ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespaced, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О БАЗИСЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КЛАССОВ E_p $(1<p<\infty)$

Пусть $G^{(+)}$ — односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ, а $G^{(-)}$ — дополнение замыкания области $G^{(+)}$.

Через $w=\Phi(z)$ $(z=\psi(w))$ обозначим функцию Римана, отображающую область $G^{(-)}$ на область $D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}$ с условиями нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$.

Если $\{\omega_k\}_1^\infty$ $(\omega_k\in G^{(-)})$ — произвольная последовательность *отличных друг от друга* точек, то, как хорошо известно, при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-2})<+\infty \tag{A}$$

замыкание системы функций $\{1/(\omega_k-z)\}_1^\infty$ в известных классах $E_p(1\leqslant p<\infty)$, аналитических в области $G^{(+)}$ функций [1], по метрике $L_p(\Gamma)$, является собственным подпространством E_p.

В работах [2], [3] была дана полная внутренняя характеристика линейной оболочки $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}\subset E_p$ $(1<p<\infty)$ такого рода незамкнутой системы.

В настоящей статье исследуется вопрос о базисности системы

$$m_k^{(1/q)}(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k-z},\ k=1,2,\cdots$$

в подпространстве $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$, где $q=p/(p-1)>1$.

В работе М. М. Джрбашяна [4] было установлено, что при условии (A) система функций

$$\rho_k^{(1/q)}(z)=\frac{[\Phi'(z)]^{1/q}}{B[\Phi(z)][1-\Phi(z)\overline{\alpha_k(\omega)}]\,\overline{B'(\alpha_k(\omega))}}(k=1,2,\cdots), \tag{4}$$

где $\alpha_k(\omega)=[\Phi(\omega_k)]^{-1}$ $(0<|\alpha_k(\omega)|<1)$ и

$$B(\zeta)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(\omega)-\zeta}{1-\overline{\alpha_k}(\omega)\zeta}\frac{|\alpha_k(\omega)|}{\alpha_k(\omega)}$$

биортогональна с системой $\{m_k^{(1/q)}(z)\}_1^\infty$ на кривой Γ.

В настоящей работе в предположении, что последовательность $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$ $(0<|\alpha_k(\omega)|<1)$ удовлетворяет условию

$$\inf_{k\geq 1}\prod_{l\neq k}\left|\frac{\alpha_l(\omega)-\alpha_k(\omega)}{1-\overline{\alpha_l}(\omega)\,\alpha_k(\omega)}\right|\geq\delta>0, \tag{B}$$

устанавливается следующее представление ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\, m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/q}}{B(\Phi(\zeta))} \times$$

$$\times \int_{\Gamma} \frac{B(\Phi(\eta))\,[\Phi'(\eta)]^{1/p}}{(\eta - z)(\Phi(\zeta) - \Phi(\eta))}\, d\zeta \;(z \in G^{(+)},\ \zeta \in G^{(-)}), \tag{C}$$

где ряд сходится по метрике L_p на кривой Γ.

Отметим, что биортогональность систем $\{m_k^{(1/q)}(z),\ \rho_k^{(1/q)}(z)\}_1^{\infty}$ на кривой Γ является лишь специальным случаем более общих результатов такого же рода, установленных М. М. Джрбашяном [4], впервые рассмотревшим такие системы, когда числа последовательности $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in G^{(-)}$, вообще говоря, не отличны друг от друга. В свою очередь, представление (C) является предельным случаем теоремы, установленной в той же работе на тот случай, когда последовательность $\{\omega_k\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (B). При доказательстве (C) мы используем одно утверждение из работы [10], которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема А. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ $(0 < |\alpha_k| < 1)$ *удовлетворяет условию* (B), *тогда любую функцию* $f(z) \in H_p$ $(1 < p < \infty)$ *можно представить в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t - z},\ |z| < 1,$$

где

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_k z}\ (k = 1, 2, \cdots),\ B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

и

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\, \overline{\Omega_k(t)}\, |dt|,\ \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(z - \alpha_k)\, B'(\alpha_k)},$$

причем ряд сходится по метрике L_p *на окружности* $|z| = 1$.

В предположении, что контур Γ является кривой специального типа и последовательность $\{\alpha_k(\omega)\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (B), применением соотношения (C) доказывается следующее утверждение (теоремы 2, 3):

Для любой функции $f(z) \in \lambda_p\{G^{(+)}; \omega_k\}$ $(1 < p < \infty)$ *имеет место представление*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z),\ z \in CK,$$

где K *есть замыкание множества точек* $\{\omega_k\}_1^{\infty}$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta)\, \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\, d\zeta \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

причем ряд сходится по метрике L_p *на кривой* Γ.

1 (а). Пусть $G^{(+)}$ — односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Г. Дополнение замыкания этой области обозначим через $G^{(-)}$. Таким образом, контур Г является общей полной границей для обеих взаимно-дополнительных областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$.

Обозначим через $H_p(D^{(+)})$ класс голоморфных в $D^{(+)} = \{z; |z| < 1\}$ функций, принадлежащих известному классу H_p Харди, а через $H_p(D^{-1})$ — класс голоморфных в $D^{(-)} = \{z; |z| > 1\}$ функций, представимых в виде

$$F(z) = \tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)},$$

где $\tilde{F}(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Пусть функция

$$w = \Phi(z) \quad (z = \psi(w)), \tag{1}$$

подчиненная условиям нормировки $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, конформно отображает область $G^{(-)}$ на область $D^{(-)}$.

Пусть далее $\{\omega_k\}_1^\infty$ $(\omega_k \neq \infty)$ — произвольная последовательность *отличных друг от друга* комплексных чисел, лежащих в области $G^{(-)}$. Определим другую последовательность также отличных друг от друга комплексных чисел $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$ $(0 < |\alpha_k(\omega)| < 1)$, полагая

$$\alpha_k(\omega) = [\Phi(\omega_k)]^{-1} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что последовательность чисел $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\Phi^{-1}(\omega_k)|^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2) < +\infty, \tag{3}$$

$$\prod_{\substack{l \neq k \\ l=1}}^{\infty} \left| \frac{\Phi^{-1}(\omega_l) - \Phi^{-1}(\omega_k)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_l)\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}} \right| = \prod_{\substack{l \neq k \\ l=1}}^{\infty} \left| \frac{\alpha_l(\omega) - \alpha_k(\omega)}{1 - \overline{\alpha_l(\omega)}\alpha_k(\omega)} \right| \geq \delta > 0, \quad k \geq 1, \tag{4}$$

где δ $(0 < \delta < 1)$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k \geq 1$.

(б) Функцию $f(z)$ отнесем к классу $E_p(G^{(+)})$, если она голоморфна в $G^{(+)}$ и $f(\varphi(w))[\varphi'(w)]^{1/p} \in H_p(D^{(+)})$, где $\varphi(w)$ есть риманова функция, отображающая $D^{(+)}$ на $G^{(+)}$. Класс $E_p(G^{(+)})$ при $1 \leq p < \infty$ будет банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right\}^{1/p},$$

где $f(\zeta)$ суть угловые граничные значения функции $f(z)$ на границе Г области $G^{(+)}$.

Соответственно, функцию $F(z)$ отнесем к классу $E_p(G^{(-)})$, если она голоморфна в $G^{(-)}$ и $F(\psi(w))[\psi'(w)]^{1/p} \in H_p(D^{(-)})$. Класс $E_p(G^{(-)})$ при $(1 \leq p < \infty)$ также будет банаховым пространством с нормой

$$\|F\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} |F(\zeta)|^p\,|d\zeta|\right\}^{1/p},$$

где $F(\zeta)$ суть угловые граничные значения функции $F(z)$ на границе Γ области $G^{(-)}$.

Известно [1], что

$$\psi'(w) \in H_1(D^{(-)}) \text{ и } \Phi'(z) \in E_1(G^{(-)}). \tag{5}$$

Следуя М. М. Джрбашяну [3], рассмотревшему общий случай произвольной последовательности $\{\omega_k\}_1^\infty \in G^{(-)}$ при данном $1 < p < \infty$, введем в рассмотрение системы функций

$$m_k^{(1/q)}(z) = \frac{\Phi(\omega_k)\,[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k - z} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

$$\rho_k^{(1/q)}(z) = \frac{[\Phi'(z)]^{1/q}}{B[\Phi(z)]\,[1 - \Phi(z)\,\overline{\alpha_k}(\omega)]\,\overline{B'(\alpha_k(\omega))}} \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{7}$$

где $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$ и

$$B(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(\omega) - w}{1 - \overline{\alpha}_k(\omega)\,w}\,\frac{|\alpha_k(\omega)|}{\alpha_k(\omega)}.$$

Заметив, что функция $1/B[\Phi(z)](1 - \Phi(z)\,\overline{\alpha}_k(\omega))$ голоморфна и ограничена в области $G^{(-)}$ из (5) заключаем, что $\rho_k^{(1/q)}(z) \in E_p(G^{(-)})$. Справедлива теорема, являющаяся частным случаем теоремы 2 работы [4].

Т е о р е м а В. *Система функций $\{m_k^{(1/q)}(\zeta),\ \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\}_1^\infty$ биортогональна на кривой Γ в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_k^{(1/q)}(\zeta)\,\rho_\nu^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta = \delta_{k,\nu} = \begin{cases} 1, & k = \nu \\ 0, & k \neq \nu, \end{cases} \tag{8}$$

где $\rho_\nu^{(1/q)}(\zeta)$ есть угловые граничные значения функции $\rho_k^{(1/q)}(z)$ на кривой Γ.

Действительно, поскольку функции $\rho_\nu^{(1/q)}(z) \in E_p(G^{(-)})$ и обращаются в нуль в бесконечности, то по формуле Коши имеем

$$\rho_\nu^{(1/q)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \rho_\nu^{(1/q)}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z},\quad z \in G^{(-)},$$

откуда при $z = \omega_k$ непосредственно следует утверждение (8) леммы.

(в) При данном $p\,(1 < p < \infty)$ рассмотрим голоморфную в $D^{(-)} = \{w;\ |w| > 1\}$ функцию

$$\chi_{1/q}(w;\ z) = \frac{[\psi'(w)]^{1/q}}{\psi(w) - z},\quad z \in G^{(+)}, \tag{9}$$

где $q = p/(p-1)$.

Следующая лемма и ее следствие являются предельными случаями теоремы установленной М. М. Джрбашяном (см. [4], теорему 4), на тот случай, когда последовательность $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (3) и (4).

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (3), (4). Тогда при каждом $z \in G^{(+)}$ справедливо представление*

$$\chi_{1/q}(w;\ z) = [\psi'(w)]^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{(1/q)}(\psi(w))\ m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{w\,B(w)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\chi_{1/q}(t;\ z)\,B(t)}{w-t}\,dt, \tag{10}$$

где ряд сходится равномерно относительно w внутри $D^{(-)}$ и по L_q-метрике на окружности $|w|=1$.

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в круге $D^{(+)}$ функцию

$$\overset{*}{\chi}_{1/q}(\zeta;\ z) = \frac{1}{\zeta}\overline{\chi_{1/q}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}};\ z\right)}\ . \tag{11}$$

Докажем, что при каждом $z \in G^{(+)}$, как функция от ζ, $\overset{*}{\chi}_{1/q}(\zeta;\ z) \in H_q(D^{(+)})$. В самом деле, обозначив

$$d(z) = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z| > 0,$$

для любого $|w| = \rho \geqslant 1$ будем иметь

$$|\psi(w) - z| \geqslant d(z).$$

Поэтому, учитывая (5), получаем

$$\lim_{\rho\to 1+0} \sup \int\limits_0^{2\pi} |\chi_{1/q}(\rho e^{i\theta})|^q\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-q} \lim_{\rho\to 1+0} \sup \int\limits_0^{2\pi} |\psi'(\rho e^{i\theta})|^q\,d\theta < \infty. \tag{12}$$

Однако, по (11) при $0 < r < 1$

$$\int\limits_0^{2\pi} |\overset{*}{\chi}_{1/q}(re^{i\theta};\ z)|^q\,d\theta = \frac{1}{r^p}\int\limits_0^{2\pi} \left|\chi_{1/q}\left(\frac{1}{r}\,e^{-i\theta};\ z\right)\right|^q d\theta,$$

откуда, ввиду (12) следует, что $\overset{*}{\chi}_{1/q}(\zeta;\ z) \in H_q(D^{(+)})$. Теперь применяя теорему A, получим следующее разложение:

$$\chi^{*}_{1/q}(\zeta; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(\zeta)}{(\zeta - a_k)\, B'(a_k)}\, \chi^{*}_{1/q}(a_k; z) + \frac{B(\zeta)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\chi^{*}_{1/q}(t; z)}{B(t)} \frac{dt}{t-\zeta}, \quad (13)$$

где ряд сходится равномерно в области $D^{(+)}$ и по метрике L_q на окружности $|\zeta| = 1$. Замечая, что

$$\chi^{*}_{1/q}(a_k; z) = \overline{m_k^{(1/q)}(z)}$$

и переходя к сопряженным величинам в (13), учитывая что $\overline{B(\zeta)} = B(1/\bar\zeta)^{-1}$ и при $|t|=1$ $\chi^{*}_{1/q}(t; z) = t\, \chi_{1/q}(t; z)$, а также заменяя ζ^{-1} на w, получим (10).

В качестве следствия леммы 2 отметим следующее разложение ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(1/q)}(\zeta)\, m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/q}}{B(\Phi(\zeta))} \times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma} \frac{B(\Phi(\eta))\, [\Phi'(\eta)]^{1/p}}{(\eta - z)(\Phi(\zeta) - \Phi(\eta))}\, d\zeta \ (z \in G^{(+)}, \ \zeta \in G^{(-)}, \quad (14)$$

которое получается из (13) после замены $\psi(w)$ на ζ. Ряд в (14) сходится равномерно относительно ζ внутри $G^{(-)}$ и по метрике L_q на Γ.

(г) Определение [6]. Сложным контуром Ляпунова будем называть контур Γ, состоящий из конечного числа ориентированных дуг Ляпунова* $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$, имеющих конечное число общих точек, при этом будем предполагать, что если Γ_j и Γ_k имеют общую точку, то либо кривая $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ является ляпуновской, либо в этой точке касательные к этим кривым не совпадают.

Теорема С. ([5], [6]). *Пусть кривая Γ является сложным контуром Ляпунова, тогда для любой функции $f(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ интегралы типа Коши*

$$\varphi_{+}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \ z \in G^{(+)}, \quad \varphi_{-}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \ z \in G^{(-)},$$

обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_{+}(z) \in E_p(G^{(+)})$, $\varphi_{-}(z) \in E_p(G^{(-)})$.
2. *Имеют место неравенства вида*

$$\|\varphi_{+}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \quad \|\varphi_{-}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,$$

где A_p — постоянная, не зависящая от f, причем

$$\|\varphi_{+}\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |\varphi_{+}(\zeta)|^p\, |d\zeta|\right\}^{1/p}, \quad \|\varphi_{-}\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |\varphi_{-}(\zeta)|^p\, |d\zeta|\right\}^{1/p},$$

---

* Дугой Ляпунова будем называть ориентированную ограниченную разомкнутую линию Γ, если угол $\alpha(s)$, образованный касательной к Γ, удовлетворяет условию Гельдера.

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(\zeta)|^p \, |d\zeta| \right\}^{1/p}.$$

Лемма А. *Если последовательность точек $\{\omega_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям* (3), (4), *то для любой функции $f(z) \in E_p(G^{(-)})$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|f(\omega_k)|^p}{|\Phi'(\omega_k)|} (1 - |\alpha_k(\omega)|^2) \leqslant K_p \|f\|_p, \tag{16}$$

где K_p — постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в $D^{(+)}$ функцию

$$F(\zeta) = f\left[\psi\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{1/p} \zeta \in D^{(+)}.$$

Заметив, что $F(\zeta) \in H_p(D^{(+)})$, согласно теореме Шапиро и Шилдза [7] для точек $\{\alpha_k(\omega)\}_1^\infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^\infty |F(\alpha_k(\omega))|^p (1 - |\alpha_k(\omega)|^2) \leqslant K_p \|F\|_p, \tag{17}$$

но учитывая, что

$$F(\alpha_k) = f(\omega_k)/[\Phi'(\omega_k)]^{1/p} \text{ и } \|F\|_p = \|f\|_p,$$

из (17) получим (16).

Теорема Д [8]. *Пусть системы функций $\{\varphi_n(\zeta)\}_1^\infty$, $\varphi_n(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, и $\{\psi_n(\zeta)\}_1^\infty$, $\psi_n(\zeta) \in L_q(\Gamma)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ составляют биортогональную систему на Γ. Тогда, если разложение каждой функции $f(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ типа*

$$\sum_{k=1}^\infty c_k(f)\, \varphi_k(\zeta), \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \psi_k(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \tag{18}$$

слабо сходится, то для каждой функции $g(\zeta) \in L_q(\Gamma)$ сопряженное разложение

$$\sum_{k=1}^\infty d_k(g)\, \psi_k(\zeta), \quad d_k(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi_k(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta$$

будет сильно сходящимся, более того, разложение (18) *также будет сильно сходиться.*

2 (а). Теорема 1. *Пусть последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}_1^\infty \in G^{(-)}$ удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Тогда любая функция $f(z) \in E_p(G^{(+)})$ допускает разложение*

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/p}}{t \cdot B(t)}\, r\left(\frac{1}{t}; z\right) dt, \quad z \in G^{(+)}, \tag{19}$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\zeta)\ \rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta\ (k=1,2,\cdots) \tag{20}$$

и

$$r(w;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{B(t)\,[\psi'(t)]^{1/q}}{\psi(t)-z}\,\frac{dt}{1-tw}\in H_q(D^{(+)}), \tag{21}$$

причем ряд в (19) *сходится равномерно внутри области* $G^{(+)}$.

Доказательство. Согласно формуле Коши имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

так что утверждение (19) следует из разложения (14). В свою очередь, утверждение (21) вытекает из теоремы Рисса [7] или же из теоремы А, если заметить, что при фиксированном $z\in G^{(+)}$ по (5) функция $B(t)\,[\psi'(t)]^{1/q}/(\psi(t)-z)\in L_q$ и произвести замену переменной t на $1/t$.

(б) Обозначим через $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ класс функций $f(z)\in E_p\,(G^{(+)})$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f[\psi(t)]\,[\psi'(t)]^{1/p}}{tB(t)}\,r\left(\frac{1}{t};\ z\right)dt\equiv 0,\quad z\in G^{(+)}. \tag{22}$$

Отметим, что после того как докажем теорему 2, будет видно, что класс $\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ есть замыкание системы функций $\{m_k^{(1/q)}(z)\}_1^{\infty}$ по метрике $L_p(\Gamma)$.

Лемма 3. $m_k^{(1/q)}(z)\in\lambda_p\{G^{(+)};\ \omega_k\}$.

Действительно, обозначая

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{m_k^{(1/q)}[\psi(t)][\psi'(t)]^{1/p}}{tB(t)}\ r\left(\frac{1}{t};\ z\right)dt,\quad z\in G^{(+)},$$

будем иметь

$$F(z)=\frac{\Phi(\omega_k)\,[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{[\psi'(t)]^{1/p}}{t\,[1-\overline{\Phi(\omega_k)}\,t]}\,\pi_k(t)\,r\left(\frac{1}{t};\ z\right)dt,\quad z\in G^{(+)},$$

где

$$\pi_k(z)=\frac{1}{\dfrac{|\alpha_k(\omega)|}{\alpha_k(\omega)}\prod\limits_{\substack{l\neq k\\ l=1}}^{\infty}\dfrac{\alpha_l(\omega)-z}{1-\overline{\alpha_l(\omega)}\,z}\,\dfrac{|\alpha_l(\omega)|}{\alpha_l(\omega)}}\cdot\frac{\Phi(\omega_k)-t}{\omega_k-\psi(t)}.$$

Заменив переменную t через $1/w$, получим

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{w-\overline{\Phi(\omega_k)}}\pi_k\left(\frac{1}{w}\right)r(w;z)\,dw,\quad z\in G^{(+)}.$$

Но по (5) и (20) имеем

$$\frac{\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{w-\overline{\Phi(\omega_k)}}\pi_k\left(\frac{1}{w}\right)r(w;z)\in H_1(D^{(+)}),\quad z\in G^{(+)},$$

так что $F(z)\equiv 0$, $z\in G^{(+)}$. Лемма доказана.

(в) Лемма 4. *Пусть* $f(z)\in E_p(G^{(+)})$, *тогда*

$$c_k(f)=F(\overline{a_k}(\omega))/\overline{B'(a_k(\omega))}\quad(k=1,2,\cdots),\tag{23}$$

где $F(z)$ — *некоторая функция из класса* $H_p(D^{(+)})$.

Доказательство. Согласно (19) и (7) имеем

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\zeta)\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1/q}}{B[\Phi(\zeta)][1-\Phi(\zeta)\overline{a_k}(\omega)]\overline{B'(a_k(\omega))}}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f[\psi(w)][\psi'(w)]^{1/p}}{B(w)[1-w\overline{a_k}(\omega)]\overline{B'(a_k(\omega))}}dw.$$

Заменив переменную w через $1/w$, получим

$$c_k(f)=\frac{1}{\overline{B'(a_k(\omega))}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{wB\left(\frac{1}{w}\right)(w-a_k(\omega))}dw.$$

Теперь заметив, что $g\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}/wB\left(\frac{1}{w}\right)\in L_p$ и обозначив

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{f\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right]\left[\psi'\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{1/p}}{wB\left(\frac{1}{w}\right)}\frac{dw}{w-z},$$

получим формулу (23).

Если обозначим через K замыкание множества точек $\{\omega_k\}_1^\infty$, то будет иметь место

Лемма 5. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(z)$$

сходится абсолютно и равномерно вне K.

Доказательство. Пусть $E \subset CK$ — некоторое замкнутое множество. Обозначим через ρ расстояние между множеством E и K. Учитывая лемму 4 и условие (5), будем иметь

$$|c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z)| \leqslant \frac{C}{\rho} \frac{|F(\overline{\alpha}_k(\omega))|}{|B'(\alpha_k(\omega))|} |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q} =$$

$$= \frac{C}{\rho} \cdot \frac{1-|\alpha_k(\omega)|^2}{\prod\limits_{l \neq k} \left| \frac{\alpha_l(\omega)-\alpha_k(\omega)}{1-\overline{\alpha}_l(\omega)\,\alpha_k(\omega)} \right|} |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q} \leqslant \tag{24}$$

$$\leqslant \frac{C}{\rho\delta} (1-|\alpha_k(\omega)|^2\, |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q},$$

где $C = \sup\limits_{k>1} |\Phi(\omega_k)|$.

Но в силу леммы A и того, что $1 \in E_p(G^{(-)})$, заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1} \leqslant K_q. \tag{25}$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера, согласно (24) и (25) для любого $N>1$ получаем

$$\sum_{k=1}^{N} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)\, |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{N} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)\, |F(\overline{\alpha}_k(\omega))|^p \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{N} (1-|\alpha_k(\omega)|^2)\, |\Phi'(\omega_k)|^{-1} \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant K_q^{1/q} K_p^{1/p} \|F\|_p,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть кривая Γ является сложным контуром Ляпунова. Тогда, если последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}_1^{\infty} \in G^{(-)}$ удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *то для произвольной функции $f(z) \in \lambda_p\{G^{(+)}; \omega_k\}$ последовательность функций*

$$S_m(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, m_k^{1/q}(\zeta) \quad (m=1, 2, \cdots) \tag{26}$$

является слабо сходящейся в пространстве $L_p(\Gamma)$.

Доказательство. На основании теоремы 1 в силу слабой компактности пространств L_p $(1<p<\infty)$ достаточно установить ограниченность норм последовательности $\{S_m(\zeta)\}_1^{\infty}$ в L_p.

Пользуясь известной теоремой Хана-Банаха, можем утверждать, что

$$\|S_m(\zeta)\|_p = \sup_{\substack{g(\zeta) \in L_q(\Gamma) \\ \|g\|_q < 1}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma S_m(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta \right|, \tag{27}$$

где $q = p/(p-1)$. Но по (26) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} S_m(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left\{\sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(\zeta)\right\} g(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, \Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\omega_k-\zeta}\, d\zeta = \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, \Phi(\omega_k)\, \frac{g^*(\omega_k)}{[\Phi'(\omega_k)]^{1/q}}, \tag{28}$$

где

$$g^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{z-\zeta}\, d\zeta \in E_q(G^{(-)}).$$

Заметим теперь, что ввиду условий (3) и (4)

$$|B'(\alpha_k(\omega))| = \frac{1}{1-|\alpha_k(\omega)|^2}\prod_{\substack{l\neq k\\ l=1}}^{m}\left|\frac{\alpha_l(\omega)-\alpha_k(\omega)}{1-\bar{\alpha}_l(\omega)\,\alpha_k(\omega)}\right| \geqslant \frac{\delta}{1-|\alpha_k(\omega)|^2},$$

так, что из (28) и (23) получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} S_m(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\delta}\sum_{k=1}^{m}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)\, |F(\bar{\alpha}_k(\omega))|\, \frac{|g^*(\omega_k)|}{|\Phi'(\omega_k)|^{1/q}},$$

где $C = \sup\limits_{k\geqslant 1}|\Phi(\omega_k)| < \infty$. Применяя неравенство Гельдера, в силу леммы A и теоремы B будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} S_m(\zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta\right| \leqslant \frac{C}{\delta}\left\{\sum_{k=1}^{m}|F(\bar{\alpha}_k(\omega))|^p(1-|\alpha_k(\omega)|^2)\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{|g^*(\omega_k)|^q}{|\Phi'(\omega_k)|}(1-|\alpha_k(\omega)|^2)\right\}^{1/q} \leqslant C\delta^{-1}K_p^{1/p}K_q^{1/q}\,\|F\|_p\,\|g^*\|_q.$$

Отсюда, учитывая теорему C, из (27) получим неравенство

$$\|S_m(\zeta)\|_p \leqslant \delta^{-1}M_{p,q}\|F\| \quad (m=1, 2, \cdots),$$

где $M_{p,q} = CK_p^{1/p}K_q^{1/q}A_q$, и лемма доказана.

(г) Прежде чем перейти к основной теореме докажем еще одну лемму.

Лемма 7. *Предположим, что выполняются условия леммы* 6. *Тогда для каждой функции* $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)(1<p<\infty)$ *существуют функции* $f_1(z)\in\lambda_p\,[G^{(+)};\,\omega_k]$, $f_2(z)\in E_p(G^{(+)})$, $f_3(z)\in E_p(G^{(+)})$ *такие, что*

$$f(\zeta) = f_1(\zeta)+f_2(\zeta)+f_3(\zeta) \tag{29}$$

и $c_k(f) = c_k(f_1)$, *где*

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta,\quad (k=1, 2,\cdots).$$

Доказательство. Пользуясь теоремой C и известными свойствами интегралов типа Коши [1], легко убедиться, что любая функция $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ допускает представление вида

$$f(\zeta)=F(\zeta)+f_3(\zeta),\ \zeta\in\Gamma,$$

где $F(z)\in E_p(G^{(+)})$, $f_3(z)\in E_p(G^{(-)})$ и $f_3(\infty)=0$. Из этого представления функции $f(\zeta)$ следует, что

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f_3(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta. \tag{30}$$

Теперь, учитывая, что $f_3(z)\,\rho_k^{(1/q)}(z)\in E_1(G^{(-)})$ и при $|z|\to\infty$ имеет порядок $O(1/|z|^2)$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f_3(\zeta)\,\rho_k^{(1/q)}(\zeta)\,d\zeta=0\quad (k=1, 2,\cdots).$$

Отсюда и из (30) следует

$$c_k(f)=c_k(F)\ \ (k=1, 2,\cdots). \tag{31}$$

Теперь, согласно теореме 1 и леммам 6, 3, 1, имеем

$$F(z)=f_1(z)+f_2(z),$$

где

$$f_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,\omega_k(z)\in\lambda_p\,\{G^{(+)};\ \omega_k\},\ f_2(z)\in E_p(G^{(+)})$$

и $c_k(f_1)=c_k(F)$ $(k=1, 2,\cdots)$. Отсюда и из (31) следует утверждение леммы.

Следствие. В условиях леммы 6 биортогональный ряд каждой функции $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(z)$$

совпадает с биортогональным рядом некоторой функции $f(z)\in\in\lambda_p\,\{G^{(+)};\ \omega_k\}$.

Теорема 2. *Если кривая* Γ *является сложным контуром Ляпунова и последовательность комплексных чисел* $\{\omega_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *то для произвольной функции* $f(z)\in\in\lambda_p\,\{G^{(+)};\ \omega_k\}$ $(1<p<\infty)$

$$\lim_{m\to\infty}\left\| f(\zeta)-\sum_{k=1}^{m} c_k(f)\,m_k^{(1/q)}(\zeta)\right\|_p=0,$$

где $c_k(f)$ *определяются по формулам* (20).

Доказательство. Согласно следствиям леммы 7 и теореме Д, достаточно доказать слабую сходимость последовательности

$$S_m(\zeta) = \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z) \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

Но последнее утверждение установлено в лемме 6, так что теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f(z) \in \lambda_p \{G^{(+)}; \omega_k\}$ и выполняется условие теоремы 2, тогда существует функция $F(z) \in E_p(G^{(-)})$, $F(\infty) = 0$ такая, что почти всюду на кривой Γ имеет место равенство

$$f(\zeta) = B(\Phi(\zeta))\, F(\zeta),\ \zeta \in \Gamma. \tag{32}$$

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в области $G^{(-)}$ последовательность функций

$$T_m(z) = \frac{1}{B(\Phi(z))} S_m(z).$$

Согласно теореме 2

$$\lim_{m \to \infty} \left\| T_m(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{B(\Phi(\zeta))} \right\|_p = 0,$$

так что последовательность $\{T_m(z)\}_1^\infty$ сходится равномерно внутри области $G^{(-)}$ к некоторой функции $F(z) \in E_p(G^{(-)})$, $F(\infty) = 0$, и почти всюду на кривой Γ выполняется тождество

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{B(\Phi(\zeta))},\ \zeta \in \Gamma.$$

Отсюда и следует утверждение (32).

Таким образом, функции класса $\lambda_p \{G^{(+)}; \omega_k\}$ характеризуются тем свойством, что каждую из них можно продолжить в CK в смысле, отмеченном в следствии 1. Иначе говоря, можно дать следующее определение класса $\lambda_p \{G^{(+)}; \omega_k\}$, эквивалентное первоначальному.

Определение. Функция $f(z)$ определена и голоморфна в CK и принадлежит классу $\lambda_p \{G^{(+)}; \omega_k\}$ в том и только том случае, если выполняются следующие условия:

1. $f(z) \in E_p(G^{(+)})$, $z \in G^{(+)}$,
2. $f(z) = B(\Phi(z))\, F(z)$, $F(\infty) = 0$, $F(z) \in E_p(G^{(-)})$,
3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне кривой Γ почти всюду совпадают.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 любая функция $f(z) \in \lambda_p \{G^{(+)}; \omega_k\}$ разлагается в ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, m_k^{(1/q)}(z),\ z \in CK,$$

где $c_k(f)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ определяются единственным образом.

В заключение выражаю признательность моему научному руководителю, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.XII. 1973

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. $E_p(1<p<\infty)$ դասերի ենթատարածությունների մեջ ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսի մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք $G^{(+)}$ միակապ տիրույթ է սահմանափակված · բարդ Լյապունովի կոնտուրով: $G^{(-)}$-ով նշանակենք $\overline{G}^{(+)}$-ի լրացումը:

Հոդվածում ապացուցված է, որ $\{\omega_k\}_1^\infty$, $\omega_k \in G^{(-)}$ հաջորդականության վրա դրված որոշակի պայմանների դեպքում հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը

$$m_k^{(1/q)}(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k-z},\quad k=1,\ 2,\cdots,$$

որտեղ $\Phi(z)$ ֆունկցիան կոնֆորմ արտապատկերում է $G^{(-)}$-ն $|z|>1$-ի վրա, $E_p(1<p<\infty)$ դասերում իրենց գծային թաղանթի մեջ կազմում է բազիս:

H. M. HAIRAPETIAN. *On the basis of rational functions in subspaces of E_p classes* $(1<p<\infty)$ (summary)

Let $G^{(+)}$ be a simply connected domain bounded by a complicated Liapunov curve Denote by $G^{(-)}$ the complement of $\overline{G}^{(+)}$. The paper proves that under some conditions imposed on the $\{\omega_k\}_1^\infty$, $\omega_k \in G^{(-)}$ sequence the system of functions

$$m_k^{(1/q)}(z)=\frac{\Phi(\omega_k)[\Phi'(\omega_k)]^{-1/q}}{\omega_k-z},\quad k=1,\ 2,\cdots,$$

forms a basis in their linear shell in E_p $(1<p<\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
2. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат.наук 14, № 1, 1961, 9—31.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системе рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
4. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
5. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисского матем. ин-та АН Груз.ССР, XXIII, 1956, 3—158.
6. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, 1973.
7. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds.* On some interpolation problems for analitic functions, Amer. J. Math., vol. 83, № 3, 1961, 513—532.
8. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
9. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1958.
10. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в пространствах классов Харди H_p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Г. В. ВИРАБЯН

О ФАКТОРИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Как показано в работах М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [1], [2], при изучении вопросов двукратной полноты системы собственных и присоединенных элементов квадратичного операторного пучка важное значение имеет исследование ассоциированного с этим пучком квадратного операторного уравнения, или, что то же самое, так называемая задача о факторизации соответствующего пучка.

В работе [3] с помощью теории возмущений доказана возможность факторизации для некоторого класса несамосопряженных квадратичных операторных пучков.

В данной работе приводится некоторое усиление основных результатов работы [3]. Предлагаемая нами методика значительно проще и опирается на классический принцип неподвижной точки.

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C, \tag{1}$$

где B, C — линейные ограниченные операторы, отображающие гильбертово пространство H в себя, причем оператор B имеет ограниченный обратный B^{-1}.

Задача факторизации пучка (1), т. е. представления его в виде

$$L(\lambda) = (\lambda I - \check{Z})(\lambda I - Z), \tag{2}$$

сводится [1] к доказательству существования решения ассоциированного с ним квадратного операторного уравнения

$$Z^2 + B\cdot Z + C = O. \tag{3}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если операторы B^{-1} и $B^{-1}C$ ограничены и выполняется условие*

$$\alpha = 4\|B^{-1}\|\cdot\|B^{-1}C\| < 1, \tag{4}$$

то квадратное операторное уравнение (3) *имеет решение, удовлетворяющее неравенству*

$$\|Z\| < \sqrt{\|C\|}. \tag{5}$$

Если C — вполне непрерывный, то решение Z также является вполне непргрывным.

Доказательство. Применяя с обеих сторон оператор B^{-1}, запишем уравнение (3) в виде

$$Z = \Phi(Z), \tag{6}$$

где

$$\Phi(Z) = -B^{-1}Z^2 - B^{-1}C. \tag{7}$$

Через $R = R(H \to H)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, отображающих гильбертово пространство H в себя. Рассмотрим в этом пространстве замкнутый шар $\overline{S} = \{Z \in R: \|Z\| \leqslant 2\|B^{-1}C\|\}$ с центром в нуле и радиуса $2\|B^{-1}C\|$.

Покажем, что оператор Φ отображает замкнутый шар $\overline{S}$ в себя. В самом деле, пусть $Z \in \overline{S}$, тогда в силу условия (4) имеем

$$\|\Phi(Z)\| = \|B^{-1}Z^2 + B^{-1}C\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z^2\| + \|B^{-1}C\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z\|^2 + \|B^{-1}C\| \leqslant 4 \cdot \|B^{-1}\| \|B^{-1}C\|^2 + \|B^{-1}C\| = (\alpha+1)\|B^{-1}C\| < 2\|B^{-1}C\|, \tag{8}$$

что и означает $\Phi(Z) \in \overline{S}$.

Далее, для любых двух операторов $Z_1, Z_2 \in \overline{S}$ имеем

$$\|\Phi(Z_1) - \Phi(Z_2)\| = \|-B^{-1}Z_1^2 + B^{-1}Z_2^2\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1^2 - Z_2^2\| =$$
$$= \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1^2 - Z_1Z_2 + Z_1Z_2 - Z_2^2\| = \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1 \cdot (Z_1 - Z_2) +$$
$$+ (Z_1 - Z_2)Z_2\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot (\|Z_1\| + \|Z_2\|) \cdot \|Z_1 - Z_2\| \leqslant$$
$$\leqslant 4 \cdot \|B^{-1}C\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|Z_1 - Z_2\| = \alpha\|Z_1 - Z_2\| \ (\alpha < 1). \tag{9}$$

Таким образом, оператор Φ отображает замкнутый шар $\overline{S}$ банахова пространства R в себя и является оператором сжатия. Поэтому в силу принципа сжатых отображений [4] у оператора Φ имеется единственная неподвижная точка Z в шаре $\overline{S}$. Эта неподвижная точка и является решением операторного квадратного уравнения (3).

Поскольку $Z \in \overline{S}$, то

$$\|Z\|^2 \leqslant 4\|B^{-1}C\|^2 \leqslant 4 \cdot \|B^{-1}C\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|C\| < \|C\|.$$

Таким образом

$$\|Z\| < \sqrt{\|C\|}. \tag{10}$$

Пусть $Z_0 = O$ и $Z_n = \Phi(Z_{n-1})$, тогда, как это следует из принципа сжатых отображений

$$\|Z_n - Z\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Очевидно, что если оператор C вполне непрерывный, то каждая из итераций Z_n также является вполне непрерывным оператором. Но тогда и оператор Z, как равномерный предел вполне непрерывных операторов, будет вполне непрерывным.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Последовательность операторов $Z_n = \Phi(Z_{n-1})$, $Z_0 = O$ приближает решение Z квадратного операторного уравнения с точностью

$$\|Z_n - Z\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\cdot\|B^{-1} C\|. \tag{12}$$

Теорема 2. *Если при наличии условия* (4) *оператор* $C > O$, *то у квадратного операторного уравнения* (3) *имеется решение* Z, *удовлетворяющее условию нормируемости, т. е.*

$$Z^* Z < C. \tag{13}$$

Доказательство. Покажем, что именно то решение Z квадратного операторного уравнения (3), существование которого гарантируется теоремой 1, удовлетворяет условию нормируемости (13).

При доказательстве теоремы 1 одновременно было показано, что решение Z уравнения (3) представляет равномерный предел последовательности операторов

$$Z_0 = 0,\ Z_n = \Phi(Z_{n-1}),\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Для оператора Z_1 имеем

$$\|Z_1 x\| = \|B^{-1} Cx\| < 2\|B^{-1} Cx\| \text{ для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{14}$$

Предположим, что мы доказали, что

$$\|Z_{n-1} x\| < 2\|B^{-1} Cx\| \quad \text{для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{15}$$

Тогда, в силу $Z_{n-1} \in \overline{S}$ и (15)

$$\|Z_{n-1}^2 x\| \leqslant \|Z_{n-1}\|\cdot\|Z_{n-1} x\| < 4\|B^{-1} C\|\cdot\|B^{-1} Cx\| \text{ для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) и из условия (4) имеем

$$\|Z_n x\| = \|B^{-1} Z_{n-1}^2 x + B^{-1} Cx\| \leqslant \|B^{-1}\|\cdot\|Z_{n-1}^2 x\| + \|B^{-1} Cx\| <$$
$$< 4\|B^{-1}\|\cdot\|B^{-1} C\|\cdot\|B^{-1} Cx\| + \|B^{-1} Cx\| < 2\|B^{-1} Cx\|, \tag{17}$$

для $\forall x \neq 0 \in H$.

Таким образом, с помощью математической индукции мы доказали, что неравенства

$$\|Z_n x\| < 2\cdot\|B^{-1} Cx\| \quad \forall x \neq 0 \in H \tag{18}$$

выполняются при любом n.

Перейдя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах (18), получим

$$\|Z x\| < 2\|B^{-1} Cx\| \text{ для } \forall x \neq 0 \in H. \tag{19}$$

Отсюда уже следует условие нормируемости (13).

В самом деле, для произвольного отличного от нуля элемента x гильбертова пространства H имеем

$$(Z^* Zx, x) = (Zx, Zx) = \|Zx\|^2 < 4\|B^{-1} Cx\|^2 = 4(B^{-1} Cx, B^{-1} Cx) =$$
$$= 4(B^{*-1} B^{-1} Cx, Cx) = 4(C^{1/2} B^{*-1} B^{-1} C^{1/2} C^{1/2} x, C^{1/2} x) \leqslant$$
$$\leqslant 4\|C^{1/2} B^{*-1} B^{-1} C^{1/2}\|\cdot\|C^{1/2} x\|^2 \leqslant 4\cdot\|B^{*-1} B^{-1} C\|\cdot\|C^{1/2} x\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\|B^{*-1}\|\cdot\|B^{-1} C\|\cdot\|C^{1/2} x\|^2 = 4\|B^{-1}\|\cdot\|B^{-1} C\|\cdot(C^{1/2} x, C^{1/2} x) < (Cx, x).$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|C^{1/2} B^{*-1} B^{-1} C^{1/2}\| \leqslant \|B^{*-1} B^{-1} C\|,$$

которое выполняется в силу леммы 2 работы [3], поскольку оператор $B^{*-1} B^{-1}$ самосопряженный, а оператор $C^{1/2} > O$.

Теорема доказана.

Замечание 2. В работе [3] нормируемость оператора Z $(Z^* Z < C)$ доказана при дополнительном условии $B > O$, $C > O$, при которых пучок (1) становится сильно демпфируемым [1].

Замечание 3. Аналогично тому, как это сделано в работе М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [1], при условии $B = B^*$, $C > O$ можно доказать, что оператор Z симметризуется положительным оператором $G = C - Z^* \cdot Z$.

Поэтому на основании вышедоказанных теорем 1, 2 имеет место следующая

Теорема 3. *Если C — вполне непрерывный положительный оператор, $B = B^*$ и выполняется условие*

$$4\|B^{-1}\| \cdot \|B^{-1} C\| < 1,$$

то у квадратичного операторного пучка (1) *существует полная система собственных элементов, которая образует базис Рисса во всем гильбертовом пространстве H.*

Ереванский государственный университет

Поступила 17.XII.1973

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ. Քառակուսային օպերատորային փնջի ֆակտորիզացիայի մասին *(ամփոփում)*

Օպերատորային քառակուսային փնջերի մի դասի համար ապացուցված է ֆակտորիզացիայի հնարավորությունը և ստացված է թեորեմ սեփական վեկտորների լրիվության վերաբերյալ։

G. V. VIRABIAN. *On the factorization of a quadratic bunch of operators* (summary)

For a certain class of quadratic bunches of operators the possibility of factorization is proved. A theorem about the completeness of eigenvectors is proved as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, Изд. „Наука", 1965.
2. *H. K. Langer.* Math. and Mech. Vol. 17, № 7, 1968.
3. *И. В. Горюк.* О факторизации квадратичного операторного пучка, Вестник МГУ, „Математика", т. 5, 1970.
4. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа, 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Г. Г. КАЗАРЯН

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

0°. Основные определения и результаты

Пусть R_n и E_n—n-мерные евклидовы пространства действительных векторов (точек) $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ и $x=(x_1,\cdots,x_n)$, A_n — n-мерное евклидово пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где все $\alpha_i\,(i=1,\cdots,n)$— целые неотрицательные числа. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in A_n$, то положим

$$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\ |\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}=i^{-|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}\cdot$$

Обозначим еще

$$R_n^{(0)}=\left\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \prod_{i=1}^n\xi_i\neq0\right\}\cdot$$

Определение 0.1. (См., например, [1], определение 4.1.1). Полином $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$, где γ_α — вообще говоря комплексные числа, называется гипоэллиптическим, если для всех $\nu\in A_n$, $|\nu|\neq0$

$$|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)|\to0\ \text{при}\ |\xi|\to\infty. \tag{0.1}$$

Цель настоящей работы—найти условия гипоэллиптичности полинома $P(\xi)$ в терминах обобщенно-однородных частей характеристического многогранника этого полинома.

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего определения.

Определение 0.2. Характеристическим многогранником (х. м.) данного полинома $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ назовем минимальный выпуклый многогранник в A_n, содержащий все точки $\alpha\in A_n$, для которых $\gamma_\alpha\neq0$ в полиноме $P(\xi)$.

Определение 0.3. Многогранник $\mathfrak{M}$ назовем вполне правильным (в. п.), если а) $\mathfrak{M}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат и в) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней х.м. $\mathfrak{M}$ положительны.

Обозначим k-мерные $(0\leqslant k<n-1)$ грани данного х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$ через $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1,\cdots,M_k)$.

Определение 0.4. Грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1,\cdots,M_k,\ k=0,\cdots,n-1)$ х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)$ назовем P-регулярной, если полином $P^{i,k}(\xi)=$

$= \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha \neq 0$, при $\xi \in R_n^{(0)}$. Грани не являющиеся P-регулярными будем называть P-нерегулярными.

Определение 0.5. Полином $Q(\xi) = \sum\limits_{\alpha} q_\alpha \xi^\alpha$ называется обобщенно-однородным (λ-однородным) порядка d, если существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ такой, что $(\lambda, \alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i = d$ для всех α, для которых $q_\alpha \neq 0$. Если $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, то полином $Q(\xi)$ называется однородным порядка d.

Л. Хермандеру [1] принадлежит следующий результат:

Теорема ([1], теорема 4.1.8). Пусть $P(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\alpha)\le d} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Если $P^0(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha \xi^\alpha \neq 0$ на $R_n \setminus \{0\}$, то $P(\xi)$ гипоэллиптичен.

В случае, когда $P^0(\xi)$ — однородный полином и $P^0(\xi) \neq 0$ в $R_n \setminus \{0\}$, полином $P(\xi)$ называется эллиптическим. Л. Хермандером доказано, что эллиптические полиномы являются единственными гипоэллиптическими полиномами, однородная часть которых не имеет кратных вещественных характеристик.

Заметим в этой связи, что из результатов настоящей заметки следует, что полином с обобщенно-однородной, но не однородной главной частью может быть гипоэллиптическим, в то время как λ-однородная часть этого полинома имеет вещественные простые характеристики. Например, $P(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^5 + i\xi_1\xi_2^3$. Отметим, что пример такого рода можно найтк также в работе [3], где гипоэллиптичность полинома такого рода доказывается непосредственно.

Задача о нахождении условий гипоэллиптичности рассматривалась многими авторами. Отметим некоторые из них: прежде всего уже упомянутая книга Л. Хермандера, а также работы С. М. Никольского [2], Бруно Пини [3], Йорана Фриберга [4], Л. Каттабрига [5], Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [6] и других.

В работе [2] доказывается гипоэллиптичность полинома, посредством которого оцениваются все мономы, входящие в этот полином. В работе [6] даются условия, при которых через данный полином оцениваются входящие в него все мономы и, тем самым, получаются достаточные условия гипоэллиптичности. В работах [4], [5], также как в работах [2] и [6], получены достаточные условия гипоэллиптичности в „эллиптическом“ случае, когда все мономы, входящие в данный полином, оцениваются через него. Наиболее общий результат в этом направлении принадлежит Л. Р. Волевичу и С. Г. Гиндикину [6].

Другой достаточный признак гипоэллиптичности легко следует из одного результата В. П. Михайлова [7].

В работе [3] рассмотрены полиномы с обобщенно однородными главными частями, но и в том случае, когда рассматриваемый полином не является эллиптическим, причем условие гипоэллиптичности одного полинома сводится к условию гипоэллиптичности другого.

Таким образом, в отмеченных работах либо условия гипоэллиптичности одного полинома сводятся к гипоэллиптичности другого (см. [3]), либо рассматриваются полиномы, которые в некотором смысле эллиптичны—они или их части не обращаются в нуль в $R_n^{(0)}$. (См. [4], [5], [6]).

В настоящей работе даются условия, при которых неэллиптический полином $P(\xi)$ является гипоэллиптическим. В 0° приводятся основные результаты работы. В 1°—4° содержатся доказательства этих утверждений. В 4° приводятся также примеры полиномов, иллюстрирующих полученные результаты.

Нетрудно доказать (см., например, [4], [5], [6]), что для гипоэллиптичности полинома $P(\xi)$ необходимо, чтобы х.м. точек $\{\alpha\} \cup \{0\}$ был в.п., где $\{\alpha\}$ — множество мультииндексов, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$ в полиноме $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что х.м. $\mathfrak{M}$ рассматриваемого полинома является в.п.

Рассмотрим сначала полиномы с вещественными постоянными коэффициентами. Приведем еще несколько определений и обозначений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 0.6. $(n-1)$-мерную грань $\mathfrak{M}_i^{n-1}$ $(i=1,\cdots, M_{n-1})$ х.м. $\mathfrak{M}$ будем называть главной, если внешняя (относительно $\mathfrak{M}$) нормаль этой грани имеет хотя бы одну положительную координату; k-мерную грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i=1,\cdots, M_k,\ k=0,\ 1,\cdots,\ n-2)$ х.м. $\mathfrak{M}$ будем называть главной, если среди $(n-1)$-мерных граней, пересечением которых образуется грань $\mathfrak{M}_i^k$, существует хотя бы одна главная грань.

Пусть $\mathfrak{M}$ — в.п. х.м. полинома $P(\xi)$, $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Lambda_{i_0}^{k_0}$ множество единичных внешних нормалей грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$ ($\Lambda_{i_0}^{k_0}$ состоит из одного элемента при $k_0 = n-1$).

Пусть $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$, тогда полином $P(\xi)$ можно представить в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{N_\lambda} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{0.2}$$

где $d_0(\lambda) > d_1(\lambda) > \cdots > d_{N_\lambda} \geqslant d_{N_\lambda+1} = 0$,

$$P_{d_0(\lambda)}(\xi) \equiv P^{i_0, k_0}(\xi) \quad \forall \lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$\Sigma^{i_0, k_0} \equiv \Sigma_{d_0(\lambda)}^{i_0, k_0} = \{\eta;\ \eta \in R_n^{(0)},\ P^{i_0, k_0}(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma_{d_j(\lambda)}^{i_0, k_0} = \{\eta;\ \eta \in \Sigma_{d_{j-1}(\lambda)}^{i_0, k_0},\ P_{d_j(\lambda)}(\eta) = 0\},\ j = 1, \cdots, N_\lambda.$$

Положим еще для $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$, $\eta \in \Sigma_{d_j(\lambda)}^{i_0, k_0}$

$$\mathrm{A}_{n}^{i_0, k_0}(\eta) = \{\nu;\ \nu \in A_n,\ D^\nu P_{d_j(\lambda)}(\eta) \neq 0\},$$

$$\bigcup_{\eta \in \Sigma_{d_j(\lambda)}^{l_0, k_0}} \mathbf{A}_{d_j(\lambda)}^{l_0, k_0}(\eta) = \mathbf{A}_{d_j(\lambda)}^{l_0, k_0} \ (j = 1, \cdots, N_\lambda), \ \mathbf{A}_{d_0(\lambda)}^{l_0, k_0} \equiv \mathbf{A}^{l_0, k_0}.$$

Основными результатами настоящей заметки являются следующие:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — в.п. х.м. полинома $P(\xi)$, $\mathfrak{M}_{l_0}^{k_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{M}$.*

Если для $\lambda \in \Lambda_{l_0}^{k_0}$ $\Sigma_{d_{m_\lambda}}^{l_0, k_0} \neq \varnothing$, $\Sigma_{d_{m_\lambda+1}}^{l_0, k_0} = \varnothing$ для некоторого числа m_λ, $1 \leqslant m_\lambda < N_\lambda$, то для того чтобы полином $P(\xi)$ был гипоэллиптическим необходимо выполнение следующего условия:

$$\max_{\substack{\nu^j \in A_{d_j(\lambda)}^{l_0, k_0} \\ 1 < j < m_\lambda}} \{d_j(\lambda) - (\lambda, \nu^j)\} < d_{m_\lambda+1}.$$

Достаточные условия гипоэллиптичности дают нижеприведенные теоремы 2—4. В теоремах 2 и 3 коэффициенты γ_α предполагаются действительными.

Теорема 2. *Пусть все главные грани в.п. х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P(\xi)$, кроме одной главной $(n-1)$-мерной грани $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$, P-регулярны, а грань $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$ P-нерегулярна. Тогда полином $P(\xi)$ гипоэллиптичен при одновременном выполнении следующих условий:*

a)
$$\max_{\nu \in A^{l_0, n-1}} \{d_0 - (\lambda, \nu)\} < d_1,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ — внешняя нормаль грани $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$, $d_0 \equiv d_0(\lambda)$, $d_1 \equiv$ $\equiv d_1(\lambda)$.

в) *для каждой точки $\eta \in \Sigma^{l_0, n-1}$ существуют аналитические в $R_n^{(0)}$ функции $r(\eta, \xi)$ и $\mathbf{P}(\eta, \xi)$ такие, что в некоторой окрестности точки η полином $P^{l_0, n-1}(\xi)$ представляется в виде*

$$P^{l_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \mathbf{P}(\eta, \xi) > 0 \ (\leqslant 0), \tag{0.3}$$

где $k(\eta)$ — натуральное число $\mathbf{P}(\eta, \eta) \neq 0$, $\dfrac{\partial r(\eta, \eta)}{\partial \xi_i} \neq 0$, $(i = 1, \cdots, n)$,

c)
$$P_{d_1}(\eta) > 0 \quad (< 0) \quad \forall \eta \in \Sigma_{l_0}^{n-1}.$$

Замечание 0.1. Легко видеть, что при наличии представления (0.3) условие а) можно сформулировать так:

а) $d_0 - (\lambda, \nu) < d_1$ для всех $\nu \in A_n$, для которых $|\nu| > k(\eta)$. С другой стороны, очевидно из этого условия следует, что $d_0 - (\lambda, \nu) < d_1$ для всех $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$, где все ν_i $(i = 1, \cdots, n)$ действительные числа.

Замечание 0.2. Необходимость условия а) следует из теоремы 1. Существенность требований неотрицательности (положительности) полиномов $P^{l_0, n-1}(\xi)$ и $P_{d_1}(\eta)$ в условиях в) и с) будет показана на примерах (см. примеры 5 и 12). Необходимость представления (0.3) в случае $n = 2$ следует из леммы 2.1 (см. п°. 2).

В случае, когда для некоторой точки $\eta \in \sum^{l_0, n-1}$ также $P_{d_1}(\eta)=0$, т. е. когда $\sum_{d_1}^{l_0, n-1} \neq \varnothing$, достаточные условия дает

Теорема 3. *Пусть, как и в теореме 2,* $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$ — *единственная главная P-нерегулярная грань в.п. х.м.* $\mathfrak{M}$ *полинома* $P(\xi)$, *причем*

$$\sum_{d_1}^{l_0, n-1} \neq \varnothing, \quad \sum_{d_2}^{l_0, n-1} = \varnothing.$$

Тогда полином $P(\xi)$ *является гипоэллиптическим при одновременном выполнении следующих условий:*

а) $$\max_{\substack{\nu^j \in A_{d_j}^{l_0, n-1} \\ j=0,\,1}} \{d_j - (\lambda, \nu^j)\} < d_2;$$

в) *если* $\eta \in \sum^{l_0, n-1}$, *но* $\eta \overline{\in} \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$, *то выполняются условия* в) *и* с) *теоремы* 2, *а для всех точек* $\eta \in \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$ *существуют аналитические в* $R_n^{(0)}$ *функции* $r(\eta, \xi)$, $\mathrm{P}(\eta, \xi)$, $\tilde{r}(\eta, \xi)$, $\tilde{\mathrm{P}}(\eta, \xi)$ *такие, что в некоторой окрестности* η *полиномы* $P^{l_0, n-1}(\xi)$ *и* $P_{d_1}(\xi)$ *представляются в виде*

$$P^{l_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)}\, \mathrm{P}(\eta, \zeta) > 0 \ (\leqslant 0),$$

$$P_{d_1}(\xi) = [\tilde{r}(\eta, \xi)]^{\tilde{k}(\eta)} \cdot \tilde{\mathrm{P}}(\eta, \xi) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

где функции r, $\tilde{r}$, P, $\tilde{\mathrm{P}}$ *и числа* k, $\tilde{k}$ *удовлетворяют условиям, аналогичным условиям* в) *теоремы* 2;

с) *в точках* $\eta \in \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$ $P_{d_2}(\eta) > 0 \ (< 0)$.

Замечание 0.3. Легко видеть, что при наличии представления в), условие а) можно сформулировать так:

$$\text{а}')\ \max\, \{d_0 - (\lambda, \nu^0),\ d_1 - (\lambda, \nu^1)\} < d_2$$

для всех ν^0, $\nu^1 \in A_n$ таких, что $|\nu^0| > k(\eta)$, $|\nu^1| \geqslant \tilde{k}(\eta)$.

Замечание 0.4. Если $\sum_{d_2}^{l_0, n-1} \neq \varnothing$, то можно сформулировать теорему, дающую достаточные условия гипоэллиптичности, поставив соответственные условия на полиномы $P_{d_2}(\xi)$, аналогичные условию в) теоремы 2 и условия на $P_{d_3}(\xi)$, аналогичные условию с) теоремы 2 и т. п.

Замечание 0.5. Теоремы 2 и 3 можно было объединить в одну теорему. Но мы это не сделали по двум соображениям: во-первых, чтобы подчеркнуть значение теоремы 1 и, во-вторых, чтобы по возможности упростить доказательства.

Пусть теперь $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x)\, \xi^\alpha$ — полином с переменными (вообще говоря комплексными) коэффициентами, причем функции $\gamma_\alpha(x)$ определены в некоторой области $\Omega \subset E_n$.

Определение 0.7. Полином $P(x, \xi)$ будем называть гипоэллиптическим в точке $x^0 \in \Omega$, если гипоэллиптическим является полином $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами. Полином $P(x, \xi)$ будем называть гипоэллиптическим в Ω, если $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен в каждой точке $x \in \Omega$.

Пусть $\mathfrak{M}(x)$ — х.м. полинома $P(x, \xi)$, имеющий в точке $x^0 \in \Omega$ $P(x^0, \xi)$-нерегулярную грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$.

Положим (λ — внешняя нормаль грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$)

$$K(x, \xi) = \overline{P^{i_0, n-1}(x, \xi)} \cdot \sigma^{i_0, n-1}(x, \xi) + P^{i_0, n-1}(x, \xi) \cdot \overline{\sigma^{i_0, n-1}(x, \xi)},$$

где

$$\sigma^{i_0, n-1}(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha, \; 2d_1 - d_0 \leqslant (\lambda, \alpha) < d_0,$$

$\overline{R}$ — комплексно сопряженное R.

Следующее предложение дает достаточный признак гипоэллиптичности полинома $|P(x, \xi)|^2$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}(x^0)$ — в.п. х.м. полинома $P(x^0, \xi)$, $x^0 \in \Omega$, имеющий единственную главную $(n-1)$-мерную P-нерегулярную грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$. Тогда полином $|P(x, \xi)|^2$ является гипоэллиптическим в точке $x^0 \in \Omega$ при одновременном выполнении следующих условий:*

a) $$\max_{\nu \in \Lambda^{i_0, n-1}} \{d_0 - (\lambda, \nu)\} < d_1,$$

в) *в некоторой окрестности каждой точки* $\eta \in \Sigma^{i_0, n-1}$ $K(x^0, \eta) > 0$ *и полином* $P(x^0, \xi)$ *представляется в виде* (0.3),

c) $P_{d_1}(x^0, \eta) \neq 0$ *для всех* $\eta \in \Sigma^{i_0, n-1}$.

Замечание 0.6. Признак гипоэллиптичности полинома $P(x, \xi)$ в Ω можно получить, если ставить условия a) — c) теоремы 4 для всех точек $x \in \Omega$. Другой признак гипоэллиптичности в Ω можно получить, если исходить из теоремы 4.1.6 работы [1], из теоремы 4 настоящей работы и из теоремы 3 работы [8]. Из отмеченных результатов следует, что если полином $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω (см. [1], определение 7.1.1) и гипоэллиптичен в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, то $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен в Ω. В теореме 3.1 работы [8] получены условия постоянства силы в Ω полинома $P(x, \xi)$.

1°. Доказательство теоремы 1

В. П. Михайловым в [7] доказана

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — х.м. полинома* $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. *Тогда полином* $P^{i, k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ $(i = 1, \cdots, M_k, \; k = 0, \cdots, n-1)$ *является λ-однородным для любого* $\lambda \in \Lambda_i^k$.

Представим полином $P(\xi)$ в виде (см. (0.2), $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{n_0}$ произвольно)

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{N_\lambda}P_{d_j(\lambda)}(\xi)=\sum_{j=0}^{m_\lambda}P_{d_j(\lambda)}(\xi)+\sum_{j=m_\lambda+1}^{N_\lambda}P_{d_j(\lambda)}(\xi),\tag{1.1}$$

и положим в (1.1) $\xi_i=t^{\lambda_i}\eta_i\ (i=1,\cdots,n)$ при некоторой точке $\eta\in\sum_{d_{m_\lambda}}^{l_0,k_0}$ и некотором векторе $\lambda\in\Lambda_{l_0}^{k_0}$. Ввиду λ-однородности полиномов $P_{d_j(\lambda)}(\xi)$ (см. лемму 1.1 и представление (0.2)) получаем из (1.1)

$$P(\xi)=\sum_{j=0}^{m_\lambda}t^{d_j(\lambda)}P_{d_j(\lambda)}(\eta)+\sum_{j=m_\lambda+1}^{N_\lambda}t^{d_j(\lambda)}P_{d_j(\lambda)}(\eta).\tag{1.2}$$

Если теперь $\sum_{d_{m_\lambda}}^{l_0,k_0}\neq\varnothing\ \sum_{d_{m_\lambda}+1}^{l_0,k_0}=\varnothing$, то из (1.2) следует, что при $t\to\infty$

$$\sum_{j=m_\lambda+2}^{N_\lambda}t^{d_j(\lambda)}\cdot P_{d_j(\lambda)}(\eta)=o\left(t^{d_{m_\lambda+1}}\right).$$

Поэтому, используя еще тот факт, что $\eta\in\sum_{d_{m_\lambda}}^{l_0,k_0}$, получаем из (1.2) при достаточно больших t

$$|P(\xi)|\leqslant c\,t^{d_{m_\lambda}+1}.\tag{1.3}$$

Пусть условие теоремы 1 не выполняется, т. е. для некоторых

$$\bar\lambda\in\Lambda_{l_0}^{k_0},\quad \bar\nu\in\mathbf{A}_{d_{j_0}}^{l_0,k_0}(\bar\lambda),\ 1\leqslant j_0\leqslant m_{\bar\lambda},$$

$$d_{j_0}(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu)\geqslant d_{m_{\bar\lambda}+1}(\bar\lambda).\tag{1.4}$$

Представим полином $D^{\bar\nu}P(\xi)$ в виде (0.2) и положим $\xi=t^{\bar\lambda}\eta$, где η определяется как и выше, тогда

$$D^{\bar\nu}P(\xi)=\sum_{j=0}^{N_\lambda}D^{\bar\nu}P_{d_j(\bar\lambda)}(\xi)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m_{\bar\lambda}}t^{d_j(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu)}\cdot D^{\bar\nu}P_{d_j(\lambda)}(\eta)+\sum_{j=m_{\bar\lambda}+1}^{N_{\bar\lambda}}t^{d_j(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu)}\cdot D^{\bar\nu}P_{d_j(\lambda)}(\eta).\tag{1.5}$$

По определению $\mathbf{A}_{d_{j_0}(\bar\lambda)}^{l_0,k_0}$, $D^{\bar\nu}P_{d_{j_0}(\lambda)}(\eta)\neq0$, поэтому при достаточно больших t получаем из (1.5)

$$|D^{\bar\nu}P(\xi)|\geqslant Ct^a,\ \text{где}\quad a>d_{j_0}(\bar\lambda)-(\bar\lambda,\bar\nu).\tag{1.6}$$

(1.3) при $\lambda=\bar\lambda$ и (1.6) вместе показывают, что $|D^{\bar\nu}P(\xi)|/|P(\xi)|\not\to0$ при $t\to\infty$ (следовательно при $\xi\to\infty$).

Тем самым полином $P(\xi)$ не является гипоэллиптическим.

2°. Доказательство теоремы 2

Докажем одно простое предложение, из которого видно, что при $n=2$ полином $P^{l_0,n-1}(\xi)$ всегда представляется в виде (0.3).

Отметим, что подобное предложение в частном случае можно найти в [3].

Лемма 2.1. *Пусть $n=2$, $Q(\xi)$ — λ-однородный полином порядка d, т. е. $Q(\xi)=\sum\limits_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha \xi^\alpha$. Тогда при $\xi\neq 0$ полином $Q(\xi)$ представляется в виде*

$$Q(\xi)=[q_1(\xi)]^{k_1}\cdots[q_r(\xi)]^{k_r}\cdot Q_0(\xi), \tag{2.1}$$

где а) $Q_0(\xi)$, $q_i(\xi)$ $(i=1,\cdots,r)$ — *аналитические функции переменных* $(\xi_1,\xi_2)\in R_2^{(0)}$, k_i $(i=1,\cdots,r)$ — *натуральные числа,* в) *если* $q_i(r)=0$ *в некоторой точке* $\eta\in R_2^{(0)}$, *то* $q_j(\eta)\neq 0$ *при* $j\neq i$ *и*

$$\prod_{k=1}^{r}\frac{\partial q_i(\eta)}{\partial\xi_k}\neq 0\ (i=1,\cdots,r).$$

Доказательство. Пусть $\xi_2\neq 0$, тогда

$$Q(\xi_1,\xi_2)=\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2}=\xi_2^{d/\lambda_2}\cdot\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2-d/\lambda_2}=$$

$$=\xi_2^{d/\lambda_2}\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\alpha_1}=\xi_2^{d/\lambda_2}\cdot\sum_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\tau^{\alpha_1}, \tag{2.2}$$

где мы обозначили $\xi_1/\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}=\tau$.

Положим $\widetilde{Q}(\tau)=\sum\limits_{(\lambda,\alpha)=d} q_\alpha\tau^{\alpha_1}$ и пусть $\tau_1,\cdots,\tau_r$ — действительные корни полинома $\widetilde{Q}(\tau)$ кратности $k_1,\cdots,k_r$. Тогда, обозначив $m=\max\limits_{q_\alpha\neq 0}\alpha_1$, получим

$$\widetilde{Q}(\tau)=\widetilde{Q}_0(\tau)\cdot\prod_{l=1}^{r}(\tau-\tau_l)^{k_l}, \tag{2.3}$$

причем $\sum\limits_{l=1}^{r}k_l+\operatorname{ord}\widetilde{Q}_0(\tau)=m$. Вернувшись к старым обозначениям, имеем из (2.2)

$$Q(\xi)=\xi_2^{d/\lambda_2}\cdot\widetilde{Q}(\tau)=\xi_2^{d/\lambda_2}\prod_{l=1}^{r}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}}-\tau_l\right)^{k_l}\cdot\widetilde{Q}_0\left(\frac{\xi_1}{\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}}\right)=$$

$$=\xi_2^{d/\lambda_2-m\lambda_1/\lambda_2}\cdot\widetilde{Q}_0(\xi_1,\xi_2)\cdot\prod_{l=1}^{r}(\xi_1-\tau_l\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{k_l}=Q_0(\xi)\cdot\prod_{l=1}^{r}[q_l(\xi)]^{k_l}.$$

Очевидно $q_l(\xi)=\xi_1-\tau_l\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}$ $(i=1,\cdots,r)$, $Q_0(\xi)=\xi_2^{\frac{d-m\lambda_1}{\lambda_2}}\cdot\widetilde{Q}_0(\xi_1,\xi_2)$ удовлетворяют условиям а) и в) леммы. Лемма доказана.

Заметим, что если $\lambda_1=\lambda_2$, т. е. полином $Q(\xi)$ — однородный, то $q_i(\xi)$ $(i=1,\cdots,r)$ и $Q_0(\xi)$ являются полиномами.

Доказательство теоремы 2. Мы должны доказать, что для всех $\nu \in A_n$, $|\nu| \neq 0$ $|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)| \to 0$ при $\xi \to \infty$.

Пусть, наоборот: существует вектор $\nu \in A_n$, $|\nu| \neq 0$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что $\xi^s \to \infty$, но

$$|P(\xi^s)|/|D^\nu P(\xi^s)| \leqslant C. \tag{2.4}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_i^s > 0$ $(i = 1, \cdots, n,\ s = 1, 2, \cdots)$. Положим

$$\lambda_i^s = \frac{\ln \xi_i^s}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\ln \xi_k^s)^2}} \ (i=1, \cdots, n),\ \rho_s = \exp \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\ln \xi_k^s)^2},$$

тогда $\xi^s = \rho_s^{\lambda^s}$ $(\xi_i^s = \rho_s^{\lambda_i^s}\ i = 1, \cdots, n)$.

Так как для всех $s = 1, 2, \cdots$ векторы λ^s находятся на единичной сфере, то у последовательности $\{\lambda^s\}$ есть предельная точка λ^∞ и, за счет, быть может, взятия подпоследовательности, можно считать, что $\lambda^s \to \lambda^\infty$.

Из выпуклости х.м. $\mathfrak{M}$ следует, что λ^∞ является внешней нормалью к одной и только одной грани х.м. $\mathfrak{M}$.

Возьмем в A_n какой-нибудь базис $(e^{1,1}, e^{1,2}, \cdots, e^{1,n})$, $e^{1,1} = \lambda^\infty$. Тогда $\lambda^s = \sum_{l=1}^{n} \varkappa_{1,l}^s e^{1,l}$, причем, так как $\lambda^s \to \lambda^\infty = e^{1,1}$, то $\varkappa_{1,1}^s \to 1$, а при $i = 2, 3, \cdots, n$ $\varkappa_{1,i}^s = o(\varkappa_{1,1}^s) = o(1)$. За счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что при $s \to \infty$

$$\frac{\sum_{l=2}^{n} \varkappa_{1,l}^s e^{1,l}}{\left|\sum_{l=2}^{n} \varkappa_{1,l}^s e^{1,l}\right|} \to e^{2,2}.$$

Перейдем в подпространстве, натянутом на $(e^{1,2}, \cdots, e^{1,n})$, к новому базису $(e^{2,2}, \cdots, e^{2,n})$, тогда $\lambda^s = \varkappa_{1,1}^s e^{1,1} + \sum_{l=2}^{n} \varkappa_{2,l}^s e^{2,l}$, причем очевидно $\varkappa_{2,2}^s = o(\varkappa_{1,1}^s)$, $\varkappa_{2,l}^s = o(\varkappa_{2,2}^s)$, $i=3, \cdots, n$.

Поступая аналогично в подпространстве с базисом $(e^{2,3}, \cdots, e^{2,n})$, и т. д. получим (после переобозначений) $\lambda^s = \sum_{l=1}^{n} \varkappa_l^s e^l$, $\varkappa_1^s \to 1$, $\varkappa_{l+1}^s = o(\varkappa_l^s)$, $i = 1, \cdots, n-1$. При этом существует номер s_0 такой, что для всех $s > s_0$ $\varkappa_i^s > 0$ $(i = 1, \cdots, m)$, $\varkappa_i^s = 0$ $(i = m+1, \cdots, n)$, $m \leqslant n$.

Рассмотрим грани х.м. $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M}_{j_1}^{l_1}, \mathfrak{M}_{j_2}^{l_2}, \cdots, \mathfrak{M}_{j_m}^{l_m}$, удовлетворяющие тем условиям, что $\mathfrak{M}_{j_1}^{l_1}$ лежит в опорной гиперплоскости к $\mathfrak{M}$ с внешней нормалью e^1 (т. е. является гранью х.м. $\mathfrak{M}$, $e^1 \in \Lambda^{l_1}_{j_1}$), а каждая грань $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ $(i=2,\cdots,m)$ лежит в опорной гиперплоскости к (рассматриваемой изолированно) предыдущей с нормалью e^i. При этом, если существуют несколько подграней грани $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ с нормалью e^{i+1}, то в качестве $\mathfrak{M}^{l_{i+1}}_{j_{i+1}}$ условимся брать ту, для точек α которой (e^{i+1}, α) больше.

Из построения граней $\mathfrak{M}^{l_1}_{j_1}, \cdots, \mathfrak{M}^{l_m}_{j_m}$ видно, что для размерностей этих граней выполнено соотношение $k_1 > k_2 > \cdots \geqslant k_m$.

Пусть, как и выше, $P^{j_i, l_i}(\xi)$ обозначает часть полинома $P(\xi)$, мультииндексы которой сосредоточены на $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ и α— произвольная точка, принадлежащая всем $\mathfrak{M}^{l_i}_{j_i}$ $(i=1,\cdots,m)$, т. е. $\alpha \in \mathfrak{M}^{l_m}_{j_m}$. Изучим при $\rho_s \to \infty$, $\xi^s = \rho_s^{\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i^s e^i}$ поведение полиномов $P(\xi^s)$ и $D^\nu P(\xi^s)$. Ради простоты записи опустим индекс s в обозначениях. За счет возможного выбора подпоследовательности можно считать, что при некотором r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ $\rho^{\varkappa_r} \to \infty$, $\rho^{\varkappa_{r+1}} \to b \geqslant 1$ (при $r=n$ положим по определению $\varkappa_{n+1}=0$).

Тогда из e^i-однородности полиномов $P^{j_i, l_i}(\xi)$ (лемма 1.1), из выпуклости х.м. $\mathfrak{M}$ и его граней, получаем при некоторых $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$, $1 \leqslant r \leqslant m$ (e^{n+1}— какой-нибудь единичный вектор, $\varkappa_{n+1}=0$)

$$
\begin{aligned}
P(\xi) &= \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1)}\left[P^{j_1, l_1}\left(\rho^{\sum_{i=2}^{n} \varkappa_i e^i}\right) + o\left(\rho^{-\sigma_1 \varkappa_1}\right)\right] = \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \\
&= \rho^{\left(\alpha, \sum_{i=1}^{r-1} \varkappa_i e^i\right)}\left[P^{j_{r-1}, l_{r-1}}\left(\rho^{\sum_{i=r}^{n} \varkappa_i e^i}\right) + o\left(\rho^{-l_{r-1} \varkappa_{r-1}}\right)\right] = \\
&= \rho^{\left(\alpha, \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i e^i\right)}\left[P^{j_r, l_r}\left(\rho^{\sum_{i=r+1}^{n+1} \varkappa_i e^i}\right) + o\left(\rho^{-\sigma_r \varkappa_r}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Так как $\rho^{\varkappa_{r+1}} \to b$, то $\rho^{\sum_{i=r+1}^{n+1} \varkappa_i e^i} \to b^{e^{r+1}} \equiv \eta$. Очевидно, при всех $i=1,\cdots,n$, $0 < \eta_i < \infty$ (в соответствии с определением, η_i —конечные степени положительного числа).

Рассмотрим два возможных случая а) $(e^1, \alpha) > 0$, в) $(e^1, \alpha)=0$. Случай $(e^1, \alpha) < 0$ исключается, что следует из того, что если $\vec{n}$ — внешняя нормаль к опорной гиперплоскости х.м., то уравнение этой гиперплоскости можно записать в виде $(\vec{n}, \alpha)=d$, где $d \geqslant 0$ — расстояние от начала координат до данной гиперплоскости, α—текущая точка.

Случай а). Очевидно, в этом случае e^1— внешняя нормаль главной грани. Поэтому для всех точек β, для которых $\gamma_\beta \neq 0$ в полиноме

$D^{\nu} P(\xi) = \sum_{\beta} \gamma_{\beta}^{\nu} \xi^{\beta}$ $(e^1, \beta) < (e^1, \alpha)$, где $\alpha \in \mathfrak{M}_{j_1}^{l_1}$. Пусть сначала выполнено условие $a \cdot 1)$ $P^{j_r, l_r}(\eta) \neq 0$. Так как $(e^1, \alpha) > 0$, $\varkappa_1 \to 1$, $\varkappa_{i+1} = o(\varkappa_i)$, $i = 1, \cdots, n$, то при всех достаточно больших ρ

$$\left(\alpha, \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i e^i \right) > 0.$$

Тогда при $\rho \to \infty$ получается из (2.5)

$$P(\xi) = \rho^{(\alpha, e^1)} P^{j_r, l_r}(\eta)(1 + o(1)). \tag{2.6}$$

Для полинома $D^{\nu} P(\xi)$ аналогично получаем при $\rho \to \infty$

$$|D^{\nu} P(\xi)| \leq c\rho^a, \text{ где } a < (e^1, \alpha). \tag{2.7}$$

Представления (2.6), (2.7) вместе противоречат (2.4).

a. 2) Пусть теперь $P_d^{j_r, l_r}(\eta) = 0$. Это значит, что грань $\mathfrak{M}_{j_r}^{l_r}$ совпадает с P-нерегулярной гранью $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$, $r = m = 1$, $l_r = n - 1$, $e^1 = \lambda$ является внешней нормалью грани $\mathfrak{M}_{l_0}^{n-1}$, $\eta \in \sum^{l_0, n-1}$. Тогда по условию (0.3)

$$P^{l_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot \mathrm{P}(\eta, \xi). \tag{2.8}$$

Представим в этом случае $P(\xi)$ и $D^{\nu} P(\xi)$ соответственно в виде $(d_k(\lambda) \equiv d_k)$, используя (2.8)

$$P(\xi) = P^{l_0, n-1}(\xi) + P_{d_1}(\xi) + q(\xi) =$$

$$= [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot \mathrm{P}(\eta, \xi) + P_{d_1}(\xi) + q(\xi), \tag{2.9}$$

$$D^{\nu} P(\xi) = D^{\nu} P^{l_0, n-1}(\xi) + D^{\nu} P^{d_1}(\xi) + D^{\nu} q(\xi). \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.9), (2.10) значение $\xi = \rho^{\sum_{l=1}^{n} \varkappa_l e^l}$, используя λ-однородность полиномов $P^{l_0, n-1}(\xi)$, $D^{\nu} P^{l_0, n-1}(\xi)$, $P_{\lambda_1}(\xi)$, $D^{\nu} P_{\lambda_1}(\xi)$, получаем (обозначим $\sum_{j=2}^{n} \varkappa_j e^j = h$)

$$P(\xi) = \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1)} [r(\eta, \rho^h)]^{k(\eta)} \mathrm{P}(\eta, \rho^h) +$$

$$+ \rho^{(\beta, \varkappa_1 e^1)} P_{d_1}(\rho^h) + q(\xi), \tag{2.11}$$

$$D^{\nu} P(\xi) = \rho^{(\alpha, \varkappa_1 e^1) - (\nu, \varkappa_1 e^1)} \cdot D^{\nu} [[r(\eta, \rho^h)]^{k(\eta)} \cdot \mathrm{P}(\eta, \rho^h)] +$$

$$+ \rho^{(\beta, \varkappa_1 e^1) - (\nu, \varkappa_1 e^1)} D^{\nu} P_{d_1}(\rho^h) + D^{\nu} q(\xi). \tag{2.12}$$

Рассмотрим сначала случай $|\nu| < k(\eta)$. В этом случае

$$D^{\nu} P^{l_0, n-1}(\xi) = D^{\nu}[[r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot \mathrm{P}(\eta, \xi)] = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot D^{\nu} \mathrm{P}(\eta, \xi) +$$

$$+ \cdots + D^{\nu}[r(\eta, \xi)]\, k(\eta) \cdot \mathrm{P}(\eta, \xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot D^{\nu} \mathrm{P}(\eta, \xi) +$$

$$+ \cdots + [r(\eta, \xi)]^{k - |\nu|} \cdot \tilde{\mathrm{P}}(\eta, \xi) = [r(\eta, \xi)]^{k - |\nu|} \cdot R(\eta, \xi). \tag{2.13}$$

Пусть при $\rho \to \infty$, $\rho^h \to \eta \in \sum^{l_0, n-1}$.

За счет взятия подпоследовательности можно считать, что при $\rho \to \infty$ возможен один из следующих трех случаев:

I. Существуют числа $\delta_1 \geqslant \delta_2 > 0$ и $M_2 > M_1 > 0$ такие, что для всех достаточно больших ρ

$$M_1 \rho^{-\delta_1} \leqslant |r(\eta, \rho^h)| \leqslant M_2 \rho^{-\delta_2},$$

при этом можно считать, что для любого наперед заданного числа $\sigma > 0$ $\delta_1 - \delta_2 < \sigma$;

II. для любого $\Delta > 0$ $|r(\eta, \rho^h)| \geqslant M_\Delta \cdot \rho^{-\Delta}$, $M_\Delta > 0$ или, что то же самое, $\rho^{-\Delta} = o(|r(\eta, \rho^h)|)$;

III. для любого $\Delta > 0$ $|r(\eta, \rho^h)| = o(\rho^{-\Delta})$.

Рассмотрим отдельно эти случаи. Заметим, что при $\rho \to \infty$

$$(\alpha, x_1 e^1) \to (\alpha, e^1) = d_0, \; (\beta, x_1 e^1) \to (\beta, e^1) = d_1.$$

Случай I в свою очередь разобьем на три подслучая:

I. 1 $\qquad d_0 - \delta_1 k(\eta) \leqslant d_0 - \delta_2 k(\eta) < d_1,$

I. 2 $\qquad d_0 - \delta_2 k(\eta) \geqslant d_0 - \delta_1 k(\eta) > d_1,$

I. 3 $\qquad d_0 - \delta_1 k(\eta) \leqslant d_1 \leqslant d_0 - \delta_2 k(\eta).$

В случае I.1 из (2.8) следует оценка при достаточно больших ρ

$$|P^{l_0, n-1}(\xi)| \geqslant M_1^{k(\eta)} \cdot \rho^{d_0 - \delta_1 k(\eta)} \cdot |\mathbf{P}(\eta, \eta)| (1 + o(1)) =$$

$$= C_1 \rho^{d_0 - \delta_1 k(\eta)} \cdot (1 + o(1)). \tag{2.14}$$

Соответственно для $P_{d_1}(\xi)$

$$|P_{d_1}(\xi)| \geqslant C_2 \rho_{d_1}. \tag{2.15}$$

Так как по условиям в) и с) теоремы $P^{l_0, n-1}(\xi) \geqslant 0$, $P_{d_1}(\xi) > 0$ в некоторой окрестности η, то для достаточно больших ρ $P^{l_0, n-1}(\rho^h) \geqslant 0$, $P_{d_1}(\rho^h) > 0$. С другой стороны, из геометрических соображений очевидно, что при $\rho \to \infty$, $q(\xi) = o(\rho^{d_1})$, $D^\nu q(\xi) = o(\rho^{d_1 - (\lambda, \nu)})$. Тогда используя еще условие 1.1, получаем из (2.14), (2.15) и (2.11)

$$|P(\xi)| \geqslant C_3 \rho^{d_1}. \tag{2.16}$$

Для $D^\nu P(\xi)$ аналогично получаем

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| \leqslant M_2^{k(\eta) - |\nu|} \cdot \rho^{d_0 - (\lambda, \nu) - \delta_2 (k(\eta) - |\nu|)} \cdot (1 + o(1)) =$$

$$= o(\rho^{d_1 - \delta_2 (k(\eta) - |\nu|)}) = o(\rho^{d_1}). \tag{2.17}$$

Предпоследнее соотношение мы установили благодаря условию а) теоремы.

Соответственно для $D^\nu P_{d_1}(\xi)$, так как $(e^1, \alpha) > 0$, то

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.18}$$

Поэтому из (2.17) и (2.18) получаем

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.19}$$

(2.16) вместе с (2.19) противоречат (2.4).

Случай I.2. В этом случае как и выше имеем

$$|P^{l_0, n-1}(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_0-\delta_1 k(\eta)} (1+o(1)), \tag{2.20}$$

$$|P_{d_1}(\xi)| \leqslant C_2 \rho^{d_1} = o(\rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)}). \tag{2.21}$$

Поэтому

$$|P(\xi)| > C_3 \rho^{d_0-\delta_1 k(\eta)}. \tag{2.22}$$

Для $D^\nu P(\xi)$ аналогично получается

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| \leqslant C \rho^{d_0-(\lambda, \nu)-\delta_2(k(\eta)-|\nu|)}. \tag{2.23}$$

Покажем, что

$$d_0-(\lambda, \nu)-\delta_2(k(\eta)-|\nu|) < d_0-\delta_1 k(\eta), \tag{2.24}$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$(\delta_1-\delta_2)\cdot k(\eta)-(\lambda, \nu)+\delta_2|\nu| < 0. \tag{2.25}$$

Из условия 1.2 выводим

$$(\delta_1-\delta_2)\cdot k(\eta)-(\lambda, \nu)+\delta_2|\nu| < (\delta_1-\delta_2) k(\eta)-(\lambda, \nu)+\frac{d_0-d_1}{k(\eta)}\cdot|\nu| =$$

$$=(\delta_1-\delta_2) k(\eta)+\frac{|\nu|}{k(\eta)}(d_0-d_1-(\lambda, \nu^*)), \tag{2.26}$$

где

$$\nu^* = \left(\nu_1 \frac{k(\eta)}{|\nu|}, \ldots, \nu_n \frac{k(\eta)}{|\nu|}\right), \quad |\nu^*| = k(\eta).$$

Из условия а) следует (см. замечание 0.1), что $d_0-d_1-(\lambda, \nu^*)<0$. С другой стороны, за счет взятия подпоследовательности можно считать, что

$$\delta_1-\delta_2 < \sigma = \frac{|\nu|}{k(\eta)^2}|d_0-d_1-(\lambda, \nu^*)|.$$

Из этих условий и из (2.26) получаем (2.25) и, тем самым, (2.24).

Из (2.24) и (2.23) следует, что

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)}). \tag{2.27}$$

Но очевидно

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}) = o(\rho^{d_0-\delta_1 k(\eta)}). \tag{2.28}$$

Окончательно из (2.27), (2.28) получаем

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)}). \tag{2.29}$$

(2.22) и (2.29) вместе противоречат (2.4).

Случай I.3. $d_0-\delta_1 k(\eta) \leqslant d_1 \leqslant d_0-\delta_2 k(\eta)$. В этом случае, как и выше, получаем

$$|P^{l_0, n-1}(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_0-\delta_1 \cdot k(\eta)},$$

$$|P_{d_1}(\xi)| \geqslant C_2 \rho^{d_1}.$$

Поэтому из условия 1 и из условий в) и с) теоремы следует, что

$$|P(\xi)| > C_3\rho^{d_1}. \tag{2.30}$$

Для $D^\nu P(\xi)$ соответственно имеем

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| \leqslant C\rho^{d_0-(\lambda, \nu)-(k(\eta)-|\nu|)\delta_2} = o(\rho^{d_1}).$$

Последнее соотношение мы получили благодаря условию а) теоремы. Но очевидно

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}).$$

Поэтому

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.31}$$

(2.30) и (2.31) вместе противоречат (2.4).

Случай II. Взяв в этом случае

$$\Delta > \frac{d_0-d_1}{k(\eta)-|\nu|} > \frac{d_0-d_1}{k(\eta)},$$

получаем при $\rho\to\infty$

$$|P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}).$$

Поэтому при $\rho\to\infty$

$$|P(\xi)| > \rho^{d_1} P_{d_1}(\eta)(1+o(1)). \tag{2.32}$$

Аналогично для $D^\nu P(\xi)$ имеем

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}), \tag{2.33}$$

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.34}$$

Из (2.33) и (2.34) следует

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1}). \tag{2.35}$$

(2.32) и (2.35) вместе противоречат (2.4), так как $P_{d_1}(\eta) > 0$.

Случай III. Взяв в этом случае $\Delta < \dfrac{d_0-d_1}{k(\eta)}$, получаем при достаточно больших ρ

$$|P(\xi)| \geqslant C_1\rho^{d_0-\Delta\cdot k(\eta)},\quad d_0-\Delta\cdot k(\eta) > d_1, \tag{2.36}$$

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| > C_2\rho^{d_0-(\lambda, \nu)}, \tag{2.37}$$

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| \leqslant C_3\rho^{d_1-(\lambda, \nu)} = o(\rho^{d_1}). \tag{2.38}$$

Выберем Δ еще и так, чтобы $\Delta\cdot k(\eta) < (\lambda, \nu)$. Тогда из (2.37) следует при $\rho\to\infty$

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| = o(\rho^{d_0-\Delta\cdot k(\eta)}). \tag{2.39}$$

Из (2.39) и (2.38) вытекает, что при $\rho\to\infty$

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_0-\Delta\cdot k(\eta)}). \tag{2.40}$$

(2.36) вместе с (2.40) противоречат (2.4).

В случае а.2), когда $|\nu| > k$ (τ_i), по условию а) теоремы $d_0 - (\lambda, \nu) < d_1$, и этот случай рассматривается аналогично.

Случай в) $(\lambda, \alpha) = 0$. В рассматриваемом случае грань $\mathfrak{M}^{l}_{j_1}$, внешней нормалью к которой является e^1, проходит через начало координат A_n, т. е. она не является главной гранью х.м. $\mathfrak{M}$. Следовательно $e^1_i \leqslant 0$ $(i=1, \cdots, n)$, Причем, если эта неглавная грань (с внешней нормалью e^1) имеет размерность k, то среди чисел e^1_i $(i = 1, \cdots, n)$ k штук равны нулю, а остальные отрицательны.

Не умаляя общности, можно считать, что $e^1_1 = \cdots = e^1_k = 0$, $e^1_{k+1} < 0, \cdots, e^1_n < 0$. Так как $e^1_j < 0$ $(j = k+1, \cdots, n)$ и

$$e^1_j = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\ln \xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}},$$

то переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что для достаточно больших $|\xi|$, $\xi_j \to \overline{\xi}_j$, $0 \leqslant \overline{\xi}_j < 1$ $(j = k+1, \cdots, n)$. Причем $\overline{\xi}_j = 0$ хотя бы для одного j, $k+1 \leqslant j \leqslant n$. В самом деле, в предположении противного имеем (после возможного перехода к подпоследовательности)

$$\frac{\ln \xi_i}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}} \to \lambda_i > 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty,$$

хотя бы для одного i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, для которого скорость роста $\ln \xi_i$ — наибольшая.

Пусть (после перенумерации) $\xi_1 \to \infty, \cdots, \xi_l \to \infty$

$$(l \leqslant k), \ \xi_{l+1} \to 0, \cdots, \xi_{l+m} \to 0 \quad (l + m \leqslant n).$$

Положим $\psi(\xi) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant l} \xi_j$, тогда, очевидно

$$\frac{\ln \psi(\xi)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}} \to 0. \tag{2.41}$$

С другой стороны, очевидно

$$1 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln \xi_k)^2}{(\ln \psi(\xi))^2} \leqslant l. \tag{2.42}$$

Поэтому из (2.41), (2.42) получаем

$$\frac{\sum\limits_{k=l+1}^{n} (\ln \xi_k)^2}{[\ln \psi(\xi)]^2} \to \infty. \tag{2.43}$$

406—3

Отсюда, переходя, в случае необходимости к подпоследовательности, получаем, что для некоторого j, $l+1 \leqslant j \leqslant n$

$$|\ln \xi_j| / |\ln \psi(\xi)| \to \infty, \tag{2.44}$$

т. е. $|\ln \xi_j| \to \infty$ „быстрее", чем $|\ln \psi(\xi)| \to \infty$. Значит для любого $\sigma > 0$ $\xi_j = o\left([\psi(\xi)]^{-\sigma}\right)$ или, что то же самое, для любых $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$

$$\xi_j^{\alpha_1} [\psi(\xi)]^{\alpha_2} \to 0. \tag{2.45}$$

Положим $\check{\xi} = (\check{\xi}_1, \dots, \check{\xi}_n)$, где $\check{\xi}_j = 0$, если j удовлетворяет условию (2.44), $\check{\xi}_j = \xi_j$ — в противном случае.

Из леммы 3.1 работы [9] следует, что $P(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$. Поэтому, ввиду (2.45), из (2.4) следует, что при $\xi \to \infty$

$$\frac{|D^\nu P(\check{\xi})|}{|P(\check{\xi})|} > C > 0 \tag{2.46}$$

по той последовательности, для которой верно (2.45).

Очевидно, размерность х.м. $\mathfrak{M}(P(\check{\xi})) = \check{\mathfrak{M}}$ меньше размерности х.м. $\mathfrak{M}$ и главными гранями х.м. $\check{\mathfrak{M}}$ являются те и только те грани, которые одновременно являются и главными гранями х.м. $\mathfrak{M}$. Но так как размерность этих граней меньше $n-1$, то все они P-регулярны.

Таким образом, в ходе доказательства теоремы либо (2.4) приводит к противоречию, либо к отношению (2.46), аналогичному (2.4), но соответствующему меньшей чем n размерности пространства A_n.

Повторяя приведенные выше в доказательстве этой теоремы рассуждения по отношению теперь к х.м. $\check{\mathfrak{M}}$ и полиному $P(\check{\xi})$, придем, очевидно, после конечного числа шагов либо к противоречию, либо к отношению (2.46) для одномерного многогранника $\check{\mathfrak{M}}$. Но в одномерном случае вполне правильность х.м. $\check{\mathfrak{M}}$ означает, что полином $P(\check{\xi})$ имеет ненулевой свободный член и некоторый ненулевой порядок. Но в этом случае (2.46), очевидно, не может иметь места.

Тем самым теорема 2 доказана.

3°. Доказательство теоремы 3

Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 2. Мы остановимся только на случае а.2), так как остальные случаи рассматриваются буквальным повторением уже приведенных рассуждений.

Будем, как и в теореме 2, вести доказательство от противного. Предположим, что полином $P(\xi)$, удовлетворяющий условиям теоремы 3, не является гипоэллиптическим, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \to \infty$ и вектор $\nu \in A_n$ такие, что выполняется соотношение (2.4).

Итак, пусть $\xi = \rho^{\sum\limits_{l=1}^{n} x_l e^l}$, причем $x_1 \to 1$, $\rho^{\sum\limits_{l=2}^{n} x_l e^l} = \rho^h \to \eta \in \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$.

Тогда по условию в) теоремы в окрестности η

$$P^{l_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} \cdot \mathbf{P}(\eta, \xi) \geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$P_{d_1}(\xi) = [\tilde{r}(\eta, \xi)]^{\tilde{k}(\eta)} \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\eta, \xi) \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Представим в этом случае полиномы $P(\xi)$ и $D^\nu P(\xi)$ соответственно в виде

$$P(\xi) = P^{l_0, n-1}(\xi) + P_{d_1}(\xi) + P_{d_2}(\xi) + q(\xi), \tag{3.3}$$

$$D^\nu P(\xi) = D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi) + D^\nu P_{d_1}(\xi) + D^\nu P_{d_2}(\xi) + D^\nu q(\xi). \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.3), (3.4) значение $\xi = \rho^{\sum\limits_{l=1}^{n} x_l e^l}$, используя представления (3.1), (3.2), получаем при $\rho \to \infty$

$$P(\xi) = \rho^{d_0}[r(\eta, \rho^h)]^{k(\eta)} \cdot \mathbf{P}(\eta, \rho^h) +$$

$$+ \rho^{d_1}[\tilde{r}(\eta, \rho^h)]^{\tilde{k}(\eta)} \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\eta, \rho^h) + \rho^{d_2} P_{d_2}(\rho^h) + q(\xi). \tag{3.5}$$

Аналогично для $D^\nu P(\xi)$

$$D^\nu P(\xi) = \rho^{d_0 - (\lambda, \nu)} \cdot D^\nu P^{l_0, n-1}(\rho^h) +$$

$$+ \rho^{d_1 - (\lambda, \nu)} \cdot D^\nu P_{d_1}(\rho^h) + \rho^{d_2 - (\lambda, \nu)} \cdot D^\nu P_{d_2}(\rho^h) + D^\nu q(\xi). \tag{3.6}$$

Так как при $\rho \to \infty$, $\rho^h \to \eta \in \sum_{d_1}^{l_0, n-1}$, то по условию с) теоремы для достаточно больших ρ

$$P_{d_2}(\rho^h) > 0. \tag{3.7}$$

С другой стороны, из геометрических соображений ясно, что при $\rho \to \infty$

$$q(\xi) = o(\rho^{d_2}), \quad D^\nu q(\xi) = o(\rho^{d_2 - (\lambda, \nu)}). \tag{3.8}$$

За счет взятия подпоследовательности можно считать, что при $\rho \to \infty$ $r(\eta, \rho^h)$ и $\tilde{r}(\eta, \rho^h)$ удовлетворяют одному из условий I, II, III, полученных при доказательстве теоремы 2. Причем мы должны брать возможные комбинации этих случаев для $r(\eta, \rho^h)$ и $\tilde{r}(\eta, \rho^h)$. Рассмотрим в отдельности эти случаи. Причем будем предполагать сначала, что $|\nu| < \min\{k(\eta), \tilde{k}(\eta)\}$.

I. Существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tilde{\delta}_1 > 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$, такие, что $\delta_1 \geqslant \delta_2$, $\tilde{\delta}_1 \geqslant \tilde{\delta}_2$ и

$$M_1 \rho^{-\delta_1} \leqslant |r(\eta, \rho^h)| \leqslant M_2 \rho^{-\delta_2},$$

$$\tilde{M}_1 \rho^{-\tilde{\delta}_1} \leqslant |\tilde{r}(\eta, \rho^h)| \leqslant \tilde{M}_2 \rho^{-\tilde{\delta}_2}.$$

Причем за счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\delta_1 - \delta_2 \leqslant \sigma$, $\widetilde{\delta}_1 - \widetilde{\delta}_2 \leqslant \sigma$ для любого наперед заданного числа $\sigma > 0$. Поэтому, как было видно при доказательстве теоремы 2, можно просто считать, что $\delta_1 = \delta_2$, $\widetilde{\delta}_1 = \widetilde{\delta}_2$. Итак положим $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\widetilde{\delta}_1 = \widetilde{\delta}_2 = \widetilde{\delta}$. Случай I в свою очередь разбивается на несколько подслучаев

I.1 $d_0 - k(\eta)\cdot\delta = d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta} = d_2$,

I.2 $d_0 - k(\eta)\cdot\delta > d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta} \geqslant d_2$ или

$$d_0 - k(\eta)\cdot\delta < d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta} \leqslant d_2,$$

I.3 $d_0 - k(\eta)\cdot\delta < d_2 \leqslant d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta}$ или

$$d_0 - k(\eta)\cdot\delta \geqslant d_2 \geqslant d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta}.$$

В случае I.1, как и в теореме 2 получаем

$$|P(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_2}, \tag{3.9}$$

$$|D^\nu P^{l_0, n-1}(\xi)| \leqslant C_2 \rho^{d_0 - (\lambda, \nu) - \delta(k(\eta) - |\nu|)}, \tag{3.10}$$

$$|D^\nu P_{d_1}(\xi)| < C_3 \rho^{d_1 - (\lambda, \nu) - \widetilde{\delta}(\widetilde{k}(\eta) - |\nu|)}, \tag{3.11}$$

$$|D^\nu P_{d_2}(\xi)| \leqslant C_4 \rho^{d_2 - (\lambda, \nu)}. \tag{3.12}$$

Как и при доказательстве теоремы 2 показывается, что

$$d_0 - (\lambda, \nu) - \delta(k(\eta) - |\nu|) < d_2,$$

$$d_1 - (\lambda, \nu) - \widetilde{\delta}(\widetilde{k}(\eta) - |\nu|) < d_2.$$

Поэтому из (3.10) — (3.12) и из условия $(\lambda, \nu) > 0$ получаем

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_2}). \tag{3.13}$$

(3.13) вместе с (3.9) противоречат (2.4).

Случай I.2. В этом случае при $\rho \to \infty$

$$|P(\xi)| \geqslant C_1 \rho^{d_0 - k(\eta)\cdot\delta}, \tag{3.14}$$

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_0 - k(\eta)\cdot\delta}), \tag{3.15}$$

либо

$$|P(\xi)| \geqslant C_2 \rho^{d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta}}, \tag{3.14}$$

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_1 - \widetilde{k}(\eta)\cdot\widetilde{\delta}}). \tag{3.15}$$

В обоих случаях противоречие с (2.4) очевидно.

Случай I.3 рассматривается аналогично.

Случай II. Существует число $\delta > 0$ такое, что

$$M_1\cdot\rho^{-\delta} \leqslant |r(\gamma_l, \rho^h)| \leqslant M_2\cdot\rho^{-\delta},\ M_1 \leqslant M_2,$$

и для любого $\Delta > 0$

$$|\tilde{r}(\eta, \rho^h)| \leqslant \tilde{M}_\Delta \rho^{-\Delta}.$$

Либо существует число $\tilde{\delta} > 0$ такое, что

$$\tilde{M}_1 \cdot \rho^{-\tilde{\delta}} \leqslant |\tilde{r}(\eta, \rho^h)| \leqslant \tilde{M}_2 \cdot \rho^{-\tilde{\delta}}, \quad \tilde{M}_1 \leqslant \tilde{M}_2,$$

и для любого $\Delta > 0$

$$|r(\eta, \rho^h)| \leqslant M_\Delta \cdot \rho^{-\Delta}.$$

Взяв в первом случае $\Delta > \max\left\{\dfrac{d_1 - d_2}{\tilde{k}(\eta)}; \dfrac{d_0 - d_1 + k(\eta) \cdot \delta}{\tilde{k}(\eta)}\right\}$, получаем

$$|P(\xi)| > C_1 \rho^{d_0 - k(\eta) \cdot \delta}, \quad \text{если} \quad \delta \cdot k(\eta) < d_0 - d_2, \tag{3.16}$$

$$|P(\xi)| > C_2 \rho^{d_2}, \quad \text{если} \quad \delta \cdot k(\eta) > d_0 - d_2. \tag{3.17}$$

Для $D^\nu P(\xi)$ имеем аналогично

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_0 - k(\eta) \cdot \delta}) \tag{3.18}$$

и соответственно

$$|D^\nu P(\xi)| = o(\rho^{d_2}), \tag{3.19}$$

(3.16) и (3.18) в случае $\delta \cdot k(\eta) < d_0 - d_2$, а (3.17), (3.19) — в противном случае противоречат (2.4).

Второй из случаев II и остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

Наконец, если $\nu > \min\{k(\eta), \tilde{k}(\eta)\}$, то противоречие с (2,4) получается благодаря условию а) теоремы. Теорема 3 доказана.

4°. Доказательство теоремы 4 и примеры

Доказательство теоремы 4 проводится по схеме доказательства теоремы 2, если вместо полиномов $P(x^0, \xi)$ и $D^\nu P(x^0, \xi)$ брать полиномы $|P(x^0, \xi)|^2$ и $|D^\nu P(x^0, \xi)|^2$ с вещественными коэффициентами и воспользоваться леммой 4.2 работы [6] (см. также [4] и [8]), утверждающей, что х.м. полиномов $P(x^0, \xi)$ и $|P(x^0, \xi)|^2$ подобны, причем $P(x^0, \xi)$-регулярным граням соответствуют $|P(x^0, \xi)|^2$-регулярные грани и наоборот. Здесь роль $P_{d_1}(\xi)$ играет полином $K(x^0, \xi) + |P_{d_1}(x^0, \xi)|^2$. Теорема 4 доказана.

Следующие примеры иллюстрируют доказанные теоремы.

Пусть сначала $n = 2$.

Пример 1. $P_1(\xi) = 1 + \xi_1^{22} + \xi_2^{22} + \xi_1^{16} \cdot \xi_2^{16} (\xi_1 - \xi_2)^4$. Х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P_1(\xi)$ в.п. пятиугольник в A_2 с вершинами (0,0), (22,0), (20,16), (16,20), (0.22).

P_1-регулярность всех главных граней х.м. $\mathfrak{M}$, кроме $(n-1)$-мерной (одномерной в данном случае) грани $\mathfrak{M}_1^1 \equiv \{(20,16)-(16,20)\}$ очевидна.

Полином $P_1^{1,1}(\xi)$, отвечающий грани $\mathfrak{M}_1^1$, обращается в нуль в точках вида $\eta=(t,\ t)\in R_2^{(0)}$. Выполняются все условия теоремы 2, кроме условия а).

В самом деле

$$\lambda=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad d_0=\frac{36}{\sqrt{2}},\quad d_1=\frac{22}{\sqrt{2}},$$

$$k(\eta)=k=4,\ d_0-(\lambda,\ \mu)=\frac{32}{\sqrt{2}}\quad \forall\mu\in A_n,\ |\mu|=4.$$

Поэтому для таких μ $d_0-(\lambda,\ \mu)>d_1$. Следовательно по теореме 1 полином $P_1(\xi)$ не гипоэллиптичен.

Пример 2. С другой стороны, если рассматривать полином $P_2(\xi)=P_1(\xi)+\xi_1^{16}\cdot\xi_2^{16}$, где $P_1(\xi)$—полином из примера 1, то для полинома $P_2(\xi)$ уже выполняются все условия теоремы 2 и полином $P_2(\xi)$ гипоэллиптичен.

Итак, добавление некоторого члена к негипоэллиптическому полиному $P_1(\xi)$ примера 1, превращает его в гипоэллиптический полином. Но добавленный „младший" член положителен в $R_2^{(0)}$. Следующие два примера показывают, что добавление к негипоэллиптическому полиному члена, даже меняющего знак, может превратить его в гипоэллиптический.

Пример 3. $P_3(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^4+1$. Х.м. этого полинома является треугольником в A_2 с вершинами $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$ с единственной P_3-нерегулярной одномерной гранью $\mathfrak{M}^1=\{(4,0),\ (0,4)\}$.

Легко видеть, что выполняются все условия теоремы 2, за исключением условия а), поэтому по теореме 1 полином $P_3(\xi)$ не гипоэллиптичен.

Пример 4. $P_4(\xi)=P_3(\xi)+\xi_2(2\xi_2-\xi_1)$. В точках $\eta\in\Sigma^{0,1}$ $P_{4,d_1}(\eta)>0$, так как точки $\eta\in\Sigma^{0,1}$ имеют вид $\eta=(t,\ t)$, $t\neq0$, а в таких точках $P_{4,p_1}(\eta)=t^2>0$. Условие а) проверяется легко.

Итак, полином $P_4(\xi)$ гипоэллиптичен, несмотря на то, что полином $P_{4,d_1}(\xi)$ может принимать любые значения в $R_2^{(0)}$.

Пример 5. Для полинома $P_5(\xi)=P_3(\xi)-\xi_2(2\xi_2-\xi_1)$ не выполняется условие с) теоремы 2. Покажем, что полином $P_5(\xi)$ не гипоэллиптичен. В самом деле, положим $\xi_1=t^4(1+t^{-2})$, $\xi_2=t^4$. Тогда простой подсчет показывает, что

$$P_5(\xi)=t^6+1,\ \frac{\partial P_5}{\partial\xi_1}=4t^6-t^4,\quad \text{т. е.}\quad \left|\frac{\partial P_5}{\partial\xi_1}\right| \Big/ |P_5(\xi)| \not\to 0$$

при $t\to\infty$, т. е. при $\xi\to\infty$.

Итак, полином $P_5(\xi)$ не гипоэллиптичен. Этот пример показывает существенность условия $P^{l_0,n-1}(\xi)>0\ (<0)$, $P_{d_1}(\xi)>0\ (<0)$ в окрестности $\Sigma^{l_0,n-1}$.

Пример 6. $P_6(\xi)=(\xi_1^2+\xi_2^2)(\xi_1-\xi_2)^6+(\xi_1-\xi_2)^6+\xi_1^2+1$. Х.м. этого полинома является треугольником в A_2 с единственной главной P_6-нерегулярной гранью $\mathfrak{M}_1^1\equiv\{(8,0)-(0,8)\}$. Полиномы

$$P_6^{0,1}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^6 \geqslant 0, \quad P_{6, d_1}(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6 > 0$$

обращаются в нуль в точках $\eta \in R_2^{(0)}$ вида $\eta = (t, t)$, $t \neq 0$, $P_{6, d_2}(\xi) = \xi_1^2 > 0$ в точках $\xi \in R_2^{(0)}$, поэтому выполняются все условия теоремы 3, кроме условия а), и потому по теореме 1 полином $P_6(\xi)$ не гипоэллиптичен.

Пример 7. $P_7(\xi) = P_6(\xi) + \xi_1^2(2\xi_1^2 - \xi_2^2)$. Легко видеть, что для полинома $P_7(\xi)$ уже выполняются все условия теоремы 3 и полином $P_7(\xi)$ является гипоэллиптическим.

Пример 8. $P_8(\xi) = \xi_1^8 \xi_2^8 (\xi_1 - \xi_2)^4 + \xi_1^8 \xi_2^8 (\xi_1 - \xi_2)^2 + \xi_1^{16} + 1$. Х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P_8(\xi)$ является в. п. пятиугольником в A_2 с одномерной главной P_8-нерегулярной гранью $\mathfrak{M}_1^1 = \{(12,8) - (8,12)\}$, $\sum_{d_1}^{1,1} \neq \varnothing$. Выполняются все условия теоремы 3, кроме условия а) ($\max\,[d_0 - (\lambda, \alpha), d_1 - (\lambda, \beta)] = d_2$), и по теореме 1 полином $P_8(\xi)$ не является гипоэллиптическим.

Пример 9. Для полинома

$$P_9(\xi) = \xi_1^6 \xi_2^6 (\xi_1 - \xi_2)^8 + \xi_1^6 \cdot \xi_2^6 (\xi_1 - \xi_2)^6 + \xi_1^{16} + 1$$

уже выполняются все условия теоремы 3 и полином $P_9(\xi)$ гипоэллиптичен.

Пример 10. $P_{10}(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + i\xi_2 + 1$. $P_{10}(\xi)$ не является гипоэллиптическим. В самом деле, пусть $\xi_1 = \xi_2 = t \to \infty$, тогда $|P_{10}(\xi)| \leqslant C_1 t$,

$$\left|\frac{\partial P_{10}(\xi)}{\partial \xi_2}\right| \geqslant C_2 t \text{ и } \left|\frac{\partial P_{10}(\xi)}{\partial \xi_2}\right| \Big/ |P_{10}(\xi)| \not\to 0, \quad \xi \to \infty.$$

Легко видеть, что выполняются все условия теоремы 4, кроме условия а).

Пример 11. $P_{11}(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + i\xi_2 + 1$. Для этого полинома выполняются все условия теоремы 4, так что полином $|P_{11}(\xi)|^2$ является гипоэллиптическим.

Отметим в связи с примерами 10)—11), что в то время, как волновой оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ не становится гипоэллиптическим после прибавления „младших“ членов (ср. с примером 10), оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ уже превращается в гипоэллиптический (после прибавления, например, члена $\frac{\partial}{\partial x}$ оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x}$ становится гипоэллиптическим).

Примеры 12, 13, 14. Легко видеть, что для всех $(x_1, x_2) \in E_2$ полином $|P_{12}(x, \xi)|^2$

$$P_{12}(x, \xi) = [(1 + x_1^2)\xi_1 - (1 + x_2^2)\xi_2]^2 + i(1 + x_1^2 + x_2^2)\xi_1 + 1$$

является гипоэллиптическим, а полином $\overline{P}_{12}(x, \xi) = [(1+x_1^2)\xi_1 - (1+x_2^2)\xi_2]^2 + (1+x_1^2+x_2^2)\xi_1 + 1$ — не гипоэллиптическим в точке (0,0) (не выполняется условие в) теоремы 4).

Полиномы

$$P_{13}(x, \xi) = (1+x_1^2)\xi_1^2 - (1+x_2^2)\xi_2^2 + i(1+x_1^2+x_2^2)\xi_1 + 1$$

$$\text{и } P_{14}(x, \xi) = [(1+x_1^2)\xi_1 - (1+x_2^2)\xi_2]^2 + i(1+x_1^2+x_2^2)\xi_1 + 1$$

не являются гипоэллиптическими соответственно ни в одной точке $x \in E_2$ и в точке $(0,0) \in E_2$. Отметим, что полином $|P_{14}(x, \xi)|^2$ является гипоэллиптическим во всех точках $x \in E_2 \setminus \{0\}$.

Рассмотрим примеры в случае $n > 2$.

Пример $15_\alpha (n = 3)$. $P_{15}(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3)^4 + \xi_1^{14} + 1$.

Легко видеть, что $P_{15}(\xi)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и, следовательно, является гипоэллиптическим. Х.м. $\mathfrak{M}$ полинома $P_{15}(\xi)$ имеет единственную $(n-1)$-мерную (двумерную) P_{15}-нерегулярную грань. С другой стороны, для полинома

$$P_{16}(\xi) = (\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 - 3\xi_1^2 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3)^4 + \xi_1^8 + 1$$

уже не выполняется условие а) теоремы 2 и по теореме 1 полином $P_{16}(\xi)$ не является гипоэллиптическим.

Во всех приведенных примерах, заменяя, например, ξ_1 на ξ_1^2, ξ_1^3 и т. п., мы получаем аналогичные примеры для полиномов с заведомо неоднородными, но обобщенно однородными главными P-регулярными (P-нерегулярными) гранями.

Приношу свою благодарность О. В Бесову за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 17.VI.1973

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Հիպոէլիպտիկ բազմանդամների մի ընտանիքի մասին *(ամփոփում)*

Տված շատ փոփոխականի բազմանդամների համար ստացված են հիպոէլիպտիկության անհրաժեշտ պայմաններ այն դեպքում, երբ բազմանդամի բնութագրիչ բազմանիստի մի քանի նիստեր «ռեգուլյար» չեն։

Ստացված են նաև հիպոէլիպտիկության բավարար պայմաններ այն դեպքում, երբ բազմանդամի բնութագրիչ բազմանիստի ($n-1$) —չափանի նիստերից մեկը «ռեգուլյար» չէ։

H. G. KAZARIAN. *On a family of hypoelliptic polynoms* (summary)

The paper gives necessary conditions for hypoellipticity of a polynom in the case, when the characteristic polyhedron of the polynom possesses so called „nonregular" faces. Sufficient conditions are obtained for the case when the characteristic polyhedron possesses a $(n-1)$-dimensional nonregular face.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир", М., 1965.
2. *С. М. Никольский.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, 146, № 4, 1962, 767—769.
3. *B Pini.* Osservazoni sulla ipoellitticitá, Boll Un. Mat. Jtal., (3), 18, 1963, 420—432,
4. *Jöran Friberg.* Multi-quasielliptic polinomials, Annali della senola Normale Sup, di Pisa, serie III, XXI, 1967, 239—260.
5. *L. Cattabriga.* Su una classi di polinomi ipoellittici, Rend. Sem. Mat. Univ., Padova 36, 1966, 285—309.
6. *А. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов, Матем. сб., 75 (117), № 3, 1968, 400—416.
7. *В. П. Михайлов.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, т. 91, 59—81.
8. *Г. Г. Казарян.* Сравнение дифференциальных операторов и дифференциальные операторы постоянной силы, ДАН СССР, 208, № 6, 1973, 1272—1275.
9. *Г. Г. Казарян.* Об оценках L_p-норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов, Дифф. уравнения, V, № 5, 1969, 911—921,

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

МНОГООБРАЗИЯ И БИМНОГООБРАЗИЯ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД ВСЕМИ КОЛЬЦАМИ

Г. Г. ЭМИН

Введение

К настоящему времени выявился определенный интерес к изучению категории $\mathfrak{M}$ — „модулей над всеми кольцами", объектами которой являются всевозможные пары (A, U), где U — ассоциативное кольцо, A — правый, U-модуль, в общем случае не унитарный, а морфизмами категории $\mathfrak{M}$ являются полулинейные гомоморфизмы (см. [2] и [4]).

В настоящей работе дается полное описание всех многообразий и бимногообразий такой категории, а также выясняются некоторые свойства этой категории.

Автор выражает глубокую благодарность Е. Г. Шульгейферу, под руководством которого была выполнена эта работа.

§ 1. Предварительные замечания

Рассматривается категория $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные пары (A, U), где U — ассоциативное кольцо, A — правый U-модуль, в общем случае не унитарный, а множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар отображений $\Phi=(\Phi_A, \Phi_U)$, где Φ_A (соответственно Φ_U) — гомоморфизм группы A в группу B (кольца U в кольцо V), причем $(a\cdot u)\Phi_A=a\Phi_A\cdot u\Phi_U$, $a\in A$, $u\in U$. Такая пара отображений называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V).

Категория $\mathfrak{M}$ содержит в качестве полных подкатегорий категорию абелевых групп и категорию ассоциативных колец, а также содержит категорию модулей над фиксированным кольцом Λ, в которой морфизмами являются линейные преобразования.

Гомоморфизм Φ: $(A, U)\to(B, V)$ называется мономорфизмом (эпиморфизмом), если Φ_A мономорфизм (эпиморфизм) в категории абелевых групп, а Φ_U — мономорфизм (эпиморфизм) в категории ассоциативных колец.

Пара $(A_1, U_1)\in Ob\mathfrak{M}$ называется подмодулем модуля (A, U), если она является подобъектом объекта (A, U) категории $\mathfrak{M}$. Это означает, что действие U_1 на A_1 совпадает с действием U_1 как подкольца кольца U.

Подмодуль модуля (A, U), являющийся ядром некоторого гомоморфизма $\Phi: (A, U) \to (B, V)$, называется идеалом модуля (A, U).

Приведем некоторые свойства категории $\mathfrak{M}$.

Легко доказать, что имеет место

Предложение 1.1. *В категории $\mathfrak{M}$ любой гомоморфизм $\Phi: (A, U) \to (B, V)$ обладает ядром, которым является вложение $(Ker\ \Phi_A,\ Ker\ \Phi_U) \xrightarrow{\cdot} (A, U)$.*

В работе [2] доказано

Предложение 1.2. *Подмодуль (A_1, U_1) модуля (A, U) тогда и только тогда будет идеалом модуля (A, U), когда U_1—идеал кольца U и выполнены следующие включения: $A \cdot U_1 \subseteq A_1$, $A_1 \cdot U \subseteq A_1$.*

Если (A_1, U_1) является идеалом модуля (A, U), то можно образовать абелеву группу A/A_1, кольцо U/U_1 и определить отображение $A/A_1 \times U/U_1 \to A/A_1$, полагая $(a + A_1)\cdot(u + U_1) = a \cdot u + A_1$. При этом пара $(A/A_1, U/U_1)$ будет объектом категории $\mathfrak{M}$. Этот модуль называется фактор-модулем модуля (A, U) по идеалу (A_1, U_1). Естественное отображение $\pi: (A, U) \to (A/A_1, U/U_1)$ является гомоморфизмом, причем ядром этого гомоморфизма служит (A_1, U_1).

Пусть (A_1, U_1)—подмодуль модуля (A, U). Идеалом, порожденным подмодулем (A_1, U_1), будет модуль $(\overline{D}, \overline{U}_1)$, где $\overline{U}_1$ — идеал, порожденный подкольцом U_1 в кольце U, а $\overline{D} = \{A_1 \cup A_1 \cdot U \cup A \cdot \overline{U}_1\}$—подгруппа абелевой группы A, порожденная множеством $D = A_1 \cup A_1 \cdot U \cup A \cdot \overline{U}_1$. Легко проверить, что $(\overline{D}, \overline{U}_1)$ — идеал модуля (A, U) и что это наименьший идеал модуля (A, U), содержащий подмодуль (A_1, U_1).

Пусть имеется гомоморфизм модулей $\alpha: (B, V) \to (C, W)$. Обозначим через $\overline{D} = \{\mathrm{Im}\,\alpha_B \cup \mathrm{Im}\,\alpha_B \cdot W \cup C \cdot \{\mathrm{Im}\,\alpha_V\}\}$ подгруппу абелевой группы C, порожденную множеством $D = \mathrm{Im}\,\alpha_B \cup \mathrm{Im}\,\alpha_B \cdot W \cup C \cdot \{\mathrm{Im}\,\alpha_V\}$, где $\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\}$ — идеал кольца W, порожденный подкольцом $\mathrm{Im}\,\alpha_V$. Пара $(\overline{D}, \{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$ по построению является идеалом модуля (C, W), поэтому можно образовать фактор-модуль $(C/\overline{D}, W/\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$. Легко видеть, что модуль $(C/\overline{D}, W/\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$ вместе с естественным эпиморфизмом $\pi: (C, W) \to (C/\overline{D}, W/\{\mathrm{Im}\,\alpha_V\})$ образует коядро гомоморфизма α. Таким образом, справедливо

Предложение 1.3. *В категории $\mathfrak{M}$ каждый морфизм обладает коядром.*

Следовательно, имеет место (см. [3], предложения 1.6.3 и 1.6.14).

Следствие 1.4. В категории $\mathfrak{M}$ нормальными мономорфизмами являются вложения идеалов и только они.

Предложение 1.5. *В категории $\mathfrak{M}$ нормальными эпиморфизмами являются гомоморфизмы „на" и только они.*

Доказательство. Пусть $\theta: (A, U) \to (B, V)$— нормальный эпиморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} (A,U) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (B,V) \\ & (Im\theta_A,\ Im\theta_U) \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Гомоморфизм π является эпиморфизмом, поэтому (см. [3], лемма I.4.7*) σ — нормальный эпиморфизм, а так как σ в то же время является мономорфизмом, то σ — изоморфизм (см. [3], следствие I.4.6*). Значит, θ — гомоморфизм „на".

Обратно. Пусть θ: $(A, U) \to (B, V)$ — гомоморфизм „на". Тогда имеем такую короткую точную последовательность:

$$(A_1, U_1) = (Ker\,\theta_A, Ker\,\theta_U) \xrightarrow{\mu} (A, U) \xrightarrow{\theta} (B, V).$$

Если для некоторого гомоморфизма γ: $(A, U) \to (C, W)$ имеет место равенство $\mu\gamma = 0$, то $\mu_A, \gamma_A = 0$ и $\mu_U, \gamma_U = 0$. Из определения ядра вытекает, что существует такой гомоморфизм групп γ'_B: $B \to C$ и такой гомоморфизм колец γ'_V: $V \to W$, что $\gamma_A = \theta_A \gamma'_B$ и $\gamma_U = \theta_U \gamma'_V$. Легко проверить, что пара $\gamma' = (\gamma'_B, \gamma'_V)$ является гомоморфизмом модулей. Таким образом, $\gamma = \theta\gamma'$. Предложение 1.5 доказано.

Предложение 1.6. *Категория $\mathfrak{M}$ является бикатегорией с нормальными кообразами.*

Доказательство. Пусть θ: $(A, U) \to (B, V)$ — любой гомоморфизм модулей. Рассмотрим диаграмму (*). Имеем, $\theta = \pi\sigma$ и π — нормальный эпиморфизм в силу предложения 1.5.

Предложение 1.6 доказано.

Предложение 1.7. *Пусть* (A_1, U_1) — *идеал модуля* (A, U) *и* π: $(A, U) \to (B, V)$ — *нормальный эпиморфизм. Тогда образ идеала* (A_1, U_1) *при отображении* π *является идеалом* (B_1, V_1) *в модуле* (B, V).

Доказательство. Так как θ — гомоморфизм „на", то $\forall b \in B$ $\exists a_b \in A$ такое, что $a_b\theta_A = b$, и $\forall v_1 \in V_1$ существует такой элемент $u_1 \in U_1$, что $u_1\theta_U = v_1$. Поэтому $b \cdot v_1 = (a_b \pi_A)\cdot(u_1 \pi_U) = (a_b \cdot u_1)\pi_A \in B_1$, в силу того, что $A \cdot U_1 \subseteq A_1$. По той же причине, для $\forall b_1 \in B_1$ существует такой элемент $a_1 \in A_1$, что $a_1\pi_A = b_1$, и для $\forall v \in V$ существует такой элемент $u_v \in U$, что $u_v \theta_U = v$. Поэтому $b_1 \cdot v = (a_1 \pi_A)\cdot(u_v \pi_U) = (a_1 \cdot u_v)\pi_A \in B_1$, так как $A_1 \cdot U \subseteq A_1$.

Предложение 1.7 доказано.

Модуль (A, U) называется свободным с системой свободных образующих (X, Y), где $X \cap Y = \varnothing$, если для любого модуля (B, V) и произвольного однозначного отображения Φ: $(X, Y) \to (B, V)$, $(X\Phi \subset B,\ Y\Phi \subset V)$ существует единственное продолжение отображения Φ до гомоморфизма $\overline{\Phi}$: $(A,\ U) \to (B,\ V)$, при котором коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
(X, Y) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "i"'] & & (B, V) \\
& (A, U) \arrow[ur, "\overline{\Phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

где i — отображение вложения.

В работе [2] приведено следующее построение свободного модуля над произвольной парой множеств $(X,\ Y)$. Пусть $(X,\ Y)$ — произвольная пара множеств, $X \cap Y = \varnothing$. Обозначим через U свободное ассоциативное кольцо с множеством Y свободных образующих. Аддитивная группа кольца U является свободной абелевой группой относительно множества свободных образующих M, которое, в свою очередь, является свободной мультипликативной полугруппой с множеством Y свободных образующих. Таким образом, U является полугрупповым кольцом над полугруппой M. Обозначим через A свободную абелеву группу со свободным базисом $X \cup X \cdot M$, где $X \cdot M = \{x \cdot m;\ x \in X,\ m \in M\}$. Естественным образом определяется отображение $A \times U \to A$, которое удовлетворяет аксиомам модуля. Модуль $(A,\ U)$ является свободным модулем с системой свободных образующих $(X,\ Y)$.

Предложение 1.8. *Любой свободный модуль* $(A\,(X),\ U\,(Y))$ *над парой множеств* $(X,\ Y)$ *разлагается в свободное произведение свободных модулей* $(A\,(x),\ U\,(y))$ *над двуточечным множеством* $(x,\ y)$

$$(A\,(X),\ U\,(Y)) = \prod_{\substack{x \in X\\ y \in Y}}{}^{*} (A\,(x),\ U\,(y)).$$

Доказательство. Во-первых, вложение пары $(x,\ y)$ в пару множеств $(X,\ Y)$ однозначно продолжается до гомоморфизма

$$\tau_{x,\,y}:\ (A\,(x),\ U\,(y)) \to (A\,(X),\ U\,(Y)).$$

Пусть имеется любой модуль $(B,\ V)$ и любая система гомоморфизмов $\alpha_{x,\,y}$: $(A\,(x),\ U\,(y)) \to (B,\ V)$. При этом гомоморфизме точка $(x,\ y)$ переходит в некоторую пару $(\alpha_{x,\,y}\,(x),\ \alpha_{x,\,y}\,(y))$. Тем самым определено отображение α: $(X,\ Y) \to (B,\ V)$, которое по определению однозначно продолжается до гомоморфизма $\bar{\alpha}$: $(A\,(X),\ U\,(Y)) \to (B,\ V)$. Легко проверить, что имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{A}(X), \mathfrak{U}(Y)) \arrow[dr, dashed, "\bar{\alpha}"'] & & (\mathfrak{A}(x), \mathfrak{U}(y)) \arrow[ll, "\tau_{x,y}"'] \arrow[dl, "\alpha_{x,y}"] \\
& (B, V) &
\end{tikzcd}$$

Предложение 1.8 доказано.

Из предложений 1.1, 1.6, 1.8 и теоремы 3.1 работы [6] вытекает

Предложение 1.9. *Категория $\mathfrak{M}$ является категорией с прямыми и свободными произведениями.*

Прямым произведением семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ будет модуль $(A, U) = (\prod\limits_{\alpha\in I}^{x} A_\alpha, \prod\limits_{\alpha\in I}^{x} U_\alpha)$, в котором операция $A\times U\to A$ определяется по формуле $(a_\alpha)_{\alpha\in I}\cdot(u_\alpha)_{\alpha\in I} = (a_\alpha\cdot u_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Свободное произведение семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ определяется следующим образом. Сначала построим свободное произведение семейства ассоциативных колец $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Для этого возьмем всевозможные слова конечной длины $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ такие, что $u_{\alpha_i}\in U_{\alpha_i}$ и $\alpha_i\neq\alpha_{i+1}$ $(i=1, 2,\cdots, n-1)$. Аддитивным порядком элемента $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ будем считать наибольший общий делитель аддитивных порядков всех элементов u_{α_i} $(i=1, 2,\cdots, n)$, входящих в это слово (рассматриваемых в соответствующих кольцах U_{α_i}). Если порядок элемента $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ равен единице, то $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ — пустое слово.

Построим абелеву группу $U^+ = \dot{\sum\limits_{\alpha\in I}} U^+_\alpha \dotplus \dot{\sum\limits_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_n\\ n>1}}} \{u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\}$, где $\dot{\sum}$ — прямая сумма, U^+_α — аддитивная группа кольца U_α $(\alpha\in I)$, а $\{u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\}$ — циклическая группа, порожденная элементом $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$, порядок которого, как уже говорилось выше, равен наибольшему общему делителю аддитивных порядков всех элементов u_{α_i}, входящих в это слово. Произведение слов $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ и $\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m}$ определим таким образом: $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\cdot\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m} = u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m}$, причем, если $\alpha_n=\beta_1$, то в полученном слове $u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\bar{u}_{\beta_1}\cdots\bar{u}_{\beta_m}$ вместо $u_{\alpha_n}\bar{u}_{\beta_1}$ подставляется произведение этих элементов в кольце U_{α_n}. Произведение сумм слов определяется по дистрибутивности. Легко проверить, что получили ассоциативное кольцо, которое обозначим $\hat{U}$.

Профакторизуем кольцо $\hat{U}$ по идеалу, который обозначим $\bar{U}$, порожденному всеми элементами вида $n(u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_k}) - (n_{\alpha_1}u_{\alpha_1})\cdots(n_{\alpha_k}u_{\alpha_k})$, где $n = n_{\alpha_1}\cdots n_{\alpha_k}$. Полученное кольцо обозначим U^*, $U^* = \hat{U}/\bar{U}$. Легко проверить, что $U^* = \prod\limits_{\alpha\in I}^{*} U_\alpha$. Далее, произвольный модуль (A_α, U_α) семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ следующим образом расширяем до модуля (A_α^+, U^*). Для этого рассмотрим всевозможные слова конечной длины вида $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$, где $a_\alpha \in A_\alpha$, $u_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$, $\alpha \neq \alpha_1$ и $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ $(i = 1,\cdots, n-1)$. Аддитивным порядком элемента $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ будет наибольший общий делитель аддитивных порядков элементов $a_\alpha \in A_\alpha$, $u_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ $(i=1, 2,\cdots, n)$, рассматриваемых соответственно в абелевой группе A_α и в кольцах $U_{\alpha i}$. Если порядок элемента $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ равен единице, то $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$ — пустое слово.

Построим абелеву группу $A_\alpha^1 = A_\alpha \dotplus \sum\limits_{\alpha_1\cdots\alpha_n}^{\cdot} \{a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\}$, где $\dot{\sum}$ — прямая сумма, а $\{a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}\}$ — циклическая группа, порожденная словом $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n}$. Элементами абелевой группы A_α' будут всевозможные конечные суммы вида $a_\alpha' = k_\alpha \bar{a}_\alpha + l_\alpha a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n} + \cdots$, где $k_\alpha, l_\alpha,\cdots \in N$; $\bar{a}_\alpha, a_\alpha,\cdots \in A_\alpha$; $u_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$. Определим умножение элементов абелевой группы A_α' на элементы кольца $\hat{U}$ (которое рассматривалось на стр. 216) таким образом:

$$(k_\alpha \bar{a}_\alpha + l_\alpha a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n} + \cdots)\left(\sum_{i=1}^{m} k_{\delta_i} u_{\delta_i} + p_{\alpha_0} u_{\beta_1}\cdots u_{\beta_r} + \cdots\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} k_\alpha k_{\delta_i} \bar{a}_\alpha u_{\delta_i} + k_\alpha p_{\alpha_0} \bar{a}_\alpha u_{\beta_1}\cdots u_{\beta_r} + \sum_{i=1}^{m} l_\alpha k_{\delta_i} a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha n} u_{\delta_i} +$$

$$+ l_\alpha p_{\alpha_0} a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n} u_{\beta_1}\cdots u_{\beta_r} + \cdots,$$

причем, если для некоторых i, $\alpha = \delta_i$ или $\alpha = \beta_1$, то в соответствующих словах вместо $\bar{a}_\alpha u_{\delta_i}$, $\bar{a}_\alpha u_{\beta_1}$ подставляются произведения $\bar{a}_\alpha u_{\delta_i}$, $\bar{a}_\alpha u_{\beta_1}$, рассматриваемые в модуле A_α над кольцом U_α, а если для некоторых i, $\alpha_n = \delta_i$, или же $\alpha_n = \beta_1$, то в соответствующих словах вместо $u_{\alpha_n} u_{\delta_i}$, $u_{\alpha_n} u_{\beta_1}$ подставляются произведения $u_{\alpha_n} u_{\delta_i}$, $u_{\alpha_n} u_{\beta_1}$, рассматриваемые в кольце U_{α_n}. Если в произведении двух слов $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n} \in A_\alpha'$ и $\bar{u}_{\beta_1}\cdots \bar{u}_{\beta_m} \in \hat{U}$ получается пустое слово, то по определению $a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_n} \bar{u}_{\beta_1}\cdots \bar{u}_{\beta_m}=0$. Ясно, что $A_\alpha'\cdot\hat{U} \subseteq A_\alpha'$. Легко проверить, что получили $\hat{U}$-модуль A_α'. Профакторизуем $\hat{U}$-модуль A_α' по подмодулю, который обозначим $\bar{A}_\alpha$, порожденному всеми элементами вида $n\,(a_\alpha u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_k}) - (n_\alpha a_\alpha)(n_{\alpha_1} u_{\alpha_1})\cdots(n_{\alpha_k} u_{\alpha_k})$, где $n = n_\alpha n_{\alpha_1}\cdots n_{\alpha_k}$.

Получим $\hat{U}$-модуль $A_\alpha^+ = A_\alpha'/\bar{A}_\alpha$. Легко проверить, что $A_\alpha^+\cdot\bar{U} = O$. Следовательно, $\hat{U}$-модуль A_α^+ является модулем над кольцом $U^* = \hat{U}/\bar{U}$. Обозначим полученный U^*-модуль A_α^+ через (A_α^+, U^*). Свободным произведением семейства модулей $\{(A_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ будет прямая сумма семейства U^*-модулей

$$\{A_\alpha^+\}_{\alpha\in I}, \text{ т. е. } \prod_{\alpha\in I}^* (A_\alpha, U_\alpha)=\left(\sum_{\alpha\in I} A_\alpha^+, U^*\right).$$

Таким образом, категория $\mathfrak{M}$ удовлетворяет всем тем условиям, что и категория, рассматриваемая в [1], т. е. условиям:

1. Существуют нулевые морфизмы, роль которых в $\mathfrak{M}$ играют нулевые гомоморфизмы.

2. Для любого семейства объектов существует прямое и свободное произведение.

3. Каждый морфизм обладает нормальным кообразом.

4. Произведение $\mu\nu$ любого нормального мономорфизма μ: $(A,U)\to\to(B, V)$ и любого нормального эпиморфизма ν: $(B, V)\to(C, W)$ представим в виде $\mu\nu=\nu_1\mu_1$, где ν_1 — нормальный эпиморфизм, а μ_1 — нормальный мономорфизм.

5. Совокупность всех подобъектов любого объекта составляет множество.

§ 2. Многообразия в категории $\mathfrak{M}$

Если дан модуль $(A, U)\in Ob\mathfrak{M}$, то мы можем сказать, что задано представление ассоциативного кольца U эндоморфизмами абелевой группы A. Точно так же, как это сделано в „Добавлении" книги [5] для категории пар (G, Γ) ((G, Γ)—представление группы Γ автоморфизмами алгебраической системы G), докажем аналог теоремы Биркгофа для категории $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим свободный модуль $(A(X_0), U(Y_0))$ с системой свободных образующих (X_0, Y_0), где X_0 и Y_0 — счетные множества. Будем рассматривать пары множеств (Λ_1, Λ_2), где Λ_1 — некоторый набор элементов $U(Y_0)$-модуля $A(X_0)$, а Λ_2 — некоторый набор элементов ассоциативного кольца $U(Y_0)$. Множество Λ_2 определяет многообразие ассоциативных колец $K=K(\Lambda_2)$, состоящее из всех ассоциативных колец, в любом из которых элементы из Λ_2 тождественно обращаются в нуль. Каждый элемент $a_0\in A(X_0)$ выражается через конечное число некоторых элементов $x_1,\cdots, x_m\in X_0$ и $y_1, y_2,\cdots, y_n\in Y_0$. Если дан модуль (A, U), то, подставляя вместо $x_1,\cdots, x_m$ и $y_1,\cdots,y_n$ соответственно элементы модуля A и кольца U, мы получим некоторый элемент из A, значение a_0 в A. Если $a_0\in A(X_0)$, то теперь ясно как понимать, что в некотором модуле (A, U) выполняется тождество $a_0\equiv 0$. Всему множеству слов Λ_1 мы сопоставим такую полную подкатегорию $L=L(\Lambda_1)$ категории $\mathfrak{M}$, что в любом модуле этой подкатегории выполнено $a_0\equiv 0$ для всех $a_0\in\Lambda_1$.

Определение 2.1. Полная подкатегория $N=N(\Lambda_1, \Lambda_2)$ категории $\mathfrak{M}$, состоящая из всех таких модулей $(A, U)\in Ob\mathfrak{M}$, что $(A,$

$U) \in L(\Lambda_1)$ и кольцо $U' \in K(\Lambda_2)$, называется многообразием модулей категории $\mathfrak{M}$.

Легко видеть, что любое многообразие модулей категории $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений модулей.

Паре множеств (Λ_1, Λ_2) мы сопоставили многообразие $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Если, с другой стороны, $\mathbf{N}$ — некоторая полная подкатегория категории $\mathfrak{M}$, то этой полной подкатегории естественно отвечает пара множеств Λ_1 и Λ_2, где Λ_1 и Λ_2, соответственно, множество всех таких элементов $U(Y_0)$-модуля $A(X_0)$ и множество всех таких элементов кольца $U(Y_0)$, что для любого модуля $(B, V) \in \mathbf{N}$ каждый элемент из Λ_1 обращается тождественно в нуль на V-модуле B и любой элемент из Λ_2 обращается тождественно в нуль на кольце V.

Определение 2.2. Идеал $(\overline{A}, \overline{U})$ модуля (A, U) называется вполне характеристическим идеалом, если он инвариантен относительно всех эндоморфизмов модуля (A, U), т. е. для любого эндоморфизма $\eta = (\eta_A, \eta_U)$ модуля (A, U) имеют место включения $\overline{A}\eta_A \subseteq \overline{A}$ и $\overline{U}\,\eta_U \subseteq \overline{U}$.

Пусть $\mathbf{N}$ — некоторая полная подкатегория категории $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений. Если $(A, U) \in Ob\mathfrak{M}$, то обозначим через $V_{\mathbf{N}}(A, U) = (V_{\mathbf{N}}(A), V_{\mathbf{N}}(U))$ пересечение всех таких идеалов (A_α, U_α) модуля (A, U), для которых $(A, U)/(A_\alpha, U_\alpha) \in \mathbf{N}$. Ясно, что идеал $V_{\mathbf{N}}(A, U)$ совпадает со значением вербала (см. [3], стр. 225) полной подкатегории $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ (замкнутой относительно вышеназванных трех операций), на модуле (A, U). Поэтому фактор-модуль $(A, U)/V_{\mathbf{N}}(A, U) \in \mathbf{N}$, и идеал $V_{\mathbf{N}}(A, U)$ является вполне характеристическим идеалом.

Если, в частности, $(A(X), U(Y))$ — некоторый свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, и $\mathbf{N}$ — некоторое многообразие в категории $\mathfrak{M}$, то фактор-модуль $(A(X), U(Y))/V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$ называется (приведенным) свободным модулем многообразия $\mathbf{N}$.

Предложение 2.1. *Каждый модуль из многообразия* $\mathbf{N}$ *является гомоморфным образом некоторого свободного модуля этого многообразия.*

Доказательство. Пусть модуль $(B, V) \in \mathbf{N}$. Возьмем множества X и Y, равномощные соответственно образующим V-модуля B и образующим кольца V и рассмотрим свободный модуль $(A(X), U(Y))$ над парой множеств (X, Y). Отображение φ, ставящее в соответствие множеству X образующие V-модуля B и множеству Y образующие кольца V, продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi}$: $(A(X), U(Y)) \to (B, V)$. Ясно, что $\overline{\varphi}$ — гомоморфизм „на". Из свойства рефлектора (см. [3], стр. 209) следует, что существует гомоморфизм θ: $(A(X), U(Y))/V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) \to (B, V)$, при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(A(X), U(Y)) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & (A(X), U(Y))/V(A(X), U(Y)) \arrow[d, dashed, "\theta"] \\
& (B, V)
\end{tikzcd}$$

где π — естественный эпиморфизм. Из леммы 1.4.7* работы [3] следует, что θ — гомоморфизм „на". Предложение 2.1 доказано.

Пусть снова $(A(X), U(Y))$ — некоторый свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, порожденный парой множеств (X, Y), и $(B, V) \in Ob\mathfrak{M}$. Обозначим через $M = M(B, V)$ множество всех однозначных отображений μ: $(X, Y) \to (B, V)$. Каждое такое отображение продолжается до гомоморфизма модулей $\bar{\mu}$: $(A(X), U(Y)) \to (B, V)$. Обозначим $(A(X)_M, U(Y)_M) = (\bigcap_{\mu \in M} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)}, \bigcap_{\mu \in M} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{U(Y)})$. Из определения видно, что элемент $a \in A(X)$ тогда и только тогда принадлежит $U(Y)_M$-модулю $A(X)_M$, когда этот элемент тождественно обращается в нуль в V-модуле B, и элемент $u \in U(Y)$ тогда и только тогда принадлежит идеалу $U(Y)_M$ кольца $U(Y)$, когда этот элемент тождественно обращается в нуль в кольце V. Идеал $(A(X)_M, U(Y)_M)$ — вполне характеристический идеал модуля $(A(X), U(Y))$. Действительно, для

$$\forall a \in A(X)_M, \ \forall \eta \in End(A(X), U(Y)), \ \forall \mu \in M$$

имеем, что

$$(a\eta_{A(X)})\bar{\mu}_{A(X)} = a(\eta_{A(X)}\bar{\mu}_{A(X)}) = 0, \text{ так как } \eta\mu \in M.$$

Аналогично для

$$\forall u \in U(Y)_M, \ \forall \eta \in End(A(X), U(Y)), \ \forall \mu \in M$$

имеем, что $(u\eta_{U(Y)})\bar{\mu}_{U(Y)} = 0$.

Далее, пусть $\mathbf{N}$ — некоторая полная подкатегория категории $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений. Обозначим через $V'_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$ пересечение всех $(A(X)_{M(B,V)}, U(Y)_{M(B,V)})$ по всем модулям $(B, V) \in \mathbf{N}$. Легко доказать, что имеет место

Предложение 2.2. *Идеал $V'_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$ модуля $(A(X), U(Y))$ совпадает со значением вербала полной подкатегории $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ (замкнутой относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений), на модуле $(A(X), U(Y))$.*

Предложение 2.3. *Пара множеств (Λ_1, Λ_2) ($(\Lambda_1, \Lambda_2) \subseteq (A(X_0), U(Y_0))$) тогда и только тогда определяется некоторой полной подкатегорией $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$, замкнутой относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений,* *когда* (Λ_1, Λ_2) *является вполне характеристическим идеалом модуля* $(A(X_0), U(Y_0))$.

Доказательство. Если (Λ_1, Λ_2) определяется некоторым N, то легко доказать, что

$$(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\bigcap_{(B,V)\in N} A(X_0)_{M(B,V)}, \bigcap_{(B,V)\in N} U(Y_0)_{M(B,V)}) = V_N(A(X_0), U(Y_0)).$$

Обратно. Пусть (Λ_1, Λ_2)—некоторый вполне характеристический идеал в модуле $(A(X_0), U(Y_0))$. Мы покажем, что если паре (Λ_1, Λ_2) отвечает многообразие N, а затем по этому многообразию будем восстанавливать соответствующие тождества (Λ_1', Λ_2'), то мы вернемся к исходным (Λ_1, Λ_2). Действительно, согласно предыдущему (Λ_1', Λ_2') — вполне характеристический идеал модуля $(A(X_0), U(Y_0))$ и, кроме того, этот идеал совпадает с идеалом $V_N(A(X_0), U(Y_0))$ модуля $(A(X_0), U(Y_0))$. Опираясь на полную характеристичность идеала (Λ_1, Λ_2), нетрудно доказать, что фактор-модуль $(A(X_0), U(Y_0))/(\Lambda_1, \Lambda_2)$ принадлежит полной подкатегории N и, следовательно, имеет место включение

$$(\Lambda_1', \Lambda_2') \subseteq (\Lambda_1, \Lambda_2), \text{ так как } (\Lambda_1', \Lambda_2') = V_N(A(X_0), U(Y_0))$$

—это наименьший идеал модуля $(A(X_0), U(Y_0))$, фактор-модуль по которому принадлежит подкатегории N. Обратное включение содержится в определениях. Предложение 2.3 доказано.

Перед тем, как доказать аналог теоремы Биркгофа для категории $\mathfrak{M}$, скажем еще несколько слов по поводу идеала, определяемого многообразием в свободном модуле этой категории.

Пусть $(A(X), U(Y))$ — свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, а N — некоторое многообразие, определенное тождеством (Λ_1, Λ_2) ((Λ_1, Λ_2)— вполне характеристический идеал модуля $(A(X_0), U(Y_0))$), и пусть $V_N(A(X), U(Y)) = (V_N(A(X)), V_N(U(Y)))$ — значение вербала многообразия N на модуле $(A(X), U(Y))$. Если $a_0 \in \Lambda_1$ и $\mu: (X_0, Y_0) \to (A(X), U(Y))$ — некоторое однозначное отображени; (отображение μ продолжается до гомоморфизма $\bar{\mu}: (A(X_0), U(Y_0)) \to (A(X), U(Y))$), то при таком отображении элемент $a_0 \in \Lambda_1$ принимает определенное значение в $A(X)$, скажем $\tilde{a}_0$. Обозначим через A_1 $U(Y)$-подмодуль $U(Y)$-модуля $A(X)$, порожденный всевозможными $\tilde{a}_0$ по всем $a_0 \in \Lambda_1$ и всевозможным μ. Так как для любого модуля $(B, V) \in N$ и для

$$\forall \mu \in M(B, V),\ A_1 \subseteq \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)}, \text{ то } A_1 \subseteq \bigcap_{\substack{\mu \in M(B,V) \\ (B,V)\in N}} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)} = V_N(A(X)).$$

Пусть далее $\bar{U}$ — идеал кольца $U(Y)$, порожденный всеми значениями слов из идеала Λ_2 кольца $U(Y_0)$ в кольце $U(Y)$. $\bar{U}$—вполне характеристический идеал кольца $U(Y)$, и так как для любого модуля $(B, V) \in N$ и для $\forall \mu \in M(B, V)$, $\bar{U} \subseteq \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{U(Y)}$, то $\bar{U} \subseteq V_N(U(Y))$. Обозначим через $(\bar{A}, \bar{U})$ идеал модуля $(A(X), U(Y))$, порожденный подмодулем $(A_1, \bar{U})$. Очевидно, что $\bar{A} \subseteq V_{\mathbf{N}}(A(X))$ и что $(A(X), U(Y))/(\bar{A}, \bar{U}) \in \mathbf{N}$. Отсюда следует, что $\bar{A} = V_{\mathbf{N}}(A(X))$ и $\bar{U} = V_{\mathbf{N}}(U(Y))$.

Теорема 2.1. *Полная подкатегория* $\mathbf{N}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда является многообразием, когда эта полная подкатегория замкнута относительно операций взятия подмодулей, гомоморфных образов и прямых произведений.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что любое многообразие модулей категории $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно этих трех операций. Обратно. Пусть полная подкатегория $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ обладает этим свойством замкнутости и этой подкатегории $\mathbf{N}$ в модуле $(A(X_0), U(Y_0))$ соответствует пара множеств (Λ_1, Λ_2). Эта пара множеств (Λ_1, Λ_2) определяет некоторое многообразие $\bar{\mathbf{N}}$. Очевидно, что $\mathbf{N} \subseteq \bar{\mathbf{N}}$. Для того чтобы показать, что $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}$, достаточно показать, что в подкатегории $\mathbf{N}$ содержится любой свободный модуль многообразия $\bar{\mathbf{N}}$.

Пусть $(A(X), U(Y))$ — любой свободный модуль категории $\mathfrak{M}$, $V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) = (V_{\mathbf{N}}(A(X)), V_{\mathbf{N}}(U(Y)))$ — значение вербала полной подкатегории $\mathbf{N}$ на модуле $(A(X), U(Y))$, и $V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y)) = (V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X)), V_{\bar{\mathbf{N}}}(U(Y)))$ — значение вербала многообразия $\bar{\mathbf{N}}$ на модуле $(A(X), U(Y))$. Так как $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$, то $V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y)) \subseteq V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y))$. Докажем обратное включение.

Пусть $\tilde{a} \in V_{\mathbf{N}}(A(X))$. В записи этого элемента $\tilde{a}$ участвует лишь конечное число элементов $x \in X$ и $y \in Y$, поэтому в $U(Y_0)$-модуле $A(X_0)$ можно найти такое a_0, что $\tilde{a}$ является значением этого a_0 в $U(Y)$-модуле $A(X)$. При этом, так как $V_{\mathbf{N}}(A(X)) = \bigcap\limits_{\substack{\mu \in M(B, V) \\ (B, V) \in \mathbf{N}}} \operatorname{Ker} \bar{\mu}_{A(X)}$, то можно утверждать, что во всех модулях подкатегории $\mathbf{N}$ имеет место тождество $a_0 \equiv 0$ и, следовательно, $a_0 \in \Lambda_1$. Поэтому, вспоминая строение $\bar{U}$-модуля $\bar{A}$ (см. стр. 221), можно утверждать, что $\tilde{a} \in \bar{A} = V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X))$. Значит $V_{\mathbf{N}}(A(X)) \subseteq V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X))$. Аналогично устанавливается включение $V_{\mathbf{N}}(U(Y)) \subseteq V_{\bar{\mathbf{N}}}(U(Y))$.

Мы получили, что $V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) = V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y))$. Из этого следует, что $(A(X), U(Y))/V_{\bar{\mathbf{N}}}(A(X), U(Y)) = (A(X), U(Y))/V_{\mathbf{N}}(A(X), U(Y)) \in \mathbf{N}$. Значит, в полной подкатегории $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ содержатся все свободные модули многообразия $\bar{\mathbf{N}}$ и поэтому $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}$. Теорема 2.1 доказана.

Перейдем теперь к описанию многообразий категории $\mathfrak{M}$.

Зафиксируем некоторую тройку вида (n, T, T'), где n — натуральное число или бесконечность, а T и T' — некоторые, может быть, тривиальные многообразия ассоциативных колец, и рассмотрим те модули $(A, U) \in \mathfrak{M}$, для которых выполнены условия:

1) $\forall a \in A,\ na = 0$,

2) $U \in T$,

3) $\forall a \in A\ \forall u \in V_{T'}(U)$ ($V_{T'}(U)$ — это вербал многообразия T'), $a \cdot u = 0$.

Покажем, что такие модули образуют многообразие в категории $\mathfrak{M}$, которое мы обозначим $\mathbf{N}_{n,\, T,\, V_{T'}}$.

Действительно

а) Пусть μ: $(A, U) \to (C, W)$ — мономорфизм и модуль $(C, W) \in \mathbf{N}_{n,\, T,\, V_{T'}}$.

Тогда

1) $\forall a \in A$, $(na)\mu = n(a\mu_A) = 0 \Rightarrow na = 0$.

2) $U \in T$, так как μ_U: $U \to W$-мономорфизм и $W \in T$.

3) $\forall a \in A$, $\forall u \in V_{T'}(U)$, $(a \cdot u)\mu_A = (a\mu_A)\cdot(u\mu_U) = 0$, так как имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} V_{T'}(U) \arrow[r, "\lambda_U"] \arrow[d, "V_{T'}(\mu_U)"] & U \arrow[d, "\mu_U"] \\ V_{T'}(W) \arrow[r, "\lambda_W"] & W \end{tikzcd}$$

и, следовательно, $u\mu_U \in V_{T'}(W)$. Значит, модуль $(A, U) \in \mathbf{N}_{n,\, T,\, V_{T'}}$.

б) Пусть θ: $(A, U) \to (C, W)$ — нормальный эпиморфизм и модуль $(A, U) \in \mathbf{N}_{n,\, T,\, V_{T'}}$. Тогда

1) $\forall c \in C\ \exists\, a_c \in A$ такое, что $a_c\theta_A = c$. Поэтому $nc = n(a_c\theta_A) = (na_c)\theta_A = 0$.

2) $W \in T$, так как θ_U: $U \to W$ является нормальным эпиморфизмом и $U \in T$.

3) Так как $V_{T'}$ — вербал многообразия T', то имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} V_{T'}(U) \arrow[r, "\lambda_U"] \arrow[d, "V_{T'}(\theta_U)"] & U \arrow[d, "\theta_U"] \\ V_{T'}(W) \arrow[r, "\lambda_W"] & W \end{tikzcd}$$

где $V_{T'}(\theta_U)$: $V_{T'}(U) \to V_{T'}(W)$ является нормальным эпиморфизмом (см. [3], теорема IV.5.10). Поэтому $\forall c \in C\ \exists a_c \in A$ такое, что $a_c\theta_A = c$ и $\forall w \in V_{T'}(W)\ \exists\, u_w \in V_{T'}(U)$ такое, что $u_w V_{T'}(\theta_U) = w$ и, значит,

$c\cdot w=(a_c\cdot u_w)\,\theta_A=0$. Получили, что модуль $(C,\ W)\in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

в) Пусть $(A_\alpha,\ U_\alpha)\in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$ $(\alpha\in I)$. Покажем, что модуль

$$(A,\ U)=\prod_{\alpha\in I}^{x}(A_\alpha,\ U_\alpha)(\pi_\alpha=(\pi_{A_\alpha},\ \pi_{U_\alpha}))=$$

$$=(\prod_{\alpha\in I}^{x}A_\alpha\,(\pi_{A_\alpha}),\ \prod_{\alpha\in I}^{x}U_\alpha\,(\pi_{U_\alpha}))\in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}.$$

Действительно

1) $\forall a\in \prod\limits_{\alpha\in I}^{x}A_\alpha,\ a=(a_\alpha)_{\alpha\in I},\ na=(na_\alpha)_{\alpha\in I}=(0)_{\alpha\in I}$.

2) $\prod\limits_{\alpha\in I}^{x}U_\alpha\in T$, так как для $\forall\alpha\in I,\ U_\alpha\in T$.

3. $\forall\alpha\in I,\ \forall a_\alpha\in A_\alpha,\ \forall u_\alpha\in V_{T'}(U_\alpha),\ a_\alpha\cdot u_\alpha=0$. Покажем, что $\forall a\in A$, $\forall u\in V_{T'}(U),\ a\cdot u=0$.

Действительно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
V_{T'}(\prod\limits_{\alpha\in I}^{x}U_\alpha) \arrow[r, "\lambda_{\Pi^x}"] \arrow[d, "V_{T'}(\pi_{U_\alpha})"'] & \prod\limits_{\alpha\in I}^{x}U_\alpha \arrow[d, "\pi_{U_\alpha}"] \\
V_{T'}(U_\alpha) \arrow[r, "\lambda_\alpha"] & U_\alpha
\end{tikzcd}$$

Из этой диаграммы видно, что для $\forall\alpha\in I\,\forall a\in A$ и $\forall u\in V_{T'}(U)$,

$$(a\cdot u)\,\pi_{A_\alpha}=(a\pi_{A_\alpha})\cdot(u\,\pi_{U_\alpha})=a_\alpha\cdot u_\alpha=0.$$

Это равенство имеет место для $\forall\alpha\in I$. Значит,

$$\forall a\in A\ \forall u\in V_{T'}(U),\ a\cdot u=0,\ \text{так как}\ A=\prod_{\alpha\in I}^{x}A_\alpha\,(\pi_{A_\alpha}).$$

Получили, что модуль $\prod\limits_{\alpha\in I}^{x}(A_\alpha,\ U_\alpha)\in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$.

Мы показали, что для любой фиксированной тройки вида $(n,\ T,\ T')$, где n — натуральное число, или же $n=\infty$, а T и T' — некоторые, может быть тривиальные многообразия категории ассоциативных колец, $\mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$ является многообразием категории $\mathfrak{M}$.

Замечание 2.1. Заранее можно считать, что $T'\subseteq T$. Действительно, так как кольцо $U\in T$, то $V_{T'}(U)=V_{T'\cap T}(U)$.

Замечание 2.2. Обозначим многообразие ассоциативных колец с одним тождеством $\{kx=0\}$ $(k\in N)$, P_k. Так как для любого модуля $(A,\ U)\in \mathbf{N}_{n,\ T,\ V_{T'}}$, $A\cdot(nU)=(nA)\cdot U=0$, то $nU\subseteq V_{T'}(U)$. Значит $V_{P_n}(U)=nU\subseteq V_{T'}(U)$, т. е. $T'\subseteq P_n$.

Из замечаний 2.1 и 2.2 вытекает, что $T'\subseteq T\cap P_n$.

В дальнейшем, рассматривая многообразие $\mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$, мы всегда будем иметь в виду, что тройка $(n,\ T,\ T')$ удовлетворяет условиям замечаний 2.1 и 2.2.

Теорема 2.2. *Для любого многообразия* $\mathbf{N}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *существует такая фиксированная тройка вида* $(n,\ T,\ T')$ ($n \in N$ *или же* $n = \infty$; T *и* T' — *некоторые, может быть тривиальные многообразия категории ассоциативных колец, удовлетворяющие условию* $T' \subseteq T \cap P_n$), *что* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$.

Доказательство. Возьмем любое многообразие $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$. Рассмотрим все модули $(A,\ U) \in \mathbf{N}$. Модули $(A,\ O)$ и $(O,\ U)$ как подмодули модулей $(A,\ U) \in \mathbf{N}$ принадлежат многообразию $\mathbf{N}$. При сопоставлении каждому модулю вида $(A,\ O)$ абелевой группы A, получаем изоморфизм между полной подкатегорией $\mathbf{N}_0$ модулей вида $(A,\ O) \in \mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ и полной подкатегорией L категории абелевых групп. Аналогично, при сопоставлении каждому модулю вида $(O,\ U)$ ассоциативного кольца U, получаем изоморфизм между полной подкатегорией ${}_0N$ модулей вида $(0,\ U) \in \mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ и полной подкатегорией T категории ассоциативных колец. Поскольку $\mathbf{N}_0$ является многообразием в категории $\mathfrak{M}$, L является многообразием категории абелевых групп. Значит, либо существует такое натуральное число n, что $na = 0$ для любого элемента a абелевой группы $A \in \mathbf{L}$, либо подкатегория L совпадает со всей категорией абелевых групп. Отсюда вытекает, что модуль $(A,\ O) \in \mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда $na = 0$, для $\forall a \in A$, либо когда A — любая абелева группа. Аналогично, поскольку ${}_0\mathbf{N}$ является многообразием в категории $\mathfrak{M}$, T является многообразием категории ассоциативных колец.

Зафиксируем некоторое кольцо $U \in T$ и рассмотрим все модули $(A,\ U) \in \mathbf{N}$. Покажем, что модули такого вида составляют многообразие C_U в категории $\mathfrak{M}_U$ — правых модулей над кольцом U. Действительно, для подмодулей и эпиморфных образов модулей все ясно. Пусть дано некоторое семейство модулей $\{(A_\omega,\ U)\}_{\omega \in \Omega}$ таких, что $(A_\omega,\ U) \in \mathbf{N}$ $(\omega \in \Omega)$. Для $\forall \omega \in \Omega$, $(A_\omega,\ U) \in \mathbf{N}$, поэтому $\prod\limits_{\omega \in \Omega}^{x} (A_\omega,\ U) = (\prod\limits_{\omega \in \Omega}^{x} A_\omega,\ \prod\limits_{\omega \in \Omega}^{x} U) \in \mathbf{N}$. Рассмотрим отображение

$$\sigma = (1,\ \sigma_U)\colon (\prod_{\omega \in \Omega}^{x} A_\omega,\ U) \to (\prod_{\omega \in \Omega}^{x} A_\omega,\ \prod_{\omega \in \Omega}^{x} U),$$

определенное так:

$$\forall u \in U,\ u\sigma_U = (u)_{\omega \in \Omega}.$$

Легко видеть, что σ — гомоморфизм. Ясно, что σ — мономорфизм. Следовательно, U-модуль $(\prod\limits_{\omega \in \Omega}^{x} A_\omega,\ U) \in \mathbf{N}$.

Значит, все модули вида $(A,\ U) \in \mathbf{N}$ $(U \in T$, кольцо U зафиксировано) составляют некоторое многообразие C_U в категории $\mathfrak{M}_U$. Поэтому существует такой двусторонний идеал $\overline{U}$ кольца U, что $A \cdot \overline{U} = O$ для $\forall A \in \mathbf{L}$ такого, что $(A,\ U) \in \mathbf{N}$.

Мы получили, что в любом кольце $U \in T$ зафиксирован такой двусторонний идеал $\overline{U}$, что для любой абелевой группы $A \in \mathrm{L}$ такой, что $(A, U) \in \mathrm{N}$, $A \cdot \overline{U} = O$. Покажем, что в многообразии T существует такое многообразие T', что $V_{T'}(U) = \overline{U}$. Тем самым, мы покажем (см. [3], следствие IV. 5.5), что в категории ассоциативных колец существует такое многообразие T', что значение вербала $V_{T'}$ на каждом кольце $U \in T$ совпадает с идеалом $\overline{U}$, $V_{T'}(U) = \overline{U}$.

Действительно, пусть $\varphi: U \to W$ $(U, W \in T)$ — некоторый гомоморфизм колец. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] & W \\ V_{T'}(U) = \overline{U} \arrow[u, "\sigma_{\overline{U}}"] \arrow[r, "V_{T'}(\varphi)"] & \overline{W} = V_{T'}(W) \arrow[u, "\sigma_{\overline{W}}"'] \end{tikzcd}$$

где $\sigma_{\overline{U}}$, $\sigma_{\overline{W}}$ — вложения идеалов $\overline{U}$, $\overline{W}$ соответственно в кольца U и W. Отображение $V_{T'}(\varphi)$: $\overline{U} \to \overline{W}$ определим так: $\forall \bar{u} \in \overline{U}$, $\bar{u} V_{T'}(\varphi) = \bar{u} \varphi$. Покажем, что $\mathrm{Im}\, V_{T'}(\varphi) \subseteq \overline{W}$.

Возьмем любой модуль $(A, W) \in \mathrm{N}$ и возьмем модуль $(O, U) \in \mathrm{N}$. Построим модуль (A, U), где отображение $A \times U \to A$ определено так: $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $a \circ u = a \cdot (u\varphi)$. Покажем, что модуль $(A, U) \in \mathrm{N}$. Действительно, $(O, U) \in \mathrm{N}$ и $(A, W) \in \mathrm{N}$, поэтому $(O \times A, U \times \times W) \in \mathrm{N}$. Рассмотрим отображение $\tau = (\tau_A, \tau_U)$: $(A, U) \to (O \times A, U \times W)$, которое определено так: $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $a\tau_A = (0, a)$, $u\tau_U = (u, u\varphi)$. Очевидно, что τ_A — гомоморфизм групп, τ_U — гомоморфизм колец, и так как для $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $(a \circ u)\tau_A = (0, a \cdot (u\varphi)) = (0, a)(u, u\varphi) = (a\tau_A) \cdot (u\tau_U)$, то τ — гомоморфизм модулей. Нетрудно заметить, что τ — мономорфизм, поэтому модуль $(A, U) \in \mathrm{N}$. Значит, для любой абелевой группы $A \in \mathrm{L}$ такой, что $(A, W) \in \mathrm{N}$, ввиду того, что $(A, U) \in \mathrm{N}$, имеем равенство $\forall a \in A\ \forall \bar{u} \in \overline{U}$, $a \cdot (\bar{u}\varphi) = a \circ \bar{u} = 0$. Следовательно, $\overline{U}\varphi = \mathrm{Im}\, V_{T'}(\varphi) \subseteq \overline{W}$.

Очевидно, что $V_{T'}(\varphi)$ — гомоморфизм колец, и диаграмма (*) коммутативна.

Мы показали, что $(V_{T'}, \sigma)$ — нормальный подфунктор (для любого кольца $U \in T$, $\sigma_{\overline{U}}$ — вложение идеала) (см. [3], стр. 155) тождественного функтора I_T категории T. Покажем, что $(V_{T'}, \sigma)$ — вербальный подфунктор. Для этого достаточно показать (см. [3], теорема IV. 5.10), что функтор $V_{T'}$ переводит нормальные эпиморфизмы в нормальные эпиморфизмы.

Пусть кольца U и W принадлежат многообразию T, и θ: $U \to W$ — нормальный эпиморфизм. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\theta \arrow[r] & \mathcal{U} \arrow[r, "\theta"] & W \\
\mathcal{U}^* \arrow[ru] & & \\
V_{T'}(\mathcal{U})=\bar{\mathcal{U}} \arrow[uu, "\sigma_{\bar{\mathcal{U}}}"'] \arrow[rr, "V_{T'}(\theta)"] & & \bar{W}=V_{T'}(W) \arrow[uu, "\sigma_{\bar{W}}"']
\end{tikzcd}$$

где U^* — полный прообраз идеала $\bar{W}$ при эпиморфизме θ. Покажем, что $V_{T'}(\theta)$ — нормальный эпиморфизм, т. е. $\operatorname{Im} V_{T'}(\theta)=\bar{W}$.

Предположим обратное, что $\bar{U}\,V_{T'}(\theta)\subset\bar{W}$. Рассмотрим идеал $\{\operatorname{Ker}\theta\cup\bar{U}\}$, порожденный множеством $\operatorname{Ker}\theta\cup\bar{U}$. Идеал $\{\operatorname{Ker}\theta\cup\bar{U}\}\subset\subset U^*$. Построим кольцо с единицей $U^{(1)}=\{U, 1\}$, элементами которого являются пары вида (n, u) $(n\in N, u\in U)$. В этом кольце операции сложения и умножения определены по формулам:

$$(n, u)+(m, u')=(n+m, u+u'),\ (n, u)\cdot(m, u')=(nm, uu'+nu'+mu).$$

Роль единицы этого кольца $U^{(1)}$ играет пара (1,0). Отметим, что сопоставление $u\to(0, u)$ является мономорфизмом кольца U в кольцо $U^{(1)}$ и при этом кольцо U так же, как и все идеалы кольца U, являются идеалами в кольце $U^{(1)}$.

Рассмотрим идеал $U'=\{\operatorname{Ker}\theta\cup\bar{U}\cup nU^{(1)}\}$ кольца $U^{(1)}$, порожденный множеством $\operatorname{Ker}\theta\cup\bar{U}\cup n\,U^{(1)}$ и возьмем U-модуль $\tilde{U}^{(1)}=U^{(1)}/U'$. Идеал $U'\neq U^{(1)}$, поэтому $\tilde{U}^{(1)}$ — ненулевой модуль. Обозначим этот модуль $(\tilde{U}, U)$. Имеем, что

1) $n\,\tilde{U}^{(1)}=O$.

2) $(O, U)\in\mathbf{N}$, потому что по условию кольцо $U\in T$.

3) U-модуль $\tilde{U}^{(1)}$ принадлежит многообразию C_U категории модулей $\mathfrak{M}_U$, так как $\tilde{U}^{(1)}\cdot\bar{U}=O$. Следовательно, модуль $(\tilde{U}^{(1)}, U)\in\in\mathbf{N}$, ввиду того, что многообразие $\mathbf{N}$ содержит все такие модули.

По условию, $\theta\colon U\to W$ — нормальный эпиморфизм, поэтому $W\cong U/\operatorname{Ker}\theta$. Далее, $\tilde{U}^{(1)}\cdot\operatorname{Ker}\theta=O$, следовательно, пара $(\tilde{U}^{(1)}, W)$ является модулем, и существует гомоморфизм модулей $(1, \theta)$: $(\tilde{U}^{(1)}, U)\to\to(\tilde{U}^{(1)}, W)$. Мы получили, что модуль $(\tilde{U}^{(1)}, W)\in\mathbf{N}$, так как модуль $(\tilde{U}^{(1)}, U)\in\mathbf{N}$ и $(1, \theta)$ — нормальный эпиморфизм, в силу предложения 1.5. Значит, для любого $((n, u)+U')\in\tilde{U}^{(1)}$ и для любого $\bar{w}\in\bar{W}$ имеем, что $((n, u)+U')\cdot\bar{w}=(0, 0)+U'$.

По предположению, идеал $\{\operatorname{Ker}\theta\cup\bar{U}\}$ строго лежит в идеале U^*, поэтому найдется элемент $\bar{w}\in\bar{W}$, для которого не существует элемента $u \in \{\mathrm{Ker}\,\theta \cup \overline{U}\}$, такого, что $u\theta = \overline{w}$. Но кольцо $W \cong U/\mathrm{Ker}\,\theta$, значит существует такой элемент $u^* \in U^*$, что $\overline{w} = u^* + \mathrm{Ker}\,\theta$. Из сказанного выше следует, что $u^* \overline{\in} \{\mathrm{Ker}\,\theta \cup \overline{U}\}$.

Для любого модуля $(A, U) \in \mathbf{N}$ имеем, что $\forall a \in A\ \forall u \in U$, $a\cdot(nu) = (na)\cdot u = 0$. Поэтому $nU \subseteq \overline{U}$ и, следовательно, $u^* \overline{\in} nU$, так как $u^* \overline{\in} \overline{U}$. Значит, не существует такого элемента $u \in U$, для которого выполнялось бы равенство $u^* = nu$, поэтому не существует такого элемента $(k, u) \in U^{(1)}$, который удовлетворял бы равенству $u^* = n\,(k, u) = (nk, nu)$. Мы получили, что $u^* \overline{\in} nU^{(1)}$, а так как $u^* \overline{\in} \{\mathrm{Ker}\,\theta \cup \overline{U}\}$, то $u^* \overline{\in} U'$. Отсюда вытекает, что для элемента $((1,0) + U') \in \overline{U}^{(1)}$, $((1,0) + U')\cdot \overline{w} = ((1,0) + U')(u^* + \mathrm{Ker}\,\theta) = (0, u^*) + U' \neq (0,0) + U'$.

Получили противоречие. Значит, $\mathrm{Im}\,V_{T'}(\theta) = \overline{W}$, т. е. $V_{T'}$ является вербалом некоторого многообразия T' категории T и, следовательно, как уже отмечали выше, является вербалом многообразия T' категории всех ассоциативных колец.

Мы показали, что для любого многообразия $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{M}$ существует такая тройка вида $(n, T, T')(n \in N$, или же $n = \infty$, T и T' некоторые многообразия категории ассоциативных колец такие, что $T' \subseteq T \cap P_n)$, что $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$. Обратно. Возьмем любой модуль $(B, W) \in \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$. Модуль $(O, W) \in \mathbf{N}$, так как многообразие $\mathbf{N}$ содержит все такие модули. Далее, $B\cdot V_{T'}(W) = B\cdot\overline{W} = O$, поэтому W-модуль B принадлежит многообразию C_W категории $\mathfrak{M}_W$. Следовательно, модуль $(B, W) \in \mathbf{N}$, так как многообразие $\mathbf{N}$ содержит все такие модули. Мы получили, что $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$.

Теорема 2.2 доказана.

Тройки (n_1, T_1, T_1') и (n_2, T_2, T_2') считаются равными, если

$$n_1 = n_2,\ T_1 = T_2,\ T_1' = T_2'.$$

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между всеми тройками вида (n, T, T'), где $T' \subseteq T \cap P_n$ и всеми многообразиями $\mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть $n_1 \neq n_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $n_1 > n_2$. Тогда модуль $(Z_{n_1}, O) \in \mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T_1'}}$, но $(Z_{n_1}, O) \overline{\in} \mathbf{N}_{n_2,\,T_2,\,V_{T_2'}}$, так как $n_2 Z_{n_1} \neq O$.

б) Пусть $n_1 = n_2$, но $T_1 \neq T_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $T_1 \not\subseteq T_2$. Тогда существует такое кольцо $U \in T_1$, что $U \overline{\in} T_2$. Ясно, что модуль $(O, U) \in \mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T_1'}}$, но $(O, U) \overline{\in} \mathbf{N}_{n_2,\,T_2,\,V_{T_2'}}$.

в) Пусть $n_1 = n_2$, $T_1 = T_2$, но $T_1' \neq T_2'$. Ввиду того, что $T_1' \subseteq T_1$, $T_2' \subseteq T_2$ и $T_1 = T_2$, существует такое кольцо $U \in T_1$, что $V_{T_1'}(U) \neq$

$\neq V_{T_2'}(U)$. Не нарушая общности, можно считать, что $V_{T_2'}(U) \supseteq$ $\supseteq V_{T_1'}(U)$. Поэтому существует такой элемент $u_2' \in V_{T_2'}(U)$, что $u_2' \bar{\in} V_{T_1'}(U)$. Рассмотрим модуль $(Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U)), U)$, где операция $(Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U))) \times U \to Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U))$ определена так:

$$\forall (k + n_1 Z) \in Z_{n_1}, \ \forall (u + V_{T_1'}(U)) \in U/V_{T_1'}(U), \ \forall u' \in U,$$

$$(k + n_1 Z, \ u + V_{T_1'}(U)) \cdot u' = (0 + n_1 Z, \ (uu' + ku') + V_{T_1'}(U)).$$

Легко проверить, что этот модуль принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{n_1, T_1, V_{T_1'}}$, но не принадлежит многообразию $\mathbf{N}_{n_2, T_2, V_{T_2'}}$, так как для элемента

$$(1 + n_1 Z, \ 0 + V_{T_1'}(U)) \in (Z_{n_1} \times (U/V_{T_1'}(U)))$$

имеем, что

$$(1 + n_1 Z, 0 + V_{T_1'}(U)) \cdot u_2' = (0 + n_1 Z, \ u_2' + V_{T_1'}(U)) \neq$$

$$\neq (0 + n_1 Z, \ 0 + V_{T_1'}(U)), \quad \text{ибо} \quad u_2' \bar{\in} V_{T_1'}(U).$$

Предложение 2.4 доказано.

П р е д л о ж е н и е 2.5. *Для данного многообразия* $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$ *значение вербала и рефлектора на любом модуле* $(A, U) \in \mathfrak{M}$ *имеют вид*

$$V_{\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}}(A, U) = (\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ V_T(U)),$$

$$R_{\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}}(A, U) = (A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ U/V_T(U)),$$

где $\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}$ — *подгруппа абелевой группы* A, *порожденная множеством* $nA \cup A \cdot V_{T'}(U)$, *и имеет место следующая короткая точная последовательность*:

$$(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ V_T(U)) \xrightarrow{\sigma} (A, U) \xrightarrow{\theta} (A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},$$
$$U/V_T(U)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный модуль $(A, U) \in \mathfrak{M}$. Легко видеть, что пара $(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ V_T(U)) \in Ob\mathfrak{M}$. Подмодуль $(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ V_T(U))$ модуля (A, U) является идеалом модуля (A, U), так как $V_T(U) \subseteq V_{T'}(U)$, в силу замечания 2.1. Значит, можно рассмотреть следующую короткую точную последовательность:

$$(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ V_T(U)) \xrightarrow{\sigma} (A, U) \xrightarrow{\theta} (A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},$$
$$U/V_T(U)).$$

Нетрудно заметить, что модуль

$$(A/\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\}, \ U/V_T(U)) \in \mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}.$$

Из свойства коядра легко следует, что этот модуль совпадает со значением рефлекторного фактор-функтора многообразия $\mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$ на модуле $(A,\ U)$ и, значит, идеал $(\{nA \cup A \cdot V_{T'}(U)\},\ V_T(U))$ совпадает со значением вербального подфунктора многообразия $\mathbf{N}_{n,\,T,\,V_{T'}}$ на модуле $(A,\ U)$. Предложение 2.5 доказано.

Из теорем 2.1, 2.2 и предложений 2.3, 2.5 получаем

Следствие 2.6. Для любого вполне характеристического идеала $(\bar{A},\ \bar{U})$ свободного модуля $(A(X),\ U(Y))$ категории $\mathfrak{M}$ с системой свободных образующих $(X,\ Y)$, где X и Y—счетные множества, существует такая фиксированная тройка вида $(n,\ T,\ T')$ ($n \in N$, или же $n = \infty$; T и T'—некоторые многообразия категории ассоциативных колец, удовлетворяющие условию $T' \subseteq T \cap P_n$), что

$$(\bar{A},\ \bar{U}) = (\{nA(X) \cup A(X) \cdot V_{T'}(U(Y))\},\ V_T(U(Y))).$$

Замечание 2.3. Пусть T_1 и T_2—некоторые многообразия ассоциативных колец. Для любого ассоциативного кольца U, $V_{T_1}(U) \times \times V_{T_2}(U)$ является идеалом этого кольца. Легко доказать, что существует такое многообразие ассоциативных колец, обозначим его $[T_1,\ T_2]$, что для любого ассоциативного кольца U, $V_{T_1}(U) \cdot V_{T_2}(U) = V_{[T_1,\,T_2]}(U)$.

Ясно, что $T_1 \subseteq [T_1,\ T_2]$ и $T_2 \subseteq [T_1,\ T_2]$.

Теорема 2.3. *Произведение любых двух многообразий* $\mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T'_1}}$ *и* $\mathbf{N}_{n_2,\,T_2,\,V_{T'_2}}$ *определяется по формуле*

$$\mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T'_1}} \cdot \mathbf{N}_{n_2,\,T_2,\,V_{T'_2}} = \mathbf{N}_{n_1 n_2,\,T_1 T_2,\,V_{T'}},$$

где

$$T' = T'_1 P_{n_2} \cap (T_1 T'_2) P_d \cap [T_1,\ T_1 T'_2] \cap T_1 T_2 \cap P_{n_1 n_2},$$

$$d = (n_1,\ n_2), \quad \text{а} \quad P_k \ (k \in N)$$

обозначает многообразие ассоциативных колец с одним тождеством $\{kx = 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$(\{n_1 A \cup A \cdot V_{T'_1}(U)\},\ V_{T_1}(U)) \xrightarrow{\theta_1} (A,\ U) \xrightarrow{\theta_1} (A/\{n_1 A \cup A \cdot V_{T'_1}(U)\},\ U/V_{T_1}(U)), \qquad (*)$$

где

$$(A/\{n_1 A \cup A \cdot V_{T'_1}(U)\},\ U/V_{T_1}(U)) = R_{\mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T'_1}}}(A,\ U) \in \mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T'_1}}.$$

Модуль $(A,\ U) \in \mathbf{N}_{n_1,\,T_1,\,V_{T'_1}} \cdot \mathbf{N}_{n_2,\,T_2,\,V_{T'_2}}$, тогда и только тогда, когда в точной последовательности $(*)$ модуль

$$(\{n_1 A \cup A \cdot V_{T'_1}(U)\},\ V_{T_1}(U)) \in \mathbf{N}_{n_2,\,T_2,\,V_{T'_2}}$$

(см. [3], лемма IV. 6.5), а для того чтобы модуль $(\{n_1 A \cup A \cdot V_{T'_1}(U)\},$ $V_{T_1}(U))$ принадлежал бы многообразию $\mathbf{N}_{n_2,\, T_2,\, V_{T'_2}}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $n_1 n_2 A = O$,
(2) $V_{T_1}(U) \in T_2$,
(3) $n_2 A \cdot V_{T'_1}(U) = O$,
(4) $n_1 A \cdot V_{T'_2}(V_{T_1}(U)) = O$,
(5) $A \cdot V_{T'_1}(U) \cdot V_{T'_2}(V_{T_1}(U)) = O$.

Так как $T'_1 \subseteq T_1$ в силу замечания 2.1, то $V_{T'_2}(V_{T_1}(U)) \subseteq V_{T_1}(U) \subseteq$ $\subseteq V_{T'_1}(U)$. Поэтому $A \cdot V_{T'_2}(V_{T_1}(U)) \subseteq A \cdot V_{T'_1}(U)$. В силу условия (3) имеем, что

$$n_2 A \cdot V_{T'_2}(V_{T_1}(U)) = O. \tag{4''}$$

Из условий (4) и (4″) следует, что

$$dA \cdot V_{T'_2}(V_{T_1}(U)) = O, \tag{4'''}$$

где $d = (n_1, n_2)$.

Условия (2), (3), (4″), (5) соответственно эквивалентны условиям:

(2′) $U \in T_1 T_2$,

(3′) $A \cdot V_{T'_1 P_{n_2}}(U) = O$,

(4′) $A \cdot V_{(T_1 T'_2) P_d}(U) = O$,

(5′) $A \cdot V_{[T'_1,\ T_1 T'_2]}(U) = O$.

Вспоминая замечания 2.1 и 2.2, видим, что теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.4. Пусть дано многообразие $\mathbf{N}_{n,\, T,\, V_{T'}}$. В случае, когда $T' = T$, мы вместо $\mathbf{N}_{n,\, T,\, V_{T'}}$ будем писать $\mathbf{N}_{n,\, T}$, так как в этом случае $V_{T'}(U) = O$.

Рассмотрим частный случай теоремы 2.3, когда $T_1 = T'_1$ и $T_2 =$ $= T'_2$. В этом частном случае

$$T' = T_1 P_{n_2} \cap (T_1 T_2) P_d \cap [T_1,\ T_1 T_2] \cap T_1 T_2 \cap P_{n_1 n_2} = T_1 T_2,$$

ибо $[T_1,\ T_1 T_2] \supseteq T_1 T_2$, как это уже отмечали в конце замечания 2.3,

$$(T_1 T_2) P_d \supseteq T_1 T_2,\quad T_1 P_{n_2} \supseteq T_1 T_2, \text{ так как } P_{n_2} \supseteq T'_2 = T_2,$$

и умножение многообразий монотонно (см. замечание 2.1 и [3], стр. 237), $P_{n_1 n_2} \supseteq T_1 T_2$, так как из того, что $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$ и из замечаний 2.1 и 2.2 следует включения $T_1 \subseteq P_{n_1}$ и $T_2 \subseteq P_{n_2}$.

Значит, в этом частном случае формула умножения многообразий принимает такой вид, $\mathbf{N}_{n_1, T_1} \cdot \mathbf{N}_{n_2, T_2} = \mathbf{N}_{n_1 n_2, T_1 T_2}$.

§ 3. Бимногообразия в категории $\mathfrak{M}$

В работе [1] при выполнении условий 1)—5) (см. § 1) рассматривалось понятие бимногообразия.

Определение 3.1. Многообразие B категории K называется бимногообразием, если выполнены следующие условия:

г) Для любого семейства объектов $A_i \in B$, $i \in I$, свободное произведение $\prod\limits_{i \in I}^{*} A_i \in B$.

д) Если к B принадлежит подобъект $\langle U, \sigma \rangle$ некоторого объекта A, то к B принадлежит и идеал объекта A, порожденный подобъектом $\langle U, \sigma \rangle$.

В работе [1] доказано, что условия г) и д) эквивалентны условию

е) Каждый объект A категории K обладает наибольшим идеалом $\langle S_A, \mu_A \rangle$, принадлежащим многообразию B и содержащим все подобъекты объекта A, принадлежащие B.

Теорема 3.1. *Многообразие* $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$ *категории* $\mathfrak{M}$ *является бимногообразием тогда и только тогда, когда* $T = T' = P_m$, *где* m — *делитель* n, *если* $n \in N$; *или* m — *любое натуральное число, если* $n = \infty$; *или же* $n = \infty$, $m = \infty$.

Доказательство. Покажем, что любое многообразие вида $\mathbf{N}_{n, P_m}$, где число m удовлетворяет условиям теоремы, является бимногообразием, которое мы обозначим $B_{n, m}$.

Возьмем любой модуль $(A, U) \in \mathfrak{M}$ и рассмотрим его подмодуль $(S_n(A), S_m(U))$, где $S_n(A)$—это множество всех тех элементов $a \in A$, для которых выполнено равенство $na = 0$, а $S_m(U)$ — это множество всех тех элементов $u \in U$, для которых выполнено равенство $mu = 0$. Легко доказать, что $(S_n(A), S_m(U))$ является идеалом модуля (A, U), удовлетворяющим условию е). Мы получили, что $B_{n, m}$ — бимногообразие категории $\mathfrak{M}$. Обратно. Пусть многообразие $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$ является бимногообразием категории $\mathfrak{M}$. Докажем, что существует такое число m, удовлетворяющее условиям теоремы, что $T' = T = P_m$.

Рассмотрим все ассоциативные кольца U такие, что $(A, U) \in \mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$ по крайней мере для одного модуля (A, U), т. е. рассмотрим все такие ассоциативные кольца U, что модули вида (O, U) принадлежат бимногообразию $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$. Эти кольца образуют многообразие T в категории ассоциативных колец. Из построения свободного произведения модулей следует, что для любого семейства колец $U_i \in T$, $i \in I$, свободное произведение $\prod\limits_{i \in I}^{*} U_i \in T$.

Пусть U — такое подкольцо некоторого ассоциативного кольца W, что модуль вида $(O, U) \in \mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$. Для любого модуля $(B, W) \in$

$\in Ob\mathfrak{M}$, идеал, порожденный в этом модуле подмодулем (O, U), принадлежит бимногообразию $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$. Поэтому модуль $(O, \overline{U})$, где $\overline{U}$ — идеал, порожденный подкольцом U в кольце W, принадлежит бимногообразию $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}}$.

Мы получили, что многообразие T является бимногообразием. Из результатов работы [1] следует, что $T = P_m$, где m — либо натуральное число, либо бесконечность. Покажем, что если $n \in N$, то m — делитель n. Возьмем такую абелеву группу A, что $\forall a \in A$, $na = 0$, и такое ассоциативное кольцо U с единицей 1, что $m \cdot 1 = 0$. Модули (A, O) и (O, U) принадлежат бимногообразию $\mathbf{N}_{n, T, V_{T'}} = \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$, так как это бимногообразие содержит все такие модули. Рассмотрим модуль (A, U), для которого операция умножения определена по формуле $a \cdot u = 0$ для $\forall a \in A$ и $\forall u \in U$. Обозначим его $(A, U)_0$. Построим далее модуль $(A \times U, U)$, где операция умножения определена по формуле $(a, u) \cdot u' = (0, uu')$ и построим отображение σ: $(A, U)_0 \to (A \times U, U)$, которое определяется так: $\forall a \in A$, $a\sigma_A = (a, 0)$ и $\forall u \in U$, $u\sigma_U = u$. Для

$$\forall a \in A,\ \forall u \in U,\ (a \cdot u)\,\sigma_A = (a \cdot u,\ 0) = (0,0) = (a,\ 0) \cdot u = (a\sigma_A) \cdot (u\sigma_U),$$

поэтому σ — гомоморфизм модулей. Ясно, что σ — мономорфизм.

Модуль $(A, U)_0 \in \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$, так как из $(A, O) \in \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$ и

$(O, U) \in \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$ следует, что $(A, O) \times (O, U) \cong (A, U)_0 \in \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$.

По условию $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$ — бимногообразие, поэтому идеал, порожденный подмодулем $(A, U)_0$ в модуле $(A \times U, U)$, должен принадлежать $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$. Идеалом, порожденным подмодулем $(A, U)_0$ в модуле $(A \times U, U)$ будет $(A \times U, U)$, так как подгруппой $\overline{D}$, порожденной в абелевой группе $A \times U$ множеством

$$D = A \cup A \cdot U \cup (A \times U) \cdot U = A \cup (A \times U) \cdot U$$

будет

$$\overline{D} = \{A \cup (A \times U) \cdot U\} \cong \{(A, O) \cup (O, U)\} = A \times U.$$

Но если m не является делителем n, то $n(a, u) = (0, nu) \neq (0, 0)$. Это противоречит тому, что модуль $(A \times U, U) \in \mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$. Следовательно, n делится на m.

Мы знаем, что $T' \subseteq T = P_m$. Докажем, что $T' = P_m$. Предположим обратное, что $T' \subset P_m$. Это значит, что существует такое кольцо $U \in P_m$, что $V_{T'}(U) \neq O$. Построим кольцо $U^{(1)} = \{U, 1\}$ (см. стр. 227) и рассмотрим ненулевой правый U-модуль $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U)$. Модули $(U^{(1)}/nU^{(1)}, O)$ и (O, U) принадлежат бимногообразию $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$, потому что $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$ содержит все такие модули. Так как $\mathbf{N}_{n, P_m, V_{T'}}$ —

бимногообразие, то модуль $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U) \in \mathfrak{M}$ обладает наибольшим идеалом, принадлежащим $\mathrm{N}_{n,P_m,V_{T'}}$ и содержащим все подмодули модуля $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U)$, принадлежащие $\mathrm{N}_{n,P_m,V_{T'}}$. В частности, этот идеал должен содержать подмодули $(U^{(1)}/nU^{(1)}, O)$ и (O, U). Следовательно, этот идеал совпадает с самим модулем $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U)$. Мы получили, что модуль $(U^{(1)}/nU^{(1)}, U) \in \mathrm{N}_{n,P_m,V_{T'}}$. Из этого следует, что для любого элемента $(k, u) + nU^{(1)}$ абелевой группы $U^{(1)}/nU^{(1)}$ и для $\forall u' \in V_{T'}(U)$ должно выполняться равенство $((k, u) + nU^{(1)}) \cdot u' = (0, 0) + nU^{(1)}$.

Мы предположили, что $T' \subset P_m$ и уже доказали, что m — делитель n. Отсюда следует, что $nU \subseteq mU \subset V_{T'}(U)$. Значит существует элемент $\bar{u} \in V_{T'}(U)$ такой, что $\bar{u} \bar{\in} nU$, и поэтому элемент $(0, \bar{u}) \bar{\in} nU^{(1)}$. Для элемента $((1, 0) + nU^{(1)}) \in U^{(1)}/nU^{(1)}$ произведение $((1,0) + nU^{(1)}) \cdot \bar{u} = (0, \bar{u}) + nU^{(1)} \neq (0, 0) + nU^{(1)}$. Получили противоречие. Теорема 3.1 доказана.

Из замечания 2.4 следует

Теорема 3.2. *Для любых двух бимногообразий B_{n_1, m_1} и B_{n_2, m_2} категории $\mathfrak{M}$ имеет место следующая формула умножения бимногообразий, $B_{n_1, m_1} \cdot B_{n_2, m_2} = B_{n_1 n_2, m_1 m_2}$.*

Теорема 3.3. *Коммутативная полугруппа $B(\mathfrak{M})$ всех бимногообразий категории $\mathfrak{M}$ представляет собой пополненную нулем $B_{\infty,\infty}$ и единицей $B_{1,1}$ связку, состоящую из свободной полугруппы $B_\infty(\mathfrak{M})$ бимногообразий вида $B_{\infty, m}$ $(m \in N)$, изоморфной мультипликативной полугруппе натуральных чисел и являющейся идеалом в полугруппе $B(\mathfrak{M})$, и свободной коммутативной полугруппы $B_N(\mathfrak{M})$ бимногообразий вида $B_{n,m}$ $(n, m \in N$ и $n \neq 1)$, свободными образующими которой являются бимногообразия вида $B_{p,1}$ и $B_{p,p}$, где p — простое число.*

Доказательство. Легко показать, что если $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители, а $m = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ $(\beta_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \cdots, k)$ — разложение числа m на простые множители, то имеем следующие формулы:

$$B_{n,m} = \prod_{i=1}^{k} (B_{p_i, 1})^{\alpha_i - \beta_i} (B_{p_i, p_i})^{\beta_i} \text{ и } B_{\infty, m} = \prod_{i=1}^{k} (B_{\infty, p_i})^{\beta_i}.$$

Теорема 3.3 доказана.

Так как бимногообразия составляют полную полуструктуру относительно пересечений (см. [1]), и существует наибольшее бимногообразие $B_{\infty,\infty}$, то бимногообразия категории $\mathfrak{M}$ составляют полную структуру. Легко проверить, что пересечение и объединение любого множества бимногообразий $B_{n_1, m_1}, \cdots, B_{n_k, m_k}, \cdots$ определяется следующим образом:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_{n_i,\, m_i} = B_{(n_1, \cdots, n_k, \cdots),\ (m_1, \cdots, m_k, \cdots)}\,,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{n_i,\, m_i} = B_{[n_1, \cdots, n_k, \cdots],\ [m_1, \cdots, m_k, \cdots]}\,,$$

где $(n_1, \cdots, n_k, \cdots)$—это общий наибольший делитель чисел $n_1, \cdots, n_k, \cdots$, а $[n_1, \cdots, n_k, \cdots]$—общее наименьшее кратное этих чисел.

Легко показать, что имеет место

Теорема 3.4. *Структура бимногообразий категории $\mathfrak{M}$ дистрибутивна.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.III.1973

Գ. Գ. ԷՄԻՆ. Բազմաձևությունները և երկբազմաձևությունները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է $\mathfrak{M}$ կատեգորիան՝ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիան, որի օբյեկտներն են հանդիսանում բոլոր հնարավոր (A,U) զույգերը, որտեղ U-ն ասոցիատիվ օղակ է, A-ն աջ U-մոդուլ, ընդհանրապես ասած ոչ ունիտար, իսկ $\mathfrak{M}$ կատեգորիայի մորֆիզմները, դրանք կիսագծային հոմոմորֆիզմներն են (նայիր [2] և [4])։

Բացահայտ ձևով ցույց է տրվում, թե ինչպես է կառուցված $\mathfrak{M}$ կատեգորիայի ցանկացած օբյեկտների ընտանիքի ազատ արտադրյալը և բացի այդ բացահայտված են $\mathfrak{M}$ կատեգորիայի մի շարք հատկություններ։ Ապացուցված է, որ $\mathfrak{M}$ կատեգորիայի վրա տարածվում է բազմաձևությունների մասին Բիրկհոֆի հայտնի թեորեմը։ Տրված է $\mathfrak{M}$ կատեգորիայի բազմաձևությունների և երկբազմաձևությունների լրիվ նկարագրությունը։ Գտնված են բազմաձևությունների և երկբազմաձևությունների բազմապատկման բանաձևերը։

G. G. EMIN. *Varieties and bivarieties in the category of modules over all rings* (summary)

The category of $\mathfrak{M}$ — modules over all rings, is considered. The objects of the category are all possible pairs (A, U), U is an associative ring, A is the right U — module, nonunitary in general case, while the morphisms of the category $\mathfrak{M}$ are semi—linear homomorphisms (see [2] and [4]).

It is shown in an explicit form how the free product of any family of objects of the category $\mathfrak{M}$ is constructed and some other properties of the category $\mathfrak{M}$ are also established. Birkhoff's theorem about the varieties is proved for the category $\mathfrak{M}$. A complete description of varieties and bivarieties of the category $\mathfrak{M}$ is given. The formulas of multiplication of varieties and bivarieties are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Г. Шульгейфер.* Бимногообразия в категориях, Сибирский матем. журнал, XI, № 6, 1970, 1362—1389.
2. *Б. М. Рудык.* Расширение модулей, Труды ММО, 21, 1970, 209—244.
3. *М. С. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер.* Лекции по теории категорий, М., Изд. МГУ, 1970.
4. *Е. Л. Горбачук.* Радикалы в модулях над разными кольцами, Математические исследования, VII, вып. 1 (23), 1972, 44—59.
5. *Б. И. Плоткин.* Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., Изд. „Наука", 1966.
6. *М. С. Цаленко.* Критерий полноты бикатегории, Математические исследования, принято к печати.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

Л. А. ТЕР-ИСРАЕЛЯН

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть E — замкнутое множество точек в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ и f — функция, определенная и ограниченная на E. Положим

$$R_n(f, E) = \inf_{\{r_n\}} \sup_{z \in E} |f(z) - r_n(z)|,$$

где $\{r_n\}$ — класс рациональных функций порядка не выше n (т. е. функций, имеющих в $\overline{C}$ не более n полюсов, с учетом их кратности). Классическая проблема заключается в исследовании асимптотического поведения $R_n(f, E)$ при $n \to \infty$ в зависимости от метрических свойств множества E и структуры функции f.

В известной работе Д. Ньюмена [1] установлено, что

$$\frac{1}{2} e^{-9\sqrt{n}} \leqslant R_n(|x|, [-1, 1]) \leqslant 3 e^{-\sqrt{n}}, \ n \geqslant 1.$$

Высокая скорость рациональной аппроксимации (скорость полиномиальной аппроксимации $|x|$ на $[-1,1]$ имеет порядок $\frac{1}{n}$) объясняется тем, что функция $f(x) = |x|$ во всех точках отрезка $[-1, 1]$, кроме $x = 0$, является *аналитичгской.* Обобщая в этом направлении результат Д. Ньюмена, в работе А. А. Гончара [2] была установлена теорема о скорости рационального приближения функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$ и допускающих ограниченное аналитическое продолжение в круг $D = \{z \in C: |z - 1| < 1\}$. Из этой общей теоремы в [2] получены оценки сверху для $R_n(f_\varphi, [-1,1])$, где

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ \varphi(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

а φ — функция, голоморфная и ограниченная в D.

Вид f_φ наталкивает на мысль, что рациональную аппроксимацию этой функции можно осуществить путем приближения интеграла Коши по соответствующим образом подобранному контуру. Именно такой подход к задаче применен в настоящей статье. Он позволяет довольно просто получить теорему, аналогичную доказанной А. А. Гончаром в [2] и дает возможность расширить множество $E = [-1,1]$, сохраняя скорость приближения. Кроме того, в статье устанавливается одно утверждение об аппроксимации мероморфными функциями.

Рассмотрим множества следующего вида:

$$\Delta_\alpha(r)=\{z\in\mathbf{C}:\ |\arg z|<\alpha,\ |z|<r\}\ \text{и}\ E_{\alpha,\beta}=\overline{\Delta_\beta(1)}\cup(\overline{\mathbf{C}}\setminus\Delta_\alpha(2)),$$

где $r>0$ и $0<\beta<\alpha\leqslant\pi$. Пусть f — функция, голоморфная в области $\Delta_\alpha(2)$ и непрерывная в нуле, $f(0)=0$. Положим $f(z)=0$, если $z\in\overline{\mathbf{C}}\setminus\Delta_\alpha(2)$. Тогда справедлива следующая

Теорема.

$$R_n(f,E_{\alpha,\beta})=O(\rho_n),\quad \rho_n=\min_{x\in[1,\infty)}\left(M(p^{-x})+xs^{\frac{n}{x}}\right),$$

где $M(r)=\max\limits_{z\in\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(r)}|f(z)|$, $s=\sqrt[5]{\dfrac{p^2-1}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}<1$, *а* $p>0$ — *произвольная постоянная такая, что* $1<p^2<\min\left(\dfrac{3}{2},\ 1+\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Доказательство. Зафиксируем число q, удовлетворяющее условию

$$1<q<\min\left(\frac{3}{2},\ 1+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Тогда будем иметь следующее представление для f:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in E_{\alpha,\beta}$$

(здесь и всюду в дальнейшем интегрирование производится в положительном относительно области $\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)$ направлении). Разбив контур $\partial\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)$ на два непересекающихся контура Γ и γ:

$$\Gamma=\left\{z\in\mathbf{C}:\ |\arg z|\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2},\ |z|=q\right\},\quad \gamma=\partial\Delta_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(q)\setminus\Gamma,$$

получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in E_{\alpha,\beta}.$$

Займемся рациональным приближением каждого слагаемого на $E_{\alpha,\beta}$.

1°. Выберем на γ последовательности точек

$$\zeta_k=q^{-k}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \zeta_k'=q^{-k}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\ (k=0,1,\cdots)$$

и обозначим

$$l_k=\left\{z\in\mathbf{C}:\ \arg z=\frac{\alpha+\beta}{2},\ q^{-k}\leqslant|z|<q^{-k+1}\right\},$$

$$l'_k = \left\{z \in \mathbf{C}: \arg z = -\frac{\alpha+\beta}{2},\ q^{-k} \leqslant |z| < q^{-k+1}\right\},$$

$$\gamma_k = \bigcup_{j=0}^{k} (l_j \cup l'_j).$$

Теперь определим функцию $Q_m(\zeta, z)$, аппроксимирующую ядро Коши $\frac{1}{\zeta - z}$ для $\zeta \in \gamma$, $z \in E_{\alpha,\beta}$:

$$Q_m(\zeta, z) = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{m-1} \dfrac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}}, & \xi \in l_k, \\ -\sum\limits_{j=0}^{m-1} \dfrac{(\zeta-\zeta'_k)^j}{(z-\zeta'_k)^{j+1}}, & \xi \in l'_k, \end{cases}$$

где m — некоторое натуральное число. Исходя из выбора q и разложения для $\frac{1}{\zeta - z}$, легко получить оценки

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - Q_m(\zeta, z)\right| < \frac{q^k}{(1-d)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\, d^m,\ \zeta \in l_k \cup l'_k,\ z \in E_{\alpha,\beta},$$

где $d = \dfrac{q-1}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} < 1$. Из предыдущих неравенств сразу следует

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_k \cup l'_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_k \cup l'_k} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta\right| <$$

$$\leqslant \frac{dM(q)}{\pi(1-d)}\, d^m,\ z \in E_{\alpha,\beta}\ (k = 0, 1, \cdots).$$

Введем рациональную функцию $r_{k,m}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta$ и

оценим разность $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - r_{k,m}(z)\right|$:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - r_{k,m}(z)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma \setminus \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| + \frac{2dM(q)}{\pi(1-d)}\, k d^m,\ z \in E_{\alpha,\beta}. \tag{1.1}$$

Пусть $z \in E_{\alpha,\beta}, |z| \geqslant \frac{1}{2} q^{-k}$:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma \setminus \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant \frac{2}{\pi \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\, M(q^{-k}).$$

Если же $z \in E_{\alpha,\beta}$, $|z| \leqslant \frac{1}{2} q^{-k}$, то обозначив $\Gamma_k = \{z \in \mathbf{C}: |\arg z| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}, |z| = q^{-k}\}$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma \setminus \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant M(q^{-k}) + \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant 3\, M(q^{-k}).$$

Учитывая последние два неравенства, из (1.1) получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - r_{k,m}(z)\right| \leqslant \frac{3}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} M(q^{-k}) + \frac{2dM(q)}{\pi(1-d)} k d^m, \quad z \in E_{\alpha,\beta}. \tag{1.2}$$

2°. Перейдем к аппроксимации на $E_{\alpha,\beta}$ функции $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$.

Представим контур Γ в виде суммы L попарно непересекающихся дуг μ_k, длина каждой из которых не превышает $\frac{(q-1)^2}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}$, и выберем на этих дугах по точке $\eta_k \in \mu_k$ $(k = 1, 2, \cdots, L)$. Доопределим функцию $Q_m(\zeta, z)$ для $\zeta \in \Gamma$ следующим образом:

$$Q_m(\zeta, z) = -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\zeta - \eta_k)^j}{(z - \eta_k)^{j+1}}, \quad \zeta \in \mu_k.$$

Нетрудно заметить, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mu_k} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta\right| \leqslant \frac{dM(q)}{2\pi(1-d)} d^m, \quad z \in E_{\alpha,\beta}.$$

Введя рациональную функцию $r_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, Q_m(\zeta, z)\, d\zeta$ и принимая во внимание, что натуральное L может быть выбрано удовлетворяющим неравенству

$$L \leqslant \frac{4\pi}{d^2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2}},$$

имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - r_m(z)\right| \leqslant \frac{2M(q)}{d(1-d) \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} d^m, \quad z \in E_{\alpha,\beta}. \tag{2.1}$$

3°. Теперь из (1.2) и (2.1) для рациональной функции $R_{k,m}(z) = r_{k,m}(z) + r_m(z)$ получим

$$|f(z)-R_{k,m}(z)|\leqslant C\,(M(q^{-k})+kd^m),\ z\in E_{\alpha,\beta}, \tag{3.1}$$

где $C=\max\left(\dfrac{3}{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}},\ \dfrac{4M(q)}{d(1-d)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\right)$. Учитывая тот факт, что порядок $R_{k,m}(z)$ не превышает $(4k+L)\,m$, из (3.1) непосредственно следует

$$R_n(f,E_{\alpha,\beta})\leqslant C\min_{1<k<\frac{n-L}{4}}\left(M(q^{-k})+kd^{\left[\frac{n}{4k+L}\right]}\right),\ n>L+4$$

(квадратные скобки в показателе означают целую часть). Из этого неравенства простыми рассуждениями получается утверждение теоремы, если принять $p=\sqrt{q}$ и $s=\sqrt[5]{d}$. Теорема доказана.

Замечание 1. В процессе доказательства теоремы получено несколько более сильное утверждение, чем $R_n(f,E_{\alpha,\beta})=O(\rho_n)$. Именно, при $n>n_0$ выполняется оценка

$$R_n(f,E_{\alpha,\beta})\leqslant\frac{C}{d}\,\rho_n,$$

где C — константа, фигурирующая в (3.1).

Замечание 2. Метод, использованный для построения аппроксимирующих функций, может быть применен к получению верхних оценок наилучших рациональных приближений на множествах E, метрические свойства которых отличаются от свойств $E_{\alpha,\beta}$. Например, в качестве E можно рассмотреть множество, состоящее из двух соприкасающихся областей.

Замечание 3. Рассмотрим теперь функцию $f(x)=|x|$ на вещественной оси $\mathbf{R}$. Эту функцию нельзя на $\mathbf{R}$ приблизить рациональными. Однако, как следует из теоремы 1 работы [3], ее можно равномерно приблизить вне некоторого отрезка мероморфными функциями F, неванлинновская характеристика которых удовлетворяет условию $T(r,F)=O(\log^3 r)$. Синтез теоремы настоящей работы с теоремой 1 работы [3] позволяет установить возможность равномерной аппроксимации $|x|$ *на всей* оси $\mathbf{R}$ мероморфными функциями F, причем так, что кроме условия $T(r,F)=O(\log^3 r)$ выполнено также условие $n_F=O\left(\log^3\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, где n_F — число полюсов F в единичном круге, а ε — величина уклонения F от $|x|$ на $\mathbf{R}$. Условие $n_F=O\left(\log^3\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ не может быть усилено согласно известному результату Д. Ньюмена [1]. Кроме того, не существует мероморфной функции F, равномерно аппроксимирующей $|x|$ на $\mathbf{R}$, для которой $T(r,F)=O(\log^2 r)$. Это сразу вытекает из результата Ж. Валирона [4], который заключается в том, что мероморфная функция, неванлинновская характеристика которой имеет порядок $\log^2 r$, не может иметь более одного асимптотического значения.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.I.1974

Լ. Ա. ՏԵՐ-ԻՍՐԱՅԵԼՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցված է ընդհանուր թեորեմ երկու հպվող տիրույթների վրա լավագույն ռացիոնալ մոտարկման մասին։ Այնուհետև դիտարկվում է իրական առանցքի վրա մերոմորֆ ֆունկցիաներով $|x|$ *ֆունկցիայի հավասարաչափ մոտարկումը։*

L. A. TER-ISRAJELIAN. *On uniform approximation by rational functions*
(summary)

The paper proves a general theorem about the best rational approximation in pairs of contacting domains. Also, uniform approximation of $|x|$ function by meromorphic functions on the real axis is consided.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. I. Newman.* Rational approximation to $|x|$, Michigan Math. J., 11, № 1, 1964, 11—14.
2. *А. А. Гончар.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями, Матем. сб., 73 (115), 1967, 630—638.
3. *Л. А. Тер-Исраелян.* Равномерное и касательное приближение голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 1, 1971, 67—79.
4. *G. Valiron.* Sur le nombre des singularites transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algebroides, C. r. Acad sci., 200, 1935, 713—715.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 3, 1974 Математика

А. А. МЕЛИКЯН

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ МОМЕНТОВ НАБЛЮДЕНИЙ В МОДЕЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрена модельная линейная дифференциальная игра сближения. Для обоих игроков построены минимальные достаточные множества точек наблюдения. В плоскости параметров задачи изучено расположение точек сгущения этих множеств. Построена цена игры. В работе применена методика, предложенная в [1].

1. Движение игроков X и Y на фиксированном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, задано соотношениями

$$X: \dot{x} = \alpha x + u, \quad Y: \dot{y} = \lambda y + v,$$
$$|u| \leqslant 1, \ x(0) = x^0, \ |v| \leqslant \nu, \ y(0) = y^0. \tag{1.1}$$

Здесь x, y, u, v — векторы произвольной одинаковой размерности; α, λ, ν — вещественные параметры: $\alpha = \pm 1$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $\nu > 0$. Отметим, что уравнениями вида (1.1) описывается в первом приближении управляемое движение точки малой массы в вязкой среде.

На интервале движения заданы N моментов времени (моменты наблюдения) $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_N = T$. Наблюдая в каждый из моментов a_k реализовавшуюся позицию $\{x_k, y_k\}$, $x_k = x(a_k)$, $y_k = y(a_k)$, игрок X задает свое управление на интервале $[a_k, a_{k+1})$ в виде функции времени $u_k(x_k, y_k, t)$, $k = 1, \cdots, N-1$. Совокупность таких функций будем называть стратегией игрока X. Целью игрока X является минимизация функционала

$$J = |x(T) - y(T)|. \tag{1.2}$$

Игрок Y реализует свое управление в виде функций времени $v(t)$, $t \in [0, T]$ и препятствует намерениям игрока X.

Задача 1. Найти оптимальную минимаксную стратегию u^* игрока X, т. е. стратегию, удовлетворяющую соотношению

$$J^* = \min_u \sup_v J[u, v] = \sup_v J[u^*, v]. \tag{1.3}$$

Найти гарантированный минимум J^* для функционала (1.2). Здесь $J[u, v]$ означает величину (1.2) на паре (u, v), экстремумы в (1.3) берутся по описанным выше стратегиям и управлениям.

Решение задачи 1 сводится к решению многошаговой игры (см. [1, 2])

$$x_{k+1} = e^{\alpha\tau_k} x_k + u_k, \quad |u_k| \leqslant p_k = (e^{\alpha\tau_k} - 1)/\alpha,$$

$$y_{k+1} = e^{\lambda\tau_k} y_k + v_k, \ |v_k| \leqslant q_k = \nu (e^{\lambda\tau_k} - 1)/\lambda,$$
$$\tau_k = a_{k+1} - a_k, \ x_1 = x^0, \ y_1 = y^0, \ k = 1, \cdots, N-1, \quad (1.4)$$
$$J = |x_N - y_N|.$$

Введя функцию Беллмана, можно, аналогично проделанному в [2], получить для J^* следующее выражение:

$$J^* = \max [h_N, R_1], \ h_N > 0,$$
$$h_N = \max_{1<i<N-1} R (a_i, a_{i+1}), \ R (\xi, \eta) = \nu (e^{\lambda (T-\xi)} - 1)/\lambda - (e^{\alpha (T-\eta)} - 1)/\alpha,$$
$$R_1 = |e^{\alpha T} x^0 - e^{\lambda T} y^0| + \nu (e^{\lambda T} - 1)/\lambda - (e^{\alpha T} - 1)/\alpha. \quad (1.5)$$

Оптимальная стратегия $u^* = \{u_k^* (x_k, y_k, t)\}$ — решение задачи 1 имеет вид

$$u_k^* = - e^{-\alpha (T-a_{k+1})} z_k, \ |z_k| \leqslant p_k e^{\alpha (T-a_{k+1})},$$
$$u_k^* = - p_k z_k/|z_k|, \ |z_k| > p_k e^{\alpha (T-a_{k+1})}, \quad (1.6)$$
$$z_k = e^{\alpha (T-a_k)} x_k - e^{\lambda (T-a_k)} y_k, \ t \in [a_k, a_{k+1}),$$
$$k = 1, \cdots, N-1.$$

Оптимальное для игрока X распределение моментов наблюдения, в смысле минимизации величины J^* в (1.5), находится из условия

$$\min_{\{a_i\}} h_N = \min_{\{a_i\}} \max_{1<i<N-1} R (a_i, a_{i+1}).$$

При этом, как это следует из леммы в [2], существует единственное оптимальное распределение a_i^*, и для него выполнено

$$a_1^* = 0, \ a_N^* = T, \ R (a_i^*, a_{i+1}^*) = h_N^*, \ i = 1, \cdots, N-1, \quad (1.7)$$

где h_N^* — положительная постоянная. Поскольку лишняя точка наблюдения может лишь уменьшить гарантированный для игрока X минимум (1.5), то $h_{N+1}^* < h_N^*$, и существует конечный предел $\lim\limits_{N\to\infty} h_N^* = h, \ h>0$.

Рассмотрения п. 3 доказывают, что величина

$$J^0 = \max [h, R_1 (x^0, y^0)] \quad (1.8)$$

является гарантированным минимумом функционала (1.2) при непрерывном наблюдении игроком X позиции $\{x, y\}$.

Конечное достаточное множество моментов наблюдений $A [x^0, y^0] = \{a_i^*\}$ (см. [2]) существует для начальных позиций

$$R_1 (x^0, y^0) > h, \quad (1.9)$$

где R_1 определено в (1.5). Минимальное число точек наблюдения $N (x^0, y^0)$ (минимальная мощность множества $A [x^0, y^0]$) равно минимальному целому N, удовлетворяющему неравенству $h_N \leqslant R_1 (x^0, y^0)$. Для множества позиций

$$R_1(x^0, y^0) < h \tag{1.10}$$

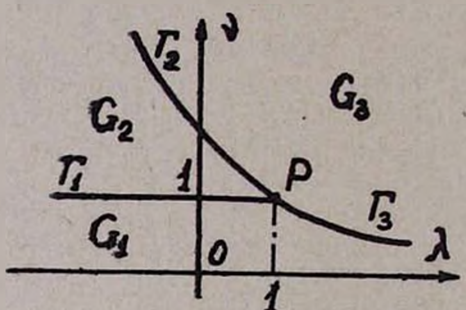
не существует конечного достаточного множества моментов наблюдений. Приведенные утверждения следуют из (1.5) и монотонного стремления h_N^* к h.

Достаточным множеством наблюдений для позиций (1.10) является множество A_T, предельное для совокупности множеств $\{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_N^*\}$ при $N \to \infty$ (см. п. 4).

2. Для построения постоянной h, множества A_T и нахождения точек сгущения множества A_T, воспользуемся утверждениями, приведенными в п. 4 без доказательств.

Постоянная $h = \max R(\xi, \xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$. Точками сгущения множества A_T будут являться те и только те точки отрезка $[0, T]$, на которых функция $R(\xi, \xi)$ достигает максимума.

Результаты исследования функции R при $\alpha = 1$ в зависимости от значений параметров λ, ν приведены на рисунке. Для $\alpha = -1$ картина вполне аналогичная; в приводимых ниже соотношениях верхний знак („+" или „−") соответствует значению $\alpha = 1$, нижний — $\alpha = -1$, (рисунок соответствует $\alpha = 1$).



Плоскость Q параметров λ, ν: $\nu > 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$, разбивается на три (открытые) области G_i, $i = 1, 2, 3$. Кривые Γ_i, $i = 1, 2, 3$, ограничивающие эти области, задаются соответственно уравнениями

$$\Gamma_1:\ \nu = 1,\ \lambda < \pm 1;\quad \Gamma_2:\ \nu = e^{\pm T(1 \mp \lambda)},\ \lambda < \pm 1;$$

$$\Gamma_3:\ \nu = \pm \lambda (e^{\pm T} - 1)/(e^{\lambda T} - 1),\ \lambda > \pm 1.$$

Постоянная h (значение максимума функции R) является непрерывной функцией параметров λ, ν на плоскости Q и задается соотношениями

$$G_1:\ h = 0;\quad G_2:\ h = \lambda^{-1}(1 \mp \lambda)\,\nu^{1/(1 \mp \lambda)} - \lambda^{-1}(\nu \mp \lambda);$$

$$G_3:\ h = \nu (e^{\lambda T} - 1)/\lambda - e^{\mp T} \pm 1.$$

В области $G_1 \cup \Gamma_1$ единственной точкой максимума (точкой сгущения множества A_T) является правый конец отрезка $\hat{\alpha} = T$. В области G_2 единственной (внутренней) точкой сгущения множества A_T является точка

$$\hat{\alpha} = T \mp \ln \nu/(1 \mp \lambda).$$

Наконец, в области $G_3 \cup T_2$ точка $\hat{a} = 0$ является единственной точкой сгущения. На кривой Γ_3 точками сгущения являются начальная и конечная точки интервала движения $\hat{a} = 0$, $\hat{a} = T$.

Для построения изолированных точек множества A_T следует, отправляясь от начального, $a = 0$, или конечного, $a = T$ моментов времени, воспользоваться рекуррентным соотношением, связывающим две соседние точки наблюдения

$$R(a_i, a_{i+1}) = h, \quad a_i < a_{i+1}. \tag{2.1}$$

Условия (2.1) получаются из (1.7) предельным переходом. Если точка (λ, ν) лежит на кривой Γ_3, то воспользоваться предложенной процедурой невозможно, так как моменты 0 и T не являются изолированными точками множества A_T. Однако, и в этом случае (см. п. 4, 1°) существует единственный набор точек $A_T = \{a_i\}$, $i = 0, \pm 1, \cdots$, $0 < a_0 < T$, удовлетворяющий (2.1) и такой, что

$$\lim_{i \to -\infty} a_i = 0, \quad \lim_{i \to +\infty} a_i = T.$$

Далее, можно доказать, что стратегия вида (1.6), где a_k являются точками множества A_T, определяет единственную абсолютно непрерывную траекторию игрока X для всякого интегрируемого управления $v(t)$, $t \in [0, T]$, и гарантирует значение функционала (1.8) для любых начальных позиций.

В точке P, $\nu = 1$, $\lambda = \pm 1$, в которой объекты X и Y являются идентичными (см. (1.1)), множество A_T совпадает с отрезком $[0, T]$, т. е. точкой сгущения является каждая точка отрезка $[0, T]$. Здесь необходимы и достаточны непрерывные наблюдения игрока X (точнее, наблюдения на подмножестве отрезка $[0, T]$ полной меры). Причем, наблюдаемой величиной должно быть значение $v(t)$. Нетрудно убедиться, что отклонение игрока X от оптимальной стратегии $u^* = v(t)$ на множестве положительной меры приводит к увеличению гарантированного минимума $J^0 = e^T |x^0 - y^0|$.

3. Пусть теперь игрок Y находится в условиях информированности, аналогичных информированности игрока X в п. 1, и применяет подобные же стратегии. Цель игрока Y — максимизация функционала (1.2). Игрок X реализует свое управление в виде интегрируемой функции времени $u(t)$, $t \in [0, T]$, и препятствует намерениям противника. Предположим, что игрок Y наблюдает позицию $\{x_k, y_k\}$ в три момента времени $a_1 = 0$, $a_2 \in [0, T]$, $a_3 = T$, т. е. примем $N = 3$. Применяя подход работы [2], получим значение гарантированного максимума величины (1.2) для игрока Y

$$J_* = \max\,[0, R(a_2, a_2), R_1(x^0, y^0)], \tag{3.1}$$

где функции R и R_1 определены в (1.5). Значение (3.1) гарантируется игроку Y стратегией

$$v_k(x_k, y_k, t) = -q_k z_k/|z_k|, \ |z_k| \neq 0,$$

$$v_k(x_k, y_k, t) = q_k e, \ |e| = 1, \ |z_k| = 0,$$

$$t \in [a_k, a_{k+1}), \ k = 1, 2.$$

Необходимые обозначения введены в (1.4), (1.5). Оптимальное (в смысле максимизации величины (3.1)) расположение момента $a_2 = a_2^*$ находится максимизацией $R(a_2, a_3)$, $0 \leqslant a_2 \leqslant T$. Эта процедура уже проделана при поиске точек сгущения множества A_T. В области G_2 точка a_2^* задается формулой (соответственно при $\alpha = \pm 1$)

$$a_2^* = T \mp \ln \nu/(1 \mp \lambda).$$

На остальной части плоскости параметров $Q \setminus G_2$ точка a_2^* совпадает с одним из концов отрезка $[0, T]$. Подставив величину a_2^* в (3.1) нетрудно убедиться, что

$$J_* = J^0, \ (\nu, \lambda) \in Q, \ \alpha = \pm 1. \qquad (3.2)$$

Замечание 1. Равенство (3.2) означает, что в игре (1.1), (1.2) имеет место седловая ситуация на всей плоскости параметров $(\nu, \lambda) \in Q$, $\alpha = \pm 1$. Поэтому величина (1.8) является гарантированным минимумом игры с непрерывным наблюдением.

Замечание 2. Поскольку в области параметров G_2 игроку Y необходима и третья (внутренняя) точка наблюдения, то можно утверждать, что в G_2 игра не является регулярной. В [3] доказано, что игрок Y в регулярном случае может добиться гарантированного максимума, применив программное управление, т. е. воспользовавшись наблюдением позиции только лишь в начальный момент движения $a_1 = 0$. Далее, нерегулярность игры в области $G_2 \cup \Gamma_2$ устанавливается следующим образом. Области достижимости игроков X и Y являются сферами K_x, K_y радиусов $r_x = \nu(e^{\lambda(T-t)} - 1)/\lambda$, $r_y = (e^{\alpha(T-t)} - 1)/\alpha$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Нетрудно убедиться, что существуют позиции, когда эти сферы концентричны и $r_y(t) > r_x(t)$. Тогда ε-окрестность K_x^ε сферы K_x, удовлетворяющая включению $K_x^\varepsilon \supset K_y$ с минимальным ε, просто совпадает со сферой K_y, т. е. общие точки сфер K_x^ε и K_y, $\varepsilon > 0$, не могут быть уложены в единственную гиперплоскость.

Замечание 3. Подобным образом, используя геометрическое определение регулярности, данное в [3], можно показать регулярность рассматриваемой игры в области параметров $G_1 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup P$, т. е. там, где выполнено $h = 0$.

4. Пусть функция $g(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы в [2]. Тогда, по утверждению леммы, минимум

$$h_n = \min_{z \in G} \Phi(z), \quad \Phi(z) = \max_{1 < i < n-1} g(z_i, z_{i+1})$$

достигается на единственном векторе $z^* \in G$. Здесь $z = (z_1, \cdots, z_n)$ — n-мерный вектор, и $z \in G$ означает, что

$$z_1 = a, \; z_n = b, \; a < z_i \leqslant b, \; i = 2, \cdots, n-1.$$

Обозначим множество $\{z_1^*, \cdots, z_n^*\}$ через Z_n и введем

Определение. Множество $C \subset [a, b]$ называется предельным для последовательности конечных множеств $C_n \subset [a, b]$ при $n \to \infty$, если оно состоит из тех и только тех точек $c \in [a, b]$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует целое положительное N_ε, удовлетворяющее условию: пересечение $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap C_n$ не пусто для $n > N_\varepsilon$. Тогда, в дополнение к лемме работы [2], справедливы следующие утверждения:

1°. *Существует единственное предельное множество точек* Z *для последовательности* Z_n, $n \to \infty$.

2°. *Существует* $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = h = \max g(x, x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

3°. *Точками сгущения множества* Z *являются те и только те точки* $\hat{z} \in Z$, *для которых выполнено* $g(\hat{z}, \hat{z}) = h$.

4°. *Если* $z_i < z_{i+1}$ — *две изолированные соседние точки множества* Z, $z_i, z_{i+1} \in Z$, $(z_i, z_{i+1}) \cap Z = \varnothing$, *то* $g(z_i, z_{i+1}) = h$.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 16.V.1973

Ա. Ա. ՄԵԼԻՔՅԱՆ. Դիտարկման մոմենտների մինիմալ քանակի մասին մոդելային մոտեցման խաղում *(ամփոփում)*

Մոդելային գծային մոտեցման դիֆերենցիալ խաղի համար կառուցված է դիտման մոմենտների մինիմալ բավարար բազմությունը, ուսումնասիրված է այդ բազմության խտացման կետերի կախումը պարամետրից։ Գտնված է խաղի գինը։ Աշխատանքում օգտագործված է ոչ լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ խաղը էկվիվալենտ բազմաքայլ խաղի բերման մեթոդը։

A. A. MELIKIAN. *On the minimal number of observation moments in a model approach game* (summary)

The minimal sufficient set of observation moments for a model linear differential approach game is found. The dependance of the location of accumulation points of this set of the game parameters is studied. The game price is calculated. The method of reduction of differential game with incomplete information to equivalent manystep game is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Меликян, Ф. Л. Черноусько.* О дифференциальных играх с переменными условиями информированности, ДАН СССР, 203, № 1, 1972.
2. *А. А. Меликян.* О минимальных наблюдениях в одной игре сближения, ПММ, 37, вып. 3, 1973.
3. *Н. Н. Красовский.* Игровые задачи о встрече движений, М., Изд. „Наука“, 1970.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS