ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceeding Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ОБ „УГЛОВЫХ“ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть R^m — m-мерное евклидово пространство. Пусть $G(r)$ — неотрицательная, невозрастающая функция, определенная при $r>0$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0 G(r)\, r^{m-1}\, dr < \infty. \tag{1}$$

Мы скажем, что $f \in \mathfrak{M}_{G,h,p}$, если f допускает представление

$$f(y) = \int_{R^m} G(|x-y|)\; g(x)\, dx, \tag{2}$$

причем

$$\|f\| = \left(\int_{R^m} |g(x)|^p\, h(x_1)\, dx\right)^{1/p} < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{3}$$

Здесь x_1 — первая координата точки x, h — неотрицательная, четная функция, монотонная при положительных значениях аргумента.

Легко заметить, что если $g(x)$ — непрерывная и финитная функция, то $f(y)$, определяемая соотношением (2), тоже непрерывна.

Введем следующее обозначение: если μ — неотрицательная мера, сосредоточенная на E и имеющая единичную массу, то будем писать $\mu \prec E$.

Для изучения пространств $\mathfrak{M}_{G,h,p}$ нам потребуются емкости, определяемые следующим образом: если $E \subset R^m$ — борелевское множество, то

$$C_h(E) = \left(\inf\left(\int_{R^m}\left(\int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(x)\right)^q h^{-q/p}(y_1)\, dy\right)^{1/q}\right)^{-1},$$

когда $p>1$ $(1/p+1/q=1)$, и

$$C_h(E) = \left(\inf\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y \in R^m} h^{-1}(y_1) \int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(x)\right)\right)^{-1},$$

когда $p=1$, где inf берется по всем мерам $\mu \prec E$.

Нетрудно заметить, что введенные нами емкости обладают следующими свойствами:

1. $C_h(E) \geqslant 0$ для любого $E \subset R^m$,

2. Если $F \subset E$, то $C_h(F) \leqslant C_h(E)$,

3. $C_h\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} C_h(E_k)$.

Пусть f непрерывна и принадлежит $\mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$. Рассмотрим следующее множество:

$$E = \{x \in R^m / f(x) > 1\}.$$

Для любой меры $\mu \prec E$, при $p > 1$ мы имеем

$$1 < \int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_{R^m}\int_{R^m} G(|x-y|)\, g(y)\, d\mu(x)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{R^m}\left(\int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(x)\right)^q h^{-q/p}(y_1)\, dy\right)^{1/q}\left(\int_{R^m} |g(y)|^p h(y_1)\, dy\right)^{1/p}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$C_h(E) \leqslant \|f\|. \tag{4}$$

При $p=1$ доказательство неравенства (4) аналогично. В силу неравенства (4) мы можем утверждать, что следующая теорема является частным случаем теоремы Аронщайна и Смита [1].

Теорема 1. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность непрерывных функций, принадлежащих $\mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$, и*

$$\lim_{n, m \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0.$$

Тогда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $E \subset R^m$ такое, что $C_h(E) < \varepsilon$ и $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $R^m \setminus E$.

Следствие. Если $f \in \mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $E \subset R^m$ такое, что $C_h(E) < \varepsilon$ и f определена и непрерывна на $R^m \setminus E$.

Для дальнейшего нам потребуется одно неравенство типа известного неравенства Харди и Литтльвуда. Теперь мы переходим к формулировке этого неравенства.

Пусть $f(x)$ — неотрицательная, измеримая функция на $-\infty < x < \infty$. Положим

$$E_f(\lambda) = \{x / f(x) > \lambda\}.$$

Определим функцию f^* следующим образом: $f^*(x) > \lambda$, если $|x| < 1/2\, m(E_f(\lambda))$ и $f^*(x) \geqslant \lambda$, если $|x| \geqslant 1/2\, m(E_f(\lambda))$ для любого $0 \leqslant \lambda < \infty$, где m — мера Лебега на $(-\infty, \infty)$.

Пусть $h(t)$ — неотрицательная, четная функция, монотонная при положительных значениях аргумента. Введем функцию $h_\alpha(t)$ $(\alpha > 0)$ следующим образом:

$$h_\alpha(t)=\begin{cases} h(t-\alpha), & \text{если } t<-\alpha\\ h_1(2t), & \text{если } |t|<\alpha\\ h(t+\alpha), & \text{если } t>\alpha,\end{cases}$$

где $h_1(t)=h(t)$, когда $h(t)$ возрастает при $t>0$ и

$$h_1(t)=\begin{cases} h(t), & \text{если } |t|>2\alpha\\ \operatorname*{essinf}\limits_{-2\alpha<x<2\alpha} h(x), & \text{если } |t|\leqslant 2\alpha,\end{cases}$$

когда $h(t)$ убывает при $t>0$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть f — неотрицательная, измеримая функция, а h — неотрицательная, четная функция, монотонная при $t>0$. Если $\varphi(t)$ — неотрицательная и симметрично убывающая функция, а $|\beta|<\alpha$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,f(t+\beta)\,dt\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,f_\alpha(t)\,dt$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\alpha^p(t)\,h_\alpha(t)\,dt\leqslant 2^{p-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^p(t)\,h(t)\,dt\quad(1\leqslant p<\infty),$$

где

$$f_\alpha(t)=\begin{cases} f(t-\alpha), & \text{если } t<-\alpha\\ 2\,(f\cdot\chi_{2\alpha})^*(2t), & \text{если } |t|<\alpha\\ f(t+\alpha), & \text{если } t>\alpha.\end{cases}$$

Здесь $\chi_\gamma(t)$ — характеристическая функция интервала $(-\gamma,\gamma)$.

Пусть P — ортогональный проектор из R^m на гиперплоскость $R^{m-1}=\{x\in R^m/x_1=0\}$. Через $E^{(\varepsilon)}$ обозначим подмножество множества E, находящееся в полосе $\{x\in R^m/|x_1|<\varepsilon\}$. Введем множество

$$\widetilde{E}=\bigcap_{n=1}^{\infty}P\left(E^{(\varepsilon_n)}\right),$$

где $\varepsilon_n\downarrow 0$. Легко заметить, что $\widetilde{E}$ в действительности не зависит от последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Используя конструкцию Ю. Г. Решетняка [2] и лемму 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $h(t)$ — неотрицательная, четная функция, монотонная при $t>0$, то*

$$C_h(\widetilde{E})\leqslant 2^{\frac{p-1}{p}}\,C_h(E)\quad(1\leqslant p<\infty)$$

для любого измеримого множества E.

Исходя из следствия теоремы 1 и теоремы 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f\in\mathfrak{M}_{G,h,p}$, тогда f имеет конечные нормальные граничные значения всюду на R^{m-1}, кроме некоторого множества $E\subset R^{m-1}$, для которого $C_h(E)=0$.*

Доказательства результатов этого параграфа можно найти у автора [5].

2°. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые подпространства пространств $\mathfrak{M}_{\alpha, h, p}$ и докажем более тонкие граничные свойства функций из этих подпространств. Для введения и изучения этих подпространств нам понадобится несколько новых понятий.

Обозначим через $R^m_+ = \{x \in R^m / x_1 > 0\}$. Через $C_0(R^m)$ обозначим непрерывные функции, определенные на R^m и стремящиеся к нулю в бесконечности.

Введем понятие выметания. Выметание меры μ будет обозначаться через $\hat{\mu}$. Выметания мер Дирака определяются следующими свойствами:

1. $\hat{\delta}_x$ — неотрицательная мера в R^m и $\hat{\delta}_x(R^m) = 1$;

2. если $x \overline{\in} R^m_+$, то $\hat{\delta}_x = \delta_x$;

3. если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R^m$ сходится к x, то для любого $\varphi \in C_0(R^m)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_{x_n}(y) = \int_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_x(y).$$

Пусть μ — некоторая конечная мера в R^m. Рассмотрим выражение

$$L(\varphi) = \int_{R^m}\left(\int_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_x(y)\right) d\mu(x),$$

где $\varphi \in C_0(R^m)$. Очевидно, что имеет место неравенство

$$|L(\varphi)| \leqslant \max_{x \in R^m} |\varphi(x)| \cdot |\mu|, \tag{5}$$

где $|\mu|$ — полная вариация меры μ. Следовательно L — непрерывный линейный функционал на $C_0(R^m)$. Выметание меры μ определяется как мера, представляющая функционал L.

Для любой меры μ определим потенциал этой меры следующим образом:

$$U^{(\mu)}(x) = \int_{R^m} G(|x-y|)\, d\mu(y).$$

Мы скажем, что выметание согласовано с ядром G, если для любой неотрицательной меры μ имеет место следующее неравенство:

$$U^{(\mu)}(x) \geqslant U^{(\hat{\mu})}(x). \tag{6}$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что выметание согласовано с ядром G.

Определим новые емкости следующим образом: если E — борелевское множество в R^m, то

$$\hat{C}_h(E)=\left(\inf\left(\int_{R^m}(U^{(\hat{\mu})}(x))^q\, h^{-q/p}(x_1)\,dx\right)^{1/q}\right)^{-1},$$

когда $p>1$ $(1/p+1/q=1)$, и

$$\hat{C}_h(E)=(\inf(\operatorname*{esssup}_{y\in R^m} h^{-1}(y_1)\, U^{(\hat{\mu})}(y)))^{-1},$$

когда $p=1$, где inf берется по всевозможным мерам $\mu\prec E$.

Легко заметить, что введенные нами емкости $\hat{C}_h$ обладают теми же свойствами, что и C_h.

Из (6) следует, что для любого $E\subset R^m$

$$C_h(E)\leqslant\hat{C}_h(E).$$

Введем пространство $\hat{\mathfrak{M}}_{O,h,p}\subset\mathfrak{M}_{O,h,p}$ следующим образом. Мы скажем, что $f\in\hat{\mathfrak{M}}_{O,h,p}$ если существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{M}_{O,h,p}\cap C_0(R^m)$ такая, что $\|f_n-f\|\to 0$ и f_n для любого n обладает следующим свойством:

$$\int_{R^m} f_n(x)\,d\mu(x)=\int_{R^m} f_n(x)\,d\hat{\mu}(x) \qquad (7)$$

для любой конечной меры μ.

Теорема 4. *Если $f\in\hat{\mathfrak{M}}_{O,h,p}$, то для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество E такое, что $\hat{C}_h(E)<\varepsilon$ и функция f определена и непрерывна на $R^m\setminus E$.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathfrak{M}_{O,h,p}\cap C_0(R^m)$ и, кроме этого, для любой меры μ имеет место равенство

$$\int_{R^m} f(x)\,d\mu(x)=\int_{R^m} f(x)\,d\hat{\mu}(x).$$

Рассмотрим множество

$$E=\{x\in R^m/f(x)>1\}.$$

Для любой меры $\mu\prec E$, при $p>1$ мы имеем

$$1<\int_{R^m} f(x)\,d\mu(x)=\int_{R^m} f(x)\,d\hat{\mu}(x)=\int_{R^m}\int_{R^m} G(|x-y|)\,g(y)\,d\hat{\mu}(x)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{R^m}\left(\int_{R^m} G(|x-y|)\,d\hat{\mu}(x)\right)^q h^{-q/p}(y_1)\,dy\right)^{1/q}\left(\int_{R^m}|g(y)|^p h(y_1)\,dy\right)^{1/p}.$$

Следовательно

$$\hat{C}_h(E)\leqslant\|f\|. \qquad (8)$$

При $p=1$ доказательство неравенства (8) аналогично.

Применяя теперь теорему Ароншайна и Смита [1], нетрудно получить требуемый результат.

3°. В этом n^0 мы докажем одно важное свойство емкости $\hat{C}_h$.

Для каждой точки $x \in R^m$ через $\Delta_c(x)$ $(c>1)$ обозначим множество тех $y \in R^m$, которые удовлетворяют условию

$$c\,\hat{\delta}_y(E) \geqslant \hat{\delta}_x(E)$$

для любого ограниченного измеримого множества $E \subset R^m$.

Заметим, что если $x \in R^m$, то $\Delta_c(x) \ni x$ для любого $c>1$.

Для любого множества $E \subset R^m$ через E_c обозначим следующее множество:

$$E_c = \bigcup_{x \in E} \Delta_c(x).$$

Лемма 2. *Если $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ и при $n=1, 2, \cdots$, $y_n \in \Delta_c(x_n)$, то $y_0 \in \Delta_c(x_0)$.*

Доказательство. Пусть E — ограниченное измеримое множество. Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать ограниченное открытое множество $G_\varepsilon \supset E$ и замкнутое множество $F_\varepsilon \subset E$ такие, что

$$\hat{\delta}_{x_0}(E) - \varepsilon \leqslant \hat{\delta}_{x_0}(F_\varepsilon), \quad \hat{\delta}_{y_0}(E) + \varepsilon \geqslant \hat{\delta}_{y_0}(G_\varepsilon).$$

Пусть $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ — непрерывная функция в R^m, равная нулю вне G_ε и равная единице на F_ε. Так как при $n=1, 2$. $y_n \in \Delta_c(x_n)$ то,

$$c\int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{y_n}(x) \geqslant \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{x_n}(x), \quad n=1, 2, \cdots. \tag{9}$$

В силу третьего свойства выметаний мы в (9) можем перейти к пределу под знаком интегралов. Переходя к пределу мы получаем

$$c\int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{y_0}(x) \geqslant \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{x_0}(x).$$

Следовательно

$$\hat{\delta}_{x_0}(E) - \varepsilon \leqslant \hat{\delta}_{x_0}(F_\varepsilon) < \int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{x_0}(x) \leqslant c\int_{R^m} \varphi(x)\, d\hat{\delta}_{y_0}(x) \leqslant$$

$$\leqslant c\,\hat{\delta}_{y_0}(G_\varepsilon) \leqslant c\,(\hat{\delta}_{y_0}(E) + \varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ мы имеем

$$\hat{\delta}_{x_0}(E) \leqslant c\,\hat{\delta}_{y_0}(E),$$

откуда следует, что $y_0 \in \Delta_c(x_0)$.

Следствие. *Для любого компактного множества K множество K_c замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K_c$ сходится к y_0. Существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ такая, что $y_n \in \Delta_c(x_n)$. В силу компактности K, из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in K$. В силу леммы 2 $y_0 \in \Delta_c(x_0)$. Следовательно, $y_0 \in K_c$.

Лемма 3. *Пусть $K \subset R^m$ компактно. Тогда существует измеримая по Борелю функция π, определенная на K_c и принимающая значения в K:*

$$\pi \colon K_c \to K$$

такая, что $x \in \Delta_c(\pi(x))$ для любого $x \in K_c$.

Доказательство. Пространство R^m гиперплоскостями, перпендикулярными координатным осям, разобьем на кубы со стороной, равной 1. Кубы, которые пересекаются с K обозначим: $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n_1}$. Введем множества

$$\sigma_1 = (K \cap \delta_1)_c, \ \sigma_k = (K \cap \delta_k)_c \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} (K \cap \delta_l)_c, \ k = 2, \cdots, n_1.$$

На втором шаге кубы $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n_1}$ мы разбиваем на более мелкие кубы со стороной 2^{-1} и так далее. Предположим, что сделано k шагов и при этом выбраны кубы $\{\delta_{i_1, \ldots, i_k}\}$ и множества $\{\sigma_{i_1, \ldots, i_k}\}$ такие, что удовлетворяются условия:

$$\begin{aligned} &1. \ \Big(\bigcup_{(i_k)} \delta_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k}\Big) \cap K = \delta_{i_1, \ldots, i_{k-1}} \cap K; \\ &2. \ \bigcup_{(i_k)} \sigma_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k} = \sigma_{i_1, \ldots, i_{k-1}}; \\ &3. \ \sigma_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i} \cap \sigma_{i_1, \ldots, i_{k-1}, j} = \varnothing, \text{ если } i \neq j; \\ &4. \ \sigma_{i_1, \ldots, i_k} \subset (K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k})_c. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда на $(k+1)$-ом шаге кубы $\{\delta_{i_1, \ldots, i_k}\}$ разбиваются на более мелкие со стороной $2^{-(k+1)}$; кубы, пересекающие K и содержащиеся в $\delta_{i_1, \ldots, i_k}$, обозначаются $\delta_{i_1, \ldots, i_k, 1}; \delta_{i_1, i_2, \ldots, i_k, 2}; \cdots$ (их всего лишь конечное число). Введем следующие множества:

$$\sigma_{i_1, \ldots, i_k, 1} = \sigma_{i_1, \ldots, i_k} \cap (K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k, 1})_c,$$

$$\sigma_{i_1, \ldots, i_k, i} = \sigma_{i_1, \ldots, i_k} \cap \Big((K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k, i})_c \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} (K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k, j})_c\Big), \ i = 2, 3, \cdots.$$

Очевидно, что построенные нами семейства множеств удовлетворяют условию (10) с заменой k на $k+1$. Заметим, что из следствия леммы 2 и из вышеприведенной конструкции следует, что $\sigma_{i_1, \ldots, i_n}$ измеримо по Борелю при любом наборе $(i_1, \cdots, i_n)$.

Пусть $x \in K_c$. Так как $\bigcup_{(i)} \sigma_i = K_c$ и $\{\sigma_i\}$ не пересекаются друг с другом, то существует единственный индекс i_1 такой, что $\sigma_{i_1} \ni x$. Из пунктов 2 и 3 условия (10) следует, что существует единственная последовательность $i_1, i_2, \cdots$ такая, что $\sigma_{i_1, \ldots, i_n} \ni x$ при любом n.

Рассмотрим последовательность кубов $\delta_{i_1} \supset \delta_{i_1, i_2} \supset \cdots$. Так как сторона куба $\delta_{i_1, \ldots, i_n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ и все они пересекаются с множеством K, то существует единственная точка $y \in K$ такая, что $y \in \delta_{i_1, \ldots, i_n}$ при любом n. Значение π в точке x мы определим равным y. Так как $x \in \sigma_{i_1, \ldots, i_k} \subset (K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k})_c$, то существует последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ такая, что $y_k \in K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_k}$ и $x \in \Delta_c (y_k)$. Очевидно, что $y_k \to \pi(x)$. В силу леммы 2 $x \in \Delta_c (\pi(x))$.

Докажем, что π измеримо по Борелю. Для этого достаточно показать, что $\pi^{-1} (\delta_{i_1, \ldots, i_n})$ измеримо. Через J_m обозначим множество индексов $(j_1, \cdots, j_m)$, для которых $K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n} \cap \delta_{j_1, \ldots, j_m} \neq \varnothing$. Докажем, что

$$\pi^{-1} (\delta_{i_1, \ldots, i_n}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{(j_1, \cdots, j_m) \in J_m} \sigma_{j_1, \cdots, j_m} \right). \tag{11}$$

Пусть $x \in \pi^{-1} (\delta_{i_1, \ldots, i_n})$. Существует последовательность $j_1^0, j_2^0, \cdots$ такая, что $x \in \sigma_{j_1^0, \ldots, j_m^0}$ для любого m. По определению функции $\pi \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0} \ni \pi(x)$ для любого m. Следовательно $\pi(x) \in K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n} \cap \cap \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0}$. Поэтому $(j_1^0, \cdots, j_m^0) \in J_m$ для любого m, откуда следует, что x принадлежит правой части (11).

Пусть

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{(j_1, \cdots, j_m) \in J_m} \sigma_{j_1, \cdots, j_m} \right).$$

Из пунктов 2 и 3 условия 10 следует, что существует последовательность $j_1^0, j_2^0, \cdots$ такая, что $x \in \sigma_{j_1^0, \ldots, j_m^0}$ и $(j_1^0, \cdots, j_m^0) \in J_m$ для любого m. Следовательно

$$\pi(x) \in \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0} \text{ и } K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n} \cap \delta_{j_1^0, \ldots, j_m^0} \neq \varnothing$$

для любого m. Отсюда вытекает, что $\pi(x) \in K \cap \delta_{i_1, \ldots, i_n}$, или, что то же самое, $x \in \pi^{-1} (\delta_{i_1, \ldots, i_n})$.

Следствие. Если E открыто, то существует измеримая по Борелю функция π

$$\pi \colon E_c \to E$$

такая, что $x \in \Delta_c (\pi(x))$ для любого $x \in E_c$.

Доказательство. Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность компактов таких, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Согласно лемме 3 существуют измеримые по Борелю функции π_n такие, что

$$\pi_n \colon (K_n)_c \to K_n.$$

Определим функцию π следующим образом:

$$\pi(x) = \begin{cases} \pi_1(x), & \text{если } x \in (K_1)_c \\ \pi_{n+1}(x), & \text{если } x \in (K_{n+1})_c \setminus (K_n)_c, \quad n=1,\cdots. \end{cases}$$

Очевидно, что π обладает требуемыми свойствами.

Лемма 4. *Пусть E—открытое множество в R^m. Тогда для любой меры $\mu \prec E_c$ существует мера $\nu \prec E$ такая, что для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0(R^m)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\nu}(y) \leqslant c \int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\mu}(y).$$

Доказательство. Пусть $\mu \prec E_c$. Определим меру ν следующим образом: если F — измеримое подмножество в E, то

$$\nu(F) = \mu(\pi^{-1}(F)).$$

Пусть $\varphi \geqslant 0$ и $\varphi \in C_0(R^m)$, тогда мы имеем

$$\int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\mu}(y) = \int\limits_{E_c}\Big(\int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_z(y)\Big)\, d\mu(z).$$

Так как $z \in \Delta_c(\pi(z))$ для любого $z \in E_c$, то

$$c\int\limits_{E_c}\Big(\int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_z(y)\Big)\, d\mu(z) \geqslant \int\limits_{E_c}\Big(\int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_{\pi(z)}(y)\Big)\, d\mu(z) =$$

$$= \int\limits_{E}\Big(\int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\delta}_x(y)\Big)\, d\nu(x) = \int\limits_{R^m} \varphi(y)\, d\hat{\nu}(y).$$

Теорема 5. *Для любого открытого множества $E \subset R^m$ имеет место неравенство*

$$C_h(E_c) \leqslant c\, \hat{C}_h(E).$$

Доказательство. Пусть $\mu \prec E_c$ произвольно. Согласно лемме 4 существует мера $\nu \prec E$ такая, что

$$U^{(\hat{\nu})}(x) < c\, U^{(\hat{\mu})}(x)$$

для любого $x \in R^m$. Пусть $p > 1$. В силу (6) мы имеем

$$\int\limits_{R^m} (U^{(\hat{\nu})}(x))^q h^{-q/p}(x_1)\, dx \leqslant c^q \int\limits_{R^m} (U^{(\hat{\mu})}(x))^q h^{-q/p}(x_1)\, dx.$$

Следовательно

$$C_h(E_c) \leqslant c\, \hat{C}_h(E).$$

В случае $p = 1$ доказательство аналогично.

Пусть $x \in R^{m-1}$. Через $K_c^\varepsilon(x)$ обозначим множество тех $y \in R^m$, для которых $x \in P(\Delta_c^{(\varepsilon)}(y))$. Здесь P — ортогональный проектор из R^m на R^{m-1}, а

$$\Delta_c^{(\varepsilon)}(x) = \Delta_c(x) \cap \{z \in R^m / |z - Pz| < \varepsilon\}.$$

Определение. Пусть f — функция, определенная на некотором подмножестве R^m. Мы скажем, что f имеет „угловое" граничное значение в $x \in R^{m-1}$, если для любого $c > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что f определена на $K_c^\varepsilon(x)$ и существует следующий предел:

$$\lim_{K_c^\varepsilon(x) \ni y \to x} f(y).$$

Теорема 6. *Пусть $f \in \mathring{\mathfrak{M}}_{\alpha, h, p}$, тогда f имеет „угловые" граничные значения всюду на R^{m-1}, кроме некоторого множества E, для которого $C_h(E) = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество F такое, что $\mathring{C}_h(F) < \varepsilon$ и f определена и непрерывна на $R^m \setminus F$. В силу теорем 2 и 5 для любого c имеем

$$C_h(\widetilde{F}_c) \leqslant 2^{p-1/p} C_h(F_c) \leqslant 2^{p-1/p} c \cdot C_h(F) \leqslant 2^{p-1/p} \cdot c \cdot \varepsilon. \tag{12}$$

Докажем, что в любой точке $x \in R^{m-1} \setminus \widetilde{F}_c$ функция f имеет „угловые" граничные значения. Мы имеем

$$x \in R^{m-1} \setminus \widetilde{F}_c = R^{m-1} \setminus \Big(\bigcap_{\varepsilon>0} P\big((\bigcup_{y \in F} \Delta_c(y))^{(\varepsilon)}\big)\Big) =$$

$$= R^{m-1} \setminus \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{y \in F} P(\Delta_c^{(\varepsilon)}(y)) = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{y \in F} (R^{m-1} \setminus P(\Delta_c^{(\varepsilon)}(y)).$$

Следовательно, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$x \in R^{m-1} \setminus P(\Delta_c^{(\varepsilon_0)}(y))$$

для любого $y \in F$. Это означает, что

$$K_c^{(\varepsilon_0)}(x) \cap F = \varnothing.$$

Так как f непрерывна на $R^m \setminus F$, то она непрерывна на $K_c^{(\varepsilon_0)}(x)$ и, следовательно, существует предел

$$\lim_{K_c^{(\varepsilon_0)}(x) \ni y \to x} f(y).$$

Из этого следует, что если $E \subset R^{m-1}$ — множество, где нет „угловых" граничных значений для функции f, то $E \subset \bigcup_{c>1} \widetilde{F}_c$. Нетрудно заметить, что если $c_1 < c_2$, то $\widetilde{F}_{c_1} \subset \widetilde{F}_{c_2}$. Поэтому $\bigcup_{c>1} \widetilde{F}_c = \bigcup_{n=2}^{\infty} \widetilde{F}_n$. Пусть $c = n$, а

$\varepsilon = n^{-1} 2^{-(n-p-1)/p} \delta$, где δ— заранее фиксированное число. Тогда мы имеем

$$C_h(E) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} C_h(\bar{F}_h) < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \frac{\delta}{2}.$$

В силу произвольности $\delta > 0$, имеем $C_h(E) = 0$.

4°. В этом параграфе мы рассмотрим несколько конкретных примеров.

Рассмотрим классическое выметание, т. е. если $x \overline{\in} R^m_+$, то $\hat{\delta}_x = \delta_x$, если $x \in R^m_+$, то

$$\hat{\delta}_x(E) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\pi^{m/2}} \int\limits_{E \cap R^{m-1}} \frac{x_1}{|x-y|^m}\, dy,$$

где $E \subset R^m$ — измеримое множество.

Пусть $G(r)$, $r > 0$ —неотрицательная, невозрастающая функция и

$$\int\limits_0 G(r)\, r^{m-1}\, dr < \infty.$$

Если функция $G(|x|)$ супергармонична, то, очевидно, что имеет место неравенство согласованности (6). В случае, когда $G(r)$ дважды непрерывно дифференцируема, для выполнения неравенства (6) достаточно, чтобы $\Delta G(|x|) \geqslant 0$ или, что то же самое

$$rG''(r) + (m-1)\, G'(r) \geqslant 0, \quad r > 0.$$

В этом частном случае пространство $\hat{\mathfrak{M}}_{G, h, p}$ совпадает с пространством функций, которые принадлежат $\mathfrak{M}_{G, h, p}$ и гармоничны в R^m_+.

Теперь выясним, что из себя представляют множества $K_c^1(x)$.

Если $x \overline{\in} R^m_+$, то $\Delta_c(x) = x$. Пусть $x \in R^m_+$. Рассмотрим множество тех $y \in R^m$, для которых

$$c\, \hat{\delta}_y(E) > \hat{\delta}_x(E) \tag{13}$$

для любого $E \subset R^m$. Для выполнения неравенства (13) достаточно, чтобы

$$c\, \frac{y_1}{|y-z|^m} \geqslant \frac{x_1}{|x-z|^m}$$

для любого $z \in R^{m-1}$. Рассмотрим те точки y, для которых $x_1 = y_1$. Для таких точек мы получаем условие:

$$\sqrt[m]{c} \geqslant \max_{z \in R^{m-1}} \frac{|y-z|}{|x-z|}.$$

Для этого достаточно, чтобы имело место неравенство:

$$(1+|z|^2)\, c^{2/m} > 1+\left|\frac{P(x)-P(y)}{x_1}-z\right|^2$$

для любого $z \in R^{m-1}$, или

$$(1+|z|^2)\, c^{2/m} > 1+\left(\left|\frac{P(x)-P(y)}{x_1}\right|+|z|\right)^2.$$

А это имеет место, если

$$|P(x)-P(y)| \leq x_1 \sqrt{\frac{c^{2/m}-1}{2}}. \tag{14}$$

Пусть $z \in R^{m-1}$. Тогда из полученного нами равенства (14) легко следует, что $K^1_\varepsilon(x)$ содержит находящуюся в полосе $\{y \in R^m / 0 < y_1 < \varepsilon\}$ часть конуса с вершиной в точке z и с образующими, которые с нормалью в точке z образуют угол α $\left(\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{c^{2/m}-1}{2}}\right)$. Множество $K^1_\varepsilon(z) \cap (R^m \setminus R^m_+)$ это часть нормали в точке z, которая находится в полосе $\{y \in R^m / -\varepsilon < y_1 < 0\}$. Следовательно, в этом частном случае, если f имеет „угловое граничное значение в точке $z \in R^{m-1}$, то f имеет предел, когда мы приближаемся к точке z по некасательным к гиперплоскости R^{m-1} путям, находящимся в R^m_+ и по нормали, находящейся в $R^m \setminus R^m_+$. После этих замечаний уже нетрудно понять, что утверждает теорема 6 в этом частном случае.

Л. Карлесоном [3] и Х. Валлином [4] рассмотрены некасательные граничные свойства для некоторых классов гармоничных функций*.

У Х. Валлина рассматриваются пространства функций f, которые гармоничны в R^m_+ и

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2\, h(y_1)\, dy < \infty \tag{15}$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^m_+$. Здесь h — неотрицательная, измеримая функция, удовлетворяющая некоторым специальным условиям (см. Х. Валлин [4]). Наш метод позволяет изучить некасательные граничные свойства для гармонических функций, на которых поставлено условие типа (15) на производные более высоких порядков.

В заключение автор выражает благодарность Н. С. Ландкофу за внимание к работе и ценные замечания.

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ростовский инженерно-строительный
институт

Поступила 1.X.1973

* Результаты Х. Валлина являются обобщением результатов Карлесона.

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Որոշ ֆունկցիաների դասերի «անկյունային» եզրային արժեքների մասին *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում դիտարկվում են ինտեգրալ ներկայացում թույլ տվող ֆունկցիաների որոշ դասերի եզրային արժեքները։ Նկարագրվում են այն բազմությունները $R^{m-1} = \{(x_1, \cdots, x_m) \in R^m / x_1 = 0\}$*-ում, որտեղ այդ ֆունկցիաներն ունեն նորմալ եզրային արժեքներ։ Դիտարկվում են նաև վերոհիշյալ տարածությունների որոշ ենթատարածություններ։ Նկարագրվում են այն բազմությունները* R^{m-1}*-ում, որտեղ այդ ֆունկցիաներն ունեն «անկյունային» եզրային արժեքներ։*

A. A. VAGARSHAKIAN. *On „angular" boundary values of some classes of functions* (summary)

In the present paper the boundary values of some classes of functions, permiting integral representation are considered. The subsets of $R^{m-1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^m / x_1 = 0\}$, where these functions have normal boundary values, described. Some subspaces of spaces mentioned above are also considered. The sets in R^{m-1}, where these functions have „angular" boundary values, are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Aronszajn, K. T. Smith.* Functional spaces and functional completion, Ann. de l'inst. Fourier, 6, 1956, 125—185.
2. *Ю. Г. Решетняк.* О граничном поведении функций с обобщенными производными, Сиб. матем. журн., 13: 2, 1972, 411—419.
3. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.
4. *H. Wallin.* On the existance of boundary values of a class of Beppo Levi functions, Trans. Amer. Math. Soc., 120, 3, 1965, 510—525.
5. *А. А. Вагаршакян.* Граничные свойства некоторых классов функций, Сиб. матем. журн. (в печатя).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

В. В. ВОСКАНЯН

ОБ ОДНОМ „ЕСТЕСТВЕННОМ“ ИЗОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И НОРМАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть K есть открытое кольцо, ограниченное окружностями

$$\Gamma_1 = \{z: |z| = 1\} \text{ и } \Gamma_\rho = \{z: |z| = \rho\},\ 0 < \rho < 1.$$

Обозначим через $A(K)$ банахово пространство функций $f(z)$, аналитических в K и непрерывных вплоть до границы $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_\rho$, с нормой $\|f\| = \max\limits_{z\in\overline{K}} |f(z)| = \max\limits_{x\in\partial K} |f(x)|$. Аналогично, $H^\infty(K)$ будет обозначать пространство аналитических и ограниченных в K функций с нормой $\|f\| = \sup\limits_{z\in K} |f(z)| = \operatorname{Vrai}\max\limits_{x\in\partial K} |f(x)|$. Обозначим соответствующие единичные шары через S_A и S_∞.

Заметим, что $A(K) = A(D) \oplus A_0(C\overline{D}_\rho)$, где $A(D)$ есть пространство функций, аналитических в единичном круге D и непрерывных в $\overline{D}$, а $A_0(C\overline{D}_\rho)$ обозначает пространство функций, аналитических на дополнении к замкнутому кругу $\overline{D}_\rho = \{z: |z| \leqslant \rho\}$, непрерывных вплоть до границы и обращающихся в 0 на бесконечности.

Как известно, единственными конформными отображениями кольца K на себя являются отображения $z \to e^{i\tau} z$ (сдвиги), $z \to \rho/z$ (инверсия) и их композиции. Соответственно этому, все изометрические автоморфизмы пространства $A(K)$ суть операторы: сдвига — T_τ: $f(z) \to f(e^{i\tau} z)$, инверсии — $\hat{\iota}$: $f(z) \to f(\rho/z)$ и их произведения. (Доказательство этого факта, проведенное в [3] для алгебры $A(D)$, пригодно и для $A(K)$).

Рассмотрим пространства $A(K_1)$ и $A(K_2)$, где

$$K_1 = \{z: 0 < \rho_1 < |z| < 1\},\quad K_2 = \{z: 0 < \rho_2 < |z| < 1\}.$$

Эти пространства изоморфны. Среди всевозможных изоморфизмов $T: A(K_1) \to A(K_2)$ выделяется один „естественный“ изоморфизм

$$J: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} z\right)^{-n}.$$

Он однозначно определен тем свойством, что коммутирует со всеми изометриями пространств $A(K_1)$ и $A(K_2)$, т. е.

$$J T_\tau = T_\tau J \text{ и } J \hat{\iota}_1 = \hat{\iota}_2 J, \tag{1}$$

(где $\hat{\iota}_1$: $f(z) \to f\left(\frac{\rho_1}{z}\right)$, а $\hat{\iota}_2$: $f(z) \to f\left(\frac{\rho_2}{z}\right)$) и отображает $A(D)$ на себя изометрично.

Действительно, если бы некоторый изоморфизм

$$V: z^n \to \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{nm} z^m$$ коммутировал со всеми сдвигами T_τ, то он совпадал бы с оператором-мультипликатором $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_\tau V T_{-\tau}\, d\tau$, т. е. действовал бы по формуле $z^n \to v_{nn} z^n$; после этого легко проверить, что $v_{nn}=1$, $n \geqslant 0$, и $v_{nn}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n$, $n<0$.

Вопросы, связанные с вычислением (оценками) норм естественных операторов в экстремальных задачах стимулированы проблемой (не) изоморфизма различных банаховых пространств (см., например, [4], [5]).

Целью настоящей заметки является вычисление нормы оператора J. При $\rho_1 > \rho_2$ задача решается полностью (формула (3)). Любопытно, что при $\rho_1<\rho_2$ норма $\|J\|$, в отличие от предыдущего случая (неравенств (4)), оказывается ограниченной абсолютной константой, т. е. не зависящей от ρ_1 и ρ_2 (неравенство (8)). Как и в работе автора [1], где вычислялась проекционная постоянная $\lambda\,[A\,(D),\ A\,(K)] = \inf \|P$ (нижняя грань берется по всем проекторам с $A\,(K)$ на $A\,(D)$), так и здесь, задача сводится к вычислению нормы некоторого функционала.

Обозначим через J_0 функционал, определенный на $A\,(K_1)$ формулой $J_0: f\,(z) \to J f\,(\rho_2)$.

Утверждение 1. $\|J\|=\|J_0\|$.

Действительно, пусть $f_n\,(z)$ такая последовательность из S_A, что $\|Jf_n\| \to \|J\|$. Тогда

$$\|Jf_n\| = \max_{x\in\partial K_1} |Jf_n\,(x)| = |Jf_n\,(x_n)|,$$

где $x_n=e^{i\alpha_n}$ либо $=\rho_2 e^{i\alpha_n}$. Обозначим через $\varphi_n\,(z)$ в первом случае функцию $\varphi_n\,(z)=f_n\left(\frac{\rho_2}{z}\, e^{i\alpha_n}\right)$, во втором — $\varphi_n\,(z)=f_n\,(ze^{i\alpha_n})$. В силу свойств коммутативности (1)

$$|J\, f_n\,(x_n)| = |J\, \varphi_n\,(\rho_2)| = |J_0\, \varphi_n|.$$

Так как $\varphi_n \in S_A$ и $|J_0\, \varphi_n| \to \|J\|$, то $\|J_0\| \geqslant \|J\|$. Противоположное неравенство очевидно, и утверждение 1 доказано.

Используя интегральную формулу Коши, получаем следующие представления:

$$Jf\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f\,(x)\, dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{f\,(x)\, dx}{x-\frac{\rho_1}{\rho_2}\, z},$$

$$J\, f\,(\rho_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f\,(x)\, dx}{x-\rho_2} - f\,(\rho_1) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f\,(x)\, dx}{x-\rho_1}. \qquad (2)$$

Таким образом, задача вычисления нормы оператора сводится к вычислению нормы функционала

$$J_0\colon f(z) \to f(\rho_1) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(x)\, dx}{(x - \rho_2)(x - \rho_1)},$$

который, как это видно, порождается мерой $d\mu$ на ∂K вида

$$d\mu = d\mu_s + d\mu_a,$$

где $d\mu_s$ — мера единичной массы, сосредоточенная в точке $z = \rho_1$, а

$$d\mu_a = \begin{cases} \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{2\pi i} \dfrac{dx}{(x - \rho_2)(x - \rho_1)} & \text{на } \Gamma_1, \\ 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{\rho_1}. \end{cases}$$

Очевидно, мера $d\mu_s$ сингулярна, а $d\mu_a$ абсолютно непрерывна по мере Лебега.

Доказательство следующей леммы, имеющей и самостоятельный интерес, проведено в [1].

Лемма. Пусть на границе $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_\rho$ задана (регулярная борелевская комплексная) мера $d\mu$. Через $\|d\mu\|$ мы будем обозначать норму функционала в пространстве $A(K)$, порожденного мерой $d\mu$, т. е. действующего по формуле $\int\limits_{\partial K} f\, d\mu$. Пусть $d\mu = d\mu_a + d\mu_s$ — разложение на абсолютно непрерывную и сингулярную части относительно меры Лебега dx. Тогда

$$\|d\mu\| = \|d\mu_a\| + \operatorname{Var} d\mu_s.$$

Используя этот факт, получаем следующее

Утверждение 2. $\|J_0\| = 1 + \|d\mu_a\|$.

Условимся впредь через ω обозначать функционал

$$f \to \int_{\partial K} \omega(x) f(x)\, dx,$$

где $\omega(x)$ — суммируемая на ∂K функция.

Докажем теперь одну общую теорему. Отметим, что в заметке [1] мы неявно воспользовались ее утверждением а).

Теорема. а) *Пусть задана функция*

$$\omega_1(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ g_1(x) = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n} (x - b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{m} (x - a_j)} \quad \text{на } \Gamma_\rho, \end{cases}$$

где r, $m \geqslant 0$. Если для всех индексов i и j числа b_i и a_j вещественны, $|b_i| \leqslant \rho^2$, $|a_j| \geqslant 1$ и $m - n \leqslant 2$, то

$$\|\omega_1\| = \int_{\Gamma_\rho} |\omega_1(x)|\, d|x|.$$

б) *Если*

$$\omega_2(x) = \begin{cases} g_2(x) = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{k}(z-d_i)}{\prod\limits_{j=1}^{s}(z-c_j)} & \text{на } \Gamma_1, \\ 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\rho, \end{cases}$$

для всех индексов i и j, числа d_i и c_j вещественны, $|d_i| \geqslant \frac{1}{\rho}$, $|c_j| \leqslant \leqslant \rho$ и $s-k \geqslant 2$, то

$$\|\omega_2\| = \int_{\Gamma_1} |\omega_2(x)|\, d|x|.$$

в) *Если в представлении функции $\omega_1(x)$*

1°. *Хотя бы для одного индекса i_0 выполнены соотношения*

$$\rho^2 < |b_{i_0}| \leqslant 1 \ \text{ и } \ b_{i_0} \neq \frac{\rho^2}{b_i},\ i \neq i_0,$$

или

2°. *Хотя бы для одного индекса j_0 выполнены соотношения*

$$\rho < |a_{j_0}| < 1 \ \text{ и } \ a_{j_0} \neq \frac{\rho^2}{a_j},\ j \neq j_0,$$

то

$$\|\omega_1\| < \int_{\Gamma_\rho} |\omega_1(x)|\, d|x|.$$

Аналогично, если в представлении функции $\omega_2(x)$

3°. *Хотя бы для одного индекса i_0 выполнены соотношения*

$$1 \leqslant |d_{i_0}| < \frac{1}{\rho} \ \text{ и } \ d_{i_0} \neq \frac{1}{d_i},\ i \neq i_0$$

или

4°. *Хотя бы для одного индекса j_0 выполнены соотношения*

$$\rho < |c_{j_0}| < 1 \ \text{ и } \ c_{j_0} \neq \frac{1}{c_j},\ j \neq j_0,$$

то

$$\|\omega_2\| < \int_{\Gamma_1} |\omega_2(x)|\, d|x|. \qquad (*)$$

Замечание 1. Если функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ аналитичны в $\overline{K}$ и если вместо $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ рассмотреть функции

$$\omega_1^*(x) = g_1(x) - \omega_1(x) = \begin{cases} g_1(x) \text{ на } \Gamma_1, \\ 0 \text{ на } \Gamma_\rho, \end{cases}$$

и

$$\omega_2^*(x) = g_2(x) - \omega_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ на } \Gamma_1, \\ g_2(x) \text{ на } \Gamma_\rho, \end{cases}$$

то из теоремы Коши будут вытекать равенства

$$\|\omega_1^*\| = \|\omega_1\| \text{ и } \|\omega_2^*\| = \|\omega_2\|.$$

Замечание 2. Теорема справедлива и в случае пространства $H^*(K)$.

Доказательство утверждения а). Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{\rho}{z}\left|\prod_{i=1}^{n}\frac{\rho^2 - b_i z}{(z-b_i)\,z}\prod_{j=1}^{m}\frac{(z-a_j)\,z}{\rho^2 - a_j z}\right|^{1/2}.$$

(Для определенности здесь и далее берется то значение степенной функции $z^{1/2}$, которое равно 1 при $z=1$). В силу сделанных предположений $f_1 \in A(K)$. Так как на окружности Γ_ρ $x\bar{x} = \rho^2$, то легко убедиться, что на ней $|f_1(x)| = 1$. Теперь покажем, что $|f_1(x)| < 1$ на Γ_1 Для этого заметим, что если $|b| < \rho^2$, то подставляя $z = e^{it}$, получим

$$\left|\frac{\rho^2}{z} - b\right|^2 = \rho^4 + b^2 - 2\rho^2 b\cos t = \rho^2(1 + b^2 - 2b\cos t) -$$

$$-(\rho^2 - b^2)(1-\rho^2) < \rho^2(1 + b^2 - 2b\cos t) = \rho^2|z-b|^2,$$

и поэтому $\left|\dfrac{\dfrac{\rho^2}{z} - b}{z-b}\right|^2 < \rho^2$. Если же $|a| \geqslant 1$, то на Γ_1

$$\left|\frac{\rho^2}{z} - a\right|^2 = \rho^2(1 + a^2 - 2a\cos t) - (a^2 - \rho^2)(1-\rho^2) > \rho^2|z-a|^2,$$

откуда $\left|\dfrac{z-a}{\dfrac{\rho^2}{z} - a}\right|^2 < \dfrac{1}{\rho^2}$. Так как $n \geqslant m-2$, то на Γ_1

$$|f_1(z)|^4 = \left|\frac{\rho^2(z-a_{m-1})(z-a_m)}{\left(\dfrac{\rho^2}{z} - a_{m-1}\right)\left(\dfrac{\rho^2}{z} - a_m\right)}\right|^2 \cdot \prod_{j=1}^{m-2}\left|\frac{\dfrac{\rho^2}{z} - b_j}{z-b_j}\right|^2 \times$$

$$\times\left|\frac{z-a_j}{\dfrac{\rho^2}{z} - a_j}\right|^2 \cdot \prod_{i=m-2}^{n}\left|\frac{\dfrac{\rho^2}{z} - b_i}{z-b_i}\right|^2,$$

и в силу полученных неравенств, $|f_1(z)|^4 < 1$. Таким образом, $\|f_1\| = 1$, но

$$\|\omega_1\| \geqslant |\omega_1(f_1)| = \int_{\partial K}|\omega_1(x)|\,d|x| \geqslant \|\omega_1\|, \quad \text{ч.т.д.}$$

Доказательство утверждения б) вполне аналогично. Здесь экстремальной будет функция

$$f_2(z) = \frac{1}{z}\left[\prod_{l=1}^{k}\frac{1-d_l z}{(z-d_l)z}\prod_{j=1}^{s}\frac{(z-c_j)z}{1-c_j z}\right]^{1/2}\in A(K).$$

Ясно, что $|f_2(x)|=1$ на Γ_1. Для доказательства неравенства $|f_2(x)|<1$ на Γ_ρ следует положить $z=\rho e^{it}$ и воспользоваться следующими соотношениями:

$$|z-c|^2=\rho^2+c^2-2\rho c\cos t=1+c^2\rho^2-2\rho c\cos t-$$

$$-(1-\rho^2)(1-c^2)<1+c^2\rho^2-2\rho c\cos t=\rho^2\left|\frac{1}{z}-c\right|^2$$

при $|c|\leqslant\rho$ и

$$|z-d|^2=(1+d^2\rho^2-2\rho d\cos t)+(d^2-1)(1-\rho^2)>\rho^2\left|\frac{1}{z}-d\right|^2$$

при $|d|\geqslant\frac{1}{\rho}\cdot$ Остается воспользоваться представлением на Γ_ρ:

$$|f_2(z)|^4=\left|\frac{(z-c_{k+1})(z-c_{k+2})}{\rho^2\left(\frac{1}{z}-c_{k+1}\right)\left(\frac{1}{z}-c_{k+2}\right)}\right|^2\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{k}\left|\frac{z-c_l}{\frac{1}{z}-c_l}\right|^2\left|\frac{\frac{1}{z}-d_l}{z-d_l}\right|^2\prod_{j=k+2}^{s}\left|\frac{z-c_j}{\frac{1}{z}-c_j}\right|^2.$$

Таким образом, $\|f_2\|=1$, и, как легко убедиться,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1}f_2(x)\,\omega_2(x)\,dx\right|=\int\limits_{\Gamma_1}|\omega_2(x)|\,d|x|.$$

Для доказательства утверждения в) заметим, что при сделанных в нем предположениях построенная функция $f_1(z)$ не будет лежать в $A(K)$. Если допустить, что тем не менее $\|\omega_1\|=\int\limits_{\Gamma_\rho}|\omega_1(x)|\,d|x|$, то должна найтись (см. [2], гл. 2, п. 1) единственная экстремальная функция $\tilde{f}(z)$ такая, что на Γ_ρ $|\tilde{f}(z)|=1$ и $\arg[x\,\omega_1(x)\tilde{f}(x)]=0$, т. е. $\tilde{f}(z)$ должна совпадать с $f_1(z)$ на Γ_ρ, что невозможно. То же относится и к функционалу ω_2. Теорема доказана.

Пусть теперь $\rho_1\geqslant\rho_2$. В этом случае функционал, порожденный мерой $d\mu_a$, удовлетворяет условиям утверждения б) теоремы и, следовательно, справедливо

Утверждение 3. *Если* $\rho_1\geqslant\rho_2$, *то*

$$\|d\mu_a\|=\frac{\rho_1-\rho_2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{(1-2\rho_1\cos t+\rho_1^2)(1-2\rho_2\cos t+\rho_2^2)}}.$$

Последний интеграл может быть выражен через полный эллиптический интеграл 1-го рода

$$K(k)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

где

$$k=\frac{2\sqrt{(\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1\rho_2)}}{(1-\rho_2)(1+\rho_1)}.$$

Используя теперь утверждения 1, 2 и 3, мы получим решение в окончательном виде: при $\rho_1\geqslant\rho_2$

$$\|J\|=1+\frac{2(\rho_1-\rho_2)}{\pi(1+\rho_1)(1-\rho_2)}K\left(\frac{2\sqrt{(\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1\rho_2)}}{(1-\rho_2)(1+\rho_1)}\right). \tag{3}$$

Следствие. Если рассматривать оператор J как изоморфизм пространств $H^\infty(K_1)$ и $H^\infty(K_2)$ $(\rho_1>\rho_2)$, то норма его будет той же что и в A; точнее

$$\|J\|'=\|J: H^\infty(K_1)\to H^\infty(K_2)\|=\|J: A(K_1)\to A(K_2)\|=\|J\|.$$

Действительно, в силу свойств коммутативности (1)

$$\|J\|'=\sup_{f\in S_\infty}\overline{\lim_{a\to\rho_2+}}|Jf(a)|=$$

$$=\sup_{f\in S_\infty}\overline{\lim_{a\to\rho_2+}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{x-a}+f(a)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\frac{\rho_1}{\rho_2}a}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 1+\overline{\lim_{a\to\rho_2+}}\frac{a\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}-1\right)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{d|x|}{|x-a|\left|x-\frac{\rho_1}{\rho_2}a\right|}=\|J\|.$$

Противоположное неравенство $\|J\|\leqslant\|J\|'$ очевидно. Заметим, что точно так же может быть доказано равенство

$$\lambda[H^\infty(D),\ H^\infty(K)]=\lambda[A(D),\ A(K)].$$

Замечание. Используя разложение в ряд

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2k^{2n}\right\}$$

и элементарные неравенства $\frac{3}{4\sqrt{2n}}<\frac{(2n-1)!!}{2n!!}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $n>3$, легко получить оценку

$$\gamma_1+\frac{\rho_1-\rho_2}{2(\rho_1+1)(1-\rho_2)}\ln\frac{1-\rho_2}{1-\rho_1}<\|J\|<\gamma_2+\frac{\rho_1-\rho_2}{(1+\rho_1)(1-\rho_2)}\ln\frac{1-\rho_2}{1-\rho_1}, \tag{4}$$

где γ_1 и γ_2 — абсолютные константы, $\rho_1\geqslant\rho_2$.

Пусть теперь $\rho_1 < \rho_2$. Для оценки $\|J\|$ (см. формулу (2)) рассмотрим функционал F, действующий по формуле

$$Ff = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\rho_2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\rho_1}.$$

Теперь он не удовлетворяет условиям утверждения б) теоремы. Более того, из ее утверждения в) 4° следует неравенство (*). Построим функционал G:

$$Gf = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\frac{1}{\rho_1}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\frac{1}{\rho_2}}.$$

Имеем

$$Ff = (F+G)f - Gf =$$

$$= \frac{\rho_2^2-1}{2\rho_2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{(x-\rho_2)\left(x-\frac{1}{\rho_2}\right)} + \frac{1-\rho_1^2}{2\rho_1\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)\,dx}{(x-\rho_1)\left(x-\frac{1}{\rho_1}\right)} -$$

$$- Gf = I_1 f + I_2 f - Gf. \tag{5}$$

Используя равенство $\bar{x} = \frac{1}{x}$ на Γ_1, получаем оценку

$$\|I_1\| \leqslant \frac{1-\rho_2^2}{2\rho_2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{d|x|}{|x-\rho_2|\left|x-\frac{1}{\rho_2}\right|} =$$

$$= \frac{1-\rho_2^2}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{dx}{ix(x-\rho_2)\left(\frac{1}{x}-\rho_2\right)} = \frac{1-\rho_2^2}{1+\rho_2^2} = 1. \tag{6}$$

Также получаем и неравенство

$$\|I_2\| \leqslant 1. \tag{7}$$

По теореме Коши

$$Gf = \frac{\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_1}}\frac{f(x)\,dx}{\left(x-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(x-\frac{1}{\rho_2}\right)}.$$

Поэтому, учитывая, что $\rho_1 < \rho_2$, получаем

$$\|G\| \leqslant \frac{\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}}{2\pi}\int_{\Gamma_{\rho_1}}\frac{d|x|}{\left|x-\frac{1}{\rho_1}\right|\left|x-\frac{1}{\rho_2}\right|} < \frac{\rho_2-\rho_1}{2\pi\rho_1\rho_2}\int_{\Gamma_{\rho_1}}\frac{d|x|}{\left|x-\frac{1}{\rho_2}\right|^2} =$$

$$= \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\pi\rho_1\rho_2} \int\limits_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{dx}{ix\left(x - \frac{1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\rho_1^2}{x} - \frac{1}{\rho_2}\right)} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1\left(\frac{1}{\rho_2} - \rho_2\rho_1^2\right)} < \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Это неравенство показывает, что если, например, $\rho_1 \geqslant \frac{1}{2}$, то $\|G\| < 2$.

Если же $\rho_1 < \frac{1}{2}$, то и в этом случае

$$\|G\| \leqslant \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\pi\rho_1\rho_2} \int\limits_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{d|x|}{\left|x - \frac{1}{\rho_1}\right| \left|x - \frac{1}{\rho_2}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\pi\rho_2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \int\limits_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{d|x|}{\left|x - \frac{1}{\rho_2}\right|} \leqslant \frac{4}{3} \cdot \frac{(\rho_2 - \rho_1)\rho_1}{\rho_2(1 - \rho_1\rho_2)} < 2.$$

Отсюда и из соотношений (2), (5), (6) и (7) следует оценка

$$1 < \|J\| < 4. \tag{8}$$

Отметим, что это неравенство справедливо и при отображении $H^\infty(K_1) \to H^\infty(K_2)$.

В заключение, автор считает своим приятным долгом принести благодарность Б. С. Митягину за постановку задачи.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26.III.1973

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաների տարածությունների մի «բնական» իզոմորֆիզմի և որոշ ֆունկցիոնալների նորմաների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք կոմպլեքս հարթության վրա տրված են $K_1 = \{0 < \rho_1 < |z| < 1\}$ *և* $K_2 = \{0 < \rho_2 < |z| < 1\}$ *օղակները։*

Նշանակենք $A(K)$*-ով բոլոր անալիտիկ* K*-ում և անընդհատ* $\bar{K}$*-ում ֆունկցիաների Բանախի տարածությունը* sup*-նորմայով։ Հաշվվում է* $A(K_1)$ *և* $A(K_2)$ *տարածությունների* J *«բնական» իզոմորֆիզմի նորման՝*

$$J: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} z\right)^{-n}.$$

V. V. VOSKANIAN. *On a natural isomorphism of spaces of analytic functions and norms of some functionals* (summary)

Let $K_1 = \{0 < \rho_1 < |z| < 1\}$ and $K_2 = \{0 < \rho_2 < |z| < 1\}$ be two annuli on a complex plane. Let $A(K)$ denote the Banach space of all analytic on K and continuous on $\bar{K}$ functions with the sup-norm. The norm of the „natural" isomorphism J between $A(K_1)$ and $A(K_2)$ spaces:

$$J: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} z \right)^{-n}$$

is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Воскинян.* Об одной проекционной постоянной. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, вып. 17.
2. *С. Я. Хавинсон.* Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях, Мат. сб., 36 (78), вып. 3, 1955, 445—478.
3. *K. de Leew, W. Rudin* and *J. Wermer.* The isometries of some function spaces, Proc. of Amer. Math. Soc., 11, № 5, 1960.
4. *Б. С. Митягин.* Об изоморфизмах пространств гладких и голоморфных функций, Дополнение 2 к русскому переводу книги А. Пелчинского „Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения", 1970.
5. *Г. М. Хенкин.* Банаховы пространства аналитических функций в шаре и бицилиндре неизоморфны. Функц. анализ, 2, № 4, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

С. А. ГРИГОРЯН, М. И. КАРАХАНЯН

ОБ ε-НОРМАЛЬНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБР

В работе обобщается одна теорема Вилкена об ε-нормальных алгебрах.

Пусть X-компактное хаусдорфово пространство, и $C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на X.

Подалгебра A алгебры $C(X)$ называется функциональной, если A содержит константы, разделяет точки X и равномерно замкнута (т. е. замкнута в sup-норме).

Определение 1. Функциональная алгебра A называется *ε-нормальной*, если для всяких двух замкнутых множеств F_1 и F_2, содержащихся в X, пересечение которых пусто, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ существует функция $f \in A$ такая, что для некоторого $\varepsilon < \frac{1}{2}$ выполняется условие

$$\sup_{x \in F_1} |1 - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{а} \quad \sup_{x \in F_2} |f(x)| < \varepsilon.$$

Замечание. Легко видеть, применив теорему Мергеляна, что если функциональная алгебра удовлетворяет этому условию с некоторым $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, то она удовлетворяет ему и для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ (см. [1]).

Определение 2. *Границей Шоке* функциональной алгебры A называется такое максимальное подмножество K множества X, которое удовлетворяет следующему условию: для всякого $x_0 \in K$ существует $f \in A$ такое, что $f(x_0) = 1$, $|f(x)| < 1$ для $x \neq x_0$.

В дальнейшем через $Ch(A)$ будем обозначать границу Шоке алгебры A, а через M_A — пространство максимальных идеалов.

Пусть A — функциональная алгебра и F — замкнутое множество в X.

Через A_F обозначим функциональную алгебру, порожденную сужениями функции из A на F. Вилкеном в [1] была получена следующая

Теорема. *Пусть A — функциональная алгебра и $M_A = X$. Если X — окружность, то A — ε-нормальная алгебра.*

Ниже мы приведем общее утверждение, специализацией которого является результат Вилкена.

Теорема. *Пусть A — функциональная алгебра такая, что $M_A = X$. Если $X \setminus Ch(A)$ вполне несвязно, то A—ε-нормальная алгебра.*

Доказательство этой теоремы проведем в несколько этапов, т. е. сформулируем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть A — функциональная алгебра и $M_A \setminus X$ вполне несвязно. Тогда $M_A = X$.*

Доказательство. Допустим противное: пусть $M_A \neq X$. Тогда, как известно, $M_A \setminus X$ — открытое множество и следовательно существует открытого множества $U \subset M_A$ такого, что $U \subset \overline{U} \subset M_A \setminus X$. По условию $M_A \setminus X$ вполне несвязно, следовательно, $\overline{U}$ также вполне несвязно. Покажем, что $\overline{U}$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 таких, что $\overline{U} = F_1 \cup F_2$ и $(\overline{U} \setminus U) \cap F_1 = \varnothing$. Действительно, поскольку U вполне несвязно, то для любой тройки точек x_0, x_1, x_2, где x_0, $x_1 \in \overline{U} \setminus U$, а $x_2 \in \overline{U} / U$ найдутся открыто-замкнутые множества $F_{x_1} \ni x_0$, x_1 и $F_{x_2} \ni x_2$ такие, что $F_{x_1} \cup F_{x_2} = \overline{U}$, а $F_{x_1} \cap F_{x_2} = \varnothing$. Если x_2 пробегает все $\overline{U} \setminus U$, то мы получим покрытие $\overline{U} \setminus U$ системой открыто замкнутых множеств $\{F^{\alpha}_{x_2}\}_{\alpha \in L}$. Поскольку $\overline{U}$ компакт, то $\overline{U} \setminus U$ также будет компактным множеством, следовательно, из системы $\{F^{\alpha}_{x_2}\}_{\alpha \in L}$ можно выбрать конечную систему $\{F^{\alpha_i}_{x_2}\}_{i=1}^{n}$, которая покрывает $\overline{U} \setminus U$. Рассмотрим систему $\{F^{i}_{x_1}\}_{i=1}^{n}$ открыто-замкнутых множеств таких, что $F^{i}_{x_1} \cap F^{\alpha_i}_{x_2} = \varnothing$ и $F^{i}_{x_1} \cup F^{\alpha_i}_{x_2} = \overline{U}$. Положим $F_1 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F^{i}_{x_1}$ и $F_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F^{\alpha_i}_{x_2}$. Легко видеть, что F_1 и F_2 открыто-замкнутые непересекающиеся множества такие, что $F_1 \cup F_2 = \overline{U}$ и $F_1 \cap (\overline{U} \setminus U) = \varnothing$. Ясно, что $x_0 \in F_1$. Так как $F_1 \cup F_2 = \overline{U}$, то отсюда имеем, что $M_A = F_1 \cup (F_2 \cup (M_A \setminus U))$. Поскольку $M_A \setminus U$ — замкнутое множество $F_1 \cap (M_A \setminus U) = \varnothing$, то $F_1 \cap (F_2 \cup (M_A \setminus U)) = \varnothing$ Итак, M_A представлено в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и $F_2 \cup (M_A \setminus U)$. Следовательно, на основании теоремы Шилова об идемпотемах, существует функция $\chi(x) \in A$ такая, что

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_1, \\ 0, & x \in F_2 \cup (M_A \setminus U). \end{cases}$$

Но граница Шилова алгебры A лежит в X, а $F_1 \cap X = \varnothing$. Полученное противоречие означает, что $M_A = X$. Лемма доказана. В дальнейшем мы используем известную лемму (см. [1]), которую сформулируем ниже.

Лемма 2. *Пусть A — функциональная алгебра такая, что для всякого замкнутого множества F имеем $M_{A_F} = F$. Тогда A есть ε-нормальная алгебра.*

Доказательство теоремы. Сначала покажем, что M_{A_F} является замкнутым подмножеством в X. Так как $M_A = X$, то $M_{A_F} \subset X$. Теперь покажем, что для любого замкнутого множества $F \subset X$ имеем $M_{A_F} = F$. Допустим противное. Пусть для некоторого замкнутого множества $F_0 \subset X$, $M_{A_{F_0}} \neq F_0$. Рассмотрим $M_{A_{F_0}} \setminus F_0$. По лемме 1 $M_{A_{F_0}} \setminus F_0$ не является вполне несвязным множеством. Поэтому, из условия теоремы следует, что найдется точка $x_0 \in Ch(A)$ такая, что $x_0 \in M_{A_{F_0}} \setminus F_0$. Это означает, что существует $f \in A$ такая, что $f(x_0) = 1$, а $|f|_{F_0} < 1$. Однако это невозможно, в силу принципа максимума. Отсюда следует, что для всякого замкнутого множества $F \subset X$ имеем $M_{A_F} = F$. Но тогда по лемме 2 алгебра A является ε-нормальной. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть A — функциональная алгебра и $M_A = X$. Если X — окружность, то A — ε-нормальная алгебра.*

Доказательство. Покажем, что $X \setminus Ch(A)$ — вполне несвязное множество. Пусть $X \setminus Ch(A)$ не является вполне несвязным множеством. Это означает, что существует некоторая дуга $\gamma_{[\alpha, \beta]}$ на окружности такая, что $Ch(A) \cap \gamma_{[\alpha, \beta]} = \varnothing$. Рассмотрим алгебру $A_{\gamma_{[\alpha, \beta]}}$. Поскольку граница Шилова произвольной функциональной алгебры B не может состоять из конечного числа точек, если X само не состоит из конечного числа точек, то найдутся $x_0 \in \gamma_{[\alpha, \beta]}$, $x_0 \neq \alpha$, $x_0 \neq \beta$ и функция $g \in A_{\gamma_{[\alpha, \beta]}}$ такие,. что $g(x_0) = 1$, $|g(x)| < 1$, $x \neq x_0$. Так как $g(x)$ является равномерным пределом на $\gamma_{[\alpha, \beta]}$ функций из A, то для некоторого $\varepsilon < \frac{1}{2} \min \left|1 - |g(\alpha)|,\ 1 - |g(\beta)|\right|$ найдется функция $\varphi \in A$ такая, что $|g(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для $x \in \gamma_{[\alpha, \beta]}$. Легко видеть, что функция $\varphi(x) \in A$ достигает своего максимума модуля на дуге $\gamma_{[\alpha, \beta]}$ в некоторой внутренней точке этой дуги. Но поскольку $M_A = X$, то на основании теоремы Росси (см. [2], стр. 84) существует $x_1 \in \gamma_{[\alpha, \beta]}$, $x_1 \neq \alpha$, $x_1 \neq \beta$ и функция $f \in A$ такие, что $f(x_1) = 1$, $|f(x)| < 1$, $x \neq x_1$, т. е. $x_1 \in Ch(A)$, и мы получаем противоречие. Следовательно, $X \setminus Ch(A)$ — вполне несвязно и поэтому A является ε-нормальной алгеброй и т. д.

Следствие 2. *Пусть A — функциональная алгебра на произвольном графе X. Если $M_A = X$, то A — ε-нормальная алгебра.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 17.IV. 1974

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Մ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ. Ֆունկցիոնալ հանրահաշիվների ε-նորմալության մասին (*ամփոփում*)

Ընդհանրացվում է Վիլկենի թեորեմը ε-նորմալ հանրահաշիվների մասին

S. A. GRIGORIAN, M. I. KARAKHANIAN. *On ε-normaltty of functlanal algebras*
(summary)

The papere generalizes the Wilken theorem on ε-normal algebras.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. R. Wilken*. Approximate normality and function algebras on the interval and the circle, Proc. Inter. Sympos on Function Algebras, Tulan Univ. Scott-Foresman, 1965, 98—111.
2. *Р. Ганнинг, Х. Росси*. Аналитические функции многих комплексных переменных, Изд. „Мир“, 1972.
3. *K. Nistizawa*. On some separation properties of a function Algebras, Proc. Jap. Acad., 48, № 8, 1972.
4. *K. Nistizawa*. On a separation property of a function algebras, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 22, 1971, 127—132.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

Д. И. ГУРЕВИЧ

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ С exp-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ В КОЛЬЦАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим кольцо H_ρ, равное индуктивному пределу при $A\to\infty$ банаховых пространств целых в C^n функций с нормами

$$\|f\|_A = \sup_{C^n} |f(z)| e^{-A\rho(z)},$$

где $\rho(z)$ — плюрисубгармоническая функция, определяемая следующим образом:

$$\rho(z) = \sum_{l=1}^{n} |\operatorname{Im} z_l|^m + |z|^{m_1} + \lg^{m_2}(1+|z|),\ m\geqslant 1,\ m_1\geqslant 0,\ m_2\geqslant 1. \qquad (0.1)$$

Пусть J — идеал этого кольца. Для любой функции $f\in H_\rho$ обозначим через f_z ее росток в точке $z\in C^n$, а через J_z обозначим идеал кольца H_z ростков голоморфных функций в этой точке, состоящий, по определению, из конечных сумм произведений $f_z g$, где $f\in J$, $g\in H_z$.

Мы говорим, что идеал J локализуем, если он совпадает с совокупностью всех функций $f\in H_\rho$ таких, что $f_z\in J_z$ для любой точки $z\in C^n$.

В настоящей статье мы рассматриваем замкнутые идеалы, порожденные множеством exp-полиномов вида

$$\sum_{k=1}^{s} e^{i(a^k,\, z)} p_k(z),$$

где $z\in C^n$, $a^k\in Z^n$, $p_k\in P$, Z — кольцо целых чисел, а P — кольцо полиномов.

Exp-полиномы указанного вида мы будем в дальнейшем называть Z-exp-полиномами.

В книге [5] Л. Эренпрайсом было высказано предположение, из которого, в частности, следует, что идеалы, порожденные в кольце H_ρ, $\rho=|z|$, $z\in C^n$, конечным набором exp-полиномов с алгебраическими показателями (в том числе, N-exp-полиномов), замкнуты и локализуемы. Эта гипотеза неверна при $n>1$. Покажем это на примере.

Пусть α — такое трансцендентное число, что функции $\sin z$ и $\sin\alpha z$ порождают в кольце H_ρ, $\rho=|z|$, $z\in C^1$ идеал, не содержащий функцию $f=z$. Тогда нетрудно видеть, что идеал, порожденный в кольце H_ρ, $\rho=|z|$, $z\in C^2$ функциями $\sin z_1$, $\sin z_2$, $z_1-\alpha z_2$, не локализуем. Отметим, что этот идеал не замкнут. Замкнув его, мы получим другой, уже локализуемый, идеал. Доказательству этого факта применительно ко всем замкнутым идеалам $J\subseteq H_\rho$, $z\in C^2$ с Z-exp-полиномиальными образующими и посвящена настоящая статья.

Точнее говоря, в основной теореме этой статьи мы устанавливаем справедливость следующего утверждения: замыкание любого идеала, порожденного в кольце H_ρ, $z\in C^2$, где ρ определена по формуле (0.1), произвольным множеством Z-exp-полиномов, локализуемо.

Сформулированное утверждение имеет приложение к теории систем дифференциально-разностных уравнений. А именно, из него вытекает следующая

Теорема. *Пусть задана система дифференциально-разностных уравнений вида*

$$\sum_{k=1}^{s} p_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x-a^k)=0,\ x\in R^2,\ a^k\in Z^2\ u\in\Phi, \tag{0.2}$$

где Φ — некоторое функциональное пространство на R^2, определенное ниже, в частности, пространство E *Шварца. Пусть X — подпространство решений системы* (0.2). *Тогда в X плотны* exp-*полиномиальные решения этой системы.*

§ 1. Предварительные построения

В кольце H_ρ, $z\in C^n$, с весовой функцией ρ, задаваемой формулой (0.1), обратимы все функции вида $e^{i(a,z)}$, $a\in Z^n$. Умножая произвольный Z-exp-полином на подходящую функцию такого вида, можно добиться, чтобы вектора $a^k\in Z^n$, входящие в показатели степени ее экспонент, имели неотрицательные координаты. Z-exp-полиномы, удовлетворяющие последнему условию, мы будем называть Z_+-exp-полиномами.

Отметим, что кольцо всех Z_+-exp-полиномов от n переменных — нетерово. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть отображение, ставящее каждому Z_+-exp-полиному f полином p_f от $2n$ переменных, связанный с f соотношением $f(z)=p_f(z, e^{iz})$. Очевидно, что это отображение есть изоморфизм на (нетерово) кольцо полиномов от $2n$ переменных.

Следовательно, для любого идеала $J\subseteq H_\rho$, порожденного произвольной совокупностью Z-exp-полиномов, существует конечный набор Z_+-exp-полиномов, его порождающий. Поэтому, не ограничивая общности, мы будем рассматривать только идеалы $J\subseteq H_\rho$, порожденные конечным числом Z_+-exp-полиномов.

Мы будем говорить, что Z_+-exp-полином f содержит z_1 (или e^{iz_1}), если степень полинома p_f по соответствующей переменной больше нуля.

Для любых двух Z_+-exp-полиномов g_1 и g_2 обозначим через $R(g_1, g_2)$ Z_+-exp-полином g такой, что $p_g=R(p_{g_1}, p_{g_2})$, где $R(p_{g_1}, p_{g_2})$ — результат полиномов p_{g_1} и p_{g_2}. Индексом внизу мы будем указывать исключаемую переменную, например, $R_{z_1}(g_1, g_2)$ или $R_{e^{lz_1}}(g_1, g_2)$. При этом мы, конечно, предполагаем, что оба Z_+-exp-полинома g_1 и g_2 содержат эту переменную.

Предложение 1. 1. *Пусть $f_j \not\equiv 0$, $1 \leqslant j \leqslant t$ Z_+-exp-полиномы от двух переменных, такие, что многочлены p_{f_j}, $1 \leqslant j \leqslant t$, не имеют общего делителя $h \not\equiv \text{const}$. Пусть J — идеал, порожденный этими Z_+-exp-полиномами в кольце H_ρ. Тогда или в идеале J существует Z_+-exp-полином $g \not\equiv 0$, зависящий только от z_2, или в нем существуют два Z_+-exp-полинома $g_1 \not\equiv 0$ и $g_2 \not\equiv 0$ такие, что g_1 не содержит e^{lz_1}, а g_2 — z_1.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что в условиях предложения существуют коэффициенты λ_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, такие, что полиномы p_{f_1} и $\sum\limits_{j=1}^{t} \lambda_j p_{f_j}$ взаимно просты. Рассмотрим случай, когда Z_+-exp-полиномы f_1 и $h = \sum\limits_{j=1}^{t} \lambda_j f_j$ содержат и z_1 и e^{lz_1}. Тогда определены результанты $R_{z_1}(f_1, h)$ и $R_{e^{lz_1}}(f_1, h)$. Очевидно, что они отличны от тождественного нуля и принадлежат идеалу J. В этой ситуации мы можем положить $g_1 = R_{e^{lz_1}}(f_1, h)$, $g_2 = R_{z_1}(f_1, h)$.

Остальные случаи (когда одна из функций f_1 или h не содержит z_1, но обе содержат e^{lz_1}; когда одна не содержит z_1, а другая — e^{lz_1}, и т. д.) предлагается рассмотреть читателю. □

Для любой функции $g \in \text{H}_\rho$ обозначим через N_g множество ее корней. Обозначим также через π оператор проектирования: $C^2 \ni (z_1, z_2) \to z_2 \in C^1$.

В дальнейшем мы будем рассматривать фиксированный идеал $J \subseteq \text{H}_\rho$ с Z_+-exp-полиномиальными образующими f_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, от двух переменных. В пределах первых трех параграфов мы будем предполагать, что $\overline{\pi(\bigcap\limits_j N_{f_j})} \neq C^1$, что полиномы p_{f_j}, $1 \leqslant j \leqslant t$, не имеют общего делителя $h \not\equiv \text{const}$ и, что в идеале J отсутствует exp-полином, зависящий только от z_2.

Для упрощения обозначений будем считать, что $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, где g_1 и g_2 взяты из предложения 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть $g_1 \not\equiv 0$ и $g_2 \not\equiv 0$ — exp-полиномы от двух переменных, причем $g_1 = \sum\limits_k z_1^k h_k(z_2)$, $g_2 = \sum\limits_k e^{kaz_1} q_k(z_2)$. Пусть N — неприводимое аналитическое множество такое, что $N \subseteq N_{g_1}$, $N \subseteq N_{g_2}$, $\dim N = 1$. Тогда N — комплексная прямая.*

Доказательство предоставляется читателю.

Пусть f_0 — такой Z_+-полином, что $N_{f_0} = N_f$ и $R_{z_1}(f_0, f'_{0z_1}) \not\equiv 0$. Представим f_0 в виде $f_* \prod\limits_{k=1}^{r} (z_1 - c_k z_2 - d_k)$, где f_* — Z_+-exp-полином, не имеющий делителей вида $z_1 - cz_2 - d$. Обозначим через ∇ оператор „дифференцирования по касательному направлению к множеству N_{f_*}": $\nabla = f'_{*z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} - f'_{*z_2} \frac{\partial}{\partial z_1}$.

Предложение 1.3. *Для любого* exp-*полинома*

$$g = \sum_{k=1}^{s} q_k(z_1, z_2) e^{a_k z_1},$$

где все $a_k \in C^1$ *различны, а* q_k *суть полиномы по* z_1, *такие, что* $R_{z_1}(f_*, q_k) \not\equiv 0$, $1 \leqslant k \leqslant s$, *существует полином* $P(\tau)$ *с* exp-*полиномиальными коэффициентами и* exp-*полином* $h = \sum h_j(z_2) z_1^j$ *такие, что* $R_{z_1}(f_*, h) \not\equiv 0$, *и* $P(\nabla) g = h$, *причем, если* g — Z_+-exp-*полином, то коэффициенты* P *суть* Z-exp-*полиномы,* h — Z_--exp-*полином.*

Доказательство. Если $s=1$, то положим $P(\tau) = e^{-a_1 z_1} \tau^0$, $h = q_1$.

Пусть теперь $s > 1$. Рассмотрим функцию ∇g. Она имеет тот же вид, что и g, т. е. $\nabla g = \sum_{k=1}^{s} p_k(z_1, z_2) e^{a_k z_1}$, где p_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, суть полиномы по z_1. Функция $q_1 \nabla g - p_1 g$ не содержит члена с множителем $e^{a_1 z_1}$. Убедимся сейчас, что все ее коэффициенты при множителях $e^{a_k z_1}$, $k > 1$, отличны от тождественного нуля на любой неприводимой компоненте $N \subseteq N_{f_*}$ такой, что $\overline{\pi N} = C^1$.

Предположим противное. Пусть для определенности коэффициент при $e^{a_2 z_1}$ равен нулю на неприводимой компоненте $N \subseteq N_{f_*}$, для которой $\overline{\pi N} = C^1$.

На любом открытом круге $U \subset C^1 = \pi C^2$, не содержащем корней результанта $R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1})$ накрытие $N \xrightarrow{\pi} C^1$ распадается на отдельные листы. Пусть $z_1 = \varphi(z_2)$ — уравнение некоторого листа накрытия $N \xrightarrow{\pi} C^1$ на таком круге.

Для любой функции χ, определенной в C^2, обозначим через χ_φ функцию, определенную на U и равную там $\chi(\varphi(z_2), z_2)$. Поскольку для любой функции

$$f'_{*z_1}(\varphi(z_2), z_2) \frac{d}{dz_2} \chi_\varphi = (\nabla \chi)\Big|_{z_1 = \varphi(z_2)},$$

то нетрудно видеть, что наше предположение о коэффициенте при множителе $e^{a_2 z_1}$ эквивалентно условию: функция $u = (q_2)_\varphi e^{a_2 \varphi(z_2)}$ удовлетворяет в круге U дифференциальному уравнению

$$u'(q_1)_\varphi - u\left[\frac{d}{dz_2}(q_1)_\varphi + (q_1)_\varphi a_1 \varphi'\right] = 0.$$

Поскольку этому же уравнению удовлетворяет функция $u = (q_1)_\varphi e^{a_1 \varphi(z_2)}$, то по теореме единственности указанные функции линейно зависимы, т. е. с некоторой константой C выполняется соотношение $(q_2)_0 e^{a_2 (z_1)} = C (q_1)_0 e^{a_1 (z_1)}$. Отсюда вытекает, что $(q_2 - C q_1 e^{(a_1 - a_2) z_1})|_N \equiv 0$. Рассмотрим результант $R_{z_1}(q_*, q_2 - C q_1 e^{(a_1 - a_2) z_1})$. Он тоже равен нулю на компоненте N, но отличен от тождественного нуля в C^2.

Нетрудно видеть, что указанный результант имеет вид exp-полинома g_2 из леммы 1.2. По этой лемме N—прямая. Но поскольку $\overline{\pi N} = C^1$, а exp-полином f_* не имеет делителей вида $z_1 - c z_2 - d$, то мы пришли к противоречию, показывающему справедливость промежуточного утверждения.

Положим $\chi_0 = g$, $\chi_1 = q_1 \nabla g - p_1 g$, $Q_0(\tau) = \tau^0$, $Q_1(\tau) = q_1 \tau - p_1 \tau^0$. По индукции строятся функции χ_k, $k = 2, \cdots, s-1$, и полиномы $Q_k(\tau)$ с exp-полиномиальными коэффициентами, такие, что $\chi_k = Q_k(\nabla) g$, χ_k не содержит слагаемых с множителями $e^{a_j z_1}$, $j \leqslant k$, коэффициенты χ_k при множителях $e^{a_j z_1}$, $j > k$, отличны от тождественного нуля на любой неприводимой компоненте $N \subseteq N_{f_*}$, $\overline{\pi N} = C^1$. Положив теперь $P = e^{-a_s z_1} \times Q_{s-1}, h = e^{-a_s z_1} \chi_{s-1}$, мы получим искомые P и h.

Таким образом первое утверждение предложения 1.3 доказано. Второе — непосредственно вытекает из способа построения полинома P и exp-полинома h. □

§ 2. Локальные и глобальные оценки для голоморфных функций

Предложение 2.1. *Для произвольного* exp-*полинома* $g \not\equiv 0$ *от n переменных существуют константы A, B и k такие, что*

$$|g(z)| \geqslant \hat{d}^k(z, N_g) e^{-A|z| - B}, \tag{2.1}$$

где $\hat{d}(z, N_g) = \min(d(z, N_g), 1)$, *а* $d(z, N_g)$ — *расстояние от точки z до N_g.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что существуют $a \in C^n$ и линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ порядка } q \text{ такие, что } P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(e^{(a, z)} g) = 1.$$

Тогда с учетом теоремы 4.3 [1] получаем

$$1 = \left| P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) e^{(a, z)} g \right| \leqslant e^{|a||z|} \sum_{|\alpha| \leqslant q} |b_\alpha| |g^{(\alpha)}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C e^{|a||z|} \sum_{|\alpha| \leqslant q} \hat{d}^{-|\alpha|}(z, N_g)(1 + |z|)^{3|\alpha|} |g(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C e^{|a||z|} |g(z)| (1 + |z|)^{3|q|} \hat{d}^{-q}(z, N_g),$$

что и составляет искомый результат. □

Замечание 2.2. На самом деле, с некоторыми C и k справедлива более точная оценка

$$C|g(z)| \geqslant \hat{d}^k(z, N_g)(1+|z|)^{-k} e^{H(\omega)|z|},$$

где ω — элемент единичной сферы в C^n, $z = |z|\omega$, а $H(\omega)$ — индикатор роста функции g.

Оценки, аналогичные (2.1), можно доказать для любой функции $g \in H_\rho$, удовлетворяющей уравнению $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)g = 1$, где $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами, ограниченными по модулю величиной $e^{A\rho(z)+B}$. Нам потребуется локальный аналог этого утверждения. Его доказательство мы разобъем на две леммы.

Выражение $K(z, r)$ мы используем для обозначения открытого шара радиуса r с центром в точке $z \in C^n$.

Лемма 2.3 *Пусть функция $g(z)$ аналитична в шаре $K(0, R) \subset C^n$, $0 < R \leqslant 1$, и пусть существует линейный дифференциальный оператор $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ порядка q с коэффициентами $h_\alpha(z)$, $|\alpha| \leqslant q$,* $|h_\alpha| \leqslant M_1$ такой, что $P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)g = h(z)$, *где $h(z)$ и $h_\alpha(z)$, $|\alpha| \leqslant q$ суть некоторые функции в $K(0, R)$. Тогда для любой точки $z \in K(0, R/2)$ и любого числа $0 < r \leqslant R/2$ существуют точка $v \in K(z, r)$ и константа C, не зависящая от g, M_1, R, r такие, что*

$$C|g(v)| > \frac{|h(z)|\, r^q}{M_1}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из условий леммы непосредственно вытекают неравенства

$$|h(z)| = \left|P_q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)g\right| \leqslant M_1 \sum_{|\alpha| \leqslant q} |g^{(\alpha)}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \sum_{|\alpha| \leqslant q} \alpha! \max_{|z_j - v_j| < r/3\sqrt{n}} |g(v)|\,(3\sqrt{n}/r)^{|\alpha|}.$$

Полицилиндр $\left\{v \in C^n : |v_j - z_j| \leqslant \frac{r}{3\sqrt{n}},\ \forall j\right\}$ содержится в шаре $K(z, r)$ и, следовательно, в этом шаре существует искомая точка. ❐

Лемма 2.4. *В условиях предыдущей леммы дополнительно предположим, что $|\mathrm{grad}\, g| \leqslant M_2$, $M_2 \geqslant 1$. Тогда существуют константы D и k, не зависящие от g, M_1, M_2, R такие, что*

$$D|g(z)| \geqslant \min(\hat{d}^{kq}(z, N_g)|h(z)|^k (M_1, M_2^q)^{-k}, 1/2),$$

где $\hat{d} = \min(d(z, N_g), R)$, $z \in K(0, R/2)$.

Доказательство. Фигурировавшую в предыдущей лемме величину r положим равной $\frac{1}{6}\min(\hat{d}, M_2^{-1})$. Зафиксируем точку $z \in K(0, R/2)$ и рассмотрим шар $K(v, 2r)$, где v — точка, удовлетворяющая неравенству (2.2). Отметим, что $K(z, r) \subset K(v, 2r) \subset K(0, R)$.

Если в шаре $K(v, 2r)$ существует точка w такая, что $|g(w)| \geqslant 1$, то

$$|g(z)| \geqslant |g(w)| - M_2|z - w| \geqslant 1 - M_2 \cdot 3r \geqslant 1/2.$$

Если же такой точки нет, то в шаре $K(v, 2r)$ гармоническая функция $-\lg|g(z)|$ не меньше нуля и для нее несложно доказать оценку $-\lg|g(z)| \leqslant -2^{2n}\lg|g(v)|$. Отсюда

$$|g(z)| \geqslant |g(v)|^{2^{2n}} \geqslant |h(z)|^{2^{2n}} M_1^{2^{2n}} C^{-2^{2n}} \left(\frac{1}{6}\min(\widetilde{d}, M_2^{-1})\right)^{2^{2n}\cdot q},$$

откуда непосредственно вытекает необходимый результат. □

Лемма 2.5. *Пусть $g(z)$ — функция, голоморфная в круге $K(0, R) \subset C^1$, такая, что $g(0) \neq 0$, $|g(z)| \leqslant M$. Тогда в круге $K(0, R/2)$ число m корней функции g (с учетом их кратности) удовлетворяет неравенству*

$$m \leqslant \log_2 M - \log_2|g(0)|.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon < R/2$. В круге $K(0, R-\varepsilon)$ функция $g(z)$ имеет конечное число корней. Пусть ζ_j, $j = 1, 2, \cdots, k$, — ее корни, занумерованные в порядке возрастания модулей, из которых первые m корней и только они содержатся в круге $K(0, R/2)$. Тогда, как следует из формулы Йенсена, справедливо неравенство

$$(R-\varepsilon)^k \prod_{j \leqslant k} |\zeta_j|^{-1} \leqslant M/|g(0)|.$$

Очевидно, что

$$(R-\varepsilon)^m (R/2)^{-m} \leqslant (R-\varepsilon)^m \prod_{j \leqslant m} |\zeta_j|^{-1} \leqslant (R-\varepsilon)^k \prod_{j \leqslant k} |\zeta_j|^{-1}.$$

Из произвольности ε вытекает соотношение $2^m \leqslant M/|g(0)|$, эквивалентное доказываемому неравенству. □

На основании приведенных лемм мы можем теперь установить некоторые оценки снизу для функции $\max\limits_j \lg|f_j|$.

§ 3. Оценки снизу для функции $\max\limits_j \lg|f_j|$

Теорема 3.1. *Для любого $l > 0$ существует константа A и последовательность чисел R_j, $j = 1, 2, \cdots$, таких, что $l(j-1) < R_j < lj$ и на множестве $\pi^{-1}\Pi$, где $\Pi = \bigcup\limits_j \partial K(0, R_j)$, а $\partial K(0, R_j)$ — граница круга $K(0, R_j) \subset C^1 = \pi C^2$, выполняется неравенство, $\max\limits_j \lg|f_j(z)| \geqslant -A(|z|+1)$.*

Доказательство. Напомним, что f_1, f_0 и f_* — Z_+-exp-полиномы, являющиеся полиномами по z_1 такие, что $N_{f_1} = N_{f_0}$, $R_{z_1}(f_0, f_{0z_1}) \neq 0$, $f_0 = f_* \prod\limits_{j=1}^{r}(z_1 - c_j z_2 - d_j)$ и f_* не имеет делителей вида $z_1 - cz_2 - d$.

Для каждого $1 \le j \le r$ существует Z-exp-полином f_{l_j} из базисного набора такой, что $f_{l_j}(c_j z_2 + d_j, z_2) \not\equiv 0$.

Рассмотрим полином $P(\cdot)$ и Z-exp-полином h, удовлетворяющие условиям предложения 1.3 с $g = f_2$. По этому предложению $R_{z_1}(f_*, h) \not\equiv 0$. Поскольку $R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1}) \not\equiv 0$, то exp-полином

$$\chi = R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1}) \cdot R_{z_1}(f_*, h) \prod_{j=1}^{r} f_{l_j}(c_j z_2 + d_j, z_2),$$

зависящий только от z_2, отличен от тождественного нуля.

Пусть ζ_j, $j = 1, 2, \cdots$ — его корни, занумерованные в порядке возрастания модулей. Существует константа C такая, что $C|\zeta_j| > j$ (см., например, [1]). Опишем около каждого корня ζ_j круг с центром в ζ_j и радиуса $a|\zeta_j|^{-2}$, где $a = \frac{l}{4C^2}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{-2}\right)^{-1}$.

Поскольку сумма диаметров этих кругов удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2a|\zeta_j|^{-2} < 2 \cdot \frac{l}{4C^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}\right)^{-1} \cdot C^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \frac{l}{2},$$

то для любого j на интервале $\left(l(j-1) + \frac{l}{4}, lj - \frac{l}{4}\right)$ существует число R'_j такое, что окружность $\partial K(0, R'_j)$ не пересекает ни один из построенных кругов.

Нетрудно видеть, что расстояние $d(\partial K(0, R'_j), N_\chi) > (bR'^2_j)^{-1}$ с некоторой b, не зависящей от j. Кроме того, мы считаем, что $(bR'^2_j)^{-1} < \min(1, l/4)$ при всех j.

Рассмотрим в $C^1 = \pi C^2 (2bR'^2_j)^{-1}$-окрестности окружностей $\partial K(0, R'_j)$. Обозначим их через U_j.

Ниже мы покажем, что для всякого j существует константа R_j такая, что $\partial K(0, R_j) \subset U_j$ и с некоторыми A и B выполняется соотношение

$$\lg|f_2(z)| > -A|z| - B, \quad z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1}\Pi, \tag{3.1}$$

где $\Pi = \bigcup\limits_j \partial K(0, R_j)$.

Поскольку оценки такого же типа, как это следует из предложения 2.1, выполняются на множестве $\{z \in C^2 : z_1 - c_j z_2 - d_j = 0\} \cap \pi^{-1}\Pi$ для функции $\lg|f_{l_j}(z)|$, то с некоторыми $A_1 \geqslant 0$ и $B_1 \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\max_j \lg|f_j(z)| > -A_1|z| - B_1, \quad z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1}\Pi.$$

Пусть константы $A_2 \geqslant 0$ и $B_2 \geqslant 0$ таковы, что $\max\limits_j |\operatorname{grad} f_j| \leqslant e^{A_2|z| + B_2}$. Рассмотрим $\frac{1}{2} e^{-(A_1 + A_2)(|z|+1) - (B_1 + B_2)}$-окрестность множества $N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi$. Пусть точка v принадлежит ей, а точка $z \in N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi$ такова, что $d(v, z) < e^{-(A_1+A_2)(|z|+1)-(B_1+B_2)}$. Одна из функций f_j в этой точке удовлетворяет неравенству $\lg|f_j| \geqslant -A_1|z| - B_1$. Оценим ее модуль в точке v:

$$|f_j(v)| \geqslant |f_j(z)| - |z-v| \max_{[z,\, v]} |\operatorname{grad} f_j| \geqslant e^{-A_1|z|-B_1} -$$

$$-\frac{1}{2} e^{-(A_1+A_2)(|z|+1)-(B_1+B_2)} e^{A_2(|z|+1)+B_2} = \frac{1}{2} e^{-A_1|z|-B_1} \geqslant \frac{1}{2} e^{-A_1(|v|+1)-B_1}.$$

Следовательно, для любой точки z из указанной окрестности с некоторыми A_3 и B_3 имеет место неравенство $\max_j \lg|f_j(z)| \geqslant -A_3|z| - B_3$.

Рассмотрим дополнение этой окрестности до множества $N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi$. Нетрудно видеть, что на нем с некоторыми A_4 и B_4 выполняется оценка $\lg|f_1| > -A_1|z| - B_4$. Положив $A_5 = \max(A_3, A_4)$, $B_5 = \max(B_3, B_4)$, получаем

$$\max_j \lg|f_j| > -A_5|z| - B_5, \quad z \in \pi^{-1}\Pi,$$

что составляет требуемый результат.

Докажем теперь существование констант A, B и последовательности R_j, $j = 1, 2, \cdots$, удовлетворяющих (3.1). Доказательство этого, будем проводить в два этапа. Сначала мы установим, что на многообразии N_{f_1} в некоторой окрестности множества $N_{f_1} \cap \pi^{-1}\Pi'$, где $\Pi' = \bigcup_j \partial K(0, R'_j)$, функция f_2 не может иметь „слишком много“ корней, на основании чего мы сможем выбрать последовательность R_j. Затем мы в некоторой меньшей окрестности оценим функцию $\lg|f_2|$ снизу через расстояние до корней, из чего выведем существование искомых A и B.

Исходя из предложения 2.1 заключаем, что для точек z, принадлежащих U_j, с некоторыми A_0 и B_0, не зависящими от z и j, выполняется неравенство $|\chi(z)| \geqslant e^{-A_0|z|-B_0} R_j'^{-2}$. Аналогичное утверждение справедливо для всех exp-полиномов, входящих множителями в функцию χ.

Зафиксируем радиус R'_j и точку $z \in \partial k(0, R'_j)$. Пусть $z_1 = \varphi_k(z_2)$ $1 \leqslant k \leqslant k_0$ — уравнения листов накрытия $N_{f_1} \to C^1$ над кругом $K(z, (2bR_j'^2)^{-1}$. Здесь k_0 — степень f_1 как полинома по z_1. Очевидно, что с некоторыми A_1 и B_1, не зависящими от z и k, $1 \leqslant k \leqslant k_0$, функции $\varphi_k(z_2)$ допускают оценку $|\varphi_k(z_2)| \leqslant e^{A_1R'_j+B_1}$, $z_2 \in U_j$. Следовательно, при $z_2 \in U_j$ с некоторыми A_2 и B_2 справедливо неравенство

$$|f_2(\varphi_k(z_2), z_2)| \leqslant \exp e^{A_2R'_j+B_2}. \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что существуют полином $P_1(\tau)$ и число m такие, что коэффициенты этого полинома имеют вид $g(f'_{1z_1})^{-m}$, $g \in H_0$, и $P_1(f'_{\cdot z_1}\nabla) = P(\nabla)$, где P — полином, фигурировавший выше. Функция $R_{z_1}(f_\circ, h)$ представима в виде

$$R_{z_1}(f_\circ, h) = h_1 \cdot h + h_2 f_\circ = h_1 P(\nabla) \; f_2 + h_2 f_\circ = h_1 P_1 (f'^{-1}_{\cdot z_1} \nabla) f_2 + h_2 f_\circ,$$

где h_1, h_2 — $Z_\perp$-exp-полиномы.

С учетом соотношения $f'_{\cdot z_1}(\varphi_k(z_2), z_2)\left(\dfrac{d}{dz_2}\right)(f_2)_{\varphi_k} = (\nabla f_2)|_{z_1 = \varphi_k(z_2)}$ получаем

$$h_1(\varphi_k(z_2), z_2) P_1\left(\frac{d}{dz_2}\right)(f_2)_{\varphi_k} = R_{z_1}(f_\circ, h).$$

Все коэффициенты этого уравнения (мы относим туда и функцию $(h_1)_{\varphi_k}$) оцениваются сверху величиной $\exp e^{A_3 R'_j + B_3}$, а функция $R_{z_1}(f_\circ, h)$ удовлетворяет на U_j неравенству $|R_{z_1}(f_\circ, h)| > e^{-A_3 R'_j - B_3}$ с некоторыми A_3 и B_3, общими для всех j.

Применив к функции $(f_2)_{\varphi_k}$ лемму 2.3 с $R = (5bR'^2_j)^{-1}$, заключаем, что в $(10 bR'^2_j)^{-1}$-окрестности точки z существует точка v, для которой с некоторыми A_4 и B_4 $|(f_2)_{\varphi_k}(v)| > \exp(-e^{A_4 R'_j + B_4})$, причем A_4 и B_4 не зависят от j, k и точки v.

Круг $K(v, 2(5bR'^2_j)^{-1})$ лежит в $(2bR'^2_j)^{-1}$-окрестности точки $z \in \partial K(0, R'_j)$. Функция $(f_2)_{\varphi_k}$ определена на нем. Применим к ней лемму 2.5. Из этой леммы с учетом неравенства (3.2) следует, что существуют константы A_5 и B_5, не зависящие от j и $z \in \partial K(0, R'_j)$ такие, что в круге $K(v, (5bR'^2_j)^{-1})$, а следовательно, и в круге $K(z, (10bR'^2_j)^{-1})$ число корней функции $(f_2)_{\varphi_k}$ не превосходит величины $e^{A_5 R'_j + B_5}$.

Окружность $\partial K(0, R'_j)$ можно покрыть кругами с центрами на ней и радиусами $(10bR'^2_j)^{-1}$ так, чтобы число этих кругов не превосходило величины $[2\pi R'_j : (10bR'^2_j)^{-1}] + 1 = [20\pi bR'^3_j] + 1$ и чтобы центры двух соседних кругов находились друг от друга на расстоянии не большем, чем $(10bR'^2_j)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что указанные круги покрывают $(30bR'^2_j)^{-1}$-окрестность окружности $\partial K(0, R'_j)$ и, следовательно, в эту окрестность проектируется общих корней функций $f_\circ$ и f_2 не более, чем

$$e^{A_5 R'_j + B_5} \cdot k_0([20\pi b R'^3_j] + 1) < e^{A_6 R'_j + B_6},$$

с некоторыми A_6 и B_6, не зависящими от j.

В $(60bR'^2_j)^{-1}$-окрестности окружности $\partial K(0, R'_j)$ существует окружность $\partial K(0, R_j)$, не пересекающая ни один из кругов, лежащих в этой окрестности и имеющих центры в точках множества $N = \pi\{z \in C^2 : f_2(z) = f_* (z) = 0\}$ и радиусы $e^{-A_* R_j - B_*}(120\, bR_j^2)^{-1}$. Отсюда вытекает, что с некоторыми A_7 и B_7, не зависящими от j, имеет место неравенство $d(\partial K(0, R_j), N) > e^{-A_7 R_j - B_7}$.

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства. Пусть $z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1} \partial K(0, R_j)$ и $z_1 = \varphi(z_2)$ — уравнение листа накрытия $N_{f_*} \xrightarrow{\pi} C^1$, содержащего точку z и определенного в $(60\, bR_j^2)^{-1}$-окрестности точки $z_2 = \pi z$.

Функцию $\varphi'(z_2)$ оценим по модулю, исходя из формулы $\varphi' = -f'_{*z_2}/f'_{*z_1}$, того факта, что с некоторыми Z_+-exp-полиномами h_1 и h_2 $R_{z_1}(f_*, f'_{z_1}) = h_1 f_* + h_2 f'_{*z_1}$ и того, что $R_{z_1}(f_*, f'_{*z_1})$ будучи exp-полиномом, оценивается на основании предложения 2.1. При этом мы получим, что в бицилиндре $\{v \in C^2 : |v_1 - z_1| < (60\, bR_j^2)^{-1}, |v_2 - z_2| < 1\}$ с некоторыми A_8 и B_8 имеет место неравенство $|\varphi'(v_2)| < e^{A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) + B_8}$.

Пусть точка $v_2 \in C^1 = \pi C^2$ принадлежит $e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$-окрестности точки $z_2 = \pi z$. Тогда точка $v = (v_1, v_2)$, где $v_1 = \varphi(v_2)$, принадлежит указанному бицилиндру. Это легко установить, используя неравенство $|v_1 - z_1| < |v_2 - z_2| \cdot \max\limits_{[v_2, z_2]} |\varphi'|$.

Для произвольной функции g, определенной в $\pi^{-1}(\bigcup\limits_j U_j)$ и удовлетворяющей там оценке $|g(v)| < e^{A_9 |v| + B_9}$ с некоторыми A_9 и B_9, рассмотрим функцию $g_\varphi = g(\varphi(v_2), v_2)$. Из сказанного выше следует, что в $e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$-окрестности точки z_2 имеет место неравенство $|g_\varphi| \leqslant e^{(A_9 + 2)(|z_2| + |\varphi(z_2)|) + B_9}$.

Учитывая этот факт, применим к функции $(f_2)_\varphi$ лемму 2.4, положив в ней $R = e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$. Из указанной леммы следует, что в $e^{-A_8(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_8}$-окрестности точки z с некоторыми A_{10}, B_{10} и k, не зависящими от j и $z \in N_{f_*} \cap \pi^{-1} \partial K(0, R_j)$, выполняется неравенство

$$|(f_2)_\varphi| > e^{-A_{10}(|z_2| + |\varphi(z_2)|) - B_{10}} \min(d^k(z_2, \pi N), R^k),$$

завершающее доказательство. □

§ 4. Основная теорема

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 4.1. *Пусть $f_1, \cdots, f_t$ — произвольный набор Z-exp-полиномов от двух переменных, и пусть J — идеал, порожденный ими в кольце H_ρ, где ρ определена по формуле* (0.1). *Тогда замкнутый идеал J локализуем.*

Доказательство. Мы можем считать, что все f_j, $1 \leqslant j \leqslant t$, суть Z_+-exp-полиномы. Пусть p — наибольший общий полиномиальный делитель полиномов p_{f_j}, $1 \leqslant j \leqslant t$. Рассмотрим идеал J_1, порожденный в кольце H_ρ Z_+-exp-полиномами $f_j/p(z, e^{iz})$.

Пусть функция $h \in \mathrm{H}_\rho$ такова, что $h_z \in J_z$ для любой точки $z \in C^2$. Методами работы [4] из леммы 2.3 несложно выводится включение $h_1 = h/p(z, e^{iz}) \in \mathrm{H}_\rho$. Очевидно, что $h_{1z} \in J_{1z}$ для любой точки $z \in C^2$. Локализуемость идеала $\overline{J}$ будет установлена, если мы докажем включение $h \in \overline{J}$. Для этого достаточно убедиться в справедливости включения $h_1 \in \overline{J}_1$.

По предложению 1.1 в идеале J_1 или содержится Z-exp-полином $g_1 \neq 0$, зависящий только от z_2 или в нем существуют два Z_+-exp-полинома $g_1 \neq 0$ и $g_2 \neq 0$, не содержащих e^{iz_1} и z_1 соответственно. Отсюда, используя лемму 1.2, мы делаем вывод, что все неприводимые компоненты $N \subseteq \bigcap_j N_{f_j/p}$ такие, что $\dim N = 1$, суть комплексные прямые. Нетрудно убедиться в том, что этих прямых конечное число.

Пусть q_1 — полином, равный произведению всех общих делителей вида $z_1 - cz_2 - d$ функций $f_j/p(z, e^{iz})$ (с учетом кратности этих делителей), а полином q_2 равен произведению всех остальных общих линейных делителей функций $f_j/p(z, e^{iz})$. Положим $q = q_1 q_2$.

Рассмотрим функцию $h_2 = h_1/q$ и идеал J_2, порожденный в кольце H_ρ функциями $'f_j = f_j/p(z, e^{iz})\, q$. Для любой точки $z \in C^2$ $h_{2z} \in J_z$ и, кроме того, $h_2 \in \mathrm{H}_\rho$. Аналогично сказанному выше для завершения доказательства нам достаточно установить включение $h_2 \in \overline{J}_2$.

Если в идеале J_1 существует Z-exp-полином (пусть это будет $f_1/p(z, e^{iz})$), зависящий только от z_2, то для него существуют константы A и B и последовательность R_j, $j-1 < R_j < j$, такие, что на множестве $\pi^{-1}(\bigcup_j \partial K(0, R_j))$ выполняется соотношение

$$\lg |f_1/p(z, e^{iz})| > -A|z_2| - B.$$

Как следствие сказанное переносится и на функцию $'f_1$.

Если же указанной функции в идеале J_1 нет, то по предложению 1.1 в J_1 есть два Z_+-exp-полинома (пусть это будут f_1/p и f_2/p), первый из которых не содержит e^{iz_1}, а второй — z_1.

Нетрудно видеть, что f_1/pq_1 — Z_+-exp-полином, причем множество N общих корней его и Z_+-exp-полиномов f_j/p, $2 \leqslant j \leqslant t$, таково, что $\pi N \neq C^1$. Теперь используя теорему 3.1, несложно убедиться в существовании констант A и B и последовательности R_j, $j-1 < R_j < j$, таких, что

$$\max_j \lg |'f_j| > -A|z| - B, \; z \in \pi^{-1}(\bigcup_j \partial K(0, R_j)).$$

Меняя местами z_1 и z_2 и повторно применяя те же рассуждения, мы получим, что для образующих $'f_j$ идеала J_2 всегда существуют константы A и B и две последовательности R_j^1 и R_j^2 такие, что $j-1 < R_j^i < j$, $i = 1, 2$, и каждая компонента связности множества

$$\{z \in C^2 : \max_j \lg |'f_j| < -A|z| - B\}$$

лежит в множестве вида

$$U_{jk} = \{ R_j^1 < |z_1| < R_{j+1}^1,\ R_k^2 < |z_2| < R_{k+1}^2 \}.$$

Теперь включение $h_2 \in J_2$, завершающее доказательство, непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 4.2. [2]. Пусть J — замкнутый идеал в кольце H_ρ, $z \in C^n$, где ρ определена по формуле (0.1). Тогда, если в идеале J существует ограниченное множество $\{f_\tau\}$ такое, что с некоторыми A и B все компоненты связности G_k множества

$$\{z \in C^n : \sup_\tau \lg |f_\tau| < -A|z| - B\}$$

ограничены и $\sup\limits_{z \in G_k} |z|/(1 + \inf\limits_{z \in G_k} |z|) < C$, где C не зависит от k, то идеал J локализуем.

Рассмотрим теперь приложение основной теоремы к теории систем дифференциально-разностных уравнений. С этой целью мы приведем построение некоторых функциональных пространств, определенных в [3].

Пусть $\mathrm{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}$ и $\mathrm{E}_{\alpha, A}^{(j)}$ — банаховы пространства комплекснозначных функций на R^n, для которых соответственно определены нормы

$$\|g\| = \sup_{x,\, q} \left| e_{\alpha, A}^{-1}(x) \frac{g^{(q)}(x)}{B^{|q|}\, |q|^{|q|\beta}} \right|, \quad \|g\| = \sup_{x,\, |q| < j} |e_{\alpha, A}^{-1}(x)\, g^{(q)}(x)|,$$

где $e_{\alpha, A}(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{e} \left| \frac{x}{A} \right|^{1/\alpha} \right)$, если $\alpha > 0$, $e_{0, A} = 1$ при $|x| \leqslant A$, $e_{0, A} = \infty$ при $|x| > A$. Положим $\mathrm{E}_\alpha^\beta = \lim\limits_{B \to 0}\ \mathrm{pr}\ \lim\limits_{A \to \infty} \mathrm{E}_{\alpha, A}^{\beta, B}$, $\mathrm{E}_\alpha^* = \lim\limits_{j,\, A \to \infty} \mathrm{pr}\ \mathrm{E}_{\alpha, A}^{(j)}$.

Тогда, как доказано в [3], кольцо H_ρ с весовой функцией ρ, заданной формулой (0.1), связано при $m_2 = 1$ с пространством

$$\Phi = \begin{cases} \mathrm{E}_{\frac{m-1}{m}}^{1/m_1}, & \text{если } m_1 > 0, \\ \mathrm{E}_{\frac{m-1}{m}}^{*}, & \text{если } m_1 = 0, \end{cases}$$

соотношением $F(\Phi') = \mathrm{H}_\rho$, где F — преобразование Фурье, а Φ' — пространство, сильно сопряженное к Φ.

В такой ситуации проблема локализуемости замкнутых идеалов кольца H_ρ является двойственной по отношению к проблеме о допустимости спектрального анализа и синтеза инвариантными относительно сдвига подпространствами пространства Φ (см. [6]). Не останавливаясь на подробностях редукции одной проблемы к другой, сформулируем следующую итоговую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть задана система однородных дифференциально-разностных уравнений вида*

$$\sum_{k=1}^{s} p_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x - a^k) = 0, \quad x \in R^2, \quad a^k \in Z_2, \quad u \in \Phi.$$

(Мощность этой системы может быть произвольной). Пусть X — подпространство ее решений. Тогда, если $X \neq \{0\}$, то X допускает спектральный анализ, т. е. содержит exp-*полином и* $\neq 0$ *и спектральный синтез, т. е. совпадает с замыканием множества* exp-*полиномов в нем содержащихся.*

Всесоюзный научно-исследовательский
институт железнодорожного транспорта

Поступила 12.III.1973

Դ. Ի. ԳՈՒՐԵՎԻՉ. exp-պոլինոմիալ ծնիչներով փակ իդեալներ երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների օղակներում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների որոշ օղակներում առաջացած փակ իդեալները հետևյալ տեսքի ծնիչներով

$$\sum_{k=1}^{s} e^{i\left(a_1^k z_1 + a_2^k z_2\right)} p_k(z_1, z_2),$$

որտեղ p_k-ն բազմանդամներ են, իսկ a_j^k-ն ամբողջ թվեր: Ապացուցված է, որ այդպիսի իդեալները միարժեքորեն որոշվում են իրենց լոկալ ստրուկտուրայով:

D. I. GUREVICH. *Closed ideals with* exp-*polynomial generators in the rings of entire functions of two variables* (summary)

In the paper the closed ideals, generated in some rings of entire functions of two variables by the generators

$$\sum_{k=1}^{s} e^{i\left(a_1^k z_1 + a_2^k z_2\right)} p_k(z_1, z_2),$$

where p_k are polynoms, and a_j^k-integers, are studied. It is proved that suc h ideals are defined by their local structure.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. И. Гуревич.* Обобщенные базисы в некоторых кольцах голоморфных функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 36, 1972, 568—582.
2. *Д. И. Гуревич.* Замкнутые идеалы с нульмерным множеством корней в некоторых кольцах голоморфных функций, Матем. сб., (в печати).
3. *В. П. Паламодов.* Преобразование Фурье быстро растущих бесконечно дифференцируемых функций, Труды ММО, 11, 1962, 309—350.
4. *L. Ehrenpreis.* Solutions of Some Problems of Division. 2, Am. J. Math., 77, 1955, 286—292.
5. *L. Ehrenpreis.* Fourier analysis in several complex variables, New York, Wiley—Interscience, 1970.
6. *B. Malgrange.* Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équatiens de convolution, Ann. Inst. Fourier, 6, 1956, 271—355.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

Г. Г. КАЗАРЯН

О ДОБАВЛЕНИИ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Пусть R_n — n-мерное евклидово пространство точек $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, A_n — n-мерное пространство мультииндексов, т. е. точек $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где все $\alpha_i\,(i=1,\cdots,n)$ — целые, неотрицательные числа. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in A_n$, то положим, как обычно

$$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\ D_k=i^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi_k},\ |\alpha|=\sum_{j=1}^n\alpha_j.$$

Если $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ — вектор с вещественными компонентами и $\alpha\in A_n$, то $(\lambda,\alpha)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i$, Обозначим еще $R_n^{(0)}=\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \prod_{j=1}^n\xi_j\neq0\}$.

Для данного полинома $R(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha^R\xi^\alpha$ обозначим через (R) множество мультииндексов $(R)=\{\alpha;\ \alpha\in A_n,\ \gamma_\alpha^R\neq0\}$. Полином $R(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha^R\xi^\alpha$ назовем λ-однородным порядка d_R, если существуют вектор $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ и число d_R такие, что $(\lambda,\alpha)=d_R\ \forall\alpha\in(R)$. В этом случае будем записывать $R(\xi)=\sum_{(\lambda,\alpha)=d_R}\gamma_\alpha^R\xi^\alpha$.

Для данного полинома $R(\xi)$ введем функцию Л. Хермандера

$$\tilde R(\xi)=\Big[\sum_{|\nu|\geq0}|D^\nu R(\xi)|^2\Big]^{1/2}.$$

В настоящей заметке в случае $n=2$ решаются следующие задачи: для данного λ-однородного полинома $P(\xi)$ порядка $d_P>0$ найти условия на полином $Q(\xi)$ такие, чтобы с некоторой константой $C>0$ выполнялось соотношение

$$\text{I)}\quad |Q(\xi)|\leqslant C(1+|P(\xi)|)\quad\forall\xi\in R_n \tag{0.1}$$

или

$$\text{II)}\quad \tilde Q(\xi)\leqslant C\quad\tilde P(\xi). \tag{0.2}$$

Обозначим через $\{Q\}_P$ и $\{\tilde Q\}_P$ соответственно множество полиномов, для которых имеет место неравенство (0.1) или (0.2). Нас будет интересовать вопрос, какие „младшие члены“, т. е. члены вида $R(\xi)=\sum_{(\lambda,\alpha)=d_R}\gamma_\alpha^R\xi^\alpha$ при $d_R<d_P$, можно добавлять к полиному $P(\xi)$, чтобы для полученного $\mathrm{P}(\xi)=P(\xi)+R(\xi)$ и всех полиномов $Q\in\{Q\}_P$ или $Q\in\{\tilde Q\}_P$ выполнялось соотношение

$$\text{III)}\quad |Q(\xi)| \leq C\,(1+|\mathbf{P}(\xi)|\quad)\quad \forall \xi \in R_n \tag{0.3}$$

или

$$\text{IV)}\quad \tilde{Q}(\xi) \leq C\,\tilde{\mathbf{P}}(\xi)\quad \forall \xi \in R_n. \tag{0.4}$$

Очевидно, задачи III и IV эквивалентны соответственно следующим задачам III′, IV′: для каких младших членов $R(\xi)$ имеют место неравенства

$$\text{III}')\quad |P(\xi)| \leq C\,(1+|\mathbf{P}(\xi)|)\quad \forall \xi \in R_n, \tag{0.3′}$$

$$\text{IV}')\quad \tilde{P}(\xi) \leq C\,\tilde{\mathbf{P}}(\xi),\quad \mathbf{P}(\xi) = P(\xi) + R(\xi), \tag{0.4′}$$

Задачи типа I) — IV) рассматривались многими авторами в более общей постановке (см., например, [1]—[4]). Ими получены достаточные условия для справедливости некоторых из соотношений (0.1)—(0.4). Известно, например, что если $R(D)$ — семиэллиптический оператор (см. [1], теорема 4.18), т. е. λ-однородный оператор с условием $R(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то для любого $\nu \in A_n$, $(\lambda, \nu) \leq d_R$

$$|\xi^\nu| \leq C(1+|P(\xi)|)\quad \forall \xi \in R_n.$$

В настоящей заметке в терминах свойств действительных нулей рассматриваемых полиномов в случае $n=2$ решаются задачи (I—IV), причем основное ударение делается на совпадание необходимых и достаточных условий.

Будем пользоваться факторизацией данных полиномов (см. лемму 1). Отметим, что вследствие того, что упомянутая лемма 1 не имеет своего аналога в случае $n>2$, изложенный метод не распространяется на этот случай.

Итак, всюду в дальнейшем будем считать, что размерность рассматриваемых пространств $n=2$.

Заметим, что если $R(\xi)$ — λ-однородный полином порядка d_R, то $R(\xi)$ является также $k\cdot\lambda$-однородным порядка $k\cdot d_R$ для любого действительного числа $k>0$.

Очевидно, также, что соотношение λ_1/λ_2 или λ_2/λ_1 является рациональным числом вида p/q, где q можно считать нечетным числом. Пусть, для определенности, таким является соотношение λ_1/λ_2. Тогда имеет место

Лемма 1. *Пусть $R(\xi)$ — λ-однородный полином с действительными коэффициентами порядка d_R. Тогда его можно представить в виде*

$$R(\xi) = r(\xi)\prod_{j=1}^{N_R}\left(\xi_1 - \varkappa_j\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}\right)^{l_j} = r(\xi)\prod_{j=1}^{N_R} r_j(\xi), \tag{0.5}$$

где l_j — натуральные числа, $\varkappa_j \neq 0$ — попарно различные действительные числа $(j=1,\cdots,N_R)$, $r(\xi)$ — аналитическая в $R_2^{(0)}$ функция, причем $r(\xi)\neq 0$ при $\xi \in R_2^{(0)}$.

Доказательство этой леммы можно найти в [4].

Отметим, что утверждение такого типа в иной формулировке можно найти в более ранней работе [3].

Всюду в дальнейшем будем считать, что рассматриваемые полиномы имеют действительные коэффициенты. Очевидно, это не умаляет общности, так как в противном случае мы могли бы рассматривать полиномы $|P(\xi)|^2$, $|Q(\xi)|^2$ и т. д., которые уже имеют действительные коэффициенты.

1°. Займемся задачами I и II. Пусть сначала $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ — λ-однородные полиномы ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) порядка d_P и d_Q соответственно ($d_Q < d_P$).

По лемме 1 они представляются в виде

$$P(\xi) = p(\xi)\cdot\prod_{j=1}^{N_P}(\xi_1 - \tau_j\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_j} = p(\xi)\prod_{j=1}^{N_P} p_j(\xi), \tag{1.1}$$

$$Q(\xi) = q(\xi)\cdot\prod_{j=1}^{N_Q}(\xi_1 - \mu_j\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{k_j} = q(\xi)\cdot\prod_{j=1}^{N_Q} q_j(\xi). \tag{1.2}$$

Пусть полином (λ-однородный) $P(\xi)$ удовлетворяет условиям $P(1, 0)\neq 0$, $P(0, 1)\neq 0$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы имело место неравенство* (0.1) *для двух λ-однородных полиномов $Q(\xi)$ и $P(\xi)$, соответственно порядков d_Q и d_P с представлениями* (1.2) *и* (1.1), *необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий* (возможно, после некоторой перенумерации):

1) $$\tau_j = \mu_j \quad (j = 1, \cdots, N_P);$$

2) $$m_j/k_j \leqslant d_P/d_Q \quad (j = 1, \cdots, N_P).$$

Следствие 1.1. Для того чтобы для двух λ-однородных полиномов $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ выполнялось соотношение

$$C_1|Q(\xi)| \leqslant 1 + |P(\xi)| \leqslant C_2(1 + |Q(\xi)|) \quad \forall\xi\in R_n$$

необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий (после некоторой возможной перенумерации μ_j, k_j, $j = 1, \cdots, N_Q$):

1) $$N_Q = N_P, \quad \mu_j = \tau_j \quad (j = 1, \cdots, N_P),$$

2) $$d_P = d_Q, \qquad k_j = m_j \quad (j = 1, \cdots, N_P).$$

Пусть теперь $Q(\xi)$ не является λ-однородным полиномом, т. е. $Q(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)\leqslant d_Q} \gamma_\alpha^Q \xi^\alpha$. Тогда, очевидно, $Q(\xi)$ можно представить в виде суммы λ-однородных полиномов

$$Q(\xi) = \sum_{k=1}^{M} Q_k(\xi) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{(\lambda,\alpha)=d_{Q_k}} \gamma_\alpha^Q \xi^\alpha, \tag{1.3}$$

где $d_Q = d_{Q_1} > d_{Q_2} > \cdots > d_{Q_M}$.

Следствие 1.2. (решение задачи 1). *Для того чтобы для двух* полиномов: $Q(\xi)$, имеющего вид (1.3) и $P(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\nu)=d_P} \gamma_\nu^P \xi^\nu \ (d_Q \leqslant d_P)$

имело место соотношение (0.1), необходимо и достаточно, чтобы каждая λ-однородная пара полиномов $\{Q_k(\xi), P(\xi)\}$ при $d_{Q_k} \neq 0$ $(k=1,\cdots, M)$ удовлетворяла условиям теоремы 1.

Чтобы сформулировать предложение, дающее решение задачи II, введем следующие обозначения.

Для двух λ-однородных полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ порядков d_P и d_Q $(d_Q \leqslant d_P)$ с представлениями (1.1) и (1.2) положим

$$\Delta_j(P) = \min_{|\nu|=m_j}(\lambda, \nu) = \min_{|\nu|=m_j}(\lambda, \nu). \quad \Delta(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N_P} \Delta_j(P).$$

Теорема 2. *Пусть $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ — два λ-однородных полинома порядков d_P, d_Q $(d_Q < d_P)$ с представлениями* (1.1), (1.2). *Для того чтобы для этих полиномов выполнялось соотношение* (0.2), *необходимо и достаточно, чтобы для тех j $(1 \leqslant j \leqslant N_P)$, для которых $d_Q > d_P - \Delta_j(P)$, одновременно выполнялись следующие условия:*

1) $\mu_j = \tau_j$ возможно после перенумерации,

2) $d_P - d_Q \geqslant \theta(m_j - k_j)$, где $\theta = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Следствие 1.3. (решение задачи II). Пусть $Q(\xi)$ — полином вида (1.3) и $P(\xi)$ — λ-однородный полином порядка d_P. Для того чтобы для полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имело место неравенство (0.2), необходимо и достаточно, чтобы каждая пара λ-однородных полиномов $\{Q_k(\xi), P(\xi)\}$ при $d_{Q_k} > 0$ $(k=1,\cdots, M)$ удовлетворяла условиям теоремы 2.

Прежде чем перейти к доказательству сформулированных утверждений, докажем два простых неравенства.

Лемма 2. *Пусть a, b, c, d — положительные числа, удовлетворяющие условию $d/b \leqslant a/c$. Тогда для всех $x \geqslant 1$, $y \in [0, 1]$ имеет место соотношение*

$$x^a \cdot y^b \leqslant 1 + x^c \cdot y^d$$

при $a \leqslant c$. Если же $a < c$, то для любых действительных $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$ справедливо также соотношение

$$x^c \cdot y^d \leqslant 1 + |\gamma_1 x^c \cdot y^d + \gamma_2 x^a \cdot y^b|.$$

Доказательство. Если в добавление к условиям леммы также $b \geqslant d$, то первое неравенство очевидно. Пусть поэтому $b < d$. Обозначив $x^a = u$, $y^b = v$, получим эквивалентное неравенство

$$uv \leqslant 1 + u^{\frac{c}{a}} \cdot v^{\frac{d}{b}}, \quad u \geqslant 1, \ v \in [0, 1].$$

В случае $u \cdot v \leqslant 1$ это неравенство очевидно. Пусть $u \cdot v > 1$, тогда по условиям леммы и по условию $b < d$, получаем

$$u\cdot v\leqslant(u\cdot v)^{\frac{d}{b}}=u^{\frac{d}{b}}\cdot v^{\frac{d}{b}}\leqslant u^{\frac{c}{a}}\cdot v^{\frac{a}{b}}.$$

что и доказывает требуемое неравенство.

Второе неравенство следует из того, что

$$x^c\cdot y^d/x^a\cdot y^b\to\infty \text{ при } x^c\cdot y^d\to\infty.$$

Лемма 3. *Пусть a, b, c, d, ϑ — положительные числа, удовлетворяющие условиям $a\leqslant c$, $c-a\geqslant\vartheta(d-b)$. Тогда для всех $x\geqslant 1$ и $y\in[0,1]$ справедливо неравенство*

$$x^a\cdot y^b\leqslant 1+x^c y^d+x^{c-\vartheta d}.$$

Доказательство. Если $d/b\leqslant c/a$, то это неравенство является следствием первого неравенства из леммы 1. Если же $d/b>c/a$, то заменой $y=t\cdot x^{-\vartheta}$ получим эквивалентное неравенство

$$x^{a-\vartheta b}\cdot t^b\leqslant 1+x^{c-\vartheta d}\cdot t^d+x^{c-\vartheta d},$$

которое доказывается просто, если рассматривать отдельно случаи $t\geqslant 1$ и $t<1$.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия 1). Пусть некоторое из τ_j, $1\leqslant j\leqslant N_p$ не имеет равного среди чисел μ_k $(k=1,\cdots,N_Q)$. Это значит, что для некоторой точки $\eta\in R_2^{(0)}$ $P(\eta)=0$, $Q(\eta)\neq 0$. Положив $\xi_i=t^{\lambda_i}\eta_i$ $(i=1,2)$ и учитывая λ-однородность полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$, получаем при $t\to\infty$ $P(\xi)=t^{d_P}\cdot P(\eta)\equiv 0$, $|Q(\xi)|=t^{d_Q}|Q(\eta)|\to\infty$. Это показывает, что соотношение (0.1) не может иметь места ни для какой константы $C>0$.

Необходимость условия 2). Пусть при выполнении условия 1) для некоторого j_0, $1\leqslant j_0\leqslant N_P$ условие 2) не выполняется. т. е. $m_{j_0}/k_{j_0}>d_P/d_Q$. Возьмем $\eta\in R_2^{(0)}$ так, чтобы

$$p_{j_0}(\eta)=(\eta_1-\tau_{j_0}\eta_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_{j_0}}=0.$$

Тогда $q_{j_0}(\eta)=(\eta_1-\tau_{j_0}\eta_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{k_{j_0}}=0$, $p_i(\eta)\neq 0$ при $i\neq j_0$. Положим при некотором $\delta>0$.

$$\xi_1=t^{\lambda_1}(\eta_1+t^{-\delta}),\ \xi_2=t^{\lambda_2}\eta_2.$$

Тогда при $t\to\infty$ получаем

$$p_i(\eta_1+t^{-\delta},\ \eta_2)=p_i(\eta)(1+o(1))\quad\text{при } i\neq j_0,$$

$$p_{j_0}(\eta_1+t^{-\delta},\ \eta_2)=t^{-m_{j_0}\delta}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$P(\xi_1,\ \xi_2)=t^{(\lambda,\alpha)}P(\eta_1+t^{-\delta},\ \eta_2)=A\cdot t^{d_P-m_{j_0}\delta}(1+o(1)),\tag{1.5}$$

$$Q(\xi_1,\ \xi_2)=t^{d_Q}Q(\eta_1+t^{-\delta},\ \eta_2)=B\cdot t^{d_Q-k_{j_0}\delta}(1+o(1)),\ A\neq 0.\tag{1.6}$$

Положив $\delta=d_P/m_{j_0}$, из представлений (1.5), (1.6) получаем

$$P(\xi)=A(1+o(1)),\tag{1.7}$$

$$Q(\xi) = B\cdot t^{d_Q - k_{j_0}\frac{d_P}{m_{j_0}}}(1 + o(1)). \tag{1.8}$$

Так как по предположению $d_Q - k_{j_0}\frac{d_P}{m_{j_0}} > 0$, то при $t\to\infty$ $Q(\xi)\to\infty$. Поэтому из (1.7), (1.8) следует, что при $t\to\infty$ (следовательно $\xi\to\infty$) $|Q(\xi)|/(1+|P(\xi)|)\to\infty$. Это доказывает необходимость условия 2).

Достаточность. Допустим противное, т. е., что при выполнении условий теоремы 1 неравенство (0.1) не выполняется ни для какой константы $C>0$. Это значит, что существует подпоследовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s\to\infty$ $(s\to\infty)$, такая, что

$$|Q(\xi^s)|/(1+|P(\xi^s)|)\to\infty. \tag{1.9}$$

Положим $\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i}\eta_i^s$ $(i = 1, 2)$, где для любого $s = 1, 2,\cdots$, $\rho_s > 0$, $(\eta_1^s)^2 + (\eta_2^s)^2 = 1$. Очевидно при $s\to\infty$ последовательность $\{\eta^s\}$ имеет некоторую предельную точку η. За счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\eta^s\to\eta$.

В случае, когда некоторая координата η равна нулю, т. е. когда $\eta\overline{\in} R_2^{(0)}$, противоречие с (1.9) легко получается из условий $P(1, 0)\neq 0$, $P(0, 1)\neq 0$ и $d_P\geqslant d_Q$. Пусть поэтому $\eta\in R_2^{(0)}$.

Вследствие λ-однородности полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ получаем

$$P(\xi^s) = \rho_s^{d_P}\cdot P(\eta_1^s, \eta_2^s), \tag{1.10}$$

$$Q(\xi^s) = \rho_s^{d_Q}\, Q(\eta_1^s, \eta_2^s). \tag{1.11}$$

Если теперь $P(\eta)\neq 0$, то из (1.10), (1.11) получаем при $\rho_s\to\infty$

$$|P(\xi^s)| = \rho_s^{d_P}\,|P(\eta)|\quad (1+o(1)), \tag{1.12}$$

$$|Q(\xi^s)|\leqslant C\rho_s^{d_Q}. \tag{1.13}$$

Представления (1.12) и (1.13) вместе противоречат (1.9), так как $d_Q\leqslant d_P$.

Пусть теперь $P(\eta) = 0$. Это значит, что $p_{j_0}(\eta) = 0$ для некоторого $j_0 (1\leqslant j_0\leqslant N_P)$ в разложении (1.1), причем $p_i(\eta)\neq 0$ при $i\neq j_0$. Из условия 1) теоремы следует, что $Q(\eta) = 0$, т. е. $q_{j_0}(\eta) = 0$. Так как $p_{j_0}(\eta) = 0$, то $p_{j_0}(\eta^s)\to 0$ при $s\to\infty$. Тогда используя разложения (1.1), (1.2) из (1.10), (1.11), соответственно получаем

$$P(\xi^s) = \rho_s^{d_P}\left[p(\eta^s)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{N_P} p_j(\eta^s)\right]\cdot p_{j_0}(\eta^s), \tag{1.14}$$

$$Q(\xi) = \rho_s^{d_Q}\left[q(\eta^s)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{N_Q} q_j(\eta^s)\right]\cdot q_{j_0}(\eta^s). \tag{1.15}$$

Так как при $s\to\infty$ выражения $p(\eta^s)\cdot\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{N_P} p_j(\eta^s)$ и $q(\eta^s)\cdot\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{N_Q} q_j(\eta^s)$

имеют отличный от нуля конечный предел, $\rho_s \to \infty$, $\xi_1 - \tau_{j_0}\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2} \to 0$ (следовательно $p_{j_0}(\eta^s) \to 0$, $q_{j_0}(\eta^s) \to 0$), то можно считать, что при достаточно больших s $\rho_s \geqslant 1$, $|\xi_1 - \tau_{j_0}\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}| \in [0, 1]$. Теперь уже противоречие с (1.9) получаем, если применим первое неравенство, доказанное в лемме 2, где через x обозначим ρ_s, через y обозначим

$$|\xi_1 - \tau_{j_0}\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}|, a = d_Q, \quad b = k_{j_0}, \ c = d_P, \quad d = m_{j_0}.$$

Выполнение условий леммы 2 следует из условий 2) теоремы. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1.1 очевидно.

Доказательство следствия 1.2. Достаточность очевидна. Докажем необходимость условия 1). Пусть полином $Q(\xi)$ представляется в виде (1.3), причем условие 1) выполняется для всех $i < i_0$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant M)$ и не выполняется для $Q_{i_0}(\xi)$. Это значит, что существует точка $\eta \in R_2^{(0)}$ такая, что $Q_1(\eta) = \cdots = Q_{i_0-1}(\eta) = 0$, $Q_{i_0}(\eta) \neq 0$. Причем точку $\eta \in R_2^{(0)}$ выберем так, чтобы также $Q(\eta) \neq 0$. Существование такой точки очевидно.

Положив как и при доказательстве теоремы 1 $\xi_i = t^{\lambda_i}\eta_i$ $(i = 1, 2)$, получаем при $t \to \infty$ $P(\xi) = t^{d_P} P(\eta) \equiv 0$, $Q_i(\xi) \equiv 0$ при $i < i_0$, $Q_{i_0}(\xi) = t^{d_{Q_{i_0}}} \cdot Q_{i_0}(\eta) \to \infty$. Так как $d_{Q_j} < d_{Q_{i_0}}$ при $j > i_0$, то, очевидно, при $t \to \infty$ $Q(\xi) \to \infty$. Это показывает, что $|Q(\xi)|/(1 + |P(\xi)|) \to \infty$ и доказывает необходимость условия 1).

Докажем необходимость условия 2). Пусть для всех $Q_i(\xi)(i = 1, \cdots, M)$ выполняется условие 1), но вместе с тем условие 2) не выполняется (сначала) для $Q_1(\xi)$, т. е. $d_P/d_{Q_1} < m_{j_0}/k_{j_0}$ для некоторого номера $j_0 (1 \leqslant j_0 \leqslant N_{Q_1})$.

Возьмем точку $\eta \in R_2^{(0)}$ так, чтобы $p_{j_0}(\eta) = 0$ и положим при некотором $\delta > 0$ и произвольном действительном a

$$\xi_1 = (at)^{\lambda_1}(\eta_1 + t^{-\delta}), \quad \xi_2 = (at)^{\lambda_2}\eta_2.$$

Тогда при $t \to \infty$, как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$P(\xi_1, \xi_2) = (at)^{d_P} P(\eta_1 + t^{-\delta}, \eta_2) = C_0 \cdot a^{d_P} \cdot t^{d_P - m_{j_0}\delta}(1 + o(1)), \tag{1.16}$$

$$Q(\xi_1, \xi_2) = C_1 a^{d_{Q_1}} \cdot t^{d_{Q_1} - k_{j_0}\delta}(1 + o(1)). \tag{1.17}$$

Так как по условию 1) $Q_i(\eta) = 0$, $i = 1, \cdots, M$, значит $Q_i(\xi)$ имеет вид

$$Q_i(\xi) = (\xi_1 - \tau_{j_0}\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{k_{j_0}^i} \cdot \overline{Q}_i(\xi) \quad (i = 1, \cdots, M),$$

где $\overline{Q}_i(\eta) \neq 0$. Тогда при $t \to \infty$

$$Q_i(\xi) = C_i \cdot a^{d_{Q_i}} \cdot t^{d_{Q_i} - k_{j_0}^i \delta} \cdot (1 + o(1)), \quad i = 1, \cdots, M. \tag{1.18}$$

Выбирая теперь число a так, чтобы

$$a^{d_{Q_{l_1}}}\cdot C_{l_1}+\cdots+a^{d_{Q_{l_l}}}\cdot C_{l_l}\neq 0,$$

где $d_{Q_{l_1}}=\cdots=d_{Q_{l_l}}=\max\limits_{1\le l\le M}|d_{Q_l}-k^l_{j_0}\delta|$, получаем при $t\to\infty$

$$Q(\xi)=A\cdot t^{\max\limits_{1\le l\le M}|d_{Q_l}-k^l_{j_0}\delta|}\cdot(1+o(1)). \tag{1.19}$$

Положив $\delta=d_P/m_{j_0}$, как и при доказательстве теоремы 1 получаем из (1.16), (1.19), что $P(\xi)\nrightarrow\infty$, $Q(\xi)\to\infty$. Это доказывает необходимость условия 2) в случае, когда этому условию не удовлетворяет полином $Q_1(\xi)$ в разложении (1.3). Пусть теперь $Q_1(\xi)$ удовлетворяет, а $Q_2(\xi)$ не удовлетворяет условию 2). Тогда по теореме 1

$$|Q_1(\xi)|\leqslant C_1(1+|P(\xi)|)\quad\forall\xi\in R_2. \tag{1.20}$$

Если бы еще выполнялось соотношение

$$|Q(\xi)|\leqslant C_2(1+|P(\xi)|)\quad\forall\xi\in R_2, \tag{1.21}$$

то из (1.20), (1.21) следовало бы неравенство

$$|Q(\xi)-Q_1(\xi)|=\left|\sum_{k=2}^{M}Q_k(\xi)\right|\leqslant C_3(1+|P(\xi)|). \tag{1.22}$$

Но для полинома $Q(\xi)-Q_1(\xi)$ „старшим“ членом является полином $Q_2(\xi)$, который не удовлетворяет условию 2). Это значит по доказанной части необходимости в следствии 1.2, что соотношение (1.22) не может иметь места, и, тем самым, не может иметь места и соотношение (1.21). Если же $Q_1(\xi)$ и $Q_2(\xi)$ удовлетворяют условию 2), а $Q(\xi)$ ему не удовлетворяет, и т. д., то доказательство проводится аналогично. Следствие 1.2 доказано.

Доказательство теоремы 2. Случай, когда для всех $j\,(1\leqslant j\leqslant N_P)$ $d_Q\leqslant d_P-\Delta_j(P)$, рассмотрен в работе [4]. Там доказано, что для полиномов $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ справедливо соотношение (0.2).

Рассмотрим оставшийся случай. Необходимость условия 1). Пусть, для определенности, $d_Q>d_P-\Delta_1(P)$ и τ_1 не имеет равного среди чисел μ_k $(k=1,\cdots,N_Q)$. Возьмем некоторую точку $\eta\in R_2^{(0)}$ так, чтобы $P(\eta)=0$, $Q(\eta)\neq0$ и положим, как и при доказательстве теоремы 1, $\xi_i=t^{\lambda_i}\eta_i\,(i=1,\,2)$. Тогда

$$D^\nu P(\xi)=t^{d_P-(\lambda,\nu)}\cdot D^\nu P(\eta),\quad Q(\xi)=t^{d_Q}Q(\eta).$$

Поэтому при $t\to\infty$ получаем

$$\tilde P(\xi)=C_1\cdot t^{d_P-\Delta_1(P)}(1+o(1)), \tag{1.23}$$

$$Q(\xi)=t^{d_Q}\cdot Q(\eta), \tag{1.24}$$

(1.23), (1.24) вместе с условием $d_Q>d_P-\Delta_1(P)$ показывают, что $|Q(\xi)|/\tilde P(\xi)\to\infty$, т. е. соотношение (0.2) не может иметь места ни при какой константе C.

Необходимость условия 2). Пусть для полиномов $P(\xi)$, $Q(\xi)$ выполнено соотношение (0.2). Заметим, во-первых, что если полиномы $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то из теоремы 3.3.2 работы [1] следует, что для этих полиномов также выполняется соотношение (0.2).

Пусть для определенности $d_Q > d_P - \Delta_1(P)$ и $d_P - d_Q < \vartheta(m_1 - k_1)$ (из последнего условия легко следует, что $d_P/d_Q < m_1/k_1$, т. е. не выполняется также условие 2) теоремы 1). Положим

$$\xi_1 = t^{\lambda_1}(\eta_1 + t^{-\vartheta}), \quad \xi_2 = t^{\lambda_2}\eta_2,$$

где $\eta \in R_2^{(0)}$, $P(\eta) = Q(\eta) = 0$.

Как и при доказательстве теоремы 1) получаем при $t \to \infty$ для некоторых $C_\nu > 0$, $C'_\nu > 0$

$$|D^\nu P(\xi)| \leqslant C_\nu t^{d_P - (m_1 - |\nu|)\vartheta - (\lambda, \nu)}(1 + o(1)), \tag{1.25}$$

при $|\nu| < m_1$ и

$$|D^\nu P(\xi)| \leqslant C'_\nu t^{a_\nu}(1 + o(1)), \quad a_\nu \leqslant d_P - (\lambda, \nu) \tag{1.26}$$

при $|\nu| \geqslant m_1$.

Для $Q(\xi)$ соответственно

$$|Q(\xi)| \geqslant C \cdot t^{d_Q - \vartheta k_1}(1 + o(1)), \quad C > 0. \tag{1.27}$$

Легко видеть, что $d_Q - \vartheta k_1 \geqslant 0$. С другой стороны, очевидно, что $d_Q - \vartheta k_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $Q(\xi)$ есть λ-однородный полином, имеющий вид $Q(\xi) = (\xi_1 - \mu_1\xi_2)^{k_1}$. Поэтому из условия 1) теоремы 2 следует, что при $d_Q - \vartheta k_1 = 0$ полином $P(\xi)$ имеет вид $P(\xi) = (\xi_1 - \mu_1\xi_2)^{m_1} \cdot p(\xi)$, где $p(\mu_1\xi_2, \xi_2) \neq 0$ при $\xi_2 \neq 0$. Тогда $d_P \geqslant m_1$, $d_Q = k_1$, т. е. $d_P/d_Q \geqslant m_1/k_1$, что противоречит условию $d_P - d_Q < \vartheta(m_1 - k_1)$. Значит из условия $d_P - d_Q < \vartheta(m_1 - k_1)$ следует, что $d_Q - \vartheta k_1 > 0$, т. е. $Q(\xi) \to \infty$.

Теперь уже сравнение соотношений (1.25) и (1.27) при $|\nu| < m_1$ из (1.26) и (1.27) при $|\nu| \geqslant m_1$ показывает, что

$$d_P - (m_1 - |\nu|)\vartheta - (\lambda, \nu) \leqslant d_P - \vartheta|\nu| - m_1\vartheta + |\nu|\vartheta = d_P - m_1\vartheta < d_Q - k_1\vartheta,$$

$$d_P - (\lambda, \nu) \leqslant d_P - \vartheta|\nu| \leqslant d_P - \vartheta m_1 < d_Q - \vartheta k_1.$$

Полученные соотношения вместе с неравенствами (1.25)—(1.27) показывают, что $|Q(\xi)|/\widetilde{P}(\xi) \to \infty$, что противоречит неравенству (0.2) и, следовательно, доказывают необходимость условия 2).

Достаточность теоремы 2 доказывается по той же схеме, по которой мы провели доказательство достаточности теоремы 1.

По теореме 3.3.2 работы [1] нам достаточно доказать неравенство $|Q(\xi)|/\widetilde{P}(\xi) \leqslant C$. Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 1, получаем представления (1.14), (1.15) для $P(\xi)$ и $Q(\xi)$. Пусть для определенности $\vartheta = \lambda_1$, тогда для $D^{\bar\nu} P(\xi)$ при $\bar\nu = (m_{j_1}, 0), |\bar\nu| = m_j$, получаем

$$|D^{\cdot} P(\xi^s)| = C_1 \rho_s^{d_P - b m_{j_0}} (1 + o(1)).$$

Предполагая обратное, что требуемое неравенство не имеет места и применяя лемму 3 при $a = d_Q$, $b = k_{j_0}$, $c = d_P$, $d = m_{j_0}$, получаем соотношение

$$|Q(\xi^s)| \leqslant C(1 + |P(\xi^s)| + |D^{\cdot} P(\xi^s)|),$$

что противоречит нашему предположению и доказывает теорему 2.

Следствие 1.3 доказывается аналогично тому, как мы доказали следствие 1.2.

2°. Переходим к решению задач III и IV. Докажем сначала следующее предложение.

Лемма 4. *Пусть $P(\xi)$ — данный λ-однородный полином порядка d_P и $R(\xi)$ — λ-однородный полином порядка $d_R < d_P$ такой, что для $R(\xi)$ и $P(\xi)$ выполняются условия теоремы* 1. *Тогда с некоторой константой $C > 0$ имеет место неравенство* (0.3′).

Доказательство. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, мы получим представления (1.14), (1.15) для $P(\xi)$ и $R(\xi)$.

Для $\mathrm{P}(\xi) = P(\xi) + R(\xi)$ аналогично получаем

$$\mathrm{P}(\xi^s) = \rho_s^{d_P} \mathrm{A}(\eta^s) \cdot p_{j_0}(\eta^s) + \rho_s^{d_Q} B(\eta^s) q_{j_0}(\eta^s), \tag{2.1}$$

где $A(\eta^s)$ и $B(\eta^s)$ имеют конечные пределы при $s \to \infty$. Применение второго из неравенств, доказанных в лемме 2, и представления (1.14), (2.1) доказывает лемму 4.

Следствие 2.1. Если $Q(\xi)$ представляется в виде 1.5, причем $d_Q < d_P$ и каждая λ-однородная пара полиномов $\{Q_k(\xi), P(\xi)\}$ $(k = 1, \cdots, M_Q)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то для полиномов $P(\xi)$ и $P(\xi) + Q(\xi)$ имеет место неравенство (0.3).

Рассмотрим теперь тот случай, когда пара λ-однородных полиномов не удовлетворяет одному из условий теоремы 1. При этом мы отдельно будем рассматривать нарушение условия 1) и нарушение условия 2) теоремы 1.

Итак, пусть $Q(\xi)$ — λ-однородный полином порядка $d_Q < d_P$, не удовлетворяющий условию 1) теоремы 1. Нарушение этого условия означает, что если $Q(\xi)$ и $P(\xi)$ представляются соответственно в виде (1.1) и (1.2), то, например, τ_1 не имеет себе равного среди чисел μ_j $(j = 1, \cdots, N_Q)$. Это значит, в свою очередь, что существует точка $\eta \in \sum(P)$, $\eta \overline{\in} \sum(Q)$, где $\sum(R) = \{\eta;\ \eta \in R_2^{(0)},\ R(\eta) = 0\}$.

Лемма 5. *Пусть $P(\xi)$ — заданный λ-однородный полином порядка d_P, и $Q(\xi)$ — некоторый λ-однородный полином порядка $d_Q < d_P$, причем пара $\{P(\xi), Q(\xi)\}$ не удовлетворяет условию* 1) *теоремы* 1. *Пусть для определенности τ_1 не имеет равного среди чисел μ_j $(j = 1, \cdots, N_Q)$). Тогда для того чтобы для полиномов $P(\xi)$ и $\mathrm{P}(\xi) = P(\xi) + Q(\xi)$ выполнялось соотношение* (0.3′), *необхо-*

димо выполнение одного из следующих эквивалентных условий а) или в):

а) *в некоторой окрестности множества* $\sum(P)\setminus\sum(Q)$ *(без самого множества) полиномы* $P(\xi)$ *и* $Q(\xi)$ *имеют одинаковые знаки.*

в) 1) m_1 — *четное число,* 2) *для всех* $\eta\in\sum(P)\setminus\sum(Q)$

$$\operatorname{sign}\left[p(\eta)\cdot\prod_{j=2}^{N_Q}p_j(\eta)\right]=\operatorname{sign}Q(\eta).$$

Доказательство. Эквивалентность условий а) и в) легко следует из представления (1.1) полинома $P(\xi)$.

Пусть условие а) или, что то же самое, одно из условий в 1) или в 2) не выполняется.

Положим

$$\xi_1=t^{\lambda_1}(\eta_1+(\Delta+\tau_1)t^{-\delta})=t^{\lambda_1}\bar\xi_1,$$
$$\xi_2=t^{\lambda_2}(\eta_2^{\lambda_2/\lambda_1}+t^{-\delta})^{\lambda_1/\lambda_2}=t^{\lambda_2}\bar\xi_2, \tag{2.2}$$

где δ и Δ пока произвольные действительные числа, причем $\delta>0$, $\eta\in\sum(P)\setminus\sum(Q)$, т. е. $\eta_1-\tau_1\eta_2^{\lambda_1/\lambda_2}=0$, $Q(\eta)\neq0$.

Очевидно и при невыполнении условия в 1) и при невыполнении условия в 2) за счет выбора числа Δ можно добиться того, чтобы выражения $Q(\eta)$ и $\Delta^{m_1}\cdot p(\eta)\cdot\prod_{j=2}^{N_P}p_j(\eta)$ имели разные знаки, причем так, чтобы имело место равенство:

$$|\Delta^{m_1}\cdot p(\eta)\prod_{j=2}^{N_Q}p_j(\eta)|=|Q(\eta)|. \tag{2.3}$$

Выберем еще $\delta>0$ так, чтобы $d_P-m_1\delta=d_Q$, т. е.

$$\delta=\frac{1}{m_1}(d_P-d_Q) \tag{2.4}$$

и подставим значения ξ из (2.2) в $P(\xi)$ и $Q(\xi)$. Тогда при $t\to\infty$ получаем

$$P(\xi)=t^{d_P}\cdot P(\bar\xi)=t^{d_P-m_1\delta}\Delta^{m_1}\cdot p(\eta)\cdot\prod_{j=2}^{N_P}p_j(\eta)\quad(1+o(1)), \tag{2.5}$$

$$Q(\xi)=t^{d_Q}\cdot Q(\bar\xi)=t^{d_Q}Q(\eta)\quad(1+o(1)). \tag{2.6}$$

Из представлений (2.10), (2.11) и ввиду выбора чисел Δ и δ (см. (2.3), (2.4)), получаем

$$|\mathbf{P}(\xi)|=o(t^{d_P-m_1\delta}), \tag{2.7}$$
$$|P(\xi)|\geqslant Ct^{d_P-m_1\delta}. \tag{2.8}$$

(2.7) и (2.8) вместе показывают, что $|P(\xi)|/(1+|\mathbf{P}(\xi)|)\to\infty$. Это показывает, что неравенство (0.3′) не может иметь места ни для какой константы C. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим теперь тот случай, когда пара рассмотренных λ-однородных полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$, удовлетворяя условию 1), не удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Пусть, например, $d_P/d_Q < m_1/k_1$.

Лемма 6. *Если пара λ-однородных полиномов $\{P(\xi), Q(\xi)\}$ не удовлетворяет условию 2) теоремы 1 (удовлетворяя условию 1) той же теоремы), то для справедливости неравенства (0.3′) для этих полиномов необходимо, чтобы в некоторой окрестности множества $\sum(P) = \sum(Q)$ (без самого множества) полиномы $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имели одинаковый знак.*

Доказательство. Пусть $d_P/d_Q < m_1/k_1$, и в любой окрестности некоторой точки $\eta \in \sum(P)$ существует точка $\xi \in R_2$ такая, что полиномы $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ имеют разные знаки. Подставляя значения (2.2) в полиномы $P(\xi)$ и $Q(\xi)$, получим для полинома $P(\xi)$ представление (1.10), а для $Q(\xi)$ следующее представление:

$$Q(\xi) = \Delta^{k_1} \cdot t^{d_Q - k_1\delta} \cdot q(\eta) \cdot \prod_{j=2}^{N_Q} q_j(\eta) \quad (1 + o(1)). \tag{2.9}$$

Выберем числа Δ и δ так, чтобы выполнялись равенства

$$\Delta^{m_1} p(\eta) \cdot \prod_{j=2}^{N_Q} p_j(\eta) = -\Delta^{k_1} q(\eta) \cdot \prod_{j=2}^{N_Q} q_j(\eta), \tag{2.10}$$

$$d_Q - k_1\delta = d_P - m_1\delta, \quad \text{т. е.} \quad \delta = \frac{d_P - d_Q}{m_1 - k_1}. \tag{2.11}$$

Из условий $m_1/k_1 > d_P/d_Q$, $d_P > d_Q$ следует, что $\delta > 0$.

Из соотношений (2.10), (2.11) и из представлений (2.5), (2.9) вытекает, что при $t \to \infty$

$$|\mathrm{P}(\xi)| = o(t^{d_P - m_1\delta}). \tag{2.12}$$

Так как из условия $d_P/d_Q < m_1/k_1$ и из определения δ (см. (2.11)) следует, что $d_P - m_1\delta > 0$, то $|P(\xi)| \to \infty$. Из (2.12) и (2.5) получаем, что $|P(\xi)|/(1 + |\mathrm{P}(\xi)|) \to \infty$, что противоречит (0.3′) и доказывает лемму 6.

Аналогичные утверждения типа лемм 4—6 можно доказать и для выполнения соотношения (0.4′). Объединяя все эти результаты, получаем следующее предложение, решающие задачи III и IV:

Теорема 3. (решение задач III и IV). *Пусть $P(\xi)$ — данный λ-однородный полином порядка d_P и $Q(\xi)$ — λ-однородный полином порядка $d_Q < d_P$. Если пара полиномов $\{P(\xi), Q(\xi)\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (соответственно условиям теоремы 2), то для полиномов $P(\xi)$ и $\mathrm{P}(\xi) = P(\xi) + Q(\xi)$ имеет место соотношение (0.3′) (соответственно (0.4′)).*

Если же эта пара не удовлетворяет одному из условий теоремы 1 (соответственно теоремы 2), то для того чтобы полиномы $P(\xi)$ и $\mathrm{P}(\xi)$ удовлетворяли соотношению (0.3′) (соответственно

(0.4′)), *необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности множества* $\sum(P)$ *(без самого множества) полиномы* $P(\xi)$ *и* $Q(\xi)$ *имели одинаковый знак.*

Доказательство первой части теоремы следует из леммы 4. Необходимость второй части следует из лемм 5 и 6. Достаточность второй части вытекает из теоремы 1.2 (соответственно из теоремы 2.3) работы [4].

Пользуюсь случаем принести свою благодарность О. В. Бесову за ценные советы при написании этой заметки.

Ереванский государственный
университет

Поступила 1.X.1973

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Դիֆերենցիալ բազմանդամներին կրտսեր անդամներ ավելացնելու մասին (*ամփոփում*)

Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում ընդհանրացված համասեռ դիֆերենցիալ բազմանդամին կրտսեր անդամներ ավելացնելուց այդ բազմանդամի ուժը չի փոխվում, այսինքն՝ որոնց դեպքում տեղի ունի (0,1) — (0,4) առնչություններից որևէ մեկը։

H. G. KASARIAN. *On addition of junior terms to a differential polynom* (summary)

Necessary and sufficient conditions are found under which addition of junior terms to a differential polynom does not alter its strength (in the sence of the equations (0.1)—(0.4)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир", М., 1965.
2. *Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов, Матем. сб., 75 (117), № 2, 1968, 400—416.
3. *B. Pini.* Osservazoni sulla ipoellitticita, Boll. Un. Mat. Ital., (3). 18, 1963, 420–432.
4. *Г. Г. Казарян.* О сравнении дифференциальных операторов и о дифференциальных операторах постоянной силы. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 131, 1974, 94–118.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 6, 1974 Математика

И. Я. ДОРФМАН

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПУЧКОВ В ТЕОРИИ ЛАПЛАСИАНА ЛЕВИ

Бесконечномерный лапласиан, действующий на функции, заданные на гильбертовом пространстве, был построен П. Леви в [1] путем естественного обобщения конечномерного оператора Лапласа. Самим П. Леви и в последующих работах [2]—[7] были исследованы свойства лапласиана Леви при различных ограничениях на рассматриваемые классы функций. Оказалось, что лапласиан Леви по сравнению с конечномерным лапласианом обладает рядом качественно новых свойств, одним из которых является свойство быть оператором первого порядка (т. е. действовать как дифференцирование в рассматриваемом кольце функций). Более того, Г. Е. Шилов показал в [3], что в некотором классе функций действие лапласиана интерпретируется как обычное дифференцирование по одномерному „идеальному“ направлению.

Последнее наводит на мысль о построении аналогов дифференциальных форм и когомологий с использованием лапласиана Леви так же, как в конечномерном анализе используется производная. Такое построение и проводится в данной работе.

Вначале (§ 1) мы приводим общую схему построения когомологий, с помощью некоторой системы операторов, реализующуюся, в частности, при построении когомологий де Рама конечномерной области. Затем мы, используя лапласиан Леви, приводим другую, уже бесконечномерную реализацию этой схемы (§ 2).

Основной результат (теорема 3.1) состоит в том, что в этой бесконечномерной реализации все группы когомологий оказываются тривиальными для произвольного открытого множества, что означает разрешимость в любой области задачи Пуассона и соответствующих систем уравнений с частными лапласианами Леви.

Из основного результата вытекают различные следствия (§ 3). Например, получается такой результат, аналогичный теореме Вейерштрасса в теории функций комплексного переменного: какова бы ни была последовательность точек, не имеющая предельных точек внутри области гильбертова пространства, существует гармоническая по Леви функция, определенная в этой области и имеющая нули в точности на данной последовательности. Из этого факта, в свою очередь, следует, что в любой ограниченной области гильбертова пространства можно задать гармоническую по Леви функцию, непродолжимую на замыкание этой области. Мы указываем также один класс областей, „гармонически нерасширяемых“, т. е. таких, что в каждой из них сушествует гармоническая по Леви функция, непродолжимая ни в какую более широкую область.

Другого рода следствие показывает, что возможность логарифмировать произвольную обратимую комплексную гармоническую по Леви функцию на некоторой области зависит от этой области, точнее, от первой целочисленной группы ее когомологий (теорема 3.11).

§ 1. Построение когомологий по набору операторов

Пусть задана пара (X, S), где X — паракомпактное хаусдорфово пространство, S — пучок абелевых групп на X.

Пусть, кроме того, задан набор S_i, $i = 1, \cdots, n$ автоморфизмов пучка S, перестановочных между собой. Мы сохраняем обозначение S_i также для отображения, индуцированного соответствующим автоморфизмом на пространствах сечений $\Gamma(U, \mathrm{S})$ пучка S над открытыми множествами $U \subset X$.

Определение 1.1. Открытое множество $U \subset X$ назовем $\{S_i\}$-тривиальным, если для всякого $l\,(l = 0, \cdots, n-1)$, любого набора из $l+1$ числа $\{j_1, \cdots, j_{l+1}\}$, $(j_1 = 1, \cdots, n; \cdots; j_{l+1} = 1, \cdots, n)$ и любого сечения $f \in \Gamma(U, \mathrm{S})$, удовлетворяющего условию $S_{j_1} f = \cdots = S_{j_l} f = 0$, найдется сечение $g \in \Gamma(U, \mathrm{S})$ такое, что $S_{j_1} g = \cdots = S_{j_l} g = 0$, $S_{j_{l+1}} g = f$.

Введем формально выражения $d_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_{i_k}$ $(i_1 = 1, \ldots, n; \ldots; i_k = 1, \ldots, n)$, считая их кососимметричными при перестановках индексов. Множество всех формальных сумм $\sum\limits_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} d_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_k}$, $\omega_{i_1 \cdots i_k} \in \Gamma(U, \mathrm{S})$ с покоординатным сложением назовем пространством k-форм на U и обозначим $\mathrm{E}^k(U)$. По определению положим $\mathrm{E}^0(U) = \Gamma(U, \mathrm{S})$.

Определение 1.2. $\{S_i\}$-производной k-формы

$$\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} d_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_k}; \quad \omega_{i_1 \cdots i_k} \in \Gamma(U, \mathrm{S}),$$

назовем $(k+1)$-форму на U, определенную равенством

$$S\omega = \sum_{i, i_1, \ldots, i_k} S_i \omega_{i_1 \cdots i_k} d_i \wedge d_{i_1} \cdots \wedge d_{i_k}.$$

Очевидно, $S(\omega_1 + \omega_2) = S\omega_1 + S\omega_2$. Кроме того, непосредственное вычисление с использованием перестановочности автоморфизмов S_i показывает, что для любой k-формы ω справедливо равенство $SS\omega \equiv 0$. Сейчас мы покажем, что для форм, определенных на $\{S_i\}$-тривиальных множествах, верно и обратное. Мы проведем при доказательстве рассуждения, обычно применяемые при доказательстве леммы Дольбо (см. [8], стр. 40).

Предложение 1.3. *Пусть множество $U \subset X$ является $\{S_i\}$-тривиальным, а ω есть k-форма на U, удовлетворяющая условию $S\omega = 0$. Тогда найдется такая $(k-1)$-форма η, что $S\eta = \omega$.*

Доказательство. Обозначим через Ω_l^k подмножество $\mathrm{E}^k(U)$, состоящее из всех k-форм, в представлении которых участвуют лишь символы $d_1, \cdots, d_l$. Пусть $\omega \in \Omega_l^k$. Утверждение докажем индукцией по l. При $l = 0$ оно справедливо. Пусть оно уже проверено для $1, \cdots, l-1$. Так как $\omega \in \Omega_l^k$, то существуют такие формы $\alpha \in \Omega_{l-1}^{k-1}$ и $\beta \in \Omega_{l-1}^k$, что $\omega = \alpha \wedge d_l + \beta$, причем $\alpha = \sum_I \alpha_I d_I$, где $I = \{i_1, \cdots, i_{k-1}\}$, $d_I = d_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_{k-1}}$. Из условия $0 = S\omega = S\alpha \wedge d_l + S\beta$ следует, что $S_{l+1} \alpha_I = \cdots = S_n \alpha_I = 0$. Поскольку множество U является $\{S_l\}$-тривиальным, то найдутся $\gamma_I \in \Gamma(U, \mathrm{S})$ такие, что $S_{l+1} \gamma_I = \cdots = S_n \gamma_I = 0$ и $S_l \gamma_I = (-1)^{k-1} \alpha_I$.

Построим $(k-1)$-форму γ на U по формуле $\gamma = \sum_I \gamma_I d_I$. Тогда $S\gamma - \alpha \wedge d_l \in \Omega_{l-1}^k$. Заметим теперь, что $\omega = (\alpha \wedge d_l - S\gamma + \beta) + S\gamma$, причем форма, стоящая в скобке аннулируется оператором S. Согласно предположению индукции, отсюда следует, что $\omega = S\delta + S\gamma$ и для завершения доказательства достаточно положить $\eta = \delta + \gamma$.

Теперь мы получим из абстрактной теоремы де Рама результат, который будет нами позже использован наряду с предложением 1.3.

Определение 1.4. $\{S_l\}$-когомологиями открытого множества $U \subset X$ назовем когомологии комплекса

$$0 \to \mathrm{E}^0(U) \xrightarrow{S} \mathrm{E}^1(U) \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} \mathrm{E}^n(U) \to 0.$$

Будем обозначать k-ю группу $\{S_l\}$-когомологий через $H_S^k(U)$.

Предложение 1.5. *Если пучок* S — *тонкий и если всякая точка в X обладает фундаментальной системой $\{S_l\}$-тривиальных окрестностей, то группы $H_S^k(U)$ изоморфны группам $H^k(U, \mathrm{C})$ когомологий U с коэффициентами в пучке* $\mathrm{C} = \bigcap_{l=1}^n \mathrm{Ker} S_l \subset \mathrm{S}$.

Доказательство. Обозначим через S^k пучок ростков k-форм на X. Каждый из пучков S^k изоморфен прямой сумме некоторого числа экземпляров пучка S, поэтому все пучки S^k являются тонкими вместе с пучком S. Последовательность

$$0 \to \mathrm{C} \to \mathrm{S} \xrightarrow{S} \mathrm{S}^1 \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} \mathrm{S}^n \to 0 \quad \text{точна,}$$

так как мы предположили, что всякая точка из X обладает фундаментальной системой $\{S_l\}$-тривиальных окрестностей, а в каждой такой окрестности применимо предложение 1.3. Итак, построена тонкая резольвента пучка C и для доказательства нашего утверждения остается применить абстрактную теорему де Рама (см., например, [8], лемма 2, стр. 222).

Простейшей реализацией, при которой выполнены условия предложения 1.5, является следующая. В качестве X берется пространство R^n, в качестве пучка S — пучок ростков вещественных бесконечно-дифференцируемых функций. В качестве операторов S_l берутся операторы $\frac{\partial}{\partial x_l}$ частного дифференцирования по координатам. Нетрудно видеть, что все условия, при которых мы проводили наши рассужления, выполнены. При этой реализации предложение 1.5 переходит в обычную теорему де Рама. С этого момента мы будем заниматься другой, уже бесконечномерной, реализацией описанной выше схемы, связывая ее с теорией лапласиана Леви.

§ 2. Теорема о $\{L_l\}$-тривиальности произвольного открытого множества

Напомним вначале определение лапласиана Леви (см. [5], стр. 198). Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 2.1. Пусть f — вещественная функция, заданчая и непрерывная на некоторой окрестности U точки $x \in H$. Для достаточно малых r (таких, что шар радиуса r с центром в точке x принадлежит U), строятся величины $M_n^{(E)}(f, x, r)$, равные среднему от сужения f на плоскость, проходящего через x параллельно плоскости первых n векторов базиса E по сфере радиуса r с центром в x. Рассматриваются верхнее и нижнее средние

$$\overline{M}(f, x, r) = \sup_E \overline{\lim_n} M_n^{(E)}(f, x, r) \text{ и } \underline{M}(f, x, r) = \inf_E \underline{\lim_n} M_n^{(E)}(f, x, r).$$

Если существуют и равны между собой пределы

$$\lim_{r \to 0} \frac{\overline{M}(f, x, r) - f(x)}{r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\underline{M}(f, x, r) - f(x)}{r^2},$$

то их общее значение называется лапласианом Леви $Lf(x)$ функции f в точке x. Функции f, для которых на открытом множестве $G \subset H$ выполняется равенство $Lf \equiv 0$, называются гармоническими по Леви в G.

Поскольку в дальнейшем мы будем встречаться лишь с функциями, дифференцируемыми по Фреше, мы сейчас приведем критерий существования лапласиана Леви в классе дважды дифференцируемых по Фреше функций.

Предложение 2.2 (см. [4], [5]). *Пусть f дважды дифференцируема по Фреше в точке x. Тогда $Lf(x)$ существует и равен γ в том и только в том случае, когда вторая производная Фреше задана оператором $f''(x) = 2\gamma I + T$, где I — единичный, а T — вполне непрерывный операторы.*

Например, функция $\|x\|^2$ обладает лапласианом Леви и $L(\|x\|^2) = 1$. Функции (x, a) и $\sum_{i=1}^{\infty} (x - a, e_i)^k$, где $k = 3, 4, \cdots$, $\{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ — ортобазис в H, $a \in H$, являются гармоническими по Леви. Если $\varphi(t)$ — гладкая функция одного переменного, а f обладает лапласианом Леви, то $L(\varphi(f)) = \varphi'(f) Lf$ ([5], теорема 10). В частности, если f — гармоническая по Леви функция, то и $\varphi(f)$ обладает этим свойством.

Ниже нам потребуется одна из формулировок принципа максимума для гармонических по Леви функций (см. [7], лемма 4). Отметим лишь, что в формулировке, данной в [7], можно снять условие ограниченности функции. В самом деле, принцип максимума для неограниченной функции f эквивалентен принципу максимума для ограниченной функции $\operatorname{arctg} f$, поэтому окончательная формулировка этого результата принимает следующий вид.

Предложение 2.3. *Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая по Фреше и гармоническая по Леви в ограниченной области G функция, непрерывная вплоть до границы ∂G области. Тогда*

$$\sup_{x\in G} f(x) = \sup_{x\in\partial G} f(x); \quad \inf_{x\in G} f(x) = \inf_{x\in\partial G} f(x).$$

Введем теперь еще одно определение. Пусть H^n обозначает прямую сумму n экземпляров пространства H с метрикой

$$\|(x_1,\cdots, x_n)\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Определение 2.4. Если функция f задана в окрестности точки $(x_1,\cdots, x_n) \in H^n$ и обладает лапласианом Леви по i-й координате при фиксированных остальных, то его значение $L_i f(x_1,\cdots, x_n)$ назовем i-м частным лапласианом Леви. Функцию, удовлетворяющую в открытом множестве $G \subset H^n$ условию $L_1 f = \cdots = L_n f = 0$, назовем $\{L_i\}$-гармонической в G.

Простейшие примеры функций, имеющих во всем пространстве все частные лапласианы, дают функции вида $f(x_1,\cdots, x_n) = \varphi(\|x_1 - a_1\|^2,\cdots, \|x_n - a_n\|^2)$, где $(a_1,\cdots, a_n) \in H^n$, а $\varphi(t_1,\cdots, t_n)$ — гладкая функция n переменных. При этом, как следует из правил вычисления лапласиана

$$L_i f(x_1,\cdots, x_n) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(\|x_1 - a_1\|^2,\cdots, \|x_n - a_n\|^2).$$

Заметим, что для функций f описанного вида для любых i, j выполняются равенства $L_i L_j f = L_j L_i f$, что вытекает из симметрии вторых производных функции $\varphi(t_1,\cdots, t_n)$. Возникает вопрос, верны ли эти равенства для произвольных функций, для которых они имеют смысл. Как показывает следующий пример, в общем случае это неверно.

Пример 2.5. Зафиксируем ортобазис $\{e_1,\cdots, e_n,\cdots\}$ в H и определим функцию f на H^2 по формуле

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i\le j} (x_1, e_i)^2 (x_2, e_j)^2.$$

Покажем, что $L_1 L_2 f \ne L_2 L_1 f$.

Запишем f в виде

$$f(x_1, x_2) = (x_1, e_1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} (x_2, e_j)^2 + (x_1, e_2)^2 \times$$

$$\times \sum_{j=2}^{\infty} (x_2, e_j)^2 + (x_1, e_3)^2 \sum_{j=3}^{\infty} (x_2, e_j)^2 + \cdots.$$

Согласно теореме Г. Е. Шилова (см. [3], § 2),

$$L_1 f(x_1, x_2) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=m} (x_2, e_j)^2 = 0,$$

и, значит, $L_2 L_1 f \equiv 0$.

Но f также можно записать в виде

$$f(x_1, x_2) = (x_2, e_1)^2 (x_1, e_1)^2 + (x_2, e_2)^2 \sum_{l=1}^{2} (x_1, e_l)^2 +$$

$$+ (x_2, e_3)^2 \sum_{l=1}^{3} (x_1, e_l)^2 + \cdots .$$

Согласно той же теореме Г. Е. Шилова

$$L_2 f(x_1, x_2) = \lim_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{m} (x_1, e_l)^2 = \|x_1\|^2$$

и, значит, $L_1 L_2 f \equiv 1$, что и требовалось.

Теперь мы вводим класс функций $\mathbf{G}$, в котором будут справедливы последующие результаты.

Пусть $G \subset H^n$ — открытое множество. Рассмотрим совокупность тех вещественных функций f на G, которые обладают следующими свойствами.

(1 $\mathbf{G}$) *f бесконечно дифференцируема по Фреше.*

(2 $\mathbf{G}$) *f допускает последовательное применение частных лапласианов Леви по любым переменным и в любом количестве.*

(3 $\mathbf{G}$) *Частные лапласианы f перестановочны, т. е. для любой перестановки $t_1, \cdots, t_m$ индексов $r_1, \cdots, r_m$ выполняется $L_{t_1} \cdots L_{t_m} f = L_{r_1} \cdots L_{r_m} f$.*

Как показывает пример 2.5, условие (3 $\mathbf{G}$) является независимым от остальных.

Нетрудно видеть, что совокупность $\mathbf{G}(G)$ является кольцом.

Возьмем теперь в качестве пучка абелевых групп $\mathbf{S}$, участвующего в рассуждениях § 1, пучок, порожденный предпучком $\{\mathbf{G}(U)\}$, где U пробегает открытые множества пространства H^n, т. е. пучок ростков функций класса $\mathbf{G}$. В качестве автоморфизмов S_l возьмем частные лапласианы L_l. Покажем, что пучок ростков функций класса $\mathbf{G}$ является тонким. Это вытекает из следующего предложения.

Предложение 2.6. *Для любого локально-конечного открытого покрытия H^n множествами U_α существует разбиение единицы класса $\mathbf{G}(H^n)$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.*

Доказательство. Как уже было замечено, классу $\mathbf{G}(H^n)$ принадлежат произвольные функции вида

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \varphi\left(\sum_{l=1}^{n} \|x_l - a_l\|^2\right),$$

где $\varphi(t)$ — бесконечно-дифференцируемая функция одного переменного, $(a_1,\cdots, a_n) \in H^n$. Поскольку условия (1 G) — (3 G) локальны, то локально конечные суммы функций указанного вида, их произведения, а также обратные к необращающимся в 0 функциям снова принадлежат классу $\mathbf{G}(H^n)$. Конструкция разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{U_a\}$ приведена в книге С. Ленга [9] (стр. 49), причем при построениях не используются никакие операции, кроме перечисленных, что и доказывает наше предложение.

Замечание. Из предложения 2.6 следует, что класс $\mathbf{G}(H^n)$ является достаточно богатым в следующем смысле: всякая непрерывная на H^n функция k есть предел по равномерной сходимости функций класса $\mathbf{G}(H^n)$. В самом деле, пусть фиксировано $\varepsilon>0$. Рассмотрим локально конечное покрытие H^n множествами U_α, на каждом из которых колебание функции k меньше ε (такое покрытие существует в силу паракомпактности H^n). Выбрав по точке p_α в каждом U_α, рассмотрим функцию $f=\sum\limits_\alpha k(p_\alpha)\varphi_\alpha$, где $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Тогда, очевидно $f\in\mathbf{G}(H^n)$, и при этом $\sup\limits_{H^n}|f-k|\leqslant\varepsilon$, что и требовалось.

Чтобы проверить условия предложения 1.5 в нашей ситуации, осталось доказать, что всякая точка из H^n обладает фундаментальной системой $\{L_i\}$-тривиальных окрестностей. Мы докажем гораздо больше, а именно, что *всякое* открытое в H^n множество является $\{L_i\}$-тривиальным. Доказательству мы предпошлем ряд обозначений и лемм.

Обозначения. Зафиксируем ортобазис $\{e_1,\cdots, e_n,\cdots\}$ в H и введем стандартное обозначение: если $x\in H$, то через $\pi_s x$ обозначим проекцию x на плоскость первых s векторов базиса. Для удобства записи положим по определению $\pi_\infty x = x$. Расстояние в H^n обозначается через ρ. Через $G^{(\varepsilon)}$ обозначается ε-внутренность множества G, т. е. открытое множество

$$G^{(\varepsilon)}=\{(x_1,\cdots, x_n): \rho((x_1,\cdots, x_n),\ H^n\setminus G)>\varepsilon\}.$$

Лемма 2.7. *Пусть $G\subset H^n$ — открытое множество, а множества U_k определены для $k=1, 2,\cdots$ следующим образом:*

$U_k=\{(x_1,\cdots, x_n)\in H^n: (\pi_{s_1}x_1,\cdots, \pi_{s_n}x_n)\in G^{(1/k)}$ *для всех таких наборов* $(s_1,\cdots, s_n)$, *что* $1\leqslant s_j\leqslant\infty$, $\min\{s_j\}\geqslant k\}$. *Тогда*

1. *все U_k открыты в H^n,*
2. $\overline{U}_k\subset U_{k+1}$,
3. $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$.

Доказательство. 1. Пусть $(a_1,\cdots, a_n)\in U_k$. Это значит, что $\rho((\pi_{s_1}a_1,\cdots, \pi_{s_n}a_n), H^n\setminus G^{(1/k)})>0$ для любого набора $(s_1,\cdots, s_n)$ такого, что $1\leqslant s_j\leqslant\infty$, $\min\{s_j\}\geqslant k$. Покажем сначала, что существует такое $\delta>0$, что $\rho((\pi_{s_1}a_1,\cdots, \pi_{s_n}a_n), H^n\setminus G^{(1/k)})>\delta$ для всех наборов $(s_1,\cdots, s_n)$, $1\leqslant s_j\leqslant\infty$, $\min\{s_j\}\geqslant k$, одновременно.

Допустим противное. Тогда найдется последовательность $(s_1^\nu, \cdots, s_n^\nu)$ наборов такая, что $\rho((\pi_{s_1^\nu} a_1, \cdots, \pi_{s_n^\nu} a_n), H^n \setminus G^{(1/k)}) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Обозначим через Z_k множество целых $s \geqslant k$, снабженное дискретной топологией, а через $Z_k \cup \infty$ одноточечную компактификацию Z_k. Поскольку $(Z_k \cup \infty)^n$ с топологией произведения является компактом, то последовательность $(s_1^\nu, \cdots, s_n^\nu) \in (Z_k \cup \infty)^n$ можно считать сходящейся к некоторой точке $(t_1, \cdots, t_n) \in (Z_k \cup \infty)^n$. Очевидно, при этом $(\pi_{s_1^\nu} a_1, \cdots, \pi_{s_n^\nu} a_n) \to (\pi_{t_1} a_1, \cdots, \pi_{t_n} a_n)$ уже в топологии H^n. Так как функция расстояния от точки до множества непрерывна, то $\rho((\pi_{s_1^\nu} a_1, \cdots, \pi_{s_n^\nu} a_n), H^n \setminus G^{(1/k)}) \to \rho((\pi_{t_1} a_1, \cdots, \pi_{t_n} a_n), H^n \setminus G^{(1/k)})$ при $\nu \to \infty$. В силу нашего предположения $\rho((\pi_{t_1} a_1, \cdots, \pi_{t_n} a_n), H^n \setminus G^{(1/k)}) = 0$ для некоторого набора $(t_1, \cdots, t_n)$, $1 \leqslant t_j \leqslant \infty$, $\min\{t_j\} \geqslant k$, что противоречит условию $(a_1, \cdots, a_n) \in U_k$. Итак, полученное противоречие доказывает, что существует $\delta > 0$ такое, что $\rho((\pi_{s_1} a_1, \cdots, \pi_{s_n} a_n), H^n \setminus G^{(1/k)}) > \delta$ одновременно для всех наборов $(s_1, \cdots, s_n)$ таких, что $1 \leqslant s_j \leqslant \infty$, $\min\{s_j\} \geqslant k$.

Рассмотрим в H^n шар с центром $(a_1, \cdots, a_n)$ радиуса δ. Утверждается, что он целиком принадлежит U_k. В самом деле, если $\sum_{j=1}^{n} \|x_j - a_j\|^2 < \delta^2$, то $\rho((\pi_{s_1} x_1, \cdots, \pi_{s_n} x_n), H^n \setminus G^{(1/k)}) > \rho((\pi_{s_1} a_1, \cdots, \pi_{s} a_n), H^n \setminus G^{(1/k)}) - \delta > 0$ для всех наборов $(s_1, \cdots, s_n)$ таких, что $1 \leqslant s_j \leqslant \infty$, $\min\{s_j\} \geqslant k$, и таким образом, доказано, что множество U_k открыто.

2. Если $(a_1, \cdots, a_n) \in \overline{U}_k$, то для любого набора $(s_1, \cdots, s_n)$, $1 \leqslant s_j \leqslant \infty$, $\min\{s_j\} \geqslant k$ точка $(\pi_{s_1} a_1, \cdots, \pi_{s_n} a_n)$ принадлежит замыканию множества $G^{(1/k)}$, которое в свою очередь лежит в $G^{(1/k+1)}$, так что и включение $\overline{U}_k \subset U_{k+1}$ доказано.

3. Наконец, если $(a_1, \cdots, a_n) \in G$, то найдутся такие $\varepsilon > 0$ и l, что $(a_1, \cdots, a_n) \in G^{(1/l)}$ вместе с шаром $V = \{(x_1, \cdots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} \|x_j - a_j\|^2 < \varepsilon\}$. Далее, последовательность $(\pi_\nu a_1, \cdots, \pi_\nu a_n)$ стремится к точке $(a_1, \cdots, a_n)$ при $\nu \to \infty$. Поэтому найдется такое m, что $(\pi_m a_1, \cdots \cdots, \pi_m a_m) \in V$. Положим $k = \max(l, m)$ и покажем, что $(a_1, \cdots, a_n) \in U_k$. В самом деле, для любого набора $(s_1, \cdots, s_n)$, $1 \leqslant s_j \leqslant \infty$, $\min\{s_j\} \geqslant k$ выполняется неравенство $\sum_{j=1}^{n} \|\pi_{s_j} a_j - a_j\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|\pi_m a_j - a_j\|^2 < \varepsilon$, а поэтому $(\pi_{s_1} a_1, \cdots, \pi_{s_n} a_n) \in V \subset G^{(1/l)} \subset G^{(1/k)}$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.8. *Пусть U_k — множество, построенное как в лемме 2.7. Тогда для любого $(x_1, \cdots, x_n) \in U_k$ и любых $1 \leqslant j \leqslant n$, $s \geqslant k$ выполняется включение $(x_1, \cdots, x_{j-1}, \pi_s x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) \in U_k$.*

Доказательство. Для всякого набора $(s_1, \cdots, s_n)$, $1 \leqslant s_j \leqslant \infty$, $\min\{s_j\} \geqslant k$ имеем

$$(\pi_{s_1}x_1, \cdots, \pi_{s_{j-1}}x_{j-1}, \pi_{s_j}\pi_s x_j, \pi_{s_{j+1}}x_{j+1}, \cdots, \pi_{s_n}x_n) =$$
$$= (\pi_{s_1}x_1, \cdots, \pi_{s_{j-1}}x_{j-1}, \pi_{\min\{s_j, s\}}x_j, \pi_{s_{j+1}}x_{j+1}, \cdots, \pi_{s_n}x_n).$$

Но построенная точка принадлежит $G^{(1/k)}$, так как $\min\{s_j, s\} \geqslant k$ и лемма, таким образом, доказана.

Лемма 2.9. *Пусть $a \in H$, $b_s \in H$, $s = 1, 2, \cdots$, причем $b_s \to b$. Допустим, что симметричный оператор A порождает квадратичную форму, записывающуюся в ортобазисе $\{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ формулой $(Au, u) = \sum_{s=k}^{\infty} (a, e_s)(u, e_s)(b_s, \pi_s u)$. Тогда A — вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Положим

$$D_m u = \left(\sum_{s=k}^{\infty} (a, e_s)(u, e_s)\right) b + \sum_{s=k}^{m-1} (a, e_s)(u, e_s)(\pi_s b_s - b);$$

$$E_m u = \sum_{s=m}^{\infty} (a, e_s)(u, e_s)(\pi_s b_s - b); \quad Cu = D_m u + E_m u.$$

Заметим, что D_m — конечномерный оператор, а оператор E_m можно оценить по норме так: $\|E_m\| \leqslant \max_{s>m} \|\pi_s b_s - b\| \|a\|$. Поскольку $b_s \to b$ при $s \to \infty$, то $\pi_s b_s \to b$ при $s \to \infty$, поэтому $\|E_m\| \to 0$ при $m \to \infty$ и, значит, $C = \lim_{m\to\infty} D_m$ — вполне непрерывный оператор. Заметим, что $(Cu, u) = (Au, u)$, откуда следует, что $A = \frac{1}{2}(C + C^*)$. Так как C^* — вполне непрерывен вместе с C, то и A вполне непрерывен.

Лемма 2.10. *Пусть U_k — множество, построенное как в лемме 2.7. Тогда*

1. Для всякой функции $f \in \mathrm{G}(U_k)$ и любого $j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ определена функция $P_j^k f$, задаваемая формулой

$$(P_j^k f)(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{s=k}^{\infty} (x_j, e_s)^2 f(x_1, \cdots, x_{j-1}, \pi_s x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n). \quad (1)^*$$

2. Оператор P_j^k не выводит из класса $\mathrm{G}(U_k)$.

3. Выполняются операторные равенства

$$L_j P_j^k = id,$$
$$L_i P_j^k = P_j^k L_i, \quad i \neq j. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть фиксированы индексы j и k. Согласно лемме 2.8, все члены ряда (1) определены. При этом ряд (1) сходится поточечно. Действительно, для любой точки $(x_1, \cdots, x_k) \in U_k$ в силу непрерывности функции f в этой точке найдется константа D такая, что $|f(x_1, \cdots, x_{j-1}, \pi_s x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)| \leqslant D$ для всех $s \geqslant k$. По-

---

* Для $n = k = 1$ формула (1) предложена А. С. Немировским.

этому рассматриваемый ряд мажорируется сходящимся рядом $D\sum_{s=k}^{\infty}(x_j, e_s)^2$.

Проверим теперь, что функция $P^k_j f$ принадлежит классу $\mathbf{G}(U_k)$, т. е. что для нее выполнены условия (1 G) -- (3 G). Положим для краткости $g = P^k_j f$, и обозначим переменную x_j через y, а остальные переменные в совокупности через z. Для доказательства бесконечной дифференцируемости по Фреше функции g по переменным $x_1, \cdots, x_n$ достаточно доказать существование любых частных производных $\frac{\partial^{p+q} g}{\partial y^p \partial z^q}(y, z; \Delta y, \Delta z)$, являющихся ограниченными формами, p-линейными по Δy и q-линейными по Δz в каждой точке $(y, z) \in U_k$. Непосредственное последовательное вычисление частных производных функции $g(y, z) = \sum_{s=k}^{\infty}(y, e_s)^2 f(\pi_s y, z)$ дает формулу

$$\frac{\partial^{p+q} g}{\partial y^p \partial z^q}(y, z; \Delta y, \Delta z) = \sum_{s=k}^{\infty}(y, e_s)^2 \frac{\partial^{p+q} f}{\partial y^p \partial z^q}(\pi_s y, z; \pi_s \Delta y, \Delta z) +$$
$$+ 2p \sum_{s=k}^{\infty}(y, e_s)(\Delta y, e_s) \frac{\partial^{p+q-1} f}{\partial y^{p-1} \partial z^q}(\pi_s y, z; \pi_s \Delta y, \Delta z) +$$
$$+ p(p-1) \sum_{s=k}^{\infty}(\Delta y, e_s)^2 \frac{\partial^{p+q-2} f}{\partial y^{p-2} \partial z^q}(\pi_s y, z; \pi_s \Delta y, \Delta z). \qquad (3)$$

Очевидно, мы получили форму, p-линейную по Δy и q-линейную по Δz. Нужно проверить, что эта форма ограничена. В силу непрерывности в точке (y, z) производных Фреше

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial y^p \partial z^q}, \quad \frac{\partial^{p+q-1} f}{\partial y^{p-1} \partial z^q} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{p+q-2} f}{\partial y^{p-2} \partial z^q},$$

найдется константа $D_{p,q}$ такая, что значения их в точках $(\pi_s y, z)$ ограничены по норме пространства форм константой $D_{p,q}$ одновременно для всех $s \geqslant k$. Тогда из формулы (3) мы получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^{p+q} g}{\partial y^p \partial z^q}(y, z; \Delta y, \Delta z) \right| \leqslant D_{p,q}(\|y\|^2 + 2p\|y\| + p(p-1))\|\Delta y\|^p \|\Delta z\|^q,$$

которая и показывает, что в точке (y, z) норма производной Фреше $\frac{\partial^{p+q} g}{\partial y^p \partial z^q}$ не превосходит $D_{p,q}(\|y\|^2 + 2p\|y\| + p(p-1))$. Итак, условие (1 G) для функции g проверено.

Проверим теперь условие (2 G). Найдем сначала частные лапласианы функции g по переменным x_i, где $i \neq j$. Для этого воспользуемся формулой (3) при $p = 0$, $q = 2$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x_i$. Получаем, переходя вновь к координатам $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x_1,\cdots,x_n;\Delta x_l)=\sum_{s=k}^{\infty}(x_j,e_s)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_l}(x_1,\cdots,x_{j-1},\pi_s x_j,x_{j+1},\cdots$$
$$\cdots,x_n;\Delta x_l),$$

причем ряд сходится в пространстве билинейных форм с имеющейся там нормой. Однако $f\in\mathbf{G}(U_k)$ и поэтому форма $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ порождена оператором, имеющим специальный вид, описанный в предложении 2.2. Но предел билинейных форм такого вида, как легко следует из теоремы Г. И. Шилова (см. [3], § 2), снова имеет такой вид. Итак, для $i\neq j$ доказана формула

$$L_i g(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{s=k}^{\infty}(x_j,e_s)^2L_if(x_1,\cdots,x_{j-1},\pi_s x_j,x_{j+1},\cdots,x_n). \qquad (4)$$

Вычислим теперь $L_j g$. Для этого снова воспользуемся формулой (3), положив теперь $p=2$, $q=0$, $\Delta y=\Delta x_j$, $\Delta z=0$. В координатах $(x_1,\cdots,x_n)$ получаем

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x_1,\cdots,x_n;\Delta x_j)=\sum_{s=k}^{\infty}(x_j,e_s)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_1,\cdots,x_{j-1},\pi_s x_j,x_{j+1},\cdots,x_n;\pi_s\Delta x_j)+$$
$$+4\sum_{s=k}^{\infty}(x_j,e_s)(\Delta x_j,e_s)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\cdots,x_{j-1},\pi_s x_j,x_{j+1},\cdots,x_n;\pi_s\Delta x_j)+$$
$$+2\sum_{s=k}^{\infty}(\Delta x_j,e_s)^2 f(x_1,\cdots,x_{j-1},\pi_s x_j,x_{j+1},\cdots,x_n). \qquad (5)$$

Зафиксируем координаты $(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)$ и рассмотрим последовательно ряды, стоящие в виде слагаемых в формуле (5). Первый из них задает билинейную по Δx_j форму, которая является суммой сходящегося ряда форм, порожденных вполне непрерывными операторами и, следовательно, сама порождена вполне непрерывным оператором.

Второй ряд принимает вид, рассмотренный нами в лемме 2.9, если положить $a=x_j$, $b_s=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\cdots,x_{j-1},\pi_s x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)$, $b=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\cdots,x_n)$, $u=\Delta x_j$. Утверждение этой леммы показывает, что второй ряд задает билинейную форму, порожденную вполне непрерывным оператором.

Наконец, нетрудно видеть, что третий ряд задает билинейную форму, порожденную оператором $2f(x_1,\cdots,x_n)\ I+T$, где I — единичный, а T — вполне непрерывный операторы. Снова применив к формуле (5) предложение 2.2, получаем

$$L_j g(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n). \qquad (6)$$

Мы выяснили, что существуют все лапласианы $L_i g$, $i=1,\cdots,n$, причем для $i\neq j$ они определены формулой (4), а $L_j g$ определен формулой (6). Сопоставляя формулы (1) и (4), получаем, что для $i\neq j$ справедливо равенство $L_i(P_j^k f)=P_j^k(L_i f)$, а формула (6) означает, что $L_j(P_j^k f)=f$. Таким образом, операторные равенства (2) нами доказаны.

Мы показали, что функция $g=P_j^k f$ допускает применение лапласианов L_i, $i=1,\cdots,n$, и нашли для них явное выражение. То, что g допускает также последовательное применение лапласианов в любом числе, доказывается индукцией по этому числу с использованием операторных равенств (2).

Нам осталось лишь проверить, что функция $P_j^k f$ удовлетворяет условию (3 G). Для этого вновь воспользуемся равенствами (2). Пусть $t_1,\cdots,t_m$ — перестановка индексов $r_1,\cdots,r_m$. Если среди индексов отсутствует индекс j, то мы имеем равенства

$$L_{t_1}\cdots L_{t_m}P_j^k f=P_j^k L_{t_1}\cdots L_{t_m} f \quad \text{и} \quad L_{r_1}\cdots L_{r_m}P_j^k f=P_j^k L_{r_1}\cdots L_{r_m} f,$$

и наше утверждение следует из того, что для самой функции f условие (3 G) выполнено. Если же среди индексов встречается j, так что $t_\alpha=j$, $t_{\alpha+1}\neq j,\cdots,t_m\neq j$ и $r_\beta=j$, $r_{\beta+1}\neq j,\cdots,r_m\neq j$, то в этом случае $L_{t_1}\cdots L_{t_m}P_j^k f=L_{t_1}\cdots L_{t_{\alpha-1}}L_{t_{\alpha+1}}\cdots L_{t_m} f$ и $L_{r_1}\cdots L_{r_m}P_j^k f=L_{r_1}\cdots L_{r_{\beta-1}}\times$ $\times L_{r_{\beta+1}}\cdots L_{r_m} f$. Но $t_1,\cdots,t_{\alpha-1},t_{\alpha+1},\cdots,t_m$ есть перестановка набора $r_1,\cdots,r_{\beta-1},r_{\beta+1},\cdots,r_m$, поэтому оба выражения совпадают. Лемма полностью доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2.11. *Всякое открытое множество $G\subset H^n$ является $\{L_i\}$-тривиальным.*

Доказательство. Для всякого $l=0,\cdots,n-1$, любого набора из $l+1$ числа $\{j_1,\cdots,j_{l+1}\}$ $(j_1=1,\cdots,n;\cdots;j_{l+1}=1,\cdots,n)$ и любой функции $f\in\mathbf{G}(G)$, удовлетворяющей условию $L_{j_1}f=\cdots=L_{j_l}f=0$, мы должны найти функцию $g\in\mathbf{G}(G)$ такую, что $L_{j_1}g=\cdots=L_{j_l}g=0$, $L_{j_{l+1}}g=f$. Перенумерацией переменных $x_1,\cdots,x_n$ можно добиться того, что набор $\{j_1,\cdots,j_{l+1}\}$ будет совпадать с набором $\{1,\cdots,l+1\}$, поэтому мы предполагаем это условие выполненным с самого начала.

Построим по множеству G последовательность U_k открытых множеств, определенных в лемме 2.7 и будем строить последовательность функций c_k таких, что

(1) $c_k\in\mathbf{G}(U_{k+1})$,

(2) $L_1c_k=\cdots=L_lc_k=0$, $L_{l+1}c_k=f$ в U_{k+1},

(3) сужения $c_{k+1}|_{U_k}$ и $c_k|_{U_k}$ совпадают.

Последовательность c_k строим по индукции. Положим $c_1=P_{l+1}^2 f$. При этом условия (1) и (2) выполнены в силу леммы 2.10. Пусть уже построены функции $c_1,\cdots,c_k$, удовлетворяющие условиям (1)—(3).

Покажем, как строится функция c_{k+1}. Рассмотрим функцию $h = P_{l+1}^{k+2} f - c_k$. Очевидно, $h \in \mathbf{G}(U_{k+1})$. При этом в U_{k+1} выполнены равенства $L_1 h = \cdots = L_l h = 0$, так как для функции c_k это справедливо по условию, а для $P_{l+1}^{k+2} f$ это выполнено согласно перестановочности операторов L_i с P_{l+1}^{k+2} для $i = 1, \cdots, l$ (см. лемму 2.10) и наложенным на f ограничениям. Кроме того, $L_{l+1} h = L_{l+1} P_{l+1}^{k+2} f - L_{l+1} c_k = f - f = 0$. Итак, $L_1 h = \cdots = L_{l+1} h = 0$ всюду в U_{k+1}.

Рассмотрим функцию φ, принадлежащую классу $\mathbf{G}(H^n)$ и такую, что $\varphi|_{\overline{U}_k} = 1$, $\varphi|_{H^n \setminus U_{k+1}} = 0$. Согласно предложению 2.6, такая функция существует (достаточно взять разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_{k+1}, H^n \setminus \overline{U}_k\}$ и выбрать в качестве φ функцию, равную 1 на U_k). Положим $\tilde{h} = \varphi h$. Очевидно, $\tilde{h} \in \mathbf{G}(H^n)$.

Теперь в качестве c_{k+1} возьмем функцию

$$c_{k+1} = P_{l+1}^{k+2} f - (id - P_1^{k+2} L_1) \cdots (id - P_{l+1}^{k+2} L_{l+1}) \tilde{h}.$$

Проверим, что c_{k+1} удовлетворяет условиям (1)—(3). Условие (1), очевидно, выполнено, так как операторы $P_1^{k+2}, \cdots, P_{l+1}^{k+2}$ действуют в пространстве $\mathbf{G}(U_{k+2})$. Пользуясь леммой 2.10, вычислим $L_1 c_{k+1}, \cdots$ $\cdots, L_{l+1} c_{k+1}$.

Для всякого $i = 1, \cdots, l+1$ имеем

$$L_i c_{k+1} = L_i P_{l+1}^{k+2} f - (id - P_1^{k+2} L_1) \cdots (id - P_{i-1}^{k+2} L_{i-1}) (L_i - L_i P_i^{k+2} L_i) \times$$

$$\times (id - P_{i+1}^{k+2} L_{i+1}) \cdots \tilde{h}.$$

Из п. 3 леммы 2.10 следует, что $L_i - L_i P_i^{k+2} L_i = 0$, поэтому

$$L_i c_{k+1} = L_i P_{l+1}^{k+2} f.$$

Вновь воспользовавшись операторными равенствами леммы 2.10, получаем $L_i c_{k+1} = P_{l+1}^{k+2} L_i f = 0$ для $i = 1, \cdots, l$ (так как $L_i f = 0$ по условию) и, кроме того, $L_{l+1} c_{k+1} = L_{l+1} P_{l+1}^{k+2} f = f$. Таким образом, условие (2) для функции c_{k+1} выполняется.

Проверим теперь условие (3) для c_{k+1}. Поскольку $\tilde{h}$ совпадает с h на U_k, а равенство $L_1 h = \cdots = L_{l+1} h = 0$ выполнено всюду в U_{k+1}, то $L_1 \tilde{h} = \cdots = L_{l+1} \tilde{h} = 0$ в U_k.

Заметим теперь, что операторы $P_1^{k+2}, \cdots, P_{l+1}^{k+2}$ построены так, что если некоторая функция d обращается в 0 на множестве U_k, то на множестве U_k выполнены равенства $P_1^{k+2} d = \cdots = P_{l+1}^{k+2} d = 0$. Это видно непосредственно из явной формулы (1) для $P_1^{k+2}, \cdots, P_{l+1}^{k+2}$, приведенной в лемме 2.10, а также из леммы 2.8. Взяв, в частности, в качестве d последовательно функции $L_1 \tilde{h}, \cdots, L_{l+1} \tilde{h}$, мы заключаем, что на множестве U_k имеет место равенство $P_1^{k+2} L_1 \tilde{h} = \cdots = P_{l+1}^{k+2} \times$ $\times L_{l+1} \tilde{h} = 0$. Отсюда следует, что на U_k выполняется равенство $(id - P_1^{k+2} L_1) \cdots (id - P_{l+1}^{k+2} L_{l+1}) \tilde{h} = \tilde{h}$, так как при раскрытии скобок все слагаемые, кроме первого, обратятся в 0. Итак, мы получаем

$$c_{k+1}|_{U_k} = P_{l+1}^{k+2} f|_{U_k} - \tilde{h}|_{U_k} = (P_{l+1}^{k+2} f - h)|_{U_k} = c_k|_{U_k},$$

а это и есть условие (3).

Зададим теперь функцию g на G, положив на U_k ее равной c_k. Условие (3) показывает, что g — глобально определенная в $G = \bigcup_{k=1} U_k$ функция. То, что для g утверждение нашей теоремы выполнено, следует из условий (1)—(2) для любой функции c_k. Теорема полностью доказана.

§ 3. Основная теорема и ее следствия

Непосредственно из предложения 1.3 и теоремы 2.11 вытекает следующий основной результат.

Теорема 3.1. *Для любого открытого множества $G \subset H^n$ группы $\{L_l\}$-когомологий $H_L^k(G)$ тривиальны для $k > 0$.*

Выделим отдельно два частных случая этой теоремы, представляющих, как нам кажется, самостоятельный интерес. В частном случае, когда $n = k = 1$, получаем такой результат.

Теорема 3.2. *Для любого открытого множества $G \subset H$ и любой функции $f \in \mathbf{G}(G)$ существует решение g задачи $Lg = f$, принадлежащее тому же классу.*

Другой частный случай, когда $k = 1$, $n > 1$ дает такое утверждение.

Теорема 3.3. *Для любого открытого множества $G \subset H^n$ система уравнений $L_1 g = f_1, \cdots, L_n g = f_n$, где $f_1, \cdots, f_n \in \mathbf{G}(G)$, имеет решение $g \in \mathbf{G}(G)$ в том и только в том случае, когда $L_l f_j = L_j f_l$ для произвольных l, j.*

Обозначим через H пучок ростков $\{L_l\}$-гармонических функций класса $\mathbf{G}$ на H^n, а через $\mathbf{F}(G)$ будем обозначать подмножество $\mathbf{G}(G)$, состоящее из $\{L_l\}$-гармонических в G функций. В § 2 мы доказали, в частности, что в рассматриваемой ситуации условия предложения 1.5 выполнены. С учетом теоремы 3.1 это дает следующий результат.

Теорема 3.4. *Для любого открытого множества $G \subset H^n$ группы $H^k(G, \mathrm{H})$ тривиальны для $k = 1, 2, \cdots$.*

Теорема 3.4 дает возможность решать любые проблемы Кузена в произвольных областях в классе $\{L_l\}$-гармонических функций, а именно, справедлива следующая

Теорема 3.5. *Пусть $G \subset H^n$ — открытое множество, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие. Пусть задан набор $h_{\alpha\beta} \in \mathbf{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$, причем*

$h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha} = 0$ *в* $U_\alpha \cap U_\beta$ *и* $h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$ *в* $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. *Тогда существуют такие* $h_\alpha \in \mathbf{F}(U_\alpha)$, *что* $h_{\alpha\beta} = h_\alpha - h_\beta$.

Доказательство. Заметим, что $\{h_{\alpha\beta}\}$ есть 1-коцикл на покрытии $\{U_\alpha\}$ с коэффициентами в пучке $\mathbf{H}$. Для доказательства нашей теоремы нужно лишь проверить, что первая группа когомологий $H^1(\{U_\alpha\}, \mathbf{H})$ покрытия $\{U_\alpha\}$ с коэффициентами в пучке $\mathbf{H}$ тривиальна. Согласно теореме 3.4, группы $H^k(U_\alpha, \mathbf{H})$ тривиальны для всех α и $k = 1, 2, \cdots$, поэтому наше покрытие $\{U_\alpha\}$ удовлетворяет условиям теоремы Лере (см., например, [8], стр. 238). Отсюда по теореме Лере следует, что $H^1(\{U_\alpha\}, \mathbf{H}) \simeq H^1(G, \mathbf{H}) = 0$ и, таким образом, теорема доказана.

Полученный результат позволит нам при некоторых условиях строить $\{L_i\}$-гармоническую функцию с заданными нулями.

Теорема 3.6. *Пусть G — открытое множество, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие его, и пусть заданы множества $A_\alpha \subset U_\alpha$, каждое из которых является множеством всех нулей некоторой $\{L_i\}$-гармонической функции $h_\alpha \in \mathbf{F}(U_\alpha)$, причем $A_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда существует $\{L_i\}$-гармоническая функция $h \in \mathbf{F}(G)$, имеющая нули в точности на множестве $\bigcup_\alpha A_\alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{h_\alpha} - \frac{1}{h_\beta},$$

которые, в силу наших предположений, принадлежат $\mathbf{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$. По теореме 3.5, существуют $p_\alpha \in \mathbf{F}(U_\alpha)$ такие, что $h_{\alpha\beta} = p_\alpha - p_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$. Зададим функции q_α на U_α по формуле

$$q_\alpha = \frac{h_\alpha^2}{(1 - p_\alpha h_\alpha)^2 + h_\alpha^2}.$$

Очевидно, $q_\alpha \in \mathbf{F}(U_\alpha)$. Заметим, что $q_\alpha = q_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$, а поэтому, положив h равной q_α в U_α, мы получим глобально определенную на G функцию $h \in \mathbf{F}(G)$. При этом множеством всех нулей функции h является $\bigcup_\alpha A_\alpha$.

Из теоремы 3.6 вытекает, например, такой результат.

Теорема 3.7. *Пусть T — последовательность точек, лежащая в открытом множестве G и не имеющая в нем предельных точек. Тогда существует $\{L_i\}$-гармоническая в G функция h, нулями которой являются точки из T и только они.*

Доказательство. Зафиксируем в H ортобазис $\{l_1, \cdots, l_s, \cdots\}$. Занумеруем точки последовательности $(a_1^m, \cdots, a_n^m) \in T$. Из-за отсутствия предельных точек внутри G можно всякую точку из T окружить открытым шаром, содержащим не более одной точки из T, а всякую точку из $G \setminus T$ — шаром, не пересекающимся с T. Обозначим покрытие шарами через $\{U_\alpha\}$. Определим следующим образом функции $h_\alpha \in \mathbf{F}(U_\alpha)$. Если центр шара U_α не принадлежит T, то положим

$h_\alpha \equiv 1$. Если же центр шара есть точка $(a_1^m, \cdots, a_n^m) \in T \subset G$, то положим

$$h_\alpha(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{\infty} (x_i - a_i^m, e_s)^2 \in \mathbf{F}(U_\alpha).$$

Очевидно, что h_α обращается в нуль в единственной точке $(a_1^m, \cdots$ $\cdots, a_n^m) \in U_\alpha$. Теперь положим $A_\alpha = \varnothing$, если центр шара U_α не лежит в T и $A_\alpha = (a_1^m, \cdots, a_n^m)$, если центр шара U_α есть точка $(a_1^m, \cdots, a_n^m)$. При этом условия теоремы 3.6 выполняются и поэтому найдется $h \in \mathbf{F}(G)$, имеющая множеством нулей последовательность T, что и требовалось.

Из теоремы 3.7 вытекает такой интересный факт.

Теорема 3.8. *Пусть G — ограниченное хотя бы по одной переменной открытое множество в H^n. Тогда существует $\{L_l\}$-гармоническая в G функция h, не имеющая непрерывного продолжения на его замыкание $\overline{G}$.*

Доказательство. Построим последовательность $T \subset G$, не имеющую предельных точек внутри G и всюду плотную на границе ∂G. Построим, согласно теореме 3.7, функцию $h \in \mathbf{F}(G)$, имеющую T множеством своих нулей. Если бы h можно было непрерывно продолжить на ∂G, мы бы получили функцию $h \not\equiv 0$, $\{L_l\}$-гармоническую в G, непрерывную в $\overline{G}$ и равную нулю на ∂G. Выбрав точку $(a_1, \cdots, a_n) \in G$ такую, что $h(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$ и зафиксировав все координаты кроме той, по которой наше множество G ограничено, мы получим функцию $a(x) = h(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$, гармоническую по Леви, не равную нулю тождественно и обращающуюся в нуль на границе ограниченной области. Это противоречит предложению 2.3, что и доказывает нашу теорему.

Из теоремы 3.7 можно получить также другой результат в этом направлении. Напомним, что областью мы называем открытое связное множество. Введем следующее определение.

Определение 3.9. Область $G \subset H$ называется строго выпуклой, если для всякой точки $a \in \partial G$ найдется такая последовательность точек $a_n \in G$, $a_n \to a$, и гиперплоскостей α_n, проходящих через a_n, что диаметр множества $\alpha_n \cap G$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Шар, например, является строго выпуклой областью, а полупространство ею не является.

Теорема 3.10. *Пусть $G \subset H$ — строго выпуклая область. Тогда существует гармоническая по Леви функция h, определенная в G и непродолжаемая гармонически ни в какую более широкую область.*

Доказательство. Построим последовательность T точек, не имеющую предельных точек в G и плотную на ∂G, а по ней построим, согласно теореме 3.7, гармоническую по Леви функцию h, имеющую нули в точности на T. Допустим, что существует гармоническое по

Леви продолжение h в более широкую область $G_1 \supset G$. В таком случае некоторая точка $a \in \partial G$ принадлежит G_1 вместе с шаром U с центром в a. Из условия строгой выпуклости заключаем, что существует точка a_m и проходящая через нее гиперплоскость α_m такая, что $\alpha_m \cap \overline{G} \subset U$. Но на $\alpha_m \cap \partial G$ функция h равна нулю. Согласно принципу максимума, примененному внутри гиперплоскости α_m, получаем, что $h \equiv 0$ на куске гиперплоскости $\alpha_m \cap G$. Однако h принимает нулевые значения лишь на множестве T, не имеющем в G предельных точек. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Приведем, наконец, еще один результат, отличающийся по характеру от теорем 3.5—3.10, который также вытекает из теоремы 3.4.

Теорема 3.11. *Пусть* $\mathbf{F}_C(G)$ — *совокупность всех комплексных* $\{L_i\}$*-гармонических* в области* $G \subset H^n$ *функций класса* $\mathbf{G}$, $\mathfrak{M}(G) \subset \mathbf{F}_C(G)$ — *мультипликативная группа функций, не обращающихся в* 0. *Тогда* $\mathfrak{M}(G)/\exp \mathbf{F}_C(G) \simeq H^1(G, Z)$.

Доказательство. Обозначим пучки ростков функций классов $\mathbf{F}_C$ и $\mathfrak{M}$ через $\mathbf{H}_C$ и $\mathbf{M}$ соответственно. Тогда последовательность пучков

$$0 \to Z \xrightarrow{\sigma} \mathbf{H}_C \xrightarrow{\exp} \mathbf{M} \to 0,$$

где Z — постоянный пучок групп целых чисел, а σ — оператор умножения на $2\pi i$, точна. Начало соответствующей точной последовательности для глобальных сечений выглядит так

$$0 \to Z \xrightarrow{\sigma} \mathbf{F}_C(G) \xrightarrow{\exp} \mathfrak{M}(G) \to H^1(G, Z) \to H^1(G, \mathbf{H}_C).$$

Из теоремы 3.4 следует, что $H^1(G, \mathbf{H}_C) = 0$. Поэтому

$$H^1(G, Z) \simeq \mathfrak{M}(G)/\exp \mathbf{F}_C(G),$$

что и требовалось доказать.

В заключение автор приносит благодарность Г. Е. Шилову за ценные советы и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 5.VII.1973

Ի. ՅԱ. ԴՈՐՖՄԱՆ. Փնջերի տեսության մեթոդները Լևիի լապլասիանի տեսությունում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է L *Լևիի լապլասիանը, որը գործում է անվերջ չափանի սեպարաբել Հիլբերտյան տարածության տիրույթներում որոշված ֆունկցիաների վրա։ Ապացուցված է մասնական Լևիի լապլասիան պարունակող որոշ հավասարումների սիստեմների լուծելիությունը կամայական տիրույթում, մասնավորապես* $Lg = 1$ *հավասարման։ Նկարագրված են կիրառությունները ըստ Լևիի հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության։*

I. Ja. DORFMAN. *On sheaf methods in the theory of Levy Laplacian* (summary)

The Levy Laplacian L acting on functions defined in domains of infinite-dimentional separable Hilbert space, is studied. The solvability of some systems with

* Комплексную функцию мы называем $\{L_i\}$-гармонической, если ее вещественная и мнимая части являются $\{L_i\}$-гармоническими.

partial Levy Laplacians in any domain and particularly the solvability of the equation $Lg = f$ is proved. Applications to the theory of Levy harmonic functions are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Леви.* Конкретные проблемы функционального анализа, М., Изд. „Наука", 1967.
2. *Г. Е. Шилов.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве, I, Функц. анализ, 1, вып. 2, 1967, 81—90.
3. *Г. Е. Шилов.* О некоторах вопросах анализа в гильбертовом пространстве, II, Матем. исследования, Изд. АН Молд. ССР, 2, вып. 4, 1967, 166—186.
4. *А. С. Немировский, Г. Е. Шилов.* Об аксиоматическом описании оператора Лапласа на гильбертовом пространстве, Функц. анализ, 3, вып. 3, 1969, 79—85.
5. *И. Я. Дорфман.* О средних и лапласиане функций на гильбертовом пространстве, Матем. сб., 81 (123), вып. 2, 1970, 192—208.
6. *Е. М. Полищук.* Континуальные средние и вопросы анализа в функциональных пространствах, Докт. дисс., М., МГУ, 1970.
7. *В. Я. Сикирявый.* Инвариантный оператор Лапласа как оператор псевдосферического дифференцирования, Вестн. МГУ, 3, вып. 3, 1972, 66—73.
8. *Р. Ганнинг, Х. Росси.* Аналитические функции многих комплексных переменных, М., Изд. „Мир", 1967.
9. *С. Ленг.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., Изд. „Мир", 1967.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1974 թ., IX, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“ за 1974 г., IX, №№ 1—6

CONTENTS

of the Isvestia of the Academy of Scieneses of the Armenian SSR, seria "Matematika", 1974, vol. IX, №№ 1—6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS