

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒՆԳՐԱ

Դիմում խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՏԱՆ

Բ. Ա. ԱԼԵԺՍԱՆԳՐՏԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՈՍԱՆ
Ի. Գ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԲԱԼԱՆՈՍԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՈՍԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Բ. Լ. ՇԱՀԱՐԱԳՏԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոգվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոգվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոգվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ Խմբագրական Հանձնախմբի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոգվածները պետք է ներկայացվեն գլխամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոգվածին առհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն ընդունելով։

Օտարերկրյա հեղինակները հոգվածները, իրենց ցանկությամբ, կորոզ են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծերով վերևում։ Հունական տառերը չպետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինգլիզերենը չընդգծվեն սև մատիտով, իսկ կուրդիկ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոգվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարի-թիվը և էջերը, հոգվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոգվածի տեսակը, ամսագրերը, համարը և տարիքները։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թիվ շատ զգալի փոփոխությունները (օրինակ՝ նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոգվածը ձերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոգվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոգվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և Խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չղրազվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոգվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոգվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոգվածի 35 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամություն 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. В. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХВАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings *Izvestia* of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika” are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika”,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

А. А. ТАЛАЯН

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОГРАНИЧЕННЫМ ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

I. Банахом [1] была доказана

Теорема. Какова бы ни была не эквивалентная нулю функция $f(x) \in L_2[0,1]$, можно определить полную в $L_2[0,1]$ ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ такую, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.

Эта теорема Банаха, для ясности приведенная нами в более частной чем в работе [1] формулировке, показывает, что никакие свойства функции $f(x)$ не могут гарантировать сходимости почти всюду ее рядов Фурье по всем полным ортонормированным системам одновременно.

В связи с этим представляет интерес исследование вопроса о возможности такого же явления для более узких классов полных ортонормированных систем, например, для класса систем $\{\varphi_n(x)\}$, состоящих из ограниченных в совокупности функций.

В настоящей работе доказывается

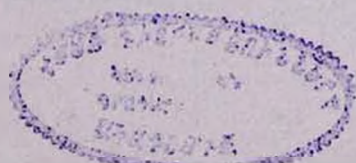
Теорема 1. Какова бы ни была не эквивалентная нулю функция $f(x)$, можно определить полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных в совокупности функций, такую, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.

II. Доказательство теоремы 1.

Прежде всего покажем, что теорема 1 получается как следствие приведенной ниже менее общей теоремы:

Теорема 2. Если $f(x) \in L_2[0,1]$, $f(x) \geq M > 0$ почти всюду на некотором отрезке $[1-\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, то можно определить полную в $L_2[0,1]$ о. н. систему $\{\varphi_n(x)\}$ ограниченных в совокупности ступенчатых функций, такую, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.

В самом деле, если $f(x) \in L_2[0,1]$ и не эквивалентна нулю, то без ограничения общности можно считать, что $f(x) > M > 0$ на некотором множестве E , $\mu(E) = \alpha > 0$. Возьмем сохраняющее меру взаимнооднозначное (на множествах полной меры) отображение $p: [0,1] \rightarrow [0,1]$,



переводящее множество E на отрезок $[1 - z, 1]$ (с точностью до множества меры нуль). Тогда функция $f(p^{-1}(x))$, будет удовлетворять условиям теоремы 2 и для нее существует полная система $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая требованиям теоремы 2. Остается заметить, что система $\{\varphi_n(p(x))\}$ будет полной ортонормированной системой равномерно ограниченных функций и ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе будет расходиться почти всюду.

Чтобы доказать теорему 2 сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $f(x) \in L_2[0, 1]$, $f(x) \geq M > 0$ почти всюду на интервале $\delta_1 = [1 - z, 1]$, $0 < z < 1$ и заданы две последовательности действительных чисел $\{a_k\}$, $\{a'_k\}$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k'^2 < +\infty, \quad a_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда для произвольного интервала δ' , $\delta' \subset \delta_1$ и любой последовательности положительных чисел ε_k , $k = 1, 2, \dots$, существуют последовательность интервалов Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, и последовательность определенных на этих интервалах функций $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, обладающие свойствами

А) Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, попарно не перекрываются и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \delta',$$

В) Каждая функция $\psi_k(x)$ кусочно-постоянна на соответствующем интервале Δ_k и

$$\left| \int_{\Delta_k} f(x) \psi_k(x) dx - (a_k - a'_k) \right| < \varepsilon_k, \quad \int_{\Delta_k} \psi_k'^2(x) dx = M',$$

где M' — не зависящая от k постоянная.

Доказательство. Пусть k_s — последовательность тех значений k , для которых $a_{k_s} = a'_{k_s}$ (в частности $\{k_s\}$ может быть пустым множеством).

Положим

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k = k_s \\ 1, & k \neq k_s. \end{cases}$$

Из (1) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \mu_k a'_k)^2 = a', \quad (2)$$

где a' — положительное число.

Интервалы Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условию А), возьмем так, чтобы

$$\mu(\Delta_k) = \frac{(a_k - a_k')}{x'} \cdot \mu(\delta'). \quad (3)$$

Для определения функций $\psi_k'(x)$, $k = 1, 2, \dots$, рассмотрим два случая

1°. Пусть интервал Δ_k , такой, что $k = k_s$, $s = 1, 2, \dots$. Разделим Δ_k на два равных интервала Δ_k' , Δ_k'' , $\Delta_k = \Delta_k' \cup \Delta_k''$ и положим

$$\psi_k'(x) = \frac{a_k - a_k'}{\int_{\Delta_k'} f(x) dx}, \quad x \in \Delta_k'. \quad (4)$$

Из (4) и из того, что $\Delta_k \subset \delta' \subset \delta_1$, $f(x) > M$ почти всюду на δ_1 , получаем

$$\int_{\Delta_k'} f(x) \psi_k'(x) dx = a_k - a_k', \quad (5)$$

$$\int_{\Delta_k'} \psi_k'^2(x) dx = \frac{(a_k - a_k')^2 \mu(\Delta_k')}{\left(\int_{\Delta_k'} f(x) dx\right)^2} < \frac{(a_k - a_k')^2}{M^2 \cdot \mu(\Delta_k')}.$$

Так как $\mu(\Delta_k') = \frac{1}{2} \mu(\Delta_k)$, то в силу (3) и равенства $\mu_k = 1$ при $k \neq k_s$ имеем

$$\frac{a_k - a_k'}{M^2 \mu(\Delta_k')} = \frac{2a'}{M^2 \mu(\delta')}.$$

Зафиксируем число

$$M' > \frac{2a'}{M^2 \mu(\delta')},$$

и полагая

$$\gamma_k = M' - \int_{\Delta_k'} \psi_k'^2(x) dx, \quad (6)$$

определим на интервале Δ_k'' функцию $\psi_k'(x)$ так, чтобы

$$\left| \int_{\Delta_k''} f(x) \psi_k'(x) dx \right| < \varepsilon_k, \quad \int_{\Delta_k''} \psi_k'^2(x) dx = \gamma_k. \quad (7)$$

Последнему условию, очевидно, можно удовлетворить, взяв вместо $\psi_k'(x)$ рассмотренную на Δ_k'' достаточно далекую функцию Радемахера, умноженную на подходящую постоянную.

Из соотношений (5), (6) и (7) вытекает, что в рассмотренном случае 1°, определенные вышеуказанным образом функции $\psi'_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию В.

Рассмотрим теперь случай

2°. Интервал Δ'_k таков, что $k = k_s$ для некоторого значения s . В этом случае полагаем

$$\psi'_k(x) = \sqrt{\frac{M'}{\mu(\Delta_k)}} r_{n_k}(\Delta_k, x), \quad x \in \Delta_k, \quad (10)$$

где $r_{n_k}(\Delta_k, x)$ — функция Радемахера, суженная на интервале Δ_k с номером n_k настолько большим, что

$$\int_{\Delta_k} f(x) r_{n_k}(\Delta_k, x) dx < \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\frac{M'}{\mu(\Delta_k)}}}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) вытекает выполнение условия В), так как в рассматриваемом случае $\alpha_k - a_k = 0$.

Лемма 2. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$, $f(x) > M > 0$ почти всюду на интервале $[1-\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, и $\varepsilon > 0$, $c > 0$ — произвольные постоянные.

Тогда для любой конечной системы кусочно-постоянных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$, равных нулю на некотором интервале $[1-\eta, 1]$, можно определить конечную ортонормированную систему $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ кусочно-постоянных функций, удовлетворяющую условиям

1) каждая функция $\varphi_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, ортогональна всем функциям $f_k(x)$, $1 \leq k \leq N$.

2) Все функции $\varphi_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, обращаются в нуль на некотором интервале $[1-\beta, 1]$, $0 < \beta < \eta$.

3) Если $c_k = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx$, то существует множество $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 1-\varepsilon$ такое, что

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq m} \left| \sum_{k=i}^j c_k \varphi_k(x) \right| > c, \quad x \in E. \quad (12)$$

Доказательство. Положим

$$\gamma = \frac{1}{2} \min(\varepsilon, \eta) \quad (13)$$

и отрезок $[0, 1-\gamma]$ представим в виде суммы попарно непересекающихся интервалов A_k , $1 \leq k \leq p$, на каждом из которых все функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ постоянны. Возьмем произвольную о.н. систему $\{\psi_n(t)\}$ кусочно-постоянных функций такую, что

$$\int_0^1 \psi_n(t) dt = 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (14)$$

и некоторый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty, \quad (15)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

Очевидно, можно считать $a_k \neq 0$, $k=1, 2, \dots$, а в качестве системы $\{\psi_n(t)\}$ можно взять систему расходимости, построенную Д. Е. Меньшовым (см. [3], стр. 193) или же системы, полученные из систем Хаара или Уолша после некоторых перестановок (исключая из этих систем функцию, равную единице).

Обозначим через $\psi_n(A_i, x)$ функцию, полученную из $\psi_n(t)$ при линейном отображении отрезка $[0,1]$ на интервал A_i и положим

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(A_i, x), & x \in A_i, \quad 1 \leq i \leq p \\ 0, & x \in [1-\gamma, 1]. \end{cases} \quad (16)$$

Так как

$$\int_{A_i} \psi_n(A_i, x) \psi_m(A_i, x) dx = \begin{cases} \mu(A_i), & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (17)$$

и

$$\int_{A_i} \psi_n(A_i, x) dx = 0, \quad n=1, 2, \dots, \quad (18)$$

то функции $\Phi_n(x)$ на отрезке $[0, 1-\gamma]$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^{1-\gamma} f_i(x) \Phi_n(x) dx = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n=1, 2, \dots \quad (19)$$

$$\int_0^{1-\gamma} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \begin{cases} \mu([0, 1-\gamma]) = 1-\gamma, & n=m \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (20)$$

Полагая

$$a'_k = \int_0^1 f(x) \Phi_k(x) dx = \int_0^{1-\gamma} f(x) \Phi_k(x) dx \quad (21)$$

и учитывая (20), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'^2_k < +\infty. \quad (22)$$

Возьмем $0 < \beta < \gamma$ и применим лемму 1, полагая в ее формулировке $\delta' = (1-\gamma, 1-\beta)$ и $\varepsilon_k > 0$, $k=1, 2, \dots$, такими, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \quad (23)$$

Тогда определяются интервалы Δ_k , $k=1, 2, \dots$ и функции $\psi'_k(x)$ такие, что

$$\Delta_i \cap \Delta_j = 0, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = (1-\gamma, 1-\beta), \quad (24)$$

$$\left| \int_{\Delta_k} f(x) \psi'_k(x) dx - (a_k - a'_k) \right| < \varepsilon_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (25)$$

$$\psi'_k(x) = 0, \quad x \notin \Delta_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (26)$$

$$\int_{\Delta_k} \psi'^2(x) dx = M', \quad k=1, 2, \dots, \quad (27)$$

где M' — постоянная, не зависящая от k .

Положим

$$\varphi_k(x) = \frac{\Phi_k(x) + \psi'_k(x)}{\sqrt{1-\gamma+M'}}, \quad k=1, 2, \dots. \quad (28)$$

Легко видеть, что $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная на $[0,1]$ система ступенчатых функций, каждая из которых ортогональна всем функциям $f_i(x)$, $1 \leq i \leq N$.

Далее имеем

$$c_k = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma+M'}} \left(a'_k + \int_{\Delta_k} f(x) \psi'_k(x) dx \right)$$

и согласно (25), получаем

$$c_k = \frac{a_k + \xi_k}{\sqrt{1-\gamma+M'}}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (29)$$

где $|\xi_k| \leq \varepsilon_k$, $k=1, 2, \dots$.

Из (28), (29) и (23) непосредственно следует неограниченная расходимость почти всюду на $[0, 1-\gamma]$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (30)$$

ибо, как вытекает из (16) и из расходимости ряда $\sum a_n \psi_n(A_i, x)$ на интервале A_i , $1 \leq i \leq p$, ряд

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{1-\gamma+M'}} \cdot \Phi_n(x)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1-\gamma]$.

Ясно, что при достаточно большом n частичная сумма $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$ ряда (30) будет удовлетворять условию 3) леммы 2, так как множество E , в каждой точке которого выполнено (12) при достаточно большом n может иметь меру, большую чем $1 - \gamma - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$ (см. (13)).

Выполнены также условия 1) и 2) леммы 2, ибо функции $\varphi_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, ортогональны функциям $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ и обращаются в нуль на интервале $[1 - \beta, 1]$ (см. 16), (24), (26) и (28)).

Лемма 3. Если $f_i(x)$, $1 \leq i \leq r$, — конечная ортонормированная система ступенчатых функций, обращающихся в нуль на некотором интервале $[1 - \beta, 1]$, $0 < \beta < 1$ и $F(x)$ — произвольная функция класса $L_2[0, 1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно определить конечную ортонормированную систему $\psi_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, ступенчатых функций, обладающих свойствами:

1) Каждая из функций $\psi_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, ортогональна функциям $f_i(x)$, $1 \leq i \leq r$ и все функции $\psi_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ равны нулю на некотором интервале $[1 - \gamma, 1]$, $0 < \gamma < 1$,

2) Существует

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^p a_k f_k(x) + \sum_{k=1}^n b_k \psi_k(x)$$

такая, что $\|\Phi(x) - F(x)\|_{L_2} < \varepsilon$.

Доказательство. Дополним систему $\{f_i(x)\}_{i=1}^r$ до полной ортонормированной системы $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ и возьмем

$$G(x) = \sum_{k=1}^{p+m} a_k f_k(x), \quad (31)$$

где

$$\|G(x) - F(x)\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (32)$$

Для произвольного $\eta > 0$ существуют кусочно-постоянные функции $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ такие, что

$$\|g_i(x) - f_{p+i}(x)\|_{L_2} < \eta, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (33)$$

$$g_i(x) = 0, \quad x \in [1 - \gamma, 1], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (34)$$

для некоторого $\gamma > 0$, где $\gamma < \beta$.

Числа

$$c_k^{(i)} = \int_0^1 g_i(x) f_k(x) dx, \quad 1 \leq k \leq p, \quad 1 \leq i \leq m,$$

малы, а именно, в силу ортогональности системы $\{f_i(x)\}$ и условия (33) имеем

$$|c_k^{(i)}| \leq \eta, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq p. \quad (35)$$

Поэтому функции

$$g_i'(x) = g_i(x) - \sum_{k=1}^p c_k^{(i)} f_k(x), \quad 1 \leq i \leq m, \quad (36)$$

ортогональные функциям $f_k(x)$, $1 \leq k \leq p$, мало отличаются от соответствующих $f_{p+i}(x)$, а именно

$$\|g_i'(x) - f_{p+i}(x)\|_{L_1} \leq (p+1) \eta, \quad (37)$$

и тогда имеем также

$$\|g_i'(x)\|_{L_1} - 1 \leq (p+1) \eta, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (38)$$

$$\left| \int_0^1 g_i'(x) g_j'(x) dx \right| < [2 + (p+1) \eta] (p+1) \cdot \eta, \quad i \neq j. \quad (39)$$

Пусть функции $g_{k_i}'(x)$, $1 \leq i \leq n$; $n \leq m$, линейно независимы и остальные функции $g_i'(x)$ являются их линейными комбинациями. Учитывая (38) и (39), легко видеть, что ортогонализацией методом Шмидта функций $g_{k_i}'(x)$ получим функции

$$\psi_j(x) = c_1^{(j)} g_{k_1}'(x) + \dots + c_j^{(j)} g_{k_j}'(x), \quad c_j > 0, \quad (40)$$

которые ортогональны, нормированы и вместе с тем удовлетворяют неравенствам

$$\|\psi_j(x) - g_{k_j}'(x)\|_{L_1} < \varepsilon(\eta, m), \quad (41)$$

где $\varepsilon(\eta, m)$ зависит только от η и m и для фиксированного m стремится к нулю при $\eta \rightarrow 0$.

Из (31), (32), (33) и (41) следует, что при достаточно малом η функции $\psi_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, будут удовлетворять условию 2) леммы 3. Условию 1) леммы 3 эти функции удовлетворяют согласно (34), (36) и (40). Тем самым лемма 3 доказана.

Использование лемм 2 и 3 легко доказывается

Лемма 4. Для любой функции $f(x) \in L_2[0,1]$, где $f(x) > M > 0$ почти всюду на некотором отрезке $[1-\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, можно определить полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$, обладающую следующими свойствами:

1) функции $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \dots$ кусочно-постоянны на $[0,1]$ и, следовательно, каждая из них — ограниченная функция.

2) Система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит две непересекающиеся подсистемы

$$\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \{\varphi_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}, \quad \text{где } \{\varphi_{n_k}(x)\}$$

состоит из ограниченных в совокупности функций и является системой сходимости, а система $\{\varphi_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ такова, что ряд

Фурье функции $f(x)$ по этой системе почти всюду на $[0,1]$ неограниченно расходится.

Доказательство. Возьмем всюду плотную в $L_2 [0,1]$ последовательность $\{F_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и определим первую функцию $\varphi_1(x)$ как функцию $r_1(x)$ системы Радемахера, суженную на некотором интервале $[0, 1-\gamma_1]$, $0 < \gamma_1 < 1$, точнее полагаем

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_1}} \cdot r_1([0, 1-\gamma_1], x), & x \in [0, 1-\gamma_1] \\ 0 & , x \notin [0, 1-\gamma_1]. \end{cases} \quad (42)$$

Предположим, что определена конечная ортонормированная система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_i}$ кусочно-постоянных функций, обращающихся в нуль на интервале $[1-\gamma_i, 1]$, $0 < \gamma_i < 1$.

Разделим отрезок $[0, 1-\gamma_i]$ на конечное число интервалов $\Delta_k^{(i)}$, $1 \leq k \leq k_i$ таких, что на каждом из них постоянны все функции $\varphi_k(x)$, $1 \leq k \leq N_i$ и определим функцию $\varphi_{N_i+1}(x)$ как сужение функции $r_{i+1}(x)$ системы Радемахера на каждом $\Delta_k^{(i)}$, точнее полагаем

$$\varphi_{N_i+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_i}} r_i(\Delta_k^{(i)}, x), & x \in \Delta_k^{(i)}, 1 \leq k \leq k_i \\ 0 & , x \in [1-\gamma_i, 1]. \end{cases} \quad (43)$$

После этого применим лемму 2, взяв в ее формулировке вместо функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_i}$ функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_i+1}$, и полагая $\varepsilon = \varepsilon_i$, $c = c_i$, где в дальнейшем $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $c_i \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Тогда определяются кусочно-постоянные функции $\varphi_{N_i+2}(x)$, $\varphi_{N_i+3}(x), \dots, \varphi_{m_i}(x)$, обладающие следующими свойствами.

1°. Функции системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{m_i}$ попарно ортогональны, нормированы и обращаются в нуль на некотором интервале $[1-\beta_i, 1]$, $0 < \beta_i < \gamma_i < 1$.

2°. Существует множество $E_i \subset [0,1]$ такое, что

$$\mu(E_i) > 1 - \varepsilon_i, \quad (44)$$

$$\max_{N_i+1 \leq p < q \leq m_i} \left| \sum_{k=p}^q c_k \varphi_k(x) \right| > c_i, \quad x \in E_i, \quad (45)$$

где

$$c_k = \int_0^1 f(x) \varphi_k(x) dx, \quad N_i+2 \leq k \leq m_i. \quad (46)$$

Теперь применим лемму 3, взяв в ее формулировке вместо функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^p$ функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{m_i}$. Согласно этой лемме существуют функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=m_i+1}^{N_i+1}$, обладающие свойствами:

3°. Система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N_i+1}$ ортогональна, нормирована и состоит из кусочно-постоянных функций, обращающихся в нуль на некотором интервале $[1-\gamma_{i+1}, 1]$, $0 < \gamma_{i+1} < \gamma_i < 1$.

4°. Существует линейная комбинация

$$\Phi_i(x) = \sum_{k=1}^{N_i+1} c_k^{(i)} \varphi_k(x) \quad (47)$$

такая, что

$$\|\Phi_i(x) - F_i(x)\|_{L_1} < \varepsilon_i. \quad (48)$$

Так как свойство 3° обеспечивает применимость лемм 2 и 3 и для $i+1$, то доказано существование ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, натуральных чисел $N_i < m_i < N_{i+1}$ и множеств E_i , удовлетворяющих условиям 2°, 3° и 4° для всех $i=1, 2, 3, \dots$.

На основании сказанного легко видеть, что система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет всем требованиям леммы 4. В самом деле, полнота системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует из (47) и (48), где $i=1, 2, \dots$, если учесть, что $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и $\{F_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — всюду плотное множество в $L_1[0,1]$. Далее, из (43) следует, что функции $\varphi_{N_i+1}(x)$, $i=1, 2, \dots$, ограничены в совокупности, ибо по построению $\gamma_i \rightarrow 1$, и образуют ортонормированную систему сходимости, т. е. из сходимости ряда $\sum a_i^2$ вытекает сходимость почти всюду на $[0,1]$ ряда $\sum a_i \varphi_{N_i+1}(x)$, так как этим свойством обладает система Радемахера.

Наконец из (44) и (45), где $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $c_i \rightarrow +\infty$, вытекает, что ряд Фурье функции $f(x)$ (фигурирующей в формулировке леммы 4) по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=N_i+2}^{m_i}$, $i=1, 2, \dots$, неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 2.

В доказательстве используются матрицы

$$A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|, \quad 1 \leq i, j \leq 2^k, \quad k=1, 2, \dots; \quad (49)$$

введенные А. М. Олевским [2] следующим образом:

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}}, \quad 1 \leq j \leq 2^k, \quad (50)$$

и если $1 < i \leq 2^k$, $i = 2^s + v$, $1 < v \leq 2^s$, $0 \leq s \leq k+1$, то

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & (v-1)2^{k-s} + 1 \leq j \leq (2v-1)2^{k-s-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & (2v-1)2^{k-s-1} + 1 \leq j \leq v \cdot 2^{k-s} \\ 0, & \text{для остальных } j. \end{cases} \quad (51)$$

В дальнейшем наряду с (50) нам нужны еще следующие два свойства матрицы (49) (см. [2], стр. 5).

1°. Матрица A_k ортогональна при каждом k ,

II^с. Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| < c, \quad 1 \leq j \leq 2^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (52)$$

где c — постоянная, не зависящая от k .

Пусть полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ определена согласно лемме 4, т. е. удовлетворяет условиям 1) и 2) этой леммы. Обозначим для краткости

$$\psi_i(x) = \varphi_{n_{2i}}(x), \quad i=1, 2, \dots; \quad \Phi_i(x) = \varphi_{m_i}(x), \quad i=1, 2, \dots, \quad (53)$$

где по определению (см. условие 2) леммы 4) $\{\varphi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченная в совокупности система сходимости, а $\{\varphi_{m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система, ряд Фурье по которой функции $f(x)$ неограниченно расходится почти всюду. Далее, обозначив через

$$\{\varphi_{\nu_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \setminus (\{\varphi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\varphi_{m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty})$$

остальные функции системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, положим

$$\Phi'_i(x) = \varphi_{n_{2i+1}}(x), \quad i=1, 2, \dots; \quad \Phi'_i(x) = \varphi_{\nu_i}(x), \quad i=1, 2, \dots. \quad (54)$$

Подпоследовательность $\{A_{kq}\}_{q=1}^{\infty}$ матриц (49) выберем так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{2^{kq}}} \cdot \max |\Phi_q(x)| \leq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2^{kq}}} \cdot \max |\Phi'_q(x)| \leq 1, \quad q=1, 2, \quad (55)$$

и функции, определенные соотношениями (53) и (54) распределим по группам $\{\varphi_{kq, i}^{(1)}(x)\}_{i=1}^{2^{kq}}$ (соответственно $\{\varphi_{kq, i}^{(2)}(x)\}_{i=1}^{2^{kq}}$, $q=1, 2, \dots$) следующим образом.

Обозначим

$$p_0 = 0, \quad p_{\nu} = \sum_{q=1}^{\nu} 2^{kq} - \nu, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

и положим

$$\varphi_{k\nu, i}^{(1)}(x) = \Phi_{\nu}(x), \quad \varphi_{k\nu, i+1}^{(1)}(x) = \psi_{p_{\nu-1}+i}(x) \quad (56)$$

$$(1 \leq i \leq 2^{k\nu} - 1, \quad \nu = 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_{k\nu, i}^{(2)}(x) = \Phi'_i(x), \quad \varphi_{k\nu, i+1}^{(2)}(x) = \psi_{p_{\nu-1}+i}(x), \quad (57)$$

$$1 \leq i \leq 2^{k\nu} - 1, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Линейным преобразованием при помощи матрицы $A_{k\nu}$, $\nu=1, 2, \dots$, примененной к каждой группе (56) и (57), определим функции

$$\Phi_{k\nu, i}^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{2^{k\nu}} a_{ji}^{(k\nu)} \varphi_{k\nu, j}^{(1)}(x), \quad 1 \leq i \leq 2^{k\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (58)$$

$$\Phi_{k_v, i}^{(2)}(x) = \sum_{j=1}^{2^{k_v}} \alpha_{ij}^{(k_v)} \varphi_{k_v, j}^{(2)}(x), \quad 1 \leq i \leq 2^{k_v}, \quad v=1, 2, \dots \quad (59)$$

Из (53), (54), (56), (57) и из ортогональности матриц A_k $k=1, 2, \dots$, следует, что функции $\Phi_{k_v, i}^{(1)}(x)$, $\Phi_{k_v, i}^{(2)}(x)$, $1 \leq i \leq 2^{k_v}$, $v=1, 2, \dots$, образуют полную ортонормированную систему кусочно постоянных функций. Кроме того из (55) и из свойства Π^0 матрицы A_k следует, что функции этой системы ограничены в совокупности.

Действительно, так как по определению

$$|\varphi_{k_v, i}(x)| \leq Q, \quad k=1, 2, \dots,$$

где Q — постоянная, то имеем также (см. (53), (54), (56) и (57))

$$|\varphi_{k_v, i}^{(1)}(x)| \leq Q, \quad |\varphi_{k_v, i}^{(2)}(x)| \leq Q, \quad 2 \leq i \leq 2^{k_v}, \quad v=1, 2, \dots, \quad (60)$$

и тогда из (50), (52), (55), (56), (57) получим

$$|\Phi_{k_v, i}^{(1)}(x)| \leq 1 + c \cdot Q, \quad |\Phi_{k_v, i}^{(2)}(x)| \leq 1 + c \cdot Q, \quad 1 \leq i \leq 2^{k_v}, \quad v=1, 2, \dots$$

Легко видеть, что ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\Phi_{k_v, i}^{(1)}(x)$, $1 \leq i \leq 2^{k_v}$, $v=1, 2$, неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$. В самом деле, обозначив

$$c_{k_v, i} = \int_0^1 f(x) \Phi_{k_v, i}^{(1)}(x) dx, \quad 1 \leq i \leq 2^{k_v}, \quad v=1, 2, \dots \quad (61)$$

и учитывая ортогональность матрицы A_k , получим

$$\sum_{l=1}^{2^{k_v}} c_{k_v, l} \Phi_{k_v, i}^{(1)}(x) = \sum_{l=1}^{2^{k_v}} b_{k_v, l} \varphi_{k_v, l}^{(1)}(x), \quad v=1, 2, \dots, \quad (62)$$

где

$$b_{k_v, i} = \int_0^1 f(x) \varphi_{k_v, i}^{(1)}(x) dx, \quad 1 \leq i \leq 2^{k_v}, \quad v=1, 2, \dots \quad (63)$$

С другой стороны, ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{k_v}} b_{k_v, l} \varphi_{k_v, l}^{(1)}(x) \quad (64)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$, ибо согласно (56) его v -тая частная сумма имеет вид

$$\sum_{q=1}^v \sum_{l=1}^{2^{k_q}} b_{k_q, l} \varphi_{k_q, l}^{(1)}(x) = \sum_{q=1}^v b_q \Phi_q(x) + \sum_{l=1}^{p_v} d_l \psi_l(x), \quad (65)$$

где

$$b_q = \int_0^1 f(x) \Phi_q(x) dx, \quad d_i = \int_0^1 f(x) \psi_i(x) dx$$

и последовательность первых сумм правой части равенства (65) почти всюду неограниченно расходится согласно определению функций $\Phi_q(x)$ (см. 53)); а последовательность вторых сумм правой части (65) сходится к конечному пределу почти всюду на $[0,1]$, согласно определению функций $\psi_i(x)$, $i=1, 2, \dots$ (см. (53)), образующих подсистему системы сходимости $\{\varphi_{n_i}(x)\}$. Из (62) и из расходимости ряда (64) следует расходимость почти всюду ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{k_\nu}} c_{k_\nu, l} \Phi_{k_\nu, l}^{(1)}(x).$$

Таким образом, определены две ортонормированные системы

$$\{\Phi_{k_\nu, l}^{(1)}\}_{l=1}^{2^{k_\nu}}, \quad \nu=1, 2, \dots, \quad \{\Phi_{k_\nu, l}^{(2)}(x)\}_{l=1}^{2^{k_\nu}}, \quad \nu=1, 2, \dots,$$

ограниченных в совокупности кусочно-постоянных функций, такие что их объединение дает полную систему и, кроме того, ряд Фурье функции $f(x)$ по первой системе расходится почти всюду.

Путем применения обычного приема, функции указанной полной системы можно расположить в таком порядке, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ по вновь полученной системе расходился почти всюду. Для этого нужно функции первой системы расположить идущими подряд большими отрезками, а функции второй системы поместить между этими отрезками. Теорема 2 (а следовательно и теорема 1) доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1974

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Համ սահմանափակ լրիվ օրթոգոնալ սիստեմների Ֆուրյեի շարքերի գումարաբյուրան մասին (ամփոփում)

Ապացուցված է, որ կամայական զրոյից տարբեր $f(x) \in L_2[0,1]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\{\varphi_n(x)\}$ հավասարաչափ սահմանափակ լրիվ օրթոգոնալ և նորմավորված սիստեմ, այնպիսին, որ $f(x)$ -ի Ֆուրյեի շարքը ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմի տարածման է համարյա ամենուրեք:

A. A. TALALIAN. On the convergence of Fourier series by bounded complete orthogonal systems (summary)

It is proved, that for every nonzero $f(x) \in L_2[0,1]$ a bounded complete orthogonal system $\{\varphi_n(x)\}$ exists, such that the Fourier series of $f(x)$ by $\{\varphi_n\}$ diverges almost everywhere.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. С. Банах. Sur la divergence des series orthogonales, *Studia Math.*, 9, 1946, 139—155.
2. А. М. Олевский. Об одной ортогональной системе и ее приложениях, *Матем. сб.*, 71 (113): 3, 1966, 297—336.
3. С. Качмиж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., 1958.

А. А. КИТБАЛАН

ЗАДАЧА α -КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ В КЛАССАХ ДАНЖУА—КАРЛЕМАНА

В в е д е н и е

1°. В исследовании М. М. Джрбашяна [1] было введено понятие α -квазианалитичности, охватывающее, в частности, понятие классической квазианалитичности Адамара—Данжуа—Карлемана.

Приведем некоторые определения и формулировки основных результатов этого исследования.

Через $C_{\alpha}^{(-)}$ ($0 \leq \alpha < 1$) обозначалось множество бесконечно-дифференцируемых на положительной полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, подчиненных условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1+x^m) \varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Рассматривались операторы последовательного дифференцирования функции $\varphi(x) \in C_{\alpha}^{(-)}$ ($0 \leq \alpha < 1$) в смысле Вейля дробных порядков $\frac{n}{\rho}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где положено $\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha$ ($\rho \geq 1$):

$$D_{\infty}^{0/\rho} \varphi(x) \equiv \varphi(x), \quad D_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-\alpha} \varphi(x),$$

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \equiv D_{\infty}^{1/\rho} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (2)$$

причем

$$D_{\infty}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt.$$

Далее, для произвольной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ вводились в рассмотрение следующие два класса бесконечно-дифференцируемых функций:

Класс $C_{\alpha}^{*}[[0, +\infty); M_n]$ ($0 \leq \alpha < 1$) — множество функций, принадлежащих $C_{\alpha}^{(-)}$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leq AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и класс $C_{\alpha}[[0, +\infty); M_n]$ ($0 \leq \alpha < 1$) — множество функций, принадлежащих C_{α}^{*} и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |(1 + \alpha x^2) \varphi^{(n)}(x)| \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

Для этих классов ставилась задача, аналогичная известной проблеме Адамара и сводящаяся к ней в случае $\alpha = 0$:

какова должна быть последовательность чисел $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для любой пары функций $\varphi(x)$ и $g(x)$, принадлежащих одному из указанных классов, из равенств

$$D_{\alpha}^{n/p} \varphi(0) = D_{\alpha}^{n/p} g(0) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x) \equiv g(x) \quad \text{при } 0 \leq x < +\infty.$$

Такого рода классы $C_{\alpha}^* \{[0, +\infty); M_n\}$ или $C_{\alpha} \{[0, +\infty); M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$) были названы α -квазианалитическими.

При этом очевидно, что 0-квазианалитические классы $C_0^* \{0, +\infty); M_n\}$ и $C_0 \{[0, +\infty); M_n\}$ есть не что иное, как квазианалитический на $[0, +\infty)$ класс $C \{[0, +\infty); M_n\}$ в классическом смысле.

Решение задачи α -квазианалитичности при $0 \leq \alpha < 1$ в работе [1] проводилось сведением ее к проблеме Ватсона для угловых областей, лежащих в правой полуплоскости. Такое сведение осуществлялось методом теории интегральных преобразований и представлений функций с ядрами Миттаг-Леффлера, развитой М. М. Джрбашьяном [2], в сочетании с рядом свойств операторов дробного дифференцирования функций в смысле Вейля.

В основных результатах об α -квазианалитичности введенных выше классов утверждалось следующее*.

Теорема А. 1°. Для α -квазианалитичности класса $C_{\alpha}^* \{[0, +\infty); M_n\}$ ($0 < \alpha < 1$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty, \quad (3)$$

где

$$T(r) := \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}. \quad (4)$$

2°. Для α -квазианалитичности класса $C_{\alpha} \{[0, +\infty); M_n\}$ ($0 \leq \alpha < 1$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr = +\infty. \quad (5)$$

Оба утверждения этой теоремы в случае $\alpha = 0$ сводятся к классической теореме Данжуа-Карлемана.

* См. [1], теоремы 3 и 4.

Вместе с тем, в α -квазианалитических классах М. М. Джрбашяна при $0 < \alpha < 1$ охватываются функции, последовательные производные которых могут иметь существенно более быстрый рост, чем это допустимо для функций из классического квазианалитического класса Данжуа-Карлемана. Как уже указывалось (см. [1], стр. 239), например, если

$$M_n = (n^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \log n \cdots \log_p n)^n, \quad n \geq N_p \quad (p > 1),$$

$$(\log_k a = \log \log_{k-1} a, \quad k=2, 3, \dots, p),$$

то условие (5) выполняется и класс $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ является α -квазианалитическим, согласно теореме А. Между тем, так как $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 1$ при $0 < \alpha < 1$, то указанные классы заведомо неквазианалитичны в смысле Данжуа-Карлемана.

2°. В настоящей работе определение классов $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ распространяется на случай $-1 < \alpha < 0$ и ставится задача об α -квазианалитичности этих классов.

С этой целью в § 1 вводятся в рассмотрение операторы последовательного дифференцирования в смысле Вейля порядков $\frac{n}{p}$ ($n=0, 1, 2, \dots$), „шаг“ которых $\frac{1}{p} = 1 - \alpha$ ($-1 < \alpha < 0$) больше единицы.

Определение классов функций $C_\alpha^{(*)}$ и $C_\alpha^{(*)}$ распространяется на случай $-1 < \alpha < 0$, и доказывается ряд вспомогательных предложений.

Далее, в § 2, для произвольной последовательности чисел $\{M_n\}_1^\infty$ в случае $-1 < \alpha < 0$ определяются классы $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ и для функций, принадлежащих этим классам, как и в [1], ставится задача α -квазианалитичности.

Основной результат настоящей работы формулируется в следующем виде (§ 2, теоремы 1 и 2):

1°. Для α -квазианалитичности класса $C_\alpha^* \{[0, +\infty); M_n\}$ в случае $-1 < \alpha < 0$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty,$$

где

$$T(r) = \sup \frac{r^n}{M_n}.$$

2°. Для α -квазианалитичности класса $C_\alpha \{[0, +\infty); M_n\}$ ($-1 < \alpha < 0$) необходимо и достаточно выполнение условия



$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr = +\infty.$$

Таким образом, в итоге, теорема А распространяется на произвольное значение параметра α ($-1 < \alpha < 1$).

Заметим, что в случае $-1 < \alpha < 0$ (т. е. $\frac{1}{2} < \rho < 1$) доказательство основной теоремы вновь проводится методом интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера, однако, возникающие в этом случае угловые области раствора $\frac{\pi}{\rho} > \pi$ создают ряд существенных трудностей аналитического характера.

3°. Особо подчеркнем существенную разницу между постановкой задачи классической или обобщенной квазианалитичности и α -квазианалитичности в случае $-1 < \alpha < 0$.

С этой целью напомним, что обобщенная проблема квазианалитичности, впервые поставленная и решенная С. Мандельбройтом [3], может быть сформулирована в следующем виде:

указать такие условия, связывающие последовательность положительных чисел $\{M_n\}$ и возрастающую последовательность натуральных чисел $\{\nu_n\}$, что если бесконечно-дифференцируемая и ограниченная на полуоси $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f^{(n)}(x)| \leq k^n M_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

для некоторой положительной константы k , то из условий

$$f(0) = f^{(\nu_n)}(0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

следовало бы, что $f(x) \equiv 0$ на полуоси $[0, +\infty)$.

Такие классы функций принято называть $\{\nu_n\}$ -квазианалитическими на полуоси $[0, +\infty)$.

Проблема квазианалитичности в классическом смысле соответствует случаю $\nu_n = n$ ($n=1, 2, \dots$).

Таким образом, если в случае обобщенной квазианалитичности каждая функция определяется единственным образом посредством своего значения и значения лакунарной последовательности производных в одной точке, то, как следует из анализа, проведенного в последнем пункте § 2 настоящей работы, в рассматриваемом нами случае α -квазианалитичности, функции классов $C_{\alpha}^* \{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_{\alpha} \{[0, +\infty); M_n\}$ ($-1 < \alpha < 0$) определяются посредством значений в точке моментов от производных функции по данной лакунарной последовательности $\nu_n = 2n - [n(1+\alpha)]$ с плотностью

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = \frac{1}{1-\alpha} = \rho > \frac{1}{2}.$$

Это свидетельствует о качественной близости результатов настоящей статьи и результатов теорем С. Мандельброята [3], хотя и эти задачи принципиально отличаются по своей постановке.

§ 1. Дифференциальные операторы порядка больше единицы и их свойства

1°. Приведем известные определения интеграла $D_{-}^{-\alpha} f(x)$, порядка α ($0 < \alpha < \infty$) и производной $D_{-}^{\alpha} f(x)$ порядка α ($0 < \alpha \leq 1$) в смысле Вейля (см., напр., [1]).

Если функция $f(x)$ определена и измерима на полуоси $(0, +\infty)$, то

$$D_{-}^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (0 < \alpha < \infty), \quad (1.1)$$

$$D_{-}^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d}{dx} D_{-}^{-(1-\alpha)} f(x) \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (1.2)$$

причем интеграл (1.1) существует при условии $x^{\alpha} f(x) \in L(0, +\infty)$ и, более того, $\lim_{\alpha \rightarrow +0} D_{-}^{-\alpha} f(x) = f(x)$ во всех точках Лебега функции $f(x)$.

Далее, для любого фиксированного α ($-1 < \alpha \leq 0$) обозначим

$$\rho = \frac{1}{1-\alpha} \quad \left(\frac{1}{2} < \rho \leq 1 \right),$$

и на полуоси $(0, +\infty)$ введем в рассмотрение операторы последовательного дифференцирования функции $f(x)$ порядков $\frac{n}{\rho}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) в смысле Вейля:

$$D_{-}^0 f(x) \equiv f(x), \quad (1.3)$$

$$D_{-}^{1/\rho} f(x) \equiv - \frac{d}{dx} D_{-}^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx} f(x), \quad (1.4)$$

$$D_{-}^{n/\rho} f(x) \equiv D_{-}^{1/\rho} \overset{n-1}{D_{-}^{1/\rho}} f(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (1.5)$$

В частности, при $\rho=1$, из (1.3) и (1.5) следует, что

$$D_{-}^n f(x) \equiv f^{(n)}(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

Сразу же заметим, что если функция $f(x)$ бесконечно-дифференцируема на полуоси $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{A}{1+x^{m/\mu}}, \quad (1.7)$$

где $A = \text{const}$; $n, m = 0, 1, 2, \dots$; $\mu > 0$ (в дальнейшем мы будем рассматривать функции именно из таких классов), то формулу (1.4) можно представить также в следующем виде:

$$D_{-}^{1/p} f(x) = - \frac{d^2}{dx^2} D_{-}^{-(1+\alpha)} f(x). \quad (1.8)$$

В самом деле, составляя интегральный оператор $D_{-}^{-(1+\alpha)} f(x)$ и производя интегрирование по частям, с учетом условий (1.7), получим

$$\begin{aligned} - \frac{d^2}{dx^2} D_{-}^{-(1+\alpha)} f(x) &= - \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{(1+\alpha) \Gamma(1+\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha+1} f'(t) dt = \\ &= - \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha} f'(t) dt = - \frac{d}{dx} D_{-}^{-(1+\alpha)} f'(x), \end{aligned}$$

то есть соотношение (1.4).

Наряду с операторами D_{-} нам понадобятся также операторы Римана-Лиувилля с началом в точке $x=0$: $D_0^{-\beta}$ и D_0^{β} , которые определяются следующим образом [1]: для произвольной функции $f(x) \in L(0, l)$ ($0 < l < +\infty$) и любого β ($0 < \beta < +\infty$)

$$D_0^{-\beta} f(x) \equiv \frac{d^{-\beta} f(x)}{dx^{-\beta}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt, \quad x \in (0, l), \quad (1.1')$$

причем при $\beta=0$ полагают $[D_0^{-\beta} f(x)]_{\beta=0} = f(x)$; если же функция $f(x) \in L(0, l)$ такова, что при данном β ($0 < \beta \leq 1$) оператор $D_0^{-(1-\beta)} f(x)$ хотя бы почти всюду обладает производной, то

$$D_0^{\beta} f(x) \equiv \frac{d^{\beta} f(x)}{dx^{\beta}} \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\beta)} f(x). \quad (1.2')$$

Далее, аналогично случаю операторов Вейля, для произвольного фиксированного β ($-1 < \beta \leq 0$) введем в рассмотрение операторы

$$D_0^{1/p} f(x) \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1+\beta)} \frac{d}{dx} f(x), \quad (1.4')$$

$$D_0^{n/p} f(x) \equiv D_0^{1/p} D_0^{\frac{n-1}{p}} f(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (1.5')$$

полагая, как и выше, что параметры ρ и β связаны друг с другом соотношением

$$\rho = \frac{1}{1-\beta}.$$

2°. Известно [1], что функции вида $e^{-\lambda^{\rho} x}$, а также $x^{\mu-1} E_{\rho}(\lambda x^{1/\rho})$; μ ($\rho > 0$, $\mu > 0$), где

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (1.9)$$

—целая функция типа Миттаг-Леффлера, а λ -произвольный комплексный параметр, являются решениями задач типа Коши для специальных дифференциальных операторов дробного порядка.

В частности, для случая, когда $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$, нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1.1. Функция $e_\rho(x, \lambda) = e^{-\lambda^\rho x}$ ($|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\rho}$, $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$) является решением задачи типа Коши:

$$D_{\infty}^{1/\rho} y + \lambda y = 0, \quad y(0) = 1. \quad (1.10)$$

Доказательство. Случай $\rho = 1$ непосредственно проверяется в силу (1.6).

В случае же $\frac{1}{2} < \rho < 1$ имеем

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{1/\rho} (e^{-\lambda^\rho x}) &= - \frac{d}{dx} D^{-(1+\alpha)} (-\lambda^\rho e^{-\lambda^\rho x}) = \\ &= \lambda^\rho \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-\lambda^\rho x}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-\lambda^\rho u} du \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\rho}$

$$D_{\infty}^{1/\rho} (e^{-\lambda^\rho x}) = \lambda^\rho \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{-\lambda^\rho x}}{\lambda^{\rho(1+\alpha)} \Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \right] = -\lambda e^{-\lambda^\rho x},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. Функция

$$E_\rho(x; \lambda) = E_\rho\left(\lambda x^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) \cdot x^{\frac{1}{\rho}-1} \left(\frac{1}{2} < \rho \leq 1\right), \quad (1.11)$$

где λ — произвольный параметр, является решением следующей задачи типа Коши на полуоси $[0, +\infty)$:

$$D_0^{1/\rho} y(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (1.12)$$

$$D_0^{-\alpha} y(x)|_{x=0} = 1. \quad (1.12')$$

Доказательство. Случай $\rho = 1$ проверяется непосредственно, поскольку $E_1(x, \lambda) = e^{\lambda x}$.

В случае же $\frac{1}{2} < \rho < 1$ заметим, что при любом $\alpha \geq -1$ и $\beta > -1$ имеем*

$$D_0^{-\alpha} \left\{ \frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \right\} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}, \quad x \in (0, +\infty). \quad (1.13)$$

* См. [1], стр. 200.

Тогда, учитывая определения (1.4'), (1.11), а также формулу (1.13), получим

$$D_0^{1/p} E_p(x; \lambda) = \frac{d}{dx} D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\frac{k+1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right)} = \lambda E_0(x; \lambda).$$

Остается проверить выполнение начального условия (1.12').

С учетом (1.13) имеем

$$D_0^{-\alpha} E_p(x; \lambda) = D_0^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\frac{k+1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{p}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k/p}}{\Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right)},$$

откуда непосредственно следует, что

$$D_0^{-\alpha} E_p(x; \lambda)|_{x=0} = 1.$$

3°. Следуя работе [1], определим на полуоси $[0, +\infty)$ следующие два класса функций: класс $C_a^{(*)}$ ($-1 < a \leq 0$) функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0, +\infty)$ всеми последовательными производными $D_-^n \varphi(x) = \varphi^{(n)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), которые подчинены условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1+x^{1/m}) \varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

и класс $C_a^{*(-)}$ ($-1 < a \leq 0$) функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0, +\infty)$ всеми последовательными производными в смысле Вейля $D_-^{n/p} \varphi(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), непрерывными на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющими условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1+x^{1/m}) D_-^{n/p} \varphi(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

В случае $a = 0$ ($p = 1$) классы $C_0^{(*)}$ и $C_0^{*(-)}$ тождественны с классом функций $\varphi(x)$, бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В работе [1] было доказано, что аналогичные классы $C_a^{(*)}$ и $C_a^{*(-)}$ определенные для случая $0 \leq a < 1$, тождественны. Покажем теперь, что и в случае $-1 < a < 0$ эти классы обладают тем же свойством.

Лемма 1.3. Классы $C_a^{(*)}$ и $C_a^{*(-)}$ ($-1 < a < 0$) совпадают, причем для любой функции $\varphi(x) \in C_a^{(*)} \equiv C_a^{*(-)}$ на всей полуоси $[0, +\infty)$ справедливы формулы

$$D_-^{n/p} \varphi(x) = D_-^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x), \quad (1.16)$$

$$D_-^{n/p} \varphi(x) = (-1)^k D_-^{-(1+\alpha)(n-k)} \varphi^{(2n-k)}(x), \quad (1.17)$$

$$\left(n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{\rho} \right] \right),$$

$$\varphi^{(k)}(x) = (-1)^{n-k} D_{\infty}^{-\left(\frac{n}{\rho} - k\right)} D_{\infty}^{\frac{n}{\rho}} \varphi(x) \quad (1.18)$$

$$\left(n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{\rho} \right] \right).$$

Доказательство. В предположении $\varphi(x) \in C_{\infty}^{(\alpha)}$ покажем, что интегралы

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_x^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t) (t-x)^{n(1+\alpha)-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_0^{\infty} t^{n(1+\alpha)-1} \varphi^{(2n)}(x+t) dt \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

сходятся абсолютно и равномерно относительно x на всей полуоси $[0, +\infty)$ и определяют непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |(1+x^{|\alpha|m}) D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x)| < +\infty \quad (n, m=0, 1, 2, \dots). \quad (1.20)$$

Если обозначить

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |(1+x^{|\alpha|m}) \varphi^{(2n)}(x)| = A_{n,m},$$

то

$$|\varphi^{(2n)}(x)| \leq \frac{A_{n,m}}{1+x^{|\alpha|m}} \quad (0 \leq x < +\infty; n, m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

и

$$|\varphi^{(2n)}(x+t)| \leq \frac{A_{n,m}}{1+(x+t)^{|\alpha|m}} \leq \frac{A_{n,m}}{1+t^{|\alpha|m}} \quad (0 \leq x, t < +\infty;$$

$$n, m=0, 1, 2, \dots). \quad (1.21')$$

Отсюда получается оценка

$$|D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_0^{\infty} |\varphi^{(2n)}(u+x)| u^{n(1+\alpha)-1} du \leq$$

$$\leq \int_0^{\infty} \frac{u^{n(1+\alpha)-1}}{1+u^{|\alpha|m}} du$$

и ввиду произвольности $m \geq 0$ интегралы (1.19) сходятся абсолютно и равномерно относительно x на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Далее, поскольку $x + t \geq 2\sqrt{xt} \geq \sqrt{xt}$ ($0 \leq x, t < +\infty$), то имеем

$$|\varphi^{(2n)}(x+t)| \leq \begin{cases} \frac{A_{n,m}}{1+x^{|\alpha|m}} & \text{при } 1 \leq x < +\infty, 0 \leq t < 1 \\ \frac{A_{n,m}}{1+(xt)^{\frac{|\alpha|m}{2}}} & \text{при } 1 \leq x < +\infty, 1 \leq t < +\infty. \end{cases} \quad (1.21'')$$

Разобьем интеграл (1.19) на два интеграла:

$$\begin{aligned} D^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_0^\infty \varphi^{(2n)}(u+x) u^{n(1+\alpha)-1} du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_0^1 \varphi^{(2n)}(u+x) u^{n(1+\alpha)-1} du + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_1^\infty \varphi^{(2n)}(u+x) u^{n(1+\alpha)-1} du \end{aligned}$$

и применим к ним неравенства (1.21''). Тогда получим

$$|D^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x)| \leq \frac{C_1}{1+x^{|\alpha|m}} + C_2 \int_1^\infty \frac{u^{n(1+\alpha)-1}}{1+u^{\frac{|\alpha|m}{2}}} du,$$

что приводит к оценкам (1.20).

Докажем теперь формулы (1.16), (1.17) и (1.18) леммы.

Заметим, что при $n=0$ эти формулы очевидны, так как $\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x)$, $D^0 \varphi(x) \equiv \varphi(x)$.

Пусть теперь $n \geq 1$. Установим сначала методом полной индукции формулу (1.16). С этой целью заметим, что согласно (1.21)

$$\varphi^{(2n)}(t) = O(t^{-|\alpha|m}) \quad (1.22)$$

при $t \rightarrow +\infty$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$), и рассмотрим оператор

$$D_-^{-(1+\alpha)} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt.$$

Двукратным интегрированием по частям отсюда получим

$$D_-^{-(1+\alpha)} \varphi(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\Gamma(\alpha+1)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha+2} \varphi''(t) dt.$$

Теперь уже, согласно формуле (1.8), которая представляет оператор

$D_{\infty}^{1/2} \varphi(x)$ для функций $\varphi(x) \in C_2^{(\infty)}$, имеем

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{1/2} \varphi(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{-(1/2)} \varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha} \varphi''(t) dt = \\ &= D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \varphi''(x), \end{aligned}$$

иначе говоря, формула (1.16) справедлива при $n=1$.

В работе [1] установлено*, что если γ_1 и $\gamma_2 \in [0, +\infty)$ и функция $f(x)$ такова, что $x^{\gamma_1} f(x)$, $x^{\gamma_2} f(x)$ и $x^{\gamma_1+\gamma_2} f(x)$ принадлежат классу $L(0, +\infty)$, то почти всюду на $(0, +\infty)$ имеем

$$D_{\infty}^{-\gamma_1} D_{\infty}^{-\gamma_2} f(x) = D_{\infty}^{-(\gamma_1+\gamma_2)} f(x). \quad (1.23)$$

Заметим, далее, что согласно (1.22) функции

$$x^{1+\alpha} \varphi^{(2(n-1))}(x), x^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2(n-1))}(x) \text{ и } x^{(1+\alpha)n} \varphi^{(2(n-1))}(x)$$

абсолютно интегрируемы при всяком $n \geq 1$. Тогда, как следует из (1.23), почти всюду на $(0, +\infty)$ имеет место тождество

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)} D_{\infty}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2(n-1))}(x) \equiv D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2(n-1))}(x) \quad (n \geq 1).$$

Правая часть этого тождества путем двукратного интегрирования по частям и с учетом (1.22) запишется так:

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2(n-1))}(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_x^{\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n-1} \varphi^{(2(n-1))}(t) dt = \\ &= \frac{1}{[n(1+\alpha)+1][n(1+\alpha)]\Gamma(n(1+\alpha))} \int_x^{\infty} \varphi^{(2n)}(t) (t-x)^{n(1+\alpha)-1} dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2(n-1))}(x) &= \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_x^{\infty} \varphi^{(2n)}(t) (t-x)^{n(1+\alpha)-1} dt = \\ &= D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Если теперь предположим, что формула (1.16) верна при $n-1$, то есть

$$D_{\infty}^{\frac{n-1}{2}} \varphi(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2(n-1))}(x),$$

то из (1.24) получим

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{\frac{n}{2}} \varphi(x) &\equiv D_{\infty}^{1/2} D_{\infty}^{\frac{n-1}{2}} \varphi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} D_{\infty}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2(n-1))}(x) = \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2(n-1))}(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Более того, функция $\varphi(x)$ обладает на $[0, +\infty)$ всеми последовательными производными в смысле Вейля $D_{\infty}^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$ ($n \geq 0$), подчиненными, в силу (1.20), условиям

* См. § 2, стр. 203--204.

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1+x^{|a|}m) D_{\infty}^{n/p} \varphi(x)| < +\infty \quad (n; m=0, 1, 2, \dots).$$

Это, в свою очередь, означает, что любая функция $\varphi(x)$, принадлежащая классу $C_a^{(-)}$, принадлежит также классу $C_a^{*(+)}$, иначе говоря, имеет место включение $C_a^{(-)} \subset C_a^{*(+)}$.

Теперь докажем формулу (1.17). Заметим, что при $k=0$ она совпадает с (1.16). Пусть $n \geq 1$. Если $[(\alpha+1)n]=0$, то формула (1.17) вновь совпадает с (1.16). Положим, наконец, что при $n \geq 1$ $[(\alpha+1)n] \geq 1$ и $1 \leq k \leq [(\alpha+1)n]$. Тогда, составляя выражение для $D_{\infty}^{-k} \varphi^{(2n)}(x)$ и интегрируя его k раз по частям, с учетом (1.22) получим

$$D_{\infty}^{-k} \varphi^{(2n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_x^{\infty} (t-x)^{k-1} \varphi^{(2n)}(t) dt = (-1)^k \varphi^{(2n-k)}(x), \quad (1.25)$$

$$1 \leq k \leq [(\alpha+1)n].$$

Вновь, в силу свойства (1.23), имеем

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x) = D_{\infty}^{-[(\alpha+1)n-k]} D_{\infty}^{-k} \varphi^{(2n)}(x),$$

поэтому

$$D_{\infty}^{n/p} \varphi(x) \equiv D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x) \equiv (-1)^k D_{\infty}^{-[(\alpha+1)n-k]} \varphi^{(2n-k)}(x),$$

$$1 \leq k \leq [(\alpha+1)n],$$

и формула (1.17) доказана.

Выберем теперь произвольную функцию $\varphi(x)$ из класса $C_a^{*(+)}$.

Для нее имеют место оценки

$$|D_{\infty}^{n/p} \varphi(x)| \leq \frac{B_{n,m}}{1+x^{|a|m}} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots), \quad (1.15')$$

где через $B_{n,m}$ обозначены значения точной верхней грани в формуле (1.15).

Точно таким же способом, как при установлении соотношения (1.20), убедимся в том, что

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1+x^{|a|m}) D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} D_{\infty}^{n/p} \varphi(x)| < +\infty \quad (n, m \geq 0),$$

т. е., что

$$|D_{\infty}^{-(1+\alpha)n} D_{\infty}^{n/p} \varphi(x)| \leq \frac{C_{n,m}}{1+x^{|a|m}} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots), \quad (1.26)$$

где $C_{n,m} = \text{const}$.

Докажем теперь, что всюду на полуоси $[0, +\infty)$ справедливо тождество

$$D_{\infty}^{-1/p} D_{\infty}^{1/p} \varphi(x) \equiv -\varphi(x) \quad \left(\frac{1}{2} < p < 1\right). \quad (1.27)$$

С этой целью заметим, что имеет место соотношение

$$D_{\infty}^{-1/\rho} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} (t-x)^{-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} \varphi(t) dt = -\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)} \varphi(x),$$

причем вынос операции дифференцирования из под знака интеграла, как легко видеть, допустим. Отсюда, используя формулы (1.1) и (1.8), интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{-1/\rho} D_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) &= -\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)} D_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) = \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)} \int_x^{\infty} (t-x)^{-\alpha} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \varphi(t) dt \right] = \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{-(1-\alpha)} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \varphi(x), \end{aligned}$$

так как проинтегрированный член в силу (1.26) обращается в нуль. Наконец, отсюда, согласно свойству (1.23) дробных интегралов в смысле Вейля, имеем

$$D_{\infty}^{-1/\rho} D_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{-2} \varphi(x) \equiv -\varphi(x),$$

т. е. тождество (1.27) или, что то же самое, формула (1.18) при $n=1$ и $k=0$ установлены.

Вновь применим метод полной индукции. Если предположить, что при данном $n \geq 2$ справедлива более общая формула

$$\varphi(x) = (-1)^{n-1} D_{\infty}^{-\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x), \quad D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}}, \quad (1.28)$$

то из нее и из (1.27) будет следовать

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (-1)^n D_{\infty}^{-\frac{n-1}{\rho}} D_{\infty}^{-1/\rho} D_{\infty}^{1/\rho} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) = \\ &= (-1)^n D_{\infty}^{-n/\rho} D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x), \end{aligned} \quad (1.29)$$

т. е. соотношение (1.18) окажется справедливым при любом $n \geq 0$ и $k=0$. Наконец, путем последовательного дифференцирования формулы (1.29) по x приходим к формуле (1.18) леммы в случае любых $n \geq 0$ и $k=0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{\rho} \right\rfloor$.

Остается установить, что из $\varphi(x) \in C_q^{(\infty)}$ следует принадлежность этой функции классу $C_q^{(\infty)}$. С этой целью запишем формулу (1.18) в виде

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}-k\right)} \int_0^{\infty} t^{n/\rho-k-1} D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x+t) dt \quad (1.18')$$

и заметим, что в ней число n и, следовательно, числа k

$$\left(0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right)$$

могут быть произвольно большими.

При этом, ввиду того, что $\varphi(x) \in C_0^{(n)}$, из (1.18') следует

$$|D_{\infty}^{n/p} \varphi(x+t)| \leq \frac{B_{n,m}}{1+(xt)^{|n|/m}} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots). \quad (1.30)$$

Из соотношений (1.18') и (1.30) вытекает, что функция $\varphi(x)$ бесконечно-дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$ и, более того, что

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |(1+x^{|n|/m}) \varphi^{(k)}(x)| < +\infty \quad (m; k=0, 1, 2, \dots).$$

Иначе говоря, доказана принадлежность функции $\varphi(x)$ классу C_{∞}^{∞} , то есть включение $C_{\infty}^{(\infty)} \subset C_{\infty}^{\infty}$.

Лемма полностью доказана.

Лемма 1.4. Для любой функции $\varphi(x) \in C_{\infty}^{\alpha} \equiv C_{\infty}^{(\alpha)}$ ($-1 < \alpha < 0$) имеют место соотношения

$$D_{\infty}^{n/p} \varphi(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{\frac{n-1}{p}} \varphi(x) \right\} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.31)$$

причем функции

$$\psi_n(x) = \frac{d^2}{dx^2} D_{\infty}^{n/p} \varphi(x) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.32)$$

удовлетворяют условиям

$$\sup_{0 \leq x < +\infty} |(1+x^{|n|/m}) \psi_n(x)| < +\infty \quad (n; m=1, 2, \dots). \quad (1.33)$$

Доказательство. При $n=1$ формула (1.31) совпадает с формулой (1.16) леммы 1.3. Положим $n \geq 2$ и запишем формулу (1.16), заменив в ней n на $n-1$:

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{\frac{n-1}{p}} \varphi(x) &= D_{\infty}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2(n-1))}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n-1))} \int_x^{\infty} (t-x)^{(\alpha+1)(n-1)-1} \varphi^{(2(n-1))}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Правую часть равенства (1.34) дважды проинтегрируем по частям, заметив при этом, что проинтегрированный член каждый раз обращается в нуль ввиду (1.22):

$$D_{\infty}^{\frac{n-1}{p}} \varphi(x) = \frac{1}{[(\alpha+1)(n-1)+1](\alpha+1)(n-1) \Gamma((1+\alpha)(n-1))} \times$$

$$\times \int_x^\infty (t-x)^{(\alpha+1)(n-1)+1} \varphi^{(2n)}(t) dt.$$

Отсюда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} D_{\alpha}^{\frac{n-1}{p}} \varphi(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n-1))} \int_x^\infty (t-x)^{(\alpha+1)(n-1)-1} \varphi^{(2n)}(t) dt = \\ &= D_{\alpha}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n)}(x). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Применим, далее, к обеим частям тождества (1.35) оператор $D_{\alpha}^{-(1+\alpha)}$. Тогда, в силу (1.23) и (1.16), будем иметь

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d^2}{dx^2} D_{\alpha}^{\frac{n-1}{p}} \varphi(x) \right\} &\equiv D_{\alpha}^{-(1+\alpha)} D_{\alpha}^{-(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n)}(x) = \\ &= D_{\alpha}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(x) = D_{\alpha}^{n/p} \varphi(x), \end{aligned}$$

и формула (1.31) доказана.

Запишем теперь тождество (1.35), заменив в нем $n-1$ на n :

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &\equiv D_{\alpha}^{n/p} \varphi(x) = D_{\alpha}^{-(1+\alpha)n} \varphi^{(2n+2)}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_x^\infty t^{(1+\alpha)n-1} \varphi^{(2n+2)}(x+t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (1.21') функций $\varphi^{(2n)}(x+t)$, мы точно таким же способом, как при доказательстве оценки (1.20) леммы 1.3, приходим к утверждению (1.33). Доказательство завершено.

§ 2. Теоремы об α -квазianaлитичности новых классов бесконечно-дифференцируемых функций

1°. В работе [1] для произвольной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$ и для любого α ($0 \leq \alpha < 1$) были введены в рассмотрение классы функций $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$ и $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$. Распространим теперь их определение на случай, когда $-1 < \alpha < 0$ и $\rho = \frac{1}{1-\alpha}$.

Множество функций $\varphi(x)$, принадлежащих классу $C_\alpha^{*(-)}(-1 < \alpha < 0)$ и дополнительно удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |D_{\alpha}^{n/p} \varphi(x)| \leq AB^n M_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.1)$$

назовем классом $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$.

Далее, обозначим через $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ подмножество функций $\psi(x)$ класса $C_\alpha^{*(-)}(-1 < \alpha < 0)$, которые дополнительно удовлетворяют условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1 + |x| x^\alpha) \psi^{(n)}(x)| < A_1 B_1^n M_n, \quad (2.2)$$

причем, как в (2.1), так и в (2.2) положительные постоянные A , B , A_1 , B_1 , вообще говоря, зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Для каждого из классов $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$ и $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$ ($-1 < \alpha < 0$) сформулируем задачу, аналогичную известной проблеме Ж. Адамара:

указать условие, которому должна удовлетворять последовательность положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для любой пары функций $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащих классу $C_\alpha^([0, +\infty); M_n)$ (или классу $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$) ($-1 < \alpha < 0$), из равенств*

$$D_-^{n/\rho} u(0) = D_-^{n/\rho} v(0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

следовало бы, что

$$u(x) \equiv v(x) \quad (2.4)$$

всюду на полуоси $[0, +\infty)$.

Эта задача была полностью решена в работе [1] в случае $0 \leq \alpha < 1$ (т. е. при $\rho > 1$), причем такого рода классы $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$ и $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$ были названы α -квазианалитическими. Мы будем придерживаться того же названия и в случае $-1 < \alpha < 0$ (то есть при $\frac{1}{2} < \rho < 1$).

Отметим также, что в частном случае $\alpha = 0$ (т. е. при $\rho = 1$) классы $C_0^*([0, +\infty); M_n)$ и $C_0([0, +\infty); M_n)$ совпадают с множеством бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leq AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.1')$$

т. е. с классом квазианалитических в обычном смысле функций, для которого в свое время была поставлена проблема Ж. Адамара.

Поскольку классы $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$ и $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$ ($-1 < \alpha < 0$) аддитивны, т. е. вместе с любой парой функций $u(x)$ и $v(x)$ в каждый из них входят также и функции $u(x) \pm v(x)$, то поставленная задача может быть сформулирована в следующем виде:

указать условие, которому должна удовлетворять последовательность положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для любой функции $\varphi(x)$, принадлежащей классу $C_\alpha^([0, +\infty); M_n)$ (или классу $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$) ($-1 < \alpha < 0$), из равенства нулю ее самой и всех ее обобщенных производных $D_-^{n/\rho} \varphi(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) в точке $x = 0$, т. е. из равенств*

$$D_-^{n/\rho} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_0^\infty \varphi^{(2n)}(t) t^{n(1+\alpha)-1} dt = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

следовало бы, что

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (2.6)$$

В настоящем параграфе будут установлены следующие две теоремы, являющиеся решением поставленной задачи об α -квазианалитичности классов $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$ и $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$ в случае $-1 < \alpha < 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы класс $C_\alpha^*([0, +\infty); M_n)$ ($-1 < \alpha < 0$) был бы α -квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty, \quad (2.7)$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}, \quad 0 \leq r < +\infty, \quad (2.8)$$

— функция А. Островского, ассоциированная с последовательностью $\{M_n\}_1^\infty$.

Теорема 2. Для α -квазианалитичности класса $C_\alpha([0, +\infty); M_n)$ ($-1 < \alpha < 0$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr = +\infty, \quad (2.9)$$

где функция $T(r)$ определена по формуле (2.8).

2°. Прежде, чем приступить к доказательству этих теорем, приведем ряд необходимых для этого фактов, изложенных в работе [1] и докажем несколько лемм.

Начнем со свойств функции $T(r)$. Известно*, что в случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} = +\infty \quad (2.10)$$

функция $T(r)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, более того, ее можно определить по формуле

$$T(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}. \quad (2.8')$$

Если же

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} < C < +\infty, \quad (2.10')$$

* См., напр., [3].

то при $r > C$ $T(r) \equiv +\infty$.

Отметим также, что поскольку в случае (2.10) $T(r) \uparrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$, то можно найти такое $r_0 \geq 1$, начиная с которого выполняется неравенство $\log T(r) \geq 0$, $r > r_0$.

Далее, следуя [1], введем в рассмотрение функцию

$$p(r) = \begin{cases} \log T(r_0) & \text{при } r \in [0, r_0] \\ \log T(r) & \text{при } r \in [r_0, +\infty), \end{cases} \quad (2.11)$$

которая непрерывна и монотонно возрастает на $[0, +\infty)$, причем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} p(r) = +\infty. \text{ Более того, из неравенств } T(r) \geq \frac{r^n}{M_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r)}{\log r} \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$) можно заключить, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{p(r)}{\log r} = +\infty. \quad (2.12)$$

Теперь, вновь следуя работе [1], введем в рассмотрение некоторые геометрические понятия. При любом $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$ составим угловые области

$$\Delta_\rho = \left\{ \zeta; |\operatorname{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2\rho}; 0 < |\zeta| < +\infty \right\} \quad (2.13)$$

и

$$\Delta_\rho^* = \left\{ \zeta; \frac{\pi}{2\rho} < |\operatorname{Arg} \zeta| \leq \pi; 0 < |\zeta| < +\infty \right\}, \quad (2.13')$$

взаимно дополняющие друг друга до всей плоскости ζ , а также область

$$D_\rho(v) = \left\{ \zeta; \operatorname{Re} \zeta^\rho > v; |\operatorname{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2\rho} \right\}, \quad v \geq 0, \quad (2.14)$$

и ее дополнение $D_\rho^*(v) \equiv C \overline{D_\rho(v)}$.

Границей областей $D_\rho(v)$ и $D_\rho^*(v)$ является кривая

$$L_\rho(v) \equiv \left\{ \zeta; \operatorname{Re} \zeta^\rho = v; |\operatorname{Arg} \zeta| \leq \frac{\pi}{2\rho} \right\}, \quad (2.15)$$

уравнение которой в полярных координатах (r, φ) запишется так:

$$r = \left(\frac{v}{\cos \rho \varphi} \right)^{1/\rho}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad v > 0. \quad (2.16)$$

Если обозначить через $L_\rho^+(v)$ и $L_\rho^-(v)$ ветви кривой $L_\rho(v)$, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях

$$L_\rho^+(v) \equiv \left\{ \zeta; \operatorname{Re} \zeta^\rho = v; 0 \leq \arg \zeta < \frac{\pi}{2\rho} \right\}, \quad (2.17)$$

$$L_{\rho}^{-}(\nu) = \left\{ \zeta; \operatorname{Re} \zeta = \nu; -\frac{\pi}{2\rho} < \arg \zeta \leq 0 \right\}, \quad (2.17')$$

то, как следует из (2.16), уравнения кривых $L_{\rho}^{\pm}(\nu)$ можно записать также в виде

$$\tau = \psi_{\pm}(\nu) = \pm \frac{1}{\rho} \arccos \frac{\nu}{r^{\rho}}. \quad (2.18)$$

Обозначим, наконец, через $\Delta_{\rho}(\tau)$ образ угла Δ_{ρ} при параллельном переносе его $\zeta = z - \tau$ в точку $z = \tau$ ($-\infty < \tau < +\infty$):

$$\Delta_{\rho}(\tau) \equiv \left\{ z; |\arg(z - \tau)| < \frac{\pi}{2\rho}; 0 < |z - \tau| < +\infty \right\}, \quad (2.19)$$

а дополнение замкнутой области $\overline{\Delta_{\rho}(\tau)}$ до всей плоскости z обозначим через $\Delta_{\rho}^{*}(\tau)$:

$$\Delta_{\rho}^{*}(\tau) \equiv \left\{ z; |\arg(z - \tau)| > \frac{\pi}{2\rho}; 0 < |z - \tau| < +\infty \right\}. \quad (2.19')$$

3°. В процессе доказательства теоремы 1 нам понадобятся еще две леммы, касающиеся поведения функции Миттаг-Леффлера $E_{\rho}(z; \mu)$, введенной по формуле (1.9), в угловых областях вида (2.19) и (2.19'), а также свойств преобразований с ядрами типа $E_{\rho}(z; \mu)$.

Лемма 2.1. Для любого ρ ($\frac{1}{2} < \rho < 1$) при $z \in \overline{\Delta_{\rho}^{*}(-1)}$ и $0 \leq t < +\infty$ справедлива оценка

$$\left| E_{\rho}\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) \right| \leq \frac{M}{(1+t^{1/\rho})^2}, \quad (2.20)$$

где $M > 0$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Известно (см., [2]), что функция $E_{\rho}(z; \mu)$ в случае $\frac{1}{2} < \rho < 1$ имеет следующую асимптотику:

для любого μ и произвольного $\theta \in \left(\frac{1}{2}, \rho\right)$

$$E_{\rho}(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^{\rho}} - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)} + O(|z|^{-m-1}) \quad (2.21)$$

при $z \in \Delta_{\theta}$, $|z| \rightarrow \infty$;

$$E_{\rho}(z; \mu) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)} + O(|z|^{-m-1}) \quad (2.22)$$

при $z \in \overline{\Delta_{\theta}^{*}}$, $|z| \rightarrow \infty$.

Отсюда вытекают следующие оценки:

$$\left| E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right) \right| \leq M_1 (1 + |z| t^{1/p})^{p-1} e^{t \operatorname{Re} z^2} + \frac{M_2}{(1 + |z| t^{1/p})^2} \quad (2.21')$$

при $z \in \Delta_0$, $t \geq 0$;

$$\left| E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right) \right| \leq \frac{M_2}{(1 + |z| t^{1/p})^2} \quad (2.22')$$

при $z \in \overline{\Delta_0^*}$, $t \geq 0$, где M_1 и M_2 — постоянные, не зависящие от z и t .

Для того чтобы оценить функцию $E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right)$ в замкнутой области $\overline{\Delta_p^*(-1)}$, выберем произвольную точку $z \in \Delta_p^*(-1)$ и заметим, что поскольку при $\frac{1}{2} < \theta < p$ имеем $\frac{\pi}{2p} < \frac{\pi}{2\theta} < \pi$ и $\overline{\Delta_0^*} \subset \Delta_p^*$, то всегда найдется такое число $\theta \in \left(\frac{1}{2}, p \right)$, для которого точка z , а вместе с ней и весь луч $t^{1/\theta} z$ ($t \geq 0$) будут принадлежать углу Δ_θ^* . Очевидно также, что в случае $z \in \overline{\Delta_p^*}(-1)$

$$\min_{z \in \overline{\Delta_p^*}(-1)} |z| = 1. \quad (2.23)$$

Из (2.23) и оценки (2.22') вытекает оценка (2.20) во всей замкнутой области $\overline{\Delta_p^*}(-1)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.2. Пусть функция $\varphi(t)$ ограничена и непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$, а также принадлежит одновременно классам $L(0, +\infty)$ и $L_2(0, +\infty)$.

Обозначим через $\Phi_p(z)$ $\left(\frac{1}{2} < p < 1 \right)$ ее преобразование с ядром Миттаг-Леффлера

$$\Phi_p(z) = \int_0^{+\infty} E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right) t^{1/p-1} \varphi(t) dt. \quad (2.24)$$

Тогда, если

$$\Phi_p(z) \equiv 0 \text{ при } z \in \Delta_p^*, \quad (2.25)$$

то $\varphi(t) \equiv 0$ на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Доказательство. Завершенная теория интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера изложена в монографии [2] (см. главу IV). В частности, из теоремы 4.1 главы IV работы [2] следует, что для произвольного $p > \frac{1}{2}$ функция $\Phi_p(z)$ аналитична в области Δ_p^* при $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, причем из оценки (2.20) в случае $\varphi(t) \in$

$\in L(0, +\infty)$ легко вытекает (см. лемму 4 работы [1]), что $\Phi_\rho(z)$ кроме того непрерывна в замкнутом угле $\bar{\Delta}_\rho^+$.

Отсюда заключаем, что тождество (2.25) выполняется во всей замкнутой области $\bar{\Delta}_\rho^+$ и, в частности, на его граничных лучах

$$z = e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} r^{\frac{1}{\rho}} \quad (0 \leq r < +\infty):$$

$$\Phi_\rho(e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} r^{\frac{1}{\rho}}) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} r^{\frac{1}{\rho}} t^{\frac{1}{\rho}}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1} \varphi(t) dt \equiv 0, \quad (2.26)$$

причем интегралы (2.26) сходятся равномерно относительно параметра r в любом промежутке $[0, R]$ ($0 < R < +\infty$).

Далее, как уже было показано в процессе доказательства леммы 1.2, при любом $\varkappa > 0$ имеем

$$D_0^{-\varkappa} \left\{ r^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) \right\} = r^{1/\rho-\varkappa-1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \frac{1}{\rho} + \varkappa\right) \quad (r > 0),$$

и если обозначить $\mu = \frac{1}{\rho} + \varkappa$, то отсюда получим

$$D_0^{-\varkappa} \left\{ r^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) \right\} = r^{\mu-1} E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho}; \mu\right) \quad (r > 0). \quad (2.27)$$

Умножим теперь тождества (2.26) на $r^{1/\rho-1}$ и применим к ним оператор $D_0^{-\varkappa}$, где $\varkappa = \frac{2\rho-1}{2\rho} > 0$ (тогда $\mu = 1 + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$), причем из характера сходимости интегралов (2.26) следует возможность внесения оператора $D_0^{-\varkappa}$ под знак интеграла. В результате, с учетом (2.27) будем иметь

$$r^{\mu-1} \int_0^{+\infty} E_\rho(e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} r^{1/\rho} t^{1/\rho}; \mu) t^{1/\rho-1} \varphi(t) dt \equiv 0, \quad r \in (0, +\infty). \quad (2.28)$$

Теперь уже, согласно теореме 1* работы [1], справедливой при любых ρ и μ

$$\left(\frac{1}{2} < \rho < +\infty, \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\right)$$

и при $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, приходим к обращению формулы (2.28), то есть к тождеству $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \in [0, +\infty)$.

4°. Приступим, наконец, к доказательству теоремы 1. При этом мы будем в основном придерживаться схемы доказательства теоремы 3 работы [1].

Необходимость. Покажем, что условие

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr < +\infty \quad (-1 < \alpha \leq 0) \quad (2.29)$$

влечет за собой существование нетривиальной функции $\varphi(x) \in (C_{\infty}^* \cap [0, +\infty); M_n]$, которая удовлетворяет условиям

$$D_{\infty}^{n/p} \varphi(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.30)$$

где, как обычно, $\rho = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{2} < \rho \leq 1 \right)$.

Заметим, что если функция $T(r)$ обеспечивает выполнение условия (2.29), то можно считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} = +\infty,$$

так как в противном случае имели бы $T(r) \equiv +\infty$ при $r \geq r_0$. Поэтому функцию $T(r)$ можно определить по формуле (2.8').

Введем в рассмотрение функцию

$$p_0(r) = p(r) + 2 \log \left(1 + \frac{r}{r_0} \right), \quad r \geq 0, \quad (2.31)$$

где $p(r)$ определена по формуле (2.11). Функция $p_0(r)$, как и $p(r)$, неотрицательна, непрерывна и не убывает на полуоси $[0, +\infty)$. Более того, из условия (2.29) следует также, что

$$\int_1^{\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\gamma}} dr < +\infty, \quad (2.32)$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\rho}{2\rho-1} \quad (1 < \gamma < +\infty). \quad (2.33)$$

При фиксированном $\rho \left(\frac{1}{2} < \rho \leq 1 \right)$ построим области Δ_{ρ} , Δ_{ρ}^* , $D_{\rho}(\nu)$ и $D_{\rho}^*(\nu)$, определенные по (2.13), (2.13') и (2.14).

В работе Н. У. Аракеляна [4] введено понятие простого угла Жордана: рассматриваются кривые C_+ и C_- , расположенные в плоскости $\zeta = re^{i\varphi}$, не имеющие общих точек кроме $\zeta = 0$ и представляющиеся непрерывными функциями в полярных координатах (r, φ) уравнениями $\varphi = \varphi_+(r)$, $\varphi = \varphi_-(r)$, $0 \leq r < +\infty$, причем $-\infty \leq \varphi_1 \leq \varphi_{\pm}(r) < \varphi_2 \leq +\infty$ и $0 < \varphi_+(r) - \varphi_-(r) < 2\pi$ при $0 \leq r < +\infty$.

Тогда область G , ограниченная кривой $C = C_+ \cup C_-$ и содержащая область $\varphi_-(r) < \varphi < \varphi_+(r)$, $0 \leq r < +\infty$, называется простым углом Жордана, а величины

$$\varphi(r) = \varphi_+(r) - \varphi_-(r) \quad (0 < \varphi(r) < 2\pi) \text{ и } \psi(r) = \frac{1}{2} [\varphi_+(r) + \varphi_-(r)]$$

называются соответственно раствором и биссектрисой угла G .

Из уравнений (2.18) кривых $L_p^\pm(\nu)$ непосредственно замечаем, что область $D_\nu(\nu)$ представляет собой *простой угол Жордана* (с точностью до параллельного переноса) в плоскости $\zeta = re^{i\varphi}$, раствора

$$\varphi(r) = \frac{2}{\rho} \arccos \frac{\nu}{r^p}, \quad (2.34)$$

биссектрисой которого служит луч $[\nu^{1/p}, +\infty)$ положительной вещественной полуоси.

Если отобразить комплексную плоскость ζ на плоскость z посредством функции $z = -\zeta$, то область $D_\nu^*(\nu)$ перейдет в простой угол Жордана $G_\nu(\nu)$ раствора

$$\theta(r) = 2\pi - \frac{2}{\rho} \arccos \frac{\nu}{r^p}. \quad (2.34')$$

Как доказано в работе [4] (лемма 7), если G — угол Жордана раствора $\theta(r)$ плоскости z , причем

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\theta(t)} = +\infty, \quad (2.35)$$

а $p_0(r) \geq 0$ — любая неубывающая на полуоси $[0, +\infty)$ функция, для которой

$$\int_1^\infty p_0(r) e^{-\pi \int_1^r \frac{dt}{t\theta(t)}} \frac{dr}{r\theta(r)} < +\infty, \quad (2.36)$$

то существует целая функция $F(z)$, не имеющая нулей во всей плоскости z и удовлетворяющая неравенству

$$|F(z)| < e^{-p_0(|z|)}, \quad z \in \bar{G}. \quad (2.37)$$

Покажем, что функции $\theta(r)$ и $p_0(r)$, введенные согласно (2.34') и (2.31), удовлетворяют условиям (2.35) и (2.36).

Поскольку, согласно (2.34') и (2.33), $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = \frac{\pi}{\gamma}$, то расходимость интеграла (2.35) очевидна.

Проверим теперь, что выполняется неравенство

$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{r\theta(r)} - \frac{\gamma}{\pi r} \right] dr < +\infty. \quad (2.38)$$

В самом деле, с учетом (2.33) имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r^{\theta(r)}} - \frac{\gamma}{\pi r} \right| &= \frac{\left| 2\pi - \frac{\pi}{\gamma} - \frac{2}{\rho} \arccos \frac{\gamma}{r^{\rho}} \right|}{r} = \\ &= \frac{2 \left| \arcsin \frac{\gamma}{r^{\rho}} \right|}{\rho r} \leq \frac{C_1}{r^{1+\gamma}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $C_1 = \text{const.}$ Из оценки (2.39) непосредственно следует справедливость условия (2.38).

Убедимся, наконец, что если неубывающая функция $p_0(r)$ удовлетворяет условию (2.32), то из (2.38) следует, что она удовлетворяет также неравенству (2.36).

Действительно, имеем

$$\pi \int_1^r \frac{dt}{t^{\theta(t)}} = \pi \int_1^r \left| \frac{1}{t^{\theta(t)}} - \frac{\gamma}{\pi t} \right| dt + \gamma \log r,$$

поэтому

$$J = \int_1^{\infty} p_0(r) e^{-\pi \int_1^r \frac{dt}{t^{\theta(t)}}} \frac{dr}{r^{\theta(r)}} = \int_1^{\infty} p_0(r) e^{-\pi \int_1^r \left[\frac{1}{t^{\theta(t)}} - \frac{\gamma}{\pi t} \right] dt} \frac{dr}{r^{1+\gamma \theta(r)}}.$$

Отсюда, с учетом того, что $\theta(r) > \frac{\pi}{\gamma} > 0$ для всех $r \in [0, +\infty)$, а также из (2.38) и (2.32) получим

$$J \leq C_2 \int_1^{\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\gamma}} dr < +\infty.$$

Итак, из (2.36), согласно лемме 7 работы [4], существует целая функция $F(z)$, удовлетворяющая в замкнутой области $\overline{G_p(\gamma)}$ неравенству (2.37). Или, если вернуться к переменной ζ , целая функция $F_1(\zeta) = F(-z)$ будет удовлетворять оценке

$$|F_1(\zeta)| < e^{-p_0(\zeta)}, \quad \zeta \in \overline{D_p^*(\gamma)}. \quad (2.37')$$

Заметим далее, что из (2.37') с учетом (2.12) имеем

$$\max_{\omega} |F_1(re^{i\varphi})| = O(r^{-\omega}), \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.40)$$

для любого $\omega > 1$ при $\zeta = re^{i\varphi} \in \overline{D_p^*(\gamma)}$ и, в частности, при $\zeta \in \overline{\Delta_p^*}$.

Итак, полученная функция $F_1(\zeta) \not\equiv 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 работы [1] в угловой области Δ_p^* . Следовательно, по этой теореме она допускает интегральное представление

$$F_1(\zeta) = \int_0^{\infty} E_2(\zeta t^{1/2}; \frac{1}{2}) t^{1/2-1} \varphi(t) dt, \quad \zeta \in \Delta_p^+, \quad (2.41)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} e^{-t\zeta^2} F_1(\zeta) d\zeta, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.42)$$

а L_p — граница угловой области Δ_p^+ , пробегаемая в положительном направлении. Очевидно, что $\varphi(t) \neq 0$. Докажем, что $\varphi(t)$ — искомая функция из класса $C_*^*([0, +\infty); M_n)$, удовлетворяющая условиям (2.5).

С этой целью прежде всего покажем, что в интегральном представлении (2.42) контур L_p можно заменить на $L_p(\nu)$ ($\nu > 0$).

В самом деле, заметим, что функция $e^{-t\zeta^2}$ аналитична в области $\Delta_p \supset D_p(\nu)$, причем

$$|e^{-t\zeta^2}| \leq \begin{cases} 1 & \text{при } \zeta \in \Delta_p, \quad t \in [0, +\infty) \\ e^{-\nu t} & \text{при } \zeta \in L_p(\nu), \quad t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (2.43)$$

Относительно функции $F_1(\zeta)$, аналитической в области $D_p^+(\nu) \setminus \Delta_p^+$, из соотношения (2.40), справедливого в этой области, можно утверждать, что при $|\zeta| \rightarrow \infty$, $\zeta \in D_p^+(\nu) \setminus \Delta_p^+$, функция $F_1(\zeta)$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{|\zeta|^2}$.

Отсюда, согласно теореме Коши, в формуле (2.42) контур интегрирования L_p можно заменить контуром $L_p(\nu)$.

Итак, справедлива формула

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p(\nu)} e^{-t\zeta^2} F_1(\zeta) d\zeta, \quad t \in [0, +\infty), \quad (2.42')$$

причем, как уже отмечалось, оценка (2.40) имеет место и при $\zeta = re^{i\varphi} \in L_p(\nu)$. Отсюда следует, что функция $\varphi(t)$ бесконечно-дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, а ее производные допускают следующие представления:

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{L_p(\nu)} e^{-t\zeta^2} \zeta^n F_1(\zeta) d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.44)$$

причем эти интегралы сходятся абсолютно и равномерно на полуоси $[0, +\infty)$.

Оценим $\varphi^{(n)}(t)$ с учетом неравенств (2.43):

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq \frac{e^{-\nu t}}{2\pi} \int_{L_p(\nu)} |\zeta|^n |F_1(\zeta)| |d\zeta| \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.45)$$

отсюда непосредственно имеем

$$\sup_{0 < t < +\infty} |(1 + t^{|n|}) \varphi^{(n)}(t)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Согласно (1.14) это означает, что $\varphi(t) \in C_x^{(-)} (-1 < x \leq 0)$ или, по лемме 1.3, также, что $\varphi(t) \in C_x^{*(-)} (-1 < x \leq 0)$.

Покажем теперь, что, более того, функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C_x\{[0, +\infty); M_n\}$. Заметим сначала, что из (1.10) следует справедливость тождества

$$D_-^{1/p} e^{-t^p} = -\zeta e^{-t^p}, \quad \zeta \in \Delta_p,$$

откуда вытекает, что для любого $v \geq 1$

$$D_-^{n/p} e^{-t^p} = (-1)^n \zeta^n e^{-t^p}, \quad \zeta \in L_p(v) \subset \Delta_p. \quad (2.46)$$

Применим теперь оператор $D_-^{n/p}$ к обеим частям формулы (2.42'), тогда, с учетом (2.46), получим

$$D_-^{n/p} \varphi(t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{L_p(v)} e^{-t^p} \zeta^n F_1(\zeta) d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.47)$$

причем нетрудно убедиться в законности ввода оператора $D_-^{n/p}$ под знак интеграла.

Из (2.47) следуют оценки

$$|D_-^{n/p} \varphi(t)| \leq \frac{e^{-vt}}{2\pi} \int_{L_p(v)} |\zeta|^n |F_1(\zeta)| |d\zeta| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

которые в силу (2.37') и (2.31) равносильны неравенствам

$$\sup_{0 < t < +\infty} |D_-^{n/p} \varphi(t)| \leq C_2(v) e^{-vt} \max_{\zeta \in L_p(v)} \{|\zeta|^n \exp\{-p(|\zeta|)\}\} \quad (2.48)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

где

$$C_2(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_p(v)} \frac{|d\zeta|}{\left(1 + \frac{|\zeta|}{r_0}\right)^2}.$$

есть величина конечная.

Наконец, согласно [1] (см. лемму 10, стр. 217), имеем

$$\max_{\zeta \in L_p(v)} \{|\zeta|^n \exp\{-p(|\zeta|)\}\} \leq AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.49)$$

Из неравенств (2.48) и (2.49) вытекает, что

$$\sup_{0 < t < +\infty} |e^{vt} D_-^{n/p} \varphi(t)| \leq AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда, в частности, следует, что функция $\varphi(t)$ входит в класс $C_x\{[0, +\infty); M_n\}$.

Нам осталось проверить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет также условиям $D_{\pm}^{n/p} \varphi(0) = 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Для этого заметим, что из формул (2.42') и (2.46) получаем

$$D_{\pm}^{n/p} \varphi(0) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{L_p(\nu)} \zeta^n F_1(\zeta) d\zeta \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.50)$$

Теперь уже, как и выше, из аналитичности функции $F_1(\zeta)$ в области $D_p^*(\nu) \setminus \bar{\Delta}_p^*$ и из асимптотической оценки (2.40), согласно теореме Коши, будем иметь, что все интегралы (2.45) равны нулю.

Необходимость доказана.

Достаточность. Теперь предположим, что выполняется условие (2.7) теоремы и докажем, что всякая функция $\varphi(t) \in C_{\alpha}^*([0, +\infty); M_n)$, удовлетворяющая равенствам (2.5), тождественно равна нулю на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Итак, пусть $\varphi(t) \in C_{\alpha}^*([0, +\infty); M_n)$, тогда имеем $\varphi(t) \in C_{\alpha}^*(-)$ и по лемме 1.3 $\varphi(t) \in C_{\alpha}^*$. Кроме того, из условий (1.14) при $n=0$ получим также, что $\varphi(t) \in L(0, +\infty)$ и $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$ одновременно. Как уже отмечалось при доказательстве леммы 2.2, преобразование с ядром Миттаг-Леффлера такой функции

$$\Phi_p(z) = \int_0^{+\infty} E_p\left(zt^{1/p}; \frac{1}{p}\right) t^{1/p-1} \varphi(t) dt \quad (2.24)$$

является функцией, аналитической в области Δ_p^* и непрерывной в замкнутой области $\bar{\Delta}_p^*$ (кроме, быть может, точки $z = \infty$).

Положим, далее, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = D_{\pm}^{n/p} \varphi(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

и докажем, что функцию $\Phi_p(z)$ можно представить также в виде

$$\Phi_p(z) = \frac{(-1)^n}{z^n} \int_0^{\infty} E_p\left(zt^{1/p}; \frac{1}{p}\right) t^{1/p-1} D_{\pm}^{n/p} \varphi(t) dt, \quad z \in \Delta_p^* \quad (2.51)$$

при любом $n \geq 1$ и $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$. В случае $\rho = 1$ это доказано в [1].

Пусть $\frac{1}{2} < \rho < 1$.

Как следует из леммы 1.2, функция $E_p(t; z)$, введенная по формуле (1.11), удовлетворяет дифференциальному уравнению в дробных производных

$$D_0^{1/p} E_p(t, z) \equiv z E_p(t, z),$$

которое, в силу (1.4') и (1.11), можно переписать в следующем виде:

$$E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right) t^{1/p-1} \equiv \frac{1}{z} \frac{d}{dt} \left\{ D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dt} E_p(t; z) \right\}. \quad (2.52)$$

Подставляя правую часть соотношения (2.52) в формулу (2.24), получим

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \varphi(t) d \left[D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dt} E_p(t, z) \right], \quad (2.53)$$

откуда интегрированием по частям имеем

$$\Phi_p(z) = - \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \varphi'(t) D_0^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dt} E_p(t, z) \right\} dt, \quad (2.54)$$

ввиду того, что проинтегрированный член

$$\varphi(t) D_0^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dt} E_p(t; z) = \varphi(t) E_p(z t^{1/p}; 1)$$

обращается в нуль на концах промежутка $[0, +\infty)$. Это следует из условия $\varphi(0)=0$, а также из того, что

$$E_p(z t^{1/p}; 1) = O(t^{-1/p}) \quad (2.55)$$

при $t \rightarrow +\infty$ и $z \in \Delta_p^*$.

Приведем теперь обобщенную формулу интегрирования по частям, которая выведена в работе [1]: для каждого $\beta > 0$ и для любых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, измеримых на полуоси $(0, +\infty)$ и таких, что

$$f_1(t) D_0^{-\beta} f_2(t) \in L(0, +\infty), f_2(t) D_0^{-\beta} f_1(t) \in L(0, +\infty), \quad (2.56)$$

имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f_1(t) D_0^{-\beta} f_2(t) dt = \int_0^{\infty} f_2(t) D_0^{-\beta} f_1(t) dt. \quad (2.57)$$

В работе [1] также проверено, что функция $E_p(t, z) \in L(0, +\infty)$, а функции $f_1(t) = \frac{d}{dt} E_p(t, z)$ и $f_2(t) = \varphi'(t)$ удовлетворяют условиям (2.56). Следовательно, к интегралу формулы (2.54) применима формула (2.57).

В результате получим

$$\Phi_p(z) = - \frac{1}{z} \int_0^{\infty} D_0^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dt} \varphi(t) \right\} dE_p(t; z). \quad (2.58)$$

Заметим теперь, что из определения (1.11) функции $E_p(t; z)$ и из условия (2.55) при $\frac{1}{2} < \rho < 1$ имеем

$$E_p(0, z) = 0, E_p(t, z) = O(t^{-1}) \quad (2.59)$$

при $t \rightarrow +\infty$ и $z \in \Delta_p^*$.

Еще раз проинтегрируем по частям интеграл (2.58), тогда с учетом (2.59) получим формулу (2.51) при $n=1$:

$$\Phi_p(z) = -\frac{1}{z} \int_0^{\infty} E_p\left(z t^{1/p}; \frac{1}{p}\right) t^{1/p-1} D_-^{1/p} \varphi(t) dt, \quad z \in \Delta_p^*.$$

Проведем полную индукцию. Полагая, что формула (2.51) верна при $n-1$, из тождества (2.52) получим

$$\Phi_p(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \int_0^{\infty} D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t) d \left[D_0^{-(1+z)} \frac{d}{dt} E_p(t; z) \right], \quad z \in \Delta_p^*.$$

Интегрируя правую часть этой формулы по частям, будем иметь

$$\Phi_p(z) = \frac{(-1)^n}{z^n} \int_0^{\infty} D_0^{-(1+z)} \left\{ \frac{d}{dt} E_p(t, z) \right\} \frac{d}{dt} \left\{ D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t) \right\} dt, \quad (2.60)$$

так как и здесь проинтегрированный член

$$D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t) D_0^{-(1+z)} \left\{ \frac{d}{dt} E_p(t, z) \right\} = E_p(z t^{1/p}, 1) D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t)$$

обращается в нуль на концах промежутка $[0, +\infty)$, в силу формулы (2.55), а также условия $D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(0) = 0$.

Далее, из леммы 1.4 следует, что функции

$$f_1(t) = \frac{d}{dt} E_p(t, z) \text{ и } f_2(t) = \frac{d}{dt} D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t) \text{ удовлетворяют}$$

условиям формулы (2.57), обеспечивающим ее применение к интегралу (2.60).

Тогда получим

$$\Phi_p(z) = \frac{(-1)^n}{z^n} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{E_p(t, z)\} D_-^{-(1+z)} \left\{ \frac{d}{dt} D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t) \right\} dt,$$

наконец, снова интегрируя по частям последний интеграл, придем к соотношению

$$\Phi_p(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} \int_0^{\infty} E_p(t, z) \frac{d}{dt} D_-^{-(1+z)} \frac{d}{dt} D_-^{\frac{n-1}{p}} \varphi(t) dt,$$

причем проинтегрированный член вновь обращается в нуль, в силу условий (2.59) и неравенств (1.20). В итоге, если учесть (1.4) и (1.5), мы получим формулу (2.51) при любом натуральном $n \geq 1$.

Докажем теперь, что $\Phi_p(z) \equiv 0$ при $z \in \Delta_p^*$.

С этой целью рассмотрим угловую область

$$\Delta_p^*(-1) = \left\{ z; \frac{\pi}{2p} < |\arg(z+1)| \leq \pi; 0 \leq |z+1| < +\infty \right\}$$

раствора $2\pi - \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{\gamma}$, получающуюся параллельным переносом области Δ_p^* в точку $z = -1$.

Из оценки (2.20) следует, что при любом $\frac{1}{2} < p < 1$

$$\left| E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right) \right| < \frac{C_4}{(1+t^{1/p})^2}, \quad z \in \overline{\Delta_p^*(-1)}, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где постоянная $C_4 > 0$ не зависит от z и t .

Отсюда, а также из сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \frac{t^{1/p-1}}{(1+t^{1/p})^2} dt \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < p < 1$$

вытекает, что

$$\int_0^\infty \left| E_p \left(z t^{1/p}; \frac{1}{p} \right) \right| t^{1/p-1} dt \leq C_5 < +\infty, \quad z \in \overline{\Delta_p^*(-1)}, \quad (2.61)$$

для всех $p \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$.

Поскольку, очевидно, $\Delta_p^*(-1) \subset \Delta_p^*$, то из представления (2.51) функции $\Phi_p(z)$, из оценки (2.61), а также из неравенств (2.1) получим

$$|\Phi_p(z)| < \frac{AM_n C_5 |z|^{\frac{p-1}{2}}}{\left(\frac{|z|}{B} \right)^n}, \quad z \in \overline{\Delta_p^*(-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

А из (2.62), в силу определения (2.8) функции $T(r)$, имеем

$$|\Phi_p(z)| \leq \frac{C_6 |z|^{\frac{p-1}{2}}}{T\left(\frac{|z|}{B}\right)}, \quad z \in \overline{\Delta_p^*(-1)}, \quad (2.63)$$

где C_6 не зависит от z .

Теперь рассмотрим два случая.

а) Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{M_n} < r_0 < +\infty$ ($r_0 > 1$), то, как было отмечено выше (см. (2.10')), $T(r) \equiv +\infty$ при $r \geq r_0 > 1$ и, следовательно, условие (2.7) выполняется. Но тогда из неравенства (2.63) вытекает, что $\Phi_p(z) \equiv 0$ в области $Q \subset \Delta_p^*$:

$$Q = \Delta_p^* (-1) \cap \{|z| > r_0\} \neq \emptyset,$$

и, значит, во всей области Δ_p^* .

б) В случае же, когда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \bar{M}_n = +\infty$, рассмотрим вспомогательную функцию $F(z) = \Phi_p(-1-z)$, аналитическую в замкнутой угловой области $\bar{\Delta}_\gamma$ раствора $\frac{\pi}{\gamma}$, где, как всегда, $\gamma = \frac{1}{1+\alpha}$, в силу (2.63), удовлетворяющую неравенству

$$|F(z)| \leq \frac{C_1 |z+1|^{p-\frac{1}{2}}}{T\left(\frac{|z+1|}{B}\right)}, \quad z \in \bar{\Delta}_\gamma. \quad (2.63')$$

Функция $T(r)$ монотонно стремится к $+\infty$ быстрее любой степени r , следовательно, справедлива оценка

$$\sup_{z \in \bar{\Delta}_\gamma} \{|F(z)|\} \leq C_8 \quad (2.64)$$

и, кроме того, найдется такое $r_0 \geq 2$, что при $r \geq r_0$ функция

$$q(r) \equiv C_8 \frac{(r+1)^{p-\frac{1}{2}}}{T\left(\frac{r+1}{B}\right)} \quad (2.65)$$

удовлетворяет неравенству $q(r) \leq 1$ ($r > r_0$).

Если теперь определить неотрицательную функцию

$$p(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \in [0, r_0] \\ -\log q(r) & \text{при } r \in [r_0, +\infty), \end{cases} \quad (2.66)$$

то из (2.63') придем к неравенству

$$|F(re^{i\varphi})| \leq C_9 e^{-p(r)} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\gamma}; \quad 0 \leq r < +\infty \right). \quad (2.67)$$

С другой стороны, из (2.65) и (2.66) имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}} dr &= - \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\log [C_9 (1+r)^{p-1/2}]}{r^{1+\gamma}} dr + \\ &+ \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\log T\left(\frac{r+1}{B}\right)}{r^{1+\gamma}} dr, \end{aligned}$$

причем первый интеграл в правой части сходится, а второй, очевидно, расходится, ввиду расходимости интеграла (2.7).

Итак, функция $F(z)$ в области $\bar{\Delta}_\gamma^*$ удовлетворяет неравенству (2.67) и в то же время

$$\int_1^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}} dr = +\infty.$$

Отсюда, вследствие теоремы $A(1^\circ)$ работы [1] вытекает тождество $F(z) \equiv 0$ при $z \in \overline{\Delta_\gamma}$ или, что одно и то же, тождество $\Phi_p(z) \equiv 0$ при $z \in \overline{\Delta_p^*}(-1)$.

Учитывая аналитичность функции $\Phi_p(z)$ в области $\Delta_p \supset \overline{\Delta_p^*}(-1)$, можем заключить, что тождество $\Phi_p(z) \equiv 0$ выполняется во всей области Δ_p^* .

Из этого тождества, в силу того, что $\varphi(t) \in L(0, +\infty)$ и $\varphi(t) \in (L_2(0, +\infty))$, согласно лемме 2.2, имеем

$$\varphi(t) \equiv 0 \text{ при } 0 \leq t < +\infty.$$

Теорема полностью доказана.

Что касается доказательства теоремы 2, то оно проводится строго по схеме доказательства теоремы 4 работы [1], и поэтому мы на нем останавливаться не будем. Отметим, однако, что в случае $-1 < \alpha < 0$ при доказательстве теоремы 2 приходится существенно использовать леммы 1.3, 1.4, 2.1 и 2.2.

5°. В заключение проведем сравнение между теоремой 2 настоящей работы и одним из результатов относительно обобщенной проблемы квазианалитичности С. Мандельброта [3].

С этой целью введем обозначение $\alpha = [n(1+\alpha)] - 1$ и заметим, что интегралы (2.5) после $(\alpha+1)$ -кратного интегрирования по частям можно представить в виде

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{n/p} \varphi(0) &= \frac{1}{\Gamma(n(1+\alpha))} \int_0^{\infty} \varphi^{(2n)}(t) t^{n(1+\alpha)-1} dt = \\ &= \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\Gamma(n(1+\alpha) - [n(1+\alpha)] + 1)} \int_0^{\infty} \varphi^{(2n-[n(1+\alpha)])}(t) t^{n(1+\alpha)-[n(1+\alpha)]} dt. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Если теперь рассмотреть возрастающую последовательность $\nu_n = 2n - [n(1+\alpha)]$ плотности $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{1-\alpha} = \rho > \frac{1}{2}$, то условия (2.5) с учетом (2.68) запишутся в виде

$$D_{\alpha}^{n/p} \varphi(0) = \frac{(-1)^{\nu_n}}{\Gamma(\theta_n + 1)} \int_0^{\infty} \varphi^{(\nu_n)}(t) t^{\theta_n} dt = 0, \quad (2.5')$$

где $\theta_n = n(1+\alpha) - [n(1+\alpha)]$, $0 \leq \theta_n < 1$.

Составим, далее, для заданной последовательности $\{M_n\}$ функцию $B(\alpha) = \log T(e^\alpha)$, где $T(r)$ введено по (2.8), и заметим, что

$$B(\sigma) = \sup_{n \geq 1} (n\sigma - \log M_n).$$

Согласно основной теореме относительно обобщенной квазианалитичности, класс $C(M_n)$ функций, бесконечно дифференцируемых на полуоси и удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(n)}(x)| \leq k^n M_n, \quad k = \text{const},$$

будет $\{v_n\}$ -квазианалитическим на полуоси, если выполняется одно из

„предположений“ $U \left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{v_n\} \right]$ или

$$U_j \left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{v_n\} \right] \quad (j = 1, 2, 3)^*.$$

Заметим, в частности, что предположение $U_1 \left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{v_n\} \right]$ формулируется так:

Существует некоторая постоянная k , $\frac{1}{2} < k < D$, такая, что

$$\int_1^\infty B(\sigma) e^{-\frac{\sigma}{2(k-\frac{1}{2})}} d\sigma = +\infty. \quad (2.69)$$

В наших терминах условие (2.69) запишется в виде

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{\frac{1}{1+\frac{1}{2k-1}}}} dr = +\infty, \quad (2.70)$$

где k — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{2} < k < \rho. \quad (2.71)$$

Вследствие (2.71), интеграл (2.70) и интеграл (2.9) теоремы 2 связаны неравенством

$$\int_1^R \frac{\log T(r)}{r^{\frac{1}{1+\frac{1}{2k-1}}}} dr < \int_1^R \frac{\log T(r)}{r^{\frac{1}{1+\frac{1}{1+\alpha}}}} dr$$

при любом $R > 1$.

Итак, в случае выполнения предположения $U_1 \left[\frac{1}{2}, B(\sigma), \{v_n\} \right]$ (которое, заметим, лишь достаточно для $\{v_n\}$ -квазианалитичности класса $C(M_n)$) интеграл (2.9) также расходится, что является необходимым и достаточным условием для α -квазианалитичности класса $C_\alpha([0, +\infty))$;

* См. [2], стр. 118—121.

M_n) ($-1 < \alpha < 1$). Если же интеграл (2.9) расходится, то это еще не влечет за собой расходимости интеграла (2.70).

Приведенные рассуждения показывают, что как уже отмечалось во введении, результат теоремы 2, будучи сформулирован в терминах α -квазианалитичности, качественно близок к результатам С. Мандельброята, несмотря на существенное различие между постановками задач α -квазианалитичности и обобщенной квазианалитичности.

Автор выражает искреннюю благодарность академику АН Армянской ССР профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи, а также за внимание и ценные советы при ее выполнении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 24.VII.1974

Ա. Ա. ԿԻՏԲԱԼՅԱՆ. Քվազիանալիտիկության խնդիրը Դենյոտ-Կարլեմանի դասերում (ամփոփում)

Մ. Մ. Զրբաշյանի կողմից մտցված α -քվազիանալիտիկության գաղափարը տարածվում է ֆունկցիաների ավելի լայն դասի վրա:

Այդ նպատակով մտցվում են $n(n=0,1,2,\dots)$ կարգի հաջորդական դիֆերենցման օպերատորներ Δ_n իմաստով $\frac{1}{2} < \rho < 1$ դնայքով:

Սահմանվում են $C_\alpha^+([0, +\infty); M_n)$ և $C_\alpha^+([0, +\infty); M_n)$ ֆունկցիաների դասեր $-1 < \alpha < 0$ ($\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha$) դեպքում և ապացուցվում է, որ նրանց α -քվազիանալիտիկության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի բավարարվեն համապատասխանաբար

$$\int_1^\infty \frac{\log(r)}{r^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}} dr = +\infty \quad \text{և} \quad \int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr = +\infty$$

պայմանները, որտեղ $T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}$.

A. A. KITBALIAN. The α -quasianalyticity problem in the Denjoy-Carleman classes (summary)

The concept of α -quasianalyticity as introduced by M. M. Djrbashian is extended to a broader class of functions.

For this purpose the operators of consecutive differentiation (in the sense of Weil) of order $\frac{n}{\rho}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) $1/2 < \rho < 1$ are introduced.

The classes $C_\alpha^+([0, +\infty); M_n)$ and $C_\alpha^+([0, \infty); M_n)$ for $-1 < \alpha < 0$, ($1/\rho = 1 - \alpha$) happen to be quasianalytical if

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}} dr = +\infty \quad \text{and} \quad \int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr = +\infty,$$

are correspondingly, with $T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *М. М. Джрбашян*. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 3, 1963, 171—248.
2. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
3. *С. Мандельброт*. Примающие ряды. Регуляризация последовательностей. Приложения, М., ИИЛ, 1955.
4. *Н. У. Аракелян*. Об асимптотическом приближении целыми функциями в бесконечных областях, Матем. сб., 53 (95): 4, 1961, 515—538.

Б. С. НАХАПЕТЯН

СИЛЬНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ГИББСОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С ДИСКРЕТНЫМ АРГУМЕНТОМ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

1°. В данной статье мы докажем выполнение свойства равномерного сильного перемешивания для гиббсовского случайного поля с дискретным аргументом и многочастичным вакуумным потенциалом и применим этот факт для доказательства сильной выпуклости удельной свободной энергии такого поля.

2°. Пусть Z^v — целочисленная v -мерная решетка ($v \geq 1$), каждой точке которой сопоставлено пространство X_i с стандартной $\mathcal{A}$ -алгеброй его подмножеств A_i и заданной на A_i вполне конечной мерой μ_i такой, что $\mu_i(X_i) > 0$. Предполагается, что все пространства с мерой (X_i, A_i, μ_i) являются экземплярами одного и того же пространства с мерой (X, A, μ) . Для каждого подмножества $I \subseteq Z^v$ определим пространство

$$X_I = \times_{i \in I} X_i,$$

где $\times$ означает прямое произведение пространств. По определению $X_\emptyset = \emptyset$. В каждом из пространств X_I , $I \subseteq Z^v$ введем $\mathcal{A}$ -алгебру измеримых подмножеств A_I и меру μ_I на ней. Для ограниченных множеств $I \subseteq Z^v$, $|I| < \infty^*$ $\mathcal{A}$ -алгебра A_I и мера μ_I определяются как произведение σ -алгебр A_i , $i \in I$ и произведение мер μ_i , $i \in I$ соответственно. Для неограниченных множеств I $\mathcal{A}$ -алгебра A_I определяется как наименьшая σ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, т. е. множествами вида $A \times X_{I \setminus J}$, $A \in A_J$ и $J \subset I$ — ограниченное множество, а мера μ_I определяется как мера, ограничения которой на $\mathcal{A}$ -алгебры A_J , $J \subset I$, J — конечное множество, совпадают с μ_J .

Случайным полем с дискретным аргументом $t \in T$, $T \subseteq Z^v$ и значениями в множестве X называют систему случайных величин ξ_t , $t \in T$ со значениями в X . Распределением случайного поля назовем вероятностную меру P на (X_T, A_T) такую, что вероятность

$$Pr((\xi_t, t \in T) \in A) = P(A), \quad A \in A_T.$$

Известно, что задание распределения P эквивалентно заданию согласованной системы конечномерных распределений $(P)_J$, $J \in \mathcal{W}_T^{**}$ на (X_J, A_J) . Согласованность означает, что

* Здесь и всюду в дальнейшем $|\cdot|$ — число элементов конечного множества.

** Для любого $I \subseteq Z^v$, $\mathcal{W}_I = \{J: J \subset I, |J| < \infty\}$.

$$(P)_J(A) = (P)_I(A \times X_{I \setminus J}), \quad A \in \mathcal{A}_J, \quad J \subset I.$$

Пусть $I, V \subset T$ — конечные множества такие, что $I \cap V = \emptyset$. Введем функцию

$$\gamma(I, V) = \sup_{A \in \mathcal{A}_I, B \in \mathcal{A}_V, (P)_V(B) > 0} |(P)_{IV}(A/B) - (P)_I(A)|, \quad (2.1)$$

где $(P)_{IV}(A/B)$ — условная вероятность события $A \in \mathcal{A}_I$ при условии $B \in \mathcal{A}_V$. Пусть функция $\varphi_I(d)$, $d \in R^{(1)}$ такова, что $\varphi_I(d) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$ и фиксированном I . Мы скажем, что случайное поле ξ_t , $t \in T$ с распределением P удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания, если при любых конечных $I, V \subset T$, $I \cap V = \emptyset$ имеет место неравенство

$$\gamma(I, V) \leq \varphi_I(d(I, V)), \quad (2.2)$$

где $d(I, V)$ — расстояние между множествами I и V . Далее мы скажем, что последовательность распределений $P^{(m)} = \{(P^{(m)})_J, J \in \mathcal{W}_T\}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к распределению $P = \{(P)_J, J \in \mathcal{W}_T\}$, если при любых $J \in \mathcal{W}_T$ и $A \in \mathcal{A}_J$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (P^{(m)})_J(A) = (P)_J(A). \quad (2.3)$$

3°. Пусть θ — некоторый выделенный фиксированный элемент из X („вакуум“). Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mu(\theta) = 1$. Для каждого $T \subseteq Z^*$ введем пространство

$$L_T = \bigcup_{J \in \mathcal{W}_T} X_J$$

с σ -алгеброй измеримых множеств M_I и мерой m_I , сужения которых на каждое X_J , $J \subset T$ совпадают с $\mathcal{A}_J$ и μ_J , соответственно. Для каждого $I \subseteq Z^*$ и каждого элемента $x = (x_s, s \in I) \in X_I$ определим сдвиг τ_t , $t \in Z^*$ этого элемента по правилу

$$\tau_t(x) = \{x_e, e \in I + t \mid x_e = x_{e-t}, e \in I + t\}.$$

Назовем потенциалом взаимодействия измеримую функцию Φ , определенную на пространстве $L = L_{Z^*}$ и инвариантную относительно всех сдвигов τ_t , $t \in Z^*$. Потенциал Φ называется вакуумным, если $\Phi(x) = 0$ для любого $x \in X_I$, $I \in \mathcal{W}_{Z^*}$, у которого $x_t = \theta$ хотя бы при одном $t \in I$. В дальнейшем нас будет интересовать класс B^0 вакуумных потенциалов, удовлетворяющих условию

$$\|\Phi\| = \sum_{J \in \mathcal{W}_{Z^*}^0} \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < \infty, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{W}_I^0 = \{J: t \in J \subset I, |J| < \infty\}$, $I \subseteq Z^*$ и 0 — нуль решетки Z^* . Класс вакуумных потенциалов образует банахово пространство с нормой (3.1). Для всякого конечного множества $I \subset Z^*$ и любого множества $\bar{I} \subseteq Z^* \setminus I$ определим функцию

$$\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x) = \sum_{J \in \mathbb{N}_I \setminus \emptyset} \sum_{\bar{J} \in \mathbb{N}_I} \Phi(x_J, \bar{x}_{\bar{J}}), \quad x \in X_I, \bar{x} \in X_I.$$

Здесь и далее, если $x = (x_I, t \in I) \in X_I$, $I \subseteq Z^*$, то через x_I будем обозначать набор $(x_I, t \in I)$, $J \subseteq I$. Гиббсовским распределением вероятностей (р. в.) $\Gamma_I^{\Phi, \bar{x}}$ в конечном множестве $I \subset T$ с потенциалом $\Phi \in B^0$ и граничными условиями $\bar{x} \in X_{I \setminus I}$ назовем абсолютно непрерывное относительно меры μ_I р. в. на (X_I, A_I) с плотностью

$$P_I^{\bar{x}, \Phi}(x) = Z_I^{\Phi-1}(\bar{x}) \exp \{-\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x)\},$$

$$Z_I^{\Phi}(\bar{x}) = \int_{X_I} \exp \{-\hat{\Phi}^{\bar{x}}(x)\} \mu_I(dx).$$

Распределение Гиббса в конечном множестве $\Gamma_I^{\Phi, \bar{x}}$, $I \subset T$ нам удобно будет трактовать как распределение случайного поля ξ_t , $t \in T$ такого, что $\xi_t = \bar{x}_t$ при $t \in T \setminus I$ с вероятностью единица, и что совместное распределение случайных величин ξ_t , $t \in I$ задается как $\Gamma_I^{\Phi, \bar{x}}$. Назовем распределение P на (X_T, A_T) предельным для гиббсовских распределений в конечных множествах из T , если существует расширяющаяся последовательность конечных множеств $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, дающих в сумме T и последовательность граничных условий $\bar{x}^{(m)} \in X_{T \setminus I_m}$ такая, что последовательность распределений $\Gamma_{I_m}^{\Phi, \bar{x}^{(m)}}$ имеет своим пределом распределение P . Пусть M_T^{Φ} — замкнутая (в смысле сходимости (2.3)) выпуклая оболочка совокупности распределений случайных полей, являющихся предельными для гиббсовских распределений в конечных множествах из T и потенциалом Φ . Элемент множества M_T^{Φ} назовем р. в. гиббсовского случайного поля на T соответствующим потенциалу Φ . При $T = Z^*$ имеем просто гиббсовское случайное поле с потенциалом Φ .

4°. Здесь будут приведены основные результаты, содержащиеся в статье.

Рассмотрим пространство $X_I^* = X_I \setminus \emptyset$, $\mathfrak{A}$ -алгебру $A_I^* = \{A \cap X_I^*: A \in A_I\}$ и меру μ_I^* , являющуюся сужением меры μ на $\mathfrak{A}$ -алгебру A_I^* . Так же как и в разделе 2 настоящей работы введем пространства

$$X_I^* = \times_{I \in I} X_I^*, \quad I \subseteq Z^*, \quad L_{\Lambda}^* = \cup_{J \in \mathbb{N}_{\Lambda}} X_J^*, \quad \Lambda \subseteq Z^*,$$

σ -алгебры A_I^* и меры μ_I^* . Пусть

$$C_{\Phi, \mu}^{(1)} = \frac{e^{i\Phi} \mu^*(X^*)}{1 + e^{i\Phi} \mu^*(X^*)}, \quad C_{\Phi, \mu}^{(2)} = 2(1 + 2e^{i\Phi} \mu^*(X^*))(\exp \{e^{i\Phi} - 1\} - 1).$$

Обозначим

$$N_{\mu}^{\Phi} = |\Phi : C_{\Phi, \mu}^{(1)} (1 + C_{\Phi, \mu}^{(2)}) < 1, \Phi \in B^{\Phi}|.$$

Справедлива

Теорема 1. Для всякого потенциала $\Phi \in N_{\mu}^{\Phi}$ соответствующее ему гиббсовское случайное поле на $T, T \subseteq Z^{\nu}$ существует, единственно и удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания.

Отметим, что в случае гиббсовских случайных полей с непрерывным аргументом и парным вакуумным потенциалом аналогичный результат получен Минлосом (см. [5], [6]). Другим методом подобные результаты получены Добрушиным ([1], [2]), но в применении к гиббсовским случайным полям они требуют более сильного ограничения на потенциал, а именно условия

$$\sum_{J \in W_{Z^{\nu}}^0} |J| \sup_{x \in X_J} |\Phi(x)| < \infty.$$

Метод доказательства теоремы 1, примененный в данной статье, отличен от метода, примененного Минлосом и использует корреляционные уравнения, являющиеся обобщением корреляционных уравнений Галлавати—Миракль-Соля ([7])^{*}.

В статистической механике важную роль играет функция

$$f(\Phi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_{I_m}^{\Phi}(\bar{x}_m)}{|I_m|}, \quad I_1 \subset I_2 \subset \dots, \quad \bigcup_m I_m = Z^{\nu}, \quad (4.1)$$

называемая удельной свободной энергией. Обычным путем (см. [9]) показывается, что при всех $\Phi \in B^{\Phi}$ для каждой последовательности множеств $I_m, m=1, 2, \dots$, стремящейся к бесконечности по Ван-Хову и для любых граничных условий $\bar{x}_m \in X_{Z^{\nu} \setminus I_m}, m=1, 2$, предел (4.1) существует и не зависит от выбора последовательности I_m и граничных условий $\bar{x}_m, m=1, 2, \dots$.

Используя терминологию, введенную в ([8]), сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $S \subset B^{\Phi}$ — некоторое компактное множество и $K \subseteq B^{\Phi}$ — некоторый конус. Пусть множество $K \cap E^{(1)}$, где $E^{(1)}$ — единичная сфера в B^{Φ} — компактно. Тогда функция $f(\Phi)$ сильно выпукла на множестве S по направлениям из конуса K .

^{*} Здесь автор пользуется случаем искренно поблагодарить Р. А. Минлоса, чьи указания способствовали получению окончательного вида корреляционных уравнений, используемых в настоящей статье.

Отметим, что теоремой 2 дан положительный ответ на вопрос, поставленный в работе ([8]) о возможности доказательства сильной выпуклости функции $f(\Phi)$ для потенциалов из B^0 .

В заключение автор выражает глубокую благодарность Р. Л. Добрушину за постановку задачи и внимание к работе.

5°. Для произвольного гиббсовского случайного поля $\Gamma_{\Lambda}^{\bar{x}, \Phi}$ в конечном сосуда $\Lambda \subset T$ введем соответствующую ему корреляционную функцию $\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}$, определенную на элементах L_T^* и равную

$$\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = (\rho_{\Lambda}^{\Phi, \bar{x}})'(x) = \int_{x_{\Lambda} \setminus I} \rho_{\Lambda}^{\Phi, \bar{x}}(x, y) \mu_{\Lambda \setminus I}(dy) \text{ при } x \in X_I^*, I \subseteq \Lambda,$$

$$\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = 0 \quad \text{при } x \in L_T^* \setminus L_{\Lambda}^*.$$

Пусть $I, I' \subset \Lambda$ — конечные множества, $I \cap I' = \emptyset$, $x \in X_I^*$, $y \in X_{I'}^*$, $\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}^*$. Введем обозначения (ср. [7]):

$$A_I^{\bar{x}}(x) = \sum_{J \in W_I^*, J \in W_{T \setminus \Lambda}} \Phi(x_J, \bar{x}_J)^*,$$

$$B_I^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{J \in W_I^*, J \in W_{T \setminus \Lambda}} \Phi(x_J, y, \bar{x}_J),$$

$$\bar{I}_I^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{J \in W_I^*, J \in W_{T \setminus \Lambda}, J' \in W_{V \setminus \Lambda}} \Phi(x_J, y_{J'}, \bar{x}_J),$$

$$K_I^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(S_1, \dots, S_n)} \prod_{j=1}^n (e^{-B_I^{\bar{x}}(x, y_{S_j})} - 1),$$

где $\sum^*$ распространяется на все наборы $(S_1, \dots, S_n)$, $S_i \in W_V$, $i = 1, 2, \dots, n$ такие, что $\bigcup_j S_j = V$. Справедливы соотношения

$$\Phi^{\bar{x}}(x, y) = A_I^{\bar{x}}(x) + \bar{I}_I^{\bar{x}}(x, y) + \Phi^{\bar{x}}(x', y), \quad x' = X_{I \setminus I}, \quad (5.1)$$

$$e^{-\bar{I}_I^{\bar{x}}(x, y)} = \prod_{\emptyset \neq J \in W_V} (1 + (e^{-B_I^{\bar{x}}(x, y_J)} - 1)) = 1 + \sum_{J \in W_V \setminus \emptyset} K_I^{\bar{x}}(x, y_J).$$

Аналогично ([7]), исходя из (5.1) можно показать, что корреляционная функция удовлетворяет следующему соотношению:

$$\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = \psi_{\Lambda}(x) e^{-A_I^{\bar{x}}(x)} [\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x') - \int_{X_I^*} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x', z) \mu_I(dz) +$$

* Точка i берется из I первой в смысле лексикографического порядка.

$$+ (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}})(x)], \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}})(x) = & \sum_{j \in W_{\Lambda} \setminus j} \int_{X_j^*} K_i^{\bar{x}}(x, y) [\bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x', y) - \\ & - \int_{X_i^*} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x', y, z) \mu_i^*(dz)] \mu_j^*(dy), \\ \psi_{\Lambda}(x) = & \begin{cases} 1, & x \in X_I, \quad I \subseteq \Lambda \\ 0, & x \in L_T^* \setminus L_{\Lambda}^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Из (5.2) находим

$$\begin{aligned} & \int_{X_i^*} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x', z) \mu_i^*(dz) = \\ & = \frac{\int_{X_i^*} \psi_{\Lambda}(x', z) e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)} [\bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x') + (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}})(x', z)] \mu_i^*(dz)}{1 + \int_{X_i^*} \psi_{\Lambda}(x', z) e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)} \mu_i^*(dz)}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Подставляя (5.3) в (5.2), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = & \psi_{\Lambda}(x) \frac{e^{-A_i^{\bar{x}}(x)}}{1 + \int_{X_i^*} e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)} \mu_i^*(dz)} - [\bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x') - \\ & - \int_{X_i^*} e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)} (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}})(x', z) \mu_i^*(dz) + \\ & + (1 + \int_{X_i^*} e^{-A_i^{\bar{x}}(x', z)} \mu_i^*(dz)) (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}})(x)], \quad x \in X_I. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Рассмотрим банахово пространство B_T^* ограниченных функций φ , заданных на L_T^* с нормой $\|\varphi\| = \sup_{j \in W_T} \{\|\varphi\|_j\}$, где

$$\|\varphi\|_j = \int_{X_j^*} |\varphi(x)| \mu_j^*(dx)$$

и введем здесь при всех $\Lambda \subseteq T$ и всех $\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}$ операторы $K_{\Lambda}^{\bar{x}}$, действующие по формуле

$$(K_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(x) = \gamma^{\bar{x}}(x) [(S\varphi)(x) + (T_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(x)],$$

где

$$\gamma^{\bar{x}}(x) = \frac{e^{-A_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x)}}{1 + \int_{X_I^*} e^{-A_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x', z)} \mu_I^*(dz)},$$

$$(S\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x') & \text{при } |I| > 1, x \in X_I \\ 0 & \text{при } |I| = 1, x \in X_I, \end{cases}$$

$$(T_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(x) = (1 + \int_{X_I^*} e^{-A_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x', z)} \mu_I^*(dz)) (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(x) -$$

$$- \int_{X_I^*} e^{-A_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x', z)} \cdot (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(x', z) \mu_I^*(dz),$$

$$(G_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(x) = \sum_{J \in W_{\Lambda} \setminus I} \int_{X_J^*} K_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x, y) [\varphi(x', y) - \int_{X_I^*} \varphi(x', y, z) \mu_I^*(dz)] \mu_J^*(dy).$$

Очевидны следующие неравенства:

$$\| \gamma^{\bar{x}}(S\varphi) \|_I \leq C_{\Phi, \mu}^{(1)} \|\varphi\|_{I'}, \quad I' = I/t, \quad (5.5)$$

$$\| \gamma^{\bar{x}}(T_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi) \|_I \leq C_{\Phi, \mu}^{(1)} (1 + 2e^{k_{\mu}} \mu^*(X^*)) \sup_{\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}, x \in X_I^*} \| (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(\cdot, z) \|_{I'}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}, x \in X_I^*} \| (G_{\Lambda}^{\bar{x}} \varphi)(\cdot, z) \|_{I'} &\leq \sum_{J \in W_{\Lambda} \setminus I} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*, \bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}} |K_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x, y)| \times \\ &\times (\|\varphi\|_{I' \cup J} + \|\varphi\|_{I \cup J}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Аналогично ([7]) можно показать, что

$$\sum_{J \in W_{\Lambda} \setminus I} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*, \bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}} |K_{\bar{x}}^{\bar{x}}(x, y)| \leq \exp \{e^{k_{\mu}} - 1\} - 1.$$

Из этого соотношения, а также из (5.5), (5.6), (5.7) следует, что

$$\|K_{\Lambda}^{\bar{x}}\| \leq C_{\Phi, \mu}^{(1)} (1 + C_{\Phi, \mu}^{(2)}). \quad (5.8)$$

Рассмотрим в пространстве B_T^* уравнение

$$\varphi = \psi_{\Lambda} \bar{\varphi}^x + \psi_{\Lambda} K_{\Lambda}^x \bar{\varphi}, \quad (5.9)$$

где

$$x(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_I, |I| = 1, I \subset T \\ 0, & x \in X_I, |I| > 1, I \subset T. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\Phi \in N_{\mu}^0$ единственным решением данного уравнения является корреляционная функция ρ_{Λ}^x . Отметим, что хотя корреляционные функции были введены нами лишь при конечных Λ уравнение (5.9) имеет смысл при любом $\Lambda \subset T$. Далее под корреляционной функцией $\rho_{\Lambda}^x, x \in X_{T \setminus \Lambda}$, где Λ уже не обязательно конечно, будет пониматься решение уравнения (5.9).

Далее, для любых конечных непересекающихся множеств $I, J \subset T$ обозначим

$$\begin{aligned} r'(I, J) &= \sum_{J' \in \mathcal{W}_J'} \sup_{x \in X_{T \setminus (J \cup J')}} |\Phi(x)|, \quad r(I, J) = \max_{I' \in I} \{r'(I, J)\}, \quad r^{\Phi, \mu}(I, J) = \\ &= \frac{C_{\Phi, \mu}^{(2)}}{\|\Phi\|} r(I, J). \end{aligned}$$

Для любого конечного I и произвольного $V \subset T, I \cap V = \emptyset$ положим

$$\begin{aligned} z_T(I, V) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{J_1 \in \mathcal{W}_{T \setminus I}} \sum_{J_2 \in \mathcal{W}_{T \setminus (I \cup J_1)}} \dots \sum_{\substack{J_k \in \mathcal{W}_{T \setminus (I \cup J_1 \cup \dots \cup J_{k-1})} \\ J_k \cap V \neq \emptyset}} \delta_{\Phi, k} \times \right. \\ &\times r^{\Phi, \mu}(I, J_1) r^{\Phi, \mu}(I \cup J_1, J_2) \dots r^{\Phi, \mu}(I \cup J_1 \cup \dots \cup J_{k-1}, J_k), \\ &\left. \delta_{\Phi, k} = \sum_{n \geq k} C_n^k (C_{\Phi, \mu}^{(1)})^n. \right) \end{aligned}$$

Справедлива следующая основная

Лемма. Пусть $I \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset T, I$ — конечно, $x_1 \in X_{T \setminus \Lambda_1}, x_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}$ и u — наибольшее из множеств $S \subset T \setminus \Lambda_2$ таких, что $(x_1)_S = (x_2)_S$. Тогда существует константа $D_{\Phi, \mu}, 0 < D_{\Phi, \mu} < \infty$, зависящая только от Φ и меры μ такая, что

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\| \leq D_{\Phi, \mu} (z_T(I, T \setminus \Lambda_1) + z_T(I, T \setminus (\Lambda_1 \cup U))).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda_1}, \bar{x}_2 \in X_{T \setminus \Lambda_2}$ таковы, что $(\bar{x})_u = (x_1)_u = (x_2)_u$ и $\bar{x}_t = \theta$ при $t \in T \setminus (\Lambda_1 \cup U)$,

$$(\bar{x}_2)_{T \setminus \Lambda_2} = \bar{x}_2, (\bar{x}_2)_t = \theta, t \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$$

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\| \leq \|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \bar{\rho}_{\Lambda_1}^{x_1}\| + \|\bar{\rho}_{\Lambda_1}^{x_1} - \bar{\rho}_{\Lambda_1}^{x_2}\| + \|\bar{\rho}_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \rho_{\Lambda_2}^{x_2}\|. \quad (5.10)$$

Далее, используя уравнение (5.9), легко получить следующие равенства:

$$\hat{p}_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} p_{\Lambda_2}^{x_2} = \psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2} (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1}) \hat{p}_{\Lambda_2}^{x_2} + \psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2} (p_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \hat{p}_{\Lambda_2}^{x_2})^*,$$

$$p_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \hat{p}_{\Lambda_2}^{x_2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2})^n (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1}) \hat{p}_{\Lambda_2}^{x_2},$$

и следовательно

$$\|\hat{p}_{\Lambda_1}^{x_2} - \psi_{\Lambda_1} \hat{p}_{\Lambda_2}^{x_2}\|_J \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2}\|^n (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1}) \hat{p}_{\Lambda_2}^{x_2}\|_J. \quad (5.11)$$

Оценим сумму данного ряда. Воспользовавшись неравенством $|e^{-a}-1| \leq \frac{|a|}{b} |e^b-1|$ при $b > |a|$ (b, a — действительные числа), можем написать

$$\sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*, x \in X \setminus \Lambda_2} |K_I^{x_2}(x, y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(S_1, \dots, S_n)} \left(\frac{e^{\|\Phi\|} - 1}{\|\Phi\|} \right)^n \prod_{j=1}^n \sup_{x \in X_J^*, y \in X_{S_j}^*, x \in X \setminus \Lambda_2} |B_I^{x_2}(x, y)|.$$

Учитывая, что

$$\sum_{J \in W_2 \setminus I} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*, x \in X \setminus \Lambda_2} |B_I^{x_2}(x, y)| \leq \|\Phi\|,$$

имеем

$$\sum_{J \in W_{\Lambda_2} \setminus I} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*, x \in X \setminus \Lambda_2} |K_I^{x_2}(x, y)| \leq \frac{\exp \{e^{\|\Phi\|} - 1\} - 1}{\|\Phi\|} \sum_{J \in W_{T \setminus I}} r(I, J). \quad (5.12)$$

Воспользовавшись соотношениями (5,6), (5.7) и (5.12), получаем оценку

$$\|T^{x_2}(T_{\Lambda_2}^{x_2} \varphi)\|_J \leq C_{\Phi, \mu}^{(1)} \sum_{J \in W_{T \setminus I}} \frac{r^{\Phi, \mu}(I, J)}{2} (\|\varphi\|_{J \cup I} + \|\varphi\|_{U \setminus J}), \quad (5.13)$$

которую в дальнейшем будем использовать наряду с оценкой

$$\|T^{x_2}(S\varphi)\|_J \leq C_{\Phi, \mu}^{(1)} \|\varphi\|_J. \quad (5.14)$$

Далее отметим, что при всех $I, \tilde{I} \subset T$ имеет место равенство

$$\sum_{J \in W_{T \setminus I}} r^I(I, J) = \sum_{J \in W_{T \setminus \tilde{I}}} r^I(\tilde{I}, J),$$

и следовательно

* Здесь было использовано равенство $\hat{K}_{\Lambda_1}^{x_2} \hat{p}_{\Lambda_1}^{x_2} = K_{\Lambda_1}^{x_2} \hat{p}_{\Lambda_1}^{x_2}$.

$$\sum_{J \in W_{T \setminus I}} r^{\Phi, \mu}(I, J) \geq \sum_{J \in W_{\tilde{T} \setminus \tilde{I}}} r^I(\tilde{I}, J). \quad (5.15)$$

Учитывая (5.15), (5.13), (5.14), а также неравенство

$$\|(\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1})\|_{\rho_{\Lambda_2}^{x_1}} \leq \chi_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}(I),$$

$$\chi_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1}(I) = \begin{cases} 1, & I \subset \Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \\ 0, & I \not\subset \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \end{cases}$$

можем написать

$$\begin{aligned} & \|(\psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_2}^{x_2})^n (\psi_{\Lambda_2} - \psi_{\Lambda_1})\|_{\rho_{\Lambda_2}^{x_1}} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n C_n^k (C_{\Phi, \mu}^{(1)})^n \sum_{J_1 \in W_{T \setminus I}} \sum_{J_2 \in W_{T \setminus (I \cup J_1)}} \dots \\ & \dots \sum_{\substack{J_k \in W_{T \setminus (I \cup J_1 \cup \dots \cup J_{k-1})} \\ J_k \cap \Lambda_1 = \emptyset}} r^{\Phi, \mu}(I, J_1) \dots e^{\Phi, \mu}(I \cup J_1 \cup \dots \cup J_k, J_k), \end{aligned}$$

после чего очевидно, что

$$\|\psi_{\Lambda_1}^{x_1} - \psi_{\Lambda_1}\|_{\rho_{\Lambda_1}^{x_1}} \leq z_T(I, T \setminus \Lambda_1). \quad (5.16)$$

Следуя тем же путем, что и при получении (5.11), имеем

$$\|\psi_{\Lambda_1}^{x_1} - \bar{\psi}_{\Lambda_1}^{x_1}\|_{\rho_{\Lambda_1}^{x_1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(\psi_{\Lambda_1} K_{\Lambda_1}^{x_1})^n [\psi_{\Lambda_1}(\gamma_1^{x_1} - \gamma_1^x) + \psi_{\Lambda_1}(K_{\Lambda_1}^{x_1} - K_{\Lambda_1}^x)\|_{\rho_{\Lambda_1}^{x_1}}.$$

Воспользовавшись известным неравенством

$$\left| \prod_{l=1}^n a_l - \prod_{l=1}^n b_l \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| \prod_{j \neq k} \max\{|a_j|, |b_j|\}, \quad a_j, b_j$$

— действительные числа, можем написать

$$\begin{aligned} & \|\sup_{x \in X_I} \|(G_{\Lambda_1}^{x_1} - \bar{G}_{\Lambda_1}^{x_1})\|_{\rho_{\Lambda_1}^{x_1}} \leq 2 \sum_{J \in W_{\Lambda_1 \setminus I}} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*} |K_I^{x_1}(x, y) - \\ & - \bar{K}_I^{x_1}(x, y)| \leq 2 e^{\sum_{J \in W_{\Lambda_1 \setminus I}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(S_1, \dots, S_n)}^* n \max_{\langle k \rangle} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_{S_k}^*} | \\ & |e^{-B_I^{x_1}(x, y) + \bar{B}_I^{x_1}(x, y)} - 1| \prod_{j \neq k} \max_{\langle k \rangle} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_{S_j}^*} |e^{-B_I^{x_1}(x, y)} - 1|, \\ & \sup_{x \in X_J^*, y \in X_{S_j}^*} |e^{-\bar{B}_I^{x_1}(x, y)} - 1| \leq D_{\Phi, \mu}^{(1)} \sum_{J \in W_{\Lambda_1 \setminus I}} \sup_{x \in X_J^*, y \in X_J^*} |B_I^{x_1}(x, y) - \\ & - \bar{B}_I^{x_1}(x, y)| \leq D_{\Phi, \mu}^{(1)} \sum_{J \in W_{T \setminus I}, J \cap U \cup \Lambda_1} r^{\Phi, \mu}(I, J^*). \end{aligned}$$

* Всюду в дальнейшем $D_{\Phi, \mu}^{(l)}$, $D_{\Phi, \mu}^{(l)}, l=1, 2, \dots$ означают константы, зависящие только от Φ и от Φ, μ такие, что $0 < D_{\Phi, \mu}^{(l)}, D_{\Phi, \mu}^{(l)} < \infty$.

Окончательно

$$\|\sup_{x \in \Lambda_I^*} (G_{\Lambda_1}^{x_1} - G_{\Lambda_1}^x)\rho_{\Lambda_1}^{x_1}\|_r \leq D_{\Phi, \mu}^{(1)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{W}_{T \setminus I} \\ J \in U \cup \Lambda_1}} r^{\Phi, \mu}(I, J). \quad (5.17)$$

Воспользовавшись неравенством (5.17) наряду с легко выводимыми неравенствами

$$\|e^{-A_I^{x_1}} - e^{-\tilde{A}_I^{x_1}}\|_r \leq D_{\Phi}^{(2)} \sup_{x \in X_I^*} |A_I^{x_1}(x) - \tilde{A}_I^x(x)| \leq D_{\Phi, \mu}^{(2)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{W}_{T \setminus I} \\ J \in U \cup \Lambda_1}} r^{\Phi, \mu}(I, J),$$

$$\left\| \int_{X_I^*} (e^{-A_I^{x_1}(\cdot, z)} - e^{-\tilde{A}_I^x(\cdot, z)}) \mu_I^*(dz) \right\|_r \leq \tilde{D}_{\Phi, \mu}^{(2)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{W}_{T \setminus I} \\ J \in U \cup \Lambda_1}} r^{\Phi, \mu}(I, J)$$

довольно просто показать, что

$$\|\psi_{\Lambda_1, \alpha}(\gamma^{x_1} - \gamma^x) + \psi_{\Lambda_1}(K_{\Lambda_1}^{x_1} - K_{\Lambda_1}^x)\rho_{\Lambda_1}^{x_1}\|_r \leq D_{\Phi, \mu}^{(3)} \sum_{\substack{J \in \mathcal{W}_{T \setminus I} \\ J \in U \cup \Lambda_1}} r^{\Phi, \mu}(I, J),$$

после чего очевидно существование константы $D_{\Phi, \mu}^{(4)}$ такой, что

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \tilde{\rho}_{\Lambda_1}^x\|_r \leq D_{\Phi, \mu}^{(4)} \alpha_T(I, T \setminus (\Lambda_1 \cup U)). \quad (5.18)$$

Совершенно аналогично

$$\|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \tilde{\rho}_{\Lambda_1}^x\|_r \leq D_{\Phi, \mu}^{(5)} \alpha_T(I, T \setminus (\Lambda_1 \cup U)). \quad (5.19)$$

Из соотношений (5.16), (5.18), (5.19) и следует лемма.

Отметим, что для произвольного гиббсовского случайного поля в конечном сосуда $\Lambda \subset T$ и граничными условиями $\bar{x} \in X_{T \setminus \Lambda}$ плотность $\bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}, \Phi}$ связана с его корреляционной функцией следующим образом:

$$(\bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}})_I(x) = \sum_{J \in \tilde{I}} (-1)^{|J|} \|\bar{\rho}_{\Lambda}^{\bar{x}}(x_{\Lambda \setminus \tilde{I}})\|_r, \quad \tilde{I} = \{t: x_t = \bar{x}_t, t \in I\}. \quad (5.20)$$

Формулой (5.20) определение плотности можно распространить и на произвольные Λ . Далее легко видеть, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} |(\Gamma_{\Lambda_1}^{x_1})_I(A) - (\Gamma_{\Lambda_1}^x)_I(A)| &\leq 2^{|I|} \|\rho_{\Lambda_1}^{x_1} - \rho_{\Lambda_1}^x\|_r \leq \\ &\leq 2^{|I|} D_{\mu, \Phi}^{(5)} [\alpha(I, T \setminus \Lambda_1) + \alpha(I, T \setminus (\Lambda_1 \cup U))], \quad A \in \mathcal{A}_I. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Заметим теперь, что из соотношений (5.21) вытекают все утверждения теоремы 1. Действительно, покажем, что распределение $(\Gamma_T^{\Phi, \mu})_I, I \in \mathcal{W}_T$ является предельным для гиббсовских распределений в конечных сосудах независимо от выбора последовательности расширяющихся мно-

жеств и граничных условий (т. е. является единственным гиббсовским распределением, соответствующим данному потенциалу). Действительно из (5.21) имеем

$$|(\Gamma_{\Lambda_m}^{\varphi, \Phi})_I(A) - (\Gamma_T^{\varphi, \Phi})_I(A)| \leq 2^{1/|I|+1} D_{\mu, \Phi}^{(5)}(I, T \setminus \Lambda_m). \quad (5.22)$$

Очевидно, что правая часть (5.22) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Для доказательства равномерного сильного перемешивания данного гиббсовского случайного поля, исходя из (5.21), полагая $\Lambda_1 = T \setminus V$, $\Lambda_2 = T$, имеем

$$\frac{1}{\int_B (p_T^{\Phi, \varphi})_V(y) \mu_V(dy)} \left| \int_B (\Gamma_{\Lambda_1}^{\Phi, \varphi})_V(A) (p_T^{\Phi, \varphi})_V(y) \mu_V(dy) - \int_B (\Gamma_T^{\Phi, \varphi})_I(A) \times \right. \\ \left. \times (p_T^{\Phi, \varphi})_V(y) \mu_V(dy) \right| \leq D_{\mu, \Phi}^{(6)} \alpha(I, V), \quad B \in A_V.$$

Полагая $\varphi_I(d(I, V)) = D_{\mu, \Phi}^{(6)} \alpha_I(I, V)$, завершаем доказательство теоремы 1.

В заключение отметим, что теорема 2 доказывается совершенно аналогично основной теореме статьи [8].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.XI.1974

Ռ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ. Դիսկրետ ազդումներով պատահական դիրքյան դաշտի ուժեղ խառնումը և նրա մի Գանի կիրառությունները (ամփոփում)

Կլասիկ ստատիստիկական ֆիզիկայի բազմամասնիկ վիճակումային պոտենցիալ ունեցող ցանցային սխեմաների լայն դասի համար ապացուցվում է համապատասխան դիրքյան պատահական դաշտերի զոյությունը, միակությունը և հավասարաչափ ուժեղ խառնումը: Արդյունքները կիրառվում են այդ դաշտերի տեսակարար ազատ էներգիայի ուժեղ ուղղորդվածության ապացուցելու:

B. S. NAHAPETIAN. *Strong mixing property of the Gibbs random field and its applications (summary)*

The strong mixing property of the Gibbs random field is proved for a large class of lattice systems. This result is applied to show the strong convexity of specific free energy.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Добрушин. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности, Теор. вер. и ее прим. 2, 1968, 201—229.
2. Р. А. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ и его прил., 4, 1968, 31—43.
3. Р. А. Добрушин. Гиббсовские поля. Общий случай, Функц. анализ и его прил., 1, 1969, 27—35.
4. Р. А. Добрушин. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений, Теор. вер. и ее прим., 3, 1970, 469—497.

5. Р. А. Минлос. Предельное распределение Гиббса, Функ. анализ и его прил., 2, 1967, 60—73.
6. Р. А. Минлос. Регулярность предельного распределения Гиббса, Функц. анализ и его прил., 3, 1967, 40—54.
7. G. Gallavotti and S. Miracle-Sole. Correlation Functions of a Lattice System, Commun. Math. Phys., 7, 1968, 274—288.
8. Р. А. Добрушин, Б. С. Нахапетян. Сильная выпуклость давления для решетчатых систем классической статистической физики, Теор. и мат. физика, 20, вып. 2, 1974.
9. D. Ruelle. Statistical Mechanics. Rigorous Results, New York, Amsterdam, 1969.

В. А. АРЗУМАНЯН

ФАКТОР-СОСТОЯНИЯ НА СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

0°. Пусть X — метризуемый компакт, S — счетная группа, действующая на X гомеоморфизмами. Группа S действует автоморфизмами на алгебре $C(X)$ непрерывных комплексных функций на X по формуле

$$(s \cdot \varphi)(x) = \varphi(s^{-1} \cdot x),$$

где $s \cdot$ обозначает действие, $s \in S$. Пусть $A = C^*(X, S)$ — соответствующее скрещенное произведение (см. [1]).

Из доказательства известной теоремы Глимма, характеризующей C^* -алгебры типа I (см., напр., [2], § 9), следует, что каждая $NGCR$ -алгебра* с единицей содержит подалгебру, некоторая фактор-алгебра которой изоморфна C^* -индуктивному пределу B последовательности алгебр матриц порядка 2^n с естественным вложением, т. е. фактор-алгебра является РГФ-алгеброй класса $\{2, 2^2, \dots\}$, подробно изученной Пауэрсом в работе [3]. Этот важный факт сформулирован Сакаи отдельным предложением в [4], п. 4.6.8. Там же, пользуясь тем, что РГФ-алгебра заведомо обладает фактор-состоянием типа III, доказано, что и сама исходная алгебра имеет таковые (п. 4.6.13). Алгебры, обладающие РГФ-фактор-алгеброй класса $\{2, 2^2, \dots\}$ мы будем в дальнейшем называть *алгебрами Сакаи*.

В настоящей заметке описан конкретный способ построения под-алгебр Сакаи алгебры A по т. н. допустимым системам компактов (п. 1). В п. 2 показано, как фактор-состояния типа меры, обладающие определенным свойством по отношению к данной допустимой системе, можно получить, исходя из некоторого диагонализуемого состояния соответствующего индуктивного предела. П. 3 посвящен доказательству необходимого для дальнейшего изложения обобщения известной леммы Халмоша-Рохлина ([6], стр. 99) на преобразования, не сохраняющие меру.

Основной результат состоит в том, что при некотором дополнительном ограничении (условие B) на динамическую систему (X, S) , где X не имеет изолированных точек, а S действует свободно, любое фактор-состояние можно получить таким способом при подходящем выборе подалгебры Сакаи и диагонализуемого состояния (п. 4).

* Все не определяемые в тексте понятия, которые употребляются без указания на источник, можно найти в монографиях [2] или [4].

Условие B^* состоит в следующем: для всякого открытого $G \subset X$ и для всякого непустого замкнутого $F \subset G$, $F \neq G$, существует $s \in S$, $s \neq e$ такое, что $s \cdot F \subset G$.

Известны ограничения на динамическую систему, при которых соответствующее скрещенное произведение является $NGC R$ -алгеброй (см., напр., [1], п. 7.11). С другой стороны, допустимые системы (а, следовательно, и подалгебры Сакаи) существуют у динамических систем, не удовлетворяющих ни условию B , ни упомянутому выше условию Зеллер-Мейера (например, у сдвига Бернулли на бесконечном в обе стороны произведении двоеточий). Роль условия B заключается в том, что оно позволяет дать единообразную конструкцию подалгебр Сакаи сразу для всех фактор-состояний типа меры. Примером динамической системы, удовлетворяющей этому условию, служит эргодический сдвиг на торе.

Автор горячо благодарит А. М. Вершика за постановку задачи и ценные указания.

1°. Непосредственно из определения скрещенного произведения следует, что в алгебре A можно выделить коммутативную подалгебру $\mathfrak{M}$, изоморфную $C(X)$, с элементами $M(\varphi)$, $\varphi \in C(X)$ и группу N , изоморфную S , состоящую из унитарных элементов $U(s)$, $s \in S$, связанных соотношением

$$M(\varphi) U(s) = U(s) M(s \cdot \varphi). \quad (1)$$

При этом алгебра A получается замыканием $*$ -алгебры конечных сумм вида $\sum_s M(\varphi_s) U(s)$.

Определение. Систему компактов $\{p_i\}_{i=0}^\infty$, $p_i \subset X$ назовем *допустимой*, если существует последовательность $\{s_i\}_{i=0}^\infty$, $s_i \in S$ такая, что выполнены условия

$$\begin{aligned} p_i &\subset \text{Int } p_{i-1}, \quad s_i \cdot p_i \subset \text{Int } p_{i-1}, \\ s_i \cdot p_i \cap p_i &= \emptyset, \quad p_0 = X, \quad s_0 = e \end{aligned} \quad (2)$$

(e — нейтральный элемент S).

Л е м м а 1. Пусть $A = C^*(X, S)$. Каждая допустимая система в X определяет единственную (с точностью до изоморфизма) подалгебру Сакаи алгебры A .

Если $\{p_i\}_{i=0}^\infty$ — допустимая система, $\{s_i\}_{i=0}^\infty$ — соответствующая последовательность из S , то, очевидно, существует система открытых множеств $\{q_i\}_{i=0}^\infty$, $q_i \subset X$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} p_i &\subset q_i \subset \text{Int } p_{i-1}, \quad s_i \cdot q_i \subset \text{Int } p_{i-1}, \\ s_i \cdot q_i \cap q_i &= \emptyset, \quad q_0 = X. \end{aligned}$$

* Возвращаемость в пространстве всех подкомпактов X с индуцированной топологией и действием S .

Пусть $S_n = \{s_i\}_{i=0}^n$, $d \in S_n$, $d = \{s_{i_k}\}_{k=1}^m$, где $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Положим $\bar{d} = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}$. Будем обозначать через $[A]$, где $A \subset A$, под — C^* -алгебру, натянутую на A .

Подалгебра Сакаи A_0 строится следующим образом.

Пусть $A'(n) = [U(\bar{d}_1) M(\varphi) U(\bar{d}_2^{-1})]$, $n = 0, 1, \dots$, где $\varphi \in C(X)$, постоянна на p_n и равна нулю вне q_n , $d_1, d_2 \in S_n$ и пусть $A(n) = \left[\bigcup_{k=0}^n A'(k) \right]$.

Обозначим, далее, $\mathfrak{M}'(n) = [I - \sum_{d \in S_n} M(\bar{d}^{-1} \cdot \varphi)]$, $n = 0, 1, \dots$

где $I = M(1) = U(e)$ — единичный элемент A , φ равно 1 на p_n и равно 0 вне q_n . Тогда $\mathfrak{M}'(n) \subset A(n)$. Пользуясь формулой (1) и условиями (2) легко проверить, что элементы $\mathfrak{M}'(n_1)$ коммутируют с любым элементом из $A'(n_2)$ при всех n_1 и n_2 , откуда следует, что

$$\mathfrak{M}(n_1) A(n_2) = A(n_2) \mathfrak{M}(n_1) \quad (3)$$

при всех n_1, n_2 . Здесь $\mathfrak{M}(n) = \left[\bigcup_{k=0}^n \mathfrak{M}'(k) \right]$, а произведение понимается в обычном алгебраическом смысле.

Если теперь $I(n) = [\mathfrak{M}(n) A(n)]$, то равенство (3) позволяет заключить, что $I(n)$ — замкнутый двусторонний идеал в $A(n)$. Кроме того,

$$A(n) / I(n) \simeq M_n C$$

(* — изоморфизм, $M_k C$ — алгебра матриц порядка k).

В самом деле, если $\tau_n: A(n) \rightarrow A(n)/I(n)$, то зафиксировав произвольную функцию φ_n , равную 1 на p_n , 0 вне q_n , легко показать, что элементы $\tau_n(U(\bar{d}_1) M(\varphi_n) U(\bar{d}_2^{-1}))$ образуют систему 2^n матричных единиц в $A(n)/I(n)$ и порождают эту алгебру. Например, если

$d_1, d_2, c_1, c_2 \in S_n$, то

$$\begin{aligned} & \tau_n(U(\bar{d}_1) M(\varphi_n) U(\bar{d}_2^{-1})) \tau_n(U(\bar{c}_1) M(\varphi_n) U(\bar{c}_2^{-1})) = \\ & = \tau_n(U(\bar{d}_1 \bar{d}_2^{-1}) M(\bar{d}_2^{-1} \cdot \varphi_n) M(\bar{c}_1^{-1} \cdot \varphi_n) U(\bar{c}_1 \bar{c}_2^{-1})) = \\ & = \delta_{d_2 c_2}^{\tau_n} \tau_n(U(\bar{d}_1 \bar{d}_2^{-1}) M(\bar{d}_2^{-1} \cdot \varphi_n^2) U(\bar{d}_2 \bar{c}_2^{-1})) = \\ & = \delta_{d_2 c_2}^{\tau_n} \tau_n(U(\bar{d}_1) M(\varphi_n^2) U(\bar{c}_2^{-1})) = \\ & = \delta_{d_2 c_2}^{\tau_n} \tau_n(U(\bar{d}_1) M(\varphi_n) U(\bar{c}_2^{-1})), \end{aligned}$$

где δ — символ Кронекера.

Положим теперь $A_0 = [\bigcup_{n \geq 1} A(n)]$, $I_0 = [\bigcup_{n \geq 1} I(n)]$. Ясно, что I_0 — замкнутый двусторонний идеал A_0 .

В силу того, что алгебры $A(n)$ образуют возрастающую последовательность, $A(n) + I(n+1)$ является под — C^* -алгеброй $A(n+1)$, причем, по [I], I.8.4

$$A(n) \dot{+} I(n+1)/I(n+1) \simeq A(n)/I(n+1) \cap A(n) = A(n)/I(n)$$

Таким образом $A(n)/I(n)$ можно отождествить с некоторой подалгеброй $A(n+1)/I(n+1)$ и, как нетрудно видеть, вложение это согласовано с вложением соответствующих матричных алгебр в определении

$$B = \bigtimes_1 M_n C \text{ (т. е. } M_{2n} C \times 1 \subset M_{2n+1} C \text{)}.$$

Следовательно A_0/I_0 — РГФ-алгебра класса $[2, 2^2, \dots]$, а A_0 — подалгебра Сакаи.

З а м е ч а н и е. Существование подалгебры Сакаи характеризует C^* -алгебры, не являющиеся GCR -алгебрами. В классе простых алгебр понятия не GCR -алгебры и $NGCR$ -алгебры совпадают.

Пусть S — аменабельная группа, свободно действующая на X . Тогда по теореме Зеллер-Мейера ([1], 4.20) алгебра $C^*(X, S)$ проста тогда и только тогда, когда динамическая система минимальна (т. е. орбита любой точки плотна в X). Следовательно, если такая система (X, S) обладает допустимой системой компактов, то алгебра $C^*(X, S)$ является $NGCR$ -алгеброй. Например, такова упомянутая выше динамическая система на торе.

2. Напомним (см. [5]), что состояние типа меры, определяемое формулой

$$\Omega(M(\varphi)U(s)) = \varphi^0 \int \varphi(x) d\mu(x)$$

для некоторой квазиинвариантной меры μ на X , при свободном действии группы является фактор-состоянием тогда и только тогда, когда соответствующая мера Δ — эргодична. При этом тип Ω целиком определяется структурой меры: дискретная мера дает тип I, мера, эквивалентная непрерывной инвариантной, дает тип II, остальные меры порождают состояния типа III (см., напр., [4]).

О п р е д е л е н и е. Пусть ω — состояние на алгебре $B = \bigtimes_1 M_n C$, A_0 — подалгебра Сакаи алгебры $A = C^*(X, S)$, $\tau: A_0 \rightarrow B$. Если Ω_0 — состояние на A_0 , определяемое формулой

$$\Omega_0(L) = \omega(\tau(L)), \quad L \in A_0,$$

Ω — некоторое продолжение состояния Ω_0 на всю алгебру A , то состоянием *ассоциированным* с ω назовем любое состояние, унитарно эквивалентное (см. [3]) состоянию

$$\Omega'(L) = \sum_{s \in S} \varepsilon_s \Omega(U(s) L U(s^{-1})),$$

где $L \in A$, $\sum_{s \in S} \varepsilon_s = 1$, $\varepsilon_s > 0$.

Если Ω — ассоциированное с ω состояние типа меры, то соответствующую ему меру мы будем также называть ассоциированной с ω .

Состояние ω на алгебре B называется диагонализуемым ([5]), если оно представляется в виде индуктивного предела (см. [4]) диагональных состояний.

Лемма 2. Пусть μ — S -эргодическая квазиинвариантная вероятностная мера на X , $\{p_i\}_{i=0}^\infty$ — некоторая допустимая система, $\mu(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{d \in S_n} \bar{d} \cdot p_n) > 0$ (в обозначениях п. 1). Тогда μ ассоциировано с некоторым диагонализуемым состоянием на алгебре B .

Заметим вначале, что если μ — квазиинвариантная эргодическая мера, p — множество положительной меры, μ_0 — мера, определенная формулой $\mu_0(F) = \mu(p)^{-1} \mu(F \cap p)$, для любого измеримого $F \subset X$, то мера μ эквивалентна любой мере $\mu' = \sum_{s \in S} \varepsilon_s \mu_s$, где $\varepsilon_s > 0$, $\sum_{s \in S} \varepsilon_s' = 1$, μ_s — „сдвиг“ меры μ_0 , т. е. $\mu_s(F) = \mu_0(s \cdot F)$.

В самом деле, пусть $F \subset X$, $\mu'(F) = 0$. Ясно, что тогда $\mu_s(F) = 0$ при всех $s \in S$. Положим $F' = \bigcup_{s \in S} sF$. Так как множество F S -инвариантно, то $\mu(F') = 0$ и, тем более, $\mu(F) = 0$. Обратно, если $\mu(F) = 0$, то очевидно, $\mu'(F) = 0$.

Пусть теперь $p = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{d \in S_n} \bar{d} \cdot p_n$. Обозначим через ω состояние на B — индуктивный предел диагональных состояний ω_n с элементами на диагонали $\mu(p)^{-1} \mu(p \cap \bar{d} \cdot p_n)$, где $d \in S_n$. Состояние ω диагонализуемо по определению. Легко проверить, что μ ассоциировано с состоянием ω по подалгебре Сакаи, построенной по допустимой системе компактов $\{p_i\}_{i=0}^\infty$.

3°. Нам понадобится вскоре следующее обобщение известной леммы Халмоща-Рохлина ([6], стр. 99).

Лемма 3 Пусть T — аperiodическое преобразование пространства X с квазиинвариантной нормированной мерой μ , n — натуральное число. Тогда для каждого положительного ε существует измеримое множество F такое, что множества $F, TF, \dots, T^{n-1}F$ попарно не пересекаются и

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k F\right) > 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, предположение о том, что T является автоморфизмом, излишне. Показать это можно способом, аналогичным доказательству леммы Халмоща-Рохлина, приведенному в [6], но проще несколько видоизменить ее доказательство в [7], не использующее трансфинитной индукции. Заметим, что эффективное доказательство (в гораздо более общей ситуации) было опубликовано А. М. Вершиком в [8], стр. 126.

Достаточно предположить T эргодическим и для простоты рассмотреть необходимый нам случай $n = 2$.

Если существует множество $B \subset X$ такое, что все $T^k B$ попарно не пересекаются, а $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} T^k B = X$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть, напротив, преобразование T является несжимающим ([6], стр. 23) и пусть $B_0 \subset X$, $0 < \mu(B_0) < \varepsilon$. Положим $B_k = TB_{k-1} \setminus B_0$, $k = 1, 2, \dots$. Множества эти попарно не пересекаются. Если $x \in B_k$, то, очевидно, либо $Tx \in B_{k+1}$, либо $Tx \in B_0$. В силу эргодичности $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) = 1$. Тогда множество $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}$ — искомое. В самом деле, $F \cap TF = \emptyset$, причем

$$\mu(F \cup TF) \geq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 1 - \mu(B_0) > 1 - \varepsilon.$$

4°. Лемма 4. Предположим, что μ — квазиинвариантная непрерывная вероятностная мера на X , а динамическая система (X, S) такова, что S действует свободно, причем для каждого открытого множества G положительной меры для любого $\varepsilon > 0$ существует $s \in S$,

$$s \neq e, \mu(G \cap s \cdot G) > \mu(G) - \varepsilon.$$

Тогда существует допустимая система компактов $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которой $\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{d \in S_n} \bar{d} \cdot p_n) > 0$ (в обозначениях п. 1).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что построены компакты $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}$ и, соответственно выбраны элементы $\{s_i\}_{i=0}^{n-1}$, удовлетворяющие условиям (2) п. 1 при $i = 0, 1, \dots, n-1$ и

$$\mu\left(\bigcup_{d \in S_{n-1}} \bar{d} \cdot \text{Int } p_{n-1}\right) > 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Если $G = \text{Int } p_{n-1}$, то по условию, существует $s_n \in S$ такое, что соответствующее s_n преобразование T пространства X удовлетворяет неравенству

$$\mu\left(\bigcup_{d \in S_{n-1}} \bar{d} \cdot (G \cap TG)\right) > 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \frac{1}{2} a_n.$$

Пусть $TG = G$, тогда T — преобразование G , удовлетворяющее, в силу свободного действия группы S условиям леммы п. 3.

Пусть $TG \subset G$, $\mu(G \setminus TG) > 0$, то, положив $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} (T^{2k} G \setminus T^{2k+1} G)$, получаем $F \cap TF = \emptyset$. Множество $\bigcap_{k=0}^{\infty} T^k G$ инвариантно и, если его мера отлична от нуля, мы снова оказываемся в ситуации леммы п. 3.

Аналогично обсуждается случай $G \subset TG$.

Пусть $\mu((G \cap TG) \setminus T^{-1} G) = 0$, тогда обозначив $H = G \cap TG$, мы получаем $TH \subset H$.

Пусть $\mu((G \cap TG) \setminus T^{-1} G) > 0$. Положим $F_0 = T^{-1}((G \cap TG) \setminus T^{-1} G)$. Если $F_0 \cap TG = \emptyset$, то для множества $H = T^{-1} G \cap G \cap TG$ получаем $TH \subset H$.

Обозначим $F_k = T^{-1}(T^{-1}F_{k-1} \cap G \cap TG)$, $k=1, 2, \dots$. Как легко проверить, если $\mu(F_k) = 0$, то все сводится к уже перечисленным выше случаям. Пусть $\mu(F_k) \neq 0$, $k=1, 2, \dots$, $F = \bigcup_{k=0} F_k$. Тогда $F \cap TF = \emptyset$, причем

$$(G \cap TG) \setminus (F \cup TF) = \bigcap_{k=-1} T^{-k} G.$$

Если $D = \bigcap_{k=-1} T^{-k} G$, то $TD \subset D$.

Таким образом, в любом случае можно утверждать следующее. Для любого $\gamma_1 > 0$ существует $F \subset G$, $TF \subset G$,

$F \cap TF = \emptyset$, $\mu(F \cup TF) > \mu(G \cap TG) - \gamma_1$. Тогда для любого $\eta > 0$ в силу регулярности меры μ найдется компакт p_n с непустой внутренностью такой, что $p_n \subset G$, $Tr_n \subset G$, $Tr_n \cap p_n = \emptyset$, причем

$$\mu(\text{Int } p_n \cup T \text{Int } p_n) > \mu(G \cap TG) - \gamma_1.$$

Ясно, что γ_1 можно подобрать таким образом, чтобы

$$\mu\left(\bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot (\text{Int } p_n \cup T \text{Int } p_n)\right) > \mu\left(\bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot (G \cap TG)\right) - \frac{1}{2} \alpha_n.$$

Следовательно система компактов $\{p_i\}_{i=0}^n$ и элементы $\{s_i\}_{i=0}^n$ удовлетворяют условиям (2) п. 1, причем

$$\mu\left(\bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot \text{Int } p_n\right) > 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

Таким образом, можно считать допустимую систему $\{p_i\}_{i=0}^n$ построенной. Очевидно, что $\mu\left(\bigcap_{n=0} \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot p_n\right) > 0$.

Лемма 5. Предположим, что μ -квазиинвариантная дискретная вероятностная мера на X , а динамическая система (X, S) такова, что X не имеет изолированных точек, S действует свободно, причем все точки каждого открытого множества возвращающиеся. Тогда существует допустимая система компактов $\{p_i\}_{i=0}^\infty$, для которой

$$\mu\left(\bigcap_{n=0} \bigcup_{d \subset S_n} \bar{d} \cdot p_n\right) > 0$$

(в обозначениях п. 1).

Пусть x_0 — точка с положительной мерой, $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающая последовательность открытых множеств, $G_0 = X$, $\bigcap_{n=0} G_n = \{x_0\}$.

Предположим, что система компактов $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}$, и, соответственно, элементы $\{s_i\}_{i=0}^{n-1}$ выбраны удовлетворяющими условиям (2) п. 1, причем $x_0 \in \text{Int } p_i$, $p_i \in G_i$, $i=0, 1, \dots, n-1$. Пусть для $s_n \in S$, $s_n \neq e$, $s_n \cdot x_0 \in G_n \cap \text{Int } p_{n-1}$. Существование компакта p_n , $x_0 \in \text{Int } p_{n-1}$, $p_n \subset G_n \cap \text{Int } p_{n-1}$, такого, что $p_n \cap s_n \cdot p_n = \emptyset$, $s_n \cdot p_n \subset \text{Int } p_{n-1}$, очевидно.

Система $\{p_i\}_{i=0}^n$ и элементы $\{s_i\}_{i=0}^n$ по-прежнему удовлетворяют условиям (2) п. 1, причем $x_0 \in \text{Int } p_i$, $p_i \subset G_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Допустимая система $\{p_i\}_{i=0}^n$ построена, причем, в виду того, что

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} p_n = \{x_0\}, \quad \mu \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{d \in S_n} \bar{d} \cdot p_n \right) > 0.$$

Следствие. Предположим, что динамическая система (X, S) , для которой X не имеет изолированных точек, а S действует свободно, удовлетворяет условию B (см. п. 0). Тогда для каждой S -эргодической квазиинвариантной меры μ существует допустимая система $\{p_i\}_{i=0}^n$, для которой $\mu \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{d \in S_n} \bar{d} \cdot p_n \right) > 0$ (в обозначениях п. 1).

В самом деле, если μ — дискретная мера, то условия леммы 2 выполнены. Пусть μ — непрерывная мера, G — открытое множество положительной меры, $\varepsilon > 0$. В силу регулярности меры μ существует замкнутое $F \subset G$, $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Из условия B следует, что найдется $s \in S$, $s \neq e$ такое, что $F \subset G \cap s \cdot G$. Тогда $\mu(G \cap s \cdot G) > \mu(G) - \varepsilon$ и условия леммы 1 также выполнены.

Из этого следствия и леммы 2 вытекает непосредственно следующий результат.

Теорема. Каждое фактор-состояние типа меры на скрещенном произведении, построенном по динамической системе (X, S) , удовлетворяющей условию B , где X — метризуемый компакт без изолированных точек, а группа S действует свободно, ассоциировано с некоторым диагонализуемым состоянием на алгебре

$$B = \bigotimes_1 M_2 C \text{ при подходящем выборе подалгебры Сакаи.}$$

Ленинградский государственный
университет

Поступила 11.II.1975

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ. Ֆակտոր-վիճակներ, ըստ դինամիկ սիստեմի կառուցված խաչանկախությունների վրա (ամփոփում)

Հաշվելի խմբի գործողությունով մետրիկելի կոմպակտի վրա դինամիկ սիստեմով կառուցված խաչանկախությունների համար, ցույց է տրված կոնկրետ եղանակ, $\bigotimes_1^{\infty} M_2 C$ ՔԴՓ-ի հանրահաշվին * - իզոմորֆ ֆակտոր-հանրահաշվով ենթահանրահաշվով կառուցելու համար, ենթադրելով, որ սիստեմն ունի ենթակոմպակտների որոշակի հաշորդականություն: Ապացուցված է, որ եթե սիստեմը բոլոր ենթակոմպակտների բնական տպոլոգիայով և գործողությամբ տարածությունում բավարարում է վերադառնալու պայմանին, սկզբնական կոմպակտը շունի մեկուսացված կետեր, իսկ խմբի գործողությունը ազատ է, ապա ամեն մի շափի տեսքի ֆակտոր-վիճակ համապատասխան խաչանկախությունների վրա կարելի է ստանալ ելնելով $\bigotimes_1 M_2 C$ -ի վրա ինչ-որ դիագոնալ վիճակից:

V. A. ARZUMANIAN. Factor-states on the cross-products constructed by dynamical systems (summary)

For the cross-product constructed by a dynamical system on metrisable compact with countable group action a certain way to obtain subalgebras with UHF

quotient algebra $\bigtimes_1 M_2 C$ is proposed provided the system possesses certain sequence of subcompacts. If the system satisfies the recurrence condition the space of all subcompacts with natural topology and action, the initial compact has no isolated points, and the group action is free then it is proved that each measure-type factor-state on the corresponding cross product may be obtained starting with some diagonal state on $\bigtimes_1 M_2 C$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. Zeller-Meier. Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et appl., 47, 1968, 101—239.
2. Ж. Диксми. C^* -алгебры и их представления, М., Изд. „Наука“, 1974.
3. Р. Т. Пауэрс. Представления равномерно гиперфинитных алгебр и их связь с неймановскими кольцами, Сб. пер. „Математика“, 13: 4, 1969, 94—124.
4. S. Sakai. C^* -algebras and W^* -algebras, Springer—Verlag, Berlin, 1971.
5. А. М. Вершик. * -алгебры и динамические системы, Доклад в АМН по некоммутативной теории вероятностей в Казани, 1971.
6. П. Халмош. Лекции по эргодической теории, М., Изд. ИЛ., 1959.
7. P. Shields. The theory of Bernoulli shifts, Chicago Lectures in Math., 1973.
8. А. М. Вершик. Счетные группы, близкие к конечным. В книге Ф. Грияфф, Инвариантные средние на топологических группах, М., Изд. „Мир“, 1973.

В. И. ГАВРИЛОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье доказывается граничная теорема единственности для голоморфных функций, определенных в единичном круге, и строится пример, показывающий, что в определенном смысле теорема не может быть улучшена.

1°. Обозначим через $\mathcal{D}$, D и Γ сферу Римана, круг $|z| < 1$ и окружность $|z| = 1$, соответственно. Для произвольных точек $a, b \in D$ и произвольной жордановой кривой $L \subset D$ положим

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \log [(1+u)(1-u)^{-1}], \quad u = |a-b| \cdot |1-\bar{a}b|^{-1}$$

и $\sigma(L) = \sup_{a, b \in L} \sigma(a, b)$. Функция $\sigma(a, b)$ определяет гиперболическую метрику в круге D , элемент которой равен $d\sigma(z) = (1 - |z|^2)^{-1} |dz|$. Для произвольной точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ обозначим через $h(\zeta, \alpha)$ хорду круга D , оканчивающуюся в $\zeta = e^{i\theta}$ и образующую с радиусом $h(\zeta, 0)$ в этой точке угол α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Подоblastь круга D , ограниченную хордами $h(\zeta, \alpha)$, $h(\zeta, \beta)$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$,

и окружностью $\left| z - \frac{1}{2} \zeta \right| = \frac{1}{2}$, обозначим через $\Delta(\zeta, \alpha, \beta)$. Множество E , лежащее на дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, называется остаточным на γ , если его дополнение относительно γ является множеством первой категории. Если множество E измеримо, его линейная лебегова мера обозначается через $\text{mes } E$.

Последовательность точек $\{z_n\}$ круга D назовем B -последовательностью, отнесенной к граничной дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, если 1) в D существует некоторая последовательность жордановых кривых $\{L_n\}$, содержащихся соответственно в кольцах $1 - \varepsilon_n < |z| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, и имеющая в качестве предела дугу γ , и 2) существует такое число M , $0 < M < +\infty$, что для всех $n = 1, 2, \dots$ каждая дуга L на L_n , имеющая $\sigma(L) > M$, содержит по крайней мере одну точку последовательности $\{z_n\}$ (см. также [4] и [6]). Последовательность жордановых кривых $\{L_n\}$ в этом определении принято называть последовательностью Кёбе, отнесенной к дуге $\gamma \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим мероморфную в D функцию $f(z)$ и обозначим через $\rho(f(z))$ ее сферическую производную, $\rho(f(z)) = |f'(z)|[1 + |f(z)|^2]^{-1}$. Рассмотрим непрерывную в D функцию $q(f, z) = (1 - |z|^2)^2 (f(z))$. Функция $f(z)$ стремится к конечному пределу c по последовательности жордановых дуг Кёбе $\{I_n\}$, отнесенной к граничной дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{z \in I_n} |f(z) - c|] = 0$, и — стремится к пределу ∞ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{z \in I_n} \left| \frac{1}{f(z)} \right| \right] = 0.$$

Дальнейшие обозначения являются общепринятыми в теории предельных множеств (см. [7] или [9]). Для произвольного подмножества $S \subset D$, имеющего по крайней мере одну предельную точку $\zeta = e^{i\theta}$ на Γ , обозначим через $C(f, \zeta, S)$ совокупность всех значений $a \in \mathbb{C}$, для которых на S можно указать такие последовательности точек $\{z_n^{(a)}\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(a)} = \zeta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(a)}) = a$. Выбирая в качестве S весь круг D , хорду $h(\zeta, a)$ или угол $\Delta(\zeta, a, \beta)$, получим предельные множества $C(f, \zeta, D)$, $C(f, \zeta, h(\zeta, a))$ или $C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a, \beta))$. Говорят, что точка $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ принадлежит множеству $F(f)$, если объединение $\cup C(f, \zeta, \Delta(\zeta, a, \beta))$ по всем углам $\Delta(\zeta, a, \beta)$ с вершинами в точке $\zeta = e^{i\theta}$ состоит из единственного значения, которое обычно обозначают $f(e^{i\theta})$.

2°. В статье [6] (теорема 6) был доказан некоторый факт, относящийся к нормальным функциям. Мероморфная в D функция $f(z)$ называется нормальной, если является нормальным в смысле Монтеля в круге D семейство функций $\{f \circ T\}$, где T пробегает все множество конформных отображений круга D на себя (см. Лехто-Виртанен [8], или [9], стр. 151). Факт, о котором идет речь, состоит в утверждении, что всякая нормальная голоморфная функция в D , имеющая конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$ по какой-то B -последовательности $\{z_n\}$, сводится к тождественной постоянной $f(z) \equiv a$. Построены также примеры функций, показывающие, что утверждение перестает быть справедливым для нормальных мероморфных функций, и что условие нормальности не может быть ослаблено.

Свойство нормальности мероморфной функции в круге D является глобальным свойством и оно эквивалентно утверждению о существовании конечной верхней грани

$$\sup_{z \in D} q(f, z) < \infty \quad (1)$$

(см. [8], или [9], стр. 153). Желая улучшить цитированный выше факт, мы перейдем от глобального условия (1) к локальному условию

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in D} \sup q(f, z) < +\infty \quad (2)$$

в некоторой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, или к эквивалентному условию (2) условию

$$\sup_{z \in U(\zeta, r)} q(f, z) < +\infty, \quad (3)$$

имеющему место в некоторой окрестности $U(\zeta, r) = D \cap \{z \in D, |z - \zeta| < r\}$, $r > 0$, точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в D и на Γ существует некоторая дуга $\gamma \subseteq \Gamma$ и остаточное множество E на γ , в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in E$ которого

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup q(f, re^{i\theta}) < +\infty. \quad (4)$$

Если $f(z)$ имеет конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$ по некоторой B -последовательности $\{z_n\}$, отнесенной к дуге γ , то $f(z) \equiv a$.

Следующая теорема показывает, что условие на множество E в теореме 1 и в формулируемой ниже лемме 1 является наилучшим в смысле категории, а также, что утверждения теоремы 1 и леммы 1 не имеют места, если на множество E накладывать только лишь метрические условия.

Теорема 2. Для произвольной действительной функции $\mu(r) > 0$, определенной на $0 \leq r < 1$, и $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = +\infty$, существует такая голоморфная в D функция $g(z) \neq \text{const}$, такое множество M первой категории на Γ и $\text{mes } M = 2\pi$, и такое число r_0 , $0 < r_0 < 1$, что 1) в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ имеем $\lim_{z \rightarrow \zeta} \sup_{z \in D} q(g, z) = +\infty$;

$$2) \quad q(g, z) \leq \mu(|z|) \text{ при } r_0 < |z| < 1;$$

$$3) \quad \lim_{r \rightarrow 1} q(g, re^{i\theta}) = 0, \quad e^{i\theta} \in M, \quad (5)$$

и стремление к 0 в (5) происходит равномерно относительно точек $\zeta = e^{i\theta} \in M$; 4) $g(z_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots$, в точках некоторой B -последовательности $\{z_\nu\}$, отнесенной ко всей окружности Γ .

3°. Выделим в качестве лемм основные этапы доказательства теоремы 1.

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и на Γ существует некоторая дуга $\gamma \subseteq \Gamma$ и остаточное множество $E \subset \gamma$, в точках $\zeta = e^{i\theta} \in E$ которого выполняется условие (4). Тогда на γ существует остаточное множество E_1 , в точках $\zeta = e^{i\theta} \in E_1$ которого выполняется свойство (2), и для каждой точки $\zeta = e^{i\theta} \in E_1$ можно указать такое число r , $0 < r < 1$, что в области $U(\zeta, r)$ выполняется свойство (3).

Эта лемма является переформулировкой для функции $q(f, z)$ теоремы Коллингвуда о максимальной (см. [7], стр. 108, теорема 4.8), согласно которой для любой непрерывной в D функции $u(z)$ точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в которых $C(u, \zeta, D) = C(u, \zeta, h(\zeta, 0))$, образуют остаточное множество на Γ .

Лемма 2. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и $f(z) \equiv \text{const.}$ Если функция $f(z)$ имеет конечный или бесконечный предел с по некоторой последовательности дуг Кёбе $\{L_n\}$, отнесенной к граничной дуге $\gamma \subseteq \Gamma$, то в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \gamma$ имеем

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in D} q(f, z) = +\infty. \quad (6)$$

Действительно, допустим напротив, что в некоторой точке $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \gamma$ выполняется условие (2), и следовательно, существует такое число $r_0, 0 < r_0 < 1$, что в области $U(\zeta_0, r_0)$ имеет место свойство (3). Положим $\gamma_0 = \gamma \cap U(\zeta_0, r_0)$ и $l_n = L_n \cap U(\zeta_0, r_0), n = 1, 2, \dots$. Тогда $\{l_n\}$ является последовательностью Кёбе, отнесенной к дуге γ_0 , и функция $f(z)$ стремится к пределу с по последовательности дуг Кёбе $\{l_n\}$. Обозначим через $d\sigma_0(z)$ элемент гиперболической метрики в $U(\zeta_0, r_0)$. Согласно принципу гиперболической меры, $d\sigma_0(z) \geq d\sigma(z)$, и поэтому из условия (3) следует условие

$$\sup_{z \in U(\zeta_0, r_0)} \left| q(f(z)) \frac{|dz|}{d\sigma_0(z)} \right| < +\infty, \quad (7)$$

которое, согласно теореме Лехто-Виртанена, эквивалентно свойству нормальности функции $f(z)$ в $U(\zeta_0, r_0)$. Теперь применение теоремы единственности Багемила-Зейделя ([2], теорема 2; см. также [3]) ведет к заключению $f(z) \equiv c$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы 2.

Лемма 3 ([6], лемма 1; [4], стр. 1228). Предположим, что мероморфная в D функция $f(z)$ имеет конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c$ по некоторой B -последовательности $\{z_n\}$, отнесенной к дуге $\gamma \subseteq \Gamma$. Тогда в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in (F(f) \cap \gamma)$ значение $f(e^{i\theta})$ равно c , и если $\text{mes}(F(f) \cap \gamma) > 0$, то $f(z) \equiv c$.

4°. Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Согласно лемме 1, найдется по крайней мере одна внутренняя точка $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \gamma$, в некоторой окрестности $U(\zeta_0, r_0)$ которой выполняется свойство (3). Обозначим $\gamma_0 = \gamma \cap U(\zeta_0, r_0)$ и предположим, что $\text{mes}(F(f) \cap \gamma_0) = 0$. При этом предположении, согласно основной теореме Коллингвуда и Картрайт в малом (см. [7], стр. 187--188, теорема 7.2), функция $f(z)$ либо стремится к значению ∞ по некоторой последовательности жордановых дуг Кёбе $\{l_n\}$, отнесенной к граничной дуге γ_0 , либо $f(z)$ стремится к ∞ вдоль некоторой жордановой кривой L , лежащей в $U(\zeta_0, r_0)$ и оканчивающейся в некоторой точке $\zeta_1 = e^{i\theta_1} \in \gamma_0$. Первая из этих возможностей не может реализоваться ввиду утверждения леммы 2, а вторая — ввиду утверждения леммы 3 и условий теоремы 1, поскольку в этом случае, согласно теореме Лехто-Виртанена [8], точка $\zeta_1 = e^{i\theta_1}$ обязана принадлежать множеству $F(f)$. Поэтому $\text{mes}(F(f) \cap \gamma_0) > 0$, и, согласно лемме 3, $f(z) \equiv a$.

5°. В качестве функции $g(z)$ в теореме 2 возьмем бесконечное произведение

$$g(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right], \quad (8)$$

впервые рассмотренное Багемилом, Эрдешем и Зейделем [1] и изучавшееся затем в статьях [5] и [6]. Для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию

$$n_k \geq k n_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad n_1 > 1, \quad (9)$$

произведение (8) сходится абсолютно в каждом круге $|z| \leq r < 1$, и представляет, следовательно, голоморфную функцию в D , имеющую n_j простых нулей $z_j^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, n_j$, на окружностях $|z| = 1 - \frac{1}{n_j}$,

$j = 1, 2, \dots$. Окружим каждый нуль $z_j^{(l)}$ на $|z| = 1 - \frac{1}{n_j}$ окрестностью $U_j^{(l)}$ радиуса $1/j^2 n_j$. Если последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (9), то легко видеть, что существует такой номер $j_0 > 0$, что для всех $j > j_0$ круги $U_j^{(l)}$ попарно не пересекаются. Следовательно, остающаяся после выбрасывания всех кругов $U_j^{(l)}$, $j \geq j_0$, часть круга D будет некоторой областью Δ .

В статье [6] (теорема 8) показано, что нули $z_j^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, \dots, n_j$; $j = 1, 2, \dots$, образуют B -последовательность относительно всей окружности Γ . В статье [1] (теоремы 2 и 5) доказано, что для любой функции $\mu(r) > 0$, $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = +\infty$, можно указать такую последовательность индексов $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию (9), что произведения (8), построенные для этой последовательности $\{n_k\}$ и для любой бесконечной ее подпоследовательности обладают свойствами 1) и 2), указанными в теореме 2. Осталось показать, что из последовательности $\{n_k\}$ можно выделить такую подпоследовательность, что соответствующее произведение $g(z)$ обладает свойством 3) из теоремы 2.

Мы докажем несколько большее, а именно, что для любой последовательности индексов $\{n_k\}$, которая удовлетворяет условию

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j \right)^2 < n_k, \quad n_1 > 1, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (10)$$

функция $g(z)$ обладает свойством

$$\lim_{|z| \rightarrow 1, z \in \Delta} (1 - |z|) \rho(g(z)) = 0 \quad (11)$$

равномерно в области Δ .

В силу простого строения области Δ , непосредственно видно, что пересечение замыкания области Δ с окружностью Γ есть некоторое

множество M , мес $M = 2\pi$. Согласно теореме максимальности Коллингвуда, M является множеством первой категории. Радиусы круга D , оканчивающиеся в точках множества M , начиная с некоторого момента целиком лежат в области Δ .

Чтобы доказать (11), мы воспользуемся двумя оценками для произведения $g(z)$, доказанными в [1]: для произвольной последовательности индексов $\{n_v\}$, удовлетворяющей условию (9), и любой точки $z \in \Delta$, лежащей в кольце

$$1 - \frac{1}{n_k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{n_{k+1}}, \quad (12)$$

имеют место неравенства

$$|g(z)| \geq \frac{c}{k^2 (k+1)^2} \left(\frac{3}{4} e - 1 \right)^k \quad (13)$$

и

$$\left| 1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_v}} \right)^{n_v} \right| \geq \frac{c_2}{k^2}, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

в которых $c_1, c_2 < +\infty$ — фиксированные постоянные (см. [1], стр. 137 и 138).

Рассмотрим производную

$$g'(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} z^{n_v-1} \prod_{j \neq v} \left[1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right].$$

В произвольной точке $z \in \Delta$, лежащей в кольце (12), имеем оценки

$$\begin{aligned} (1 - |z|) \rho(g(z)) &\leq (1 - |z|) \frac{|g'(z)|}{|g(z)|^2} \leq \\ &\leq \frac{1 - |z|}{|g(z)|} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_v}} \right)^{n_v} \right|} \leq \\ &\leq \frac{(1 - |z|) k^2}{c_2 |g(z)|} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

в которых использовано неравенство (14).

Воспользуемся неравенствами $\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{-n_v} \leq 4$, $v = 1, 2, \dots$; $\ln x < - (1-x)$ для $0 < x < 1$, и $xe^{-x} < 1$ для $x > 0$, а также условиями (10) и (12), получим оценки

$$\begin{aligned}
& (1-|z|) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1-\frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} \leq 4(1-|z|) \left[\sum_{v=1}^{k-1} n_v + n_k + \right. \\
& \left. + n_{k+1} |z|^{n_{k+1}} + \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v |z|^{n_v-1} \right] \leq 8(1-|z|) n_k + \\
& + 4(1-|z|) n_{k+1} e^{n_{k+1} \ln |z|} \cdot |z|^{-1} + |z|^{-1} \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{n_v \ln |z|} \leq \\
& \leq 8+4|z|^{-1}(1-|z|) n_{k+1} e^{-n_{k+1}(1-|z|)} + |z|^{-1} \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{-n_v(1-|z|)} \leq \\
& \leq 8+4|z|^{-1} + |z|^{-1} \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{-\frac{n_v}{n_{k+1}}} \leq \\
& \leq 8+4|z|^{-1} + |z|^{-1} \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{-\sqrt{n_v}} < c_2 < +\infty. \quad (16)
\end{aligned}$$

Объединяя оценки (13), (15) и (16), получим неравенство

$$(1-|z|) \rho(g(z)) \leq \frac{c_1 \cdot c_2}{c_2} k^4 (k+1)^2 \left(\frac{3}{4} e - 1 \right)^{-k}, \quad (17)$$

справедливое в произвольной точке $z \in \Delta$, лежащей в кольце (12). Неравенство (17) эквивалентно утверждению (11), и теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Одним из основных этапов доказательства теоремы 1 является утверждение о существовании по крайней мере одной точки $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \gamma$, в которой имеет место свойство (2), если выполняется условие (4) в точках некоторого остаточного множества на γ . Это утверждение явилось в доказательстве теоремы 1 следствием теоремы Коллингвуда о максимальности, примененной к непрерывной функции $q(f, z)$ в частном случае радиусов круга D . В действительности же теорема Коллингвуда применима в значительно более общей формулировке, и это обстоятельство позволяет усилить утверждение теоремы 1, заменив условие (4) следующим предположением: пусть в круге $|z| \leq 1$ существует некоторый континуум G_0 , пересекающийся с окружностью Γ в единственной точке $\zeta=1$, и существует остаточное множество $E \subset \gamma$, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in E$ которого множество $S(q, \zeta, G_0)$ ограничено, где G_0 — континуум, полученный из G_0 поворотом на угол θ вокруг начала $z=0$. В качестве G_0 может быть взята, например, произвольная жорданова дуга из D , оканчивающаяся в точке $\zeta=1$ пусть даже и касательным образом.

Վ. Ի. ԴԱՎՐԻԼՈՎ. Հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերաբերյալ մի միակերպ թեորեմի մասին (ամփոփում)

Հորվածում ապացուցվում է սահմանային միակերպյան թեորեմ միավոր շրջանում որոշված հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերաբերյալ և կառուցվում է օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ թեորեմայի տրված պայմանները լավագույնն են:

V. I. GAVRILOV. *A uniqueness theorem for holomorphic functions*
(summary)

A uniqueness theorem for holomorphic functions defined in the unit disc is proved. An example shows, that the conditions of the theorem are best possible.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. F. Bagemthl, P. Erdős, W. Seidel. Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle—unité. *Annal. Sci. Ecole Norm., Sup.*, 70, 1953, 135—147.
2. F. Bagemthl, W. Seidel. Koebe arcs and Fatou points of normal functions, *Comment. Math. Helv.*, 36, 1, 1961, 9—18.
3. В. И. Гаврилов. О множестве угловых граничных значений нормальных мероморфных функций, *ДАН СССР*, 141, № 3, 1961, 525—526.
4. В. И. Гаврилов. О голоморфных функциях, ограниченных на последовательностях точек, *Сиб. матем. журн.*, 6, № 6, 1965, 1227—1233.
5. V. I. Gavrilov. On a uniqueness theorem, *Nagaya Math. J.*, 35, 1969, 151—157.
6. В. И. Гаврилов. О некоторых теоремах единственности для мероморфных функций, *Труды сем. им. И. Г. Петровского*, 1, 1974.
7. Э. Коллинзед, А. Ловатер. Теория предельных множеств, М., Изд. „Мир“, 1971.
8. O. Lehto, K. I. Virtanen. Boundary behaviour and normal meromorphic functions, *Acta Math.*, 97, 1—2, 1957, 47—65.
9. К. Носиро. Предельные множества, М., ИИЛ, 1963.

Э. А. ДАНИЕЛЯН

К АСИМПТОТИКЕ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ И ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ПРИОРИТЕТНЫХ СИСТЕМ

$M_r/G_r/1/\infty$ ПРИ КРИТИЧЕСКОЙ ЗАГРУЗКЕ

1°. *Введение.* В теории приоритетных систем за последние годы особенно интенсивно изучались однолинейные системы [1—2]. В случае поступающих пуассоновских потоков и произвольных длительностей обслуживания вызовов получено много точных результатов. Результаты при усложнении структуры систем становятся необозримо громоздкими. Следовательно, возникает вопрос об упрощении полученных формул, например, в случае, когда длительность обслуживания вызовов, поступающих за единицу времени в среднем меньше единицы, но близка к ней. Тогда такие характеристики систем с ожиданием как период занятости, время ожидания и т. д. имеют тенденцию безгранично возрастать. Говорят, что система находится в условиях „критической загрузки“.

В системах массового обслуживания можно выделять разные числовые характеристики, которые можно рассматривать как „малые“ параметры. Пусть мы имеем приоритетную систему с ожиданием и несколькими входящими потоками. Средняя суммарная длительность обслуживания вызовов первых k приоритетных классов ρ_{k1} (чем меньше номер приоритетного класса, тем „выше его приоритет“) носит название загрузки прибора первыми k классами. Если $\rho_{k1} < 1$, то, как известно (см. [2]), для многих одноканальных приоритетных систем существует стационарное распределение первых k потоков и получено много точных результатов. При $\rho_{k1} \uparrow 1$ мы находимся в условиях критической загрузки для вызовов первых k приоритетных классов. Тогда величину $\rho_k = 1 - \rho_{k1}$ можно рассматривать как малый параметр и изучение указанных выше характеристик представляет собой задачу асимптотического анализа.

Ниже предполагается, что при $\rho_k \uparrow 1$ фиксированы средние длительности обслуживания вызовов всех приоритетных классов.

Неприоритетная система $M/G/1/\infty$ при критической загрузке изучалась О. В. Висковым [3]*.

* Существует довольно обширная литература по системам массового обслуживания при критической загрузке (Прохоров, Ингледарт, Хук и др.), но нам близка по методам лишь работа [3].

В § 3 настоящей работы, следуя Вискову, изучается асимптотика моментов периодов занятости, описанных ниже систем. Висков установил для системы $M/G/1/\infty$ порядок моментов периода занятости при критической загрузке. Оказывается, что показано в § 3, помимо порядков можно вычислить предел нормированных моментов периодов занятости не только в неприоритетной, но и в некоторых приоритетных $M_r/G_r/1/\infty$ системах.

Общая предельная теорема при критической загрузке для времени ожидания начала обслуживания вызовов k -го потока, если вызовы каждого потока обслуживаются в порядке поступления, получена в § 4. Предельное распределение содержит как частный случай результат, выведенный в [3].

2. Описание систем и обозначения. В однолинейную систему массового обслуживания поступают r независимых пуассоновских потоков вызовов с параметрами $a_1, a_2, \dots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания всех вызовов независимы, а распределение их для вызовов потока с номером i (приоритета i) есть $B_i(t)$ ($i = \overline{1, r}$). Вызовы приоритета i ($i < j$) из очереди берутся на прибор раньше вызовов приоритета j . Будут рассмотрены системы $\bar{M}_r/\bar{G}_r/1/\infty$ с относительными разновидностями абсолютного (дообслуживание, потеря, обслуживание заново прерванного вызова) приоритета (см. [2]).

Через $\Pi_k(t)$ ($k = \overline{1, r}$) обозначим функцию распределения (ф. р.) периода занятости (k -периода) обслуживанием вызовов первых k потоков. В частности, $\Pi(t) = \Pi_r(t)$ — ф. р. периода занятости системы. Начавшийся с обслуживания вызова приоритета i k -период называем ki -периодом, а его ф. р. обозначаем $\Pi_{ki}(t)$. $H_k(t)$ — ф. р. (k -цикла) времени от поступления вызова приоритета k в свободную от вызовов систему до первого момента освобождения системы от этого вызова и вызовов более высокого приоритета, времени пребывания вызова приоритета k на приборе.

Положим

$$\begin{aligned}\beta_i(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dB_i(t), & \pi_i(s) &= \int_0^\infty e^{-st} d\Pi_i(t) & (i = \overline{1, r}), \\ \pi_r(s) &= \pi(s); & h_i(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dH_i(t), & \beta_{i1} &= \int_0^\infty e^{-st} dB_i(t), \\ \sigma_i &= a_1 + \dots + a_i & (i = \overline{1, r}), & \sigma &= \sigma_r.\end{aligned}$$

Считаем в момент $t=0$ систему свободной от вызовов. В дальнейшем будем предполагать, что все моменты распределений $B_i(t)$ ($i = \overline{1, r}$) конечны, следовательно

$$\beta_i(s) = \sum_{n \geq 0} b_{ni} s^n, \quad b_{0i} = 1, \quad b_{1i} = -\beta_{i1}. \quad (2.1)$$

Пусть выполнены условия ненасыщения систем первыми k потоками, имеющие вид (см. [2]):

1. Относительный приоритет (и абсолютный) с дообслуживанием

$$\rho_{k1} = a_1 \beta_{11} + a_2 \beta_{21} + \dots + a_k \beta_{k1} < 1; \quad (2.2)$$

2. Абсолютный приоритет с потерей

$$\rho_{k1} = a_1 \beta_{11} + \frac{a_2}{\tau_1} [1 - \beta_1(\sigma_1)] + \dots + \frac{a_k}{\tau_{k-1}} [1 - \beta_k(\sigma_{k-1})] < 1; \quad (2.3)$$

3. Абсолютный приоритет с обслуживанием заново

$$\rho_{k1} = a_1 \beta_{11} + \frac{a_2}{\tau_1} \left| \frac{1}{\beta_2(\tau_1)} - 1 \right| + \dots + \frac{a_k}{\tau_{k-1}} \left[\frac{1}{\beta_k(\tau_{k-1})} - 1 \right]. \quad (2.4)$$

3°. Моменты периодов занятости. *А. Предварительный результат.* Обозначим через ρ_{k2} величину, имеющую вид

$$1. \quad \rho_{k2} = a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \dots + a_k b_{2k}, \quad (3.1)$$

$$2. \quad \rho_{k2} = a_1 b_{21} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\rho_i}{\sigma_i} [(\rho_i - \rho_{i+1}) - a_{i+1} \beta'_{i+1}(\sigma_i)], \quad \rho_i = 1 - \rho_{i1}, \quad (3.2)$$

$$3. \quad \rho_{k2} = a_1 b_{21} + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\frac{\rho_i (\rho_i - \rho_{i+1})}{\sigma_i} - \frac{(\rho_i - \rho_{i+1})^2}{a_{i+1}} - \frac{a_{i+1} \beta'_{i+1}(\sigma_i) \rho_i}{\sigma_i [\beta_{i+1}(\sigma_i)]^2} \right], \quad \rho_i = 1 - \rho_{i1}, \quad (3.3)$$

соответствующую системам, очередность которых указана в конце § 2.

Для трех разновидностей систем с абсолютным приоритетом и системы с относительным [2], гл. 4 приведены теоремы, позволяющие определить функции $\pi_k(s)$, $\pi_{ki}(s)$ ($k = \overline{1, r}$; $i = \overline{1, k}$), $h_k(s)$. Мы объединим эти теоремы в одну, в редакции, пригодной для дальнейшего асимптотического изучения моментов $\pi_k(s)$ и $\pi_{kk}(s)$.

Теорема 1. а) Система функциональных уравнений (при $\rho_{r1} < 1$)

$$\pi_{kk}(s) = \tilde{h}_k(s + a_k - a_k \pi_{kk}(s)) \quad (k = \overline{1, r}), \quad (3.4)$$

$$\sigma_k \pi_k(s) = \tau_{k-1} \pi_{k-1}(s + a_k - a_k \pi_{kk}(s)) + a_k \pi_{kk}(s) \quad (k = \overline{1, r}). \quad (3.5)$$

Вместе с уравнениями

$$1. \quad \tilde{h}_k(s) = \beta_k(s + \tau_{k-1} - \sigma_k \pi_{k-1}(s)) \quad (k = \overline{1, r}), \quad (3.6)$$

$$2. \quad \tilde{h}_k(s) = \beta_k(s + \tau_{k-1}) + \frac{\tau_{k-1}}{s + \tau_{k-1}} [1 - \beta_k(s + \tau_{k-1})] \pi_{k-1}(s) \quad (k = \overline{1, r}), \quad (3.7)$$

$$3. \bar{h}_k(s) = \beta_k(s + \tau_{k-1}) \left\{ 1 - \frac{\tau_{k-1}}{s + \tau_{k-1}} [1 - \beta_k(s + \tau_{k-1})] \pi_{k-1}(s) \right\}^{-1} \quad (3.8)$$

$$(k = \overline{1, r}),$$

соответствующими системам в очередности, указанной в конце § 2, определяют единственные функции $\pi_k(s)$, $\pi_{kk}(s)$, $\bar{h}_k(s)$, аналитические в полуплоскости $\text{Re } s > 0$, где $|\pi_k(s)| < 1$, $|\pi_{kk}(s)| < 1$, $|\bar{h}_k(s)| < 1$.

б) Тогда

$$\sigma_k \pi_{1k} = \tau_k \pi_k'(0) = -\frac{\rho_{k1}}{\rho_k}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_k \pi_{2k} = \frac{1}{2} \tau_k \pi_k''(0) = \frac{\rho_{k2}}{\rho_k^3}, \quad (3.10)$$

$$\rho_k = 1 - \rho_{k1},$$

$$\alpha_k \tilde{h}_{1k} = \alpha_k \tilde{h}_k(0) = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}, \quad (3.11)$$

$$\alpha_k \tilde{h}_{2k} = \frac{1}{2} \alpha_k \tilde{h}_k''(0) = \frac{\rho_{k2} \rho_{k-1} - \rho_{k-12} \rho_k}{\rho_{k-1}^3}. \quad (3.12)$$

Замечание 1. При прямом порядке обслуживания вызовов внутри k -го приоритетного класса $h_k(s) = \bar{h}_k(s)$.

Замечание 2. Если $0 < \bar{\rho}_{k-1} = \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_{k-1}$, $\bar{\rho}_{ji} = \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_{ji}$ ($j = \overline{1, r}$; $i = 1, 2$), то

$$\lim_{\rho_k \downarrow 0} \alpha_k \tilde{h}_{1k} = -1, \quad (3.13)$$

$$\lim_{\rho_k \downarrow 0} \alpha_k \tilde{h}_{2k} = \frac{\bar{\rho}_{k2}}{\bar{\rho}_{k-1}^2}. \quad (3.14)$$

Если же $\bar{\rho}_{k-1} = 0$, $c_k = \lim_{\rho_{k-1} \downarrow 0} (\rho_k / \rho_{k-1}) < 1$, то

$$\lim_{\rho_{k-1} \downarrow 0} \alpha_k \tilde{h}_{1k} = -(1 - c_k), \quad (3.15)$$

$$\lim_{\rho_{k-1} \downarrow 0} \rho_{k-1}^2 \alpha_k \tilde{h}_{2k} = (1 - c_k) \bar{\rho}_{k-12}. \quad (3.16)$$

Б. *Формулировка результата.* Все r потоков вызовов могут быть разделены на l групп потоков, причем к i -ой группе ($i = \overline{1, l}$) принадлежат те потоки, у которых разность между единицей и за-

грузкой прибора вызовами этого потока и вызовами более высокого приоритета — бесконечно малая более высокого порядка, чем у вызовов из групп с номерами $1, \overline{i-1}$, и порядка ниже, чем из групп $\overline{i+1}, \overline{l}$. Пусть p — номер такой, что впервые загрузка вызовами первых p потоков стремится к единице, а первых $p-1$ — к числу, строго меньшему единицы.

Исходя из формул (2.1) и (3.4)–(3.8), нетрудно, шаг за шагом, доказать существование и конечность всех моментов у ф. р. $\bar{H}_k(t)$,

$$\Pi_k(t), \Pi_{kk}(t), \quad k = \overline{1, r}. \quad \text{Следовательно, можно писать } \left(\bar{h}_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\bar{H}_k(t) \right)$$

$$\pi_{kk}(s) = \sum_{n \geq 0} \pi_{nkk} \cdot s^n, \quad (3.17)$$

$$\pi_k(s) = \sum_{n \geq 0} \pi_{nk} \cdot s^n, \quad (3.18)$$

$$\tilde{h}_k(s) = \sum_{n \geq 0} \tilde{h}_{nk} \cdot s^n. \quad (3.19)$$

Очевидно, что при $\rho_p \downarrow 0$, $\bar{\rho}_{p-1} > 0$ величины π_{ppp} , π_{ap} , $\tilde{h}_{p+1}$ неограниченно возрастают, следовательно, неограниченно возрастают и величины π_{nkk} , π_{nk} , $\tilde{h}_{nk+1}$ для любого $k \geq p$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\rho_p \downarrow 0$, $\bar{\rho}_{p-1} > 0$, тогда для всех $k \geq p$ существуют конечные пределы

$$\bar{\pi}_{nkk} = \lim_{\rho_p \downarrow 0} \frac{\rho_k^{2n-1} \alpha_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} \quad (n \geq 1), \quad (3.20)$$

$$\bar{\pi}_{nk} = \lim_{\rho_p \downarrow 0} \rho_k^{2n-1} \cdot \pi_{nk} \quad (n \geq 1), \quad (3.21)$$

$$\bar{h}_{nk+1} = \lim_{\rho_p \downarrow 0} \alpha_{k+1} \rho_k^{2n-2} \tilde{h}_{nk+1} \quad (n \geq 1), \quad (3.22)$$

6) При $c_k = 0$ ($k \geq p$)

$$\bar{\pi}_{nk} = \bar{\pi}_{nkk} = (-1)^n \bar{\rho}_{p-1,2}^{n-1} \cdot \frac{2^n (2n-3)!!}{n!} \quad (n \geq 2); \quad (2.23)$$

при любом $k \geq p$

$$\bar{h}_{nk+1} = (1 - c_{k+1}) \cdot \bar{\pi}_{nk} \quad (n \geq 2); \quad (3.24)$$

если $c_k > 0$, то $\bar{\pi}_{nkk}$ и $\bar{\pi}_{nk}$ вычисляются по рекуррентным соотношениям

$$\bar{\pi}_{nkk} = \sum' \frac{\bar{h}_{mk} \cdot m!}{k_1! k_2! \dots k_{n-1}!} \{ -\bar{\pi}_{2kk} \}^{k_2} \dots \{ -\bar{\pi}_{n-1,kk} \}^{k_{n-1}} c_k^{m-2}, \quad (3.25)$$

$$\bar{\pi}_{nk} = \sum \frac{\bar{\pi}_{mkk-1} \cdot m!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \{ -\bar{\pi}_{2kk} \}^{k_1} \dots \{ -\bar{\pi}_{n,kk} \}^{k_n} \cdot c_k^{m-1}, \quad (3.26)$$

где суммируем по неотрицательным целочисленным решениям уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n \quad (3.27)$$

и

$$m = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

лишь для (3.25) $k_n = 0$.

В. Доказательство теоремы 2. При доказательстве неоднократно используется формула Бруно [4], гл. 2 об n -ой производной сложной функции. Пусть

$$A(s) = f(g(s))$$

и

$$A_n(s) = A_s^{(n)}(s), \quad f_n(s) = f_s^{(n)}(s), \quad g_n(s) = g_s^{(n)}(s).$$

Тогда

$$A_n(s) = \sum \frac{n! f_m(g(s))}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{g_1(s)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{g_2(s)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{g_n(s)}{n!} \right)^{k_n}, \quad (3.28)$$

где суммируем по векторам $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, являющимися целочисленными неотрицательными решениями уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n,$$

причем

$$m = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

1. Выясним порядок величин π_{nkk} , π_{nk} , $\tilde{h}_{nk+1}$, если $\varphi_k \downarrow 0$, $\bar{\varphi}_{k-1} > 0$. Применим формулу Бруно к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{a_k \pi_{kk}^{(n)}(s)}{n!} &= \sum \frac{a_k \tilde{h}_k^{(m)}(\cdot)}{k_1! k_2! \dots k_n!} [1 - a_k \pi_{kk}^{(1)}(s)]^{k_1} \times \\ &\times \left\{ -\frac{a_k \pi_{kk}^{(2)}(s)}{2!} \right\}^{k_2} \dots \left\{ -\frac{a_k \pi_{kk}^{(n)}(s)}{n!} \right\}^{k_n}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где суммируем по (3.27) и обозначено

$$(\cdot) = s + a_k - a_k \pi_{kk}(s). \quad (3.30)$$

Из (3.17) и (3.19) имеем

$$\frac{\pi_{kk}^{(n)}(0)}{n!} = \pi_{nkk}, \quad \frac{\tilde{h}_k^{(n)}(\cdot)}{n!} \Big|_{s=0} = \tilde{h}_{nk}.$$

Заметив, что одним из решений уравнений (3.27) является вектор $(0, 0, \dots, 0, 1)$ и $m = 1$ и, воспользовавшись равенством (3.11), из (3.29) в точке $s = 0$ получаем

$$\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} a_k \pi_{nkk} = \sum \frac{\tilde{a}_k h_{mk} \cdot m!}{k_1! k_2! \dots k_{n-1}!} \{1 - a_k \pi_{1kk}\}^{k_1} \{-a_k \pi_{2kk}\}^{k_2} \dots \{-a_k \pi_{n-1kk}\}^{k_{n-1}}, \quad (3.31)$$

где суммируем как в (3.25). Теперь утверждение наше доказывается методом математической индукции. При $n=1$ утверждение следует из равенства

$$a_k \pi_{1kk} = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_k}. \quad (3.32)$$

Из (3.31) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k^{2n-1} \cdot a_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} &= \sum \frac{\rho_{k-1}^{2n-2} \cdot \tilde{a}_k \cdot h_{mk} \cdot m!}{k_1! k_2! \dots k_{n-1}!} \left\{ \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} - \frac{\rho_k \cdot a_k \pi_{1kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_1} \times \\ &\times \left\{ -\frac{\rho_k^3 \cdot a_k \pi_{2kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_2} \dots \left\{ -\frac{\rho_k^{2n-3} \cdot a_k \pi_{n-1kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_{n-1}} \cdot \left(\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} \right)^{m-2}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

если принять во внимание, что $k_1 + 3k_2 + \dots + (2n-3)k_{n-1} = 2n - m$. С другой стороны, очевидно, что $m \geq 2$, следовательно, конечные пределы (3.20) существуют.

Величины π_{nkk} можно вычислить. Заметим, что в (3.33) ненулевыми являются слагаемые, у которых $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = 2$. В этом случае следует решить в целых неотрицательных числах систему

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = 2, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + (n-1)k_{n-1} = n. \end{cases} \quad (3.34)$$

Решениями этой системы при $n=2m$ будут

$$k_j = k_{2m-j} = 1 \quad (j = \overline{1, m-1}); \quad k_i = 0 \quad \text{при } i \neq j; \quad 2m - j.$$

и

$$k_m = 2, \quad k_i = 0 \quad \text{при } i \neq m,$$

а при $n=2m+1$

$$k_j = k_{2m+1-j} = 1 \quad (j = \overline{1, m}); \quad k_i = 0 \quad \text{при } i \neq j; \quad 2m+1-j.$$

Следовательно, на основе (3.33) и (3.16) имеем

$$\overline{\pi}_{nkk} = \overline{\rho}_{k-12} \cdot \{\overline{\pi}_{1kk} \cdot \overline{\pi}_{n-1kk} + \dots + \overline{\pi}_{n-1kk} \cdot \overline{\pi}_{1kk}\} \quad (n \geq 2), \quad (3.35)$$

откуда видно, что последовательность $\overline{\pi}_{2kk}, \overline{\pi}_{3kk}, \overline{\pi}_{4kk}, \dots$, является сверткой последовательностей $\overline{\rho}_{k-12} \cdot \overline{\pi}_{1kk}, \overline{\rho}_{k-12} \cdot \overline{\pi}_{2kk}, \overline{\rho}_{k-12} \cdot \overline{\pi}_{3kk}, \dots$ и $\overline{\pi}_{1kk}, \overline{\pi}_{2kk}, \overline{\pi}_{3kk}, \dots$, значит

$$\sum_{n \geq 2} \overline{\pi}_{nkk} \cdot s^n = \overline{\rho}_{k-12} \cdot \left(\sum_{n \geq 1} \overline{\pi}_{nkk} \cdot s^n \right)^2. \quad (3.36)$$

Выделяя первый член в сумме правой части (3.36), равный по (3.32), (3.20) s , получаем относительно $z = \sum_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n$ квадратное уравнение

$$\bar{\rho}_{k-12} \cdot z^2 - (2s \cdot \bar{\rho}_{k-12} + 1)z + \bar{\rho}_{k-12} \cdot s^2 = 0. \quad (3.37)$$

Так как $\sum_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n / s=0 = 0$, то берем только один из корней квадратного уравнения (3.37)

$$\sum_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nkk} \cdot s^n = s - \frac{1}{2\bar{\rho}_{k-12}} [V 1 + 4s \cdot \bar{\rho}_{k-12} - 1]. \quad (3.38)$$

Раскладывая в ряд по биному Ньютона правую часть (3.38) по степеням s и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в правой и левой частях (3.38), получаем для $\bar{\pi}_{nkk}$ (3.23).

Теперь докажем существование конечных пределов (3.21). Из (3.5) по формуле Бруно выводим (используя еще (3.18) и (3.27))

$$\begin{aligned} \rho_k^{2n-1} \cdot a_k \cdot \pi_{nkk} &= \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \cdot \rho_{k-1}^{2n-1} \cdot \sigma_{k-1} \cdot \pi_{nkk-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} - \frac{\rho_k \cdot a_k \pi_{1kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_1} \cdot \left\{ - \frac{\rho_k^3 \cdot a_k \pi_{2kk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_2} \dots \\ &\dots \left\{ - \frac{\rho_k^{2n-1} a_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} \right\}^{k_n} \cdot \left(\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} \right)^{m-1} + \frac{\rho_k^{2n-1} \cdot a_k \pi_{nkk}}{\rho_{k-1}} \cdot \rho_{k-1}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где суммирование производится как в (3.28).

Очевидно, что в (3.39) из-за $m \geq 1$ конечный предел (3.21) существует всегда, причем при $\rho_k \downarrow 0$ ненулевыми оказываются лишь пределы последнего слагаемого и того, у которого $m=1$, $k_1 = \dots = k_{n-1} = 0$, $k_n = 1$. Следовательно, из (3.9) и выражения (3.23) для $\bar{\pi}_{nkk}$ имеем (3.23) для $\bar{\pi}_{nkk}$.

Осталось выяснить порядок роста величин $a_{k+1} \cdot \bar{h}_{nkk+1}$ при $\rho_k \downarrow 0$.

Нетрудно из (3.6)–(3.8) убедиться в существовании конечных пределов (3.22). Покажем как можно вычислить $\bar{h}_{nkk+1}$, например, в наиболее трудном случае, для системы с обслуживанием заново. Помножим равенство (3.8) на $a_{k+1} \cdot \rho_k^{2n-2}$ и продифференцируем обе стороны его n раз в точке $s=0$. После чего перейдем к пределу при $\rho_k \downarrow 0$. Ясно, что ненулевым окажется лишь предел члена, у которого множителем является π_{nkk} . Этот член можно выделить так. Продифференцируем выражение (3.8), помноженное на $a_{k+1} \rho_k^{2n-2}$, и возьмем слагаемое с $\sigma_k \cdot \pi'_k(s)$

$$a_{k+1} \cdot \rho_k^{2n-2} \cdot \frac{\beta_{k+1}(s + \tau_k) \frac{\sigma_k}{s + \sigma_k} \{1 - \beta_k(s + \tau_k)\}}{\sigma_k \left\{ 1 - \frac{\sigma_k}{s + \sigma_k} [1 - \beta_{k+1}(s + \tau_k)] \pi_k(s) \right\}^2} \cdot \sigma_k \pi'_k(s). \quad (3.40)$$

Именно, при $(n-1)$ -кратном дифференцировании (3.40) появится слагаемое с $\sigma_k \pi_{nk}$ в точке $s=0$, которое и следует выделить. Коэффициент при $\sigma_k \cdot \pi'_k(s)$ из (3.40) после подстановки туда $s=0$ дает искомый коэффициент у $\sigma_k \cdot \pi_{nk}$. Таким образом

$$\begin{aligned} \bar{h}_{nk+1} &= \lim_{\rho_k \downarrow 0} \frac{a_{k+1}}{\sigma_k} \left[\frac{1}{\beta_{k+1}(\tau_k)} - 1 \right] \cdot \rho_k^{2n-2} \cdot \sigma_k \cdot \pi_{nk} = \\ &= \lim_{\rho_k \downarrow 0} (\rho_k - \rho_{k+1}) \rho_k^{2n-2} \cdot \sigma_k \cdot \pi_{nk} = 1(1 - c_{k+1}) \bar{\pi}_{nk} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что формула (3.24) верна для всех наших систем.

2. Пусть $\rho_{k-1} \downarrow 0$. Каков порядок величин π_{nkk} , π_{nk} , $\bar{h}_{nk+1}$? а) Рассмотрим сначала случай $\bar{\rho}_{k-2} > 0$. Тогда $\bar{\pi}_{nk-1k-1}$, $\bar{\pi}_{nk-1}$, $\bar{h}_{nk}$ вычисляются по формулам (3.20)–(3.24) с заменой k на $k-1$.

По формулам (3.33), (3.39), которые справедливы всегда, методом математической индукции с использованием (3.24) доказывается существование конечных пределов (3.20), (3.21) в нашем случае, а вывод (3.24) в рассматриваемом случае не отличается от приведенного в пункте 1.

Далее, (3.33) и (3.39) при переходе к пределу, когда $\rho_{k-1} \downarrow 0$, с помощью (3.20), (3.21) и (3.22) приобретут вид (3.25), (3.26). б) Так как порядок величин π_{nkk} , π_{nk} , $\bar{h}_{nk+1}$ по отношению к ρ_k не изменился, то при переходе от k к $k+1$ порядок величин $\pi_{nk+1k+1}$, π_{nk+1} , $\bar{h}_{nk+2}$ по отношению к ρ_{k+1} тоже не изменится и т. д.

С другой стороны, для всех k тоже верны формулы (3.25), (3.26). Если $c_k = 0$, то (3.25), (3.26) переходят в

$$\bar{\pi}_{nkk} = \bar{\rho}_{k-12} \cdot \{\bar{\pi}_{1kk} \cdot \bar{\pi}_{n-1kk} + \dots + \bar{\pi}_{n-1kk} \cdot \bar{\pi}_{1kk}\}, \quad (3.41)$$

$$\bar{\pi}_{nk} = \bar{\pi}_{nkk}, \quad (3.42)$$

так как $\bar{h}_{2k} = \lim_{\rho_{k-1} \downarrow 0} a_k \cdot \rho_{k-1}^2 \cdot h_{2k} = \bar{\rho}_{k-12}$ (использовали (3.12)).

Таким образом, $\bar{\pi}_{nkk}$ и $\bar{\pi}_{nk}$ при $c_k = 0$ вычисляются по формулам (3.23), $\bar{h}_{nk+1}$ при всех c_k — по (3.24).

4°. Предельная теорема для времени ожидания. В настоящем параграфе получена общая для всех рассматриваемых систем предельная теорема относительно виртуального времени ожи-

дания $w_k(t)$ вызова приоритета k в условиях критической загрузки. Виртуальное время ожидания для вызова приоритета k в момент t — время, которое пришлось бы ждать этому вызову до начала своего обслуживания, если бы он поступил в систему в момент t . Единственным ограничением является предположение прямого порядка обслуживания внутри каждого приоритетного класса. Отсутствие вызовов в системе в момент $t=0$ для получения предельной теоремы не является ограничением. В зависимости от количества вызовов в момент $t=0$ вид точных формул, определяющих виртуальное время ожидания в момент t , меняется. Положим

$$w_k(s, t) = Me^{-sw_k(t)} \quad (k = \overline{1, r}). \quad (4.1)$$

А. Предварительные сведения. При условии существования стационарного распределения в [2] выведены соотношения, определяющие $w_k(s, t)$ для всех рассматриваемых систем, когда порядок обслуживания вызовов одного и того же приоритета — прямой. Эти соотношения формулируются ниже в виде теорем 3 и 4, приведенных без доказательства. Обозначим

$$v_k(s) = v_k = s - \alpha_k h_k(s), \quad (4.2)$$

$$\mu_k(s) = \mu_k = s + \tau_{k-1} - \tau_{k-1} \pi_{k-1}(s). \quad (4.3)$$

Теорема 3. Для систем с абсолютным приоритетом ($\rho_{k1} < 1$)

$$w_k(s, t) = e^{v_k \cdot t} \left\{ 1 - \mu_k \int_0^t e^{-v_k \cdot u} \bar{P}(u) du \right\}, \quad (4.4)$$

где

$$\bar{p}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-st} \bar{P}(t) dt = \mu_{k+1}^{-1}. \quad (4.5)$$

Теорема 4. Для системы с относительным приоритетом ($\rho_{ri} < 1$)

$$\begin{aligned} w_k(s, t) = & e^{-v_k \cdot t} \left\{ 1 - \mu_k \int_0^t e^{-v_k \cdot u} P(u) du - \right. \\ & \left. - \sum_{j=k+1}^r (1 - \beta_j(\mu_k)) \int_0^t e^{-v_k \cdot u} P_j(u) du \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $P(t)$, $P_j(t)$ ($j = \overline{k+1, r}$) задаются своими преобразованиями Лапласа

$$p(s) = \mu_{r+1}^{-1}, \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=j+1}^r \frac{1 - \beta_i(\mu_{j+1})}{\mu_{j+1}} p_i(s) = \mu_{j+1}^{-1} - \mu_{r+1}^{-1} \quad (j = \overline{k, r-1}), \quad (4.8)$$

$h_k(s)$, $\pi_k(s)$ определены в § 3.

Заметим, что $P(t)$ — вероятность того, что в момент t либо система с абсолютным приоритетом свободна от вызовов, либо обслуживается вызов приоритета ниже k ; $P(t)$ — вероятность свободного состояния системы с относительным приоритетом в момент t ; $P_j(t) dt$ — вероятность попадания начала обслуживания в системе с относительным приоритетом вызова приоритета j в интервал $[t, t + dt)$.

Б. Вспомогательные леммы. В ходе доказательства предельной теоремы выявляется необходимость выяснения при $\rho_k \downarrow 0$ порядка функций $\bar{P}(t)$, $P(t)$, $P_j(t)$ ($j = \overline{k+1, r}$). Положим

$$\psi_j(s) = 1 - \sum_{n \geq 2} \bar{\pi}_{nj} \cdot s^{n-1} = - \sum_{n \geq 1} \bar{\pi}_{nj} \cdot s^{n-1} \quad (j = \overline{k, r}). \quad (4.9)$$

В частности, на основе (3.21), (3.23), (3.38), если $c_k = 0$

$$\psi_k(s) = \frac{1}{2s \cdot \rho_{k-12}} \left\{ \sqrt{1 + 4s \rho_{k-12}} - 1 \right\}. \quad (4.10)$$

Лемма 1. При $\rho_k \downarrow 0$, $t > 0$ существует конечный предел

$$\bar{f}^{(k)}(t) = \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_k^{-1} \cdot P\left(\frac{t}{\rho_k^2}\right), \quad (4.11)$$

причем

$$\bar{f}^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \bar{f}^{(k)}(t) dt = \frac{1}{s \psi_k(s)}. \quad (4.12)$$

Доказательство. Предел (4.11) существует, если существует

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_k \cdot \bar{P}(s \rho_k^2) &= \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_k \int_0^\infty e^{-s \cdot \rho_k^2 \cdot u} \bar{P}(u) du = \\ &= \lim_{\rho_k \downarrow 0} \frac{1}{\rho_k} \int_0^\infty e^{-sv} \bar{P}\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv = \lim_{\rho_k \downarrow 0} \frac{\rho_k}{\mu_{k+1}(s \rho_k^2)} = \frac{1}{s \psi_k(s)}. \end{aligned}$$

Для системы с относительным приоритетом все r потоков подразделим на l непересекающихся групп ($l = \overline{1, r}$) по ρ_i потоков в i -ой группе ($i = \overline{1, l}$)

$$\rho_0 \equiv 0, \quad \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r = r, \quad \bar{\rho}_i = \rho_1 + \dots + \rho_i \quad (i = \overline{1, l-1}).$$

Чем больше номер группы, тем более высокого приоритета потоки ему принадлежат. Если $i < j$ — номера двух потоков из разных групп, то $c_{ij} = \lim_{\rho_k \rightarrow 0} (\rho_i / \rho_k) = 0$; если же — из одной группы, то $c_{ij} > 0$. Пусть $c_{ij} = 1/c_{ji}$.

Лемма 2. *Существуют конечные пределы*

$$f^{(k)}(t) = \lim_{\rho_k \rightarrow 0} \rho_k^{-1} P\left(\frac{t}{\rho_k^2}\right) \quad (k = \overline{1, r}), \quad (4.13)$$

и если

$$k = \overline{\overline{p_{i-1}}, \overline{p_i}}, \quad i = \overline{0, l}, \quad k \geq 0,$$

то

$$f_j^{(k)}(s) = \lim_{\rho_k \rightarrow 0} \rho_k^{-1} P_j\left(\frac{t}{\rho_k^2}\right) \quad (j = \overline{k+1, p_l}), \quad (4.14)$$

причем преобразования Лапласа $f^{*(k)}(s)$, $f_j^{*(k)}(s)$ от $f^{(k)}(t)$, $f_j^{(k)}(t)$ равны

$$f^{*(k)}(s) = \begin{cases} \frac{c_{kr}}{s \cdot \psi_r(c_{kr}^{-2} \cdot s)}, & \overline{p_{l-1}} \leq k \leq r, \\ 0, & 1 \leq k < \overline{p_{l-1}}; \end{cases} \quad (4.15)$$

$$f_j^{*(k)}(s) = \begin{cases} \beta_{j1}^{-1} \left[\frac{c_{kj-1}}{s \cdot \psi_{j-1}(c_{kj-1}^{-2} \cdot s)} - \frac{c_{kj}}{s \cdot \psi_j(c_{kj}^{-2} \cdot s)} \right], & \overline{p_{l-1}} + 2 \leq j \leq \overline{p_l}, \\ \beta_{j1}^{-1} \frac{c_{kj-1}}{s \cdot \psi_{j-1}(c_{kj-1}^{-2} \cdot s)}, & j = \overline{p_l} + 1, \quad (\overline{p_{l-1}} < k \leq \overline{p_l}). \end{cases} \quad (4.16)$$

Доказательство. Пределаем необходимые для дальнейшего выкладки

$$\frac{1}{\rho_k} \int_0^\infty e^{-sv} P\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv = \rho_k \int_0^\infty e^{-s \cdot \rho_k^2 \cdot u} P(u) du = \rho_k \cdot p(s \rho_k^2),$$

$$\frac{1}{\rho_k} \int_0^\infty e^{-sv} P_j\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv = \rho_k \int_0^\infty e^{-s \cdot \rho_k^2 \cdot u} P_j(u) du = \rho_k \cdot p_j(s \rho_k^2) \quad (j = \overline{k+1, r}),$$

$$\mu_{j+1}(s \rho_k^2) = s \rho_k \left[\frac{\rho_k}{\rho_j} - \sum_{i=2}^j (\sigma_j \cdot \overline{\pi}_{nj} \cdot \rho_j^{2n-1}) \left(\frac{\rho_k}{\rho_j} \right)^{2n-1} s^{n-1} \right] \quad (j = \overline{1, r}),$$

$$\lim_{\rho_k \rightarrow 0} \mu_{j+1}(s \rho_k^2) = \begin{cases} 0, & \overline{p_{l-1}} \leq k < j \leq \overline{p_l}, \\ \infty, & k < \overline{p_l} \leq i, \end{cases}$$

$$\lim_{\rho_k \downarrow 0} \frac{1 - \beta_l(\mu_{j+1}(s \cdot \rho_k^2))}{\mu_{j+1}(s \rho_k^2)} = \beta_{j+1}(\bar{p}_{l-1} \leq k < \bar{p}_j; j \geq \bar{p}_{l-1}), \quad (4.17)$$

$$\lim_{\rho_k \downarrow 0} \frac{\rho_k}{\mu_{j+1}(s \rho_k^2)} = \begin{cases} \frac{c_{kj}}{s^{\frac{1}{2}}(c_{kj}^{-2} \cdot s)}, & \bar{p}_{l-1} \leq k, j < \bar{p}_l, \\ 0, & \bar{p}_{l-1} \leq k < \bar{p}_l \leq j. \end{cases} \quad (4.18)$$

Здесь $c_{kk} \equiv 1$. Перейдем непосредственно к доказательству нашей леммы. Перепишем уравнения (4.8) в виде

$$\sum_{l=j+1}^r \frac{1 - \beta_l(\mu_{j+1}(s \cdot \rho_k^2))}{\mu_{j+1}(s \rho_k^2)} \rho_k \cdot p_l(s \cdot \rho_k^2) = \frac{\rho_k}{\mu_{j+1}(s \rho_k^2)} - \frac{\rho_k}{\mu_{r+1}(s \rho_k^2)} \quad (j = \overline{1, r-1}). \quad (4.19)$$

а) Пусть $k \geq \bar{p}_{l-1}$. В последних $r - \bar{p}_{l-1}$ уравнениях (4.23) устремим $\rho_k \downarrow 0$. По (4.18) предел правых частей, существует значит существует предел и левых частей. После перехода к пределу $\rho_k \downarrow 0$ вычитаем каждое последующее уравнение из предыдущего, что дает (4.14) и (4.16) для $j > k, k \geq \bar{p}_{l-1}$. Запишем

$$\sum_{l=j+1}^r \beta_{l+1} \cdot \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_k \cdot p_l(s \rho_k^2) = \frac{c_{kj}}{s^{\frac{1}{2}}(c_{kj}^{-2} \cdot s)} - \frac{c_{kr}}{s^{\frac{1}{2}}(c_{kr}^{-2} \cdot s)} \quad (j = \bar{p}_{l-1}).$$

Теперь все в тех же $r - \bar{p}_{l-1}$ уравнениях при $\bar{p}_{l-2} \leq k < \bar{p}_{l-1}$ устремим $\rho_k \downarrow 0$. Предел правой части (4.19) равен нулю по (4.18), следовательно, если в следующих от конца до рассмотренных выше уравнений p_{l-1} уравнениях перейти к пределу при $\rho_k \downarrow 0$ ($\bar{p}_{l-2} \leq k < \bar{p}_{l-1}$), то получим

$$\sum_{l=j+1}^{\bar{p}_{l-1}} \beta_{l+1} \cdot \lim_{\rho_k \downarrow 0} \rho_k \cdot p_l(s \rho_k^2) = \frac{c_{kj}}{s^{\frac{1}{2}}(c_{kj}^{-2} \cdot s)} \quad (\bar{p}_{l-2} \leq j < \bar{p}_{l-1}),$$

откуда вытекают (4.14) и (4.16) при $\bar{p}_{l-1} \geq j > k \geq \bar{p}_{l-2}$ и т. д.

В. Асимптотика времени ожидания. Ниже приводится общая предельная теорема относительно времени ожидания для вызова приоритета k в условиях критической загрузки ($\rho_k \downarrow 0$) систем с абсолютным и относительным приоритетом. Порядок обслуживания вызовов каждого приоритетного класса — прямой. Положим

$$\varphi_k(s) = 1 + \sum_{n \geq 1} h_{nk} \cdot s^{n-1}. \quad (4.20)$$

Теорема 5. Пусть $\rho_{p1} < 1$ (для систем с абсолютным приоритетом достаточно $\rho_{k1} < 1$), $\rho_k \downarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, таким образом, что $t \rho_k^2 \rightarrow \tau$, $0 < \tau < \infty$. Тогда

а) при $c_k > 0$

$$\begin{aligned} \omega_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s, t) &\rightarrow \omega_{k+}(s) = \\ &= e^{\frac{\tau}{c_k} \cdot s \bar{\rho}_k(c_k \cdot s)} \cdot s \cdot \psi_{k-1}(c_k \cdot s) \int_0^\infty e^{-\frac{u}{c_k} \cdot s \bar{\rho}_k(c_k \cdot s)} \cdot f_k(u) du, \end{aligned} \quad (4.21)$$

и для

$$f_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f_k(t) dt = \frac{1}{s \psi_k(s)}; \quad (4.22)$$

б) при $c_k = 0$

$$\begin{aligned} \omega_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s, t) &\rightarrow \omega_{k+}(s) = \\ &= e^{s[1 + s \bar{\rho}_k - 12]} \cdot s \cdot \int_0^\infty e^{-s[1 + s \bar{\rho}_k - 12]u} f_k(u) du, \end{aligned} \quad (4.23)$$

а

$$f_k(u) = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_{k2}}{\pi}} \int_0^\infty v^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{v}{4 \rho_{k2}}} dv. \quad (4.24)$$

Следствие 1. Если $\rho_k \downarrow 0$, $c_k = 0$, $t \rightarrow \infty$, $t \rho_k^2 \rightarrow \infty$, то

$$P(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot \omega_k(t) < x) \rightarrow 1 - e^{-(x/\rho_{k-12})}, \quad x > 0. \quad (4.25)$$

Следствие 2. Функции $U = c_k^{-1} \cdot s \bar{\rho}_k(c_k s)$ и $s = U \cdot \psi_k(U)$ являются взаимно обратными.

Доказательство теоремы 5. Используя (3.21), (3.22) (4.2) и (3.9)–(3.12), получаем разложения, верные для всех наших систем

$$\mu_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s) = \begin{cases} \rho_k \cdot s \cdot \psi_{k-1}(c_k \cdot s) + o(\rho_k), & c_k > 0, \\ \rho_k \cdot s + o(\rho_k), & c_k = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\frac{\tau}{\rho_k} \nu_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s) = \begin{cases} \frac{\tau}{c_k} s \bar{\rho}_k(c_k \cdot s) + o(1), & c_k > 0, \\ \tau s [1 + s \bar{\rho}_k - 12] + o(1), & c_k = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Доказательство дальше ведется для случая систем с относительным приоритетом, как сравнительно более сложного.

Уравнение (4.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s, \frac{\tau}{\rho_k}\right) &= \exp \left[\frac{\tau}{\rho_k} \nu_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s) \right] \times \\ &\times \left\{ 1 - \mu_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s) \int_0^{\tau/\rho_k} e^{-u \nu_k(\rho_{k-1} \cdot \rho_k \cdot s)} P(u) du - \right. \end{aligned}$$

$$- \sum_{j=k+1}^r (1 - \beta_j(\rho_k(\rho_{k-1} \rho_k s))) \int_0^{\tau/\rho_k^2} e^{-u \rho_k (\rho_{k-1} \rho_k s)} P_j(u) du \}. \quad (4.28)$$

Асимптотическое поведение интегралов (u заменено на v/ρ_k^2)

$$J_{\rho_k}^{(j)}(\tau, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\tau/\rho_k^2} e^{-u \rho_k (\rho_{k-1} \rho_k s)} P_j(u) du = \frac{1}{\rho_k} \int_0^{\tau} e^{-\frac{v}{\rho_k^2} \rho_k (\rho_{k-1} \rho_k s)} P_j\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv,$$

$$J_{\rho_k}(\tau, s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\tau/\rho_k^2} e^{-u \rho_k (\rho_{k-1} \rho_k s)} P(u) du = \frac{1}{\rho_k} \int_0^{\tau} e^{-\frac{v}{\rho_k^2} \rho_k (\rho_{k-1} \rho_k s)} P\left(\frac{v}{\rho_k^2}\right) dv.$$

просто усмотреть, обратившись к лемме 2 и (4.27), откуда вытекает существование конечных пределов $\lim_{\rho_k \rightarrow 0} J_{\rho_k}^{(j)}(\tau, s)$ и $\lim_{\rho_k \rightarrow 0} J_{\rho_k}(\tau, s)$. Следовательно, из (4.28), (4.26), леммы 2 вытекает, что существует конечный предел

$$\begin{aligned} \omega_{k\tau}(s) &= \lim_{\rho_k \rightarrow 0} \omega_k\left(\rho_{k-1} \rho_k s, \frac{\tau}{\rho_k^2}\right) = \\ &= \begin{cases} e^{\frac{\tau}{c_k} s \rho_k (c_k s)} \left[1 - s \rho_{k-1}(c_k s) \int_0^{\tau} e^{-\frac{u}{c_k} s \rho_k (c_k s)} f_k(u) du \right], & c_k > 0, \\ e^{-s [1 + s \rho_{k-1}]} \left[1 - s \int_0^{\tau} e^{-us [1 + s \rho_{k-1}]} f_k(u) du \right], & c_k = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.29)$$

где обозначено

$$f_k(u) = f^{(k)}(u) + \sum_{j=k+1}^l \beta_{j1} f_j^{(k)}(u), \quad (4.30)$$

а

$$l = \min \{n; n > k, c_{kn} > 0\}.$$

Если же такого n не существует, то положим $l \equiv r + 1$.

Для вычисления $f_k(u)$ можно воспользоваться уравнением (4.29). Поскольку при фиксированных τ , $0 < \tau < \infty$, c_k и s , $\operatorname{Re} s > 0$, с увеличением τ первый сомножитель в правой части (4.29) стремится к бесконечности, а $|\omega_{k\tau}(s)|$ ограничена, то

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{c_k} s \rho_k (c_k s)} f_k(u) du = s^{-1}, \quad c_k > 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-us} [1 + \sqrt{c_k - 1}] f_k(u) du = s^{-1}, \quad c_k = 0. \quad (4.31)$$

В то же время, из (4.30) и леммы 2 имеем

$$f_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_k(t) dt = f^{(k)}(s) + \sum_{i=k+1}^l \beta_{i1} \cdot f_j^{(k)}(s) = \frac{1}{s \psi_k(s)},$$

откуда и из (4.31) становятся очевидными следствие 2 и (4.22).

Уравнение, аналогичное (4.31) при $c_k = 0$, изучено в [3], где получен явный вид $f_k(u)$. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13.V.1974

Է. Ա. ԴԱՆԻԼԻԱՆ. $\bar{M}_r / \bar{G}_r / 1 / \infty$ նախապատվությամբ սիստեմների զբաղվածության պարբերության և սպասման ժամանակի ասիմպտոտիկ հետազոտում կրիտիկական ծանրաբեռնվածության դեպքում (ամփոփում)

Աշխատանքում ապացուցվում են $\bar{M}_r / \bar{G}_r / 1 / \infty$ տիպի հարաբերական և բացարձակ նախապատվությամբ սիստեմների առաջին k հոսքերի զբաղվածության պարբերության n -րդ մոմենտին ($n \geq 1$) և k -րդ հոսքի t -ից կախված սպասման ժամանակի բաշխման ֆունկցիային վերաբերող սահմանային թեորեմներ, երբ $\rho_{k1} \uparrow 1$, $\rho_{r1} < 1$ ($k = \overline{1, r}$, $t \geq 0$): Այստեղ ρ_{k1} առաջին k հոսքերի ծանրաբեռնվածությունն է, Սպասման ժամանակի բաշխման հետազոտումը կատարված է $t \rightarrow \infty$, $t \cdot (1 - \rho_{k1})^2 \rightarrow \tau$, $0 < \tau < \infty$ դեպքում:

E. A. DANILIAN. *Asymptotical investigation of the busy period and waiting time for the $\bar{M}_r / \bar{G}_r / 1 / \infty$ priority queues in heavy traffic (summary)*

For the $\bar{M}_r / \bar{G}_r / 1 / \infty$ queues with head-of-the-line and preemptive priorities, limit theorems about the n -th moment, $n \geq 1$, of busy period (concerning the first k types of customers) and the virtual waiting time distribution (concerning the k -customers) are obtained, when $\rho_{k1} \uparrow 1$ and $\rho_{r1} < 1$ ($k = \overline{1, r}$).

Here ρ_{k1} is the traffic intensity of the first k streams of customers.

For the virtual waiting time the case, when $t \rightarrow \infty$, $\rho_{k1} \uparrow 1$, $(1 - \rho_{k1})^2 \cdot t \rightarrow \tau$, $0 < \tau < \infty$ is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. К. Джейсуол. Очереди с приоритетами, Изд. „Мир“, 1973.
2. Б. В. Гнеденко и др. Приоритетные системы обслуживания, М, МГУ, 1973.
3. О. В. Висков. О времени ожидания в смешанной системе массового обслуживания, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР, 71, 1964, 26—34.
4. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ, ИИЛ, 1963.

ՐՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ա. Թալալյան. Ըստ սահմանափակ լրիվ սթենդարտի սխեմաների ֆուրյեի շարքերի հաջադասության մասին	193
Ա. Ա. Կիտալյան. Բզազիանայի-Թի-Սյան խնդրի Դանյու-Կարամանի զանգում	207
Բ. Ս. Նախապետյան. Դիսկրետ արգումենտով պատահական գրքային դաշտի ուժեղ խառ- նվածքի երա մի քանի հիդրոստատիկներ	242
Վ. Ա. Ազգումանյան. Ֆակտոր-ժիեռներ. բոս գրեմիայի սխեմաների հաջադասության խառնված հաջադասության վրա	255
Վ. Ի. Կազիմով. Հուլմուրի ֆունկցիաների վերաբերյալ մի միավորության թեորեմի մասին	266
Է. Ա. Դանիլյան $\bar{M}, \bar{G}, 1/\infty$ նախադասությամբ սխեմաների զրազմասության պար- բերության և պատման մոմենտի ախճադասով հետազոտում հրեթիկական ժան- րախնդմասության գնդում	272

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Талалин. О сходимости рядов Фурье по ограниченными полными орто- нормированным системам	193
А. А. Киталян. Задача п-квазианалитичности в классах Денжу-Карамана	207
Б. С. Нахпетян. Сильное перемешивание гиббсовского случайного поля с дискретным аргументом и некоторые его приложения	242
В. А. Арзуманян. Фактор-состояния на сращенных произведениях, по- строенных по динамической системе	255
В. И. Гаврилов. Об одной теореме единственности для голоморфных функций	264
Э. А. Данилян. К асимптотическим периодам занятости и времени ожидания при- оритетных систем $\bar{M}, \bar{G}, 1/\infty$ при аритической нагрузке	272

CONTENTS

A. A. Talalian. On the convergence of Fourier series by bounded complete orthonormal systems	193
A. A. Kitilian. The p-quasianalyticity problem in the Denjoy-Carleman classes	207
B. S. Nahapetian. Strong mixing property of the Gibbs random field and its applications	242
V. A. Arzumanyan. Factor-states on the cross-products constructed by dyna- mical systems	255
V. I. Gavrilov. A uniqueness theorem for holomorphic functions	264
E. A. Danilian. Asymptotical investigation of the busy period and waiting time for the $\bar{M}, \bar{G}, 1/\infty$ on priority queues in heavy traffic	272