ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը. հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН ...мянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть ...более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печат...ный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому ре...шению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на ...машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть ...приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответ...ствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны ...быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя ...черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, ...индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы ...должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием ...их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть ...указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издатель...ство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, ...журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых ...источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (про...тив оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления ...считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экзем...пляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по моти...вам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выпол...нена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и ...отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

1977 ...

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

Г. В. АМБАРЦУМЯН

ОБ ОПЕРАТОРАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

Введение

В статье И. Б. Симоненко [4] и в книге [1] установлен критерий возможности факторизации ограниченных, измеримых функций и матриц-функций в пространствах L_p с весом. Там же получены приложения факторизации к решению сингулярных интегральных уравнений в пространствах L_p с весом.

В настоящей статье результаты о факторизации переносятся на случай пространств $\tilde{l}_p$ с весом. Полученные результаты применяются для обращения теплицевых матриц.

Факторизация функций, заданных на единичной окружности, в пространстве $\tilde{l}_p$ означает представление отвечающей этой функции бесконечной теплицевой матрицы в виде произведении треугольных теплицевых матриц (с некоторыми дополнительными свойствами).

Статья состоит из двух параграфов. В первом параграфе рассматривается факторизация функций, во втором—матриц-функций.

§ 1. Факторизация функций

1. **Вспомогательные предложения.** Через $\tilde{l}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ обозначается банахово пространство всех двусторонних последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ с нормой

$$\|\xi\| = \Big(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\xi_j|^p \Big)^{1/p}.$$

Обозначим через P проектор, действующий в пространстве $\tilde{l}_p$ по правилу: $P\{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\cdots, 0, \xi_0, \xi_1, \cdots\}$ и $Q = I \cdot P$.

Каждой функции $a(t)$, интегрируемой на единичной окружности, сопоставим линейный оператор T_a, определенный в пространстве $\tilde{l}_p$ матрицей $\|a_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, где $a_j\,(j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ — коэффициенты Фурье функции $a(t)$.

Через R_p обозначается множество функций $a(t)$, для которых оператор T_a ограничен в пространстве $\tilde{l}_p$.

Приведем две вспомогательные леммы, доказательства которых можно найти в [1].

Лемма 1. *Если* $a(t) \in \mathrm{R}_p$ $(1 < p < \infty)$, *то выполняется неравенство:*

$$\|T_a\|_{\widetilde{l}_p} \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{|t|=1} |a(t)|.$$

Лемма 2. *Пусть* $a(t) \in \mathrm{R}_p$ $(1 < p < \infty)$. *Если* $a(t)$ *отлична от нуля на множестве положительной меры, то хотя бы одно из уравнений*

$$(T_a P + Q)\varphi = 0 \quad (\varphi \in \widetilde{l}_p), \ (T_{\widetilde{a}} P + Q)\psi = 0 \ (\psi \in \widetilde{l}_q, \ p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

имеет единственное нулевое решение.

Если $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — какая-нибудь последовательность комплексных чисел, то через C_φ обозначим матрицу $\|c_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, где $c_{jk} = \varphi_{j-k}$ при $j-k > 0$ и $c_{jk} = 0$ при остальных j и k, а через B_φ — матрицу $\|b_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, где $b_{jk} = \varphi_{j-k}$ при $j-k \leqslant 0$ и $b_{jk} = 0$ при остальных j и k.

Если $A = \|a_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, то через A' обозначается транспонированная матрица $\|a_{kj}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$, а через $\overline{A}$ — матрица $\|\overline{a}_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$. Через A^* будем обозначать сопряженную матрицу $(\overline{A})'$.

2. Определение факторизации. Пусть $a(t) \in L_\infty$. Факторизацией матрицы T_a в пространстве $\widetilde{l}_p$ $(1 < p < \infty)$ называется ее представление в виде

$$T_a = B_\xi \, T_{t^\varkappa} \, C_\eta, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — целое число, а матрицы B_ξ и C_η удовлетворяют следующим условиям:

1) $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_p$, $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_q \cdot (p^{-1} + q^{-1} = 1)$, матрицы B_ξ и C_η обратимы, причем $B_\xi^{-1} = B_h$, $h = \{h_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_q, C_\eta^{-1} = C_s$, $s = \{s_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_p$;

2) оператор $B_\xi P B_\xi^{-1}$ ограничен в пространстве $\widetilde{l}_p$.

Лемма 3. *В факторизации* (1) *число* $\varkappa$ *определяется единственным способом, а матрицы* B_ξ *и* C_η *— с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Действительно, пусть $T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta$ и $T_a = B_{\xi'} T_{t^{\varkappa'}} C_{\eta'}$, где B_ξ, $B_{\xi'}$, C_η, $C_{\eta'}$ удовлетворяют условиям 1) и 2).

Допустим, что $\varkappa > \varkappa'$. Так как левая часть равенства

$$C_\eta \, C_{\eta'}^{-1} = B_\xi^{-1} \, B_{\xi'} \; T_{t^{\varkappa'-\varkappa}}$$

является нижне треугольной матрицей, а правая часть — верхне треугольной с нулями на главной диагонали, то $C_\eta \, C_{\eta'}^{-1} = 0$. Это противоречит определению C_{τ}. Следовательно, $\varkappa \leqslant \varkappa'$. Аналогично доказывается, что $\varkappa \geqslant \varkappa'$. Таким образом, $\varkappa = \varkappa'$.

Итак, имеем $T_a = B_{\xi} T_{t^{\varkappa}} C_{\tau_1}$, $T_a = B_{\xi'} T_{t^{\varkappa}} C_{\tau_1'}$. Из этих равенств следует равенство $C_{\tau_1} C_{\tau_1'}^{-1} = B_{\xi}^{-1} B_{\xi'}$, из которого заключаем, что

$$C_{\tau_1} C_{\tau_1'}^{-1} = B_{\xi}^{-1} B_{\xi'} = \alpha I,$$

где I — единичная матрица. Следовательно, $C_{\tau_1} = \alpha C_{\tau_1'}$, $B_{\xi} = \alpha^{-1} B_{\xi'}$.

Лемма доказана.

3. Критерий возможности факторизации в пространствах $\tilde{l}_p$. В этом пункте устанавливается критерий возможности факторизации матрицы T_a в пространствах $\tilde{l}_p$.

Теорема 1. *Пусть* $a^{-1}(t) \in \mathrm{R}_p$ $(1 < p < \infty)$. *Для того чтобы матрица* T_a *допускала факторизацию* (1) *в пространстве* $\tilde{l}_p$ *необходимо и достаточно, чтобы оператор* $A = T_a P + Q$ *был Ф-оператором в пространстве* $\tilde{l}_p$*.

Если A *является Ф-оператором, то*

$$\varkappa = -\operatorname{ind} A.$$

Доказательство. Доказательство необходимости условий теоремы аналогично доказательству, проведенному в [1, теорема 3.1, стр. 272].

Докажем ее достаточность. Пусть оператор $A = T_a P + Q$ является Ф-оператором в пространстве $\tilde{l}_p$ $(1 < p < \infty)$ и его индекс равен $\varkappa$.

Из равенств

$$T_a P + Q = (T_{at^{-\varkappa}} P + Q)(T_{t^{\varkappa}} P + Q) \quad (\varkappa > 0),$$

$$T_{at^{-\varkappa}} P + Q = (T_a P + Q)(T_{t^{-\varkappa}} P + Q) \quad (\varkappa < 0)$$

следует, что $T_{at^{-\varkappa}} P + Q$ является Ф-оператором с нулевым индексом. Отсюда и из леммы 2 следует, что оператор $T_{at^{-\varkappa}} P + Q$ обратим в пространстве $\tilde{l}_p$. Тогда из равенства

$$T_{\bar{a}t^{\varkappa}} P + Q = (I - P\, T^{-1}_{\bar{a}t^{\varkappa}} Q)\,(T_{at^{-\varkappa}} P + Q)^{*}\,(I + Q T_{\bar{a}t^{\varkappa}} P)$$

вытекает, что оператор $T_{\bar{a}t^{\varkappa}} P + Q$ является обратимым в пространстве $\tilde{l}_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

---

* Оператор A называется Ф-оператором, если он нормально разрешим и числа $\alpha = \dim \ker A$ и $\beta = \dim \operatorname{coker} A$ конечны. Разность $\varkappa = \alpha - \beta$ называется индексом оператора A.

Обозначим через $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l_p}$ решение уравнения $(T_{at^{-x}} P + Q)\xi = e_0$, а через $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l_q}$ — решение уравнения $(T_{\bar{a}t^x} P + Q)\,\eta = e_0$, где $e_0 = \{\cdots, 0, \underset{(0)}{1}, 0, \cdots\}$. Тогда имеют место следующие матричные равенства

$$T_{at^{-x}}\, C_\xi = -B_\xi + (1+\xi_0)\, I, \tag{2}$$

$$T_{\bar{a}t^x}\, C_\eta = -B_\eta + (1+\eta_0)\, I. \tag{3}$$

Переходя в (3) к сопряженным матрицам, получим

$$C_\eta^*\, T_{at^{-x}} = -B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0)\, I. \tag{4}$$

Умножая (2) слева на матрицу C_η^* и учитывая (4), получим

$$[-B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0)\, I]\, C_\xi = C_\eta^*\,[-B_\xi + (1+\xi_0)\, I].$$

Так как левая часть последнего равенства есть нижне треугольная матрица, а правая часть — верхне треугольная, то отсюда вытекает, что

$$[-B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0) I]\; C_\xi = C_\eta^*\,[-B_\xi + (1+\xi_0)\, I] = \xi_0 I = \bar{\eta}_0\, I. \tag{5}$$

Покажем, что $\xi_0 \neq 0$. Если $\xi_0 = 0$, то равенство (5) принимает вид

$$(-B_\eta^* + I)\, C_\xi = C_\eta^*\,(-B_\xi + I),$$

откуда следует, что $\xi_j = 0$ при $j = 1, 2, \cdots$. Но это противоречит тому, что $\xi = \{\xi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ есть решение уравнения $(T_{at^{-x}} P + Q)\,\xi = e_0$.

Но $\xi_0^{-1}[-B_\eta^* + (1+\bar{\eta}_0)\, I] = C_\varphi$, где $\varphi = \{\varphi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l_q}$, $\varphi_j = -\xi_0^{-1}\bar{\eta}_{-j}$

$$(j = \pm 1, \pm 2, \cdots),\quad \varphi_0 = \xi_0^{-1};\quad \xi_0^{-1}\, C_\eta^* = B_\psi,$$

где

$$\psi = \{\psi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l_q},\quad \psi_j = \xi_0^{-1}\bar{\eta}_{-j}\quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$-B_\xi + (1+\xi_0)\, I = B_h,\quad h = \{h_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l_p},\quad h_j = -\xi_j (j = \pm 1, \pm 2, \cdots),\quad h_0 = 1.$$

Таким образом, имеем $C_\varphi C_\xi = C_\xi C_\varphi = I$, $B_\psi B_h = B_h B_\psi = I$.

Умножая (2) на матрицу C_φ получим $T_{at^{-x}} = B_h C_\varphi$, откуда вытекает следующее представление для T_a:

$$T_a = B_h\; T_{t^x}\; C_\varphi.$$

Нам осталось проверить, что оператор $B_h\, P\, B_h^{-1}$ ограничен в пространстве $\widetilde{l_p}$.

Рассмотрим два оператора $T_{at^{-x}} P + Q$ и $(C_\varphi^{-1} P + B_h\, Q)\, B_h^{-1}$.

Учитывая соотношения $C_\varphi^{\pm 1} P = P\, C_\varphi^{\pm 1} P$, $B_h^{\pm 1} Q = Q B_h^{\pm 1} Q$, легко проверить, что

$$[(C_\varphi^{-1} P + B_h\, Q)\, B_h^{-1}]\,(T_{at^{-x}} P + Q) = I.$$

Следовательно, оператор $(C_{\varphi}^{-1} P + B_h Q) B_h^{-1} = (T_{at^{-\varkappa}} P + Q)^{-1}$ ограничен в пространстве $\widetilde{l}_p$. Его можно представить в виде

$$(C_{\varphi}^{-1} P + B_h Q) B_h^{-1} = I - (I - T_{a^{-1}t^{\varkappa}}) B_h P B_h^{-1}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|T_{a^{-1}}\|_{\widetilde{l}_p} < 1$.

Тогда из последнего равенства следует ограниченность оператора $B_h P B_h^{-1}$ в пространстве $\widetilde{l}_p$.

Теорема доказана.

4. Приложения факторизации. В этом пункте приводятся некоторые следствия из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $a^{-1}(t) \in \mathrm{R}_p$ *и матрица* T_a *допускает факторизацию* $T_a = B_{\xi} T_{t^{\varkappa}} C_{\eta}$ *в пространстве* $\widetilde{l}_p$ $(B_{\xi} B_{\varphi} = B_{\varphi} B_{\xi} = I,$

$$C_{\eta} C_{\psi} = C_{\psi} C_{\eta} = I;\ \varphi = \{\varphi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_q,\ \psi = \{\psi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{l}_p).$$

Тогда при $\varkappa < 0$

$$\ker (T_a P + Q) = \mathrm{L}\, \{\chi, U\chi, \cdots, U^{|\varkappa|-1}\chi\}, \tag{6}$$

где U — двусторонний сдвиг в $\widetilde{l}_p$, определенный равенством

$U\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} = \{\cdots, \xi_{-2}, \underset{(0)}{\xi_{-1}}, \xi_0, \xi_1, \cdots\}$, $\chi = \{\cdots, -\xi_{-1}, \underset{(\varkappa)}{-\xi_0}, 0, \cdots, 0, \underset{(0)}{\psi_0}, \psi_1, \cdots\}$. *При* $\varkappa > 0$

$$\mathrm{co}\ker (T_a P + Q) = \mathrm{L}\, \{e_0, e_1, \cdots, e_{\varkappa-1}\}, \tag{7}$$

где $e_k = \{\cdots, 0, \underset{(k)}{1}, 0, \cdots\}$.

Уравнение $(T_a P + Q)\, x = y$ *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$(U^{k-1}\omega)(y) = 0\ (k = 1, 2, \cdots, \varkappa),$$

где $\omega = \{\cdots, 0, \underset{(0)}{\overline{\varphi}_0}, \overline{\varphi}_{-1}, \overline{\varphi}_{-2}, \cdots\}$.

Доказательство. Пусть $\varkappa < 0$ и $\chi_k = U^{k-1}\chi$ $(k = 1, 2, \cdots, |\varkappa|)$. Тогда, учитывая равенства $C_{\eta} C_{\psi} = C_{\psi} C_{\eta} = I$, легко проверить, что векторы χ_k удовлетворяют равенству

$$(T_a P + Q)\, \chi_k = 0\ (k = 1, 2, \cdots, |\varkappa|).$$

Итак, $\mathrm{L}\, \{\chi, U\chi, U^2\chi, \cdots, U^{|\varkappa|-1}\chi\} \subseteq \ker (T_a P + Q)$. Учитывая, что $\dim \ker (T_a P + Q) = |\varkappa|$, а векторы χ_k $(k = 1, 2, \cdots, |\varkappa|)$ линейно независимы, получим (6).

Пусть теперь $\varkappa > 0$. Рассмотрим вектор $\omega = \{\cdots, 0, \underset{(0)}{\overline{\varphi}_0}, \overline{\varphi}_{-1}, \cdots\} \in \widetilde{l}_q$. Учитывая равенства $B_{\xi} B_{\varphi} = B_{\varphi} B_{\xi} = I$, легко проверить, что векторы $\omega_k = U^{k-1}\omega$ $(k = 1, 2, \cdots, \varkappa)$ удовлетворяют равенству

$$(PT_a^- + Q)\,\omega_k = (T_a P + Q)^* \omega_k = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, \varkappa).$$

Следовательно, $L\{\omega, U\omega, \cdots, U^{\varkappa-1}\omega\} \subseteq \ker (T_a P + Q)^*$. Но так как $\dim \ker (T_a P + Q)^* = \varkappa$, а векторы ω_k $(k = 1, 2, \cdots, \varkappa)$ линейно независимы, то

$$L\{\omega, U\omega, \cdots, U^{\varkappa-1}\omega\} = \ker (T_a P + Q)^*.$$

Так как оператор $T_a P + Q$ нормально разрешим, то уравнение $(T_a P + Q)\,x = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f(y) = 0$ для любого линейного, ограниченного функционала f, удовлетворяющего условию $(T_a P + Q)^* f = 0$. Поскольку $\varphi_0 \neq 0$, то легко заметить, что векторы e_k $(k = 0, 1, \cdots, \varkappa - 1)$ удовлетворяют условию

$$\omega_{k+1}(e_k) \neq 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, \varkappa - 1),$$

и, стало быть, $e_k \overline{\in} \operatorname{Im} (T_a P + Q)$. Учитывая, что $\dim \operatorname{co} \ker (T_a P + Q) = \varkappa$, получим (7).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при $\varkappa < 0$ оператор $T_a P + Q$ обратим справа, при $\varkappa > 0$ — обратим слева и обратный с соответствующей стороны определяется формулой*

$$(T_a P + Q)^{(-1)} = (T_{t^{-\varkappa}} P + Q)\,(C_{\eta}^{-1} P + B_{\xi} Q)\,B_{\xi}^{-1}. \tag{8}$$

Доказательство. Как было доказано в теореме 1, если матрица T_a допускает факторизацию $T_a = B_{\xi}\, T_{t^{\varkappa}}\, C_{\eta}$ в пространстве $\bar{l}_p$, то оператор $T_a P + Q$ является Φ-оператором в $\bar{l}_p$, $\operatorname{ind}(T_a P + Q) = -\varkappa$, оператор $T_{at^{-\varkappa}} P + Q$ обратим и обратный к нему определяется формулой

$$(T_{at^{-\varkappa}} P + Q)^{-1} = (C_{\eta}^{-1} P + B_{\xi} Q)\,B_{\xi}^{-1}.$$

Пусть $\varkappa < 0$. Тогда $\operatorname{ind}(T_a P + Q) = -\varkappa > 0$ и, в силу леммы 2, оператор $T_a P + Q$ обратим справа. Используя представление $(T_{at^{-\varkappa}} P + Q) = (T_a P + Q)(T_{t^{-\varkappa}} P + Q)$, получим (8).

При $\varkappa > 0$ формула (8) получается из равенства

$$T_a P + Q = (T_{at^{-\varkappa}} P + Q)\,(T_{t^{\varkappa}} P + Q).$$

5. **Факторизация в пространствах последовательностей с весом.** Через $\bar{l}_{p,\varkappa}$ обозначается банахово пространство* всех двусторонних последовательностей $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ с нормой

$$\|\xi\| = \Big(|\xi_0|^p + \sum_{|k|=1}^{\infty} |\xi_k\, k^{\varkappa}|^p\Big)^{1/p}.$$

---

* Подробнее об этом пространстве см. в [5].

Факторизацией матрицы T_a в пространстве $\overline{l}_{p,\alpha}$ $(1<p<\infty)$ называется ее представление в виде

$$T_a = B_\xi T_{t^\varkappa} C_\eta, \tag{9}$$

где $\varkappa$ — целое число, а матрицы B_ξ и C_η удовлетворяют следующим условиям:

1) $\xi = \{\xi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \overline{l}_{p,\alpha}$, $\eta = \{\eta_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \overline{l}_{q,-\alpha}$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, матрицы B_ξ и C_η обратимы, причем $B_\xi^{-1} = B_h$, $h=\{h_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \overline{l}_{q,-\alpha}$, $C_\eta^{-1}=C_s$, $s = \{s_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in \overline{l}_{p,\alpha}$;

2) оператор $B_\xi P B_\xi^{-1}$ ограничен в пространстве $\overline{l}_{p,\alpha}$.

Легко видеть, что все предыдущие результаты переносятся на пространство $\overline{l}_{p,\alpha}$. Например, имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть операторы $T_a^{\pm 1}$ ограничены в пространстве $\overline{l}_{p,\alpha}$. Для того чтобы матрица T_a допускала факторизацию (9) в пространстве $\overline{l}_{p,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор T_aP+Q был Ф-оператором в пространстве $\overline{l}_{p,\alpha}$.*

Если T_aP+Q является Ф-оператором, то

$$\varkappa = -\operatorname{ind}(T_aP+Q).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

§ 2. Факторизация матриц-функций

Если E — некоторое линейное пространство, то через E_n обозначается множество всех n-мерных векторов с компонентами из E, а через $E_{n\times n}$ — множество всех матриц n-ого порядка с элементами из E.

Если $X=\{X_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, где $X_k = \|x_k^{ij}\|_{i,j=1}^n$, то будем писать $X \in (\overline{l}_p)_n^n$, если $\{x_k^{ij}\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \overline{l}_p$ при $i, j=1, 2, \cdots, n$.

Через F_X обозначим блочную матрицу $\|F_{sm}\|_{s,m=-\infty}^{+\infty}$, где $F_{sm}=X_{s-m}$ при $s-m\geqslant 0$ и $F_{sm}=0$ — для остальных s и m, а через G_X — блочную матрицу $\|G_{sm}\|_{s,m=-\infty}^{+\infty}$, где $G_{sm}=X_{s-m}$ при $s-m\leqslant 0$ и $G_{sm}=0$ — для остальных s и m. Если $B=\|b_{jk}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ — блочная матрица, то через B^* обозначается матрица $\|b_{kj}^*\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$.

Пусть $A(\zeta)=\|a_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^n$ — матрица-функция, принадлежащая $(L_\infty)_{n\times n}$, а $\{A_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ее матричные коэффициенты Фурье. Матрице-функции $A(\zeta)$ сопоставим линейный оператор T_A, определенный в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ блочной матрицей $\|A_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}$. Через P обозначим проектор, определенный в $(\tilde{l}_p)_n$ равенством $\mathrm{P} = \|\delta_{jk} P\|_{j,k=1}^{n}$ и $\mathrm{Q} = I - \mathrm{P}$.

6. Определение факторизации. Пусть $A(\zeta) \in (L_\infty)_{n\times n}$. Факторизацией блочной матрицы T_A в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ называется ее представление в виде

$$T_A = G_X\, T_{U(\zeta)}\, F_Y, \tag{10}$$

где

$$1)\quad X = \{X_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in (\tilde{l}_p)_n^n;\ G_X^{-1} = G_\Omega,$$

$$\Omega = \{\Omega_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in (\tilde{l}_q)_n^n\ (p^{-1} + q^{-1} = 1),\ \ Y = \{Y_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in (\tilde{l}_q)_n^n,$$

$$F_Y^{-1} = F_\Psi,\ \Psi = \{\Psi_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in (\tilde{l}_p)_n^n;$$

2) матрица-функция $U(\zeta)$ имеет вид

$$U(\zeta) = \|\delta_{jk}\, \zeta^{\varkappa_j}\|_{j,k=1}^{n},$$

где $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ — целые числа;

3) оператор $G_X \mathrm{P}\, G_X^{-1}$ ограничен в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$.

7. Факторизация матриц-функций. Основной в этом пункте является следующая

Теорема 5. *Пусть $A(\zeta) \in (L_\infty)_{n\times n}$ и операторы T_A^{-1} ограничены в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ $(1 < p < \infty)$. Для того чтобы блочная матрица T_A допускала факторизацию* (10) *в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$, необходимо и достаточно, чтобы $T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ был Φ-оператором в $(\tilde{l}_p)_n$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных предложений.

Следуя [1], обозначим через $F\tilde{l}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ множество всех функций $f(\zeta) \in L_2(\Gamma)$, где Γ — единичная окружность, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |f_j|^p < \infty.$$

Легко видеть, что $F\tilde{l}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{F\tilde{l}_p} = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |f_j|^p\right)^{1/p}.$$

Через $(F\tilde{l}_p)^+$ ($(F\tilde{l}_p)^-$) обозначается подпространство всех функций из $F\tilde{l}_r$, коэффициенты Фурье которых с отрицательными (положительными) индексами равны нулю.

Очевидно, пространства $F\tilde{l}_p$ и $\tilde{l}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ изометричны. Операторы, соответствующие проекторам P и Q в пространстве $F\tilde{l}_p$ также будем обозначать через P и Q.

Обозначим через W изометрический оператор, отображающий $(F\tilde{l}_p)_n$ на $(\tilde{l}_p)_n$. Из легко проверяемого равенства

$$A(\zeta)\,\mathrm{P} + \mathrm{Q} = W^{-1}(T_A\,\mathrm{P} + \mathrm{Q})\,W$$

следует, что оператор $T_A\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}$ является Ф-оператором в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$ тогда и только тогда, когда $A(\zeta)\mathrm{P} + \mathrm{Q}$ является Ф-оператором в пространстве $(F\tilde{l}_p)_n$, причем

$$\dim\ker(T_A\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \dim\ker(A(\zeta)\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}),$$

$$\dim\operatorname{co}\ker(T_A\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \dim\operatorname{co}\ker(A(\zeta)\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}).$$

Лемма 4. *Пусть S — линейный, ограниченный, нетривиальный функционал над пространством $(F\tilde{l}_p)_n$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Тогда существует точка ζ_0, $|\zeta_0| > 1$, такая, что*

$$S\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0}\right) \neq 0.$$

Доказательство. Обозначим через J изометрический оператор, отображающий $(F\tilde{l}_p)^+$ на l_p. Очевидно

$$J\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0}\right) = \{-\zeta_0^{-1}, -\zeta_0^{-2}, \cdots, -\zeta_0^{-n}, \cdots\}.$$

Из равенства $(J^*)^{-1}S = \varphi \in l_q$ следует, что достаточно доказать следующее утверждение: пусть φ — линейный, ограниченный, нетривиальный функционал над пространством l_p. Тогда существует число α_0, $|\alpha_0| < 1$ такое, что $\varphi(\{\alpha_0, \alpha_0^2, \cdots, \alpha_0^n, \cdots\}) \neq 0$.

Допустим, что $\varphi(\{\alpha, \alpha^2, \cdots\}) = 0$ для всех α, $|\alpha| < 1$ и покажем, что тогда $\varphi \equiv 0$.

Так как $\varphi(\{\alpha, \alpha^2, \cdots\}) = \alpha\varphi(\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots\})$, то $\varphi(\{1, \alpha, \alpha^2, \cdots\}) = 0$ для любого α, $|\alpha| < 1$ и $\alpha \neq 0$. Учитывая непрерывность φ, отсюда легко получить, что $\varphi(\{1, 0, 0, \cdots\}) = 0$.

Пусть $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in l_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Тогда $\varphi(\xi) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \xi_j \bar{\varphi}_j$. Из равенства $\varphi(\{1, 0, 0, \cdots\}) = 0$ следует, что $\varphi_0 = 0$. Доказательство проведем индукцией по j. Пусть мы уже доказали, что $\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_j = 0$ и докажем, что $\varphi_{j+1} = 0$.

Обозначим через V односторонний сдвиг в пространстве l_p, определенный равенством $V\{\xi_j\}_0^\infty = \{0, \xi_0, \xi_1, \cdots\}$ и $\eta_\alpha = \{1, \alpha, \alpha^2, \cdots\}$. Тогда из равенства

$$\alpha^{j+2} V^{j+2} \eta_\alpha = \eta_\alpha - \{1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{j+1}, 0, \cdots\}$$

и предположения индукции следует, что

$$\alpha^{j+2} \varphi\left(V^{j+2} \eta_\alpha\right) = -\bar{\varphi}_{j+1} \alpha^{j+1}.$$

Из этого равенства следует неравенство $|\bar{\varphi}_{j+1}| \leqslant |\alpha| \, \|\varphi\| \, \|\eta_\alpha\|$, которое справедливо для любого α, $|\alpha| < 1$ и $\alpha \neq 0$. Это и означает, что $\varphi_{j+1} = 0$. (При $p = 2$ это лемма есть задача 6 из книги П. Халмоша „Гильбертово пространство в задачах").

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $AP + Q$ является Φ-оператором в пространстве $(F\tilde{l}_p)_n$ $(1 < p \leqslant 2)$. Тогда можно подобрать такие рациональные, неособенные матрицы-функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$, что оператор $R_1 A R_2 P + Q$ обратим в пространстве $(F\tilde{l}_p)_n$.*

После того, как установлена предыдущая лемма, эта лемма доказывается точно так же, как аналогичная лемма из [3].

Матрицы-функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ имеют следующий вид:

$$R_1(\zeta) = \begin{vmatrix} \prod\limits_{l=1}^{\beta_1} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_{l1}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \prod\limits_{l=1}^{\beta_2} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_{l2}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \quad 0 & \cdots & 0 & \prod\limits_{l=1}^{\beta_n} \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_{ln}}{\zeta - \tilde{\zeta}_0} \end{vmatrix}$$

$$R_2(\zeta) = \begin{vmatrix} \prod\limits_{l=1}^{\alpha_1} \dfrac{\zeta - \zeta_{l1}}{\zeta - \zeta_0} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & \prod\limits_{l=1}^{\alpha_2} \dfrac{\zeta - \zeta_{l2}}{\zeta - \zeta_0} & 0 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & 0 & \prod\limits_{l=1}^{\alpha_n} \dfrac{\zeta - \zeta_{ln}}{\zeta - \zeta_0} \end{vmatrix},$$

где $|\tilde{\zeta}_{jk}|>1$, $|\tilde{\zeta}_{0}|<1$, $|\zeta_{jk}|<1$, $|\zeta_{0}|>1$;

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=\dim\ker(AP+Q),\ \sum_{j=1}^{n}\beta_j=\dim\operatorname{co}\ker(AP+Q).$$

Доказательство теоремы 5. Предположим сначала, что оператор $T_A P+Q$ обратим в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$. Легко проверить, что сопряженный оператор T_A^* совпадает с оператором T_{A^*}, где $A^*(\zeta)=\|\overline{a_{kj}}(\zeta)\|_{j,k=1}^{n}$.

Из обратимости оператора PT_A^*+Q в пространстве $(\tilde{l}_q)_n$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ и из равенства

$$PT_{A^*}+Q=(I+PT_{A^*}Q)(T_{A^*}P+Q)(I-QT_{A^*}P)$$

следует, что оператор $T_{A^*}P+Q$ также обратим в пространстве $(\tilde{l}_q)_n$.

Обозначим через $\xi^i=(\xi^{i1},\xi^{i2},\cdots,\xi^{in})(i=1,2,\cdots,n)$ решения уравнений

$$(T_A P+Q)\xi^i=E_i\ (i=1,2,\cdots,n),\tag{11}$$

где $E_i=(0,\cdots,0,\underset{(i)}{e_0},0,\cdots,0)$; $\xi^{ij}=\{\xi_k^{ij}\}_{k=-\infty}^{+\infty}\in\tilde{l}_p(i,j=1,2,\cdots,n)$, а через $\eta^i=(\eta^{i1},\eta^{i2},\cdots,\eta^{in})(i=1,2,\cdots,n)$ — решения уравнений

$$(T_{A^*}P+Q)\eta^i=E_i(i=1,2,\cdots,n),\tag{12}$$

где $\eta^{ij}=\{\eta_k^{ij}\}_{k=-\infty}^{+\infty}\in\tilde{l}_q\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.

Из (11) и (12) вытекают следующие матричные равенства:

$$T_A F_\xi=(I_n+\xi_0)I-G_\xi,\tag{13}$$

$$T_{A^*}F_\eta=(I_n+\eta_0)I-G_\eta,\tag{14}$$

где

$$\xi=\{\xi_k\}_{-\infty}^{+\infty},\ \xi_k=\|\xi_k^{ij}\|_{i,j=1}^{n};\quad \eta=\{\eta_k\}_{-\infty}^{+\infty},\ \eta_k=\|\eta_k^{ij}\|_{i,j=1}^{n};\ I_n=\|\delta_{jk}\|_{j,k=1}^{n},$$

$$I=\|\delta_{jk}I_n\|_{j,k=-\infty}^{+\infty}.$$

Из (14) имеем

$$F_\eta^* T_A=(I_n+\eta_0^*)I-G_\eta^*.\tag{15}$$

Умножая (13) слева на F_η^* и учитывая (15), получим

$$[(I_n+\eta_0^*)I-G_\eta^*]F_\xi=F_\eta^*[(I_n+\xi_0)I-G_\xi].$$

Так как левая часть этого равенства есть нижне треугольная матрица, а правая часть — верхне треугольная матрица, то отсюда следует, что

$$[(I_n+\eta_0^*)I-G_\eta^*]F_\xi=F_\eta^*[(I_n+\xi_0)-G_\xi]=\xi_0 I=\eta_0^* I.\tag{16}$$

Покажем, что $\det \xi_0 \neq 0$. Если $\det \xi_0 = 0$, то это означает, что между столбцами матрицы ξ_0 существует линейная зависимость. Тогда из (16) следует, что между столбцами матриц ξ_k $(k = 1, 2, \cdots)$ существует аналогичная линейная зависимость. Учитывая, далее, что векторы ξ^j являются решениями уравнений (11), приходим к противоречию.

Так как $\det \xi_0 \neq 0$, то матрица F_ξ обладает обратной матрицей, причем последняя также является нижне треугольной. Но тогда из (16) следует, что она совпадает с матрицей $\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*]$.

Аналогичное рассуждение верно и для матрицы F_η^*.

Итак имеем

$$\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*] F_\xi = F_\xi \{\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*]\} = I,$$

$$[\xi_0^{-1} F_\eta^*] [(I_n + \xi_0) I - G_\xi] = [(I_n + \xi_0) I - G_\xi] [\xi_0^{-1} F_\eta^*] = I.$$

Из этих равенств и из (13) следует, что

$$T_A = [(I_n + \xi_0) I - G_\xi] \{\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*]\}.$$

Но

$$(\xi_0 + I_n) I - G_\xi = G_\varphi, \text{ где } \varphi = \{\varphi_j\}_{-\infty}^{+\infty} \in (\widetilde{l_p})_n^n,$$

$$\varphi_j = -\xi_j (j = \pm 1, \pm 2, \cdots), \ \varphi_0 = I_n,$$

а

$$\xi_0^{-1} [(I_n + \eta_0^*) I - G_\eta^*] = F_\psi, \text{ где } \psi = \{\psi_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in (\widetilde{l_q})_n^n,$$

$$\psi_k = -\xi_0^{-1} \eta_{-k}^* \ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots), \ \psi_0 = \xi_0^{-1}.$$

Таким образом

$$T_A = G_\varphi F_\psi.$$

Покажем, что оператор $G_\varphi \mathrm{P} G_\varphi^{-1}$ ограничен в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$. Рассмотрим оператор $K = (F_\psi^{-1} \mathrm{P} + G_\varphi \mathrm{Q}) G_\varphi^{-1}$. Учитывая соотношения $\mathrm{P} F_\psi^{\pm 1} \mathrm{P} = F_\psi^{\pm 1} \mathrm{P}$; $\mathrm{Q} G_\varphi^{\pm 1} \mathrm{Q} = G_\varphi^{\pm 1} \mathrm{Q}$, легко проверить, что $K(T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}) = I$. Следовательно, оператор $K = (T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q})^{-1}$ ограничен в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$. Оператор K можно представить в виде

$$K = I - (I - T_A^{-1}) G_\varphi \mathrm{P} G_\varphi^{-1}.$$

Без ограничения общности, можно считать, что $\|T_A^{-1}\| < 1$. Тогда из последнего равенства следует ограниченность оператора $G_\varphi \mathrm{P} G_\varphi^{-1}$ в пространстве $(\widetilde{l_p})_n$.

Пусть теперь оператор $T_A \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ является Ф-оператором в $(\widetilde{l_p})_n$. Предположим сначала, что $1 < p \leqslant 2$. Тогда, согласно лемме 5, можно подобрать рациональные, неособенные матрицы-функции $R_1(\zeta)$ и $R_2(\zeta)$ такие, что оператор $T_{R_1 A R_2} \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ обратим в $(\widetilde{l_p})_n$. Согласно доказанной части теоремы, имеем

$$T_{R_1 A R_2} = G_{\sim} F_{\sim},$$

то есть

$$R_1(\zeta)\, A(\zeta)\, R_2(\zeta) = \widetilde{A}_-(\zeta)\widetilde{A}_+(\zeta), \tag{17}$$

где

$$\widetilde{A}_-(\zeta) = \|b_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^{n} \in (F\widetilde{l}_p)^-_{n\times n},\ \widetilde{A}_+(\zeta) = \|c_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^{n},$$

$$c_{jk}(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l^{jk}\zeta^l,\ \sum_{l=0}^{\infty} |\gamma_l^{jk}|^q < \infty\ (j, k=1, 2, \cdots, n);$$

$$\widetilde{A}_+^{-1}(\zeta) = \|d_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^{n} \in (F\widetilde{l}_p)^+_{n\times n};\quad \widetilde{A}_-^{-1}(\zeta) = \|g_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^{n},$$

$$g_{jk}(\zeta) = \sum_{l=0}^{-\infty} g_l^{jk}\zeta^l,\ \sum_{l=0}^{-\infty} |g_l^{jk}|^q < \infty\ (j, k=1, 2, \cdots, n).$$

Из (17) имеем для $A(\zeta)$

$$A(\zeta) = R_1^{-1}(\zeta)\widetilde{A}_-(\zeta)\widetilde{A}_+(\zeta)\, R_2^{-1}(\zeta). \tag{18}$$

Элементы матрицы-функции $\widetilde{A}_+(\zeta)\, R_2^{-1}(\zeta)$ являются аналитическими функциями внутри единичного круга, кроме, быть может, конечного числа точек, где могут иметь полюсы. Факторизуя $\widetilde{A}_+(\zeta)\, R_2^{-1}(\zeta)$ [см. 2], получим

$$\widetilde{A}_+(\zeta)\ R_2^{-1}(\zeta) = M_-(\zeta)\, D(\zeta)\, M_+(\zeta), \tag{19}$$

где $M_-^{\pm 1}(\zeta)$ — неособенные, рациональные матрицы-функции, элементы которых аналитичны вне единичного круга, $D(\zeta) = \|\delta_{jk}\zeta^{m_j}\|_{j,k=1}^{n}$, m_j — целые числа, а $M_+(\zeta)$ принадлежит тому же классу, что и $\widetilde{A}_+(\zeta)$.

Из (18) и (19) следует, что

$$A(\zeta) = R_1^{-1}(\zeta)\,\widetilde{A}_-(\zeta)\, M_-(\zeta)\, D(\zeta)\, M_+(\zeta).$$

Элементы матрицы-функции $R_1^{-1}(\zeta)\widetilde{A}_-(\zeta)\, M_-(\zeta)\, D(\zeta)$ являются аналитическими функциями вне единичного круга, кроме, быть может, конечного числа точек, где могут иметь полюсы. Факторизуя матрицу-функцию $R_1^{-1}(\zeta)\,\widetilde{A}_-(\zeta)\, M_-(\zeta)\, D(\zeta)$ [см. 2], получим

$$R_1^{-1}(\zeta)\,\widetilde{A}_-(\zeta)\, D(\zeta)\, M_-(\zeta) = A_-(\zeta)\, U(\zeta)\, C_+(\zeta),$$

где $C_+^{\pm 1}(\zeta)$ — рациональные, неособенные матрицы-функции, принадлежащие $(F\widetilde{l}_p)^+_{n\times n}$, $U(\zeta) = \|\delta_{jk}\zeta^{\varkappa_j}\|_{j,k=1}^{n}$, $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ — целые числа, а $A_-(\zeta)$ принадлежит тому же классу, что и $\widetilde{A}_-(\zeta)$.

Таким образом

$$A(\zeta) = A_-(\zeta)\, U(\zeta)\, A_+(\zeta),$$

где $A_+(\zeta) = C_+(\zeta)\, M_+(\zeta)$. Следовательно

$$T_A = T_{A-}\, T_{U(\zeta)}\, T_{A+} = G_{\xi}\, T_{U(\zeta)}\, F_{\eta}.$$

Оператор $G_{\xi} P G_{\xi}^{-1}$ ограничен в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$, так как оператор $G_{\varphi} P G_{\varphi}^{-1}$ ограничен в $(\tilde{l}_p)_n$, а все последующие преобразования заключаются в умножении $\tilde{A}_+(\zeta)$ и $\tilde{A}_-(\zeta)$ на рациональные, неособенные матрицы-функции.

Достаточность условий теоремы в случае $1 < p \leqslant 2$ доказана. Докажем их необходимость.

Пусть блочная матрица T_A допускает факторизацию (10) в пространстве $(\tilde{l}_p)_n$. Образуем оператор

$$H = (F_Y^{-1} P + G_X Q\, (T_U^{-1}\; P + Q)\, G_X^{-1}\, .$$

Представим его в виде суммы трех операторов:

$$H = F_Y^{-1} P\, T_U^{-1} P\; G_X^{-1} + G_X Q\, T_U^{-1} P\, G_X^{-1} + G_X\, Q\, G_X^{-1}\, .$$

Последнее слагаемое ограничено в силу определения факторизации. Второе слагаемое, как легко видеть, также ограничено (конечномерно). Рассмотрим первое слагаемое. Оператор $F_Y^{-1}\, T_U^{-1} P\, G_X^{-1} = T_A^{-1}\, G_X\, P\, G_X^{-1}$ ограничен, а разность

$$F_Y^{-1}\; T_U^{-1} P G_X^{-1} - F_Y^{-1} P\, T_U^{-1} P\; G_X^{-1} = F_Y^{-1}\, Q\, T_U^{-1}\, P G_X^{-1}\, ,$$

как легко видеть, есть конечномерный ограниченный оператор. Следовательно, ограниченно и первое слагаемое, а вместе с ним и H.

Легко проверить, что оператор H удовлетворяет равенству

$$(T_A\, P + Q)\, H\, (T_A P + Q) = T_A\, P + Q,$$

откуда следует нормальная разрешимость оператора $T_A P + Q$ [1].

Аналогично тому, как это сделано в [2], можно показать, что имеют место равенства

$$\dim\ker\,(T_A\, P + Q) = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j,\ \dim \operatorname{co}\ker\,(T_A\, P + Q) = \sum_{\varkappa_j > 0} \varkappa_j .$$

Покажем, что числа $\varkappa_j$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) в факторизации (10) определяются единственным образом. Действительно, пусть

$$T_A = G_{X'}\, T_{U'(\zeta)}\, F_{Y'},\ \text{где}\ U'(\zeta) = \| \delta_{jk}\, \zeta^{\varkappa_j'} \|_{j,\,k=1}^{n},\ \varkappa_1' \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n'$$

— другая факторизация. Тогда имеют место равенства

$$\dim \ker (T_A\, \mathrm{P}+\mathrm{Q}) = -\sum_{\varkappa'_j<0} \varkappa'_j, \quad \dim\ \mathrm{co}\ker (T_A\, \mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \sum_{\varkappa'_j>0} \varkappa'_j .$$

Повторяя все предыдущие рассуждения для матрицы-функции $\zeta^{-r}A(\zeta)$, где r — целое число, получим

$$\sum_{\varkappa_j>r} (\varkappa_j - r) = \sum_{\varkappa'_j>r} (\varkappa'_j - r), \quad \sum_{\varkappa_j<r} (\varkappa_j - r) = \sum_{\varkappa'_j<r} (\varkappa'_j - r)$$

для любого целого r. Отсюда следует, что $\varkappa_j = \varkappa'_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$.

При $2<p<\infty$ надо рассмотреть оператор $T_{A^*}\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ в пространстве $(\bar{l}_q)_n$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $T_A\,\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ является Ф-оператором в пространстве $(\bar{l}_p)_n$. Если уравнение $(T_A\,\mathrm{P}+\mathrm{Q})\,\varphi=f$ разрешимо, то одно из решений дается формулой $\varphi=Hf$.

Следствие 2. Для того чтобы оператор $T_A\,\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ был обратим (обратим слева, обратим справа), необходимо и достаточно, чтобы все числа $\varkappa_j$ были равны нулю (были неотрицательны, неположительны). В любом случае, обратный с соответствующей стороны совпадает с H.

В заключение отметим, что все предыдущие результаты переносятся на пространства $(\bar{l}_{p,\,0})_n$.

Институт математики АН
Армянской ССР

Поступила 13.VI.1973

Հ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Տեպլիցյան մատրիցաներով որոշված օպերատորների մասին *(ամփոփում)*

Ի. Բ. Սիմոնենկոյի, Ի. Ց. Գոխբերգի և Ն. Յա. Կրուպնիկի աշխատություններում մտցված է ֆունկցիաների և մատրից-ֆունկցիաների ընդհանրացված ֆակտորիզացիայի գաղափարը L_p կշռով տարածություններում և ստացված է ֆակտորիզացիայի հայտանիշը։

Ներկա հոդվածում այդ արդյունքները տարածվում են l_p կշռով տարածությունների վրա։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են տեպլիցյան մատրիցների հակադարձման համար։

G. V. AMBARTZUMIAN. *On the operators, defined by Teoplitz matricies* (summary)

A criterion of possibility of factorization of limited measurable functions and matrix functions in weighted spaces L_p has been established in the works of I. B. Simonenko, I. Z. Gohberg and N. Y. Kroupnik.

In this paper the results on factorization are extended to the case of l_p sequence spaces with weights. The results are used for the inversion of Teoplitz matrices.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Штиинца. Кишинев, 1973.
2. *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, „Наука", 1971.
3. *И. Б. Симоненко.* Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 277—306.
4. *И. Б. Симоненко.* Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1138—1147.
5. *Р. В. Дудучава.* Дискретные уравнения Винера—Хопфа в пространствах l_p с весом, Сообщ. АН Груз. ССР, 67, № 1, 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

М. Д. ДАВТЯН

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ДВОЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В настоящей работе изучаются общие краевые задачи для гиперболических уравнений произвольного порядка с двойными характеристиками. Ранее в [1] был рассмотрен случай задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка.

§ 1. Разрешимость краевой задачи при конечном числе условий на правые части

Пусть в области $D = \Gamma \times [0, T]$, $t \in [0, T]$, Γ — гладкая замкнутая кривая, диффеоморфная окружности, $x \in \Gamma$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ задано дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$(A_1 A_2 + A_3)\, u(x, t) = f(x, t), \tag{1}$$

где A_1 и A_2 — гиперболические операторы порядка m с одинаковой главной частью A_0

$$A_1 = A_0 + A_{10},$$

$$A_2 = A_0 + A_{20},$$

$$\operatorname{ord} A_{10} \leqslant m - 1, \quad \operatorname{ord} A_{20} \leqslant m - 1, \quad \operatorname{ord} A_3 \leqslant 2m - 2.$$

Характеристический многочлен A_0 имеет следующий вид:

$$A_0(t, x, \lambda, \xi) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k(x, t)\, \xi), \tag{2}$$

где $\gamma_k(x, t)$ — действительны и различны: $\gamma_k(x, t) \neq \gamma_l(x, t)$ при $l \neq k$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$. Будем предполагать, что функции $u(x, t)$, $f(x, t)$ и коэффициенты операторов A_1, A_2 и A_3 бесконечно дифференцируемые и периодические по x с периодом 2π. Рассмотрим для уравнения (1) следующую краевую задачу в области D:

$$\begin{aligned} B_{j1}\, u(x, t)|_{t=0} &= g_{j1}(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ B_{j2}\, u(x, t)|_{t=T} &= g_{j2}(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \end{aligned} \tag{3}$$

где $B_{j1}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $B_{j2}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые будут сформулированы ниже. Пусть $w_k(x, t) = c$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ — k-тое семейство характеристик оператора $A_0\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Согласно определению, $w_k(x,\ t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial w_k}{\partial t}-\gamma_k(x,\ t)\frac{\partial w_k}{\partial x}=0,\qquad 1\leqslant k\leqslant m. \tag{4}$$

Для $w_k(x,\ t)$ возьмем следующие начальные условия:

$$w_k(x,\ t)|_{t=0}=x,\qquad 1\leqslant k\leqslant m. \tag{5}$$

Как и в [1] будем искать решение уравнения (1) в виде „плоской" волны $\alpha_k(x,\ t)f(w_k(x,\ t))$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ m)$, где $f(x)$ — произвольная гладкая функция одного переменного, $\alpha_k(x,\ t)$ — функция класса C^∞ будет подобрана ниже.

Предварительно сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} t&=t,\\ y&=w_k(x,\ t),\qquad 1\leqslant k\leqslant m. \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим $u_0(t,\ y)=u(t,\ x)$, $\alpha_{k0}(t,\ y)=\alpha_k(t,\ x)$. Тогда операторы A_0, A_1, A_2 и A_3 примут вид

$$A_0\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_0^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=a_m^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial y^m}+a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial y^{m-1}\,\partial t}+a_{m-2}^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial y^{m-2}\,\partial t^2}+\cdots+$$

$$+a_0^{(0)}\frac{\partial^m}{\partial t^m}+b_{m-1}^{(0)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}+\cdots,$$

где $a_m^{(0)}\equiv 0$, $a_{m-1}^{(0)}\neq 0$ при любых $(y,\ t)\in\overline{D}$;

$$A_{10}\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_{10}^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=b_{m-1}^{(1)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}+\cdots,\ \operatorname{ord}A_{10}^{(0)}\leqslant m-1;$$

$$A_{20}\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \right)=A_{20}^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=b_{m-1}^{(2)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}+\cdots,\ \operatorname{ord}A_{20}^{(0)}\leqslant m-1;$$

$$A_3\left(t,\ x,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_3^{(0)}\left(t,\ y,\ \frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)=$$

$$=c_{2m-2}(t,\ y)\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}+\cdots,\ \operatorname{ord}A_3^{(0)}\leqslant 2m-2.$$

Применим оператор $A_1^{(0)}A_2^{(0)}+A_3^{(0)}$ к $\alpha_{k0}f_k$. Имеем

$$(A_1^{(0)}A_2^{(0)}+A_3^{(0)})(\alpha_{k0}(t, y)f_k(y))=$$

$$=\left[\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(1)}\right)\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(2)}\right)+c_{2m-2}\right]\alpha_{k0}(t, y)f_k^{(2m-2)}(y)+$$
$$+\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t, y)f_k^{(j)}(y),\quad 1\leqslant k\leqslant m, \tag{7}$$

где

$$a_{m-2}^{(1)}=b_{m-1}^{(0)}+b_{m-1}^{(1)},\qquad a_{m-2}^{(2)}=b_{m-1}^{(0)}+b_{m-1}^{(2)}.$$

Потребуем, чтобы коэффициент при $f_k^{(2m-2)}(y)$ обратился в нуль

$$\left[\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(1)}\right)\left(a_{m-1}^{(0)}\frac{\partial}{\partial t}+a_{m-2}^{(2)}\right)+c_{2m-2}\right]\alpha_{k0}(t, y)=0 \tag{8}$$

или

$$c_1(t, y)\frac{\partial^2\alpha_{k0}}{\partial t^2}+c_2(t, y)\frac{\partial\alpha_{k0}}{\partial t}+c_3(t, y)\alpha_{k0}(t, y)=0, \tag{8'}$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые новые коэффициенты, $c_1\neq 0$ при всех $(t, y)\in\overline{D}$. Уравнение (8′), как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, зависящее от y как от параметра, имеет два линейно независимых решения $\alpha_{k01}(t, y)$ и $\alpha_{k02}(t, y)$.

Наложим на область D и уравнение (1) следующее дополнительное условие:

не существует решения уравнения (8′), *обращающегося в нуль на концах отрезка* $[0, T]$ *при любых* y *для каждого*

$$k\ (k=1, 2,\cdots, m). \tag{9}$$

Для определенности пусть

$$\alpha_{k01}(0, y)=1,\qquad \alpha_{k01}(T, y)=0,$$
$$\alpha_{k02}(0, y)=0,\qquad \alpha_{k02}(T, y)=1\quad (k=1, 2,\cdots, m). \tag{10}$$

Условие (9) всегда выполнено, если T достаточно мало.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (9) *и пусть граничные операторы* B_{j1} *и* B_{j2} *удовлетворяют условию типа Шапиро-Лопатинского* (23), (28). *Тогда краевая задача* (1), (3) *нормально разрешима (т. е. существует лишь конечное число гладких решений уравнения* (1) *с* $f=0$ *и нулевыми граничными данными* (3), *и гладкое решение задачи* (1), (3) *существует при всех достаточно гладких* f, g_{j1} *и* g_{j2} $(j=1, 2,\cdots, m)$, *удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности*).

Доказательство. Приведем следующую лемму из теории гиперболических уравнений.

Лемма 1. Пусть рассматривается уравнение

$$Au=f, \tag{11}$$

где A — гиперболический оператор m-го порядка. Тогда существует оператор R такой, что $u=Rf$ есть решение задачи Коши для уравнения (11) с нулевыми начальными данными

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\cdots,\quad \frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0}=0,$$

причем R имеет порядок $-m+1$, т. е.

$$\|Rf\|_{s+m-1}\leqslant c\|f\|_s,\quad \forall s\geqslant 0,$$

где $\|\cdots\|$ — норма Соболева-Слободецкого на D (см., например, [7]).

Доказательство леммы 1 см., например, в [2], [6].

Пусть R_1 — оператор, дающий решение $u=R_1 f$ задачи Коши

$$A_1 u=f,\qquad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant m-1, \tag{12}$$

а R_2 — оператор, дающий решение $u=R_2 f$ задачи Коши

$$A_2 u=f,\qquad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant m-1. \tag{13}$$

Рассмотрим уравнение

$$(A_1A_2+A_3)\,u(x,\ t)=g. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) будем искать в виде

$$u=R_2R_1v, \tag{15}$$

где v — неизвестная функция. Тогда имеем

$$v+A_3R_2R_1v=g. \tag{16}$$

Оператор $A_3R_2R_1$ имеет согласно лемме 1 порядок $\leqslant 0$. Кроме того, можно показать (см. [2]), что оператор $A_3R_2R_1$ — вольтерровский* оператор, обладающий следующим свойством:

$$\|A_3R_2R_1v\|_{s,[T_1,T_2]}\leqslant c\sqrt{T_2-T_1}\,\|v\|_{s,[T_1,T_2]}, \tag{17}$$

где T_2-T_1 достаточно мало. Здесь через $\|\cdots\|_{s,[T_1,T_2]}$ обозначена норма Соболева-Слободецкого в области $\Gamma\times[T_1,\ T_2]$. Следовательно, как показано в [2], уравнение (16) имеет решение

$$v=(I+A_3R_2R_1)^{-1}g, \tag{18}$$

где I — единичный оператор. Из (15) и (18) имеем

$$u=R_2R_1(I+A_3R_2R_1)^{-1}g=R_0g, \tag{19}$$

где порядок оператора R_0 равен $-2m+2$, $\operatorname{ord}R_0\leqslant-2m+2$. Таким образом, доказано существование решения $u=R_0g$ уравнения (14). Если подставить в (1), (3)

$$u=R_0f+w,$$

---

* Так называются операторы, отображающие функции $u(x)$, равные нулю при $x<t$, в функции также обращающиеся в нуль при $x<t$.

то для w получим следующую краевую задачу:

$$(A_1A_2+A_3)\,w=0, \tag{1'}$$

$$\begin{aligned} B_{j1}\,w(x,t)|_{t=0}&=g_{j1}^{(1)}(x), \qquad 1\leqslant j\leqslant m,\\ B_{j2}\,w(x,t)_{t=T}&=g_{j2}^{(1)}(x), \qquad 1\leqslant j\leqslant m, \end{aligned} \tag{3'}$$

где $g_{j1}^{(1)}=g_{j1}-B_{j1}R_0f|_{t=0}$, $\qquad g_{j2}^{(1)}=g_{j2}-B_{j2}R_0f|_{t=T}$.

Найдем теперь общее решение уравнения (1′), зависящее от $2m$ произвольных функций. Записав выражение (7) в исходных координатах t и x, получим

$$(A_1A_2+A_3)(\alpha_k(t,x)f_k(w_k(t,x))=\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,x)f_k^{(j)}(w_k(t,x)).$$

Если функция v выбрана так, что

$$(A_1A_2+A_3)(\alpha_{ki}f_{ki}+v)=0, \qquad 1\leqslant k\leqslant m, \qquad i=1,2,$$

то

$$(A_1A_3+A_3)v=\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,x)f_{ki}^{(j)}(w_k(t,x)), \qquad i=1,2. \tag{20}$$

Если положить

$$v=R_0\left(\sum_{j=0}^{2m-3}\beta_j(t,x)f_{ki}^{(j)}(w_k(t,x))\right),$$

то v удовлетворяет уравнению (20) и

$$v=T_{ki}f_{ki},$$

где

$$\operatorname{ord}T_{ki}\leqslant-1 \qquad (k=1,2,\cdots,m), \qquad (i=1,2).$$

Таким образом, для решения $w(x,t)$ мы получили следующее выражение:

$$\begin{aligned} w(x,t)=\sum_{k=1}^{m}\,&(\alpha_{k1}(x,t)f_{k1}(w_k(x,t))+\alpha_{k2}(x,t)f_{k2}(w_k(x,t))+\\ &+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{2}T_{ki}f_{ki}(w_k(x,t)), \qquad \operatorname{ord}T_{ki}\leqslant-1, \end{aligned} \tag{21}$$

где f_{k1}, f_{k2} — произвольные функции. Функции $f_{ki}(x)$ подберем так, чтобы выполнялись граничные условия (3′). Для этого подставим (21) в граничные условия (3). Получим систему интегродифференциальных уравнений относительно $f_{ki}(x)$. Действительно, имеем

$$B_{j1}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=B_{j1}^{(0)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_{j1}^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\operatorname{ord}B_{j1}^{(0)}=m_{j1}, \qquad \operatorname{ord}B_{j1}^{(1)}=m_{j1}-1,$$

$$B_{j2}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=B_{j2}^{(0)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_{j2}^{(1)}\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\operatorname{ord}B_{j2}^{(0)}=m_{j2}, \qquad \operatorname{ord}B_{j2}^{(1)}=m_{j2}-1.$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k1}(t, x)\Big|_{t=0} B_{j1}^{(0)}\left(0, x, \frac{\partial w_k}{\partial t}\Big|_{t=0}, \frac{\partial w_k}{\partial x}\Big|_{t=0}\right) f_{k1}^{(m_{j1})}\left(w_k(t, x)\Big|_{t=0}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j_1}-1} \beta_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j_1}-1} \beta_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(x) = g_{j1}^{(1)}(x), \quad (22)$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Отметим, что в (22) нет членов, содержащих $f_{k2}^{(m_{j_1}-1)}$, так как согласно (10) $a_{k2}(t, x)|_{t=0} = 0$.

Учитывая (4), (5) и (10), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j1}^{(0)}(0, x, \gamma_k(x, 0), 1) f_{k1}^{(m_{j1})}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j1}-1} \beta_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j1}-1} \beta_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(x) = g_{j1}^{(1)}(x), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m. \quad (22')$$

Потребуем, чтобы

$$\det \| B_{j1}^{(0)}(0, x, \gamma_k(x, 0), 1) \|_{k, j=1}^{m} \neq 0. \quad (23)$$

Это есть условие Шапиро-Лопатинского при $t = 0$ для разрешимости краевой задачи (1), (3).

Продифференцируем систему (22′) $m_0 - m_{j1}$ раз, чтобы уравнять порядки производных функций $f_{k1}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $m_0 \geqslant \max\limits_{j}(m_{j1}, m_{j2})$.

Отметим, что оператор дифференцирования на конечном отрезке является нетеровым оператором. Поэтому из нормальной разрешимости продифференцированной системы (24) будет следовать нормальная разрешимость исходной системы (22′). В результате дифференцирования система (22′) примет вид

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j1}^{(0)}(0, x, \gamma_k(x, 0), 1) f_{k1}^{(m_0)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{jpk1}^{(1)}(x) f_{k1}^{(p)}(x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{jpk2}^{(1)}(x) f_{k2}^{(p)}(x) = \frac{d^{m_0-m_{j1}} g_{j1}^{(1)}(x)}{dx^{m_0-m_{j1}}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (24)$$

где $\beta_{jpk1}^{(1)}$, $\beta_{jpk2}^{(1)}$ — некоторые новые известные функции. Разрешим систему (24) относительно $f_{k1}^{(m_0)}(x)$. Получим

$$f_{k1}^{(m_0)}(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{kjp1}^{(2)}(x) f_{k1}^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \beta_{kjp2}^{(2)}(x) f_{j2}^{(p)}(x) + g_{j3}(x). \quad (25)$$

Проделаем теперь то же самое при $t = T$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{k2}(t, x)\Big|_{t=T} B_{j2}^{(0)}\left(T, x, \frac{\partial w_k}{\partial t}\Big|_{t=T}, \frac{\partial w_k}{\partial x}\Big|_{t=T}\right) f_{k2}^{(m_{j2})}\left(w_k(t, x)\Big|_{t=T}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(t, x)|_{t=T}) + \tag{26}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(w_k(t, x)|_{t=T}) = g_{j2}^{(1)}(x),$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Здесь нет уже членов с $f_{k1}^{(m_{j2})}$, так как согласно (10) $\alpha_{k1}(t, x)|_{t=T} = 0$. Учитывая (4), в (26) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j2}^{(0)}(T, x, \gamma_k(x, T), 1)\left(\frac{\partial w_k(x, T)}{\partial x}\right)^{m_{j2}} f_{k2}^{(m_{j2})}(w_k(x, T)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk1}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(x, T)) + \tag{27}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_{j2}-1} \bar{\beta}_{jpk2}(x) f_{k2}^{(p)}(w_k(x, T)) = g_{j2}^{(1)}(x),$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Потребуем, чтобы

$$\det \| B_{j2}^{(0)}(T, x, \gamma_k(x, T), 1)\|_{k, j=1}^{m} \neq 0. \tag{28}$$

Продифференцируем систему (27) $m_0 - m_{j2}$ раз. Получим

$$\sum_{k=1}^{m} B_{j2}^{(0)}(T, x, \gamma_k(x, T), 1)\left(\frac{\partial w_k(x, T)}{\partial x}\right)^{m_0} f_{k2}^{(m_0)}(w_k(x, T)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{jpk1}^{(1)}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(x, T)) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{jpk2}^{(1)}(x) f_{k2}^{(p)}(w_k(x, T)) =$$

$$= \frac{d^{m_0-m_{j2}} g_{j2}^{(1)}(x)}{dx^{m_0-m_{j2}}}, \tag{29}$$

$$1 \leqslant j \leqslant m.$$

Разрешим систему (29) относительно $f_{k2}^{(m_0)}(w_k(x, T))$, имеем

$$f_{k2}^{(m_0)}(w_k(x, T)) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{kjp1}^{(2)}(x) f_{k1}^{(p)}(w_k(x, T)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \bar{\beta}_{kjp2}^{(2)}(x) f_{j2}^{(p)}(w_k(x, T)) + g_{j4}(x). \tag{30}$$

Отметим, что

$$\frac{\partial w_k(x,\ T)}{\partial x} \neq 0 \quad \text{при всех } x \in \Gamma. \tag{31}$$

Действительно, пусть рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка вида

$$\frac{\partial \mu(x,\ t)}{\partial t} - \gamma_k(x,\ t)\,\frac{\partial \mu(x,\ t)}{\partial x} - b(x,\ t)\,\mu(x,\ t) = 0, \tag{32}$$

где b — заданная функция переменных t, x. Покажем, что если $\mu(x,\ t) \neq 0$ для некоторого $t = t_0$, то $\mu(x,\ t) \neq 0$ для каждого t. Для этого сделаем замену переменных

$$t = t,\ y = w_k(x,\ t).$$

Обозначим $\mu(t,\ x) = \mu_0(t,\ y)$, $b(t,\ x) = b_0(t,\ y)$. Тогда уравнение (32) запишется в виде

$$\frac{\partial \mu_0(t,\ y)}{\partial t} - b_0(t,\ y)\,\mu_0(t,\ y) = 0.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, зависящее от y как от параметра. Решение его имеет такой вид

$$\mu_0(t,\ y) = \mu_0(t_0,\ y)\exp\left(\int_{t_0}^{t} b_0(\tau,\ y)\,d\tau\right).$$

Отсюда следует, что $\mu_0(t,\ y) = \mu(t,\ x)$ отлично от нуля для всех t. Теперь, если продифференцировать уравнение (4) по x, получим

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t \partial x} - \gamma_k(x,\ t)\,\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial x}\,\frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{4'}$$

Обозначим $\frac{\partial w_k(x,\ t)}{\partial t} = \mu_k(x,\ t)$. Тогда уравнение (4′) запишется в виде

$$\frac{\partial \mu_k(x,t)}{\partial t} - \gamma_k(x,\ t)\,\frac{\partial \mu_k(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_k(x,\ t)}{\partial x}\,\mu_k(x,\ t) = 0.$$

Учитывая условие (5), согласно вышесказанному, получаем, что $\frac{\partial w_k(t,\ x)}{\partial x} \neq 0$ для всякого $t \in [0,\ T]$. Следовательно, в (30) можно при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ сделать замену переменных (в силу теоремы о неявной функции)

$$y = w_k(x,\ T), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{33}$$

Таким образом, система (30) принимает следующий вид:

$$f_{k2}^{(m_0)}(y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \tilde{\beta}_{kjp1}^{(2)}(y)\,f_{k1}^{(p)}(y) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m_0-1} \tilde{\beta}_{kjp2}^{(2)}(y)\,f_{j2}^{(p)}(y) + g_{j1}(y). \tag{30'}$$

Покажем, что система (25), (30) нормально разрешима. Обозначим через $F(x)$ вектор $(f_{11}(x), f_{21}(x), \cdots, f_{m1}(x), \cdots, f_{m2}(x))$. Проинтегрируем каждое уравнение системы (25), (30′) m_0 — раз, наложив на $F(x)$ конечное число условий

$$F^{(j)}(x_0) = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m_0 - 1,$$

где x_0 — произвольная фиксированная точка на Г. Тогда система (25), (30′) примет вид

$$F(x) = TF + G, \tag{34}$$

где T — сглаживающий оператор, ord $T \leqslant -1$, а G — известная правая часть. Система (34) является нормально разрешимой (см., например, [10]). Следовательно, нормально разрешимой является и интегро-дифференциальная система (22′), (27). Таким образом, при выполнении конечного числа условий на правые части $f(x, t)$, $g_{j1}(x)$, $g_{j2}(x)$ существует решение $u(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевым условиям (3).

Прежде чем приступить к доказательству конечномерности пространства решений краевой задачи (1), (3) с нулевыми правыми частями

$$(A_1 A_2 + A_3)\, u(x, t) = 0. \tag{1''}$$

$$B_{j1} u(x, t)|_{t=0} = 0, \qquad B_{j2} u(x, t)|_{t=T} = 0, \tag{3''}$$

$$1 \leqslant j \leqslant m,$$

отметим следующий важный частный случай краевых условий (3), удовлетворяющих условию Шапиро-Лопатинского

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= g_{11}(x), \cdots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = g_{m1}(x), \\ u|_{t=T} &= g_{12}(x), \cdots, \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T} = g_{m2}(x), \end{aligned} \tag{3'''}$$

т. е. условий Дирихле. Проверим, что для задачи Дирихле выполнены условия Шапиро-Лопатинского (23) и (28). Действительно, определитель (23) имеет в данном случае вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t} & \dfrac{\partial w_2(x, 0)}{\partial t} & \cdots & \dfrac{\partial w_m(x, 0)}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\dfrac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t}\right)^{m-1} & \left(\dfrac{\partial w_2(x, 0)}{\partial t}\right)^{m-1} & \cdots & \left(\dfrac{\partial w_m(x, 0)}{\partial t}\right)^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\gamma_1(x, 0) & \gamma_2(x, 0) & \cdots & \gamma_m(x, 0) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(\gamma_1(x, 0))^{m-1} & (\gamma_2(x, 0))^{m-1} & \cdots & (\gamma_m(x, 0))^{m-1}
\end{vmatrix} =
$$

$= \prod\limits_{m \geq i > j \geq 1} (\gamma_i(x, 0) - \gamma_j(x, 0))$, т. е является определителем Вандермонда, который $\neq 0$ так как $\gamma_i \neq \gamma_j$ при $i \neq j$. Здесь мы пользовались условиями (4) и (5). Точно так же при $t = T$ имеем

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\gamma_1(x, T) & \gamma_2(x, T) & \cdots & \gamma_m(x, T) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(\gamma_1(x, T))^{m-1} & (\gamma_2(x, T))^{m-1} & \cdots & (\gamma_m(x, T))^{m-1}
\end{vmatrix} =
$$

$= \prod\limits_{1 \leq i < j \leq m} (\gamma_j(x, T) - \gamma_i(x, T))$. То есть снова получили определитель Вандермонда, который опять-таки $\neq 0$, так как $\gamma_i \neq \gamma_j$ при $i \neq j$ и всех $(x, t) \in \overline{D}$. Следовательно, задача Дирихле разрешима при конечном числе условий на правые части.

§ 2. Конечномерность пространства решений краевой задачи (1), (3) с нулевыми правыми частями

Рассмотрим следующую однородную задачу Дирихле

$$
Au = (A_1 A_2 + A_3) u = 0, \tag{*}
$$

$$
\begin{gathered}
u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0} = 0, \\
u|_{t=T} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=T} = 0.
\end{gathered} \tag{**}
$$

Докажем, что краевая задача (*), (**) имеет лишь конечное число линейно независимых решений. Для этого рассмотрим краевую задачу для формально сопряженного к A оператора с нулевыми данными Дирихле:

$$
A^* v = g, \tag{*'}
$$

$$
\begin{gathered}
v|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0} = 0, \\
v|_{t=T} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=T} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=T} = 0.
\end{gathered} \tag{*'*'}
$$

Если $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют нулевым условиям (*), (**), (*') и (*'*'), то

$$(Au, v) = (u, A^*v) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^T c_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \frac{\partial^{2m-1-k} v}{\partial t^{2m-1-k}} dt = (u, A^*v).$$

Итак

$$(Au, v) = (u, A^*v).$$

Ранее было доказано, что при выполнении конечного числа условий на правые части $f(x, t)$, $g_{j1}(x)$ и $g_{j2}(x)$ существует решение $u(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (1) и краевым условиям (3). А так как оператор A^* имеет такой же вид, как и оператор A, то аналогично предыдущему можно доказать, что при любых гладких g, удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности, существует решение задачи (*′), (*′*′). Итак, пусть $u(x, t)$ удовлетворяет (*) и (**). Тогда для любых $v(x, t)$, удовлетворяющих (*′*′), получим

$$(u, A^*v) = (Au, v) = 0.$$

Таким образом, $(u, A^*v) = 0$. Это означает, что $u(x, t)$ ортогонально к области значений оператора A^*. Ортогональное же дополнение к области значений оператора A^* конечномерно. Отсюда следует, что подпространство таких $u(x, t)$ также конечномерно. Как следствие из нормальной разрешимости задачи Дирихле вытекает следующая

Лемма 2. *Любое гладкое решение уравнения*

$$Au = (A_1A_2 + A_3)\, u = 0,$$

удовлетворяющее конечному числу условий, представимо в виде (21)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{k1} f_{k1} + \alpha_{k2} f_{k2}) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{2} T_{kl} f_{kl}, \tag{36}$$

$$\operatorname{ord} T_{kl} \leqslant -1.$$

Доказательство. В силу нормальной разрешимости задачи Дирихле существует не более конечного числа линейно независимых решений однородной задачи (*), (**). Обозначим их $u_1(x, t), \cdots, u_{N_1}(x, t)$. Пусть теперь $u(x, t)$ — решение уравнения

$$(A_1A_2 + A_3)\, u(x, t) = 0. \tag{1''}$$

Наложим на $u(x, t)$ условия

$$(u, u_k) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N_1, \tag{37}$$

и обозначим

$$g_{11}(x) = u|_{t=0}, \cdots, g_{m1}(x) = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0},$$

$$g_{12}(x) = u|_{t=T}, \cdots, g_{m2}(x) = \left.\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T}.$$

Из нормальной разрешимости задачи (1″), (3″) следует, что при наложении на правые части в (3‴) конечного числа условий ортогональности вида

$$\sum_{i=1}^{m}(g_{i1}, \varphi_{ik}^{(1)})+\sum_{i=1}^{m}(g_{i2}, \varphi_{ik}^{(2)})=0, \tag{38}$$

где $\varphi_{ik}^{(1)}$, $\varphi_{ik}^{(2)}$ $(1\leqslant k\leqslant N)$ — некоторые фиксированные функции, найдется функция вида (21)

$$\hat{u}(x, t)=\sum_{k=1}^{m}(a_{k1}(x, t)f_{k1}(w_k(x, t))+a_{k2}(x, t)f_{k2}(w_k(x, t)))+ \\ +\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2}T_{kl}f_{kl}(w_k(x, t)), \tag{39}$$

удовлетворяющая (1″) и (3″).

Подчиним также и $\hat{u}(x, t)$ условиям (37)

$$(\hat{u}, u_k)=0, \qquad 1\leqslant k\leqslant N_1, \tag{40}$$

что сводится к дополнительным условиям на $u(x, t)$. Тогда $\hat{u}(x, t)= = u(x, t)$. Таким образом, если $u(x, t)$ — произвольное гладкое решение уравнения (1″) такое, что выполнено конечное число условий (37), (38), (40), то $u(x, t)$ может быть представлено в виде (21). Лемма 2 полностью доказана.

Перейдем теперь к доказательству конечномерности пространства решений краевой задачи (1), (3) с нулевыми правыми частями. Итак, пусть $u(x, t)$ — решение однородной системы

$$(A_1A_2+A_3)u(x, t)=0, \tag{1''}$$

$$B_{j1}u(x, t)|_{t=0}=0, \qquad 1\leqslant j\leqslant m, \\ B_{j2}u(x, t)|_{t=T}=0, \qquad 1\leqslant j\leqslant m. \tag{3''}$$

В силу леммы 2 существует лишь конечное число линейно независимых решений уравнения (1″), которых нельзя представить в виде (36). Если же $u(x, t)$ представима в виде (36), то, подставив (36) в граничные условия (3″), получим в силу результатов § 1 нормально разрешимую систему относительно f_{k1}, f_{k2} $(1\leqslant k\leqslant m)$ с правыми частями, равными нулю. Следовательно, линейно независимых решений уравнения (1″), представимых в виде (36), и удовлетворяющих нулевым граничным условиям (3″), также конечное число. Таким образом, пространство решений однородной краевой задачи (1″), (3″) конечномерно. Из результатов § 1 и § 2 вытекает нормальная разрешимость краевой задачи (1), (3).

§ 3. Теорема существования и единственности для уравнений специального вида

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Дирихле для частного вида уравнения (1), что позволит доказать вместо нормальной разрешимости однозначную разрешимость краевой задачи. Пусть дано уравнение

$$A^*Au(x, t) = f(x, t) \quad \text{в } D, \tag{41}$$

где A — гиперболический оператор порядка m, характеристический многочлен главной части которого A_0 имеет вид

$$A_0(x, t, \lambda, \xi) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k(x, t)\xi), \tag{42}$$

где, как и в § 1, $\gamma_k(x, t)$ — действительны и различны:

$$\gamma_k(x, t) \neq \gamma_j(x, t) \text{ при } k \neq j \quad \text{и всех} \quad (x, t) \in \overline{D};$$

A^* — формально сопряженный с A оператор, т. е. A^* сопряжен с A, в смысле теории распределений

$$\int_D Au\bar{v}\,dx - \int_D u\overline{A^*v}\,dx = 0 \qquad \forall u, v \in C_0^\infty(D).$$

Для уравнения (41) поставим следующую краевую задачу:

$$\left.\frac{\partial^{k-1}u(x, t)}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^{k-1}u(x, t)}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=T} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, m). \tag{43}$$

Мы докажем существование обобщенного решения задачи (41) (43) методом эллиптической регуляризации. При этом обобщенное решение задачи (41), (43) для $f(x, t) \in H_0(D)$ получается как предел при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$(A^*A + \varepsilon(-\Delta)^m)\, u(x, t) = f(x, t) \tag{44}$$

с граничным условием (43), где Δ — оператор Лапласа. Как известно задача Дирихле (44), (43) однозначно разрешима (см., например, [8]). Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (44), (43). Для доказательства существования предела при $\varepsilon \to 0$ для решений задачи (44), (43) установим равномерную по ε оценку нормы в соответствующем пространстве. Предварительно введем некоторые пространства функций. Пусть $r \geqslant 0$ — целое. Обозначим через $H_r(\Gamma)$ — пространство Соболева функций с нормой

$$[u]_r^2 = \sum_{k=0}^{r} \int_\Gamma \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|^2 dx.$$

Пространство $B_s(T)$ определим как замыкание функций $u(x, t)$ класса C^∞ на $D(x \in \Gamma,\ t \in [0, T])$ по норме

$$\|[u(x, t)]\|_s = \sum_{k=0}^{s} \max_{0<t<T} [D_t^k u(x, t)]_{s-k},$$

где $s>0$ — целое, $[v]_r$ — норма в $H_r(\Gamma)$. Перейдем теперь к получению оценки для $u_\varepsilon(x, t)$, не зависящей от ε. Умножив обе части (44) скалярно на $u_\varepsilon(x, t)$, будем иметь

$$(A^*Au_\varepsilon+\varepsilon(-\Delta)^m u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)=(f,\ u_\varepsilon). \tag{45}$$

Отсюда после интегрирования по частям, с учетом граничных условий (43), получим

$$(Au_\varepsilon,\ Au_\varepsilon)+\varepsilon((-\Delta)^m u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)=(f,\ u_\varepsilon). \tag{45'}$$

Далее, интегрируя по частям и учитывая условия (43), для второго слагаемого в левой части последнего равенства получим

$$((-\Delta)^m u_\varepsilon,\ u_\varepsilon)\geqslant C\|u_\varepsilon\|_m^2\geqslant 0,$$

где норма рассматривается в пространстве Соболева $H_m(D)$. Из (45') имеем

$$\|Au_\varepsilon\|_0^2+\varepsilon\|u_\varepsilon\|_m^2\leqslant|(f,\ u_\varepsilon)|\leqslant\|f\|_0\|u_\varepsilon\|_0\leqslant\alpha\|u_\varepsilon\|_0^2+C_\alpha\|f\|_0^2, \tag{46}$$

где $\alpha<1$ может быть выбрано сколько угодно малым, C_α — некоторая константа, зависящая от α. Обозначим через H_A замыкание гладких функций, удовлетворяющих условиям (43) в норме $\|Au\|_0$. Из теории задачи Коши для гиперболических уравнений следует справедливость оценки

$$\|[u_\varepsilon]\|_{m-1}\leqslant C\|Au_\varepsilon\|_0, \tag{47}$$

так как A — гиперболический оператор и u_ε при $t=0$ удовлетворяет нулевым данным Коши (см., например, [2]). Таким образом, из (47), следует, что $H_A\subset B_{m-1}$, причем функции из H_A удовлетворяют нулевым граничным условиям (43). С другой стороны, очевидно, что

$$\|u_\varepsilon\|_0^2\leqslant T\|[u_\varepsilon]\|_0^2\leqslant T\|[u_\varepsilon]\|_{m-1}^2, \tag{48}$$

так как

$$\|u_\varepsilon\|_0^2=\int_0^T\left(\int_\Gamma|u_\varepsilon|^2\,dx\right)dt\leqslant T\cdot\max_t\int_\Gamma|u_\varepsilon|^2\,dx=T\|[u_\varepsilon]\|_0^2.$$

Из оценок (46), (47) и (48) имеем

$$\alpha\|u_\varepsilon\|_0^2+C_\alpha\|f\|_0^2\geqslant\|Au_\varepsilon\|_0^2=\frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2+\frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2\geqslant\frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2+\frac{C_1}{2}\|u_\varepsilon\|_0^2,$$

или

$$\frac{1}{2}\|Au_\varepsilon\|_0^2+\left(\frac{C_1}{2}-\alpha\right)\|u_\varepsilon\|_0^2\leqslant C_\alpha\|f\|_0^2,$$

где C_1 — некоторая константа. Если мы возьмем $\alpha<\dfrac{C_1}{2}$, то

$$\|Au_\varepsilon\|_0\leqslant 2\,C_\alpha\|f\|_0, \tag{49}$$

где C_α не зависит от ε. Неравенство (49) означает, что u_ε равномерно ограничены в норме пространства H_A.

Так как H_A — гильбертово пространство, то мы можем так выделить подпоследовательность, обозначаемую также через u_ε, чтобы она слабо сходилась при $\varepsilon \to 0$ к функции u_0 из пространства H_A. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве

$$((A^*A + \varepsilon(-\Delta)^m)\, u_\varepsilon,\ \varphi) = (f,\ \varphi)$$

или после интегрирования по частям в равенстве

$$(u_\varepsilon,\ (A^*A + \varepsilon(-\Delta)^m)^*\, \varphi) = (f,\ \varphi),$$

справедливом для любых $\varphi \in C_0^\infty(D)$, получим

$$(u_0,\ A^*A\varphi) = (f,\ \varphi),$$

то есть

$$A^*Au_0 = f \tag{50}$$

в обобщенном смысле.

Далее, так как $u_0 \in H_A \subset B_{m-1}$, то u_0 удовлетворяет условиям (43). Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $f(x,\ t)$ принадлежит пространству $H_0(D)$, то краевая задача* (41), (43), *где A — гиперболический оператор, а A^* его формально сопряженный, имеет обобщенное решение в классе $B_{m-1}(D)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям* (43).

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 30.III.1973

Մ. Դ. ԴԱՎԹՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիրներ բարձր կարգի կրկնակի բնութագրերով հիպերբոլական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում են կրկնակի բնութագրերով հիպերբոլական հավասարումներ։ Բնութագրերի մեթոդի միջոցով, որը զուգակցված է ինտեգրալ հավասարումների տեխնիկայի հետ, ապացուցվում է ընդհանուր եզրային խնդրի նորմալ լուծելիությունը։

Ավելի նեղ դասի հավասարումների համար էլիպտիկ կանոնավորման մեթոդով ստացված է Դիրիխլեի խնդրի միարժեք լուծելիությունը։

M. D. DAVTYAN. *General boundary problems for hyperbolic equations of higher orders with double characteristics* (summary)

The paper concerns the hyperbolic equations with double characteristics, for which normal solvability of general boundary problem is proved by the method of characteristics combined with the technique of integral equations. For a special class of equations the solvability of the Dirichlet problem is obtained by the method of elliptic regularisation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Д. Давтян*. Краевые задачи для некоторых классов гиперболических уравнений с кратными характеристиками, АГПИ им. Х. Абовяна, „Сборник научных трудов аспирантов", № 5, выпуск 4, 1972, 187—193.
2. *Г. И. Эскин*. Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, Матем. сб., 74 (116), 1967, 262—297.
3. *Г. И. Эскин*. Системы псевдодифференциальных уравнений с простыми вещественными характеристиками, Матем. сб., 77 (119), 1968, 174—200.
4. *Г. И. Эскин*. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными, Труды ММО, 21, 1970, 245—292.
5. *Р. Курант*. Уравнения с частными производными, Изд. „Мир", 1964.
6. *Л. Гординг*. Задача Коши для гиперболических уравнений, ИИЛ, 1961.
7. *С. Л. Соболев*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во Ленинградского ун-та, 1950.
8. *Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес*. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Изд. „Мир", 1971.
9. *О. А. Олейник* и *Е. В. Радкевич*. Уранения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, ВИНИТИ, сер. „Итоги науки", Мат. анализ, 1971.
10. *И. Г. Петровский*. Лекции по теории интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

Б. А. СААКЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ $<\rho_j>$-АБСОЛЮТНО-МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ

Как хорошо известно, абсолютно-монотонные в смысле С. Н. Бернштейна функции представляются рядами Тейлора-Маклорена ([1], [2]). В статье [3] для любого $\rho \geqslant 1$ было введено понятие $<\rho>$-абсолютно-монотонной функции и доказана ее разложимость в обобщенный ряд Маклорена по степеням $\{x^{n/\rho}\}_0^\infty$ $(\rho \geqslant 1)$, что при $\rho = 1$ сводится к теореме С. Н. Бернштейна об абсолютно-монотонных функциях.

В предлагаемой статье для любой последовательности чисел $\{\rho_j\}_0^\infty$ $(\rho_0 = 1,\ \rho_j > 1,\ j = 1, 2, \cdots)$ вводится понятие $<\rho_j>$-абсолютно-монотонных функций и исследуется вопрос об их представимости.

В § 1 после изложения некоторых основных свойств интегродифференциальных операторов D^α Римана-Лиувилля приводится определение основных операторов A_j, $\tilde{A}_j$ $(j > 0)$ и доказываются предварительные леммы.

В § 2 вводится класс $<\rho_j>$-абсолютно-монотонных функций и устанавливается, что он не пуст (теорема 1).

Далее исследуется вопрос о представимости $<\rho_j>$-абсолютно-монотонных функций при двух различных предположениях

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} = \lambda_\infty = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} = \lambda_\infty < +\infty \ \text{(теоремы 2, 3).}$$

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1. (а) Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка α $(0 < \alpha < +\infty)$ в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x = 0$ принято называть функцию

$$_0D^{-\alpha} f(x) \equiv D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,\ x \in (0, l), \tag{1.1}$$

а интегралом от $f(x)$ порядка α с концом в точке $x = l$ принято называть функцию

$$D_l^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^l (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt,\ x \in (0, l). \tag{1.2}$$

Приведем некоторые используемые в дальнейшем свойства* операторов $D^{-\alpha}$, $D_l^{-\alpha}$.

1°. *Для любого* α $(0<\alpha<+\infty)$ *функции* ${}_0D^{-\alpha}f(x)=D^{-\alpha}f(x)$, $D_l^{-\alpha}f(x)$ *определены почти всюду на* $(0, l)$ *и принадлежат классу* $L(0, l)$.

2°. *В каждой точке Лебега функции* $f(x)$ *и, следовательно, почти всюду на* $(0, l)$

$$\lim_{\alpha\to+0} D^{-\alpha}f(x)=f(x). \tag{1.3}$$

Ввиду этого оператор $D^{-\alpha}f(x)$ при $\alpha=0$ естественно определить таким образом:

$$D^{-0}f(x)\equiv f(x). \tag{1.3'}$$

Пусть $f(x)\in L(0, l)$ и при данном α $(0<\alpha<1)$ функция $D^{-(1-\alpha)}f(x)$ почти всюду на $(0, l)$ имеет производную (не обязательно суммируемую).

Тогда функция

$${}_0D^{\alpha}f(x)\equiv D^{\alpha}f(x)\equiv\frac{d}{dx}\{D^{-(1-\alpha)}f(x)\} \tag{1.4}$$

называется *производной порядка* α *от функции* $f(x)$ *с началом в точке* $x=0$.

Ввиду (1.3′) при $\alpha=1$ получим

$$D^1f(x)=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x).$$

В случае же $\alpha=0$ получим

$$D^0f(x)=f(x). \tag{1.4'}$$

3°. *Если функции* $f_k(x)\in L(0, l)$ $(k=1, 2)$ *таковы, что при данном* α $(0<\alpha<+\infty)$

$$f_1(x)\,D_l^{-\alpha}f_2(x)\in L(0, l),$$

то справедлива формула

$$\int_0^l f_1(x)\,D_l^{-\alpha}f_2(x)\,dx=\int_0^l f_2(x)\,{}_0D^{-\alpha}f_1(x)\,dx. \tag{1.5}$$

4°. *Если* $\beta>-1$ *и* $\alpha\in[0, +\infty)$, *то имеет место формула*

$${}_0D^{-\alpha}\left\{\frac{x^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\right\}=\frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)},\ x\in(0, \infty). \tag{1.6}$$

5°. *Если* $\beta>-1$ *и* $\alpha\in[0, +\infty)$, *то для любого* x $(0<x<+\infty)$ *имеет место формула*

* Эти свойства с доказательствами приведены в книге [4] (гл. IX), а также в статье [5].

$$D_x^{-\alpha}\left\{\frac{(x-t)^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\}=\frac{(x-t)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)},\ t\in(0,\ x). \qquad (1.6')$$

6°. *Пусть* $f(x)\in L(0,l)$ *и* τ $(0\leqslant\tau\leqslant 1)$ — *независимый параметр, тогда для любого* α $(0<\alpha<+\infty)$ *и* x $(0<x<l)$ *справедлива формула*

$$\{{}_0D^{-\alpha}f(v)\}_{v=x\tau}=x^\alpha\{D^{-\alpha}f(xv)\}_{v=\tau}, \qquad (1.7)$$

где в правой части оператор $D^{-\alpha}$ *берется по переменной* v.

7°. *Пусть* $f(x)$ — *неотрицательная функция из класса* $L(0,\ l)$, *тогда для любого* α $(0<\alpha<+\infty)$ *и* x_1, x_2 $(0\leqslant x_1\leqslant x_2<l)$ *имеет место неравенство*

$${}_{x_1}D^{-\alpha}f(x)\geqslant{}_{x_2}D^{-\alpha}f(x),\ x\in[x_2;\ l), \qquad (1.8)$$

где операторы ${}_{x_i}D^{-\alpha}$ $(i=1,\ 2)$ *определяются следующим образом*:

$${}_{x_i}D^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x_i}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt. \qquad (1.9)$$

В самом деле, по определению (1.9)

$${}_{x_1}D^{-\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x_1}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x_1}^{x_2}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x_2}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x_1}^{x_2}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt+$$

$$+{}_{x_2}D^{-\alpha}f(x),\ x\in[x_2,\ l).$$

Поскольку $f(t)\geqslant 0$, то отсюда следует (1.8).

8°. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\frac{1}{\rho}=1-\alpha$ $(\rho\geqslant 1)$ *и* $\varphi(t)\in L(0,\ l)$, *тогда функция*

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^x(x-t)^{1/\rho-1}\varphi(t)\,dt$$

удовлетворяет уравнению

$$D^{1/\rho}y=\varphi(x),\ x\in(0,\ l).$$

В самом деле, по определению оператора $D^{1/\rho}$ имеем

$$D^{1/\rho}F(x)=\frac{d}{dx}D^{-\alpha}F(x)=\frac{d}{dx}D^{-\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^x(x-t)^{1/\rho-1}\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt\int_0^t (t-\tau)^{1/\rho-1}\varphi(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x \varphi(\tau)\,d\tau\int_\tau^x (t-\tau)^{1/\rho-1}(x-t)^{\alpha-1}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x \varphi(\tau)(x-\tau)^{\alpha+1/\rho-1}\,d\tau\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{1/\rho-1}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x \varphi(\tau)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\rho^{-1})}{\Gamma(\alpha+\rho^{-1})}d\tau\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int_0^x \varphi(\tau)\,d\tau\right\} = \varphi(x).$$

(б) Пусть последовательность $\{\rho_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$\rho_0 = 1,\ \rho_j \geqslant 1\ (j \geqslant 1). \tag{1.10}$$

Обозначив

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{\rho_k},\ \mu_k = \frac{1}{\rho_k} = 1 - \alpha_k\ (k = 0, 1, 2, \cdots),\ (0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1), \tag{1.11}$$

введем в рассмотрение операторы

$$A_0 f(x) \equiv f(x),\ A_1 f(x) = D^{\mu_0} f(x),\ A_n f(x) = D^{\mu_{n-1}} D^{\mu_{n-2}} \cdots D^{\mu_0} f(x),\ n \geqslant 2, \tag{1.12}$$

где

$$D^{\mu_j} f(x) \equiv \frac{d}{dx} D^{-\alpha_j} f(x)\ (j = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.13}$$

Заметим, что, в частности, при $\rho_k = \rho\ (k \geqslant 1)$ мы имеем

$$A_n f(x) \equiv D^{(n-1)/\rho} f'(x)\ (n \geqslant 2),$$

т. е. $A_n f$ суть операторы последовательного дифференцирования функции $f'(x)$ порядков $\dfrac{n-1}{\rho}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x = 0$.

Наряду с A_n введем в рассмотрение операторы

$$\widetilde{A}_n f(x) \equiv D^{-\alpha_n} A_n f(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.14}$$

Из (1.12) и (1.14) следуют равенства

$$\frac{d}{dx}\widetilde{A}_n f(x) = A_{n+1} f(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Далее введем в рассмотрение систему функции $\left\{\dfrac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\}_0^\infty$, где

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\ (n \geqslant 1)$$

и докажем следующую лемму.

Лемма 1. 1°. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$A_k \left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} \equiv \widetilde{A}_k \left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} \equiv 0,\ x \in [0, +\infty),\ k \geqslant n+1, \tag{1.16}$$

$$\widetilde{A}_n \left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} \equiv 1,\ x \in [0, +\infty). \tag{1.17}$$

2°. *При $n \geqslant 1$ имеем также*

$$\widetilde{A}_k \left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\}\Bigg|_{x=0} = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{1.18}$$

Доказательство. В силу определения (1.12) ясно, что

$$A_1 f(x) = D^{\mu_0} \left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = \frac{x^{\lambda_n-1}}{\Gamma(\lambda_n)}. \tag{1.19}$$

Принимая во внимание (1.6), (1.11), (1.13) и (1.19), находим

$$D^{\mu_1} D^{\mu_0}\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = D^{\mu_1}\left\{\frac{x^{\lambda_n-1}}{\Gamma(\lambda_n)}\right\} = \frac{d}{dx} D^{-\alpha_1}\left\{\frac{x^{\lambda_n-1}}{\Gamma(\lambda_n)}\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{x^{\lambda_n-\lambda_1}}{\Gamma(1+\lambda_n-\lambda_1)}\right\} = \frac{x^{\lambda_n-\lambda_1-1}}{\Gamma(\lambda_n-\lambda_1)}.$$

Легко видеть, что после элементарных вычислений будем иметь

$$A_k \left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = D^{\mu_{k-1}} D^{\mu_{k-2}} \ldots D^{\mu_0}\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = \frac{x^{\lambda_n-\lambda_{k-1}-1}}{\Gamma(\lambda_n-\lambda_{k-1})},$$

$$0 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.20}$$

Из (1.14) и (1.20) согласно (1.6) мы получим

$$\widetilde{A}_k\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = D^{-\alpha_k}\left\{A_k\left[\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right]\right\} = D^{-\alpha_k}\left\{\frac{x^{\lambda_n-\lambda_{k-1}-1}}{\Gamma(\lambda_n-\lambda_{k-1})}\right\} =$$

$$= \frac{x^{\lambda_n-\lambda_{k-1}-1+\alpha_k}}{\Gamma(\lambda_n-\lambda_{k-1}+\alpha_k)} = \frac{x^{\lambda_n-\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_n-\lambda_k)},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Отсюда и будут следовать соотношения (1.18) леммы.

Далее, при $k = n$ из (1.20), в частности, получим

$$A_n\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = \frac{x^{\mu_n-1}}{\Gamma(\mu_n)}.$$

Но поскольку $\widetilde{A}_n = D^{-\alpha_n} A_n$ и $\alpha_n = 1 - \mu_n$, то

$$\widetilde{A}_n\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\} = D^{-\alpha_n}\left\{\frac{x^{\mu_n-1}}{\Gamma(\mu_n)}\right\} = \frac{x^{\mu_n-1+\alpha_n}}{\Gamma(\mu_n+\alpha_n)} \equiv 1,$$

откуда и из (1.15) следует

$$A_{n+1}\left\{\frac{x^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right\}\equiv 0. \tag{1.21}$$

Наконец, имея в виду определение операторов A_k и $\bar{A}_k$, в силу (1.21) получим утверждения (1.16) леммы.

В заключение отметим, что утверждения (1.16)—(1.18) леммы в случае $\rho_k=1$ $(k\geqslant 1)$ сводятся к известным свойствам функций

$$e_k(x)=\frac{x^k}{k!}\ (k\geqslant 1)$$

и их производных.

Лемма 2. *Для обобщенного полинома вида*

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} \tag{1.22}$$

справедливы формулы

$$c_k=\bar{A}_k\,Q_n(0),\ 0\leqslant k\leqslant n. \tag{1.23}$$

Доказательство. Предположим, что $0\leqslant j\leqslant n$. Применим к функции $Q_n(x)$ оператор A_j, тогда в силу формулы (1.16) леммы 1 будем иметь

$$A_j[Q_n(x)]=\sum_{k=0}^{n}c_kA_j\left\{\frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}\right\}=\sum_{k=j}^{n}c_kA_j\left\{\frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}\right\},$$

откуда следует, что при $x\in[0,+\infty)$

$$\bar{A}_j[Q_n(x)]=\sum_{k=j}^{n}c_k\bar{A}_j\left\{\frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}\right\}\quad(0\leqslant j\leqslant n).$$

Далее, пользуясь соотношениями (1.16) и (1.17), приходим к формулам (1.23).

(в) Условимся отнести к классу $C_{n+1}\{[0,l);\ \langle\rho_j\rangle\}$ $(0\leqslant l\leqslant+\infty)$ множество функций $f(x)$, подчиненных следующим условиям:

1) *функции*

$$\bar{A}_kf(x)\ (k=0,1,\cdots,n)$$

непрерывны на $[0,l)$;

2) *функции*

$$A_kf(x)\ (k=0,1,\cdots,n+1)$$

непрерывны на $(0,l)$ *и принадлежат классу* $L(0,l)$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если* $f(x)\in C_{n+1}\{[0,l);\ \langle\rho_j\rangle\}$, *то справедлива формула**

---

* Отметим, что формулы типа (1.24) приводились также в статье [6].

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \bar{A}_k f(0) \frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} + \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt. \quad (1.24)$$

Доказательство. Сначала же заметим, что из определения операторов A_n и $\bar{A}_n$ следует

$$\frac{d}{dt} \bar{A}_n f(t) = A_{n+1} f(t), \ t \in (0, l),$$

и поэтому

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} \frac{d}{dt} \bar{A}_n f(t)\, dt,$$

$$x \in (0, l).$$

Если к интегралу правой части применить формулу интегрирования по частям, то получим

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} \frac{d}{dt} \bar{A}_n f(t)\, dt = -\frac{\bar{A}_n f(0)}{\Gamma(1+\lambda_n)} x^{\lambda_n} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n - 1} \bar{A}_n f(t)\, dt = -\frac{\bar{A}_n f(0)}{\Gamma(1+\lambda_n)} x^{\lambda_n} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n - 1} D^{-\alpha_n} \{A_n f(t)\}\, dt, \ x \in (0, l). \quad (1.25)$$

Теперь, пользуясь соотношениями (1.5) и (1.6′), интеграл, стоящий в правой части равенства (1.25), можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n - 1} D^{-\alpha_n} \{A_n f(t)\} dt = \frac{1}{\Gamma(\lambda_n)} \int_0^x A_n f(t)\, D_x^{-\alpha_n} \{(x-t)^{\lambda_n - 1}\} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_n + \lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n + \alpha_n - 1} A_n f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_{n-1})} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n - 1} A_n f(t)\, dt. \quad (1.26)$$

Из (1.25) и (1.26) мы получим

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\,dt = -\frac{\bar{A}_n f(0)}{\Gamma(1+\lambda_n)} x^{\lambda_n} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_{n-1})}\int_0^x (x-t)^{\lambda_{n-1}} A_n f(t)\,dt.$$

Легко видеть, что, повторяя те же рассуждения, после n-ого шага приходим к тождеству

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\,dt = -\sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k f(0) \frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_0)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_0} A_1 f(t)\,dt,\ x\in(0,\ l). \tag{1.27}$$

Но поскольку $\lambda_0=0$, $\rho_0=1$ и $A_1 f(t)=f'(t)$, то

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_0)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_0} A_1 f(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x) - \frac{\bar{A}_0 f(0)}{\Gamma(1+\lambda_0)} x^{\lambda_0}.$$

Отсюда и из (1.27) получим утверждение (1.24) леммы.

Заметим, что, в частности, при $\rho_k=1$ $(k\geqslant 1)$ из (1.24) получается классическая формула Тейлора-Маклорена, т. е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(г) Приведем еще две леммы, пользуясь введенными выше обозначениями.

Лемма 4. *Для любого $n\geqslant 1$ имеет место тождество*

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\Gamma(\rho_k^{-1})}\int_t^x (\zeta_n-t)^{-\alpha_n}\,d\zeta_n\int_{\zeta_n}^x (\zeta_{n-1}-\zeta_n)^{-\alpha_{n-1}}\,d\zeta_{n-1}\cdots\int_{\zeta_2}^x (\zeta_1-\zeta_2)^{-\alpha_1}\,d\zeta_1=$$

$$=\frac{(x-t)^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)},\ 0\leqslant t\leqslant x<+\infty. \tag{1.28}$$

Доказательство. Сперва заметим, что

$$\int_{\zeta_2}^x (\zeta_1-\zeta_2)^{-\alpha_1}\,d\zeta_1=\frac{(x-\zeta_2)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1}=\rho_1(x-\zeta_2)^{1/\rho_1}.$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int_{\zeta_3}^{x} (\zeta_2 - \zeta_3)^{-\alpha_2} d\zeta_2 \int_{\zeta_2}^{x} (\zeta_1 - \zeta_2)^{-\alpha_1} d\zeta_1 = \rho_1 \int_{\zeta_3}^{x} (\zeta_2 - \zeta_3)^{-\alpha_2} (x - \zeta_2)^{1-\alpha_1} d\zeta_2 =$$

$$= \rho_1 (x - \zeta_3)^{\lambda_2} \int_{0}^{1} \zeta_2^{-\alpha_2} (1 - \zeta_2)^{1-\alpha_1} d\zeta_2 = \frac{\rho_1 \Gamma(1-\alpha_2)\Gamma(2-\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_2+2-\alpha_1)} (x-\zeta_3)^{\lambda_2} =$$

$$= \frac{\rho_1 \Gamma(\rho_2^{-1}) \Gamma(1+\rho_1^{-1})}{\Gamma(1+\rho_1^{-1}+\rho_2^{-1})} (x-\zeta_3)^{\lambda_2} = \frac{\Gamma(\rho_1^{-1}) \Gamma(\rho_2^{-1})}{\Gamma(1+\lambda_2)} (x-\zeta_3)^{\lambda_2}.$$

Далее будем иметь

$$\int_{\zeta_4}^{x} (\zeta_3 - \zeta_4)^{-\alpha_3} d\zeta_3 \int_{\zeta_3}^{x} (\zeta_2 - \zeta_3)^{-\alpha_2} d\zeta_2 \int_{\zeta_2}^{x} (\zeta_1 - \zeta_2)^{-\alpha_1} d\zeta_1 =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho_1^{-1}) \Gamma(\rho_2^{-1})}{\Gamma(1+\lambda_2)} \int_{\zeta_4}^{x} (\zeta_3 - \zeta_4)^{-\alpha_3} (x-\zeta_3)^{\lambda_2} d\zeta_3 =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho_1^{-1}) \Gamma(\rho_2^{-1})}{\Gamma(1+\lambda_2)} (x-\zeta_4)^{\lambda_3} \int_{0}^{1} \zeta_3^{-\alpha_3} (1-\zeta_3)^{\lambda_2} d\zeta_3 =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho_1^{-1}) \Gamma(\rho_2^{-1}) \Gamma(\rho_3^{-1})}{\Gamma(1+\lambda_3)} (x-\zeta_4)^{\lambda_3}.$$

Легко видеть, что после n-ого шага получим тождество (1.25) леммы.

Следующий результат играет в дальнейшем существенную роль.

Лемма 5. *Для любого x и d* $(0 \leqslant x \leqslant d < +\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\frac{(d-x)^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} \cdot \frac{x^{\lambda_n-\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_n-\lambda_k)} < \frac{d^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)} \quad (n \geqslant k). \tag{1.29}$$

Доказательство. Согласно лемме 4 имеем

$$\frac{(d-x)^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} \Gamma(\rho_j^{-1})} \int_{x}^{d} (\zeta_k - x)^{-\alpha_k} d\zeta_k \int_{\zeta_k}^{d} (\zeta_{k-1} - \zeta_k)^{-\alpha_{k-1}} d\zeta_{k-1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\zeta_2}^{d} (\zeta_1 - \zeta_2)^{-\alpha_1} d\zeta_1 \tag{1.28'}$$

и

$$\frac{x^{\lambda_n-\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_n-\lambda_k)}=\frac{1}{\prod\limits_{j=k+1}^{n}\Gamma(\rho_j^{-1})}\int\limits_0^x \zeta_n^{-\alpha_n}d\zeta_n\int\limits_{\zeta_n}^x(\zeta_{n-1}-\zeta_n)^{-\alpha_{n-1}}d\zeta_{n-1}\cdots$$

$$\cdots\int\limits_{\zeta_{k+2}}^x(\zeta_{k+1}-\zeta_{k+2})^{-\alpha_{k+1}}d\zeta_{k+1}, \qquad (1.28'')$$

где, таким образом, наши переменные интегрирования соответственно лежат в границах

$$0\leqslant\zeta_n\leqslant\zeta_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\zeta_{k+1}\leqslant x\leqslant\zeta_k\leqslant\zeta_{k-1}\leqslant\cdots\leqslant\zeta_1\leqslant d.$$

Далее, если в правой части (1.28′) заменить x на ζ_{k+1}, то получим неравенство

$$\frac{(d-x)^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}<\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k}\Gamma(\rho_j^{-1})}\int\limits_{\zeta_{k+1}}^d(\zeta_k-\zeta_{k+1})^{-\alpha_k}d\zeta_k\cdots\int\limits_{\zeta_2}^d(\zeta_1-\zeta_2)^{-\alpha_1}d\zeta_1. \qquad (1.30)$$

Из (1.28′), (1.28″) и (1.30) имеем также

$$\frac{(d-x)^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}\cdot\frac{x^{\lambda_n-\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_n-\lambda_k)}=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\rho_j^{-1})}\int\limits_0^x\zeta_n^{-\alpha_n}d\zeta_n\times$$

$$\times\int\limits_{\zeta_n}^x(\zeta_{n-1}-\zeta_n)^{-\alpha_{n-1}}d\zeta_{n-1}\cdots\int\limits_{\zeta_{k+2}}^x(\zeta_{k+1}-\zeta_{k+2})^{-\alpha_{k+1}}d\zeta_{k+1}\times$$

$$\times\int\limits_x^d(\zeta_k-x)^{-\alpha_k}d\zeta_k\cdots\int\limits_{\zeta_2}^d(\zeta_1-\zeta_2)^{-\alpha_1}d\zeta_1<$$

$$<\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\rho_j^{-1})}\int\limits_0^x\zeta_n^{-\alpha_n}d\zeta_n\cdots\int\limits_{\zeta_{k+2}}^x(\zeta_{k+1}-\zeta_{k+2})^{-\alpha_{k+1}}d\zeta_{k+1}\times$$

$$\times\int\limits_{\zeta_{k+1}}^d(\zeta_k-\zeta_{k+1})^{-\alpha_k}d\zeta_k\cdots\int\limits_{\zeta_2}^d(\zeta_1-\zeta_2)^{-\alpha_1}d\zeta_1.$$

Отсюда и следует оценка (1.29) леммы.

Заметим, что из (1.29), в частности, при $\rho_k=\rho$ $(k>1)$ получается неравенство

$$\frac{(d-x)^{k/\rho}}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)}\cdot\frac{x^{(n-k)/\rho}}{\Gamma\left(1+\frac{n-k}{\rho}\right)}<\frac{d^{n/\rho}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}\right)},\ x\in[0,\ d], \tag{1.29'}$$

что при $\rho=1$ сводится к очевидному неравенству

$$\frac{(d-x)^k}{k!}\cdot\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}<\frac{d^n}{n!}.$$

§ 2. Классы $<\rho_j>$-абсолютно-монотонных функций

Ниже мы будем пользоваться всеми обозначениями, принятыми нами в § 1.

2.1. Обозначим через $C_\infty\{[0,\ l);\ <\rho_j>\}$ множества функций $f(x)$, принадлежащих классу $C_n\{[0,\ l);\ <\rho_j>\}$ при любом $n\geqslant 0$. Иначе говоря, мы полагаем, что

1) функции

$$\bar{A}_k f(x)=D^{-\alpha_k}A_k f(x)\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

непрерывны на $[0,\ l)$;

2) функции

$$A_k f(x)\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

непрерывны на $(0,\ l)$ и принадлежат классу $L\,(0,\ d)$ $(0<d<l\leqslant+\infty)$.

Условимся функцию $f(x)$ называть $<\rho_j>$-абсолютно-монотонной, если

1) $$f(x)\in C_\infty\{[0,\ l);\ <\rho_j>\}, \tag{2.1}$$

2) $$A_k f(x)\geqslant 0\ (k\geqslant 0),\ x\in(0,\ l). \tag{2.2}$$

Легко видеть, что каждый полином вида

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)},$$

где $a_k\geqslant 0$ $(k\geqslant 0)$ является $<\rho_j>$-абсолютно-монотонной функцией в любом промежутке $[0,\ l)$ $(0<l<+\infty)$.

Как хорошо известно, класс обычных абсолютно-монотонных на $[0,\ l)$ функций совпадает с множеством аналитических в круге $|z|<l$ функций, допускающих разложение в ряд Маклорена с неотрицательными коэффициентами. Как будет показано ниже, аналогичное положение имеет место и для $<\rho_j>$-абсолютно-монотонных функций.

Теорема 1. *Пусть $\{a_k\}_0^\infty$ $(a_k\geqslant 0)$ — произвольная последовательность положительных чисел такая, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)}d^{\lambda_k} \tag{2.3}$$

сходится при любом $d \in [0, l)$. *Тогда*

1°. *Функция*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k} \tag{2.4}$$

является $\langle \rho_j \rangle$-*абсолютно-монотонной, причем*

$$\tilde{A}_j f(0) = a_j \ (j \geqslant 0). \tag{2.5}$$

2°. *Для любого* $j \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$\tilde{A}_j f(x) \leqslant f(d) \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(d-x)^{\lambda_j}}, \ 0 \leqslant x < d < l. \tag{2.5'}$$

3°. *Ряд* (2.4) *сходится также на всей римановой поверхности*

$$G_\infty(l) = \{z;\ |\mathrm{Arg}\, z| < +\infty,\ |z| < l\},$$

определяя аналитическую там функцию $f(z)$.

Доказательство. 1°. Сначала же отметим, что ряд (2.4) равномерно сходится в любом промежутке $[0, d]$ $(0 < d < l)$.

В самом деле, поскольку

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_k} = M < +\infty,$$

то

$$\frac{a_k x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} \leqslant M \frac{a_k \lambda_k d^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} \ (k \geqslant 1), \ 0 \leqslant x \leqslant d.$$

Отсюда в силу сходимости ряда (2.3) следует равномерная сходимость ряда (2.4) в $[0; d]$.

Покажем, что $f(x) \in C_\infty\{[0, l); \langle \rho_j \rangle\}$.

С этой целью достаточно доказать, что для любого $m \geqslant 1$ справедливы соотношения

$$A_m f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\lambda_k - \lambda_{m-1})} x^{\lambda_k - \lambda_{m-1} - 1}, \ x \in (0, l) \tag{2.6}$$

и

$$\tilde{A}_m f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+\lambda_k-\lambda_m)} x^{\lambda_k - \lambda_m}, \ x \in [0, l). \tag{2.7}$$

т. е. допустимо почленное применение операторов A_m и $\tilde{A}_m$ $(m \geqslant 1)$ к правой части (2.4).

Итак, докажем соотношения (2.6) и (2.7).

По определению оператора A_1 имеем

$$A_1 f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k - 1}. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что почленное дифференцирование допустимо, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k - 1}$$

равномерно сходится в промежутке $(0, d]$, ввиду оценки

$$\frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k - 1} \leqslant \frac{1}{\delta} \frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} d^{\lambda_k} \ (k \geqslant 1), \ 0 < \delta \leqslant x \leqslant d$$

и сходимости ряда (2.3).

Далее

$$\bar{A}_1 f(x) = D^{-\alpha_1} A_1 f(x) = D^{-\alpha_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} x^{\lambda_k - 1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} D^{-\alpha_1}\{x^{\lambda_k - 1}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k x^{\lambda_k - \lambda_1}}{\Gamma(1+\lambda_k - \lambda_1)}, \ x \in [0, l), \qquad (2.7')$$

причем здесь почленное применение оператора $D^{-\alpha_1}$ допустимо, поскольку $D^{-\alpha_1}$ — интегральный оператор. Соотношения (2.6) и (2.7) доказаны для значения $m=1$.

Проведем теперь рассуждение полной индукции. А именно, предполагая, что формулы (2.6) и (2.7) верны для данного значения $m \geqslant 1$, установим их справедливость для значения $m+1$.

По определению

$$A_{m+1} f(x) = D^{\mu_m} A_m f(x) = \frac{d}{dx} D^{-\alpha_m} A_m f(x) = \frac{d}{dx} \bar{A}_m f(x).$$

Но в силу (2.7), будем иметь

$$A_{m+1} f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+\lambda_k - \lambda_m)} x^{\lambda_k - \lambda_m}\right) =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k (\lambda_k - \lambda_m)}{\Gamma(1+\lambda_k - \lambda_m)} x^{\lambda_k - \lambda_m - 1}, \ x \in (0, l).$$

Остается убедиться в том, что в правой части почленное дифференцирование допустимо.

С этой целью заметим, что в силу (1.29) можно получить оценку

$$\frac{a_k (\lambda_k - \lambda_m)}{\Gamma(1+\lambda_k - \lambda_m)} x^{\lambda_k - \lambda_m - 1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(1+\lambda_m)}{\delta (d_1 - d)^{\lambda_m}} \frac{a_k \lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} d_1^{\lambda_k} \ (k \geqslant m+1), \ 0 < \delta \leqslant x \leqslant d \leqslant d_1 < l.$$

Отсюда и из сходимости ряда (2.3) следует, что ряд (2.6″) равномерно сходится внутри промежутка $(0, l)$ и, следовательно, допустимо почленное дифференцирование ряда (2.7) в промежутке $(0, l)$.

Далее

$$\widetilde{A}_{m+1} f(x) = D^{-\alpha_{m+1}} \{A_{m+1} f(x)\} = D^{-\alpha_{m+1}} \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k (\lambda_k - \lambda_m)}{\Gamma(1+\lambda_k-\lambda_m)} x^{\lambda_k - \lambda_m - 1} \right\} =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k D^{-\alpha_{m+1}} \left\{ \frac{x^{\lambda_k - \lambda_m - 1}}{\Gamma(\lambda_k - \lambda_m)} \right\} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k x^{\lambda_k - \lambda_{m+1}}}{\Gamma(1+\lambda_k - \lambda_{m+1})} \qquad (2.7'')$$

и, таким образом, формулы (2.6) и (2.7) справедливы для значения $m+1$ и, тем самым, для любого $m \geqslant 1$.

Принимая во внимание (1.29), из (2.6) и (2.7) заключаем, что функции $A_m f(x) \geqslant 0$ $(m \geqslant 1)$ непрерывны в промежутке $(0, l)$ и принадлежат классу $L(0, d)$, $d \in (0, l)$, а функции $\widetilde{A}_m f(x)$ $(m \geqslant 1)$ непрерывны в промежутке $[0, l)$ и удовлетворяют начальным условиям (2.5).

2°. Заметим, что согласно (1.29) имеют место неравенства

$$\frac{x^{\lambda_k - \lambda_j}}{\Gamma(1+\lambda_k - \lambda_j)} < \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(d-x)^{\lambda_j}} \cdot \frac{d^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}, \quad 0 \leqslant x < d < l, \ 0 \leqslant j \leqslant k,$$

откуда и из (2.7) получим оценки (2.5′)

$$\widetilde{A}_j f(x) \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(d-x)^{\lambda_j}} \cdot \frac{a_k d^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)} \leqslant f(d) \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(d-x)^{\lambda_j}} (j \geqslant 0), \ 0 \leqslant x < d < l.$$

3°. Из (2.4) следует разложение

$$f(e^{-u}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+\lambda_k)} e^{-\lambda_k u}, \ l_1 < u \leqslant +\infty,$$

где $l_1 = -\ln l$.

Ввиду известных свойств рядов Дирихле этот ряд сходится также во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\, w > l_1$

Наконец, отсюда заключаем, что функция $f(x)$ аналитически продолжается на всю риманову поверхность

$$G_\infty \{l\} = \{z;\ |\mathrm{Arg}\, z| < +\infty,\ |z| < l\}.$$

Итак, теорема полностью доказана.

2.2. Рассмотрим теперь вопрос о представлении $\langle \rho_j \rangle$-абсолютно-монотонных функций при условиях

$$\lambda_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} = +\infty \text{ и } \lambda_\infty < +\infty.$$

(а) Докажем сначала две леммы.

Лемма 6. *Пусть* $f(t) \in C_\infty \{[0, l); \langle \rho_j \rangle\}$ $(0 < l \leqslant +\infty)$ *и последовательность функций* $\{\widetilde{A}_k f(t)\}_0^\infty$ *удовлетворяет условиям*

$$|\widetilde{A}_k f(t)| \leqslant c(f) \cdot \frac{\Gamma(1+\lambda_k)}{(d-t)^{\lambda_k}} \ (k = 0, 1, 2, \cdots), \ 0 \leqslant t < d < l. \qquad (2.8)$$

Если

$$\lambda_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_j} = +\infty, \tag{2.9}$$

то для любого x_0 $(0 \leqslant x_0 < l)$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что при* $x \in [x_0, x_0 + \delta]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt = 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Для любого x_0 $(0 \leqslant x_0 < l)$ к интегралу

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt, \quad x \in [0, l)$$

применим формулу интегрирования по частям. Тогда в силу (1.14) мы приходим к тождеству

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\lambda_n} d\bar{A}_n f(t) =$$

$$= -\frac{\bar{A}_n f(x_0)}{\Gamma(1+\lambda_n)} (x-x_0)^{\lambda_n} + \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} \bar{A}_n f(t) \frac{d}{dt} \{-(x-t)^{\lambda_n}\}\, dt.$$

Отсюда, согласно (2.8), получим оценку

$$\left| \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{(x-x_0)^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)} |\bar{A}_n f(x_0)| +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt} \{-(x-t)^{\lambda_n}\} |\bar{A}_n f(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(x-x_0)^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)} \cdot c(f) \cdot \frac{\Gamma(1+\lambda_n)}{(d-x_0)^{\lambda_n}} +$$

$$+ c(f) \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt} \{-(x-t)^{\lambda_n}\} \cdot \frac{dt}{(d-t)^{\lambda_n}} \leqslant c(f) \left(\frac{x-x_0}{d-x_0} \right)^{\lambda_n} +$$

$$+ \frac{c(f)}{(d-x)^{\lambda_n}} \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt} \{-(x-t)^{\lambda_n}\}\, dt = c(f) \left(\frac{x-x_0}{d-x_0} \right)^{\lambda_n} + c(f) \left(\frac{x-x_0}{d-x} \right)^{\lambda_n}.$$

Но поскольку при $x \in [x_0, d]$, $d - x_0 > d - x$, то при любом $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\lambda_n}A_{n+1}f(t)\,dt<2\,c(f)\left(\frac{x-x_0}{d-x}\right)^{\lambda_n}, \tag{2.11}$$

причем, если $\frac{x-x_0}{d-x}<1$, то в силу условия (2.9) $\left(\frac{x-x_0}{d-x}\right)^{\lambda_n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Наконец, если $0<\delta<\frac{d-x_0}{2}$, то из (2.11) убеждаемся в справедливости (2.10).

Можно легко убедиться в том, что каждая функция $\tilde{l}_k(x)=\frac{x^{\lambda_k}}{\Gamma(1+\lambda_k)}$ $(k\geqslant 0)$ удовлетворяет условиям леммы 6.

Лемма 7. *Пусть $f(x)$ является $\langle\rho_j\rangle$-абсолютно-монотонной функцией, причем*

$$\lambda_\infty=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_j}=+\infty.$$

Тогда для любого x_0 $(0\leqslant x_0<l)$ существует такое $\delta>0$, что при $x\in[x_0,\ x_0+\delta]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\lambda_n}A_{n+1}f(t)\,dt=0. \tag{2.10'}$$

Доказательство. Сперва заметим, что для любого $n\geqslant 0$ функция $\tilde{A}_n f(t)$—неубывающая, поскольку

$$\frac{d}{dt}\tilde{A}_n f(t)=A_{n+1}f(t)\geqslant 0.$$

Далее для любого b $(0<b<l)$ из тождества (1.24) леммы 3 следует, что

$$f(b)\geqslant\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^b(b-t)^{\lambda_n}A_{n+1}f(t)\,dt=$$

$$=\int_0^b D_b^{-\alpha_{n+1}}\left\{\frac{d}{dt}\left[-\frac{(b-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right]\right\}A_{n+1}f(t)\,dt=$$

$$=\int_0^b\frac{d}{dt}\left[-\frac{(b-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right]D^{-\alpha_{n+1}}\{A_{n+1}f(t)\}\,dt=$$

$$=\int_0^b\frac{d}{dt}\left[-\frac{(b-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right]\tilde{A}_{n+1}f(t)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant \int_x^b \frac{d}{dt}\left[-\frac{(b-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right]\tilde{A}_{n+1} f(t)\, dt \geqslant \tilde{A}_{n+1} f(x) \times$$

$$\times \int_x^b \frac{d}{dt}\left[-\frac{(b-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right] dt =$$

$$= \bar{A}_{n+1} f(x) \frac{(b-x)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})} \quad x \in [0,\ b].$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\bar{A}_{n+1} f(x) \leqslant f\ (b) \frac{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}{(b-x)^{\lambda_{n+1}}} \quad (n=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{2.12}$$

Теперь оценим сверху интеграл, стоящий в левой части (2.10′).

Пользуясь свойствами 3° (1.5) и 7° (1.8), в силу (2.12) получим

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} D_x^{-\alpha_{n+1}} \left\{\frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right]\right\} A_{n+1} f(t) dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right] {}_{x_0}D^{-\alpha_{n+1}}\ |A_{n+1} f(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right] D^{-\alpha_{n+1}}\ |A_{n+1} f(t)|\, dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right]\bar{A}_{n+1} f(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{A}_{n+1}\ f(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})}\right] dt = \bar{A}_{n+1} f(x) \times$$

$$\times \frac{(x-x_0)^{\lambda_{n+1}}}{\Gamma(1+\lambda_{n+1})} < f(b) \left(\frac{x-x_0}{b-x}\right)^{\lambda_n} \tag{2.13}$$

Так как $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, то при $\dfrac{x-x_0}{b-x} < 1$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-x_0}{b-x}\right)^{\lambda_{n+1}} = 0.$$

Поэтому очевидно, что если $0<\delta<\frac{b-x_0}{2}$, то из (2.13) следует наше утверждение (2.10′).

(б) Докажем, наконец, первую основную теорему данной работы.

Теорема 2. *Если $f(x)$ — $\langle\rho_j\rangle$-абсолютно-монотонная функция в промежутке $[0, l)$, причем $\lambda_\infty=+\infty$, то справедливо разложение*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{A}_k f(0)}{\Gamma(1+\lambda_k)}\,x^{\lambda_k},\ x\in[0, l). \tag{2.14}$$

Доказательство. Сразу же отметим, что поскольку $f(x)\in C_\infty\{[0, l); \langle\rho_j\rangle\}$, то для любого $n\geqslant 0$ имеет место формула (1.24), т. е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\widetilde{A}_k f(0)}{\Gamma(1+\lambda_k)}\,x^{\lambda_k}+R_n(x),\ x\in[0, l),$$

где

$$R_n(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_n}A_{n+1}f(t)\,dt.$$

Так как $\widetilde{A}_k f(0)\geqslant 0$ $(k\geqslant 0)$ и $A_k f(t)\geqslant 0$ $(k\geqslant 0)$, то легко видеть, что

$$0\leqslant R_{n+1}(x)\leqslant R_n(x),\ n\geqslant 1,\ x\in[0, l).$$

Поэтому для любого $x\in[0, l)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=R(x)\geqslant 0,\ x\in[0, l). \tag{2.15}$$

Из тождества (1.24), очевидно, следуют неравенства

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\widetilde{A}_k f(0)\,\lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)}\,x^{\lambda_k}\leqslant xf'(x)\quad(n>0),$$

откуда легко заключаем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{A}_k f(0)\,\lambda_k}{\Gamma(1+\lambda_k)}\,x^{\lambda_k}$$

сходится при любом $x\in[0, l)$.

Согласно теореме 1, функция

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{A}_k f(0)}{\Gamma(1+\lambda_k)}\,x^{\lambda_k} \tag{2.16}$$

является $\langle\rho_j\rangle$-абсолютно-монотонной, причем

$$\tilde{A}_j\, g(0) = \tilde{A}_j f(0) \quad (j \geqslant 0).$$

Переходя к пределу в формуле (1.24), принимая во внимание (2.15) и (2.16), мы получим

$$R(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [0, l). \tag{2.17}$$

Заметим, что $R(x) \in C_\infty\{[0, l); \langle \rho_j \rangle\}$, поскольку $f(x)$ и $g(x)$ из того же класса, причем

$$\tilde{A}_j\, R(0) = 0 \quad (j \geqslant 0).$$

Имея в виду (2.5') и (2.12), для $\tilde{A}_j\, R(x) (j \geqslant 1)$ можно получить оценку

$$|\tilde{A}_j R(x)| \leqslant \tilde{A}_j f(x) + \tilde{A}_j g(x) \leqslant 2\tilde{A}_j f(x) + g(b) \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(b-x)^{\lambda_j}} <$$

$$< 2f(b) \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(b-x)^{\lambda_j}} + g(b) \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(b-x)^{\lambda_j}}, \quad 0 \leqslant x < b < l.$$

Из (2.17) легко следует, что $g(b) \leqslant f(b)$, и поэтому

$$|\tilde{A}_j R(x)| < 3 f(b) \frac{\Gamma(1+\lambda_j)}{(b-x)^{\lambda_j}} \quad (j \geqslant 1) \quad 0 \leqslant x < b < l. \tag{2.18}$$

Таким образом, функция $R(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6.

Покажем теперь, что $R(x) \equiv 0$, $x \in [0, l)$, чем и завершится доказательство теоремы.

С этой целью заметим, что, согласно лемме 7, существует такое число $\delta > 0$, что при $x \in [0, \delta]$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt = 0,$$

а это значит, что $R(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \delta]$.

Обозначим $\sup\{\delta\} = x_0$, т. е. $[0, x_0]$ является максимальным промежутком, где $R(x) \equiv 0$.

Предполагая $x_0 < l$ и заметив, что $\tilde{A}_j\, R(0) = 0$ $(j \geqslant 0)$, запишем формулу (1.24) для функции $R(x)$

$$R(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} R(t)\, dt, \quad x \in [0, l).$$

Для значений $x \in (x_0, l)$ функция $R(x)$ запишется в виде

$$R(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} R(t)\, dt. \tag{2.19}$$

С другой стороны, так как функция $R(x)$ удовлетворяет условиям леммы 6, то существует $\delta_0>0$ такое, что при $x\in[x_0, x_0+\delta_0]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\lambda_n}A_{n+1}R(t)\,dt=0.$$

Отсюда и из (2.19) следует, что при $x\in[x_0, x_0+\delta_0]$

$$R(x)\equiv 0.$$

Но тогда окончательно будем иметь $R(x)\equiv 0$, $x\in[0, x_0+\delta_0)$. Таким образом, при $x_0<l$, $[0, x_0]$ не является максимальным промежутком, где $R(x)\equiv 0$. Полученное противоречие показывает, что $R(x)\equiv 0$ при $x\in[0, l)$.

Заметим, что из теоремы 2, в частности, при $\rho_j=\rho$ $(j\geqslant 1)$, $\rho_j=1$ $(j\geqslant 1)$ получаются следующие следствия.

Следствие 1*. *Если $f(x)$ — $<\rho>$-абсолютно-монотонная функция, то*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\bar{D}^{k/\rho}f(0)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)}x^{k/\rho},\quad x\in[0, l). \tag{2.14'}$$

Следствие 2. (С. Н. Бернштейн [1]). *Если $f(x)$ — абсолютно-монотонная функция, то*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\quad x\in[0, l). \tag{2.14''}$$

(в) Теорема 3. *Пусть $f(x)$ является $<\rho_j>$-абсолютно-монотонной функцией, причем*

$$\lambda_\infty=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_j}<+\infty. \tag{2.20}$$

Тогда имеет место разложение

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\bar{A}_k f(0)}{\Gamma(1+\lambda_k)}x^{\lambda_k}+\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_\infty)}\int_0^x(x-t)^{\lambda_\infty}d\mu(t),\quad x\in[0, l), \tag{2.21}$$

где $\mu(t)\geqslant 0$ — некоторая неубывающая и ограниченная на $[0, d]$ $(0<d<l)$ функция.

Доказательство. Отметим, что из (2.17) имеем разложение

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\bar{A}_k f(0)}{\Gamma(1+\lambda_k)}x^{\lambda_k}+R(x),\quad x\in[0, l).$$

---

* Понятие $<\rho>$-абсолютно-монотонной функции и её разложимости в ряд (2.14') впервые было рассмотрено в статье [3].

Остается убедиться в том, что в рассматриваемом случае (2.20) функция $R(x)$ допускает представление вида

$$R(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_\infty)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_\infty}\, d\mu(t),\ x\in[0,l).$$

Обозначив

$$\int_0^t A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\equiv g_n(t),\ n\geqslant 1,\ t\in[0,l),$$

покажем, что последовательность $\{g_n(t)\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы Хелли, т. е.

1) $\qquad g_n(t)\leqslant M,\ n\geqslant 1,\ t\in[0,d],\ (0<d<l\leqslant+\infty),$

2) $\qquad \bigvee\limits_0^d (g_n)\leqslant M,\ n\geqslant 1.$

С этой целью заметим, что при $n\geqslant n_0$

$$\frac{1}{2}\frac{(d_1-d)^{\lambda_\infty}}{\Gamma(1+\lambda_\infty)}\int_0^t A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\leqslant\frac{(d_1-d)^{\lambda_n}}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^d A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^d (d_1-\tau)^{\lambda_n} A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\leqslant\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^{d_1}(d_1-\tau)^{\lambda_n} A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\leqslant$$

$$\leqslant f(d_1),\ 0\leqslant t\leqslant d<d_1<l,$$

отсюда мы приходим к оценкам

$$g_n(t)\equiv\int_0^t A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\leqslant\frac{2f(d_1)\,\Gamma(1+\lambda_\infty)}{(d_1-d)^{\lambda_\infty}},\ 0\leqslant t\leqslant d,\ n\geqslant n_0$$

и

$$\bigvee_0^d (g_n)=\int_0^d A_{n+1} f(\tau)\, d\tau\leqslant\frac{2f(d_1)\,\Gamma(1+\lambda_\infty)}{(d_1-d)^{\lambda_\infty}},\ n\geqslant n_0.$$

Согласно теореме Хелли, из последовательности $\{g_n(t)\}_1^\infty$ можно извлечь подпоследовательность $\{g_{n_k}(t)\}_1^\infty$, имеющую предел

$$\lim_{n_k\to\infty} g_{n_k}(t)=\mu(t)\quad (t\in[0,l)).$$

Но функцию $R_n(x)$, очевидно, можно представить и в виде

$$R_n(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)}\int_0^x (x-t)^{\lambda_n} A_{n+1} f(t)\, dt=$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_n)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_n} \, dg_n(t).$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} (x-t)^{\lambda_n} = (x-t)^{\lambda_\infty}, \ 0 \leqslant t \leqslant x, \ x \in [0, l),$$

притом равномерно относительно t, то, согласно теореме о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса, будем иметь

$$R(x) = \lim_{n \to \infty} R_n(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_\infty)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_\infty} \, d\mu(t), \ x \in [0, l)$$

и теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы функция $f(x)$ была $\langle \rho_j \rangle$-абсолютно-монотонной и удовлетворяла условиям*

$$\tilde{A}_j f(0) = 0 \quad (j \geqslant 0),$$

необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_\infty)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_\infty} \, d\mu(t), \ x \in [0, l), \tag{2.22}$$

где $\mu(t) \geqslant 0$ — *некоторая неубывающая и ограниченная функция на* $[0, d]$ $(0 < d < l)$.

Необходимость этого утверждения непосредственно следует из теоремы 3.

Достаточность следует из легко проверяемых соотношений

$$A_j f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda_\infty - \lambda_{j-1})} \int_0^x (x-t)^{\lambda_\infty - \lambda_{j-1} - 1} \, d\mu(t), \ j \geqslant 1, \ x \in (0, l),$$

$$\tilde{A}_j f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda_\infty - \lambda_j)} \int_0^x (x-t)^{\lambda_\infty - \lambda_j} \, d\mu(t), \ j \geqslant 0, \ x \in [0, l).$$

Простейшим примером $\langle \rho_j \rangle$-абсолютно-монотонной функции, обладающей указанным свойством $\tilde{A}_j f(0) = 0$ $(j \geqslant 0)$, является x^{λ_∞}. Эта функция, очевидно, представима в виде

$$x^{\lambda_\infty} = \int_0^x (x-t)^{\lambda_\infty} \, d\mu(t), \ x \in [0, +\infty),$$

где

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

В заключение, пользуясь случаем, выражаю благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24.I.1974

Բ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ. Կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորներ և նրանց հետ ասոցացված $\langle \rho_j \rangle$— բացարձակ մոնոտոն ֆունկցիաներ *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում տված $\{\rho_j\}_0^\infty$ $(\rho_0=1,\ \rho_j \geq 1,\ j \geq 1)$ *հաջորդականության համար, մտցվում է* $<\rho_j>$-*բացարձակ մոնոտոն ֆունկցիաների գաղափարը և ուսումնասիրվում է նրանց ներկայացման հարցը երկու տարբեր ենթադրությունների դեպքում*

$$\lambda_\infty = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\rho_j} = \infty \text{ և } \lambda_\infty < +\infty.$$

B. A. SAAKIAN. *Differential operators of fractional order and associated* $<\rho_j>$*-absolutely monotopic functions* (summary)

The notion of $\{\rho_j\}$-absolutely monotopic functions is introduced for a given sequence $\{\rho_j\}_0^\infty$ $(\rho_0 = 1,\ \rho_j \geq 1,\ j \geq 1)$. The problem of representation of these functions is investigated under alternative assumptions

$$\lambda_\infty = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\rho_j} = \infty \text{ and } \lambda_\infty < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Бернштейн.* Абсолютно-монотонные функции, Собрание сочинений, т. 1, 35, 1952, 370—425.
2. *D. V. Widder.* The Laplace transform, Prenceton and London, Prenceton Univ. Press, 1946.
3. *М. М. Джрбашян, Б. А. Саакян.* Классы формул типа Тейлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка (в печати).
4. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
5. *М. М. Джрбашян.* Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН Армянской ССР, сер. матем., 3, № 4, 1968, 171—248.
6. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Армянской ССР, сер. матем., 3, № 1, 1968, 3—29.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4. 1974 Математика

Б. С. РУБИН

ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА С ВЕСОМ И ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

В настоящей статье исследуется поведение операторов дробного интегрирования Римана-Лиувилля, в гельдеровых пространствах с весом. Свойства этих операторов применяются к изучению операторов типа потенциала

$$(K\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b\frac{c(x, y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy \tag{1}$$

с точки зрения их нетеровости в указанных пространствах.

Вопросы нетеровости операторов вида (1) рассматривались в работах С. Г. Самко [4]—[6] и автора [11]—[13]. При этом для оператора K, не являющегося (см. [4]), вообще говоря, нетеровым из банахова пространства B в себя, была получена нетеровость из B в некоторое специальное пространство $I^\alpha(B)$. В работах [4]—[6], [11]—[13] рассматривались случаи $B=L_p$ и $B=L_p(\rho)$. При этом пространства $I^\alpha(L_p)$, $I^\alpha(L_p(\rho))$ описывались в терминах дробных производных. Представляется естественным построить такие пространства B, чтобы оператор K был нетеровым из B в $I^\alpha(B)$ и чтобы пространство $I^\alpha(B)$ описывалось в таких же простых терминах, как и само пространство B. Такими пространствами оказались весовые пространства $H^0_\mu(\rho)$ гельдеровских функций. Оператор K, как показывается в теореме II § 3, действует как нетеров оператор из пространства $H^0_\mu(\rho)$ в пространство $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$, $\mu+\alpha<1$. Это утверждение основывается на представляющей самостоятельный интерес теореме I о гомеоморфности пространств $H^0_\mu(\rho)$ и $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$ относительно операторов дробного интегрирования порядка α, обобщающей некоторые теоремы Г. Г. Харди и Дж. Е. Литтлвуда ([1], теоремы 14, 19, 20). В наших доказательствах мы опираемся на некоторые результаты Р. В. Дудучавы ([7]—[10]) о поведении сингулярных интегральных операторов в пространстве $H^0_\mu(\rho)$.

§ 1. Некоторые вспомогательные сведения

1°. Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_n$ — некоторые точки конечного отрезка $[a, b]$ $(a\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant b)$, $\rho(x)$ — весовая функция вида

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}, \tag{1.1}$$

где α_k — неотрицательные числа. Через H_μ обозначим банахово пространство функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих на $[a, b]$ условию Гельдера порядка μ, с обычной нормой

$$\|\varphi\|_{H_\mu} = \sup_{x_1, x_2 \in [a, b];\, x_1 \neq x_2} \frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} + \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|.$$

Следуя статье [10], обозначим: через $H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$ подпространство пространства H_μ, состоящее из всех функций, обращающихся в нуль в точках $a_1, \cdots, a_n$; через $H_\mu^0(\rho)$—банахово пространство функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условию $\rho(x)\psi(x) \in H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$, с нормой $\|\psi\|_{H_\mu^0(\rho)} = \|\rho\psi\|_{H_\mu}$. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, будем иногда писать просто $\|\psi\|$ вместо $\|\psi\|_{H_\mu^0(\rho)}$.

Отметим следующие простые свойства функций из пространства $H_\mu^0(\rho)$, которые нам в дальнейшем понадобятся*.

Свойство 1°. Пусть $f(x) \in H_\mu^0(\rho)$, $g(x) \in H_\nu$. Тогда

$$F(x) = f(x)\, g(x) \in H_\lambda^0(\rho),$$

где $\lambda = \min(\mu, \nu)$ и $\|F\|_{H_\lambda^0(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H_\mu^0(\rho)} \|g\|_{H_\nu}$.

Свойство 2°. Пусть $f(x) \in H_\mu^0(\rho)$ на отрезке $[a, b]$; $[\bar{a}, \bar{b}]$— некоторый отрезок, содержащийся в $[a, b]$; $\{a_s\}$ — точки из совокупности $\{a_1, \cdots, a_n\}$, которые принадлежат $[\bar{a}, \bar{b}]$; $r(x) = \prod_s |x - a_s|^{\alpha_s}$. Тогда сужение $f_{\bar{a}, \bar{b}}(x)$ функции $f(x)$ на отрезок $[\bar{a}, \bar{b}]$ принадлежит пространству $H_\mu^0(r)$ на $[\bar{a}, \bar{b}]$ и $\|f_{\bar{a}, \bar{b}}\|_{H_\mu^0(r)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H_\mu^0(\rho)}$.

Свойство 3°. Пусть функция $\rho(x)\, f(x)$, заданная на $[a, b]$, непрерывна в некоторой точке $c \in (a, b)$, а сужения f_{ac}, f_{cb} функции $f(x)$ на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ принадлежат на соответствующих отрезках пространствам $H_\mu^0(\rho_1)$, $H_\mu^0(\rho_2)$, где $\rho_1(x) = \prod_s |x - a_s|^{\alpha_s}$, $a_s \in [a, c]$, $\rho_2(x) = \prod_m |x - a_m|^{\alpha_m}$, $a_m \in [c, b]$. Тогда $f(x) \in H_\mu^0(\rho)$ на $[a, b]$ и $\|f\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const} \max (\|f_{ac}\|_{H_\mu^0(\rho_1)};\ \|f_{cb}\|_{H_\mu^0(\rho_2)})$.

2°. Введем обозначения для операторов дробного интегрирования Римана-Лиувилля:

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}}; \quad (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(y)\, dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \quad (1.2)$$

и для сингулярного оператора

* Аналогичные свойства можно найти в [2], [9]. В настоящей работе нам важно подчеркнуть ограниченность различных операций над функциями из $H_\mu^0(\rho)$.

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}.$$

Известна ([3]) следующая связь между дробными интегралами (1.2) и оператором S:

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha}(\cos(\alpha\pi)\varphi + \sin(\alpha\pi)\, r_a^{-1} S r_a \varphi), \tag{1.3}$$

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = I_{b-}^{\alpha}(\cos(\alpha\pi)\varphi - \sin(\alpha\pi)\, r_b^{-1} S r_b \varphi), \tag{1.4}$$

где $r_a(x) = (x-a)^{\alpha}$, $r_b(x) = (b-x)^{\alpha}$. Эти равенства справедливы на функциях класса $H_{\mu}^{0}(\rho)$, если вес $\rho(x)$ удовлетворяет условию $\alpha_k < \mu + 1$, $k = 1, \cdots, n$. В силу теоремы об ограниченности оператора S в пространствах Гельдера с весом ([7], [10]) из соотношений (1.3), (1.4) вытекает следующая

Лемма 1.1. I. Если $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$, $\mu < \alpha_k < \mu + 1, k = 1, \cdots$ $\cdots, n-1$; $\mu + \alpha < \alpha_n < \mu + 1$, то $f = I_{b-}^{\alpha}\psi$, где $\psi = \cos(\alpha\pi)\varphi -$ $- \sin(\alpha\pi)\, r_b^{-1} S r_b \varphi \in I_{\mu}^{0}(\rho)$, причем $\|\psi\| \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|$.

II. Если $f = I_{b-}^{\alpha}\psi$, где $\psi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$, $\mu + \alpha < \alpha_1 < \mu + 1$; $\mu < \alpha_k < \mu + 1$, $k = 2, \cdots, n$, то $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi = \cos(\alpha\pi)\psi + \sin(\alpha\pi)\, r_a^{-1} S r_a \psi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$ и $\|\varphi\| \leqslant \mathrm{const}\,\|\psi\|$.

Отметим еще две теоремы о сужении дробных интегралов и о продолжении дробных интегралов нулем, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1.1 (о сужении дробных интегралов). Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, представима в виде $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, где $\varphi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$; $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$; $\mu < \alpha_k < \mu + 1, k = 1, 2, \cdots, n$.

Пусть далее, $[a_l, c]$; $a < a_l < c \leqslant b$ — некоторый отрезок, содержащийся в $[a, b]$; $\{a_s\}$ — точки из совокупности $\{a_1, \cdots, a_n\}$, принадлежащие $[a_l, c]$; $r(x) = \prod\limits_{s} |x - a_s|^{\alpha_s}$. Тогда сужение $f_{a_l c}(x)$ функции $f(x)$ на отрезок $[a_l, c]$ при выполнении условия $\mu + \alpha < \alpha_l$ представимо в виде $f_{a_l c} = I_{a_l +}^{\alpha}\psi$, где $\psi \in H_{\mu}^{0}(r)$ на $[a_l, c]$ и $\|\psi\|_{H_{\mu}^{0}(r)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{H_{\mu}^{0}(\rho)}$.

Теорема 1.2 (о продолжении дробных интегралов нулем). Пусть $a = a_1 < \cdots < a_n = b$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ и на каком-нибудь промежутке $[a_j, a_{j+1}]$, $j < n-1$, задана функция $f(x) = (I_{a_j +}^{\alpha}\varphi)(x)$, где $\varphi \in H_{\mu}^{0}(r_j)$ на $[a_j, a_{j+1}]$, $r_j(x) = |x - a_j|^{\alpha_j} \times$ $\times |x - a_{j+1}|^{\alpha_{j+1}}$. Тогда заданная на $[a, b]$ функция

$$\tilde{f}(x) = \{f(x),\ x \in [a_j, a_{j+1}];\ 0,\ x \in [a, b] \setminus (a_j, a_{j+1})\}$$

представима в виде $\tilde{f} = I_{a+}^{\alpha}\psi$, где $\psi \in H_{\mu}^{0}(\rho)$ на $[a, b]$, $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $0 \leqslant \alpha_k < \mu + 1$, $k = 1, \cdots, j-1$, $\mu + \alpha < \alpha_{j+1} < \mu + 1$; $\mu < \alpha_k < \mu + 1$, $k = j, j+2, \cdots, n$, причем $\|\psi\|_{H_{\mu}^{0}(\rho)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{H_{\mu}^{0}(r_j)}$.

Теоремы 1.1 и 1.2 в рамках пространств L_p доказаны в [12]. Мы не останавливаемся на их доказательстве для класса $H^0_\mu(\rho)$, поскольку оно совершенно аналогично доказательству в [12] и основывается на применении свойств 1°—3° и теоремы об ограниченности оператора S в $H^0_\mu(\rho)$.

Замечание к теореме 1.2. Рассмотрим отдельно не содержащийся в теореме 1.2 случай, когда функция f задана дробным интегралом из отрезке $[a_{n-1}, b]: f = I^\alpha_{a_{n-1}+}\varphi$, где $\varphi \in H^0_\mu(\rho_{n-1})$ на $[a_{n-1}, b]$. Тогда $f(x) = (I^\alpha_{a+}\psi)(x)$, где $\psi(x) = \{0,\ x < a_{n-1};\ \varphi(x),\ x \geqslant a_{n-1}\}$. Если $\rho_{n-1}(x) = (x - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}}$, то $\psi \in H^0_\mu(\rho')$ на $[a, b]$, где $\rho'(x) = \prod\limits_{k=1}^{n-1} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, \cdots, n-1$. Если же $\rho_{n-1}(x) = (x - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}}(b - x)^{\alpha_n}$, то $\psi \in H^0_\mu(\rho)$, где $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

§ 2. Теорема о гомеоморфизме гельдеровых пространств с весом, осуществляемом операторами дробного интегрирования

В этом параграфе будет получен один из основных результатов настоящей статьи, касающийся поведения операторов дробного интегрирования в весовых пространствах гельдеровских функций.

Теорема I. *Пусть весовая функция* $\rho(x)$ *имеет вид* (1.1), *где* $a_1 = a$. *Тогда при выполнении условий*

$$\mu + \alpha < 1,\ 0 \leqslant \alpha_1 < \mu + 1,\ \mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1,\ k = 2, \cdots, n, \tag{2.1}$$

оператор I^α_{a+} *гомеоморфно отображает пространство* $H^0_\mu(\rho)$ *на пространство* $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$.

Аналогичное утверждение справедливо для оператора I^α_{b-}, если $a_n = b$ и имеют место неравенства

$$\mu + \alpha < 1;\ 0 \leqslant \alpha_n < \mu + 1;\ \mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1,\ k = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{2.2}$$

Заметим, что если в сформулированной теореме положить $\rho(x) = 1$ и обращение в нуль функций потребовать только в точке $x = a$, то мы получим утверждение, доказанное ранее Г. Г. Харди и Дж. Е. Литтлвудом ([1], теоремы 14, 19, 20).

Доказательство теоремы I довольно громоздкое, поэтому для удобства восприятия мы решили разбить его на несколько этапов, содержание каждого из которых излагается в виде отдельной леммы.

1°. Лемма 2.1. *Пусть* $0 \leqslant \alpha_a < \mu + 1$ *и* $\mu + \alpha < 1$. *Тогда оператор* I^α_{a+} *ограниченно действует из* $H^0_\mu((x-a)^{\alpha_a})$ *в* $H^0_{\mu+\alpha}((x-a)^{\alpha_a})$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in H^0_\mu((x - a)^{\alpha_a})$, то есть $\varphi(x) = \psi(x)(x - a)^{-\alpha_a}$, где $\psi(x) \in H^0_\mu(a)$. Нам нужно показать, что

$$F(x)=\int\limits_a^x\left(\frac{x-a}{y-a}\right)^{\alpha_a}\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}\in H^0_{\mu+\alpha}(a)\ \text{и}\ \|F\|_{H_{\mu+\alpha}}\leqslant\text{const}\,\|\psi\|_{H_\mu}.$$

Имеем: $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где

$$F_1(x)=\int\limits_a^x\frac{[(x-a)^{\alpha_a}-(y-a)^{\alpha_a}]\,\psi(y)}{(y-a)^{\alpha_a}(x-y)^{1-\alpha}}dy,\quad F_2(x)=\int\limits_a^x\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\alpha}}.$$

В силу теоремы 14 из [1]

$$|F_2(x+h)-F_2(x)|\leqslant\text{const}\,h^{\mu+\alpha}\|\psi\|_{H_\mu}\tag{2.3}$$

для любых $x,\ x+h\in[a,\ b]$.

Для $F_1(x)$ имеем:

$$F_1(x+h)-F_1(x)=F_{11}(x)+F_{12}(x)+F_{13}(x),\ \text{где}$$

$$F_{11}(x)=\int\limits_x^{x+h}\frac{[(x+h-a)^{\alpha_a}-(y-a)^{\alpha_a}]\,\psi(y)\,dy}{(y-a)^{\alpha_a}(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{12}(x)=[(x+h-a)^{\alpha_a}-(x-a)^{\alpha_a}]\int\limits_a^x\frac{\psi(y)\,dy}{(y-a)^{\alpha_a}(x+h-y)^{1-\alpha}},$$

$$F_{13}(x)=\int\limits_a^x\frac{\psi(y)\,[(x-a)^{\alpha_a}-(y-a)^{\alpha_a}]}{(y-a)^{\alpha_a}}\,[(x+h-y)^{\alpha-1}-(x-y)^{\alpha-1}]\,dy.$$

Оценим, например, первое слагаемое. Если $\alpha_a\leqslant1$, то

$$|F_{11}|\leqslant\alpha_a\|\psi\|\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}}{(y-a)^{1-\mu}}\leqslant\text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha},\tag{2.4}$$

в силу неравенства $(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}\leqslant\lambda hr^{\lambda-1}$, $r>0$. Если же $\alpha_a>1$, то

$$|F_{11}|\leqslant\|\psi\|(x+h-a)^{\alpha_a-1}\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}\,dy}{(y-a)^{\alpha_a-\mu}}.$$

Отсюда при $x-a\leqslant h$

$$|F_{11}|\leqslant\|\psi\|(x+h-a)^{\alpha_a-1}\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}\,dy}{(y-x)^{\alpha_a-\mu}}\leqslant\text{const}\,\|\psi\|\left(\frac{x+h-a}{h}\right)^{\alpha_a-1}\times$$

$$\times h^{\mu+\alpha}\leqslant\text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha},\tag{2.5}$$

а при $x-a>h$

$$|F_{11}|\leqslant\|\psi\|\left(\frac{x+h-a}{x-a}\right)^{\alpha_a-1}\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h-y)^{\alpha}\,dy}{(y-x)^{1-\mu}}\leqslant\text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha}.\tag{2.6}$$

Величины F_{12}, F_{13} оцениваются аналогично, так что

$$|F_1(x+h)-F_1(x)| \leqslant \text{const}\,\|\psi\|\,h^{\mu+\alpha}. \tag{2.7}$$

Из оценок (2.3) и (2.7), учитывая неравенство $|F(x)| \leqslant \text{const}\,\times$ $\times\,\|\psi\|(x-a)^{\mu+\alpha}$, получаем утверждение леммы.

Аналогичная лемма имеет место и для оператора I^{α}_{b-}:

Лемма 2.1′. *Пусть* $0 \leqslant \alpha_b < \mu+1$, $\mu+\alpha<1$. *Тогда оператор* I^{α}_{b-} *ограничен из* $H^0_{\mu}((b-x)^{\alpha_b})$ *в* $H^0_{\mu+\alpha}((b-x)^{\alpha_b})$.

2°. Обобщим теперь утверждения лемм 2.1 и 2.1′ на случай веса вида (1.1).

Лемма 2.2. *Пусть* $\rho(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}$, $a=a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant b$; $\mu+\alpha<1$;

$$0\leqslant\alpha_1<\mu+1;\quad \mu+\alpha<\alpha_k<\mu+1,\quad k=2,3,\cdots,n. \tag{2.8}$$

Тогда оператор I^{α}_{a-} *ограниченно действует из* $H^0_{\mu}(\rho)$ *в* $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in H^0_{\mu}(\rho)$. Выбрав произвольно точку $c\in(a_1,a_2)$, построим функции

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\leqslant c,\\ \varphi(c), & x\geqslant c,\end{cases}\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant c,\\ \varphi(x)-\varphi(c), & x\geqslant c,\end{cases}$$

так что $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$. В силу свойств 2° и 3° (§ 1) $\varphi_1\in H^0_{\mu}(\rho_1)$, где $\rho_1(x)=(x-a)^{\alpha_1}$, причем $\|\varphi_1\|_{H^0_{\mu}(\rho_1)}\leqslant\text{const}\,\|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)}$. Отсюда на основании леммы 2.1

$$f_1(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi_1)(x)\in H^0_{\mu+\alpha}(\rho_1)\subset H^0_{\mu+\alpha}(\rho) \tag{2.9}$$

и

$$\|f_1\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}\leqslant\text{const}\,\|\varphi_1\|_{H^0_{\mu}(\rho_1)}\leqslant\text{const}\,\|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)}.$$

Покажем теперь, что $f_2(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi_2)(x)\in H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$ и $\|f_2\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}\leqslant\text{const}\,\times$ $\times\,\|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)}$.

Возьмем сначала весовую функцию $\rho_0(x)=(x-a)^{\nu}\prod\limits_{k=2}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}$, где ν — некоторое число из интервала $(\mu+\alpha,1)$. Замечая, что

$$\varphi_2\in H^0_{\mu}(\rho_0)\quad\text{и}\quad\|\varphi_2\|_{H^0_{\mu}(\rho)}\leqslant\text{const}\,\|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)}, \tag{2.10}$$

докажем справедливость следующих соотношений:

$$f_2\in H^0_{\mu+\alpha}(\rho_0),\quad \|f_2\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho_0)}\leqslant\text{const}\,\|\varphi_2\|_{H^0_{\mu}(\rho_0)}. \tag{2.11}$$

Выберем произвольные точки $c_j\in(a_j,a_{j+1})$, $j=1,\cdots,n-1$. Через f_{2j}, $f^{(1)}_{2j}$, $f^{(2)}_{2j}$ обозначим сужения функции $f_2(x)$ на отрезки $[a_j,a_{j+1}]$, $[a_j,c_j]$, $[c_j,a_{j+1}]$ соответственно. Если $a_n<b$, то через $f_{2n}(x)$ будем обозначать сужение функции $f_2(x)$ на $[a_n,b]$. Пусть $\rho_j(x)=|x-a_j|^{\alpha_j}$,

$j=1,\cdots,n$. В силу лемм 2.1, 2.1′ и свойства 3° для доказательства соотношений (2.11) достаточно убедиться в справедливости представлений

$$f_{2j}^{(1)}=I_{a_j+}^{\alpha}\psi_j^{(1)},\ f_{2j}^{(2)}=I_{a_{j+1}-}^{\alpha}\psi_j^{(2)},\ j=1,\cdots,n-1;\ f_{2n}=I_{a_n+}^{\alpha}\psi_n, \tag{2.12}$$

где

$$\psi_j^{(1)}\in H_\mu^0(\rho_j)\text{ на }[a_j,c_j],\ \psi_j^{(2)}\in H_\mu^0(\rho_{j+1})\text{ на }[c_j,a_{j+1}],$$

$$\psi_n\in H_\mu^0(\rho_n)\text{ на }[a_n,b]\text{ и}$$

$$\|\psi_j^{(1)}\|\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)},\|\psi_j^{(2)}\|\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)},\ \|\psi_n\|\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}.$$

Воспользуемся теоремой 1.1. Из нее вытекает, что функции $f_{2j}(x)$, $j=1,\cdots,n$, представимы в виде $f_{2j}=I_{a_j+}^{\alpha}\psi_j$, где $\psi_j\in H_\mu^0(\rho_j\rho_{j+1})$ на $[a_j,a_{j+1}]$, $j=1,\cdots,n-1$, $\psi_n\in H_\mu^0(\rho_n)$ на $[a_n,b]$ и для всех j выполняется неравенство $\|\psi_j\|\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}$. Отсюда, обозначая через $\psi_j^{(1)}$ сужение на $[a_j,c_j]$ функции $\psi_j(x)$, получаем первое из соотношений (2.12). Для получения второго соотношения достаточно применить к функции $f_{2j}(x)$ лемму 1.1. Справедливость соотношений (2.11) доказана.

Далее, так как $f_2(x)=0$ при $x\leqslant c$, то из (2.11), учитывая оценку в (2.10), получаем: $f_2(x)\in H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ и $\|f_2\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)}\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Условие $\mu+\alpha<\alpha_k$, $k=2,\cdots,n$ в формулировке доказанной леммы нельзя ослабить. При $\alpha_k\leqslant\mu+\alpha$ лемма неверна. Пусть, например $\rho(x)=(b-x)^{\alpha_b}$, где $\alpha_b\leqslant\mu+\alpha$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=(x-a)^{\mu}(b-x)^{\mu-\alpha_b}\in H_\mu^0(\rho)$. Нетрудно видеть, что

$$f^*(x)=(b-x)^{\alpha_b}\int\limits_b^x\frac{(y-a)^{\mu}\,dy}{(b-y)^{\alpha_b-\mu}(x-y)^{1-\alpha}}\neq O((b-x)^{\mu+\alpha})\text{ при }x\to b.$$

Следовательно, $f=I_{a+}^{\alpha}\varphi\,\overline{\in}\,H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.

Из леммы 2.2, если применить преобразование

$$(Af)(x)=f(a+b-x), \tag{2.13}$$

вытекает аналогичное утверждение и для оператора I_{b-}^{α}:

Лемма 2.2′. *Пусть* $\rho(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}$, *где* $a\leqslant a_1<\cdots<a_n=b$; $\mu+\alpha<1$; $\mu+\alpha<\alpha_k<\mu+1$, $k=1,2,\cdots,n-1$, $0\leqslant\alpha_n<\mu+1$. *Тогда оператор* I_{b-}^{α} *ограниченно действует из* $H_\mu^0(\rho)$ *в* $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.

3°. На следующем этапе доказательства теоремы I мы покажем представимость функций из $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ дробными интегралами порядка α с плотностями из $H_\mu^0(\rho)$.

Через $\operatorname{Lip}(\lambda, p)$, $0<\lambda\leqslant 1$, $p\geqslant 1$, будем обозначать класс функций $f(x)\,(\in L_1(a, b))$, для которых

$$\left\{\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant Mh^{\lambda},$$

где $h>0$, а M — константа, не зависящая от h.

Лемма 2.3. *Всякая функция $f(x)$ из пространства $H^0_{\mu+\alpha}(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^{\alpha_a}$, $\mu+\alpha<1$, $0\leqslant\alpha_a<\mu+1$, представима дробным интегралом: $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, где $\varphi(x)\in H^0_{\mu}(\rho)$ и*

$$\|\varphi\|_{H^0_{\mu}(\rho)}\leqslant \operatorname{const}\|f\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho)}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)=(x-a)^{-\alpha_a}f_0(x)$, где $f_0(x)\in H^0_{\mu+\alpha}(a)$. Нетрудно убедиться, что $f(x)\in \operatorname{Lip}(\lambda, p)$, где $\alpha<\lambda<1+\mu+\alpha-\alpha_a$, при любом $p>1$, если $\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha\leqslant 0$, и при $1<p<\dfrac{1}{\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha}$, если $\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha>0$. Действительно

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{L_p}\leqslant\|F_1\|_{L_p}+\|F_2\|_{L_p},$$

где

$$F_1(x)=[f_0(x+h)-f_0(x)](x+h-a)^{-\alpha_a},\ F_2(x)=f_0(x)\,[(x+h-a)^{-\alpha_a}-\\ -(x-a)^{-\alpha_a}].$$

Легко видеть, что

$$\|F_1\|_{L_p}\leqslant \operatorname{const} h^{\lambda}\left\{\int_a^b\frac{dx}{(x+h-a)^{(\alpha_a-\mu+\lambda-\alpha)p}}\right\}^{1/p}\leqslant \operatorname{const} h^{\lambda}.$$

Далее, при $\alpha_a\leqslant 1$ имеем

$$\|F_2\|_{L_p}\leqslant \operatorname{const}\left[\left(\int_a^{a+h}\right)^{1/p}+\left(\int_{a+h}^{b}\right)^{1/p}\right]\left(\frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-\alpha_a)p}}{(x+h-a)^{\alpha_a p}}\,|(x+h-a)^{\alpha_a}-\right.$$

$$\left.-(x-a)^{\alpha_a}|^p dx\right)\leqslant \operatorname{const} h^{\lambda}\left\{\left[\int_a^{a+h}\frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-\alpha_a)p}\,h^{(\alpha_a-\lambda)p}}{(x+h-a)^{\alpha_a p}}\,dx\right]^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\alpha_a\left[\int_{a+h}^{b}\frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-1)p}\,h^{(1-\lambda)p}\,dx}{(x+h-a)^{\alpha_a p}}\right]^{1/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} h^{\lambda}(1+\alpha_a)\left[\int_a^b (x-a)^{(\mu-\alpha_a-\lambda+\alpha)p}\,dx\right]^{1/p}\leqslant \operatorname{const} h^{\lambda}.$$

Если же $\alpha_a>1$, то

$$\|F_2\|_{L_p} \leqslant \text{const}\, h^{\lambda} \left\{ \int_a^b \frac{(x-a)^{(\mu+\alpha-\alpha_a)p}\, h^{(1-\lambda)p}}{(x+h-a)^{p}}\, dx \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, h^{\lambda} \left\{ \int_a^b (x-a)^{(\mu-\alpha_a-\lambda+\alpha)p}\, dx \right\}^{1/p} \leqslant \text{const}\, h^{\lambda}.$$

На основании теоремы 23 из [1] всякая функция, принадлежащая пространству $\mathrm{Lip}(\lambda, p)$, при $\lambda > \alpha$ представима дробным интегралом порядка α от функции из L_p. Следовательно, для нашей функции имеем: $f(x) = (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)$, причем справедливо ([1]) равенство

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{1+\alpha}}\, dy. \tag{2.14}$$

Для завершения доказательства леммы остается показать, что

$$\varphi \in H_{\mu}^{0}(\rho) \text{ и } \|\varphi\|_{H_{\mu}^{0}(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H_{\mu+\alpha}^{0}(\rho)}.$$

Для первого слагаемого в (2.14) это следует из известных свойств гельдеровских функций ([2]). Рассмотрим второе слагаемое, которое обозначим через $\Phi(x)$. Пусть $\Phi_0(x) = (x-a)^{\alpha_a}\Phi(x)$. Для оценки разности $\Phi_0(x+h) - \Phi_0(x)$ представим ее в виде

$$\Phi_0(x+h) - \Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{8} \Phi_k(x),$$

где

$$\Phi_1(x) = [(x+h-a)^{\alpha_a} - (x-a)^{\alpha_a}] \int_a^{x+h} \frac{(x+h-a)^{-\alpha_a}[f_0(x+h)-f_0(y)]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_2(x) = [(x+h-a)^{\alpha_a} - (x-a)^{\alpha_a}] \int_a^{x+h} \frac{f_0(y)\,[(x+h-a)^{-\alpha_a} - (y-a)^{-\alpha_a}]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_3(x) = (x-a)^{\alpha_a} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-a)^{-\alpha_a}[f_0(x+h)-f_0(y)]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_4(x) = (x-a)^{\alpha_a} \int_a^{x+h} \frac{f_0(y)\,[(x+h-a)^{-\alpha_a} - (y-a)^{-\alpha_a}]\,dy}{(x+h-y)^{1+\alpha}},$$

$$\Phi_5(x) = \int_a^x [f_0(x) - f_0(y)][(x+h-y)^{-\alpha-1} - (x-y)^{-\alpha-1}]\,dy,$$

$$\Phi_6(x) = (x-a)^{\alpha a}\int_a^x f_0(y)[(x-a)^{-\alpha a}-(y-a)^{-\alpha a}][(x+h-y)^{-\alpha-1}-$$

$$-(x-y)^{-\alpha-1}]\,dy,$$

$$\Phi_7(x) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x-a}{x+h-a}\right)^{\alpha a}[f_0(x+h)-f_0(x)]\,[h^{-\alpha}-(x+h-a)^{-\alpha}],$$

$$\Phi_8(x)=\frac{1}{\alpha}(x-a)^{\alpha a}f_0(x)[(x+h-a)^{-\alpha a}-(x-a)^{-\alpha a}][h^{-\alpha}-(x+h-a)^{-\alpha}].$$

Произведя оценку каждого из этих слагаемых, получим

$$|\Phi_0(x+h)-\Phi_0(x)| \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}\,h^{\mu}$$

(мы опускаем соответствующие выкладки, проделать которые не представляет большого труда).

Отсюда, учитывая легко проверяемые соотношения

$$|\Phi_0(x)| \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}, \qquad \Phi_0(a)=0,$$

имеем: $\Phi(x)\in H^{\circ}_{\mu}(\rho)$, причем $\|\Phi\|_{H^{\circ}_{\mu}(\rho)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы, если применить преобразование (2.13), вытекает

Лемма 2.3′. *Всякая функция $f(x)$ из пространства $H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)$, $\rho(x)=(b-x)^{\alpha_b}$, $\mu+\alpha<1$, $0\leqslant\alpha_b<\mu+1$, представима дробным интегралом $f=I^{\alpha}_{b-}\varphi$, где $\varphi(x)\in H^{\circ}_{\mu}(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^{\circ}_{\mu}(\rho)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}$.*

4°. Докажем, наконец, последнюю в этом параграфе лемму, обобщающую утверждение леммы 2.3 на случай произвольного веса вида (1.1).

Лемма 2.4. *Всякая функция $f(x)$ из пространства*

$$H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho),\ \text{где}\ \rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k},\ a=a_1<\cdots<a_n\leqslant b;$$

$$0\leqslant\alpha_1<\mu+1;\ \mu+\alpha<\alpha_k<\mu+1,\ k=2,\cdots,n, \tag{2.15}$$

представима в виде $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, где $\varphi(x)\in H^{\circ}_{\mu}(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^{\circ}_{\mu}(\rho)}\leqslant$ $\leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}$.

Доказательство. Пусть c—произвольная точка из интервала (a, a_2). Аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.2, имеем: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant c,\\ f(c), & x\geqslant c,\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant c,\\ f(x)-f(c), & x\geqslant c,\end{cases} \tag{2.16}$$

$$f_1(x)\in H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_a);\ \rho_a(x)=(x-a)^{\alpha_a};\ \|f_1\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_a)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}, \tag{2.17}$$

$$f_2(x)\in H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_0);\ \|f_2\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho_0)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{H^{\circ}_{\mu+\alpha}(\rho)}, \tag{2.18}$$

$$\rho_0(x) = (x-a)^{\mu+\varepsilon}\prod_{k=2}^{n}|x-a_k|^{\varepsilon_k}; \ \alpha<\varepsilon<1.$$

Заметим, что введение функций (2.16) является в некотором смысле основным моментом в доказательстве как леммы 2.2, так и настоящей леммы, так как оно дает возможность отделить точку $a_1 = a$, являющуюся нижним пределом интегрирования, от остальных точек a_k, $k = 2, \cdots, n$, в которых допускаются особенности.

В силу леммы 2.3 и неравенств (2.15) имеет место представление: $f_1(x) = (I^{\alpha}_{a+}\varphi_1)(x)$, где $\varphi_1 \in \overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_a) \subset \overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho)$, причем

$$\|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_a)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f_1\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_a)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho)}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f_2(x)$. Пусть $f_{2k}(x)$ $(k = 1, \cdots \cdots, n-1)$ —сужение функции $f_2(x)$ на отрезок $[a_k, a_{k+1}]$, а $f_{2n}(x)$ —сужение этой функции на отрезок $[a_n, b]$ (если $a_n < b$). Введем для удобства следующие обозначения: $\Delta_k = [a_k, a_{k+1}]$, $k=1, \cdots, n-1$; $\Delta_n = [a_n, b]$; $\beta_1 = \mu + \varepsilon$; $\beta_k = \alpha_k$, $k = 2, \cdots, n$; $r_k(x) = |x-a_k|^{\beta_k}|x-a_{k+1}|^{\beta_{k+1}}$; $\rho_k(x) = |x-a_k|^{\beta_k}$. Покажем, что функции $f_{2k}(x)$, $k=1, \cdots, n$, представимы в виде

$$f_{2k}(x) = (I^{\alpha}_{a_k+}\psi_k)(x), \tag{2.19}$$

где $\psi_k(x) \in \overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)$ на Δ_k, $k = 1, \cdots, n-1$, $\psi_n(x) \in \overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_n)$ на Δ_n и

$$\|\psi_k\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2k}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(r_k)};\ \|\psi_n\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(\rho_n)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2n}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_n)}. \tag{2.20}$$

Для функции $f_{2n}(x)$ этот факт вытекает из свойства 2° и леммы 2.3.

Рассмотрим функции $f_{2k}(x)$, $k=1, \cdots, n-1$. Возьмем произвольную точку $c_k \in (a_k, a_{k+1})$ и представим фукцию $f_{2k}(x)$ в виде $f_{2k}(x) = f^{(1)}_{2k}(x) + f^{(2)}_{2k}(x)$, где

$$f^{(1)}_{2k}(x) = \begin{cases} f_2(x), & a_k \leqslant x \leqslant c_k, \\ f_2(c_k), & c_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}, \end{cases} \qquad f^{(2)}_{2k}(x) = \begin{cases} 0, & a_k \leqslant x \leqslant c_k, \\ f_2(x) - f_2(c_k), & c_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}. \end{cases}$$

Так как $f^{(1)}_{2k}(x) \in \overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_k)$ на Δ_k, то в силу леммы 2.3 $f^{(1)}_{2k}(x) = (I^{\alpha}_{a_k+}\psi^{(1)}_k)(x)$, где $\psi^{(1)}_k(x) \in H^0_{\mu}(\rho_k) \subset \overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)$, причем

$$\|\psi^{(1)}_k\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu}(r_k)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f^{(1)}_{2k}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(\rho_k)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2k}\|_{\overset{\circ}{H}_{\mu+\alpha}(r_k)}. \tag{2.21}$$

Далее, так как $f^{(2)}_{2k}(x) \in H^0_{\mu+\alpha}(\rho_{k+1})$ на Δ_k, то по лемме 2.3′

$$f^{(2)}_{2k}(x) = (I^{\alpha}_{a_{k+1}-}\psi^{(2)}_k)(x), \text{ где } \psi^{(2)}_k(x) \in H^0_{\mu}(\rho_{k+1}) \subset H^0_{\mu}(r_k),$$

причем

$$\|\psi^{(2)}_k\|_{H^0_{\mu}(r_k)} \leqslant \mathrm{const}\,\|f^{(2)}_k\|_{H^0_{\mu+\alpha}(\rho_{k+1})} \leqslant \mathrm{const}\,\|f_{2k}\|_{H^0_{\mu+\alpha}(r_k)}. \tag{2.22}$$

Применяя к функции $f^{(2)}_{2k}(x)$ лемму 1.1 из § 1, получаем

$$f^{(2)}_{2k}(x) = (I^{\alpha}_{a_k+}\tilde{\psi}^{(2)}_k)(x), \text{ где } \tilde{\psi}^{(2)}_k(x) \in H^0_{\mu}(r_k) \text{ на } \Delta_k \text{ и}$$

$$\|\tilde{\psi}_k^{(2)}\|_{H_\mu^0(r_k)} \leqslant \text{const} \|\psi_k^{(2)}\|_{H_\mu^0(r_k)}. \tag{2.23}$$

Таким образом, мы приходим к соотношению (2.19), в котором $\psi_k(x) = \psi_k^{(1)}(x) + \tilde{\psi}_k^{(2)}(x)$. Неравенство (2.20) для норм непосредственно вытекает из оценок (2.21), (2.22), (2.23).

Далее, на основании теоремы 1.2 функция $(P_k f_2)(x)$, $k = 1, \cdots, n$, являющаяся продолжением нулем функции $f_{2k}(x)$ за пределы отрезка Δ_k, представима дробным интегралом

$$P_k f_2(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi_k)(x), \text{ где } \varphi_k(x) \in H_\mu^0(\rho_0) \text{ на } [a, b] \text{ и}$$
$$\|\varphi_k\|_{H_\mu^0(\rho_0)} \leqslant \text{const} \|\psi_k\|_{H_\mu^0(r_k)},\ k = 1, \cdots, n-1,\ \|\varphi_n\|_{H_\mu^0(\rho_0)} \leqslant \text{const} \|\psi_n\|_{H_\mu^0(\rho_n)}. \tag{2.24}$$

Отсюда следует, что $f_2(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi_2)(x)$, где $\varphi_2(x) = \sum\limits_{k=1}^n \varphi_k(x) \in H_\mu^0(\rho_0)$ и в силу соотношений (2.24), (2.20), свойства 2° и оценки для норм соотношения (2.18), имеет место неравенство

$$\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)} \leqslant \text{const} \|f\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)}. \tag{2.25}$$

Покажем, что

$$\varphi_2(x) \in H_\mu^0(\rho) \text{ на } [a, b] \text{ и } \|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const} \|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho_0)}. \tag{2.26}$$

Учитывая, что $f_2(x) = 0$ при $x < c$, на основании равенства

$$\varphi_2(x) = \frac{f_2(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f_2(x) - f_2(y)}{(x-y)^{1+\alpha}}\, dy,$$

вытекающего (см., например, [11], [12]) из представимости функции $f_2(x)$ дробным интегралом от функции $\varphi_2(x)$, получаем: $\varphi_2(x) = 0$ при $x < c$. Отсюда в силу свойств 2° и 3° вытекает соотношение (2.26), из которого, учитывая оценку (2.25), получаем: $\|\varphi_2\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const} \|f\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)}$.

Лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы вытекает

Лемма 2.4′. *Пусть* $f(x) \in H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$; $\rho(x) = \prod\limits_{k=1}^n |x - a_k|^{\alpha_k}$;

$a \leqslant a_1 < \cdots < a_n = b$; $0 \leqslant \alpha_n < \mu + 1$; $\mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$. *Тогда справедливо представление* $f(x) = (I_{b-}^\alpha \varphi)(x)$, *где*

$$\varphi(x) \in H_\mu^0(\rho) \text{ и } \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const} \|f\|_{H_{\mu+\alpha}^0(\rho)}.$$

Из лемм 2.2, 2.2′, 2.4, 2.4′ и вытекает утверждение теоремы I, сформулированной в начале этого параграфа.

§ 3. Операторы типа потенциала в гельдеровых пространствах с весом

Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{c(x,y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy,\ 0<\alpha<1. \tag{3.1}$$

Обозначим через $V^{\lambda,\mu}(a_1,\cdots,a_n)$ класс функций $c(x,y)$, заданных на $[a,b]\times[a,b]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $c(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$ всюду, за исключением диагонали $x=y$, где она допускает разрыв первого рода: $c(x,y)=$ $=\{u(x,y),\ x>y;\ v(x,y),\ x<y\}$;

2) функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ по переменной x удовлетворяют условию Гельдера вида

$$|u(x_1,y)-u(x_2,y)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\lambda},\ x_1\geqslant y,\ x_2\geqslant y, \tag{3.2}$$

где A — константа, не зависящая от y (аналогичное неравенство предполагается выполненным для функции $v(x,y)$ при $x_1\leqslant y$, $x_2\leqslant y$;

3) Функции $u(x)=u(x,x-0)$, $v(x)=v(x,x+0)$ — кусочно-гельдеровские порядка μ, допускающие разрывы первого рода в точках $a_1,\cdots,a_n$.

Считая, что $c(x,y)\in V^{\lambda,\mu}(a_1,\cdots,a_n)$, исследуем вопрос о нетеровости этого оператора, рассматривая его на функциях $\varphi(x)\in H_\mu^0(\rho)$ на $[a,b]$, где вес $\rho(x)$ имеет вид (1.1).

Представим оператор K в виде: $K=K_0+T_1+T_2$, где

$$(K_0\varphi)(x)=(I_{a+}^{\alpha}u\varphi)(x)+(I_{a-}^{\alpha}v\varphi)(x), \tag{3.3}$$

$$(T_1\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{u(x,y)-u(y,y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy;$$

$$(T_2\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{v(x,y)-v(y,y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ удовлетворяют условию Гельдера вида (3.2) порядка $\lambda>\mu+\alpha$. Тогда операторы T_1, T_2 ограничены из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$, где $\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k}$, $a=a_1<\cdots<a_n=b$, $\mu<\alpha_k<\mu+1$, $k=1,2,\cdots,n$.*

Доказательство. Поскольку из справедливости леммы для оператора T_1 вытекает ее справедливость для оператора T_2 (применяется преобразование $(Af)(x)=f(a+b-x)$, то можно ограничиться рассмотрением только первого оператора.

В [11] показано, что $(T_1\varphi)(x)=(I_{a+}^{\alpha}\psi)(x)$, где

$$\psi(x) = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt. \tag{3.5}$$

В силу леммы 2.2 нам достаточно доказать ограниченность в $H_\mu^0(\rho)$ оператора (3.5). Возьмем произвольные точки $c_j \in (a_j, a_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$. Пусть $\rho_j(x) = |x - a_j|^{\lambda_j}$, а $\psi_j^{(1)}(x)$ и $\psi_j^{(2)}(x)$ — сужения функции $\psi(x)$ на отрезки $[a_j, c_j]$ и $[c_j, a_{j+1}]$ соответственно. Путем непосредственных оценок нетрудно убедиться, что при $\lambda > \mu + \alpha$,

$$\psi_j^{(1)}(x) \in H_\mu^0(\rho_j) \quad \text{на} \quad [a_j, c_j],$$

$$\psi_j^{(2)}(x) \in H_\mu^0(\rho_{j+1}) \ \text{на} \ [c_j, a_{j+1}] \ \text{и} \ \|\psi_j^{(1)}\|_{H_\mu^0(\rho_j)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}, \ \|\psi_j^{(2)}\|_{H_\mu^0(\rho_{j+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}.$$

Отсюда в силу свойства 3° вытекает, что $\psi(x) \in H_\mu^0(\rho)$ на $[a, b]$ и $\|\psi\|_{H_\mu^0(\rho)} \leqslant \text{const}\, \|\varphi\|_{H_\mu^0(\rho)}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.2. *При выполнении условий леммы 3.1 операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$.*

Доказательство. Достаточно показать справедливость леммы только для первого оператора. Доказательство сводится к установлению полной непрерывности в пространстве $H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$ оператора $M_0\varphi = \rho M \rho^{-1}\varphi$, где

$$(Mf)(x) = \int_a^x f(s)\, ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Пусть $\{\varphi\}$ — ограниченное множество функций из $H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$, $\|\varphi\|_{H_\mu} \leqslant A$, где A — константа, не зависящая от φ. В силу теоремы Арцела, множество $\{\varphi\}$ компактно в пространстве $C(a, b)$ функций, непрерывных на $[a, b]$ с нормой $\|\varphi\|_{C(a, b)} = \max\limits_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|$. Выделим из множества $\{\varphi\}$ последовательность $\{\varphi_k\}$, сходящуюся по норме пространства $C(a, b)$ к пределу $\varphi \in C(a, b)$. Легко видеть, что $\varphi(x) \in H_\mu^0(a_1, \cdots, a_n)$. Действительно, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$\frac{|\varphi_k(x_1) - \varphi_k(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \leqslant B,$$

где B — константа, не зависящая от φ_k, получаем

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant B |x_1 - x_2|^\mu.$$

Полная непрерывность оператора M_0 будет доказана, если мы установим, что

$$\|M_0\varphi - M_0\varphi_k\|_{H_\mu} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.6}$$

Воспользуемся методом, примененным ранее в работе [8]. Выберем число μ_1, удовлетворяющее неравенствам $0 < \mu_1 < \mu$, $\alpha_k < \mu_1 + 1$ для всех $k = 1, \cdots, n$. Пусть

$$\omega_k(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi_k(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\mu_k}}, \quad \delta_k(x) = \max_{x \in [a,\, b]} |\omega_k(x)|.$$

Нетрудно проверить (см. [8], стр. 109), что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть теперь

$$\Phi_k(x) = [M_0(\varphi - \varphi_k)](x) = \rho(x) \int\limits_a^x \frac{\omega_k(s)\, ds}{\prod\limits_{k=1}^{n} |s - a_k|^{\alpha_k - \mu_k}} \int\limits_s^x \frac{u(x,\, s) - u(t,\, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Можно показать, что если для функции $\Phi_k(x)$ повторить почти без изменений выкладки, необходимые для доказательства леммы 3.1, то получим: $\|\Phi_k\|_{H_\mu} \leqslant \mathrm{const}\, \delta_k$, где константа не зависит от k. Отсюда, учитывая, что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, получаем соотношение (3.6). Лемма доказана.

В силу леммы 3.2 нетеровость оператора K из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ эквивалентна нетеровости оператора K_0 в тех же пространствах и индексы этих операторов равны. В свою очередь, оператор K_0 с помощью соотношения (1.4) представляется в виде

$$K_0\varphi = I_{b-}^{\alpha}\, r_b^{-1} N r_b \varphi, \tag{3.7}$$

где $N\psi = c_1\psi + Sc_2\psi$, $c_1(x) = u(x)\cos\alpha\pi + v(x)$, $c_2(x) = -u(x)\sin\alpha\pi$.

Из (3.7) в силу теоремы I следует, что нетеровость оператора K_0 из $H_\mu^0(\rho)$ в $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ эквивалентна нетеровости оператора N из $H_\mu^0(\rho_1)$ в $H_\mu^0(\rho_1)$, где

$$\rho_1(x) = (b - x)^{\alpha_n - \alpha} \prod_{k=1}^{n-1} |x - a_k|^{\alpha_k} \quad \text{и} \quad \operatorname{ind} K_0 = \operatorname{ind} N.$$

Применяя к оператору N результаты Р. В. Дудучавы [10] относительно нетеровости сингулярных интегральных операторов в гельдеровых пространствах с весом, получаем вторую основную теорему настоящей работы:

Теорема II. *Пусть* $c(x,\, y) \in V^{\lambda,\, \mu}(a_1, \cdots, a_n)$, *где*

$$\mu + \alpha < \lambda \leqslant 1 \ \text{и}\ \rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k},\ \mu + \alpha < \alpha_k < \mu + 1,\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

Для того чтобы оператор K *был* Φ*-оператором из* $H_\mu^0(\rho)$ *в* $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\inf |u(x)\, e^{-i\alpha\pi} + v(x)| > 0;\quad \inf |u(x)\, e^{i\alpha\pi} + v(x)| > 0,\ x \in [a,\, b]$,

2) $$\frac{1}{2\pi} \arg \frac{Q(a_k - 0)}{Q(a_k + 0)} \neq \alpha_k - \mu, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

где функция $Q(x)$ *определяется равенством*

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)\, e^{-i\alpha\pi} - v(x)}{u(x)\, e^{i\alpha\pi} + v(x)}, & x \in (a, b], \\ 1, \ x \in [-\infty, \infty] \setminus (a, b]. \end{cases}$$

Полагая $\omega = (\mu, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, заметим, что индекс оператора K равен ω — индексу ([10]) функции $Q(x)$.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность С. Г. Самко за внимание к работе.

Ростовский государственный
университет

Поступила 12.VI.1973

Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Կոտորակային ինտեգրալների կշռային գյոլդերյան տարածություններում և պոտենցիալի տիպի օպերատորներ (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ $H_\mu^0(\rho)$ և $H_{\mu+\alpha}(\rho)$ կշռային գյոլդերյան տարածությունները համեմորֆ են α կարգի Ռիման-Լիուվիլի կոտորակային ինտեգրման օպերատորի նկատմամբ։ Գտնված են նետերության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ պոտենցիալի տիպի օպերատորի համար և հաշվված է նրանց ինդեքսը։

B. S. RUBIN. *Fractional integrals in the Hölder spaces with weights and potential-type operators* (summary)

It is proved that $H_\mu^0(\rho)$ and $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ Hölder spaces with weights are homeomorph with respect to Rieman—Liuville fractional integration operator of order α. The necessary and sufficient condition for Neterity of an operator acting from $H_\mu^0(\rho)$ into $H_{\mu+\alpha}^0(\rho)$ is obtained and the index calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals I, Math. *Z.*, 27, 1928, 565—606.
2. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., Изд. „Наука", 1968.
3. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференциальные уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
4. *С. Г. Самко.* О теории Нетера для обобщенного интегрального уравнения Абеля, Дифференц. уравнения, 4, № 2, 1968, 315—326.
5. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 299—301.
6. *С. Г. Самко.* Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала, Изв. вузов, Матем., № 4, 1971, 78—86.
7. *Р. В. Дудучава.* Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гельдеровых пространствах с весом, Матем. исследования, 5, вып. I, 1970, 56—76.
8. *Р. В. Дудучава.* Сингулярные интегральные уравнения в гельдеровых пространствах с весом 1. Гельдеровы коэффициенты, Матем. исследования, 5, вып. 2, 1970, 104—124.
9. *Р. В. Дудучава.* Сингулярные интегральные уравнения в гельдеровых пространствах с весом II. Кусочно-гельдеровы коэффициенты, Матем. исследования, 5, вып. 3 , 1970, 58—82.

10. *Р. В. Дудучава*. О сингулярных интегральных операторах в пространстве Гельдера с весом, ДАН СССР, 191, № 1, 1970, 16—19.
11. *Б. С. Рубин*. Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси, Изв. вузов, Матем., (аннотация в № 11, 1971, стр. 71).
12. *Б. С. Рубин*. О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре, Изв. АН Армянской ССР, сер. матем., VII, № 5, 1972, 373—386.
13. *Б. С. Рубин*. Об операторах типа потенциала в весовых пространствах на произвольном контуре, ДАН СССР, 207, № 2, 1972, 300—303.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 4, 1974 Математика

Л. З. ГРОССМАН

О СОГЛАСОВАННОСТИ УСЛОВИЙ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ И СИМПЛЕКТИЧНОСТИ С ПОЛЯРНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ МАТРИЦ

1°. **Постановка задачи.** В ряде задач математического анализа и математической физики особую роль играют J-нерастягивающие матрицы-функции. Одним из важных методов исследования таких матриц-функций является их мультипликативное разложение, полученное В. П. Потаповым [1]. В этом разложении условие нормировки основано на выделении J-модуля матрицы, т. е. на полярном представлении J-нерастягивающей матрицы. В анализе и приложениях на рассматриваемые матрицы-функции часто накладываются дополнительные условия вещественности, симплектичности и др., и, естественно, чтобы компоненты полярного представления таких матриц также удовлетворяли этим условиям. Ниже показано, каким условиям (необходимым и достаточным) должна удовлетворять матрица J, чтобы такая согласованность имела место.

Через J обозначается матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

$$J^* = J; \ J^2 = I.$$

Напомним, что матрица W называется J-нерастягивающей, если $WJW^* \leqslant J$, J-унитарной, если $WJW^* = J$, строго J-сжимающей, если $WJW^* < J$ и J-эрмитовой, если $(WJ)^* = WJ$.

Как показано в [1], каждая J-нерастягивающая матрица допускает полярное представление

$$W = R \cdot U, \tag{1}$$

где R — J-эрмитова J-нерастягивающая матрица с неотрицательными собственными числами и простыми элементарными делителями, отвечающими собственному числу $\lambda = 0$, а U — J-унитарная матрица. Компоненты R и U представления (1) называются соответственно J-модулем и J-аргументом матрицы W. Для J-нерастягивающей матрицы W ее J-модуль удовлетворяет соотношению $R^2 = WJW^*J$. Поскольку из равенства квадратов матриц с неотрицательными собственными числами и простыми элементарными делителями, отвечающими собственному числу $\lambda = 0$, следует равенство самих матриц, то J-модуль матрицы W определяется однозначно. В случае же неособенности W однозначно определяется и J-аргумент.

Матрица X называется вещественной, если вещественны все ее элементы, т. е. если $\overline{X}=X$. Матрица X порядка $2n$ называется симплектической, если выполняется условие

$$XJ_sX' = J_s,$$

где $J_s=\begin{bmatrix} 0 & -iI_n \\ iI_n & 0 \end{bmatrix}$, I_n — единичная матрица порядка n,

X' — транспонированная матрица.

2°. Вещественность. Приведем произвольную матрицу J к „каноническому" виду с помощью ортогональной матрицы.

Теорема 1. *Каждая матрица J представима в виде $J=UJ_{cr}U^*$, где U — ортогональная матрица, а J_{cr} — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали*

$$J_{11}=\begin{bmatrix} -I_{k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \; J_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & -i\sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j} \\ i\sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j} & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix}, \; 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$J_{m+2,\,m+2}=\begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}, \; 0<\lambda_j<1 \; (j=1,2,\cdots,m),$$

$$m\geqslant 0,\; k_1\geqslant 0,\; k_2\geqslant 0,\; l\geqslant 0.$$

Для доказательства представим рассматриваемую матрицу J в виде $J=A+iB$, где A и B — вещественные матрицы. Тогда $J^*= =A'-iB'$. Из того, что $J^*=J$, следует, что $A'=A$, $B'=-B$. Для симметрической вещественной матрицы A существует ортогональная матрица U_1, приводящая A к диагональному виду: $U_1AU_1^*=A_1$, где A_1 — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали

$$A_{11}^{(1)}=\begin{bmatrix} -I_{k_1} & \\ & I_{k_2} \end{bmatrix}, \; A_{j+1,\,j+1}^{(1)}=\begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_1} & 0 \\ 0 & \lambda_j I_{l_1} \end{bmatrix}, \; 1<j\leqslant m,$$

$$A_{m+2,\;m+2}^{(1)}=0_L,\; 0<\lambda_j,\; \lambda_j\neq 1\; (j=1,2,\cdots,m),\; m>0,$$

$k_1>0$, $k_2\geqslant 0$, $L\geqslant 0$, 0_L — нулевая матрица порядка L.

Обозначим $B_1=U_1BU_1^*$, $J_1=U_1JU_1^*$. Имеем: $B_1'=-B_1$, $J_1=A_1+ +iB_1$, $J_1^*=J_1$, $J_1^2=I$. Из последнего равенства получаем: $(A_1^2-B_1^2)+ +i(A_1B_1+B_1A_1)=I$, откуда следует: $A_1^2-B_1^2=I$, $A_1B_1=-B_1A_1$. Отсюда вытекает, что B_1 — блочно-диагональная матрица с блоками по диагонали

$$B_{11}^{(1)}=\begin{bmatrix} 0_{k_1} & -C_0 \\ C_0' & 0_{k_2} \end{bmatrix}, \; B_{j+1,\,j+1}^{(1)}=\begin{bmatrix} 0_{s_j} & -C_j \\ C_j' & 0_{t_j} \end{bmatrix}, \; 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$B_{m+2,\,m+2}^{(1)}=B_L, \quad \text{причем}$$

$$C_jC_j'=(1-\lambda_j)^2 I_{t_j},\; C_j'C_j=(1-\lambda_j^2)\,I_{s_j};\; C_0C_0'=0;\; B_L^2=-I,$$

$$B_L'=-B_L.$$

Из первых двух равенств следует, что $\lambda_j < 1$ и $C_j / \sqrt{1-\lambda_j^2}$ — ортогональная матрица ($j = 1, 2, \cdots, m$), из третьего равенства следует, что $C_0 = 0$. Из последних двух равенств вытекает, что существует ортогональная матрица U_L такая, что $U_L B_L U_L^*$ — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали — матрица II порядка $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

По матрице U_L построим ортогональную матрицу $U_L^{(2)}$, выписав сначала все строчки матрицы U_L, стоящие на нечетных местах, в порядке их расположения, а затем — на четных местах. Тогда, очевидно

$$U_L^{(2)} B_L U_L^{(2)*} = \begin{bmatrix} 0 & -I_l \\ I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad l = \frac{L}{2}.$$

Пусть матрица

$$U_j^{(2)} = \begin{bmatrix} I_{s_j} & \\ & \dfrac{C_j}{\sqrt{1-\lambda_j^2}} \end{bmatrix}, \ (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Преобразуем матрицу J_1 с помощью ортогональной блочно-диагональной матрицы U_2 с блоками на диагонали

$$U_{11} = I_{k_1+k_2}, \quad U_{j+1,\, j+1}^{(2)} = U_j^{(2)}, \ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad U_{m+2,\, m+2}^{(2)} = U_L^{(2)}.$$

Так как $U_2 A_1 U_2^* = A_1$, а $U_2 B_1 U_2^*$ есть блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали

$$B_{11}^{(2)} = 0_{k_1+k_2}, \ B_{j+1,\, j+1}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & 0 \end{bmatrix}, \ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$B_{m+2,\, m+2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}, \ \text{то} \ U_2 J_1 U_2^* = J_{cr},$$

$$J = (U_1^* U_2^*)\, J_{cr}\, (U_1^* U_2^*)^* = U J_{cr} U^*, \ \text{где} \ U = U_1^* U_2^*,$$

$UU^* = I$, $\overline{U} = U$, J_{cr} — матрица, записанная в формулировке теоремы, что и требовалось доказать.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что матрица $(\operatorname{Re} J)^2$ тогда и только тогда является проекционной (т. е. $(\operatorname{Re} J)^4 = (\operatorname{Re} J)^2$), когда $m = 0$, т. е. когда матрица J имеет вид

$$J = U \begin{bmatrix} -I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & J_s \end{bmatrix} U^*, \ \text{где} \ UU^* = I, \ \overline{U} = U, \ J_s = \begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы для данного J компоненты полярного представления всех вещественных неособенных J-нерастягивающих матриц были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы квадрат вещественной части J являлся проекционной матрицей.*

Исходя из замечания к теореме 1, достаточно доказать следующее утверждение: для того чтобы для данного J компоненты полярного представления всех вещественных неособенных J-нерастягивающих матриц были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы матрица J была представима в виде $J = UJ_{cr}U^*$, где U — ортогональная матрица,

$$J_{cr} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & J_s^r \end{bmatrix}.$$

Необходимость. Пусть матрица J такова, что компоненты полярного представления всех вещественных неособенных J-нерастягивающих матриц вещественны. Тогда, как легко видеть, тем же свойством обладает и матрица J_{cr} — канонический вид матрицы J (см. теорему 1).

Рассмотрим J_{cr}-нерастягивающую вещественную неособенную блочно-диагональную матрицу W_0 с блоками на диагонали

$$W_{11}^{(0)} = I_{k_1+k_2}, \quad W_{j+1,\,j+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2I_{s_j} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} I_{s_j} \end{bmatrix}, \quad W_{m+2,\,m+2} = I_{2l}.$$

Для нее квадрат J_{cr}-модуля $R_0^2 = W_0\, J_{cr}\, W_0^*\, J_{cr}$ есть блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали

$$I_{k_1+k_2}, \quad \begin{bmatrix} (1 + 3\lambda_j^2)\, I_{s_j} & -3i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ \dfrac{3}{4}\, i\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \left(1 - \dfrac{3}{4}\lambda_j^2\right) I_{s_j} \end{bmatrix},$$

$1 \leqslant j \leqslant m$ и I_{2l}. Поскольку из вещественности R_0 следует вещественность R_0^2, то $m = 0$, т. е.

$$J_{cr} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & & \\ & I_{k_2} & \\ & & J_s \end{bmatrix}.$$

Достаточность. Очевидно, без ограничения общности, можно считать, что $J = J_{cr} = \begin{bmatrix} J_r & \\ & J_s \end{bmatrix}$, где

$$J_r = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & \\ & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad J_s = \begin{bmatrix} 0 & -iI_l \\ iI_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что все J-нерастягивающие вещественные матрицы W распадаются на блоки в соответствии с распадом на блоки матрицы

$$J:\ W = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Итак, при произвольной J-нерастягивающей вещественной матрице $W=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ следует показать, что блоки a_{12} и a_{21} равны нулю. Достаточно показать, что $a_{21}=0$, поскольку вместе с матрицей W вещественной J-нерастягивающей является и матрица W^*.

Из неотрицательности произвольной матрицы V следует неотрицательность матрицы $\overline{V}$, а значит, и матрицы

$$\frac{V+\overline{V}}{2}=\mathrm{Re}\ V.$$

Поэтому

$$\mathrm{Re}\,(J-WJW^*)=\begin{bmatrix} J_r - a_{11} J_r a_{11}' - a_{11} J_r a_{21}' \\ - a_{21} J_r a_{11}' & - a_{21} J_r a_{21}' \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда матрица $J_r-a_{11} J_r a_{11}'$ неособенна. Действительно, пусть матрица особенна. Рассмотрим матрицу W_1,

$$W_1=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \rho_1 J_{k_1} & & \\ & \rho_2 J_{k_2} & \\ & & J_{2l} \end{bmatrix} W \ (\rho_1>1,\ 0<\rho_2<1).$$

Обозначим $W_0=\begin{bmatrix} \rho_1 J_{k_1} & \\ & \rho_2 J_{k_2} \end{bmatrix}$. Тогда $\begin{bmatrix} W_0 & \\ & J_{2l} \end{bmatrix}$ — J-нерастягивающая матрица. Поэтому и $W_1=\begin{bmatrix} W_0 & \\ & J_{2l} \end{bmatrix} W$ — также J-нерастягивающая (вещественная) матрица. При этом матрица

$$J_r-b_{11} J_r b_{11}' = J_r - W_0 a_{11} J_r a_{11}' W_0 = (J_r - W_0 J_r W_0^*) + \\ + W_0 (J_r - a_{11} J_r a_{11}') W_0' > 0$$

и поэтому неособенна. Если будет доказано, что при этом блок $b_{21}=0$, то отсюда будет вытекать $a_{21}=0$, так как $a_{21}=b_{21}$.

Итак, пусть теперь матрица $J_r-a_{11} J_r a_{11}'$ неособенна. В этом случае из неотрицательности матрицы $\mathrm{Re}\,(J-WJW^*)$ следует, что

$$J_r-a_{11} J_r a_{11}' > 0,\ (-a_{21} J_r a_{21}') - (-a_{21} J_r a_{11}') \times \\ \times (J_r - a_{11} J_r a_{11}')^{-1} (-a_{11} J_r a_{21}') \geqslant 0. \tag{2}$$

Воспользуемся следующим непосредственно проверяемым тождеством: $J+JA^*\ (J-AJA^*)\ AJ=(J-A^*JA)^{-1}$ ($J^*=J$; $J^2=I$, A — произвольная матрица).

Учитывая это тождество и второе неравенство в (2), получаем

$$0\leqslant -a_{21}\,[J_r+J_r a_{11}' (J_r-a_{11}J_r a_{11}')\, a_{11} J_r]\, a_{21}' = -a_{21} (J_r - a_{11}' J_r a_{11})^{-1} a_{21}'.$$

С другой стороны, из первого неравенства в (2) следует, что $J_r - a_{11}' J_r a_{11} > 0$, а значит, $-a_{21}(J_r - a_{11}' J_r a_{11})^{-1} a_{21}' \leqslant 0$. В итоге получаем $-a_{21}(J_r - a_{11} J_r a_{11}')^{-1} a_{21}' = 0$, откуда $a_{21} = 0$.

Итак, для $J = J_{cr}$ все J-нерастягивающие вещественные матрицы W имеют вид $W = \begin{vmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{vmatrix}$. В случае неособенности W блоки W_1 и W_2 также неособенны. Кроме того, они вещественны и J-нерастягивающие матрицы в метриках J_r и J_s соответственно. Компоненты полярного представления матрицы W распадаются на блоки, являющиеся компонентами полярных представлений матриц W_1 и W_2. Поэтому достаточно показать вещественность этих компонент, т. е. доказать утверждение в случае $J = J_r$ и $J = J_s$.

Пусть $J = J_r$ и пусть неособенная J_r-нерастягивающая матрица $W = R \cdot U$ вещественна. Покажем, что $\overline{R} = R$ и $\overline{U} = U$. Убедимся в том, что $\overline{R}$ и $\overline{U}$ удовлетворяют условиям соответственно J-модуля и J-аргумента:

$$(\overline{R}J_r)^* = (\overline{R}\overline{J}_r)^* = (RJ_r)' = (J_r R^*)' = \overline{R}J_r;\ J_r - \overline{R}\, J_r \overline{R}^* =$$
$$= \overline{J}_r - \overline{R}\overline{J}_r \overline{R}^* = \overline{J_r - RJ_rR^*} \geqslant 0;\ \overline{U}\, \overline{J}_r \overline{U}^* = \overline{UJ_rU^*} = \overline{J}_r = J_r.$$

Собственные числа матрицы $\overline{R}$ совпадают с собственными числами матрицы R и потому положительны. $\overline{R}\,\overline{U} = \overline{RU} = \overline{W} = W$. Из единственности полярного представления вытекает, что $\overline{R} = R$, $\overline{U} = U$.

В случае чисто мнимого J, все J-нерастягивающие вещественные матрицы являются J-унитарными. Действительно, из $J - WJW^* \geqslant 0$ имеем $\overline{J} - W\overline{J}\, W^* \geqslant 0$, и так как $\overline{J} = -J$, то $J - WJW^* \leqslant 0$, поэтому $J - WJW^* = 0$. Отсюда, при $J = J_s$ для каждой вещественной J_s-нерастягивающей матрицы W компоненты полярного представления суть соответственно $R = I$ и $U = W$ и, значит, вещественны.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Замечание. Пусть для матрицы J выполняется необходимое условие теоремы 2, кроме того, существует строго J-сжимающая вещественная матрица. Тогда матрица J вещественна.

Действительно, в этом случае для соответствующей матрицы $J_{cr} = \begin{vmatrix} J_r & \\ & J_s \end{vmatrix}$ также существует строго J-сжимающая вещественная матрица. Если порядок блока J_s отличен от нуля, то эта строго J-сжимающая вещественная матрица является блочно-диагональной с J_s-унитарным блоком (см. достаточность теоремы 2), что противоречит ее строгой J-сжимаемости. Поэтому $J_{cr} = J_r$, $J = UJ_rU^* = \overline{J}$.

Очевидно, вещественность J является при существовании строго J-сжимающей вещественной матрицы не только необходимым, но и достаточным условием того, что компоненты полярного представления всех неособенных J-нерастягивающих вещественных матриц вещественны.

3°. Симплектичность. Аналогичными рассуждениями, но более громоздкими выкладками, можно доказать, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Каждая матрица J представима в виде $J = UJ_{cs}U^*$, где U — унитарная симплектическая матрица, J_{cs} — блочно-диагональная матрица с блоками на диагонали*

$$J_{11} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad J_{j+1,\, j+1} = \begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & \sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ \sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$J_{m+2,\, m+2} = \begin{bmatrix} -I_{l+k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad J_{j+m+2,\, j+m+2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & -\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} \\ -\sqrt{1-\lambda_j^2}\, I_{s_j} & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad J_{2m+3,\, 2m+3} = I_l,$$

$$0 < \lambda_j < 1 \ (j = 1, 2, \cdots, m), \ m > 0, \ k_1 \geqslant 0, \ k_2 > 0, \ l \geqslant 0.$$

Теорема 4. *Для того чтобы для данного J компоненты полярного представления всех симплектических J-нерастягивающих матриц были симплектичны, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\left(\dfrac{J + J_s \bar{J} J_s}{2}\right)^2$ была проекционной.*

Остановимся, но уже не столь подробно, на доказательстве этих теорем.

Доказательство теоремы 3. Произвольную матрицу J можно представить в виде суммы двух матриц A и B таких, что $AJ_s = J_s A'$ и $BJ_s = -J_s B'$. При этом:

$$A = \frac{J + \bar{J}_s J J_s}{2}, \quad B = \frac{J - J_s \bar{J} J_s}{2}; \quad A^* = A, \ B^* = B.$$

Из того, что $A^* = A$ и $AJ_s = J_s A'$, вытекают такие свойства собственных векторов матрицы A, которые позволяют привести ее при помощи некоторой унитарной симплектической матрицы U_1 к следующему диагональному виду:

$U_1 A U_1^* = A_1$ — диагональная матрица с блоками на диагонали

$$A_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} -I_{k_1} & 0 \\ 0 & I_{k_2} \end{bmatrix}, \quad A_{j+1,\, j+1}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\lambda_j I_{s_j} & 0 \\ 0 & \lambda_j I_{s_j} \end{bmatrix},$$

$$1 \leqslant j \leqslant m, \quad A_{m+2,\, m+2}^{(1)} = 0_l, \quad A_{k+m+2,\, k+m+2}^{(1)} = A_{k,\, k}^{(1)},$$

$$1 \leqslant k \leqslant m+2, \ 0 < \lambda_j, \ \lambda_j \neq 1, \ (j = 1, 2, \cdots, m), \ m > 0,$$

$$k_1 > 0, \ k_2 \geqslant 0, \ l \geqslant 0.$$

При этом, если $B_1 = U_1 B U_1^*$ и $J_1 = U_1 J U_1^*$, то

$$J_1 = A_1 + B_1,\ A_1^2 + B_1^2 = I;\ A_1 B = -B_1 A_1;\ B_1' = B_1,\ B_1 J_s = -J_s B_1,$$

и потому

$$\mathcal{B}_1 = \left[\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} 0_{k_1+k_2} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & C_1 \\ C_1' & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & C_m \\ C_m' & 0 \end{matrix} \\ & & & & B_1^{(0)} \end{matrix} &
\begin{matrix} 0_{k_1+k_2} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_1' & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & \mathcal{D}_m \\ \mathcal{D}_m' & 0 \end{matrix} \\ & & & & B_2^{(0)} \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0_{k_1+k_2} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & \bar{\mathcal{D}}_1 \\ \bar{\mathcal{D}}_1' & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & \bar{\mathcal{D}}_m \\ \bar{\mathcal{D}}_m' & 0 \end{matrix} \\ & & & & \bar{B}_2^{(0)} \end{matrix} &
\begin{matrix} 0_{k_1+k_2} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & -\bar{C}_1 \\ -\bar{C}_1' & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & -\bar{C}_m \\ -\bar{C}_m' & 0 \end{matrix} \\ & & & & \bar{B}_1^{(0)} \end{matrix}
\end{array}\right],$$

$$B_1^{(0)\prime} = B_1^{(0)},\quad B_2^{(0)\prime} = B_2^{(0)}.$$

Для матрицы $J^{(0)} = \begin{bmatrix} B_1^{(0)} & B_2^{(0)} \\ \bar{B}_2^{(0)} & -\bar{B}_1^{(0)} \end{bmatrix}$ существует унитарная симплектическая матрица $U^{(0)} = \begin{bmatrix} U_1^{(0)} & U_2^{(0)} \\ -\bar{U}_2^{(0)} & \bar{U}_1^{(0)} \end{bmatrix}$ такая, что

$$U^{(0)} J^{(0)} U^{(0)*} = \begin{bmatrix} -I_l & \\ & I_l \end{bmatrix}.$$

Унитарная симплектическая матрица U_2,

$$U_2 = \left[\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} I_{k_1+k_2} & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} I_{s_1} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} C_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} I_{s_m} & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} C_m \\ & & & & & & U_1^{(0)} \end{matrix} &
\begin{matrix} 0_{k_1+k_2} & & & & & \\ & 0_{s_1} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \mathcal{D}_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0_{s_m} & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} \mathcal{D}_m \\ & & & & & & U_2^{(0)} \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0_{k_1+k_2} & & & & & \\ & 0_{s_1} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \bar{\mathcal{D}}_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0_{s_m} & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} \mathcal{D}_m \\ & & & & & & -\bar{U}_2^{(0)} \end{matrix} &
\begin{matrix} I_{k_1+k_2} & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} I_{s_1} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \bar{C}_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} I_{s_m} & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_m^2}} \bar{C}_m \\ & & & & & & \bar{U}_1^{(0)} \end{matrix}
\end{array}\right],$$

приводит матрицу B_1 к блочно-диагональной матрице $U_2 B_1 U_2^*$ с блоками на диагонали $B_{11}^{(2)} = 0_{k_1+k_2}$,

$$B^{(2)}_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j}\\ \sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j} & 0\end{bmatrix},\ 1\leqslant j\leqslant m,\ B^{(2)}_{m+2,\,m+2}=I_l,$$

$$B^{(2)}_{m+3,\,m+3}=0_{k_1+k_2},\quad B^{(2)}_{j+m+3,\,j+m+3}=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j}\\ -\sqrt{1-\lambda_j^2}\,I_{s_j} & 0\end{bmatrix},$$

$$1\leqslant j\leqslant m,\ B^{(2)}_{2m+4,\,2m+4}=I_l,$$

$$0<\lambda_j<1\ (j=1,2,\cdots,m),\ m\geqslant 0,\ k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0,\ l\geqslant 0,$$

откуда, так как $U_2A_1U_2^*=A_1$, имеем: $U_2JU_2^*=J_{cs}$.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что матрица $\left(\frac{J+J_s'JJ_s}{2}\right)^2$ тогда и только тогда является проекционной, когда $m=0$, т. е. когда матрица J имеет вид

$$J=U\begin{bmatrix}J_r & & & \\ & -I_l & & \\ & & J_r & \\ & & & I_l\end{bmatrix}U^*,$$

где $UU^*=I,\ UJ_sU'=J_s,\ J_s'=\begin{bmatrix}0 & -iI_l\\ iI_l & 0\end{bmatrix},\ J_s=\begin{bmatrix}-I_{k_1} & \\ & I_{k_2}\end{bmatrix}.$

Доказательство теоремы 4. Необходимость доказывается так же, как и в теореме 2. В качестве матрицы W_0 можно взять, например, блочно-диагональную матрицу с блоками на диагонали

$$W^{(0)}_{11}=I_{k_1+k_2},\quad W^{(0)}_{j+1,\,j+1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}I_{s_j} & -\frac{4}{3}I_{s_j}\\ -\frac{4}{3}I_{s_j} & \frac{5}{3}I_{s_j}\end{bmatrix},\ 1\leqslant j\leqslant m,$$

$$W^{(0)}_{m+2,\,m+2}=I_{l+k_1+k_2},\ W^{(0)}_{k+m+2,\,k+m+2}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}I_{s_j} & -\frac{4}{3}I_{s_j}\\ -\frac{4}{3}I_{s_j} & -\frac{5}{3}I_{s_j}\end{bmatrix},$$

$$1\leqslant j\leqslant m,\ W^{(0)}_{2m+3,\,2m+3}=I_l\ (W_0J_sW_0'=J_s,\ J_{cs}-W_0J_{cs}W_0^*>0).$$

Достаточность. Можно считать, что $J=J_{cs}$. У всех J-нерастягивающих симплектических матриц

$$W=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

(разбитых на блоки в соответствии с разбиением J) имеем

$$a_{12}=a_{14}=a_{21}=a_{23}=a_{32}=a_{34}=a_{41}=a_{43}=0.$$

Действительно, из симплектичности W следует, что $J_s\bar{J}J_s \leqslant WJ_s\bar{J}J_sW^*$, и потому при

$$B\left(=\frac{J-J_s\bar{J}J_s}{2}\right)=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & -I_l & & \\ & & 0 & \\ & & & I_l \end{bmatrix}$$

имеем $B-WBW^*\geqslant 0$. Перестановкой блоков матрицы W составим матрицу W_1:

$$W_1=\left[\begin{array}{cc|cc} a_{22} & a_{24} & a_{21} & a_{23} \\ a_{42} & a_{44} & a_{41} & a_{43} \\ \hline a_{12} & a_{14} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{34} & a_{31} & a_{33} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}.$$

Надо показать, что $W_{21}=0$. При $J_r=\begin{bmatrix} -I_l & \\ & I_l \end{bmatrix}$ и $j_0=\begin{bmatrix} J_r & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ для W_1 получаем $j_0-W_1j_0W_1^*\geqslant 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} J_r-W_{11}J_rW_{11}^* & -W_{11}J_rW_{21}^* \\ -W_{21}J_rW_{11}^* & -W_{21}J_rW_{21}^* \end{vmatrix}\geqslant 0.$$

Далее рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям доказательства достаточности теоремы 2.

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Потапову за постановку задачи, Д. З. Арову за ценные советы.

Одесский педагогический институт

Поступила 27.III.1973

Լ. Զ. ԳՐՈՍՍՄԱՆ. Իրականության և սիմպլեկտիկության պայմանների համաձայնեցվածությունը J-չձգվող մատրիցների բևեռային ներկայացման հետ *(ամփոփում)*

Հոդվածում պարզված է, թե $J^*=J$, $J^2=I$ հատկություններով օժտված ինչպիսի J մատրիցների համար W J-չձգվող մատրիցի իրականությունից (սիմպլեկտիկությունից) հետևում է նրա բևեռային ներկայացման կոմպոնենտների իրականությունը (սիմպլեկտիկությունը)։

Պարզված է, թե ինչպիսի պարզագույն տեսքի կարելի է բերել կամայական J մատրիցը իրական (սիմպլեկտիկ) ունիտար մատրիցի միջոցով։

L. Z. GROSSMAN. *On the consistency of the reality and symplexity conditions with polar representation of J-constructive matrices* (summary)

The following question is solved: for which matrices with the property $J^*=J$, $J^2=I$ the reality (symplexity) of J-constructive matrix W implies the reality (symplexity) of the components of its polar representation.

The simplest form, to which the matrix J can be reduced with the aid of real (symplectic) unitary matrix, is discovered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, 2, 1955, 125—236.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS