ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

1974

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaying of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕШЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С УЗЛАМИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРАТНОСТИ В КЛАССЕ H_2

1°. Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ и $\{\gamma_j\}_1^\infty$ — произвольные последовательности комплексных чисел и $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$, можно ставить следующую общую задачу:

Выявить критерии для $\{\alpha_j\}_1^\infty$ и $\{\gamma_j\}_1^\infty$, обеспечивающие *существование* функций $f(z)$ из класса H_δ $(0<\delta<+\infty)$ Харди, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j\quad (j=1,\ 2,\cdots) \tag{1}$$

и построить аппарат для представления решений задач такого рода.

В том специальном случае, когда $\{\alpha_j\}_1^\infty$ суть различные друг от друга точки круга $|z|<1$, и таким образом, $s_j=1$ $(1\leqslant j<+\infty)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_j)=\gamma_j\quad (j=1,\ 2,\cdots) \tag{2}$$

с простыми узлами $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

Критерии *существования решения* задачи (2) в классе H^∞ ограниченных в круге $|z|<1$ функций, либо в классах $H_\delta(0<\delta<+\infty)$, были установлены в ряде работ (см. [1], а также [2], где приведены подробные литературные указания по этому поводу).

В частности, ответ на вопрос о существовании решения задачи (2) в классах H_δ $(1\leqslant\delta<+\infty)$ впервые получил полное решение в оригинальной работе Шапиро и Шилдса [3].

В случае, когда различные точки в последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ появляются *двукратно*, либо *с одинаковой кратностью*, в классе H_2 задача была рассмотрена в работах [4], [5] и [6], но вновь лишь в постановке существования ее решения.

Отметим однако, что все эти работы, посвященные задаче (1), значительно опираются друг на друга. В частности, работа Чальмерса [6], в которой хотя и далеко не в наилучшей формулировке дан полный ответ на вопрос о *существовании решения* интерполяционной задачи (1) в классе H_2, существенно опирается на известные общие результаты Н. К Бари [7] о биортогональных системах и о базисах в гильбертовых пространствах, а также на двусторонние оценки Шура собственных чисел для произведений эрмитово-положительных матриц.

2°. В настоящей статье предлагается новый, по существу чисто аналитический, метод для полного решения сформулированной выше общей интерполяционной задачи (1) в классе H_2, метод, позволяющий дать также аналитический аппарат для построения решений этой задачи.

Этот метод основан на построении специальных систем аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$, подчиненной вначале лишь условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{3}$$

Система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ является лишь несколько модифицированным для наших целей вариантом построенной в нашей работе [8] системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, также биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$.

В § 1 статьи в леммах 1.1—1.3 приводится построение указанной системы и устанавливается важное интерполяционное свойство сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,\Omega_j^*(z)\quad(n\geqslant 1). \tag{4}$$

Далее (леммы 1.4—1.5), в предположении, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ — из класса Δ, т. е.

$$\inf_{k\geqslant 1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\geqslant\delta>0 \tag{5}$$

или (в леммах 1.6—1.8), когда $\{\alpha_j\}_1^\infty$ из более узкого класса — $\Delta_p\subset\Delta$ с ограниченной кратностью $\sup\limits_{j\geqslant 1}\{s_j\}=p<+\infty$, мы устанавливаем ряд важных для дальнейшего изложения оценок, связанных с функциями $\Omega_k^*(z)$ $(k\geqslant 1)$ или их скалярными произведениями на окружности $|z|=1$.

В § 2 излагаются основные результаты статьи.

Здесь, во-первых, устанавливается теорема 1, согласно которой условия

$$\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p\ \text{ и }\ \sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}|\gamma_j|^2<+\infty \tag{6}$$

достаточны для существования решения $f(z)\in H_2$ задачи (1). Эти же условия достаточны также для эффективного построения этого решения в виде суммы ряда

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\,\Omega_j^*(z) \tag{7}$$

по нашей биортогональной системе, поскольку

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta|\quad (1\leqslant j<\infty). \tag{8}$$

В теореме 2, существенно опираясь на то, что разложение вида (7)—(8) представляет решение задачи типа (1) в классе H_2, мы для однократных узлов $\{z_j\}_1^\infty\in\Delta$ устанавливаем сходимость рядов

$$\sum_{r=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)^{2r-1}\,|f^{(r-1)}(z_j)|^2\quad (r=1,2,\cdots) \tag{9}$$

для любой функции $f(z)\in H_2$.

Отметив далее, что при условии

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty$$

система $\{r_j(z)\}_1^\infty$ не замкнута в H_2, мы вводим линейные подпространства $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$ пространства H_2 и устанавливаем важные для дальнейшего изложения факты: теорему 3 о том, что $H_2=\lambda_2\{\alpha_j\}\oplus\oplus N_2\{\alpha_j\}$ и теорему 4 о единственности функций $\Phi(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\}$ по значениям величин $\Phi^{(s_j-1)}(\alpha_j)$ $(1\leqslant j<+\infty)$.

Наконец, наряду со счетномерным гильбертовым пространством l^2 мы рассматриваем оператор T_2 на H_2, положив

$$T_2(f)=\{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty,\ f(z)\in H_2.$$

В заключительной теореме 5, доказательство которой в значительной мере уже содержалось в теоремах 1 и 2, существенно опираясь также на теоремы 3 и 4, мы устанавливаем, что условие $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$ необходимо и достаточно для совпадения двух пространств l^2 и $T_2[H_2]$.

§ 1. Предварительные леммы

1.1 (а) В данном пункте мы будем предполагать, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная пока лишь условию

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{1.1}$$

Впредь для любого фиксированного значения k $(1\leqslant k<+\infty)$, через $s_k\geqslant 1$ будем обозначать кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$, а через p_k — кратность его появления во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$. В силу условия (1.1) всегда будем иметь

$$1\leqslant s_k\leqslant p_k<+\infty\quad (1\leqslant k<+\infty). \tag{1.2}$$

Обозначим, далее, через $\{z_j\}_1^\infty$ подпоследовательность всех отличных друг от друга чисел нашей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$. Тогда, ввиду принятых нами обозначений и условия (1.1)

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)\,p_j=\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{1.1'}$$

Рассмотрим функции Бляшке, ассоциированные с последовательностями $\{\alpha_j\}_1^\infty$ и $\{z_j\}_1^\infty$

$$B(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j},\quad b(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_j z}\frac{|z_j|}{z_j}, \tag{1.3}$$

условившись в них полагать $\dfrac{|a|}{a}=-1$ при $a=0$.

Определим далее функцию

$$B_*(z)=B(z)\,b(z), \tag{1.4}$$

заметив, что она может быть представлена еще в виде следующего очевидно, сходящегося в круге $D^+=\{z;\,|z|<1\}$ произведения

$$B_*(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z_j-z}{1-\bar{z}_j z}\frac{|z_j|}{z}\right)^{q_j+1}, \tag{1.4'}$$

где $q_j\geqslant 1$, очевидно, также конечная кратность появления числа z_j в последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

(б) Из самого определения (1.4)—(1.4′) функции $B_*(z)$ вытекает, что в каждой точке $z=\alpha_k$ круга D^+ она имеет нуль кратности p_k+1. Поэтому для любого $k\geqslant 1$, положив

$$\omega_k^*(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{p_k+1}}{B_*(z)}, \tag{1.5}$$

можем утверждать, что эта функция регулярна и отлична от нуля в окрестности точки $z=\alpha_k$. Таким образом, если обозначить

$$a_\nu^*(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\left\{\frac{d^\nu\,\omega_k^*(z)}{dz^\nu}\right\}_{z=\alpha_k}\quad(0\leqslant\nu<+\infty), \tag{1.6}$$

то в достаточно малой окрестности точки $z=\alpha_k$ функция $\omega_k^*(z)$ будет допускать разложение

$$\omega_k^*(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu^*(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\quad |z-\alpha_k|<\eta. \tag{1.7}$$

Введем, наконец, в рассмотрение полиномы

$$q_k^*(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu^*(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu\ (1\leqslant k<+\infty), \tag{1.8}$$

а также последовательность $\{\overset{*}{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ регулярных и ограниченных в круге D^+ функций, положив*

$$\overset{*}{\Omega}_k(z) \equiv \frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}\,\overset{*}{q}_k(z)}{(s_k-1)!\;\overset{*}{\omega}_k(z)} \equiv$$

$$\equiv \frac{B_*(z)\,\overset{*}{q}_k(z)}{(s_k-1)!\;(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+2}}\;(1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.9}$$

Лемма 1.1. *Функции системы $\{\overset{*}{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ обладают следующими интерполяционными свойствами*

$$\left[\frac{d^r\,\overset{*}{\Omega}_k(z)}{dz^r}\right]_{z=\alpha_\nu} = \begin{cases} 0, \text{ при } \alpha_\nu \neq \alpha_k;\; 0 \leqslant r \leqslant p_\nu \\ 1, \text{ при } \alpha_\nu = \alpha_k;\; r = s_k - 1 \\ 0, \text{ при } \alpha_\nu = \alpha_k;\; r \neq s_k - 1,\; 0 \leqslant r \leqslant p_k - 1 = p_\nu - 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Доказательство. Из разложения (1.7) функции $\overset{*}{\omega}_k(z)$, принимая во внимание определения (1.8) и (1.9) полинома $\overset{*}{q}_k(z)$ и функции $\overset{*}{\Omega}_k(z)$, получим для последней следующее представление:

$$\overset{*}{\Omega}_k(z) = \frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} -$$

$$- \frac{B_*(z)}{z-\alpha_k}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\quad |z-\alpha_k| < \eta, \tag{1.11}$$

где

$$b_\nu(\alpha_k) = \overset{*}{a}_\varkappa(\alpha_k),\quad \varkappa = p_k - s_k + 1 + \nu,$$

причем, очевидно, что здесь множитель $(z-\alpha_k)^{-1}B_*(z)$ в точке $z=\alpha_k$ имеет нуль кратности p_k.

Следовательно, вторая и третья из формул (1.10) леммы непосредственно следуют из разложения (1.11) функции $\overset{*}{\Omega}_k(z)$. Что касается первой из формул (1.10), то она вытекает из самого определения (1.9) функции $\overset{*}{\Omega}_k(z)$, так как в каждой точке $z=\alpha_\nu \neq \alpha_k$ она совместно с функцией $B_*(z)$ имеет нуль кратности $p_\nu + 1$.

(в) Наряду с системой $\{\overset{*}{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ с нашей последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ будем ассоциировать также систему рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\;z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\;(1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.12}$$

Лемма 1.2. *Системы функций*

$$\{r_k(z)\}_1^\infty \text{ и } \{\overset{*}{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$$

---

* Все определенные здесь функции снабжены нами знаком (*), поскольку они являются лишь несколько модифицированными (для наших целей) вариантами функций, впервые введенными нами в работе [8].

биортогональны на единичной окружности в смысле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} r_\nu(\zeta)\,\overline{\Omega_k^*(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Omega_k^*(\zeta)\,\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta| = \begin{cases}1, & k=\nu\\ 0, & k\neq\nu\end{cases}\quad (k;\ \nu=1, 2,\cdots). \tag{1.13}$$

Доказательство. Поскольку функция $\Omega_k^*(z)$ регулярна и ограничена в круге D^+, то она представима интегралом Коши через свои граничные значения

$$\Omega_k^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\Omega_k^*(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\, z}\,|d\zeta|,\ z\in D^+. \tag{1.14}$$

Заметив теперь, что

$$\frac{d^{s_\nu-1}}{dz^{s_\nu-1}}\left\{\frac{1}{1-\overline{\zeta}\, z}\right\}_{z=\alpha_\nu}=\overline{\left\{\frac{(s_\nu-1)!\,\zeta^{s_\nu-1}}{(1-\overline{z}\zeta)^{s_\nu}}\right\}}_{z=\alpha_\nu}=\overline{r_\nu(\zeta)}, \tag{1.15}$$

$(s_\nu-1)$-кратным дифференцированием интеграла (1.14) по параметру z мы получим

$$\left[\frac{d^{s_\nu-1}\,\Omega_k^*(z)}{dz^{s_\nu-1}}\right]_{z=\alpha_\nu}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Omega_k^*(\zeta)\,\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta|\quad (k;\ \nu=1, 2,\cdots). \tag{1.16}$$

Если $\nu=k$, то $\alpha_\nu=\alpha_k$, $s_\nu=s_k$, и в силу второй из формул (1.10) леммы 1.1 мы получим, что в этом случае интеграл (1.16) равен единице.

Если же $\nu\neq k$, то либо $\alpha_\nu=\alpha_k$, но тогда, очевидно, $s_\nu\neq s_k$, либо же $\alpha_\nu\neq\alpha_k$. В обоих этих случаях интегралы (1.16) равны нулю, в силу первой и третьей из формул (1.10).

Лемма 1.3. *Пусть* $\{\gamma_k\}_1^m$ $(1\leqslant m<+\infty)$ — *произвольные комплексные числа. Тогда регулярная и ограниченная в круге* $|z|<1$ *функция*

$$S_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,\Omega_k^*(z) \tag{1.17}$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$S_m^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu)=\gamma_\nu (1\leqslant\nu\leqslant m). \tag{1.18}$$

Доказательство. Функция $R_m(z)$ в круге D^+ представима интегралом Коши через свои граничные значения

$$S_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{S_m(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\, z}\,|d\zeta|,\ z\in D^+.$$

Отсюда, в силу (1.15), (1.17) и формул (1.13) биортогональности, получим

$$S_m^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} S_m(\zeta)\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Omega_k^*(\zeta)\overline{r_\nu(\zeta)}\,|d\zeta|=\gamma_\nu\quad(1\leqslant\nu\leqslant m).$$

1.2 (а) Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ будем относить к классу Δ, если при некотором δ $(0<\delta<1)$ она обладает свойством

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}\geqslant\delta. \tag{1.19}$$

Отметим сначала же, что если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ — из класса Δ, то, в частности, она удовлетворяет также условию Бляшке (1.1), обеспечивающему существование определенных выше функций $B(z)$, $b(z)$ и $B_*(z)$.

Отметим также, что если все числа из $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$ отличны друг от друга, то условие (1.19) принимает вид

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}\geqslant\delta$$

и известно под названием свойства *равномерной разделимости* последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$.

Выше мы условились под $\{z_j\}_1^\infty$ понимать последовательность всех отличных друг от друга чисел из $\{\alpha_j\}_1^\infty$. Поэтому свойство $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$—(1.19) можно записать также в виде

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^{q_j}\right\}\geqslant\delta, \tag{1.19'}$$

где q_j $(1\leqslant q_j<+\infty)$ — кратность появления числа z_j во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, причем, очевидно, что

$$\sup_{j\geqslant 1}\{p_j\}=\sup_{j\geqslant 1}\{q_j\}.$$

Заметим теперь, что если $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta$, то из (1.19)—(1.19′) следует, что для $\{z_j\}_1^\infty$ мы будем иметь

$$\inf_{k\geqslant 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\right\}\geqslant\delta_*, \tag{1.20}$$

притом для значения $\delta_*=\delta$.

Это означает, что *если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то подавно* $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Но если предполагать, что

$$p = \sup_{j \geq 1} \{p_j\} = \sup_{j \geq 1} \{q_j\} < +\infty, \tag{1.21}$$

то справедливо и обратное утверждение.

В самом деле, тогда справедливы неравенства

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \left|\frac{z_j - z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^{q_j} > \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \left|\frac{z_j - z_k}{1-\bar{z}_j z_k}\right|\right)^p \quad (k=1, 2, \cdots),$$

откуда и следует, что свойство (1.20) равномерной разделенности $\{z_j\}_1^\infty$ повлечет за собой свойство (1.19)—(1.19′), т. е. свойство $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Поскольку равномерно разделимые последовательности $\{z_j\}_1^\infty$, как известно, существуют, то предыдущие замечания подтверждают, что по крайней мере при условии (1.21) класс Δ не пуст. Но более того, пользуясь известным примером равномерно разделенной последовательности (см. [1], стр. 289—290), легко можно убедиться в том, что класс Δ не пуст и в случае, когда $\sup\limits_{j \geq 1} \{p_j\} = +\infty$.

Наконец, ради удобства дальнейшего изложения, приведем следующее определение: *последовательность комплексных чисел* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$ *отнесем к классу* Δ_p, *если*

$$\sup_{j \geq 1} \{p_j\} = p < +\infty.$$

Следующая лемма является непосредственным перенесением известной леммы [3] на случай произвольных последовательностей $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Лемма 1.4. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то справедливы неравенства*

$$\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \leqslant A_0(\delta) = 2\log\frac{1}{\delta} \tag{1.22}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \leqslant A_k(\delta) = p_k + 2\log\frac{1}{\delta} \tag{1.23}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Доказательство. Обозначая

$$\varkappa_{jk} = \frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \quad (j;\ k=1, 2, \cdots),$$

заметим, что

$$\left|\frac{\alpha_j - \alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j \alpha_k}\right|^2 = 1 - \varkappa_{jk} \quad (j;\ k=1, 2, \cdots).$$

Отсюда, и ввиду условия $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, следуют неравенства

$$\delta^2 \leqslant \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \left|\frac{\alpha_j - \alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j \alpha_k}\right|^2 = \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} (1-\varkappa_{jk}) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \varkappa_{jk}\right\} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

т. е. неравенства (1.22) леммы.

Далее, поскольку при данном $k \geqslant 1$ кратность появления числа α_k во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ равна $p_k < +\infty$ и при $\alpha_j = \alpha_k$, $\varkappa_{jk} = 1$, то

$$\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \varkappa_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{jk} - p_k \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Поэтому неравенства (1.23) непосредственно следуют из (1.22).

Следствие. *Если* $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta_p$, *то справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\bar{\alpha}_j \alpha_k|^2} \leqslant A(\delta;\ p) = p + 2\log\frac{1}{\delta} \tag{1.23'}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

(б) Введем в рассмотрение последовательность функций

$$\Delta_k(z) = \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{1-\bar{\alpha}_j z}{\alpha_j - z}\,\frac{\alpha_j}{|\alpha_j|} \quad (1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.24}$$

заметив, что если пользоваться принятыми нами выше обозначениями, то они допускают также представление

$$\Delta_k(z) = \left[\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right]^{p_k} B^{-1}(z) \quad (1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.24'}$$

Лемма 1.5. *Если* $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta$, *то справедливы неравенства*

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\,|\Delta_k^{(s)}(\alpha_k)| \leqslant C_s(\delta), \tag{1.25}$$

$$(0 \leqslant s < +\infty,\ 1 \leqslant k < +\infty),$$

где $C_s(\delta)$ — *некоторые постоянные, не зависящие от* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Поскольку $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta$, то из самого определения (1.24) функций $\Delta_k(z)$ следуют неравенства

$$1 < |\Delta_k(\alpha_k)| \leqslant \delta^{-1} \quad (1 \leqslant k < +\infty), \tag{1.26}$$

т. е. неравенства (1.25) леммы для значения $s = 0$ и $C_0(\delta) = \delta^{-1}$.

Установим теперь справедливость неравенств (1.25) леммы для $s = 1$.

С этой целью заметим сначала, что взяв логарифмическую производную функции $\Delta_k(z)$, мы приходим к тождеству

$$\Delta_k'(z)=\Delta_k(z)\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left\{-\frac{\bar{\alpha}_j}{1-\bar{\alpha}_j z}+\frac{1}{\alpha_j-z}\right\}=$$

$$=\Delta_k(z)\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-|\alpha_j|^2}{(\alpha_j-z)(1-\bar{\alpha}_j z)}. \tag{1.27}$$

Отсюда, ввиду (1.26) получим неравенство

$$|\Delta_k'(\alpha_k)|\leqslant\delta^{-1}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-|\alpha_j|^2}{|\alpha_j-\alpha_k|\,|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|}.$$

Но из условия $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta-(1.19)$, в частности, вытекают неравенства

$$\left|\frac{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}{\alpha_j-\alpha_k}\right|\leqslant\delta^{-1}\quad(\alpha_j\neq\alpha_k), \tag{1.28}$$

пользуясь которыми будем иметь

$$|\Delta_k'(\alpha_k)|\leqslant\delta^{-2}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-|\alpha_j|^2}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^2}.$$

Воспользовавшись далее неравенствами (1.22) леммы 1.4, получим

$$(1-|\alpha_k|^2)\,|\Delta_k'(\alpha_k)|<\delta^{-2}A_0(\delta)\quad(1\leqslant k<+\infty),$$

т. е. неравенства (1.25) леммы справедливы также для $s=1$, если положить $C_1(\delta)=\delta^{-2}A_0(\delta)$.

Проведем теперь рассуждение полной индукции.

Предположим, что неравенства (1.25) леммы справедливы для значений $0\leqslant s\leqslant\nu$

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\,|\Delta_k^{(s)}(\alpha_k)|\leqslant C_s(\delta)\quad(0\leqslant s\leqslant\nu;\ 1\leqslant k<+\infty), \tag{1.25'}$$

установим их справедливость для значения $s=\nu+1$.

С этой целью заметим, что произведя ν-кратное дифференцирование первого из тождеств (1.27), будем иметь

$$\Delta_k^{(\nu+1)}(z)=-\sum_{r=0}^{\nu}C_\nu^r\,\Delta_k^{(\nu-r)}(z)\,\psi_{k,r}(z), \tag{1.29}$$

где

$$\psi_{k,r}(z)=\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left\{\frac{\bar{\alpha}_j^{r+1}}{(1-\bar{\alpha}_j z)^{r+1}}+\frac{(-1)^r}{(z-\alpha_j)^{r+1}}\right\}=$$

$$=\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{\omega_{r,j}(z)}{(1-\bar{\alpha}_j z)^{r+1}(z-\alpha_j)^{r+1}} \tag{1.30}$$

и

$$\omega_{r,j}(z)=\bar{\alpha}_j^{r+1}(z-\alpha_j)^{r+1}+(-1)^r(1-\bar{\alpha}_j z)^{r+1}. \tag{1.30'}$$

Но легко видеть, что $\omega_{r,j}(z)$ на самом деле является полиномом степени r, и поэтому она представима в виде суммы

$$\omega_{r,j}(z)=\sum_{\mu=0}^{r}\frac{\omega_{r,j}^{(\mu)}(\alpha_j)}{\mu!}(z-\alpha_j)^{\mu}\quad(0\leqslant r\leqslant\nu),\tag{1.31}$$

где

$$\omega_{r,j}^{(\mu)}(\alpha_j)=(-1)^{r-\mu}\frac{(r+1)!}{(r+1-\mu)!}\,\bar{\alpha}_j^{\mu}(1-|\alpha_j|^2)^{r+1-\mu}\tag{1.32}$$
$$(0\leqslant\mu\leqslant r\leqslant\nu).$$

Из (1.30), (1.31) и (1.32), пользуясь также оценкой (1.28), получим

$$|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\leqslant\sum_{\mu=0}^{r}C_{r+1}^{\mu}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_j|^2)^{r+1-\mu}}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^{r+1}\,|\alpha_k-\alpha_j|^{r+1-\mu}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\mu=0}^{r}C_{r+1}^{\mu}\,\delta^{\mu-r-1}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_j|^2)^{r+1-\mu}}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^{2r+2-\mu}}.$$

Заметив далее, что при $0\leqslant\mu\leqslant r$

$$|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^{2r-\mu}\geqslant2^{-r}(1-|\alpha_k|^2)^r(1-|\alpha_j|)^{r-\mu},$$
$$(1-|\alpha_j|^2)^{r-\mu}\leqslant2^{r-\mu}(1-|\alpha_j|)^{r-\mu},$$

мы приходим к неравенству

$$(1-|\alpha_k|^2)^{r+1}|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\leqslant$$
$$\leqslant\delta^{-1}(4\delta^{-1})^r\sum_{\mu=0}^{r}C_{r+1}^{\mu}(2^{-1}\delta)^{\mu}\sum_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\bar{\alpha}_j\alpha_k|^2}.$$

Следовательно, в силу неравенств (1.22) леммы 1.4 справедливы оценки

$$(1-|\alpha_k|^2)^{r+1}|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\leqslant D_r(\delta)\quad(1\leqslant k<+\infty),$$

где $D_r(\delta)$ — некоторые постоянные, не зависящие от $k\geqslant1$.

Наконец, из (1.29) имеем при $1\leqslant k<+\infty$

$$(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+1}|\Delta_k^{(\nu+1)}(\alpha_k)|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{r=0}^{\nu}C_\nu^r\{(1-|\alpha_k|^2)^{\nu-r}|\Delta_k^{(\nu-r)}(\alpha_k)|\}\{(1-|\alpha_k|^2)^{r+1}|\psi_{k,r}(\alpha_k)|\},$$

откуда, в силу нашего предположения (1.25′), и предыдущей оценки заключаем, что неравенства (1.25) справедливы и для значения $s=\nu+1$. Таким образом, лемма полностью доказана.

(в) Докажем теперь еще две леммы в предположении, что
$$\sup_{j\geqslant1}\{p_j\}=p<+\infty.$$

Лемма 1.6. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ $(1 \leq p < +\infty)$, *то для коэффициентов разложения* (1.7)

$$\omega_k^*(z) = \frac{(z-\alpha_k)^{p_k+1}}{B_*(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^*(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu, \ |z-\alpha_k| < \eta$$

справедливы неравенства

$$|a_\nu^*(\alpha_k)| \leq a(\delta; p)(1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-\nu} \tag{1.33}$$

$$(0 \leq \nu \leq p_k+1, \ 1 \leq k < +\infty),$$

где $a(\delta; p)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* ν *и* k.

Доказательство. Наряду с функциями $\Delta_k(z)$ $(1 \leq k < +\infty)$, которые были определены нами по (1.24), введем в рассмотрение также функции

$$\psi_k(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ z_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{1-\bar{z}_j z}{z_j - z} \frac{z_j}{|z_j|} \quad (1 \leq k < +\infty), \tag{1.34}$$

где, как уже отмечалось, $\{z_j\}_1^\infty$ — все отличные друг от друга числа из $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$. Поскольку очевидно, что $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$ и при данном $k \geq 1$, $\alpha_k = z_{j_k}$, то согласно лемме 1.5 справедливы неравенства

$$(1-|z_{j_k}|^2)^s |\psi_k^{(s)}(z_{j_k})| \leq C_s(\delta) \ (0 \leq s < +\infty, \ 1 \leq k < +\infty)$$

или, что то же самое, неравенства

$$(1-|\alpha_k|^2)^s |\psi_k^{(s)}(\alpha_k)| \leq C_s(\delta) \ (0 \leq s < +\infty, \ 1 \leq k < +\infty), \tag{1.35}$$

где $C_s(\delta)$ не зависят от k.

Следовательно, положив

$$\Phi_k(z) = \Delta_k(z)\,\psi_k(z) \ (1 \leq k < +\infty),$$

из тождеств

$$\Phi_k^{(s)}(z) = \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \psi_k^{(\nu)}(z)\,\Delta_k^{(s-\nu)}(z) \ (s = 0, 1, 2, \cdots)$$

на основании оценок (1.25) и (1.35) заключаем, что справедливы также неравенства

$$(1-|\alpha_k|^2)^s |\Phi_k^{(s)}(\alpha_k)| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \cdot C_\nu(\delta)\, C_{s-\nu}(\delta) = E_s(\delta) \ (0 \leq s < +\infty, \ 1 \leq k < +\infty). \tag{1.36}$$

Далее, принимая во внимание определения (1.24) и (1.34) функций $\Delta_k(z)$ и $\psi_k(z)$, а также определения (1.3) и (1.4) функций $B(z)$, $b(z)$ и $B_*(z)$, приходим к тождеству

$$\left[\frac{1-\bar{\alpha}_k z}{\alpha_k - z} \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\right]^{p_k+1} \Phi_k(z) = B_*^{-1}(z),$$

откуда в силу (1.5) вытекает, что

$$\omega_k^*(z) = \left(\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\right)^{p_k+1} (1-\bar{\alpha}_k z)^{p_k+1} \Phi_k(z)$$

$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Отсюда следует, что для любого ν $(0 \leqslant \nu < +\infty)$

$$\omega_k^{*(\nu)}(\alpha_k) =$$

$$= \left(\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}\right)^{p_k+1} \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \frac{(p_k+1)!}{(p_k+1-s)!} (-\bar{\alpha}_k)^s (1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-s} \Phi_k^{(\nu-s)}(\alpha_k),$$

и так как $\sup\limits_{k\geqslant 1} |p_k| = p < +\infty$, то в силу (1.36) мы приходим к оценкам

$$(1-|\alpha_k|^2)^{\nu-p_k-1} |\omega_k^{*(\nu)}(\alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \frac{(p+1)!}{(p+1-s)!} E_{\nu-s}(\delta) = a(\delta;\ p)$$

$$(0 \leqslant \nu \leqslant p_k+1,\ 1 \leqslant k < +\infty).$$

Наконец, поскольку

$$a_\nu^*(\alpha_k) = \frac{1}{\nu!} \omega_k^{*(\nu)}(\alpha_k),$$

то неравенства (1.33) леммы установлены.

Введем в рассмотрение интегралы

$$U_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \Omega_n^*(\zeta) \overline{\Omega_m^*(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{1.37}$$

$$(n;\ m = 1, 2, \cdots),$$

и докажем следующую лемму.

Лемма 1.7. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$, *то справедливы оценки*

$$|U_{nm}| \leqslant C(\delta,\ p) \cdot \frac{(1-|\alpha_n|^2)^{s_n+1/2} (1-|\alpha_m|^2)^{s_m+1/2}}{|1-\bar{\alpha}_m \alpha_n|^2} \tag{1.38}$$

$$(n;\ m = 1, 2, \cdots),$$

где $C(\delta,\ p)$ — *постоянная, не зависящая от* n *и* m.

Доказательство. Пользуясь определением (1.8)—(1.9) системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ и обозначив при $r;\ s = 0, 1, 2, \cdots$

$$I_{nm}(r;\ s) = \frac{1}{(s_n-1)!\,(s_m-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^s}{(\zeta-\alpha_n)^{r+1} (1-\bar{\alpha}_m \zeta)^{s+1}}\, d\zeta, \tag{1.39}$$

для интегралов U_{nm} мы получим следующее представление:

$$U_{nm}=\sum_{\nu_1=0}^{p_n-s_n}\sum_{\nu_2=0}^{p_m-s_m} a^{*}_{\nu_1}(\alpha_n)\,\overline{a^{*}_{\nu_2}(\alpha_m)}\,I_{nm}(p_n-s_n-\nu_1+1;\ p_m-s_m-\nu_2+1). \tag{1.40}$$

Заметим теперь, что вообще

$$I_{nm}(r,s)=\overline{I_{nm}(s,r)},$$

а при $0\leqslant r\leqslant s$

$$I_{nm}(r;s)=$$

$$=\frac{(1-\bar{\alpha}_m\alpha_n)^{-r-s-1}}{(s_n-1)!\,(s_m-1)!}\sum_{j=0}^{r}\frac{(s+r-j)!}{j!\,(r-j)!\,(s-j)!}\alpha_n^{s-j}\,\bar{\alpha}_m^{r-j}\,(1-\bar{\alpha}_m\alpha_n)^{j}.$$

Поэтому справедливы оценки вида

$$|I_{nm}(r;s)|\leqslant\frac{A(r,s)}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{r+s+1}}\quad(m,n=1,2,\cdots), \tag{1.41}$$

где $A(r,s)$ зависят только от $r\,(0\leqslant r<+\infty)$ и $s\,(0\leqslant s<+\infty)$. Но поскольку $\sup\limits_{k>1}\{p_k\}=p<+\infty$, то очевидно, что

$$\sup_{\substack{0<\nu<p_k-s_k\\ k>1}}\{p_k-s_k-\nu+1\}=p$$

и, следовательно, из (1.41) вытекают также неравенства вида

$$|I_{nm}(p_n-s_n-\nu_1+1;\ p_m-s_m-\nu_2+1)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_p}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{\varkappa}}\quad(n;\ m=1,2,\cdots;\ 0\leqslant\nu_1\leqslant p_n-s_n;\ 0\leqslant\nu_2\leqslant p_m-s_m), \tag{1.42}$$

где

$$\varkappa=p_n+p_m-s_n-s_m-\nu_1-\nu_2+3, \tag{1.42'}$$

а A_p — некоторая постоянная, не зависящая от n, m, ν_1 и ν_2.

Далее, пользуясь оценками (1.33) леммы 1.6, из (1.40) и (1.42)—(1.42′) приходим к неравенствам

$$|U_{nm}|<A_p\,a^2(\delta;p)\sum_{\nu_1=0}^{p_n-s_n}\sum_{\nu_2=0}^{p_m-s_m}\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{p_n+1-\nu_1}(1-|\alpha_m|^2)^{p_m+1-\nu_2}}{|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{\varkappa}}. \tag{1.43}$$

Однако, ввиду (1,42′)

$$|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^{\varkappa}\geqslant|1-\bar{\alpha}_m\alpha_n|^2(1-|\alpha_n|)^{p_n-s_n+1/2-\nu_1}\,(1-|\alpha_m|)^{p_m-s_m+1/2-\nu_2}$$

и легко видеть также, что

$$(1-|\alpha_n|^2)^{p_n+1-\nu_1}\leqslant 2^{p_n+1}(1-|\alpha_n|)^{p_n+1-\nu_1}$$

$$(1-|\alpha_m|^2)^{p_m+1-\nu_2}\leqslant 2^{p_m+1}(1-|\alpha_m|)^{p_m+1-\nu_2}.$$

Поэтому, заметив, что $\sup_{k\geq 1} |p_k| = p < +\infty$, из (1.43) мы получим

$$|U_{nm}| \leqslant C(\delta, p) \frac{(1-|\alpha_n|)^{s_n+1/2} (1-|\alpha_m|)^{s_m+1/2}}{|1-\bar{\alpha}_m \alpha_n|^2},$$

$$(n;\ m=1, 2, \cdots),$$

где $C(\delta, p) = p^2 2^{2(p+1)} A_p a^2(\delta; p)$. Отсюда и следуют неравенства (1.38) леммы.

Лемма 1.8. *Если $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$, то справедливы неравенства*

$$|\Omega_k^{*(p_k)}(\alpha_k)| \leqslant \frac{C_p(\delta)}{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-s_k+1}} \tag{1.44}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty),$$

где $C_p(\delta)$ — постоянная, не зависящая от k.

Доказательство. Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$\Omega_k^{*(p_k)}(\alpha_k) = \frac{p_k!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Omega_k^*(\zeta)}{(\zeta-\alpha_k)^{p_k+1}}\, d\zeta$$

$$(1 \leqslant k < + \infty).$$

Пользуясь представлением (1.8)—(1.9) функции $\Omega_k^*(z)$, отсюда получим

$$|\Omega_k^{*(p_k)}(\alpha_k)| \leqslant \frac{p_k!}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu^*(\alpha_k)|\, J_{k,\nu}, \tag{1.45}$$

где

$$J_{k,\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\alpha_k|^{p_k-s_k-\nu+2} |1-\bar{\alpha}_k \zeta|^{p_k+1}}.$$

Заметим теперь, что согласно неравенствам (1.33) леммы 1.6 имеем

$$|a_\nu^*(\alpha_k)| \leqslant a(\delta;\ p)\ (1-|\alpha_k|^2)^{p_k+1-\nu}\ (0 \leqslant \nu \leqslant p_k - s_k)$$

и легко видеть также, что

$$J_{k,\nu} \leqslant (1-|\alpha_k|)^{-2p_k+s_k+\nu-1} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{|d\zeta|}{|1-\bar{\alpha}_k \zeta|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2p_k-s_k-\nu+1} (1-|\alpha_k|^2)^{-2p_k+s_k+\nu-2}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty,\ 0 \leqslant \nu \leqslant p_k - s_k).$$

Поскольку $\sup_{k\geq 1} |p_k| = p < +\infty$, то из этих неравенств и (1.45) при подходящем выборе постоянной $C_p(\delta)$, следует утверждение (1.44) леммы.

(г) Напомним, что по определению, аналитическая в единичном круге D^+ функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1.46}$$

принадлежит классу H_2 Харди, если

$$\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^2\,d\varphi\right\}^{1/2}\equiv\|f\|<+\infty.$$

При этом предел

$$f(e^{i\varphi})=\lim_{r\to1-0} f(re^{i\varphi})$$

существует почти для всех $\varphi\in[0, 2\pi]$ и имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\varphi})|^2\,d\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2=\|f\|^2<+\infty. \tag{1.47}$$

Докажем следующую лемму о порядке роста производных функций из H_2.

Лемма 1.9*. *Если $f(z)\in H_2$, то при любом целом $r\geqslant 0$*

$$\lim_{|z|\to1-0}\{(1-|z|^2)^{r+1/2}\,|f^{(r)}(z)|\}=0. \tag{1.48}$$

Доказательство. Из (1.47) следует, что для любого $\varepsilon>0$ и $r\geqslant 0$ можно указать такое целое $N=N(\varepsilon; r)\geqslant 1+r$, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|^2<\varepsilon^2. \tag{1.49}$$

С другой стороны, r-кратным дифференцированием ряда (1.46) (если $r\geqslant 1$) мы получим разложение

$$f^{(r)}(z)=\sum_{k=r}^{\infty}a_k\,\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-r)}\,z^{k-r},\ z\in D^+.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца и (1.49) приходим к оценке

$$|f^{(r)}(z)|\leqslant\left|\sum_{k=r}^{N}a_k\,\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-r)}\,z^{k-r}\right|+$$

$$+\varepsilon\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(1+r+k)}{\Gamma^2(1+k)}\,|z|^{2k}\right\}^{1/2},\ z\in D^+. \tag{1.50}$$

Воспользовавшись далее формулой Стирлинга

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}\,e^{-x}\,e^{\frac{\theta_x}{12x}}\quad(x>0,\ 0<\theta_x<1)$$

* Частный случай этой леммы для класса H_2, когда $r=0$, отмечался ранее (см. [2], стр. 86).

нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\sup_{k\geqslant 1}\frac{\Gamma^2(1+r+k)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+2r+k)}<e^{3+2r}\quad(r\geqslant 0).$$

Кроме того, легко проверить, что

$$\Gamma^2(1+r)\leqslant\Gamma(1+2r),$$

и потому

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(1+r+k)}{\Gamma^2(1+k)}|z|^{2k}<e^{3+2r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+2r+k)}{\Gamma(1+k)}|z|^{2k}=$$

$$=e^{3+2r}\,\Gamma(1+r)(1-|z|^2)^{-1-2r}\quad(|z|<1). \tag{1.51}$$

Наконец, из (1.50) и (1.51), в силу произвольности $\varepsilon>0$ следует справедливость (1.48).

§ 2. Основные теоремы

2.1 (а) Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ — произвольная последовательность, и, как всегда, пусть для любого $k\geqslant 1$ $s_k\geqslant 1$ означает кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$ нашей последовательности.

Полагая, что $\{\gamma_j\}_1^\infty$ — любая другая последовательность комплексных чисел, нашей ближайшей задачей будет получение условий, *достаточных* для существования, а также для эффективного построения функций $f(z)\in H_2$, подчиненных интерполяционным данным вида

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j\quad(1\leqslant j<+\infty). \tag{2.1}$$

В связи с этим отметим, что если $\sup_{j\geqslant 1}\{s_j\}<+\infty$ и $|\alpha_j|\to 1$, то из леммы 1.9 непосредственно будет следовать, что для разрешимости задачи (2.1) по *крайней мере необходимо* выполнение условия

$$\lim_{j\to+\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}|\gamma_j|=0. \tag{2.2}$$

Для формулировки и доказательства соответствующей теоремы, кроме принятых нами в § 1 обозначений и определений, введем еще и следующие.

Пусть l^2 — счетномерное гильбертово пространство, элементами которого, как известно, являются всевозможные последовательности комплексных чисел $w\equiv\{w_j\}_1^\infty$ с нормой

$$\|w\|=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|w_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty. \tag{2.3}$$

Наряду с этим введем также пространство $l^2\{\alpha_j\}$, элементами которого являются произвольные последовательности комплексных чисел $\gamma=\{\gamma_j\}_1^\infty$, для которых

$$\|\gamma_\alpha\| \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1} \, |\gamma_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{2.4}$$

Таким образом, если последовательности $w = \{w_j\}_1^\infty$ и $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$ таковы, что

$$w_j = (1-|\alpha_j|^2)^{s_j - 1/2} \, \gamma_j \, (1 \leqslant j < +\infty), \tag{2.5}$$

то утверждения $w \in l^2$ и $\gamma \in l^2 \{\alpha_j\}$ просто равносильны.

(б) Следующая теорема, к доказательству которой мы приступаем, содержит достаточное условие разрешимости поставленной выше задачи (2.1) при наложении на последовательность $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$ более сильного чем (2.2) ограничения — $\gamma \in l^2 \{\alpha_j\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$ — *произвольный элемент из* $l^2 \{\alpha_j\}$. *Тогда условие*

$$\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p \tag{2.6}$$

достаточно для справедливости следующих утверждений:

1°. *Существует функция* $f_0(z) \in H_2$, *являющаяся решением интерполяционной задачи* (2.1), *для которой*

$$\|f_0\| \leqslant C \, \|\gamma_\alpha\|, \tag{2.7}$$

где C — *постоянная, зависящая лишь от чисел* p *и* δ, *участвующих в определении класса* Δ_p.

2°. *Функция* $f_0(z)$ *представима в качестве суммы ряда*

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \, \Omega_j^*(z), \tag{2.8}$$

сходящегося равномерно внутри круга D^+ *и в метрике* H_2 *на его границе.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (2.8)

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \, \Omega_j^*(z) \quad (1 \leqslant n < +\infty), \tag{2.9}$$

заметив, что согласно лемме 1.3 она удовлетворяет интерполяционным условиям

$$S_n^{(s_\nu - 1)}(\alpha_\nu) = \gamma_\nu \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n). \tag{2.1'}$$

Если положить еще $S_0(z) \equiv 0$, то из (2.9) будем иметь

$$d(n; q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_{n+q}(e^{i\vartheta}) - S_n(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta =$$

$$= \sum_{j,\,k=n+1}^{n+q} U_{jk} \, \gamma_j \overline{\gamma}_k \quad (0 \leqslant n < +\infty, \ 1 \leqslant q < +\infty), \tag{2.10}$$

где

$$U_{jk}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Omega_j^*(e^{i\vartheta})\overline{\Omega_k^*(e^{i\vartheta})}\,d\vartheta$$

$$(1\leqslant j,\ k<+\infty)$$

и, очевидно, что $U_{kj}=\overline{U}_{jk}$.

Следующее известное утверждение легко вытекает из неравенства Шварца.

Если матрица комплексных чисел $\{a_{jk}\}$ $(1\leqslant j,\ k\leqslant N)$ *такова, что* $a_{kj}=\overline{a}_{jk}$ *и*

$$\sum_{j=1}^{N}|a_{jk}|\leqslant M\ (1\leqslant k\leqslant N),$$

то для произвольных комплексных чисел $\{x_j\}_1^N$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{j,\,k=1}^{N}a_{jk}\,x_j\overline{x}_k\right|\leqslant M\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2. \tag{2.11}$$

Обозначая

$$x_j=(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}\gamma_j\ (1\leqslant j<+\infty),$$

$$a_{jk}=(1-|\alpha_j|^2)^{1/2-s_j}\,(1-|\alpha_k|^2)^{1/2-s_k}\,U_{jk},$$

$$(1\leqslant j,\ k<+\infty),$$

формулу (2.10) можем записать в виде

$$d\,(n;\ q)=\sum_{j,\,k=n+1}^{n+q}a_{jk}\,x_j\overline{x}_k\,. \tag{2.10'}$$

Далее, так как согласно условию (2.6) теоремы $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$, то принимая во внимание лемму 1.7 и следствие леммы 1.4 будем иметь

$$\sum_{j=n+1}^{n+q}|a_{jk}|\leqslant C\,(\delta,\ p)\sum_{j=n+1}^{n+q}\frac{(1-|\alpha_j|^2)(1-|\alpha_k|^2)}{|1-\overline{\alpha}_j\,\alpha_k|^2}\leqslant$$

$$\leqslant M\,(\delta,\ p)\,(1\leqslant k,\ q<+\infty,\ 0\leqslant n<+\infty),$$

где $M\,(\delta,\ p)=C\,(\delta,\ p)\left(p+2\log\dfrac{1}{\delta}\right)$.

Поэтому, применив оценку (2.11) к сумме (2.10′), мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_{n+q}(e^{i\vartheta}) - S_n(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \leqslant M(\delta, p) \sum_{j=n+1}^{n+q} (1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1} |\gamma_j|^2 \qquad (2.12)$$

для всех $0 \leqslant n < +\infty$ и $1 \leqslant q < +\infty$.

Но согласно условию $\{\gamma_j\}_1^\infty \in l^2\{\alpha_j\}$ теоремы ряд (2.4) сходящийся. Следовательно, из (2.12), во-первых, следует, что последовательность функций $\{S_n(e^{i\vartheta})\}_1^\infty$ сходится в себе по метрике $L_2(0,2\pi)$, и следовательно, имеет предельную функцию $S(e^{i\vartheta}) \in L_2(0,2\pi)$.

Более того, если в неравенстве (2.12) при фиксированном n $(0 \leqslant n < +\infty)$ перейти к пределу при $q \to +\infty$, то мы придем к следующим оценкам для разности $S(e^{i\vartheta}) - S_n(e^{i\vartheta})$ и $S(e^{i\vartheta})$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(e^{i\vartheta}) - S_n(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \leqslant M(\delta, p) \sum_{j=n+1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1} |\gamma_j|^2 \qquad (2.13)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \leqslant M(\delta, p) \|\gamma_\alpha\|^2. \qquad (2.14)$$

Но функции $S_n(z)$ $(n \geqslant 1)$ регулярны и ограничены в круге $|z| < 1$, и поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} S_n(z), & \text{при } z \in D^+ \\ 0, & \text{при } z \in \overline{D}^+ . \end{cases} \qquad (2.15)$$

Отсюда и из (2.13) переходом к пределу при $n \to +\infty$ мы заключаем следующее:

Ряд

$$f_0(z) = \lim_{n \to +\infty} S_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \Omega_j^*(z)$$

равномерно сходится в круге D^+ и его сумма в силу (2.1′) удовлетворяет интерполяционным условиям (2.1), т. е.

$$f_0^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu) = \gamma_\nu \quad (1 \leqslant \nu < +\infty).$$

Функция $f_0(z)$ представима интегралом Коши, поскольку после предельного перехода при $n \to +\infty$ наши формулы (2.15) принимают вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f_0(z), & \text{при } z \in D^+ \\ 0, & \text{при } z \in \overline{D}^+ . \end{cases} \qquad (2.15')$$

Это значит, что почти всюду на $|\zeta| = 1$ существуют граничные значения

$$f_0(\zeta) = \lim_{\rho \to 1-0} f_0(\rho\zeta),$$

равные $S(\zeta)$.

Наконец, так как таким образом, $f_0(e^{i\vartheta}) = S(e^{i\vartheta}) \in L_2(0, +\infty)$, то очевидно, имеем также $f_0(z) \in H_2$. Поэтому, и в силу (2.14) справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_0(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta = \|f_0\|^2 \leqslant M(\delta, p)\,\|\gamma_2\|.$$

Итак, оба утверждения теоремы совместно и полностью доказаны.

В заключение отметим, что результат, эквивалентный лишь утверждению 1° этой теоремы существенно иным методом, не позволяющим, однако, построения решения $f_0(z) \in H_2$ интерполяционной задачи с кратными узлами $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$, был установлен ранее (см. [6], теорему 3.2).

(в) В работе Шапиро и Шилдса ([3], [1], [2]), посвященной полному решению интерполяционной задачи в классах H_δ $(1 \leqslant \delta < +\infty)$, но с простыми узлами $\{z_j\}_1^\infty$, т. е. задачи

$$f(z_j) = \gamma_j \quad (1 \leqslant j < +\infty), \quad f(z) \in H_\delta,$$

в частности, был установлен следующий результат, формулировку которого мы приведем здесь, поскольку он существенно понадобится нам ниже.

Если последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ $(0 < |z_j| < 1)$ *отличных друг от друга чисел равномерно разделена, т. е., если* $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$, *то для любой функции* $f(z) \in H_2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2)\,|f(z_j)|^2 \leqslant C_1 \|f\|^2, \tag{2.16}$$

где C_1 *не зависит от* f.

Существенно опираясь на этот результат и на теорему 1, докажем сначала следующую общую теорему.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{z_j\}_1^\infty$ *различных точек круга* $|z| < 1$ *равномерно разделена, т. е.* $\{z_j\} \in \Delta$. *Тогда для любой функции* $f(z) \in H_2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2)^{2r-1}\,|f^{(r-1)}(z_j)|^2 \leqslant C_r \|f\|^2 \tag{2.17}$$

$$(1 \leqslant r < +\infty),$$

где C_r *не зависит от* f.

Доказательство. Согласно (2.16) утверждение (2.17) верно для $r = 1$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно провести рассуждение полной индукции. С этой целью, предполагая справедливость неравенств вида

$$L_r[f] \equiv \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|^2)^{2r-1}|f^{(r-1)}(z_j)|^2 \leqslant C_r \|f\|^2 \tag{2.18}$$

$$(1 \leqslant r \leqslant p),$$

докажем, что для суммы ряда $L_r[f]$ аналогичное неравенство справедливо также для значения $r = p+1$.

С этой целью построим новую последовательность чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, положив

$$\alpha_{p(j-1)+r} = z_j \quad (1 \leqslant j < +\infty,\ 1 \leqslant r \leqslant p), \tag{2.19}$$

заметив, что, очевидно

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2) = p\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2) < +\infty.$$

Легко видеть, что для определенной таким образом последовательности $\{\varepsilon_j\}_1^\infty$ будем иметь

$$p_j = p\ (1 \leqslant j < +\infty) \text{ и } s_{p(j-1)+r} = s_r = r \quad (1 \leqslant r \leqslant p,\ 1 \leqslant j < +\infty). \tag{2.20}$$

Кроме того, поскольку $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$, то имеем также

$$\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_k-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right| = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_j z_k}\right|^p \geqslant \delta^p \quad (k=1,2,\cdots),$$

т. е. $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$.

Покажем теперь, что совокупность условий (2.18) эквивалентна одному условию

$$L[f] \equiv \sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)^{2s_j-1}\,|f^{(s_j-1)}(\alpha_j)|^2 \leqslant C_p^*\|f\|^2, \tag{2.18'}$$

где C_p^* не зависит от f.

В самом деле, из (2.19), (2.20) и (2.18) мы имеем

$$L[f] = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{p}(1-|\alpha_{p(j-1)+r}|^2)^{2s_{p(j-1)+r}-1}\,|f^{(s_{p(j-1)+r}-1)}(\alpha_{p(j-1)+r})|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{p}(1-|z_j|^2)^{2r-1}|f^{(r-1)}(z_j)|^2 = \sum_{r=1}^{p}L_r^*(f) < +\infty.$$

Но ввиду $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ и (2.18'), согласно теореме 1 следует существование функции $F(z) \in H_2$, подчиненной интерполяционным условиям

$$F^{(s_k-1)}(\alpha_k) = f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ (1 \leqslant k < +\infty), \tag{2.21}$$

а также неравенству вида

$$\|F\|^2 \leqslant C\|f\|^2 \tag{2.21'}$$

и представимой в виде суммы ряда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ \Omega_k^*(z), \tag{2.22}$$

сходящегося равномерно в круге D^+ и в среднем на его границе $|z|=1$.

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$\omega(z) = f(z) - F(z), \tag{2.23}$$

заметив, что $\omega(z)\in H_2$, и кроме того, что в силу (2.21), (2.18') и (2.21') она удовлетворяет условиям

$$\omega^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0\ (1\leqslant k<+\infty),\quad \|\omega\|\leqslant C^*\|f\|. \tag{2.24}$$

С другой стороны, заметим далее, что по построению (2.19) последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, для любого $k>1$ точки $z=\alpha_k$ появляются в ней с одинаковой кратностью $p_k=p$ ($k\geqslant 1$). Поэтому, ассоциированная с $\{\alpha_j\}_1^\infty$ функция Бляшке $B(z)$ в рассматриваемом случае допускает представление

$$B(z)=\left\{\frac{\alpha_k-z}{1-\bar\alpha_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}^p\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{\alpha_j-z}{1-\bar\alpha_j z}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \tag{2.25}$$

и, таким образом, удовлетворяет условиям

$$B^{(r-1)}(\alpha_k)=0\ (1\leqslant r\leqslant p,\ 1\leqslant k<+\infty),$$
$$B^{(p)}(\alpha_k)\neq 0\ (1\leqslant k<+\infty). \tag{2.26}$$

Но в силу (2.20) легко видеть, что условия (2.26) могут быть записаны также в виде

$$B^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0\ (1\leqslant k<+\infty),\ B^{(p)}(\alpha_k)\neq 0 \tag{2.26'}$$
$$(1\leqslant k<+\infty).$$

Из (2.24) и (2.26') вытекает, что функция

$$g(z)=\omega(z)/B(z),\quad \|g\|=\|\omega\|\leqslant C^*\|f\| \tag{2.24''}$$

регулярна в круге D^+, и поскольку $\omega(z)\in H_2$, то имеем также $g(z)\in H_2$. Из (2.23) следует далее, что наша функция $f(z)\in H_2$ допускает представление вида

$$f(z)=F(z)+B(z)\,g(z),\quad z\in D^+, \tag{2.27}$$

где $g(z)\in H_2$.

Отметим теперь, что по интегральной формуле Коши

$$B^{(p)}(\alpha_j)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{B(\zeta)}{(\zeta-\alpha_j)^{p+1}}\,d\zeta\quad(1\leqslant j<+\infty).$$

Отсюда, в силу (2.25) и формулы Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar\alpha_j\zeta|^2}=(1-|\alpha_j|^2)^{-1},$$

мы получим оценку

$$|B^{(p)}(\alpha_j)|\leqslant\frac{p!}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar\alpha_j\zeta|^p\,|\zeta-\alpha_j|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{p!}{(1-|\alpha_j|)^{p-1}}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\bar\alpha_j\zeta|^2}\leqslant\frac{2^{p-1}\,p!}{(1-|\alpha_j|^2)^p} \tag{2.28}$$
$$(1\leqslant j<+\infty).$$

Далее из условий (2.26′), очевидно, следует что

$$\omega^{(p)}(\alpha_j) = B^{(p)}(\alpha_j)\, g(\alpha_j) \quad (1 \leqslant j < +\infty),$$

откуда и из (2.28) вытекает неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} |\omega^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant 2^{p-1}\, p! \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)\, |g(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\, p \cdot p! \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|^2)\, |g(z_j)|^2 \leqslant 2^{p-1}\, p \cdot p!\; C_1 \|g\|^2 \leqslant C_p^{**} \|f\|^2, \tag{2.29}$$

если учесть, что по построению (2.19), последовательность $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ есть p-кратное расширение $\{z_j\}_1^{\infty}$, а также неравенства (2.16) и (2.24″).

Заметим далее, что в силу первого из свойств (1.10) функций $\Omega_k^*(z)$, установленного в лемме 1.1, если при данном $j \geqslant 1, \alpha_j \neq \alpha_k$, то для функции $\Omega_k^*(z)$ точка $z = \alpha_j$ является нулем кратности $p_j = p+1$, иначе говоря

$$\Omega_k^{*(p)}(\alpha_j) = 0, \text{ при } \alpha_k \neq \alpha_j \tag{2.30}$$

$$(1 \leqslant k,\ j < +\infty).$$

Поэтому, пользуясь свойством (2.30), p-кратным дифференцированием разложения (2.22) получим

$$F^{(p)}(\alpha_j) = \sum_{\{\alpha_k\}=\alpha_j} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\, \Omega_k^{*(p)}(\alpha_j) \tag{2.31}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty),$$

причем, очевидно, что сумма, стоящая справа, содержит точно p слагаемых. Но ввиду способа (2.19) построения $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$, легко видеть, что при данном $j \geqslant 1$ для совокупности чисел $\{\alpha_k\} = \alpha_j$ мы имеем $p(j-1)+1 \leqslant k \leqslant pj$. Отсюда следует, что формулу (2.31) можно записать также в виде

$$F^{(p)}(\alpha_j) = \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\, \Omega_k^{*(p)}(\alpha_k) \tag{2.31′}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty).$$

С другой стороны, поскольку в рассматриваемом нами случае $p_k = p$ $(k \geqslant 1)$, то согласно оценке (1.44) леммы 1.8 будем иметь

$$|\Omega_k^{*(p)}(\alpha_k)| \leqslant \frac{C_p(\delta)}{(1-|\alpha_k|^2)^{p-s_k+1}}$$

$$(1 \leqslant k < +\infty),$$

где $C_p(\delta)$ не зависит от k.

Отсюда и из (2.31') следуют неравенства

$$|F^{(p)}(\alpha_j)| \leqslant C_p(\delta) \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} (1-|\alpha_k|^2)^{s_k-p-1} \; |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|$$

$$(1 \leqslant j < +\infty)$$

или, так как $\alpha_k = \alpha_j$ при $p(j-1)+1 \leqslant k \leqslant pj$, то и неравенства

$$(1-|\alpha_j|^2)^{p+1/2} \, |F^{(p)}(\alpha_j)| \leqslant$$

$$\leqslant C_p(\delta) \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} (1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/2} \, |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)| \tag{2.32}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty).$$

Применением неравенства Шварца и (2.32) получим далее

$$(1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} \, |F^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p^{*}(\delta) \sum_{k=p(j-1)+1}^{pj} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} \, |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2,$$

$$(1 \leqslant j < +\infty),$$

где $C_p^{*}(\delta) = p \; C_p(\delta)$. Следовательно

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} \, |F^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p^{*}(\delta) \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1} \, |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2 \leqslant C_p^{*}(\delta) \, C_p^{*} \|f\|^2 \tag{2.33}$$

ввиду (2.18').

Наконец, обращаясь к представлению (2.17) функции $f(z)$, в силу (2.29) и (2.33) мы заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_j|^2)^{2p+1} \, |f^{(p)}(z_j)|^2 \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2)^{2p+1} \, |f^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant C_p \|f\|^2,$$

так как, очевидно, что

$$|f^{(p)}(\alpha_j)|^2 \leqslant 2 \, \{|F^{(p)}(\alpha_j)|^2 + |\omega^{(p)}(\alpha_j)|^2\}$$

$$(1 \leqslant j < +\infty).$$

Итак, из оценок (2.18) величин $L_r(f) \, (1 \leqslant r \leqslant p)$ вытекает такая же оценка для величины $L_{p+1}(f)$. Этим завершается доказательство теоремы.

Отметим, что в существенно менее обозримой формулировке утверждение, эквивалентное теореме 2, было установлено ранее иным способом (см. [5] и [6]), с привлечением уже отмеченных выше общих результатов Н. К. Бари и Шура.

2.2 (а) Ниже мы предположим, что последовательность чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ удовлетворяет лишь условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2) < +\infty, \tag{2.34}$$

обеспечивающему существование функции Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}.$$

При этом, поскольку при любом j $(1 \leqslant j < +\infty)$ для $B(z) \not\equiv 0$ точка $z = \alpha_j$ является нулем конечной кратности $p_j \geqslant s_j$, то очевидно, что

$$B^{(s_j-1)}(\alpha_j) = 0 \ (1 \leqslant j < +\infty). \tag{2.35}$$

Вспомнив определение (1.12) системы рациональных функций $\{r_j(z)\}_1^\infty$

$$r_j(z) = \frac{(s_j-1)!\, z^{s_j-1}}{(1-\bar{\alpha}_j z)^{s_j}} \ (1 \leqslant j < +\infty),$$

заметим, что для любой функции $f(z) \in H_2$

$$(f, r_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{r_j(\zeta)}\, |d\zeta| =$$

$$= \frac{(s_j-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha_j)^{s_j}}\, d\zeta = f^{(s_j-1)}(\alpha_j) \ (1 \leqslant j < +\infty). \tag{2.36}$$

Из (2.36) и (2.35), в частности, имеем

$$(B, r_j) = 0 \ (1 \leqslant j < +\infty),$$

в то время как почти везде на $|\zeta| = 1$ $|B(\zeta)| = 1$. Это означает, что при условии (2.34) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в H_2.

Обозначим через $\lambda_2[\alpha_k]$ подкласс функций $\Phi(z)$ из H_2, для которых

$$\inf_{\{\sigma_n\} \in R} \int\limits_{|\zeta|=1} |\Phi(\zeta) - \sigma_n(\zeta)|^2 |d\zeta| = 0, \tag{2.37}$$

где R — множество всевозможных сумм вида

$$\sigma_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} r_j(z) \in H_2 \ (1 \leqslant n < +\infty), \tag{2.38}$$

а $\{c_j^{(n)}\}_1^n$ — произвольные постоянные. Поскольку система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в H_2, то имеет место строгое включение $\lambda_2\{\alpha_k\}\subset H_2$.

Обозначим далее через $N_2\{\alpha_j\}$ подкласс функций $\psi(z)$ из H_2, удовлетворяющих условиям

$$\psi^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0\ (1\leqslant j<+\infty). \tag{2.39}$$

Легко видеть, что класс $N_2\{\alpha_j\}$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$\psi(z)=B(z)\,G(z), \tag{2.40}$$

где $G(z)\in H_2$ произвольна.

В самом деле, (s_j-1)-кратным дифференцированием функций вида (2.40), в силу (2.35), мы заключаем, что они, будучи из класса H_2, удовлетворяют условиям (2.39). Обратно, если $\psi(z)\in N_2\{\alpha_k\}$, то из (2.39) и (2.35) следует, что $G(z)\equiv\psi(z)/B(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и принадлежит классу H_2.

Введенные нами классы $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$, очевидно, являются линейными подпространствами H_2. Покажем, что эти подпространства ортогональны, т. е. что для произвольной пары функций

$$\Phi(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\}\ \text{и}\ \psi(z)\in N_2\{\alpha_j\}$$

$$(\Phi,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Phi(\zeta)\,\overline{\psi(\zeta)}\,|d\zeta|=0. \tag{2.41}$$

Действительно, в силу формулы (2.36)

$$(\psi,r_j)=\psi^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0\ (1\leqslant j<+\infty),$$

и поэтому имеем также

$$(\psi,\sigma_n)=0 \tag{2.41'}$$

для любой суммы σ_n вида (2.36).

Если $\{\sigma_n(z)\}_1^\infty$ выбрана так, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi-\sigma_n\|=0,$$

то предельным переходом при $n\to+\infty$ из (2.41′) будет следовать (2.41).

Из свойства (2.41) ортогональности классов $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$ непосредственно вытекает следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Если функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — из класса $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и*

$$\Phi_1^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\Phi_2^{(s_j-1)}(\alpha_j)\ (1\leqslant j<+\infty),$$

то

$$\Phi_1(z)\equiv\Phi_2(z).$$

В самом деле, положив

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)$$

с одной стороны, очевидно, что будем иметь $\Phi(z) \in \lambda_2\{\alpha_j\}$. С другой стороны, поскольку $\Phi^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0$ $(1 \leq j < +\infty)$, то одновременно $\Phi(z) \in N_2\{\alpha_j\}$. Наконец, отсюда в силу (2.41) вытекает, что

$$(\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 0,$$

т. е. $\Phi(z) \equiv 0$, и теорема доказана.

(б) Докажем теперь важную теорему о разбиении пространства H_2. Отметим, что несколько иной способ по существу такого же разбиения класса H_2 был предложен нами ранее в работе [9].

Теорема 4. *Пространство H_2 есть прямая сумма ортогональных подпространств $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$, т. е.*

$$H_2 = \lambda_2\{\alpha_j\} \oplus N_2\{\alpha_j\}.$$

Иначе говоря, класс H_2 совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = \Phi(z) + \psi(z), \quad |z| < 1, \tag{2.42}$$

где $\Phi(z) \in \lambda_2\{\alpha_j\}$ и $\psi(z) \in N_2\{\alpha_j\}$.

При этом

$$\|f\|^2 = \|\Phi\|^2 + \|\psi\|^2. \tag{2.43}$$

Доказательство. Что любая функция $f(z)$ вида (2.42) — из класса H_2, очевидно. Покажем обратное, что любая функция $f(z) \in H_2$ допускает представление типа (2.42).

Пусть $\{\varphi_j(z)\}_1^\infty$ — ортогонализация системы функций $\{r_j(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$ по методу Шмидта* .Тогда

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \cdots),$$

причем для любого $k \geq 1$ будем иметь

$$\varphi_k(z) = \sum_{j=1}^{k} d_j^{(k)} r_j(z), \quad d_k^{(k)} \neq 0. \tag{2.44}$$

Для данной функции $f(z) \in H_2$ введем в рассмотрение ее коэффициент Фурье $(f, \varphi_k)(k \geq 1)$, по ортогональной системе $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$. Тогда для них справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Отсюда легко следует, что ряд

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k(z) \tag{2.45}$$

* Это известная система Мальмквиста-Такенака и может быть записана в явной форме [9].

сходится в среднем на окружности $|z|=1$ и равномерно в круге D^-, причем

$$(\Phi, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad (1 \leqslant k < +\infty). \tag{2.46}$$

Ввиду сходимости ряда (2.45) к граничным значениям функции $\Phi(z)$ на окружности $|z|=1$, принимая также во внимание определение (2.37) класса $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и линейные соотношения (2.44), мы приходим к заключению, что $\Phi(z) \in \lambda_2\{\alpha_j\}$.

Но из (2.46), вновь пользуясь соотношениями (2.44), в силу формул (2.46) мы получим

$$(f-\Phi, r_k) = f^{(s_k-1)}(\alpha_k) - \Phi^{(s_k-1)}(\alpha_k) = 0$$
$$(1 \leqslant k < +\infty).$$

Поэтому, положив $\psi(z) = f(z) - \Phi(z)$, мы заключаем, что $\psi(z) \in N_2\{\alpha_j\}$, и тем самым, требуемое представление (2.42) установлено. Наконец, что касается равенства (2.43), то оно непосредственно следует из (2.42) и свойства (2.41) ортогональности подпространств $\lambda_2\{\alpha_j\}$ и $N_2\{\alpha_j\}$.

В добавление отметим, *что функции $f(z) \in H_2$ допускают представление вида* (2.42) *единственным образом.* Это непосредственно вытекает из теоремы единственности 3.

(в) Наконец, докажем заключительную теорему данной статьи, содержащую полное решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2. Для компактной формулировки и доказательства теоремы введем еще одно определение.

Для данной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ на функциях класса H_2 определим линейный оператор T_2, положив

$$T_2(f) = \{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty, \quad f(z) \in H_2. \tag{2.47}$$

Как уже отмечалось выше, если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ имеет ограниченную кратность, т. е. если $\sup\limits_{j\geqslant 1}\{s_j\} = \sup\limits_{j\geqslant 1}\{p_j\} = p < +\infty$, то T_2 отображает H_2 на пространство последовательностей, стремящихся к нулю. Ниже мы установим критерий для совпадения двух счетномерных пространств — пространства $T_2[H_2]$ всех счетномерных последовательностей типа (2.47) и гильбертового пространства l^2.

Теорема 5. *Пусть последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ имеет ограниченную кратность*

$$\sup_{j\geqslant 1}\{p_j\} = p < +\infty.$$

Тогда условие

$$\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p \tag{2.48}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы имело место

$$T_2[H_2] = l^2. \tag{2.49}$$

Доказательство. Установим сначала достаточность условия (2.48) теоремы. Заметим сперва, что для любого элемента $w = \{w_j\}_1^\infty \in l^2$, положив

$$\gamma_j = (1-|\alpha_j|^2)^{1/2-s_j}\, w_j \quad (1 \leqslant j < +\infty),$$

мы можем утверждать, что элемент $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty \in l^2\{\alpha_j\}$. Но тогда согласно утверждению 1° теоремы 1 существует функция $f_0(z) \in H_2$ такая, что

$$f_0^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \gamma_j \quad (1 \leqslant j < +\infty)$$

или, что то же самое, мы будем иметь $T_2(f_0) = \{w_j\}_1^\infty = w \in l^2$.

Иначе говоря, при условии $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ имеет место включение $T_2[H_2] \supset l^2$. Чтобы установить обратное включение $T_2[H_2] \subset l^2$, и, тем самым, утверждение (2.49) теоремы, нам достаточно доказать, что для любой функции $f(z) \in H_2$, $T_2[f] \subset l^2$, т. е. что

$$\Phi[f] \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}\, |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2 < +\infty. \tag{2.50}$$

С этой целью, обозначим через $\{z_j\}_1^\infty$ все отличные между собой точки из последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$. Тогда, как уже отмечалось в § 1, последовательность точек $\{z_j\}_1^\infty \subset \{\alpha_j\}_1^\infty$ равномерно разделена, т. е. мы будем иметь $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta$.

Пусть для данного целого $j\ (1 \leqslant j < +\infty)$ целое число $q_j \geqslant 1$ означает кратность появления z_j во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$\sup_{j\geqslant 1}\{q_j\} = \sup_{j\geqslant 1}\{p_j\} = p;$$

и поэтому, согласно теореме 2 справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{q_j} (1-|z_j|^2)^{2r-1}\, |f^{(r-1)}(z_j)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{p} (1-|z_j|^2)^{2r-1}\, |f^{(r-1)}(z_j)|^2 = \sum_{r=1}^{p} L_r(f) < +\infty. \tag{2.51}$$

Теперь для каждого целого $j\ (\leqslant j < +\infty)$ обозначим через $\{K_j\}$ множество тех индексов $k\ (1 \leqslant k < +\infty)$, для которых

$$\alpha_k = z_j, \text{ при } k \in \{K_j\}.$$

Непосредственно видно, что

$$\{K_{j_1}\} \cap \{K_{j_2}\} = \varnothing \ (j_1 \neq j_2), \quad \bigcup_{j=1}^{\infty}\{K_j\} = \{k\}_1^\infty,$$

а также то, что когда k пробегает все множество $\{K_j\}$, соответствующая ему величина s_k однократно пробегает совокупность чисел $(1, 2, \cdots, q_j)$.

Принимая во внимание эти замечания, мы убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\Phi[f]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\{K_j\}}(1-|\alpha_k|^2)^{2s_k-1}\,|f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^2=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\{K_j\}}(1-|z_j|^2)^{2s_k-1}\,|f^{(s_k-1)}(z_j)|^2= \tag{2.52}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{q_j}(1-|z_j|^2)^{2r-1}\,|f^{(r-1)}(z_j)|^2.$$

Из (2.51) и (2.52) следует (2.50), и, тем самым, достаточность доказана.

Переходим к доказательству необходимости условия (2.48) теоремы, в предположении, что $T_2[H_2]=l^2$.

Покажем сначала, что тогда, во-первых, необходимо, чтобы наша последовательность $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ удовлетворяла условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j|^2)<+\infty. \tag{2.53}$$

Рассмотрим последовательность чисел

$$w_j=\begin{cases}1, \text{ при } \alpha_j=\alpha_1\\ 0, \text{ при } \alpha_j\neq\alpha_1\end{cases}\quad(1\leqslant j<+\infty),$$

заметив, что в ней лишь конечное число членов отлично от нуля, поскольку кратность появления α_1 в $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ равна $p_1\leqslant\sup\limits_{j\geq1}\{p_j\}=p<+\infty$.

Следовательно, если ввести элемент $w=\{w_j\}_1^{\infty}\in l^2$, то предположение (2.49) приводит нас к заключению о существовании функции $f_*(z)\in H_2$, подчиненной условиям

$$f_*^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\begin{cases}\gamma_j\neq0, & \text{при } \alpha_j=\alpha_1\\ 0, & \text{при } \alpha_j\neq\alpha_1\end{cases} \tag{2.54}$$

$$(1\leqslant j<+\infty).$$

Пусть $\{\beta_j\}_1^{\infty}$ — последовательность всех нулей функции $f_*(z)\not\equiv0$, пронумерованных с учетом их кратности, так что в ней каждый нуль появляется столько раз, какова его кратность. Поэтому, очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\beta_j|^2)<+\infty.$$

Но ввиду (2.54) последовательность

$$\{\alpha_j,\ \alpha_j\neq\alpha_1\}_1^{\infty}$$

пронумерованных тем же способом, вообще говоря, есть лишь часть $\{\beta_j\}_1^\infty$, и, таким образом, необходимость условия (2.53) установлена.

Покажем теперь, что вообще, если $T_2[H_2] \subset l^2$, то T_2 — замкнутый оператор. Действительно, предположим, что

$$\{f_n(z)\}_1^\infty \subset H_2,\ f(z) \in H_2, \qquad \lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0, \tag{2.55}$$

и существует элемент $w = \{w_j\}_1^\infty \in l^2$ такой, что в метрике l^2

$$T_2(f_n) = \{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} f_n^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty \to w \in l^2,$$

т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} f_n^{(s_j-1)}(\alpha_j) - w_j|^2 \right\} = 0. \tag{2.56}$$

Но из (2.55) непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^{(s_j-1)}(\alpha_j) = f^{(s_j-1)}(\alpha_j) \quad (1 \leqslant j < +\infty),$$

и поэтому, из (2.56) заключаем, что

$$w_j = (1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} f^{(s_j-1)}(\alpha_j) \quad (1 \leqslant j < +\infty).$$

Это означает, что

$$T_2(f) = \{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} f^{(s_j-1)}(\alpha_j)\} = \{w_j\}_1^\infty,$$

т. е. $T_2(f) = w$, иными словами оператор T_2 действительно замкнут и следовательно, согласно теореме о замкнутом графике (см., например, [10], стр. 147—150) он также ограничен.

Итак, T_2—ограниченный оператор, осуществляющий отображение H_2 на l^2. Но из теоремы 4 следует, что $T_2[H_2] = T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}]$, так как любая функция $f(z) \in H_2$ допускает представление (2.42),

$$f(z) = \Phi(z) + \psi(z); \ \Phi \in \lambda_2\{\alpha_j\},\ \psi \in N_2\{\alpha_j\},$$

и поэтому, ввиду определения (2.39) класса $N_2\{\alpha_j\}$, будем иметь $T_2(f) = T_2(\Phi)$.

Поэтому, из $T_2[H_2] = l^2$ следует также $T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}] = l^2$, т. е. что ограниченный на $\lambda_2\{\alpha_j\} \subset H_2$ оператор T_2 отображает $\lambda_2\{\alpha_j\}$ на l^2. Но это отображение уже взаимнооднозначное.

Действительно, поскольку $T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}] = l^2$, то для любого элемента $w = \{w\}_1^\infty \in l^2$ существует функция $\Phi(z) \in \lambda_2\{\alpha_j\}$ такая, что

$$T_2(\Phi) = \{(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2} \Phi^{(s_j-1)}(\alpha_j)\}_1^\infty = w.$$

В силу теоремы единственности 3, в классе $\lambda_2\{\alpha_j\}$, функция $\Phi(z)$ со свойством $T_2(\Phi) = w$ для произвольного элемента $w \in l^2$ будет единственной. Пользуясь теоремой об открытых отображениях, можем утверждать, что существует ограниченный обратный к T_2 оператор T_2^{-1} такой, что $T_2^{-1}[l^2] = \lambda_2\{\alpha_j\}$.

Иначе говоря, существует постоянная $M>0$ такая, что для любого элемента $w=\{w_j\}\in l^2$ можно указать лишь одну функцию $\Phi(z)\in \in \lambda_2\{\alpha_j\}$ такую, что $\Phi(z)=T_2^{-1}(w)$ и

$$\|\Phi\|\leqslant M\|w\|. \tag{2.57}$$

Теперь мы уже в состоянии завершить доказательство необходимости условия $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_p$ теоремы.

С этой целью заметим сначала, что для данного значения $k\,(1\leqslant \leqslant k<+\infty)$, очевидно, существует лишь один индекс $j=j_k$ такой, что

$$\alpha_{j_k}=\alpha_k \text{ и } s_{j_k}=1. \tag{2.58}$$

Если положить далее

$$w_j^{(k)}=\begin{cases}0, \text{ при } j\neq j_k\\ 1, \text{ при } j=j_k\end{cases}\quad (1\leqslant j<+\infty), \tag{2.59}$$

то, очевидно, что элемент $w^{(k)}=\{w_j^{(k)}\}_1^\infty\in l^2$, причем $\|w^{(k)}\|=1$.

Поскольку $T_2[H_2]=T_2[\lambda_2\{\alpha_j\}]=l^2$, то в силу того, что $w^{(k)}= =\{w_j^{(k)}\}\in l^2$, существует единственная функция $\Phi_k(z)\in\lambda_2\{\alpha_j\}$ такая что

$$(1-|\alpha_j|^2)^{s_j-1/2}\,\Phi_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=w_j^{(k)}\ (1\leqslant j<+\infty).$$

Отсюда и из (2.58) и (2.59), в частности следует, что

$$\Phi_k(\alpha_k)=(1-|\alpha_k|^2)^{-1/2},$$

$$\Phi_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0, \text{ при } \alpha_j\neq\alpha_k. \tag{2.60}$$

Рассмотрим, наконец, функции

$$F_{nk}(z)=\Phi_k(z)\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{n}\frac{1-\bar\alpha_j z}{\alpha_j-z}\quad (n>j_k), \tag{2.61}$$

заметив, что они регулярны в круге D^+ и, очевидно, из класса H_2. При этом, мы будем иметь

$$\|F_{nk}\|=\|\Phi_k\|\leqslant M\|w^{(k)}\|=M\ (n>j_k). \tag{2.62}$$

Но представляя функцию $F_{nk}(z)$ интегралом Коши

$$F_{nk}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{F_{nk}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\ (|z|<1)$$

и применив неравенства Шварца, мы получим в силу (2.62)

$$|F_{nk}(z)|\leqslant\|F_{nk}\|\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-z\bar\zeta|^2}\right\}^{1/2}\leqslant\frac{M}{(1-|z|^2)^{1/2}}\ (|z|<1),\ n>j_k.$$

Поэтому, в силу (2.60) и (2.61) будем иметь

$$\prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{n} \left| \frac{1-\bar{\alpha}_j \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k} \right| \leqslant M \ (n > j_k, \ 1 \leqslant k < +\infty).$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$\inf_{k \geq 1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| \right\} \geqslant \frac{1}{M} > 0.$$

Наконец, ввиду предположения $\sup\limits_{j \geq 1} \{p_j\} = p < +\infty$, это и означает, что $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$. Таким образом, теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что в связи с вышеизложенным, естественно ставить некоторые задачи, решение которых представляет несомненный интерес.

1. Достаточно ли условие $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ для того, чтобы система рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ являлась бы базисом в своем замыкании, т. е. в классе $\lambda_2 \{\alpha_j\}$?

2. Исследовать вопросы интерполяции с кратными узлами $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta_p$ в классах Харди H_δ $(0 < \delta < +\infty)$.

3. Распространимы ли результаты статьи на случай, когда узлы $\{\alpha_j\}_1^\infty \in \Delta$, но их кратности неограничены: $\sup\limits_{j \geq 1} \{p_j\} = +\infty$?

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11.VI.1974

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Բիօրթոգոնալ սիստեմներ և սահմանափակ բազմապատիկության հանգույցներով ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը H_2 դասում *(ամփոփում)*

Դիցուք $\{\alpha_j\}_1^\infty$*-ը* $(0 < |\alpha_j| < 1)$ *և* $\{\gamma_j\}_1^\infty$*-ը կոմպլեքս թվերի կամայական հաջորդականություններ են և* $s_k \geq 1$, *հանդիսանում է* $\{\alpha_j\}_1^k$ *հատվածում* α_k*-ի հանդես գալու կարգը։*

Դիտարկվում է $f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = \gamma_j \ (j=1, 2, \cdots)$ *ինտերպոլյացիոն պայմաններին բավարարող* H_2 *դասի* $f(z)$ *ֆունկցիայի գոյությունն ապահովող հայտանիշի բացահայտման խնդիրը* $\{\alpha_j\}_1^\infty$ *և* $\{\gamma_j\}_1^\infty$ *հաջորդականությունների համար և կառուցվում է ապարատ այս տիպի խնդիրների լուծումների ներկայացման համար։*

Ներկա հոդվածում առաջարկվում է այս խնդրի լուծմանը տրվող նոր անալիտիկ մեթոդ-

M. M. DJRBASHIAN. *Biorthogonal systems and the solution of interpolation problem in the class* H_2 *with knots of bounded multiplicity* (summary)

Let $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 < |\alpha_j| < 1)$ and $\{\gamma_j\}_1^\infty$ be arbitrary sequences of complex numbers and $s_k \geq 1$ be the multiplicity of α_k in the segment $\{\alpha_j\}_1^k$.

The present paper consideres the problem of finding conditions on $\{\alpha_j\}_1^\infty$ and $\{\gamma_j\}_1^\infty$ under which a function $f(z) \in H_2$ satisfying the interpolation conditions

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j,\ j=1,2,\cdots,$$

happens to exist.

A new analytical method is proposed giving the complete solution of this problem. An apparatus for representation of solutions of this kind of problems is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
2. *P. Duren.* Theory of H^p speces, Ac. Press, New York and London, 1970.
3. *H. Shapiro* and *A. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
4. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H^2, Michigan Math., J., 14, 1967, 65—70.
5. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H^2, II Pacific, J. Math., 27, 1968, 607—610.
6. *B. L. Chalmers.* Some interpolation problem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.
7. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Ученые записки Московского университета, т. 48, „Математика", 1951, 69—107.
8. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
9. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
10. *Н. И. Ахиезер* и *И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., Изд. „Наука", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Э. А. МИРЗАХАНЯН

ПОСТРОЕНИЕ СТЕПЕНИ ОТОБРАЖЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теория степени отображения в гильбертовом пространстве была первоначально развита Лере и Шаудером [1]. Свое дальнейшее развитие и приложения она нашла в работах Браудера [2], М. А. Красносельского [3], Р. Л. Фрум-Кеткова [4] и других авторов.

В заметке [5] были кратко изложены результаты, позволяющие распространить идеи Лере и Шаудера на класс K_0 отображений гильбертова пространства, введенный в [6], [7]. Здесь дается подробное изложение результатов заметки [5].

Предложение 1. *Пусть f: $M \to H$ — отображение класса K_0 и $X \subset M$ — компактное множество. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такое, содержащееся в M открытое множество $U \supset X$ и такое число $\delta > 0$, что если $x, y \in U$, и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$, то выполнено соотношение*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|, \tag{1}$$

где $\lambda_f(x)$ — терминальная производная отображения f.

Доказательство. Так как функция $\lambda_f(x)$ непрерывна, то для любой точки $x_0 \in X$ существует такая окрестность $V(x_0) \subset M$ точки x_0, что $|\lambda_f(x) - \lambda_f(x_0)| < \varepsilon/2$ при $x \in V(x_0)$. Далее для любой точки $x_0 \in X$ существует такое конечномерное подпространство $L(x_0) \subset H$, такая окрестность $W(x_0) \subset M$ точки x_0 и такое число $\delta(x_0) > 0$, что если $x, y \in W(x_0)$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством $L(x_0)$ не меньше $\pi/2 - \delta(x_0)$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|x - y\|.$$

Для каждой точки $x_0 \in X$ выберем такое положительное число $r(x_0)$, что $2r(x_0)$-окрестность точки x_0 содержится в множестве $V(x_0) \cap \cap W(x_0)$, и обозначим $r(x_0)$-окрестность точки x_0 через $U(x_0)$.

Множества $U(x_0)$ $(x_0 \in X)$ образуют открытое покрытие компактного множества X. Следовательно, существует такое конечное множество точек $x_1, x_2, \cdots, x_s \in X$, что $X \subset \tilde{U}$, где

$$\tilde{U} = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \cdots \cup U(x_s).$$

Положим

$$\delta = \min\left(\delta(x_1), \delta(x_s), \cdots, \delta(x_s), \frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда, если (при некотором $k=1, 2, \cdots, s$) мы имеем $x, y \in W(x_k)$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством $L(x_k)$ не меньше $\pi/2-\delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_k)(x-y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\|. \tag{2}$$

Обозначим через $\tilde{r}$ наименьшее из чисел $r(x_1), r(x_2), \cdots, r(x_s)$. Далее, через r обозначим такое положительное число, что $9r<\tilde{r}$ и при этом r-окрестность U множества X содержится в $\bar{U}$. Так как множество X компактно, то существует такое конечномерное подпространство L, что множество X содержится в r-окрестности подпространства L. При этом можно предполагать, что подпространство L содержит все подпространства $L(x_1), \cdots, L(x_s)$. Мы покажем, что L, U и δ являются искомыми.

Пусть $x, y \in U$, причем $x \neq y$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\pi/2-\delta$. Пусть, далее, $x-y=z+w$, где $z \in L$, $w \perp L$. Тогда

$$\|w\| > \|x-y\| \cos\delta \geqslant \|x-y\| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\|x-y\|. \tag{3}$$

Обозначим через π ортогональное проектирование пространства H на ортогональное дополнение подпространства L.

Так как $x, y \in U$, и потому каждая из точек x, y лежит в r-окрестности множества X и, значит, в $2r$-окрестности подпространства L, то $\|\pi(x)\| \leqslant 2r$, $\|\pi(y)\|<2r$. Следовательно

$$\|w\|=\|\pi(x-y)\|=\|\pi(x)-\pi(y)\| \leqslant \|\pi(x)\|+\|\pi(y)\|<4r,$$

и потому (в силу (3))

$$\|x-y\| \leqslant 2\|w\|<8r. \tag{4}$$

Так как $x \in U$, то найдется такая точка $x' \in X$, что $\|x-x'\|<r$. Далее, так как $X \subset \bar{U}$, то найдется такое число $k\ (=1, 2, \cdots, s)$, что $x' \in U(x_k)$, т. е. $\|x'-x_k\|<r(x_k)$. Вспоминая, что

$$9r<\tilde{r}=\min\,(r(x_1), r(x_2), \cdots, r(x_s)) \leqslant r(x_k),$$

находим (см. (4)):

$$\|x-x_k\| \leqslant \|x-x'\|+\|x'-x_k\|<r+r(x_k)<9r+r(x_k)<2r(x_k),$$

$$\|y-x_k\| \leqslant \|y-x\|+\|x-x'\|+\|x'-x_k\|<8r+r+r(x_k)<2r(x_k).$$

Таким образом, обе точки x, y лежат в $2r(x_k)$-окрестности точки x_k, и потому $x, y \in V(x_k) \cap W(x_k)$. Отсюда вытекает (поскольку угол между вектором $x-y$ и подпространством $L \supset L(x_k)$ не меньше $\pi/2-\delta$), что выполнено неравенство (2). Кроме того, так как $x \in V(x_k)$, то

$$|\lambda_f(x) - \lambda_f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Следовательно, в силу (2) и (5)

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x-y)\| \leqslant \|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_k)(x-y)\| +$$

$$+ \|(\lambda_f(x) - \lambda_f(x_k))(x-y)\| < \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\|,$$

т. е. справедливо неравенство (1). Таким образом, предложение 1 доказано.

Перейдем теперь к определению степени отображения. Прежде всего введем следующее обозначение. Пусть $L \subset H$ — конечномерное подпространство, $a \in L$ и h — положительное число. Через $E_{a,h}(L)$ будем обозначать шар радиуса h с центром a, ортогональный подпространству L. Иначе говоря, $E_{a,h}(L)$ есть множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих условиям $x - a \perp L$ и $\|x - a\| \leqslant h$.

Предложение 2. *Пусть $f\colon M \to H$ — отображение класса K_0 и $X \subset M$ — компактное множество, переходящее при отображении f в одну точку $f(X) = b \in H$. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X отлична от нуля. Тогда существует такое конечномерное подпространство L, содержащее точку b, такая окрестность $V \subset M$ компакта X и такое положительное число h, что для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L$ и любой точки $a \in \overline{V} \cap L^*$ множество $f(E_{a,h}(L^*))$ пересекается с L^* ровно в одной точке.*

Доказательство. Так как функция $\lambda_f(x)$ непрерывна и отлична от нуля на компакте X, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $|\lambda_f(x)| > 4\varepsilon$ на X. Следовательно, неравенство $|\lambda_f(x)| > 2\varepsilon$ определяет открытое множество $G \subset M$, содержащее X.

Выберем L, U и δ как указано в предложении 1. Пусть, далее, $h > 0$ — такое число, что $2h$-окрестность множества X содержится в $G \cap U$. Через V обозначим σ-окрестность множества X, где число σ меньше чем h и настолько мало, что $\|f(x) - b\| < h\varepsilon$ для любой точки $x \in \overline{V}$ (напомним, что множество X компактно и $f(X) = b$). Мы можем при этом предполагать (заменив, если нужно, L бо́льшим подпространством), что $b \in L$ и, кроме того, множество X находится в $\sigma/4$-окрестности подпространства L.

Пусть $L^* \supset L$. Докажем, что для любой точки $a \in \overline{V} \cap L^*$ пересечение $L^* \cap f(E_{a,h}(L^*))$ состоит не больше, чем из одной точки. Допустим противное, т. е. предположим, что найдется точка $a \in \overline{V} \cap L^*$, для которой это пересечение содержит более одной точки. Иными словами, существуют такие точки $x, y \in H$, что выполнены соотношения

$$x-a\perp L^*,\ y-a\perp L^*,\ \|x-a\|\leqslant h,\ \|y-a\|\leqslant h, \tag{6}$$
$$f(x)\in L^*,\ f(y)\in L^*,$$

причем $x\neq y$. Так как $a\in\overline{V}$, то a лежит в h-окрестности множества X, и потому, в силу (6) обе точки x, y лежат в $2h$-окрестности множества X, т. е. $x, y\in G\cap U\subset U$. Далее, в силу (6), $x-y\perp L^*$, так что $x-y\perp L$, и потому справедливо соотношение (1).

Из (6) следует, что $f(x)-f(y)\in L^*$, и потому имеем $(x-y)(f(x)-f(y))=0$ (так как $x-y\perp L^*$). Следовательно

$$|\lambda_f(x)|\cdot\|x-y\|^2=|\lambda_f(x)(x-y)(x-y)|=|(x-y)(f(x)-f(y)-$$
$$-\lambda_f(x)(x-y))|\leqslant\|x-y\|\cdot\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x)(x-y)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|x-y\|\cdot\varepsilon\|x-y\|=\varepsilon\|x-y\|^2,$$

откуда вытекает, что $|\lambda_f(x)|\leqslant\varepsilon$. Но тогда (поскольку $x\in G$) $2\varepsilon<|\lambda_f(x)|\leqslant\varepsilon$, что противоречиво. Полученное противоречие и доказывает, что пересечение $L^*\cap f(E_{a,h}(L^*))$ содержит не более одной точки.

Остается доказать, что это пересечение непусто (для любой точки $a\in\overline{V}\cap L^*$). Пусть

$$b-f(a)=x'+z', \tag{7}$$

где $x'\perp L^*$, $z'\in L^*$. Мы имеем: $\|x'\|\leqslant\|b-f(a)\|<h\varepsilon$.

Положим

$$q_1=\frac{x'}{\lambda_f(a)},$$

тогда

$$\|q_1\|=\frac{\|x'\|}{|\lambda_f(a)|}\leqslant\frac{\|x'\|}{2\varepsilon}<\frac{h\varepsilon}{2\varepsilon}=\frac{h}{2}.$$

Кроме того, $q_1\perp L^*$, и потому $a+q_1\in E_{a,h}(L^*)$. Далее

$$\|f(a+q_1)-f(a)-x'\|=\|f(a+q_1)-f(a)-\lambda_f(a)\times$$
$$\times((a+q_1)-a)\|\leqslant\varepsilon\|(a+q_1)-a\|=\varepsilon\|q_1\|<\frac{\varepsilon h}{2}.$$

Таким образом, положив $f(a)+x'=b_1$, мы получим

$$\|f(a+q_1)-b_1\|<\frac{\varepsilon h}{2},$$

причем, в силу (7), $b_1=b-z'\in L^*$. Отсюда следует, что точка $f(a+q_1)$ отстоит от плоскости L^* менее чем на $\varepsilon h/2$.

Пусть уже построены такие векторы $q_1, q_2, \cdots, q_k\in H$, что выполнены соотношения

$$\|q_k\|<\frac{h}{2^k},\ \|q_1+q_2+\cdots+q_k\|<h\left(1-\frac{1}{2^k}\right),\ q_1+q_2+\cdots+q_k\perp L^*, \tag{8}$$

$$\|f(a+q_1+q_2+\cdots+q_k)-b_k\|<\frac{\varepsilon h}{2^k},\quad \text{где}\quad b_k\in L^*. \tag{9}$$

Из (8) следует, что $\|(a+q_1+q_2+\cdots+q_k)-a\|<h$, и потому $a+q_1+\cdots+q_k\in E_{a,h}(L^*)$. Пусть

$$-f(a+q_1+q_2+\cdots+q_k)+b_k=x_k+z_k, \tag{10}$$

где $x_k\perp L^*$, $z_k\in L^*$. Тогда (в силу (9))

$$\|x_k\|\leqslant\|f(a+q_1+q_2+\cdots+q_k)-b_k\|<\frac{\varepsilon h}{2^k}. \tag{11}$$

Положим

$$q_{k+1}=\frac{x_k}{\lambda_f(a+q_1+\cdots+q_k)}. \tag{12}$$

Так как $a\in\overline{V}$, то точка a находится в h-окрестности множества X и потому точка $a+q_1+\cdots+q_k$ находится в $2h$-окрестности множества X (см. (8)). Следовательно, $a+q_1+\cdots+q_k\in G$, т. е.

$$|\lambda_f(a+q_1+\cdots+q_k)|>2\varepsilon.$$

Отсюда находим

$$\|q_{k+1}\|=\frac{\|x_k\|}{|\lambda_f(a+q_1+q_2+\cdots+q_k)|}<\frac{\|x_k\|}{2\varepsilon}<\frac{\varepsilon h}{2^k}\cdot\frac{1}{2\varepsilon}=\frac{h}{2^{k+1}} \tag{13}$$

(см. (11)). Таким образом

$$\|q_1+\cdots+q_k+q_{k+1}\|\leqslant\|q_1+\cdots+q_k\|+\|q_{k+1}\|<h\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+$$
$$+\frac{h}{2^{k+1}}=h\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Кроме того, $q_{k+1}\perp L^*$ (так как $x_k\perp L^*$), и потому $q_1+\cdots+q_k+$ $+q_{k+1}\perp L^*$ (см. (8)). Мы видим, что при замене k на $k+1$ соотношение (8) остается справедливым. Далее, так как весь шар $E_{a,h}(L^*)$ находится в $2h$-окрестности множества X (и, значит, в U), то

$$\|f(a+q_1+\cdots+q_k+q_{k+1})-f(a+q_1+\cdots+q_k)-$$
$$-\lambda_f(a+q_1+\cdots+q_k)\cdot q_{k+1}\|\leqslant\varepsilon\|q_{k+1}\|,$$

т. е. (см. (12), (13))

$$\|f(a+q_1+\cdots+q_{k+1})-f(a+q_1+\cdots+q_k)-x_k\|<\frac{\varepsilon h}{2^{k+1}}.$$

В силу (10) это соотношение можно переписать в виде

$$\|f(a+q_1+\cdots+q_{k+1})-(b_k-z_k)\|<\frac{\varepsilon h}{2^{k+1}}.$$

Так как $b_k\in L^*$ (см. (9)) и $z_k\in L^*$, то $b_k-z_k\in L^*$. Таким образом, положив $b_{k+1}=b_k-z_k$, мы найдем, что соотношения (9) остаются справедливыми при замене k на $k+1$.

Проведенная индукция показывает, что можно выбрать такие последовательности $q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots$ и $b_1, b_2, \cdots, b_k, \cdots$, которые при всех $k = 1, 2, \cdots$ удовлетворяют соотношениям (8), (9).

Соотношение (8) показывает, что ряд $q_1 + q_2 + \cdots + q_r + \cdots$ сходится. Обозначим через q сумму этого ряда. Тогда, согласно (8), $\|q\| < h$ и $q \perp L^*$. Следовательно, $a + q \in E_{a, h}(L^*)$, и потому $f(a + q) \in f(E_{a, h}(L^*))$. В силу непрерывности

$$f(a + q) = \lim_{k \to \infty} f(a + q_1 + \cdots + q_k) = \lim_{k \to \infty} b_k$$

(см. (9)), и потому $f(a + q) \in L^*$ (так как $b_k \in L^*$ при всех k, см. (9)). Итак, $f(a + q)$ принадлежит пересечению $L^* \cap f(E_{a, h}(L^*))$, т. е. это пересечение непусто. Тем самым предложение 2 полностью доказано.

Сформулированное предложение позволяет (для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L$) построить отображение $\varphi: \overline{V} \cap L^* \to L^*$, положив

$$\varphi(a) = L^* \cap f(E_{a, h}(L^*)) \text{ при } a \in \overline{V} \cap L^*. \tag{14}$$

Это отображение φ (заданное, если выбраны f, X, L, V, h, указанные в предложении 2) и лежит в основе определения степени отображения.

Предложение 3. *Пусть f: $M \to H$ — отображение класса K_0 и $b \in f(M)$ — такая точка, что ее прообраз $X = f^{-1}(b)$ компактен. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X отлична от нуля. Тогда существует такое конечномерное подпространство L, содержащее точку b, такая окрестность $V \subset M$ компакта X и такое положительное число h, что (при $L^* \supset L$) граница открытого в L^* множества $V \cap L^*$ переходит при отображении φ (см. (14)) в множество, не содержащее точки b.*

Доказательство. Сохраним обозначения, введенные при доказательстве предложения 2. Пусть $L^* \supset L$ и $a \in \overline{V} \cap L^*$ — такая точка, что $\varphi(a) = b$, т. е. $f(E_{a, h}(L^*)) \cap L^* = b$. Тогда $b \in f(E_{a, h}(L^*))$, т. е. $E_{a, h}(L^*)) \cap X \neq \varnothing$ (поскольку $X = f^{-1}(b)$). Пусть $x \in E_{a, h}(L^*) \cap X$. Тогда $x - a \perp L^*$ (по определению шара $E_{a, h}(L^*)$), и потому $\|x - a\|$ есть расстояние от точки x до подпространства L^*. Но множество X содержится в σ-окрестности подпространства L^* (так как $L^* \supset L$). Следовательно, расстояние от точки x до подпространства L^* меньше σ, т. е. $\|x - a\| < \sigma$. Так как $x \in X$, то это означает, что точка a удалена от X менее, чем на σ. В то же время все точки границы множества $V \cap L^*$ удалены от множества X не менее чем на σ (так как V есть σ-окрестность множества X), и потому точка a не принадлежит границе множества $V \cap L^*$. Но это и означает, что на границе множества $V \cap L^*$ нет точек, переходящих в b при отображении φ. Предложение 3 доказано.

Ясно, что при выполнении условий предложения 3 определена степень отображения φ: $(V \cap L^*) \to L^*$ в точке b. Ясно также, что эта степень отображения не зависит от ориентации пространства L^* (если мы условимся ориентировать L^* и $V \cap L^*$ одинаково). Оказывается (и в этом заключается наше следующее предложение), что L, V и h можно выбрать таким образом, чтобы для всех $L^* \supset L$ степень отображения φ: $(V \cap L^*) \to L^*$ была одной и той же. Более того, эта степень отображения не зависит от случайного выбора элементов L, V и h, участвующих в построении, а всецело определяется отображением f и точкой b. Иными словами, справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть f: $M \to H$ — отображение класса K_0 и $b \in f(M)$ — такая точка, что ее прообраз $x = f^{-1}(b)$ компактен. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X отлична от нуля. Тогда существует такое число $c = c(f, b)$ (называемое степенью отображения f: $M \to H$ в точке b), которое обладает следующим свойством: если L, V и h выбраны так, что степень отображения φ (см. (14)) одна и та же для всех конечномерных подпространств $L^* \supset L$, то эта степень отображения равна $c(f, b)$.*

Доказательство. Выберем L, V и h, как это сделано при доказательстве предложения 3, и пусть L^* и L_1^* — конечномерные подпространства, удовлетворяющие условию $L_1^* \supset L^* \supset L$. Подпространству L^* соответствует отображение φ (см. (14)), подпространству L_1^* — аналогичное отображение φ_1: $\overline{V} \cap L_1^* \to L_1^*$. Мы прежде всего покажем, что степени отображений φ и φ_1 в точке b совпадают. Достаточно установить это для случая, когда $\dim L_1^* = \dim L^* + 1$.

Пусть $a, a' \in \overline{V} \cap L_1^*$, причем $a - a' \perp L^*$. Положим $u = \varphi_1(a)$, $v = \varphi_1(a')$. Тогда $u = f(x)$, $v = f(y)$, где $x \in E_{a,h}(L_1^*)$ $y = E_{a',h}(L_1^*)$. Мы имеем: $x - a \perp L_1^*$, $y - a' \perp L_1^*$, и потому $x - a \perp L^*$, $y - a' \perp L^*$, откуда следует, что вектор

$$x - y = (x - a) + (a - a') - (y - a')$$

ортогонален подпространству L^*. Так как каждая из точек x, y находится в h-окрестности множества $\overline{V}$, т. е. в $2h$-окрестности множества X (см. доказательство предложения 2), то $x, y \in U \cap G$ и потому справедливо соотношение (1), т. е.

$$\|u - v - \lambda_f(x)(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|.$$

Из этого следует (в силу соотношения $\lambda_f(x) \neq 0$), что угол между векторами $\varphi_1(a) - \varphi_1(a') = u - v$ и $x - y$ не превосходит

$$\arcsin \frac{\varepsilon}{|\lambda_f(x)|} < \arcsin \frac{\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{6}.$$

Так как обе точки $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(a')$ лежат в подпространстве L_1^* (см. (14)), а вектор $a - a'$ является проекцией вектора $x - y$ на это подпространство, то угол между векторами

$$\varphi_1(a) - \varphi_1(a') \text{ и } a - a' \tag{15}$$

подавно меньше $\frac{\pi}{6}$. Итак, если $a, a' \in \overline{V} \cap L_1^*$, причем $a - a' \perp L^*$, то угол между векторами (15) меньше $\frac{\pi}{6}$.

Пусть теперь e — единичный вектор подпространства L_1^*, ортогональный подпространству L^*. Далее, пусть c — произвольная точка подпространства L^* и l_c — прямая, проходящая через точку c и параллельная вектору e. Для произвольной точки $a \in l_c$ положим $\xi = e(a - c)$ и будем рассматривать ξ как координату точки a на прямой l_c. Если $a, a' \in \overline{V} \cap L_1^*$ и $a - a' \perp L^*$, то обе точки a, a' лежат на одной прямой l_c; координаты точек a, a' на этой прямой обозначим через ξ, ξ'. Будем считать для определенности, что $\xi > \xi'$, т. е.

$$e(a - a') = e(a - c) - e(a' - c) = \xi - \xi' > 0.$$

Тогда вектор $a - a'$ будет иметь *то же* направление, что и вектор e. Так как угол между векторами (15) меньше $\pi/6$, то угол между векторами $\varphi_1(a) - \varphi_1(a')$ и e меньше $\pi/6$, и потому $e(\varphi_1(a) - \varphi_1(a')) > 0$.

Иными словами, при монотонном возрастании координаты ξ точки $a \in l_c \cap \overline{V}$ скалярное произведение $e\varphi_1(a)$ (т. е. взятое со знаком р а с с т о я н и е от точки $\varphi_1(a)$ до подпространства L^*) также возрастает монотонно. В частности, отсюда следует, что множество $l_c \cap \overline{V}$ г о м е о м о р ф н о отображается в L_1^*, при помощи отображения φ_1.

Пусть теперь $c \in \overline{V} \cap L^*$. Так как $\varphi(c) \in f(E_{c,h}(L^*))$, то существует (единственная точка $\psi(c) \in E_{c,h}(L^*)$), для которой $f(\psi(c)) = \varphi(c)$. Легко видеть, что точка $\psi(c)$ непрерывно зависит от c (см. доказательство предложения 2). Проекцию точки $\psi(c)$ на плоскость L_1^* обозначим через $\omega(c)$. Тогда $\omega(c) \in L_1^*$ и $\omega(c) - c \perp L^*$, т. е. $\omega(c) \in l_c$. Координату точки $\omega(c)$ на прямой l_c обозначим через $\mu(c)$.

Далее, через V_1 обозначим $\sigma/2$-окрестность множества X, а через Θ — множество всех точек $c \in V_1 \cap L^*$, для которых выполнено неравенство $|\mu(c)| < \sigma/4$. Так как функция $\mu(c)$ непрерывна, то множество Θ открыто в подпространстве L^*.

Если $c \in (V \cap L^*) \diagdown (V_1 \cap L^*)$, то точка c удалена от множества X не менее чем на $\sigma/2$. Следовательно, точка c удалена от множества X^* более чем на $\sigma/4$, где X^*—ортогональная проекция множества X на подпространство L^* (напомним, что X находится в $\sigma/4$-окрестности подпространства $L \subset L^*$). Отсюда вытекает, что любая точка шара $E_{c,h}(L^*)$ удалена от множества X^* более чем на $\sigma/4$, и потому шар $E_{c,h}(L^*)$ не пересекается с множеством X. В частности, $\psi(c) \overline{\in} X = f^{-1}(b)$, т. е. $\varphi(c) = f(\psi(c)) \neq b$. Итак, образ множества $(V \cap L^*) \diagdown \diagdown (V_1 \cap L^*)$ при отображении φ не содержит точки b.

Далее, если $c \in (V_1 \cap L^*) \diagdown \Theta$, то $|\mu(c)| \geqslant \sigma/4$, т. е. $\|\omega(c) - c\| \geqslant \sigma/4$. Следовательно, $\|c - \psi(c)\| \geqslant \|c - \omega(c)\| \geqslant \sigma/4$, т. е. точка $\psi(c)$ удалена от подпространства L^* не менее чем на $\sigma/4$. Любая же точка множества X удалена от подпространства L^* менее чем на $\sigma/4$. Поэтому $\psi(c) \in X$, т. е. и в этом случае $\varphi(c) = f(\psi(c)) \neq b$. Итак, образ множества $(V_1 \cap L^*) \setminus \Theta$ при отображении φ также не содержит точки b, а потому образ множества

$$(V \cap L^*) \setminus \Theta = ((V \cap L^*) \setminus (V_1 \cap L^*)) \cup ((V_1 \cap L^*) \setminus \Theta)$$

при отображении φ не содержит точки b. Следовательно, степени отображений

$$\varphi\colon V \cap L^* \to L^* \text{ и } \varphi\colon \Theta \to L^* \tag{16}$$

в точке b совпадают.

Для точки $c \in \Theta$ обозначим через I_c интервал прямой l_c, состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют условию $|\xi| < \sigma/2$. Так как при $c \in \Theta$ справедливо неравенство $|\mu(c)| < \sigma/4$, то $\omega(c) \in I_c$. Заметим, что $I_c \subset V$ (при $c \in \Theta$). Действительно, при $c \in \Theta$ точка c находится в $\sigma/2$-окрестности множества X, а так как для любой точки $a \in I_c$ мы имеем $\|a - c\| < \frac{\sigma}{2}$, то любая точка $a \in I_c$ находится (при $c \in \Theta$) в σ-окрестности множества X, т. е. $a \in V$.

Множество $W = \bigcup_{c \in \Theta} I_c$ открыто в пространстве L_1^*, причем $W \subset V$. Поэтому отображение φ_1 определено, в частности, на множестве W. Пусть $a \in (V \cap L_1^*) \setminus W$. Докажем, что шар $E_{a,h}(L_1^*)$ не пересекается с множеством X. Допустим, напротив, что существует точка $x \in E_{a,h}(L_1^*) \cap \cap X$. Тогда a является проекцией точки x на подпространство L_1^*. Обозначим через c проекцию точки x на подпространство L^*. Так как $x \in X$, то расстояние точки x от подпространства L^* меньше $\sigma/4$, т. е. $\|x - c\| < \sigma/4$. Следовательно, $c \in V_1$, т. е. $c \in V_1 \cap L^*$. Далее

$$\|a - c\| \leqslant \|x - c\| < \frac{\sigma}{4},$$

и потому $a \in I_c$. Кроме того, так как $x \in X$, то $f(x) = b \in L^*$, и поэтому, в силу включения $x \in E_{c,h}(L^*)$, мы имеем: $x = \psi(c)$. Неравенство $\|x - c\| < \sigma/4$ показывает теперь, что $c \in \Theta$. Но тогда $I_c \subset W$, т. е. $a \in W$ что однако противоречит выбору точки a. Полученное противоречие показывает, что при $a \in (V \cap L_1^*) \setminus W$ шар $E_{a,h}(L_1^*)$ не пересекается с множеством X, т. е. $\varphi_1(a) \neq b$.

Итак, образ множества $(V \cap L_1^*) \setminus W$ при отображении φ_1 не содержит точки b. Поэтому граница (относительно L_1^*) множества W переходит при отображении φ_1 в множество, не содержащее точки b, и степени отображений

$$\varphi_1\colon (V \cap L_1^*) \to L_1^* \text{ и } \varphi_1\colon W \to L_1^* \tag{17}$$

в точке b совпадают.

Теперь для доказательства того, что степени отображений

$$\varphi\colon (V \cap L^*) \to L^* \text{ и } \varphi_1\colon (V \cap L_1^*) \to L_1^*$$

в точке b совпадают, достаточно (в силу (16), (17)) доказать, что совпадают (в точке b) степени отображений

$$\varphi\colon \Theta\to L^* \text{ и } \varphi_1\colon W\to L_1^*. \tag{18}$$

Докажем это. Каждую точку $a\in W$ можно записать в виде (c, ξ), где $c\in\Theta$, а ξ — координата точки a на прямой l_c; при этом число ξ пробегает (независимо от $c\in\Theta$) интервал $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$.

Обозначим теперь через $g_c^{(0)}$ отображение интервала $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ на себя, определенное соотношением

$$g_c^{(0)}(\xi)=\begin{cases}\mu(c)+\xi\cdot\dfrac{\sigma-2\mu(c)}{\sigma} & \text{при } 0\leqslant\xi<\dfrac{\sigma}{2},\\[2mm] \mu(c)+\xi\cdot\dfrac{\sigma+2\mu(c)}{\sigma} & \text{при } -\dfrac{\sigma}{2}<\xi\leqslant 0.\end{cases}$$

Отображение $g_c^{(0)}$ монотонно (т. е. гомеоморфно отображает интервал $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ на себя), и при этом $g_c^{(0)}(0)=\mu(c)$. Положим теперь

$$g_c^{(t)}(\xi)=t\xi+(1-t)\,g_c^{(0)}(\xi),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Отображение $g_c^{(t)}$ интервала $\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ на себя также монотонно, причем $g_c^{(1)}$ есть тождественное отображение. Далее, так как функция $\mu(c)$ непрерывна, то $g_c^{(t)}(\xi)$ непрерывно по совокупности переменных c, ξ, t.

Таким образом, положив

$$G^{(t)}(c, \xi)=(c,\, g_c^{(t)}(\xi)),$$

мы получаем гомеоморфное отображение $G^{(t)}$ множества W на себя, причем $G^{(1)}$ — тождественное отображение. Так как при гомотопии $G^{(t)}\colon W\to W$ граница множества W остается неподвижной, то степени отображений

$$\varphi_1\colon W\to L_1^* \text{ и } \varphi_1\circ G^{(0)}\colon W\to L_1^* \tag{19}$$

в точке b совпадают.

Заметим теперь, что отображение $\varphi_1\circ G^{(0)}$ переводит точку $c=(c, 0)\in\Theta$ в точку

$$\varphi_1(G^{(0)}(c, 0))=\varphi_1(c, g_c^{(0)}(0))=\varphi_1(0, \mu(c))=\varphi_1(\omega(c))=$$
$$=f(E_{\omega(c), h}(L_1^*))\cap L_1^*=f(\psi(c))=\varphi(c)$$

(поскольку $f(\psi(c))\in L^*\subset L_1^*$ и, кроме того, $\psi(c)-\omega(c)\perp L_1^*$, т. е. $\psi(c)\in E_{\omega(c), h}(L_1^*)$). Таким образом, на множестве $\Theta\subset W$ отображение $\varphi_1\circ G^{(0)}$ совпадает с φ, так что $\varphi_1\circ G^{(0)}(\Theta)\subset L^*$.

Далее, при $\xi > 0$ мы имеем (в силу монотонности отображения $g_c^{(0)}$) $g_c^{(0)}(\xi) > g_c^{(0)}(0)$, т. е. $g_c^{(0)}(\xi) > \mu(c)$. Иначе говоря, при $\xi > 0$ координата точки $G^{(0)}(c, \xi)$ на прямой l_c больше координаты точки $G^{(0)}(c, 0)$, и потому

$$e(\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi)) - \varphi_1(G^{(0)}(c, 0))) > 0,$$

т. е.

$$e(\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi)) - \varphi(c)) > 0. \tag{20}$$

Иными словами, если мы условимся считать, что вектор e определяет направление „вверх“ в подпространстве L_1^*, то, когда точка $a = (c, \xi)$ расположена в W выше подпространства L^* (т. е. при $\xi > 0$), точка $\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi))$ также расположена выше L^* (в силу соотношения (20) и включения $\varphi(c) \in L^*$). Аналогично, если точка $a = (c, \xi)$ расположена в W ниже L^* (т. е. $\xi < 0$), то и точка $\varphi_1(G^{(0)}(c, \xi))$ расположена ниже L^*.

Из этого следует, что степени отображений

$$\varphi_1 \circ G^{(0)}: W \to L_1^* \text{ и } \varphi: \Theta \to L^*$$

в точке b совпадают, и потому, в силу (19), совпадают в точке b и степени отображений (18).

Тем самым полностью доказано, что при $L_1^* \supset L^* \supset L$ степени отображений $\varphi: V \cap L^* \to L^*$ и $\varphi_1: V \cap L_1^* \to L_1^*$ в точке b совпадают. Однако это доказано лишь для случая, когда L, V и h выбраны вполне определенным образом (а именно, так как это было сделано при доказательстве предложения 2).

Пусть теперь L', V' и h' выбраны иначе, но так, что при $L^* \supset L'$ определено отображение $\varphi': \overline{V'} \cap L^* \to L^*$ (ср. (14)), причем определена степень этого отображения в точке b и эта степень не зависит от выбора подпространства $L^* \supset L'$. Для завершения доказательства предложения 4 остается установить, что при $L^* \supset L$ и $L^* \supset L'$ степени отображений

$$\varphi: V \cap L^* \to L^* \text{ и } \varphi': V' \cap L^* \to L^* \tag{21}$$

в точке b совпадают.

Выберем положительное число h_1, меньшее каждого из чисел h, h'. Тогда

$$E_{a, h_1}(L^*) \subset E_{a, h}(L^*), \ E_{a, h_1}(L^*) \subset E_{a, h'}(L^*) \quad (a \in L^*).$$

Далее, построим такую окрестность $V_1 \subset V \cap V'$ множества X и такое конечномерное подпространство $L_1 \supset L \cup L'$, что для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L_1$ и любой точки $a \in V_1 \cap L^*$ пересечение $f(E_{a, h_1}(L^*)) \cap L^*$ состоит ровно из одной точки (см. предложение 2). Тогда при $L^* \supset L_1$ определено отображение $\varphi_1: V \cap L^* \to L^*$ (ср. (14)). Согласно предложению 3, подпространство L_1 можно выбрать так, что при $L^* \supset L_1$ определена степень этого отображения в точке b. Мы можем при этом считать, что V_1 есть r-окрестность множества X

(где r — некоторое положительное число) и что множество X содержится в r-окрестности подпространства L_1.

Мы докажем, что при $L^* \supset L_1$ степени отображений

$$\varphi_1: (V_1 \cap L^*) \to L^* \text{ и } \varphi: (V \cap L^*) \to L^* \tag{22}$$

в точке b совпадают и, точно так же, степени отображений

$$\varphi_1: (V_1 \cap L^*) \to L^* \text{ и } \varphi': (V' \cap L^*) \to L^* \tag{23}$$

в точке b совпадают. Этим и будет доказано совпадение степеней отображений (21).

Итак, пусть $L^* \supset L_1$. Пусть, далее, $a \in (V \setminus V_1) \cap L^*$. Покажем, что шар $E_{a,h}(L^*)$ не пересекается с множеством X. Допустим, напротив, что существует точка $x \in E_{a,h}(L^*) \cap X$. Тогда расстояние $\|x-a\|$ точки x от подпространства L^* меньше r (так как $x \in X$). Следовательно, точка a находится в r-окрестности множества X, и потому $a \in V_1$, что однако противоречит выбору точки a. Таким образом, при $a \in (V \setminus V_1) \cap L^*$ шар $E_{a,h}(L^*)$ не пересекается с множеством X. Это означает, что $b \overline{\in} f(E_{a,h}(L^*))$. Поэтому при $a \in (V \setminus V_1) \cap L^*$ мы имеем $\varphi(a) \neq b$. Иными словами, образ множества $(V \setminus V_1) \cap L^*$ при отображении φ не содержит точки b. Отсюда следует, что степени отображений

$$\varphi: (V \cap L^*) \to L^* \text{ и } \varphi: (V_1 \cap L^*) \to L^* \tag{24}$$

в точке b совпадают.

Теперь для доказательства того, что степени отображений (22) совпадают, достаточно установить, что совпадают степени отображений

$$\varphi: (V_1 \cap L^*) \to L^* \text{ и } \varphi_1: (V_1 \cap L^*) \to L^*. \tag{25}$$

Мы покажем, что отображения (25) просто *совпадают* между собой В самом деле, пусть $a \in V_1 \cap L^*$. Тогда

$$\varphi_1(a) = f(E_{a,h_1}(L^*)) \cap L^* \subset f(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*.$$

Но последнее пересечение содержит ровно *одну* точку, а именно точку $\varphi(a)$. Следовательно, $\varphi_1(a) = \varphi(a)$ (при $a \in V_1 \cap L^*$), т. е. отображения (25) совпадают.

Этим доказано совпадение степеней отображений (22). Аналогично доказывается совпадение степеней отображений (23). Таким образом, предложение 4 полностью доказано.

Этим и завершается построение степени отображения. Именно, если $f: M \to H$ — такое отображение класса K_0, что прообраз $f^{-1}(b)$ любой точки $b \in f(M)$ компактен, то определена степень отображения $c(f, b)$. Если при этом множество M связно, то можно доказать, что степень отображения $c(f, b)$ одинакова для всех точек $b \in f(M)$. В случае же, когда множество $f^{-1}(b)$ компактно не для всех $b \in f(M)$, степень отображения определена лишь в тех точках $b \in f(M)$, для которых прообраз $f^{-1}(b)$ компактен. Если при этом $N \subset f(M)$ — множество всех точек $b \in f(M)$, для которых прообраз $f^{-1}(b)$ компактен, то на каждой компоненте множества N степень отображения $c(f, b)$ постоянна. Далее, если f_0 и f_1 — гомотопные (в классе K_0) отображения класса K_0, заданные на множестве M, и f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — соединяющая их гомотопия и если при этом для всех $t \in [0, 1]$ выполнено включение $b \in f_t(M)$ и прообраз $f_t^{-1}(b)$ компактен, то $c(f_0, b) = c(f_1, b)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
АН СССР,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 17.VII.1973

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ, Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Արտապատկերման աստիճանի կառուցումը հիլբերտյան տարածությունում *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցվում է արտապատկերման տոպոլոգիական աստիճանը K_0 *դասին ([6], [7]) պատկանող ու լրացուցիչ պայմաններին բավարարող արտապատկերումների համար։ Գաղափարական տեսակետից այդ կառուցումը մոտ է Լերե-Շաուդերի ([1]) կլասիկ սահմանմանը, բայց ունի իր տարբերությունները և առանձնահատկությունները։*

V. G. BOLTJANSKIĬ, E. A. MIRSAKHANIAN. *Construction of the power of a mapping in a Hilbert space* (summary)

The paper constructs topological powers of mappings from the K_0 class ([6], [7]), under some additional conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ж. Лере* и *Ю. Шаудер*. УМН, 1, вып. 3—4, 1946.
2. *F. E. Browder*. On a generalization of the Shauder fixed point theorem, Duke Math. Journal, 26, 1959, 291—304.
3. *М. А. Красносельский*. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
4. *Р. Л. Фрум-Кетков*. Об отображениях в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 192, № 6, 1970, 1231—1234.
5. *В. Г. Болтянский* и *Э. А. Мирзаханян*. Степень отображения в гильбертовом пространстве, ДАН Арм.ССР, 51, № 4, 1970, 193—195.
6. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений гильбертова пространства, ДАН Арм.ССР, 51, № 3, 1970, 129—131.
7. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 2, 1974, 107—120.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

Г. У. МАТЕВОСЯН

ОБ ОДНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ И О НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

В настоящей работе обсуждается задача об исследовании *однозначных* мероморфных функций в многосвязных областях в духе теории, созданной Р. Неванлинной [1, 2] в случае плоскости и круга.

Этому вопросу посвящена довольно обширная литература. Отметим прежде всего монографию Л. Сарио и К. Носиро [3], содержащую обзор работ, посвященных распространению теории Неванлинны на случай римановых поверхностей. Однако характеристики мероморфных функций, которые введены в [3], в случае многосвязных областей должным образом не выявляют, на наш взгляд, намеченный еще со времен „большой теоремы Пикара“ принцип „отделения особенностей“. Кроме того, можно ожидать, что общие результаты этой книги, установленные в основном для локально мероморфных функций, в различных конкретных случаях областей должны быть уточнены. Так, например, из сформулированных в [3] результатов не следует, что однозначная мероморфная в круговом кольце функция ограниченного вида представима в виде отношения двух ограниченных и однозначных аналитических функций.

В случае кругового кольца другим путем пошли В. А. Зморович, С. А. Касьянюк и М. Е. Дундученко [4—7]. Применяя введенное в статье [8] А. Вилья ядро и выбирая в качестве образца случай круга, были построены аналоги формулы Шварца, Пуассона-Иенсена, произведений Бляшке и т. д., которые должны были служить аппаратом для исследования мероморфных функций в случае кругового кольца. Однако эти аналоги имеют довольно громоздкий вид и их систематическое использование наталкивается на значительные технические трудности.

В настоящей работе мы предлагаем новый подход к исследованию вопросов теории мероморфных функций в многосвязных областях, позволяющий свести это исследование к уже досконально изученному случаю плоскости или круга. Этот подход основывается на одном простом факте, в котором отчетливо проявляется вышеупомянутый принцип „отделения особенностей“. Именно, заметив, что любую n-связную область D можно представить в виде пересечения *n односвязных* областей D_j, мы доказываем, что любая мероморфная в области D функция допускает представление в виде *произведения* n функций f_j, где f_j голоморфна в D_j.

Формулировка и доказательство этого результата содержится в параграфе 1 статьи (теорема 1.2).

В параграфе 2 показывается, как с помощью этой факторизационной теоремы можно в случае кругового кольца получить ряд таких результатов, как первая и вторая основные теоремы, описание и новое параметрическое представление функций ограниченного вида, теорему единственности типа теоремы Карлемана и т. д. Конечно, в приложениях можно было рассматривать и более общие области, скажем, n-связные круговые области. Но мы нарочно ограничились случаем наиболее простой неодносвязной области, чтобы по возможности ясно показать *сведение* задачи к односвязному случаю.

§ 1. O-разложение мероморфных функций

Обозначения. Пусть C — конечная комплексная плоскость, а $\overline{C}$ — расширенная комплексная плоскость. Для области $\Omega \subset \overline{C}$ через $M(\Omega)$ обозначим множество всех мероморфных в Ω функций. Если $f \in M(\Omega)$ и $a \in \overline{C}$, то обозначим

$$Z_f(a) = \{a \in \Omega: f = a\}.$$

Определения: 1. Пусть $\Omega \subset \overline{C}$ — конечносвязная область и E_j, $j = 1, 2, \cdots, n$ — компоненты связности компакта $\overline{C} \setminus \Omega$. Тогда область $\Omega_j = \overline{C} \setminus E_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$; назовем компонентой односвязного разложения (O-разложения), а представление $\Omega = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_j$ — O-разложением области Ω.

2. Если для функции $f \in M(\Omega)$ существуют функции $f_j \in M(\Omega_j)$ такие, что

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z), \tag{1.1}$$

то мы скажем, что функция f допускает O-разложение, а представление (1.1) назовем O-разложением функции f. При этом функции f_j называются компонентами O-разложения функции f.

Теорема 1.1. (единственности O-разложения). *Если мероморфная в n-связной области Ω функция f допускает O-разложения*

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z),$$
$$f(z) = \varphi_1(z) \varphi_2(z) \cdots \varphi_n(z), \quad z \in \Omega,$$

где f_j, $\varphi_j \in M(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, то существуют рациональные функции R_j такие, что

$$\frac{f_j(z)}{\varphi_j(z)} = R_j(z), \quad z \in \Omega_j.$$

В самом деле, имеем, что $\frac{f_j(z)}{\varphi_j(z)} \in M(\Omega_j)$. С другой стороны, представление

$$\frac{f_j(z)}{\varphi_j(z)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\varphi_k(z)}{f_k(z)}, \ z \in \Omega$$

показывает, что функцию $\frac{f_j}{\varphi_j}$ можно считать мероморфной в области

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \Omega_k \supset \overline{C} \setminus \Omega_j.$$

Таким образом, функция $\frac{f_j}{\varphi_j}$ мероморфна в $\overline{C}$ и, следовательно, рациональна.

Следующая центральная в настоящем параграфе теорема утверждает, что любая мероморфная в конечносвязной области функция допускает O-разложение, подчиненное еще некоторым дополнительным условиям. Для простоты ограничимся случаем конечных областей.

Теорема 1.2. (существования O-разложения). *Пусть $\Omega \subset C$ — конечносвязная область, $\Omega = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_j$ — O-разложение области Ω. Для произвольной функции $f \in M(\Omega)$ существуют функции $f_j \in M(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, такие, что*

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z), \ z \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$Z_{f_j}(a) \subset Z_f(a) \cup \{\infty\} \quad \text{для} \quad a = 0, \infty \quad \text{и} \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.2}$$

$$Z_{f_j}(a) \cap Z_{f_k}(a) \subset \{\infty\} \quad \text{при} \quad j \neq k; \ a = 0, \infty. \tag{1.3}$$

Доказательство. Так как $\infty \overline{\in} \Omega$, то мы можем считать, что $\infty \overline{\in} \Omega_n$ и $\infty \in \Omega_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Выберем n-связную область $D \subset C$, удовлетворяющую условиям:

а) Область D ограничена замкнутыми гладкими путями $(\gamma_j)_1^n$ попарно без общих точек, причем пути $(\gamma_j)_1^{n-1}$ лежат в ограниченной компоненте связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_n$ и система $(\gamma_j)_1^n$ определяет положительную ориентацию границы области D.

б) При $1 \leqslant j \leqslant n-1$ континуум $\overline{C} \setminus \Omega_j$ лежит в ограниченной компоненте связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_j$, а остальные континуумы $\overline{C} \setminus \Omega_k$, $k = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n$ — в неограниченной компоненте. В случае $j = n$, наоборот, континуум $\overline{C} \setminus \Omega_n$ лежит в неограниченной, а континуумы $\overline{C} \setminus \Omega_k$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ — в ограниченной компоненте связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_n$.

в) Функция f не имеет нулей и полюсов в D (случай $f = \mathrm{const}$ не интересен):

$$Z_f(a) \cap \overline{D} = \varnothing, \ a = 0, \infty.$$

Определим теперь односвязные области $(D_j)_1^n$ следующим образом: при $1 \leqslant j \leqslant n-1$ область D_j — это неограниченная компонента связности множества $\overline{C} \setminus \gamma_j$, а при $j=n$ — ограниченная. Очевидно, D_j—это компоненты O-разложения области D: $D = \bigcap_{j=1}^{n} D_j$. Кроме того, из свойств а), б) следует, что $D_j \subset \Omega_j$ при $j=1, 2, \cdots, n$ (следовательно $D \subset \Omega$) и что множества $(\Omega_j \setminus D_j)_1^n$ попарно не пересекаются. Определим теперь некоторые мероморфные в областях Ω_j функции ψ_j.

По формуле Коши, учитывая условие в), имеем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z) \quad \text{для} \quad z \in D, \tag{1.4}$$

где

$$\psi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{при} \quad z \in D_j. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) определяет ψ_j пока в области D_j, как аналитическую там функцию. Однако из этого факта следует, что функция

$$\sum_{\substack{k=1\\k \neq j}}^{n} \psi_k(z)$$

голоморфна в области

$$\bigcap_{\substack{k=1\\k \neq j}}^{n} D_k \supset \overline{C} \setminus D_j.$$

Далее, из формулы (1.4) имеем соотношение

$$\psi_j(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{\substack{k=1\\k \neq j}}^{n} \psi_k(z), \; z \in D, \tag{1.6}$$

которое показывает, что функция ψ_j допускает продолжение из D_j по крайней мере в область Ω_j как мероморфная функция.

Итак, мы можем считать, что $\psi_j \in M(\Omega_j)$ и что ψ_j имеет полюса в тех и только в тех точках области $\Omega_j \setminus D_j$, где функция f имеет нуль или полюс. Главная часть функции ψ_j в этих точках совпадает с главной частью функции $\frac{f'}{f}$. Теперь мы хотим построить функции $f_j \in M(\Omega_j)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{f_j'(z)}{f_j(z)} = \psi_j(z) \quad \text{при} \quad z \in \Omega_j, \; j=1, 2, \cdots, n. \tag{1.7}$$

С этой целью возьмем точку $z_0 \in D$ и рассмотрим совокупность целых чисел (представляющих собой индекс точки $z=0$ относительно пути $f \circ \gamma_j$):

$$m_j(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Пусть сначала $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Выберем конечные точки $\zeta_j \in \overline{C} \setminus \Omega_j$. В силу формулы (1.5) функция

$$\psi_j(z) - \frac{m_j(\infty)}{z-\zeta_j}$$

голоморфна в замкнутой области D_j и в бесконечности имеет нуль по крайней мере второго порядка. Для этой функции справедлива теорема Коши, поэтому она имеет однозначную первообразную

$$\varphi_j(z) = \int\limits_{z_0}^{z}\left[\psi_j(\zeta) - \frac{m_j(\infty)}{\zeta-\zeta_j}\right] d\zeta,$$

аналитическую в D_j, включая точку $z=\infty$. В случае $j=n$ область D_n ограничена и функция ψ_n имеет в $\overline{D}_n$ однозначную первообразную $\varphi_n(z)$, $\varphi_n(z_0)=0$.

Положим для $z \in \overline{D}_j$

$$f_j(z) = \begin{cases} (z-\zeta_j)^{m_j(\infty)} \exp\{\varphi_j(z)\} & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ \exp\{\varphi_n(z)\} & \text{при } j = n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Фактически эта формула определяет $f_j(z)$ не только в $\overline{D}_j$, но и в некоторой достаточно малой окрестности G_j множества D_j. Из (1.8) видно, что функция f_j не имеет нулей или полюсов в G_j, исключая, быть может, точку $z=\infty$ (в случае $1 \leqslant j \leqslant n-1$), где она имеет полюс при $m_j(\infty) > 0$ и нуль при $m_j(\infty) < 0$. Равенство (1.7) очевидным образом выполняется для $z \in G_j$. Определим функции f_j в остальных точках области Ω_j. Функция $\psi_j - \frac{f'}{f}$ голоморфна в области D и там, в силу формулы (1.6), выполняются равенства

$$\psi_j(z) - \frac{f'(z)}{f(z)} = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \psi_k(z). \tag{1.9}$$

Однако выше мы заметили, что правая часть этого равенства представляет собой голоморфную в замкнутой области $\overline{C} \setminus D_j$ функцию. Таким образом, функция $\psi_j - \frac{f'}{f}$ допускает аналитическое продолжение из области D в односвязную область $\overline{C} \setminus D_j$. Выделим опять случай $1 \leqslant j \leqslant n-1$. В этом случае область $\overline{C} \setminus D_j$ не только односвязна, но и ограничена, поэтому функция $\psi_j - \frac{f'}{f}$ имеет там однозначную первообразную. Выберем конечные точки $z_j \in G_j \cap (\Omega_j \setminus D_j)$ и положим

$$F_j(z) = c_j f(z) \exp\left\{\int_{z_j}^{z}\left[\psi_j(\zeta) - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right] d\zeta\right\},$$

для $z \in \Omega_j \setminus D_j \subset \bar{C} \setminus D_j$, где $c_j = \dfrac{f_j(z_j)}{f(z_j)}$.

Из определения функций F_j следует, что

$$\frac{F_j'(z)}{F_j(z)} = \psi_j(z) = \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} \quad \text{при} \quad z \in G_j \cap (\Omega_j \setminus \bar{D}_j),$$

откуда, в силу выбора c_j следует, что

$$\frac{F_j(z)}{f_j(z)} = \text{const} = \frac{F_j(z_j)}{f_j(z_j)} \quad \text{при} \quad z \in G_j \cap (\Omega_j / \bar{D}_j).$$

Это означает, что функция F_j представляет собой „мероморфное" продолжение функции f_j из области D_j в область Ω_j. Отметим, что нули и полюса функции F_j совпадают с нулями и полюсами функции f, лежащими в области $\Omega_j \setminus D_j$.

Для завершения доказательства теоремы остается доопределить функцию f_n. С этой целью предварительно заметим, что в силу условия в) и по теореме Коши имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0 \quad \text{при} \quad z \in C \setminus \bar{D}.$$

Умножая обе части этого равенства на z и затем устремляя z к бесконечности, получим $\sum_{j=1}^{n} m_j(\infty) = 0$. Отсюда с учетом формул (1.5) и (1.9) имеем

$$\lim_{z\to\infty} z\left[\psi_n(z) - \frac{f'(z)}{f(z)}\right] = -\lim_{z\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} z\psi_k(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(\infty) = -m_n(\infty).$$

Выберем некоторую точку $\zeta_n \in D_n$. Функция

$$\psi_n(z) - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{m_n(\infty)}{z - \zeta_n}$$

голоморфна в односвязной (но неограниченной) области $\bar{C} \setminus \bar{D}_n$ и в бесконечности имеет нуль по крайней мере второго порядка. Поэтому она имеет однозначную первообразную в $\bar{C} \setminus D_n$ и, следовательно, в $\Omega_n \setminus \bar{D}_n$. Возьмем точку $z_n \in G_n \cap (\Omega_n \setminus D_n)$ и положим

$$F_n(z)=c_n f(z)(z-\zeta_n)^{-m_n(\infty)}\exp\left\{\int_{z_0}^{z}\left[\psi_n(\zeta)-\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}+\frac{m_n(\infty)}{\zeta-\zeta_n}\right]d\zeta\right\},$$

$$\text{для } z\in\Omega_n\setminus D_n, \quad \text{где } c_n=\frac{f_n(z_n)}{f(z_n)}(z_n-\zeta_n)^{m_n(\infty)}.$$

Как и выше, доказываем, что F_n представляет собой продолжение функции f_n из области D_n в область Ω_n, удовлетворяющее уравнению (1.7) при $j=n$.

Итак, мы построили функции $f_j\in M(\Omega_j)$, удовлетворяющие уравнениям (1.7), нули и полюса которых подчинены условиям (1.2). Выполнение условий (1.3) следует из того, что конечные нули и полюса функции f_j, лежащие в области $\Omega_j\setminus D_j$, по построению не пересекаются. Выполнение основного утверждения (1.1) тоже легко обеспечивается. В самом деле, положим

$$F(z)=f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z),\quad z\in\Omega.$$

В силу условий (1.7) и формулы (1.4) имеем

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}\quad \text{для}\quad z\in D,$$

откуда $\dfrac{F(z)}{f(z)}\equiv \text{const}$ при $z\in D$ и, следовательно, всюду в Ω. Умножая, в случае необходимости, один из множителей f_j на подходящую константу, получим $F_j(z)\equiv f_j(z)$ при $z\in\Omega$. Теорема 1.2 доказана.

Отметим, что доказательство теоремы несколько усложнилось благодаря тому обстоятельству, что логарифм функции, аналитической и не имеющей нулей в некоторой многосвязной области, вообще говоря, *не является* однозначной функцией в этой области.

§ 2. Некоторые приложения теоремы 1.2 к исследованию распределения значений мероморфных в кольце функций

Теорема 1.2 параграфа 1 о факторизации мероморфных в конечносвязных областях функций в сопоставлении с известными фактами классической теории Р. Неванлинны дает возможность провести детальное исследование распределения значений этих функций. Ради простоты формулировок мы ограничимся случаем кругового кольца.

Пусть $0\leqslant R_1<R_2\leqslant\infty$. *Рассмотрим кольцо*

$$S=S(R_1,R_2)=\{z\in C\colon R_1<|z|<R_2\},$$

и пусть f — мероморфная в S функция — $f\in M(S)$. Возьмем произвольные числа $r\in(R_1,R_2)$ и $a\in C$. Положим

$$m(r, a, f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\dfrac{1}{f(re^{i\theta}) - a}\right| d\theta \text{ при } a \in C, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \text{ при } a = \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Фиксируя некоторое число $r_0 \in (R_1, R_2)$, положим также

$$N(r, a, f) = \left|\int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a, f)}{t} dt\right| = \int_{[r_0, r]} \frac{n(t, a, f)}{t} dt, \tag{2.2}$$

где $n(t, a, f)$ — число корней уравнения $f(z) = a$ (число полюсов при $a = \infty$) с учетом кратности, лежащих в замыкании кольца $S(r_0, t)$, если $r_0 \leqslant t$, и в „полузамкнутом" кольце $\{z \in C: t \leqslant z < r_0\}$, если $t < r_0$.

Величину

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f) \tag{2.3}$$

назовем характеристикой мероморфной функции f.

Отметим, что при таком определении характеристика $T(r, f)$ зависит также от выбора числа r_0 и определяется с точностью до аддитивного члена порядка $O(\log r)$. Однако из дальнейшего будет видно, что выбор числа r_0 не существенен и окончательные результаты не зависят от r_0.

Теперь установим связь между характеристикой функции f и характеристиками компонентов O-разложений этой функции. В дальнейшем мы постоянно будем употреблять следующие

Обозначения. Для произвольного числа $R > 0$ положим

$$D_R = \{z \in C: |z| < R\}, \quad V_R = \{z \in \overline{C}: |z| > R\},$$
$$\gamma_R = \{z \in C: |z| = R\}.$$

Будем также считать, что γ_R ориентирована против часовой стрелки.

Напомним, что для функций φ, мероморфных в D_R (V_R) величины $m(r, a, \varphi)$ и $T(r, \varphi)$ определяются как выше, с помощью формул (2.1) и (2.3). Функция же $N(r, a, \varphi)$ определяется следующим образом: если $\varphi \in M(D_R)$, то

$$N(r, a, \varphi) = \int_0^r \frac{n(t, a, \varphi) - n(0, a, \varphi)}{t} dt + n(0, a, \varphi) \log r, \; 0 < r < R,$$

где $n(t, a, \varphi)$ — число a-точек функции φ в замкнутом круге $\overline{D}_t$ с учетом кратности, если же $\varphi \in M(V_R)$, то

$$N(r, a, \varphi) = \int_r^{\infty} \frac{n(t, a, \varphi) - n(\infty, a, \varphi)}{t} dt + n(\infty, a, \varphi) \log r, \; R < r < \infty,$$

где $n(t, a, \varphi)$ — число a-точек функции φ с учетом кратности в бесконечной замкнутой области $\overline{V}_t$.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующей леммой.

Лемма. *Пусть $f \in M(S(R_1, R_2))$ и $f = f_1 f_2$ — 0-разложение функции f; $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$. Тогда*

$$T(r, f) = \begin{cases} T(r, f_1) + O(|\log r|) & \text{при} \quad r \to R_1, \\ T(r, f_2) + O(|\log r|) & \text{при} \quad r \to R_2. \end{cases}$$

Существование O-разложения было доказано в теореме 1.2 параграфа 1. Доказательство леммы непосредственно следует из определений рассматриваемых характеристик.

Заметим, что величина $O(|\log r|)$ ограничена при $r \to R_1$, если $R_1 > 0$, и при $r \to R_2$, если $R_2 < \infty$. Лемма не только устанавливает связь между характеристиками функций f, f_1 и f_2, но и показывает, что характеристика $T(r, f)$ при $r \to R_1$ или $r \to R_2$ отличается от монотонной функции на величину $O(|\log r|)$. В этом направлении можно получить более точные соотношения типа известного тождества А. Картана [2]. *А именно, для произвольной функции $f \in M(S(R_1, R_2))$ имеет место тождество ($r \in (R_1, R_2)$):*

$$T(r, f) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, f)\, d\theta + c_f \log \frac{r}{r_0} + m(r_0, \infty, f), \tag{2.4}$$

где c_f — определенная вещественная постоянная.

Для доказательства формулы (2.4) нам нужны некоторые обозначения. Возьмем произвольное $\theta \in [0, 2\pi]$ и обозначим через E_θ не более чем счетное подмножество интервала (R_1, R_2), состоящее из модулей полюсов или $e^{i\theta}$-точек функции f. Кроме того, выберем число $\delta_\theta \in (0, R_1 - r_0)$ так, чтобы в кольце $S(r_0 - \delta_\theta, r_0)$ функция f не имела полюсов или $e^{i\theta}$-точек, т. е. $E_\theta \cap (r_0 - \delta_\theta, r_0) = \varnothing$.

Докажем формулу (2.4) сначала для $r \in (r_0, R_2)$, отметив, что при $r = r_0$ она очевидна. Для любого $t \in (r_0, R_2) \setminus E_\theta$ по теореме о логарифмическом вычете (для области $S(r_0 - \delta, t)$) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_t} \frac{d}{d\zeta} \log (f(\zeta) - e^{i\theta})\, d\zeta = n(r, e^{i\theta}, f) - n(r, \infty, f) + k(\theta), \tag{2.5}$$

где $k(\theta)$ — целое число, определяемое формулой

$$k(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_0 - \delta}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - e^{i\theta}}\, d\zeta. \tag{2.6}$$

Здесь $0 < \delta < \delta_\theta$, так что $k(\theta)$ не зависит от δ. Интеграл в левой части формулы (2.5) можно заменить через

$$\frac{t}{2\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{2\pi}\log\left[f(te^{i\varphi})-e^{i\theta}\right]d\varphi.$$

Отсюда, выделяя вещественную часть интеграла, разделив обе части формулы (2.5) на t и интегрируя по t в пределах от r_0 до r, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|\,d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(r_0e^{i\varphi})-e^{i\theta}|\,d\varphi=$$

$$=N(r,e^{i\theta},f)-N(r,\infty,f)+k(\theta)\log\frac{r}{r_0}. \tag{2.7}$$

Заметим теперь, что $k(\theta)$ интегрируема на $[0,2\pi]$, так как все остальные члены в (2.7) интегрируемы по θ. Интегрируя формулу (2.7) по θ, учитывая хорошо известное равенство [2]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|w-e^{i\theta}|\,d\theta=\log^+|w|,$$

и полагая

$$c_f=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}k(\theta)\,d\theta,$$

получим требуемое тождество (2.4). Случай $r\in(R_1, r_0)$ рассматривается вполне аналогично, нужно лишь число δ, фигурирующее в определении целого числа $k(\theta)$, подчинить условию $0<\delta<\min[r_0-t, \delta_\theta]$ и теорему о логарифмическом вычете применить к области $S(t, r_0-\delta)$.

Тождество (2.4) принимает очень простой вид, если выполняется условие

$$|f(\zeta)|<1 \text{ при } \zeta\in\gamma_{r_0}. \tag{2.8}$$

В этом случае $m(r_0, \infty, f)=0$. Кроме того, для $k(\theta)$ справедлива формула (2.6) с $\delta=0$, так что интегрируя (2.6) по θ, получаем, что $c_f=0$.

Тождество (2.4) при условии (2.8) принимает вид

$$T(r,f)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta},f)\,d\theta. \tag{2.9}$$

Если вместо (2.8) функция f удовлетворяет условию

$$1<|f(\zeta)|<\infty \text{ при } \zeta\in\gamma_{r_0},$$

то постоянная c_f является целым числом и для нее можно указать явную формулу.

В самом деле, тогда для $k(\theta)$ опять справедлива формула (2.6) с $\delta=0$, откуда интегрированием по θ находим

$$c_f = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_0}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

В общем же случае трудно указать явную формулу для c_f, использующую значения функции f только на окружности γ_{r_0}. Сделаем несколько замечаний по поводу полученного тождества (2.4).

Во-первых, (2.4) можно переписать в виде

$$T(r,f) = \left|\int\limits_{r_0}^{r} \frac{l(t)}{t}\,dt\right| + c_f \log\frac{r}{r_0} + m(r_0, \infty, f), \tag{2.4'}$$

где

$$l(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} n(t, e^{i\theta}, f)\,d\theta.$$

Первое слагаемое монотонно убывает на $(R_1, r_0]$, монотонно возрастает на $[r_0, R_2)$ (этими свойствами обладает и функция $l(t)$) и представляет собой логарифмически выпуклую функцию на (R_1, R_2)). Характеристика $T(r, f)$ с точностью до ограниченного слагаемого представляет собой такую же величину, если предположить, что функция f не имеет полюсов на γ_{r_0}. Это следует из (2.4′) и (2.9), хотя в (2.4′) слагаемое $c_f \log\frac{r}{r_0}$ при $R_1 = 0$ или $R_2 = \infty$ может оказаться неограниченным при $c_f \neq 0$. В самом деле, существует достаточно малая постоянная $k \in (0,1)$ такая, что функция kf удовлетворяет условию (2.8) и для нее выполняется (2.9). Тогда наше утверждение следует из неравенства

$$|T(r, f) - T(r, kf)| \leqslant \log\frac{1}{k},\quad r \in (R_1, R_2).$$

Отметим также, что формула (2.4′) позволяет дать геометрическую интерпретацию характеристики $T(r, f)$ аналогично случаю круга. При более тщательном анализе тождества (2.4′) можно установить, что характеристика $T(r, f)$ имеет, вообще говоря, более правильное поведение, чем это мы только что получили, даже если функция f имеет полюса на γ_{r_0}. Нетрудно доказать, например, что если $T(r, f)$ не ограничена на $[r_0, R_2]$ при $R_2 < \infty$, или если бесконечность не является устранимой особой точкой или полюсом для f, то тогда $T(r, f)$ строго монотонно возрастает в некоторой окрестности точка R_2. Аналогичное утверждение верно и для точки R_1.

Теперь сформулируем и докажем две основные теоремы теории мероморфных функций в случае кругового кольца.

Теорема 2.1. (Первая основная теорема для кольца). *Пусть* $f \in M(S(R_1, R_2))$, $f \neq \text{const}$ *и* $a \in C$. *Тогда* $T(r, f) = m(r, a, f) + N(r, a, f) + O(|\log r|)$ *при* $r \to R_1$ *и* $r \to R_2$.

Доказательство. Так как

$$m(r, \infty, f) = m(r, \infty, f-a) + \psi(r),$$

где $\psi(r)$ — ограниченная величина при $R_1 < r < R_2$, то имеем также

$$T(r, f) = T(r, f-a) + \psi(r).$$

Отсюда ясно, что достаточно доказать теорему при $a=0$. В силу теоремы 1.2 параграфа 1, функция f допускает O-разложение (1.1) с компонентами $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$. Очевидно, что функции $\frac{1}{f_1} \in M(V_{R_1})$ и $\frac{1}{f_2} \in M(D_{R_2})$ будут компонентами O-разложения функции $\frac{1}{f} \in M(S(R_1, R_2))$. В силу сформулированной выше леммы имеем

$$T(r, f) = T(r, f_1) + O(|\log r|) \text{ при } r \to R_1,$$

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + O(|\log r|) \text{ при } r \to R_1.$$

Согласно первой основной теореме Неванлинны

$$T(r, f_1) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \text{огр. величина.}$$

Из этих трех равенств получаем

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + O(|\log r|) =$$

$$= m(r, 0, f) + N(r, 0, f) + O(|\log r|) \text{ при } r \to R_1.$$

В случае $r \to R_2$ рассуждаем аналогичным образом. Теорема 2.1 доказана.

Для произвольного $\lambda \geqslant 1$ определим на (R_1, R_2) функцию μ_λ формулой

$$\mu_\lambda(r) = \begin{cases} |R_1 - r|^{-\lambda} & \text{при } R_1 < r \leqslant r_0 \\ |R_2 - r|^{-\lambda} & \text{при } r_0 < r < R_2 \text{ и } R_2 < \infty \\ r^\lambda & \text{при } r_0 < r < \infty \text{ и } R_2 = \infty \end{cases} \tag{2.10}$$

и положим $\mu_1(r) = \mu(r)$.

Теорема 2.2. (Вторая основная теорема для кольца). *Если $f \in M(S(R_1, R_2))$ и $a_1, a_2, \cdots, a_q$ — различные точки из $\overline{C}$, то*

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu, f) < 2T(r, f) - N_1(r, f) + Q(r, f), \tag{2.11}$$

где

$$N_1(r, f) = N(r, 0, f) + 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f'),$$

величина $Q(r, f)$ для любого $\lambda \geqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$Q(r, f) \leqslant \text{const} \log [\mu(r)\ T(r, f)] \quad \textit{при} \quad r \in (R_1, R_2) \setminus E_\lambda,$$

где E_λ — некоторое множество, для которого

$$\int\limits_{E_\lambda} \mu_\lambda(r)\, dr < \infty.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2.2, отметим что аналогично случаю круга, величина $N_1(r, f)$ измеряет число кратных точек функции f. Точнее, $N_1(r, f)$ представляется в виде

$$N_1(r, f) = \int\limits_{[r_0, r]} \frac{n_1(t, f)}{t}\, dt,$$

где $n_1(t, f)$ указывает число кратных точек функции f, лежащих в замкнутом кольце $\overline{S(r_0, t)}$ при $r_0 \leqslant t$ и в $\overline{S(t, r_0)}$ при $t < r_0$, причем каждая k-кратная точка считается $k-1$ раз.

Приступая к доказательству теоремы, будем считать без ограничения общности, что числа $a_1, a_2, \cdots, a_{q-1}$ конечны и $a_q = \infty$.

Аналогично случаю круга, повторяя рассуждения Р. Неванлинны [2] и применяя сформулированную выше первую основную теорему, получим неравенство (2.11) со следующей предварительной оценкой величины $Q(r, f)$:

$$Q(r, f) \leqslant m\left(r, \infty, \frac{f'}{f}\right) + \sum_{\nu=1}^{q-1} m\left(r, \infty, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) + O(|\log r|)$$

для всех $r \in (R_1, R_2)$.

Очевидно, теорема будет доказана, если мы покажем, что для любого $a \in C$ выполняется оценка

$$m\left(r, \infty, \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant \text{const} \log [\mu(r)\ T(r, f)] \ \text{при} \ r \in [R_1, R_2] \setminus E_\lambda(a),$$

где $E_\lambda(a)$ — некоторое множество, для которого

$$\int\limits_{E_\lambda(a)} \mu_\lambda(r)\, dr < \infty.$$

Как и при доказательстве первой основной теоремы, можно ограничиться случаем $a = 0$, так как

$$T(r, f - a) = T(r, f) + \text{огр. величина}.$$

Пусть $f = f_1 f_2$ — 0-разложение (1.1) функции f, где $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$. Тогда

$$m\left(r, \infty, \frac{f'}{f}\right) = m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}\right) \leqslant$$

$$< m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f}\right) + m\left(r, \infty, \frac{f_2'}{f_2}\right) + \log 2.$$

Пусть сначала $r \in (r_0, R_2)$. Тогда величина $m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f}\right)$ ограничена, величина $m\left(r, \infty, \frac{f_2'}{f_2}\right)$ оценивается по теореме Р. Неванлинны [2] о логарифмической производной:

$$m\left(r, \infty, \frac{f_2'}{f_2}\right) = O\left(\log\left[\mu(r)\, T(r, f_2)\right]\right), \quad r \in (r_0, R_2) \setminus E_\lambda',$$

где множество E_λ' такое, что

$$\int_{E_\lambda'} \mu_\lambda(r)\, dr < \infty.$$

Аналогично, при $r \in (R_1, r_0]$ величина $m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f_1}\right)$ имеет оценку

$$m\left(r, \infty, \frac{f_1'}{f}\right) = O\left(\log\left[\mu(r)\, T(r, f_1)\right]\right) \text{ при } r \in [R_1, r_0) \setminus E_\lambda'',$$

причем

$$\int_{E_\lambda''} \mu(r)\, dr < \infty.$$

Теперь наше утверждение непосредственно следует из приведенных трех оценок и сформулированной выше леммы, если обозначить $E_\lambda(0) = E_\lambda' \cup E_\lambda''$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Учитывая первую основную теорему, неравенство (2.11) второй основной теоремы можно записать в другом виде:

$$(q-2)\, T(r, f) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu, f) - N_1(r) + Q(r, f). \tag{2.12}$$

О п р е д е л е н и е. Пусть положительная функция $\sigma(r)$ определена в промежутке (R_1, R_2) и в некоторой окрестности точки R_2 отличается от монотонно возрастающей функции на ограниченную величину. Тогда верхний предел

$$\overline{\lim_{r \to R_2}} \frac{\log \sigma(r)}{\log \mu(r)} = \lambda_п$$

называется правым порядком функции σ. Напомним, что μ—введенная в (2.10) функция. Понятие левого порядка $\lambda_л$ функции σ определяется вполне аналогично:

$$\overline{\lim_{r\to R_1}} \frac{\log \sigma(r)}{\log \mu(r)} = \lambda_{л}.$$

Условимся считать мероморфную в кольце S функцию f того же левого (правого) порядка, что и ее характеристика $T(r, f)$. Левый порядок функции f обозначим через $\lambda_{л}(f)$, а правый порядок — через $\lambda_{п}(f)$.

В качестве дополнения второй основной теоремы можно утверждать, что остаточный член $Q(r, f)$ в неравенстве (2.11) (или (2.12)) имеет оценку

$$Q(r, f) = O(\log \mu(r)) \tag{2.13}$$

всюду на $[r_0, R_2)$, если только функция f имеет конечный правый порядок, положительный при $R_2 < \infty$.

Это утверждение (как и аналогичное утверждение для интервала (R_1, r_0) в терминах левого порядка) доказывается как в случае круга и плоскости [2] с использованием первой и второй основных теорем *Для кольца выполняется также аналог теоремы Пикара—Бореля.* Для мероморфной в кольце функции f величина $N(r, a, f)$ имеет более низкий, чем f правый (левый) порядок, самое большее для *двух* значений $a \in \overline{C}$, если только f имеет положительный и конечный правый (левый) порядок. Доказательство легко следует из (2.12) и (213).

Определение. Для функции $f \in M(S(R_1, R_2))$ величины

$$\delta_{л}(a, f) = \varliminf_{r\to R_1,\, r>R_1} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$\delta_{п}(a, f) = \varliminf_{r\to R_2,\, r<R_2} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}$$

назовем соответственно правым и левым дефектом функции в точке a.

В качестве следствия из второй основной теоремы имеем утверждение. *Пусть* $f \in M(S(R_1, R_2))$ *и*

$$\lim_{r\to R_j} \frac{T(r, f)}{\log \mu(r)} = \infty \ (j=1, 2).$$

Тогда $\delta_{л}$ *и* $\delta_{п}$ *равны нулю для каждого значения* $a \in \overline{C}$, *исключая, самое большее, счетное множество значений* a, *сумма дефектов которых не превышает* 2:

$$\sum_{a\in\overline{C}} \delta_{л}(a) \leqslant 2, \sum_{a\in\overline{C}} \delta_{п}(a) \leqslant 2.$$

Легко видеть, что полученный результат нельзя улучшить в классе всех функций $M(S(0, \infty))$. В качестве примера возьмем функцию $f(z) = \exp\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Тогда

$$m(r, \infty, f) = \frac{1}{\pi}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad N(r, a, f) = 0 \text{ при } a = 0, \infty,$$

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) = \frac{1}{\pi}\left(r + \frac{1}{r}\right).$$

Следовательно

$$\delta_л(a) = \delta_п(a) = 1 \quad \text{при } a \neq 0, \infty$$

и

$$\delta_л(0) + \delta_л(\infty) = \delta_п(0) + \delta_п(\infty) = 2.$$

Определение. Мы скажем, что функция $f \in M(S(R_1, R_2))$ имеет ограниченный вид, если $\sup\limits_{R_1<r<R_2} T(r, f) < \infty$. Класс функций ограниченного вида в кольце $S(R_1, R_2)$ обозначим через $N(S) = N(S(R_1, R_2))$.

При исследовании функций ограниченного вида достаточно ограничиться случаем, когда $0 < R_1 < R_2 < \infty$, так как при $R_1 = 0$ ($R_2 = \infty$) точка 0 (соответственно ∞) будет устранимой особой точкой или полюсом, так что вопрос сводится к уже изученному случаю односвязной области—к случаю круга или дополнения круга.

В самом деле, если, скажем, $R_1 = 0$ и $f \in N(S(0, R_2))$, то тогда из первой основной теоремы для любого $a \in C$ имеем:

$$N(r, a, f) = O(\log r) \text{ при } r \to 0,$$

откуда следует, что в окрестности нуля функция f имеет лишь конечное число a-точек, что возможно лишь тогда, когда нуль является устранимой особой точкой или полюсом.

Теорема 2.3. *Пусть* $0 < R_1 < R_2 < \infty$ *и* $f \in M(S(R_1, R_2))$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $f \in N(S(R_1, R_2))$;

2. *Имеет место представление*

$$f(z) = \varphi_1\left(\frac{R_1}{z}\right)\varphi_2\left(\frac{z}{R_2}\right) \text{ для } z \in S(R_1, R_2),$$

где φ_1 *и* φ_2 *— функции ограниченного вида в единичном круге;*

3. *Функция* f *допускает представление*

$$f = \frac{F_1}{F_2},$$

где F_1 *и* F_2 *— ограниченные аналитические функции в* $S(R_1, R_2)$.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1 следует условие 2. Пусть f_1 и f_2 — компоненты O-разложения функции f, так что

$$f(z) = f_1(z) f_2(z), \quad z \in S(R_1, R_2), \tag{2.14}$$

где $f_1 \in M(V_{R_1})$, $f_2 \in M(D_{R_2})$.

Так как $0 < R_1 < R_2 < \infty$, из сформулированной выше леммы следует, что $T(r, f)$ ограничена тогда и только тогда, когда одновременно ограничены характеристики $T(r, f_1)$ и $T(r, f_2)$. Это равносильно утверждению 2, если обозначить

$$\varphi_1(w) = f_1\left(\frac{R_1}{w}\right), \ \varphi_2(w) = f_2(R_1 w) \quad \text{при} \quad |w| < 1. \tag{2.15}$$

То что из условия 2 следует условие 3 является непосредственным следствием классической теоремы Р. Неванлинны [2] о том, что функция ограниченного вида в единичном круге (в данном случае функции φ_1 и φ_2) допускает представление в виде отношения двух ограниченных аналитических функций. Наконец, из условия 3 следует условие 1, так как в силу первой основной теоремы голоморфности и ограниченности функций F_1 и F_2 имеем

$$T(r, f) \leqslant T(r, F_1) + T\left(r, \frac{1}{F_1}\right) \leqslant T(r, F_1) + T(r, F_2) + O(1) =$$

$$= m(r, \infty, F_1) + m(r, \infty, F_2) + O(1) = O(1).$$

Теорема доказана.

Замечание. Из эквивалентности утверждений 1 и 2 вытекает, что функция ограниченного вида в кольце имеет радиальные (и даже угловые) предельные значения почти всюду на границе кольца (в смысле угловой лебеговской меры), так как этим свойством обладают функции ограниченного вида в круге.

Далее эквивалентность утверждений 1 и 2 дает нам возможность выписать некоторое параметрическое представление для функций ограниченного вида в кольце.

В самом деле, функции φ_1 и φ_2, как функции ограниченного вида в единичном круге, допускают [2] следующее параметрическое представление (при $|w| < 1$)

$$\varphi_1(w) = \left(\frac{R_1}{w}\right)^m e^{i\lambda_1} \frac{B_{11}(w)}{B_{12}(w)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \, d\mu_1(\theta)\right\}, \tag{2.16}$$

$$\varphi_2(w) = e^{i\lambda_2} \frac{B_{21}(w)}{B_{22}(w)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \, d\mu_2(\theta)\right\}, \tag{2.17}$$

где B_{kj} при $k, j = 1, 2$ — произведения Бляшке, μ_k — вещественные функции ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, λ_k — вещественные числа, а m — целое число. Число m появляется в силу утверждений (1.2) и (1.3) основной теоремы 1.2 параграфа 1, так как компонента f_1 O-разложения функции f может иметь нуль или полюс в бесконечности.

Таким образом, с учетом теоремы 2.3 и формул (2.16) и (2.17) имеет место следующая

Теорема 2.4. *Мероморфная в кольце $S(R_1, R_2)$ функция f, $f \not\equiv 0$ имеет ограниченный вид в том и только в том случае, если она допускает представление*

$$f(z)=z^m e^{i\lambda}\,\frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ze^{i\theta}+R_1}{ze^{i\theta}-R_1}\,d\mu_1(\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_2e^{i\theta}+z}{R_2e^{i\theta}-z}\,d\mu_2(\theta)\right\}, \qquad (2.18)$$

где m — целое число, λ — вещественная постоянная, μ_1 и μ_2 — вещественные функции ограниченной вариации на $[0,2\pi]$,

$$\pi_k(z)=B_{k,1}\left(\frac{R_1}{z}\right)B_{k,2}\left(\frac{z}{R_2}\right) \text{ для } k=1,\ 2,$$

а B_{k1} и B_{k2} — произведения Бляшке. При этом можно считать, что все четыре произведения $B_{k1}\left(\frac{R_1}{z}\right)$ и $B_{k2}\left(\frac{z}{R_2}\right)$, $k=1,2$ попарно не имеют общих нулей и их нули лежат в кольце $S(R_1, R_2)$.

Займемся теперь вопросом явного нахождения функций μ_1 и μ_2 через функцию f. С этой целью заметим сначала, что для фиксированной функции $f\in N(S(R_1, R_2))$ произведения π_1 и π_2 и число m (а следовательно и представление (2.18)) определяются не однозначным образом. Это связано с тем обстоятельством, что, скажем, любой корень функции можно по своему усмотрению включить или в произведение $B_{11}\left(\frac{R_1}{z}\right)$, или в $B_{12}\left(\frac{z}{R_2}\right)$.

Для достижения однозначности представления выберем некоторое число $r_0\in(R_1, R_2)$ и договоримся составить произведение $B_{11}\left(\frac{R_1}{z}\right)$ $\left(\text{соответственно } B_{21}\left(\frac{R_1}{z}\right)\right)$ для тех нулей (полюсов) функции f, которые лежат в кольце $S(R_1, r_0)$ (ср. с определением функции $n(t, a, f)$). Для дальнейшего будет также удобно выбрать r_0 так, чтобы функция f не имела нулей и полюсов на окружности $\gamma=\gamma_{r_0}$:

$$\gamma=\{z\in C:\ |z|=r_0\}.$$

Будем также считать, что γ ориентирована против часовой стрелки.

Теперь число m определяется однозначным образом, а функция $\mu_k(\theta)$, грубо говоря,—с точностью до линейной функции вида $c_k\theta+b_k$, где $c_1=-c_2$, причем число $c_1=-c_2$ можно выбрать произвольно.

Исходя из представления (2.18), определим с точностью до множителя вида $e^{i\lambda}$ функции φ_1 и φ_2 формулами (2.16) и (2.17), а через них, согласно (2.15), —функции f_1 и f_2, которые будут компонентами O-разложения функции f. При этом функция $f_2\in M(D_{R_1})$ не имеет нулей и полюсов в замкнутом круге $\overline{D}_{r_0}$, а $\frac{f_1(z)}{z^m}\in M(V_{R_1})$— вне круга

D_{r_0} (включая точку $z=\infty$). Тогда из (2.14) по теореме Коши о вычетах имеем

$$m=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

В дальнейшем для простоты мы будем считать, что $m=0$. Общий случай сводится к этому случаю, если заменить $f(z)$ на $\frac{f(z)}{z^m}$. Из условия $m=0$ следует, что ветви функции $\log f_1$ представляют собой однозначную голоморфную функцию в замкнутой области $\overline{V}_{r_0}$. То же самое верно и для функции $\log f_2$ в области D_{r_0}. Из (2.14) получаем тогда для $z\overline{\in}\gamma$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{z+\zeta}{\zeta-z}\log f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log f_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log f_2(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=J_1(z)+J_2(z).$$

Отсюда, рассматривая отдельно случай $|z|<r_0$ и $|z|>r_0$ по теореме Коши о вычетах находим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=\begin{cases}2\log f_2(z)+c_0 & \text{при } |z|<r_0,\\ -2\log f_1(z)+c_0 & \text{при } |z|>r_0,\end{cases}\qquad(2.19)$$

где

$$c_0=\log\frac{f_1(\infty)}{f_2(0)}.$$

В представлениях (2.16) и (2.17) производные функций $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$, почти для всех $\theta\in[0,2\pi]$ определяются, как известно, равенствами (с учетом, что $m=0$):

$$\mu_1'(\theta)=\log|\varphi_1(e^{i\theta})|=\log|f_1(R_1e^{-i\theta})|,$$
$$\mu_2'(\theta)=\log|\varphi_2(e^{i\theta})|=\log|f_2(R_2e^{i\theta})|.$$

Отсюда с учетом формулы (2.19) окончательно находим:

$$\mu_1'(\theta)=\log|f(R_1e^{-i\theta})|-\log|f_2(R_1e^{-i\theta})|=\log|f(R_1e^{-i\theta})|-$$
$$-\frac{1}{4\pi i}\int_\gamma\operatorname{Re}\left[\frac{\zeta+R_1e^{-i\theta}}{\zeta-R_1e^{-i\theta}}\log f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-c,$$

$$\mu_2'(\theta)=\log|f(R_2e^{i\theta})|+\frac{1}{4\pi i}\int_\gamma\operatorname{Re}\left[\frac{\zeta+R_2e^{i\theta}}{\zeta-R_2e^{i\theta}}\log f(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}+c.$$

Эти соотношения выполняются почти для всех $\theta\in[0,2\pi]$. При этом c — некоторая вещественная постоянная:

$$c = -\frac{1}{2}\operatorname{Re} c_0 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{f_2(0)}{f_1(\infty)}\right|,$$

которая полностью определится, если фиксировать значение $|f_1(\infty)|$ или $|f_2(0)|$, так как устремляя z к бесконечности в формуле (2.19) и выделяя вещественную часть, получим

$$\log|f_1(\infty)\, f_2(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r_0 e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Можно указать также ряд других соотношений между функциями f, μ_1 и μ_2. Например, используя гармоничность функций $\log|f_1|$ и $\log|f_2|$ и формулу Пуассона, нетрудно получить формулу (при $|z| < r_0$):

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)\log|f(\zeta)|\frac{d\zeta}{\zeta} = \log|f_2(z)| + \log\left|f_1\left(\frac{r_0^2}{\bar z}\right)\right|\cdot$$

Переходя здесь к полярным координатам и полагая $z = R_1 e^{i\theta}$, в случае $r_0 = \sqrt{R_1 R_2}$, получим для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\mu_1'(\theta) + \mu_2'(\theta) = \log|f(R_1 e^{-i\theta})\, f(R_2 e^{i\theta})| -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\, e^{i\varphi} + e^{i\theta}}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\, e^{i\varphi} - e^{i\theta}}\right)\log|f(\sqrt{R_1 R_2}\, e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Эта формула сохраняет силу также и в том случае, когда функция f имеет нули или полюса на окружности γ (при $r_0 = \sqrt{R_1 R_2}$).

Следующая теорема является аналогом известной теоремы единственности Карлемана на случай кругового кольца. Выше мы отметили, что функция $f \in N(S(R_1, R_2))$ при $0 < R_1 < R_2 < \infty$ имеет угловые предельные значения почти всюду на границе кольца $S(R_1, R_2)$ в смысле линейной лебеговской меры. Эти граничные значения мы обозначим через $f(R_1 e^{i\theta})$ и $f(R_2 e^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Теорема 2.5. *Пусть f—мероморфная функция ограниченного вида в кольце $S(R_1, R_2)$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и*

$$\int_0^{2\pi}\log|f(R_1 e^{i\theta})\, f(R_2 e^{i\theta})|\, d\theta = -\infty. \tag{2.20}$$

Тогда $f \equiv 0$.

Доказательство. В силу утверждения 3 теоремы 2.3 функция f допускает представление

$$f = \frac{F_1}{F_2}, \tag{2.21}$$

где F_1 и F_2 — ограниченные аналитические функции в кольце $S(R_1, R_2)$. Можно считать, что $|F_2| < 1$. Очевидно также, что формула (2.21) сохраняется и для граничных значений этих функций. Из неравенства

$$|f(R_1 e^{i\theta}) f(R_2 e^{i\theta})| \geqslant |F_1(R_1 e^{i\theta}) F_1(R_2 e^{i\theta})|, \ \theta \in [0, 2\pi],$$

следует, что достаточно доказать теорему при предположении, что функция f голоморфна и ограничена в $S(R_1, R_2)$. Тогда в силу теоремы 1.2 и утверждений (1.1), (1.2) и (1.3) этой теоремы, функция f допускает представление

$$f(z) = z^{-m} f_1(z) f_2(z), \ z \in S(R_1, R_2), \tag{2.22}$$

где функция f_1 голоморфна и ограничена в круге D_{R_1}, функция f_2 голоморфна и ограничена вне замыкания круга D_{R_1}, а $m \geqslant 0$ — целое число. Теперь из предположения $f \not\equiv 0$ следует, что $f_1 \not\equiv 0$ и $f_2 \not\equiv 0$, откуда в силу теоремы единственности Карлемана (для круга и внешности круга), имеем

$$\int_0^{2\pi} \log |f_j(re^{i\theta})| \, d\theta > -\infty \quad \text{для} \quad j = 1, 2 \quad \text{и при} \quad r \in [R_1, R_2].$$

Это условие вместе с (2.22) противоречит условию (2.20) теоремы. Теорема, таким образом, доказана.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 18.III.1974

Հ. Հ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ. Բազմակապ տիրույթներում մերոմորֆ ֆունկցիաների մի ֆակտորիզացիայի և նրա որոշ կիրառությունների մասին (*ամփոփում*)

Հաշվի առնելով, որ կամայական n — կապանի D տիրույթ հանդիսանում է միակապ D_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ տիրույթների հատում, ապացուցվում է, որ D տիրույթում մերոմորֆ ցանկացած f ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} f_j(z), \ z \in D$$

տեսքով, որտեղ f_j ֆունկցիան մերոմորֆ է D_j տիրույթում և բավարարում է որոշ լրացուցիչ պայմանների։

Այս արդյունքը ձևակերպված և ապացուցված է հոդվածի առաջին պարագրաֆում։

Երկրորդ պարագրաֆում ցույց է տրված, թե ինչպես կարելի է նշված ֆակտորիզացիոն թեորեմայի օգնությամբ շրջանային օղակի համար ստանալ մի շարք այնպիսի արդյունքներ, ինչպիսին են մերոմորֆ ֆունկցիայի արժեքների բաշխման առաջին և երկրորդ հիմնական թեորեմները, սահմանափակ տիպի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացումը, Կարլեմանի միակության թեորեմայի անալոգը և այլն։

H. H. MATHEVOSSIAN. *On a factorisation of meromorphic function in multiplg connected domain and some of its applications* (summary)

Every n-connected domain D is an intersection of connected domain D_j $(j=1, 2, \cdots, n)$. This fact enables us to present every meromorphic function in D in the form

of $f(z)=\prod_{j=1}^{n} f_j(z)$ with f_j meromorphic in D_j. This enables to give method (section 2), by which in ringshaped domain we are able to recieve results like first and second fundamental theorems, the parametrical representation of function of bounded type, the analogues of Karleman's uniqueness theorem etc.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna.* La thioreme Picard-Borel et la theorie des functions meromorphes, Paris, 1929.
2. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
3. *L. Sario, K. Noshiro.* Value distribution theory, Princeton (N. Y.) Van Nostrand' 1966.
4. *В. А. Зморович.* О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце, Мат. сборник, 32 (74), 1953, 633—652.
5. *В. А. Зморович.* О структурных формулах теории специальных классов аналитических функций и некоторых их приложениях, Изв. Киевск. политехн. ин-та, т. XV, 1954, 126—148.
6. *В. А. Зморович.* О некоторых классах аналитических функций в круговом кольце, Мат. сборник, 40 (82), 1956, 225—238.
7. *С. А. Касьянюк.* О функциях классов A и H_δ в круговом кольце, Мат. сборник, 42 (84): 3, 1957, 301—326.
8. *H Villat.* Le probleme de Dirichlet dans une aire annulaire, Rend. Circolo Matem. di Palermo, XXXIII, 1912, 134—174.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5. 1974 Математика

А. А. ЧУБАРЯН

О ДЛИНАХ ВЫВОДОВ ФОРМУЛ В РАСШИРЕНИЯХ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

В настоящей работе сравнивается длина выводов формул в двух формальных системах, в одной из которых доказуема непротиворечивость другой. Аналогичная задача по сравнению числа шагов выводов рассматривалась Гёделем [1]. Им была сформулирована следующая теорема: пусть S—непротиворечивая формальная система, которая получается посредством присоединения к формальной арифметике оператора w (см. [5]), и пусть система S_1 получается из S путем добавления аксиом квантификации II порядка; при этом некоторые формулы, недоказуемые и неопровержимые в S становятся доказуемыми или опровержимыми в S_1; тогда для любой вычислимой функции φ найдется формула F такая, что для длин l и l_1 (определяемых как число формул) самых коротких ее доказательств в S и S_1 имеет место $l>\varphi(l_1)$.

Доказательство этой теоремы впервые было опубликовано Крейселом и Ваном [2]. При этом авторами указывается, что вычислимость функции φ несущественна; фактически в [2] доказано, что существует бесконечная последовательность формул с одной и той же длиной вывода в S_1, в то время как длины выводов тех же формул в S не ограничены. Введение функции φ в формулировку теоремы придает ей вид утверждения об оценке функции Шеннона для сравнения числа шагов выводов в двух вышеназванных системах. Однако, если сложность вывода определяется как количество формул в нем, то построение указанной функции Шеннона оказывается, вообще говоря, невозможным, так как в рассматриваемых формальных системах за одно и то же число шагов можно вывести бесконечно много различных формул.

Мостовским доказан в [3] вариант теоремы Гёделя, в котором в качестве длины вывода берется гёделев номер этого вывода. Автор вводит в формулировку требование вычислимости функции φ, что существенно для его результата, однако при этом рассматриваемые им системы оказываются более сложными (подробнее о работе Мостовского будет сказано ниже).

Арбибом в [4] устанавливается сходство теоремы „ускорения доказательств“ Гёделя с теоремой ускорения вычислений Блюма.

В настоящей работе также сравниваются по длине выводов две формальные системы, но определяемая нами сложность вывода дает возможность определить функцию Шеннона для сравнения минимальной длины вывода формулы в более широкой системе с минимальной длиной вывода той же формулы в первоначальной системе (при этом сравнение проводится лишь для тех формул, которые выводимы одновременно в обеих системах). Устанавливается, что указанная функция Шеннона всюду на достаточно больших натуральных числах превышает любую наперед заданную общерекурсивную функцию. Такое утверждение может рассматриваться как аналог теоремы Рабина [8] для оценок сложности длин выводов.

В работе все термины и утверждения понимаются конструктивно [9].

Определим рассматриваемые формальные системы.

Через S обозначим обычную формальную арифметику ([5], гл. IV) с алфавитом ( ), $|\, a\, 0\, \&\, \vee\, \supset\, \neg\, \exists\, \forall\, +\, \cdot\, |\, =$. а также с обычным определением терма, формулы и вывода. При этом предметные переменные определяются как слова в алфавите системы: под переменной X_i мы будем понимать слово $(\overbrace{||\cdots|}^{i \text{ раз}} a)$.

Первая из рассматриваемых нами систем (в дальнейшем будем обозначать ее через S^0) получается присоединением к S функциональных переменных для всевозможных примитивно рекурсивных функций, а также термов и аксиом, имеющих вид определяющих равенств для примитивной рекурсии и суперпозиции. При этом функциональные переменные мы определим как слова в алфавите, полученном присоединением нового символа f к алфавиту системы S: переменную f_i^n размерности n определим как слово $(\overbrace{||\cdots|}^{i \text{ раз}} f \overbrace{||\cdots|}^{n \text{ раз}})$.

Как известно, утверждение о непротиворечивости формальной системы может быть выражено в ней различными способами. Одну из общепринятых формул, посредством которой в системе S^0 можно выразить непротиворечивость S^0 и которая недоказуема в S^0 (см., напр., [5], русский перевод, стр. 189) зафиксируем и будем обозначать ее в дальнейшем через „Consis".

Вторая из рассматриваемых систем является таким непротиворечивым расширением S^0, в котором доказуема формула Consis.

В частности, систему такого рода можно получить, присоединив Consis к S^0 в качестве аксиомы. Одно из таких расширений системы S^0 (неважно которое) зафиксируем и будем впредь обозначать через S^1.

Длину формулы мы будем понимать в соответствии с обычным пониманием длины слова.

В дальнейшем буква W будет использоваться нами в роли переменной, допустимыми значениями которой являются всевозможные выводы в системе S^0 и в системе S^1, а буква F в роли переменной, допустимыми значениями которой являются формулы, выводимые в S^0 (ясно, что эти формулы выводимы также и в S^1).

Длину вывода W формулы F в системе $S^i\,(i=0, 1)$ определим как сумму длин всех формул этого вывода и обозначим через $L\,(W \underset{i}{\rightarrow} F)$.

В дальнейшем термин „псевдофункция" будет пониматься нами в том же смысле, как введено в [10] и [11].

Будем называть число n сложностью формулы F по выводимости в системе S^i ($i=0, 1$), если оно равно минимальной из длин всевозможных выводов этой формулы в системе S^i. В силу этого, n является значением псевдофункции $\overline{L}^i\,(F)$, определяемой следующим соотношением:

$$(\overline{L}^i\,(F)=n) \equiv (\neg\neg\exists W\,(L\,(W \underset{i}{\rightarrow} F)=n)\ \&\ \forall W\,(L\,(W \underset{i}{\rightarrow} F)\geqslant n)).$$

Ясно, что для каждой формулы $F\ \overline{L}^1\,(F)\leqslant \overline{L}^0\,(F)$.

Определим псевдофункцию Шеннона $Ш^{10}$ посредством следующего соотношения

$$(Ш^{10}\,(n)=m) \equiv (\forall F\,(\overline{L}^1\,(F)\leqslant n \supset \neg\neg\exists W\,(L\,(W \underset{0}{\rightarrow} F)\leqslant m))\ \&$$

$$\&\forall m'\,(m'<m \supset \neg\forall F\,(\overline{L}^1\,(F)\leqslant n \supset \neg\neg\exists W\,(L\,(L\,(W \underset{0}{\rightarrow} F)\leqslant m'))))^*.$$

Теорема. *Для всякой обще-рекурсивной функции φ существует такое натуральное число n_0, что для всех $n>n_0$ имеет место*

$$Ш^{10}\,(n)>\varphi\,(n).$$

Замечание: Для сложности вывода, понимаемой в смысле определения Мостовского [3], можно определить псевдофункцию Шеннона $Ш^{10}$ так же, как это сделано выше, и тогда результат Мостовского [3] может быть сформулирован следующим образом: для всякой обще-рекурсивной функции φ существует число n_0 такое, что $Ш^{10}\,(n_0)>\varphi\,(n_0)$. Следует отметить, что формальные системы, рассматриваемые в книге Мостовского, допускают введение функциональных символов для произвольных обще-рекурсивных функций; таким образом, эти системы более сложны по сравнению с системами, рассматриваемыми в настоящей статье.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, введем некоторые понятия и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Условимся, как обычно, для любого целого неотрицательного n терм $(\cdots((0)')'\cdots)'$, представляющий в интерпретации наших формальных систем натуральное число n, обозначать через $\overline{n}$.

---

* Соотношения, с помощью которых были введены указанные псевдофункции могут быть сокращенно записаны в виде

$$\overline{L}^i\,(F)=\min_{W} L\,(W \underset{i}{\rightarrow} F)$$

и

$$Ш^{10}\,(n)=\max_{\overline{L}^1\,(F)\leqslant n} \overline{L}^0\,(F).$$

Далее строчными буквами x, y, z, u, v, w (возможно с индексами) будем обозначать математические переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа (в содержательном понимании). Отметим, что, в отличие от метаматематических переменных, переменные наших формальных систем обозначаются заглавными буквами X_i $(i = 1, 2, \cdots)$.

Для дальнейшего нам нужно зафиксировать одну из гёделевых нумераций формальных объектов системы S^0. Нам будет удобно пользоваться арифметизацией, основанной на следующей нумерации (аналогичная нумерация рассматривается в [5]):

$$g\,(()=3,\ g\,())=5,\ g\,(,)=7,\ g\,(|)=9,\ g\,(a)=11,\ g\,(0)=$$
$$=13,\ g\,(f)=15,$$
$$g\,(\&)=17,\ g\,(V)=19,\ g\,(\supset)=21,\ g\,(\urcorner)=23,\ g\,(\exists)=25,\ g\,(\forall)=27,$$
$$g\,(')=29,\ g\,(+)=31,\ g\,(\cdot)=33,\ g\,(=)=35.$$

Пусть дано слово $m_0 m_1 \cdots m_r$, где все m_i какие-либо из вышеприведенных символов. Гёделевский номер $g\,(m_0 m_1 \cdots m_r)$ этого слова определим как $2^{g\,(m_0)} \cdot 3^{g\,(m_1)} \cdots p_r^{g\,(m_r)}$, где p_i есть i-ое простое число $(p_0 = 2)$.

Если через $c\,(i)$ обозначить гёделев номер переменной X_i, то, по определению, $c\,(i) = 2^3 \cdot \left(\prod\limits_{k=1}^{i} p_k^9\right) \cdot p_{i+1}^{11} \cdot p_{i+2}^{5}$, следовательно, $c\,(i)$ — примитивно рекурсивная функция.

Наконец, гёделев номер произвольной последовательности $e_0 e_1 \cdots \cdots e_q$ слов определим следующим образом:

$$g\,(e_0 e_1 \cdots e_q) = 2^{g\,(e_0)} \cdot 3^{g\,(e_1)} \cdots p_q^{g\,(e_q)}.$$

Отметим, что вывод может рассматриваться как последовательность слов, являющихся формулами.

Нетрудно убедиться, что функция g взаимно однозначно отображает множество всех символов, выражений и конечных последовательностей слов системы S^0 в некоторое примитивно рекурсивное множество целых положительных чисел.

Мы будем говорить, следуя [6], что предикат $R\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ нумерически выразим в S^0, если существует формула $\overline{R}(X_1, X_2, \cdots X_n)$ системы S^0 с n свободными переменными такая, что для любых натуральных чисел $k_1, k_2, \cdots, k_n$

(1) если $R\,(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, то $\vdash_{S^0} \overline{R}\,(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \cdots, \overline{k}_n)$;

(2) если же неверно $R\,(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, то $\vdash_{S^0} \urcorner \overline{R}\,(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \cdots, \overline{k}_n)$.

Как известно, всякий обще-рекурсивный предикат нумерически выразим в S^0.

Определим следующую функцию:

$$\text{Дв}(y) = \sum_{i=0}^{lh(y)} lh(ex_i(y)),$$

где $lh(y)$ есть функция, равная числу отличных от нуля показателей в разложении числа y на простые множители, и $ex_i(y)$ — функция, равная показателю числа p_i в разложении y на простые множители. В силу примитивной рекурсивности двух последних функций (см., напр., [6]), функция Дв (y) также примитивно рекурсивна. Нетрудно убедиться, что для значений y, которые являются гёделевыми номерами выводов, Дв (y) дает длину вывода с номером y.

Напомним определения следующих примитивно рекурсивных функций и предикатов (см. [6]).

$\mathrm{Fml}(x)$: „x является гёделевым номером некоторой формулы".

$\mathrm{Sub}\,st(x, y, u, v)$: „$x$ является гёделевым номером результата подстановки терма с гёделевым номером u вместо всех свободных вхождений переменной с гёделевым номером v в выражение с гёделевым номером y".

$\mathrm{Sub}(y, u, v)$ = гёделеву номеру результата подстановки терма с гёделевым номером u вместо всех свободных вхождений переменной с гёделевым номером v в выражение с гёделевым номером y.

$\mathrm{Pf}(y, x)$: „y является гёделевым номером вывода формулы с гёделевым номером x".

$\mathrm{Num}(y)$ = гёделеву номеру $\overline{y}$.

Определим функцию: $\rho(x, y)$ = гёделеву номеру результата подстановки в формулу с гёделевым номером x терма с гёделевым номером y вместо всех свободных вхождений переменной X_3. Из определения следует, что $\rho(x,y) = \mathrm{Sub}(x, y, 2^{c(3)})$, следовательно, является примитивно рекурсивной функцией.

Функциональную переменную, соответствующую функции ρ, обозначим через $\overline{\rho}$, а гёделев номер переменной $\overline{\rho}$ — через c_ρ.

Определим предикат: $T(u, v, w, z)$: „существует такое x, что $x \leqslant u$, и x является гёделевым номером произвольной формулы $A(X_1, X_3)$ со свободными переменными X_1 и X_3, и $u = \rho(x, w)$, и v является гёделевым номером вывода длины $\leqslant z$ формулы $A(\overline{\rho}(\overline{x}, \overline{w}), \overline{w})$".

Нетрудно показать, что этот предикат примитивно рекурсивен, действительно

$$T(u, v, w, z) \equiv \exists x_{x<u} (\mathrm{Fml}(x) \,\&\, \neg\, \mathrm{Sub}\,st(x, x, 2^{c(x)}, 2^{c(1)}) \,\&$$

$$\&\, \neg\, \mathrm{Sub}\,st(x, x, 2^{c(x)}, 2^{c(3)})$$

$$\&\, u = \rho(x, w)$$

$$\&\, \mathrm{Pf}(v, \mathrm{Sub}(\rho(x, w), 2^{c_\rho} \cdot 3^3 \cdot 5^{\mathrm{Num}(x)} \cdot 7^7 \cdot 11^{\mathrm{Num}(w)} \cdot 13^5, 2^{c(1)})$$

$$\&\, \text{Дв}(v) \leqslant z).$$

Пусть $\tau(t, z)$ — такая примитивно рекурсивная функция, что для каждого t существует z такое, что $\tau(t, z) = 0$.

Посредством $V_\tau(x_1, x_2, x_3)$ будем в дальнейшем обозначать предикат

$$V_\tau(x_1, x_2, x_3) \equiv \exists x_4 ((\tau(x_3, x_4) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < x_4 \supset \neg (\tau(x_3, x_5) = 0)))\&$$

$$\& T(x_1, x_2, x_3, x_4)).$$

Предикат

$$V'_\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\tau(x_3, x_4) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < x_4 \supset \neg (\tau(x_3, x_5) = 0)))\&$$

$$\& T(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

является примитивно рекурсивным, а значит, нумерически выразимым в S^0, следовательно, существует формула системы S^0 $\overline{V'_\tau}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ со свободными переменными X_1, X_2, X_3, X_4 такая, что для всех k_1, k_2, k_3, k_4, если $V'_\tau(k_1, k_2, k_3, k_4)$, то $\vdash_{S^0} \overline{V'_\tau}(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4)$. Если обозначить функциональную переменную для функции τ через $\bar{\tau}$, то в качестве $\overline{V'_\tau}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ может служить формула

$$(\bar{\tau}(X_3, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \neg (\bar{\tau}(X_3, X_5) = 0))) \& \bar{T}(X_1, X_2, X_3, X_4), \qquad (*)$$

где $\bar{T}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ — некоторая фиксированная формула, нумерически выражающая в S^0 предикат $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$. В дальнейшем за формулой (*) зафиксируем обозначение $\overline{V'_\tau}(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Обозначим формулу $\exists X_4 \overline{V'_\tau}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ через $\overline{V_\tau}(X_1, X_2, X_3)$. Нетрудно показать, что для произвольного набора натуральных чисел k_1, k_2, k_3, если имеет место $V_\tau(k_1, k_2, k_3)$, то $\vdash_{S^0} \overline{V_\tau}(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3)$.

Возьмем формулу $\forall X_2 \neg \overline{V_\tau}(X_1, X_2, X_3)$. Свободными переменными этой формулы являются X_1 и X_3. Пусть ее гёделев номер есть c_τ.

Формулу $\forall X_2 \neg \overline{V_\tau}(\bar{\varphi}(\bar{c}_\tau, X_3), X_2, X_3))$ обозначим через F_τ. Результат подстановки произвольного терма r в формулу F_τ вместо переменной X_3 будем записывать в виде $[F_\tau]_r^{X_3}$.

Лемма 1. *Если S^0 — непротиворечивая система, то для всяких натуральных чисел l и m, если m наименьшее такое число, что $\tau(l, m) = 0$, то формула $[F_\tau]_{\bar{l}}^{X_3}$ не выводима в S^0 с длиной вывода, не превышающей m.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть S^0 — непротиворечивая система и для некоторых l и m, m является минимальным таким, что $\tau(l, m) = 0$, и формула $[F_\tau]_{\bar{l}}^{X_3}$ выводима в S^0 с длиной вывода, не превышающей m. Пусть k есть гёделев номер этого вывода.

Рассмотрим вывод формулы $[F_\tau]^{X}_{\bar{l}}$ в S^0; приписав к нему две формулы

$$\forall X_2 \urcorner \overline{V}_\tau (\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}), X_2, \bar{l}) \supset \urcorner \overline{V}_\tau (\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}), \bar{k}, \bar{l})$$

и

$$\urcorner \overline{V}_\tau (\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}), \bar{k}, \bar{l}),$$

получим вывод формулы $\urcorner \overline{V}_\tau (\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}), \bar{k}, \bar{l})$ в S^0.

Итак

$$\vdash_{S_0} \urcorner \overline{V}_\tau (\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}), \bar{k}, \bar{l}). \qquad (**)$$

С другой стороны, для рассматриваемых l и m имеем

$$\tau(l, m) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < m \supset \urcorner (\tau(l, x_5) = 0)),$$

и c_τ является гёделевым номером формулы со свободными переменными X_1 и X_3, и k является геделевым номером вывода длины, не превышающей m, формулы, получающейся из формулы с номером c_τ, в результате подстановки $\overline{\rho(\bar{c}_\tau, \bar{l})}$ вместо X_1 и $\bar{l}$ вместо X_3.

Следовательно, имеет место $V_\tau(\rho(c_\tau, l), k, l)$, значит,

$$\vdash_{S^0} \overline{V}_\tau(\overline{\rho(c_\tau, l)}, \bar{k}, \bar{l}).$$

Поскольку термам $\overline{\rho(c_\tau, l)}$ и $\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l})$ в интерпретации системы S^0 соответствуют одни и те же числа, то

$$\vdash_{S^0} \overline{\rho(c_\tau, l)} = \bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}),$$

а следовательно, по теореме о замене (см. [5]. русск. перевод, стр. 167)

$$\vdash_{S^0} \overline{V}_\tau (\bar{\rho}(\bar{c}_\tau, \bar{l}), \bar{k}, \bar{l}),$$

что вместе с (**) противоречит предположению о непротиворечивости S^0, значит наше допущение было неверным.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $\vdash_{S^0} \mathrm{Consis} \supset \forall X_3 F_\tau$.

Поскольку утверждение леммы 1 может быть формально записано в виде формулы

$$\mathrm{Consis} \supset \forall X_3 \forall X_4 \forall X_2 (\bar{\tau}(X_3, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \urcorner (\bar{\tau}(X_3, X_5) = 0)) \supset$$
$$\supset \urcorner \overline{T}(X_1, X_2, X_3, X_4)),$$

то посредством формализации метаматематического доказательства леммы 1 получим

$$\vdash_{S^0} \mathrm{Consis} \supset \forall X_3 \forall X_4 \forall X_2 (\bar{\tau}(X_3, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \urcorner (\bar{\tau}(X_3, X_5) =$$
$$= 0)) \supset \urcorner \overline{T}(X_1, X_2, X_3, X_4)),$$

и в силу эквивалентности $\forall X_3 F_{\bar{\tau}}$ и

$$\forall X_3 \forall X_4 \forall X_2 (\bar{\tau}(X_3, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4) \supset \neg (\bar{\tau}(X_3, X_5) = 0)) \supset$$

$$\supset \neg \bar{T}(X_1, X_2, X_3, X_4))$$

имеем $\vdash_{S^*} \mathrm{Consis} \supset \forall X_3 F_{\bar{\tau}}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Для всякой обще-рекурсивной функции* φ *существует обще-рекурсивная функция* ψ *такая, что*

$$\forall a \forall b \left(b \neq 0 \supset \exists n_0 \forall n \left(n > n_0 \supset \psi\left(\left[\frac{n-a}{b}\right]\right) > \varphi(n)\right)\right).$$

Доказательство. Достаточно положить

$$\psi(m) = \max_{\substack{d \neq 0 \\ c+d \leqslant m}} \left(\max_{p \leqslant d \dot{-} 1} \varphi(c + dm + p)\right) + 1.$$

Действительно, для фиксированных a и $b \neq 0$ положим $n_0 = b(a+b)+a$. Если $n > n_0$, то $n - a > b(a+b)$. Тогда для $m = \left[\frac{n-a}{b}\right]$ и $p = n - a - b\left[\frac{n-a}{b}\right]$ имеем: $n = a + bm + p$ и тогда, ввиду $a + b \leqslant m$ и $p < b$, $\psi\left(\left[\frac{n-a}{b}\right]\right) = \psi(m) \geqslant \varphi(a + bm + p) + 1 > \varphi(n)$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы.

Зафиксируем произвольную обще-рекурсивную функцию φ. Наша задача заключается в нахождении такого n_0, чтобы для всех $n > n$ выполнялось неравенство

$$Ш^{10}(n) > \varphi(n).$$

Для функции φ построим функцию ψ, удовлетворяющую условиям леммы 3.

Известно, что для каждой обще-рекурсивной функции, в частности для ψ, имеет место следующее представление [7]:

$$\psi(x) = \mu_z(\tau_\psi(x, z) = 0) \dot{-} \mu_z(\tau'_\psi(x, z) = 0),$$

где $\tau_\psi(x, z)$ (соответственно $\tau'_\psi(x, z)$) такая примитивно рекурсивная функция, которая удовлетворяет следующему условию: для каждого x существует z такое, что $\tau_\psi(x, z) = 0$ (соответственно $\tau'_\psi(x, z) = 0$).

Обозначим $\mu_z(\tau_\psi(x, z) = 0)$ через $\tilde{\psi}(x)$. Ясно, что

$$\forall x (\tilde{\psi}(x) \geqslant \psi(x)). \qquad (***)$$

Возьмем функцию τ_ψ и построим формулу F_{τ_ψ}. Утверждение леммы 2 для этой формулы заключается в следующем:

$$\vdash_{S^0} \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi},$$

а следовательно

$$\vdash_{S^1} \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}.$$

Для произвольного t вывод формулы $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}$ в S^1 можно построить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\\ \text{Consis}\end{array}\right\}\ \text{вывод формулы Consis}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\\ \text{Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}\end{array}\right\}\ \text{вывод формулы Consis} \supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}$$

$$\begin{array}{l}\forall X_3 F_{\tau_\psi}\\ \forall X_3 F_{\tau_\psi} \supset [F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}\\ [F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}.\end{array}$$

Оценим длину этого вывода для фиксированного t. Заметим, что длина терма $\bar t$ равна $3t + 1$. Пусть длины выводов формул Consis и Consis $\supset \forall X_3 F_{\tau_\psi}$ равны соответственно l и l_ψ. Длина формулы $\forall X_3 F_{\tau_\psi}$ также равна некоторой константе; обозначим ее через l'_ψ. Пусть переменная X_3 входит в формулу F_{τ_ψ} в l''_ψ местах, тогда длина формулы $\forall X_3 F_{\tau_\psi} \supset [F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}$ равна $l'_\psi + 1 + l'_\psi - 1 - 6 + l''_\psi (3t + 1 - 6)$*, где $l'_\psi - 7 + l''_\psi (3t - 5)$ есть длина формулы $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}$. Таким образом, длина указанного вывода равна

$$l + l_\psi + l'_\psi + l'_\psi + 1 + 2\,(l'_\psi - 7 + l''_\psi \cdot 3t - 5 l''_\psi) = c'_\psi t + c''_\psi,$$

где $c'_\psi = 6\, l''_\psi$ и $c''_\psi = l + l_\psi + 4 l'_\psi - 10\, l''_\psi - 13$.

Возьмем в качестве n_0 число

$$c'_\psi\,(c'_\psi + c''_\psi) + c''_\psi.$$

Тогда для всякого фиксированного $n > n_0 \geqslant c'_\psi + c''_\psi$ найдется такое максимальное t, что $c'_\psi \cdot t + c''_\psi \leqslant n$. Действительно, этим требованиям удовлетворяет $t = \left[\dfrac{n - c''_\psi}{c'_\psi}\right]$. Для него имеем: длина вывода формулы $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}$ в S^1 не превышает n.

Нетрудно убедиться в том, что формула $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}$ выводима также и в системе S^0. Действительно, $[F_{\tau_\psi}]^{X_3}_{\bar t}$ есть

---

* Длина переменной X_3 равна 6.

$$\forall X_3 \neg \exists X_4 ((\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, X_4)=0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \neg (\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, X_5)=0))) \& \bar{T} (\bar{\rho} (\bar{c}_{\tau_\psi}, \bar{t}), X_2, \bar{t}, X_4)).$$

Эта формула эквивалентна формуле

$$\forall X_4 \forall X_2 (\neg (\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, X_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < X_4 \supset \neg (\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, X_5)=0)) \vee \neg \bar{T} (\bar{\rho} (\bar{c}_{\tau_\psi}, \bar{t}), X_2, \bar{t}, X_4)).$$

Так как для t существует единственное z_1 такое, что выполняется условие

$$\tau_\psi (t, z_1) = 0 \& \forall x_5 (x_5 < z_1 \supset \neg (\tau_\psi (t, x_5) = 0)),$$

то в S^0 формально доказуема формула

$$\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, \bar{z}_1) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < \bar{z}_1 \supset \neg (\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, X_5)=0)),$$

и для каждого $x_4 \neq z_1$ доказуема формула

$$\neg (\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, \bar{x}_4) = 0 \& \forall X_5 (X_5 < \bar{x}_4 \supset \neg (\bar{\tau}_\psi (\bar{t}, X_5)=0)));$$

эту формулу будем в дальнейшем обозначать через B.

Для каждого x_4 доказуемо в S^0 $\bar{x}_4 = \bar{z}_1 \vee \neg (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$.

Взяв в качестве посылки $\neg (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$, можно доказать B, затем доказать дизъюнкцию

$$B \vee \neg \bar{T} (\bar{\rho} (\bar{c}_{\tau_\psi}, \bar{t}), X_2, \bar{t}, \bar{x}_4)$$

и ввести квантор общности по X_2.

Для $x_4 = z_1$ можно выписать все выводы длины, не превышающей z_1. Пусть их гёделевы номера суть $g_1, g_2, \cdots, g_p$. Максимальное из этих чисел обозначим через g. Можно доказать для каждого x_2, что если x_2 является гёделевым номером вывода длины, не превышающей z_1, то $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g}$.

Для каждого x_2 в S^0 доказуемо $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g} \vee \bar{x}_2 > \bar{g}$. Возьмем в качестве посылок $\bar{x}_4 = \bar{z}_1$ и $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g}$. Из этих посылок можно вывести противоречие (как при доказательстве леммы 1), и следовательно, вывести любую формулу, в частности

$$B \vee \neg \bar{T} (\bar{\rho} (\bar{c}_{\tau_\psi}, \bar{t}), \bar{x}_2, \bar{t}, \bar{x}_4).$$

Если же взять в качестве посылок $\bar{x}_4 = \bar{z}_1$ и $\bar{x}_2 > \bar{g}$, то можно формально доказать $\neg \bar{T} (\bar{\rho} (\bar{c}_{\tau_\psi}, \bar{t}), \bar{x}_2, \bar{t}, \bar{x}_1)$, и введя дизъюнкцию, доказать $B \vee \neg \bar{T} (\bar{\rho} (\bar{c}_{\tau_\psi}, \bar{t}), \bar{x}_2, \bar{t}, \bar{x}_4)$. В силу доказуемости $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g} \vee \bar{x}_2 > \bar{g}$ можно удалить посылки $\bar{x}_2 \leqslant \bar{g}$ и $\bar{x}_2 > \bar{g}$, ввести квантор общности по X_2: и далее, в силу доказуемости $\bar{x}_4 = \bar{z}_1 \vee \neg (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$, удалить посылки $\bar{x}_4 = \bar{z}_1$ и $\neg (\bar{x}_4 = \bar{z}_1)$ и ввести квантор общности по X_4. Итак, формула $[F_{\tau_\psi}]_{\bar{t}}^{X_1}$ выводима в S^0.

Теперь, в силу непротиворечивости S^0 и утверждения леммы 1, длина вывода этой формулы в S^0 превышает по величине то минимальное z, для которого имеет место

$$\tau_{\psi}(t, z) = 0,$$

т. е. длина вывода превышает $\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}\left(\left[\frac{n - c''_{\psi}}{c'_{\psi}}\right]\right)$.

Итак, для нашего фиксированного n построена формула (именно $[F_{\tau_\psi}]^{x_1}_{\bar{t}}$) такая, что длина ее вывода в S^1 не превышает n, а в S^0 больше, чем $\bar{\psi}\left(\left[\frac{n - c''_{\psi}}{c'_{\psi}}\right]\right)$, следовательно, по определению псевдофункции Шеннона $Ш^{10}$, имеем

$$Ш^{10}(n) > \bar{\psi}\left(\left[\frac{n - c''_{\psi}}{c'_{\psi}}\right]\right),$$

и в силу (***)

$$Ш^{10}(n) > \psi\left(\left[\frac{n - c''_{\psi}}{c'_{\psi}}\right]\right).$$

Но поскольку $n > n_0$, то в силу утверждения леммы 3 имеем

$$\psi\left(\left[\frac{n - c''_{\psi}}{c'_{\psi}}\right]\right) > \varphi(n),$$

а значит

$$Ш^{10}(n) > \varphi(n).$$

Теорема доказана.

Замечание. Н. В. Петри любезно указал автору на работу [12], в которой сравниваются по длине выводов две системы, одна из которых получается из другой добавлением такой аксиомы, объединение отрицания которой с первоначальной системой даёт неразрешимую теорию. Показывается, что функция Шеннона, аналогичная рассматриваемой в настоящей работе, не мажорируется никакой обще-рекурсивной функцией.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность И. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа. Автор благодарен также Г. Б. Маранджяну за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 8.X.1973

Ա. Ա. ԶՈՒԲԱՐՅԱՆ. Ֆորմալ թվաբանության ընդլայնումներում բանաձևերի արտածման երկարության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում համեմատվում են ըստ բանաձևերի արտածումների երկարության երկու ֆորմալ համակարգեր, որոնցից մեկում ապացուցվում է մյուսի անհակասելիությունը։ Բանաձևի

արտածման նվազագույն երկարությունը ընդլայնված և սկզբնական համակարգերում համեմատելու համար սահմանվում է Շեննոնի պսևդոֆունկցիա (համեմատումը կատարվում է միայն այն բանաձևերի համար, որոնք երկու համակարգերում էլ արտածելի են)։ Ապացուցվում է, որ Շեննոնի նշված պսևդոֆունկցիան բոլոր բավականաչափ մեծ բնական թվերի համար գերազանցում է կամայական նախօրոք տրված ընդհանուր-ռեկուրսիվ ֆունկցիային։

A. A. CHOUBARIAN. *On the length of formal deductions in the extensions of formal arithmetic* (summary)

In this paper two systems S^0 and S^1 are considered as extensions of formal arithmetic, S^0 being a subsystems of S^1 and the consistency of S^0 is provable in S^1.

The Shannons pseudo-function is defined in order to compare the minimal lengths of formal deductions of the same formulas in S^0 and S^1. It is proved (the main result of the paper) that this pseudo-function is greater than every general recursive function starting with some natural number.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Gödel.* Über die Länge von Beweisen, Ergebnisse eines math. Koll. Heft 7, 1936, 23—24.
2. *G. Krejsel, Hao Wang.* Some applikations of formalised consistency proofs, Fund. math., 42, № 1, 1955.
3. *A. Mostowski.* Senteces undecidable in formalised arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel, North-Holland, Amsterdam, 1952, 112—115.
4. *M. A. Arbib.* Speed-up theorems and incompleteness theorems, „Automata theory". N. J.-L., Acad. Press., 1966, 6—24.
5. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, 1952. (Русский перевод: С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИИЛ, 1957).
6. *E. Mendelson.* Introduction to Mathematical Logic. (Русский перевод: Э. Мендельсон, Введение в математическую логику. Изд. „Наука", 1971).
7. *Th. Skolem.* Remarks on recursive functions and relations.
8. *M. O. Rabin.* Speed of computation of functions and classification of recursive sets, Bull. Rec. Counc. of Israel, 8F, 1959, 69—70.
9. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, LII, 1968, 226—311.
10. *И. Д. Заславский.* О псевдофункциях Шеннона, Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР, т. 16, 65—76.
11. *М. Г. Гельфонд.* О конструктивных псевдофункциях, Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, т. 16, 20—28.
12. *A. Ehrenfeucht, J. Mycielski.* Abbreviating proofs by adding new axioms, BAMS, № 3, V. 77, 1971, 366—367.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 5, 1974 Математика

Б. М. ЕДИГАРЯН, Д. К. ФАДДЕЕВ

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ, СВЯЗАННЫХ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ПОЛУГРУППЫ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Настоящая статья примыкает к работе [1], в которой исследуются комплексные представления полугруппы матриц над конечным полем $k = GF(q)$, $q = p^c$. В [1] основную роль играет выяснение невырожденности матриц

$$\pi_\Delta = \sum_{P_i, P_j, Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q}'\,\overline{P}_i)\,\Delta(\overline{Q}'\,\overline{P}_j) \times l_{P_i, P_j}.$$

Здесь Δ — неприводимое представление группы $L(m, k)$ невырожденных матриц порядка m; P_i и P_j — m-мерные подпространства в n-мерном пространстве S_n столбцов над полем k; $\overline{P}_i$ — матрица вида $n \times m$, столбцы которой составляют некоторый базис пространства P_i; $\overline{Q}'$ пробегает матрицы вида $m \times n$, строки которых составляют базисы всех m-мерных подпространств в n-мерном пространстве строк. Если под знаком Δ находится вырожденная матрица, то значение Δ считается равным 0.

Матрица π_Δ коммутирует с матрицами представления $\lambda_m^n \Delta = \Delta \circ 1_{n-m}$ группы $L(n, k)$. Здесь 1_{n-m} обозначает единичное представление группы $L(n-m, k)$, кружком обозначено умножение представлений групп $L(m, k)$ и $L(n-m, k)$ в смысле [2]. Представление $\lambda_m^n \Delta$ задается следующей явной формулой:

$$(\lambda_m^n \Delta)(A) = \sum_P \Delta(\alpha(A, P)) \times l_{AP, P}.$$

Здесь $A \in L(n, k)$; $\alpha(A, P) \in L(m, k)$ и определяется формулой $A\overline{P} = \overline{AP} \cdot \alpha(A, P)$.

Цель настоящей статьи — доказать невырожденность матриц π_Δ при любых m и n, если Δ есть единичное представление. В дальнейшем мы будем обозначать π_Δ при $\Delta = 1_m$ через π_m^n, опустив знак Δ и подчеркнув зависимость от m и n.

1°. Эпиморфизм алгебры $\mathbf{U}_m^n$ на алгебру $\mathbf{U}_{m-1}^n$. Как показано в [1], алгебра матриц, коммутирующих с матрицами представления $S_m^n = \lambda_m^n(1_m)$ имеет вид: $\mathbf{U}_m^n = \{c_0 U_{0m}^n + c_1 U_{1m}^n + \cdots + c_m U_{mm}^n\}$, где $U_{fm}^n = \sum_{\dim P_i \cap P_j = f} e_{P_i, P_j}$. Алгебра U_m^n коммутативна. Мы будем считать, что $m \leqslant 1/2\, n$ и лишь в конце статьи рассмотрим случай $m > n/2$. В предположении $m \leqslant n/2$ все матрицы U^n_{fm}, $f = 0, 1, \cdots, m$ имеют смысл, так что ранг алгебры U^n_m равен $m+1$. Как показано в [1], имеется мономорфизм ψ модуля представления S^n_{m-1} в модуль представления S^n_m. Именно, модуль S^n_m имеет базис $\{e_{P_i}\}$, где P_i пробегает все m-мерные подпространства пространства S_n и мономорфизм ψ действует по формуле $\psi(e_{Q_j}) = \sum\limits_{P_i \supset Q_j} e_{P_i}$; здесь через $\{e_{Q_j}\}$ обозначен базис модуля S^n_{m-1} и через Q_j обозначены $(m-1)$-мерные подпространства S_n. Ясно, что $S^n_m = \psi(S^n_{m-1}) \oplus T^n_m$, где T^n_m — неприводимое представление группы $L(n, k)$. Степень представления T^n_m равна

$$\frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-m+1}-1)}{(q-1)\cdots(q^m-1)} - \frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-m+2}-1)}{(q-1)\cdots(q^{m-1}-1)}.$$

Соответственно, алгебра U^n_m раскладывается в прямую сумму алгебр, одна из которых изоморфна U^n_{m-1}, другая—полю C. Поэтому существует эпиморфизм ψ^* алгебры U^n_m на U^n_{m-1}, естественным образом связанный с мономорфизмом ψ.

Выведем явную формулу для эпиморфизма ψ^*. С этой целью прежде всего вычислим

$$U^n_{fm}\, \psi(e_{Q_1}) = \sum_{P_j \supset Q_1} \sum_{\dim P_i \cap P_j = f} e_{P_i} = \alpha_f \tau_f + \beta_f \tau_{f-1},$$

где $\tau_f = \sum\limits_{\dim P_i \cap Q_1 = f} e_{P_i}$.

Коэффициент α_f обозначает число m-мерных подпространств P_j, содержащих Q_1 и имеющих f-мерное пересечение с P_i, в предположении, что $\dim P_i \cap Q_1 = f$; β_f обозначает то же самое, но в предположении, что $\dim P_i \cap Q_1 = f-1$. Других значений, кроме f и $f-1$ число $\dim P_i \cap Q_1$ не может иметь. Положим $P_i \cap Q_1 = R$ и перейдем в факторпространство по R, обозначив этот переход тильдой. Если

$$\dim R = f-1, \text{ то } \dim \tilde{Q}_1 = m-f, \ \dim \tilde{P}_i = \dim \tilde{P}_j = m-f+1,$$

$$\dim \tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j = 1, \ \dim \tilde{P}_i \cap \tilde{Q}_1 = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{P}_j \supset \tilde{Q}_1.$$

Все это обозначает, что $\tilde{P}_j$ получается из $\tilde{Q}_1$ сложением с одномерным подпространством, содержащимся в $\tilde{P}_i$. Поэтому β_f равно числу таких подпространств, т. е. $\beta_f = \dfrac{q^{m-f+1}-1}{q-1}$. Если же

$$\dim R = f, \text{ то } \dim \tilde{Q}_1 = m-f-1, \ \dim \tilde{P}_i = \dim \tilde{P}_j = m-f,$$

$$\dim \widetilde{P}_l \cap \widetilde{P}_j = 0, \ \dim \widetilde{P}_l \cap \widetilde{Q}_1 = 0 \ \text{и} \ \widetilde{P}_j \supset \widetilde{Q}_1.$$

Это означает, что $\widetilde{P}_j$ есть любое подпространство размерности $m-f$, содержащее $\widetilde{Q}$, кроме тех, которые получаются из $\widetilde{Q}_1$ сложением с одномерными пространствами, содержащимися в $\widetilde{P}_l$. Поэтому

$$\alpha_f = \frac{q^{n-m+1}-1}{q-1} - \frac{q^{m-f}-1}{q-1} = \frac{q^{n-m+1}-q^{m-f}}{q-1}.$$

Теперь вычислим

$$\sigma_k = \psi(U^n_{k,m-1} e_{Q_1}) = \sum_{\dim Q\cap Q_1=k} \psi(e_Q) = \sum_{\dim Q\cap Q_1=k} \ \sum_{P_l\supset Q} e_{P_l} = V_k\tau_k + \delta_k\tau_{k+1}.$$

Здесь $\tau_k = \sum\limits_{\dim P_l\cap Q_1=k} e_{P_l}$, в соответствии с обозначением, введенным выше; коэффициент ν_k равен числу $(m-1)$-мерных подпространств Q, содержащихся в P_l и имеющих с Q_1 k-мерное пересечение, в предположении, что $\dim P_l \cap Q_1 = k$; коэффициент δ_k обозначает то же самое, но в предположении, что $\dim P_l \cap Q_1 = k+1$. Ясно, что ν_k равно числу $(m-1)$-мерных подпространств m-мерного пространства P_l, содержащих k-мерное подпространство $P_l \cap Q_1$, так что $\nu_k = \dfrac{q^{m-k}-1}{q-1}$, а δ_k равно числу $(m-1)$-мерных подпространств пространства P_l, не содержащих $(k+1)$-мерное подпространство $P_l \cap Q_1$, так что

$$\delta_k = \frac{q^m-1}{q-1} - \frac{q^{m-k-1}-1}{q-1} = \frac{q^m - q^{m-k-1}}{q-1}.$$

Из системы равенств

$$\sigma_{m-1} = \tau_{m-1},$$

$$\sigma_{m-2} = \frac{q^2-1}{q-1}\tau_{m-2} + \frac{q^m-q}{q-1}\tau_{m-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sigma_1 = \frac{q^{m-1}-1}{q-1}\tau_1 + \frac{q^m-q^{m-2}}{q-1}\tau_2,$$

$$\sigma_0 = \frac{q^m-1}{q-1}\tau_0 + \frac{q^m-q^{m-1}}{q-1}\tau_1,$$

находим

$$\tau_f = (q-1)\left[\frac{1}{q^{m-f}-1}\sigma_f - \frac{q^m-q^{m-f-1}}{(q^{m-f}-1)(q^{m-f-1})}\sigma_{f+1} + \right.$$

$$\left. + \dots + (-1)^{m-f-1}\frac{(q^m-q^{m-f-1})\cdots(q^m-q)}{(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)}\sigma_{m-1}\right].$$

Как мы выяснили выше

$$U^n_{fm}\ \psi(e_{Q_1}) = \frac{q^{n-m+1}-q^{m-f}}{q-1}\tau_f + \frac{q^{n-f+1}-1}{q-1}\tau_{f+1} =$$

$$= \sigma_{f-1} + \frac{q^{n-m+1}-q^m}{q-1}\tau_f$$

(при $f=0$ первое слагаемое отсутствует).

Подставляя вместо τ_f его выражение через σ_i, мы придем к формуле

$$U^n_{fm}(\psi e_{Q_1}) = \psi((\psi^* U^n_{fm}) e_{Q_1}),$$

где

$$\psi^* U^n_{fm} = U^n_{f-1,\, m-1} + \frac{q^{n-m+1}-q^m}{q^{m-f}-1} U^n_{f,\, m-1} -$$

$$- \frac{(q^{n-m+1}-q^m)(q^m-q^{m-f-1})}{(q^{m-f}-1)(q^{m-f-1}-1)} U^n_{f+1,\, m-1} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{m-f-1}\frac{(q^{n-m+1}-q^m)(q^m-q^{m-f-1})\cdots(q^m-q)}{(q^{m-f}-1)(q^{m-f-1}-1)\cdots(q-1)} U^n_{m-1,\, m-1}.$$

Ясно, что ψ^* и есть искомый эпиморфизм алгебры U^n_m на алгебру U^n_{m-1}.

Используя выведенную формулу для ψ^*, мы имеем возможность индуктивно найти все гомоморфизмы алгебры U^n_m в поле комплексных чисел. Именно, зная гомоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m-1}$ алгебры U^n_{m-1} в C (их кратности равны степеням неприводимых представлений $T^n_0, \cdots, T^n_{m-1}$), мы найдем соответствующие гомоморфизмы алгебры $\mathrm{U}^n{}_m$ (с теми же кратностями), как $\varphi_0\psi^*, \cdots, \varphi_{m-1}\psi^*$. Последний гомоморфизм φ_m находится из того, что сумма всех гомоморфизмов (с учетом кратностей, которые известны) равна следу. Однако, явные формулы для гомоморфизмов алгебры U^n_m в поле C очень громоздки, и мы их приводить не будем.

2°. Собственные значения матрицы π^n_m.

Лемма. $\psi^*\pi^n_m = q^{2n-4m+2}\pi^n_{m-1}$.

Доказательство. Согласно формулам (7) и (8) из [1], матрица π^n_m (при $m \leqslant n/2$) равна

$$\sum_{f=0}^{m} q^{(n-2m+f)m+1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\, U^n_{fm}.$$

Действительно, матрица Λ_f, участвующая в формуле (7), равна в рассматриваемом случае (согласно формуле (8)) числу невырожденных треугольных матриц порядка m и вида $\begin{pmatrix} E_f, & B_1 \\ 0, & B_2 \end{pmatrix}$, которое, как легко видеть, равно $q^{1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)$. Применение гомоморфизма ψ^* дает:

$$\psi^*\pi_m^n = \sum_{f=1}^{m} q^{(n-2m+f)m+1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\,U_{f-1,\,m-1}^n +$$

$$+\sum_{f=0}^{m-1}(q^{n-m+1}-q^m)\,q^{(n-2m+f)m+1/2(m-f)(m+f-1)}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\times$$

$$\times\sum_{k=f}^{m-1}(-1)^{k-f}\frac{(q^m-q^{m-f-1})\cdots(q^m-q^{m-k})}{(q^{m-f}-1)\cdots(q^{m-k}-1)}\,U_{k,\,m-1}^n.$$

В первой сумме заменим $f-1$ на k, во второй—сделаем тривиальные преобразования и изменим порядок суммирования. Получим

$$\psi^*\pi_m^n = \sum_{k=0}^{m-1} q^{(n-2m+k+1)m+1/2(m+k)(m-k-1)}(q^{m-k-1}-1)\cdots(q-1)\,U_{k,\,m-1}^n +$$

$$+(q^{n-m+1}-q^m)\sum_{k=0}^{m-1}(q^{m-k-1}-1)\cdots(q-1)\,q^{(n-2m+k)m+1/2(m-k)(m-k-1)}\times$$

$$\times\sum_{f=0}^{k} q^f(1-q^{f+1})\cdots(1-q^k)\,U_{k,\,m-1}^n,$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\sum_{f=0}^{k} q^f(1-q^{f+1})\cdots(1-q^k)=1,$$

$$\psi^*\pi_m^n = q^m\sum_{k=0}^{m-1} q^{(n-2m+k)m+1/2(m+k)(m-k-1)}(q^{m-k-1}-1)\cdots(q-1)\,U_{k,\,m-1}^n +$$

$$+(q^{n-m+1}-q^m)\sum_{k=0}^{m-1} q^{(n-2m+k)m+1/2(m+k)(m-k-1)}(q^{m-k-1}-1)\cdots$$

$$\cdots(q-1)\,U_{k,\,m-1}^n = q^{2n-4m+2}\,\pi_{m-1}^n,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы и сказаного выше следует, что собственные значения $\varphi_i(\pi_{m-1}^n)$, $i=0,\cdots,m-1$, матрицы π_{m-1}^n, после умножения на $q^{2n-4m+2}$, превращаются в собственные значения $\varphi_i(\pi_m^n)$ матрицы π_m^n, с сохранением кратностей. Последнее собственное значение определяется из сравнения следов:

$$Sp\,\pi_m^n = q^{2n-4m+2}\,Sp\,\pi_{m-1}^n + t_m\,\varphi_m(\pi_m^n).$$

Здесь t_m есть кратность собственного значения $\varphi_m(\pi_m^n)$, равная степени неприводимого представления T_m^n группы $L(n,k)$, так что

$$t_m = \frac{(q^n-1\cdots(q-1)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m}-1)\cdots(q-1)} -$$

$$-\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)}{(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)(q^{n-m+1}-1)\cdots(q-1)}=$$

$$=\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)(q^{n-m+1}-q^m)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m+1}-1)\cdots(q-1)}.$$

Далее

$$Sp\,\pi^n_m=q^{(n-m)m}\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m}-1)\cdots(q-1)}.$$

Здесь первый множитель равен диагональному элементу матрицы π^n_m, второй множитель равен ее порядку. После несложных преобразований получим

$$\varphi_m(\pi^n_m)=q^{nm-m^2-m}.$$

Пусть теперь $0\leqslant s<m$. Тогда

$$\varphi_s(\pi^n_m)=\varphi_s(\pi^n_s)\cdot q^{2n-4s-2}\cdot q^{2n-4s-6}\cdots q^{2n-4m+2}=q^{2m(n-m)-s(n-s+1)}.$$

Таким образом, все собственные значения матрицы π^n_m отличны от нуля и являются степенями числа q.

Формула для собственных значений выведена в предположении, что $m\leqslant 1/2\,n$. Легко видеть, что матрица π^n_m равна матрице π^n_{n-m}, при надлежащей нумерации строк и столбцов. Поэтому в предположении $m\geqslant 1/2n$ для собственных значений матрицы π^n_m сохраняется прежняя формула и только индекс s нужно считать меняющимся от 0 до $n-m$.

Ленинградское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова АН СССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 16.VII.1973

Բ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ. Դ. Կ. ՖԱԴԴԵԵՎ. Որոշ մատրիցների չվերասերվածությունը, կապված վերջավոր դաշտերի վրա մատրիցների կիսախմբի ներկայացման հետ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հաշվվում է π_Δ մատրիցայի սեփական արժեքները, երբ $\Delta=1$ [1] աշխատանքի տերմիններով և ցույց է տրվում այդ մատրիցների չվերասերվածությունը։

B. M. EDIGARIAN, D. K. FADDEEV. *On the nonsingularity of certain matrices connected with representations of a semigroup of matrices over finite field* (summary)

Eigenvalues of matrices π_Δ with $\Delta=1$ are calculated in terms of [1]. The nonsingularity of this matrices is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Едигарян* и *Д. К. Фаддеев.* Комплексные представления полугруппы матриц ранга 2 над конечным полем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.,' VI, № 6, 1971, 440—457.
2. *J. A. Creen.* The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer., Math· Soc., 80, № 2, 1955, 402—467.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS