45}$$

(Обосновать равенство $U^{\mu}(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}U^{\mu j}(x)$ при любом x легко с помощью известных теорем о почленном интегрировании рядов). Покажем, что $U^{\mu}(x)\equiv\infty$ на Γ. Возьмем сколь угодно большое $N>0$ и пусть $f(x)\equiv N+1$. В силу построения системы $\{f_n(x)\}$ найдется такая $f_j(x)$, что $f_j(x)>N$, $x\in\Gamma$. А тогда, по построению $U^{\mu j}(x)>f_j(x)-\dfrac{1}{2^j}$ и, следовательно, $U^{\mu j}(x)$ сколь угодно велика на Γ вместе с N. Так как $U^{\mu}(x)>U^{\mu j}(x)$, то $U^{\mu}(x)\equiv\infty$, $x\in\Gamma$. Непрерывность $U^{\mu}(x)$ вне Γ следует из (45) и свойств $U^{\mu j}(x)$. Поскольку $U^{\mu}(x)$, как всякий потенциал положительной меры, полунепрерывен снизу, то при $x_0\in\Gamma$

$$\varliminf_{x\to x_0}U^{\mu}(x)\geqslant U^{\mu}(x_0)=\infty$$

и, следовательно, $U^{\mu}(x)$ непрерывен в обобщенном смысле везде в R^m.

Переходим к доказательству п. 3. Так как $F(x)$ полунепрерывна в некоторой окрестности Γ (можно считать, что на S), то найдется ряд из положительных непрерывных функций $\psi_1(x),\cdots,\psi_n(x),\cdots$ такой, что

$$\sum_{1}^{\infty}\psi_i(x)=F(x),\quad x\in S. \tag{46}$$

Берем функцию $f_{n_1}(x)$ из системы (41), для которой

$$\psi_1(x)-\frac{1}{2}\leqslant f_{n_1}(x)<\psi_1(x),\quad x\in S$$

и потенциал $U^{\mu n_1}(x)$. Затем для функции $\varphi_2(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)-U^{\mu n_1}(x)$ $(\varphi_1=\psi_1)$ подбираем $f_{n_2}(x)$ $(n_2>n_1)$ так, чтобы

$$\varphi_2(x)-\frac{1}{2^2}\leqslant f_{n_2}(x)<\varphi_2(x)\quad x\in S \tag{47}$$

и берем $U^{\mu n_2}(x)$. Рассматриваем функцию

$$\varphi_3(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)+\psi_3(x)-U^{\mu n_1}(x)-U^{\mu n_2}(x)\ \text{и т. д.}$$

Положим

$$\mu_{\varphi}=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_{n_j}. \tag{48}$$

Ряд (48) сходится по вариации; в (48) имеет место также сходимость плотностей в пространстве $L_1(S,\,dx)$.

Мера μ_{φ} абсолютно непрерывна относительно dx и плотность ее бесконечно дифференцируема вне Γ. Если γ — совокупность предельных точек множества $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}S(\mu_{n_j})$, лежащих на Γ, то очевидно, что

$$S(\mu_\varphi) = \gamma \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} S(\mu_{n_j}).$$

Мера μ_φ есть сужение μ на $S(\mu_\varphi)$, которое и можно принять за T_φ. Однако, $\mathrm{mes}\,\gamma = 0$ и поэтому мера μ_φ сосредоточена на $\bigcup_{j=1}^{\infty} S(\mu_{n_j})$. При любом x потенциал

$$U^{\mu_\varphi}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} U^{\mu_{n_j}}(x), \tag{49}$$

что снова можно обосновать с помощью известных теорем о предельном переходе под знаком интеграла. Что потенциал $U^{\mu_\varphi}(x)$ непрерывен вне Г обосновывается так же, как непрерывность $U^{\mu}(x)$. На k-ом шаге нашей конструкции мы имеем неравенства

$$U^{\mu_{n_k}}(x) < f_{n_k}(x) < \psi_1(x) + \cdots + \psi_k(x) - U^{\mu_{n_1}}(x) - \cdots - U^{\mu_{n_{k-1}}}(x), \tag{50}$$

т. е.

$$U^{\mu_{n_1}}(x) + \cdots + U^{\mu_{n_k}}(x) < \psi_1(x) + \cdots + \psi_k(x), \quad x \in S,$$

$$U^{\mu_{n_k}}(x) \geqslant f_{n_k}(x) - \frac{1}{2^{n_k}} > \psi_1(x) + \cdots + \psi_k(x) - U^{\mu_{n_1}}(x) - \cdots -$$

$$- U^{\mu_{n_{k-1}}}(x) - \frac{1}{2^{n_k}} - \frac{1}{2^k}, \quad x \in \Gamma,$$

т. е.

$$U^{\mu_{n_1}}(x) + \cdots + U^{\mu_{n_k}}(x) < \psi_1 + \cdots + \psi_k(x) - \frac{1}{2^{n_k}} - \frac{1}{2^k}, \quad x \in \Gamma. \tag{51}$$

Из (46), (49), (50) и (51) следует, что

$$U^{\mu_\varphi}(x) \leqslant F(x) \quad x \in S \tag{52}$$

и

$$U^{\mu_\varphi}(x)|_\Gamma = F(x)|_\Gamma = \varphi(x). \tag{53}$$

Пусть теперь $F(x)$ непрерывна (б. м. в обобщенном смысле) в точке $x_0 \in \Gamma$. Тогда, с одной стороны

$$\varliminf_{x \to x_0} U^{\mu_\varphi}(x) \geqslant U^{\mu_\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = F(x_0),$$

а с другой стороны

$$\varlimsup_{x \to x_0} U^{\mu_\varphi}(x) \leqslant \varlimsup_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) = \varphi(x_0)$$

и непрерывность $U^{\mu_\varphi}(x)$ в точке x_0 доказана.

Утверждение п. 4 автоматически следует из п. 3, так как любая непрерывная на Г функция $\varphi(x)$ может быть непрерывно продолжена на S.

Теорема доказана.

§ 4. Несколько следствий из основной теоремы и фактов, к ней примыкающих

В направлении, обратном к теореме 1, укажем следующий результат (более сильный, чем непосредственное обращение теоремы 1):

Теорема 2. *Если при произвольном* $\varepsilon > 0$ *найдется такой заряд* λ, *что*

$$\max_{x \in \Gamma} |1 - U^{\lambda}(x)| < \varepsilon, \quad \int_{S(\lambda)} |d\lambda| < \varepsilon, \tag{54}$$

то

$$\gamma_k(\Gamma) = 0. \tag{55}$$

Доказательство. Пусть $\mu \geqslant 0$ — произвольная мера, для которой $S(\mu) \subset \Gamma$ и $U^{\mu}(x) \leqslant 1$ в R^m. Тогда

$$\int_{\Gamma} d\mu = \int_{\Gamma} d\mu\,[1 - U^{\lambda}(x)] + \int_{\Gamma} U^{\lambda}(x)\, d\mu < \varepsilon \int_{\Gamma} d\mu +$$
$$+ \int_{S(\lambda)} U^{\mu}(x)\, d\lambda < \varepsilon \int_{\Gamma} d\mu + \varepsilon.$$

Таким образом, $\int_{\Gamma} d\mu = 0$ и, следовательно, $\mu \equiv 0$. Отсюда немедленно следует (55).

Теорема 3. *Если имеет место* (55), *то для произвольной непрерывной на* Γ *функции* $\varphi(x)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдутся точки* $y_1, \cdots, y_n$ *вне* Γ *и действительные числа* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *такие, что*

$$\left.\begin{aligned} &\max_{x \in \Gamma} \left| \varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j K(|x - y_j|) \right| < \varepsilon, \\ &\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Обратно, если аппроксимация (56) *возможна для* $\varphi(x) \equiv 1$, *то* $\gamma_k(\Gamma) = 0$.

Доказательство. Для доказательства возможности аппроксимации (56) при условии $\gamma_k(\Gamma) = 0$ воспользуемся леммами 2 и 4. Потенциал $U^{\mu}(x)$, аппроксимирующий $\varphi(x)$ согласно этим леммам, заменяем интегральной суммой и получаем (56). Второе утверждение теоремы 3 содержится в теореме 2.

Представляется полезной следующая характеристика множеств нулевой емкости. Введем величину

$$\gamma_k^*(\Gamma) = \sup \int_{\Gamma} |d\nu|, \tag{57}$$

где верхняя грань берется по всем зарядам ν, для которых:

$$S(\nu) \subset \Gamma, \quad |U^{\nu}(x)| \leqslant 1, \quad x \in R^m \setminus \Gamma. \tag{58}$$

Теорема 4. *Условия*

$$\gamma_k(\Gamma) = 0 \tag{55}$$

и

$$\gamma_k^*(\Gamma) = 0 \tag{59}$$

— равносильны.

Если $\gamma_k(\Gamma) > 0$, то очевидно, что $\gamma_k^*(\Gamma) > 0$. Пусть $\gamma_k(\Gamma) = 0$. Возьмем счетную систему точек $y_1, \cdots, y_n, \cdots$; всюду плотную в $R^m \setminus \Gamma$. Возможность аппроксимации (56) (где под точками y_j можно, разумеется, понимать точки выделенной сейчас системы) говорит о том, что система функций $\{\varphi_j(x) = K(|x - y_j|)\}$ будет $o(p)$ полна в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций с равномерной нормой и полунормой $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$ (см. [8]). Согласно критерию $o(p)$ полноты (см., например, [8]) для любого заряда ν на Γ из условий

$$\left| \int_\Gamma d\nu_x K(|x - y_j|) \right| \leqslant 1, \quad j = 1, \cdots$$

следует, что $\nu \equiv 0$. Отсюда получаем $\gamma_k^*(\Gamma) = 0$ и теорема доказана.

Дадим еще другое доказательство теоремы 4, не опирающееся на понятие $o(p)$ полноты. Это доказательство сообщено нам проф. Н. С. Ландкофом и асп. А. А. Вагаршакяном. Пусть $\nu = \nu^+ - \nu^-$ — заряд на Γ такой, что $|U^{\nu}(x)| \leqslant 1$ в $R^m \setminus \Gamma$. Пусть ν^+ и ν^- сосредоточены на Γ^+ и Γ^- соответственно, $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \varnothing$. Возьмем компакты $F^+ \subset \Gamma^+$ и $F^- \subset \Gamma^-$ и сколь угодно малые положительные числа ε и δ. Построим в R^m непрерывную функцию $f(x)$:

$$f(x) = 1, \quad x \in F^+,$$
$$f(x) = \delta, \quad x \in F^-,$$
$$\delta \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad x \in R^m \setminus (F^+ \cup F^-).$$

Применяя лемму 2, получаем абсолютно непрерывную меру $\mu \geqslant 0$, для которой $\mu(R^m) < \varepsilon$, $U^{\mu}(x) < f(x)$ везде, $U^{\mu}(x) > f(x) - \varepsilon$ на Γ. Используя абсолютную непрерывность μ, получим, что из условия $\gamma_k(\Gamma) = 0$ следует, что $\mu(\Gamma) = 0$. Поэтому

$$\varepsilon > \mu(R^m) \geqslant \int_{R^m \setminus \Gamma} |U^{\nu}(x)| \, d\mu \geqslant \int_{R^m \setminus \Gamma} U^{\nu}(x) \, d\mu = \int_{R^m} U^{\nu}(x) \, d\mu =$$

$$= \int_{R^m} U^{\mu}(x) \, d\nu \geqslant (1 - \varepsilon) \nu^+(F^+) - \delta \nu^-(F^-) - \nu^-(\Gamma^- \setminus F^-).$$

В силу произвольности ε и δ получаем неравенство

$$0 \geqslant \nu^+(F^+) - \nu^-(\Gamma^- \setminus F^-).$$

Из этого неравенства, в силу произвольности $F^- \subset \Gamma^-$ следует, что $\nu^+(F^+) = 0$ и по произвольности $F^+ \subset \Gamma^+$ получаем, что $\nu^+(\Gamma^+) = 0$. Точно так же убеждаемся в равенстве $\nu^-(\Gamma^-) = 0$, и значит $\nu \equiv 0$.

§ 5. Множества нулевой длины на прямой

Компакты нулевой длины на оси $R = (-\infty, +\infty)$ совпадают с компактами нулевой аналитической емкости. Поэтому для них имеет место аппроксимационная характеристика, принадлежащая В. П. Хавину и автору (см. [9], [10], [11]). Однако, для этого случая может быть получена и несколько более точная информация.

Теорема 5. *Пусть* $\Gamma \subset (-\infty, +\infty)$ *и*

$$\text{mes}\,\Gamma = 0. \tag{60}$$

Для произвольной вещественной непрерывной функции $\varphi(x)$ *на* Γ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся действительные точки* $y_1, \cdots, y_n \in R \setminus \Gamma$ *и действительные числа* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *такие, что*

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \varphi(x) - \sum_1^n \frac{\lambda_j}{x - y_j} \right| < \varepsilon, \quad \sum_1^n |\lambda_j| < \varepsilon. \tag{61}$$

Обратно, если аппроксимация (61) *возможна для* $\varphi(x) \equiv 1$, *то* $\text{mes}\,\Gamma = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено (60). Возьмем всюду плотное счетное множество точек $y_1, \cdots, y_n, \cdots$ в $R \setminus \Gamma$. Рассмотрим пространство $C(\Gamma)$ непрерывных вещественных функций на Γ и положим $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|$. Мы должны доказать, что система $\left\{\dfrac{1}{x - y_j}\right\}$ будет $o(p)$ полна в нашем пространстве. Это приводит к необходимости доказать, что условие

$$\left| \int \frac{d\nu}{x - y_j} \right| \leqslant 1, \ j = 1, 2, \cdots \tag{62}$$

влечет равенство $\nu \equiv 0$, (ν — произвольный заряд на Γ). Рассмотрим в нижней полуплоскости интеграл типа Коши — Стильтьеса

$$F(y) = \int_\Gamma \frac{d\nu}{x - y}. \tag{63}$$

Функция $F(y)$ входит в классы H_δ в нижней полуплоскости, а из (62) вытекает, что ее граничные значения ограничены почти везде на оси. Поэтому $F(y)$ — ограниченная аналитическая функция в нижней полуплоскости (теорема В. И. Смирнова [13]). Будучи ограниченной аналитической функцией $F(y)$ не может иметь почти везде на оси вещественных граничных значений, если только $F(y) \not\equiv 0$. Но, с другой стороны, граничные значения $F(y)$ на оси именно вещественны почти везде и, следовательно, $F(y) \equiv 0$ в нижней полуплоскости.

Таким образом, в верхней полуплоскости $F(y)$ есть интеграл Коши. Но тогда заряд ν должен быть по теореме бр. Рисс абсолютно непрерывен, а он у нас сингулярен ($\operatorname{mes}\Gamma = 0$). Стсюда следует, что $\nu \equiv 0$.

Пусть теперь аппроксимация (61) возможна для $\varphi(x) \equiv 1$. Согласно критериям такой аппроксимации (см. [8]) из условий

$$\left|\int_\Gamma \frac{d\nu}{x - y_j}\right| \leqslant 1,\ j = 1, 2, \cdots \rightarrow \int_\Gamma d\nu = 0 \tag{64}$$

с произвольным вещественным зарядом на Γ. Но тогда и для комплексной меры μ должно быть

$$\left|\int_\Gamma \frac{d\mu}{x - y_j}\right| \leqslant 1,\quad j = 1, 2, \cdots \rightarrow \int_\Gamma d\mu = 0. \tag{65}$$

Однако, если бы $\operatorname{mes}\Gamma > 0$ и, следовательно, аналитическая емкость $\Omega(\Gamma) > 0$, то существует (см. [3]) комплексная мера μ^*, для которой

$$\left|\int_\Gamma \frac{d\mu^*}{x - y}\right| \leqslant 1,\quad y \overline{\in} \Gamma \quad \text{и} \quad \int_\Gamma d\mu^* = \Omega(\Gamma) > 0$$

— противоречие. Теорема доказана.

Положим для точек $y_j \overline{\in} \Gamma$

$$U_j(x) = \operatorname{Re} \frac{1}{x - y_j},\quad v_j(x) = \operatorname{Im} \frac{1}{x - y_j}. \tag{66}$$

В противовес к теореме 5, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть Γ — произвольный компакт на оси R. Для произвольной непрерывной на Γ вещественной функции $\varphi(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_N$ в нижней полуплоскости и вещественные числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_N$ такие, что*

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j(x) - \sum_{n+1}^{N} \lambda_j v_j(x) \right| < \varepsilon,$$

$$\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| < \varepsilon.$$

На доказательстве этого результата мы не останавливаемся, так как оно близко к доказательству предыдущей теоремы.

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила 14.X.1974

Ս. ՅԱ. ԽԱՎԻՆՍՈՆ. Զրոյական ունակությամբ կոմպակտների ունիվերսալ պոտենցիալը և նոր բազմությունների ուրիշ ապրոքսիմացիոն բնութագրիչներ *(ամփոփում)*

Հոդվածը պարունակում է հեղինակի զեկուցումից մի շարք թեորեմների ապացույցներ ֆունկցիաների տեսության գծով Միջազգային կոնֆերանսում (Երևան, 1965 թ.) Նախապես հրատարակված [3]-ում առանց ապացույցների։

Հիմնական թեորեմը ունիվերսալ պոտենցիալի մասին ապացուցված է առանց սահմանափակումների կորիզի վրա, որոնք ներկա էին [3]-ում։ Բերված են մի քանի նոր արդյունքներ փոքր գործակիցներով ապրոքսիմացիայի վերաբերյալ։

S. Ja. HAVINSON. *Universal potential for compacta of zero capacity and other approximational characteristics of sparse sets* (summary)

The article includes detailed proofs of several theorems from the author's report at the international function's theory conference (Erevan, 1965). The theorems have been published in [3] without proofs. The main theorem about the universal potential is proved without limitation on the kernel wich had been assumed in [3]. There are also some new results concerning the approximation with small coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. С. Ландкоф.* Основы современной теории потенциала, М., Изд. „Наука", 1966
2. *H. Wallin.* Continuous functions and potential theory, Arkiv mat., 5, № 1, 1963 55—84.
3. *С. Я. Хавинсон.* О представлении и приближении функций на редких множествах, „Современные проблемы теории аналитических функций", сб. трудов, Изд. „Наука", М, 1966, 314—318.
4. *Ky Fan* and *Ph. Davis.* Complet sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. Journ., 24, № 2, 1957, 189—192.
5. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4, 1961, 793—796.
6. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 60, 1961, 304—324.
7. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 196, № 6, 1971.
8. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 2, 1971, 221—234.
9. *С. Я. Хавинсон.* Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 44—46.
10. *В. П. Хавин.* О пространстве ограниченных регулярных функций, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 40—43.
11. *Е. Ш. Чацкая.* Одновременное приближение непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем., 17, № 4, 1964, 9—22.
12. *Л. Карлесон.* Избранные вопросы теории исключительных множеств, М., Изд „Мир", 1970.
13. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., Изд. „Физматгиз", 1950.
14. *T. Ugaheri.* On the general potential and capasity, Jap. journ. Math., 20, 1950, 37—43.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 4, 1975 Математика

И. О. ХАЧАТРЯН

О ЗАМЫКАНИИ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ПРИ ВЗВЕШЕННО-РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1°. Согласно известной теореме Винера-Пэли [1] класс H_2^+ аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функций $f(z)$, подчиненных условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\, dx < +\infty,$$

совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{iuz}\, v(u)\, du, \ \operatorname{Im} z > 0,$$

где $v(u)$ — произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$ и при этом

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iux}-1}{iux}\, v(u)\, du.$$

Отсюда следует, что семейство функций $\left\{\frac{e^{iux}-1}{iux}\right\}$ $(u \geqslant 0)$ замкнуто в метрике $L_2(-\infty, +\infty)$ только в подклассе $L_2^+(-\infty, +\infty) \subset L_2(-\infty, +\infty)$ граничных значений функций из H_2^+.

Картина меняется, если полноту этой системы, а также системы $\{e^{iux}\}$ $(u \geqslant 0)$, рассмотреть в весовом пространстве.

Задачу о полноте системы $\{e^{iux}\}$ $(u \geqslant 0)$ в пространстве $L_2(d\sigma; -\infty, +\infty)$ впервые рассмотрел М. Г. Крейн [2], а в пространствах $L_p(d\sigma; -\infty, +\infty)$, $(1 \leqslant p < +\infty)$ Н. И. Ахиезер [3].

Решение этой задачи было дано следующей теоремой: для полноты системы $\{e^{iux}\}$ $(u \geqslant 0)$ в $L_p(d\sigma; -\infty, +\infty)$, $1 \leqslant p < +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln \sigma'(x)|}{1+x^2}\, dx = +\infty.$$

В работе Н. Левинсона и Маккина [4] было дано описание замыкания этой системы в $L_2(\varphi(x)dx; -\infty, +\infty)$ в случае ее неполноты, т. е. при

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln \varphi(x)|}{1+x^2}\, dx < +\infty. \tag{1}$$

Чтобы сформулировать их результат, обозначим через $u(z)$ гармоническую в верхней полуплоскости функцию

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \varphi(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt,$$

а через $v(z)$ — сопряженную гармоническую функцию, и пусть $w(z) = \exp[-u(z) - iv(z)]$. Тогда имеет место

Теорема А (Н. Левинсон и А. Маккин). Пусть интеграл (1) сходится. Тогда замыкание системы $\exp(iux)$ $(u > 0)$ в $L_2(\varphi(t)\, dt, -\infty, +\infty)$ совпадает со множеством аналитических в верхней полуплоскости функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$f(z) \cdot w(z) \in H_2^+.$$

2°. Функция типа Миттаг-Леффлера определяется разложением

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \qquad (\rho > 0)$$

и является целой функцией порядка ρ при любом значении параметра μ.

Замечательные асимптотические свойства функции $E_\rho(z; \mu)$ в различных частях комплексной плоскости легли в основу стройной теории гармонического анализа на системах лучей в комплексной области, развитой М. М. Джрбашяном в его монографии [5].

Характерной особенностью для результатов этой теории, по существу, является то, что в них, в частности, устанавливается замкнутость семейств функций типа $\{E_\rho(\lambda z; \mu)\}$ в различных классах функций, принадлежащих пространству $L_2(r^\omega dr; 0, +\infty)$ на системах лучей, исходящих из начала координат.

Отметим лишь один из этих результатов, имеющий непосредственное отношение к теме настоящей статьи.

Для любого ρ $(1/2 < \rho < +\infty)$ обозначим через $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$ взаимно дополнительные угловые области

$$\Delta(\rho) = \left\{ z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho},\ \ 0 < |z| < +\infty \right\},$$

$$\Delta^*(\rho) = \left\{ z;\ \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi,\ \ 0 < |z| < +\infty \right\}.$$

Общей границей L_ρ этих областей является совокупность лучей

$$l_\rho^{\pm} = \left\{ z;\ \arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho},\ \ 0 \leqslant |z| < +\infty \right\}.$$

Существенным обобщением отмеченной выше теоремы Винера-Пэли является следующий результат, принадлежащий М. М. Джрбашяну и А. Е. Аветисяну ([5], теорема 7.7′).

Теорема Б. Класс $H_2^*[\rho, \omega]$ аналитических в области $\Delta^*(\rho)$ функций $F(z)$, подчиненных условию

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2\, r^{\omega}\, dr\right\}<+\infty \quad (-1<\omega<1),$$

совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z)=\int_0^{+\infty}E_\rho(z\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}v(\tau)\,d\tau, \quad z\in\Delta^*(\rho),$$

где $\mu=1/2+\dfrac{1+\omega}{2\rho}$, а $v(\tau)$ — произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$*.

Как в случае теоремы Винера-Пэли, так и в данном случае, из отмеченного результата, в частности, следует: семейство функций

$$\{E_\rho(uz;\ \mu)\} \quad \left(u>0,\ \ \mu=\frac{1}{2}+\frac{1+\omega}{2\rho}\right)$$

замкнуто на L_ρ только в подклассе $L_2^*(r^{\omega}\,dr;\ L_\rho)\subset L_2(r^{\omega}\,dr;\ L_\rho)$ граничных значений функций из $H_2^*[\rho, \omega]$.

3°. Пусть $\dfrac{1}{2}<\rho<+\infty$ и на общей границе L_ρ областей $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$ определена вещественная измеримая функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(t)\geqslant 1,\quad t\in L_\rho,\ \lim_{|t|\to+\infty}\varphi(t))=+\infty.$$

Обозначим через $C_\varphi(L_\rho)$ множество непрерывных на L_ρ функций $f(t)$, для которых

$$\lim_{|t|\to+\infty}\frac{f(t)}{\varphi(t)}=0.$$

Если норму элемента $f\in C_\varphi(L_\rho)$ определить равенством

$$\|f\|=\sup_{t\in L_\rho}\frac{|f(t)|}{\varphi(t)},$$

то $C_\varphi(L_\rho)$ будет нормированным пространством.

Из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$:

$$E_\rho(z;\ \mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}+O\left(\frac{1}{z}\right),\ |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2\rho},\ |z|\to+\infty, \tag{2}$$

* Мы привели здесь несколько видоизмененную формулировку указанной теоремы 7.7′.

$$E_\rho(z;\ \mu)=O\left(\frac{1}{z}\right),\ |\arg z|>\frac{\pi}{2\rho},\ |z|\to+\infty \tag{3}$$

([5], стр. 133), в частности, следует, что при $\mu>1$

$$\sup_{t\in L_\rho}|E_\rho(t;\ \mu)|<+\infty.$$

Поэтому при любом $\mu\geqslant 1$ и $u\geqslant 0$ имеем

$$E_\rho(ut;\ \mu)\in C_\varphi(L_\rho).$$

В настоящей заметке исследуются два вопроса:

1) для каких пространств $C_\varphi(L_\rho)$ множество целых функций

$$\{E_\rho(ut;\ \mu)\},\quad (u>0,\ \mu>1) \tag{4}$$

замкнуто в $C_\varphi(L_\rho)$?

2) если система (4) не замкнута в $C_\varphi(L_\rho)$, то какие функции из $C_\varphi(L_\rho)$ все же допускают аппроксимацию линейными комбинациями системы (4)?

Интересующая нас задача аналогична известной проблеме С. Н. Бернштейна о весовом приближении непрерывных функций полиномами на вещественной оси и обобщениям этой проблемы на случай приближения в комплексной области [6—14].

В 1956 году Б. Я. Левин показал*, что методы С. Н. Мергеляна решения проблемы С. Н. Бернштейна о приближении непрерывных функций многочленами на вещественной оси могут быть применены для пространств достаточно общей природы (Ф-пространств).

В работе автора [13] показано, что схема рассмотрений С. Н. Мергеляна и Б. Я. Левина проходит также в случае весовой аппроксимации (в равномерной метрике) в комплексной области.

Приведенная в настоящей статье лемма 1, которая является непосредственным следствием одной формулы М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсесяна, позволяет применить эту схему также при решении поставленной задачи.

Ответ на первый вопрос дается следующим утверждением:

Теорема 1. *Для того чтобы система функций типа Миттаг-Леффлера*

$$\{E_\rho(ut;\ \mu)\},\quad (u\geqslant 0,\ \mu\geqslant 1) \tag{5}$$

была замкнутой в $C_\varphi(L_\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл

$$\int_{L_\rho}\ln\varphi(t)\,\frac{|t|^{\alpha-1}|dt|}{1+|t|^{2\alpha}}, \tag{6}$$

где $\dfrac{\pi}{\alpha}$ — величина раствора угла $\Delta^*(\rho)$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

---

* Результаты Б. Я Левина, приведенные в его спецкурсе, прочитанном в ХГУ, не опубликованы. Определение Ф-пространств и одна теорема о полноте тригонометрических полиномов приведены в работе Ю. И. Любарского [14].

Лемма 1. *Для произвольного линейного функционала F, аннулирующего множество* (5):

$$F[E_\rho(ut;\ \mu)]=0,\quad 0\leqslant u<\infty, \tag{7}$$

выполняется тождество

$$F\left[\frac{E_\rho(ut;\ \mu)}{t-z}\right]=E_\rho(uz;\ \mu)F\left[\frac{1}{t-z}\right],\qquad z\overline{\in}L_\rho. \tag{8}$$

Доказательство. Известна следующая формула ([5], стр. 121):

$$\frac{tE_\rho(l^{1/\rho}t;\ \alpha+\beta)-zE_\rho(l^{1/\rho}z;\ \alpha+\beta)}{t-z}\,l^{\alpha+\beta-1}=$$

$$=\int\limits_0^l x^{\alpha-1}E_\rho(tx^{1/\rho};\ \alpha)(l-x)^{\beta-1}E_\rho(z(l-x)^{1/\rho};\ \beta)\,dx,\quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{9}$$

где t и z — любые комплексные числа, $t\neq z$.

Эту формулу можно записать также в виде*

$$l^{\mu-1}\frac{E_\rho(l^{1/\rho}t;\ \mu)-E_\rho(l^{1/\rho}z;\ \mu)}{t-z}=\int\limits_0^l x^{\mu-1}E_\rho(tx^{1/\rho};\ \mu)(l-x)^{1/\rho-1}\times$$

$$\times E_\rho(z(l-x)^{1/\rho};1/\rho)\,dx,\ t\neq z, \tag{10}$$

если в ней положить $\alpha=\mu$, $\beta=1/\rho$ и воспользоваться очевидным тождеством ([5], стр. 118)

$$zE_\rho(z;\ \gamma+1/\rho)=E_\rho(z;\ \gamma)-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}.$$

Из (7) легко приходим к тождеству

$$\frac{E_\rho(ut;\ \mu)-E_\rho(uz;\ \mu)}{t-z}=$$

$$=\rho u^{\rho(\mu-1)}\int\limits_0^u E_\rho(\xi t;\ \mu)\,\xi^{\mu\rho-1}(u^\rho-\xi^\rho)^{1/\rho-1}E_\rho(z(u^\rho-\xi^\rho)^{1/\rho};\ 1/\rho)\,d\xi \tag{11}$$

$$(t\neq z,\ 0\leqslant u<+\infty).$$

Применяя к обеим частям формулы (11) функционал F и учитывая условие (7), получим, что

$$F\left[\frac{E_\rho(ut;\ \mu)-E_\rho(uz;\ \mu)}{t-z}\right]=0,\quad (z\overline{\in}L_\rho,\ 0\leqslant u<+\infty),$$

что эквивалентно утверждению (8) леммы.

Лемма 2. *Пусть F — произвольный линейный функционал, аннулирующий множество* (4). *Тогда для любого $z\in\Delta(\rho)$ выполняется тождество*

---

* На это указал мне М. М. Джрбашян.

$$F\left[\frac{1}{t-z}\right]\equiv 0, \quad z\in\Delta(\rho). \tag{12}$$

Доказательство. Имеем оценку

$$\left|F\left[\frac{E_\rho(ut;\ \mu)}{t-z}\right]\right|\leqslant\|F\|\cdot\left\|\frac{E_\rho(ut;\ \mu)}{t-z}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|F\|\cdot\max_{\substack{t\in L_\rho\\ u>0}}\left|\frac{E_\rho(ut;\ \mu)}{t-z}\right|\leqslant c\cdot\delta^{-1}(z), \quad z\overline{\in} L_\rho, \quad 0\leqslant u<+\infty, \tag{13}$$

где $\delta(z)$ — расстояние точки z до множества L_ρ, а c — константа, не зависящая от u. Из (8) и (13) следует, что

$$|E_\rho(uz;\ \mu)|\cdot\left|F\left[\frac{1}{t-z}\right]\right|\leqslant c \tag{14}$$

для всех z, удовлетворяющих условию $\delta(z)\geqslant 1$ и для всех $u\geqslant 0$.

Пусть теперь z вещественно, $z>0$ и $\delta(z)\geqslant 1$. В неравенстве (14), устремляя u к $+\infty$ и замечая, что согласно (2)

$$\lim_{u\to+\infty}E_\rho(u z;\ \mu)=+\infty, \ z>0,$$

заключаем, что

$$F\left[\frac{1}{t-z}\right]=0, \ z>0. \tag{15}$$

Тождество (12) следует из (15), если заметить, что $F[(t-z)^{-1}]$ представляет аналитическую функцию в области $\Delta(\rho)$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Необходимость. Докажем, что если интеграл (6) сходится, то система (4) не замкнута в $C_\varphi(L_\rho)$.

Обозначим через $p(t)$ произвольную линейную комбинацию, составленную из функций системы

$$p(t)=\sum a_k E_\rho(u_k t;\ \mu), \ u_k\geqslant 0. \tag{16}$$

Обозначим, далее, через $G(z, t)$ функцию Грина области $\Delta^*(\rho)$.

Из асимптотических свойств (3) функций Миттаг-Леффлера следует, что

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|p(x)|}{|x|^2}=0.$$

Следовательно, для субгармонической в области $\Delta^*(\rho)$ функции $\ln|p(z)|$ имеем оценку

$$\ln|p(z)|\leqslant\int_{L_\rho}\ln|p(t)|\frac{\partial}{\partial n}G(z, t)ds, \ z\in\Delta^*(\rho),$$

где

$$\frac{\partial}{\partial n}G(z;\ t)=\frac{1}{\pi}\frac{-i\alpha e^{i\pi(\alpha-1)}t^{\alpha-1}\,dt}{[i(-t)^{\alpha}-r^{\alpha}\sin\alpha(\pi+\varphi)]^{2}+r^{2\alpha}\cos^{2}\alpha(\pi+\varphi)}. \tag{17}$$

Пусть теперь $\|p(t)\|\leqslant 1$, т. е. рассмотрим линейные комбинации вида (16), которые удовлетворяют условию $|p(t)|\leqslant\varphi(t)$, $t\in L_{\rho}$. Тогда для каждой такой функции будем иметь

$$\ln|p(z)|\leqslant\int_{L_{\rho}}\ln\varphi(t)\frac{\partial G}{\partial n}ds,\quad z\in\Delta^{*}(\rho). \tag{18}$$

Из сходимости интеграла (6) и из (17) следует, что правая часть неравенства (18) конечна для произвольной точки $z\in\Delta^{*}(\rho)$. Следовательно множество линейных комбинаций вида (16), удовлетворяющих условию $|p(t)|\leqslant\varphi(t)$, $t\in L_{\rho}$, составляет компактное множество в области $\Delta^{*}(\rho)$. А это означает, что система (4) не полна в $C_{\varphi}(L_{\rho})$.

Достаточность. Докажем, что если система (4) не замкнута в $C_{\varphi}(L_{\rho})$, то интеграл (6) сходится. В самом деле, пусть F — произвольный линейный нетривиальный функционал, аннулирующий систему (4)

$$F[E_{\rho}(ut;\ \mu)]=0,\ 0\leqslant u<+\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$F(z)=F\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\rho}}\frac{e^{i\gamma}\,d\sigma(s)}{(t-z)\varphi(t)},$$

где γ — аргумент точки $t\in L_{\rho}$. Согласно лемме 2 имеем $F(z)\equiv 0$, $z\in\Delta(\rho)$, в то время как $F(z)\not\equiv 0$, $z\in\Delta^{*}(\rho)$. Далее, $F(z)$ — голоморфная функция в области $\Delta^{*}(\rho)$ и на основании известной теоремы И. И. Привалова ([15], стр. 192) почти всюду на L_{ρ} имеет предельные значения изнутри области, равные $\dfrac{\sigma'(s)}{\varphi(t)}$, т. е. $F(t)=\dfrac{\sigma'(s)}{\varphi(t)}$, $t\in L_{\rho}$. Обозначим через $z=\gamma(w)$ функцию, конформно отображающую круг $|w|<1$ на область $\Delta^{*}(\rho)$. Тогда, как показано в [13]

$$\int_{0}^{2\pi}|\ln|F(\gamma(e^{i\theta}))||\,d\theta<+\infty.$$

Переходя к переменной t, получим

$$\int_{L_{\rho}}\left|\ln\left|\frac{\sigma'(s)}{\varphi(t)}\right|\right|\frac{|t|^{\alpha-1}}{1+|t|^{2\alpha}}|dt|<+\infty,$$

откуда на основании известного неравенства

$$\int f\,d\mu\leqslant\ln\left[\int\exp f\,d\mu\right],\ \int d\mu=1$$

заключаем, что интеграл (6) сходится.

Следствие. Если функция $\varphi(t)$ ограничена или непрерывна в окрестности точки $t=0$, то необходимым и достаточным условием замкнутости системы (4) в $C_\varphi(L_\rho)$ является условие

$$\int_{L_\rho} \ln \varphi(t) \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\alpha}} = +\infty.$$

Ради простоты изложения мы в дальнейшем будем предполагать, что функция $1/\varphi(t)$ непрерывна на L_ρ. Предположим, что интеграл (6) сходится. Тогда согласно следствию из теоремы 1 система (4) не полна в $C_\varphi(L_\rho)$. Это означает, что замыкание $C_\varphi^*(L_\rho)$ системы (4) не совпадает с $C_\varphi(L_\rho)$, а составляет его некоторое подпространство. Мы хотим дать полное описание пространства $C_\varphi^*(L_\rho)$.

С этой целью заметим, что из сходимости интеграла (6) и из (17) следует, что интеграл

$$u(z) = \int_{L_\rho} \ln \varphi(t) \frac{\partial}{\partial n} G(t;\ z)\, ds \tag{19}$$

сходится для любого $z \in \Delta^*(\rho)$ и представляет гармоническую в области $\Delta^*(\rho)$ функцию $u(z)$ с предельными значениями на L_ρ, равными $\ln \varphi(t)$.

Обозначим через $v(z)$ сопряженную с $u(z)$ гармоническую функцию и положим

$$w(z) = \exp\left[-u(z) - iv(z)\right], \quad z \in \Delta^*(\rho). \tag{20}$$

Тогда имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы $f \in C_\varphi^*(L_\rho)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ являлась сужением голоморфной в $\Delta^*(\rho)$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию*

$$|f(z) \cdot w(z)| \leqslant c_f, \quad z \in \Delta^*(\rho), \tag{21}$$

где $w(z)$ определяется равенствами (20) *и* (19).

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in C_\varphi^*(L_\rho)$, тогда для данного $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ существует функция $p_\varepsilon(t)$ вида (16) такая, что $\|f(t) - p_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$, откуда следует, что

$$\|p_\varepsilon(t)\| \leqslant \varepsilon + \|f\| < 1 + \|f\|$$

или

$$|p_\varepsilon(t)| \leqslant (1 + \|f\|)\, \varphi(t) = c \cdot \varphi(t).$$

Из неравенств

$$\ln |p_\varepsilon(z)| \leqslant \int_{L_\rho} \ln |p_\varepsilon(t)| \cdot \frac{\partial}{\partial n} G(t;\ z)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{L_\rho} \ln c\varphi(t) \frac{\partial}{\partial n} G(z;\ t)\, ds = u(z) + c, \quad z \in \Delta^*(\rho)$$

следует, что семейство субгармонических в $\Delta^*(\rho)$ функций $|\ln|p_\varepsilon(z)||$ имеет там гармоническую мажоранту $u(z)+c$ или, что то же самое

$$|p_\varepsilon(z)\,w(z)| \leqslant c.$$

Это означает, что семейство $|p_\varepsilon(z)\,w(z)|$ компактно в $\Delta^*(\rho)$. Выберем из него равномерно сходящуюся в $\Delta^*(\rho)$ последовательность и ее предел обозначим через $f_1(z)\,w(z)$. Функция $f_1(z)$ имеет предельные значения $f_1(t)$ на L_ρ и $f_1(t)=f(t)$, $t\in L_\rho$ и так как $|f_1(z)\,w(z)|\leqslant c$, $z\in\Delta^*(\rho)$, то можем сказать, что функция $f(t)$ на L_ρ совпадает со значениями голоморфной в Δ^* функции $f_1(z)$, удовлетворяющей условию $|f_1(z)\,w(z)|\leqslant c$. Необходимость доказана.

Достаточность. Следует доказать, что если $f(z)$ голоморфна в $\Delta^*(\rho)$, непрерывна в $\overline{\Delta^*}(\rho)$ и удовлетворяет условию (21), то $f\in C_\varphi^*(L_\rho)$.

Пусть F — произвольный линейный функционал, аннулирующий систему (4). Как мы уже видели функция

$$F(z)=F\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{d\sigma(s)}{(t-z)\,\varphi(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{e^{i\gamma}\,d\sigma_1(s)}{t-z}$$

голоморфна в $\Delta^*(\rho)$ и почти всюду на L_ρ^- имеет предельные значения $F(t)$, которые совпадают с $\sigma_1'(s)=\sigma'(s)\,\varphi^{-1}(t)$, т. е $F(z)$ представима интегралом Коши в области $\Delta^*(\rho)$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho}\frac{F(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in\Delta^*(\rho).$$

Пусть $\tilde f(z)$ — произвольная голоморфная в $\Delta^*(\rho)$ функция, непрерывная в $\overline{\Delta^*}(\rho)$ и удовлетворяющая условию

$$|\tilde f(z)|\leqslant c\cdot|z-1|\exp u(z),\quad z\in\overline{\Delta^*}(\rho). \tag{22}$$

Рассматривая функцию $\tilde f_1(z)=\tilde f(z)\cdot F(z)$, имеем

$$\tilde f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\tilde f_1(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_R}\frac{\tilde f_1(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{\tilde f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{23}$$

для любой точки $z\in\Delta_R^*(\rho)$, где через $\Delta_R^*(\rho)$ обозначена область $\{z{:}z\in\Delta^*, |z|<R\}$, а $\Gamma_R=E_R\cup C_R$ — ее граница. Так как

$$|\tilde f_1(t)|=|\tilde f(t)\,F(t)|\leqslant c\,|t-1|\,\frac{|\sigma_1'(s)|}{\varphi(t)}\exp u(t)=c\,|t-1|\,|\sigma_1'(s)|,$$

то интеграл

$$\int\limits_{L_\rho}\frac{\tilde f_1(t)}{t-z}\,dt \tag{24}$$

абсолютно сходится для любой точки $z\,\overline{\in}\,L_\rho$. Переходя к пределу в (23) при $R\to+\infty$ получим, что существует предел

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\widetilde{f}_1(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=g(z) \qquad (25)$$

для любого $z\in\Delta^*(\rho)$. Но этот предел существует также для любого конечного z и $g(z)$ — целая функция. В самом деле, для произвольной точки z, $|z|<R_0$ (R_0 — произвольно) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\widetilde{f}_1(t)}{t-z}dt=0,$$

где интеграл распространен по границе области $R_0<R<|\zeta|<R'$, $|\arg\zeta|>\pi-\frac{\pi}{2\rho}$. Но заметим, что интегралы, распространенные по отрезкам $\arg\zeta=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right)$, $R<|\zeta|<R'$, стремятся к нулю при R, $R'\to+\infty$ вследствие абсолютной сходимости интеграла (24). Следовательно разность интегралов, распространенных по дугам $|\zeta|=R$, $|\zeta|=R'$, $|\arg\zeta|\geqslant\pi-\frac{\pi}{2\rho}$, будет стремиться к нулю при R, $R'\to+\infty$, причем равномерно относительно z, $|z|<R_0$. Это означает, вследствие произвольности R_0, что $g(z)$ — целая функция. Тогда из (23), устремляя R к бесконечности, получим

$$\widetilde{f}(z)F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}\frac{\widetilde{f}(t)F(t)}{t-z}dt+g(z), \quad z\in\Delta^*(\rho)$$

или

$$F\left[\frac{\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(z)}{t-z}\right]=g(z),\ z\in\Delta^*(\rho). \qquad (26)$$

Но легко показать, что целая функция $g(z)$ в области $\Delta(\rho)$ имеет представление

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}\frac{\widetilde{f}_1(t)}{t-z}dt,\ z\in\Delta(\rho). \qquad (27)$$

Из (26) и (27) получим оценки

$$|g(z)|\leqslant\text{const}\,\frac{1+|z|}{\delta(z)},\ z\in\Delta^*(\rho), \qquad (28)$$

$$|g(z)|\leqslant\frac{\text{const}}{\delta(z)},\ z\in\Delta(\rho), \qquad (29)$$

$$|g(x)|\to0,\ x\to-\infty. \qquad (30)$$

Из оценок (28), (29) и (30) следует, что $g(z)\equiv0$.

Таким образом, для любой голоморфной в $\Delta^*(\rho)$ и непрерывной в $\overline{\Delta^*}(\rho)$ функции $\overline{f}(z)$, удовлетворяющей условию (25), имеем

$$F\left[\frac{\overline{f}(t)-\overline{f}(z)}{t-z}\right]=0,\ z\in\Delta^*(\rho).$$

Пусть теперь $f(z)$ — произвольная голоморфная в $\Delta^*(\rho)$ и непрерывная в $\overline{\Delta^*}(\rho)$ функция, удовлетворяющая условию

$$|f(z)\,w(z)|\leqslant c,\ z\in\Delta^*(\rho).$$

Функция $f_1(z)=(z-z_0)f(z)$ удовлетворяет условию (22) и, следовательно

$$F\left[\frac{f_1(t)-f_1(z)}{t-z}\right]=0,\ z\in\Delta^*(\rho).$$

Полагая здесь, в частности, $z=z_0$, будем иметь

$$F[f(t)]=0,$$

а это означает, что $f\in C^*_\varphi(L_\rho)$. Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность М. М. Джрбашяну за обсуждение результатов и ценные указания.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 16.I.1975

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում կշռային հավասարաչափ մոտարկման դեպքում Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների ընտանիքի փակման մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների [5] սիստեմի լրիվության հարցը $C_\varphi(L_\rho)$ կշռային տարածությունում։ Ապացուցվում է, որ, որպեսզի դիտարկվող սիստեմը լինի խիտ $C_\varphi(L_\rho)$-ում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տարամետ լինի (6) ինտեգրալը։

Այնուհետև (6) ինտեգրալի զուգամիտության դեպքում նկարագրված է $C_\varphi(L_\rho)$ տարածության այն $C^*_\varphi(L_\rho)$ ենթատարածությունը, որը ստացվում է սիստեմի փակումից $C_\varphi(L_\rho)$-ում։

I. O. KHACHATRIAN. *On the closure of the families of Mittag-Loefler type functions in weighted-uniform approximation in complex domain* (summary)

The question of completeness of the Mittag-Loeffler type functions in the weight space $C_\varphi(L_\rho)$ is considered. The necessary and sufficient conditions for this system to be everywhere dense in $C_\varphi(L_\rho)$ are found (when this is not the case, the complete description of the closure of the system is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Винер* и *Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1964.
2. *М. Г. Крейн.* Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, 46, 1945.
3. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.

4. *N. Levinson* and *H. P. McKean*. Jr Weigthed trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary gaussian noise, Acta Mathematica, 112 : 1—2, 1964, 99—143.

5. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1964.

6. *S. Bernstein*. Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel et l'une de ses applications, Bull. Math. de France, 52, 1924, 399—410

7. *T. Hall*. On polynomials bounded at an infinity of points, Uppsala, 1950.

8. *T. Hall*. Sur l'approximation polynômiale des fonctions continues d'une variable, 9 Congr. des Math. Scand. 1939.

9. *А. Л. Шагинян*. О полноте семейств аналитических функций в комплексной области, Сообщения института матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 1, 1947.

10. *М. М. Джрбашян*. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сб.,36, № 3, 1955, 353—440.

11. *Н. И. Ахиезер. С. Н. Бернштейн*. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов, ДАН СССР, 92, № 6, 1953, 1109—1112.

12. *С. Н. Мергелян*. Весовые приближения многочленами, УМН, XI, 5 (71), 1956, 107—152.

13. *И. О. Хачатрян*. О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, №№ 4—5, 1968, 301—326.

14. *Ю. И. Любарский*. Об аппроксимации целых функций экспоненциального типа тригонометрическими полиномами, Математическая физика и функциональный анализ, вып. 3, 1972, 56—67.

15. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS