ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապար
կել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ա
սագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամո
(այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։*

*Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարա
ման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։*

*2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսեր
(հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլեր
և ռուսերեն լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել հ
մապատասխան լեզվով։*

*3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պե
է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևո*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մ
տիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրա
համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվ
է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տա
թիվը և էջերը։ Հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, հ
մարը և տարեթիվը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապ
տասխան տեղում։*

*6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխ
թյունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*7. Հոդվածը գերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հ
վածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը
խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանում*

*9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարվ
է տվյալ աշխատանքը։*

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանու

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի
ղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։*

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

Р. О. НАЗАРЯН

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРУПП ЛИ

Задача, решению которой посвящена настоящая работа, состоит в следующем. Пусть G — простая некомпактная вещественная группа Ли: нужно найти все такие пары G', G'' ее собственных подгрупп Ли, что $G = G' \cdot G''$, т. е. что каждый $g \in G$ представляется в виде $g = g' \cdot g''$, где $g' \in G'$, $g'' \in G''$. Тройка (G, G', G'') с указанным свойством называется разложением.

Легко видеть, что $G = G' \cdot G''$ тогда и только тогда, когда подгруппа G' транзитивна на однородном пространстве G/G'' или когда G'' транзитивна на G/G'. Таким образом, решение нашей задачи дает возможность найти все подгруппы группы G, транзитивные на однородных пространствах этой группы.

В случае, когда G компактна, явное решение указанной задачи было получено в работе [6]. В работе [5] был до конца изучен случай, когда G некомпактна, а G', G'' либо обе редуктивны в G, либо обе максимальны в G. В настоящей работе мы продолжаем изучение разложений некомпактных простых групп Ли.

В § 1 мы формулируем ряд понятий и утверждений, которыми мы пользуемся. В § 2 вводится специальный класс так называемых U-разложений и доказывается существование таких разложений. В § 3 изучаются некоторые свойства подгрупп и разложений групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$. В частности, доказывается, что в любом разложении этих групп, одна из подгрупп обязательно является редуктивной и имеет специальный вид. На протяжении всей работы мы будем свободно переходить от языка групп Ли к языку алгебр Ли и обратно.

Работа выполнена под руководством А. Л. Онищика, которому приношу свою признательность.

§ 1. Предварительные понятия

Тройка (G, G', G''), где G — группа, G', G'' — ее подгруппы, называется разложением, если $G = G' \cdot G''$, т. е. если каждый элемент $g \in G$ представляется в виде $g = g'g''$, где $g' \in G'$, $g'' \in G''$. Аналогично, если $\mathfrak{M}$ — алгебра, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ — ее подалгебры и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, то тройка $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$ называется разложением. Мы рассмотрим сейчас некоторые общие свойства разложений групп Ли и алгебр Ли. При этом мы приведем без доказательств ряд понятий и утверждений которыми мы будем пользоваться. Доказательства можно найти в работах [5, 6].

Нетрудно убедиться в том, что тройка (G, G', G'') является разложением тогда и только тогда, когда группа G' транзитивна на G/G'' или когда G'' транзитивна на G/G'. Всякой тройке групп Ли естественным обрзом соответствует тройка алгебр Ли.

Тройки (G, G', G'') и $(\tilde{G}, \tilde{G}', \tilde{G}'')$, где G и $\tilde{G}$ — связные группы Ли, $G', G'' \subset G$ и $\tilde{G}', \tilde{G}'' \subset \tilde{G}$ — подгруппы Ли, называются локально изоморфными, если им отвечает одна и та же тройка алгебр Ли $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$. Если тройки (G, G', G'') и $(\tilde{G}, \tilde{G}', \tilde{G}'')$ локально изоморфны, то $G = G' \cdot G''$ тогда и только тогда, когда $\tilde{G} = \tilde{G}' \cdot \tilde{G}''$ (см. [5], лемма 1.1).

Пусть (G, G', G'') — тройка групп Ли, $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$ — соответствующая ей тройка алгебр Ли. Если тройка (G, G', G'') является разложением, то и тройка $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$ является разложением ([6], лемма 1.3). Если подгруппа G'' замкнута в G и пространство G'/U, где $U = G' \cap G''$, компактно, то верно и обратное утверждение. Пусть $G = G' \cdot G''$, где G — связная группа Ли, G' и G'' — ее связные подгруппы Ли, причем $G' \cap G''$ имеет конечное число связных компонент. Если максимальные компактные подгруппы K', K'' групп G', G'' содержатся в максимальной компактной подгруппе K группы G, то $K = K' \cdot K''$ ([5], лемма 1.2). Отсюда вытекает следующее более слабое утверждение, которое удобно тем, что применимо к любым разложениям.

Лемма 1.1. *Пусть $G = G' \cdot G''$, где G — связная группа Ли, G и G'' — ее связные подгруппы и пусть K, K', K'' — максимальные компактные подгруппы в G, G', G'', а K_0, K_0', K_0'' — полупростые части групп K, K', K''. Если $K \supset K', K''$, то $K_0 = K_0' \cdot K_0''$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ — универсальная накрывающая группы G, $\tilde{G}', \tilde{G}'', \tilde{K}_0, \tilde{K}_0', \tilde{K}_0''$ — ее связные подгруппы, отвечающие $G', G'', K_0, K_0', K_0''$ соответственно. Подгруппы $\tilde{K}_0, \tilde{K}_0', \tilde{K}_0''$ компактны и, очевидно, являются максимальными полупростыми подгруппами некоторых максимальных компактных подгрупп $L \subset \tilde{G}$, $L' \subset \tilde{G}'$, $L'' \subset \tilde{G}''$. Но поскольку $\tilde{G}$ односвязна, L также односвязна и, значит, полупроста. Итак $L = \tilde{K}_0$. Легко видеть, что L', L'' можно выбрать так, чтобы они содержались в $L = \tilde{K}_0$. Имеем $\tilde{G} = \tilde{G}' \cdot \tilde{G}''$, т. е. группа $\tilde{G}$ является односвязным однородным пространством группы $\tilde{G}' \times \tilde{G}''$, причем стационарная подгруппа изоморфна $\tilde{G}' \cap \tilde{G}''$. Отсюда видно, что $\tilde{G}' \cap \tilde{G}''$ связна, и применимо сформулированное выше утверждение. В резуль тате имеем $\bar{K}_0 = L' \cdot L''$. По теореме 1.1. из [6] отсюда следует, что $\bar{K}_0 = \bar{K}_0' \cdot \bar{K}_0''$. Значит, $K_0 = K_0' \cdot K_0''$.

Связная группа Ли G называется редуктивной, если ее радикал содержится в центре, т. е. $G = Z \cdot S$, где Z — абелев, S — полупростой связный нормальный делитель. Алгебра Ли $\mathfrak{M}$ над полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ называется редуктивной, если ее радикал совпадает с центром, т. е. если $\mathfrak{M} = \zeta + s$, где ζ — центр, s — полупростой идеал. Подалгебра $h \subset \mathfrak{M}$ называется редуктивной в $\mathfrak{M}$, если h редуктивна как алгебра Ли и если для любого элемента z из ее центра $ad\ z$ полупрост в $\mathfrak{M}$ (в случае поля $\mathbf{R}$ в $\mathfrak{M}^C$). Связная подгруппа Ли редуктивной группы G называется редуктивной в G, если ей отвечает редуктивная подалгебра.

Разложение $G = G' \cdot G''$ или $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ называется редуктивным (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), если G и $\mathfrak{M}$ редуктивны (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), G', G'' и $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ — редуктивные подгруппы (подалгебры). Для редуктивных разложений из локального разложения $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ следует глобальное разложение $G = G' \cdot G''$ ([5], теорема 3.1).

В работе [6] разложения компактных алгебр Ли задаются при помощи некоторых схем. Эти схемы строятся следующим образом.

Пусть R — компактная алгебра Ли, R' — подалгебра, и пусть $R = \dot{\sum}_{i=1}^{r} R_i$, где R_i — некоторые ненулевые идеалы алгебры R. Фиксируем некоторый набор чисел $i_1, i_2, \cdots, i_l$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_l \leqslant r$, и рассмотрим идеал $R' \cap \dot{\sum}_{s=1}^{l} R_{i_s} = R'^{i_1, \ldots, i_l}$ алгебры R'. Положим $\bar{R}^{i_1, \ldots, i_l} = \dot{\sum}_{t=1}^{l} (R' \cap \dot{\sum}_{s \neq t} R_{i_s})$. Легко проверить, что $\tilde{R}'^{i_1, \ldots, i_l}$ также идеал в R и что $\tilde{R}'^{i_1, \ldots, i_l} \subset R'^{i_1, \ldots, i_l}$. Обозначим через $R_{i_1, \ldots, i_l}$ идеал алгебры $R'^{i_1, \ldots, i_l}$, дополнительный к $\bar{R}'^{i_1, \ldots, i_l}$. Очевидно, $R'_{i_1, \ldots, i_l}$ — идеал алгебры R'. Обозначим через π_i гомоморфизм проектирования алгебры R на идеал R_i параллельно сумме остальных идеалов $R_j \, (j \neq i)$. Тогда ясно, что каждый из гомоморфизмов $\pi_{i_s} = R'_{i_1, \ldots, i_l} \to \to R_{i_s}$ $(1 \leqslant s \leqslant l)$ является мономорфизмом. Нетрудно проверить, что идеалы $R'_{i_1, \ldots, i_l}$ попарно не пересекаются и что они в сумме дают всю алгебру R'. Если в алгебре R задана еще подалгебра R'', то для нее точно так же строятся идеалы $R''_{i_1, \ldots, i_l}$. Отнесем каждому идеалу R_i кружок на схеме с номером i и расположим эти кружки слева направо в порядке возрастания номеров. Каждому идеалу $R'_{i_1, \ldots, i_l}$ алгебры R' отнесем кружок схемы, расположенный над занумерованными кружками, и соединим его с кружками с номерами $i_1, \cdots, i_l$. В случае, когда $\pi_{i_s}(R^{\bullet}_{i_1,\ldots,i_l}) = R_{i_s}$ мы иногда будем соединять соответствующие кружки двойной чертой. Точно так же поступим с идеалами $R^{\bullet}_{i_1,\ldots,i_l}$ алгебры R'', но соответствующие им кружки поместим ниже занумерованных кружков. В случае, если известен тип идеала R_i, $R^{\bullet}_{i_1,\ldots,i_l}$ или $R^{\bullet}_{i_1,\ldots,i_l}$, мы иногда вместо соответствующего кружка будем писать обозначение этого типа. Если идеал $R^{\bullet}_{i_1,\ldots,i_l}$ или $R^{\bullet}_{i_1,\ldots,i_l} = 0$, то соответствующий кружок будет опускаться. Полученная схема называется схемой тройки (R, R', R'') (соответствующей разложению $R = \sum_{i=1}^{r} {}^{\bullet} R_i$ алгебры R).

Пусть G — связная группа Ли. Связная замкнутая подгруппа $G' \subset G$ называется k-подгруппой, если многообразие G/G' компактно. Если $\mathfrak{M}$ — вещественная алгебра Ли, то через $Int\,\mathfrak{M}$ обозначается группа Ли ее внутренних автоморфизмов. Если $h \subset \mathfrak{M}$ — подалгебра, то через $H^* \subset Int\,\mathfrak{M}$ обозначается связная подгруппа, отвечающая подалгебре $ad_{\mathfrak{M}}\, h \subset ad\,\mathfrak{M}$. Подалгебра h называется компактной в $\mathfrak{M}$, если H^* компактна. Подалгебра $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ называется k-подалгеброй, если существует такая максимальная компактная в $\mathfrak{M}$ подалгебра R, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + R$. В этом случае $R' = \mathfrak{M}' \cap R$ называется g-подалгеброй в R. В частности, если G—k-подгруппа, то $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра [7].

Разложение $G = G' \cdot G''$, где G', G'' — связные подгруппы Ли в G, называется k-разложением группы G, если $\mathfrak{M}'$—k-подалгебра. К нахождению k-разложений группы G сводится, в частности, задача о нахождении подгрупп группы G, транзитивных на ее компактных однородных пространствах. Соответствующие разложения алгебры $\mathfrak{M}$ также называются k-разложениями. Примерами k-разложений могут служить разложения, у которых $\mathfrak{M}''$ компактна в $\mathfrak{M}$, они называются компактными.

Мы перечислим сейчас понятия и факты относительно строения k-подалгебр и k-разложений, которыми мы будем пользоваться. Доказательства можно найти в работах [5], [7]. Пусть $\mathfrak{M}$—полупростая алгебра Ли, R — максимальная компактная в $\mathfrak{M}$ подалгебра, $\mathfrak{M} = K + P$ — картановское разложение. Пусть h_- — максимальная абелева подалгебра в P, $h = h_- + h_+$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{M}$, содержащая h_-, причем $h_+ \subset R$. Обозначим через $\mathfrak{M}^C$ комплексификацию алгебры $\mathfrak{M}$, и через σ—соответствующее сопряжение в $\mathfrak{M}^C$. Тогда h^C — подалгебра Картана в $\mathfrak{M}^C$. Обозначим через $\Sigma \subset h^C$ соответствующую систему корней алгебры $\mathfrak{M}^C$. Если $\alpha \in \Sigma$, то через $\mathfrak{M}_\alpha$ обозначим его корневое подпространство в $\mathfrak{M}^C$. Определим на h^{C*} антиинволюцию σ^* формулой:

$$(\sigma^*\varphi)(x) = \overline{\varphi(\sigma x)} \quad (x \in h^C).$$

Пусть $\Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma,\ \sigma^*\alpha = -\alpha\}$, тогда $\Sigma_0 = \{\alpha \in \Sigma,\ \alpha|_{h_-} = 0\}$.

Пусть $\Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0$. Ясно, что Σ_0 и Σ_1 инвариантны относительно σ^*. Обозначим через Σ^+ множество положительных корней из Σ. Пусть $\pi \subset \Sigma^+$ — система простых корней $\pi_0 = \Sigma_0 \cap \pi$, $\pi_1 = \Sigma_1 \cap \pi$. Оказывается, что для каждого $\alpha \in \pi_1$ существует такой $\beta \in \pi_1$, что $\sigma^*\alpha - \beta = \sum_{\gamma \in \pi_0} k_\gamma \gamma$, $k_\gamma \geqslant 0$. Если положить $\beta = \tilde{\sigma}^*\alpha$, то получится инволюция $\tilde{\sigma}$ системы π_1.

Алгебра $\mathfrak{M}$ называется нормальной, если $h_- = h$. В этом случае $\Sigma_1 = \Sigma$ и $\tilde{\sigma} = 1$. Известно, что в каждой комплексной полупростой алгебре Ли существует ровно одна (с точностью до сопряженности) нормальная вещественная форма.

Пусть $\Gamma \subset \pi_1$ — некоторое подмножество, инвариантное относительно $\tilde{\sigma}$. Обозначим через Σ' систему корней, линейно выражающихся через систему $\pi_0 \cup \Gamma$ и через Σ'' — систему всех корней, не выражающихся линейно через $\pi_0 \cup \Gamma$. Обозначим через c_Γ подпространство в h, аннулируемое всеми корнями из $\pi_0 \cup \Gamma$, или, что то же, из Σ'. Подпространства $\mathfrak{M}_\alpha$, ($\alpha \in \Sigma'$) порождают в $\mathfrak{M}^c$ полупростую подалгебру s^c_Γ, имеющую Σ' в качестве системы корней. Поскольку подалгебра s^c_Γ инвариантна относительно σ, она является комплексной оболочкой подалгебры $s_\Gamma = s^c_\Gamma \cap \mathfrak{M}$. Далее, $n^c_\Gamma = \sum_{\alpha \in \Sigma''} + \mathfrak{M}_\alpha$ — подалгебра в $\mathfrak{M}^c$, инвариантная относительно σ. Следовательно, n^c_Γ является комплексной оболочкой подалгебры $n_\Gamma = n^c_\Gamma \cap \mathfrak{M}$. Положим, в частности, $n_\varnothing = n$.

Рассмотрим элемент $x_\Gamma \in h$, определенный формулой:

$$\alpha(x_\Gamma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \in \pi_0 \cup \Gamma \\ 1, & \text{если } \alpha \in \pi_1 \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Обозначим через ζ централизатор элемента x_Γ в $\mathfrak{M}$. Имеем $\zeta = s_\Gamma + c_\Gamma$, $[\zeta_\Gamma, n_\Gamma] \subset n_\Gamma$. В частности, $u_\Gamma = \zeta_\Gamma + n_\Gamma$ является подалгеброй в $\mathfrak{M}$. Подалгебры u_Γ (и сопряженные к ним) называются параболическими подалгебрами, а соответствующие им связные подгруппы в G — параболическими подгруппами. Имеем $c_\Gamma = c^+_\Gamma + c^-_\Gamma$, где $c^+_\Gamma = c_\Gamma \cap R$, $c^-_\Gamma = c_\Gamma \cap P$. В частности, $c^-_\varnothing = h_-$. Обозначим через s'_Γ идеал алгебры s_Γ, дополнительный к максимальному идеалу алгебры s_Γ, лежащему в R. Тогда $\zeta_\Gamma = m_\Gamma + c^-_\Gamma + s'_\Gamma$, где m_Γ — максимальный идеал алгебры ζ_Γ, лежащий в R. Выберем подалгебру $w \subset m_\Gamma + c^-_\Gamma$. Тогда ясно, что $\mathfrak{M}' = w + s'_\Gamma + n_\Gamma$ — подалгебра в $\mathfrak{M}$, содержащаяся в u_Γ. Подалгебры такого вида в работе [7] названы стандартными.

Для того чтобы стандартная подалгебра $\mathfrak{M}' = w + s'_\Gamma + n_\Gamma$ была k-подалгеброй, необходимо и достаточно, чтобы образ подалгебры $w \subset m_\Gamma + c^-_\Gamma$ при проектировании на c^-_Γ совпадал с c^-_Γ ([7], лемма 8).

Всякая k-подалгебра полупростой алгебры Ли сопряжена стандартной k-подалгебре ([7], теорема 4).

В частности, в нормальной алгебре $\mathfrak{M}$ все k-подалгебры являются параболическими.

Из этих результатов видно, в частности, как выглядят максимальные k-подалгебры и минимальные k-подалгебры (т. е. k-подалгебры, не содержащие никаких меньших k-подалгебр). Каждая максимальная k-подалгебра сопряжена стандартной параболической подалгебре u_Γ, где $\pi_1 \setminus \Gamma$ состоит из одного корня или из пары корней, связанных инволюцией $\bar{\sigma}$. При этом $\dim c_{\bar{\Gamma}} = 1$ [7].

Каждая минимальная k-подалгебра сопряжена стандартной подалгебре вида $u = m + n$, где $m \subset m_{\varnothing} + h_-$ изоморфно проектируется на h_-. Обратно, все k-подалгебры описанного вида являются максимальными или минимальными соответственно. В частности, среди минимальных k-подалгебр содержатся максимальные треугольные подалгебры, сопряженные подалгебре $t = h_- + n$.

Для дальнейшего полезно отметить следующий простой факт.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ — разложение простой алгебры и пусть $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}'' = u$, $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}''$. Для того чтобы $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_0 + u$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_0$, тогда если $x \in \mathfrak{M}''$, то $x = a + b$, где $a \in \mathfrak{M}'$, $b \in \mathfrak{M}_0$. Так как $a = x - b \in \mathfrak{M}''$, то $a \in u$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_0 + u$. Достаточность утверждения очевидна.

С леммой 1.2 тесно связана следующая лемма ([5], лемма 6.2), дающая описание k-разложений в широком классе случаев.

Лемма. Пусть максимальная компактная в $\mathfrak{M}$ подалгебра R допускает разложение $R = R' + R''$, где $R' = R \cap \mathfrak{M}'$ для некоторой k-подалгебры $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}$ — подалгебра, содержащая R, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$. Обратно, пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ — разложение, причем либо $G'^* \cap G''^*$ состоит из конечного числа связных компонент, либо $\mathfrak{M}''$ компактна в $\mathfrak{M}$. Тогда некоторая максимальная компактная в $\mathfrak{M}$ подалгебра R допускает разложение $R = R' + R''$, где $R' = R \cap \mathfrak{M}'$ и $R'' \subset \mathfrak{M}''$ или $R'' = \mathfrak{M}''$ соответственно.

Эта лемма показывает, что для отыскания k-разложений алгебры $\mathfrak{M}$ при наших ограничениях достаточно найти всевозможные разложения $R = R' + R''$ алгебры R, в которых $R' = R \cap \mathfrak{M}$, т. е. является g-подалгеброй в R. Такие разложения можно перечислить для каждой алгебры $\mathfrak{M}$, поскольку известны все g-подалгебры [7] и все разложения компактных алгебр Ли. Это относится, в частности, к компактным разложениям. Поэтому в дальнейшем мы в основном будем изучать случай, когда разложение некомпактно.

Отметим простое следствие из указанной леммы.

Следствие 1.1. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ — k-разложение полупростой алгебры $\mathfrak{M}$, причем $G'^* \cap G''^*$ состоит из конечного числа связных компонент. Тогда $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$ — k-подалгебра в $\mathfrak{M}''$.

Доказательство. Согласно лемме некоторая максимальная компактная в $\mathfrak{M}$ подалгебра R допускает разложение $R=(R\cap\mathfrak{M}')\dotplus R''$, где $R''\subset\mathfrak{M}''$. По лемме 1.2 имеем $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'+R''$, откуда по той же лемме вытекает, что $\mathfrak{M}''=(\mathfrak{M}'\cap\mathfrak{M}'')+R''$.

Пусть G — полупростая группа Ли, G' и G'' — ее связные подгруппы Ли и $G=G'\cdot G''$. Разложение называется максимальным, если G', G'' — максимальные связные подгруппы в G. Известно, что максимальная подалгебра в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{M}$ либо имеет компактный в $\mathfrak{M}$ радикал (и, в частности, редуктивна), либо является k-подалгеброй [4]. Следовательно, максимальное разложение либо редуктивно, либо является k-разложением. В работе [5] (теорема 6.1) перечислены все максимальные k-разложения простых вещественных алгебр Ли. Все они имеют вид $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'+\mathfrak{M}''$, где $\mathfrak{M}'$—максимальная параболическая, а $\mathfrak{M}''$ — максимальная редуктивная подалгебра.

§ 2. U-подалгебры и U-разложения

Пусть $\mathfrak{M}$-полупростая алгебра Ли над $\mathbf{R}$, и $\Gamma\subset\pi_1$—подмножество, инвариантное относительно $\bar{\sigma}$. Стандартные подалгебры вида

$$v=m\dotplus s_\Gamma\dotplus n_\Gamma\,,$$

где $m\subset m_\Gamma$ (см. § 1), будут называться U-подалгебрами, и соответствующие им связные подгруппы — U-подгруппами. Разложение $G=G'\cdot G''$ и соответствующее ему разложение $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'+\mathfrak{M}''$ будут называться U-разложениями, если $\mathfrak{M}'$ — U-подалгебра в $\mathfrak{M}$.

В этом параграфе мы докажем существование некоторых U-разложений.

Заметим, что каждой стандартной подалгебре

$$u=w\dotplus s_\Gamma\dotplus n_\Gamma\,,$$

где $w\subset m_\Gamma+c_\Gamma^-$, связанной с Γ, соответствует U-подалгебра

$$v=m\dotplus s_\Gamma\dotplus n_\Gamma\,,$$

где $m=w\cap R=u\cap R$. Очевидно, v — идеал в u.

В частности, каждой k-подалгебре в $\mathfrak{M}$ и соответствующей ей подгруппе в G отвечают U-подалгебра и U-подгруппа в G.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — некомпактная полупростая алгебра Ли и $\Gamma\subset\pi_1$ — собственное подмножество, инвариантное относительно $\bar{\sigma}$. Тогда существует линейное представление φ алгебры $\mathfrak{M}$ в конечномерном векторном пространстве L и такой вектор $\xi\in L$, что для подалгебры $\mathfrak{M}_\xi=\{x\in\mathfrak{M},\ \varphi(x)\xi=0\}$ имеем $s_\Gamma\dotplus c_\Gamma^+\dotplus n_\Gamma\subset\mathfrak{M}_\xi\subset u_\Gamma$.*

Доказательство. Как известно, полупростая алгебра $\mathfrak{M}$ (или, точнее, $ad\,\mathfrak{M}$) является алгеброй Ли алгебраической группы всех своих автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{M}$ над $\mathbf{R}$, связной компонентной которой является

$\mathrm{Int}\,\mathfrak{M}$. Так как u_Γ совпадает со своим нормализатором [7], то u_Γ (точнее, $ad_{\mathfrak{M}}\, u_\Gamma$) является алгебраической подалгеброй в $\mathfrak{M}$. Это значит, что в $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{M}$ существует алгебраическая подгруппа $\tilde{U}$, связной компонентой которой является $\tilde{U}_\Gamma$. Согласно теореме п. 5.1 из [1] существует рациональное линейное представление $\Phi: \mathrm{Aut}\,\mathfrak{M} \to GL(L)$ над R и такой вектор $\xi \in L$, что $\tilde{U} = \{g \in Aut\,\mathfrak{M},\ \Phi(g)\xi = \chi(g)\xi\}$, $u_\Gamma = \{x \in \mathfrak{M}, \varphi(x)\xi = \lambda(x)\xi\}$, где $\chi(g), \lambda(x) \in \mathrm{R}$, $\varphi = d\Phi_e: \mathfrak{M} \to gl(L)$. Очевидно, $\mathfrak{M}_\xi \subset u_\Gamma$. Отображение $\chi: U_\xi \to R^+$, где R^+ — мультипликативная группа положительных вещественных чисел, является гладким гомоморфизмом. Поскольку $S_\Gamma^{\bullet}$ полупроста, $\chi(S_\Gamma^{\bullet}) = 1$, т. е. $s_\Gamma \subset \mathfrak{M}_\xi$. Далее, $C_\Gamma^{+\bullet}$ компактна, откуда $\chi(C_\Gamma^{+\bullet})$ — компактная связная подгруппа в R^+, т. е. $\chi(C_\Gamma^{+\bullet}) = 1$ и $c_\Gamma^+ \subset \mathfrak{M}_\xi$. Поскольку Φ рационально, φ переводит нильпотентные элементы в нильпотентные. Значит, $\lambda(x) = 0$ $(x \in u_\Gamma)$, т. е. $n_\Gamma \subset \mathfrak{M}_\xi$.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — простая некомпактная алгебра Ли и ее k-подалгебра. Пусть φ — линейное представление алгебры $\mathfrak{M}$ в конечномерном векторном пространстве L и пусть $\xi \in L$ — такой вектор, что $\varphi(x)\xi = 0$ $(x \in u)$. Тогда $\varphi(x)\xi = 0$ для всех $x \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть G — односвязная группа Ли, отвечающая алгебре $\mathfrak{M}$, U и K — ее связные подгруппы, отвечающие подалгебре u и максимальной компактной в $\mathfrak{M}$ подалгебре R, соответственно, и Φ — такое линейное представление группы G в L, что $d\Phi_e = \varphi$. Положим $\hat{G} = \Phi(G)$, $\hat{U} = \Phi(U)$, $\hat{K} = \Phi(K)$. Как известно, центр полупростой линейной группы конечен. Поэтому $\hat{K}$ компактна, будучи конечным накрытием компактной группы K^*. Рассмотрим орбиту $\hat{G}(\xi)$ точки ξ. Согласно предположению, имеем $\Phi(g)\xi = \xi$ $(g \in u)$. Поскольку $\hat{G} = \hat{U} \cdot \hat{K}$, группа $\hat{K}$ транзитивна на орбите $\hat{G}(\xi)$ и поэтому последняя компактна. Как показал А. М. Лукацкий [3], простая некомпактная линейная группа не может иметь компактных орбит, отличных от точки. Значит, $\Phi(g)\xi = \xi$ для всех $g \in G$, что противоречит предположению.

Теорема 2.1. *Пусть $G = G' \cdot G''$ — k-разложение полупростой группы Ли G, причем $G'^* \cap G''^*$ имеет конечное число связных компонент, $\mathfrak{M}'$ — k-подалгебра, соответствующая такому $\Gamma \subset \pi_1$, что $\pi_1 \setminus \Gamma$ состоит из одного корня или из пары корней, связанных при помощи $\bar{\sigma}$, а $\mathfrak{M}''$ — простая некомпактная подалгебра. Тогда $G = V \cdot G''$, где V — U-подгруппа, отвечающая подгруппе G'.*

Доказательство. Имеем $\mathfrak{M}' = w + s_\Gamma' + n_\Gamma$, где $w \subset m_\Gamma + c_\Gamma^-$. Если l_Γ — максимальная компактная в s_Γ' подалгебра, и $m = w \cap m_\Gamma$, то $R = m + l_\Gamma$ — максимальная компактная в $\mathfrak{M}'$ подалгебра. В обозначениях леммы (из § 1) имеем $R = R' + R''$. В силу той же леммы, отсюда вытекает, что для k-подалгебры $\mathfrak{M}_0' = m + c_\Gamma^- + s_\Gamma' + n_\Gamma$ также справедливо разложение $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0' + \mathfrak{M}''$. Поэтому мы можем считать, что $\mathfrak{M}' = m + c_\Gamma^- + s_\Gamma' + n_\Gamma = c_\Gamma^- + v$. Тогда $G' = V \cdot G_\Gamma^-$, причем V—нормальный делитель в G'. Покажем, что $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}'' \overline{\in} v$. Согласно лемме 2.1 существует такое линейное представление φ алгебры $\mathfrak{M}$ в пространстве L, что для некоторого $\xi \in L$ имеем $s_\Gamma + c_\Gamma^+ + n_\Gamma \subset \mathfrak{M}_\xi \subset u_\Gamma$. Если $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}'' \subset v$, то $\varphi(x)\xi = 0$ для всех $x \in \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$. Согласно следствию 1.1, $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$ — k-подалгебра в $\mathfrak{M}''$. Поэтому из леммы 3.2 следует, что $\varphi(x)\xi = 0$ для всех $x \in \mathfrak{M}''$. Значит, $\mathfrak{M}'' \subset u_\Gamma$, что невозможно, ибо $\mathfrak{M} = u_\Gamma + \mathfrak{M}''$. Поскольку $\dim c_\Gamma^- = 1$, из доказанного следует, что $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$ проектируется на c_Γ^- относительно разложения $\mathfrak{M}' = c_\Gamma^- + v$. Значит, $c_\Gamma^- \subset v + (\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}'')$, откуда $C_\Gamma^- \subset V \cdot (G' \cap G'') \subset V$. В результате имеем $G' = V \cdot C_\Gamma^- \subset V \cdot G''$. Следовательно, $G = V \cdot G''$.

Предположение о конечности числа компонент выполнено, в частности, в случаях: R—полупроста, $ad_{\mathfrak{M}} \mathfrak{M}'$—алгебраическая подалгебра.

§ 3. Некоторые свойства подгрупп и разложений групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $S_p(p, q)$

В этом параграфе будут даны некоторые свойства подгрупп и разложений групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $S_p(p, q)$.

Пусть $\mathfrak{M} = R + P$ — разложение Картана полупростой алгебры $\mathfrak{M}$ над $\mathbf{R}$, $l \subset R$ — некоторая подалгебра. Рассмотрим задачу описания всех подалгебр $\mathfrak{M}'$ в алгебре $\mathfrak{M}$, содержащих l. В случае, когда $\mathfrak{M}'$ — максимальная редуктивная подалгебра, эта задача рассматривалась в работе [5].

Мы исследуем более подробно подалгебры в псевдоунитарных, псевдоортогональных и псевдосимплектических алгебрах.

Через χ будем обозначать характеристическое представление алгебры l, т. е. присоединенное представление l в пространстве P. Характеристическое представление χ будет изображаться схемой Дынкина представления χ^C полупростой части алгебры l^C.

Сперва опишем разложение Картана $\mathfrak{M} = R + P$ и представление χ алгебры R, когда $\mathfrak{M}$ — одна из алгебр $so(p, q)$, $su(p, q)$, $s_p(p, q)$.

Пусть k — поле действительных чисел $\mathbf{R}$, комплексных чисел $\mathbf{C}$ или тело кватернионов $\mathbf{K}$. Обозначим через k^n n-мерное арифметическое пространство над k. Мы будем рассматривать стандартные вложения $\mathbf{R} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{K}$ и стандартные отождествления $\mathbf{K}^n = \mathbf{C}^{2n}$, $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$. Обозначим через $H^{p,q}(k)$ пространство $\mathrm{Hom}(k^q, k^p)$, т. е. пространство всех матриц с p строками и с q столбцами над k. Если $H \in H^{p,q}(k)$, то положим $H^* = \overline{H}'$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{M}$ над $\mathbf{R}$, состоящую из квадратных матриц порядка $p+q$ над k, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} X & H \\ H^* & Y \end{pmatrix},$$

где $X^* = -X$, $Y^* = -Y$, причем в случае $k = \mathbf{C}$ нужно потребовать, чтобы $T_r X + T_r Y = 0$. Тогда

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} so\,(p,\ q), \text{ если } k = \mathbf{R} \\ su\,(p,\ q), \text{ если } k = \mathbf{C} \\ sp\,(p,\ q), \text{ если } k = \mathbf{K}. \end{cases}$$

Подалгебра R выделяется условием $H = 0$, а P — условиями $X = 0$, $Y = 0$. Соответствие

$$\begin{pmatrix} 0 & H \\ H^* & 0 \end{pmatrix} \to H$$

отождествляет P с пространством $H^{p,q}(k)$, причем при этом отождествлении χ действует по формуле

$$\chi \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} H = XH - HY, \quad \left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in R, \quad H \in H^{p,q}(k)\right).$$

Лемма 3.1. *Пусть h — подалгебра в алгебре Ли вида $\mathfrak{M} = m \dot{+} a$, где m и a — идеалы в $\mathfrak{M}$, и π: $h \to a$ проектирование. Если $\pi\,(h)$ редуктивна, то $h = b \dot{+} (h \cap a)$, где $b \subset m \dot{+} \zeta\,(h \cap a)$, $\zeta\,(h \cap a)$ — централизатор $h \cap a$ в a.*

Доказательство. Сперва докажем, что $h \cap a$ — идеал в $\operatorname{Im} \pi$. Действительно. Пусть $x \in h$, $x = y + z$, где $y \in m$, $z = \pi\,(x)$ и $u \in h \cap a$. Так как $[z,\ u] = [x,\ u] \in h$ и $[z,\ u] \in a$, то $[z,\ u] \in h \cap a$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} \pi = c \dot{+} h \cap a$, где c — дополнительный идеал и $[c,\ h \cap a] = 0$. Теперь докажем, что h представляется в виде прямой суммы $h = (\pi^{-1}\,(c)) \dot{+} (h \cap a)$. Пусть $x \in h$. Тогда $\pi\,(x) = u + v$, где $u \in c v \in h \cap a$. Имеем $\pi\,(x - v) = \pi\,(x) - \pi\,(v) = \pi\,(x) - v$, следовательно, $x - v \in \pi^{-1}\,(c)$ и $x = (x - v) + v$. Если $t \in \pi^{-1}\,(c) \cap (h \cap a)$, то $\pi\,(t) = t$, $\pi\,(t) \in c$ и $t \in c$, а значит $t = 0$, т. е. пересечение состоит только из нулевых элементов.

Обозначим $\pi^{-1}\,(c) = b$ и покажем, что $b \in m \dot{+} \zeta\,(h \cap a)$. Пусть $x \in b$, $x = u + v$, где $u \in m$, $v \in a$. Очевидно b — идеал в h. Так как $[x,\ h \cap \cap\, a] = 0$, то $v \in \zeta\,(h \cap a)$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — простая алгебра Ли и $\mathfrak{M}'$ — ее собственная подалгебра. Если:*

а) $\mathfrak{M} = so\,(p,\ q)$, *где* $q > 2$ *и* $so\,(q) \subset \mathfrak{M}'$, *то* $\mathfrak{M}' = a \times so\,(k,\ q)$, *где* $k < p$, $a \subset so\,(p - k)$;

б) $\mathfrak{M} = su\,(p,\ q)$, *где* $q > 2$ *и* $su\,(q) \subset \mathfrak{M}'$, *то* $\mathfrak{M}' = a \dot{+} su\,(k,\ q)$, *где* $k \subset p$, $a \subset u\,(p - k) + \zeta$, ζ — *центр алгебры* $s\,(u\,(p - k) \times u\,(k + q))$;

c) $\mathfrak{M} = s_p(p, q)$, *где* $q > 1$ *и* $s_p(q) \subset \mathfrak{M}'$, *то* $\mathfrak{M}' = a \times s_p(k, q)$, *где* $k < p$, $a \subset s_p(p-k)$.

Доказательство. а) Доказательство ведется индукцией по p. Если $p = 0$, то лемма очевидна. Рассмотрим максимальную собственную подалгебру $\bar{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}'$ алгебры $so(p, q)$. По теореме Мостова из [4] $\bar{\mathfrak{M}}$ — либо параболическая, либо редуктивная подалгебра. Подалгебра $\bar{\mathfrak{M}}$ не может быть параболической. Действительно, легко заметить, что в этом случае ее максимальная компактная подалгебра $\bar{R}$ имела бы вид $R = so(p-s) \times so(s) \times so(q-s)$, где $s > 0$. и, следовательно, не содержала бы $so(q)$. Значит, $\bar{\mathfrak{M}}$ редуктивна. Тогда по теореме 5.1 а) из [5] $\bar{\mathfrak{M}} = so(p-s) \times so(s, q)$, где $0 \leqslant s < p$. По предположению индукции $\mathfrak{M}' \cap so(s, q) = c \dotplus so(k, q)$, где $k \leqslant s$, $c \subset \subset so(s-k)$.

Пусть $\pi: \mathfrak{M}' \to so(k, q)$ — проектирование. Так как $\pi(\mathfrak{M}')$ имеет такой же вид, как $\mathfrak{M}' \cap so(s, q)$, то она редуктивна. Применяя лемму 3.1, получим, что $\mathfrak{M}' = b \dotplus (\mathfrak{M}' \cap so(s, q)) = b \dotplus c + so(k, q)$, где $b \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{M}' \cap so(s, q))$, и, следовательно, $b + c \subset so(p-k)$.

б) Доказательство аналогично доказательству пункта а) лишь с той разницей, что по теореме 5.2 из [5] максимальная редуктивная подалгебра $\bar{\mathfrak{M}}$ имеет вид $s(u(p-s) \times u(s, q)) = (\zeta + su(p-s)) \dotplus \dotplus su(s, q)$. Здесь лемму 3.1 нужно применить в случае

$$m = (\zeta \dotplus su(p-s)), \quad a = su(s, q).$$

c) Доказательство аналогично доказательству пункта а).

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathfrak{M}'$ — *собственная подалгебра в алгебре* $\mathfrak{M} = so(p, q)$, *где* q — четно, $q > 4$. *Если* $\mathfrak{M}'$ *содержит* $su\left(\frac{q}{2}\right)$ *и не содержит* $so(q)$, *то* $\mathfrak{M}'$ *имеет вид* $\mathfrak{M}' = a \dotplus su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, *где* $k \leqslant \frac{p}{2}$, $a \subset so(p-2k) \times \zeta$, ζ — *центр алгебры* $u\left(k, \frac{q}{2}\right)$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по p. При $p = 0$ лемма очевидна. Рассмотрим максимальную собственную подалгебру $\tilde{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}'$ алгебры $so(p, q)$. Здесь, как и в лемме 3.2, легко понять, что подалгебра $\bar{\mathfrak{M}}$ не может быть параболической и, следовательно, редуктивна. Рассмотрим два случая, когда 1) $\bar{\mathfrak{M}}$ содержит $so(q)$, 2) когда $\bar{\mathfrak{M}}$ не содержит $so(q)$. 1) По теореме 5.1 а) из [5] $\bar{\mathfrak{M}} = so(p-s) \times so(s, q)$, где $s < p$. Рассмотрим подалгебру

$\mathfrak{M}'\cap so\,(s, q)$, которая по предположению индукции имеет вид $c\dotplus su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $c\subset\zeta\left(su\left(k, \frac{q}{2}\right)\right)$. Пусть π: $\mathfrak{M}'\to so\,(s, q)$—проектирование. Так как $\pi\,(\mathfrak{M}')$ имеет такой же вид, как $\mathfrak{M}'\cap so\,(s, q)$, то она также редуктивна и по лемме 3.1 $\mathfrak{M}'=b\dotplus su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $b\subset\subset\zeta\left(su\left(k, \frac{q}{2}\right)\right)$ ·2). Пусть $\tilde{R}$ — максимальная компактная подалгебра алгебры $\tilde{\mathfrak{M}}$. Имеем $su\left(\frac{q}{2}\right)\subset\tilde{R}\subset so\,(p)\times so\,(q)$. Так как $su\left(\frac{q}{2}\right)\subset\subset R\cap so\,(q)\subset so\,(q)$ и $su\left(\frac{q}{2}\right)$ — идеал в $\tilde{R}$, то по теореме 5.1б) из [5] p — четно и $\tilde{\mathfrak{M}}=u\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)=\zeta\dotplus su\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$. Применяя лемму 3.1, получим, что $\mathfrak{M}'=b\dotplus\left(\mathfrak{M}'\cap su\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)\right)$, где b — идеал в $\mathfrak{M}'$. По лемме 3.2б $\mathfrak{M}'\cap su\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)=c\dotplus su\left(k, \frac{q}{2}\right)$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'=b\dotplus c\dotplus su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $b\dotplus c=a\subset so\,(p-2k)\times\zeta$, ζ — центр $u\left(k, \frac{q}{2}\right)$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{M}'$—собственная подалгебра в алгебре $\mathfrak{M}$. Если*

1) $\mathfrak{M}=su\,(p, q)$, $2|q$, $q>2$ *и* $\mathfrak{M}'$ *содержит* $s_p\left(\frac{q}{2}\right)$, *но не содержит* $su\,(q)$, *то* $\mathfrak{M}'=a\dotplus s_p\left(k, \frac{q}{2}\right)$, *где* $a\subset su\,(p-2k)\times\zeta$, ζ — *центр и* $(p-2k, 2k+q)$.

2) $\mathfrak{M}=so\,(p, q)$, $4|q$, $q>4$ *и* $\mathfrak{M}'$ *содержит* $sp\left(\frac{q}{4}\right)$, *но не содержит* $su\left(\frac{q}{2}\right)$, *то* $\mathfrak{M}'=a\dotplus s_p\left(k, \frac{q}{4}\right)$, $a\subset so\,(p-k)\times\nu$, $\nu\subset\subset so(4k, q)$.

Доказательство. 1) Доказательство проводится индукцией по p с использованием лемм 3.2 и 3.3.

2) Доказательство аналогично 1) с использованием лемм 3.2, 3.3 и первой части леммы 3.4.

В последующих леммах через spin (p) и spin (p, q) будут обозначаться алгебры Ли групп Spin (p), Spin (p, q) соответственно, т. е. образы алгебр $so\,(p)$, $so\,(p, q)$ при спинорном представлении.

Мы будем использовать теорему 5.1 работы А. Л. Онищика [5]. Отметим, что, как сообщил нам автор, пункт d) этой теоремы сформулирован неверно. Следующая лемма, доказательство которой также сообщил нам А. Л. Онищик, является исправлением этого пункта. Через $so(4) \subset so(4, q)$ мы обозначаем подалгебру матриц вида

$$\begin{array}{c} \\ 4 \\ q \end{array} \begin{pmatrix} 4, & q \\ A, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = -A.$$

Лемма. *Пусть* $\overline{\mathfrak{M}}$ — *максимальная редуктивная подалгебра в* $\mathfrak{M} = so(4, q)$ $(q < 4)$, *содержащая* $su(2) \subset so(4)$. *Тогда* $\overline{\mathfrak{M}}$ *сопряжена с одной из следующих подалгебр:*

1) $so(4, s) \times so(q-s)$ $(0 \leqslant s < q)$,

2) $u\left(2, \frac{q}{2}\right)$, $(q = 2{,}4)$,

3) *некомпактная подалгебра типа* G_2 $(q = 3)$,

4) $sp(1, 1) \times sp(1)$ $(q = 4)$,

5) $\mathrm{spin}(3, 4)$, $(q = 4)$.

Доказательство. Мы будем использовать терминологию и обозначения из [5]. Очевидно характеристическое представление подалгебры $su(2) \subset so(4) \times so(q)$ в P распадается в прямую сумму стандартных двумерных представлений. Поэтому из таблицы 3 видно, что если $\overline{\mathfrak{M}}$ не сопряжена $R = so(4) \times so(q)$, то $\overline{\mathfrak{M}}$ содержит простой идеал $\mathfrak{M}_1 \cong so(4, s)$ $(0 < s < q)$, $su(2,1)$ или G_2. Теперь применим результаты работы [8], в которой классифицированы простые подалгебры в простых классических алгебрах Ли $\mathfrak{M}$ с точностью до квазисопряженности, т. е. сопряженности в группе всех квазивнутренних автоморфизмов (автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}$ называется квазивнутренним, если он индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{M}^C$). Пусть Γ—фактор-группа группы всех квазивнутренних автоморфизмов по подгруппе внутренних автоморфизмов. В [8] доказано, что для $\mathfrak{M} = so(4, q)$ $(q \leqslant 4)$ группа Γ имеет следующий вид.

$\mathfrak{M} = so(4, 4)$: $\Gamma \cong Z_2 \times Z_2$ и порождается, автоморфизмами $Ad A$, $Ad B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & E_3 & & \\ & & -1 & \\ & & & E_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & E_4 \\ -E_4 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{M} = so(4, q)$ $(q = 1, 2, 3)$: $\Gamma \cong Z_2$ и порождается автоморфизмом $Ad\,A$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & E_3 & & \\ & & -1 & \\ & & & E_{q-1} \end{pmatrix}.$$

(Через E_r обозначается единичная матрица порядка r). Отсюда легко следует, что в случае $\mathfrak{M} = so\,(4, 4)$ группа Γ переставляет простые идеалы алгебры $R = so\,(4) \times so\,(4)$, действуя на них как четверная группа Клейна, а в случае $\mathfrak{M} = so\,(4, q)$ $(q = 1, 2, 3)$ группа Γ переставляет простые идеалы в сомножителе $so\,(4)$ алгебры $R = so(4) \times \times\, so\,(q)$.

Рассмотрим отдельно различные типы подалгебр $\mathfrak{M}_1$.

1) $\mathfrak{M}_1 \cong so\,(4, 3)$. Имеем $q = 4$. Единственным 8-мерным ортогональным представлением алгебры $so\,(7, \mathrm{C})$ является стандартное вложение $so\,(7, \mathrm{C}) \subset so\,(8, \mathrm{C})$ и спинорное представление (см., например, [6]). Поэтому из [8] следует, что $\mathfrak{M}_1$ квазисопряжена одной из подалгебр $so\,(4, 3)$, $\mathrm{spin}\,(3, 4)$. Но поскольку $\mathfrak{M}_1 \supset su\,(2)$, из описанного выше действия группы Γ на простые идеалы алгебры R следует, что $\mathfrak{M}_1$ сопряжена $so\,(4, 3)$ или $\mathrm{spin}\,(3, 4)$ соответственно.

2) $\mathfrak{M}_1 \cong so\,(4, 2)$. Имеем $q = 3$ или 4. Единственными 7 и 8-мерными ортогональными представлениями алгебры $so\,(6, \mathrm{C})$ являются стандартные вложения $so\,(6, \mathrm{C}) \subset so\,(7, \mathrm{C}) \subset so\,(8, \mathrm{C})$ и представление со схемой $\overset{1}{\circ}-\circ-\circ+\circ-\circ-\overset{1}{\circ}$. Согласно [8], отсюда следует, что $\mathfrak{M}_1$ сопряжена либо $so\,(4, 2)$ либо $su\,(2, 2)$ (во втором случае $q = 4$). Из данного выше описания группы Γ ясно, что $\mathfrak{M}_1$ сопряжена соответствующей подалгебре. Далее, $\widetilde{\mathfrak{M}} = N\,(\mathfrak{M}_1)$, откуда легко следует наше утверждение.

3) $\mathfrak{M}_1 \cong so\,(4, 1)$. Аналогичное рассуждение дает, что $\mathfrak{M}_1$ сопряжена $so\,(4, 1)$ или $sp\,(1, 1)$, причем $\widetilde{\mathfrak{M}} = N\,(\mathfrak{M}_1)$.

4) $\mathfrak{M}_1 \cong su\,(2, 1)$. Нетрудно проверить, что единственными ортогональными представлениями алгебры $sl\,(3, \mathrm{C})$ размерностей не больше 8, являются представления со схемами $\overset{1}{\circ}-\circ+\circ-\overset{1}{\circ}$ и $\overset{1}{\circ}-\overset{1}{\circ}$. Используя как и выше результаты работы [8], получаем из первого представления стандартно вложенную подалгебру $su\,(2, 1) \subset so\,(4, 2) \subset \subset so\,(4, 4)$, определенную однозначно с точностью до сопряженности. Второе представление является присоединенным и поэтому определяет подалгебру $\mathfrak{M}_1 = ad\ su\,(2, 1) \subset so\,(4, 4)$. Легко видеть, что подалгебра $su\,(2) \subset su\,(2, 1)$ отображается при этом на $so\,(3) \subset so\,(4)$, т. е. не удовлетворяет одному из условий леммы.

5) $\mathfrak{M}_1 \cong G_2$. Используя, как и выше, результаты работы [8], получаем, что $\mathfrak{M}_1$ сопряжена подалгебре $G_2 \subset so\,(4, 3)$ и $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_1$.

Соответствующая ошибка имеется и в формулировке теоремы 6.1 работы [5]: в таблице 3 этой работы пропущено максимальное k-разложение $so\,(4, 4) = u_\Gamma + \mathfrak{M}''$, где $\pi_1 / \Gamma = \{\alpha_\cdot\}$ и $\mathfrak{M}'' = \mathrm{spin}\,(3, 4)$. Доказательство теоремы исправляется, если на стр. 586 применить теорему 5.1 d) в ее данной выше правильной формулировке.

Лемма 3.5. *Пусть* $\mathfrak{M}'$ — *собственная некомпактная подалгебра в* $\mathfrak{M}$. *Если*

1) $\mathfrak{M} = su\,(p, 2)$, *где* $p=1, 2$, *причем* $\mathfrak{M}' \supset su\,(2)$, *то возможны следующие случаи:*

1а) $\mathfrak{M}' = a \dotplus su\,(1,2)$, *где* $a \subset \zeta$, ζ — *центр алгебры* $s\,(u\,(p-1) \times u\,(3))$;

1б) $\mathfrak{M}' = sp\,(1,1)$, $p=2$;

2) $\mathfrak{M} = so\,(p, 4)$, *где* $p < 4$, *причем* $\mathfrak{M}' \supset su\,(2)$ *и* $\mathfrak{M}'$ *не содержит* $so\,(4)$, *то возможны следующие случаи;*

2а) $\mathfrak{M}' = a \dotplus su\,(k, 2)$, *где* $k \leqslant \frac{p}{2}$, $a \subset so\,(p-2k) \times \zeta$, ζ — *центр в* $u\,(k, 2)$;

2б) $\mathfrak{M}' = a \dotplus sp\,(1, 1)$, *где* $p = 4$, $a \subset sp\,(1)$;

2c) $\mathfrak{M}' = G_2$ (*некомпактная форма*) $p = 3$ *или* $p = 4$;

2d) $\mathfrak{M}' = \mathrm{spin}\,(3, 4)$, $p = 4$.

Доказательство. 1) Пусть $\tilde{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}'$ — максимальная собственная некомпактная подалгебра алгебры $su\,(p, 2)$. Как и выше легко показать, что $\tilde{\mathfrak{M}}$ редуктивна. По теореме 5.2 б) работы [5] имеем, что $\tilde{\mathfrak{M}} = s\,(u(2-s) \times u\,(s, 2))$, где $0 \leqslant s < p$, либо $\tilde{\mathfrak{M}} = sp\,(1,1)$ при $p = 2$. В первом случае применяется лемма 3.1. Во втором случае, если интерпретировать $sp\,(1,1)$ как $so\,(1,4)$, то $sp\,(1)$ интерпретируется как подалгебра $su\,(2) \subset so\,(4)$, отсюда видно, что характеристическое представление алгебры $sp\,(1)$ неприводимо. Поэтому наше утверждение следует из леммы 5.3 работы [5].

2). Доказательство аналогично 1) с использованием леммы А. Л. Онищика, доказанной в настоящем параграфе.

Лемма 3.6. *Пусть* $\mathfrak{M}'$ — *собственная некомпактная подалгебра в алгебре Ли* $\mathfrak{M} = so\,(p, 7)$, *где* $p \leqslant 7$. *Если* $\mathfrak{M}'$ *содержит алгебру* $G_2 \subset so\,(7)$, *то* $\mathfrak{M}'$ *имеет вид* $\mathfrak{M}' = a \times so\,(k, 7)$, $0 < k < p$, $a \subset so\,(p-k)$.

Доказательство. Так как $G_2 \subset \mathfrak{M}' \cap so\,(7) \subset so\,(7)$ и является максимальной подалгеброй в $so\,(7)$, то $\mathfrak{M}' \cap so\,(7) = so\,(7)$ или G_2 В первом случае $so\,(7) \subset \mathfrak{M}' \subset so\,(p, 7)$ и применима лемма 3.2.

Во втором случае обозначим через R' максимальную компактную подалгебру в $\mathfrak{M}'$. Поскольку $R' \subset R = so\,(p) \times so\,(7)$, то $R' = l \dotplus G_2$, где $l \subset so\,(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M}'$ редуктивна. Тогда существует простой идеал $\mathfrak{M}'_1 \subset \mathfrak{M}'$, содержащий G_2. Если $\mathfrak{M}'_1$ некомпактен, то из классификации простых вещественных алгебр Ли видно, что $\mathfrak{M}'_1 = G_2^C$. Но характеристическое представление алгебры G_2 в прямое дополнение к R в $so\,(p, 7)$, является суммой p стандартных 7-мерных представлений, а в G_2^C — присоединенным. Поэтому $G_2^C \not\subset so\,(p, 7)$ и мы пришли к противоречию. Если $\mathfrak{M}'_1 = G_2$, то $\mathfrak{M}' = so\,(7) \times G_2$, т. е. компактна.

В общем случае применим индукцию по p. При $p = 0$ наше утверждение очевидно. Расширим подалгебру $\mathfrak{M}'$ до максимальной собственной подалгебры $\widetilde{\mathfrak{M}}'$, алгебры $so\,(p,\ 7)$. Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ — редуктивна, то по доказанному выше $\widetilde{\mathfrak{M}}' = a \times so\,(k,\ 7)$, где $k < p$, $a \subset so\,(p-k)$ и по предположению индукции $\mathfrak{M}'$ также редуктивна и имеет указанный вид (лемма 3.2). Если $\widetilde{\mathfrak{M}}'$ — максимальная k-подалгебра, то, как мы знаем из [5], ее максимальная компактная подалгебра $\widetilde{R}' = so\,(p) \times \times\, so\,(7-p)$, где $p > 0$ и, следовательно, она не может содержать G_2.

Лемма 3.7. *Пусть* $\mathfrak{M}'$ — *некомпактная собственная подалгебра в алгебре* $\mathfrak{M}$.

1. *Если* $\mathfrak{M} = so\,(p,\ 8)$, $p \leqslant 8$ *и* $\mathfrak{M}' \supset \mathrm{spin}\,(7)$, *то* $\mathfrak{M}' = a \times so\,(k,\ 8)$, *где* $0 < k < p$, $a \subset so\,(p-k)$;'

2. *Если* $\mathfrak{M} = so\,(p,\ 16)$, $p \leqslant 16$ *и* $\mathfrak{M}' \supset \mathrm{spin}\,(9)$, *то* $\mathfrak{M}' = a \times \times\, so\,(k,\ 16)$, *где* $0 < k < p$, $a \subset so\,(p-k)$.

Доказательство. 1. Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Если $\mathfrak{M}' \supset so\,(8)$, то применима лемма 3.2. Если $\mathfrak{M}' \supset so\,(8)$, то ее максимальная компактная подалгебра $R' = l \times \times\, \mathrm{spin}\,(7)$, где $l \subset so\,(p)$. Пусть $\mathfrak{M}'$ редуктивна и пусть $\mathfrak{M}_1$ — простой идеал в $\mathfrak{M}'$, содержащий $\mathrm{spin}\,(7)$. Если $\mathfrak{M}'$ не компактна, то из классификации простых алгебр легко усмотреть, что $\mathfrak{M}_1$ изоморфна одной из следующих простых алгебр $\mathfrak{M}_1 \cong sl\,(7,\ \mathbf{R})$, $so\,(s,\ 7)$, $so\,(7,\ \mathbf{C})$. Характеристическое представление χ алгебры $so\,(7)$ в $sl\,(7,\ \mathbf{R})$ $so\,(s,\ 7)$ и $so\,(7,\ \mathbf{C})$ задается соответственно следующими схемами:

$$\overset{2}{\circ}=\circ=\circ \quad \circ-\circ=\overset{1}{\circ} \quad (s \text{ раз}), \quad \circ-\overset{1}{\circ}=\circ.$$

Пусть $so\,(p,\ 8) = R + P$ — разложение Картана. Так как характеристические представление χ алгебры $\mathrm{spin}\,(7)$ в P является суммой p представлений со схемой

$$\circ-\circ=\overset{1}{\circ},$$

то таких подалгебр в $so\,(p,\ 8)$ нет. Значит $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{spin}\,(7)$ и $\mathfrak{M}' = so\,(p) \times \times\, \mathrm{spin}\,(7)$, т. е. компактна.

В общем случае проводим индукцию по p.

2. Либо $\mathfrak{M}' \supset so\,(16)$ и применима лемма 3.2, либо максимальная компактная $R' \subset \mathfrak{M}'$ имеет вид $R' = l \times \mathrm{spin}\,(9)$, где $l \subset so\,(p)$. Пусть $\mathfrak{M}'$ редуктивна и $\mathfrak{M}_1$ — простой идеал в $\mathfrak{M}'$, содержащий $\mathrm{spin}\,(9)$. Если $\mathfrak{M}_1$ некомпактен, то имеем следующие возможности:

$$\mathfrak{M}_1 \cong sl\,(9,\ \mathbf{R}),\ so\,(s,\ 9);\ so\,(9,\ \mathbf{C});\ F\,\mathrm{II}.$$

Характеристическое представление χ подалгебры $so\,(9)$ в $sl\,(9,\ \mathbf{R})$, $so\,(s,\ 9)$, $so\,(9,\ \mathbf{C})$ задается соответственно следующими схемами:

$$\overset{2}{\circ}-\circ-\circ=\circ, \quad \overset{1}{\circ}-\circ-\circ=\circ \quad (s \text{ раз}) \quad \circ-\overset{1}{\circ}-\circ=\circ,$$

а характеристическое представление χ алгебры spin (9) в P, где P — прямое дополнение к R в $so(p, 16)$, является суммой p представлении со схемой

$$\overset{}{\circ}-\circ-\circ-\overset{1}{\circ}.$$

Так как это представление не совпадает ни с одним из представлений, указанных выше, то $sl(9, \mathbf{R})$, $so(s, 9)$ и $so(9, \mathbf{C})$ не могут являться подалгебрами в $so(p, 16)$, которые содержали бы spin (9).

Покажем, что случай $\mathfrak{M}_1 = F\,\mathrm{II}$ тоже невозможен. Действительно, любое представление $F\,\mathrm{II}$ в $so(p, 16)$ имеет вид $\varphi + kN$, где φ — неприводимое представление размерности 26 и N — нулевое представление.

Из работы [2] имеем, что $\varphi i = \varphi_4 + \varphi_1 + N$, где i — вложение spin (9) в $F\,\mathrm{II}$, φ_4 — представление алгебры размерности 16, φ_1 — стандартное представление. Теперь утверждение следует из того, что $\varphi_4 + \varphi_1 + (k+1)N \neq \varphi_4 + lN$.

Включим $\mathfrak{M}'$ в максимальную собственную подалгебру $\tilde{\mathfrak{M}}' \subset so(p, 16)$ и применим индукцию по p. Доказательство дальше проводится аналогично доказательству леммы 3.2.

Теорема 3.1. *Пусть $G = G' \cdot G''$ — собственное разложение простой группы Ли G. Тогда подалгебра $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$) имеет следующий вид:*

1. *Если $\mathfrak{M} = sp(p, q)$, $(0 < p \leqslant q)$, то $\mathfrak{M}'' = a \times sp(k, q)$, где $0 \leqslant k < p$, $a \subset sp(p-k)$;*

2. *Если $\mathfrak{M} = su(p, q)$, $(0 < p \leqslant q)$, то $\mathfrak{M}'' = a \dotplus su(k, q)$, где $0 \leqslant k < p$, $a \subset su(p-k) + \zeta$, ζ — центр алгебры $s(u(p-k) \times u(k, q))$ или $\mathfrak{M}'' = a \times sp\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $0 < k \leqslant \frac{p}{2}$, $a \subset su(p-2k) \dotplus \zeta$, ζ — центр алгебры $u(p-2k, 2k+q)$;*

3. *Если $\mathfrak{M} = so(p, q)$ $(0 < p \leqslant q)$ и разложение некомпактно, то возможны следующие случаи: $\mathfrak{M}'' = a \times so(k, q)$, где $0 < k < p$ $a \subset so(p-k)$; $\mathfrak{M}'' = a \times su\left(k, \frac{q}{2}\right)$, где $0 < k \leqslant \frac{p}{2}$ и q — четно, а $a \subset so(p-2k) \times \zeta$, ζ — центр алгебры $u\left(k, \frac{q}{2}\right)$, $\mathfrak{M}'' = a \times sp\left(k, \frac{q}{4}\right)$, $4|q$, $0 < k \leqslant \frac{p}{4}$, где $a \subset so(p-4k) \times sp(1)$, $sp(1) \subset so(4k, q)$; $\mathfrak{M}'' = G_2$ где $p = 3$, $q = 4$; $\mathfrak{M}'' =$ spin $(3, 4)$, где $p = q = 4$.*

Доказательство. Пусть R_0 — максимальная полупростая компактная подалгебра в $\mathfrak{M}$. В силу леммы 1.1 имеем, что $R_0 = R_0' + R_0''$, где R_0', R_0'' — максимальные полупростые компактные подалгебры в алгебрах $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ соответственно.

Пусть это разложение задается следующей схемой:

$$\begin{tikzcd}
R'_{01} & R'_{012} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & R'_{02} \\
R_{01} \arrow[u, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & R_{02}, \arrow[u, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
R^{*}_{01} & R^{*}_{012} & R^{*}_{02}
\end{tikzcd}$$

где $R_{01} = sp\,(p),\ su\,(p),\ so\,(p)$, а $R_{02} = sp\,(q),\ su\,(q),\ so\,(q)$ для $\mathfrak{M} = sp\,(p, q),\ su\,(p, q),\ so\,(p, q)$ $(p \neq 2)$ соответственно. В случае $\mathfrak{M} = so\,(2, q)$ имеем $R_{01} = 0$, $R_{02} = so\,(q)$.

1. Из лемм 3.4 и 3.3 работы [6] вытекает, что $R^{*}_{012} = 0$ и $R^{*}_{02} = sp\,(q)$. Теперь, применяя лемму 3.3 и лемму 3.5 2), получим $\mathfrak{M}'' = a \times sp\,(k, q)$, где $0 < k < p$, $a \subset sp\,(p-k)$.

2. Из лемм 3.4 и 3.3 работы [6] вытекает, что $R^{*}_{012} = 0$ (при $p > 1$), причем $R^{*}_{02} = su\,(q)$ или $sp\left(\frac{q}{2}\right)$. Применяя леммы 3.2, 3.4 и 3.5, получим наше утверждение.

3. Пусть $q > 4$. Из лемм 3.4 и 3.3 работы [6] вытекает, что $R^{*}_{012} = 0$ и что для R^{*}_{02} возможны следующие значения:

a) $R^{*}_{02} = so\,(q)$,

б) $R^{*}_{02} = G_2$ при $q = 7, 8$,

c) $R^{*}_{02} = so\,(q-1)$ при q — четном,

d) $R^{*}_{02} = \mathrm{spin}\,(7)$ при $q = 8$,

e) $R^{*}_{02} = \mathrm{spin}\,(9)$ при $q = 16$.

В случаях а), б) $q = 7$, d) и е) наше утверждение следует из лемм 3.2 (случай а)), и 3.6 (случай б)), 3.7 1) (случай d) б) $q = 8$), 3.7 2) случай е)).

Рассмотрим случай с). Пусть $R'_{012} = 0$. Тогда по теореме 4.1 из [6] $R'_{02} = so\,(q)$ либо $su\left(\frac{q}{2}\right)$, либо $sp\left(\frac{q}{4}\right)$, либо $\mathrm{spin}\,(7)$ $(q=8)$, либо $\mathrm{spin}\,(9)$ $(q = 16)$ и наше утверждение будет следовать из лемм 3.2, 3.3, 3.4, 3.7.

Пусть $R'_{012} \neq 0$. Включим наше разложение в максимальное собственное некомпактное разложение $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}' + \tilde{\mathfrak{M}}''$. Как отмечено в [5], это либо редуктивное разложение, либо k-разложение.

Пусть $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}' + \tilde{\mathfrak{M}}''$ редуктивно. Из таблицы 2 работы [5], где перечислены все редуктивные разложения, легко усмотреть, что $p = q$ и что $\tilde{\mathfrak{M}}' = sl\,(p, R)$, или $sp\left(\frac{p}{2}, \mathrm{R}\right) \times sp\,(1)$, $\tilde{\mathfrak{M}}'' = so\,(p, p-1)$.

Из вида $\tilde{\mathfrak{M}}'$ следует, что $R'_{01} = R'_{02} = 0$. Если $R'_{012} \neq so\,(p)$, то из леммы 5.5 работы [6] следует, что $R^{*}_{01} = so\,(p)$ и применима лемма 3.2. Пусть $R'_{012} = so\,(p)$. Тогда при помощи леммы 5.4 из [6] получаем разложение $so\,(p) = \pi_2 \pi_1^{-1} \tilde{R}^{*}_{01} + sc\,(p-1)$. Отсюда и из теоремы 4.1 работы [5] следует, что $R^{\cdot}_{01} = su\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right)$ или $so(p)$, spin (7) ($p=8$), spin (9) ($p=16$). Из леммы 3.2 и 3.7 следует, что $R^{\cdot}_{01} \neq su\left(\frac{p}{2}\right)$, $sp\left(\frac{p}{4}\right)$, spin (7), spin (9). Значит $R_{01} = so(p)$ и $\bar{\mathfrak{M}}'' = \bar{\mathfrak{M}}' = so(p,\ p-1)$.

Пусть $\mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{M}}' + \bar{\mathfrak{M}}''$ — k-разложение. Тогда в силу теоремы 6.1 из [5] имеем, что полупростая часть $\bar{\mathfrak{M}}'$ есть $sl(p, \mathbf{R}) \times so(q-p)$, а $\bar{\mathfrak{M}}'' = so(p-k) \times so(k, q)$, $0 < k < p$. Разложение $\mathfrak{M} = \bar{\mathfrak{M}}' + \bar{\mathfrak{M}}''$ дает разложение со схемой

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & so(p) \arrow[dl, dash, double] \arrow[dr, dash] & so(q-p) \arrow[d, dash] \\
so(p) \arrow[d, dash] & & so(q) \arrow[d, dash] \\
R^{\cdot}_{01} & & so(q-1),
\end{tikzcd}$$

где $R^{\cdot}_{01} \subset so(p-k) \times so(k)$. При помощи леммы 5.4 из [6] получаем разложение

$$so(q) = (\pi_2 \pi_1^{-1}(R^{\cdot}_{01}) + so(q-p)) + so(q-1),$$

где $R^{\cdot}_{01} \subset so(p-k) \times so(k)$. При помощи леммы 5.4 из [6] получаем разложение $so(q) = (\pi_2 \pi_1^{-1}(R^{\cdot}_{01}) + so(q-p)) + so(q-1)$. Так как $R^{\cdot}_{01} \subset so(p-k) \times so(k)$, где $0 < k < p$, то такое разложение невозможно в силу теоремы 4.1 работы [6].

Рассмотрим случай б) $q=8$. Пусть $R'_{012} = 0$, тогда по теореме 4.1 работы [6] $R'_{02} = so(8)$ и утверждение следует из леммы 3.2. Пусть $R'_{012} \neq 0$, тогда по теореме 4.1 из [6] $R'_{012} = so(8)$, $R'_{02} = 0$. При помощи леммы 5.4 из [6] получаем разложение $so(p) = (\pi_1 \pi_2^{-1} G_2 + R'_{01}) + R^{\cdot}_{01}$. Отсюда и из теоремы 4.1 работы [6] следует, что $p=7$, $R'_{01} = 0$, $R^{\cdot}_{01} = so(6)$, $so(5)$ или $so(5) \times so(2)$. Схема разложения имеет вид

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & so(8) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, double] & \\
so(7) \arrow[d, dash] & & so(8) \arrow[d, dash] \\
R^{\cdot}_{01} & & G_2
\end{tikzcd}$$

Невозможность такого разложения очевидна.

Пусть $q=4$. Поскольку $so(1,4) \cong sp(1,1)$, а $so(2,4) \cong su(2,2)$, остается рассмотреть случай $p = 3,4$. Из лемм 3.3 и 3.4 работы [6] следует, что в разложении $R_0 = R'_0 + R^{\cdot}_0$ одна из подалгебр содержит один из простых идеалов алгебры $R = so(p) \times so(4)$. Алгебра $so(4)$ содержит простой идеал $su(2)$, причем существует автоморфизм алгебры $so(p, 4)$, переводящий этот идеал в дополнительный идеал.

Пусть $p=3$. Если $R_0^{\cdot}$ содержит простой идеал $so\,(4)$, то можно считать, что $R_0^{\cdot} \supset su\,(2)$ и применимы леммы 3.5 и 3.2. Пусть $R_0^{\cdot} \supset$ $\supset so\,(3)$. Включим разложение $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ в максимальное разложение $\mathfrak{M} = \breve{\mathfrak{M}}' + \breve{\mathfrak{M}}''$. Из таблиц 2 и 3 работы [5] видно, что $\breve{\mathfrak{M}}'' = so\,(3,3)$, $\breve{\mathfrak{M}}' = G_2$ (некомпактная форма). Имеем $G_2 = \mathfrak{M}' + (G_2 \cap so\,(3,3)) = \mathfrak{M}' +$ $+ sl\,(3, \mathbf{R})$. Поскольку G_2 не допускает собственных некомпактных разложений, $\mathfrak{M}' = G_2$.

Пусть $p=4$. Как видно из указанного выше, мы можем считать, что $\mathfrak{M}'' \supset su\,(2)$, и применимы леммы 3.2 и 3.5.

Ереванский государственный
университет

Поступила 3.IX.1973

Ռ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. Լիի պարզ իրական խմբերի վերլուծությունների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Լիի SO(p, q), SU(p, q), Sp(p, q) *խմբերի ենթախմբերի որոշ հատկությունները։ Ապացուցվում է, որ այդ խմբերի կամայական վերլուծության մեջ, ենթախմբերից որևէ մեկը հանդիսանում է ռեդուկտիվ ենթախումբ և ունի միանգամայն որոշակի տեսք։ Այնուհետև ներմուծվում է այսպես կոչված* U-*վերլուծությունների դաս և ապացուցվում է այդպիսի վերլուծությունների գոյությունը։*

R. O. NAZARIAN. *On decompositions of simple real Lie groups* (summary)

This paper studies some properties of subgroups and decompositions of Lie groups $SO\,(p, q)$, $SU\,(p, q)$, $Sp\,(p, q)$. It is proved in particular that in any decomposition of these groups, one of the subgroups is always reductive and has highly special form.

Then a special class of *so*-called U-decomposition is introduced and the existence of this decompositions is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Борель.* Линейные алгебраические группы, Изд. „Мир“, М., 1972.
2. *Е. Б. Дынкин.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли, Матем. сб., 30, (72), 1952, 349—462.
3. *А. М. Лукацкий.* О сферических функциях на компактных G-пространствах некомпактных групп Ли, УМН, 26, вып. 5, 1971, 212—214.
4. *G. D. Mostow.* On maximal subgroups in real Lie groups, Ann. Math., 74, 1961, 503—517.
5. *А. Л. Онищик.* Разложения редуктивных групп Ли, Матем. сб., 80 (122), № 4, 1969, 553—599.
6. *А. Л. Онищик.* Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований, Труды ММО, XI, 1962, 199—242.
7. *А. Л. Онищик.* О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях. II, Матем. сб., 74 (116), 1967, 398—416.
8. *Ф. И. Карпелевич.* Простые подалгебры вещественных алгебр Ли, Труды ММО, IV, 1955, 3—112.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

Н. О. СИНАНЯН

О ВЗАИМОСВЯЗИ СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Введение

Рассмотрим бесконечную матрицу

$$T = \|a_{mk}\| \ (m, \ k = 1, \ 2, \cdots) \tag{1}$$

и какой-нибудь бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

частные суммы которого обозначим через S_m $(m=1, 2, \cdots)$. T-средними ряда (2), определяемыми матрицей (1), называют величины

$$A_m(T) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \ S_k \ (m = 1, \ 2, \cdots). \tag{3}$$

Говорят, что ряд (2) суммируется методом T к значению S, если ряды в правой части равенства (3) сходятся для любого $m = 1, 2, \cdots$ и величины $A_m(T)$ стремятся к пределу S при $m \to \infty$. Метод суммирования T называется регулярным, если всякий ряд (2), сходящийся к конечному значению S, суммируется методом T к тому же значению S.

Для того чтобы метод T был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы матрица (1), определяющая этот метод, удовлетворяла условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| < H, \text{ где } H \text{ не зависит от } m, \tag{4}$$

$$\lim_{m \to \infty} a_{mk} = 0 \quad \text{для каждого } k = 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} = 1. \tag{6}$$

Приведем два определения.

Определение 1. Будем говорить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

где $u_n(x)$ — почти везде конечные измеримые функции, определенные на отрезке [0,1], суммируется методом $T=\|a_{mk}\|$ в метрике $L_p[0,1]$, $p>0$, к функции $f(x)\in L_p[0,1]$, если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k(x) \quad \left(S_k(x)=\sum_{l=1}^{k} u_l(x)\right)$$

сходятся в метрике $L_p[0,1]$ для всех $n=1, 2,\cdots$ и T-средние

$$A_n(x, T)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k(x)$$

сходятся к $f(x)$ в метрике $L_p[0,1]$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |A_n(x, T)-f(x)|^p\, dx=0.$$

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммируемым по мере на отрезке $[0, L]$ методом $T=\|a_{mk}\|$ к функции $f(x)$, если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k(x)$ сходятся по мере на отрезке [0,1] для всех $n=1, 2,\cdots$ и T-средние $A_n(x, T)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k(x)$ сходятся к $f(x)$ по мере на отрезке [0,1].

Заметим, что из сходимости функционального ряда по мере или в метрике $L_p[0,1]$, $0<p<1$, вообще говоря, не следует его суммируемость регулярными методами в тех же метриках.

Случай ортогональных рядов заслуживает особого исследования, так как можно ожидать, что для специальных рядов могут иметь место другие явления.

В настоящей работе исследуется взаимосвязь сходимости и суммируемости регулярными методами общих ортогональных рядов. При этом в основном рассматриваются сходимость или суммируемость по мере и в метрике $L_p[0,1]$, $0<p<1$.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой полной в $L_2[0,1]$ ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ и для любого ленейного регулярного метода $T=\|b_{mk}\|$, где*

$$\lim_{m\to\infty}\max_k |b_{mk}|=0, \tag{7}$$

существуют ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{8}$$

и линейный регулярный метод суммирования

$$T_0 = \|a_{mk}\|, \tag{9}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx = 0, \text{ где } 0 < p < 1;$$

2) *последовательность* $\{A_n(x, T_0)\}_{n=1}^{\infty}$, T_0*-средних ряда* (8), *определяемых матрицей* (9), *не сходится к нулю как в метрике* L_p [0,1], *так и по мере на отрезке* [0,1], *хотя ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k(x), \quad S_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_l \varphi_l(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

сходятся в метрике L_p [0,1];

3) *матрица* $\|a_{mk}\|$ *получается из матрицы* $\|b_{mk}\|$ *добавлением бесконечного числа нулевых столбцов.*

Теорема 2. *Для любого заранее заданного линейного регулярного метода суммирования* $T = \|a_{mk}\|$, *удовлетворяющего условию* (7), *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

по некоторой, зависящей от метода T, *полной в* L_2 [0,1] *ортонормированной системе* $\{\varphi_n(x)\}$, *который удовлетворяет условиям:*

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx = 0, \text{ где } 0 < p < 1;$$

2) *последовательность* $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$, T*-средних ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, *определяемых матрицей* $T = \|a_{mk}\|$, *не сходится к нулю как в метрике* L_p [0,1], *так и по мере на отрезке* [0,1], *хотя ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k(x), \quad S_k(x) = \sum_{l=1}^{k} c_l \varphi_l(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

сходятся в метрике L_p [0,1].

Кроме того оказывается, что для некоторых полных ортогональных систем $\{\varphi_n(x)\}$ (например, для системы Хаара) сходимость по мере произвольного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ равносильна его суммируемости по мере некоторым, отличным от сходимости регулярным методом. А именно, в § 3 приведен пример конечнострочного линейного регулярного метода суммирования T, удовлетворяющего условию (7), который вместе с тем обладает тем свойством, что суммируемость по мере этим методом любого ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x)$ по системе Хаара эквивалентна его сходимости по мере (см. теорему 3, § 3).

При доказательстве теорем 1 и 2 использована лемма А. А. Талаляна [1].

Лемма (А. А. Талаляна [1]). Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0,1]$ ортонормированная система, $\Phi(x) \in L_p[0,1], 0<p<1$ и p_0—фиксированное число, $0<p_0<p$.

Тогда для всякого натурального N и положительного η существует полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x)=\sum_{k=N}^{m} a_k \varphi_k(x),\ m>N,$$

который удовлетворяет условиям:

$$\alpha)\qquad \int\limits_0^1 |H(x)-\Phi(x)|^q\,dx<\eta,\ p_0 \leqslant q \leqslant p;$$

$$\beta)\qquad \int\limits_0^1 \left|\sum_{k=N}^{n} a_k \varphi_k(x)\right|^q dx \leqslant \eta+\int\limits_0^1 |\Phi(x)|^q\,dx.$$

$$(N \leqslant n \leqslant m,\ p_0 \leqslant q \leqslant p).$$

Доказательство теоремы 1.

Пусть

$$T_0=\|b_{ij}\| \tag{1.1}$$

—линейный регулярный метод суммирования, для которого имеет место

$$\lim_{i\to\infty} \max_j |b_{ij}|=0. \tag{1.2}$$

Не нарушая общности, можем считать, что

$$\max_j |b_{ij}| < 1,\ i=1,2,\cdots. \tag{1.3}$$

Пусть далее $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{10H}, \tag{1.4}$$

где H — число, фигурирующее в условии (4).

Пользуясь условиями (4) и (6), натуральные числа i_1 и n_1 выберем настолько большими, чтобы выполнялись условия

$$\left|\sum_{j=1}^{n_1} b_{i,j} - 1\right| < \varepsilon_1, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=n_1+1}^{\infty} |b_{ij}| < \varepsilon_1, \text{ при } i \leqslant i_1. \tag{1.6}$$

Пусть $j_1 < j_2 < \cdots < j_{\tau_1} \leqslant n_1$ — те натуральные числа, для которых

$$b_{i_1 j_k} \neq 0, \; k = 1, 2, \cdots, \tau_1. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$\Delta_k = \left(\sum_{l=1}^{k-1} \frac{|b_{i_1 j_l}|}{H}, \; \sum_{l=1}^{k} \frac{|b_{i_1 j_l}|}{H}\right) (k = 1, \cdots, \tau_1) \tag{1.8}$$

(при $k=1$ сумма $\sum_{l=1}^{k-1} \frac{|b_{i_1 j_l}|}{H}$ равна нулю)

$$\left.\begin{array}{l} f_l(x) \equiv 0 \text{ при } l \leqslant n_1, \; l \neq j_1, j_2, \cdots, j_{\tau_1}, \; x \in [0,1] \\ f_{j_k}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|b_{i j_k}|} \text{ при } x \in \Delta_k \\ \quad 0 \text{ при } x \in [0,1] \setminus \Delta_k \end{cases} \\ \quad (k = 1, 2, \cdots, \tau_1) \\ f_{n_1+1}(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in [0,1] \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

$$F_1 = \left\{ x: \left| \sum_{j=1}^{n_1} b_{i,j} f_j(x) \right| = 1 \right\}. \tag{1.10}$$

Отсюда, из (4), (1.5), (1.7), (1.8) и (1.9) имеем

$$\text{mes } E_1 > \frac{1-\varepsilon_1}{H}$$

и

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n_1} b_{i,j} f_j(x) \right|^p dx \geqslant \int_{E_1} \left| \sum_{j=1}^{n_1+1} b_{i,j} f_j(x) \right|^p dx > \frac{1-\varepsilon_1}{H}.$$

Предположим, что определены числа i_q, n_q, функции $f_1(x), \cdots, f_{n_1}(x), \cdots \cdots, f_{n_{q-1}+1}(x), \cdots, f_{n_q}(x), f_{n_q+1}(x)$ и множества $E_1, E_2, \cdots, E_q$.

Пользуясь условиями (4), (5) и (6) натуральные числа i_{q+1} и n_{q+1} выберем настолько большими, чтобы имели место неравенства

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n_q+1} b_{ij} f_j(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{q} b_{i n_k+1} f_{n_k}(x) \right|^p dx < \varepsilon_{q+1} \text{ при } i \geqslant i_{q+1}, \tag{1.11}$$

$$\left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}} b_{i_{q+1}j}-1\right|<\varepsilon_{q+1}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=n_{q+1}+1}^{\infty} |b_{ij}|<\varepsilon_{q+1} \quad \text{при} \quad i\leqslant i_{q+1}. \tag{1.13}$$

Пусть $n_q+1<j_{\tau_q+1}<j_{\tau_q+2}<\cdots<j_{\tau_{q+1}}\leqslant n_{q+1}$ — все те натуральные числа, для которых

$$b_{i_{q+1}j_k}\neq 0,\ k=\tau_q+1,\cdots,\ \tau_{q+1}. \tag{1.14}$$

Обозначим

$$\Delta_k=\left(\sum_{l=\tau_q+1}^{k-1}\frac{|b_{i_{q+1}j_l}|}{H},\ \sum_{l=\tau_q+1}^{k}\frac{|b_{i_{q+1},j_l}|}{H}\right) \tag{1.15}$$

$$(k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1})$$

(при $k=\tau_q+1$ сумма $\sum\limits_{l=\tau_q+1}^{k-1}\frac{|b_{i_{q+1}j_l}|}{H}$ равна нулю)

$$\left.\begin{array}{l} f_j(x)\equiv 0 \ \text{при}\ n_q+1<j\leqslant n_{q+1},\ j\neq j_k,\ k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in[0,1] \\ f_{j_k}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|b_{i_{q+1}j_k}|} & \text{при}\quad x\in\Delta_k\\ 0 & \text{при}\quad x\in[0,1]\setminus\Delta_k\end{cases} \\ \qquad (k=\tau_q+1,\cdots,\tau_{q+1}) \\ f_{n_{q+1}+1}(x)\equiv 0 \quad \text{при}\ x\in[0,1] \end{array}\right| \tag{1.16}$$

и

$$E_{q+1}=\left\{x:\left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}} b_{i_{q+1}j}f_j(x)\right|=1\right\}. \tag{1.17}$$

Отсюда, учитывая (4), (1.12), (1.14), (1.15) и (1.16) имеем

$$\operatorname{mes} E_{q+1}>\frac{1-\varepsilon_{q+1}}{H} \tag{1.18}$$

и

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}} b_{i_{q+1}j}f_j(x)\right|^p dx\geqslant\int_{E_{q+1}}\left|\sum_{j=n_q+2}^{n_{q+1}+1} b_{i_{q+1}j}f_j(x)\right|^p dx>$$

$$>\frac{1-\varepsilon_{q+1}}{H}. \tag{1.19}$$

Продолжая вышеуказанный процесс бесконечно, мы определим последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\cdots, \tag{1.20}$$

определенных равенствами (1.9) и (1.16), натуральные числа $i_1 < i_2 < \cdots < i_q < \cdots$; $n_1 < n_2 < \cdots < n_q < \cdots$ и множества $E_1, E_2, \cdots, E_q, \cdots$, которые удовлетворяют условиям (1.11), (1.13) и (1.19).

Докажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} f_j(x), \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1.21}$$

сходится в метрике $L_p[0,1]$.

Так как в силу (1.15) и (1.16) имеем

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{H}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

то учитывая также условия (4) (см. введение), получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 |b_{ij}|\, |f_j(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}| \to \infty, \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{1.22}$$

Таким образом, ряды (1.21) сходятся в метрике $L_p[0,1]$, а следовательно, сходятся также в метрике $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$.

Используя лемму 1, с помощью матрицы (1.1) построим линейный регулярный метод суммирования

$$T = \|a_{ij}\| \tag{1.23}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{1.24}$$

по системе $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющие требованиям теоремы 1.

Сначала покажем, что последовательность $\{f_k(x)\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |f_n(x)|^p\, dx = 0, \quad 0 < p < 1, \tag{1.25}$$

$$\lim_{i \to \infty} \sup \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} f_j(x) \right|^p dx > 0. \tag{1.26}$$

Из (1.15) и (1.16), предполагая, что $n_q + 1 < n \leqslant n_{q+1}$, имеем

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{|b_{i_{k+1} n}|^p} \cdot \dfrac{|b_{i_{k+1} n}|}{H} & \text{при } n = j_{\tau_{k+1}}, \cdots, j_{\tau_{k+1}},\ k = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 \text{ — для остальных } n, & n_k < n \leqslant n_{k+1}. \end{cases}$$

Отсюда и из (1.2) вытекает (1.25).

Проверим выполнение условия (1.26)

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx \geqslant \int_0^1 \left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx -$$

$$-\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx - \int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx. \qquad (1.27)$$

Из (1.13) и (1.16) мы имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right| dx < \frac{\varepsilon_q}{H}, \qquad (1.28)$$

следовательно, имея ввиду (1.4), возьмем q_0 настолько большим, чтобы

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_k+1}^{\infty} b_{i_k j} f_j(x)\right|^p dx < \frac{1}{4H}, \quad q > q_0. \qquad (1.29)$$

Таким образом, из (1.27), (1.11), (1.19) и (1.29) будем иметь

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx > \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \varepsilon_q - \frac{1}{4H}, \quad q > q_0. \qquad (1.30)$$

Отсюда, так как $\varepsilon_q \to 0$, вытекает (1.26).

Теперь приступим к построению матрицы (1.23) и ряда (1.24). В формулировке леммы 1, полагая $\Phi(x) = f(x)$, $N = 1$, $q = p$, $\eta = \varepsilon_1$ определим полином

$$\sum_{k=1}^{m_1} c_k \varphi_k(x),$$

который удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{m_1} c_k \varphi_k(x) - f_1(x)\right|^p dx < \varepsilon_1, \qquad (1.31)$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\right|^p dx \leqslant \varepsilon_1 + \int_0^1 |f_1(x)|^p dx, \qquad (1.32)$$

где $1 \leqslant n \leqslant m_1$.

Положим

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \cdots, m_1 - 1; \ i = 1, 2, \cdots,$$
$$a_{i m_1} = b_{i1}, \ i = 1, 2, \cdots. \qquad (1.33)$$

Предположим, что определены полином $\sum_{k=1}^{m_l} c_k \varphi_k(x)$ и числа a_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, m_l$; $i = 1, 2, \cdots$. В формулировке леммы, полагая $\Phi(x) =$

$= f_{l+1}(x) - \sum\limits_{k=1}^{m_l} c_k \varphi_k(x)$, $N = m_l + 1$, $q = p$, $\eta = \varepsilon_{l+1}$, определим полином

$$\sum_{k=m_l+1}^{m_{l+1}} c_k \varphi_k(x)$$

так, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_{l+1}} c_k \varphi_k(x) - f_{l+1}(x) \right|^p dx < \varepsilon_{l+1}, \tag{1.34}$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=m_l+1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \leqslant \varepsilon_{l+1} + \int_0^1 \left| f_{l+1}(x) - \sum_{k=1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx, \tag{1.35}$$

где $m_l + 1 \leqslant n \leqslant m_l + 1$.

Положим

$$a_{ij} = 0 \text{ при } j = m_l + 1, \cdots, m_{l+1} - 1; \ i = 1, 2, \cdots,$$
$$a_{i m_{l+1}} = b_{i\, l+1}, \ i = 1, 2, \cdots. \tag{1.36}$$

Продолжая вышеуказанный процесс бесконечно, мы определим матрицу (1.23) и ряд (1.24). Теперь докажем, что они удовлетворяют всем требованиям теоремы 1. Требование 3) выполнено, в силу (1.33) и (1.36). Проверим выполнение условий 1) и 2) теоремы 1.

Пусть n — произвольное натуральное число и r выбрано так, что $m_r < n \leqslant m_{r+1}$.

Имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \leqslant \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_r} c_k \varphi_k(x) - f_r(x) \right|^p dx +$$
$$+ \int_0^1 \left| \sum_{k=m_r+1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx + \int_0^1 |f_r(x)|^p dx. \tag{1.37}$$

Из (1.35) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=m_r+1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \leqslant \varepsilon_{\eta+1} + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_r} c_k \varphi_k(x) - f_{r+1}(x) \right|^p dx \leqslant \tag{1.38}$$
$$\leqslant \varepsilon_{r+1} + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m_r} c_k \varphi_k(x) - f_r(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| f_r(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| f_{r+1}(x) \right|^p dx.$$

Учитывая (1.37), (1.34), (1.38), (1.25) и (1.4), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right|^p dx=0. \tag{1.39}$$

Таким образом, условие 1) теоремы 1 выполнено.

Прежде чем проверить условие 2) покажем, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}S_j(x),\ i=1,2,\cdots \tag{1.40}$$

сходятся в метрике L_p [0,1].

Учитывая (1.36), достаточно доказать, что

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}S_{m_j}(x)\right|^p dx\to 0 \text{ при } N>n\to\infty,\ i=1,2,\cdots.$$

Из (1.34) имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}S_{m_j}(x)\right|^p dx\leqslant\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}\left(S_{m_j}(x)-f_j(x)\right)\right|^p dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}f_j(x)\right|^p dx\leqslant\sum_{j=n}^{N}|b_{ij}|^p\cdot\int_0^1|S_{m_j}(x)-f_j(x)|^p dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}f_j(x)\right|^p dx\leqslant\sum_{j=n}^{N}|b_{ij}|^p\cdot\varepsilon_j+\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}f_j(x)\right|^p dx.$$

Отсюда, из (1.4) и из того факта, что ряд (1.21) сходится в метрике L_p [0,1], вытекает

$$\int_0^1\left|\sum_{j=n}^{N} b_{ij}S_{m_j}(x)\right|^p dx\to 0, \text{ при } N>n\to\infty.$$

Учитывая (1.36), можем написать

$$\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{i_q j}S_j(x)\right|^p dx=\int_0^1\left|\sum_{r=1}^{\infty} b_{i_q r}S_{m_r}(x)\right|^p dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1\left|\sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q r}S_{m_r}(x)\right|^p dx-\int_0^1\left|\sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q r}S_{m_r}(x)\right|^p dx- \tag{1.41}$$

$$-\int_0^1\left|\sum_{r=n_q+1}^{\infty} b_{i_q r}S_{m_r}(x)\right|^p dx.$$

Из (1.19) и (1.34) имеем

$$\int_0^1 \Big|\sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r} S_{m_r}(x)\Big|^p dx \geqslant \int_0^1 \Big|\sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q r} f_r(x)\Big|^p dx -$$

$$- \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r}|^p \int_0^1 \big||S_{m_r}(x) - f_r(x)|^p dx > \frac{1-\varepsilon_k}{H} - \tag{1.42}$$

$$- \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r}|^p \varepsilon_r.$$

Далее из (1.11) и (1.34) получим

$$\int_0^1 \Big|\sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q r} S_{m_r}(x)\Big|^p dx \leqslant \sum_{r=1}^{n_{k-1}+1} |b_{i_k r}|^p \int_0^1 |S_{m_r}(x) - f_r(x)|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \Big\|\sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q r} f_r(x)\Big|^p dx < \sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r + \varepsilon_q, \tag{1.43}$$

а из (1.29) и (1.34) имеем

$$\int_0^1 \Big|\sum_{r=n_q+1}^{\infty} b_{i_q r} S_{m_r}(x)\Big|^p dx \leqslant \sum_{r=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p \int_0^1 |S_{m_n}(x) - f_r(x)|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \Big|\sum_{r=n_q+1}^{\infty} b_{i_q r} f_r(x)\Big|^p dx \leqslant \sum_{r=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p| \cdot \varepsilon_r + \frac{1}{4H}. \tag{1.44}$$

при $q \geqslant q_0$

Таким образом, из (1.41)—(1.44) получим

$$\int_0^1 \Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_{i_q j} S_j(x)\Big|^p dx > \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \sum_{r=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r -$$

$$- \sum_{r=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r - \varepsilon_q - \sum_{r=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r - \frac{1}{4H} =$$

$$= \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \varepsilon_q - \sum_{r=1}^{\infty} |b_{i_q r}|^p \cdot \varepsilon_r - \frac{1}{4H}, \quad q \geqslant q_0.$$

Из полученного неравенства вытекает, что T_0 — средние ряда (1.24) не сходятся к нулю в метрике $L_p[0,1]$.

Теперь докажем, что они не сходятся к нулю и по мере. Сначала покажем, что последовательность

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x) \right\}_{q=1}^{\infty} \tag{1.45}$$

не сходится к нулю по мере при $q \to \infty$.

Из (1.15), (1.16) и (1.13) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_j(x) \right| dx \leqslant \frac{1}{H} \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}| < \frac{\varepsilon_{q+1}}{H}. \tag{1.46}$$

Отсюда, из (1.11), (1.17), (1.18) получаем, что последовательность (1.45) не сходится к нулю по мере. С другой стороны из (1.36) и (1.34) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij} S_j(x) - b_{ij} f_j(x) \right|^p dx = \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} (S_{m_j}(x) - f_j(x) \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^p \cdot \varepsilon_j \leqslant \max_j |b_{ij}|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j. \tag{1.47}$$

Учитывая (1.2) и (1.4) получаем, что левая часть неравенства (1.47) сходится к нулю. Отсюда, учитывая, что последовательность (1.45) не сходится к нулю по мере, вытекает, что и T_0-средние ряда (1.24) не сходятся к нулю по мере, что и доказывает условие 2).

Таким образом теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим линейный регулярный метод суммирования (1.1) и последовательность функций (1.20), которые были определены выше равенствами (1.9) и (1.16). Возьмем следующую подпоследовательность последовательности (1.20):

$$\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty} \setminus \{f_{n_k+1}(x)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{2.1}$$

где функции расположены по их порядку в первоначальной системе (1.20).

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система в $L_2[0,1]$. С помощью леммы 1 определим последовательность полиномов

$$\left\{ \psi_l(x) = \sum_{t=m_{l-1}+1}^{m_l} c_t \varphi_t(x) \right\}, \; l \neq n_k + 1, \; k = 1, 2, \cdots; \; 1 \leqslant l < +\infty, \tag{2.2}$$

которые удовлетворяют условию

$$\int_0^1 \left| \sum_{t=m_{l-1}+1}^{m_l} c_t \varphi_t(x) - \left(f_l(x) - \sum_{t=1}^{m_{l-1}} c_t \varphi_t(x) \right) \right|^p dx < \varepsilon_l, \tag{2.3}$$

где $l \neq n_k + 1$, $k = 1, 2, \cdots$.

Пусть функции $\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ дополняют систему (2.2) до полной в $L_2[0,1]$ ортогональной системы.

Обозначим

$$\psi_{n_k+1}(x)=\theta_k(x),\ k=1,2,\cdots. \tag{2.4}$$

Таким образом, мы определим полную ортонормированную систему $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\|\psi_n(x)\|_2}\cdot\psi_n(x). \tag{2.5}$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Phi_k(x), \tag{2.6}$$

где

$$a_k=\begin{cases}\|\psi_k\|_2, & \text{если } k\neq n_i+1,\ i=1,2,\cdots\\ 0, & \text{если } k=n_i+1,\ i=1,2,\cdots.\end{cases} \tag{2.7}$$

Докажем, что ряд (2.6) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Проверим выполнение условия 1). Обозначим

$$n'=\begin{cases}n-1, & \text{если } n=n_k+1,\ k=1,2,\cdots,\\ n & \text{для остальных } n.\end{cases} \tag{2.8}$$

Отсюда, из (2.7), (2.3), (2.4) и (2.5) имеем

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\Phi_k(x)\right|^p dx=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n'}a_k\Phi_k(x)\right|^p dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n'}a_k\Phi_k(x)-f_{n'}(x)\right|^p dx+\int_0^1|f_{n'}(x)|^p\,dx< \tag{2.9}$$

$$<\varepsilon_{n'}+\int_0^1|f_{n'}(x)|^p\,dx.$$

Учитывая (2.8), (1.2), (1.4) и определение функции (1.20), из неравенства (2.9) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\Phi_k(x)\right|^p dx=0. \tag{2.10}$$

Проверим выполнение условия 2). Сначала докажем, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}S_j(x),\ i=1,2,\cdots,\ \text{где } S_j(x)=\sum_{k=1}^{j}a_k\Phi_k(x), \tag{2.11}$$

сходятся в метрике $L_p[0,1]$. Учитывая (2.7), (2.8) и (2.3), имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n}^m b_{ij} S_j(x)\right|^p dx \leqslant \int_0^1 \left|\sum_{j=n}^m b_{ij}(S_{j'}(x) - f_{j'}(x)\right|^p dx +$$

$$+ \int_0^1 \left|\sum_{j=n}^m b_{ij} f_{j'}(x)\right|^p dx < 2\sum_{j=n}^m |b_{ij}|^p \cdot \varepsilon_{j'} + \tag{2.12}$$

$$+ \int_0^1 \left|\sum_{j=n}^m b_{ij} f_{j'}(x)\right|^p dx.$$

Так как в силу (1.15) и (1.16) имеем

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{H},\ n=1, 2, \cdots, \tag{2.13}$$

то учитывая также условие (4) (см. введение), получаем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n}^m b_{ij} f_{j'}(x)\right| dx \leqslant \frac{1}{H}\sum_{j=n}^m |b_{ij}| \to 0 \text{ при } n,\ m \to \infty. \tag{2.14}$$

Таким образом, из (2.12), учитывая (1.4) и (2.14), получаем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n}^m b_{ij} S_j(x)\right|^p dx \to 0, \text{ при } n,\ m \to \infty. \tag{2.15}$$

Далее имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^\infty b_{i_q} S_j(x)\right|^p dx \geqslant \int_0^1 \left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q j} S_j(x)\right|^p dx -$$

$$- \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i j_q} S_j(x)\right|^p dx - \int_0^1 \left|\sum_{j=n_q+1}^\infty b_{i_q j} S_j(x)\right|^p dx. \tag{2.16}$$

Из (2.3) и (1.19) имеем

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q j} S_j(x)\right|^p dx \geqslant \int_0^1 \left|\sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} b_{i_q j} f_j(x)\right|^p dx -$$

$$- \sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q j}|^p \int_0^1 |S_j(x) - f_j(x)|^p\, dx \geqslant \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q j}|^p\, \varepsilon_j. \tag{2.17}$$

Из (2.3), (2.7), (2.8) и (1.11) следует

$$\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q j} S_j(x)\right|^p dx \leqslant \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q j}(S_{j'}(x) - f_{j'}(x)\right|^p dx +$$

$$+\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} + \varepsilon_q. \tag{2.18}$$

Из (2.3), (2.7) и (2.8) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} S_j(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}|^p \int_0^1 |S_{j'}(x) - f_{j'}(x)|^p dx +$$

$$+\int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right|^p dx \leqslant \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} +$$

$$+\int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right|^p dx. \tag{2.19}$$

Из (2.16)—(2.19) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{i_q j} S_j(x) \right|^p dx \geqslant \frac{1-\varepsilon_q}{H} - \sum_{j=n_{q-1}+2}^{n_q} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{n_{q-1}+1} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} - \varepsilon_q - \sum_{j=n_q+1}^{\infty} |b_{i_q j}|^p \cdot \varepsilon_{j'} - \tag{2.20}$$

$$- \int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right|^p dx \geqslant \frac{1-\varepsilon_q}{H} -$$

$$- \max |b_{i_q j}|^p \cdot 5 \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j - \int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right|^p dx.$$

С другой стороны, из (1.13), (1.15), (1.16) получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right| dx \to 0 \text{ при } q \to \infty, \tag{2.21}$$

следовательно

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=n_q+1}^{\infty} b_{i_q j} f_{j'}(x) \right|^p dx \to 0 \text{ при } q \to \infty. \tag{2.22}$$

Отсюда, учитывая (1.3) и (1.4), из (2.20) и (2.22) получаем, что T_0-средние ряда (2.6) че сходятся к нулю в метрике $L_p\,[0,1]$. Имея ввиду (1.11), (1.17), (1.18) и (2.21), тем же методом, что и в теореме 1, нетрудно показать, что T_0-средние ряда (2.6) не сходятся к нулю и по мере.

Теорема 2 доказана.

§ 3. Сходимость и суммируемость рядов по системе Хаара

В этом параграфе рассматривается следующий конечнострочный линейный регулярный метод суммирования

$$T=\|a_{mk}\|, \tag{3.1}$$

где

$$a_{1k}=\begin{cases}1 \text{ при } k=1\\ 0 \text{ при } k\neq 1,\end{cases}$$

$$a_{2k}=\begin{cases}1 \text{ при } k=2\\ 0 \text{ при } k\neq 2,\end{cases}$$

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n-2}} \text{ при } 2^{n-2}+1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}\\ 0 - \text{при остальных } k\end{cases}$$

$$(n=3,\ 4,\cdots).$$

для которого доказывается следующая

Теорема 3. *Ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\chi_k(x)$$

по системе Хаара и последовательности

$$\{A_n(x,\ T)\},\quad n=1,\ 2,\cdots$$

T-средних этих рядов, определенных матрицей (3.1), *сходятся почти всюду (по мере) на отрезке* [0,1] *одновременно к одной и той же функции.*

Доказательство. Рассмотрим линейный регулярный метод суммирования, определяемый матрицей (3.1), и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\chi_k(x) \tag{3.2}$$

по системе Хаара.

Пусть

$$A_n(x,\ T)=\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\,S_m(x),\quad n=1,\ 2,\cdots, \tag{3.3}$$

где $S_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m} c_k\chi_k(x)$ — последовательность T-средних ряда (3.2), определяемых матрицей (3.1).

Сначала покажем, что почти всюду сходимость ряда (3.2) и последовательности (3.3) эквивалентны.

Так как матрица (3.1) регулярна, то из сходимости почти всюду ряда (3.2) вытекает сходимость почти всюду последовательности (3.3).

Теперь покажем, что из сходимости почти всюду на отрезке [0,1] последовательности (3.3), вытекает сходимость почти всюду на отрезке [0,1] ряда (3.2).

Представим $A_n(x, T)$ в следующем виде:

$$A_n(x, T) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) = S_{2^{n-2}}(x) + c_{2^{n-2}+1} \chi_{2^{n-2}+1}(x) +$$

$$+ \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}} c_{2^{n-2}+2} \chi_{2^{n-2}+2}(x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} c_{2^{n-1}} \chi_{2^{n-1}}(x). \tag{3.4}$$

Обозначим

$$B_n(x) = A_n(x, T) - S_{2^{n-2}}(x) = c_{2^{n-2}+1} \chi_{2^{n-2}+1}(x) +$$

$$+ \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}} c_{2^{n-2}+2} \chi_{2^{n-2}+2}(x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} c_{2^{n-1}} \chi_{2^{n-1}}(x). \tag{3.5}$$

Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } [0,1], \tag{3.6}$$

если последовательность (3.3) почти всюду сходится.

Предположим противное. Пусть

$$E\subset[0,1], \ \text{mes } E > 0,$$

и на множестве E последовательность $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю.

Обозначим

$$E_k = \left\{x\colon x\in E, \ \limsup_{n\to\infty} |B_n(x)| > \frac{1}{k}\right\}. \tag{3.7}$$

Ясно, что

$$E_1\subset E_2 \subset\cdots\subset E_k \subset E_{k+1}\subset\cdots; \ \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \text{mes } E_k = \text{mes } E.$$

Следовательно, существует натуральное число k_0, для которого

$$\text{mes } E_{k_0} > 0. \tag{3.8}$$

Так как последовательность

$$A_n(x, T) - A_{n-1}(x, T), \ n=1, 2, \cdots \tag{3.9}$$

почти всюду сходится к нулю, то по теореме Егорова существует множество G,

$$G\subset E_{k_0}, \ \text{mes } G > 0,$$

на котором последовательность (3.9) равномерно сходится к нулю.

Пусть x_0, $x_0\in G$ — точка плотности множества G, где

$$x_0 \neq \frac{l}{2^m}, \ m=1, 2, \cdots; \ l=1, 2, \cdots.$$

Пусть далее $B_{n_l}(x)$—подпоследовательность последовательности (3.5), удовлетворяющая условию

$$|B_{n_i}(x_0)| > \frac{1}{k_0}. \tag{3.10}$$

Из (3.10) вытекает существование номера $n(i)$, $2^{n_i-2} < n \leqslant 2^{n_i-1}$, для которого

$$|c_{n(i)} \cdot \chi_{n(i)}(x)| > \frac{1}{k_0}.$$

С другой стороны, из определения системы Хаара следует, что

$$|B_{n_i}(x)| > \frac{1}{k_0} \tag{3.11}$$

всюду на множестве $\{x\colon \chi_{n(i)}(x) \neq 0\}$.

Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{k_0}$. Пусть натуральное число N настолько велико, что

$$|A_{n_i}(x, T) - A_{n_i-1}(x, T)| < \varepsilon \text{ при } i \geqslant N,\ x \in G. \tag{3.12}$$

Можно считать также, что

$$\frac{\operatorname{mes} \Delta_{n(i)} \cap G}{\operatorname{mes} \Delta_{n(i)}} > \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad i > N, \tag{3.13}$$

где $\Delta_{n(i)}$ — интервал, вне которого $\chi_{n(i)}(x) = 0$. Из (3.13) будем иметь

$$\{x\colon \chi_{n(i)}(x) > 0\} \cap G \neq \varnothing \text{ и } \{x\colon \chi_{n(i)}(x) < 0\} \cap G \neq \varnothing,\ i > N. \tag{3.14}$$

Легко видеть, что

$$|A_{n_i}(x, T) - A_{n_i-1}(x, T)| = |B_{n_i}(x) + \frac{1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-3}+2} \chi_{2^{n_i-3}+2}(x) +$$

$$+ \cdots + \frac{2^{n_i-3}-1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-2}} \chi_{2^{n_i-2}}(x)|. \tag{3.15}$$

Из (3.11) и (3.14) при $i > N$ имеем

$$\left\{x\colon B_{n_i}(x) > \frac{1}{k_0}\right\} \cap G \neq \varnothing$$

и

$$\left\{x\colon B_{n_i}(x) < -\frac{1}{k_0}\right\} \cap G \neq \varnothing.$$

Отсюда и из определения функций Хаара получаем

$$\left\{x\colon \left| B_{n_i}(x) + \frac{1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-3}+2} \chi_{2^{n_i-3}+2}(x) + \cdots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2^{n_i-3}-1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-2}} \chi_{2^{n_i-2}}(x) \right| > \frac{1}{k_0}\right\} \cap G \neq \varnothing,$$

что в силу (3.15) и противоречит условию (3.12). Теперь докажем, что сходимость по мере ряда (3.2) и последовательности (3.3) эквивалентны.

Так как из сходимости по мере ряда (3.2) вытекает сходимость по мере к нулю последовательности

$$c_{2^n+1}\chi_{2^n+1}(x)+\cdots+c_{2^{n+1}}\chi_{2^{n+1}}(x),\quad n=1,2,\cdots,$$

а, следовательно, и последовательности $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. 3.5)), то последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере к $f(x)$, если ряд (3.2) сходится по мере к $f(x)$.

Остается доказать, что из сходимости по мере последовательности (3.3) вытекает сходимость по мере ряда (3.2).

Предположим, что последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ по мере сходится к $f(x)$. Так как

$$A_n(x, T)=S_{2^{n-2}}(x)+B_n(x), \tag{3.16}$$

то для того чтобы доказать сходимость по мере к $f(x)$ ряда (3.2) достаточно показать, что последовательность $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ по мере сходится к нулю.

Предположим $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю по мере, т. е. существуют положительные числа ε_0, η_0, для которых можно указать последовательность натуральных чисел $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{mes}\{x: |B_{n_l}(x)|>\eta_0\}>\varepsilon_0. \tag{3.17}$$

Учитывая, что последовательность $\{A_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере, можно указать число $N>0$ такое, что

$$\operatorname{mes}\{x: |A_n(x, T)-A_{n-1}(x, T)|>\eta_0\}<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{3.18}$$

при $n>N$. Пусть $n_l>N$, тогда

$$\operatorname{mes}\{x: |A_{n_l}(x, T)-A_{n_l-1}(x, T)|>\eta_0\}>\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot \tag{3.19}$$

Ясно, что

$$|A_{n_l}(x, T)-A_{n_l-1}(x, T)|=|B_{n_l}(x)+$$

$$+\frac{1}{2^{n_l-3}}c_{2^{n_l-3}+2}\chi_{2^{n_l-3}+2}(x)+\cdots+\frac{2^{n_l-3}-1}{2^{n_l-3}}c_{2^{n_l-2}}\chi_{2^{n_l-2}}(x)|. \tag{3.20}$$

Из соотношения (3.17) следует, что существует n, для которого имеет место

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{2^{n_l-1}-n+1}{2^{n_l-2}}c_n\chi_n(x)\right|>\eta_0,\ 2^{n_l-2}<n\leqslant 2^{n_l-1}. \tag{3.21}$$

Пусть $\chi^{(1)}(x), \chi^{(2)}(x), \cdots, \chi^{(k)}(x)$ есть множество всех функций, удовлетворяющих соотношению (3.21).

Обозначим

$$e_i^+ = \{x\colon c_i \chi^i(x) > 0\} \text{ и } e_i^- = \{x\colon c_i \chi^i(x) < 0\}. \tag{3.22}$$

$$1 \leqslant i \leqslant k.$$

Так как

$$\frac{1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-3}+2} \chi_{2^{n_i-3}+2}(x) + \cdots + \frac{2^{n_i-3}-1}{2^{n_i-3}} c_{2^{n_i-2}} \chi_{2^{n_i-2}}(x) = \text{const}$$

при $x \in e_i^+ \cup e_i^-$, то для произвольного числа i, $i = 1, 2, \cdots, k$, из соотношения (3.20) и (3.21) следует, что

$$|A_{n_i}(x, T) - A_{n_i-1}(x, T)| > \eta_0, \tag{3.23}$$

хотя бы на одном из интервалов e_i^+ и e_i^-. Ясно, что

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{mes} e_i^+ = \operatorname{mes} e_i^-, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\ &(e_i^+ \cup e_i^-) \cap (e_j^+ \cup e_j^-) = \varnothing \quad i \neq j, \; i, j = 1, 2, \cdots, k \\ &\operatorname{mes} \bigcup_{i=1}^{k} (e_i^+ \cup e_i^-) = \operatorname{mes} \{x\colon |B_{n_i}(x)| > \eta_0\} < \varepsilon_0 \end{aligned}\right| . \tag{3.24}$$

Из (3.17), (3.23) и (3.24) следует, что

$$\operatorname{mes} \{x\colon |A_{n_i}(x, T) - A_{n_i-1}(x, T)| > \eta_0\} > \frac{\varepsilon_0}{2},$$

что противоречит соотношению (3.19). Полученное противоречие показывает, что последовательность $\{B_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ по мере сходится к нулю, чем и завершается доказательство теоремы 3.

Институт математики
АН Армянской ССР
Поступила 29.I.1974

Ն. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. Ընդհանուր օրթոգոնալ շարքերի գումարման և զուգամիտության փոխադարձ կապի մասին (*ամփոփում*)

Ցանկացած լրիվ օրթոգոնալ սիստեմով կառուցվում է շարք, որը զուգամիտում է, ինչպես նաև գումարվում է (L_p *մետրիկայում*, $0 < p < 1$) *մի որոշ մեթոդով, բայց տարբեր ֆունկցիաների։*

N. O. SINANIAN. *On the interconnection between the convergence and summability of general orthogonal series* (summary)

By every complete orthonormal system a series is constructed, which both converges and sums (in L_p, $0 < p < 1$ matrics) according to some method, but to different sums.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* Представление функций классов L_p, $0 < p < 1$ ортогональными рядами, Acta Mathematica Academiae Scientarum, Hungarical, Tom. (1—2), 1970, 1—9.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

Р. З. МКРТЧЯН

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

При исследовании спектра самосопряженного оператора возникает вопрос (см. замечание к предложению 6 работы [1]): существует ли строго возрастающая, абсолютно непрерывная функция, которая в каждой точке обладает конечной или бесконечной производной и такая, что ее производная равна бесконечности на множестве, порция которого на сколь угодно малом отрезке имеет мощность континуума?

Надо отметить, что были известны только примеры функций, которые обладали перечисленными свойствами, за исключением абсолютной непрерывности [2]. В этой работе строится абсолютно непрерывная функция (с явным аналитическим выражением), которая имеет вышеуказанные свойства.

Кроме того, с помощью этой функции строится другой пример абсолютно непрерывной функции, который является обобщением результата, содержащегося в работах [3, 4].

Как известно [3, 4], существует функция $f(t)$ со всюду определенной конечной производной, которая однако нигде не монотонна, в том смысле, что на сколь угодно малом интервале ее производная $f'(t)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Возникает вопрос: может ли функция $f(t)$ с такими свойствами быть к тому же абсолютно непрерывной?

В работе строится пример абсолютно непрерывной функции с указанными свойствами, которая имеет достаточно простую структуру. При этом оказывается, что построенная функция обладает даже ограниченной производной и явным аналитическим выражением на отрезке [0,1].

1°. Рассмотрим на отрезке [0,1] точки вида $\frac{p}{2^{2k}}$, где $p=1, 3, 5, \cdots, 2^{2k}-1$, а $k=1, 2, 3, \cdots$, и занумеруем их в последовательность $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ таким образом, чтобы индекс точки $x_n=\frac{p}{2^{2k}}$ был больше индекса точки $x_m=\frac{p'}{2^{2k'}}$ при $k>k'$, а если $k=k'$, то при $p>p'$. Итак, значению $k=1$ будут соответствовать две точки $x_1=\frac{1}{2^2}$ и $x_2=\frac{3}{2^2}$; значению $k=2$ будут соответствовать восемь точек $x_3=\frac{1}{2^4}$, $x_4=\frac{3}{2^4}, \cdots, x_{10}=\frac{15}{2^4}$ и т. д. Если теперь допустить, что

$x_1, x_2, \cdots, x_r$ — все те точки, которые соответствуют значениям $k=1, 2, 3, \cdots, (l-1)$, то значению $k=l$, очевидно, будут соответствовать точки

$$x_{r+1}=\frac{1}{2^{2l}},\ x_{r+2}=\frac{3}{2^{2l}}, \cdots, x_{r+m}=\frac{2^{2l}-1}{2^{2l}},$$

где $m=2^{2l-1}$.

На отрезке [0,1] возьмем функцию $F_n(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{dx}{|x-x_n|^{1/2}}$, которая равна $\sqrt{x_n}+\sqrt{t-x_n}$ при $t>x_n$ и равна $\sqrt{x_n}-\sqrt{x_n-t}$ при $t\leqslant x_n$. Очевидно, что функция $F_n(t)$ монотонно возрастающая, всюду дифференцируемая, абсолютно непрерывная и, кроме того

$$F'_n(x_n)=+\infty,\ Var\, F_n(t)=A_n,\quad \text{где}\quad A_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{dx}{|x-x_n|^{1/2}}.$$

Рассмотрим функцию $F(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k F_k(t)$, где $\varepsilon_k=\frac{1}{5^k}$, которая монотонна и абсолютно непрерывна. В самом деле, монотонность функции $F(t)$ очевидна, а абсолютная непрерывность вытекает из соотношений

$$\text{mes}\, F(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\, \text{mes}\, F_k(M)\quad \text{и}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k \underset{[0,\,1]}{\text{Var}}\, F_k(t)<+\infty,$$

где M — произвольное измеримое множество, а $F(M)$ — образ множества M, поскольку для произвольного множества M лебеговской меры нуль будем иметь $\text{mes}\, F(M)=0$, а это значит, что $F(t)$ — абсолютно непрерывная функция.

Нетрудно видеть, что функция $F(t)$ имеет следующий вид:

$$F(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\sqrt{x_k}-\sum_{x_k>t}\varepsilon_k\sqrt{x_k-t}+\sum_{x_k<t}\varepsilon_k\sqrt{t-x_k}.$$

Докажем, что функция $F(t)$ в каждой точке имеет производную. Сперва рассмотрим точки x_k, $k=1,2,3,\cdots$, в которых $F'(x_k)=+\infty$ $k=1, 2, 3,\cdots$, потому что $F'_k(x_k)=+\infty$. Далее возьмем произвольную точку $t\neq x_k$, $k=1, 2,\cdots$, и для каждого положительного h составим отношение

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=$$

$$=\frac{1}{h}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k\sqrt{x_k}-\sum_{x_k>t+h}\varepsilon_k\sqrt{x_k-t-h}+\sum_{x_k<t+h}\varepsilon_k\sqrt{t+h-x_k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\sqrt{x_k}+\sum_{x_k>t}\varepsilon_k\sqrt{x_k-t}-\sum_{x_k<t}\varepsilon_k\sqrt{t-x_k})=$$

$$=\frac{\sum\limits_{x_k<t}\varepsilon_k(\sqrt{t+h-x_k}-\sqrt{t-x_k})}{h}+\frac{\sum\limits_{x_k>t+h}\varepsilon_k(\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h})}{h}+$$

$$+\frac{\sum\limits_{t<x_k<t+h}\varepsilon_k\sqrt{t+h-x_k}+\sum\limits_{t<x_k<t+h}\varepsilon_k\sqrt{x_k-t}}{h}. \qquad (1)$$

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{h\to+0}\frac{\sum\limits_{x_k<t}\varepsilon_k(\sqrt{t+h-x_k}-\sqrt{t-x_k})}{h}=$$

$$=\lim_{h\to+0}\sum_{x_k<t}\varepsilon_k\frac{\sqrt{t+h-x_k}-\sqrt{t-x_k}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to+0}\sum_{x_k<t}\varepsilon_k\frac{1}{\sqrt{t+h-x_k}+\sqrt{t-x_k}};$$

поскольку каждый член в ряде $\sum\limits_{x_k<t}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{t+h-x_k}+\sqrt{t-x_k}}$ монотонно возрастает при $h\to+0$, то этот ряд монотонно возрастает и имеет место следующее равенство:

$$\lim_{h\to+0}\frac{\sum\limits_{x_k<t}\varepsilon_k(\sqrt{t+h-x_k}-\sqrt{t-x_k})}{h}=\frac{1}{2}\sum_{x_k<t}\varepsilon_k\frac{1}{\sqrt{t-x_k}}. \qquad (2)$$

Аналогично можно показать, что для любого положительного числа δ верно и следующее равенство:

$$\lim_{h\to+0}\sum_{x_k>t+\delta}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}=\frac{1}{2}\sum_{x_k>t+\delta}\varepsilon_k\frac{1}{\sqrt{x_k-t}}. \qquad (3)$$

Для второго члена правой части равенства (1) можем написать следующие неравенства:

$$\frac{1}{2}\sum_{x_k>t+h}\varepsilon_k\frac{1}{\sqrt{x_k-t}}<\sum_{x_k>t+h}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}<$$

$$<\sum_{x_k>t+h}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}, \qquad (4)$$

потому что для каждого $x_k>t+h$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\sqrt{x_k-t}}<\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}<\frac{1}{\sqrt{x_k-t}}. \qquad (5)$$

Если $h\to+0$, то первый и третий члены неравенства (4) стремятся соответственно к $\frac{1}{2}\sum\limits_{x_k>t}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$ и $\sum\limits_{x_k>t}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$.

Докажем теперь, что имеет место следующее равенство:

$$\lim_{h\to+0}\sum_{x_k>t+h}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}=\frac{A(t)}{2},\ \text{где}\ A(t)=\sum_{x_k>t}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}. \tag{6}$$

Если $A(t)=+\infty$, то очевидно, что из неравенства (4) следует равенство (6). Если же $A(t)<+\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\sum_{t+\delta>x_k>t}\varepsilon_k\cdot\frac{1}{\sqrt{x_k-t}}<\varepsilon\ \text{и}\ A(t)>\sum_{x_k>t+\delta}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}>A-\varepsilon. \tag{7}$$

В самом деле, так как каждый член в ряде $\sum\limits_{x_k>t}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$ положителен, то этот ряд можно переписать следующим образом: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i}-t}}$, где $x_{k_i}>t$ и $k_i>k_{i-1}$ для каждого $i=1,2,\cdots$. Далее, для $\varepsilon>0$ существует номер k_{i_0} такой, что $\sum\limits_{i=i_0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i}-t}}<\varepsilon$. Из построения точек x_k вытекает, что если взять $\delta<\frac{x_{k_{i_0}}-t}{2^{2k_{i_0}}}$, то из принадлежности x_{k_i} интервалу $t<x_{k_i}\leqslant t+\delta$ будем иметь $i>i_0$ и, следовательно,

$$\sum_{t+\delta>x_k>t}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}<\sum_{i=i_0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i}-t}}.$$

Равенство (3) и неравенства (5), (7) показывают, что при достаточно малом h_0 для всех h из интервала $h_0>h>0$ будем иметь

$$\sum_{x_k>t+h}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}=\sum_{t+h<x_k<t+\delta}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}+$$
$$+\sum_{x_k>t+\delta}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}<\sum_{t<x_k<t+\delta}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{x_k>t+\delta}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}+\varepsilon<2\varepsilon+\frac{A(t)}{2}.$$

Так как ε произвольно, то

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\sum_{x_k>t+h}\varepsilon_k\frac{\sqrt{x_k-t}-\sqrt{x_k-t-h}}{h}\leqslant\frac{A(t)}{2},$$

и поэтому, привлекая неравенство (4), убеждаемся в справедливости равенства (6).

Для третьего члена правой части равенства (1) можем написать следующие неравенства:

$$\frac{\sum\limits_{t<x_k<t+h} \varepsilon_k \sqrt{t+h-x_k} + \sum\limits_{t<x_k<t+h} \varepsilon_k \sqrt{x_k-t}}{h} < \frac{2 \sum\limits_{t<x_k<t+h} \varepsilon_k}{\sqrt{h}}.$$

Так как функция $F(t)$ абсолютно непрерывна, то функция $A(t) = \sum\limits_{x_k>t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$ почти везде конечна, поэтому из неравенства (7) имеем что величина $\sum\limits_{t<x_k<t+h} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}$ почти везде стремится к нулю при $h \to +0$, при таких t, для которых $A(t)$ конечна. Но с другой стороны

$$\sum_{t<x_k<t+h} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}} > \sum_{t<x_k<t+h} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{h}} = \frac{\sum\limits_{t<x_k<t+h} \varepsilon_k}{\sqrt{h}},$$

а это означает, что третий член правой части равенства (1) стремится к нулю для таких точек t, для которых $A(t)$ конечна.

Следовательно из равенств (1), (2) и (6) вытекает, что имеет место следующее равенство:

$$\lim_{h\to+0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{2}\left(\sum_{x_k<t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{t-x_k}} + \sum_{x_k>t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}\right). \tag{8}$$

Аналогичным образом можно получить равенство (8), когда h стремится к нулю, оставаясь меньше нуля.

Так как $F'(x_k) = +\infty$ при $k = 1, 2, \cdots$, то при любом t равенство (8) можно заменить следующим равенством:

$$F'(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{x_k<t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{t-x_k}} + \sum_{x_k>t} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-t}}\right). \tag{9}$$

Теперь рассмотрим точки вида $\frac{p}{2^{2k-1}}$, где $p=1, 3, 5, \cdots, 2^{2k}-1$, а $k=1, 2, 3, \cdots$, и занумеруем их в последовательность $y_1, y_2, \cdots, y_p, \cdots$ таким же образом, как это было сделано выше для точек $\{x_k\}$. Покажем, что для новых точек $\{y_p\}$ имеют место следующие неравенства:

$$F'(y_p) < +\infty, \quad p = 1, 2, 3, \cdots. \tag{10}$$

В самом деле,

$$F'(y_p) = \frac{1}{2}\left(\sum_{x_k<y_p} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{y_p-x_k}} + \sum_{x_k>y_p} \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{x_k-y_p}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{x_k<y_p} (1/5^k)/(1/2^{\max\{p,k\}}) + \sum_{x_k>y_p} (1/5^k)/(1/2^{\max\{p,k\}})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \frac{2^p}{5^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} < +\infty.$$

Аналогичным образом на отрезке [0,1] построим функцию

$$\tilde{F}(t)=\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p\sqrt{y_p}-\sum_{y_p>t}\varepsilon_p\sqrt{y_p-t}+\sum_{y_p<t}\varepsilon_p\sqrt{t-y_p},$$

монотонно возрастающую, абсолютно непрерывную и в каждой точке имеющую производные

$$\tilde{F}'(t)=\frac{1}{2}\left(\sum_{y_p<t}\frac{\varepsilon_p}{\sqrt{t-y_p}}+\sum_{y_p>t}\frac{\varepsilon_p}{\sqrt{y_p-t}}\right) \text{ и } \tilde{F}'(x_k)<+\infty,\ k=1,2,3\cdots. \tag{11}$$

Обозначим через

$$\Phi(t)=\int_0^t\frac{1}{F'(x)}\,dx \quad \text{и} \quad \tilde{\Phi}(t)=\int_0^t\frac{1}{\tilde{F}'(x)}\,dx.$$

Из равенств (9) и (11) вытекают неравенства

$$F'(t)>\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k \quad \text{и} \quad \tilde{F}'(t)>\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k. \tag{12}$$

Следовательно функции $\Phi(t)$ и $\tilde{\Phi}(t)$ абсолютно непрерывные и монотонно возрастающие. В самом деле, монотонность очевидна, а абсолютная непрерывность следует из неравенств (12).

Докажем, что в каждой точке производная $\Phi'(t)=\dfrac{1}{F'(t)}$ (аналогичным образом можно доказать, что и $\tilde{\Phi}'(t)=\dfrac{1}{\tilde{F}'(t)}$).

В самом деле, если $t=x_k$, $k=1,2,3,\cdots$, то имеет место

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_k+h)-\Phi(x_k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_k}^{x_k+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\int_{x_k}^{x_k+h}\frac{\sqrt{|t-x_k|}}{\varepsilon_k}\,dt=0.$$

Предположим, что в точке t_0 производная $F'(t_0)=+\infty$, тогда легко видеть, что существует последовательность точек x_{k_i}, $i=1,2,3,\cdots$, стремящихся к точке t_0 справа или слева, так что соответственно имеют место равенства

$$\sum_{(i)}\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{x_{k_i}-t_0}}=+\infty \quad \text{или} \quad \sum_{(i)}\frac{\varepsilon_{k_i}}{\sqrt{t_0-x_{k_i}}}=+\infty.$$

Не нарушая общности, предположим, что точки x_{k_i}, $i=1,2,3,\cdots$ стремятся к t_0 с правой стороны, тогда легко видеть, что для любого достаточно большого числа $A>0$ существует $h(A)>0$ такое, что при любом $t\in(t_0;\ t_0+h(A))$ имеет место неравенство $\sum\limits_{(l)}\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{|x_{k_l}-t|}}>A.$ Поэтому при положительном $h<h(A)$

$$\frac{\Phi(t_0+h)-\Phi(t_0)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{h}\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{\sum\limits_{(l)}\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t}}}\,dt\leqslant\frac{2}{h}\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{A}\,dt=\frac{2}{A},$$

отсюда и следует равенство

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Phi(t_0+h)-\Phi(t_0)}{h}=0. \qquad (13)$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{h\to-0}\frac{\Phi(t_0+h)-\Phi(t_0)}{h}=0.$$

Так как $\sum\limits_{(l)}\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t_0}}=+\infty$, то существует последовательность стремящихся к нулю положительных чисел δ_{k_l}, $i=1, 2,\cdots$, такая, что имеет место $\sum\limits_{(l)}\left(\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t_0}}-\delta_{k_i}\right)=+\infty$ или, можно сказать, существует последовательность точек $t_{k_l}<t_0$, $i=1, 2, 3,\cdots$, стремящихся к t_0 и $\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t_0}}-\delta_{k_l}=\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t_{k_l}}}$, $i=1, 2,\cdots$. Из соотношения $\sum\limits_{l}\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t_{k_l}}}=+\infty$ вытекает, что для любого числа $A>0$ существует номер $N(A)$ такой, что $\sum\limits_{l=1}^{N(A)}\frac{\varepsilon_{k_l}}{\sqrt{x_{k_l}-t_{k_l}}}>A$, следовательно, для любого отрицательного h, удовлетворяющего условиям $t_{k_l}<t_0+h$, $i=1, 2,\cdots, N(A)$, можем написать

$$\frac{\Phi(t_0+h)-\Phi(t_0)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt\leqslant\frac{2}{h}\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{A}\,dt=\frac{2}{A},$$

отсюда и из равенства (13) следует $\Phi'(t_0)=0$.

Предположим, что в точке t^* $F'(t^*)<+\infty$, тогда для каждого $\varepsilon_n>0$ существует окрестность $\Delta_n=(t^*-\delta_n;\ t^*+\delta_n)$, в которой функция $P_n(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{|t-x_k|}}$ непрерывна и значение функции $P_n(t^*)=$ $=F'(t^*)-\varepsilon_n^{''}$, где $0<\varepsilon_n^{''}\leqslant\varepsilon_n^{'}$.

Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при любом $|h|<\delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{F'(t^*)}-\varepsilon\leqslant\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt\leqslant\frac{1}{F'(t^*)}+\varepsilon. \tag{14}$$

В самом деле, легко видеть, что для функции $S_n(t)=P'(t)-P_n(t)$ в точке t^* справедливо равенство

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}S_n(t)\,dt=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}F'(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}P_n(t)\,dt\right)=$$

$$=F'(t^*)-P_n(t^*)=\varepsilon_n^{''}.$$

В силу непрерывности функции $F_n(t)$ в точке t^* для каждого $|h|<h_1(\varepsilon)$ имеем

$$\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt=\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}\frac{1}{P_n(t)+S_n(t)}\,dt\leqslant\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}\frac{1}{P_n(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{P_n(t^*)}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{F'(t^*)-\varepsilon_n^{''}}+\frac{\varepsilon}{2},$$

так как $\varepsilon_n^{''}$ достаточно мало при больших n, то получается неравенство

$$\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt\leqslant\frac{1}{F'(t^*)}+\varepsilon\quad\text{при}\quad|h|<h_1(\varepsilon). \tag{15}$$

Теперь докажем, что для достаточно малого $\varepsilon>0$ существует положительное число $h_2(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h}\frac{1}{F'(t)}\,dt\geqslant\frac{1}{F'(t^*)}-\varepsilon\ \text{при}\ |h|<h_2(\varepsilon). \tag{16}$$

В самом деле, так как $\varepsilon_n^{''}$ стремится к нулю и $F_n(t^*)$ стремится монотонно возрастая к числу $F'(t^*)>0$, когда n стремится к бесконечности, то для любого положительного $\varepsilon<[F'(t^*)]^2$ можно найти достаточно большой номер n_0 такой, что $0<\frac{2\varepsilon_{n_0}^{''}}{P_{n_0}^2(t^*)-\varepsilon}\leqslant\varepsilon$. С другой стороны, легко видеть, что существует столь малое положительное число $h_2(\varepsilon)$, что имеют место неравенства

$$\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h} S_{n_0}(t)\,dt < 2\varepsilon'_{n_0} \text{ при } |h| < h_2(\varepsilon) \text{ и}$$

$$[F'(t^*)]^2 \geqslant P^{2\,\prime}_{n_0}(t) \geqslant P^2_{n_0}(t^*) - \varepsilon, \text{ если } t \in (t^* - h_2(\varepsilon);\ t^* + h_2(\varepsilon)).$$

Тогда при каждом $|h| < h_2(\varepsilon)$ имеем

$$\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h} \frac{1}{F'(t)}\,dt = \frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h} \frac{dt}{P_{n_0}(t) + S_{n_0}(t)} = \frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h} \frac{dt}{P_{n_0}(t)} -$$

$$-\frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h} \frac{S_{n_0}(t)\,dt}{P_{n_0}(t)\,(P_{n_0}(t) + S_{a_0}(t))} \geqslant \frac{1}{F'(t^*)} - \frac{1}{h}\int_{t^*}^{t^*+h} \frac{S_{n_0}(t)}{P^2_{n_0}(t)}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{F'(t^*)} - \frac{2\varepsilon'_{n_0}}{P^2_{n_0}(t^*) - \varepsilon} > \frac{1}{F'(t^*)} - \varepsilon,$$

т. е. оценка (16) верна.

Из неравенств (15) и (16) следует неравенство (14), откуда и вытекает: $\Phi'(t^*) = \dfrac{1}{F'(t^*)}$.

Таким образом, для каждой точки $t \in [0,1]$ получили выражение для производной

$$\Phi'(t) = \frac{1}{F'(t)} \quad \left(\tilde{\Phi}'(t) = \frac{1}{\tilde{F}'(t)}\right).$$

Абсолютно непрерывная функция $G(t) = \Phi(t) - \tilde{\Phi}(t)$ в каждой точке отрезка [0,1] имеет ограниченную производную, модуль которой меньше, чем $\dfrac{1}{\sum\limits_{(k)} \varepsilon_k}$, а из условий (9), (10) и (11) вытекает, что эта функция $G(t)$ не монотонна на любом сколь угодно малом отрезке. С другой стороны, очевидно, что эта функция имеет достаточно простое аналитическое выражение в виде следующего интеграла:

$$G(x) = 2\int_0^x \left(\frac{1}{\sum\limits_{(k)} \dfrac{\varepsilon_k}{\sqrt{|t - x_k|}}} - \frac{1}{\sum\limits_{(p)} \dfrac{\varepsilon_p}{\sqrt{|t - y_p|}}} \right) dt.$$

2°. В этом пункте покажем, что $F(t)$ — строго возрастающая, абсолютно непрерывная функция, которая в каждой точке обладает конечной или бесконечной производной и такая, что ее производная равна бесконечности на множестве, порция которого на сколь угодно малом отрезке имеет мощность континуума.

Оказывается, что построенная нами в п. 1° функция $F(t)$ обладает всеми перечисленными свойствами. Для этого нам достаточно доказать, что производная $F'(t)$ обращается в бесконечность на некотором множестве, порция которого на любом сколь угодно малом интервале имеет мощность континуума, поскольку все остальные условия уже были проверены в п. 1°. Для доказательства рассмотрим произвольный интервал $(a, b)\subset[0,1]$ и укажем множество $M\subset(a, b)$, имеющее мощность континуума и такое, что производная $F'(t)=+\infty$ для всех $t\in M$. В силу того, что множество построенных точек $\{x_k\}$ всюду плотно на отрезке $[0,1]$, мы можем на первом шагу из интервала (a, b) выбросить интервал $\Delta_1=(x_{k_1}; x_{l_1})$ так, чтобы удовлетворить следующему условию: $\operatorname{mes}\Delta_1>\frac{b-a}{2}$ и (a, b) и Δ_1 не имели бы общих концов. После первого шага на интервале (a, b) останутся два интервала, которые обозначим через δ_2, δ_3 и будем считать, что δ_2 находится левее интервала δ_3. На втором шаге из интервалов δ_2 и δ_3 выбросим соответственно интервалы $\Delta_2=(x_{k_2}; x_{l_2})$ и $\Delta_3=(x_{k_3}; x_{l_3})$, которые удовлетворяют следующим условиям: интервалы Δ_i и δ_i не имеют общих концов, $\operatorname{mes}\Delta_i>\frac{1}{2}\operatorname{mes}\delta_i$ и $\Delta_i\cap\Delta_1^*\neq\varnothing$ $i=1, 2, 3$, где

$$\Delta_1^*=(x_{k_1}-\varepsilon_{k_1}^2;\ x_{l_1}+\varepsilon_{l_1}^2).$$

Предположим теперь, что после j-го шага на интервале (a, b) имеются 2^j интервалов, которые обозначены через δ_{2^j+p} $(p=0, 1, 2, \cdots, 2^j-1)$, причем так, что интервал δ_{2^j+p} находился левее интервала δ_{2^j+q}, если только $p<q$ $(p, q=0, 1, 2,\cdots, 2^j-1)$.

На $j+1$-ом шагу из интервалов δ_{2^j+p} $(p=0, 1,\cdots, 2^j-1)$ выбросим соответственно интервалы $\Delta_{2^j+p}=(x_{k_{2^j+p}}; x_{l_{2^j+p}})$ $(p=1, 2,\cdots$ $\cdots, 2^j-1)$ так, чтобы удовлетворялись следующие условия: Δ_{2^j+p} и P_{2^j+p} $(p=0, 1,\cdots, 2^j-1)$ не имеют общих концов,

$$\operatorname{mes}\Delta_{2^j+p}>\frac{1}{2}\operatorname{mes}\delta_{2^j+p}\ (p=0, 1, 2,\cdots, 2^j-1), \tag{17}$$

$$\Delta_{2^j+2p}\cap\Delta^*_{2^{j-1}+p}\neq\varnothing,\ \Delta_{2^j+2p+1}\cap\Delta^*_{2^{j-1}+p}\neq\varnothing, \tag{18}$$

где $\Delta^*_{2^{j-1}+p}=(x_{k_{2^{j-1}+p}}-\varepsilon^2_{k_{2^{j-1}+p}};\ x_{l_{2^{j-1}+p}}+\varepsilon^2_{l_{2^{j-1}+p}})$.

Нетрудно убедиться, что после счетного числа шагов оставшееся множество M будет иметь лебеговскую меру нуль и мощность континуума, поскольку все выброшенные интервалы были без общих концов, а из условий (17) следует, что

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{2^j-1}\operatorname{mes}\Delta_{2^j+p}=b-a.$$

Нам остается доказать, что $F'(t)=+\infty$ для всех $t\in M$. В первом пункте уже было доказано, что $F'(t)=+\infty$ в каждом из концов интервалов Δ_i $(i=1, 2, 3,\cdots)$. Предположим теперь, что точка $t\in M$

и $t \neq x_{k_i}$; x_{l_i} $(i=1, 2, 3, \cdots)$, тогда существует бесконечное число множеств $\gamma_{l_p} = \Delta^*_{l_p} - \Delta_{l_p}$ $(p=1, 2, \cdots)$, содержащих точку t.

В самом деле, предположим противное, т. е. что существует такой номер p_0, что точка t не принадлежит ни одному из множеств $\gamma_{l_{p_0}}, \gamma_{l_{p_0+1}}, \cdots$, тогда если из интервала (a, b) выбросим вместо интервалов $\Delta_{l_{p_0}}$; $\Delta_{l_{p_0+1}}, \cdots$ соответственно интервалы $\Delta^*_{l_{p_0}}$; $\Delta^*_{l_{p_0+1}}; \cdots$, которые не содержат точки t, то полученное множество очевидно будет содержать точку t, но, с другой стороны, из условий (18) нетрудно заключить, что полученное множество принадлежит такому множеству, которое состоит из конечного числа точек x_{k_l}, x_{l_i} $(i = 1, 2, \cdots, p_0-1)$, среди которых нет точки t. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Из сказанного следует, что точка t принадлежит каждому из множеств $\gamma_{l_1}; \gamma_{l_2}; \cdots$.

Так как множество γ_l состоит из следующих двух интервалов: $(x_{k_l} - \varepsilon^2_{k_l}, x_{k_l}]$ и $[x_{l_l}; x_{l_l} + \varepsilon^2_{l_l})$, то, не нарушая общности, можно считать, что точка t принадлежит бесконечному числу интервалов

$$(x_{k_{l_p}} - \varepsilon^2_{k_{l_p}}; x_{k_{l_p}}] \quad (p = 1, 2, \cdots).$$

Из неравенства

$$\frac{\varepsilon_{k_{l_p}}}{\sqrt{t - x_{k_{l_p}}}} > 1 \quad (p = 1, 2, \cdots)$$

и равенства (9) следует, что $F'(t) = +\infty$. Таким образом, доказано, что $F'(t) = +\infty$ во всех точках множества M.

Институт математики
АН Армянской ССР
Поступила 14.XII.1973

Ռ. Զ. Մկրտչյան. Մի քանի բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների կառուցումը *(ամփոփում)*

Նշվում է որոշակի հատուկ հատկություններով օժտված բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների կառուցման էֆեկտիվ եղանակ։ Մասնավորապես ստացվում է նախկինում հայտնի Pereno-*ի օրինակի ընդհանրացումը։*

R. Z. MKRTCHIAN. *Construction of certain special absolutely continuous functions* (summary)

An efficiant way of construction of absolutely continuous functions with certain special properties is indicated.

These considerations yield a generalization of known example due to Pereno.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра общего самосопряженного оператора, и о некоторых признаках лебеговости или сингулярности его спектра, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 1, 1972, 3—13.
2. *Г. П. Толстов.* Метод Перрона в интеграле Данжуа, Матем. сб., 8 (50), 1940, 155.
3. *E. W. Hobson.* The theory of functions of a real variable, Volume two, New-York, 1927, 412—421.
4. *Pereno.* Giorn. di Mat., XXXV, 1897, 132.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть D—единичный шар в n-мерном евклидовом пространстве. Мы будем рассматривать класс функций U_λ, допускающих интегральное представление

$$u(x) = \int_0^1 v(t\ x)\ d\lambda\ (t),\ x \in D,$$

где λ — фиксированная, неотрицательная, конечная мера, а v — произвольная функция, которую можно представить в виде разности двух неотрицательных, гармонических в D функций.

При $n=2$ классы U_λ тесно связаны с известными классами мероморфных функций М. М. Джрбашяна [2].

Если $\omega(x)$—возрастающая, непрерывная на $[0,1)$ функция такая, что $\omega(0) = 1$ и

$$\int_0^1 \omega(x)\, dx < \infty,$$

то, как показано в работе М. М. Джрбашяна [1], существует неотрицательная, конечная мера на $[0,1]$ $d\alpha_\omega(t)$ такая, что

$$\left(r \int_0^1 \omega(x)\, x^{r-1}\, dx \right)^{-1} = \int_0^1 x^r\, d\alpha_\omega(x),\ 0 < r < \infty.$$

Из факторизационной теоремы М. М. Джрбашяна [2] следует, что если $\omega(x)$ удовлетворяет вышеприведенным условиям, то U_{α_ω} совпадает с множеством функций вида $\ln |f(z)|$, где $f \in N\{\omega\}$ и f не имеет нулей и полюсов*.

Некасательные граничные пределы для всего класса $N\{\omega\}$ были изучены в работах М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [3], [4].

В настоящей статье показано, что для классов U_λ (для любого $n \geq 2$), при условии, что $\lambda\{1\} = 0$**, можно получить содержательные результаты не только для некасательных, но и для некоторых касательных граничных значений.

* Классы U_{α_ω} были введены М. М. Джрбашяном в работе [1], где они обозначаются U_ω. Определение классов $N\{\omega\}$ можно найти в [2].

** Заметим, что если $\omega(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow 1$, то $\alpha_\omega\{1\} = 0$.

Автор выражает благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи, а также Н. С. Ландкофу за ценное обсуждение статьи.

1°. Введем обозначение

$$C_\rho(x) = \left\{ y \in \partial D \;/\; \left| y - \frac{x}{|x|} \right| < \rho \right\},$$

где $0 \neq x \in D$, $\rho > 0$.

Мы скажем, что $\varphi \in \Phi$, если $\varphi(t)$ — непрерывная, неубывающая функция, заданная при $0 \leqslant t \leqslant 2$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 1$ и существует число $c < \infty$ такое, что для любого $0 < t \leqslant 2$

$$\varphi(t) \int_t^2 \frac{\varphi^{n-1}(x)}{x^{n+1}}\, dx \leqslant c.$$

Докажем одно неравенство, обобщающее неравенство Н. Аронщайна и К. Т. Смита [6].

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, тогда для любой неотрицательной, гармонической в D функции $u(x)$ имеет место неравенство*

$$u(x) \leqslant 2\mu(\partial D) + \sup_{t > \rho(x)} \left(\frac{\mu(C_t(x))}{\varphi^{n-1}(t)} \right) (2 + 2^{n+1} nc),$$

где $\varphi(\rho(x)) = 1 - |x|$, а μ — мера, фигурирующая в представлении функции u интегралом Пуассона-Стильтьеса.

Доказательство. Пусть

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n}\, d\mu(y),$$

где μ—неотрицательная, конечная мера. При $0 \neq x \in D$ и $y \in \partial D$ имеют место неравенства $|y - x| \geqslant 1 - |x|$ и $2|y - x| > \left| y - \frac{x}{|x|} \right|$. Используя эти неравенства, мы получаем

$$u(x) = \int_{C_\rho(x)} + \int_{\partial D \setminus C_\rho(x)} \leqslant \frac{2\mu(C_\rho(x))}{(1 - |x|)^{n-1}} + 2^{n+1}(1 - |x|) \int_\rho^2 \frac{d\mu(C_t(x))}{t^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\mu(C_\rho(x))}{(1 - |x|)^{n-1}} + 2\mu(\partial D) + 2^{n+1} n (1 - |x|) \int_\rho^2 \frac{\mu(C_t(x))}{t^{n+1}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu(\partial D) + \sup_{t > \rho} \left(\frac{\mu(C_t(x))}{\varphi^{n-1}(t)} \right) \left(2 \frac{\varphi^{n-1}(\rho)}{(1 - |x|)^{n-1}} + 2^{n+1} n (1 - |x|) \int_\rho^2 \frac{\varphi^{n-1}(t)}{t^{n+1}}\, dt. \right.$$

Теперь, предполагая, что $\rho = \rho(x)$ выбрано так, что $\varphi(\rho(x)) = 1 - |x|$, получаем

$$u(x) \leqslant 2\mu(\partial D) + \sup_{t > \rho(x)} \left(\frac{\mu(C_t(x))}{\varphi^{n-1}(t)} \right) (2 + 2^{n+1} nc).$$

Введем несколько обозначений. Пусть $h(r)$— непрерывная, положительная функция, заданная при $r > 0$. Пусть $E \subseteq \partial D$ — некоторое множество. Рассмотрим все покрытия множества E счетным набором шаров S_i радиусов r_i:

$$\bigcup_i S_i \supseteq E$$

и положим

$$M_h(E) = \inf \left(\sum_i h(r_i) \right),$$

где infimum берется по всем таким покрытиям. Заметим, что для любого $F \subseteq \partial D$, $M_h(F) \geq 0$, если $F \subseteq E$, то $M_h(F) \leqslant M_h(E)$ и для любых F и E $M_h(F \cup E) \leqslant M_h(F) + M_h(E)$. В случае, когда $h(r) \geqslant c > 0$, при $r > 0$, имеем, что для любого $\varnothing \neq F \subseteq \partial D$, $M_h(F) \geqslant c$. Легко проверить, что если

$$\lim_{r \to 0} \frac{h(r)}{r^{n-1}} = 0,$$

то $M_h(\partial D) = 0$.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Обозначим

$$\Delta_\varphi(y) = \left\{ x \in D \ / \ \varphi\left(\left| y - \frac{x}{|x|} \right| \right) < 1 - |x| \right\},$$

где $y \in \partial D$.

Лемма 2. *Пусть $g(t) \geqslant 1$—непрерывная, невозрастающая функция, заданная при $t > 0$. Пусть $\varphi \in \Phi$, а $u(x)$ — неотрицательная, гармоническая в D функция. Тогда для множества*

$$F = \left\{ y \in \partial D \ / \ \sup_{\Delta_\varphi(y) \ni x} \left(\frac{u(x)}{g(1 - |x|)} \right) = \infty \right\}$$

имеет место

$$M_h(F) = 0, \tag{1}$$

где $h(r) = \varphi^{n-1}(r)\, g(\varphi(r))$.

Обратно, для любого $F \subseteq \partial D$ такого, что $M_h(F) = 0$, существует неотрицательная, гармоническая функция $u(x)$ такая, что в любой точке $y \in F$ имеет место

$$\sup_{\Delta_\varphi(y) \ni x} \left(\frac{u(x)}{g(1 - |x|)} \right) = \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$E_A = \{ x \in D \ / \ A g(1 - |x|) < u(x) \},$$

где $2\mu(\partial D) < A < \infty$ — некоторое число. Согласно лемме 1, для любого $x \in D$ существует $t(x) > \rho(x)$, где $\varphi(\rho(x)) = 1 - |x|$, такая, что

$$u(x) < 2\mu(\partial D) + (2 + 2^{n+1} nc) \frac{\mu(C_{t(x)}(x))}{\varphi^{n-1}(t(x))}, \tag{3}$$

где μ—мера, связанная с функцией $u(x)$. Далее семейство шаров $\{C_{t(x)}(x)\}_{x\in E_A}$ на сфере покрывает множество F. Действительно, пусть $y \overline{\in} \bigcup_{x\in E_A} C_{t(x)}(x)$, тогда для любого $x \in E$ имеем

$$\rho(x) \leqslant t(x) \leqslant \left| y - \frac{x}{|x|} \right|.$$

В силу монотонности φ

$$1 - |x| = \varphi(\rho(x)) \leqslant \varphi\left(\left| y - \frac{x}{|x|}\right|\right),$$

а это означает, что $\Delta_\varphi(y) \cap E_A = \varnothing$. Следовательно, имеем

$$u(x) \leqslant Ag(1 - |x|), \text{ при } x \in \Delta_\varphi(y).$$

Поэтому $y \overline{\in} F$, а это эквивалентно тому, что $F \subseteq \bigcup_{x\in E_A} C_{t(x)}(x)$. Согласно лемме Л. Альфорса — Н. С. Ландкофа (см. Н. С. Ландкоф [5], стр. 246) существует счетное подпокрытие такое, что его кратность не превосходит числа $N(n)$, зависящего только от размерности n. Это подпокрытие обозначим $\{C_{t(x_i)}(x_i)\}$. Согласно определению множества E_A и в силу (3) имеем

$$A - 2\mu(\partial D) \leqslant \frac{u(x_i) - 2\mu(\partial D)}{g(1 - |x_i|)} \leqslant (2 + 2^{n+1} nc) \frac{\mu(C_{t(x_i)}(x_i))}{\varphi^{n-1}(t(x_i))\, g(1 - |x_i|)}.$$

Следовательно

$$h(t(x_i)) = \varphi^{n-1}(t(x_i))\, g(\varphi(t(x_i))) \leqslant \varphi^{n-1}(t(x_i))\, g(1 - |x_i|) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2 + 2^{n+1} nc}{A - 2\mu(\partial D)} \mu(C_{t(x_i)}(x_i)).$$

Отсюда получаем

$$M_h(F) \leqslant \sum_i h(t(x_i)) \leqslant \frac{2 + 2^{n+1} nc}{A - 2\mu(\partial D)} N(n)\, \mu(\partial D).$$

В силу произвольности A, $M_h(F) = 0$.

Обратно, пусть $M_h(F) = 0$, $F \subseteq \partial D$. Тогда можем построить семейство шаров $\{S_k^{(m)}\}$ в ∂D так, чтобы удовлетворялись условия

$$\bigcup_k S_k^{(m)} \supseteq F, \quad m = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \left(\sum_{k=1}^{\infty} h(r_k^{(m)}) \right) < \infty,$$

где $r_k^{(m)}$ — радиус шара $S_k^{(m)}$. Обозначим $y_k^{(m)} \in \partial D$ — центр шара $S_k^{(m)}$. Тогда функция

$$u(x)=\sum_{m=1}^{\infty} m\left(\sum_{k=1}^{\infty} h\left(r_k^{(m)}\right)\frac{1-|x|^2}{|y_k^{(m)}-x|^n}\right)$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно, пусть $y\in F$. В силу (4) для любого $m=1, 2,\cdots$ существует k_m такое, что $S_{k_m}^{(m)}\ni y$. Рассмотрим точки

$$x_{k_m}^{(m)}=\left(1-\varphi\left(r_{k_m}^{(m)}\right)\right)y_{k_m}^{(m)}.$$

Мы имеем

$$\varphi\left(\left|y-\frac{x_{k_m}^{(m)}}{|x_{k_m}^{(m)}|}\right|\right)=\varphi\left(|y-y_{k_m}^{(m)}|\right)\leqslant\varphi\left(r_{k_m}^{(m)}\right)=1-|x_{k_m}^{(m)}|,$$

следовательно, $x_{k_m}^{(m)}\in\Delta_\varphi(y)$. Но с другой стороны

$$\frac{u\left(x_{k_m}^{(m)}\right)}{g(1-|x_{k_m}^{(m)}|)}\geqslant m\frac{h\left(r_{k_m}^{(m)}\right)}{g\left(1-|x_{k_m}^{(m)}|\right)\left(1-|x_{k_m}^{(m)}|\right)^{n-1}}=m.$$

Это означает, что для $y\in F$ имеет место (2).

2°. Теперь докажем основную теорему.

Теорема. *Пусть $\varphi\in\Phi$ и λ—неотрицательная конечная мера на $[0,1]$, $\lambda\{1\}=0$ и u—функция из U_λ. Тогда всюду на ∂D существует и конечен предел*

$$\lim_{\Delta_\varphi(y)\ni x\to y} u(x),$$

кроме некоторого множества $F\subseteq\partial D$, для которого $M_h(F)=0$ при любом h, допускающем представление

$$h(t)=\varphi^{n-1}(t)\,g(\varphi(t)),$$

где $g(t)$—неотрицательная, непрерывная, невозрастающая функция и

$$\int_0^1 g(1-t)\,d\lambda(t)<\infty.$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно рассмотреть функции $u\in U_\lambda$, допускающие интегральное представление

$$u(x)=\int_0^1 v(tx)\,d\lambda(t), \tag{5}$$

где v — неотрицательная, гармоническая функция. Пусть g — неотрицательная непрерывная, невозрастающая функция и

$$\int_0^1 g(1-t)\,d\lambda(t)<\infty.$$

Согласно лемме 2 для всех точек $y \in \partial D$, кроме некоторого множества $E_g \subseteq \partial D$, для которого $M_h(E_g) = 0$, где $h(t) = \varphi^{n-1}(t)\, g(\varphi(t))$, существует $M = M(y) < \infty$ такая, что

$$v(x) \leqslant Mg(1 - |x|), \quad x \in \Delta_\varphi(y). \tag{6}$$

Пусть $y \in \partial D \setminus E_g$. В силу (6) имеем

$$v(tx) \leqslant Mg(1 - t|x|) \leqslant Mg(1 - t), \quad x \in \Delta_\varphi(y), \quad 0 < t < 1.$$

Очевидно, что при $0 \leqslant t < 1$ имеет место

$$\lim_{\Delta_\varphi(y) \ni x \to y} v(tx) = v(ty).$$

Следовательно, в силу теоремы Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла в (5), и это показывает, что

$$\lim_{\Delta_\varphi(y) \ni x \to y} u(x) \tag{7}$$

существует и конечен. Следовательно, множество $F \subseteq \partial D$, для которого в любой точке $y \in F$ предел (7) не существует, входит в E_g, поэтому $M_h(F) = 0$.

Ростовский инженерно-строительный институт Поступила 7.I.1974

Ա. Ա. Վաղարշակյան. Հարմոնիկ ֆունկցիաների մի քանի դասերի եզրային հատկությունները (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում է հարմոնիկ ֆունկցիաների U_λ *դասերը, որոնք թույլ են տալիս*

$$u(x) = \int_0^1 v(tx)\, d\lambda(t), \quad x \in D,$$

ինտեգրալ ներկայացումը, որտեղ D-ն միավոր գունդ է n-չափանի էվկլիդյան տարածության մեջ, λ-ն ոչ բացասական վերջավոր չափ է [0,1]-ում, $\lambda\{1\} = 0$, *իսկ* $v = v_1 - v_2$, *որտեղ* v_i $(i = 1, 2)$ *ոչ բացասական հարմոնիկ ֆունկցիաներ են D-ում։ Չափերի օգնությամբ, որոնք հանդիսանում են Հաուսդորֆի չափերի ընդհանրացումը, նկարագրվում է այն ենթաբազմությունը* $F \subseteq \partial D$, *որտեղ* $u \in U_\lambda$ *ֆունկցիան եզրային արժեքներ չունի։*

A. A. VAGARSHAKIAN. *Boundary properties of some classes of harmonic functions* (summary)

The classes U_λ of harmonic functions, which permit integral representation

$$u(x) = \int_0^1 v(tx)\, d\lambda(t), \quad x \in D,$$

where D is unit ball in n-dimensional Euclidean space, λ is nonegativ, bounded measure on [0,1], $\lambda\{1\} = 0$, and $v = v_1 - v_2$, with nonegativ harmonic functions v_i, $i = 1, 2$, or are considered. The subset $F \subseteq \partial D$, where the function $u \in U_\lambda$ has no boundary values is described in ter of generalised Hausdorf measures.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его приложения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
2. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., (121), № 4 (8), 1972.
3. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем.,34, № 6, 1970.
4. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 2—3, 1971, 182—194.
5. *Н. С. Ландкоф*. Основы современной теории потенциала, М., Изд. "Наука", 1966.
6. *N. Aronszajn, K. T. Smith*. Functional spaces and functional completion, Ann. de l'inst. Fourier, 6, 1956, 125—185.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. П. ГОРЯЧЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ПО КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ БАЗИСАМ

Введение

В 1964 году П. Л. Ульяновым в работе [1] рассматривался вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}} \tag{1}$$

при некоторых значениях μ и λ для коэффициентов разложения функции $f(x)$ по системе Хаара (определение системы Хаара см. [2], стр. 361, [1], стр. 367, можно пользоваться определением из книги [3], стр. 57, но с учетом замечания, сделанного П. Л. Ульяновым в работе [1], стр. 367) для функций ограниченной вариации. Система Хаара нормирована в пространстве $L^2(0,1)$. В работе [4] изучается, в частности, тот же вопрос для нормированной в пространстве $L^2(0,1)$ системы Фабера-Шаудера (определение этой системы см. [5], [6], [3], стр. 63), а также вопрос о сходимости рядов вида (1) для $\mu=1$ и $\lambda=0$. Т. Н. Сабурова [7] уже рассматривала сходимость рядов вида (1) для коэффициентов разложения некоторых классов непрерывных функций по нормированной в пространстве $L^2(0,1)$ системе Фабера-Шаудера. Автором (см. [8]) были построены кусочно-полиномиальные базисы пространства $C(0,1)$, являющиеся, в некотором смысле, обобщением систем Хаара и Фабера-Шаудера.

В настоящей работе изучается как сходимость рядов вида (1) для непрерывных функций ограниченной вариации, так и рядов вида (1) при $\mu=1$ для функций класса H_ω по кусочно-полиномиальным базисам и системе Фабера-Шаудера, нормированным в пространстве $L^\sigma(0,1)$ с $1 \leqslant \sigma < \infty$, а также в пространстве $C(0,1)$.

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда ее модулем непрерывности называется функция

$$\omega(\delta, f) = \omega(\delta, f, [a, b]) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x, y \in [a, b]}} |f(x) - f(y)|.$$

Определение 2. Пусть $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности (см. [9]). Тогда классом функций H_ω называется множество

$$H_\omega = \{f(x) \in C(0,1) : \omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))\}.$$

При этом, если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то соответствующий класс функций H_ω называется классом $Lip\,\alpha$.

В работе [8] для любого наперед заданного целого числа $r \geqslant 2$ была построена система функций $\{f_m\}_{m=0}^\infty$. Всю совокупность этих систем обозначим через F и любой системе $\{f_m\}_{m=0}^\infty \in F$ поставим в соответствие то число r, для которого она была построена. Кроме того, при $r=2$ наряду с системой $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ из F будем рассматривать систему Фабера-Шаудера $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$. Таким образом, число 2 оказалось поставленным в соответствие двум различным системам, а любое $r>2$ — только одному. Ниже нам понадобятся следующие свойства системы $\{f_m\}_{m=0}^\infty$, полученные в [8].

1. Система функций $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ — базис пространства $C(0,1)$.

2. Если

$$m = r^n + (r-1)p + q, \text{ где } 0 \leqslant p \leqslant r^n - 1,\ 1 \leqslant q \leqslant r-1,\ n \geqslant 0, \tag{2}$$

то*

$$\|f_m\|_C \leqslant A_1,\ f_m\left(\frac{rp+q_1}{r^{n+1}}\right) = \delta_{qq_1}, \text{ где } 0 \leqslant q_1 \leqslant r, \tag{3}$$

носитель

$$\operatorname{supp} f_m = \left[\frac{p}{r^n}, \frac{p+1}{r^n}\right]. \tag{4}$$

3. На своем носителе (см. (4)) функция $f_m(x)$ представляет собой многочлен степени r.

Нетрудно видеть, что эти же свойства имеют место при $r=2$ и для системы Фабера-Шаудера $\{\varphi_m\}_{m=0}^\infty$, если свойство 3 заменить на

3′. На своем носителе (см. (4)) функция $\varphi_m(x)$ имеет вид:

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 2p & \text{при } \dfrac{p}{2^n} \leqslant x < \dfrac{2p+1}{2^{n+1}} \\ 2p+2-2^{n+1}x & \text{при } \dfrac{2p+1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{2^n}. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность коэффициентов $\{c_m(f)\}_{m=0}^\infty$ разложения непрерывной функции $f(x)$ по базису $\{f_m\}_{m=0}^\infty \in F$. В теореме 1 работы [8], в частности, доказано, что

$$|c_m(f)| \leqslant A_2\, \omega\left(\frac{1}{m}, f, [0,1]\right) \text{ при } m \geqslant 1. \tag{6}$$

* Через A_i $(r, \alpha, \beta, \cdots)$ мы обозначаем постоянные, зависящие только от входящих параметров. Если постоянная зависит только от r, то эту зависимость мы обозначать не будем.

На самом деле, анализируя доказательство этой теоремы, нетрудно убедиться, что справедливо

Предложение 1. *Пусть система* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \in F$ *построена для некоторого числа* r. *Тогда коэффициенты разложения* $\{c_m(f)\}_{m=r+1}^{\infty}$ *любой непрерывной функции* $f(x)$ *по базису* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ *удовлетворяют неравенству* (*см.* (2))

$$|c_m(f)| \leqslant A_3\, \omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}, f, \left[\frac{p_1}{r^{n-1}}, \frac{p_1+1}{r^{n-1}}\right]\right), \text{ где } p_1 = E\left(\frac{p}{r}\right). \qquad (7)$$

Из этого предложения можно вывести

Предложение 2. *При условиях предложения* 1 *и наличии у функции* $f(x)$ *ограниченной вариации верно соотношение*

$$\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant A_4 \bigvee_0^1 (f) \text{ при } n \geqslant 1.$$

Доказательство. Из (7) следует, что при $r^n < m \leqslant r^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ для любой функции $f(x)$ ограниченной вариации

$$|c_m(f)| \leqslant A_3 \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f).$$

Но тогда

$$\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant A_3 \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f) = A_3 \sum_{p_1=0}^{r^{n-1}-1} \sum_{m=r^n+p_1 r(r-1)}^{r^n+(p_1+1)r(r-1)-1} \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f) =$$

$$= A_3 r(r-1) \sum_{p_1=0}^{r^{n-1}-1} \bigvee_{\frac{p_1}{r^{n-1}}}^{\frac{p_1+1}{r^{n-1}}} (f) = A_3 r(r-1) \bigvee_0^1 (f),$$

что и требовалось доказать.

Коэффициенты разложения $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ непрерывной функции $f(x)$ по системе Фабера-Шаудера $\{\varphi_m\}_{m=0}^{\infty}$, как известно (см. [5], стр. 106—109, [6], стр. 48—49, [10], стр. 230), имеют вид (см. (1))

$$c_0(f) = f(0),\ c_1(f) = f(1) - f(0),\ c_m(f) = \frac{1}{2}\left[2f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(\frac{p}{2^n}\right) - f\left(\frac{p+1}{2^n}\right)\right],\ m \geqslant 2. \qquad (8)$$

Отсюда, в частности, легко видеть, что

$$|c_m(f)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{m}, f\right) \text{ при } m > 1. \qquad (9)$$

Кроме того, из (8) можно вывести, что предложение 2 сохраняет силу и для системы Фабера-Шаудера при $r=2$, точнее, имеет место

Предложение 3. *Пусть* $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ *суть коэффициенты разложения непрерывной функции* $f(x)$ *ограниченной вариации по системе Фабера-Шаудера. Тогда*

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_m(f)| \leqslant \frac{1}{2} \bigvee_0^1 (f) \text{ при } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Из (8) имеем

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} |c_m(f)| = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2^n-1} \left| 2f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{p}{2^n}\right) - f\left(\frac{p+1}{2^n}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2^n-1} \left[\left| f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{p}{2^n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{p+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) \right| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2^n-1} \left[\bigvee_{\frac{p}{2^n}}^{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} (f) + \bigvee_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}^{\frac{p+1}{2^n}} (f) \right] = \frac{1}{2} \bigvee_0^1 (f),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь

Предложение 4. *Пусть* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — *либо система из* F, *построенная для некоторого числа* r, *либо система Фабера-Шаудера. Тогда для любого* $h \in [0,1]$ *функция*

$$B_n(x) = \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} f_m(x), \ n \geqslant 0 \tag{10}$$

обладает свойствами

$$|B_n(x)| \leqslant A_5 \text{ при } x \in [0,1], \tag{11}$$

$$|B_n(x+h) - B_n(x)| \leqslant A_6\, r^n\, h \text{ при } x \in [0,1-h]. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — система Фабера-Шаудера. Тогда из свойств 2 и 3′ непосредственно вытекает, что $0 \leqslant B_n(x) \leqslant 1$ при $x \in [0,1]$ и $|B_n(x+h) - B_n(x)| \leqslant 2^{n+1} h$ при $x \in [0,1-h]$, то есть неравенства (11) и (12) выполняются.

Пусть теперь $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \in F$. Тогда из свойств 2 и 3 следует, что $B_n(x)$ представляет собой полином степени r на отрезках вида $\left[\frac{i}{r^n}, \frac{i+1}{r^n}\right]$, где $i=0,1,\cdots, r^n-1$, причем

$$B_n\left(x + \frac{1}{r^n}\right) = B_n(x) \text{ для } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{r^n}\right]. \tag{13}$$

Из (13) и свойства 2 следует, что

$$\|B_n\|_C \leqslant (r-1) A_1. \tag{14}$$

Так как $B_n(x)$ — многочлен степени r на отрезках длины $\frac{1}{r^n}$, то, согласно неравенству А. А. Маркова (см., например, [11], стр. 174), при $0 \leqslant h \leqslant 1$ из (14) вытекает

$$|B_n(x+h) - B_n(x)| \leqslant 2(r-1) A_1 r^{n+2} h \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1-h. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следуют неравенства (11) и (12) в рассматриваемом случае, что и требовалось доказать.

Предложение 5. *Пусть* $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям предложения* 4 и $\sigma \geqslant 1$. *Тогда*

$$\frac{A_7}{\sqrt[\sigma]{m}} \leqslant \|f_m\|_\sigma \leqslant \frac{A_8}{\sqrt[\sigma]{m}}, \quad m \geqslant 1. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $m \geqslant 2$ и $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — система Фабера-Шаудера. Тогда из (2), (4) и (5) следует, что при $2^n < m \leqslant 2^{n+1}$ имеем

$$\int_0^1 |f_m(x)|^\sigma dx = \int_0^1 |f_{2^n+1}(x)|^\sigma dx = \int_0^{2^{-n}} [f_{2^n+1}(x)]^\sigma dx =$$

$$= 2\int_0^{2^{-n-1}} (2^{n+1}x)^\sigma dx = 2 \cdot 2^{(n+1)\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma+1} \cdot \frac{1}{2^{(n+1)(\sigma+1)}} = \frac{1}{\sigma+1} \cdot \frac{1}{2^n},$$

то есть в этом случае имеет место равенство

$$\|f_m\|_\sigma = \frac{1}{(\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}}, \quad 2^n < m \leqslant 2^{n+1}. \tag{17}$$

Так как при $\sigma \geqslant 1$ имеет место соотношение

$$1 < (\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant 2, \tag{18}$$

то из (17) и (18) следует, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m^{\frac{1}{\sigma}}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}} \leqslant \frac{1}{(\sigma+1)^{\frac{1}{\sigma}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}} = \|f_m\|_\sigma < \frac{1}{2^{\frac{n}{\sigma}}} \leqslant \frac{2^{\frac{1}{\sigma}}}{m^{\frac{1}{\sigma}}} \leqslant \frac{2}{m^{\frac{1}{\sigma}}},$$

то есть (16) в этом случае справедливо.

Пусть теперь $m \geqslant 2$ и $\{f_m\}_{m=0}^{\infty} \in F$. Из (2) и (4) следует, что

$$\int_0^1 |f_m(x)|^\sigma dx = \int_{\frac{p}{r^n}}^{\frac{p+1}{r^n}} |f_m(x)|^\sigma dx \text{ при } r^n < m \leqslant r^{n+1}. \tag{19}$$

Из (3) и (19) вытекает, что

$$\|f_m\|_\sigma < \frac{A_1}{r^{\frac{n}{\sigma}}} < \frac{A_1 r^{\frac{1}{\sigma}}}{m^{\frac{1}{\sigma}}} \leqslant \frac{A_1 r}{\sqrt[\sigma]{m}},$$

чем доказано правое из неравенств (16). С другой стороны, из свойств 2, 3 и неравенства А. А. Маркова для любого $x \in \left[\frac{p}{r^n}, \frac{p+1}{r^n}\right]$ имеем

$$|f'_m(x)| \leqslant 2A_1 r^{n+2}, \tag{20}$$

причем в крайних точках этого отрезка рассматриваются лишь односторонние производные. Из (3), (19) и (20) следует, что

$$\int_0^1 |f_m(x)|^\sigma dx \geqslant \int\limits_{\frac{rp+q}{r^{n+1}} - \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}}^{\frac{rp+q}{r^{n+1}} + \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}} |f_m(x)|^\sigma dx \geqslant \int\limits_{\frac{rp+q}{r^{n+1}} - \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}}^{\frac{rp+q}{r^{n+1}} + \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}} \left(1 - 2A_1 r^{n+2} \cdot \frac{1}{2A_1(1+\sigma)r^{n+2}}\right)^\sigma dx = \left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{A_1(1+\sigma)r^{n+2}}.$$

Отсюда и из (18) получаем

$$\|f_m\|_\sigma > \frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{1}{A_1^{\frac{1}{\sigma}}(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{2}{\sigma}}} \cdot \frac{1}{r^{\frac{n}{\sigma}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A_1 \cdot 2 \cdot r^2} \cdot \frac{1}{r^{\frac{n}{\sigma}}} = \frac{1}{4A_1 r^2} \cdot \frac{1}{r^{\frac{n}{\sigma}}}$$

при $r^n < m \leqslant r^{n+1}$, то есть

$$\|f_m\|_\sigma > \frac{1}{4A_1 r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[\sigma]{m}},$$

чем доказано левое из неравенств (16) в рассматриваемом случае.

Наконец отметим, что во всех рассматриваемых системах $f_1(x) = x$. Поэтому $\|f_1\|_\sigma = \left(\int_0^1 x^\sigma dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{(1+\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}$, то есть соотношение (16) справедливо и для $m = 1$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ — система Фабера-Шаудера, то вместо неравенств (16) можно пользоваться равенством (17).

§ 2. О скорости убывания коэффициентов разложения некоторых классов непрерывных функций

Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — либо система из F, либо система Фабера-Шаудера, а $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ суть коэффициенты разложения непрерывной функции $f(x)$ по этой системе. Рассмотрим вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|}{m^{\lambda}}$$

при различных значениях λ. Схожие вопросы для системы Фабера-Шаудера рассматривала Т. Н. Сабурова [7].

Теорема 1. *Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — либо система из F, построенная для некоторого числа r, либо система Фабера-Шаудера. Пусть $0<\lambda<1$ и $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда, чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|}{m^{\lambda}} < \infty \quad \textit{для всех } f(x) \in H_{\omega}, \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda}} \omega\left(\frac{1}{m}\right) < \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Достаточность. Из (6), (9), (22) и того, что $f(x) \in H_{\omega}$ (см. определение 2) следует (21).

Необходимость. Пусть условие (22) не выполняется, то есть

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda}} \omega\left(\frac{1}{m}\right) = \infty.$$

Поскольку члены этого ряда монотонно убывают, то, согласно результату П. Л. Ульянова ([12], стр. 53) для целого $r \geqslant 2$ выполняется

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n(1-\lambda)} \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) = \infty. \tag{23}$$

Мы построим такую функцию $f_0(x) \in H_{\omega}$, для которой ряд (21) расходится, то есть

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f_0)|}{m^{\lambda}} = \infty. \tag{24}$$

Сделаем вначале два упрощенных замечания. Во-первых, исходный модуль непрерывности $\omega(\delta)$ будем считать, на основании леммы С. Б. Стечкина ([13], стр. 78) выпуклым вверх. Во-вторых, мы будем считать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} r^{n(1-\lambda)}\,\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)<\infty. \tag{25}$$

Если же модуль непрерывности $\omega(\delta)$ таков, что для него (25) не выполняется, то функцию $f_0(x)$ мы будем искать уже не в классе H_ω, а в классе Lip $(1-\lambda)$, так как для этого класса соотношение (25) уже имеет место, а, как мы сейчас покажем

$$\text{Lip}\,(1-\lambda)\subset H_\omega. \tag{26}$$

В самом деле, при невыполнении (25) для любого сколь угодно большого $k>0$ существует номер n_0 такой, что для любого $n\geqslant n_0$ имеем

$$r^{n(1-\lambda)}\,\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)>k. \tag{27}$$

Пусть $\frac{1}{r^n}<\delta\leqslant\frac{1}{r^{n-1}}\leqslant\frac{1}{r^{n_0-1}}$. Тогда из (27) вытекает, что

$$\delta^{1-\lambda}\leqslant\frac{r^{1-\lambda}}{r^{n(1-\lambda)}}<\frac{r^{1-\lambda}}{k}\,\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)\leqslant\frac{r^{1-\lambda}}{k}\,\omega(\delta),$$

то есть

$$\omega(\delta)\geqslant\frac{k}{r^{1-\lambda}}\,\delta^{1-\lambda}. \tag{28}$$

Из (28) следует (26).

Итак, пусть для исходного выпуклого модуля непрерывности выполняются (23) и (25). Последнее означает, что найдется такая неограниченно возрастающая последовательность номеров $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ и такое $a>0$, что

$$r^{n_j(1-\lambda)}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n_j}}\right)<a,\ j=1,\ 2,\cdots. \tag{29}$$

Положим $(n\geqslant 1)$

$$c_n=\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right). \tag{30}$$

Так как $\omega(\delta)$ — выпуклая функция, а

$$\frac{1}{r^n}=\frac{1}{r+1}\cdot\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{r}{r+1}\cdot\frac{1}{r^{n+1}},$$

то из (30) следует, что

$$c_n\geqslant 0,\ n=1,\ 2,\cdots. \tag{31}$$

Пусть $0<N<M$. Тогда

$$\sum_{n=N+1}^{M}c_n=\sum_{n=N+1}^{M}\left[\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=N+1}^{M}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{r+1}\sum_{n=N}^{-1}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{r}{r+1}\sum_{n=N+2}^{M+1}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)=$$

$$=\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)+\omega\left(\frac{1}{r^{M}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)-$$

$$-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M}}\right)-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M+1}}\right),$$

то есть

$$\sum_{n=N+1}^{M} c_n=\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N}}\right)+\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M}}\right)-$$

$$-\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{M+1}}\right). \tag{32}$$

Перейдем в (32) к пределу при $M\to\infty$. Тогда для любого $N\geqslant 0$ получим

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n=\frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right)-\frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N}}\right). \tag{33}$$

Из (31) и (33) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|<\infty. \tag{34}$$

Положим

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n B_n(x), \tag{35}$$

где $B_n(x)$ определяется по формуле (10). Из (11) и (34) вытекает, что ряд, стоящий в правой части (35), сходится равномерно и поэтому представляет собой некоторую непрерывную функцию $f_0(x)$. Покажем, что $f_0(x)\in H_\omega$. Пусть $0<\delta\leqslant 1$. Найдем целое число $N\geqslant 0$ такое, что

$$\frac{1}{r^{N+1}}<\delta\leqslant\frac{1}{r^{N}}. \tag{36}$$

Пусть $h\in[0,\delta]$. Согласно (35) имеем*

$$|f_0(x+h)-f_0(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{N} c_n\,|B_n(x+h)-B_n(x)|+$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n\,|B_n(x+h)-B_n(x)|. \tag{37}$$

Из (11), (12) и (37) получаем

---

* Здесь и в дальнейшем мы полагаем сумму равной нулю, если в ней верхний индекс меньше нижнего.

$$|f_0(x+h)-f_0(x)| \leqslant A_6\, h \sum_{n=1}^{N} c_n r^n + 2A_6 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n. \tag{38}$$

Но (см. (30))

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n = \sum_{n=1}^{N} r^n \left[\omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right) - \frac{1}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} r^n \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \frac{r}{r+1}\sum_{n=0}^{N-1} r^n \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) - \frac{1}{r+1}\sum_{n=2}^{N+1} r^n \omega\left(\frac{1}{r^n}\right) = r\omega\left(\frac{1}{r}\right) +$$

$$+ r^N \omega\left(\frac{1}{r^N}\right) - \frac{r}{r+1}\,\omega(1) - \frac{r^2}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{r^N}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^N}\right) -$$

$$-\frac{r^{N+1}}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) = \frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{r}{r+1}\,\omega(1) + \frac{r^{N+1}}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^N}\right) -$$

$$-\frac{r^{N+1}}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) \quad \text{при } N = 0, 1, 2, \cdots.$$

Отсюда легко получить, что

$$\sum_{n=1}^{N} c_n r^n \leqslant \frac{r^{N+1}}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^N}\right),\; N = 0, 1, \cdots. \tag{39}$$

Из (33), (36), (38) и (39) следует, что

$$\omega(\delta, f_0) \leqslant A_2 r^2 \delta \frac{r^N}{r+1} \times \omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) + 2A_1 \frac{r}{r+1}\,\omega\left(\frac{1}{r^{N+1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{A_2 r^2}{r+1} + \frac{2A_1 r}{r+1}\right)\omega(\delta),$$

то есть для любого $\delta \in [0,1]$ модуль непрерывности $\omega(\delta, f_0) \leqslant (A_2 r + 2A_1)\,\omega(\delta)$. А это и означает, что $f_0(x) \in H_\omega$.

Покажем теперь, что для этой функции $f_0(x) \in H_\omega$ имеет место (24). Рассмотрим $S_{n_j} = \sum_{m=1}^{r^{n_j}} \frac{|c_m(f_0)|}{m^\lambda}$. Преобразуя это выражение, последовательно получаем*

$$S_{n_j} = \sum_{n=1}^{n_j-1} \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \frac{|c_m(f_0)|}{m^\lambda} = \sum_{n=1}^{n_j-1} c_n \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \frac{1}{m^\lambda} > \sum_{n=1}^{n_j-1} c_n \frac{r^{n+1}-r^n}{r^{(n+1)\lambda}} =$$

$$= \frac{r-1}{r^\lambda} \sum_{n=1}^{n_j-1} c_n r^{n(1-\lambda)} = \frac{r-1}{r^\lambda} \sum_{n=1}^{n_j-1} r^{n(1-\lambda)}\left[\omega\left(\frac{1}{r^n}\right) -\right.$$

---

* При этом мы пользуемся тем, что при $0 < \lambda < 1$ и $r \geqslant 2$ выражение

$$\frac{r-1}{r^\lambda} > \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r} \geqslant \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)-\frac{r}{r+1}\omega\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\Bigg]\geqslant\frac{1}{2}\Bigg[\sum_{n=1}^{n_j-1}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-$$

$$-\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\sum_{n=0}^{n_j-2}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{r^\lambda}{r+1}\sum_{n=2}^{n_j}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^\lambda+r^{1-\lambda}}{r+1}\right)\sum_{n=2}^{n_j-2}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\right)r^{1-\lambda}\omega\left(\frac{1}{r}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\omega(1)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^\lambda}{r+1}\right)r^{(n_j-1)(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^{n_j-1}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{r^\lambda}{r+1}r^{n_j(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^{n_j}}\right),$$

откуда получаем (так как при $0<\lambda<1$ как $r^\lambda<r+1$, так и $r^{1-\lambda}<$ $<r+1$), что

$$S_{n_j}\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{r^\lambda+r^{1-\lambda}}{r+1}\right)\sum_{n=2}^{n_j-2}r^{n(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^n}\right)-\frac{1}{2}\frac{r^{1-\lambda}}{r+1}\omega(1)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{r^\lambda}{r+1}r^{n_j(1-\lambda)}\omega\left(\frac{1}{r^{n_j}}\right). \tag{40}$$

Но как нетрудно убедиться, используя дифференциальное исчисление, что при $0<\lambda<1$ и $r\geqslant 2$ сумма

$$r^\lambda+r^{1-\lambda}<r+1. \tag{41}$$

Поэтому из (23), (29), (40) и (41) следует, что $\lim\limits_{j\to\infty}S_{n_j}=\infty$, то есть для построенной нами функции $f_0(x)$ соотношение (24) выполняется. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что, как видно из доказательства, достаточность условия (22) имеет место и при $\lambda=1$.

Из теоремы 1 сразу выводится

Следствие 1. Пусть система $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ и число λ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда чтобы ряд (21) сходился для любой функции $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с $0<\alpha\leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda+\alpha>1$.

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Пусть $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Положим ($\sigma\geqslant 1$)

$$f_{m\sigma}(x)=\frac{f_m(x)}{\|f_m\|_\sigma},\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{42}$$

Так как $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ — базис пространства $C(0,1)$, то $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^\infty$ — тоже базис этого пространства для любого $\sigma\geqslant 1$. Из (42) следует, что коэффициенты разложения $\{c_{m\sigma}(f)\}_{m=0}^\infty$ любой непрерывной функции $f(x)$

по базису $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ связаны с ее коэффициентами разложения $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ по базису $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ соотношениями

$$c_{m\sigma}(f) = c_m(f)\,\|f_m\|_\sigma. \tag{43}$$

Мы исследуем вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|}{m^\lambda}$$

при некоторых значениях σ и λ. Этот вопрос для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ был рассмотрен П. Л. Ульяновым [4] и Т. Н. Сабуровой [7]. Поскольку нормы $\|f_m\|_\sigma$ допускают оценку через $\frac{1}{\sqrt[\sigma]{m}}$ сверху и снизу (см. предложение 5), то из (43) и теоремы 1 сразу выводится

Теорема 2. *Пусть* $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ *определяется соотношением* (42), *числа* $\sigma \in [1, \infty)$ *и* λ *таковы, что* $0 < \frac{1}{\sigma} + \lambda < 1$, *а* $\omega(\delta)$—*некоторый модуль непрерывности. Тогда, чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|}{m^\lambda} < \infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in H_\omega, \tag{44}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{1}{\sigma}+\lambda}}\, \omega\left(\frac{1}{m}\right) < \infty.$$

Следствие 2. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ и числа σ и λ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда, чтобы ряд (44) сходился для любой функции $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с $\alpha \in (0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\sigma} + \lambda + \alpha > 1$.

Этот (и даже более общий) результат для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ получен Т. Н. Сабуровой [7].

Положив $\lambda = 0$ в условии теоремы 2, получим

Следствие 3. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, число $\sigma \in (1, \infty)$, а $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Тогда, чтобы ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m\sigma}(f)| < \infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in H_\omega, \tag{45}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\sigma]{m}}\, \omega\left(\frac{1}{m}\right) < \infty.$$

Следствие 4. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ и число σ удовлетворяют условиям следствия 4. Тогда, чтобы для любой функции $f(x) \in \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд (45) сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\sigma} + \alpha > 1$.

Достаточность этого условия для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ доказана П. Л. Ульяновым [4], а необходимость при тех же предложениях — Т. Н. Сабуровой [7].

§ 3. О сходимости рядов для функций ограниченной вариации

Здесь мы рассмотрим вопрос о сходимости рядов вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}, \quad \mu > 0, \ \lambda > 0, \tag{46}$$

где $\{c_m(f)\}_{m=0}^{\infty}$ суть коэффициенты разложения функции* $f(x) \in \in CV(0,1)$ по базису $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$, являющемуся либо системой из F, либо системой Фабера-Шаудера. Для системы Фабера-Шаудера схожие вопросы рассматривали П. Л. Ульянов [4], В. А. Матвеев [14], Т. Н. Сабурова [7]. Поскольку при $\mu > 0$ и $\lambda > 1$ ряд (46) будет сходиться для любой непрерывной функции (см. (6) и (8)), то мы будем рассматривать лишь случаи $\mu > 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Нами будет доказана следующая

Теорема 3. *Пусть $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ — либо система из F, построенная для некоторого числа r, либо система Фабера-Шаудера, а числа μ и λ таковы, что $\mu > 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Тогда, чтобы ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}} < \infty \quad \text{для всех } f(x) \in CV(0,1), \tag{47}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu + \lambda > 1. \tag{48}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть верно (48), а функция $f(x) \in CV(0,1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 < \mu < 1$. Тогда получим

$$\sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n\lambda}} \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} |c_m(f)|^{\mu}.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера к внутренней сумме и учитывая, в зависимости от системы $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$, либо предложение 2, либо предложение 3, получим**

* Классом $CV(0,1)$ называется класс непрерывных функций, имеющих ограниченную вариацию на отрезке [0,1].

** Мы обозначаем $A_9 = \max\left(A_4, \frac{1}{2}\right)$.

$$\sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{|c_m(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n\lambda}} \left(\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} |c_m(f)| \right)^{\mu} \left(\sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} 1 \right)^{1-\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \left[A_0 \bigvee_0^1 (f) \right]^{\mu} (r-1)^{1-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n(1-\mu)}}{r^{n\lambda}} = A(r, \mu, f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n(\mu+\lambda-1)}} < \infty,$$

так как $\mu + \lambda > 1$, то есть ряд (47) сходится.

Необходимость. Пусть теперь $\mu + \lambda \leqslant 1$. Построим такую функцию $f_0(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, для которой ряд (47) расходится. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\mu = 1 - \lambda$ и, следовательно, искать такую функцию $f_0(x)$, что

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{|c_m(f_0)|^{1-\lambda}}{m^{\lambda}} = \infty. \tag{49}$$

Положим (см. (10))

$$f_0(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{B_n(x)}{r^n n \ln^2 n}. \tag{50}$$

Из (11) следует, что $f_0(x) \in C(0,1)$. Покажем, что она искомая.

Оценим ее модуль непрерывности. Пусть $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ и $0 \leqslant h \leqslant \delta$. Из (12) и (50) следует, что

$$|f_0(x+h) - f_0(x)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|B_n(x+h) - B_n(x)|}{r^n n \ln^2 n} \leqslant A_6 h \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \leqslant 3A_6 h,$$

то есть модуль непрерывности $\omega(\delta, f_0) \leqslant 3A_6\delta$ и поэтому $f_0(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, следовательно, $f_0(x) \in CV(0,1)$.

Далее, из (50) вытекает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_m(f_0)|^{1-\lambda}}{m^{\lambda}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(r^n n \ln^2 n)^{1-\lambda}} \sum_{m=r^n+1}^{r^{n+1}} \frac{1}{m^{\lambda}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r-1}{r^{\lambda}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\lambda} (\ln n)^{2-2\lambda}} = \infty,$$

так как $\lambda > 0$, то есть для построенной нами функции $f_0(x)$ выполняется (49). Теорема доказана.

Замечание 3. Как видно из доказательства этой теоремы, функцию $f_0(x) \in CV(0,1)$, для которой верно (49), можно найти даже в классе $\mathrm{Lip}\, 1$.

Применим теперь теорему 3 к вопросу о сходимости рядов вида (см. (42), (43))

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|^{\mu}}{m^{\lambda}}. \tag{51}$$

Аналогично тому, как была выведена теорема 2 из теоремы 1, из теоремы 3 сразу выводится

Теорема 4. *Пусть система* $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ *определяется соотношением* (42), *а числа* σ, μ *и* λ *таковы, что* $\mu > 0$, $0 < \lambda + \frac{\mu}{\sigma} < 1 \leqslant \sigma$. *Тогда, чтобы для любой функции* $f(x) \in CV(0,1)$ *ряд* (51) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $1 + \frac{1}{\sigma} > \frac{1-\lambda}{\mu}$.

Необходимость этого условия для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ получена Т. Н. Сабуровой [7].

Выведем теперь из теоремы 4 некоторые очевидные следствия.

Следствие 5. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, а числа σ и λ таковы, что $\sigma \geqslant 1$, $\lambda > -\frac{1}{\sigma}$. Тогда для любой функции $f(x) \in CV(0,1)$ имеет место соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|c_{m\sigma}(f)|}{m^{\lambda}} < \infty.$$

Это утверждение для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ доказано П. Л. Ульяновым [4].

Следствие 6. Пусть система $\{f_{m\sigma}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 4, а числа μ и σ таковы, что $\mu > 0$, $\sigma \geqslant 1$. Тогда, чтобы для любой функции $f(x) \in CV(0,1)$ имело место

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m\sigma}(f)|^{\mu} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu > \frac{\sigma}{\sigma+1}$.

Это утверждение для системы Фабера-Шаудера при $\sigma = 2$ доказано П. Л. Ульяновым [4], а для системы Хаара—тоже им [1].

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору П. Л. Ульянову за постоянное внимание к моей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 4.VI.1973

Ա. Պ. ԳՈՐՅԱՉԵՎ. Կտոր առ կտոր պոլինոմյալ բազիսներով շարքերի գործակիցների մի քանի հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնք բնութագրում են կտոր առ կտոր պոլինոմյալ բազիսներով, ինչպես նաև Ֆաբեր-Շաուդերի սիստեմով որոշակի դասերին պատկանող անընդհատ ֆունկցիաների վերլուծությունների գործակիցների նվազման կարգը։

A. P. GORYACHEV. *On some properties of coefficients of series by piece-polynomial bases* (summary)

Necessary and sufficient conditions characterizing the rate of decrease of decomposition coefficients of some classes of continuous functions by piece polynomial bases and the Faber-Schauder system are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Л. Ульянов.* О рядах по системе Хаара, Матем. сб., 63, № 3, 1964, 356—391.
2. *A. Haar.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-systeme, Math. Ann., 69. 1910, 331—371.
3. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
4. *П. Л. Ульянов.* О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера, Матем. заметки, 7, № 4, 1970, 431—442.
5. *G. Faber.* Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, Tahresberichte der deutsch. Math-Ver., 19, 1910, 104—112.
6. *J. Schauder.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeit., 26, № 1, 1927, 47—65.
7. *Т. Н. Сабурова.* О теоремах вложения для некоторых классов непрерывных функций, Вестник МГУ, сер. матем., мех., № 3, 1971, 20—29.
8. *А. П. Горячев.* О кусочно-полиномиальных базисах в пространстве непрерывных функций, Изв. ВУЗов, матем., № 1 (128), 1973, 37—50.
9. *С. Н. Никольский.* Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности, ДАН СССР, 52, № 3, 1946, 191—194.
10. *Z. Ciesielski.* On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{\langle 0,1 \rangle}$ Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys., VII, № 4, 1959, 227—232.
11. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
12. *П. Л. Ульянов.* О множителях Вейля для безусловной сходимости, Матем. сб., 60, № 1, 1963, 39—62.
13. *А. В. Ефимов.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций, Матем. сб., 54, № 1, 1961, 51—90.
14. *В. А. Матвеев.* О вариации функции и о коэффициентах Фурье по системам Хаара и Шаудера, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 6, 1966, 1397—1419.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. Н. АЙРАПЕТЯН

О ПОВЕДЕНИИ ВДОЛЬ ХОРД НЕПРЕРЫВНЫХ, НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть D означает круг $|z|<1$ и Γ —окружность $|z|=1$. Положим $D(\zeta)=\{z; |z-\rho\zeta|<1-\rho\}$, где $\zeta\in\Gamma$, а ρ—некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $\frac{1}{2}<\rho<1$. Обозначим через $l(\zeta, \varphi)$ сегмент круга $D(\zeta)$, оканчивающийся в точке $\zeta\in\Gamma$ и образующий угол φ; $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ с диаметром круга D в точке ζ. Подобласть круга D, ограниченная двумя хордами $l(\zeta, \varphi_1)$ и $l(\zeta, \varphi_2)$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}\right)$ и границей круга $D(\zeta)$, обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. В случае, если $f(z)$ имеет предел, когда $z\to e^{i\theta}$, $z\in l(\zeta, \varphi)$, этот предел будем обозначать через $f(\theta, \varphi)$. Отрезок $l(\zeta, \varphi)$ назовем отрезком Жюлиа для функции $f(z)$, если для любых φ_1 и φ_2 $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi_1<\varphi_2<\frac{\pi}{2}\right)$ функция принимает в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений. Для произвольных точек $z_1, z_2\in D$ обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неэвклидовое расстояние между z_1 и z_2. Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$ называют P-последовательностью для мероморфной в D функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $\{z; \sigma(z, z_{n_k})<\varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений (см. [1]), сегмент $l(\zeta, \varphi)$ назовем P-сегментом для $f(z)$, если $l(\zeta, \varphi)$ содержит хотя бы одну P-последовательность функции $f(z)$.

Пусть M есть произвольное борелевское множество на Γ. Положим $\sigma=\bigcup\limits_{\zeta\in M} D(\zeta)$.

Пусть далее $cap_\alpha E$ означает α-емкость множества E, а $cap_0 E$—логарифмическую емкость множества E.

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $U(z)\geqslant 0$ *и непрерывная в* D *удовлетворяет условию*

$$\iint_{\sigma}(1-r)^{\alpha}[U(re^{i\theta})]^2\,rdrd\theta<+\infty \qquad (0\leqslant\alpha<1). \tag{1}$$

Тогда существует такое подмножество $E\subset M$, $cap_{\alpha}E=0$, *что в каждой точке* $\zeta\in M-E$ *имеем*

$$\int_{l(\zeta,\,\varphi)} U(re^{i\theta})\,|dz|<+\infty \qquad (z=re^{i\theta}\in l(\zeta,\,\varphi)) \tag{2}$$

для почти всех значений $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Замечание 1. В случае, когда σ есть единичный круг, а M— единичная окружность, теорема 1 доказана в статье [3].

Теорема 2. *Пусть функция* $F(z)$ *непрерывна в* D *и имеет там непрерывные частные производные первого порядка. Если*

$$\iint_{\sigma}(1-r)^{\alpha}\,|\operatorname{grad}F|^2\,rdrd\theta<+\infty \quad (0\leqslant\alpha<1), \tag{3}$$

то

1°. *на* M *существует такое множество* E, $cap_{\alpha}E=0$, *что в каждой точке* $\zeta\in M-E$

$$\int_{l(\zeta,\,\varphi)}|\operatorname{grad}F|\,|dz|<+\infty \text{ для почти всех } \varphi;\ \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right); \tag{4}$$

2°. *существуют конечные пределы* $F(\theta,\ \varphi)$ *для всех* φ, *для которых интеграл (4) конечен. Эти пределы равны между собой.*

Теорема 3. *Пусть* M — *произвольное борелевское множество на* Г. *Если функция* $w=f(z)$, *мероморфная в* D, *удовлетворяет условию*

$$\iint_{\sigma}(1-r)^{\alpha}[\delta(r,\,\theta)]^2\,rdrd\theta<+\infty \quad \left(0\leqslant\alpha<1,\ \delta(r,\,\theta)=\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}\right) \tag{5}$$

то

1°. *существует такое подмножество* $E\subset M$, $cap_{\alpha}E=0$ $(0\leqslant\alpha<1)$, *что в каждой точке* $\zeta\in M-E$ *имеем*

$$\int_{l(\zeta,\,\varphi)}\delta(r,\,\theta)\,|dz|<+\infty \quad (z=re^{i\theta}\in l(\zeta,\,\varphi)) \tag{6}$$

для почти всех φ; $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$;

2°. *существуют пределы* $f(\theta,\ \varphi_1)$ *и* $f(\theta,\ \varphi_2)$, $f(\theta,\ \varphi_1)=f(\theta,\ \varphi_2)$ *для всех* $\theta\in M$ *и* $\varphi_1,\ \varphi_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, *для которых интеграл (6) конечен;*

3°. *для любых* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $\zeta \in M - E$, *для которых*

$$\int_{l(\zeta, \varphi)} \hat{c}(r, \theta) \, |dz| = +\infty \quad (z = re^{i\theta} \in l(\zeta, \varphi)),$$

сегменты $l(\zeta, \varphi)$ *являются сегментами Жюлиа функции* $f(z)$.

Замечание 2. Теорема 5 доказана в статье [2] в частном случае, когда $\alpha = 0$.

В нижеследующем доказательстве используются схемы из [2] и [3].

Доказательство теоремы 1: Пусть $e^{i\omega} \in M$ и $z = re^{i\theta} \in D$. Положим

$$h(r, \theta) = \begin{cases} U(r, \theta), & z \in \sigma \\ 0 & z \in D - \sigma \end{cases}.$$

Обозначим через $\psi \equiv \psi(r, \theta) = \pi - \arg(re^{i\theta} - 1)$, где $0 < r < 1$, $|\theta| < \pi$ и $\frac{\pi}{2} < \arg(re^{i\theta} - 1) < \frac{3}{2}\pi$. Отсюда находим, что $\operatorname{tg}\psi = \frac{r \sin\theta}{1 - r\cos\theta}$ и

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}[\arg(re^{i\theta} - 1)] = \frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Im}\left\{\log \frac{1}{re^{i\theta} - 1}\right\} = \frac{r(\cos\theta - r)}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$H(\omega, r, \theta) = h(r, \omega + \theta) \frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{8}$$

Она измерима для любого фиксированного ω как функция от r и θ $(0 < r < 1,\ |\theta| < \pi)$.

Из (7) следует, что $H(\omega, r, \theta) \geqslant 0$ в S, $\{re^{i\theta};\ \cos\theta > r\}$ и $H(\omega, r, \theta) \leqslant 0$ в $D - S$. Обозначим через $I_1(\omega) = \iint\limits_{(S)} H(\omega, r, \theta)\, dr d\theta$, $I_2(\omega) = -\iint\limits_{(D-S)} H(\omega, r, \theta)\, dr d\theta$. По определению $I_1(\omega) \geqslant 0$, $I_2(\omega) \geqslant 0$ для $e^{i\omega} \in M$. Сначала докажем, что $I_2(\omega) < +\infty$ для любого $e^{i\omega} \in M$. Введем функцию $I(\omega)$:

$$I(\omega) \equiv \iint\limits_{D} H(\omega, r, \theta)\, dr d\theta = I_1(\omega) - I_2(\omega). \tag{9}$$

Пусть C_r — окружность $|z| = r$ $(0 < r < 1)$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{r(r - \cos\theta)}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \leqslant \frac{r}{r+1} < r \quad \text{для} \quad re^{i\theta} \in C_r - S.$$

Согласно (7) и (8) имеем

$$-H(\omega, r, \theta) \leqslant rh(r, \theta + \omega), \quad re^{i\theta} \in C_r - S. \qquad (10$$

Оценим сверху интеграл $I_2(\omega)$, используя неравенство Коши-Буняковского и условие (1).

Имеем

$$I_2(\omega) = -\int_0^1 dr \int_{C_r - S} H(\omega, r, \theta)\, d\theta \leqslant \int_0^1 dr \int_{C_r - S} r h(r, \omega + \theta)\, d\theta =$$

$$= \iint_{(D-S)} h(r, \omega + \theta)\, r dr d\theta \leqslant \iint_D h(r, \theta + \omega)\, r dr d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \iint_D (1-r)^a [h(r, \theta + \omega)]^2 r dr d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \iint_D \frac{r dr d\theta}{(1-r)^a} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \iint_\delta (1-r)^a [U(r, \theta)]^2 r dr d\theta \right\}^{1/2} \left\{ \iint_D \frac{r dr d\theta}{(1-r)^a} \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Заметим, что длина хорды $l(\omega, \varphi) \equiv l(e^{i\omega}, \varphi)$ равна

$$\lambda(\varphi) = (2 - 2\rho)\cos\varphi \text{ и не зависит от } \omega. \tag{11}$$

Положим для $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$L(\omega, \varphi) = \int_{l(\omega, \varphi)} U(r, \theta)\, |dz|, \quad z = re^{i\theta} \in l(\omega, \varphi), \tag{12}$$

$$X(\omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L(\omega, \varphi) \cos\varphi d\varphi. \tag{13}$$

В статье [2] при $U(r, \theta) = \delta(r, \theta)$ доказано, что

A) $X(\omega)$ измерима по Борелю.

B) $I(\omega) > (2\rho - 1) X(\omega)$ для всякой $e^{i\omega} \in M$.

Единственное свойство функции $\delta(r, \theta)$, которое используется при доказательстве ее непрерывности. Так как в нашем случае функция $U(r, \theta)$ непрерывна, то следовательно имеет место (A) и (B). Докажем, что множество $E = \{e^{i\omega},\ e^{i\omega} \in M,\ X(\omega) = +\infty\}$ имеет

$$cap_a E = 0 \quad (0 \leqslant a < 1).$$

Действительно, допустим напротив, что $cap_a E > 0$. По предположению множество E должно содержать замкнутое подмножество F, $cap_a F > 0$. Тогда на F существует такое распределение единичной массы, что потенциал

$$V_\alpha(r, \theta) = \begin{cases} \int\limits_F \dfrac{d\mu_\alpha(\omega)}{|re^{i\theta} - e^{i\omega}|^\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ \int\limits_F \log \dfrac{1}{|re^{i\theta} - e^{i\omega}|}\, d\mu_0(\omega), & \alpha = 0 \end{cases} \tag{14}$$

ограничен: $|V_\alpha(r, \theta)| < V_\alpha < +\infty$ при $|z| < +\infty$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_\alpha(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} \log \frac{1}{|re^{i\theta} - e^{i\omega}|}\, d\mu_\alpha(\omega). \tag{15}$$

Ясно, что $|U_\alpha(r, \theta)| \leqslant U_\alpha < +\infty$. Положим

$$g_\alpha(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, \frac{1}{(1 - re^{i(\theta-\omega)})^\alpha}\, d\mu_\alpha(\omega). \tag{16}$$

В силу предположения $|g_\alpha(r, \theta)| \leqslant V_\alpha < +\infty$.

В статье [3] доказано (леммы 1 и 2), что

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial r}\right)^2 (1 - r)^{-\alpha} r\,dr\,d\theta < +\infty \quad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

С другой стороны, имеем

$$r\,\frac{\partial U_\alpha(r, \theta)}{\partial r} = -\int\limits_F \frac{\partial}{\partial\theta} \arg(re^{i\theta} - e^{i\omega})\, d\mu_\alpha(\omega).$$

Обозначим

$$Q(\omega, r, \theta) \equiv H(\omega, r, \theta - \omega) = -h(r, \theta)\frac{\partial}{\partial\theta} \arg(re^{i\theta} - e^{i\omega}) =$$

$$= \frac{rh(r, \theta)\{\cos(\theta - \omega) - r\}}{1 - 2r\cos(\theta - \omega) + r^2}, \qquad z = re^{i\theta} \in D, \quad e^{i\omega} \in F,$$

Легко видеть, что

$$h(r, \theta)\, r\, \frac{\partial U_\alpha(r, \theta)}{\partial r} = \int\limits_F Q(\omega, r, \theta)\, d\mu_\alpha(\omega).$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \iint\limits_D dr\,d\theta \int\limits_F Q(\omega, r, \theta)\, d\mu_\alpha(\omega) = \iint\limits_D h(r, \theta)\, r\, \frac{\partial U_\alpha(r, \theta)}{\partial r}\, dr\,d\theta. \tag{17}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу I, получим

$$I^2 \leqslant \iint\limits_D (1-r)^\alpha [h(r,\theta)]^2 r dr d\theta \iint\limits_D (1-r)^{-\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha (r,\theta)}{\partial r} \right)^2 r dr d\theta = \tag{18}$$

$$= \iint\limits_\sigma (1-r)^\alpha [U(r,\theta)]^2 r dr d\theta \iint\limits_D (1-r)^{-\alpha} \left(\frac{\partial U_\alpha (r,\theta)}{\partial r} \right)^2 r dr d\theta < +\infty.$$

С другой стороны, $I(\omega) = \iint\limits_D h(r,\theta+\omega) \frac{\partial}{\partial\theta} \{-\arg(re^{i\theta}-1)\} dr d\theta =$

$= \iint\limits_D h(r,\theta') \frac{\partial}{\partial\theta'} \{-\arg(re^{i\theta'}-e^{i\omega})\} dr d\theta' = \iint\limits_D Q(\omega, r, \theta)\, dr d\theta$. Откуда, с учетом (17), будем иметь

$$I = \int\limits_F I(\omega)\, d\mu_\alpha(\omega).$$

Последнее ведет к утверждению, что $I = +\infty$, так как по предположению для всех $e^{i\omega} \in F$, $I(\omega) = +\infty$. Это противоречит неравенству (18) и доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Положив в теореме 1 $U(r,\theta) = |\operatorname{grad} F|$ и замечая, что $|\operatorname{grad} F|$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы, мы устанавливаем справедливость утверждения 1° теоремы 2. Конечность величины $L(\omega,\varphi)$ означает, в частности, существование определенного конечного предела $F(\omega,\varphi)$. В силу теоремы 1, на множестве M существует такое подмножество E_1, $cap_\alpha E_1 = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$, что для любого $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$ функция $L(\omega,\varphi)$ является суммируемой функцией аргумента $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значения $L(\omega,\varphi)$ конечны для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Рассмотрим точки $\zeta = e^{i\omega} \in M \setminus E_1$, в которых $F(\omega,\varphi_1) \neq F(\omega,\varphi_2)$ хотя бы для двух значений $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Такая точка называется точкой неопределенности для $F(z)$. Согласно теореме Багемила [4], множество точек неопределенности для произвольной функции $f(z)$ не более чем счетно. Поскольку счетное множество точек на Γ имеет нулевую α-емкость для любого α, $0 \leqslant \alpha < 1$, то теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Полагая в теореме 1 $U(r,\theta) = \delta(r,\theta)$, мы получаем утверждение 1°. Утверждение 2° доказывается точно так же, как и во второй теореме. Пусть для некоторых $\theta \in M$ и $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$\int\limits_{l(\zeta,\varphi_0)} \delta(r,\theta)\,|dz| = +\infty, \qquad \zeta = e^{i\theta}, \qquad z \in l(\zeta,\varphi_0).$$

Выберем значения $\varphi_1, \varphi_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ таким образом, чтобы

$$\int\limits_{l(\zeta, \varphi_i)} \delta(r, \theta)\,|dz| < +\infty \quad \left(i = 1,\ 2,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

и рассмотрим область $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$. Согласно лемме 5 из статьи Цудзи [5], если $f(z)$ не принимает в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ три различных значения и $\int\limits_{l(\zeta, \varphi_i)} \delta(r, \theta)\,|dz| < +\infty$, $i = 1, 2$, то $\int\limits_{l(\zeta, \varphi)} \delta(r, \theta)\,|dz| < +\infty$ для всех φ; $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$. Поэтому $f(z)$ должна принимать в $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ бесконечно часто каждое значение из сферы Римана, кроме, быть может, двух значений. Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Точно так же, как и в статье [6] доказывается, что отрезки $l(\zeta, \varphi_0)$, для которых $\int\limits_{l(\zeta, \varphi_0)} \delta(r, \theta)\,|dz| = +\infty$ являются P-сегментами для $f(z)$.

Замечание 4. Теорему 3 можно усилить, если вместо условия (5) написать следующее условие

$$\iint\limits_{G} (1-r)^{\alpha} [\delta(r, \theta)]^{4}\, r\,dr\,d\theta < +\infty. \tag{5'}$$

Действительно из условия (5) вытекает, что

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \int\limits_{l(\omega, \varphi)} \delta^2(r, \theta)\, r\,dr\,d\theta < +\infty, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Но если функция $f(z)$ имеет конечный интеграл Дирихле, то ее асимптотическое значение в точке $\zeta = e^{i\omega} \in M$ совпадает с угловым предельным значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = n^{i\omega}$. Следовательно $f(z)$ имеет угловые предельные значения на множестве M, всюду, кроме, быть может, некоторого подмножества E_1, $cap_\alpha E_1 = 0$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Выражаю свою благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и ценные указания.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна Поступила 21.1.1974

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Շրջանում անընդհատ, անընդհատորեն դիֆերենցելի և մերոմորֆ ֆունկցիաների վարքը լարերի երկայնքով *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է ընդհանուր թեորեմ, միավոր շրջանում որոշված, դրական և անընդհատ, կամայական ֆունկցիայի եզրային վարքի մասին՝ մի բազմությունից դուրս, որի α-ունակությունը զրո է այնուհետև այդ թեորեմը տարածվում է մերոմորֆ ֆունկցիաների վրա, որոնց համար

$$\iint\limits_{\sigma}(1-r)^{\alpha}\delta(r,\theta)\,rdrd\theta<+\infty\left(\delta(r,\theta)=\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}\right):$$

Ապացուցվում է, որ $f(z)$ ֆունկցիան ունի անկյունային եզրային արժեքներ և մի բազմությունից դուրս, որի α-ունակությունը զրո է։ Որոշակի պայմանի դեպքում $f(z)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն Ժյուլիայի ճառագայթներ։

A. H. AJRAPETIAN. *On the behaviour of continuous, continuously differentiable and meromorphic in a circle functions along the chords* (summary)

A general theorem on the behaviour of a continuous positive in a circle function near the boundary of the letter outside a set of zero α-capacity is proved. This theorem is extended to the case of meromorphic functions $f(z)$, for which

$$\iint\limits_{\sigma}(1-r)^{\alpha}\delta(r,\theta)\,rdrd\theta<+\infty\left(\delta(r,\theta)=\frac{|f'(re^{i\theta})|}{1+|f(re^{i\theta})|^2}\right).$$

It is proved, that $f(z)$ possesses angular limiting values outside a set of σ-capacity zero. The existence of Gulia directions is also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющимися нормальными, Мат. сб., 67(109), 3, 1965, 408—427.
2. *Y. Yamashita*, S. Function-theoric metrics and boundary behavior of functions meromorphic or holomorphic in the unit disc, Nogoya Math. J., 45, 1972, 105—117.
3. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Берлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Матем. сб. (в печати).
4. *F. Bagemihl.* Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41, 1955, 379—382.
5. *M. Tsuji.* Beurlings theorem on exceptional sets, Tohoku Math. J. 2, 1950, 113—125.
6. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирский матем. журн. 14, № 5, 1973.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա X, № 1, 1975 Математика

А. В. БАХШЕЦЯН

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ СИСТЕМ РАДЕМАХЕРА И УОЛША

В данной работе рассматриваются системы $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$ (определения см. ниже), которые являются в некотором смысле обобщениями, соответственно, систем Радемахера и Уолша.

Наши рассмотрения основаны на одной идее А. М. Олевского (см. [1], лемму 2 об отображениях, см. также работу [2], в которой содержится замечание о том, что автором используется „предельный" случай отображений, введенных им в [1]). Это позволяет свойства систем Радемахера и Уолша, связанные со сходимостью рядов по этим системам (в смысле почти всюду, по мере, в L_p, суммирование, $\cdots$), полностью переносить на системы $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$.

Как известно, в литературе под названием „система Уолша" фигурируют три ортонормированные полные системы, отличающиеся друг от друга лишь нумерацией внутри „пачек". Следуя обзорной работе [4], мы их будем называть системами Уолша, Уолша-Пэли и Уолша-Качмажа (определение см. в [4], стр. 148—150).

Из этих систем более подробно исследовалась система Уолша-Пэли.

Сравнение результатов по системам Уолша-Пэли и Уолша-Качмажа (см. [4], стр. 173) показывает, что перестановки внутри „пачек" уже заметно влияют на свойства соответствующих систем. Однако, как будет показано в данной работе, в вопросах, связанных со сходимостью в том или ином смысле, системы Уолша и Уолша-Пэли (а на самом деле некоторый класс переставленных систем) ведут себя одинаково.

Пусть X и Y — пространства с мерой, и дано отображение α: $X\to Y$ такое, что для любого измеримого $E\subset Y$ прообраз $\alpha^{-1}(E)$ также измерим и

$$|\alpha^{-1}(E)|=|E|.$$

При помощи этого отображения определим оператор A: $Af=f\circ\alpha$, где f — вещественнозначная функция, определенная на Y.

Следующие свойства оператора A очевидны:

$$A(f+g)=Af+Ag,\ A(f\cdot g)=Af\cdot Ag,\ Ac=c\ (c=\text{const}),$$

$$|Af|=A|f| \text{ и, вообще:}$$

a) для любого n

$$AF(f_1, f_2, \cdots, f_n) = F(Af_1, Af_2, \cdots, Af_n),$$

где $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ — произвольная n-мерная функция, определенная на $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{X}}} f_i(Y)$.

b) Если f измерима, то Af также измерима.

Это сразу вытекает из определения измеримости и равенства (1).

c) Если f интегрируема, то Af также интегрируема, причем

$$\int\limits_Y f\,dy = \int\limits_X Af\,dx.$$

Это свойство также легко проверить, учитывая равноизмеримость f и Af.

Из свойств а) и с) вытекают свойства

d) если $f \in L_p(Y)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то $Af \in L_p(X)$, причем

$$\|f\|_{L_p(Y)} = \|Af\|_{L_p(X)}$$

и

e) если $f \in S(Y)$, то $Af \in S(X)$, причем

$$\|f\|_{S(Y)} = \|Af\|_{S(X)},$$

где $S(X)$ — пространство почти всюду на X конечных функций g с нормой Фреше

$$\|g\|_{S(X)} = \int\limits_X \frac{|g|}{1+|g|}\,dx.$$

Определение. Систему функций $\{\tilde{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенных на пространстве X, назовем подобной системе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенной на Y, если для любого n

$$\tilde{f}_n = Af_n$$

почти всюду на X.

В случае, когда α является взаимно-однозначным, сохраняющим меру отображением, то системы $\{f_n\}$ и $\{\tilde{f}_n\}$ называются изоморфными.

Из свойств оператора A непосредственно вытекает, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ сходится почти всюду на Y (на множестве меры $\lambda > 0$, равномерно, абсолютно, по норме L_p, по мере, суммируется линейным методом T) к функции f, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{f}_n$ сходится почти всюду на X (на множестве меры $\lambda > 0$, равномерно, абсолютно, по норме L_p, по мере, суммируется линейным методом T) к функции $\tilde{f} = Af$.

Как известно из работ А. М. Олевского (см. [1], [2], [3]), такие обобщения систем Хаара играют существенную роль в ряде задач общей теории полных ортонормированных систем и базисов в функциональных пространствах.

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные обобщения систем Радемахера и Уолша.

Пусть $n=2^m+k$, где $m=[\log_2 n]$, $0\leqslant k\leqslant 2^m-1$. Через Δ_n обозначим полуинтервал $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$. Система $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

1) $|\Delta_n|=2^{-[\log_2 n]}$, 2) $\Delta_{2n}\cup\Delta_{2n+1}=\Delta_n$, 3) $\Delta_{2n}\cap\Delta_{2n+1}=\varnothing$.

Пусть далее $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств из [0,1], удовлетворяющих аналогичным условиям

1) $|T_n|=2^{-[\log_2 n]}$, 2) $T_{2n}\cup T_{2n+1}=T_n$, 3) $T_{2n}\cap T_{2n+1}=\varnothing$.

Определим сперва отображение α: $T_1\to[0,1]$: пусть

$$t\in T_1\cap T_{n_1}\cap T_{n_2}\cap,\cdots,\ \text{где}\ n_m=2^m+\sum_{i=1}^{m}p_i 2^{m-i},$$

$p_i=0$ или 1 $(i=1, 2,\cdots)$ и не зависит от m $(m=1, 2,\cdots)$, тогда

$$x=\alpha(t)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\,2^{-i},\ \text{т. е.}\ \alpha(t)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{n_i}.$$

Справедлива следующая

Лемма. *Для любого измеримого* $E\subset[0,1]$ $\alpha^{-1}(E)$ *также измеримо и* $|E|=|\alpha^{-1}(E)|$.

Доказательство. Пусть $U=[0,1]\cap V$, где V — открытое множество. Тогда U можно представить в виде

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{n_i},\ \text{где}\ \Delta_{n_i}\cap\Delta_{n_j}=\varnothing\ \text{при}\ i\neq j.$$

Отсюда

$$\alpha^{-1}(U)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\alpha^{-1}(\bar{\Delta}_{n_i})=\bigcup_{i=1}^{\infty}T_{n_i}.$$

Последнее равенство справедливо, так как сумма $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}$ вместе с каждым полуинтервалом Δ_{n_i} содержит соседний полуинтервал слева (если левый конец Δ_{n_i} не совпадает с нулем) и соседний полуинтервал справа (если правый конец Δ_{n_i} не совпадает с единицей).

Но так как $|\Delta_n|=|T_n|$ для любого n и $T_{n_i}\cap T_{n_j}=\varnothing$ при $i\neq j$, то получаем

$$|\alpha^{-1}(U)| = \left|\bigcup_{l=1}^{\infty} T_{n_l}\right| = \sum_{l=1}^{\infty} |T_{n_l}| = \sum_{l=1}^{\infty} |\Delta_{n_l}| = |U|.$$

Следовательно, для любого измеримого $E \subset [0,1]$ внешняя мера

$$m^* [\alpha^{-1}(E)] \leqslant \inf_{\bigcup_k T_{n_k} \supset \alpha^{-1}(E)} |\bigcup_k T_{n_k}| = \inf_{U \supset E} |\alpha^{-1}(u)| = \inf_{u \supset E} |U| = |E|,$$

где inf в правой части неравенства берется по всем открытым $U \supset E$.

Отсюда сразу вытекает, что

$$m_* [\alpha^{-1}(E)] = 1 - m^* [\alpha^{-1}([0,1] \setminus E)] \geqslant |E|,$$

т. е. $\alpha^{-1}(E)$ измеримо и $|\alpha^{-1}(E)| = |E|$.

Лемма полностью доказана.

Определим на T_1 ортонормированные системы функций $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$:

$$\tilde{r}_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \in \bigcup_{l=0}^{2^n-1} T_{2(2^n+l)} \\ -1 \text{ при } t \in \bigcup_{l=0}^{2^n-1} T_{2(2^n+l)+1} \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$\tilde{w}_0(t) \equiv 1, \; \tilde{w}_n(t) = \tilde{r}_m(t) \prod_{l=1}^{m} [\tilde{r}_{m-l}(t)]^{p_l} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

где $n = 2^m + \sum_{l=1}^{m} p_l 2^{m-l}$, $p_l = 0$ или 1, $m = [\log_2 n]$.

Нетрудно проверить, что почти всюду на T_1

$$\tilde{r}_n = r_n \circ \alpha, \; \tilde{w}_n = w_n \circ \alpha \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

где $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система Радемахера и $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система Уолша-Пэли. Из равенств (1) и доказанной леммы следует, что системы $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$ подобны, соответственно, системам Радемахера и Уолша-Пэли.

Кроме того оказывается, что при соответствующем выборе системы множеств $\{T_n\}$, определенные выше системы $\{\tilde{r}_n\}$ и $\{\tilde{w}_n\}$ совпадают почти всюду на $[0,1]$ с некоторыми подсистемами и перестановками системы Уолша.

Рассмотрим какие именно перестановки и подсистемы системы Уолша подобны системам Уолша-Пэли и Радемахера.

Как известно, любое натуральное n единственным образом можно представить в виде конечной суммы

$$\sum_{i=0}^{m} q_i 2^i, \text{ где } q_m = 1, \; q_i = 0 \text{ или } 1 \; (i=0, 1, \cdots, m-1), \; m = [\log_2 n].$$

Вектор $\{q_0, q_1, \cdots, q_m, 0, 0, \cdots\}$, соответствующий числу n, обозначим через $\bar{n}$.

Суммой двух векторов $\bar{x} = \{x_k\}$ и $\bar{y} = \{y_k\}$ назовем вектор $\bar{z} = \{z_k\}$, где $z_k = |x_k - y_k|$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ назовем линейно независимой, если любая конечная сумма $\sum_{l=1}^{l} \bar{n}_{k_l}$ отлична от нуля (т. е. не равна вектору $\{0, 0, \cdots\}$).

Возьмем некоторую подсистему $\{w_{n_k}\}$ системы Уолша-Пэли*.

Теорема 1. *Система $\{w_{n_k}\}$ является подобной системе Радемахера в том и только в том случае, когда последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ линейно независима.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следующих соображений. Пусть для некоторых n_{k_l}

$$\sum_{l=0}^{l} \bar{n}_{k_l} = 0.$$

Тогда для тех же n_{k_l} будем иметь

$$\prod_{l=0}^{l} w_{n_{k_l}} \equiv 1$$

почти всюду на $[0, 1]$, так как в данном произведении каждая функция системы Радемахера участвует четное число раз. А это значит, что система $\{w_{n_k}\}$ не подобна системе Радемахера (аналогичное равенство для системы Радемахера не может иметь места).

Для доказательства достаточности удобными являются следующие обозначения:

$$\{\varphi\}^0 = \{t: \varphi(t) > 0\}, \ \{\varphi\}^1 = \{t: \varphi(t) < 0\}.$$

Пусть теперь $\{n_k\}$ линейно независима. Для того чтобы доказать, что система $\{w_{n_k}\}$ подобна системе Радемахера достаточно показать, что для любого l

$$\left|\bigcap_{k=0}^{l} \{w_{n_k}\}^{i_k}\right| = 2^{-l-1}, \tag{2}$$

где $\{i_k\}_{k=0}^{l}$ — произвольный набор нулей и единиц.

После чего, при соответствующем подборе множеств $T_n (n = 1, 2, \cdots)$ система $\{\bar{r}_n\}$ почти всюду на $[0, 1]$ совпадает с системой $\{w_{n_k}\}$.

Покажем сперва, что для любых n и n' $(n \neq n')$ и для любых i и i'

---

* Результаты этой работы доложены на семинаре по теории функций в Институте математики АН Арм.ССР в апреле 1973 г.

$$\{w_n\}^i \cap \{w_{n'}\}^{i'} = \{w_n\}^i \cap \{w_m\}^j, \tag{3}$$

где $j = |i - i'|$, $\bar{m} = \bar{n} + \bar{n}'$ и $w_m = w_n \cdot w_{n'}$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — функции системы Уолша-Пэли такие, что φ_1 и φ_2 являются произведениями различных функций системы Радемахера и

$$w_n = \varphi_1 \cdot \varphi_3, \quad w_{n'} = \varphi_2 \cdot \varphi_3, \quad w_m = \varphi_1 \cdot \varphi_2.$$

Тогда

$$\{w_n\}^i = \{\varphi_1 \cdot \varphi_3\}^i = (\{\varphi_3\}^0 \cap \{\varphi_1\}^i) \cup (\{\varphi_3\}^1 \cap \{\varphi_1\}^{|i-1|}),$$

$$\{w_{n'}\}^{i'} = \{\varphi_2 \cdot \varphi_3\}^{i'} = (\{\varphi_3\}^0 \cap \{\varphi_2\}^{i'}) \cup (\{\varphi_3\}^1 \cap \{\varphi_2\}^{|i'-1|}),$$

$$\{w_m\}^j = \{\varphi_1 \cdot \varphi_2\}^j = (\{\varphi_1\}^i \cap \{\varphi_2\}^{i'}) \cup (\{\varphi_1\}^{|i-1|} \cap \{\varphi_2\}^{|i'-1|}).$$

Отсюда сразу вытекает соотношение (3)*, что позволяет при доказательстве равенства (2) ограничиться случаем, когда функции w_{n_k} и $w_{n_{k'}}$ взяты из различных „пачек“ системы Уолша-Пэли. А в этом случае равенство (2) становится очевидным.

Следствие. Любая перестановка любой подсистемы Радемахера подобна системе Радемахера.

Заметим, что в случае, когда определенная выше система $\{\bar{w}_n\}$ почти всюду на [0, 1] совпадает с некоторой перестановкой системы Уолша, то отображение α становится взаимно-однозначным, сохраняющим меру.

Теорема 1 позволяет описать класс всех перестановок системы Уолша, которые изоморфны системе Уолша-Пэли. А именно, верна

Теорема 2. *Перестановка $\{w_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ системы Уолша-Пэли является изоморфной системе Уолша-Пэли в том и только в том случае, когда последовательность $\{n_{2^m}\}_{m=0}^{\infty}$ линейно независима и для любого k*

$$w_{n_k} = w_{n_{2^m}} \cdot w_{n_l},$$

где $k = 2^m + l$, $0 \leqslant l \leqslant 2^m - 1$.

Следствие. Система Уолша-Качмажа не изоморфна системе Уолша-Пэли.

Теорема 3. *Система Уолша $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ изоморфна системе Уолша-Пэли* **.

Доказательство. Легко видеть, что система $\{\varphi_{2^n}\}_{n=0}^{\infty}$ подобна системе Радемахера (функции этой системы взяты из различных „пачек“ системы Уолша-Пэли).

Тогда система $\{\bar{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\bar{\varphi}_0 \equiv 1$,

$$\bar{\varphi}_n = \varphi_{2^m} \prod_{l=1}^{m} [\varphi_{2^{m-l}}]^{p_l} \text{ при } n = 2^m + \sum_{l=1}^{m} p_l 2^{m-l},$$

---

* В случае, когда одна из φ_i ($i = 1, 2, 3$) тождественно равна 1, доказательство (3) более упрощается.

** При корректуре, автору стало известно, что подобные результаты получены Ф. Шиппом в работе „О некоторых перестановках рядов по системе Уолша“ (находится в печати).

($p_i = 0$ или 1) будет подобной системе Уолша-Пэли. Далее, так как функция φ_{2^m} имеет 2^m точек разрыва и множества точек разрыва φ_{2^m} и φ_{2^k} не пересекаются при $m \neq k$, причем в точках разрыва одной из них другая отлична от нуля, то $\bar{\varphi}_n$ будет иметь n точек разрыва. Следовательно, согласно теореме Бирнса-Свика (см. [5]) система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает всюду на $[0, 1])$ с системой Уолша, т. е. система Уолша также изоморфна системе Уолша-Пэли. Теорема 3 показывает, что свойства системы Уолша-Пэли, связанные со сходимостью в том или ином смысле, переносятся и на систему Уолша.

Приведем некоторые из них. Пэли доказал (см. [6]), что система Уолша-Пэли является базисом в L_p $(1 < p < \infty)$, а Биллардом было доказано (см. [7]), что система Уолша-Пэли является системой сходимости почти всюду, т. е. из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$ вытекает сходимость почти всюду ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n$.

Теорема 4. *Система Уолша является системой сходимости почти всюду и базисом в* L_p $(1 < p < \infty)$.

В заключение автор благодарит Р. Н. Овсепяна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет Поступила 14.III.1974

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ. Ռադեմախերի և Ուոլշի սիստեմների մի ընդհանրացման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքի հիմնական արդյունքը կազմում է 3-րդ թեորեմը, որը պնդում է, որ Ուոլշի և Ուոլշ-Պելիի սիստեմները իզոմորֆ են։ Այստեղից հետևում է, որ Ուոլշի սիստեմը օժտված է մետրիկական նույնպիսի հատկություններով, ինչպես և Ուոլշ-Պելիի սիստեմը։

A. V. BAKSHETZIAN. *On a generalisation of Rademacher and Walsh systems* (summary)

The main result of the paper states that the Walsh and the Walsh-Paley systems are isomorphic.

This implies that the metrical properties of the Walsh-Paley system are shared by the Walsh system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Олевский.* Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам, ДАН СССР, 139, № 3, 1961, 545—548.
2. *А. М. Олевский.* О локализации особенностей Карлемана на компактах меры нуль, ДАН СССР, 202, № 1, 1972.
3. *А. М. Олевский.* Ряды Фурье и функции Лебега, УМН, 22, № 3, 1967, 237—239.
4. *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн.* Ряды по системе Уолша и их обобщение, Итоги науки, сер. мат., Математический анализ, 1970, М., 1971, 147—202.
5. *J. S. Byrns, D. A. Swick.* Instant Walsh functions SIAM Rev., 12, № 1, 1970, 131.
6. *R. Peley.* A remarkable sistem of orthogonal functions, Paroc London Math. Soc., 34, 1932, 241—279.
7. *P. Billard.* Sur la convergence dresque partout des séries presque de Fourier-Walsh des functions de l'espace L^2 (0, 1), Studil math., 28, № 3, 1967, 363—388.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS