ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

1143 1.10002

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editorial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДАННЫМИ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Как известно, для того чтобы нехарактеристическая задача Коши для системы первого порядка с произвольными гладкими младшими членами была корректна, необходимо и достаточно, чтобы данная система была симметризуема (или регулярно гиперболична) (см. [1]—[3]). Для несимметризуемых систем корректность задачи Коши зависит от поведения младших членов.

Для слабо гиперболических (несимметризуемых) систем с характеристиками постоянной кратности в работах [4]—[6] даны необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши.

В [7] исследована задача Коши с весом для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости.

В настоящей заметке получены достаточные условия корректности задачи Коши для некоторых классов слабо гиперболических п. д. систем первого порядка, вырождающихся на начальной гиперплоскости.

Пусть S — ограниченная область в R^n, а V — переменная полоса

$$V = V_t = \{\bar{x} = (x_0, x),\ 0 \leqslant x_0 \leqslant t,\ x \in S\}.$$

Через S_t мы обозначим гиперплоскость

$$\{\bar{x},\ \bar{x} \in V,\ x_0 = t\},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ T > 0.$$

Пусть $\mathfrak{M}_l$ — множество дифференцируемых на $[0, T]$ вектор-функций $\mu = (\mu_1(t), \cdots, \mu_l(t))$, удовлетворяющих условиям

$$\mu_i(+0) = 0,\ \dot{\mu}_i \equiv \mu_i'(t) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, l, \tag{1}$$

$$\dot{\mu}_i / \mu_i \leqslant \text{const}\, \dot{\mu}_{i+1} / \mu_{i+1}, \tag{2}$$

$$\mu_{i+1}(t) \leqslant \text{const}\, \mu_i(t),\ i = 1, \cdots, l-1. \tag{3}$$

Через $H_0^{p,q}(V)$ мы обозначим, как обычно, замыкание пространства бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю в окрестности S_0, в $H^{p,q} \cdot L^{p,q}$ — пополнение бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями по норме

$$|D^{p,q}f|_1 = \int_0^l |D^{p,q}f,\ S_\tau|\, d\tau, \tag{4}$$

где $|D^{p,q}f,\ S|$ — норма пространства $H^{p,q}(S)$.

Для п. д. операторов Q классов $C^{3,p}$ или $C^{3,\infty}$ (т. е. для операторов с символом $q(x_0,\ x,\ \zeta) \in C^{3,p,\infty}$, причем при $p=\infty$ дополнительно предполагается, что $q(\tilde{x},\ \zeta)$ не зависит от x при больших $|x|$, (см. [10] — [12]) и порядка r введем обозначения

$$\|Q\|_0 = \mathrm{const}\cdot \max_{x,\ |\zeta|=1} |q_0(\tilde{x},\ \zeta)|, \tag{5}$$

$$|Q|_n = \mathrm{const}\cdot \max_{\substack{x,\ |\zeta|=1\\ |\alpha|<p,\ |\beta|<\frac{n+1}{2}}} |D_x^\alpha D_\zeta^\beta\ q_0(\tilde{x},\ \zeta)|, \tag{6}$$

где q_0 — главный символ оператора Q. Обозначим через Λ п. д. оператор с символом $\sqrt{1+|\zeta|^2}$. Рассмотрим задачу Коши

$$Mu=f,\ u|_{S_0}=0, \tag{7}$$

где $M=\dfrac{\partial}{\partial t} - i\mathrm{H}\Lambda - B$, а $\mathrm{H}(\tilde{x},\ D_x)$, $B(\tilde{x},\ D_x)$ — матричные (размера $l\times l$) п. д. операторы класса $C^{1,p}$ нулевого порядка.

Будем полагать, что $\mathrm{H}(\tilde{x},\ \zeta)$ при $x_0>0$, $(x,\ \zeta)\in S\times R^n\diagdown 0$ подобна диагональной (или симметризуема), но при $x_0=0$ допустим нарушение этого условия.

Обозначим через H_i, B_i, L_i матричные п. д. операторы с элементами

$$(\mathrm{H}_i)_{kj} = \begin{cases} 0, & k<j,\ j=i+2,\cdots,\ l \\ h_{kj}\equiv(\mathrm{H})_{kj} & \text{— для остальных } k,\ j, \end{cases} \tag{8}$$

$$(B_i)_{kj} = \begin{cases} 0, & k<j,\ j=i+2,\cdots,\ l \\ b_{kj}\equiv(B)_{kj} & \text{— для остальных } k,\ j, \end{cases} \tag{8'}$$

$$(L_i)_{kj} = \begin{cases} \mu_k\Lambda^{l-1-i}\delta_{kj}, & k,\ j=1,\cdots,\ i+1 \\ \mu_{i+1}\Lambda^{l-k}\delta_{kj}, & k,\ j=i+2,\cdots,\ l, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$i=0,\cdots,\ l-1,\ \mu_1(t)\equiv 1,\ (\mu_2,\cdots,\ \mu_l)\in \mathfrak{M}_{l-1}. \tag{10}$$

Справедлива

Теорема. *Пусть существует вектор-функция* $(\mu_1,\cdots,\ \mu_l)\in\in\mathfrak{M}_l$ *такая, что главные символы* $\tilde{\mathrm{H}}_i(\tilde{x},\ \zeta)$ *п. д. операторов*

$$L_i\mathrm{H}_i L_i^{-1},\ i=1,\cdots,\ l-1$$

подобны диагональным в $V\times R^n\diagdown 0$, *т. е. существуют матрицы* $N_i(\tilde{x},\ \zeta)$ *такие, что*

$$\det N_l(\tilde{x}, \zeta) \neq 0 \text{ в } V \times R^n \setminus 0, \tag{11}$$

$$|N_l|_\Pi \leqslant \text{const} \tag{12}$$

и выполняются равенства

$$N_l \tilde{\mathrm{H}}_i = Q_i N_l, \quad i = 1, \cdots, l-1 \tag{13}$$

(*здесь* Q_i — *некоторые диагональные матрицы*).

Пусть также выполнены следующие условия:

$$|\mathrm{H}|_\Pi, \ |B|_\Pi, \ \mu_{l+1} |\dot{N}_l|_\Pi / \mu_{l+1}, \ \frac{|h_{kj}|_\Pi}{\mu_j} < \infty \tag{14}$$

здесь

$$i = 1, \cdots, l-1; \ k < j, \ j = 2, \cdots, l, \ k = 1, \cdots, l.$$

Тогда если младшие члены оператора M *удовлетворяют условиям*

$$|b_{kj}|_\Pi \leqslant \text{const} \cdot \dot{\mu}_j, \ k < j, \ j = 1, \cdots, l, \tag{15}$$

то задача Коши (7) *при* $f \in L^{0, k+q}$ *имеет единственное решение* $u \in H_0^{1, k-1}$, *причем* $(1 \leqslant k \leqslant \bar{p})$

$$|D^{1, k-1} u, V| \leqslant \text{const} \int_0^t |D^{0, k+q} Mu, S_\tau| \, d\tau. \tag{16}$$

Замечание. Если операторы H, B принадлежат классу $C^{\beta, \infty}$, то теорема остается справедливой, если в условиях (14), (15) сделать замену $|\cdot|_\Pi \to \|\cdot\|_\Pi$.

Замечание. Из (11) — (13) следует, что матрица $\mathrm{H}(\tilde{x}, \zeta)$ при $x_0 > 0$ подобна диагональной.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные задачи Коши

$$M_i u = f, \ u|_{S_0} = 0, \ i = 0, 1, \cdots, l-1, \tag{17}$$

где

$$M_i = \frac{\partial}{\partial t} - i \mathrm{H}_i \Lambda - B_i.$$

Так как по определению $\mathrm{H}_{l-1} = \mathrm{H}$, $B_{l-1} = B$, то при $i = l-1$ мы получаем исходную задачу Коши (7).

Корректность задачи Коши (17) мы докажем индукцией по $i = 0, \cdots, l-1$, при этом на последнем шаге индукции мы получим корректность задачи Коши (7).

Пусть $i = 0$, тогда преобразованием $w_0 = L_0 u$ система (17) приводится к регулярно гиперболической (симметризуемой) и корректность задачи Коши получается обычным методом [1], [2].

Рассмотрим теперь подробнее случай $i = 1$. Задачу Коши

$$M_1 u = f, \ u|_{S_0} = 0 \tag{18}$$

при достаточной гладкости f по пространственным переменным можно свести к задаче Коши

$$M_1 \hat{u} = \hat{f}, \ \hat{u}|_{S_0} = 0, \tag{19}$$

причем

$$\hat{f} = 0\,(\mu_2^{\gamma}),\quad \gamma = \text{const} > 0. \tag{20}$$

Действительно, пусть u_{j+1} — решения задач Коши

$$M_0 u_{j+1} = f_j,\; u_{j+1}|_{S_0} = 0,\; j = 0, \cdots, p-1, \tag{21}$$

где

$$\hat{f} = f_p,\; f_0 \equiv f,\; f_j = (M_0 - M_1)\, u_j,\; j = 1, \cdots, p. \tag{22}$$

Если вычесть из (18) уравнения (21), $j = 0, \cdots, p-1$, то обозначив $\hat{u} = u - u_1 - \cdots - u_p$, получим (19). Оценка (20) непосредственно вытекает из неравенств ($s = 0, \cdots, l-2$)

$$|D^{0,\,k}(M_{s+1} - M_s)\; v,\; S| \leqslant \text{const} \cdot \dot{\mu}_{s+2} |D^{0,\,k+1}\, v,\; S| \tag{23}$$

при $s = 0$.

Задачу Коши (19) преобразованием $w = L_1 \hat{u}$ приведем к системе вида (7), причем матрица $H(\tilde{x}, \zeta)$ подобна диагональной, но оператор B является неограниченным (по временной переменной, и поэтому система не является регулярно гиперболической (симметризуемой). Для этой системы обычным способом [1] получаем оценку

$$|D^{0,\,k} w,\; S|^2 \leqslant \int_0^t \left(c + c\frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}\right) |D^{0,\,k} w,\; S_\tau|\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t |D^{0,\,k} L_1 M_1 \hat{u},\; S| \cdot |D^{0,\,k} w,\; S_\tau|\, d\tau. \tag{24}$$

Обращая это интегральное неравенство с неинтегрируемым ядром при условии (20) (см. [8]), получаем оценку (16) с M_1 вместо M. Продолжая эту процедуру, мы получим на последнем шаге индукции $i = l-1$ оценку (16). Теорема существования вытекает из априорной оценки (16) (см., например, [9]).

Пример 1. Сведем уравнение

$$u_{tt} - \mu_2^2(t)\, u_{xx} - \mu_3^2(t)\, u_{yy} + a u_t + b u_x + c u_y = f \tag{25}$$

к системе

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = f \tag{26}$$

$${}^t v = (u_t,\; u_x,\; u_y).$$

Введем матрицы

$$L_1 = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

нетрудно проверить, что при условиях

$$\mu_2 \geqslant \mathrm{const}\cdot\mu_3 \geqslant 0,\ \frac{\dot\mu_3}{\mu_3} > \mathrm{const}\ \frac{\dot\mu_2}{\mu_2} > 0, \tag{28}$$

$$|B|_\Pi < \infty. \tag{28'}$$

Все условия (1) — (3), (11) — (14) теоремы выполнены и задача Коши для системы (26) с нулевыми данными на S_0 корректна, если

$$|b|_\Pi \leqslant \mathrm{const}\cdot\dot\mu_2(t),\ |c|_\Pi \leqslant \mathrm{const}\cdot\dot\mu_3. \tag{29}$$

Эти условия совпадают с известными условиями корректности задачи Коши для уравнения (25) (см., например, [7]—[9]).

В частности, в качестве функций μ_i можно выбрать такие:

$$\mu_2 = t^\alpha,\ \alpha > 1,\ \mu_3 = \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\}. \tag{30}$$

Пример 2. Уравнение

$$\begin{gathered} u_{ttt} + \beta_2(t)\,u_{ttx} + \beta_1 u_{txx} + \beta_0 u_{xxx} + \\ + a u_{tt} + b u_{tx} + c u_{xx} = f \end{gathered} \tag{31}$$

сведем к системе

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

здесь ${}^t v_1 = (u_{tt},\ u_{tx},\ u_{xx})$.

Матрицы L_i введем так же как и в предыдущем примере. Пусть λ_i — корни уравнения

$$\lambda^3 - \beta_2\lambda^2 + \beta_2\lambda - \beta_0 = 0,$$

тогда для выполнения условий (1)—(3), (11)—(14) достаточно предположить существования функций $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$ таких, что

$$0 \leqslant \frac{\dot\mu_2}{\mu_2} \leqslant c\,\frac{\dot\mu_3}{\mu_3},\ 0 \leqslant \mu_3 \leqslant c\mu_2, \tag{33}$$

$$|\lambda_1 - \lambda_2| / \mu_2,\ |(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)| / \mu_3 > 0, \tag{34}$$

$$\frac{|D^{0,p}\lambda_i|}{\dot\mu_2},\ \frac{|D^{1,p-1}\lambda_i|}{\dot\mu_2},\ \frac{|D^{1,p-1}(\lambda_i\lambda_j)|}{\dot\mu_3},\ \frac{|D^{0,p}(\lambda_i\lambda_j)|}{\dot\mu_3} < \infty. \tag{35}$$

Условия корректности (15) имеют вид

$$\frac{|D^{0,p}b|}{\dot\mu_2},\ \frac{|D^{0,p}c|}{\dot\mu_3} < \infty. \tag{36}$$

и совпадают с известными условиями корректности задачи Коши для уравнения (31) (см., например, [7]—[9]).

Институт математики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Поступила 18.II.1975

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդիրը առաջին կարգի թույլ հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ սիստեմների համար տվյալներով վերածման հիպերհարթության վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական սիստեմների համար։ Ապացուցվում է այդ սիստեմների համար լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ սիստեմի ցածր կարգի անդամը բավարարում է որոշակի պայմանի։

G. R. HOVHANISIAN. *The Cauchy's problem for the first order weakly hyperbolic pseudodifferential systems with data on the hyperplane of degeneration* (summary)

The Cauchy's problem for weakly hyperbolic systems with initial conditions given on the hyperplane of degeneration is considered. The correctness of the Cauchy's problem under some conditions is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Mizohata.* Systemés hyperboliques, J. Math. Soc. Japan, 11, 1959, 205—233.
2. *A. P. Calderon.* Integrales singulares y sus applicaciones a ecuaciones diferenciales hyperbolicas Cursos y seminorias di matematica, Fase. 3, Univ. of Buenos Aires, 1960.
3. *T. Kano.* A neccesary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for the first order hyperbolic system with multiple characteristics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser A., 5: 2, 1969, 149—164.
4. *В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для гиперболических систем с кратными характеристиками, УМН, XXVII, № 4, 1972, 221—222.
5. *В. М. Петков.* О задаче Коши для гиперболических систем первого порядка с кратными характеристиками, ДАН ССР, 209, № 4, 1973, 795—797.
6. *M. Y. Demay.* Le problem de Cauchy pour les systemés hyperboliques a characteristiques double, C. R. Acad. Sci., Paris, 278: 11, 1974, 771—773.
7. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 289—292.
8. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 2, 1968, 79—100.
9. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 149—165.
10. *М. С. Агранович.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, XX, № 5, 1965, 3—120.
11. *М. С. Агранович.* Граничные задачи для систем псевдодифференциальных уравнений первого порядка, УМН, XXIV, № 1, 1969, 61—125.
12. *Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Алгебра псевдодифференциальных операторов, сб., „Псевдодифференциальные операторы", 9—62, М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Ю. А. КУТОЯНЦ

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

1°. Концепция локальной асимптотической нормальности (ЛАН) семейства распределений, введенная Л. Ле Камом, оказалась довольно плодотворной в задачах проверки гипотез и оценивания параметров [1—5]; обзор работ на эту тему имеется в [2].

В большинстве работ, за исключением [6], рассматривались дискретные схемы наблюдений. Поэтому представляется интересным получить условия ЛАН для достаточно широкого класса процессов.

В настоящей работе приводятся условия ЛАН для процессов диффузионного типа [7] и рассматривается два примера, когда эти условия выполнены.

2°. На протяжении всей работы мы будем пользоваться определением ЛАН семейства мер для одномерного пространства параметров, которое мы приведем здесь, цитируя работу [6].

Пусть заданы:

1. Открытое множество $\Theta \subset R$ (множество значений параметра);

2. Произвольное множество $E = \{\varepsilon\} \subset R$, имеющее предельную точку ε_0 (ε — аналог номера серии, по элементам ε осуществляется предельный переход);

3. Семейство вероятностных пространств $\{\Omega, F^{(\varepsilon)}, Q_\theta^{(\varepsilon)}\}$, $\theta \in \Theta$, $\varepsilon \in E$, где Ω — пространство элементарных событий, $F^{(\varepsilon)}$ — некоторая σ-алгебра на нем и $Q_\theta^{(\varepsilon)}$ — вероятностная мера на $F^{(\varepsilon)}$;

4. Семейство $F^{(\varepsilon)}$ измеримых случайных объектов $X^{(\varepsilon)}$ со значениями из измеримого пространства $(\mathbf{X}^{(\varepsilon)}, \mathbf{R}^{(\varepsilon)})$.

Распределение $P_\theta^{(\varepsilon)}$ случайного объекта $X^{(\varepsilon)}$, заданного на $\{\Omega, F^{(\varepsilon)}, Q_\theta^{(\varepsilon)}\}$, задается формулой $P_\theta^{(\varepsilon)}(\Gamma) = Q_\theta^{(\varepsilon)}(X^{(\varepsilon)} \in \Gamma)$ для любого $\Gamma \in \mathbf{R}^{(\varepsilon)}$. Пусть $dP_{\theta_2}^{(\varepsilon)}/dP_{\theta_1}^{(\varepsilon)}(X^{(\varepsilon)})$ — производная Радона-Никодима абсолютно непрерывной компоненты меры $P_{\theta_2}^{(\varepsilon)}$ по мере $P_{\theta_1}^{(\varepsilon)}$ на наблюдении $X^{(\varepsilon)}$. Будем говорить, что семейство $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ локально асимптотически нормально в точке $\theta_0 \in \Theta$, если существует функция $\varphi_\varepsilon = \varphi(\theta_0, \varepsilon)$ такая, что для любого $u \in R$ справедливо представление

$$Z_\varepsilon(u) \equiv \frac{dP_{\theta_0+u\varphi_\varepsilon}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta_0}^{(\varepsilon)}}(X^{(\varepsilon)}) = \exp\left\{u\Delta_{\varepsilon,\theta_0} - \frac{1}{2}u^2 + \psi_\varepsilon(u, \theta_0)\right\}, \tag{1}$$

где

$$L\{\Delta_{\varepsilon,\theta_0} | P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\} \to N(0, 1)^*\tag{2}$$

и

$$\psi_\varepsilon(u, \theta_0) \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} 0.\tag{3}$$

3°. Пусть при каждом $\varepsilon \in E$ на Ω задано $\{F_t^{(\varepsilon)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ семейство неубывающих σ-подалгебр $F^{(\varepsilon)}$, т. е. $F_t^{(\varepsilon)} \subset F_s^{(\varepsilon)} \subset F^{(\varepsilon)}$ для любых $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$. Обозначим $H_\theta^\varepsilon [0,1]$ пространство случайных функций $f_\varepsilon(t, \omega)$, $t \in [0,1]$, определенных на $\{\Omega, F^{(\varepsilon)}, Q_\theta^{(\varepsilon)}\}$, $F_t^{(\varepsilon)}$ измеримых при каждом t, для которых с вероятностью $Q_\theta^{(\varepsilon)}$ единица

$$\|f_\varepsilon\|^2 = \int_0^1 f_\varepsilon^2(t, \omega)\, dt < \infty.\tag{4}$$

Кроме того, пусть задана последовательность (по ε) винеровских процессов $w^{(\varepsilon)} = \{w_\varepsilon(t), F_t^{(\varepsilon)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Предположим, что случайный объект $X^{(\varepsilon)}$, для которого будут выводиться условия ЛАН, является процессом диффузионного типа [7] с дифференциалом

$$dX_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})\, dt + dw_\varepsilon(t),\ X_\varepsilon(0) = x_\varepsilon,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\tag{5}$$

где $S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})$ — $B_{[0,1]} \times F^{(\varepsilon)}$ — измеримый функционал** при всех $\theta \in \Theta$ и $|S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})|^{1/2} \in H_\theta^{(\varepsilon)}[0,1]$.

Для семейства мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$, отвечающих решениям (5) при различных θ, справедлива следующая

Теорема. *Пусть U_{θ_0} — некоторая окрестность точки $\theta_0 \in \Theta$ и*

I. $S_\varepsilon(\theta', t, X^{(\varepsilon)}) \in H_\theta^{(\varepsilon)}[0,1]$ *для* $\theta', \theta \in U_{\theta_0}$,

II. $\dot S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)}) = \dfrac{\partial S_\varepsilon}{\partial\theta}(\theta, t, X^{(\varepsilon)}) \in H_\theta^{(\varepsilon)}[0,1]$ *для* $\theta \in U_{\theta_0}$,

III. *существует функция* $\varphi_\varepsilon = \varphi(\theta_0, \varepsilon)$ *такая, что*

$$\varphi_\varepsilon \|\dot S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\| \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} 1 \text{ при } \varepsilon \to \varepsilon_0,$$

IV. *при* $\varepsilon \to \varepsilon_0$

$$\|S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\| \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} 0.$$

---

* Здесь $L\{\Delta_{\varepsilon,\theta_0} | P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\}$ — распределение функционала $\Delta_{\varepsilon,\theta_0}(X^{(\varepsilon)})$, когда распределение $X^{(\varepsilon)}$ есть $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$, $N(a, b^2)$ — гауссовский закон со средним a и дисперсией b^2.

** $B_{[0,1]}$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[0,1]$.

Тогда семейство мер $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$ *локально асимптотически нормально в точке* θ_0 *и*

$$\Delta_{\varepsilon, \theta_0} = \varphi_\varepsilon \int_0^1 \dot{S}_\varepsilon (\theta_0, t, X^{(\varepsilon)}) \, [dX_\varepsilon (t) - S_\varepsilon (\theta, t, X^{(\varepsilon)}) \, dt]. \qquad (6)$$

4°. Доказательство теоремы существенно опирается на следующую лемму о предельном поведении стохастического интеграла Ито.

Лемма. *Пусть* $f_\varepsilon (t, \omega) \in \mathrm{H}_{\theta_0}^{(\varepsilon)} [0,1]$. *Если*

$$\|f_\varepsilon\| \xrightarrow{P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}} b, \ b > 0 \ \textit{при} \ \varepsilon \to \varepsilon_0, \qquad (7)$$

то

$$L \left\{ \int_0^1 f_\varepsilon (t, \omega) \, dw_\varepsilon (t) | P_{\theta_0}^{(\varepsilon)} \right\} \longrightarrow N (0, b^2). \qquad (8)$$

Доказательство. Для удобства индекс θ_0 у $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ будем опускать. Введем случайный процесс

$$g_\varepsilon (t, \omega) = \begin{cases} f_\varepsilon (t, \omega), & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1, & 1 < t \leqslant 1 + b^2 \end{cases}$$

и марковские моменты

$$\tau_\varepsilon = \inf \left\{ t: \int_0^t g_\varepsilon^2 (s, \omega) \, ds = b^2 \right\}.$$

Очевидно $P^{(\varepsilon)} \{\tau_\varepsilon \leqslant b^2 + 1\} = 1$.

Стохастический интеграл

$$\int_0^t g_\varepsilon (s, \omega) \, dw_\varepsilon (s),$$

остановленный в момент $t = \tau_\varepsilon$, является гауссовской случайной величиной

$$\zeta_\varepsilon = \int_0^{\tau_\varepsilon} g_\varepsilon (s, \omega) \, dw_\varepsilon (s)$$

с параметрами $(0, b^2)$ [8]. Для любых $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ имеем неравенство* [8]

$$P^{(\varepsilon)} \left\{ \left| \int_0^1 f_\varepsilon (t, \omega) \, dw_\varepsilon (t) - \zeta_\varepsilon \right| > \delta \right\} = P^{(\varepsilon)} \left\{ \left| \int_0^{1+b^2} g_\varepsilon (t, \omega) [\chi_{\{t < 1\}} - \right. \right.$$

* $\chi_{\{B\}}$ — индикатор события B.

$$-\chi_{\{t<\tau_\varepsilon\}}]\,dw_\varepsilon(t)\Big|>\delta\Big\}\leqslant\frac{\gamma}{\delta^2}+P^{(\varepsilon)}\Big\{\int\limits_0^{1+b^2} g_\varepsilon^2(t,\omega)\,|\chi_{\{t<1\}}-\chi_{\{t<\tau_\varepsilon\}}|\,dt>\gamma\Big\}.$$

Обозначим событие

$$\Big\{\int\limits_0^{1+b^2} g_\varepsilon^2(t,\omega)|\,\chi_{\{t<1\}}-\chi_{\{t<\tau_\varepsilon\}}|\,dt>\gamma\Big\}$$

через A. Очевидно

$$P^{(\varepsilon)}\{A\}=P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon<1\}+P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon=1\}+P^{(\varepsilon)}\{A,\tau_\varepsilon>1\}.$$

По определению марковских моментов τ_ε имеем

$$P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon<1\}=P^{(\varepsilon)}\Big\{\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t,\omega)\,dt-b^2>\gamma,\ \tau_\varepsilon<1\Big\},$$

$$P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon=1\}=0,$$

$$P^{(\varepsilon)}\{A,\ \tau_\varepsilon>1\}=P^{(\varepsilon)}\Big\{b^2-\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t,\omega)\,dt>\gamma,\ \tau_\varepsilon>1\Big\}.$$

Объединяя все три вероятности, получаем

$$P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\Big\{\Big|\int\limits_0^1 f_\varepsilon(t,\omega)\,dw_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon\Big|>\delta\Big\}\leqslant\frac{\gamma}{\delta^2}+$$

$$+P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\Big\{\Big|\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t,\omega)\,dt-b^2\Big|>\gamma\Big\}.$$

В силу (7) и произвольности δ и γ следует сходимость

$$\int\limits_0^1 f_\varepsilon(t,\omega)\,dw_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon$$

по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ к нулю. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Настоящая лемма является обобщением теоремы об асимптотической нормальности нормированного стохастического интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_0^T f(t,\omega)\,dw(t)$$

при $T\to\infty$ [9]. С помощью замены времени $s=t\varepsilon,\ \varepsilon=T^{-1}$, $s\in[0,1]$ и используя автомодельность винеровского процесса $(\varepsilon^{1/2}w\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)=$

$=\tilde{w}_\varepsilon(s)$, где $\tilde{w}_\varepsilon(s)$ — некоторый другой винеровский процесс уже на $[0,1]$) можно записать

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(t, \omega)\, dw(t) = \int_0^1 f(s\varepsilon, \omega)\, d\tilde{w}_\varepsilon(s) = \int_0^1 f_\varepsilon(s)\, d\tilde{w}_\varepsilon(s). \qquad (9)$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, из условия (7) получаем достаточное условие асимптотической нормальности

$$\|f_\varepsilon\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t, \omega)\, dt \xrightarrow{P_{\theta_0}} b^2, \qquad (10)$$

более слабое, чем в [9].

5°. Доказательство теоремы. В силу условия I меры $P_\theta^{(\varepsilon)}$ в окрестности U_{θ_0} абсолютно непрерывны относительно винеровской $P^{(\varepsilon)}$, производная Радона-Никодима равна [7]

$$\frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP^{(\varepsilon)}}(X^{(\varepsilon)}) = \exp\left\{\int_0^1 S_\varepsilon(\theta, t, X^{(\varepsilon)})\, dX_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 S_\varepsilon^2(\theta, t, X^{(\varepsilon)})\, dt\right\},$$

а исследуемое отношение правдоподобия $Z_\varepsilon(u)$ на наблюдении $X^{(\varepsilon)}$, соответствующем решению (5) при $\theta = \theta_0$, имеет вид

$$\ln Z_\varepsilon(u) = \int_0^1 [S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, t, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, t, X^{(\varepsilon)})]\, dw_\varepsilon(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\|S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2.$$

Так как поведение нормы при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ по лемме определяет предельные свойства стохастического интеграла, рассмотрим норму разности

$$\|S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) + u\varphi_\varepsilon \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 =$$

$$= u^2 + u^2(\varphi_\varepsilon^2 \|\dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 - 1) + 2u\varphi_\varepsilon \int_0^1 \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, t, X^{(\varepsilon)}) \times$$

$$\times [S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, t, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, t, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, t, X^{(\varepsilon)})]\, dt +$$

$$+ \|S_\varepsilon(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 = u^2 + \eta_\varepsilon(\theta_0, u, X^{(\varepsilon)}),$$

где из условий III, IV и неравенства Коши-Буняковского легко показать, что $\eta_\varepsilon(u, \theta_0, X^{(\varepsilon)})$ по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ стремится к нулю.

Представим стохастический интеграл в виде

$$u\Delta_{\varepsilon,\theta_0}+\int_0^1[S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,t,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})]\,dw_\varepsilon(t),$$

где случайная величина

$$\Delta_{\varepsilon,\theta_0}=\varphi_\varepsilon\int_0^1\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})\,dw_\varepsilon(t)$$

по лемме асимптотически нормальна. Для любых $\delta>0$ и $\gamma>0$ имеем неравенство

$$P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\left\{\left|\int_0^1[S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,t,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-u\varphi_\varepsilon\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})]\,dw_\varepsilon(t)\right|>\delta\right\}\leqslant\frac{\gamma}{\delta^2}+$$

$$+P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}\{\|S_\varepsilon(\theta_0+u\varphi_\varepsilon,X^{(\varepsilon)})-S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})-u\varphi_\varepsilon\dot S_\varepsilon(\theta_0,X^{(\varepsilon)})\|^2>\gamma\}. \tag{11}$$

В силу условия IV и произвольности δ и γ выражение справа в неравенстве (11) можно сделать как угодно малым. Следовательно

$$Z_\varepsilon(u)=\exp\left\{u\varphi_\varepsilon\int_0^1\dot S_\varepsilon(\theta_0,t,X^{(\varepsilon)})\,dw_\varepsilon(t)-\frac{1}{2}u^2+\psi_\varepsilon(u,\theta_0,X^{(\varepsilon)})\right\}, \tag{12}$$

где $\psi_\varepsilon(u,\theta_0,X^{(\varepsilon)})$ по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ сходится к нулю. Теорема доказана.

6°. Рассмотрим два примера локально асимптотически нормальных семейств вероятностных мер.

Пример 1. Пусть $X^{(\varepsilon)}=\{X_\varepsilon(t,\omega,\theta),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, $\omega\in\Omega$, $\theta\in\Theta$, $\varepsilon\in(0,1]$ является решением диффузионного уравнения

$$dX_\varepsilon(t)=S(\theta,t,X_\varepsilon(t))\,dt+\varepsilon dw(t),\quad X_\varepsilon(0)=x, \tag{13}$$

а $X^{(0)}=\{X_0(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_0(t)}{dt}=S(\theta_0,t,X_0(t)),\quad X_0(0)=x. \tag{14}$$

Введем функцию

$$\varphi_\varepsilon=\varepsilon\|\dot S(\theta_0,X^{(0)})\|^{-1}=\varepsilon\left(\int_0^1\dot S^2(\theta_0,t,X_0(t))\,dt\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\dot S(\theta,t,x)=\frac{\partial S(\theta,t,x)}{\partial\theta},\ \|\dot S(\theta_0,X^{(0)})\|\neq 0.$$

Будем предполагать, что функция $S(\theta_0, t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x, а ее производная $\dot S(\theta, t, x)$ удовлетворяет условию Гёльдера по θ с некоторым показателем $\alpha > 0$ и Липшица по x,

$$|S(\theta_0, t, x) - S(\theta_0, t, y)| \leqslant L_1 |x - y|,$$
$$|\dot S(\theta_2, t, x) - \dot S(\theta_1, t, x)| \leqslant H(t, x) |\theta_2 - \theta_1|^\alpha, \tag{15}$$
$$|\dot S(\theta_0, t, x) - \dot S(\theta_0, t, y)| \leqslant L_2 |x - y|,$$

где $\|H(X^{(\varepsilon)})\| = O(\varepsilon^{-\alpha})$.

Покажем, что в указанных условиях семейство $\{P_\theta^{(\varepsilon)}, \theta \in \Theta\}$, отвечающее решениям (13), локально асимптотически нормально и

$$\Delta_{\varepsilon, \theta_0} = \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-1} \int_0^1 \dot S(\theta_0, t, X_0(t))\, dw(t).$$

Отношение правдоподобия $Z_\varepsilon(u)$ для проверки гипотезы $\theta = \theta_0 + u\varphi_\varepsilon$ против альтернативы $\theta = \theta_0$ на наблюдении $X^{(\varepsilon)}$ при $\theta = \theta_0$ имеет вид

$$\ln Z_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 [S(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, t, X_\varepsilon(t)) - S(\theta_0, t, X_\varepsilon(t))]\, dw(t) -$$
$$- \frac{1}{2\varepsilon^2} \|S(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2.$$

Рассмотрим норму разности в последней формуле. Используя разложение

$$S(\theta_0 + \Delta, t, x) = S(\theta_0, t, x) + \Delta \cdot \dot S(\theta_0 + q\Delta, t, x),$$

где $q = q(t, x)$ и $|q| < 1$ и условия гладкости (15), имеем

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \|S(\theta_0 + u\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - S(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) - u\varphi_\varepsilon \dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^2 =$$
$$= \frac{u^2 \varphi_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \|\dot S(\theta_0, X^{(0)}) - \dot S(\theta_0 + qu\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)})\|^2 \leqslant 2u^2 \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2} \times$$
$$\times \|\dot S(\theta_0 + qu\varphi_\varepsilon, X^{(\varepsilon)}) - \dot S(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 + 2u^2 \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2} \|\dot S(\theta_0, X^{(\varepsilon)}) -$$
$$- \dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^2 < 2u^{2+2\alpha} \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2-2\alpha} \cdot \|H(X^{(\varepsilon)})\|^2 \cdot \varepsilon^{2\alpha} +$$
$$+ 2u^2 L_2^2 \|\dot S(\theta_0, X^{(0)})\|^{-2} \int_0^1 |X_\varepsilon(t) - X_0(t)|^2\, dt.$$

Напомним, что

$$dX_\varepsilon(t) = S(\theta_0, t, X_\varepsilon(t))\, dt + \varepsilon dw(t), \quad X_\varepsilon(0) = x,$$
$$dX_0(t) = S(\theta_0, t, X_0(t))\, dt, \quad X_0(0) = x,$$

откуда

$$X_\varepsilon(t) - X_0(t) = \int_0^t [S(\theta_0, t, X_\varepsilon(t)) - S(\theta_0, t, X_0(t))]\, dt + \varepsilon w(t)$$

и

$$M|X_\varepsilon(t) - X_0(t)|^2 \leqslant 2M\left(\int_0^t [S(\theta_0, s, X_\varepsilon(s)) - S(\theta_0, s, X_0(s)]\, ds\right)^2 +$$

$$+ 2\varepsilon^2 t \leqslant 2\varepsilon^2 + 2t\int_0^t M[S(\theta_0, s, X_\varepsilon(s)) - S(\theta_0, s, X_0(s))]^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 + 2L_1^2 \int_0^t M[X_\varepsilon(s) - X_0(s)]^2\, ds.$$

По лемме Грануолла-Беллмана

$$M[X_\varepsilon(t) - X_0(t)]^2 \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Следовательно условия III и IV теоремы выполнены и логарифм отношения правдоподобия можно представить в виде

$$\ln Z_\varepsilon(u) = u\,\|\dot S(\theta_0, X^{(0)}\|^{-1} \int_0^1 \dot S(\theta_0, t, X_0(t))\, dw(t) -$$

$$-\frac{1}{2}u^2 + \psi_\varepsilon(u, \theta_0, X^{(\varepsilon)}), \tag{16}$$

где $\psi_\varepsilon(u, \theta_0, X^{(\varepsilon)})$ сходится по вероятности $P_{\theta_0}^{(\varepsilon)}$ к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Пример 2. Пусть однородный возвратный диффузионный процесс $X(t)$ с эргодическим распределением $B(x)$ является решением стохастического уравнения

$$dX(t) = S(\theta, X(t))\, dt + dw(t), \ X(0) = 0, \tag{17}$$

где $0 \leqslant t \leqslant T$, $\theta \in \Theta$ и в некоторой окрестности U_{θ_0} точки θ_0 функция $\dot S(\theta, x) = \dfrac{\partial S(\theta, x)}{\partial \theta}$ удовлетворяет условию Гёльдера с положительным показателем α

$$|\dot S(\theta_1, x) - \dot S(\theta_2, x)| \leqslant H(x)\ |\theta_2 - \theta_1|^\alpha, \ \theta_1, \theta_2 \in U_{\theta_0}, \tag{18}$$

и при этом

$$\int H^2(x)\, dB(x) < \infty$$

и

$$E = \int \dot S^2(\theta_0, x)\, dB(x) < \infty. \tag{19}$$

Кроме того, пусть

$$\int_0^T \dot{S}^2(\theta, X(t))\, dt < \infty$$

при каждом $T < \infty$ с вероятностью единица.

Покажем, что семейство мер $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ локально асимптотически нормально в точке $\theta_0 \in \Theta$ и $\varphi_T = (ET)^{-1/2}$, а

$$\Delta_{T, \theta_0} = \varphi_T \int_0^T \dot{S}(\theta_0, X(t))\, dw(t). \qquad (20)$$

Заменой времени $s = t\varepsilon$, $\varepsilon = T^{-1}$ уравнение (17) в силу автомодельности винеровского процесса (см. замечание) можно привести к виду

$$dX_\varepsilon(s) = S_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon(s))\, ds + d\bar{w}_\varepsilon(s), \quad X_\varepsilon(0) = 0, \quad s \in [0,1], \qquad (21)$$

где $X_\varepsilon(s) = \varepsilon^{1/2} X(s\varepsilon)$ и $S_\varepsilon(\theta, X_\varepsilon(s)) = \varepsilon^{1/2} \cdot S(\theta, X(s/\varepsilon))$. При этом условие III теоремы выполнено, так как сходимость

$$\varphi_\varepsilon^2 \|\dot{S}_\varepsilon(\theta_0, X^{(\varepsilon)})\|^2 = \frac{1}{ET} \int_0^T \dot{S}^2(\theta_0, X(t))\, dt \to 1 \qquad (22)$$

по усиленному закону больших чисел имеет место с вероятностью единица [10]. Разлагая $S(\theta, x)$ в окрестности θ_0 и используя (18), (19), нетрудно проверить условие IV теоремы. Тем самым доказано, что отношение правдоподобия представимо в виде

$$\frac{dP_{\theta_0 + u\varphi_T}^{(T)}}{dP_{\theta_0}^{(T)}}(X^{(T)}) = \exp\left\{ u(ET)^{-1/2} \int_0^T \dot{S}(\theta_0, X(t))\, dw(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} u^2 + \psi_T(\theta_0, u, X^{(T)}) \right\}, \qquad (23)$$

где $\psi_T(\theta_0, u, X^{(T)})$ по вероятности $P_{\theta_0}^{(T)}$ сходится к нулю.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. Р. Левину за постановку задачи и Р. Ш. Липцеру за постоянное внимание к настоящей работе.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 29.IV.1974

Յու. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալությունը դիֆուզիոն պրոցեսների համար (ամփոփում)

Բերվում են լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալության (ԼԱՆ) պայմանները հավանականային չափերի ընտանիքի համար, որոնք առաջանում են ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներով։ ԼԱՆ-ը հնարավորություն է տալիս ապրոկսիմացնել նշված ընտանիքը որևէ կետի շրջակայքում Գաուսի հավանականական չափերի ընտանիքով։ Դիտարկվում են դիֆուզիոն պրոցեսների չափերի ընտանիքի ԼԱՆ-ի երկու օրինակ։

Yu. A. KUTOYANTS. *Local asymptotical Normality for the diffusion type processes* (summary)

Conditions of local asymptotical normality (LAN) for the family of measur induced by the realizations of solutions of stochastic differential equations are pr sented. LAN allows to appoximate a given family by the Gaussian family. Tv examples of LAN families are given for the diffusion processes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Le-Cam.* Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. Cali Publ. in Statistics, 3, 1960, 37—98.
2. *J. Hajek.* Locally asymptotic minimax and admissibility in estimation, Proc. 6 Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability, Univ. Calif. Press., 1972, 175 194.
3. *J. Hajek.* Characterization of limiting distributions of regular estimate, Zeits. fi Wahrsch. und verwandte Gebiete, 14, № 4, 1970, 323--330.
4. *G. Roussas.* Contiguity of probability measures, Cambridge Univ. Press., G, B 1972.
5. *Д. М. Чибисов.* Теорема о допустимых критериях и ее применение к одно асимптотической задаче проверки гипотез, Теория вероятностей и ее примене ния, 12, № 1, 1967, 96—111.
6. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский.* Локальная асимптотическая нормалı ность для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероятн. и ее при менения, XX, 2, 1975.
7. *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев.* Об абсолютной непрерывности мер, соответ ствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской, Изв АН СССР, сер. матем. 36, № 4, 1972, 847—889.
8. *И. И. Гихман, А. В. Скороход.* Стохастические дифференциальные уравнения Наукова думка, Киев, 1968.
9. *А. Ф. Тараскин.* Об асимптотической нормальности стохастических интеграло и оценках коэффициента переноса диффузионного процесса, в сб. Математи ческая физика, 8, Наукова думка, Киев, 1970.
10. *Р. З. Хасьминский.* Эргодические свойства возвратных диффузионных процессо и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений, Теория вероятностей и ее применения, 5, № 2, 1960, 196—214.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

М. Ш. ЦАЛЕНКО

КАТЕГОРИИ СООТВЕТСТВИЙ НАД РЕГУЛЯРНЫМИ КАТЕГОРИЯМИ

Введение

Алгебра бинарных отношений играет все возрастающую роль в универсальной алгебре [10], гомологической алгебре [13], в теории представлений [7] и во многих других разделах математики. В основе использования этой алгебры лежит возможность вложения категорий гомоморфизмов, т. е. отображений, согласованных со структурой объектов, в более широкие категории бинарных отношений, или соответствий, в которых гомоморфизмы обратимы в обычном полугрупповом смысле: для каждого гомоморфизма φ существует такой морфизм ψ, что $\varphi=\varphi\psi\varphi$ и $\psi=\psi\varphi\psi$. В 1962 году Д. Пуппе [15] обнаружил, что категории отношений над абелевыми категориями могут быть описаны аксиоматически и находятся во взаимно однозначном соответствии с абелевыми категориями. В работах автора [19], М. С. Бургина [5], [6], Д. А. Райкова [16] (см. также Х. Бринкман [2], Х. Бринкман, Д. Пуппе [3]) этот результат был перенесен на различные другие классы категорий. Однако, результаты указанных работ неприменимы, в частности, к категориям множеств, множеств с отмеченной точкой, к многообразиям универсальных алгебр без нулевых подалгебр, к различным категориям топологических пространств. В настоящей работе выделен класс регулярных категорий, близких к регулярным категориям в смысле Барра [1], для которых оказывается возможным построить и описать категории соответствий. Регулярные категории охватывают как перечисленные выше категории, кроме категорий топологических пространств, так и рассмотренные в работах [19], [6], [16] классы категорий, кроме γ-категорий М. С. Бургина без произведений. Регулярные категории призваны, по-видимому, играть ту же роль в теории гомотопий, что и абелевы категории в теории гомологий (см. [1], а также [4]).

Работа распадается на две части. В первой части описано построение категорий соответствий над широким классом бикатегорий. Идея такого построения рассказывалась автором несколько лет назад на семинаре по теории категорий в МГУ, содержалась в работе [3] и для бикатегорий с конечными пределами описана в работе Клейна [9]. Оказалась, что исходная категория вкладывается в категорию соответствий в качестве подкатегории всех гомоморфизмов, или собственных морфизмов (точное определение см. в § 2), тогда и только тогда, когда все допустимые эпиморфизмы регулярны (полярны по терминологии, принятой в книге [17]). Для категории множеств устанавливается возможность построения двух неизоморфных категорий соответствий, в то время, как для категории топологических пространств устанавливается невозможность вложения в категорию соответствий в качестве подкатегории всех собственных морфизмов. Проведенное исследование позволяет выделить класс регулярных категорий.

Вторая часть работы посвящена аксиоматической теории класса категорий с инволюцией, который оказывается классом категорий соответствий над регулярными категориями. Переход к общим категориям с инволюцией позволяет установить, в частности, большинство общих фактов об отображениях, гомоморфизмах, бинарных отношениях, которые составляют введение в любой курс универсальной алгебры (ср. [10], гл. 1, §§ 2, 3, или [11], гл. 1, или [14], гл. 1, § 1). Результаты первой и второй частей в совокупности устанавливают между регулярными категориями и их категориями соответствий взаимно однозначное соответствие. Как следствие результатов настоящей работы и работы Барра [1] устанавливается возможность представления категорий соответствий над малыми регулярными категориями бинарными отношениями множеств.

Терминология и обозначения следуют книге [17], отступления оговорены в тексте.

§ 1. Построение категорий соответствий

1.1. Подобъекты пары объектов. Вводимое ниже понятие подобъекта пары объектов произвольной категории является частным случаем общего определения подобъекта семейства объектов, данного автором в работе [18].

Пусть $\mathbf{K}$ — произвольная категория. Для фиксированной пары объектов $A, B \in \mathbf{K}$ через $P(A, B)$ обозначим класс пар морфизмов (α, β) с общим началом X и с концами в A и в B соответственно. Будем говорить, что пара $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$ *делится справа* на пару $(\alpha', \beta') \in P(A, B)$ и писать $(\alpha, \beta) = \gamma(\alpha', \beta')$, если $\alpha = \gamma\alpha'$, $\beta = \gamma\beta'$ для некоторого морфизма γ; морфизм γ называется левым делителем пары (α, β). Две пары (α, β) и (α', β') из $P(A, B)$ *эквивалентны*, если $\alpha = \gamma\alpha'$, $\beta = \gamma\beta'$ для некоторого изоморфизма γ. Пара (α, β) называется *разделяющей*, если из равенств $\varphi\alpha = \psi\alpha$, $\varphi\beta = \psi\beta$ вытекает равенство $\varphi = \psi$.

Если разделяющая пара (α, β) делится справа на разделяющую пару (α', β'), то говорят, что (α, β) *предшествует* (α', β'). В этом случае равенства $\alpha = \gamma\alpha'$, $\beta = \gamma\beta'$ однозначно определяют морфизм γ, который к тому же является мономорфизмом. Две разделяющие пары предшествуют друг другу тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Класс эквивалентных разделяющих пар называется *подобъектом пары объектов* A, B и обозначается $(\alpha, \beta]$ или $(X, \alpha, \beta]$, где $\alpha \in H(X, A)$, $\beta \in H(X, B)$. Отношение предшествования разделяющих пар, очевидно, индуцирует отношение частичного порядка между подобъектами пары A, B.

Пусть $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \mathbf{E}\mathfrak{M})$ — бикатегория. Подобъект $(\alpha, \beta]$ пары объектов A, B называется *допустимым*, если у пары α, β нет левых делителей из $\mathbf{E} \setminus I\,so\,\mathbf{K}$; класс допустимых подобъектов обозначается $S_p(A, B)$.

1.2. Допустимые разложения пар морфизмов. Пусть $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$—бикатегория. Для каждой пары объектов A, B зафиксируем класс $R(A, B)$ подобъектов вида $(\mu\alpha, \mu\beta)$, где $\mu \in \mathfrak{M}$ и $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$. В силу замкнутости $\mathfrak{M}$ относительно умножения класс $R(A, B)$ вместе с подобъектом $(\gamma, \delta]$, содержит подобъекты $(\tau\gamma, \tau\delta]$, где $\tau \in \mathfrak{M}$.

Будем говорить, что бикатегория $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ является бикатегорией *с каноническими разложениями*, если выполнены следующие два условия:

a) всякая пара $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$ разлагается в произведение $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, где $\nu \in \mathbf{E}$, $(\alpha', \beta'] \in R(A, B)$;

b) если $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta') = \rho(\alpha'', \beta'')$, где $\nu, \rho \in \mathbf{E}$, $(\alpha', \beta']$, $(\alpha'', \beta''] \in R(A, B)$, то существует такой изоморфизм ξ, что $\rho = \nu\xi$.

Отметим, что пары (α', β') и (α'', β''), фигурирующие в условии 2), связаны равенством $(\alpha', \beta') = \xi(\alpha'', \beta'')$ и поэтому $(\alpha', \beta'] = (\alpha'', \beta'']$. Этот подобъект будет обозначаться $\mathrm{Im}(\alpha, \beta)$.

Лемма 1.1. *Пусть* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ — *бикатегория с каноническими разложениями. Если* $(\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta)$, (α, β), $(\gamma, \delta) \in P(A, B)$, *то* $\mathrm{Im}(\alpha, \beta) \leqslant \mathrm{Im}(\gamma, \delta)$.

Доказательство. Пусть $(\gamma, \delta) = \rho(\gamma', \delta')$, где $\rho \in \mathbf{E}$, $(\gamma', \delta'] \in R(A, B)$, $\varphi\rho = \nu\mu$, $\nu \in \mathbf{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta) = \varphi\rho(\gamma', \delta') = \nu(\mu\gamma', \mu\delta')$, откуда $\mathrm{Im}(\alpha, \beta) = (\mu\gamma', \mu\delta'] \leqslant (\gamma', \delta'] = \mathrm{Im}(\gamma, \delta)$.

Лемма 1.2. *Пусть* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ — *бикатегория с каноническими разложениями. Если* $(\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta)$ *и* $(\alpha, \beta]$, $(\gamma, \delta] \in R(A, B)$, *то* $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \rho\tau$, $\rho \in \mathbf{E}$, $\tau \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\alpha, \beta) = 1 \times (\alpha, \beta) = \varphi(\gamma, \delta) = \rho(\tau\gamma, \tau\delta)$. Поскольку $(\alpha, \beta]$, $(\tau\gamma, \tau\delta] \in R(A, B)$, 1, $\rho \in \mathbf{E}$, то в силу условия 2) $\rho \in I\,so\,\mathbf{K}$. Следовательно, $\varphi = \rho\tau \in \mathfrak{M}$.

Категория $\mathbf{K}$ называется категорией *с регулярными кообразами*, если всякий морфизм $\alpha \in \mathbf{K}$ обладает разложением $\alpha = \nu\mu$, где ν — регулярный эпиморфизм, μ — мономорфизм. В книге [17] показано, что категория $\mathbf{K}$ с регулярными кообразами является бикатегорией $(\mathbf{K}, \mathbf{E}_r, \mathrm{Mon}\,\mathbf{K})$, где $\mathbf{E}_r$ — класс регулярных эпиморфизмов.

---

* Регулярные эпиморфизмы в книге [17] называются полярными. Эпиморфизм ν регулярен, если всякий морфизм γ, для которого из равенства $\alpha\nu = \beta\nu$ всегда следует $\alpha\gamma = \beta\gamma$, представим в виде $\gamma = \nu\gamma'$.

Лемма 1.3. *Пусть бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathbf{E} \cap \mathrm{Mon}\, \mathbf{K} = \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$;
2) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r$;
3) $\mathbf{K}$ *замкнута относительно конечных произведений*;*
4) *для каждой пары морфизмов* $\rho \in \mathbf{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$ *с общим началом существует универсальный квадрат.*

Тогда для любой пары объектов A, $B \in \mathbf{K}$ $R(A, B) = S_p(A, B)$.

Доказательство. 1). Докажем, что всякий подобъект $(\alpha, \beta]$ пары A, B является допустимым. Пусть $(\alpha, \beta) = \rho(\alpha', \beta')$, где $\rho \in \mathbf{E}'$. Тогда, как легко видеть, $\rho \in \mathrm{Mon}\, \mathbf{K}$ и по условию 1) $\rho \in \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$, откуда $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$;

2). Если $\mathbf{E} = \mathbf{E}_r$, то по лемме V. 2. 2 книги [17] $\mathbf{E}_r \cap \mathrm{Mon}\, \mathbf{K} = \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$, и остается сослаться на доказанное выше.

3). Сопоставим каждому $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$ подобъект $(\alpha \times \beta] \in S_p(A \times B)$. Без труда проверяется, что это сопоставление биективно. Если $\mu \in \mathfrak{M}$, то $\mu(\alpha \times \beta) \in \mathfrak{M}$, и поэтому $(\mu\alpha, \mu\beta] \in S_p(A, B)$.

4). Пусть $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$, $\mu \in \mathfrak{M}$ и $(\mu\alpha, \mu\beta) = \rho(\alpha', \beta')$, где $\rho \in \mathbf{E}$. Если $\mu\rho' = \rho\mu'$, где ρ' и μ' — морфизмы, входящие в универсальный квадрат относительно ρ и μ, то из равенства $\mu\alpha = \rho\alpha'$ вытекает существование такого φ, что $\alpha = \rho'\varphi$, а из равенства $\mu\beta = \rho\beta'$ вытекает существование такого ψ, что $\beta = \rho'\psi$. Отсюда $(\alpha, \beta) = \rho'(\varphi, \psi)$. Известно, что $\rho' \in \mathbf{E}$, поскольку $\rho \in \mathbf{E}$. Но $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$. Значит, $\rho' \in \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$. Из равенства $\mu\rho' = \rho\mu'$ теперь следует, что $\mu = \rho(\mu'\rho'^{-1})$. По свойствам бикатегории $\rho \in \mathfrak{M}$, и, следовательно, $\rho \in \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$. Таким образом, $(\mu\alpha, \mu\beta] \in S_p(A, B)$.

Следующая диаграмма с коммутативными квадратами изображает бикатегорию, в которой утверждение леммы 1.3 не выполнено:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mu\in\mathfrak{M}"] \arrow[d, "\rho\in E"'] & R \arrow[dr, "\alpha\in E"] \arrow[dd, "\beta\in E"] & \\
Y \arrow[rr, "\alpha'\in\mathfrak{M}"] \arrow[dr, "\beta'\in\mathfrak{M}"'] & & B \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Именно, $(\alpha, \beta] \in S_p(A, B)$, $(\mu\alpha, \mu\beta] \in R(A, B]$, но $(\mu\alpha, \mu\beta] \overline{\in} S_p(A, B)$.

Лемма 1.4. *Категория* $\mathbf{K}$ *с регулярными кообразами обладает каноническими разложениями, если выполнено условие* а).

---

* Прямых произведений по терминологии книги [17].

Доказательство. Пусть $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta') = \rho(\alpha'', \beta'')$, где $\nu, \rho \in \mathbf{E}_r$, $(\alpha', \beta']$, $(\alpha'', \beta''] \in S_p(A, B)$. Если $\varphi\nu = \psi\nu$, то $\varphi\nu\alpha' = \psi\nu\alpha' = (\varphi\rho)\alpha'' = (\psi\rho)\alpha''$ и аналогично $(\varphi\rho)\beta'' = (\psi\rho)\beta''$. Поскольку пара (α'', β'') — разделяющая, $\varphi\rho = \psi\rho$. Так как ν — регулярный эпиморфизм, то $\rho = \nu\xi$. По симметрии $\nu = \rho\xi'$ откуда $\xi' = \xi^{-1}$, и лемма доказана.

Лемма 1.5. *Бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *с конечными произведениями обладает каноническими разложениями.*

Доказательство. Каждая пара морфизмов $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$ однозначно определяется морфизмом $\gamma = \alpha \times \beta$ с концом $A \times B(\pi_1, \pi_2)$. Если $\gamma = \nu\mu$, $\nu \in \mathbf{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$, то $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, где $\alpha' = \mu\pi_1$, $\beta' = \mu\pi_2$. В доказательстве утверждения 3) леммы 1.3 отмечалось, что подобъект $(\alpha', \beta']$ допустим, поскольку $\mu \in \mathfrak{M}$. Если $(\alpha, \beta) = \rho(\alpha'', \beta'')$, где $\rho \in \mathbf{E}$, $(\alpha'', \beta''] \in S_p(A, B)$ — второе разложение пары (α, β), то $\gamma = \alpha \times \beta = \rho\alpha'' \times \rho\beta'' = \rho(\alpha'' \times \beta'') = \nu\mu$, откуда $\rho = \nu\xi$, где $\xi \in \operatorname{Iso} \mathbf{K}$, ибо $\alpha'' \times \beta'' \in \mathfrak{M}$.

Следующая теорема усиливает и уточняет известный результат Исбелла [12]. Поскольку в дальнейшем она не используется, доказательство опускается.

Теорема 1.6. *Пусть категория* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *всякая пара морфизмов* $\varphi, \psi \in H(A, B)$, *обладающая правым уравнителем, имеет коядро;*

2) *для каждого объекта* $A \in \mathbf{K}$ *экстремальные факторобъекты образуют множество;*

3) *всякая диаграмма вида*

$$A_0 \xrightarrow{\nu_0} A_1 \xrightarrow{\nu_1} \cdots A_\alpha \xrightarrow{\nu_\alpha} \cdots,$$

состоящая из экстремальных эпиморфизмов, имеет прямой предел.

Тогда категория $\mathbf{K}$ *является бикатегорией* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \operatorname{Mon} \mathbf{K})$, *где* $\mathbf{E}$ — *класс экстремальных эпиморфизмов, обладающей каноническими разложениями.*

1.3. Умножение пар морфизмов. Предположим, что в категории $\mathbf{K}$ каждая пара морфизмов $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to C$ обладает коуниверсальным квадратом. Поскольку коуниверсальный квадрат для данной пары α, β определен с точностью до изоморфизма, с помощью аксиомы выбора зафиксируем для каждой пары α, β коуниверсальный квадрат, который будет обозначаться $[\varphi, \alpha, \beta, \psi]$, где $\varphi\alpha = \psi\beta$. Пара (φ, ψ) определяет подобъект $(\varphi, \psi]$ пары объектов A, B. Этот подобъект допустим в любой бикатегорной структуре категории $\mathbf{K}$, если таковые существуют. В частности, пара (δ_1, δ_2), входящая в коуниверсальный квадрат $[\delta_1, \alpha, \alpha, \delta_2]$, называется *ядерной парой* морфизма $\alpha: A \to C$ и обозначается $\operatorname{Ker} \alpha$. Она определяет допустимый подобъект $(\delta_1, \delta_2]$ пары объектов A, A, который обозначается $\operatorname{Ker} \alpha$.

Отметим, что морфизмы δ_1 и δ_2 обладают общим левым обратным и поэтому являются регулярными эпиморфизмами; кроме того, отсюда следует, что для любого α $\mathrm{Ker}\,\alpha > (1_A, 1_A]$.

В классе всех пар морфизмов категории $\mathbf{K}$ с общим началом следующим образом можно ввести частичное умножение: если $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$, $(\gamma, \delta) \in P(B, C)$ и $[\varphi, \beta, \gamma, \psi]$—коуниверсальный квадрат, то

$$(\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta) = (\varphi\alpha, \psi\delta).$$

Лемма 1.7. *Эквивалентность пар является конгруэнцией относительно частичного умножения. Если* $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$, $(\gamma, \delta) \in P(B, C)$, $(\varepsilon, \varkappa) \in P(C, D)$, *то произведения* $((\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta)) \circ (\varepsilon, \varkappa)$ *и* $(\alpha, \beta) \circ ((\gamma, \delta) \circ (\varepsilon, \varkappa))$ *эквивалентны.*

Доказательство основано на формальном использовании свойств коуниверсальных квадратов.

1.4. Дополнительные аксиомы. Начиная с этого момента, предполагается, что рассматриваемые категории являются бикатегориями. Формулируемые ниже аксиомы выделяют класс бикатегорий, для которых оказывается возможным построить категорию соответствий.

Аксиома (C1). Для каждой пары объектов A, B из $\mathbf{K}$ допустимые подобъекты этой пары образуют множество.

Аксиома (C2). Бикатегория $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ обладает каноническими разложениями.

Аксиома (C3). Для каждой пары морфизмов с общим концом существует коуниверсальный квадрат.

Аксиома (C4). Если в коуниверсальном квадрате $[\varphi, \alpha, \beta, \psi]$ $\alpha \in \mathbf{E}$, то $\psi \in \mathbf{E}$.

Лемма 1.8. *Бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$, *в которой выполнена аксиома* (C1), *является локально малой слева бикатегорией. Локально малая слева бикатегория с конечными произведениями удовлетворяет аксиомам* (C1) *и* (C2).

Доказательство. Каждому допустимому мономорфизму $\mu\colon U \to A$ сопоставим подобъект $(\mu, \mu]$ пары объектов A, A. Этот подобъект допустим, ибо всякий эпиморфный левый делитель допустимого мономорфизма является изоморфизмом. Пусть $\sigma\colon V \to A$ — второй мономорфизм и пусть $(\mu, \mu] = (\sigma, \sigma]$. Значит, $\sigma = \xi\mu$ для некоторого $\xi \in \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$, т. е. подобъекты $(U, \mu]$ и $(V, \sigma]$ совпадают. Обратно, если $\sigma = \xi\mu$, $\xi \in \mathrm{Iso}\,\mathbf{K}$, то $(\sigma, \sigma) = \xi(\mu, \mu)$, откуда $(\sigma, \sigma] = (\mu, \mu]$. Таким образом, допустимые подобъекты объекта A находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножеством множества $S_p(A, A)$, что и доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение вытекает из доказательства леммы 1.3.

Следствие 1.9. *Если в бикатегории* (K, E, $\mathfrak{M}$) *выполнена аксиома* (C1), *то классы* $R(A, B)$, $A, B \in Ob\,\mathbf{K}$ *являются множествами.*

Следующий результат доказан в [17].

Лемма 1.10. *Бикатегория* (K, E, $\mathfrak{M}$) *с конечными произведениями тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме* (C3), *когда допустимые подобъекты любого объекта образуют полуструктуру по пересечениям.*

1.5. Слабая эквивалентность пар морфизмов.

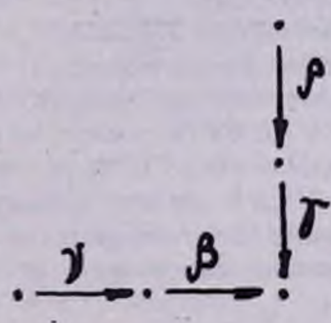
Пусть в бикатегории (K, E, $\mathfrak{M}$) выполнена аксиома (C2). Пары морфизмов (α, β), $(\gamma, \delta) \in P(A, B)$ назовом *слабо эквивалентными*, $(\alpha, \beta) \overset{s}{\sim} (\gamma, \delta)$, если $\mathrm{Im}(\alpha, \beta) = \mathrm{Im}(\gamma, \delta)$. Рефлексивность, симметричность и транзитивность слабой эквивалентности очевидны. Эквивалентные пары морфизмов слабо эквивалентны. Если $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, где $\nu \in \mathbf{E}$, то в силу аксиомы (C2), пары (α, β) и (α', β') слабо эквивалентны: каноническое разложение для (α, β) получается из канонического разложения для (α', β') умножением слева на ν, что не меняет $\mathrm{Im}(\alpha', \beta')$.

Теорема 1.11. *Пусть бикатегория* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C2) *и* (C3). *Слабая эквивалентность пар морфизмов является конгруенцией относительно умножения пар морфизмов тогда и только тогда, когда выполнена аксиома* (C4).

Доказательство. Необходимость. Пусть дан коуниверсальный квадрат $[\varphi, \alpha, \beta, \psi]$, в котором $\alpha \in \mathbf{E} \cap H(A, B)$, $\beta \in H(C, B)$. Тогда $(\alpha, \alpha) \circ (\beta, 1) = (\varphi\alpha, \psi)$. Пара $(\alpha, \alpha) = \alpha(1_B, 1_B)$ слабо эквивалентна паре $(1_B, 1_B)$. Поэтому $(\varphi\alpha, \psi) = (\alpha, \alpha) \circ (\beta, 1) \overset{s}{\sim} (1_B, 1_B) \circ$ $\circ (\beta, 1_c) \overset{s}{\sim} (\beta, 1_c)$. Но $\mathrm{Im}(\beta, 1_c) = (\beta, 1_c]$. Поэтому существует такой морфизм $\rho \in \mathbf{E}$, что $\psi\alpha = \rho\beta$, $\psi = \rho 1_c = \rho$, т. е. $\psi \in \mathbf{E}$, и аксиома (C4) выполнена.

Для доказательства достаточности аксиомы (C4) установим следующую лемму.

Лемма 1.12. *Если в категории* **K** *выполнена аксиома* (C3), *то всякая диаграмма вида*



вкладывается в коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\lambda"'] & \bullet \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[d, "\eta_1"] & \bullet \arrow[d, "\rho"] \\
\bullet \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, "\theta_1"'] & \bullet \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & \bullet \arrow[d, "\gamma"] \\
\bullet \arrow[r, "\nu"] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \bullet
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

в которой все квадраты и прямоугольники коуниверсальны. Если в **K** *выполнена аксиома* (C4) *и если* $\nu, \rho \in \mathbf{E}$, *то морфизм* $\lambda\theta_2 = \varkappa\eta_1$ *принадлежит* **E**.

Доказательство. Диаграмма (1) строится путем четырехкратного применения аксиомы (C3). Коуниверсальность вертикальных и горизонтальных прямоугольников этой диаграммы доказана, например, в [17], лемма 1.7.5. Поэтому остается установить коуниверсальность внешнего квадрата.

Пусть $\alpha_1(\nu\beta) = \alpha_2(\rho\gamma)$, или $(\alpha_1\nu)\beta = (\alpha_2\rho)\gamma$. В силу коуниверсальности нижнего правого квадрата диаграммы (1) существует однозначно определенный морфизм ε, для которого $\alpha_1\nu = \varepsilon\varphi$, $\alpha_2\rho = \varepsilon\psi$. В силу коуниверсальности нижнего левого и верхнего правого квадратов существуют однозначно определенные морфизмы ε_1 и ε_2, для которых $\varepsilon_1\theta_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1\theta_2 = \varepsilon = \varepsilon_2\eta_1$, $\varepsilon_2\eta_2 = \alpha_2$. Наконец, в силу коуниверсальности верхнего левого квадрата $\varepsilon_1 = \xi\lambda$, $\varepsilon_2 = \xi\varkappa$ для единственного ξ. Отсюда $\alpha_1 = \varepsilon_1\theta_1 = \xi(\lambda\theta_1)$, $\alpha_2 = \varepsilon_2\eta_2 = \xi(\varkappa\eta_2)$.

Для доказательства единственности морфизма ξ покажем, что пара $(\lambda\theta_1, \varkappa\eta_2)$ разделяющая. Пусть $\gamma_1(\lambda\theta_1) = \gamma_2(\lambda\theta_1)$, $\gamma_1(\varkappa\eta_2) = \gamma_2(\varkappa\eta_2)$. Покажем, что $\gamma_1\lambda\theta_2 = \gamma_2\lambda\theta_2$. Действительно,

$$(\gamma_1\lambda\theta_2)\varphi = \gamma_1\lambda\theta_1\nu = \gamma_2\lambda\theta_1\nu = (\gamma_2\lambda\theta_2)\varphi,$$

$$(\gamma_1\lambda\theta_2)\psi = \gamma_1\varkappa\eta_2\rho = \gamma_2\varkappa\eta_2\rho = (\gamma_2\lambda\theta_2)\psi.$$

Поскольку пара (φ, ψ) — разделяющая (см. п. 1.3), $\gamma_1\lambda\theta_2 = \gamma_2\lambda\theta_2$. Поскольку пара (θ_1, θ_2)—разделяющая, $\gamma_1\lambda = \gamma_2\lambda$. По симметрии $\gamma_1\varkappa = \gamma_2\varkappa$. Отсюда $\gamma_1 = \gamma_2$, что и требовалось доказать.

Последнее утверждение леммы очевидно.

Докажем теперь достаточность условий теоремы 1.11. Пусть $(\alpha, \beta) \in P(A, B)$, $(\gamma, \delta) \in P(B, C)$ и пусть $\operatorname{Im}(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta']$, $\operatorname{Im}(\gamma, \delta) = (\gamma', \delta']$. Значит, $(\alpha, \beta) = \nu(\alpha', \beta')$, $(\gamma, \delta) = \rho(\gamma', \delta')$, где $\nu, \rho \in \mathbf{E}$. Диаграмма (1), в которой β и γ нужно заменить на β' и γ'. Лемма 1.12 и замечания, сделанные после определения слабой эквивалентности, позволяют установить следующую последовательность соотношений:

$$(\alpha', \beta') \circ (\gamma', \delta') = (\varphi\alpha', \psi\delta') \overset{s}{\sim} (\lambda\theta_2\varphi\alpha', \varkappa\tau_1\psi\delta') =$$
$$= (\lambda\theta_1\nu\alpha', \varkappa\tau_2\rho\delta') \sim (\nu\alpha', \nu\beta') \circ (\rho\gamma', \rho\delta') = (\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta).$$

Поскольку пары (α', β') и (γ', δ') определены с точностью до эквивалентности, которая является конгруэнцией относительно умножения пар морфизмов, соотношение $(\alpha', \beta') \circ (\gamma', \delta') \overset{s}{\sim} (\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta)$ доказывает теорему.

С л е д с т в и е 1.13. *Если бикатегория* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4), *то объекты категории* $\mathbf{K}$, *вместе с множествами* $R(A, B)$, *в качестве морфизмов, образуют категорию соответствий* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *над* $\mathbf{K}$, *умножение в которой задается правилом*:

$$(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = \operatorname{Im}((\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta)).$$

Т е о р е м а 1.11 и следствие 1.13 содержат в себе, в частности, результаты работы А. Клейна [9].

З а м е ч а н и е. Если в диаграмме (1) отбросить морфизмы β и γ, то оставшаяся часть может рассматриваться как обобщение „Komma-construction" Ловера (см., напр., [21], стр. 22).

1.6. П р и м е р ы к а т е г о р и й, у д о в л е т в о р я ю щ и х а к с и о м а м (C1)—(C4).

1. Любое предмногообразие $\mathbf{A}$ универсальных алгебр является локально малой бикатегорией $\mathbf{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{E}_r, \operatorname{Mon} \mathbf{A})$ с произведениями и поэтому удовлетворяет аксиомам (C1)—(C3) в силу лемм 1.3 и 1.5. Регулярные эпиморфизмы категории $\mathbf{A}$—это в точности сюръективные гомоморфизмы. Известно, что коуниверсальный квадрат относительно гомоморфизмов $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to C$ можно построить как подалгебру U произведения $A \times B$ (π_1, π_2), состоящую из всех пар (a, b), для которых $a\alpha = b\beta$, вместе с гомоморфизмами $\varphi = \pi_1|u : U \to A$, $\psi = \pi_2|u: U \to B$. Если α — сюръективный гомоморфизм, то для всякого $b \in B$ существует такой элемент $a \in A$, что $a\alpha = b\beta$. Поэтому ψ—сюръективный гомоморфизм, т. е. в категории $\mathbf{A}$ выполнена аксиома (C4). В частности, категория множеств $\mathbf{S}$ удовлетворяет аксиомам (C1)—(C4).

Без труда проверяется, что категория $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ для предмногообразия $\mathbf{A}$ совпадает с категорией бинарных отношений.

2. Любая категория функторов $\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{K})$ из малой категории $\mathbf{V}$ в бикатегорию $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$, удовлетворяющую аксиомам (C1)—(C4), также удовлетворяет аксиомам (C1)—(C4), если в качестве допустимых эпиморфизмов (мономорфизмов) выбрать также естественные преобразования φ, для которых $\varphi_D \in \mathbf{E}$ $(\varphi_D \in \mathfrak{M})$ при любом $D \in Ob\mathbf{V}$.

3. Любая полуструктура по пересечениям P, рассматриваемая как категория, является бикатегорией $P = (P, \operatorname{Iso} P, \operatorname{Mor} P)$, удовлетворяющей аксиомам (C1)—(C4). Полуструктура P может рассматриваться также как коммутативная полугруппа идемпотентов. Легко проверить, что категория $\mathbf{R}(P)$ совпадает с разверткой полугруппы

P [20]: развертка состоит из троек (a, b, c), $a, b, c \in P$, $b \leqslant a$, $b \leqslant c$, умножение которых задается правилом

$$(a, b, c) \circ (c, d, e) = (a, b \cap d, e).$$

4. В категории топологических пространств **T** существует бикатегорная структура (**T**, $\mathbf{E}_r$, Mon **T**), удовлетворяющая аксиомам (C1)—(C3), но не удовлетворяющая, как показал Г. Келли [8], аксиоме (C4). С другой стороны, в категории **T** существует вторая бикатегорная структура (**T**, Epi **T**, $\mathfrak{M}_r$), где $\mathfrak{M}_r$ — класс регулярных мономорфизмов, совпадающий с классом гомеоморфных вложений, которая удовлетворяет всем аксиомам (C1)—(C4). Однако, категория **R** (**T**), построенная относительно второй бикатегорной структуры, как нетрудно видеть, эквивалентна категории **R** (**S**) и поэтому не представляет интереса.

1.7. Д у а л и з а ц и я. Двойственным к понятию (допустимого) подъобъекта пары объектов A, B является понятие (допустимого) факторобъекта пары A, B как класса эквивалентных плотных пар морфизмов $\alpha: A \to X$, $\beta: B \to X$ (не имеющих правых делителей в $\mathfrak{M} \setminus \mathrm{Iso}\, \mathbf{K}$ в случае бикатегории). При выполнении в **K** аксиом (C1*) — (C4*), двойственных (C1)—(C4), можно построить категорию **R**′ (**K**) косоответствий над **K**. Категория множеств **S** удовлетворяет (относительно своей единственной бикатегорной структуры) как аксиомам (C1)—(C4), так и аксиомам (C1*)—(C4*). Выполнение аксиом (C1*)—(C3*) вытекает из локальной малости справа, существование копроизведений* и объединений факторобъектов любого объекта. Установим выполнение аксиомы (C4*). Пусть $\mu: C \to A$—инъективное отображение, $\beta: C \to B$—любое отображение. Пусть $D = (A \setminus C\mu) * B$ и $\psi_1: A \setminus C\mu \to D$, $\psi: B \to D$ — соответствующие вложения. Положим

$$a\varphi = \begin{cases} a\psi_1, & \text{если } a \in A \setminus C\mu; \\ c\beta\psi, & \text{если } a = c\mu. \end{cases}$$

Отображение φ корректно, ибо μ — инъективное отображение. Ясно, что $\mu\varphi = \beta\psi$. Без труда проверяется универсальность построенного квадрата. По построению ψ—инъективное отображение, т. е. аксиома (C4*) выполнена. Следовательно, для категории **S** можно построить категорию **R** (**S**) косоответствий. В § 2 будет показано, что категории **R** (**S**) и **R**′ (**S**) неизоморфны.

Любая абелева категория **U** тоже удовлетворяет аксиомам (C1*) и (C4*), однако категории **R** (**U**) и **R**′ (**U**) оказываются изоморфными.

§ 2. Категории соответствий как категории с инволюцией

2.1. С о б с т в е н н ы е м о р ф и з м ы к а т е г о р и й с и н в о л ю ц и е й. Напомним [15], что категория **R** называется категорией с ин-

* Свободных произведений по терминологии книги [17].

волюцией, или I-категорией, если каждое множество $H_{\mathbf{R}}(A, B)$ частично упорядочено отношением $\subset$ и если каждому морфизму $\alpha \in H_{\mathbf{R}}(A, B)$ сопоставлен морфизм $\alpha^* \in H_{\mathbf{R}}(B, A)$, причем выполнены следующие условия:

a) $(\alpha^*)^* = \alpha$; b) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$; c) если $\alpha \subset \beta$, то $\alpha^* \subset \beta^*$; d) если $\alpha \subset \beta$ то $\gamma\alpha \subset \gamma\beta$ для любого γ. Отображение $\alpha \to \alpha^*$ называется инволюцией. В категориях с инволюцией действует следующий усиленный принцип двойственности [20]: если утверждение P справедливо, то двойственное утверждение P^*, полученное из P перестановкой множителей во всех входящих в P произведениях морфизмов и с сохранением логической структуры, включая отношение порядка и инволюцию, также справедливо. Детальное рассмотрение явлений двойственности в I-категориях дано в [2].

Зафиксируем I-категорию $\mathbf{R}$. Морфизм $\alpha \in H_{\mathbf{R}}(A, B)$ назовем *D-регулярным*, если

$$\alpha\alpha^* \supset 1_A; \tag{2}$$

I-регулярным, если

$$\alpha^*\alpha \subset 1_B. \tag{3}$$

Двойственно определяются *B* и *K-регулярные* морфизмы.

Лемма 2.1. *D-регулярные морфизмы категории* $\mathbf{R}$ *образуют подкатегорию.*

Доказательство. Поскольку $1^* = 1$ (см. [15]); $11^* = 1$. Если для α и β выполнено условие (2), то в силу монотонности умножения $(\alpha\beta)(\alpha\beta)^* = \alpha(\beta\beta^*)\alpha^* \supset \alpha\alpha^* \supset 1$.

Аналогично доказывается

Лемма 2.2. *I-регулярные морфизмы категории* $\mathbf{R}$ *образуют подкатегорию.*

D I-регулярные морфизмы будут называться *собственными*. Ввиду предыдущих лемм собственные морфизмы образуют подкатегорию $\mathbf{P}(\mathbf{R})$ категории $\mathbf{R}$. Собственный морфизм μ назовем *инъекцией*, если

$$\mu\mu^* = 1. \tag{4}$$

Собственный морфизм ν назовем *проекцией*, если

$$\nu^*\nu = 1. \tag{5}$$

Без труда проверяется, что инъекции образуют подкатегорию $\operatorname{In}\mathbf{R}$ категории $\mathbf{R}$, а проекции образуют подкатегорию $P_r\mathbf{R}$ категории $\mathbf{R}$. Из (4) и (5) следует, что $\operatorname{In}\mathbf{R} \cap P_r\mathbf{R} \subseteq \operatorname{Iso}\mathbf{R}$.

Лемма 2.3. *Если* $\alpha \in \operatorname{Iso}\mathbf{P}(\mathbf{R})$, *то* $\alpha^{-1} = \alpha^*$.

Доказательство. Умножая равенство $\alpha\alpha^{-1} = 1$ слева на α^* и используя (3), получим $\alpha^* = (\alpha^*\alpha)\alpha^{-1} \subset \alpha^{-1}$. Поскольку α и α^{-1} равноправны, $(\alpha^{-1})^* \subset (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. В силу инволюции $\alpha^{-1} \subset \alpha^*$, что в сравнении с предыдущим дает $\alpha^{-1} = \alpha^*$.

Следствие 2.4. $\operatorname{In}\mathbf{R} \cap P_r\mathbf{R} = \operatorname{Iso}\mathbf{P}(\mathbf{R})$.

Лемма 2.5. *Если* $\alpha=\beta\mu$, *где* $\alpha\in \mathbf{P}(\mathbf{R})$, $\mu\in \operatorname{In}\mathbf{R}$, *то* $\beta\in\mathbf{P}(\mathbf{R})$.

Доказательство. В силу (2) и (4) $1\subset\alpha\alpha^*=\beta\mu\mu^*\beta^*=\beta\beta^*$. В силу (3) и (4) $1=\mu\mu^*\supset\mu\alpha^*\alpha\mu^*=\mu\mu^*\beta^*\beta\mu\mu^*=\beta^*\beta$.

Лемма 2.6. *Если* $\alpha=\nu\beta$, $\alpha\in\mathbf{P}(\mathbf{R})$, $\nu\in P_r\mathbf{R}$, *то* $\beta\in\mathbf{P}(\mathbf{R})$.

Доказательство. В силу (5) $\beta=\nu^*\alpha$, отсюда $\beta\beta^*=\nu^*\alpha\alpha^*\nu\supset$ $\supset\nu^*\nu=1$ и $\beta^*\beta=\alpha^*\nu^*\nu\alpha=\alpha^*\alpha\subset 1$.

Лемма 2.7. *Пусть* $\mu=\mu_1\mu_2$, $\mu\in\operatorname{In}\mathbf{R}$. *Если* $\mu_1,\mu_2\in\mathbf{P}(\mathbf{R})$ *или если* $\mu_2\in\operatorname{In}\mathbf{R}$, *то* $\mu_1\in\operatorname{In}R$.

Доказательство. По условию $1=\mu\mu^*=\mu_1\mu_2\mu_2^*\mu_1^*$. Если $\mu_2\in$ $\in\mathbf{P}(\mathbf{R})$, то $1=\mu_1\mu_2\mu_2^*\mu_1^*\supset\mu_1\mu_1^*$ в силу (2). С другой стороны, $\mu_1\in\mathbf{P}(\mathbf{R})$, значит, $\mu_1\mu_1^*\supset 1$, откуда $\mu_1\in\operatorname{In}\mathbf{R}$. Если $\mu_2\in\operatorname{In}\mathbf{R}$, то сразу получим $1=\mu_1\mu_2\mu_2^*\mu_1^*=\mu_1\mu_1^*$. По лемме 2.5 μ_1 — собственный морфизм. Значит, $\mu_1\in\operatorname{In}\mathbf{R}$.

Аналогичная лемма справедлива для проекций.

2.2. Подкатегории собственных морфизмов категорий соответствий.

Теорема 2.8. *Пусть бикатегория* $\mathbf{K}=(\mathbf{K},\mathfrak{E},\mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4). *Тогда категория соответствий* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *является категорией с инволюцией и существует изоморфное вложение* $\Gamma:\mathbf{K}\to\mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$, *при котором* $\Gamma(\mathbf{E})\subseteq P_r\mathbf{R}(\mathbf{K})$, $\Gamma(\operatorname{Mon}\mathbf{K})\subseteq$ $\subseteq\operatorname{In}\mathbf{R}$.

Доказательство. Каждое множество $H_{\mathbf{K}(\mathbf{R})}(A,B)=R(A,B)$ является частично упорядоченным (п. 1.1.). Для $(\alpha,\beta]\in R(A,B)$ положим $(\alpha,\beta]^*=(\beta,\alpha]\in R(B,A)$. Выполнение условий a)—c) определения I-категорий очевидно. Проверим выполнение условия d). Пусть $(\alpha,\beta]\in$ $\in R(A,B)$, $(\gamma_1,\delta_1]$, $(\gamma_2,\delta_2]\in R(B,C)$ и $(\gamma_1,\delta_1]\leqslant(\gamma_2,\delta_2]$. Тогда $\gamma_1=\mu\gamma_2$, $\delta_1=\mu\delta_2$ для некоторого μ, причем в силу леммы 1.2 $\mu\in\mathfrak{M}$. Выберем коуниверсальные квадраты $[\varphi_1,\beta,\gamma_1,\psi_1]$ и $[\varphi_2,\beta,\gamma_2,\psi_2]$. Поскольку $\varphi_1\beta=\psi_1\gamma_1=(\psi_1\mu)\gamma_2$, существует такой морфизм ξ, что $\varphi_1=\xi\varphi_2$, $\psi_1\mu=\xi\psi_2$. Следовательно, $(\alpha,\beta)\circ(\gamma_1,\delta_1)=(\varphi_1\alpha,\psi_1\delta_1)=(\xi\varphi_2\alpha,\psi_1\mu\delta_2)=(\xi\varphi_2\alpha,\xi\psi_2\delta_2)=$ $=\xi(\varphi_2\alpha,\psi_2\delta_2)=\xi((\alpha,\beta)\circ(\gamma_2,\delta_2))$. По лемме 1.1. $\operatorname{Im}((\alpha,\beta)\circ(\gamma_1,\delta_1))\leqslant$ $\leqslant\operatorname{Im}((\alpha,\beta)\circ(\gamma_2,\delta_2))$, что и доказывает выполнение условия α).

Положим для $\alpha\in H_{\mathbf{K}}(A,B)$ $\Gamma(\alpha)=(1_A,\alpha]\in R(A,B)=H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A,B)$ и покажем, что отображение $\Gamma:\mathbf{K}\to\mathbf{R}(\mathbf{K})$ является изоморфным вложением. Очевидно, что отображение Γ переводит единицы в единицы. Пусть $\alpha\in H_{\mathbf{R}}(A,B)$, $\beta\in H_{\mathbf{R}}(B,C)$. Тогда $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=(1,\alpha]\circ(1,\beta]=$ $=(1,\alpha\beta]=\Gamma(\alpha\beta)$, поскольку в коуниверсальном квадрате против единицы всегда лежит изоморфизм. Если $\Gamma(\alpha)=(1,\alpha]=(1,\beta]=\Gamma(\beta)$, то $1=\xi\cdot 1$, $\beta=\xi\alpha$ для некоторого ξ. Но $\xi=1$, поэтому $\beta=\alpha$, т. е. Γ — изоморфное вложение.

Покажем, что для любого $\alpha\in H_{\mathbf{K}}(A,B)$ $\Gamma(\alpha)\in\mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$. Пусть $\alpha=\nu\mu$, $\nu\in\mathbf{E}$, $\mu\in\mathfrak{M}$. Тогда $(\alpha,1)\circ(1,\alpha)=(\alpha,\alpha)=\nu(\mu,\mu)$, откуда $(\alpha,1)\circ(1,\alpha)\overset{s}{\sim}(\mu,\mu)$, т. е.

$$\Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\alpha)=(1,\alpha]^*\circ(1,\alpha]=(\mu,\mu]\leqslant(1,1].$$

С другой стороны, если $(\delta_1, \delta_2) = \mathrm{kep}\,\alpha$, то

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha)^* = (1, \alpha] \circ (1, \alpha]^* = (\delta_1, \delta_2] = \mathrm{kep}\,\alpha \geqslant (1,1]$$

по отмеченному в п. 1.3. свойству ядерных пар морфизмов. Таким образом, $\Gamma(\alpha) \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$.

Если μ — мономорфизм, то $\mathrm{Ker}\,\mu = (1,1]$. Поэтому $\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu)^* = (1, \mu] \circ (1, \mu]^* = (1,1]$, т. е. $\Gamma(\mu) \in \mathrm{In}\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$.

Если $\nu \in \mathbf{E}$, то пара (ν, ν) слабо эквивалентна паре $(1,1)$. Поэтому $\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\nu) = (1, \nu]^* \circ (1, \nu] = (1,1]$, т. е. $\Gamma(\nu) \in P_r\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$.

Отметим, что для каждого морфизма $(\alpha, \beta] \in H_{R(K)}(A, B)$ имеет место равенство

$$(\alpha, \beta] = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\beta), \tag{6}$$

поскольку $(\alpha, \beta) = (\alpha, 1) \circ (1, \beta)$.

Если $[\varphi, \beta, \gamma, \psi]$ — коуниверсальный квадрат, то $(\varphi, \psi) = (1, \beta) \circ (\gamma, 1) = (\varphi, 1) \circ (1, \psi)$, откуда

$$\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)^* = \Gamma(\varphi)^*\,\Gamma(\psi). \tag{7}$$

Отсюда

$$(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = \Gamma(\varphi\alpha)^*\,\Gamma(\psi\delta), \tag{8}$$

поскольку

$$(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)^*\,\Gamma(\delta) =$$
$$= \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\varphi)^*\,\Gamma(\psi)\,\Gamma(\delta) = \Gamma(\varphi\alpha)^*\,\Gamma(\psi\delta).$$

Теорема 2.9. *В условиях теоремы 2.8 функтор $\Gamma: \mathbf{K} \to \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$ полон тогда и только тогда, когда каждый допустимый эпиморфизм регулярен.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функтор Γ полон и $\nu \in \mathbf{E}$. Если $\mathrm{Ker}\,\nu = (\delta_1, \delta_2]$, то ввиду (7) $\Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu)^* = \Gamma(\delta_1)^*\,\Gamma(\delta_2)$. Если $\delta_1\beta = \delta_2\beta$, то $\Gamma(\delta_1)\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\delta_2)\,\Gamma(\beta)$, откуда в силу (5) $\Gamma(\beta) = \Gamma(\delta_1)^*\,\Gamma(\delta_2)\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\nu)\,\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\beta)$, поскольку $\Gamma(\delta_1) \in P_r(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$ по теореме 2.8. Так как по той же теореме $\Gamma(\beta) \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$ и $\Gamma(\nu) \in P_r\,\mathbf{R}$, то по лемме 2.6 $\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\beta) \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$, откуда по условию $\Gamma(\nu)^*\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta')$. Следовательно, $\Gamma(\beta) = \Gamma(\nu)\,\Gamma(\beta') = \Gamma(\nu\beta')$ и $\beta = \nu\beta'$, ибо Γ — вложение. Таким образом, $\nu = \mathrm{coker}\,(\delta_1, \delta_2)$ и, значит, ν — регулярный эпиморфизм.

Достаточность. Пусть $(\alpha, \beta] \in H_{R(K)}(A, B) \cap \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$. Выберем допустимые разложения $\nu\mu$ и $\pi\sigma$ морфизмов α и β соответственно и зафиксируем ядерные пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathrm{kep}\,\alpha = \mathrm{kep}\,\nu$ и $(\delta_1\delta_2) = \mathrm{kep}\,\beta = \mathrm{kep}\,\pi$. По теореме 2.8 $\Gamma(\sigma) \in \mathrm{In}\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$. Поэтому ввиду (7)

$$(\alpha, \beta] \circ (\alpha, \beta]^* = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\beta)^*\,\Gamma(\beta)^*\,\Gamma(\alpha) =$$
$$= \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\pi)\,\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\sigma)^*\,\Gamma(\pi)^*\,\Gamma(\alpha) =$$
$$= \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\pi)\,\Gamma(\pi)^*\,\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha)^*\,\Gamma(\delta_1)^*\,\Gamma(\delta_2)\Gamma(\alpha) = \Gamma(\delta_1\alpha)^*\,\Gamma(\delta_2\alpha).$$

Возьмем каноническое разложение пары $(\delta_1\alpha, \delta_2\alpha) = \rho(\alpha_1, \alpha_2)$. Поскольку $\Gamma(\rho) \in P_r\,\mathbf{R}(\mathbf{K})$ по теореме 2.8,

$$\Gamma(\delta_1 \alpha)^* \Gamma(\delta_2 \alpha) = \Gamma(\rho\alpha_1)^* \Gamma(\rho\alpha_2) = \Gamma(\alpha_1)^* \Gamma(\rho)^* \Gamma(\rho) \Gamma(\alpha_2) =$$
$$= \Gamma(\alpha_1)^* \Gamma(\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2].$$

Так как
$$(\alpha, \beta] \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K})), \text{ то } (\alpha, \beta] \circ (\alpha, \beta]^* = (\alpha_1, \alpha_2] \geqslant (1_A, 1_A].$$

Значит, для некоторого λ выполнены равенства $1_A = \lambda\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, откуда $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{E}$. Поэтому $\delta_1\alpha = \rho\alpha_1 \in \mathbf{E}$ и $\alpha \in \mathbf{E}$.

Ввиду проведенной выше выкладки
$$(\beta, \alpha] \circ (\beta, \alpha]^* = (\alpha, \beta]^* \circ (\alpha, \beta] = \Gamma(\varepsilon_1 \beta)^* \Gamma(\varepsilon_2 \beta) = (\beta_1, \beta_2],$$
где $\varkappa(\beta_1, \beta_2)$ — каноническое разложение пары $(\varepsilon_1\beta, \varepsilon_2\beta)$. Так как $(\alpha, \beta] \in \mathbf{P}(\mathbf{R}(\mathbf{K}))$, то $(\beta_1, \beta_2] \leqslant (1_B, 1_B]$, т. е. $\beta_1 = \tau \cdot 1_B = \beta_2$. Отсюда $\varepsilon_1\beta = \varkappa\beta_1 = \varkappa\beta_2 = \varepsilon_2\beta$. По условию α — регулярный эпиморфизм и, значит, $\alpha = \operatorname{coker} \ker \alpha = \operatorname{coker}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Следовательно, $\beta = \alpha\beta'$, откуда $(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha\beta') = \alpha(1, \beta') \overset{s}{\sim} (1, \beta')$. Поэтому $(\alpha, \beta] = (1, \beta'] = \Gamma(\beta')$, и теорема доказана.

2.3. Регулярные категории. Категорию $\mathbf{K}$ назовем *регулярной*, если она является категорией с регулярными кообразами и удовлетворяет аксиомам (C1)—(C4). Теорема 2.8 и 2.9 приводят к такому результату.

Следствие 2.10. *Всякая регулярная категория является подкатегорией всех собственных морфизмов своей категории соответствий.*

2.4. I-функторы. Функтор $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}'$ между I-категориями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ называется *I-функтором*, если он удовлетворяет следующим условиям: a) $F(\alpha^*) = F(\alpha)^*$; b) из $\alpha \subset \beta$ следует $F(\alpha) \subset F(\beta)$.

Очевидно, что всякий I-функтор F переводит B—, K—, D—, I-регулярные морфизмы в B—, K—, D—, I-регулярные морфизмы и, в частности, индуцирует функтор $\overline{F} = F|_{\mathbf{P}(\mathbf{R})}: \mathbf{P}(\mathbf{R}) \to \mathbf{P}(\mathbf{R}')$, переводящий проекции в проекции и инъекции в инъекции.

Теорема 2.11. *Пусть бикатегории* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *и* $(\mathbf{K}', \mathbf{E}', \mathfrak{M}')$ *удовлетворяют аксиомам* (C1) — (C4) *с функторами вложения* $\Gamma: \mathbf{K} \to \mathbf{R}(\mathbf{K})$ *и* $\Gamma': \mathbf{K}' \to \mathbf{R}(\mathbf{K}')$ *соответственно. Если* $F: \mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ — *ковариантный функтор, перестановочный с коуниверсальными квадратами, и если* $F(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}'$, *то существует единственный I-функтор* $\widetilde{F}: \mathbf{R}(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}(\mathbf{K}')$, *для которого* $\Gamma\widetilde{F} = F\Gamma'$.

Доказательство. Ввиду (6) всякий морфизм $\varphi = (\alpha, \beta] \in H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$ имеет вид $\varphi = \Gamma(\alpha)^* \Gamma(\beta)$. Поэтому, если функтор $\widetilde{F}$ существует, то
$$\widetilde{F}(\varphi) = \widetilde{F}(\Gamma(\alpha)^* \Gamma(\beta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta)). \tag{9}$$

Покажем, что правая часть равенств (9) может быть принята за определение функтора $\widetilde{F}$. Пусть $(\alpha', \beta') \in P(A, B)$ — любая пара морфизмов, для которой $\varphi = \Gamma(\alpha')^* \Gamma(\beta')$. Это значит, что пары (α, β) и

(α', β') слабо эквивалентны, т. е. $\alpha' = \nu\alpha$, $\beta' = \nu\beta$ для некоторого $\nu \in \mathbf{E}$. Следовательно

$$\Gamma'(F(\alpha'))^* \Gamma'(F(\beta')) = [\Gamma'(F(\nu))\Gamma'(F(\alpha))]^* \Gamma'(F(\nu))\Gamma'(F(\beta)) =$$

$$= \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\nu))^* \Gamma'(F(\nu))\Gamma'(F(\beta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta)) = \tilde{F}(\varphi),$$

поскольку $F(\nu) \in \mathbf{E}'$ по условию и $\Gamma'(F(\nu)) \in P,\ \mathbf{R}(\mathbf{K}')$ по теореме 2.8. Последние равенства показывают, в частности, что отображение $\tilde{F}$ определено формулой (9) корректно.

Очевидно, что $\tilde{F}(1_A) = 1_{\widetilde{F(A)}} = 1_{F(A)}$. Пусть $\varphi = (\alpha, \beta) \in H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$, $\psi = (\gamma, \delta] \in H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(B, C)$ и $[\varepsilon_1, \beta, \gamma, \varepsilon_2]$ — коуниверсальный квадрат. Ввиду (8) и перестановочности функтора F с коуниверсальными квадратами справедливы следующие равенства:

$$\tilde{F}(\varphi\psi) = \tilde{F}[\Gamma(\varepsilon_1\alpha)^* \Gamma(\varepsilon_2\delta)] = \Gamma'(F(\varepsilon_1\alpha))^* \Gamma(F(\varepsilon_2\delta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\varepsilon_1))^*$$

$$\Gamma'(F(\varepsilon_2))\Gamma'(F(\delta)) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta))\Gamma'(F(\gamma))^* \Gamma'(F(\delta)) = \tilde{F}(\varphi)\tilde{F}(\psi).$$

Таким образом, $\tilde{F}$ — функтор. Пусть теперь $\varphi = (\alpha, \beta] \leqslant \psi(\gamma, \delta)$. Тогда $(\alpha, \beta) = \mu(\gamma, \delta)$, где по лемме 1.2 $\mu \in \mathfrak{M}$. Поскольку $\ker \mu = (1.1)$ и функтор F перестановочен с коуниверсальными квадратами $F(\mu) \in \operatorname{Mon} \mathbf{K}'$. В силу теоремы 2.8 $\Gamma'(F(\mu)) \in \operatorname{In} \mathbf{R}(\mathbf{K}')$. Следовательно

$$\tilde{F}(\varphi) = \Gamma'(F(\alpha))^* \Gamma'(F(\beta)) = \Gamma'(F(\gamma))^* \Gamma'(F(\mu))^* \Gamma'(F(\mu))\Gamma'(F(\delta)) \subset$$

$$\subset \Gamma'(F(\alpha'))^* \Gamma'(F(\delta)) = \tilde{F}(\psi).$$

Очевидно, что $\tilde{F}(\varphi)^* = \tilde{F}(\varphi^*)$. Значит, $\tilde{F}$ — I-функтор, и теорема доказана.

2.5. **Представление категорий соответствий над регулярными категориями.** Барр [1] назвал регулярными категории, удовлетворяющие следующим условиям: a) существует правый нуль; b) каждый морфизм имеет ядерную пару; c) каждая ядерная пара имеет коядро; d) каждая пара морфизмов (α, ν) с общим концом, в которой ν—регулярный эпиморфизм, имеет коуниверсальный квадрат $[\varphi, \alpha, \nu, \psi]$, причем φ—регулярный эпиморфизм.

Предложение 2.12. *Категория* $\mathbf{K}$, *удовлетворяющая условиям* b)—d), *является категорией с регулярными кообразами.*

Начнем с предварительных рассмотрений. Диаграмму (10) назовем коммутативной, если $\delta_i\alpha = \beta\varepsilon_i$, $i = 1, 2$. Коммутативную диаграмму (10) назовем коуниверсальной относительно пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и морфизма α, если для коммутативной диаграммы (11) существует такой единственный морфизм γ, что $\psi = \gamma\beta$, $\varphi_i = \gamma\delta_i$, $i = 1, 2$.

Лемма 2.13. *Если категория* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет условиям* b) *и* c), *то для любой ядерной пары* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *и для любого морфизма* α *существует коуниверсальная коммутативная диаграмма.*

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & \cdot \arrow[d, "\alpha"] \\
\cdot \arrow[r, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_2"'] & \cdot
\end{tikzcd} \qquad (10)$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[d, "\psi"'] & \cdot \arrow[d, "\alpha"] \\
\cdot \arrow[r, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_2"'] & \cdot
\end{tikzcd} \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \nu$, $(\delta_1, \delta_2) = \ker \alpha\nu$. Так как $(\delta_1\alpha)\nu = (\delta_2\alpha)\nu$, то существует такой единственный морфизм β, что $\delta_i\alpha = \beta\varepsilon_i$, $i = 1, 2$.

Предположим, что дана коммутативная диаграмма (11). Тогда $\varphi_1(\alpha\nu) = \psi(\varepsilon_1\nu) = \psi(\varepsilon_2\nu) = \varphi_2(\alpha\nu)$, откуда $\varphi_i = \gamma\delta_i$, $i = 1, 2$, для единственного морфизма γ. Кроме того, $(\gamma\beta)\varepsilon_i = \gamma\delta_i\alpha = \varphi_i\alpha = \psi\varepsilon_i$, $i = 1, 2$, откуда, $\gamma\beta = \psi$, так как пара $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$—разделяющая. Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Если в категории* K *выполнены условия* b) — d), *то в коуниверсальной диаграмме* (10) *против регулярного эпиморфизма* α *лежит эпиморфизм* β.

Доказательство. Пусть $[\alpha_1, \varepsilon_1, \alpha, \psi_1]$, $[\alpha_2, \varepsilon_2, \alpha, \psi_2]$, $[\eta_1, \alpha_1, \alpha_2, \eta_2]$ — коуниверсальные квадраты, существующие по условию d), поскольку ε_1, ε_2 и α — регулярные эпиморфизмы. Поэтому и все остальные морфизмы из этих квадратов — регулярные эпиморфизмы. Положим $\psi = \eta_1\alpha_1 = \eta_2\alpha_2$, $\varphi_i = \eta_i\psi_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\varphi_i\alpha = \eta_i\psi_i\alpha = \eta_i\alpha_i\varepsilon_i = \psi\varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

По определению коуниверсальной диаграммы существует такой морфизм γ, что $\psi = \gamma\beta$, $\varphi_i = \gamma\delta_i$, $i = 1, 2$. Так как ψ —эпиморфизм, и лемма доказана.

Доказательство предложения 2.12. Пусть $\alpha\colon A \to B$ — произвольный морфизм, $(\delta_1, \delta_2) = \ker \alpha$, $\nu = \operatorname{coker}(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\alpha = \nu\mu$. Если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \mu$, то ввиду $(\delta_1 \nu)\mu = \delta_1 \alpha = \delta_2 \alpha = (\delta_2 \nu)\mu$, существует такой единственный морфизм β, что $\delta_i \nu = \beta\varepsilon_i$, $i = 1, 2$. Таким образом, в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & \cdot \arrow[d, "\nu"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\cdot \arrow[r, shift left, "\varepsilon_1"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_2"'] & \cdot \arrow[r, "\mu"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

квадрат коуниверсален в силу построения, описанного в доказательстве леммы 2.13. По лемме 2.14 $\beta = \operatorname{Epi} \mathbf{K}$. Так как $\beta\varepsilon_1 = \delta_1\nu = \delta_2\nu = \beta\varepsilon_2$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, откуда $\mu \in \operatorname{Mon} \mathbf{K}$, и предложение доказано.

Следствие 2.15. *В условиях леммы* 2.14 β — *регулярный эпиморфизм.*

Доказательство. Построенный при доказательстве леммы 2.14 морфизм ψ является регулярным эпиморфизмом как произведение двух регулярных эпиморфизмов. Поэтому β, будучи правым делителем ψ, является регулярным эпиморфизмом.

Следствие 2.16. *При выполнении условий* b) *и* d) *условие* c) *равносильно существованию в* $\mathbf{K}$ *бикатегорной структуры* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \operatorname{Mon} \mathbf{K})$.

Доказательство. Достаточность условия c) доказана в предложении 2.12. Если же в бикатегории $(\mathbf{K}, \mathbf{E}_r, \operatorname{Mon} \mathbf{K})$ выполнено условие b) и если $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \alpha$, то $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \ker \nu$, где $\alpha = \nu\mu$, $\nu \in \mathbf{E}_r$, $\mu \in \operatorname{Mon} \mathbf{K}$, и $\nu = \operatorname{coker}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, в силу предложения V.3.10 книги [17].

Теорема 2.17. *Для всякой категории соответствий* $R(\mathbf{K})$ *над малой регулярной категорией с правым нулем без собственных подобъектов существует* I*-изоморфное вложение в категорию соответствий* $R(\mathbf{S})$ *над категорией множеств* $\mathbf{S}$.

Доказательство. По условию 2.16 регулярная категория в нашем смысле удовлетворяет условиям b) — d). Наличие правого нуля есть требование a). Отсутствие собственных подобъектов обеспечивает выполнение условий теоремы 3 работы Барра [1], по которой существует изоморфное вложение категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{S}$, перестановочное с коуниверсальными квадратами и переводящее регулярные эпиморфизмы в регулярные эпиморфизмы. По теореме 2.11 это вложение продолжается до I-вложения $R(\mathbf{K})$ в $R(\mathbf{S})$, что и утверждалось.

2.6. Дуализация. Категория косоответствий $R(\mathbf{K})$ над категорией $\mathbf{K}$, удовлетворяющей аксиомам (C1*)—(C4*), также является категорией с инволюцией, в которую категория $\mathbf{K}$ изоморфно вкладывается. В случае категории множеств $\mathbf{S}$ категории $\mathbf{R}(\mathbf{S})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{S})$ неизоморфны, хотя бы потому, что все множества $H_{\mathbf{R}(\mathbf{S})}(\varnothing, X)$ пусты, а множество $H_{\mathbf{R}'(\mathbf{S})}(X, Y)$ может быть пустым только при $X = Y = \varnothing$.

С другой стороны, для абелевой категории $\mathbf{U}$ можно показать, что сопоставляя каждому подобъекту $(u, \mu]$ объекта $A \times B$ коядро μ, мы получим изоморфизм $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ и $\mathbf{R}'(\mathbf{U})$, перестановочный с инволюцией, но обращающий порядок. Категория $\mathbf{R}'(\mathbf{U})$ I-изоморфна категории $\mathbf{R}(\mathbf{U}^*)$, где $\mathbf{U}^*$—категория, двойственная к $\mathbf{U}$.

§ 3. Некоторые свойства категорий R(K)

3.1. Существование пересечений. Частично упорядоченное множество S назовем *условной полуструктурой по пересечениям*, если пересечение элементов a, $b \in S$ существует тогда и только тогда, когда множество $\{a, b\}$ ограничено снизу.

Теорема 3.1. *Пусть бикатегория* $(\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathfrak{M})$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4). *В категории* $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ *каждое множество* $H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$ *является условной полуструктурой тогда и только тогда, когда каждая пара морфизмов* α, $\beta \in H_{\mathbf{K}}(A, B)$, *имеющая левый уравнитель, обладает ядром.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma\alpha = \gamma\beta$. Можно считать, что $\gamma \in \mathfrak{M}$. Тогда $(\gamma, \gamma\alpha] = (\gamma(1, \alpha)] = (\gamma(1, \beta)]$, откуда видно, что пара подобъектов $(1_A, \alpha]$, $(1_A, \beta] \in R(A, B)$ ограничена снизу подобъектом $(\gamma, \gamma\alpha]$. Следовательно, существует пересечение $(1_A, \alpha] \cap \cap (1_A, \beta] = (\mu_1, \mu_2]$. Значит, $(\mu_1, \mu_2) = \varphi_1(1_A, \alpha) = \varphi_2(1_A, \beta)$ для некоторых φ_1 и φ_2, откуда $\mu_1 = \varphi_1 = \varphi_2$ и $\mu_2 = \varphi_1\alpha = \varphi_2\beta = \mu_1\alpha = \mu_1\beta$. Следовательно, $(\mu_1, \mu_2) = \mu_1(1_A, \alpha) = \mu_1(1_A, \beta)$. Равенство $\mu_1 = \ker(\alpha, \beta)$ устанавливается повторением первой части доказательства.

Достаточность. Пусть $(\alpha, \beta]$, $(\gamma, \delta] \in R(A, B)$ и $(\lambda, \varkappa] \leqslant (\alpha, \beta]$, $(\lambda, \varkappa] < (\gamma, \delta]$. Выберем коуниверсальные квадраты $[\varepsilon_1, \alpha, \gamma, \varepsilon_2][\delta_1, \beta, \delta, \delta_2]$, $[\varphi, \varepsilon_1, \delta_1, \psi]$ и покажем, что пара морфизмов $(\varphi\varepsilon_2, \psi\delta_2)$ обладает левым уравнителем. По выбору подобъекта $(\lambda, \varkappa]$ существуют такие морфизмы ξ и η, что $(\lambda, \varkappa) = \xi(\alpha, \beta) = \eta(\gamma, \delta)$, откуда

$$\lambda = \xi\alpha = \eta\gamma, \ \varkappa = \xi\beta = \eta\delta.$$

Ввиду коуниверсальности выбранных квадратов существуют такие морфизмы θ_1 и θ_2, что

$$\xi = \theta_1\varepsilon_1 = \theta_2\delta_1, \ \eta = \theta_1\varepsilon_2 = \theta_2\delta_2.$$

Поэтому существует такой морфизм θ, что

$$\theta_1 = \theta\varphi, \ \theta_2 = \theta\psi.$$

Следовательно, $\theta(\varphi\varepsilon_2) = \theta_1\varepsilon_2 = \theta_2\delta_2 = \theta(\psi\delta_2)$. По условию существует $\ker(\varphi\varepsilon_2, \psi\delta_2) = \mu$. Так как $\mu\varphi\varepsilon_2 = \mu\psi\delta_2$, то пара $(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta)$ делится справа на пару (γ, δ). С другой стороны, $\mu\varphi\varepsilon_2\gamma = \mu\varphi\varepsilon_1\alpha = (\mu\psi\delta_1)\alpha$, $\mu\psi\delta_2\delta = (\mu\psi\delta_1)\beta$, т. е. пара $(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta)$ делится справа на пару (α, β). По лемме 1.1. $\operatorname{Im}(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta) \leqslant (\alpha, \beta]$ и $\operatorname{Im}(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta) \leqslant (\gamma, \delta]$. Поскольку $\theta(\varphi\varepsilon_2) = \theta(\psi\delta_2)$, то $\theta = \theta'\mu$. Отсюда

$$\lambda = \xi\alpha = \theta_1\varepsilon_1\alpha = \theta\varphi\varepsilon_1\alpha = \theta'\mu\varphi\varepsilon_1\alpha = \theta'(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma),$$

$$\varkappa = \eta\delta = \theta_2\delta_2\delta = \theta\psi\delta_2\delta = \theta'(\mu\psi\delta_2\delta).$$

Вновь по лемме 1.1 $\operatorname{Im}(\lambda, \varkappa) = (\lambda, \varkappa] \leqslant \operatorname{Im}(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta)$. Поскольку пара $(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta)$ не зависит от выбора $(\lambda, \varkappa]$, доказано, что $\operatorname{Im}(\mu\varphi\varepsilon_2\gamma, \mu\psi\delta_2\delta) = (\alpha, \beta] \cap (\gamma, \delta]$. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *каждое множество* $H_{\mathbf{R}(\mathbf{K})}(A, B)$ *является полуструктурой по пересечениям тогда и только тогда, когда каждая пара морфизмов* $\varepsilon, \beta \in H_{\mathbf{K}}(A, B)$ *имеет ядро.*

3.2. Диаграммный поиск в категориях $\mathbf{R}(\mathbf{K})$. Установим следующее обобщение леммы 9. 4 работы Пуппе [15].

Предложение 3.3. *Пусть категория* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет аксиомам* (C1)—(C4). *Если* $(\alpha, \beta] \in R(A, B)$, $(\gamma, \delta] \in R(B, C)$, *то пара* $(\varphi, \psi) \in P(A, C)$ *делится справа на произведение* $(\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta]$ *тогда и только тогда, когда существует такой допустимый эпиморфизм* ν *и такой морфизм* η, *что пара* $(\nu\alpha, \eta)$ *делится справа на* (γ, δ), а пара $(\eta, \nu\psi)$ делится справа на (γ, δ).

Доказательство. Необходимость. Пусть $[\varepsilon_1, \beta, \gamma, \varepsilon_2]$— коуниверсальный квадрат. Тогда

$$(\alpha, \beta) \circ (\gamma, \delta) = (\varepsilon_1\alpha, \varepsilon_2\delta) \text{ и } (\alpha, \beta] \circ (\gamma, \delta] = (\alpha', \delta'],$$

где
$$(\varepsilon_1\alpha, \varepsilon_2\delta) = \rho(\alpha', \delta'), \ \rho \in \mathbf{E}, \ (\alpha', \delta'] \in R(A, C).$$

Если пара (φ, ψ) делится на $(\alpha', \delta']$, то $\varphi = \sigma\alpha'$, $\psi = \sigma\delta'$ для некоторого σ. Выберем коуниверсальный квадрат $[\nu, \sigma, \rho, \theta]$. Поскольку $\rho \in \mathbf{E}$, $\nu \in \mathbf{E}$ по аксиоме (C4). Положим $\eta = \theta\varepsilon_1\beta = \theta\varepsilon_2\gamma$. Тогда $\nu\varphi = \nu\sigma\alpha' = \theta\rho\alpha' = \theta\varepsilon_1\alpha$. Таким образом, пара $(\nu\varphi, \eta)$ делится справа на пару (α, β). Далее, $\nu\psi = \nu\sigma\delta' = \theta\rho\delta' = \theta\varepsilon_2\delta$. Таким образом, пара $(\eta, \nu\psi)$ делится справа на пару (γ, δ), и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\nu\varphi = \eta_1\alpha$, $\eta = \eta_1\beta = \eta_2\gamma$, $\nu\psi = \eta_2\delta$. Тогда $\eta_1 = \eta'\varepsilon_1$, $\eta_2 = \eta'\varepsilon_2$ в силу коуниверсальности квадрата $[\varepsilon_1, \beta, \gamma, \varepsilon_2]$. Отсюда $\nu\varphi = \eta_1\alpha = \eta'\varepsilon_1\alpha = (\eta'\rho)\alpha'$, $\nu\psi = \eta_2\delta = \eta'\varepsilon_2\delta = (\eta'\rho)\delta'$, т. е. пара $(\nu\varphi, \nu\psi)$ делится справа на (α', δ'), откуда и пара (φ, ψ) делится на (α', δ').

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 20.V.1974

Մ. Շ. ՑԱԼԵՆԿՈ. Համապատասխանությունների կատեգորիաները կանոնավոր կատեգորիաների վրա (ամփոփում)

Աշխատությունում առանձնացված է կատեգորիաների մի լայն դաս, որոնց համար կարելի է կառուցել համապատասխանությունների կատեգորիա և բացահայտված է համապատասխանությունների կատեգորիայի գոյության և ելակետային կատեգորիայի մեջ առանձնահատուկ երկկատեգորիական կառուցվածքների առկայության միջև եղած կապը։ Որոշ կատեգորիաների, մասնավորապես բազմությունների կատեգորիայի համար ապացուցված է ոչ իզոմորֆ «համապատասխանությունների կատեգորիաների» գոյությունը։

Աշխատության երկրորդ մասում զարգացված է կառուցված համապատասխանությունների կատեգորիաների աքսիոմատիկ տեսությունը։

M. Sh. TSALENKO. *Categories of relations over regular categories*
(summary)

A large class of categories is outlined for which the construction of the connection between the existance of category of relations and the presence of special bicategorical constructions in the initial category is possible. For some categories, particularly for the category of sets the existance of non isomorphic „categories of relations" is proved.

In the second part of the paper the axiomatical theory of the constructed category of relations is developed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Barr.* Non-abelian full embeddind; anneuncement of results, Lecture Notes in Math,, 195, 1971, 205—208.
2. *H.—B. Brinkmann.* Relations for exact categories, J. of Algebra, 13, № 4, 1969, 465—480.
3. *H.—B. Brinkmann, D. Puppe.* Abelsche und exakte kategorien, Korrespondenzen, Lecture Notes in Math., 96, 1969.
4. *M. Bunge.* Relative Functa Categories and Categories of Algebras, J. of Algebra, 11, 1969, 64—101.
5. *М. С. Бургин.* γ-категории и категория с инволюцией, УМН, 24, вып. 2, 1969, 221—222.
6. *М. С. Бургин.* Категории с инволюцией и соответствия в γ-категориях, Труды ММО, 22, 1970, 160—228.
7. *И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев.* Неразложимые представления группы Лоренца, УМН, 23, вып. 2, 1968, 3—60.
8. *G. M. Kelly.* Monomorphisms, epimorph isms and pullbacks, J. Austral. Math. Soc. 9, № 1—2, 1969, 124—142.
9. *A. Klein.* Relations in categories, III. J. Math., 14, 4, 1970, 536—550.
10. *П. Кон.* Универсальная алгебра, Изд. „Мир", 1968.
11. *А. Г. Курош.* Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
12. *J. R. Jsbell.* Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras, Rosrp. math., 36, 1964.
13. *С. Маклейн.* Гомология, Изд. „Мир", 1966.
14. *А. И. Мальцев.* Алгебраические системы, Изд. „Наука", 1970.
15. *D. Puppe.* Korrespondenzen über abelschen Kategorien, Math. Ann., 148, 1962, 1—30.
16. *Д. А. Райков.* Об одном классе категорий соответствий, ДАН СССР, 205, № 6, 1972, 1300—1303.
17. *М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.* Лекции по теории категорий, МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак-т., М., 1970.
18. *М. Ш. Цаленко.* Теоретико-категорные методы исследования некоторых задач общей алгебры, Автореферат дисс., МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак-т, 1971.
19. *М. Ш. Цаленко.* Соответствия над квазиточной категорией, ДАН СССР, 155, № 2, 1964, 292—294.
20. *M. Tsalenko.* Semigruppi con involuzione e categorie con involuzione, Symposia math., 4, 1970, 493—514.
21. *H. Schubert.* Kategorien II, Akademie—Verlag, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В недавних работах М. М. Джрбашяна, посвященных вопросам представления ядра Коши и решению интерполяционных задач в классе H_2 Харди (см. [1] и [2]), были построены биортогональные системы, порожденные произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(|\alpha_j|<1)$, подчиненной лишь условию

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{1}$$

С системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1, 2,\cdots) \tag{2}$$

и $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа α_k в совокупности $\{\alpha_j\}_1^k$ при условии (1), ассоциируется система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций, биортогональная с нею на единичной окружности.

Каждая из биортогональных систем $\{r_k(z), \Omega_k(z)\}_1^\infty$ не замкнута в метрике пространств Харди $H_p(1\leqslant p<\infty)$. И в связи с этим М. М. Джрбашяном в работе (1) был поставлен вопрос об исследовании базисности этих систем в подпространстве $\lambda_p\{\alpha_j\}\subset H_p(1<p<\infty)$ их замкнутой линейной оболочки.

В работе автора [3] была установлена базисность этих систем в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_j\}$ $(1<p<\infty)$ в том частном случае, *когда все числа последовательности* $\{\alpha_j\}_1^\infty$ *отличны друг от друга* и удовлетворяют условию отделимости Л. Карлесона [4]. Эти результаты в другой работе автора [5] были распространены на подпространства $\lambda_p\{G^{(+)}; \omega_k\}$ классов функций $E_p(1<p<\infty)$, аналитических в односвязных областях $G^{(+)}$ с границей Г типа Ляпунова.

Путем определенной модификации системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, в работе [2] была построена другая система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, также биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$. При помощи этой новой системы М. М. Джрбашяну удалось установить результаты исчерпывающего характера о существовании и явном представлении посредством системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ решений интерполяционных задач вида

$$f(z)\in H_2,\ f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j\quad (j=1, 2,\cdots) \tag{3}$$

для узлов $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ограниченной кратности $p=\sup\limits_{k>1}|s_k|<+\infty$ и при соблюдении условия обобщенной отделимости

$$\inf_{k>1}\prod_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|=\delta>0. \tag{4}$$

В настоящей статье, существенно опираясь на некоторые основные леммы и теоремы работ [1] и [2], а также на известную теорему Н. К. Бари о базисах [6], исследуется вопрос о базисности первоначальной биортогональной системы $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяна в подпространстве $\lambda_2\{\alpha_j\}\subset H_2$ при тех же условиях (4) и $p=\sup\limits_{k>1}\{s_k\}<+\infty$.

Эти результаты распространяются далее на подпространства типа $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$, являющиеся замыканием в метрике $L_2(\Gamma)$ другой не замкнутой в $G^{(+)}$ биортогональной на границе Γ системы простейших рациональных дробей $\{m_k^{1/2}(z)\}_1^\infty$ с полюсами в точках последовательности $\{\omega_j\}_1^\infty\in\overline{G}^{(+)}$. Эти системы, являющиеся существенным обобщением полиномов Фабера, также были введены М. М. Джрбашяном в работе [1].

В § 1 статьи даются формулировки ряда лемм и теорем известных ранее, на которые мы существенно опираемся в дальнейшем. Здесь, в частности, приводится определение класса $\lambda_2\{\alpha_j\}$ как подмножества функций из H_2, допускающих моногенное мероморфное продолжение из круга $|z|<1$ в ее внешнюю часть $|z|>1$.

В § 2 доказывается, что условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы биортогональные системы функций $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовали безусловный базис (теорема 1) в $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Далее устанавливается, что (разумеется неединственное) решение интерполяционной задачи (3) не только представимо в виде ряда

$$f(z)=\sum_{j=1}^\infty\gamma_j\Omega_j^*(z) \tag{5}$$

по системе $\{\Omega_j^*(z)\}_1^\infty$, как впервые было доказано в работе [2], но и в виде ряда (теорема 2)

$$f_0(z)=\sum_{j=1}^\infty\gamma_j\Omega_j(z). \tag{6}$$

При этом оказывается, что такое решение обладает важным свойством, оно является единственным из решений задачи (3), обладающим минимальной нормой в H_2.

Наконец, устанавливается также, что соответствующие разложения произвольной функции $f(z)\in\lambda_2\{\alpha_k\}$ сходятся равномерно к этой же функции в области CK, где K — замыкание множества точек $\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^\infty$.

В заключительном § 3 рассматриваются аналогичные вопросы базиса по биортогональным на кривых типа Ляпунова системам рациональных функций $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^{\infty}$, о которых упоминалось выше. Оказывается, что как и в случае круга, здесь также каждая функция из класса $\lambda_2\{G^{(+)}, \omega_k\}$ допускает моногенное мероморфное продолжение из области $G^{(+)}$ в область $G^{(-)}$ ее дополнения, а также разложение по системе $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^{\infty}$ в среднем по границе Γ, и равномерное внутри множества $G^{(+)} \cup G^{(-)} \setminus \{\omega_j\}_1^{\infty}$.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1. (а). Пусть $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа произвольной кратности.

Обозначим через $s_k \geqslant 1$ и $p_k(n)$ кратность появления числа α_k соответственно на отрезках $\{\alpha_j\}_1^{k}$ и $\{\alpha_j\}_1^{n}$. Всюду дальше будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|^2) < +\infty. \tag{1.1}$$

Из этого условия очевидно следует, что при любом $(1 < k < \infty)$ кратность появления числа α_k во всей последовательности будет конечной, причем очевидно, что $s_k \leqslant p_k = p_k(\infty) < \infty$.

В этом предположении нашу последовательность $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ отнесем к классу Δ_p, если

$$\sup_{1 < k < \infty} p_k = p < +\infty \tag{1.2}$$

и при некотором $\delta\,(0 < \delta < 1)$ соблюдается условие Л. Карлесона

$$\inf_{k > 1} \prod_{\alpha_j \neq \alpha_k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| = \delta. \tag{1.3}$$

(б). С последовательностью $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ ассоциируем ее функцию Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.4}$$

а также функции

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Следуя работе [1], введем в рассмотрение системы функций

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)!\, z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{1.5}$$

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(s_k - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z - \alpha_k)^{p_k - s_k + 1 - \nu}} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{1.6}$$

а также

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{B_n(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k(n)-s_k}\frac{a_{n,\nu}(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k(n)-s_k+1-\nu}}\quad(k=1,2,\cdots),\tag{1.7}$$

где
$$a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad(\nu=0,1,2,\cdots),\tag{1.8}$$

$$a_{n,\nu}(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}{B_n(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad(\nu=0,1,2,\cdots).\tag{1.9}$$

Для дальнейших наших целей необходимо рассматривать также систему $\{\tilde r_k(z),\ \tilde\Omega_k(z)\}_1^\infty$, где

$$\tilde r_k(z)=(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/2}\,r_k(z),\tag{1.5'}$$

$$\tilde\Omega_k(z)=(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}\,\Omega_k(z).\tag{1.6'}$$

Следующие теоремы, на которые мы будем существенно опираться, были установлены в работе [1].

Теорема А. *Система функций* $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$, *а также* $\{\tilde r_k(z),\ \tilde\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *биортогональна на окружности* $|t|=1$ *в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}r_\nu(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\tilde r_\nu(t)\,\overline{\tilde\Omega_k(t)}\,|dt|=\delta_{k,\nu}=\begin{cases}0 & \nu\neq k\\ 1 & \nu=k.\end{cases}\tag{1.10}$$

Теорема Б. *Для произвольных значений переменных* z *и* ζ *и для любого* $n\,(1\leqslant n<\infty)$ *справедливы тождества*

$$\frac{1}{1-\bar\zeta z}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\,r_k(z)+\frac{\overline{B_n(\zeta)}\,B_n(z)}{1-\bar\zeta z}.\tag{1.11}$$

В работе [2] М. М. Джрбашяна была введена в рассмотрение система функций $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, являющаяся модификацией системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, также биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$. Там же устанавливается следующий результат (см. теоремы 1 и 2 [3]).

Теорема В. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_p$ *и* $\{\gamma_j\}_1^\infty$ — *произвольная последовательность, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma_j|^2(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}<\infty,\tag{1.12}$$

тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Для любой функции* $f(z)\in H_2$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}\,|f^{(s_j-1)}(\alpha_j)|^2<C\|f\|,\tag{1.13}$$

где C *не зависит от* f.

2°. *Существует функция* $f_0(z) \in H_2$, *являющаяся решением интерполяционной задачи*

$$f_0^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \gamma_j \quad (j=1, 2, \cdots). \tag{1.14}$$

3°. *Функция* $f_0(z)$ *представима в виде суммы ряда*

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \Omega_j^*(z), \tag{1.15}$$

сходящегося равномерно внутри $|z|<1$ *и в метрике* H_2 *на* $|z|=1$.

В дальнейшем нам понадобится еще одна лемма, полностью эквивалентная лемме 1.6 работы [2].

Лемма А. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_p$, *то для коэффициентов* (1.8) *справедливы неравенства*

$$|a_\nu(\alpha_k)| \leqslant a(\delta, p)\,(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant p_k, \quad 1 \leqslant k < \infty), \tag{1.16}$$

где $a(\delta, p)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* ν *и* k.

(г). Обозначим через $H_2(D^{(+)})$ класс голоморфных в $D^{(+)} = \{z;\ |z|<1\}$ функций, принадлежащих известному классу H_2 Харди, а через $H_2(D^{(-)})$ — класс голоморфных в $D^{(-)} = \{z;\ |z|>1\}$ функций, представимых в виде

$$F(z) = \tilde{F}(1/z), \quad z \in D^{(-)},$$

где $\tilde{F}(z) \in H_2(D^{(+)})$.

Как известно, классы $H_2(D^{(+)})$ и $H_2(D^{(-)})$ становятся гильбертовыми пространствами, если ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}\, |d\zeta|,$$

где $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ — предельные значения функций $f(z)$ и $g(z)$ по некасательным направлениям.

Для каждой функции $f(z) \in H_2(D^{(+)})$ введем в рассмотрение последовательность функций

$$R_n(f;\ z) = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^{(+)} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{1.17}$$

а также функцию

$$R(f;\ z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^{(+)}. \tag{1.18}$$

Справедлива следующая лемма (см. [1]).

Лемма Б. *Пусть* $f(z) \in H_2(D^{(+)})$ — *произвольная функция, тогда*

$$1^\circ. \quad R_n(f, z) \in H_2(D^{(+)}) \ (n = 1, 2, \cdots), \quad R(f, z) \in H_2(D^{(+)}),$$

$$2^\circ. \quad \lim_{n\to\infty} \| R_n(f; z) - R(f; z) \| = 0. \tag{1.19}$$

(д) Введем в рассмотрение следующий класс функций (см. [6],[7]).

Обозначим через $\lambda_2\{\alpha_k\}$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z| = 1$ и удовлетворяющих условиям

1. $f(z) \in H_2(D^{(+)}),\ z \in D^{(+)}$,

2. $f(z) = B(z)\tilde{f}(z),\ \ \tilde{f}(\infty) = 0,\ \ \tilde{f}(z) \in H_2(D^{(-)}),\ \ z \in D^{(-)}$,

3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z| = 1$ почти всюду совпадают.

Следующие леммы доказаны в работах [3] и [1].

Лемма В. *Для того чтобы функция $f(z) \in H_2(D^{(+)})$ принадлежала классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)}. \tag{1.20}$$

Лемма Г. *Любая функция $f(z) \in H_2(D^{(+)})$ допускает представление вида*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

причем

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2,$$

где

$$f_1(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}, \quad f_2(z) = B(z) f_2^*(z) \in H_2(D^{(+)}),$$

$$f_2^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \in H_2(D^{(+)}).$$

Лемма Д. *Пусть $f(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}$ и $f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = 0\ (k = 1, 2, \cdots)$, тогда $f(z) \equiv 0$.*

Теорема Г. [8]. *Пусть системы функций $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in L_2(0, 2\pi)$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$, $\psi_n \in L_2(0, 2\pi)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ составляют полную биортогональную систему в некотором подпространстве пространства $L_2(0, 2\pi)$. Тогда последовательности $\{\varphi_n\}_1^\infty$ и $\{\psi_n\}_1^\infty$ образуют безусловный базис в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 < \infty,$$

где f — произвольная функция из этого подпространства.

§ 2. Разложение по биортогональным системам $\{r_k(z);\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$

(2.1) (а). Лемма 2.1. *Системы функций $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$ и, следовательно, также системы $\{\tilde{r}_k(z),\ \tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$, принадлежат классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$.*

Действительно, применяя лемму В имеем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{r_k(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} = (s_k-1)! \int\limits_{|t|=1} \frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{a}_k)^{s_k}} \frac{1}{B(t)} \frac{dt}{t-z} = 0,$$

так как

$$\frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{a}_k)^{s_k}} \cdot \frac{1}{B(t)(t-z)} = O(|t|^2) \text{ при } t\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что $\Omega_k(z) \in \lambda_2\{a_k\}$.

Лемма 2.2. *Системы функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и, следовательно, также системы $\{\tilde{r}_k(z)\}_1^\infty$, $\{\tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ полны в $\lambda_2\{a_k\}$.*

Доказательство. Пусть $f(z) \in \lambda_2\{a_k\}$ — произвольная функция, тогда по формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta} z} |d\zeta|.$$

Применяя формулу (1.12), получим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}(f)\, r_k(z) + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где

$$c_k^{(n)}(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\, |d\zeta|, \tag{2.1}$$

так что доказательство полноты $\{r_k(z)\}_1^\infty$ следует из лемм Б и В.

Пусть теперь $\Phi(f) = (f, g)$, $g \in \lambda_2\{a_k\}$—некоторый линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\Phi(\Omega_k) = (\Omega_k;\ g) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Согласно определению класса $\lambda_2\{a_k\}$ на окружности $|t| = 1$ имеем

$$g(t) = \frac{B(t)}{t} \tilde{g}\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{где} \quad \tilde{g}(z) \in H_2(D^{(+)}).$$

Применяя лемму Д, получаем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{\tilde{g}(t)}{\bar{B}(t)} \frac{dt}{t-z} = \int\limits_{|t|=1} \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)},$$

где

$$\bar{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k - z}{1 - a_k z} \frac{|a_k|}{a_k},$$

так что $\tilde{g}(z) \in \lambda_2\{\bar{a}_k\}$. Теперь из (2.2) имеем

$$(g, \Omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} g\, \bar{\Omega}_k |dt| = \frac{1}{(s_k-1)!\, 2\pi i} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(p_k-s_k-\nu)!} \tilde{g}^{(p_k-s_k-\nu)}(\alpha_k) \qquad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.4}$$

Но учитывая, что $a_0(\alpha_k) \neq 0$ $(k=1, 2, \cdots)$, из (2.4) заключаем, что

$$\tilde{g}^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0 \qquad (k=1, 2, \cdots).$$

Так что, в силу леммы В будем иметь $g(z)\equiv 0$ и, тем самым, лемма доказана.

(б). Лемма 2.3. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (1.2), *тогда*

$$0<C_1<\|\tilde{r}_k\|<C_2,$$

где $0<C_1$, $C_2<\infty$ — *некоторые постоянные, не зависящие от* k.

Доказательство. Для каждой функции $\tilde{r}_k(z)$ имеем

$$\|\tilde{r}_k\|=\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{2(s_k-1/2)}}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^{2s_k}}|d\zeta|\right\}^{1/2}=$$

$$=\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^2}\,\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-2}}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^{2s_k-2}}|d\zeta|\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{s_k-1}(s_k-1)!\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^2}|d\zeta|=2^{s_k-1}\quad(s_k-1)!,$$

так что, учитывая условие (1.2), получаем

$$\|\tilde{r}_k(z)\|\leqslant 2^{p-1}(p-1)!<+\infty.$$

Теперь, обозначая $\varphi_k=\arg\bar{\alpha}_k$, оценим величину $\|\tilde{r}_k\|$ снизу. Мы имеем

$$\|\tilde{r}_k\|=\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}}{|1-e^{i\theta}\bar{\alpha}_k|^{2s_k}}d\theta\geqslant\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{|\theta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|^2}\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}}{\left[(1-|\alpha_k|^2)^2+4\sin^2\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right]^{s_k}}d\theta\geqslant 5^{-s_k}\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{|\theta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|^2}\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}}{(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k}}d\theta>5^{-s_k}\quad(s_k-1)!>5^{-p},$$

и лемма доказана.

Лемма 2. 4. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_p$, *тогда для любой функции* $f\in H_2(D^{(+)})$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f, \tilde{r}_k)|^2<\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|(f, \tilde{\Omega}_k)|^2<\infty. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $f \in H_2(D^{(+)})$, тогда согласно теореме В имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \tilde{r}_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (1-|\alpha_k|^2)^{s_k - 1/2} \frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)\zeta^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k\zeta)^{s_k}} |d\zeta| \right|^2 <$$

$$\leqslant [(p-1)!]^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2 < +\infty.$$

Учитывая теорему Рисса 4 и (1.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \tilde{\Omega}_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{\overline{a_\nu(\alpha_k)}}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{(\bar{\zeta}-\bar{\alpha}_k)^{p_k-s_k+1-\nu}} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \overline{a_\nu(\alpha_k)}\, f_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\bar{\alpha}_k) \right|^2,$$

где

$$f_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta B(1/\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_2(D^{(+)}).$$

Теперь, пользуясь леммой А и теоремой В, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \tilde{\Omega}_k)|^2 \leqslant pa(\delta, p) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (1-|\alpha_k|^2)^{2p_k-2\nu-2s_k+1} |f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\bar{\alpha}_k)|^2 <$$

$$< p^2 a(\delta, p) \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} |f_*^{(s_k-1)}(\bar{\alpha}_k)|^2 < +\infty.$$

2.2 (a). Теорема 1*. *Для того чтобы системы* $\{\tilde{r}_k; \tilde{\Omega}_k\}_1^{\infty}$ *образовывали безусловный базис в* $\lambda_2\{\alpha_k\}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\{\alpha_k\}_1^{\infty} \in \Delta_p$.

Доказательство. Утверждение о достаточности следует из теоремы Г и лемм 2.2 и 2.4.

Теперь предположим, что $\{\tilde{r}_k(z)\}_1^{\infty}$ является базисом в $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Тогда по теореме Банаха [9] имеем

$$\|\tilde{\Omega}_k\| \leqslant C\|\tilde{r}_k\| \quad (1 \leqslant k < \infty), \tag{2.6}$$

где $C\,(0 < C < \infty)$ — некоторая постоянная, не зависящая от k. Применяя неравенства (2.6) для тех k, для которых $s_k = p_k$ и учитывая, что при таких k

$$\Omega_k(z) = \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{(p_k-1)!} \frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j \neq \alpha_k} \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}} \frac{B(z)}{z-\alpha_k},$$

* Учитывая теорему Банаха [9] о базисах нетрудно доказать, что если $\sup\limits_k s_k = \infty$, то системы (1.5′), (1.6′) не образуют базиса в $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

согласно лемме 2.3 и (2.6) имеем

$$\|\Omega_k\| = \frac{1}{(p_k-1)!} \frac{1}{\prod\limits_{a_j \neq a_k} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \right|} < C,$$

так что

$$\prod_{a_j \neq a_k} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a} a_k} \right| > \frac{1}{pC},$$

и теорема доказана

Теорема 2. *Пусть* $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_p$ *и* $\{w_k\}_1^\infty$ — *некоторая последовательность, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|^2)^{2s_k - 1} |w_k|^2 < \infty. \tag{2.7}$$

Тогда

1°. *Существует единственная функция* $f(z) \in \lambda_2\{a_k\}$ *такая, что*

$$f^{(s_k-1)}(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.8}$$

и допускающая разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k(z). \tag{2.9}$$

2°. *Функция* f *среди всех решений интерполяционной задачи* (2.7) *имеет минимальную норму.*

Доказательство. Согласно теореме B, в классе $H_2(D^{(+)})$ существует функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям (2.8). Но по лемме Г указанная функция допускает представление вида

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in D^{(+)},$$

где

$$f_1(z) \in \lambda_2\{a_k\} \text{ и } f_2(z) = B(z)\mathring{f}_2(z), \ \mathring{f}_2(z) \in H_2(D^{(+)}).$$

Поскольку $f_2^{(s_k-1)}(a_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то функция $f(z) = f_1(z) \in \lambda_2\{a_k\}$ также удовлетворяет условиям (2.8). Поскольку $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_p$, то по теореме 1 наша функция $f(z) \in \lambda_2\{a_k\}$ допускает разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(f) \bar{\Omega}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|^2)^{1/2 - s_k} d_k(f) \Omega_k(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(a_k) \Omega_k(z), \quad z \in D^{(+)},$$

где

$$d_k(f) = (f, \bar{r}_k).$$

Единственность функции $f(z)$, подчиненной условиям (2.8), следует из леммы Д.

Утверждение 2° теоремы непосредственно вытекает из леммы Г.

Следствие. *Пусть $f(z)$ — любая функция из класса $H_2(D^{(+)})$. Тогда имеет место представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\Omega_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D^{(+)}.$$

(б). Лемма 2.5. *Пусть $f(z)\in H_2(D^{(+)})$, тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z),\quad c_k(f)=(f,\ \Omega_k),\tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ \Omega_k(z)\tag{2.11}$$

сходятся абсолютно и равномерно вне замыкания $\overline{E}$ множества точек $E=\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $F\subset C\overline{E}$ — некоторое замкнутое множество и $\rho=\rho(F,\ \overline{E})$ есть расстояние множеств F и $\overline{E}$. Поступая также, как и в лемме 2.4, для коэффициентов $(f,\ \Omega_k)$ получим оценку

$$|c_k(f)|=|(f,\ \Omega_k)|\leqslant p a(\delta,\ p)\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\bar{\alpha}_k)|,\tag{2.12}$$

где $f_*(z)$ определяется по формуле (2.6). Заметив теперь, что

$$\max_{z\in F}|r_k(z)|=C_\rho(\overline{E},\ F)<\infty,$$

так как $\sup\limits_{k\geq 1} s_k=p<\infty$, из (2.12) будем иметь

$$|\overline{c_k}(f)\, r_k(z)|\leqslant C_0\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\bar{\alpha}_k)|,$$

где $C_0=pa(\delta,\ p)\,C_\rho(\overline{E},\ F)$. Отсюда применением неравенства Гельдера, в силу теоремы В получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)\, r_k(z)|\leqslant C_0\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|f_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\bar{\alpha}_k)|\leqslant$$

$$\leqslant pC_0\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k}\,|f_*^{(s_k-1)}(\alpha_k)|\leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}\,|f_*^{(s_k-1)}(\bar{\alpha}_k)|^2\right\}^{1/2}<+\infty$$

и, тем самым, утверждение о сходимости ряда (2.12) доказано.

Обозначив теперь

$$k_0=\max_{\alpha_k\in F}\{k\},$$

очевидно будем иметь $k_0<+\infty$, и поэтому

$$\inf_{\substack{k>k_0+1\\ z\in F}} |z-\alpha_k|^n = \rho_{k_0} > 0 \qquad (n=1,\ 2,\cdots,\ p_k),$$

поскольку $\sup\limits_{k>1} p_k = p < \infty$. Но тогда из леммы A следует, что

$$\left| f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\frac{1}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}\right| \leqslant p\rho_{k_0}^{-1}\left(1-|\alpha_k|^2\right)^{s_k}|f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|. \tag{2.13'}$$

С другой стороны, пользуясь неравенством Гельдера, в силу теоремы B легко выводим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k}|f^{(s_k-1)}(\alpha_k)| < +\infty.$$

Отсюда, в силу (2.13′), вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\frac{1}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}$$

на F и, следовательно, утверждение о сходимости ряда (2.11).

Теорема 3. *Если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_p$, то для любой функции $f(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\}$ справедливы разложения*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z), \qquad z\in C\overline{E}, \tag{2.13}$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\,\Omega_k(z), \qquad z\in C\overline{E}, \tag{2.14}$$

где $c_k(f)$ определяется единственным образом по формуле (2.11).

Доказательство. Рассмотрим последовательность аналитических в $D^{(-)}$ функций

$$T_m(z) = \frac{1}{B(z)}\sum_{1}^{m} c_k(f)\, r_k(z) \qquad (1\leqslant m<\infty).$$

Согласно теореме 1

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m - f/B\| = 0,$$

так что последовательность $\{T_m(z)\}_1^\infty$ равномерно сходится в $D^{(-)}$ к некоторой функции $F(z)\in H_2(D^{(-)})$. $F(\infty)=0$ и почти всюду на окружности $|z|=1$ выполняется тождество

$$f(z) = B(z)\,F(z).$$

Тем самым справедливость разложения (2.13) установлена для множества $D^{(-)}\setminus \overline{E}$. Справедливость разложения (2.13) в остальных точках следует из теоремы 1 и леммы 2.5. Аналогично доказывается и (2.14).

§ 3. Базисы рациональных функций в ограниченных областях

3.1 (а). Пусть $G^{(+)}$ — односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ, а $G^{(-)}$ — дополнение замыкания области $G^{(+)}$.

Через $w = \Phi(z)$ $(z = \psi(w))$ обозначим функцию Римана, отображающую область $G^{(-)}$ на $D^{(-)}$ с условиями нормировки $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

Пусть, далее, $\{\omega_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в области $G^{(-)}$. Обозначим через s_k и p_k кратность появления числа ω_k соответственно на отрезках $\{\omega_j\}_1^k$ и $\{\omega_j\}_1^\infty$. Определим другую последовательность $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$, полагая

$$\alpha_k(\omega) = [\overline{\Phi(\omega_k)}]^{-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.1}$$

Нашу последовательность отнесем к классу K_p, если при некотором $\delta > 0$ и $p < \infty$ выполняется условие

$$\sup_{k \geq 1} p_k = p, \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\Phi^{-1}(\omega_k)|^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\alpha_k(\omega)|^2) < +\infty, \tag{3.3}$$

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\omega_j \neq \omega_k} \left| \frac{\Phi^{-1}(\omega_j) - \Phi^{-1}(\omega_k)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_j)\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}} \right| = \inf_{k \geq 1} \prod_{\alpha_j(\omega) \neq \alpha_k(\omega)} \left| \frac{\alpha_j(\omega) - \alpha_k(\omega)}{1 - \alpha_j(\omega)\overline{\alpha_k(\omega)}} \right| \geq \delta. \tag{3.4}$$

(б). Функцию $f(z)$ отнесем к классу $E_2(G^{(+)})$, если она голоморфна в $G^{(+)}$ и $f(\varphi(w)) \in H_2(D^{(+)})$, где $\varphi(w)$ — риманова функция, отображающая $D^{(+)}$ на $G^{(+)}$. Класс $E_2(G^{(+)})$ является гильбертовым пространством с нормой

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(\zeta)|^2 |d\zeta| \right\}^{1/2},$$

где $f(\zeta)$ суть угловые граничные значения функции $f(z)$ на границе Γ области $G^{(+)}$. Аналогично определяется и класс $E_2(G^{(-)})$. Известно, что

$$[\psi'(w)]^{1/2} \in H_2(D^{(-)}) \quad \text{и} \quad [\Phi'(z)]^{1/2} \in E_2(G^{(-)}). \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение системы функций (см. [1])

$$m_k^{1/2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{r_k[\Phi(\zeta)]\,[\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.6}$$

$$\rho_k^{(1/2)}(z) = \frac{[\Phi'(z)]^{1/2}}{\Phi(z)} \overline{\Omega_k\left(\frac{1}{\overline{\Phi(z)}}\right)} \qquad (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.7}$$

которые составляют биортогональную на Γ систему в смысле

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \rho_k^{(1/2)}(\zeta)\, m_p^{(1/2)}(\zeta)\, d\zeta = \delta_{p,k} = \begin{cases} 1 & p = k \\ 0 & p \neq k. \end{cases} \tag{3.8}$$

Там же доказывается, что $m_k^{(1/2)}(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$ являются главными частями функций

$$\psi_k^{(1/2)}(z) = r_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^{1/2}$$

в точках ω_k $(k = 1, 2,\cdots)$ и, тем самым, имеют вид

$$m_k^{(1/2)}(z) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}}{(z-\omega_k)^j} \quad (k = 1, 2,\cdots) \tag{3.9}$$

для точек $\omega_k \neq \infty$ и

$$m_k^{(1/2)}(z) = \sum_{j=0}^{s_k - 1} b_j^{(k)} z^k \qquad \text{при } \omega_k = \infty.$$

Отметим также, что система рациональных функций $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^\infty$ представляет собой существенное обобщение известной системы полиномов Фабера (см. [1]).

(в). Рассмотрим голоморфную в $D^{(-)}$ функцию

$$\chi_{1/2}(w; z) = \frac{[\psi'(w)]^{1/2}}{\psi(w) - z}, \qquad z \in G^{(+)}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $\{\omega_k\}_1^\infty \in K_p$, тогда при каждом $z \in G^{(+)}$ справедливо представление*

$$\chi_{1/2}(w; z) = [\psi'(w)]^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{(1/2)}(\psi(w))\, m_k^{(1/2)}(z) + \frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi_{1/2}(t; z)\, B(t)}{w-t}\,dt, \tag{3.10}$$

где ряд сходится равномерно относительно w внутри $D^{(-)}$ и по норме L_2 на окружности $|w| = 1$.

Доказательство. Сначала докажем, что при каждом $z \in G^{(+)}$ как функция от ζ, $\overset{*}{\chi}_{1/2}(\zeta; z) = 1/\zeta\overline{\chi_{1/2}(1/\overline{\zeta},\ z)} \in H_2 D^{(+)}$). В самом деле, обозначив $d(z) = \inf\limits_{\zeta\in\Gamma}|\zeta - z|$, для любого $|w| = \rho \geqslant 1$ будем иметь

$$|\psi(w) - z| \geqslant d(z). \tag{3.11}$$

Поэтому, учитывая (3.5), получаем

$$\lim_{\rho\to 1+0}\sup\int\limits_0^{2\pi}|\chi_{1/2}(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-2}\lim_{\rho\to 1+0}\sup\int\limits_0^{2\pi}|\psi'(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < \infty,$$

откуда, ввиду (3.11), следует, что $\overset{*}{\chi}_{1/2}(\zeta; z) \in H_2(D^{(+)})$.

Теперь, применяя следствие теоремы 2, получим следующее разложение:

$$\chi_{1/2}(\zeta;\ z)=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega_k(\zeta)\,\chi_{1/2}^{*(s_k-1)}(a_k;\ z)+\frac{B(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi_{1/2}^{*}(t;\ z)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-\zeta},\tag{3.12}$$

где ряд сходится равномерно в области $D^{(+)}$ и по норме L_2 на окружности $|\zeta|=1$. Но если учесть, что

$$m_k^{(1/2)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{(s_k-1)!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\overline{\frac{[\psi'(1/t)]^{1/2}}{t\,(\psi(1/t)-z)\,(t-\alpha_k(\omega))^{s_k}}}\,dt=\chi_{1/2}^{*(s_k-1)}(\alpha_k(\omega);\ z),$$

то переходя к сопряженным величинам в (3.12), учитывая, что $\overline{B(\zeta)}=B(1/\bar\zeta)^{-1}$ и при $|\zeta|=1$ $\chi_{1/2}^{*}(t;\ z)=t\,\chi_{1/2}(t;\ z)$, а также, заменяя $\bar\zeta^{-1}$ на w, получим (3.10).

В качестве следствия леммы 3.1 отметим следующее разложение ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{(1/2)}(\zeta)\,m_k^{(1/2)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{B[\Phi(\zeta)]}\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^{1/2}}{(\eta-z)(\Phi(\zeta)-\Phi(\eta))}\,d\eta,\tag{3.13}$$

которое является предельным случаем теоремы, установленной в работе [1] на тот случай, когда $\{\omega_k\}_1^{\infty}\in K_p$.

3.2 (а). Теорема 4. *Если $\{\omega_k\}_1^{\infty}\in K_p$, то любая функция $f(z)\in E_2(G^{(+)})$ допускает разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(f)\,m_k^{(1/2)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{t\,B(t)}\,r\left(\frac{1}{t};\ z\right),\quad z\in G^{(+)},\tag{3.14}$$

где

$$C_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\zeta)\,\rho_k^{(1/2)}(\zeta)\,d\zeta\tag{3.14'}$$

и

$$r(w;\ z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B(t)\,[\psi'(t)]^{1/2}}{(\psi(t)-z)(1-tw)}\,dt\in H_2(D^{(+)}).\tag{3.15}$$

Доказательство. Поскольку

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^{(+)},$$

то утверждение (3.14) следует из разложения (3.13). В свою очередь утверждение (3.15) вытекает из теоремы Рисса [4], если учесть, что при фиксированном $z\in G^{(+)}$, $B(t)[\psi'(t)]^{1/2}/(\psi(t)-z)\in L_2$.

Обозначим через $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ класс функций $f(z)\in E_2(G^{(+)})$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f[\varphi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{tB(t)}r(1/t;\ z)\,dt\equiv 0,\ z\in G^{(+)}. \tag{3.16}$$

Легко проверить, что $m_k^{(1/2)}(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ и после того, как докажем теорему 5, будет видно, что $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ есть замыкание системы функций $\{m_k^{(1/2)}(z)\}_1^\infty$ по норме $L_2(\Gamma)$.

(б) Введем следующее определение. Кривую Γ отнесем к классу M и будем писать $\Gamma\in M$, если сингулярный оператор

$$S(\zeta_0;\ f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta,\ \zeta_0\in\Gamma,\quad f(\zeta)\in L_2(\Gamma)$$

является ограниченным оператором в $L_2(\Gamma)$, то есть

$$\|S(\zeta_0;\ f)\|\leqslant K\|f\|,$$

где K — некоторое число, не зависящее от f.

В частности, как доказал Б. В. Хведелидзе [10], в класс M входят все кривые Ляпунова. Позже это включение было установлено для кривых более общей природы (см. [11]).

Нам понадобится следующая теорема [12].

Теорема Е. *Если $\Gamma\in M$, то для любой функции $f(\zeta)\in L_2(\Gamma)$ интегралы типа Коши*

$$\varphi_+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in G^{(+)},\quad \varphi_-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in G^{(-)}$$

обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_+(z)\in E_2(G^{(+)}),\quad \varphi_-(z)\in E_2(G^{(-)})$,
2. *Имеют место неравенства вида*

$$\|\varphi_+\|\leqslant A\|f\|,\quad \|\varphi_-\|\leqslant A\|f\|,$$

где A — постоянная, не зависящая от f.

Лемма 3.3. *Пусть $\Gamma\in M$ и $\{\omega_k\}_1^\infty\in K_p$. Тогда для любой функции $f(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ последовательность функций*

$$S_m(\zeta)=\sum_{k=1}^{m}C_k(f)\,m_k^{(1/2)}(\zeta)\qquad(m=1,\ 2,\cdots) \tag{3.17}$$

является слабо сходящейся в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. На основании теоремы 4 в силу слабой компактности пространства L_2 достаточно установить ограниченность норм последовательности $\{S_m(\zeta)\}_1^\infty$ в $L_2(\Gamma)$.

Пользуясь известной теоремой Хана-Банаха можем утверждать, что

$$\|S_m(\zeta)\|=\sup_{\substack{g\in L_2(\Gamma)\\ \|g\|\leqslant 1}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta\right|.$$

Но из (3.17) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta=\sum_{k=1}^{m}C_k(f)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}g(\zeta)\,m_k^{(1/2)}(\zeta)\,d\zeta=\sum_{k=1}^{m}C_k(f)\,D_k(g),$$

где
$$D_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta)\,m_k^{(1/2)}(\zeta)\,d\zeta \quad (k=1,\,2,\cdots). \tag{3.18}$$

Теперь из (3.14′) и (3.7) имеем
$$C_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta)\,\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\Phi(\zeta)}\,\overline{\Omega_k\left(\frac{1}{\overline{\Phi(\zeta)}}\right)}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/2}\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|.$$
Как и при доказательстве леммы 2.4, здесь также получаем
$$|C_k(f)|\leqslant K\sum_0^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{p_k-\nu}|f^{*(p_k-\nu-s_k)}(\alpha_k(\omega))|,\ (k=1,\,2,\cdots), \tag{3.19}$$
где
$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\psi(1/\zeta))\,[\psi'(1/\zeta)]^{1/2}}{\zeta\,B(1/\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}\in H_2(D^{(+)}).$$

Для чисел $D_k(g)$, применяя теорему E и формулу (3.6), имеем
$$D_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\left\{\int_\Gamma\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\,r_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^{1/2}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{1/2}\times$$
$$\times V\cdot p\int_\Gamma\frac{g(z)}{\zeta-z}\,dz\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}\,r_k(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\times \tag{3.20}$$
$$\times\int_\Gamma g^*[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}\,r_k(t)\,dt=g_1^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))+$$
$$+g_2^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))=G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega)),$$
где
$$g^*(z)=V\cdot p\cdot\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\in L_2(\Gamma),$$
$$g_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{g[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{t}\,\frac{dt}{t-z}\in H_2(D^{(+)}),$$
$$g_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{g^*[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/2}}{t}\,\frac{dt}{t-z}\in H_2(D^{(+)})\ \text{и}\ G(z)=g_1(z)+g_2(z).$$
Теперь из (3.19) и (3.20), в силу неравенства Гельдера, имеем
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma S_m(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant K\sum_{k=1}^m\sum_0^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{p_k-\nu}|f^{*(p_k-2\nu-s_k)}(\alpha_k(\omega)|\times$$
$$\times|G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega)|\leqslant p^2K\left\{\sum_{k=1}^\infty\sum_0^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2p_k-\nu-2s_k+1}\times\right.$$
$$\left.\times|f^{*(p_k-\nu-s_k)}(\alpha_k(\omega))|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^\infty(1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2s_k-1}|G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))|^2\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant p^2 K \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2s_k-1} |f^{*(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))|^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)^{2s_k-1)} |G^{(s_k-1)}(\alpha_k(\omega))|^2 \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant p^2 K \|f^*\| \|G\| \leqslant p^2 K A \|f\|.$$

Лемма 2.4. *Пусть $\Gamma \in M$, тогда для каждой функции $f(\zeta) \in L_2(\Gamma)$ существуют функции $f_1(z) \in \lambda_2 \{G^{(+)}; \omega_k\}$, $f_2(z) \in E_2(G^{(+)})$, $f_3(z) \in E_2(G^{(-)})$ такие, что*

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) + f_2(\zeta) + f_3(\zeta)$$

и

$$C_k(f) = C_k(f_1),$$

где

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \rho_k^{(1/2)}(\zeta) \, d\zeta.$$

Доказательство мы здесь не приводим, так как оно проводится вполне аналогично, как и в лемме 7 работы [5].

Применяя теперь теорему о сильной сходимости биортогональных рядов [13], из лемм 3.4 и 3.3 получим теорему.

Теорема 5. *Пусть $\Gamma \in M$ и $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in K_p$. Тогда для любой функции $f(z) \in \lambda_2 \{G^{(+)}; \omega_k\}$ справедливо разложение*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(f) \, m_k^{(1/2)}(z), \qquad z \in G^{(+)}, \tag{3.21}$$

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \rho_k(\zeta) \, d\zeta, \tag{3.22}$$

где ряд сходится по метрике L_2 на кривой Γ.

Следствие. Пусть $f(z) \in \lambda_2 \{G^{(+)}; \omega_k\}$ и выполняется условие теоремы 5. Тогда существует функция $F(z) \in E_2(G^{(-)})$, $F(\infty) = 0$ такая, что почти всюду на кривой Γ имеет место равенство

$$f(\zeta) = B[\Phi(\zeta)] F(\zeta), \qquad \zeta \in \Gamma, \tag{3.23}$$

и при $z \in G^{(-)}$ справедливо разложение

$$B[\Phi(z)] F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(f) \, m_k^{(1/2)}(z). \tag{3.24}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность голоморфных в $G^{(-)}$ функций

$$T_m(z) = \frac{1}{B[\Phi(z)]} S_m(z).$$

Согласно теореме 5

$$\lim_{m\to\infty}\left\| T_m(\zeta)-\frac{f(\zeta)}{B[\Phi(\zeta)]}\right\|=0,$$

так что последовательность $\{T_m(z)\}_1^\infty$ сходится равномерно внутри $G^{(-)}$ к некоторой функции $F(z)\in E_2(G^{(-)})$, $F(\infty)=0$ и выполняется (3.23) и (3.24).

Таким образом, функции класса $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ характеризуются тем свойством, что каждую функцию можно продолжить в $G^{(-)}$ в смысле, отмеченном в следствии. Иначе говоря, можно дать следующее определение класса $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$, которое эквивалентно его первоначальному определению (см. [6], [7]).

Определение. Функция $f(z)$, определенная и голоморфная в $G^{(+)}\cup G^{(-)}\setminus\{\omega_k\}_1^\infty$, принадлежит классу $\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ в том и только в том случае, если выполняются следующие условия:

1. $f(z)\in E_2(G^{(+)})$, $z\in G^{(+)}$,

2. $f(z)=B[\Phi(z)]\,F(z)$, $F(\infty)=0$, $F(z)\in E_2(G^{(-)})$,

3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне кривой Γ почти всюду совпадают.

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы 5 любая функция $f(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ разлагается в ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(f)\,m_k^{(1/2)}(z),\qquad z\in G^{(+)}\cup G^{(-)}\setminus\{\omega_k\}_1^\infty.$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю профессору М. М. Джрбашяну за постоянное внимание при выполнении работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.I.1975

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում որոշ բիօրթոգոնալ սիստեմների բազիսության մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք $\{\alpha_k\}_1^\infty\,(|\alpha_k|<1)$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը բավարարում է Կառլեսոնի պայմանին։*

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ այդ պայմանն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1,2,\cdots)$$

(որտեղ s_k*-ն* α_k*-ի հանդես գալու կարգն է* $\{\alpha_j\}_1^k$*-ում և* $\sup\limits_{k\geq 1} s_k<\infty$*) ինչպես նաև նրանց հետ բիօրթոգոնալ* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *սիստեմը* L_2*-ում կազմեն բազիս իրենց գծային թաղանթի մեջ։ Ապա ապացուցվում է նման թեորեմներ Ժորդանյան կորերով սահմանափակված տիրույթի համար։*

H. M. NAIRAPETIAN. *On the basisity of certain biorthogonal systems in the complex domain* (sammary)

Let $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ be a sequence of complex numbers satisfying the Carleson condition. The paper provs that this condition is necessary and sufficient for the system of functions

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\ z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1, 2,\cdots)$$

(where s_k is the multiplicity of α_k in $\{\alpha_j\}_1^k$ and $\sup s_k<\infty$), as well as for the system $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ biorthogonal to it in L_2, to form bases for their linear hulls. Further, analogous theorems are established for regions, bounded by rectifyable Jordan curves.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
2. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
3. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах Харди H_p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
4. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
5. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах классов $E_p(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 171—184.
6. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961, 8—31.
7. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1—51.
8. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, 4, вып. 148, 1951, 69—107.
9. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, М., 1965.
10. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисского мат. ин-та АН Груз. ССР, XXIII, 1956, 3—158.
11. *Н. Н. Данилюк, В. Ю. Шелепов.* Об ограниченности в L_p сингулярного оператора с ядром Коши вдоль кривой ограниченного вращения, ДАН СССР, 124, № 3, 1967, 514—517.
12. *В. А. Пааташвили.* О принадлежности к классам E_p аналитических функций, представимых интегралом типа Коши, Труды Тбилисского мат. ин-та, X, II, 1972, 87—94.
13. *С. Качмаж и Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.

Э. А. МИРЗАХАНЯН

ВЫЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП КОМПАКТНОГО ТИПА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЫ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Бесконечномерные гомотопические группы $\Pi_q^c(X, x_0)$ индекса q (q — любое целое число) компактного типа подмножеств X вещественного сепарабельного гильбертова пространства H строятся так же как бесконечномерные гомотопические группы $\Pi_q(X, x_0)$ индекса q [3] этих множеств лишь с той разницей, что в этом случае на сфероиды f (первого и второго родов) множества X в точке x_0 и их гомотопии $F(x, t)$ накладываются дополнительные ограничения. Требуется, чтобы прообраз при отображении f каждой точки x множества X, отличной от точки x_0 был компактен и на этом прообразе терминальная производная отображения] $T_\sigma^{-q} \circ f$ (при $q \leqslant 0$) или отображения $f \circ S_\sigma^q$ (при $q > 0$) была отлична от нуля (см. [1] и [3]). Далее от гомотопии $F(x, t)$ требуется, чтобы сфероиды, определенные формулой $f_t(x) = F(x, t)$ были компактными. Такие сфероиды и гомотопии мы называем компактными.

Так же как и в [3] доказывается, что и оба подхода к определению групп $\Pi_q^c(X, x_0)$ эквивалентны, т. е. группы $\Pi_q^{c, \sigma}(X, x_0)$ и $\Pi_q^{c, A}(X, x_0)$, построенные соответственно посредством ортонормированного базиса σ и подпространства A дефекта q гильбертова пространства H, изоморфны между собой.

Всюду в дальнейшем, когда будет идти речь о „сфероидах" или гомотопиях, будет подразумеваться, что рассматривается сфероид или гомотопия компактного типа.

В этой статье дается подробное изложение результатов заметки [4]. Ее целью является полное вычисление бесконечномерных гомотопических групп компактного типа $\Pi_q^c(S, x_0)$ единичной сферы S гильбертова пространства H. Именно, показывается, что эта группа при любом целом q изоморфна стабилизировавшейся группе индекса $1-q$ конечномерных сфер, т. е. конечномерной гомотопической группе $\pi_{n+1-q}(S^n)$ при больших n.

Мы будем рассматривать отдельно три случая:

$$q < 1, \ q = 1, \ q > 1.$$

Сначала разберем случай $q < 1$, т. е. $q \leqslant 0$. В этом случае каждый рассматриваемый сфероид имеет вид $f\colon H \to H$, где $f(H) \subset S$, $f(H \setminus \Sigma) = x_0$ (Σ — единичный шар гильбертова пространства), причем отображение f принадлежит классу $K_{\sigma}^{(q)}$, т. е. $T_{\sigma}^{-q} \circ f \in K_0$. Базис σ во всех последующих рассуждениях предполагается фиксированным.

Пусть b — произвольная точка множества $S \setminus \{x_0\}$. Тогда множество $M = f^{-1}(b) \subset \Sigma$ компактно и на нем терминальная производная отображения $\varphi = T_{\sigma}^{-q} \circ f$ отлична от нуля. Далее, $\varphi(M) = T_{\sigma}^{-q}(f(M)) = T_{\sigma}^{-q} b$, т. е. $\varphi(M)$ есть одна точка, причем

$$\varphi^{-1}(T_{\sigma}^{-q} b) = f^{-1}(b) = M.$$

Следовательно, существует (см. [2]) такое конечномерное подпространство L, содержащее точку $T_{\sigma}^{-q} b$, такая окрестность $V \subset \Sigma$ компакта M и такие положительные числа h, η, что справедливы следующие утверждения:

а) Пусть $L^* \supset L$ — конечномерное подпространство, $a \in \overline{V}$, и пусть $E_{a,h}(L^*)$ — множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих условиям $(x - a) \perp L$ и $\|x - a\| \leqslant h$, тогда каждая плоскость, параллельная L^* (т. е. имеющая вид $y + L^*$, где $y \in H$) пересекается с множеством $\varphi(E_{a,h}(L^*))$ не более чем в одной точке;

б) если плоскость $y + L^*$ отстоит от L^* менее чем на η (где $L^* \supset L$), то она пересекается с множеством $\varphi(E_{a,h}(L^*))$ ровно в одной точке при любом $a \in \overline{V}$,

Мы можем при этом предполагать (см. [1]), что L есть плоскость, натянутая на первые n векторов базиса σ и что плоскость $S_{\sigma}^{-q}(L)$ (натянутая на первые $n - |q|$ векторов базиса σ) пересекается с внутренностью $\Sigma \setminus S$ единичного шара Σ более чем в одной точке.

Для любой конечномерной плоскости $L^* \supset L$ мы определим отображение

$$f_{V,L^*}\colon (\overline{V} \cap L^*) \to S \cap S_{\sigma}^{-q}(L^*), \tag{1}$$

положив

$$f_{V,L^*}(a) = (S_{\sigma}^{-q} \circ \varphi_{V,L^*})(a) = S_{\sigma}^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*). \tag{2}$$

Прежде всего укажем еще одну форму записи отображения (1). Для этого заметим, что пересечение $\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*$ состоит лишь из одной точки, а поэтому и $S_{\sigma}^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*)$ есть точка. Легко видеть, далее, что и $S_{\sigma}^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap S_{\sigma}^{-q}(L^*)$ есть точка. Допустим противное т. е. что $x, y \in S_{\sigma}^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap S_{\sigma}^{-q}(L^*)$, $x \neq y$. Тогда $x - y$ есть вектор, параллельный плоскости $S_{\sigma}^{-q}(L^*)$, причем $x = S_{\sigma}^{-q}(u)$, $y = S_{\sigma}^{-q}(v)$, где $u, v \in \varphi(E_{a,h}(L^*))$. Ясно при этом, что $u \neq v$ (поскольку $x \neq y$). Так как $S_{\sigma}^{-q}(u - v) = x - y \parallel S_{\sigma}^{-q}(L^*)$, то $u - v \parallel L^*$, это означает, что подпространство, параллельное L^* и проходящее через точку u, проходит и через v, т. е. пересекает $\varphi(E_{a,h}(L^*))$ более чем в одной точке, что противоречит приведенному выше условию а).

Итак, каждое из множеств

$$S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap L^*) \text{ и } S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*)$$

состоит лишь из одной точки. А так как первое из этих множеств содержится во втором, то эти точки совпадают

$$S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap L^*) = S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*). \qquad (3)$$

Заметив еще, что $S_\sigma^{-q}\circ\varphi = S_\sigma^{-q}\circ(T_\sigma^{-q}\circ f) = (S_\sigma^{-q}\circ T_\sigma^{-q})\circ f = f$, мы можем (в силу (2) и (3)) написать

$$f_{V,L^*}(a) = S_\sigma^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*))\cap L^*) = f(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*). \qquad (4)$$

Это и есть другая форма записи отображения (1).

Предложение 1. *Если $n=\dim L$ достаточно велико, то граница множества $V\cap L^*$ (являющегося открытым множеством плоскости L^*) переходит при отображении f_{V,L^*} в множество, не содержащее точки b.*

Доказательство. Пусть r — такое положительное число, что r-окрестность множества M содержится в V. Тогда любая точка x, принадлежащая границе множества V (и, в частности, любая точка x, принадлежащая границе множества ($V\cap L^*\subset L^*$) при любом $L^*\supset L$) отстоит от M не менее, чем на r. Будем считать n настолько большим, что плоскость L (натянутая на первые n векторов базиса σ) обладает следующим свойством: множество M целиком расположено в $\frac{r}{2}$-окрестности подпространства L.

Пусть $L^*\supset(L\cup\{T_\sigma^{-q}b\}$ и $a\in\overline{V}\cap L^*$ — такая точка, что $f_{V,L^*}(a)=b$, т. е.

$$f(E_{a,h}(L^*))\cap S_\sigma^{-q}(L^*)=b.$$

Это означает, что $b\in f(E_{a,h}(L^*))$ (поскольку $T_\sigma^{-q}b\in L^*$ и, значит, $b=S_\sigma^{-q}(T_\sigma^{-q}b)\in S_\sigma^{-q}(L^*)$, а множество $f(E_{a,h}(L^*))$ пересекается с $S_\sigma^{-q}(L^*)$ ровно в одной точке, см. (4)). Но включение $b\in f(E_{a,h}(L^*))$ равносильно соотношению $f^{-1}(b)\cap E_{a,h}(L^*)\neq\varnothing$, т. е. $M\cap E_{a,h}(L^*)\neq\varnothing$. Пусть $x\in M\cap E_{a,h}(L^*)$. Тогда $(x-a)\perp L^*$ (по определению шара $E_{a,h}(L^*)$), см. условие а), и потому $\|x-a\|$ есть расстояние от точки x до подпространства L^*. Но в силу выбора плоскости L множество M целиком расположено в $\frac{r}{2}$-окрестности подпространства L^* (так как $L^*\supset L$). Следовательно, расстояние от точки $x\in M$ до подпространства L^* меньше $\frac{r}{2}$, т. е. $\|x-a\|<\frac{r}{2}$.

Итак, если $f_{V,L^*}(a)=b$, где $a\in\overline{V}\cap L^*$, то точка a отстоит от M менее, чем на $\frac{r}{2}$. Так как все точки границы множества $V\cap L^*$ отстоят от M не менее, чем на r, то точка a не принадлежит границе множества $V\cap L^*$. Но это и означает, что при $L^*\supset(L\cup\{T_\sigma^{-q}b\})$

граница открытого в L^* множества $V \cap L^*$ переходит при отображении f_{V, L^*} в множество, не содержащее точки b. Таким образом, предложение 1 доказано.

Обозначим теперь через Q_b настолько малую замкнутую окрестность точки b в сфере $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, что она не содержит точек образа границы множества $V \cap L^*$ при отображении f_{V, L^*}. Таким образом, Q_b состоит из всех точек $x \in S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, для которых $\|x - b\| \leqslant \varepsilon$, где ε — фиксированное положительное число, меньшее чем расстояние от точки b до образа границы множества $V \cap L^*$ при отображении f_{V, L^*}. Множество Q_b представляет собой „искривленный шар", расположенный на сфере S. Далее, обозначим через ω: $Q_b \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ „растягивающее" отображение „искривленного шара" Q_b на сферу $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, т. е. отображение, переводящее всю границу (относительно сферы $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$) множества Q_b в одну точку y_0 сферы $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ и гомеоморфно, со степенью $+1$, отображающее внутренность множества Q_b на $(S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)) \setminus \{y_0\}$. Это отображение ω: $Q_b \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ мы можем продолжить в отображение ω сферы $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$ на себя, положив $\omega((S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)) \setminus Q_b) = y_0$.

Теперь мы имеем возможность рассмотреть отображение

$$f^* = \omega \circ f_{V, L^*}: (\overline{V} \cap L^*) \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*). \tag{5}$$

Ясно, что граница открытого (в плоскости L^*) множества $V \cap L^*$ переходит при отображении f^* в точку y_0. Поэтому, положив

$$f^*((\Sigma \cap L^*) \setminus (V \cap L^*)) = y_0,$$

мы получим непрерывное отображение f^*: $\Sigma \cap L^* \to S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$, определяющее некоторый элемент гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$, где $k = \dim L^*$, через S^{k+q-1} обозначена сфера $S \cap S_\varepsilon^{-q}(L^*)$. Этот элемент гомотопической группы мы обозначим через $\xi(b, L^*)$. Заметим, что в этом обозначении не участвуют Q_b и V, так как от них элемент $\xi(b, L^*)$ не зависит. В самом деле, если непрерывно изменять число ε, входящее в определение множества Q_b, то отображение f^* будет непрерывно деформироваться, а определяемый им элемент $\xi(b, L^*) \in \pi_k(S^{k+q-1})$ меняться не будет. Что же касается V, то от выбора этой окрестности отображение f^* вообще не зависит (если только число ε настолько мало, что множество Q_b не пересекается с образом границы множества $V \cap L^*$ при отображении f_{V, L^*}).

Предложение 2. *Если $L^{**} \supset L^*$ и $\dim L^{**} = \dim L^* + 1$, то $\xi(b, L^{**}) = E\xi(b, L^*)$, где через E: $\pi_k(S^{k+q-1}) \to \pi_{k+1}(S^{k+q})$ обозначен гомоморфизм надстройки Фрейденталя* (*см.* [5]).

Доказательство. Мы используем конструкцию, проведенную при доказательстве предложения 4 статьи [2] для отображения

$\varphi = T_\sigma^{-q} \circ f$, принадлежащего K_0. Построив множество W и гомотопию $G^{(0)}$, как и при доказательстве предложения 4 статьи [2], мы найдем, что отображения $\varphi_{V, L^{**}}$ и $\varphi_{V, L^*} \circ G^{(0)}$ (множества WbL^{**}) гомотопны между собой. При этом граница множества W отображается в множество, не содержащее точки $T_\sigma^{-q}\, b$. Следовательно, гомотопны между собой и отображения

$$f_{V, L^*} = S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V, L^*} \text{ и } f_{V, L^{**}} \circ G^{(0)} = S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V, L^*} \circ G^{(0)}, \tag{6}$$

причем граница множества W переводится этими отображениями в множество, не содержащее точки b. Применяя отображение ω (ср. (5)), мы получим с помощью отображений (6) два гомотопных между собой отображения $\Sigma \cap L^{**} \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$, т. е. два отображения, определяющих один и тот же элемент гомотопической группы $\pi_{k+1}(S^{k+q})$, где $k = \dim L^*$ и потому $k+1 = \dim L^{**}$. В частности, отсюда следует, что второе отображение (6), превращенное с помощью ω в отображение $\Sigma \cap L^{**} \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$ определяет элемент $\xi(b, L^{**})$ группы $\pi_{k+1}(S^{k+q})$.

Вспомним теперь (см. там же), что на множестве $V_1 \cap L^* \subset W$ отображение $\varphi_{V, L^{**}} \circ G^{(0)}$ совпадает с φ_{V_1, L^*} и переводит множество $V_1 \cap L^*$ в плоскость L^*. Далее условимся считать, что вектор e (лежащий в L^{**} и ортогональный L^*) определяет направление „вверх" в плоскости L^{**}, тогда если точка $a=(c, \xi)$ расположена в W выше (ниже) плоскости L^*, то точка $\varphi_{V, L^{**}}(G^{(0)}(c, \xi))$ также расположена выше (ниже) плоскости L^*. Применяя отображение S_σ^{-q}, мы получаем, что на множестве $(V_1 \cap L^*) \subset W$ второе отображение (6) совпадает с отображением $S_\sigma^{-q} \circ \varphi_{V_1, L^*}$ и переводит множество $V_1 \cap L^*$ в плоскость $S_\sigma^{-q}(L^*)$. Далее, полагая $e^* = S_\sigma^{-q}(e)$ и считая, что вектор e^* (ортогональный $S_\sigma^{-q}(L^*)$) определяет направление „вверх" в плоскости $S_\sigma^{-q}(L^{**})$, мы найдем, что если точка $a = (c, \xi)$ расположена в W выше (ниже) плоскости L^*, то точка $S_\sigma^{-q}(\varphi_{V, L^{**}}(G^{(0)}(c, \xi))) = f_{V, L^{**}}(G^{(0)}(c, \xi))$ также расположена выше (ниже) плоскости $S_\sigma^{-q}(L^*)$.

Следовательно, отображение $f^{**}\colon \Sigma \cap L^{**} \to S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$, определяемое (ср. (5)) с помощью второго отображения (5) (и задающее элемент $\xi(b, L^{**})$ группы $\pi_{k+1}(S^{k+q})$ устроено следующим образом. Оно переводит „диаметральное" сечение $\Sigma \cap L^*$ шара $\Sigma \cap L^{**}$ b $S \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$ в соответствии с отображением f^* (ср. (5)), задающим элемент $\xi(b, L^*) \in \pi_k(S^{k+q-1})$, и переводит „верхний полушар" шара $\Sigma \cap L^{**}$ (т. е. лежащий „выше" плоскости L^*) в „верхнюю полусферу" сферы $S \cap S_\sigma^{-q}(L^{**})$, а „нижний полушар"—в нижнюю полусферу". Но и это означает, что $\xi(b, L^{**}) = E\xi(b, L^*)$, где E— гомоморфизм надстройки Фрейденталя. Таким образом, предложение 2 доказано.

Для того чтобы сформулировать следующее предложение, условимся отождествлять группы $\pi_k(S^{k+q-1})$ и $\pi_{k+1}(S^{k+q})$ с помощью изоморфизма надстройки E $(k>-2q+3)$. Получающуюся в результате отождествления группу (изоморфную каждой из групп $\pi_k(S^{k+q-1}$, $k>-2q+3)$ мы и будем называть стабильной гомотопической группой сферы. Предложение 2 показывает, что фиксируя точку b и плоскость L^*, мы получаем элемент $\xi(b, L^*)\in\pi_k(S^{k+q-1})$, который является представителем некоторого элемента стабильной гомотопической группы сферы. Таким образом, если задан сфероид $f\colon H\to S$ индекса $q\leqslant 0$ сферы S в точке x_0, то, фиксируя точку $b\in S\setminus\{x_0\}$ и плоскость L^* достаточно высокой размерности, мы определим элемент $\xi(b, L^*)$ стабильной гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$.

Предложение 3. *Элемент $\xi=\xi(f)$ стабильной гомотопической группы $\pi_{-q+1}\approx\pi_k(S^{k+q-1})$ $(k>-2q+3)$, определяемый (как представителем) элементом $\xi(b, L^*)\in\pi_k(S^{q+k-1})$ (где $S^{q+k-1}=S\cap$ $\cap S_a^{-q}(L^*)$, $k=\dim L^*$), не зависит от произвола в выборе элементов построения, а полностью определяется гомотопическим классом $\{f\}\in\Pi_q^c(S, x_0)$ сфероида f. Этим определяется отображение $\{f\}\to\xi(f)$ бесконечномерной гомотопической группы компактного типа $\Pi_q^c(S, x_0)$ в стабильную гомотопическую группу $\pi_{-q+1}\approx$ $\approx\pi_k(S^{k+q-1})$, $(k>-2q+3)$. Оказывается, что получаемое таким образом отображение является изоморфизмом группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ на группу π_{-q+1}.*

Доказательство. Независимость от выбора плоскости L^* непосредственно вытекает из предложения 2. Независимость элемента $\xi(b, L^*)$ от выбора точки $b\in S\setminus\{x_0\}$ вытекает из того, что при непрерывном перемещении точки b в множестве $S\setminus\{x_0\}$ отображение f_{V,L^*} (а потому и отображение f^*, ср. (5)) непрерывно деформируется. Таким образом, отображение $\{f\}\to\xi(f)$ группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ в π_{-q+1} не зависит от произвола в выборе элементов построения, а определено корректно. Гомоморфность этого отображения непосредственно вытекает из определения сложения в группе $\Pi_q^c(X, x_0)$ (см. [3]).

Докажем, что отображение $\{f\}\to\xi(f)$ есть эпиморфизм. Пусть $\alpha\in\pi_{-q+1}$ — произвольный элемент стабильной гомотопической группы, и пусть $\{\lambda\}\in\pi_k(S^{q+k-1})$—представитель этого элемента. Тогда λ представляет собой некоторое отображение $\Sigma\cap L^*\to S\cap S_\sigma^{-q}(L^*)$, где L^* — некоторое k-мерное подпространство пространства H. Мы можем считать, что L^* натянуто на первые n векторов базиса σ, где $n>-q$. Отображение λ переводит всю границу шара $\Sigma\cap L^*$ в одну точку $x_0\in S\cap S_\sigma^{-q}(L^*)$. Мы построим некоторый сфероид $f_\lambda\colon H\to H$ индекса q. Пусть x — произвольная точка шара $\Sigma\cap L^*$; далее, пусть e — произвольный единичный вектор, ортогональный плоскости L^*. Проведем через точку x прямую, параллельную вектору e. Она пересекается с шаром Σ по отрезку J_x с концами в точках $x+\mu e$, $x-\mu e$, где $\mu=\sqrt{1-\|x\|^2}$. Если $\lambda(x)=x_0$, то мы положим: $f_\lambda(J_x)=x_0$ и тем самым отображение f_λ будет на отрезке J_x определено. Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda(x) \neq x_0$. В этом случае мы рассмотрим двумерную плоскость, проходящую через точки x_0 и $\lambda(x)$ и параллельную вектору $S_\sigma^{-q}(e)$. Эта плоскость высекает из сферы S окружность. На эту окружность мы и отобразим отрезок J_x. Именно, мы положим

$$f_\lambda(x+te) = \frac{x_0+\lambda(x)}{2} + \frac{\lambda(x)-x_0}{2}\cos 2\gamma + \frac{e\,\|\lambda(x)-x_0\|}{2}\sin 2\gamma, \qquad (7)$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{t}{\mu^2-t^2}.$$

Несложно проверяется, что получаемое таким образом отображение $f_\lambda: \Sigma \to S$ переводит всю границу шара Σ в точку x_0 и, следовательно, может быть дополнено до непрерывного отображения $f_\lambda: H \to H$, если положить $f_\lambda(H \setminus \Sigma) = x_0$. Получаемое отображение $f_\lambda: H \to H$ представляет собой сфероид индекса q сферы S в точке x_0 и для этого сфероида $\xi(b, L^*) = \{\lambda\}$, т. е. $\xi(f_\lambda) = \alpha$. Тем самым эпиморфность отображения доказана.

Остается доказать, что это отображение мономорфно. Пусть сфероид f: $H \to S$ индекса q сферы S в точке x_0 обладает тем свойством, что $\xi(f) = 0$. Докажем, что в таком случае сфероид f гомотопен нулю, т. е. определяет нулевой элемент группы $\Pi_q^c(S, x_0)$. Прежде всего выберем некоторую точку $b \in S \setminus \{x_0\}$ и плоскость L (натянутую на первые n векторов базиса σ), а также V, h, η таким образом, чтобы для отображения $\varphi = T_\sigma^{-q} \circ f$, принадлежащего классу K_0, выполнялись условия предложений 1 и 2 статьи [2]. Мы можем при этом точку b считать заранее выбранной таким образом, что $T_\sigma^{-q} b \in L$. При этих условиях элемент $\xi(b, L^*)$ гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$, где L^* — произвольная конечномерная плоскость, содержащая L и $k = \dim L^*$, будет представителем элемента $\xi(f)$ стабильной гомотопической группы. Следовательно, $\xi(b, L^*) = 0$, (поскольку, по нашему предположению, $\xi(f) = 0$). В каждом шаре $\Sigma_{a,h}(L^*)$ имеется при $a \in V$ не более одной точки x, для которой $\varphi(x) = b$. Иными словами, проектирование вдоль подпространства, являющегося ортогональным дополнением плоскости L^*, взаимно однозначно отображает множество M на плоскость L^*. Поэтому, применяя деформацию, аналогичную деформации $G^{(t)}$, которая применена при доказательстве предложения 4 статьи [2], мы сможем добиться того, чтобы для отображения $\varphi \circ G^{(0)}$ прообраз точки b лежал полностью в плоскости L^*. При этом отображение $\tilde{f} = S_\sigma^{-q} \circ \varphi \circ G^{(0)}$, гомотопное f, представляет собой сфероид, определяющий тот же элемент группы $\Pi_q^c(S, x_0)$, что и сфероид f. Мы можем предполагать поэтому (заменив f сфероидом $\tilde{f}$), что сфероид с самого начала обладал указанным свойством, т. е. $M = f^{-1}(b) \subset L^*$. Более того, применяя указанную деформацию, мы можем добиться того, что само отображение f (а не f_{V,L^*}) отображает шар $\Sigma \cap L^*$ в сферу $S \cap S_\sigma^{-q}(L^*)$. Иными словами, мы можем предполагать, что $f=f_{V,L^*}$ на шаре $\Sigma\cap L^*$, т. е. $f(\Sigma\cap L^*)\subset S\cap S_\sigma^{-q}(L^*)$, при этом отображение

$$f\colon \Sigma\cap L^*\to S\cap S_\sigma^{-q}(L^*) \tag{8}$$

определяет нулевой элемент гомотопической группы $\pi_k(S^{k+q-1})$. Отображение (8), т. е. f, рассматриваемое на множестве $\Sigma\cap L^*$, обозначим через λ. С помощью этого отображения λ мы построим сфероид f_λ (ср. (7)) так же, как это было сделано при доказательстве эпиморфности. Таким образом, оба сфероида f, f_λ совпадают между собой на множестве $\Sigma\cap L^*$.

Докажем, что сфероиды f и f_λ определяют один и тот же элемент бесконечномерной гомотопической группы $\Pi_q^c(S, x_0)$. С этой целью заметим, что для любой точки $x\in E_{a,h}(L^*)$, где $a\in V\cap L^*$, векторы $f(x)-f(a)$ и $f_\lambda(x)-f_\lambda(a)=f_\lambda(x)-f(a)$ образуют между собой угол, меньший $\frac{\pi}{2}$ (так как каждый из них образует угол, меньший $\frac{\pi}{4}$ с вектором $x-a$). (Заметим, впрочем, что уменьшив окрестность V и заменив L^* плоскостью большего числа измерений, можно было бы этот угол считать как угодно малым). Следовательно, точки $f(x)$ и $f_\lambda(x)$ не являются диаметрально противоположными точками сферы S, и потому отрезок, соединяющий эти точки, не проходит через центр сферы S (т. е. через нулевую точку пространства H). Поэтому, полагая

$$g_t(x)=\begin{cases} tf(x)+(1-t)f_\lambda(x) & \text{при } \rho(x, M)<\varepsilon,\\ t\left(1-\dfrac{\rho(x, M)-\varepsilon}{\varepsilon}\right)f(x)+\left(1-t\left(1-\dfrac{\rho(x, M)-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)f_\lambda(x), & \\ & \text{при } \varepsilon\leqslant\rho(x, M)\leqslant 2\varepsilon,\\ f_\lambda(x) & \text{при } \rho(x, M)>2\varepsilon, \end{cases}$$

мы получаем деформацию сфероидов, причем точка $g_t(x)$ для любого $t\in I$ и любого $x\in H$ не совпадает с центром сферы S. Здесь ε — такое положительное число, что 2ε-окрестность множества M содержится в V. Поэтому, спроектировав все точки $g_t(x)$ из центра сферы S на саму сферу, мы получаем деформацию $\widetilde{g}_t$, протекающую уже в самой сфере S и соединяющую сфероиды $\widetilde{g}_0$ и $\widetilde{g}_1$. Нетрудно проверяется, что полученная деформация $\widetilde{g}_t$ принадлежит требуемому классу (т. е. является деформацией сфероидов индекса q). Заметим теперь, что сфероид $\widetilde{g}_0$ совпадает с f_λ, а сфероид $\widetilde{g}_1$ совпадает с f в ε-окрестности множества M. Из этого вытекает, что $\{f_\lambda\}=\{\widetilde{g}_0\}=\{\widetilde{g}_1\}=\{f\}$; действительно, для того чтобы убедиться, что сфероиды $\widetilde{g}_1$ и f определяют один и тот же элемент бесконечномерной гомотопической группы $\Pi_q^c(S, x_0)$, достаточно взять некоторую достаточно малую окрестность Q точки b в сфере S и растянуть ее на всю сферу S так, чтобы граница множества Q перешла в точку x_0. Такую „растягивающую деформацию" ω_t можно провести в классе отображений K_0, причем в результате деформаций $\omega_t \circ \tilde{g}_1$ и $\omega_t \circ f$ сфероиды $\tilde{g}_1$ и f превратятся в один и тот же сфероид (так как $\tilde{g}_1$ и f совпадают вблизи множества M).

Итак, $\{f_\lambda\} = \{f\}$, и нам остается лишь доказать, что $\{f_\lambda\} = 0$. Но это очевидно. В самом деле, так как отображение λ определяет нулевой элемент группы $\pi_k(S^{k+q-1})$, то существует деформация λ_t, для которой $\lambda_0 = \lambda$ и $\lambda_1(\Sigma \cap L^*) = x_0$. Но тогда деформация f_{λ_t} соединяет сфероид $f_{\lambda_0} = f_\lambda$ со сфероидом f_{λ_1}, который является нулевым (т. е. $f_{\lambda_1}(H) = x_0$). Таким образом, $\{f\} = \{f_\lambda\} = 0$, т. е. отображение $\{f\} \to \xi(f)$ мономорфно. Тем самым предложение 3 доказано.

Доказанные предложения дают полное вычисление группы $\Pi_q^c(S, x_0)$ для $q \leqslant 0$. В случае $q > 0$ совершенно такие же рассуждения (с очевидными изменениями) дают аналогичный результат: $\Pi_q^c(S, x_0) \approx \pi_{-q+1}$. Заметим лишь, что при $q=1$ мы находим, что группа $\Pi_1^c(S, x_0)$ изоморфна стабильной гомотопической группе $\pi_0 \approx \approx \pi_k(S^k)$, т. е. является свободной циклической, в то время как при $q > 1$ группа $\Pi_q^c(S, x_0)$ тривиальна (поскольку тривиальна группа $\pi_k(S^n)$ при $n > k$).

В результате мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *При любом целом q бесконечномерная гомотопическая группа $\Pi_q^c(S, x_0)$ изоморфна стабильной гомотопической группе*

$$\pi_{-q+1} \approx \pi_k(S^{k+q-1}) \quad (k > -2q + 3).$$

Заметим еще, что если через S_l обозначить единичную сферу, лежащую в подпространстве A дефекта $l-1$ (так что $S = S_1$), то совершенно аналогичными рассуждениями устанавливается следующий результат.

Теорема 2. *При любых целых q и $l \geqslant 0$ бесконечномерная гомотопическая группа $\Pi_q^c(S_l, x_0)$ изоморфна стабильной гомотопической группе индекса $l - q$ конечномерных сфер:*

$$\Pi_q^c(S_l, x_0) \approx \pi_{-q+l} \approx \pi_{n+l-q}(S^n)$$

(где n — достаточно большое натуральное число).

Автор выражает глубокую признательность проф. В. Г. Болтянскому, под руководством которого была выполнена эта работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 10.VI.1973

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածության միավոր սֆերայի անվերջ չափանի կոմպակտ տիպի հոմոտոպիկ խմբերի հաշվումը (*ամփոփում*)

Ապացուցվում է, որ իրական սեպարաբել հիլբերտյան տարածության l դեֆեկտի միավոր S_l սֆերային անվերջ չափանի կոմպակտ տիպի q ինդեքսի հոմոտոպիկ $\pi_q^c(S_l)$ խումբը իզոմորֆ է վերջավոր չափանի սֆերաների $l-q$ ինդեքսի կայունացված հոմոտոպիկ խմբին, այսինքն՝ $\pi_{n+l-q}(S^n)$ -ին, բավականաչափ մեծ n-երի դեպքում։

E. A. MIRSAKCHANIAN. *Calculation of the compact type infinite-dimensional groups of unit sphere in Hilbert spaces* (summary)

Let H be the real separable Hilbert space, S_l — the unit sphere in H with defect l, $\pi_q^c(S_l)$ — the compact type infinite-dimensional homotopy group of S_l with index q.

The main result is the following: $\pi_q^c(S_l)$ is isomorph to the stable homotopy group with index $l-q$ of finife-dimensional spheres, i. e. to $\pi_{n+l-q}(S^n)$ for sufficiently large values of n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства, Изв. АН Арм. ССР, сер. „матем.", IX, № 2, 1974, 107—120.
2. *В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян*. Построение степени отображения в гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм. ССР, сер. „матем.", IX, № 5, 1974, 374—386.
3. *Э. А. Мирзаханян*. Построение бесконечномерных гомотопических групп, Изв. АН Арм. ССР, сер. „матем.", VIII, № 3, 1973, 212—225.
4. *Э. А. Мирзаханян*. Бесконечномерные гомотопические группы единичной сферы гильбертова пространства, ДАН Арм. ССР, том 52, № 4, 1971, 193—195.
5. *Ху Сы-Цзян*. Теория гомотопий, Изд. „Мир", М., 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

А. О. ОГАНЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Задача Коши для слабо гиперболических уравнений высокого порядка с достаточной полнотой изучена лишь в двумерном случае, когда условие строгой гиперболичности нарушается на кривой с начальными данными [1]. Эти результаты, применением преобразования Радона, переносятся на многомерные уравнения с коэффициентами, не зависящими от пространственных переменных [2]. Достаточные условия корректности задачи Коши для некоторых классов слабо гиперболических уравнений получены в [3[, [4], [5], [6].

В предлагаемой заметке рассматривается следующая задача Коши:

$$a(x,\ D)\,u \equiv a_\alpha(x)\,D^\alpha u = f(x), \qquad |\alpha| \leqslant m+1, \tag{1}$$

$$D_1^k u(0,\ x') = 0, \qquad k = 1,\ 2, \cdots,\ m, \quad x = (x_1,\ x') \in V_t, \tag{2}$$

где $a_\alpha(x)$ имеют ограниченную производную по $x_1 \in [0,\ t]$ и бесконечно дифференцируемы по $x' \in R^{n-1}$ при $|\alpha| = m+1$, ограничены и измеримы при $|\alpha| \leqslant m$.

Как известно [7], эта задача поставлена корректно, если в разложении

$$Pa(x,\ \zeta) \equiv a_\alpha(x)\,\zeta^\alpha = \prod_{j=1}^{m+1} (\zeta_1 - \lambda_j), \qquad |\alpha| = m+1 \tag{3}$$

числа $\lambda_j = \lambda_j(x,\ \zeta')$ действительны и различны, когда $\zeta' \neq 0$ действительно. В задаче (1)—(2) допускается совпадение λ_j на начальной гиперплоскости.

Обозначим $V_t = \{x = (x_1, \cdots,\ x_n),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant t\}$ и пусть S_t — гиперплоскость $x_1 = t$. Далее

$$D_l = \frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad \partial_l = \frac{\partial}{\partial \xi_l}, \qquad \zeta = \xi + i\eta. \tag{4}$$

Для любого вектора $a = (a_1, \cdots,\ a_n)$, a' означает вектор $(a_2, \cdots,\ a_n)$.

Для псевдодифференциального (п. д.) оператора A примем

$$Au(x) = \int e^{ix'\xi'}\, a(x,\ \xi')\, \hat{u}(x_1,\ \xi')\, d\xi'. \tag{5}$$

Через AB будем обозначать обычное произведение п. д. операторов, а $A \circ B$ — п. д. оператор с символом $a(x,\ \xi')\ b(x,\ \xi')$. Для оценок используется норма пространства $H^{p,\,q}$ [6].

Пусть оператор $b(x, D)$ разделяет оператор $a(x, D)$. Тогда имеет место тождество [7]

$$a\bar{b}+\bar{a}b=(D_j+\bar{D}_j)A^j+A^0 \quad (1\leqslant j\leqslant n). \tag{6}$$

Учитывая финитность u и начальные условия (2), получаем

$$2\int\operatorname{Re}(a(u)\,\overline{b(u)})\,dV_{x_1}=\int A^1(u,\bar{u})\,dS_{x_1}+\int A^0(u,\bar{u})\,dV_{x_1}. \tag{7}$$

Разобьем последний интеграл на три части

$$\int A^0(u,\bar{u})\,dV_{x_1}=\int A_1^0(u,\bar{u})\,dV_{x_1}+2\int\operatorname{Re}(Q(u)\,\overline{b(u)})\,dV_{x_1}+$$

$$+2\int\operatorname{Re}(a_\alpha D^\alpha u\;\overline{b(u)})\,dV_{x_1},\qquad |\alpha|\leqslant m, \tag{8}$$

Второе и третье слагаемые можно объединить и записать в виде

$$2\int\operatorname{Re}(a_{1\alpha}D^\alpha u\cdot\overline{b(u)})\,dV_{x_1},\qquad |\alpha|\leqslant m. \tag{9}$$

Будем предполагать, что такое объединение заранее сделано и опустим индекс 1 при A_1^0 и $a_{1\alpha}$.

Интегрируя по частям, преобразуем интеграл по гиперплоскости $x_1=\mathrm{const}$

$$\int A^1(u,\bar{u})\,dS_{x_1}=\int\bar{\theta}A_1^1\theta\,dS_{x_1}+\int\bar{\theta}R_1\theta\,dS_{x_1}, \tag{10}$$

где $\theta={}^t(D_1^m u,\cdots,u)$, A_1^1 и R_1 — матричные дифференциальные операторы порядка $2m$ и $\leqslant 2m-1$ соответственно. Элементы матрицы A_1^1 можно выразить через п. д. операторы $\Lambda_j(x, D')$ с символами $\lambda_j(x, i\xi')$. Тогда символ оператора A_1^1 примет вид

$$a^1(x,\xi')=\|a_{rl}(x,\xi')\|_1^{m+1}, \tag{11}$$

где

$$a_{rl}(x,\xi')=\sum_{k=1}^{m+1}\Bigg[(-1)^{r+l}\sum_{\substack{l_1<\cdots<l_{r-1}\\ l_1\cdots l_{r-1}\neq k}}\lambda_{l_0}\lambda_{l_1}\cdots\lambda_{l_{r-1}}\overline{\sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{l-1}\\ j_1\cdots j_{l-1}\neq k}}\lambda_{j_0}\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_{l-1}}}\Bigg],$$

$$\lambda_{l_0}\equiv\lambda_{j_0}\equiv 1.$$

Используя треугольное преобразование координат [8], запишем $a^1(x,\xi')$ в виде

$$a^1(x,\xi')=c^*(x,\xi')\,e(x,\xi')\,c(x,\xi'), \tag{12}$$

где

$$e_{ii}=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}\ (i=1,\cdots,m),\quad \Delta_0\equiv 1,\quad e_{ij}=0\ \text{ при } i\neq j.$$

Выражение для Δ_s в общем случае подсчитано в [6]

$$\Delta_s\equiv\det\|a_{rl}\|_1^s=\sum\prod_{k_i<k_j}|\lambda_{k_i}-\lambda_{k_j}|^2, \tag{13}$$

где суммирование производится по всем наборам $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$ из чисел $(1, 2, \cdots, m+1)$. При этом элементы матриц c, c^*, e оказываются бесконечно дифференцируемыми по x' и аналитичными по ξ'.

Обозначим через $C^*(x, D')$, $E(x, D')$, $C(x, D')$ п. д. операторы с символами $c^*(x, \xi')$, $e(x, \xi')$, $c(x, \xi')$ соответственно.

Лемма. *Пусть $\Delta_l(x, \xi')$ удовлетворяют условиям*

$$c_l'(\lambda^{a_{lj}}(x_1)|\xi_j|)^{2(l-1)} \leqslant \frac{\Delta_l(x, \xi')}{\Delta_{l-1}(x, \xi')} \leqslant c_l\,(\lambda^{a_{lj}}(x_1)|\xi_j|)^{2(l-1)}, \tag{14}$$

$$\left|D^{\gamma'}\partial^{\beta'}\left(\frac{\Delta_l(x, \xi')}{\Delta_{l-1}(x, \xi')}\right)\right| \leqslant c_l\,(\lambda^{a_{lj}}(x_1)|\xi_j|)^{2(l-1)}\,|\xi'|^{-|\beta'|}, \tag{15}$$

$$(2 \leqslant j \leqslant n)$$

для каждого $i = 1, \cdots, m+1$, $|\beta'| \leqslant q$, $|\gamma'| \leqslant p$, c_l', $c_l = \text{const}$, $a_{lj} > 0$. *Если коэффициенты уравнения* (1) *слабо зависят от* x', *то есть для всех и выполняется следующая оценка:*

$$\int \bar\theta R_1\theta dS_{x_1} + \int \bar\theta\{[C^*\circ E\circ C] - [C^*EC]\}\theta dS_{x_1} + \int \overline{C'\theta}\cdot EC\theta dS_{x_1} \leqslant$$

$$\leqslant c\int\sum_{q=0}^{l-2}|(\lambda^{a_{lj}}D_j)^{(l-1)}(C\theta_l)|\,|(\lambda^{a_{lk}}D_k)^q(C\theta)_l|dS_{x_1} \tag{16}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant m+1, \quad j, k = 2, \cdots, n),$$

то существует постоянная c, не зависящая от u, такая, что

$$\int A^1(u, \bar u)\,dS_{x_1} \geqslant c\int|(\lambda^{a_{lj}}D_j)^{(l-1)}(C\theta)_l|^2 dS_{x_1} -$$

$$-\frac{1}{c}\int\sum_{q=0}^{k-2}|(\lambda^{a_{kj}}D_j)^q(C\theta)_k|^2 dS_{x_1} \tag{17}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant m+1, \quad 2 \leqslant j \leqslant n, \quad 2 \leqslant k \leqslant (m+1)).$$

Доказательство. Имеем

$$\int\bar\theta A_1^1\theta\,dS_{x_1} \equiv (A_1^1\theta, \theta)_{x_1} = ([C^*\circ E\circ C]\theta, \theta)_{x_1} =$$

$$= ([C^*EC]\theta, \theta)_{x_1} + ([C^*\circ E\circ C]\theta, \theta)_{x_1} - ([C^*EC]\theta, \theta)_{x_1}. \tag{18}$$

Далее, согласно определению сопряженного оператора [9]

$$([C^*EC]\theta, \theta)_{x_1} = (EC\theta, C\theta)_{x_1} + (EC\theta, C'\theta)_{x_1}, \tag{19}$$

где C' — оператор более низкого порядка, чем C.

С помощью разбиения единицы можно доказать, что при выполнении условий (14), (15) имеет место оценка

$$(EC\theta, C\theta)_{x_1} \geqslant c\int|(\lambda^{a_{lj}}D_j)^{(l-1)}(C\theta)_l|^2 dS_{x_1} -$$

$$-\frac{1}{c}\int\sum_{q=0}^{k-2}|(\lambda^{a_{kj}}D_j)^q(C\theta)_k|^2 dS_{x_1} \tag{20}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant m+1, \quad 2 \leqslant j \leqslant n, \; 2 \leqslant k \leqslant m+1),$$

где c не зависит от u. Подставляя (19) в (18) и учитывая условие (16), получим требуемую оценку.

Пусть $b_h(x, D)$ $(h=0, \cdots, m)$ — последовательность операторов, таких, что b_{h+1} разделяет b_h, $b_0 \equiv a(x, D)$. Если W — некоторая величина, определенная для оператора $a(x, D)$, то обозначим W^h аналогичную величину для оператора $b_h(x, D)$. При этом $W^0 \equiv W$.

Основным результатом работы является следующая

Т е о р е м а. *Пусть для операторов* b_h $(h=0, \cdots, m)$ *имеют место оценки типа* (17). *Далее пусть*

$$1. \quad -A^{0h}(\zeta, \bar{\zeta}) \leqslant c(1+D_1)\left[\left(\lambda^{\overset{h}{a}_{ij}}|\zeta_j|\right)^{2(l-1)}\right]|(c^h(x, \zeta')\omega^h))_l|^2,$$

$$2. \quad a_\alpha(x)\zeta^\alpha = \overset{h}{\varphi}_{ijl}(x, \zeta')(1+D_1)\left[\left(\lambda^{\overset{h}{a}_{ij}}|\zeta_j|\right)^{(l-1)}\right]|\zeta'|^{-l}(c^h(x, \zeta')\omega^h)_l$$

$$(|\alpha| \leqslant m, \ 1 \leqslant i \leqslant m+1-h, \ \ 0 \leqslant l \leqslant i-1, \ \ 0 \leqslant h \leqslant m, \ 2 \leqslant j \leqslant n),$$

где $\mathrm{Re}\,\zeta' = 0$, $\overset{h}{\varphi}_{ijl}$ — *ограниченные функции с нулевой степенью однородности по* ζ', $\overset{h}{a}_{ij} > 0$, $\lambda(x_1) \to 0$ *при* $x_1 \to 0$, $D_1\lambda(x_1) > 0$, $\lambda(x_1) > 0$ *при* $x_1 \geqslant \varepsilon$ *для любого* $\varepsilon > 0$, $\omega^h = (\zeta_1^{m-h}, \cdots, 1)$.

Тогда для любого $f \in H^{0,d}$, *где* d — *достаточно большая постоянная, существует единственное обобщенное решение* $u \in H^{m,0}$ *задачи* (1) — (2). *При этом*

$$|D^{m,0}u, V_t| \leqslant c\,|D^{0,d}f, V_t|. \tag{21}$$

Доказательство теоремы в основном аналогично доказательству теоремы 2 в [6]. Сначала докажем, что условие 2 позволяет за счет гладкости $f(x)$ по $(x_3, \cdots, x_n)$ свести уравнение (1) к аналогичному уравнению относительно неизвестной функции v, у которого правая часть $g(x)$ удовлетворяет условию

$$\int \frac{\lambda(x_1)}{D_1\lambda(x_1)}|g(x)|^2 dV_{x_1} \leqslant c\lambda^r(x_1)\,|D^{0,d}f, V_{x_1}|^2, \tag{22}$$

где $r > 0$ произвольно.

Пусть $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_{p_k}}$ стремятся к функции $\mu_k(x, \zeta')$ при $x_1 \to 0$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, $1 \leqslant p_k \leqslant m+1$ и $\sum p_k = m+1$, $|\mu_l - \mu_j| \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда $\Delta_l(x, \zeta') \geqslant \delta > 0$ и $a_{ij} = 0$ $(i=1, \cdots, r+1)$, $(j=2, \cdots, n)$. Кроме того, пусть $a_{ij} = 0$ для $i = r+2, \cdots, m+1$ и $j = j_1, \cdots, j_s$, $s < n$, то есть вырождение происходит при $x_1 \to 0$ и $\zeta_{j_{s+l}} = 0$, $l=1, \cdots, n-s$, $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$a'(\bar{u}) \equiv Pa'(\bar{u}) + a_\alpha(x)D^\alpha \bar{u} = f, \quad |\alpha| \leqslant m, \tag{23}$$

где p_k штук корней характеристического уравнения оператора a' равны $\mu_k(x, \zeta')$, $x \in V_t$. Выберем a'_α так, что

$$a'_\alpha(x)\zeta^\alpha = \varphi^h_{ijl}(\lambda^{\alpha^h_{ij}}|\zeta_j|)^{(l-1)}|\zeta'|)^{-l}(c^{h'}(x, \zeta')\omega^h_p)_l \tag{24}$$
$$(|\alpha| \leqslant m, \quad 0 \leqslant l \leqslant i-1),$$

где суммирование по $i = 1, \cdots, m+1-h$ и $j = 2, \cdots, n$ производится по тем значениям индексов, для которых $\alpha^h_{ij} = 0$, а $c^{h'}(x, \zeta')$ в операторе a' то же, что и $c^h(x, \zeta')$ для a. Легко показать, обычными методами, что задача Коши для уравнения (23) с нулевыми начальными данными поставлена корректно и выполняется оценка

$$|D^{m,0}\tilde{u}, S_{x_1}|^2 \leqslant c|D^{0,m}f, V_{x_1}|^2. \tag{25}$$

Из условий 2 и (24) следует, что $(a-a')(\zeta)$ стремится к нулю при $x_1 \to 0$ с некоторой скоростью $\lambda^b(x_1)$, $b > 0$.

Отнимем из уравнения (1) уравнение (23) и обозначим $u_1 = u - \tilde{u}$,

$$a(u_1) = a'(\tilde{u}) - a(\tilde{u}), \tag{26}$$

где

$$\int \frac{\lambda(x_1)}{D_1\lambda(x_1)}|(a'-a)\tilde{u}|^2\, dV_{x_1} \leqslant \lambda^{2b}(x_1)|D^{0,m}f, V_{x_1}|^2.$$

С другой стороны

$$a'(u_1) = a'(u) - a(u), \tag{27}$$

поэтому

$$|D^{m,0}u_1, S_{x_1}| \leqslant c|D^{0,m}(a'-a)u, V_{x_1}| \leqslant c\lambda^b(x_1), \tag{28}$$

где последняя постоянная зависит от u. Продолжая аналогичным образом, получим, что задачу (1)—(2) достаточно решить в классе функций $g(x)$, удовлетворяющих оценке (22).

При условиях теоремы с учетом оценки (17) получается неравенство

$$\int |(\lambda^{\alpha^h_{ij}}D_j)^{(l-1)}(C^h(x, D')\theta^h)_l|^2\, dS_{x_1} \leqslant$$
$$\leqslant c\int \frac{D_1\lambda}{\lambda}|(\lambda^{\alpha^h_{ij}}D_j)^{(l-1)}(C^h(x, D')\theta^h)_l|^2\, dV_{x_1} + c\lambda^r(x_1)|D^{0,d}f, V_{x_1}|^2 \tag{29}$$
$$(1 \leqslant i \leqslant m+1-h, \quad 2 \leqslant j \leqslant n, \quad h = 0, \cdots, m).$$

Используя лемму об обращении интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром [1], получаем требуемое неравенство (21), из которого следует единственность и устойчивость решения. Существование решения может быть доказано, например, с помощью обычной процедуры осреднения. Дифференциальные свойства решения u получаются дифференцированием уравнения (1).

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка и сравним условия теоремы с ранее известными результатами [10], [2], [3], [4]

$$D_1^2 u - 2a_{1i}(x) D_1 D_i u - a_{ij}(x) D_i D_j u + a_1(x) D_1 u + a_i(x) D_i u + a_0(x) u = f \tag{30}$$

$$(i,\ j = 2, \cdots, n).$$

Условие слабой зависимости коэффициентов уравнения от x' (16) не накладывает ограничений. Энергия имеет вид

$$\int A^1(u, \bar{u})\, dS_{x_1} = \int \{|D_1 u - a_{1i} D_i u|^2 + (a_{1i} a_{1j} + a_{ij}) D_i u \cdot \overline{D_j u}\}\, dS_{x_1} \tag{31}$$

$$(i,\ j = 2, \cdots, n).$$

Пусть выполнены оценки

$$c_1 \lambda^{2\alpha_j} |\zeta_j|^2 \leqslant (a_{1i} a_{1j} + a_{ij}) \zeta_i \zeta_j \leqslant c_2 \lambda^{2\alpha_j} |\zeta_j|^2,$$

$$D_1 (a_{1i} a_{1j} + a_{ij}) \zeta_i \zeta_j \leqslant c \frac{D_1 \lambda}{\lambda} \cdot \lambda^{2\alpha_j} |\zeta_j|^2,$$

$$D_k (a_{1i} a_{1j} + a_{ij}) \zeta_i \zeta_j \leqslant c\, \lambda^{2\alpha_j} |\zeta_j|^2 \quad \operatorname{Im} \zeta' = 0, \tag{32}$$

$$(i,\ j = 2, \cdots, n),$$

где $\alpha_{ij} \geqslant 0$ $(k = 2, \cdots, n)$, $\lambda(x_1) \to 0$ при $x_1 \to 0$, $\lambda(x_1) > 0$, $D_1 \lambda(x_1) > 0$ при $x_1 \geqslant \varepsilon > 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Тогда, если ввести обозначения

$$\tilde{a}_1 \equiv a_1 + \frac{1}{2} D_j a_{1j}, \tag{33}$$

$$\tilde{a}_i \equiv a_i + D_1 a_{1i} + a_{1i} D_j a_{1j} + D_j a_{ji} \quad (i,\ j = 2, \cdots, n),$$

то условие 2 на младшие коэффициенты примет вид

$$\tilde{a}_1 \zeta_1 + \tilde{a}_i \zeta_i = \varphi_1(x, \zeta)(\zeta_1 - a_{1i} \zeta_i) + \varphi_2(x, \zeta) \left(\frac{D_1 \lambda}{\lambda}\right)^{\delta_i} \lambda^{\alpha_i} \zeta_i, \tag{34}$$

$$|a_0| \leqslant \text{const} \quad (2 \leqslant i \leqslant n),$$

где φ_1 и φ_2 — ограниченные функции, а $\delta_i = 0$ при $\alpha_i = 0$ и $\delta_i = 1$ при $\alpha_i > 0$.

В работе [10] рассматривается задача Коши с нулевыми начальными данными для уравнения

$$D_1^2 u + 2B D_1 D_2 u + A D_2^2 u = a D_2 u + b D_1 u + cu + f,$$

$$\Delta^2(x_1, x_2) = B^2 - A > 0, \quad x_1 > 0, \ \Delta(+0, x_2) \geqslant 0.$$

Корректность задачи зависит в основном от поведения функции $\alpha = \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{2\Delta}$, где $\alpha_1 = a - bB + D_1 B + D_1 \Delta + B(D_2 B + D_2 \Delta)$, $\alpha_2 = \alpha_1 - 2(D_1 \Delta + B D_2 \Delta)$. Условия (32), (34), по существу, совпадают с накладываемыми на α ограничениями. Если коэффициенты уравнения не зависят от x', то условия (32), (34) совпадают с результатами работы [2].

Условие (34) согласуется с условием Олейник [3] для уравнения с $a_{11} \equiv 0$ в случае, когда $\lambda(x_1) \sim x_1^l$. Сравнение с условиями корректности, полученными в [4], показывзет, что условие [34] имеет иной характер.

Ереванский государственный университет

Поступила 15.I.1975

Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդրի մասին բարձր կարգի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Աշխատանքում քննարկվում է Կոշու խնդիրը բարձր կարգի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար։ Ենթադրվում է, որ խարակտերիստիկ թվերի տարբերությունը ձգտում է զրոյի սկզբնական հիպերհարթության մոտենալիս։

Ապացուցվում է Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ հավասարման ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշակի հանրահաշվական պայմանների։

A. H. HOVHANESIAN. *On the Ghauchy problem for high order weakly hyperbolic equations* (summary)

In the paper the Chauchy problem for high order weakly hyperbolic equations is considered. Under the assumption that differences of characteristic number vanish on the initial hyperplane and the coefficients of low order terms satisfy certain algebraic conditions, the correctness of the Chauchy problem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения с данными на линии вырождения, Диф. уравнения, 4, № 9, 1968, 16—58.
2. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—801.
3. *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, Итоги Науки, серия Математика, Мат. анализ, 1969, М., 1971.
4. *В. М. Петков.* О задаче Коши для симметризуемых систем и для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 26, № 6, 1971, 251—252.
5. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1974, 149—165.
6. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян.* О корректности задачи Коши для одного класса слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VII, № 3, 1973, 255—273.
7. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, ИИЛ, 1961.
8. *И. М. Гельфанд.* Лекции по линейной алгебре, М., 1971.
9. *Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Алгебра псевдодифференциальных операторов, Сб. „Псевдодифференциальные операторы“, М., 1967.
0. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 166, № 6, 1968, 1288—1291.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

В. С. АБРАМОВИЧ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ МОНТЕЛЯ НА АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ

В связи с исследованием вопросов сходимости последовательностей голоморфных функций П. Монтель [1] показал, что если максимальный модуль $M(r)$ аналитической в единичном круге функции $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$\ln M(r) = O((1-r)^{-\lambda}), \quad \lambda \geqslant 0 \quad (r \uparrow 1) \tag{1}$$

и $\{z_n\}_1^\infty$ —последовательность нулей функции $f(z)$ с учетом их кратностей, то справедливо неравенство

$$\lambda + 1 \geqslant \tau, \tag{2}$$

где τ — показатель сходимости нулей

$$\tau = \inf \{\mu: \sum_n (1-|z_n|)^\mu < +\infty\}. \tag{3}$$

Это неравенство означает, что порядок роста функции, определяемый как

$$\rho = \inf \{\lambda: \ln M(r) < (1-r)^{-\lambda}, \quad r_\lambda < r < 1\}, \tag{4}$$

не может быть меньше показателя сходимости ее нулей, уменьшенного на единицу.

Доказательство П. Монтеля было достаточно громоздким. Простое доказательство как неравенства (2), так и более общих соотношений, основанное на формуле Йенсена, было дано в монографии Р. Неванлинны [2].

Как хорошо известно, максимум модуля $M(r)$ аналитической в круге функции может иметь как угодно большой рост.

В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли так определить порядок роста (ρ) функции $f(z)$ и показатель сходимости ее нулей (τ), чтобы выполнялись 3 условия:

1) ρ и τ зависят от некоторого функционального параметра, изменение которого позволяет охватить функции с произвольно большой скоростью роста;

2) при некотором специальном значении этого параметра ρ и τ совпадают с соответствующими классическими характеристиками;

3) при всех значениях функционального параметра для ρ и τ имеет место неравенство Монтеля

$$\rho \geqslant \tau - 1. \tag{5}$$

Положительный ответ на этот вопрос, который получен в доказанной ниже теореме означает, что границы, в которых имеет место неравенство Монтеля для аналитических в круге функций, могут быть естественным образом раздвинуты как угодно далеко.

Заметим, что решение опирается на одну важную формулу М. М. Джрбашяна [3], имеющую принципиально более общую природу, чем классическая формула Йенсена.

Пусть $\omega(x) \in C[0, 1]$ — невозрастающая положительная функция, $\omega(1) \geqslant 0$*.

Обозначая

$$\varkappa_\omega(r) = \{\int_r^1 \omega(x)\,dx\}^{-1}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{6}$$

введем порядок роста (ρ_ω) и показатель сходимости нулей (τ_ω), зависящие от функционального параметра $\omega(x)$, следующим образом:

$$\rho_\omega = \overline{\lim_{r\to 1-0}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln \varkappa_\omega(r)} = \inf\{\lambda: \ln M(r) < \varkappa_\omega^\lambda(r), \quad r_\lambda < r < 1\}, \tag{7}$$

$$\tau_\omega = \inf\{\mu: \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_\omega^{-\mu}(|z_n|)^{1/2} \;| < +\infty\}, \tag{8}$$

где $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $f(z)$ с учетом их кратностей.

В специальном случае $\omega(x) \equiv 1$ введенные характеристики ρ_ω и τ_ω, очевидно, совпадают с классическими. Кроме того, из определения порядка ρ_ω непосредственно следует, что для любой аналитической в единичном круге функции $f(z)$ существует функция $\omega(x)$, удовлетворяющая указанным выше условиям, для которой

$$\rho_\omega(f) < +\infty.$$

Теорема. *Для любого значения положительного и невозрастающего функционального параметра* $\omega(x) \in C[0, 1]$, $\omega(1) \geqslant 0$, *порядок* ρ_ω (7) *и показатель сходимости нулей* τ_ω (8) *аналитической в единичном круге функции* $f(z)$ *связаны неравенством Монтеля*

$$\rho_\omega \geqslant \tau_\omega - 1. \tag{9}$$

Доказательство. Для функции $f(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$ с нормировкой $f(0) = 1$ (не нарушающей общности при рассмотрении ее роста), имеет место следующая формула М. М. Джрбашяна:

$$D_\omega(r) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\omega)} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta =$$

* Функцию $\omega(x)$ можно предполагать монотонной лишь вблизи точки $x = 1$.

$$= \sum_{0<|z_k|<r} \int_{|z_k|/r}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{r}\right) dt, \quad 0<r<1, \tag{10}$$

где

$$L^{(\omega)} \ln|f(re^{i\theta})| = \omega(1)\ln|f(re^{i\theta})| - \int_0^1 \ln|f(rxe^{i\theta})|\,\omega'(x)\,dx \tag{11}$$

всюду в круге $|z|<1$, за исключением не более, чем счетного множества разрезов

$$\bigcup_{0<|z_k|<1} \{z: \arg z = \arg z_k, \quad |z_k| \leqslant r < 1\},$$

$\nu(r)$ — число нулей функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$ с учетом их кратностей.

Из (11) непосредственно следует неравенство

$$|L^{(\omega)} \ln|f(re^{i\theta})|| \leqslant (\omega(1) - \int_0^1 \omega'(x)\,dx) \ln M(r),$$

согласно которому для $D_\omega(r)$ имеем оценку

$$D_\omega(r) < C_\omega \ln M(r) \quad (0<r<1). \tag{12}$$

Покажем, что для функции $f(z)$ соотношение

$$\frac{D_\omega(r)}{\ln M(r)} = O(\varkappa_\omega^{-\alpha}(r)), \quad \alpha \geqslant 0 \quad (r \uparrow 1) \tag{13}$$

влечет за собой неравенство

$$\rho_\omega \geqslant \tau_\omega - 1 + \alpha. \tag{9'}$$

Отсюда будет вытекать неравенство (9) теоремы, так как вследствие (12) соотношение (13) всегда имеет место для некоторого $\alpha \geqslant 0$.

С помощью (10) оценим снизу $D_\omega(r')$ при условии $r<r'<1$. Имеем

$$D_\omega(r') = \int_0^{r'} \frac{\nu(t)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{r'}\right) dt \geqslant \int_0^{r'} \nu(t)\,\omega\left(\frac{t}{r'}\right) dt \geqslant$$

$$\geqslant \nu(r) \int_r^{r'} \omega\left(\frac{t}{r'}\right) dt = r'\,\nu(r)\,\varkappa_\omega^{-1}\left(\frac{r}{r'}\right). \tag{14}$$

Полагая здесь $r' = r^{1/2}$ и учитывая (13), получим

$$\nu(r)\,\varkappa_\omega^{-1}(r^{1/2}) = O(\varkappa_\omega^{-\alpha}(r^{1/2})) \ln M(r^{1/2}). \tag{15}$$

Пусть $\rho' > \rho_\omega$, тогда по определению ρ_ω (7)

$$\ln M(r^{1/2}) < \varkappa_\omega^{\rho'}(r), \quad r_0<r<1$$

.1, следовательно

$$\varkappa_\infty^{\alpha-\rho'-1}(r^{1/2})=O\left(\frac{1}{\nu(r)}\right) \quad (r \uparrow 1). \tag{16}$$

Полагая здесь $r=|z_n|$, $n=1, 2, \cdots$ и учитывая очевидное неравенство $\nu(|z_n|)\geqslant n$, получаем

$$\{\varkappa_\infty(|z_n|^{1/2}\}^{-(\rho'+1-\alpha)}\leqslant O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty). \tag{17}$$

Отсюда из определения τ_∞ (8) вытекает

$$\tau_\infty\leqslant \inf_{\gamma>1;\ \rho'>\rho_\infty} \gamma\cdot(\rho'+1-\alpha)=\rho_\infty+1-\alpha,$$

что завершает доказательство.

В качестве примера рассмотрим класс функций, максимальный модуль которых допускает оценку

$$\ln\ln M(r)<O\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad (r\uparrow 1). \tag{18}$$

Положим

$$\varkappa_\infty^*(r)=\exp(1-r)^{-1} \quad (0\leqslant r<1).$$

Согласно (6) это соответствует выбору

$$\omega^*(r)=(1-r)^{-2}e^{-(1-r)^{-1}}.$$

Тогда

$$\rho_\infty^*=\inf\left\{\lambda: \ln\ln M(r)<\frac{\lambda}{1-r}, \quad r_\lambda<r<1\right\}.$$

Заметим, что если $\varkappa_\infty(r)$ удовлетворяет соотношению

$$\varkappa_\infty(r^{1/2})\sim C\varkappa_\infty^\alpha(r) \quad (1\leqslant\alpha<+\infty), \tag{19}$$

то определение τ_∞ (8) равносильно следующему:

$$\tau_\infty=\frac{1}{\alpha}\inf\{\mu: \sum_{n=1}^{\infty}(\varkappa_\infty^{-\mu}(|z_n|)<+\infty). \tag{20}$$

Легко проверить, что в рассматриваемом случае для $\varkappa_\infty^*(r)$ выполняется условие (19) при $\alpha=2$. Поэтому, полагая в соответствии с (20)

$$\tau_\infty^*=\frac{1}{2}\inf\left\{\mu: \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\mu}{1-|z_n|}\right)<+\infty\right\}, \tag{21}$$

согласно установленной теореме имеем неравенство Монтеля

$$\rho_\infty^*\geqslant\tau_\infty^*-1.$$

Автор в заключение выражает искреннюю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за ценные замечания.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила 4.III.1974

Վ. Ս. ԱԲՐԱՄՈՎԻՉ. Շրջանում անալիտիկ անվերջ կարգի ֆունկցիաների վրա Մոնտելի մի թեորեմի տարածման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի ρ_ω աճման կարգը և τ_ω զրոների զուգամիտության ցուցիչը սահմանվում են այնպես, որ բավարարում են հետևյալ պայմանները.

1. ρ_ω-ն և τ_ω-ն կախված են դրական և չնվազող $\omega(x) \in C[0, 1]$, $\omega(1) \geqslant 0$ ֆունկցիոնալ պարամետրից,, որի փոփոխումը թույլ է տալիս ընդգրկել աճի կամայական մեծ արագություն ունեցող ֆունկցիաները։

2. $\omega(x) \equiv 1$ դեպքում ρ_ω-ն և τ_ω-ն համընկնում են համապատասխան կլասիկ խարակտերիստիկների հետ։

3. $\omega(x)$ ֆունկցիոնալ պարամետրի կամայական արժեքների դեպքում ρ_ω-ի և τ_ω-ի համար տեղի ունի Մոնտելի անհավասարությունը, $\rho_\omega \geqslant \tau_\omega - 1$։

V. S. ABRAMOVICH. *An extension of Montel's theorem on analytical functionse of infinite order in the circle* (summary)

The paper defines the order of (growth) (ρ_ω) of an analytical in the circle function and the index of convergence of its zeros (τ_ω) in such a way, that the following assertions are valid.

1. ρ_ω and τ_ω depend on positive nonincreasing functional parameter $\omega(x) \in C[0, 1,]$, $\omega(1) \geqslant 0$, changing of which allows to consider functions with arbitrary rate of growth.

2. When $\omega(x) \equiv 1$ ρ_ω and τ_ω coincide with corresponding classical characteristics.

3. For all values of functional parameter $\omega(x)$ the Montel's unequality $\rho_\omega \geqslant \tau_\omega - 1$ holds.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Монтель.* Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936.
2. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
3. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121): 4, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

А. Г. БАЛАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

В настоящей заметке рассматривается задача описания тех относительно замкнутых подмножеств данной области, которые являются множествами единственности для аналитических функций, то есть обладают следующим свойством: из условия, что некоторая голоморфная в области функция стремится к нулю вдоль такого подмножества при подходе к границе области, следует, что эта функция тождественно обращается в нуль. В классической теореме Лузина-Привалова и некоторых ее современных обобщениях и усилениях единственность обеспечивается за счет „массивности" указанных подмножеств в терминах лебеговской меры или других мер и емкостей.

В связи с задачами равномерных и касательных приближений аналитическими функциями Н. У. Аракелян [1] обратил внимание на то обстоятельство, что свойство единственности связано с невозможностью аппроксимации аналитическими функциями и что множества единственности могут быть охарактеризованы не только „массивностью", но и своей „конструкцией", описываемой в топологических или иных терминах. В настоящей работе приводится одно достаточное условие единственности такого характера для подмножеств произвольной области на комплексной плоскости. В том случае, когда граница области состоит из одной точки, это достаточное условие является также и необходимым.

1°. **Обозначения.** Пусть D — область в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, ∂D — граница области D, $\partial D \neq \varnothing$. Обозначим через $A(D)$ — класс функций, аналитических в D. Пусть $\rho(z_1, z_2)$ — сферическое расстояние между точками $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{C}}$ и $A, B \subset \overline{\mathbf{C}}$ — произвольные множества. Сферическое расстояние между множествами A и B определяется формулой

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{z \in A \\ \zeta \in B}} \rho(z, \zeta).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $V_\varepsilon(\partial D)$ ε-окрестность границы области D:

$$V_\varepsilon(\partial D) = \{z \in \overline{\mathbf{C}}\colon \rho(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Определение 1. Пусть $G \subset D$ — открытое множество. Скажем, что граница ∂D является достижимой для G, если существует непрерывное отображение γ полуинтервала $[0,1)$ в G такое, что

$$\lim_{t\to 1} \rho(\gamma(t), \partial D) = 0.$$

Определение 2. Подмножество F области D называется D-ограниченным, если $\rho(F, \partial D) > 0$ и D-неограниченным, если $\rho(F, \partial D) = 0$.

Определение 3. Назовем относительно замкнутое множество $E \subset D$ множеством A-единственности для области D, если из двух условий

$$f \in A(D), \quad \lim_{\substack{z\to\partial D\\ z\in E}} f(z) = 0 \tag{1}$$

вытекает $f(z) \equiv 0$ в D.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbf{C}}$, $\partial D \neq \varnothing$, E — замкнутое в D множество. Если ∂D недостижима для $D \setminus E$, то множество E является множеством A-единственности для области D.*

2°. Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbf{C}}$, $\partial D \neq \varnothing$, и пусть $G \subset D$ — такая область, что ∂D недостижима для G. Тогда существует такой компакт $\Omega \subset D$, что все компоненты связности открытого множества $G \setminus \Omega$ являются D-ограниченными.*

Доказательство. Представляет интерес случай, когда G является D-неограниченной. Допустим вопреки утверждению леммы, что требуемого компакта Ω не существует. Тогда, если $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность компактов, $D_n \subset D_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$, то для любого $n=1, 2, \cdots$, среди компонент открытого множества $G \setminus D_n$ будет хоть одна D-неограниченная.

Построим теперь последовательность открытых множеств $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом.

На первом шаге, полагая $Q_0 = G$, обозначим через Q_1 объединение всех D-неограниченных компонент множества $G \setminus \overline{D}_1$. Имеем $Q_1 \subset G$. Предположим, что Q_1 состоит из N_1 компонент, $1 \leqslant N_1 \leqslant \infty$. Возьмем в каждой из этих компонент по точке $z_{1,k}$, $k=1, 2, \cdots, N_1$. Эти точки назовем точками первого ранга.

На втором шаге обозначим через Q_2 объединение всех D-неограниченных компонент открытого множества $Q_1 \setminus D_2$, $Q_2 \subset Q_1 \subset G$. Предположим, что Q_2 состоит из N_2, $1 \leqslant N_2 \leqslant \infty$ областей. Возьмем в каждой из этих областей по точке $z_{2,k}$, $k=1, 2, \cdots, N_2$. Эти точки назовем точками второго ранга. Для любой точки $z_{2,k}$ имеем

$$z_{2,k} \in Q_2 \subset Q_1,$$

следовательно существует непрерывная кривая $\gamma_{2,k} \subset Q_1$, соединяющая точку $z_{2,k}$ с некоторой точкой $z_{1,j} \in Q_1$ (а именно, с той точкой первого ранга, которая вместе с $z_{2,k}$ лежит в одной компоненте связноти множества Q_1). Предположим теперь, что множества $\{Q_n\}_{n=1}^{p}$, $_n \subset Q_{n-1}$ уже построены, выбраны точки $z_{n,k} \in Q_n$, $k=1, 2, \cdots, N_k$ рангов $n=1, 2, \cdots, p$ и кривые $\gamma_{n,k} \subset Q_{n-1}$, причем $\gamma_{n,k}$ соединяет точку $_{,k}$ ранга n с некоторой точкой $z_{n-1,j}$ ранга $n-1$. Определим множество Q_{p+1} как объединение всех D-неограниченных компонент связности открытого множества $Q_p \setminus D_{p+1}$ и возьмем по точке $z_{p+1,k}$, $=1, 2, \cdots, N_{p+1}$ в каждой из этих компонент. Выберем дугу Жордана $_{+1,k} \subset Q_p$, соединяющую точку $z_{p+1,k}$ с некоторой точкой z_{p,j_p} ранга p.

Если бы процесс построения множеств Q_n и кривых $\gamma_{n,k}$ оборвался на некотором конечном шаге, то утверждение леммы было бы выполнено, что противоречило бы нашему предположению. Поэтому можно считать, что процесс построения бесконечно продолжается. Тогда существует последовательность индексов $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой построены соответствующие кривые γ_{n,m_n} для всех $n=1, 2, \cdots$, причем γ_{n,m_n} и $\gamma_{n+1,m_{n+1}}$ имеют общий конец z_{n,m_n}.

Рассмотрим непрерывную кривую

$$\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_{n,m_n},$$

лежащую в G. В силу построения кривых γ_{n,m_n} имеем

$$\bigcup_{n=p}^{\infty} \gamma_{n,m_n} \subset D \setminus D_{p-1}.$$

С другой стороны, в силу ограничений на последовательность $\{D_n\}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число p такое, что

$$D \setminus D_{p-1} \subset V_{\varepsilon}(\partial D).$$

Из этих двух условий следует, что кривая γ удовлетворяет условиям определения 1, то есть ∂D достижима для G. Полученное противоречие и доказывает справедливость леммы 1.

3°. Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Пусть f—некоторая аналитическая в D функция, для которой имеет место (1) и $\varepsilon > 0$—произвольное число. Выполнение для функции f соотношения (1) означает, что для $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z \in V_{\delta}(\partial D) \cap E. \tag{2}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in K, \tag{3}$$

где $K \subset D$—произвольный компакт. Можно не ограничивая общности считать, что K—замкнутая область, ограниченная такой конечной системой α замкнутых Жордановых спрямляемых кривых, что

$$\alpha \subset V_\delta(\partial D).$$

В силу равномерной непрерывности функции f на K для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что

$$|f(z_1)-f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z_1,\ z_2 \in K,\ \rho(z_1, z_2) < \eta. \tag{4}$$

Пусть теперь $\{G_n\}_{n=1}^N$, $(N \leqslant \infty)$ — семейство всех тех компонент связности открытого множества $D \setminus (E \cup K)$, для которых $\partial G_n \cap \alpha \neq \varnothing$. Множество $\alpha_n = (\partial G_n \cap \alpha) \setminus E$ может состоять:

а) из конечного или счетного числа открытых спрямляемых дуг Жордана с концами, лежащими на E,

б) конечного числа замкнутых спрямляемых кривых Жордана. При этом

$$\alpha_n \cap \alpha_m = \varnothing \quad \text{при} \quad n \neq m, \quad \bigcup_{n=1}^{N} \alpha_n = \alpha \setminus E.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{N} \text{дл. } \alpha_n \leqslant \text{дл. } \alpha < \infty,$$

так что существует лишь конечное множество индексов n, для которых либо α_n содержит замкнутые кривые Жордана, либо дл. $\alpha_n \geqslant \eta$.

Пусть для простоты это индексы $r = 1, 2, \cdots, N_1$; $N_1 < \infty$. Заметим теперь, что

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad z \in \alpha \setminus \bigcup_{n=1}^{N_1} \alpha_n. \tag{5}$$

В самом деле, при $z \in \alpha \cap E$ это следует из неравенства (2). В противном случае существует такой индекс $n > N_1$, что $z \in \alpha_n$, множество α_n содержит дугу Жордана с концами на E, сферического диаметра меньше η, содержащую точку z. Тогда неравенство (5) следует из (2) и (4).

Предположим теперь, что области G_n при $n = 1, 2, \cdots, N_2$ $(N_2 \leqslant \leqslant N_1)$ D-неограничены, а при $n = N_2+1, \cdots, N_1$ — D-ограничены.

Рассмотрим множество

$$K_1 = \overline{K} \cup \bigcup_{n=N_2+1}^{N_1} \overline{G}_n.$$

Имеем согласно (2), (5)

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in \partial K_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{N_2} \alpha_n, \tag{6}$$

так как

$$\partial \left(\bigcup_{n=N_2+1}^{N_1} \overline{G}_n \right) \setminus \alpha \subset E \cap V_\delta(\partial D).$$

Множество K_1 расширим за счет части границы $\bigcup\limits_{n=1}^{N_1} \alpha_n$ следующим образом.

В силу условий теоремы, граница ∂D недостижима для G_n при $n = 1, 2, \cdots, N_2$. Тогда в силу леммы 1 существуют компакты $\Omega_n \subset D$ такие, что все компоненты $G_n \setminus \Omega_n$ являются D-ограниченными. Так как при расширении компакта Ω_n это свойство не нарушается и $N_2 < \infty$, то существует область $\Omega \subset D$, $K_1 \subset \Omega$, ограниченная конечной системой γ спрямляемых кривых Жордана такая, что все компоненты связности множества $\bigcup\limits_{n=1}^{N_2} G_n \setminus \Omega$ D-ограничены. Обозначим эти компоненты через $\{G''_n\}$, $n = 1, 2, \cdots, N_3$, $N_3 < \infty$. Существует число $\eta > 0$ такое, что при $z_1, z_2 \in \gamma$, $\rho(z_1, z_2) < \eta$ имеет место (4). Так как контур γ имеет конечную длину, то лишь конечное число связных дуг совокупности $\partial\Omega \cap \bigcup\limits_{n=1}^{N_2} G_n$ имеет сферический диаметр больше η. Пусть для простоты, это дуги γ_n, $n = 1, 2, \cdots, N_4$; $N_4 < \infty$, а соответствующие им компоненты связности множества $\bigcup\limits_{n=1}^{N_2} G_n \setminus \Omega$ обозначим через G'_n, $n=1, 2, \cdots, N'_4$, $N'_4 \leqslant N_4$, $N'_4 \leqslant N_3$. На всех остальных дугах, т. е. для $\partial\Omega \cap \bigcup\limits_{n=N'_4+1}^{N_3} \overline{G_n}$ аналогично (5) получаем

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad z \in \partial\Omega \cap \bigcup_{n=N'_4+1}^{N_3} \overline{G_n}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь множество

$$K_2 = K_1 \cup \left(\Omega \cap \bigcup_{n=1}^{N_2} \overline{G_n}\right)$$

(будем считать, что область $D \setminus \Omega$ не имеет D-неограниченной компоненты). Из (2), (6), (7) имеем

$$|f(z)| < \varepsilon \text{ при } z \in \partial K_2 \setminus \bigcup_{n=1}^{N'_4} \overline{G'_n}. \tag{8}$$

Расширим множество K_2 за счет части границы $\bigcup\limits_{n=1}^{N'_4} \gamma_n$ прибавлением к нему D-ограниченных компонент $\overline{G'_n}$, $n=1, 2, \cdots, N'_4$. Полученное таким образом множество K_3 D-ограничено и на ∂K_3, согласно (2) и (8), имеем $|f(z)| < \varepsilon$. Следовательно по принципу максимума

$$|f(z)| < \varepsilon, \quad z \in K_3,$$

что завершает доказательство, поскольку $K \subset K_3$.

4°. Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть E—замкнутое в $\mathbb{C}$ множество. Если бесконечность достижима для $\mathbb{C}\setminus E$, то существует целая функция $G(z)\not\equiv 0$ такая, что*

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in E}} G(z)=0.$$

Доказательство. Из условия леммы 2 вытекает существование бесконечной жордановой кривой $\gamma\subset CE$. Опишем вокруг γ бесконечную жорданову кривую γ_1, начинающуюся и оканчивающуюся на бесконечности и пусть $\gamma_1\cap E=\varnothing$. Через E_1 обозначим ту из двух областей, получающихся при разбиении плоскости с помощью кривой γ_1, которая содержит множество E.

В работе М. В. Келдыша [2] доказано, что в этом случае существует целая функция $G(z)$ такая, что

$$|G(z)|<\exp\{-|z|^{1/2-\eta}\},\quad G(z)\not\equiv 0,$$

где $\eta>0$ — любое число. Следовательно лемма 2 доказана, поскольку $E\subset E_1$.

Следствием теоремы 1 и леммы 2 является

Теорема 2. *Пусть E—замкнутое в $\mathbb{C}$ множество. E является множеством A-единственности для $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $\partial\mathbb{C}=\{\infty\}$ не достижима для CE.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 20.V.1974

Հ. Գ. ԲԱԼԱՔՅԱՆ. Կամայական տիրույթներում անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին
(ամփոփում)

Դիտարկվում է տրված տիրույթի նկատմամբ փակ այնպիսի ենթաբազմությունների նկարագրման հարցը, որոնք անալիտիկ ֆունկցիաների համար հանդիսանում են միակության բազմություններ։

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ. Դիցուք D-ն *տիրույթ է* C-*ում*, $\partial D\neq\varnothing$, E-ն *փակ է* D-*ի նկատմամբ։ Եթե* ∂D-ն *հասանելի չէ* D/E-*ի համար, ապա* E *բազմությունը* D *տիրույթի համար հանդիսանում է* A *միակության բազմություն։*

Այն դեպքում, երբ D-*ի եզրը միայն մեկ կետից է բաղկացած, նշված պայմանը հանդիսանում է նաև անհրաժեշտ։*

H. G. BALAKIAN. *On the uniqueness of analytical functions in arbitrary domains* (summary)

The problem of description of closed subsets of given domain, wich are sets of uniqueness for analytical functions is considered.

Theorem. Let D is a domain in $\overline{C}$, $\partial D\neq\varnothing$, E is closed with respect to D. If ∂D is not attainable for $D\setminus E$, then E is an A-uniqueness set for D.

When the boundary of D contains only one point, the noted condition is also **essary.**

ЛИТЕРАТУРА

Н. У. *Аракелян*. Approximation complexe et propriétés des functions analytiques, Actes, Congres intern. Math., 1970, v. 2, 595—600.
М. В. *Келдыш*. О приближении голоморфных функций целыми функциями, ДАН СССР, 47, № 4, 1945, 243—245.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա X, № 2, 1975 Математика

В. М. МАРТИРОСЯН

О ДВУХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть H^p $(0<p<+\infty)$ обозначает пространство функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и для которых

$$\|f\|_p=\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p\,dy\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{1}$$

Как известно (см. [1], стр. 191, 192), если $f(z)\in H^p$ $(0<p<+\infty)$, то справедливо равенство

$$\|f\|_p=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(iy)|^p\,dy\right\}^{1/p},$$

где $f(iy)$ — граничные значения функции $f(z)$.

Пусть, далее, H^p_* $(0<p<+\infty)$ обозначает пространство функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_p^*=\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\right\}<+\infty. \tag{2}$$

Заметим, что классы H^p $(1\leqslant p<+\infty)$ были рассмотрены Хилле и Тамаркиным [2] (см. также [1]). Класс H^p_* в случае $p=2$ (и притом для весьма более общего случая угловых областей) впервые был введен М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] (см. также [4], стр. 414). Ими же впервые было установлено, что пространства H^2 и H^2_* совпадают (см. [3], а также [4], стр. 444). Недавно А. М. Седлецкий [5] обобщил этот результат для любого p $(0<p<+\infty)$ и доказал следующую теорему.

Теорема А*. *Пусть* $p\in(0,+\infty)$. *Тогда*

1) $H^p_*=H^p$, 2) $A\,\|f\|_p\leqslant\|f\|_p^*\leqslant B\,\|f\|_p$, *где* A, B *от* f *не зависят.*

Заметим, что в работе [5] установлено, что $A=2^{-1/p}$, при этом, как показывает пример функции $f_0(z)=(1+z)^{-2/p}$ (для этой функции $\|f_0\|_p=2^{1/p}\|f_0\|_p^*$), эта константа является точной.

---

* Эта теорема в работе [5] сформулирована для пространств функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Однако ясно, что ее можно сформулировать и для полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, при этом очевидно, что значения констант A и B, фигурирующих в теореме, останутся теми же.

Доказательство оценки

$$\|f\|_p^* \leqslant B\, \|f\|_p \quad \forall f \in H^p \tag{3}$$

автор теоремы сводит к теореме Л. Карлесона (см. [1], стр. 157—163), дающей полную характеристику неотрицательных борелевских мер $\mu(z)$ в круге $|z|<1$, для которых выполняется условие

$$\int |g(z)|^p\, d\mu(z) \leqslant c\, \|g\|_p^p \quad \forall g \in H^p.$$

Для $p \in (0, +\infty)$ константа B в работе [5] фактически определяется следующим образом:

$$B \geqslant 4\,(80)^4\, c_p\,(M_1^2 + M_2^2),$$

где можно утверждать лишь (см. [6], а также [7]) существование константы c_p: эта константа должна обеспечивать справедливость неравенств

$$\|(1-z)^{-2/p} f\{i\,(1+z)(1-z)^{-1}\}\|_p^p \leqslant c_p\, \|f\|_p^p \quad \forall f(w) \in H^p \ (\mathrm{Re}\, w > 0),$$

а константы M_1 и M_2 должны быть подсчитаны, исходя из того, что для мер

$$d\mu_1(z) = \rho\,(z, 1)\; d\rho\,(z, -1), \quad d\mu_2(z) = \rho\,(z, -1)\; d\,\{-\rho\,(z, 1)\}$$

($\rho\,(z_1, z_2)$ означает расстояние между точками z_1 и z_2) справедливы неравенства:

$$\mu_k(S) \leqslant M_k\, h \quad \forall S = \{z = re^{it};\ 1-h < r < 1,\ t_0 < t < t_0 + h\},\ (k=1, 2).$$

2°. В настоящей заметке мы покажем, что из известных результатов М. М. Джрбашяна по гармоническому анализу в комплексной области непосредственно вытекает теорема А в случае $p=2$, а также справедливость неравенства (3) этой теоремы, но уже с вполне определенной константой $B=2^{1/p}$. Другими словами, докажем теорему.

Теорема. *Справедливы утверждения:*

1°. *Если функция* $f(z) \in H^2 = H_*^2$, *то*

$$\|f\|_2^* \leqslant \sqrt{2}\, \|f\|_2, \quad \|f\|_2 \leqslant \sqrt{2}\, \|f\|_2^*. \tag{4}$$

2°. *Если* $0 < p < +\infty$, *то*

$$\|f\|_p^* \leqslant 2^{1/p}\, \|f\|_p \quad \forall f \in H^p. \tag{5}$$

Доказательство. 1°. Если $f(z) \in H^2$, то по теореме Винера-Пэли функция $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\, \varphi(t)\, dt, \quad \varphi(t) \in L_2(0, +\infty),$$

притом имеет место равенство

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \int_0^{\infty} |\varphi(t)|^2 \, dt. \tag{6}$$

Теперь обратимся к теореме 4.1 (4°) (см. [4], стр. 207). Возьмем $\rho = 1$, $\mu = 1$. Тогда $M_\mu = M_1 = 2\sqrt{\pi}$ (см. [4], стр. 201) и приходим к неравенству

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 \, dr \leqslant 4\pi \int_0^{\infty} |\varphi(t)|^2 \, dt \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right),$$

что вместе с (6) дает

$$\|f\|_2^* \leqslant \sqrt{2}\, \|f\|_2.$$

Далее, неравенство

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2}\, \|f_2\|^*$$

непосредственно вытекает из теоремы 7.5 (1°) (см. [4], стр. 414), если учесть, что в принятых там обозначениях $H_2[1; 0] = H^2$.

2°. Пусть теперь $0 < p < +\infty$ и $f(z) \in H^p$. Известно, (см. [1], стр. 191), что функция $f(z)$ допускает факторизацию

$$f(z) = B(z)\, g(z), \tag{7}$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке нулей функции $f(z)$, а $g(z) \in H^p$ и не имеет нулей, притом

$$\|f\|_p = \|g\|_p. \tag{8}$$

Тогда ясно, что $[g(z)]^{p/2} \in H^2$ и, следовательно, в силу утверждения 1° теоремы, для этой функции справедливы неравенства

$$\int_0^{\infty} |g(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |g(iy)|^p \, dy \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Далее, поскольку $|B(z)| < 1$ $(\mathrm{Re}\, z > 0)$, то из (7) получим

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant \int_0^{\infty} |g(re^{i\varphi})|^p \, dr \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда и из (8) и (9) приходим к неравенству (5) теоремы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 17.III.1975

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Աջ կիսահարթության մեջ անալիտիկ ֆունկցիաների երկու տարածությունների մասին (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքում բերվում է [5] աշխատանքում ապացուցված $\|f\|_p^* \leqslant B_p \|f\|_p, f \in H^p$, *անհավասարության էապես մի նոր ապացույց։ Ընդ որում ստացվել է, որ* $B_p = 2^{1/p}$։

V. M. MARTIROSIAN. *On two spaces of functions analytical in a half-plane* (summary)

The inequality $\|f\|_p^* < B_p \|f\|_p$, $f \in H^p$, was proved in the paper [5]. A new proof of this inequality is given in the present paper. The present proof shows, that B_p may be taken equal to $2^{1/p}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. L. Duren*. Theory of H^p spaces, New York, 1970.
2. *E. Hille* and *J. D. Tamarkin*. On the absolute integrability of Fourier trasforms, Fund. Math., 25, 1935, 329—352.
3. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
4. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
5. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости, Матем. сб., 96, (138), 1, 1975, 75—82.
6. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
7. *А. М. Седлецкий*. Интерполяция в пространствах H^p в полуплоскости, ДАН СССР, 208, № 6, 1973, 1293—1295.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS