ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespaced, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

ОЦЕНКА РОСТА ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

Введение

1°. Согласно хорошо известной теореме Р. Неванлинны [1, 2], класс A аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta\right\}<+\infty, \tag{1}$$

совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизационное представление вида

$$f(z)=e^{i\alpha}z^{\lambda}B(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\psi(\vartheta)\right\},\ |z|<1, \tag{2}$$

где α ($\operatorname{Im}\alpha=0$) — постоянная, $\lambda\gtrless 0$ — целое число, $B(z)$ — функция Бляшке и $\psi(\vartheta)$ — вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$.

Из представления (2) следует, что если $f(z)\in A$, причем $f(z)\neq 0$, то справедлива оценка снизу

$$\log|f(z)|\geqslant-\frac{c(\psi)}{1-|z|}\ (|z|<1),\ c(\psi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|, \tag{3}$$

которую, как показывает пример функции $\exp\left\{-\frac{1}{1-z}\right\}$, улучшить нельзя.

Из оценки же (3) непосредственно вытекает, что если $\omega(t)>0$ — произвольная измеримая функция на $[0,1)$, подчиненная лишь условию

$$\int_0^1\frac{\omega(r)}{1-r}\,dr<+\infty, \tag{4}$$

то для любой функции $f(z)\in A$, $f(z)\neq 0$ будем иметь

$$\int_0^1\omega(r)\log|f(re^{i\vartheta})|\,dr>-\infty,\ \vartheta\in[0,2\pi]. \tag{5}$$

В работе А. Л. Шагиняна [3] был обнаружен важный факт, что условие (5) остается в силе и для произвольной функции Бляшке $B(z)$, что привело его к следующей теореме:

Для любой функции $f(z) \in A$ *при условии* (4) *справедливо неравенство* (5).

Кроме того, на примере функции Бляшке $B(z)$ им же было установлено, что в этом утверждении условие (4) на функцию $\omega(r)$, вообще говоря, необходимо*.

2°. В ранней работе М. М. Джрбашяна [4] посредством условия

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{\alpha-1} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, r dr d\theta < +\infty \tag{6}$$

были введены значительно более широкие чем A классы A_α $(0<\alpha<\infty)$ аналитических в круге $|z|<1$ функций, для которых были установлены существенно новые факторизационные представления.

В дальнейшем автор [5], опираясь на эти представления, установил интегральные оценки типа (5) для функций, принадлежащих любому из классов $A(\alpha)$ $(0<\alpha<+\infty)$.

Но в отличие от случая классов A, установление утверждения, аналогичного (5) для произведений $\pi_\alpha(z)$, участвующих в факторизационном представлении классов $A(\alpha)$, было сопряжено со значительными трудностями.

Вместе с тем отметим, что на примере функций $\pi_\alpha(z)$ точность полученного тогда нами результата нельзя было считать вполне выявленной, поскольку и поныне не известно, входят ли они в класс $A(\alpha)$ или нет?

3°. В дальнейших исследованиях М. М. Джрбашяна ([6] и [7]) была построена полная теория факторизации мероморфных в круге функций, по существу охватывающая мероморфные функции произвольного роста.

Первоначально в монографии [6] путем дальнейшего развития и усовершенствования метода, лежащего в основе работы [4], была построена совершенная теория факторизации классов N_α мероморфных в круге $|z|<1$ функций, зависящих от непрерывного параметра α $(-1<\alpha<\infty)$. Соответствующие классы $A_\alpha \subset N_\alpha$ аналитических в круге $|z|<1$ функций взамен (6) определяются посредством условия

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} D_+^{-\alpha} \{\log |f(re^{i\theta})|\} \, d\theta < +\infty, \tag{7}$$

---

* На самом деле А. Л. Шагинян устанавливает более общее чем (5) неравенство, рассматривая интеграл по измеримому множеству положительной меры, лежащему на некоторой простой дуге L, лежащей в круге $|z|<1$ с концом на ее границе.

где $D^{-\alpha}$ — производная (при $-1<\alpha<0$), или интеграл (при $0<\alpha<\infty$) порядка α в смысле Римана-Лиувилля.

Основная теорема М. М. Джрбашяна о факторизации классов A_α гласит:

Класс A_α $(-1<\alpha<\infty)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z)=cz^{\lambda}B_\alpha(z;z_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{8}$$

где c — *постоянная,* $\lambda\geqslant 0$ — *целое число,* $\psi(\vartheta)$ — *вещественная функция с конечным полным изменением на* $[0,2\pi]$,

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{9}$$

и, наконец, $B_\alpha(z;z_k)$ — *сходящееся в круге* $|z|<1$ *произведение вида*

$$B_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;z_k)}, \tag{10}$$

причем

$$W_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}z^k. \tag{11}$$

Классы A_α $(-1<\alpha<+\infty)$ монотонно расширяются вместе с возрастанием параметра α, и в частности, обладают свойством

$$A_0\equiv A, \tag{12}$$
$$A_\alpha\subset A\ (-1<\alpha<0),\ A_\alpha\supset A\ (0<\alpha<+\infty).$$

4°. В настоящей статье, опираясь на факторизацию (8) функций классов A_α $(-1<\alpha<+\infty)$, и методом оценок, содержащихся в работе [5], устанавливаются интегральные оценки типа (5) для функций этих классов и доказывается их точность в надлежащем классе.

Ввиду свойств (12) классов A_α $(-1<\alpha<+\infty)$, полученные нами результаты относятся как к произвольно узким чем $A_0=A$ классам (при $-1<\alpha<0$), так и к классам, в которых (при $0<\alpha<\infty$) могут быть охвачены аналитические в круге $|z|<1$ функции с произвольным конечным ростом, поскольку, как известно, [8]

$$A(\alpha)\subset A_\alpha,\ (0<\alpha<+\infty).$$

В специальном же случае, когда $\alpha=0$, в них содержится результат работы [3], о котором говорилось выше.

В § 1 настоящей работы приводится ряд предварительных лемм, которые в дальнейшем используются.

В § 2 получены интегральные оценки для роста функций М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z; a_\mu)$, участвующих в представлении функций классов N_α и совпадающих с функцией Бляшке при $\alpha = 0$.

В заключительном § 3 установлены оценки роста на L функций класса N_α $(-1<\alpha<+\infty)$, откуда, в частности, получается теорема единственности для аналитических функций класса N_α.

Автор глубоко благодарен проф. М. М. Джрбашяну за внимание и обсуждение настоящей работы.

§ 1. Предварительные леммы

Условимся говорить, что функция $\omega(t) \in \Omega$, если $\omega(t)$— произвольная непрерывная и невозрастающая на отрезке $[0, 1)$ функция, для которой $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$ и

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt < +\infty. \tag{1.1}$$

Заметим, что как в работе [3], так и здесь вместо множества $[0, 1)$ можно было рассмотреть произвольное измеримое множество E на отрезке $[0, 1)$ с положительной мерой. Но, во избежание осложнений, при выкладках в настоящей работе мы принимаем $E \equiv [0, 1)$.

Спроектируем теперь с помощью круговых дуг точки отрезка $[0, 1)$ на дугу L, которая соединяет центр круга с окружностью $|z|=1$. Для простоты будем считать, что окружности $|z| = \mathrm{const}$ пересекают дугу L в одной точке.

Отметим, что в дальнейшем всюду предполагается, что $\omega(t) \in \Omega$ и через c_k $(k=0, 1, 2, \cdots)$ будем обозначать положительные постоянные.

Лемма 1.1. *При любом* $0 < b < 1$ *и* $-1 < \alpha < \infty$ *справедлива оценка*

$$J_\alpha^{(1)}(b) = \int_b^1 (1-x)^\alpha\, \omega(x) \lg \frac{1}{x-b}\, dx < c_1 (1-b)^{1+\alpha}, \tag{1.2}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* b.

Доказательство. Так как $\omega(t) > 0$ не возрастает на $[0,1)$, то

$$c_0 = \int_0^1 \frac{\omega(x)}{1-x}\, dx \geqslant \int_0^b \frac{\omega(x)}{1-x}\, dx > \omega(b) \lg \frac{1}{1-b},$$

и таким образом

$$\omega(b) \lg \frac{1}{1-b} \leqslant c_0. \tag{1.3}$$

Рассмотрим теперь два случая:

1) Пусть $0<\alpha<\infty$. Тогда из определения (1.2) величины $J_\alpha^{(1)}$ следует

$$J_\alpha^{(1)}(b)\leqslant(1-b)^\alpha\,\omega(b)\int\limits_b^1\lg\frac{1}{x-b}\,dx=$$

$$=\omega(b)(1-b)^{1+\alpha}\left[1+\lg\frac{1}{1-b}\right]\leqslant 2c_0(1-b)^{1+\alpha}.$$

2) Пусть $-1<\alpha\leqslant 0$, тогда будем иметь

$$J_\alpha^{(1)}(b)=\int\limits_b^{\sqrt{b}}(1-x)^\alpha\,\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx+\int\limits_{\sqrt{b}}^1(1-x)^\alpha\,\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(1-\sqrt{b})^\alpha\int\limits_b^1\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx+\lg\frac{1}{\sqrt{b}-b}\int\limits_{\sqrt{b}}^1(1-x)^\alpha\,\omega(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\omega(b)(1-\sqrt{b})^\alpha(1-b)\left[1+\lg\frac{1}{1-b}\right]+\omega(b)\lg\frac{1}{\sqrt{b}-b}\cdot\frac{(1-\sqrt{b})^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Отсюда, используя неравенство (1.3), получаем

$$J_\alpha^{(1)}(b)\leqslant c_2(1-b)^{1+\alpha}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что из неравенств (1.2) в случае $\alpha=0$ будем иметь

$$J_0^{(1)}(b)=\int\limits_b^1\omega(x)\lg\frac{1}{x-b}\,dx\leqslant c_3(1-b). \tag{1.4}$$

Лемма 1.2. *Справедливо неравенство*

$$J_\alpha^{(2)}(b)\equiv\int\limits_0^b\omega(t)\lg\frac{b-t}{1-t}\,dt\leqslant c_4(1-b), \tag{1.5}$$

где $c_4>0$ *не зависит от* b.

Доказательство. В интеграле $J_\alpha^{(2)}(b)$ совершим замену переменного интегрирования

$$\frac{b-t}{1-t}=x. \tag{1.6}$$

Тогда будем иметь

$$J_\alpha^{(2)}(b)=(1-b)\int\limits_0^b\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg\frac{1}{x}}{(1-x)^2}\,dx=(1-b)\int\limits_0^{1/2}\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg\frac{1}{x}}{(1-x)^2}\,dx+$$

$$+(1-b)\int\limits_{1/2}^{b}\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg\frac{1}{x}}{(1-x)^2}dx\leqslant\frac{(1-b)\,\omega(0)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\int\limits_0^1\lg\frac{1}{x}\,dx+$$

$$+(1-b)\int\limits_{1/2}^{b}\omega\left(\frac{b-x}{1-x}\right)\frac{\lg 2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-x)}\,dx.$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно, а во втором вновь перейдем к переменной интегрирования t, определив ее из (1.6). В результате приходим к неравенству

$$J_\alpha^{(2)}(b)\leqslant(1-b)\left\{8+4\lg 2\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt\right\},$$

т. е. к неравенству (1.5) леммы.

Пусть при $0\leqslant u<1$ и $\frac{1}{2}<b\leqslant u<1$ положено

$$E_\alpha^{(1)}(u,\,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{u}{b}\right)^n\int\limits_0^b(1-x)^\alpha x^{n-1}\,dx, \tag{1.7}$$

$$E_\alpha^{(2)}(u,\,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}(u\,b)^n\int\limits_b^1(1-x)^\alpha x^{-n-1}\,dx. \tag{1.8}$$

Лемма 1.3. *Для любого* $\alpha\,(-1<\alpha<\infty)$ *имеют место неравенства*

$$\int\limits_b^1(1-t)^\alpha\,\omega(t)\,E_\alpha^{(1)}(t,\,b)\,dt\leqslant c_5(1-b)^{1+\alpha} \tag{1.9}$$

и

$$\int\limits_b^1(1-t)^\alpha\,\omega(t)\,E_\alpha^{(2)}(t,\,b)\,dt\leqslant c_6(1-b)^{1+\alpha}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Сначала оценим функцию $E_\alpha^{(1)}(t,\,b)$, рассмотрев при этом два случая:

1) Пусть $0<\alpha<\infty$, тогда

$$E_\alpha^{(1)}(t,\,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{t}{b}\right)^n\left[\int\limits_0^{b^2}(1-x)^\alpha x^{n-1}\,dx+\right.$$

$$+\int_{b^2}^{b}(1-x)^{\alpha}x^{n-1}\,dx\Bigg]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{t}\right)^{n}\frac{\displaystyle\int_{0}^{1}(1-b^{2}t)^{\alpha}t^{n-1}\,dt}{\displaystyle\int_{0}^{1/t^{2}}(1-t^{2}x)^{\alpha}x^{n-1}\,dx}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{t}{b}\right)^{n}\int_{b^{2}}^{b}(1-x)^{\alpha}x^{n-1}\,dx\leqslant$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{t}\right)^{n}\max_{0<x<1}\left(\frac{1-b^{2}x}{1-t^{2}x}\right)^{\alpha}+\frac{2^{2+\alpha}(1-b)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}t^{n}.$$

Имея ввиду, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}t^{n}=\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\quad(0\leqslant t<1),\tag{1.11}$$

а также, что $0<\alpha<+\infty$, получим далее

$$E_{\alpha}^{(1)}(t,b)\leqslant\left(\frac{1-b^{2}}{1-t^{2}}\right)^{\alpha}\left|\lg\left(1-\frac{b}{t}\right)\right|+\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}\left(\frac{1-b}{1-t}\right)^{1+\alpha}.\tag{1.12}$$

2) Пусть теперь $-1<\alpha\leqslant 0$, тогда

$$E_{\alpha}^{(1)}(t,b)\leqslant(1-b)^{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\frac{t^{n}}{n}\leqslant c_{7}\left(\frac{1-b}{1-t}\right)^{\alpha}.\tag{1.13}$$

Оценка функции $E_{\alpha}^{(2)}(t,b)$ получается непосредственно для всех $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$,

$$E_{\alpha}^{(2)}(t,b)\leqslant\frac{1}{b(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}t^{n}\cdot(1-b)^{1+\alpha}<$$

$$\leqslant\frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{1-b}{1-t}\right)^{1+\alpha}.\tag{1.14}$$

Покажем, что для любого $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$ имеют место неравенства (1.9) и (1.10). В самом деле, из (1.12) при $0<\alpha<\infty$) получим

$$\int_{b}^{1}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\,E_{\alpha}^{(1)}(t,b)\,dt\leqslant 2^{\alpha}(1-b)^{\alpha}\int_{b}^{1}\omega(t)\left|\lg\left(1-\frac{b}{t}\right)\right|dt+$$

$$+\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}(1-b)^{1+\alpha}\int_{b}^{1}\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt\leqslant 2^{\alpha}(1-b)^{\alpha}\int_{b}^{1}\omega(t)\lg\frac{1}{t-b}\,dt+$$

$$+2^{\alpha}(1-b)^{\alpha}\int_{b}^{1}\omega(t)\lg\frac{1}{t}\,dt+\frac{2^{2+\alpha}}{1+\alpha}(1-b)^{1+\alpha}\int_{0}^{1}\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt.$$

Откуда, пользуясь неравенством (1.4), получаем (1.9).

В случае $-1<\alpha\leqslant 0$, пользуясь неравенством (1.13), вновь получим неравенство (1.9).

В силу оценки (1.14), имеем, что при любом α

$$\int\limits_b^1 \omega(t)(1-t)^\alpha E_\alpha^{(2)}(t, b)\, dt \leqslant \frac{(1-b)^{1+\alpha}}{b(1+\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt,$$

т. е. неравенство (1.10).

Лемма 1.4. *При любом* α $(-1<\alpha<\infty)$ *и* $0<b<1$ *для интеграла*

$$J_\alpha^{(3)}(b)=\int\limits_0^b (1-t)^\alpha\, \omega(t)\left\{\int\limits_b^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{tx}{b}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\} dt$$

справедлива оценка

$$J_\alpha^{(3)}(b)\leqslant c_8(1-b)^{1+\alpha}, \tag{1.15}$$

где $c_8>0$ *не зависит от* b.

Доказательство. Интеграл $J_\alpha^{(3)}(b)$ представим в следующем виде:

$$J_\alpha^{(3)}(b)=\int\limits_0^b (1-t)^\alpha\, \omega(t)\, dt\int\limits_0^{\frac{1-b}{1-t}} \frac{v^\alpha}{1-v}\, dv \tag{1.16}$$

и рассмотрим два случая:

1) Пусть $0<\alpha<\infty$. Тогда из (1.16) получим

$$J_\alpha^{(3)}(b)<(1-b)^\alpha\int\limits_0^b \omega(t)\lg\frac{b-t}{1-t}\, dt< c_4(1-b)^{1+\alpha} \tag{1.17}$$

согласно лемме 1.2.

2) Пусть $-1<\alpha\leqslant 0$. В интеграле $J_\alpha^{(3)}(b)$, перейдя к переменному τ и положив

$$v=\frac{1-b}{1-t}\,\tau,$$

получим

$$J_\alpha^{(3)}(b)=(1-b)^{1+\alpha}\int\limits_0^b \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt\int\limits_0^1 \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\tau}=$$

$$=(1-b)^{1+\alpha}\int\limits_0^b \frac{\omega(t)}{1-\mathrm{t}}\, dt\left[\int\limits_0^{1/2} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\tau}+\int\limits_{1/2}^1 \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\tau}\right]\leqslant$$

$$\leqslant (1-b)^{1+\alpha} c \cdot \int\limits_0^{1/2} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\tau} + 2^\alpha (1-b)^\alpha \int\limits_0^b \omega(t) \lg \frac{b-t}{1-t}\, dt <$$

$$< c_0 \cdot (1-b)^{1+\alpha} \int\limits_0^{1/2} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\tau} + c_4 2^\alpha (1-b)^{1+\alpha}. \tag{1.18}$$

Из неравенств (1.17) и (1.18) следует утверждение (1.15) леммы.

Лемма 1.5. *При любом* $-1<\alpha<\infty$ *и* $0<b<1$ *для интеграла*

$$J_\alpha^4(b) \equiv \int\limits_0^b \omega(t)(1-t)^\alpha \left\{ \int\limits_b^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\dfrac{tb}{x}\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\} dt$$

справедлива оценка

$$J_\alpha^{(4)}(b) \leqslant c_0 (1-b)^{1+\alpha}, \tag{1.19}$$

где $c_0>0$ *не зависит от* b.

Доказательство. Непосредственной оценкой внутреннего интеграла получим

$$J_\alpha^{(4)}(b) \leqslant \int\limits_0^b \frac{\omega(t)}{1-t}\, dt \int\limits_b^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \leqslant \frac{c_0}{b(1+\alpha)} (1-b)^{1+\alpha}.$$

§ 2. Интегральная оценка для функции Джрбашяна $B_\alpha(z;\, a_\mu)$

2.1°. Доказательство основной теоремы. Функция Джрбашяна $B_\alpha(z;\, z_k)$ с нулями в точках данной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной условию

$$\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1<\alpha<\infty), \tag{2.1}$$

является сходящимся в круге $|z|<1$ произведение [5, 6],

$$B_\alpha(z;\, z_k) = \prod_{k=1}^\infty \left(1-\frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha(z;\, z_k)}, \tag{2.2}$$

где для $|z|<1$ и $|\zeta|<1$ положено

$$W_\alpha(z;\, \zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^{k}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}\,dx\right\}z^{k}. \tag{2.3}$$

При $|z|<|\zeta|$ функцию $W_\alpha(z;\zeta)$ можно представить и в таком виде:

$$W_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{x}+\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{x}\bar{\zeta}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}+\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+$$

$$+\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{\zeta}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}. \tag{2.4}$$

Если ввести обозначение

$$A_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\alpha(z;\zeta)}, \tag{2.5}$$

то функцию $B_\alpha(z;z_k)$ можно представить в следующем виде:

$$B_\alpha(z;z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}A_\alpha(z;z_k). \tag{2.6}$$

Установим теперь ряд лемм, необходимых нам для доказательства основной теоремы этого параграфа.

Лемма 2.1. *При* $|z|<|a|<1$ *и* $-1<\alpha<\infty$ *имеет место оценка*

$$\log|A_\alpha(z;a)|\geqslant\log|A_\alpha(|z|,|a|)|. \tag{2.7}$$

Доказательство. Так как при $|z|<|a|$, согласно (2.4) и (2.5), функцию $A_\alpha(z;a)$ можно представить в следующем виде:

$$A_\alpha(z;a)=\exp\left\{\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}dx-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z\bar{a}}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{a}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}, \tag{2.8}$$

то имеем

$$\log|A_\alpha(z;a)|=\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}dx-\mathrm{Re}\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z\bar{a}}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}-$$

$$-\mathrm{Re}\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z}{a}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\geqslant\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}dx-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{|z|\,|a|}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}-$$

$$-\int_{|a|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{|z|}{|a|}x\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}=\log|A_\alpha(|z|,|a|)|.$$

Лемма 2.2. *Для любого* $-1<\alpha<\infty$ *при* $\frac{1}{2}\leqslant|a|<1$ *имеет место оценка*

$$J_\alpha^{(4)}(a)\equiv\int\limits_{L\,(|z|>|a|)}(1-|z|)^\alpha\,\omega(|z|)\,|\mathrm{Re}\,W_\alpha(z;\,a)|\,d\,|z|\leqslant c_{10}\,(1-|a|)^{1+\alpha},\qquad(2.9)$$

где $c_{10}>0$ *не зависит от* a.

Доказательство. Из представления (2.3) имеем

$$|\mathrm{Re}\,W_\alpha(z;\,a)|\leqslant\frac{2}{1+\alpha}(1-|a|)^{1+\alpha}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\,|z|^n\left\{|a|^{-n}\int\limits_0^{|a|}(1-x)^\alpha\,x^{n-1}\,dx+|a|^n\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{|a|}^{1}(1-x)^\alpha\,x^{-n-1}\,dx\right\}\equiv\frac{2}{1+\alpha}(1-|a|)^{1+\alpha}+E_\alpha^{(1)}(|z|,\,|a|)+E_\alpha^{(2)}(|z|,\,|a|)$$

согласно (1.7) и (1.8). Следовательно имеем

$$J_\alpha^{(4)}(a)\leqslant\frac{2}{1+\alpha}(1-|a|)^{1+\alpha}\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\,d\,|z|+\int\limits_{|a|}^{1}(1-|z|)^\alpha\,\omega(|z|)\,E_\alpha^{(1)}(|z|,\,|a|)\,d\,|z|+$$

$$+\int\limits_{|a|}^{1}(1-|z|)^\alpha\,\omega(|z|)\,E_\alpha^{(2)}(|z|,\,|a|)\,d\,|z|,$$

откуда доказательство утверждения (2.9) получится согласно лемме 1.3.

Лемма 2.3. *При любом* $-1<\alpha<\infty$ *и при* $0<|a|\leqslant\frac{1}{2}$ *для интеграла*

$$J_\alpha^{(5)}(a)=\int\limits_L(1-|z|)^\alpha\,\omega(|z|)\,\lg|A_\alpha(z;\,a)|\,d\,|z|\qquad(2.10)$$

справедлива оценка

$$|J_\alpha^{(5)}(a)|\leqslant c_{11}.\qquad(2.11)$$

Доказательство. Разобьем интеграл $J_\alpha^{(5)}(a)$ на две части

$$J_\alpha^{(5)}(a)=\int\limits_{L\,(|z|<|a|)}(1-|z|)^\alpha\,\omega(|z|)\,\lg|A_\alpha(z,\,a)|\,d\,|z|+$$

$$+\int\limits_{L\,(|z|>|a|)}(1-|z|)^\alpha\,\omega(|z|)\,\lg|A_\alpha(z,\,a)|\,d\,|z|\equiv E_\alpha^{(3)}(a)+E_\alpha^{(4)}(a).\qquad(2.12)$$

Пользуясь неравенством (2.7) и представлением (2.8) для $A_\alpha(z, a)$, получим

$$|E_\alpha^{(3)}(a)| \leqslant \int\limits_0^{|a|} (1-|z|)^\alpha \omega(|z|)\, d|z| \cdot \int\limits_{|a|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx +$$

$$+ \int\limits_0^{|a|} (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \left\{ \int\limits_{|a|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{|z|\,|a|}{x}\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\} d|z| +$$

$$+ \int\limits_0^{|a|} (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \left\{ \int\limits_{|a|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{|z|}{|a|}x\right)^{1+\alpha}} \frac{dx}{x} \right\} d|z|,$$

откуда, согласно леммам (1.4) и (1.5) имеем

$$|E_\alpha^{(3)}(a)| \leqslant c_{11}. \tag{2.13}$$

Для $E_\alpha^{(4)}(a)$ имеем

$$|E_\alpha^{(4)}(a)| \leqslant \left| \int\limits_{L(|z|>|a|)} \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \lg\left|1-\frac{z}{a^\mu}\right| d|z| \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{L(|z|>|a|)} \omega(|z|)(1-|z|^\alpha) \operatorname{Re} W_\alpha(z; a)\, d|z| \right|. \tag{2.14}$$

Для оценки первого интеграла достаточно применить лемму 1.1, для второго интеграла находим

$$\left| \int\limits_{L(|z|>|a|)} \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \operatorname{Re} W_\alpha(z; a)\, d|z| \right| \leqslant \int\limits_{|a|}^1 (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} |za|^n\, d|z| +$$

$$+ \int\limits_{|a|}^1 (1-|z|)^\alpha \omega(|z|) \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} |z|^n\, d|z| \leqslant 2 \int\limits_0^1 \frac{\omega(|z|)}{1-|z|}\, d|z|,$$

следовательно

$$|E_\alpha^{(4)}(a)| \leqslant c_{12}. \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.15) и (2.13), согласно (2.12), получаем доказательство леммы.

Лемма 2.4. *При любых* $-1 < \alpha < \infty$ *и* $\frac{1}{2} \leqslant |a| < 1$ *справедливы оценки*

$$J_1(a)=\int\limits_{L(|z|<|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_\alpha(z,a)|\,d|z|\geqslant-c_{13}(1-|a|)^{1+\alpha},\quad(2.16)$$

$$J_2(a)=\int\limits_{L(|z|\geqslant|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_\alpha(z,a)|\,d|z|\geqslant-c_{14}(1-|a|)^{1+\alpha}.\quad(2.16')$$

Доказательство. Так как в интеграле $J_1(a)$ $|z|<|a|$, то, согласно лемме 2.1, получим

$$J_1(a)\geqslant\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\lg|A_\alpha(t,|a|)|\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\,dt\int\limits_{|a|}^1\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx-\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\,\omega(t)\left\{\int\limits_{|a|}^1\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{t\,|a|}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}dt-$$

$$-\int\limits_0^{|a|}(1-t)^{\alpha}\omega(t)\left\{\int\limits_{|a|}^1\frac{(1-x)^{\alpha}}{\left(1-\frac{tx}{|a|}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{1+\alpha}(1-|a|)^{1+\alpha}-J_\alpha^{(4)}(a)-J_\alpha^{(3)}(a).$$

Отсюда утверждение леммы (2.15) получается, в силу лемм 1.4 и 1.5.

Для доказательства неравенства (2.16) разобьем $J_2(a)$ на сумму двух интегралов:

$$J_2(a)=\int\limits_{|a|}^1(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg\left|1-\frac{|z|}{|a|}\right|d|z|-$$

$$-\int\limits_{L(|z|\geqslant|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\operatorname{Re}W_\alpha(z;a)\,d|z|,$$

остальное вытекает из леммы 1.1 и 2.2.

Лемма 2.5. *При любых* $-1<\alpha<\infty$ *и* $\frac{1}{2}\leqslant|a|<1$ *для интеграла*

$$J(a)=\int\limits_L(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_\alpha(z;a)|\,d|z|$$

справедлива оценка

$$J(a)\geqslant-c_{15}(1-|a|)^{1+\alpha}.\quad(2.18)$$

Доказательство. Разобьем интеграл $J(a)$ на два интеграла

$$J(a)=J_1(a)+J_2(a),$$

где

$$J_1(a)=\int\limits_{L(|z|<|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_{\alpha}(z;\,a)|\,d|z|,$$

$$J_2(a)=\int\limits_{L(|z|>|a|)}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|A_{\alpha}(z;\,a)|\,d|z|,$$

тогда оценка (2.18) следует из леммы 2.4.

Теперь можно доказать основной результат настоящего параграфа, в котором в качестве специального случая, когда $\alpha=0$, содержится теорема, установленная А. Л. Шагиняном для функции Бляшке [3].

Теорема 1. *При любом* $-1<\alpha<\infty$ *для сходящегося произведения* $B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{L}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})|\,d|z|>-\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство. Из определения (2.6) функции $B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})$ имеем

$$\int\limits_{L}(1-|z|)^{\alpha}\,\omega(|z|)\lg|B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})|\,d|z|=\sum_{\mu=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{1}\omega(|z|)(1-$$

$$-|z|)^{\alpha}\lg|A_{\alpha}(z;\,a_{\mu})|\,d|z|=\sum_{|a_{\mu}|<\frac{1}{2}}J(a_{\mu})+\sum_{|a_{\mu}|>\frac{1}{2}}J(a_{\mu})\geqslant$$

$$\geqslant-n\left(\frac{1}{2}\right)\max_{0<|a|<\frac{1}{2}}J_{\alpha}^{(5)}(a)-c_{15}\sum_{|a_{\mu}|>\frac{1}{2}}(1-|a_{\mu}|)^{1+\alpha},$$

где $n\left(\frac{1}{2}\right)$ — число нулей a_{μ} функции $B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})$, удовлетворяющих неравенству $|a_{\mu}|\leqslant\frac{1}{2}$. Теорема следует из леммы 2.3 и условия сходимости произведения $B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})$.

2.2°. Неулучшаемость основной теоремы 1. В данном пункте мы установим, что для справедливости неравенства типа (2.19) присутствие множителя типа функции $\omega(t)\in\Omega$ необходимо. А именно, полагая, что $\{a_{\mu}\}_1^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\alpha}<\infty\qquad(-1<\alpha<\infty),$$

мы докажем, что для соответствующего произведения М. М. Джрбашяна $B_{\alpha}(z;\,a_{\mu})$ возможны случаи, когда

$$\int_{l}^{\;}(1-|z|)^{\alpha}\lg|B_{\alpha}(z;a_{\mu})|\,d|z|=-\infty.$$

Обозначая для $-1<\alpha<\infty$ и $0<a<1$

$$g_k(a)\equiv\frac{1}{a^k}\left\{\frac{1}{\alpha+1+k}\int_0^a(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt-\frac{1}{k}\int_0^{a^2}(1-t)^{\alpha}t^k\,dt\right\},$$

докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.6. *Для любого* $-1<\alpha<\infty$ *при* $a\to1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(a)=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right). \tag{2.20}$$

Доказательство. Заметим сначала же, что в случае $\alpha=0$ утверждение леммы очевидно. В самом деле, при $\alpha=0$ имеем

$$g_k(a)=\frac{1-a^{k+2}}{k(k+1)},$$

и так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k(k+1)}=1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\lg\frac{1}{1-a}\quad(0<a<1), \tag{2.21}$$

то

$$g_k(a)=1-a^2+a(1-a)\lg\frac{1}{1-a}=O\left((1-a)\lg\frac{1}{1-a}\right).$$

Для $-1<\alpha<\infty$, так как

$$\gamma_{\alpha,k}\equiv\frac{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}=\int_0^1(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\quad(-1<\alpha<\infty,\ k=1,2,\cdots),$$

то функцию $g_k(a)$ можно представить в следующем виде:

$$g_k(a)=\frac{a^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\left[\int_0^a(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\int_0^1(1-x)^{\alpha}x^k\,dx-\int_0^{a^2}(1-t)^{\alpha}t^k\,dt\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx\right], \tag{2.22}$$

откуда вытекает следующая оценка:

$$-\frac{a^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\int_0^{a^2}(1-t)^{\alpha}t^k\,dt\int_{a^2}^1(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\leqslant g_k(a)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\int_0^a(1-t)^{\alpha}t^{k-1}\,dt\int_{a^2}^1(1-t)^{\alpha}t^k\,dt. \tag{2.23}$$

Полагая сначала, что $-1<\alpha<0$, из (2.23) получим

$$g_k(a)\leqslant \frac{1}{k}\frac{\int\limits_0^1 (1-at)^\alpha t^{k-1}\,dt}{\int\limits_0^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt}\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt\leqslant \frac{1}{k}\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt. \qquad (2.24)$$

Используя теперь левое из неравенств (2.23), приходим к оценке

$$g_k(a)\geqslant -\frac{a}{1+\alpha+k}\frac{\int\limits_0^1 (1-at)^{\alpha-1} t^k\,dt}{\int\limits_0^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt}\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant -\frac{a}{1+\alpha+k}\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt. \qquad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) следует, что

$$g_k(a)=O\left(\frac{1}{k}\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt\right), \quad a\to 1-0.$$

Отсюда вытекает, что при $a\to 1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(a)=O\left(\int\limits_a^1 (1-t)^\alpha \lg\frac{1}{1-t}\,dt\right)=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right),$$

т. е. утверждение леммы.

Полагая теперь, что $0\leqslant\alpha<\infty$, из (2.23) имеем

$$g_k(a)\leqslant \frac{a^{-k}}{k\gamma_{\alpha,k}}\left[\int\limits_0^{a^2} (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt+\int\limits_{a^2}^{a} (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt\right]\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int\limits_0^1 (1-a^2t)^\alpha t^{k-1}\,dt}{k\int\limits_0^{1/a} (1-at)^\alpha t^{k-1}\,dt}\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt+\frac{\int\limits_{a^2}^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt}{k\int\limits_0^1 (1-t)^\alpha t^{k-1}\,dt}\times$$

$$\times\int\limits_a^1 (1-at)^\alpha t^k\,dt\leqslant \max_{0<t<1}\left(\frac{1-a^2t}{1-at}\right)\frac{1}{k}\int\limits_a^1 (1-t)^\alpha t^k\,dt+\frac{1}{k}\int\limits_a^1 (1-at)^\alpha t^k\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^\alpha+1}{k}\int_a^1 (1-at)^\alpha\, t^k\, dt \leqslant (1-a)^\alpha\,(2^\alpha+1)\,\frac{1-a^{k+1}}{k\,(k+1)} \leqslant (2^\alpha+1)(1-a)^\alpha \frac{1-a^k}{k\,(k+1)}\,.$$

Используя теперь левостороннее неравенство (2.23), точно так же получим

$$g_k\,(a) \geqslant -\frac{(2^\alpha+1)(1-a)^\alpha}{\alpha+1+k}\,\frac{1-a^k}{k}\,. \tag{2.27}$$

Из неравенств (2.26) и (2.27) следует, что при $a \to 1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k\,(a) = O\left((1-a)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-a^k}{k\,(k+1)}\right), \tag{2.28}$$

откуда, согласно (2.21), следует утверждение леммы в случае $0<\alpha<\infty$.

Итак, лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Если* $\{a_\mu\}_1^\infty$ $(0<a_\mu\leqslant a_{\mu+1}\leqslant 1)$, *то при любом* $-1<\alpha<\infty$ *для неравенства*

$$J_\alpha = \int_0^1 (1-x)^\alpha \lg |B_\alpha\,(x;\,a_\mu)|\, dx > -\infty \quad (-1<\alpha<\infty)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (1-a_\mu)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a_\mu} < +\infty.$$

Доказательство. Из определения функции $B_\alpha\,(z;\,a_\mu)$ следует, что

$$J_\alpha = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^1 (1-x)^\alpha \left\{\lg\left|\,1-\frac{x}{a_\mu}\right| - \operatorname{Re} W_\alpha(x;\,a_\mu)\right\} dx. \tag{2.29}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_\alpha^{(1)} = \int_0^1 (1-x)^\alpha \left\{\lg\left|1-\frac{x}{a}\right| - \operatorname{Re} W_\alpha\,(x;\,a_\mu)\right\} dx = J_\alpha^{(2)} - J_\alpha^{(3)}\ (0<a\leqslant 1).$$

Оценим теперь интеграл $J_\alpha^{(2)}$

$$J_\alpha^{(2)} = \int_0^a (1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right) dx + \int_a^1 (1-x)^\alpha \lg\left(\frac{x}{a}-1\right) dx = U_1 + U_2.$$

Найдем порядок интеграла U_2 при $a \to 1-0$

$$U_2=\int_a^1(1-x)^\alpha \lg\left(\frac{x}{a}-1\right)dx=\int_a^1(1-x)^\alpha \lg(x-a)\,dx-\frac{(1-a)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\lg a.$$

Так как

$$\int_a^1(1-x)^\alpha \lg(x-a)\,dx=\frac{(1-a)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\lg(1-a)+(1-a)^{1+\alpha}\times$$

$$\times\int_0^1(1-t)^\alpha \lg t\,dt,$$

то

$$U_2=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right).$$

Заметим также, что

$$U_1=\int_0^{a'}(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx+\int_{a'}^{a}(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx,$$

где

$$\int_{a'}^{a}(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right),$$

тогда будем иметь

$$J_\alpha^{(2)}=\int_0^{a'}(1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right)dx+O\left((1-a)^{1+\alpha}\lg\frac{1}{1-a}\right). \qquad (2.30)$$

Займемся теперь оценкой интеграла $J_\alpha^{(3)}$. Заметим прежде всего, что

$$J_\alpha^{(3)}=\int_0^1(1-x)^\alpha dx\int_0^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx+\int_0^1(1-x)^\alpha\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}x^n a^{-n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^a(1-t)^\alpha t^{n-1}\,dt\right\}dx-\int_0^1(1-x)^\alpha\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}x^n a^n\times\right.$$

$$\left.\times\int_a^1(1-t)^\alpha t^{-n-1}\,dt\right\}dx=K_1+K_2+K_3.$$

Имеем

$$K_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}a^{-n}\int_0^a(1-x)^\alpha x^{n-1}\,dx\int_0^1(1-x)^\alpha x^n\,dx=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{\alpha+1+n} \int_0^a (1-x)^\alpha x^{n-1}\,dx. \tag{2.31}$$

Далее

$$K_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\alpha+1+n} \int_a^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1}\,dx. \tag{2.32}$$

Из (2.30) и (2.31), используя также лемму 2.6, получим

$$J_\alpha^{(2)} + K_2 = O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right) + \int_0^{a^2} (1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{x}{a}\right) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{\alpha+1+n} \int_0^a (1-x)^\alpha x^{n-1}\,dx = O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \left\{\frac{1}{\alpha+1+n} \int_0^a (1-x)^\alpha x^{n-1}\,dx - \frac{1}{n} \int_0^{a^2} (1-x)^\alpha x^n\,dx\right\} =$$

$$= O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right). \tag{2.33}$$

Для K_3 имеем

$$K_3 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\alpha+1+n} \int_a^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1}\,dx,$$

следовательно

$$K_3 = O\left(\int_a^1 (1-x)^\alpha \lg\left(1-\frac{a}{x}\right) dx\right) = O\left((1-a)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a}\right). \tag{2.34}$$

Так как непосредственно видно, что $K_1 = O\left((1-a)^{1+\alpha}\right)$, то из (2.33) и (2.34) следует утверждение теоремы.

Теорема 2 показывает, что для неравенства типа (2.19) присутствие множителя $\omega(|z|)$ необходимо.

В самом деле, если $0 < a_1 \leqslant a_2 \cdots \leqslant a_\mu \leqslant \cdots < 1$ и

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (1-a_\mu)^{1+\alpha} < \infty,$$

но тем не менее

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (1-a_\mu)^{1+\alpha} \lg \frac{1}{1-a_\mu} = +\infty,$$

то

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha \lg |B_\alpha(x; a_\mu)|\,dx = -\infty.$$

§ 3. Интегральная оценка для функций классов N_α $(-1<\alpha<\infty)$

Согласно основной теореме М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении классов N_α [5, 6] имеем:

Класс N_α $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$F(z)=cz^{\lambda}\frac{B_\alpha(z;\ a_\mu)}{B_\alpha(z;\ b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}, \tag{3.1}$$

где c — постоянная, $\lambda \gtrless 0$ — целое число

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{3.2}$$

$\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$.

Согласно представлению (3.1), если функция $F(z)\in N_\alpha$ и не имеет нулей и полюсов, то ее можно представить в таком виде:

$$F(z)=c\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}.$$

Так как, согласно (3.2) имеем, что

$$\left|\lg|F(z)|\right|\leqslant\frac{c_{16}}{(1-|z|)^{1+\alpha}},$$

то следующая теорема доказывается непосредственно.

Теорема 3. *Если непрерывная на* $[0, 1)$ *и не возрастающая функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{1-t}\,dt<\infty,$$

то для функции вида (3.1) *имеем*

$$\int_L\omega(|z|)(1-|z|)^\alpha\lg|F(z)|\,d|z|>-\infty\quad(-1<\alpha<\infty). \tag{3.3}$$

На основании представления (3.1) функции $W(z)$ класса N_α и теорем 1 и 3 получим основной результат настоящей статьи.

Теорема 4. *Пусть функция* $W(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ *и* $W(z)\not\equiv 0$, $\omega(x)\in\Omega$. *Тогда справедливо следующее неравенство*:

$$\int_L\omega(|z|)(1-|z|)^\alpha\left|\lg|W(z)|\right|\,d|z|<\infty. \tag{3.4}$$

Если обозначим через A_α множество *аналитических* в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, принадлежащих классу N_α, то из теоремы 4 непосредственно вытекает следующая теорема единственности для функций класса A_α.

Теорема 5. *Пусть* $f(z)\in A_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ *и* $\omega(x)\in\Omega$. *Тогда если*

$$\int\limits_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \lg|f(z)|\,d|z| = -\infty, \tag{3.5}$$

то $f(z)\equiv 0$.

В самом деле, если предположить, что $f(z)\not\equiv 0$, то согласно теореме 4, будем иметь

$$\int\limits_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha\,|\lg|f(z)||\,d|z|<+\infty,$$

что противоречит условию (3.5).

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 7.V.1973

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Աճի գնահատական N_α դասի մերոմորֆ ֆունկցիաների համար *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանը [6] մենագրությունում կառուցել էր միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների α $(-1<\alpha<\infty)$ *անընդհատ պարամետրից կախված* N_α *դասերի ֆակտորիզացման կատարյալ տեսությունը։*

Ներկա հոդվածում, հենվելով այդ դասերի ֆակտորիզացման ներկայացումների վրա, [5] աշխատանքում պարունակվող գնահատման մեթոդներով հաստատվում են այդ ֆունկցիաների համար ինտեգրալ գնահատականներ և ապացուցվում վերջինների ճշտությունը համապատասխան դասերում։

Ասում ենք, որ ֆունկցիա $\omega(t)\in\Omega$ *եթե* $\omega(t)$*-ն կամայական անընդհատ և չաճող ֆունկցիա է [0,1] հատվածում, որի համար* $0<\omega(t)<1$ *և*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}\,dt<\infty.$$

Հետևյալ պնդումը տալիս է ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը։

Թող ֆունկցիա $W(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$ $W(z)\not\equiv 0$ *և* $\omega(x)\in\Omega$։ *Ապա ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\int\limits_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha\,|\lg|W(z)||\,d|z|<\infty,$$

որտեղ՝ L*-ը շրջանի կենտրոնը* $|z|=1$ *շրջանի հետ միացնող ցանկացած ուղղելի կոր է։*

V. S. ZAKHARIAN. *A bound for the growth of functions from the N_α class* (summary)

In M. M. Djrbashian's monograph [6] a perfect theory of factorisation of the N_α classes of meromorphic in a circle functions, depending on a parameter α $(-1<\alpha<\infty)$ hat been constructed.

In the present paper integral bounds for the functions from N_α are established and their exactness in the proper class is proved.

It is said, that $\omega(t)\in\Omega$, if $0<\omega(t)<1$, $\omega(t)$ is continuous, nonincreasing on (0, 1) and

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1-t}dt<+\infty.$$

The main result of the paper states, that for $W(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<\infty)$, $W(z)\neq 0$ and $\omega\in\Omega$

$$\int_L \omega(|z|)(1-|z|)^\alpha \left|\lg|W(z)|\right| d|z|<\infty,$$

for every rechtifiable curve L, connecting the center of the circle $|z|=1$ with its periphery.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Гостехиздат, 1941.
2. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
3. *А. Л. Шагинян.* Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ-мат. наук, 12, № 1, 1959, 2—25.
4. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщения ин-та матем. и мех. АН Армянской ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
5. *В. С. Захарян.* Теоремы единственности для некоторых классов функций, голоморфных в круге, Матем. сб., 63 (105), № 1, 1964, 3—22.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
7. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121): 4 (5), 1969, 517—615.
8. *Р. С. Галоян.* О мероморфных функциях класса $N\{\omega\}$, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 5, 1972, 334—360.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОДМНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Единичная сфера Σ гильбертова пространства может быть при помощи *непрерывной* деформации стянута по себе в точку. Существование такой деформации означает, что нет *никаких* нетривиальных гомологических или гомотопических инвариантов сферы Σ, сохраняющихся при *любых* непрерывных деформациях. Между тем, сфера Σ несомненно обладает какой-то „бесконечномерной цикличностью". Выход из этого положения заключается в том, что следует *ограничить* класс допустимых отображений, т. е. рассматривать не все непрерывные отображения подмножеств гильбертова пространства, а лишь некоторый более узкий класс отображений. В частности, этот более узкий класс допустимых отображений должен обладать тем свойством, что, оставаясь в этом классе, невозможно сферу Σ стянуть по себе в точку. Тогда возникает надежда обнаружить нетривиальный бесконечномерный гомологический инвариант сферы Σ, сохраняющийся при деформациях в рассматриваемом классе допустимых отображений.

Кажется естественным взять в качестве такого класса отображений совокупность Q всех отображений вида $\lambda I + A$, где I — тождественное отображение гильбертова пространства H на себя, а A — вполне непрерывное отображение. Действительно, в этом классе отображений сферу Σ невозможно по себе стянуть в точку, и, согласно работам [1], [2], сфера Σ имеет в этом классе отображений нетривиальный гомологический бесконечномерный инвариант, а именно, группу гомологий дефекта 1. И все же, класс Q всех отображений вида $\lambda I + A$ не является удачным для построения бесконечномерной алгебраической топологии. Этот класс является *слишком узким*.

В самом деле, для того чтобы некоторый класс отображений был приемлем для построения бесконечномерной алгебраической топологии, нужно, чтобы он позволил перенести на случай гильбертова пространства стандартную гомотопическую технику, применяемую в конечномерных пространствах. Простой пример показывает, что класс Q этого не позволяет сделать. Пусть, например, L — гиперплоскость гильбертова пространства H, проходящая через внутреннюю точку единичного шара E, и x_0 — внутренняя точка шара E, не принадлежащая гиперплоскости L. Произведем „выметание" гиперплоскости L из внутренней части шара E, для чего каждую точку $x \in L \cap E$ спроектируем на сферу Σ лучом, исходящим из точки x_0 и проходящим через точку x. Получаемое таким образом непрерывное отображение гиперплоскости L напоминает те стандартные „выметания", которые применяются в конечномерном случае для доказательства теоремы о клеточной аппроксимации. Это отображение (и аналогичные ему) *должны быть* допустимыми, если мы хотим перенести на бесконечномерный случай стандартную гомотопическую технику. Между тем, это отображение не содержится в классе Q всех отображений вида $\lambda I + A$, и это показывает узость класса Q. Попытки расширения класса Q содержатся в работах [3], [4], [5].

В этой статье содержится подробное изложение результатов, ранее кратко сформулированных в заметке [5]. Именно, здесь строится класс K_0 непрерывных отображений гильбертова пространства, приемлемый для построения понятий алгебраической топологии в гильбертовом пространстве. Отметим, что введенный в [5] (и подробно рассматриваемый здесь) класс K_0 послужил основой для построения Э. А. Мирзаханяном [6] бесконечномерных гомотопических групп.

Всюду в дальнейшем через H обозначается действительное гильбертово пространство (со счетным базисом). Отображения рассматриваемого класса K_0 локально (т. е. в окрестности каждой точки x_0) напоминают по своим свойствам отображения вида $\lambda I + A$, где отображение A вполне непрерывно, а λ — действительное число, которое однако зависит от точки x_0. Таким образом, рассматриваемый класс отображений является значительно более широким, чем Q.

Перейдем к точным определениям и изложению результатов. Пусть M — открытое подмножество пространства H. Будем говорить, что отображение $f\colon M \to H$ принадлежит классу K_0, если для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такие числа $\delta > 0$, λ, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|. \tag{1}$$

Предложение 1. *Каждое отображение класса K_0 локально удовлетворяет условию Липшица. Более подробно, если $f\colon M \to H$ — отображение класса K_0, то для любой точки $x_0 \in M$ можно подобрать такие положительные числа r, N, что при $x, y \in M$, $\|x - x_0\| < r$, $\|y - y_0\| < r$ выполнено соотношение $\|f(x) - f(y)\| \leqslant N \|x - y\|$.*

Доказательство. Для точки x_0 и числа $\varepsilon > 0$ выберем L, U, λ, δ так, чтобы выполнялось соотношение (1). Выберем, далее, такое $R > 0$, что R-окрестность точки x_0 содержится в U, и положим

$$r = \frac{1}{3} R \sin \delta, \quad N = \frac{3(|\lambda| + \varepsilon)}{\sin \delta}. \tag{2}$$

Пусть $\|x - x_0\| < r$, $\|y - x_0\| < r$. Так как, очевидно, $r < R$, то $x, y \in U \subset M$. Обозначим через a произвольный вектор, ортогональный подпространству L и удовлетворяющий условию

$$\|a\| = \frac{1 + \sin\delta}{2\sin\delta}\,\|x - y\|, \tag{3}$$

и положим

$$b = a + \frac{x+y}{2}.$$

Тогда

$$\|x - y\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - x_0\| < 2r,$$

$$\|b - x_0\| = \left\| a + \frac{x - x_0}{2} + \frac{y - x_0}{2} \right\| \leqslant \|a\| + r <$$

$$< \frac{1 + \sin\delta}{2\sin\delta}\cdot 2r + r = \frac{1 + 2\sin\delta}{\sin\delta}\cdot r < \frac{3r}{\sin\delta} = R$$

(см. (2)), так что $b \in U \subset M$. Далее, в силу (3)

$$\|b - x\| = \left\| a - \frac{x - y}{2} \right\| \geqslant \|a\| - \frac{1}{2}\|x - y\| = \frac{1}{2\sin\delta}\,\|x - y\|,$$

$$\|b - x\| \leqslant \|a\| + \frac{1}{2}\|x - y\| = \frac{1 + 2\sin\delta}{2\sin\delta}\,\|x - y\| \leqslant \frac{3}{2\sin\delta}\,\|x - y\|$$

и, аналогично

$$\frac{1}{2\sin\delta}\,\|x - y\| \leqslant \|b - y\| \leqslant \frac{3}{2\sin\delta}\,\|x - y\|. \tag{4}$$

Если теперь p — произвольный вектор подпространства L, то $pa = 0$, откуда

$$p\,(b - y) = p\left(a + \frac{x - y}{2}\right) = \frac{1}{2}\,p\,(x - y) \leqslant \frac{1}{2}\,\|p\|\,\|x - y\| \leqslant \|p\|\,\|b - y\|\sin\delta$$

(см. (4)). Следовательно, угол между вектором $b - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, и потому, в силу (1)

$$\|f(b) - f(y) - \lambda\,(b - y)\| \leqslant \varepsilon\,\|b - y\|,$$

откуда, в силу (4)

$$\|f(b) - f(y)\| \leqslant (|\lambda| + \varepsilon)\,\|b - y\| \leqslant \frac{3\,(|\lambda| + \varepsilon)}{2\sin\delta}\,\|x - y\|.$$

Аналогично

$$\|f(b) - f(x)\| \leqslant \frac{3\,(|\lambda| + \varepsilon)}{2\sin\delta}\,\|x - y\|.$$

Таким образом

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(b) - f(x)\| + \|f(b) - f(y)\| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \frac{3(|\lambda| + \varepsilon)}{2 \sin \delta} \|x - y\| = N \|x - y\|$$

(см. (2)), и предложение 1 полностью доказано.

Предложение 2. *Пусть M — открытое подмножество пространства H и f: $M \to H$ — отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица. Пусть при этом для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такая конечномерная плоскость $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 в H и такое число λ, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален плоскости L, то выполнено соотношение* (1). *Тогда отображение f: $M \to H$ принадлежит классу K_0.*

Доказательство. Для точки $x_0 \in M$ и числа $\varepsilon > 0$ выберем L, U, λ как указано в условии предложения 2. Так как отображение f локально удовлетворяет условию Липшица, то можно подобрать такие числа r и N, что r — окрестность точки x_0 содержится в U и при $\|x - x_0\| < r$, $\|z - x_0\| < r$ выполнено соотношение $\|f(x) - f(z)\| \leqslant \leqslant N \|x - z\|$. Положим

$$\delta = \arc \sin \frac{\varepsilon}{N + |\lambda|}. \tag{5}$$

Допустим, что $\|x - x_0\| < \frac{r}{3}$, $\|y - y_0\| < \frac{r}{3}$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$. Пусть $x - y = a + b$, где $a \in L$, $b \perp L$. Тогда

$$\|a\| \leqslant \|x - y\| \cdot \sin \delta, \quad \|b\| \leqslant \|x - y\|. \tag{6}$$

Обозначая $x - a = z$, находим

$$\|z - x_0\| = \|(x - a) - x_0\| = \|b + y - x_0\| \leqslant \|b\| + \|y - x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - y\| + \|y - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - x_0\| + \|y - x_0\| < r,$$

и потому $z \in U$, и выполнено соотношение (см. (6))

$$\|f(x) - f(z)\| \leqslant N \|x - z\| = N \|a\| \leqslant N \sin \delta \|x - y\|. \tag{7}$$

Далее, так как $z \in U$, $y \in U$ и вектор $z - y = b$ ортогонален подпространству L, то (см. (1), (6))

$$\|f(z) - f(y) - \lambda (z - y)\| \leqslant \varepsilon \|z - y\| = \varepsilon \|b\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|. \tag{8}$$

Таким образом, согласно (7), (8)

$$\|f(x) - f(y) - \lambda (x - y)\| \leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y) - \lambda (z - y)\| +$$
$$+ \|\lambda (z - x)\| \leqslant N \sin \delta \|x - y\| + \varepsilon \|x - y\| + |\lambda| \cdot \|x - z\|.$$

Учитывая, что $\|x - z\| = \|a\| \leqslant \|x - y\| \sin \delta$, получаем (см. (5))

$$\|f(x) - f(y) - \lambda (x - y)\| \leqslant ((N + |\lambda|) \sin \delta + \varepsilon) \|x - y\| = 2\varepsilon \|x - y\|.$$

Итак, если $\|x-x_0\|<\frac{r}{3}$, $\|y-x_0\|<\frac{r}{3}$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x-y)\|\leqslant 2\varepsilon\|x-y\|.$$

Ввиду произвольности ε, это означает, что отображение f принадлежит классу K_0 и предложение 2 полностью доказано.

Предложения 1, 2 позволяют несколько упростить определение класса K_0. Именно, отображение f: $M\to H$ в том и только в том случае принадлежит классу K_0, если выполнены следующие два условия:

1) f локально удовлетворяет условию Липшица,

2) для любой точки $x_0\in M$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует такое конечномерное подпространство $L\subset H$, такая окрестность $U\subset M$ точки x_0 и такое число λ, что если x, $y\in U$ и $x-y\perp L$, то выполнено соотношение (1).

Можно также предложить и дальнейшую модификацию определения класса K_0. Именно, справедливо следующее

Предложение 3. *Пусть $e_1, e_2,\cdots, e_n,\cdots$ — фиксированный ортонормированный базис пространства H. Пусть, далее, M — открытое множество пространства H и f: $M\to H$ — отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица. Отображение f тогда и только тогда принадлежит классу K_0, когда для любой точки $x_0\in M$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует такое натуральное n, такая окрестность $U\subset M$ точки x_0 и такое число λ, что если x, $y\in U$ и вектор $x-y$ ортогонален векторам $e_1, e_2,\cdots, e_n$, то выполнено соотношение* (1).

Доказательство. Через L_k условимся обозначать подпространство пространства H, натянутое на векторы $e_1,\cdots, e_k$.

Достаточность сформулированного условия непосредственно вытекает из предложения 2 (нужно лишь рассмотреть подпространство $L=L_n$). Докажем необходимость.

Пусть отображение f: $M\to H$ принадлежит классу K_0. Для точки $x_0\in M$ и числа $\varepsilon>0$ выберем L, U, λ, δ в соответствии с определением (см. (1)). При этом мы можем считать, что $\delta<1$.

Обозначим через S единичную сферу подпространства L, и пусть $\{x_1, x_2,\cdots, x_p\}$ — конечное множество точек сферы S, составляющее ее $\frac{\delta}{4}$ — сеть. Для каждой из точек x_i $(i=1, 2,\cdots, p)$ выберем такое натуральное число k_i, что точка x_i отстоит от подпространства L_{k_i} менее чем на $\frac{\delta}{4}$ $\Big($т. е. существует такая точка $y_i\in L_{k_i}$, что $\|x_i-y_i\|<\frac{\delta}{4}\Big)$. Наибольшее из чисел $k_1, k_2,\cdots, k_p$ обозначим через n. Тогда каждая из точек $x_1, x_2,\cdots, x_p$ отстоит от подпространства L_n менее чем на $\frac{\delta}{4}$. Так как $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ есть $\frac{\delta}{4}$ — сеть в S, то любая точка сферы S отстоит от подпространства L_n менее чем на $\frac{\delta}{2}$.

Пусть $a \in L$, т. е. $a = ke$, где $e \in S$, и пусть f — ближайшая к e точка пространства L_n. Тогда $f - e \perp L_n$ и $\|f - e\| < \frac{\delta}{2}$. Так как $\|e\| = 1$ и $\delta < 1$, то $f \neq 0$. Обозначая через α угол между векторами e и f, имеем: $\sin\alpha = \|e\| \sin\alpha = \|f - e\| < \frac{\delta}{2}$, и потому

$$\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \sin\alpha \leqslant 2\sin\alpha < \delta.$$

Итак, каждый вектор $a \in L$ образует с подпространством L_n угол, меньший δ. Из этого следует, что если некоторый вектор ортогонален подпространству L_n, то он образует с подпространством L угол, не меньший $\frac{\pi}{2} - \delta$. Следовательно, если $x, y \in U$ и $x - y \perp L_n$, то угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, и потому выполнено соотношение (1). Тем самым предложение 3 полностью доказано.

Предложение 4. *При фиксированном M все отображения $f\colon M \to H$, принадлежащие классу K_0, образуют линейное пространство. Иначе говоря, если $f, g\colon M \to H$ — отображения класса K_0, то при любых действительных k, l отображение $h = kf + lg$ множества M в H также принадлежит классу K_0.*

Доказательство. Выберем ортонормированный базис $e_1, e_2, \cdots$ пространства H. Так как отображения f, g принадлежат классу K_0, то каждое из них локально удовлетворяет условию Липшица. Но тогда ясно, что и отображение $h = kf + lg$ локально удовлетворяет условию Липшица.

Далее, для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такое натуральное n, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число λ, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_n$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leqslant \varepsilon\|x - y\|. \qquad (9)$$

Точно так же (для тех же x_0 и ε) существуют такое натуральное число m, такая окрестность $V \subset M$ точки x_0 и такое число μ, что если $x, y \in V$ и вектор $x - y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_m$, то выполнено соотношение

$$\|g(x) - g(y) - \mu(x - y)\| \leqslant \varepsilon\|x - y\|. \qquad (10)$$

Пусть, для определенности, $n \geqslant m$. Тогда если $x, y \in U \cap V$ и вектор $x-y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_n$, то выполнены *оба* соотношения (9), (10). Следовательно, в этом случае, положив $\nu = k\lambda + l\mu$, мы получаем

$$\|h(x) - h(y) - \nu(x-y)\| =$$
$$= \|kf(x) + lg(x) - kf(y) - lg(y) - (k\lambda + l\mu)(x-y)\| \leqslant$$
$$\leqslant |k| \|f(x) - f(y) - \lambda(x-y)\| + |l| \|g(x) - g(y) - \mu(x-y)\| \leqslant$$
$$\leqslant |k| \varepsilon \|x-y\| + |l| \varepsilon \|x-y\| = (|k| + |l|) \varepsilon \|x-y\|.$$

Таким образом, если $x, y \in U \cap V$ и вектор $x-y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_n$, то выполнено соотношение

$$\|h(x) - h(y) - \nu(x-y)\| < (|k| + |l|) \varepsilon \|x-y\|.$$

Ввиду произвольности ε, отсюда вытекает, согласно предложению 3, что отображение h принадлежит классу K_0.

Следующее предложение устанавливает важное характеристическое свойство отображений класса K_0.

Предложение 5. *Пусть f: $M \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0. Тогда существует (и притом единственная) действительная функция $\lambda(x)$, определенная на M и обладающая следующим свойством: для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число $\delta > 0$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x_0)(x-y)\| < \varepsilon \|x-y\|. \tag{11}$$

Доказательство. Фиксируем в H некоторый ортонормированный базис $e_1, e_2, \cdots$. Пусть $x_0 \in M$. Для любого натурального k существуют (в силу предложения 3) такое натуральное число n_k, такая окрестность $U_k \subset M$ точки x_0 и такое число λ_k, что если $x, y \in U_k$ и вектор $x-y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_{n_k}$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_k(x-y)\| \leqslant \frac{1}{k} \|x-y\|.$$

Пусть p, q — натуральные числа, причем $p > k$, $q > k$. Выберем натуральное число n, большее чем n_p и n_q, и пусть $x, y \in U_p \cap U_q$ — такие точки, что $x \neq y$ и вектор $x-y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Так как $x, y \in U_p$ и вектор $x-y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_{n_p}$ (ибо $n_p < n$), то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_p(x-y)\| \leqslant \frac{1}{p} \|x-y\|.$$

Точно так же

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_q(x-y)\| \leqslant \frac{1}{q}\|x-y\|.$$

Отсюда получаем

$$|\lambda_p-\lambda_q|\cdot\|x-y\| = \|(\lambda_p-\lambda_q)(x-y)\| =$$
$$= \|(f(x)-f(y)-\lambda_q(x-y))-(f(x)-f(y)-\lambda_p(x-y))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(x)-f(y)-\lambda_q(x-y)\| + \|f(x)-f(y)-\lambda_p(x-y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\|x-y\| + \frac{1}{q}\|x-y\| < \frac{2}{k}\|x-y\|$$

(ибо $p>k$, $q>k$). Так как $\|x-y\|\neq 0$ (поскольку $x\neq y$), то мы имеем

$$|\lambda_p-\lambda_q| < \frac{2}{k} \text{ при } p>k,\ q>k.$$

Из этого следует, что последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots$ является сходящейся. Предел ее обозначим через $\lambda(x_0)$.

Пусть теперь ε—произвольное положительное число. Выберем натуральное число k, удовлетворяющее условиям: $\frac{1}{k}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$, $|\lambda(x_0)-\lambda_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$. Через L обозначим подпространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, \cdots, e_{n_k}$, и положим $U=U_k$. Тогда если $x, y\in U$—такие точки, что $x-y\perp L$, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_k(x-y)\| \leqslant \frac{1}{k}\|x-y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|x-y\|,$$

и потому

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x_0)(x-y)\| \leqslant \|f(x)-f(y)-\lambda_k(x-y)\| + \|(\lambda(x_0)-$$
$$-\lambda_k)(x-y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|x-y\| + |\lambda(x_0)-\lambda_k|\,\|x-y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|x-y\| +$$
$$+\frac{\varepsilon}{4}\|x-y\| = \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\|.$$

Итак

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x_0)(x-y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\| \text{ при } x, y\in U \text{ и } x-y\perp L.$$

Из этого вытекает (см. доказательство предложения 2) существование таких чисел $r>0$, $\delta>0$, что если $\|x-x_0\|<\frac{r}{3}$, $\|y-x_0\|<\frac{r}{3}$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|.$$

Тем самым существование требуемой функции $\lambda(x)$ доказано.

Докажем единственность. Допустим, что существует функция $\lambda_1(x)$, обладающая аналогичными свойствами и отличная от $\lambda(x)$, т. е. найдется такая точка $x_0 \in M$, что $\lambda_1(x_0) \neq \lambda(x_0)$. Положим:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}|\lambda_1(x_0)-\lambda(x_0)|.$$

В силу свойств функции $\lambda(x)$ существует такое конечномерное подпространство L и такая окрестность $U \subset M$ точки x_0, что если $x, y \in U$ и $x-y \perp L$, то выполнено соотношение (11). Точно так же, существует такое конечномерное подпространство L_1 и такая окрестность $U_1 \subset M$ точки x_0, что если $x, y \in U_1$ и $x-y \perp L$, то

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_1(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|.$$

Возьмем в $U \cap U_1$ две такие точки x, y, что $x \neq y$, $x-y \perp L$ и $x-y \perp L_1$. Тогда

$$|\lambda(x_0)-\lambda_1(x_0)| \cdot \|x-y\| = \|(\lambda(x_0)-\lambda_1(x_0))(x-y)\| =$$
$$= \|(f(x)-f(y)|-\lambda_1(x_0)(x-y)) - (f(x)-f(y)-\lambda(x_0)(x-y))\| \leqslant$$
$$< \|f(x)-f(y)-\lambda_1(x_0)(x-y)\| + \|f(x)-f(y)-\lambda(x_0)(x-y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\|x-y\| + \varepsilon\|x-y\| = 2\varepsilon\|x-y\|.$$

Так как $\|x-y\| \neq 0$, то отсюда находим, что $|\lambda(x_0)-\lambda_1(x_0)| \leqslant 2\varepsilon$ или $3\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$, что противоречиво. Полученное противоречие и доказывает единственность.

Предложение 5 показывает, что числа λ, участвующие в первоначальном определении класса отображений K_0 (см. (1)), могут быть выбраны так, что они зависят только от x (но не от ε), т. е. являются значениями некоторой функции $\lambda(x)$, однозначно определенной на множестве M. При этом основное соотношение (1), входящее в определение класса K_0, преобразуется к виду (11).

Функцию $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, существование и единственность которой устанавливается предложением 5, будем называть *терминальной производной* отображения f (принадлежащего классу K_0).

Предложение 6. *Терминальная производная* $\lambda(x) = \lambda_f(x)$ *отображения* $f: M \to H$, *принадлежащего классу* K_0, *непрерывна на множестве* M.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$ и ε — положительное число. Согласно предложению 5, существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$ и такая окрестность $U \subset M$ точки x_0, что при $x, y \in U$, $x-y \perp L$ справедливо соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|.$$

Возьмем произвольную точку $x_1 \in U$ и положительное число ε_1. Согласно предложению 5, существует такое конечномерное подпространство L_1 и такая окрестность $U_1 \subset M$ точки x_1, что при $x, y \in U_1$, $x - y \perp L_1$ справедливо соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x_1)(x - y)\| \leqslant \varepsilon_1 \|x - y\|.$$

Выберем в $U \cap U'_1$ две такие точки x, y, что $x \neq y$, $x - y \perp L$ и $x - y \perp L_1$. Тогда

$$|\lambda(x_0) - \lambda(x_1)| \cdot \|x - y\| = \|(\lambda(x_0) - \lambda(x_1))(x - y)\| =$$
$$= \|(f(x) - f(y) - \lambda(x_1)(x - y)) - (f(x) - f(y) - \lambda(x_0)(x - y))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(x) - f(y) - \lambda(x_1)(x - y)\| + \|f(x) - f(y) - \lambda(x_0)(x - y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1 \|x - y\| + \varepsilon \|x - y\| = (\varepsilon_1 + \varepsilon) \|x - y\|.$$

Так как $\|x - y\| \neq 0$, то отсюда получаем $|\lambda(x_0) - \lambda(x_1)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon_1$, и потому, ввиду произвольности ε_1, находим: $|\lambda(x_0) - \lambda(x_1)| \leqslant \varepsilon$. Это соотношение справедливо для любой точки $x_1 \in U$, откуда следует, что функция $\lambda(x)$ непрерывна в точке x_0. Тем самым (ввиду произвольности точки $x_0 \in M$) предложение 6 полностью доказано.

Для терминальных производных без труда устанавливаются формулы „дифференцирования" суммы отображений и произведения отображения на число:

$$\lambda_{f+g}(x) = \lambda_f(x) + \lambda_g(x); \quad \lambda_{kf}(x) = k\lambda_f(x).$$

Следующее предложение содержит правило „дифференцирования" сложной функции.

Предложение 7. *Пусть $f\colon M \to H$ и $g\colon M' \to H$ — такие отображения, принадлежащие классу K_0, что $f(M) \subset M'$. Тогда композиция $g \circ f\colon M \to H$ также является отображением класса K_0. При этом терминальная производная $\lambda_{g \circ f}$ отображения $g \circ f$ вычисляется по формуле*

$$\lambda_{g \circ f}(x) = \lambda_g(f(x)) \cdot \lambda_f(x) \quad (x \in M). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$ и $y_0 = f(x_0)$. Будем отдельно рассматривать два случая: $\lambda_f(x_0) = 0$ и $\lambda_f(x_0) \neq 0$.

Пусть сначала $\lambda_f(x_0) = 0$. В силу предложения 1, существует такая окрестность $V_0 \subset M'$ точки y_0 и такое число $N > 0$, что при $x, y \in V_0$ выполнено соотношение $\|g(x) - g(y)\| \leqslant N\|x - y\|$. Далее, в силу непрерывности отображения f, существует такая окрестность U_0 точки x_0, что $f(U_0) \subset V_0$. Следовательно, для любых точек $x, y \in U_0$ мы имеем $f(x), f(y) \in V_0$, и потому

$$\|g(f(x)) - g(f(y))\| \leqslant N\|f(x) - f(y)\|, \quad (x, y \in U_0). \tag{13}$$

Пусть теперь ε — произвольное положительное число. В силу предложения 5 существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число $\delta > 0$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то выполнено соотношение $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{N}\|x - y\|$ (напомним, что $\lambda_f(x_0)=0$). Следовательно, если $x, y \in U \cap U_0$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то

$$\|g(f(x))-g(f(y))\| \leqslant N\|f(x)-f(y)\| \leqslant N \cdot \frac{\varepsilon}{N}\|x-y\| = \varepsilon\|x-y\|,$$

(см. (13)), т. е.

$$\|(g \circ f)(x)-(g \circ f)(y)-0(x-y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|, \tag{14}$$

а это означает, что в точке x_0 выполнено условие принадлежности отображения $g \circ f$ классу K_0 (см. (1)) и при этом в соотношении (14) мы имеем $\lambda=0$ для любого $\varepsilon>0$. Следовательно, в силу единственности (предложение 5), $\lambda_{g \circ f}(x_0)=0$, и потому при $x=x_0$ соотношение (12) справедливо.

Пусть теперь $\lambda_f(x_0) \neq 0$. Выберем произвольное положительное число ε и положим

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{|\lambda_f(x_0)|+|\lambda_g(y_0)|+1}.$$

Так как отображение g принадлежит классу K_0, то существует такое конечномерное подпространство $L^* \subset H$, такая окрестность $V^* \subset M'$ точки y_0 и такое число $\delta^*>0$, что если $x, y \in V^*$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L^* не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta^*$, то

$$\|g(x)-g(y)-\lambda_g(y_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon^*\|x-y\|. \tag{15}$$

Положим

$$\varepsilon' = \min\left(1, \varepsilon^*, |\lambda_f(x_0)| \sin\frac{\delta^*}{2}\right).$$

Так как теперь $\lambda_f(x_0) \neq 0$, то $\varepsilon'>0$. Поскольку отображение f принадлежит классу K_0, то существует такое конечномерное подпространство $L' \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число $\delta>0$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L' не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon'\|x-y\|. \tag{16}$$

При этом мы можем считать, что $f(U) \subset V^*$ и $\delta<\frac{1}{2}\delta^*$. Наконец, обозначим через L конечномерное подпространство, содержащее оба подпространства L^* и L'.

Пусть $x, y \in U$ — такие точки, что угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$. Тогда (поскольку $L \supset L'$) угол между вектором $x-y$ и подпространством L' не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, и потому имеет место соотношение (16). Следовательно, мы имеем

$$f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)=z,$$

где $\|z\|=\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon'\|x-y\|<|\lambda_f(x_0)|\sin\frac{\delta^*}{2}\|x-y\|$. Таким образом

$$\frac{\|z\|}{\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|}\leqslant\sin\frac{\delta^*}{2},$$

и потому угол между векторами $f(x)-f(y)$ и $\lambda_f(x_0)(x-y)$ не превосходит $\frac{\delta^*}{2}$. Так как угол между вектором $x-y$ (а значит и $\lambda_f(x_0)(x-y)$) и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то угол между вектором $f(x)-f(y)$ и подпространством L не меньше $\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)-\frac{\delta^*}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\delta^*$. Так как $L\supset L^*$, то угол между вектором $f(x)-f(y)$ и подпространством L^* не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta^*$. При этом $f(x), f(y)\in V^*$ (ибо $f(U)\subset V^*$). Следовательно, к точкам $f(x)$, $f(y)$ применимо соотношение (15), т. е. мы имеем

$$\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))\|\leqslant\varepsilon^*\|f(x)-f(y)\|.$$

Отсюда получаем

$$\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))\|+\|\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))-$$
$$-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\|<$$
$$<\varepsilon^*\|f(x)-f(y)\|+|\lambda_g(y_0)|\,\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon^*\|f(x)-$$
$$-f(y)\|+|\lambda_g(y_0)|\,\varepsilon'\|x-y\|\leqslant\varepsilon^*(\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|+\varepsilon'\|x-y\|)+$$
$$+|\lambda_g(y_0)|\,\varepsilon'\|x-y\|=(\varepsilon^*(|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon')+|\lambda_g(y_0)|\,\varepsilon')\|x-y\|\leqslant\varepsilon^*(|\lambda_f(x_0)|+$$
$$+\varepsilon'+|\lambda_g(y_0)|)\|x-y\|\leqslant\varepsilon^*(|\lambda_f(x_0)|+|\lambda_g(y_0)|+1)\|x-y\|=\varepsilon\|x-y\|.$$

Итак, если $x, y\in U$ — такие точки, что угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то выполнено соотношение

$$\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|,$$

т. е. и в этом случае в точке x_0 выполнено условие принадлежности отображения $g\circ f$ классу K_0 и выполнено соотношение (12).

Тем самым предложение 7 полностью доказано.

Заметим в заключение, что *всякое отображение вида $\lambda I + A$, где A — вполне непрерывный линейный оператор, принадлежит классу K_0, причем его терминальная производная постоянна и равна λ.* То же справедливо и в случае, если A — нелинейный вполне непрерывный оператор, однако в этом случае отображение $\lambda I + A$ может принадлежать не самому классу K, а его замыканию $\overline{K}_0$. Это показывает, что класс $\overline{K}_0$, содержащий отображения с переменной терминальной производной, существенно шире класса Q отображений вида $\lambda I + A$. Рассмотрим простой пример отображения класса K_0, обладающего переменной терминальной производной (и, следовательно, не принадлежащего классу Q). Пусть H^*—гильбертово пространство, содержащее H в качестве подпространства дефекта 1 (т. е. все векторы в H^*, ортогональные подпространству H, коллинеарны между собой). Пусть, далее, Σ—шар радиуса 1 в H^*, касающийся подпространства H, и пусть a—центр шара Σ, а b — такая внутренняя точка этого шара, что ее расстояние от H не меньше 1. Через φ_a, φ_b обозначим центральное проектирование подпространства H на поверхность шара Σ из точек a, b соответственно. Тогда для любого открытого множества $M \subset H$ отображение $f = \varphi_b^{-1} \circ \varphi_a \colon M \to H$ принадлежит классу K_0. Терминальная производная λ_f этого отображения f определяется следующим образом. Пусть $x \in M$ и $y = f(x)$, т. е. $\varphi_a(x) = \varphi_b(y) = q$, где q — некоторая точка на поверхности шара Σ. Тогда

$$\lambda_f(x) = \frac{\|a - q\|}{\|a - x\|} \cdot \frac{\|b - y\|}{\|b - q\|}.$$

Отметим, что отображение f обладает еще одним важным свойством: для любого компактного множества $X \subset M$ его прообраз $f^{-1}(X)$ также компактен.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила 12.VI.1973

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ. Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների մի դասի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցվում է իրական սեպարաբել H Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների $f \colon M \to H$ անընդհատ արտապատկերումների K_0 դասը։ Ապացուցվում է այդ դասին պատկանող արտապատկերումների մի շարք կարևոր հատկություններ, մասնավորապես, ցույց է տրվում, որ այդ արտապատկերումների լոկալ ձևով բավարարում են Լեֆշեցի պայմանին։ K_0 դասը հիմք է ծառայում Հիլբերտյան տարածության հանրահաշվական տոպոլոգիայի կառուցման համար։

V. G. BOLTIANSKII. *On a class of mappings of subsets of Hilbert spaces*
(summary)

A class K_0 of continuous mappings $f: M \to H$, where H is a real separable Hilbert space, M is a set of subsets of H is constructed.

It is shown, that mappings from K_0 satisfy Lipshitz condition. The class K_0 serves for construction of an algebraic topology in H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский.* Бесконечномерные гомологии и когомологии, ДАН СССР, 105, № 6, 1955, 1141—1143.
2. *С. С. Рышков.* К комбинаторной геометрии гильбертова пространства, ДАН СССР, 114, № 3, 1957, 494—497.
3. *С. С. Рышков.* Об одном классе непрерывных отображений некоторых бесконечномерных множеств, ДАН СССР, 114, № 5, 1967.
4. *Р. Л. Фрум-Кетков.* Об отображениях в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 192, № 6, 1970, 1231—1234.
5. *В. Г. Болтянский.* Об одном классе отображений гильбертова пространства, ДАН Арм.ССР, 51, № 3, 1970, 129—131.
6. *Э. А. Мирзаханян.* Бесконечномерные гомотопические группы единичной сферы гильбертова пространства, ДАН Арм.ССР, 52, № 4, 1971, 193—195.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. Х. МУСОЯН

О СИСТЕМАХ ДИРИХЛЕ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел (среди которых могут быть и числа конечной кратности), удовлетворяющих условиям

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots,$$

$$|\arg \lambda_k| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k| < \infty. \tag{1}$$

Рассмотрим систему Дирихле

$$\{x^m e^{-\lambda_k x}\}, \ k=1, 2, \cdots; \ m=0, 1, \cdots, m_k-1, \tag{2}$$

где m_k — кратность числа λ_k. Конечные линейные комбинации функций системы (2) будем называть полиномами Дирихле.

Л. Шварц в работе [1] изучал систему (2) в пространствах $L^p(A, B)$ $(1 \leqslant p < \infty, \ -\infty < A < B \leqslant \infty)$, в случае, когда все числа λ_k действительные и простые (не кратные). Шварц установил следующий результат (на самом деле он доказывает более общую теорему, из которой этот результат получается как частный случай):

Если функция $F(x)$ принадлежит замкнутой линейной оболочке системы (2), то

1°. Существует функция $F(z)$, $z=x+iy$, аналитическая в полуплоскости $x>A$, которая совпадает почти всюду на (A, B) с функцией $F(x)$.

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле, который, после некоторой группировки членов, нормально сходится к функции $F(z)$ в полуплоскости $x>A$.

3°.

$$|F(z)| \leqslant C(x, y)\, \|F\|_{L^p(A, B)},$$

где $C(x, y)$ зависит от последовательности $\{\lambda_k\}$ и от точки (x, y), и $C(x, y)$ остается ограниченной, когда $x \geqslant A+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$.

М. М. Джрбашян [2] охарактеризовал замкнутую линейную оболочку системы (2) в случае, когда $p=2$; $(A, B)=(0, \infty)$. М. М. Джрбашян установил, в частности, что аппроксимируемая функция аналитически продолжается во внутренность угла $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ (см. (1)).

Автор в работе [3], обобщив результаты Л. Шварца и М. М. Джрбашяна, доказал следующую теорему:

Если последовательность конечных линейных комбинаций функций системы (2) сходится по норме пространства $L(A, B)$, то она сходится равномерно в угле $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Позднее Люксембург и Коревер [4] другими методами установили, что в случае простых λ_k система (2) не полна в пространстве $L^p(A, B)$.

Оказывается, что если на плотность последовательности $\{\lambda_k\}$ наложить более ограничительные условия, чем сходимость ряда $\Sigma 1/|\lambda_k|$, то приведенные результаты можно распространить на более широкий класс множеств, чем интервал (A, B). Этому вопросу посвящена статья автора [5], в которой показано, что если точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E, т. е. $m\{CE \cap (A, A+h)\} = o(h^{1+\varepsilon})$, при $h \to 0+$, где $\varepsilon > 0$, и система (2) лакунарная (числа λ_k действительные и $\lambda_{k+1}/\lambda_k \geqslant q > 1$), то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^2(E)$-норме конечными линейными комбинациями функций системы (2), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, аналитическая в полуплоскости $x > A$, которая совпадает почти всюду на E с функцией $F(x)$.

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x \geqslant A + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению поставленного вопроса. Чтобы сформулировать основные результаты, введем следующие обозначения.

Пусть $E \subset [A, \infty)$ — произвольное измеримое множество положительной меры, где $-\infty < A < \infty$ — любое. Обозначим

$$\sigma(x) = m\{CE \cap (A, A+x)\}, \quad x > 0, \tag{3}$$

где CE — дополнение множества E до множества действительных чисел

$$g(x) = \int_0^\infty r^{1+\varepsilon} \frac{e^{-xr\cos\varphi}}{|B(\lambda)|} dr, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad \varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0, \tag{4}$$

где $B(\lambda)$ — произведение Бляшке последовательности $\{\lambda_k\}$,

$$B(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda/\bar{\lambda}_k}{1+\lambda/\lambda_k}, \tag{5}$$

функция $g(x)$ непрерывна в промежутке $(0, \infty)$ и стремится к ∞, когда $x \to 0$.

Теорема I. *Пусть для некоторых* $\varepsilon > 0$, φ *и* $-\varphi$, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл*

$$\int_0^1 \sigma(x)\, g(x)\, dx < \infty. \tag{6}$$

Если последовательность конечных линейных комбинаций функций системы (2) *сходится по норме пространства* $L(E)$, *то она сходится равномерно в угле* $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$, *где* $\delta > 0$ — *любое.*

Далее, обозначим через $n(r)$ число точек последовательности $\{\lambda_k\}$, не превосходящих по модулю r. Введем функцию

$$h(r) = \frac{2}{1-\cos(\varphi - \varphi_0)}\left[n(4r) + r\sum_{r_k > r} 1/r_k\right],$$

где $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ зафиксировано, $r_k = |\lambda_k|$.

Так как из условий (1) следует, что $\frac{n(r)}{r} \to 0$, при $r \to \infty$, то функция $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{h(r)}{r} = 0.$$

Теорема II. *Пусть для некоторых* $\varepsilon > 0$ и φ, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл*

$$\int_0^1 \sigma(x)\left\{\int_0^\infty r^{1+\varepsilon} e^{\cos\varphi\,[h(r) - xr]}\, dr\right\} dx.$$

Если последовательность конечных линейных комбинаций функций системы (2) *сходится по норме* $L(E)$, *то она сходится равномерно в угле* $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$, *где* $\delta > 0$ — *любое.*

Теорема III. *Пусть последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию лакунарности*

$$\frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} > q > 1,$$

и пусть точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E

$$\sigma(x) = o\,(x^{1+\varepsilon_1}), \tag{7}$$

для некоторого $\varepsilon_1 > 0$.

Тогда, если последовательность конечных линейных комбинаций системы (2) сходится по норме $L(E)$, то она сходится равномерно в угле $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$.

§ 1. Вспомогательная функция

Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (1). Обозначим

$$b(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{(1+\lambda)^{1+\gamma}},\ \gamma > 0, \tag{1.1}$$

где $B(\lambda)$ — произведение Бляшке последовательности $\{\lambda_k\}$ (см. (5)). В (1.1) мы в разрезанной по лучу $\arg z = \pi$ плоскости рассматриваем ту ветвь функции $z^{1+\gamma}$, которая принимает положительные значения на полуоси $\arg z = 0$.

Так как функция $b(\lambda)$ принадлежит классу H^2 в правой полуплоскости, то ее можно представить в виде

$$b(\lambda) = \int_0^\infty \psi(t)\, e^{-\lambda t}\, dt, \tag{1.2}$$

где функция $\psi(t)$ определяется соотношением

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} b(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda.$$

Следовательно, функция $\psi(t)$ представляет собой ограниченную непрерывную функцию из $L^2(0, \infty)$. Докажем, что функция $\psi(t)$ принадлежит также пространству $L(0, \infty)$. Действительно, интегрированием по частям получим

$$\psi(t) = -\frac{1}{2\pi i t} \int_{-i\infty}^{i\infty} b'(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda \equiv -\frac{1}{t}\, \varphi(t). \tag{1.3}$$

Следовательно, достаточно доказать, что $\varphi(t) \in L^2(0, \infty)$. Для этого заметим, что

$$\frac{b'(\lambda)}{b(\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k+\bar{\lambda}_k}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda+\bar{\lambda}_k)}-\frac{1+\gamma}{1+\lambda}.$$

Отсюда получаем следующую оценку:

$$\left|\frac{b'(i\beta)}{b(i\beta)}\right|\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{|i\beta-\lambda_k|^2}+1+\gamma\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k}+1+\gamma, \tag{1.4}$$

где $\lambda_k=\alpha_k+i\beta_k$, а β — любое действительное число. Так как из условий (1) следует, что ряд $\Sigma\, 1/\alpha_k$ сходится, то из (1.4) следует, что $b'(i\beta)\in L_2(-\infty,\infty)\cap L(-\infty,\infty)$, а это означает, что $\varphi(t)\in L^2(0,\infty)$. Что и требовалось доказать.

Далее, через $\omega(\lambda, f)$ обозначим следующую функцию:

$$\omega(\lambda, f)=-\int_0^{\infty}\psi(t)\left[\int_0^t f(t-\eta)\,e^{-\lambda\eta}\,d\eta\right]dt, \tag{1.5}$$

где $f(x)\in L(0,\infty)$. Функция $\omega(\lambda, f)$ является аналогом интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева (см. [6]).

Функция $\omega(\lambda, f)$ регулярна в правой полуплоскости и для нее имеет место оценка

$$|\omega(\lambda, f)|\leqslant\|\psi\|_{L(0,\infty)}\cdot\|f\|_{L(0,\infty)}\quad\text{при}\quad \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0. \tag{1.6}$$

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *При* $\lambda=re^{i\varphi}$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ *имеет место оценка*

$$|\omega(\lambda, f)|<\frac{1}{r\cos\varphi}\,\|f\|_{L(0,\infty)}\cdot\max_{0<t<\infty}|\psi(t)|. \tag{1.7}$$

Для доказательства введем функцию

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & \text{при } x\in[0,\infty)\\ 0, & \text{при } x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

Имеем

$$|\omega(\lambda, f)|\leqslant\int_0^{\infty}|\psi(t)|\left[\int_0^{\infty}|f^*(t-\eta)|\,e^{-\eta r\cos\varphi}\,d\eta\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\max|\psi(t)|\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}|f^*(t-\eta)|\,e^{-\eta r\cos\varphi}\,d\eta=$$

$$=\max|\psi(t)|\int_0^{\infty}d\eta\int_0^{\infty}|f^*(t-\eta)|\,e^{-\eta r\cos\varphi}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r\cos\varphi}\,\|f\|_{L(0,\infty)}\cdot\max|\psi(t)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x) = x^p e^{-\lambda_k x}$, *где* p — *целое неотрицательное число, меньшее кратности* λ_k. *Вычет функции*

$$\frac{\omega(\lambda, \varphi)}{b(\lambda)} e^{-\lambda z}, \quad z = x + iy,$$

как функции переменного λ, *равен нулю во всех нулях функции* $b(\lambda)$, *отличных от* λ_k, *и равен* $z^p e^{-\lambda_k z}$ *в точке* $\lambda = \lambda_k$.

Мы имеем

$$\omega(\lambda, \varphi) = -\int_0^\infty \psi(t)\left[\int_0^t (t-\eta)^p\, e^{-\lambda_k(t-\eta)} e^{-\lambda\eta}\, d\eta\right] dt =$$

$$= (-1)^p \frac{d^p}{d\gamma^p}\left\{-\int_0^\infty \psi(t)\left[\int_0^t e^{-\gamma(t-\eta)} e^{-\lambda\eta}\, d\eta\right] dt\right\}, \quad \gamma = \lambda_k.$$

Но

$$-\int_0^t e^{-\gamma(t-\eta)} \cdot e^{-\lambda\eta}\, d\eta = \frac{e^{-t\lambda} - e^{-t\gamma}}{\lambda - \gamma},$$

следовательно, согласно (1.2), имеем

$$\omega(\lambda, \varphi) = (-1)^p \frac{d^p}{d\gamma^p} \frac{b(\lambda) - b(\gamma)}{\lambda - \gamma}\bigg|_{\gamma=\lambda_k} = (-1)^p \frac{p!\, b(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{p+1}},$$

откуда

$$\frac{\omega(\lambda, \varphi)}{b(\lambda)} e^{-\lambda z} = (-1)^p \frac{p!}{(\lambda - \lambda_k)^{p+1}} \cdot e^{-\lambda z}.$$

Утверждение леммы следует из этого равенства.

§ 2. Интегральное представление полиномов Дирихле

Известно (см. [7], стр. 115), что почти для всех φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln |B(re^{i\varphi})| = 0, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \tag{2.1}$$

причем для любого α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ имеется последовательность положительных чисел $r_k \uparrow \infty$ такая, что условие (2.1) для этой последовательности выполняется равномерно относительно φ из интервала $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Пусть $P(x)$ — конечная линейная комбинация функций из системы (2) (полином Дирихле), т. е.

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} Q_k(x)\, e^{-\lambda_k x}, \tag{2.2}$$

где $Q_k(x)$ — алгебраический полином степени не выше m_k-1. Обозначим через L_m контур, идущий из точки $r_m e^{i\varphi_1}$ (r_m участвует в описании свойства (2.1)), $\varphi_0<\varphi_1<\frac{\pi}{2}$, по лучу $\arg\lambda=\varphi_1$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{i\varphi_1}$, затем по окружности $|\lambda|=\frac{|\lambda_1|}{2}$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{-i\varphi_1}$, затем по лучу $\arg\lambda=-\varphi_1$ до точки $r_m e^{-i\varphi_1}$ и, наконец, по окружности $|\lambda|=r_m$ до точки $r_m e^{i\varphi_1}$.

Согласно лемме 2 и обозначению (2.2), при $r_m>|\lambda_n|$ имеет место следующее интегральное представление:

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{k_m}}\frac{\omega(\lambda, P)}{b(\lambda)}\, e^{-\lambda z}\, d\lambda. \tag{2.3}$$

Число φ_1 выберем так, чтобы на лучах $\arg\lambda=\pm\varphi_1$ выполнялось условие (2.1), и в представлении (2.3) m устремим в бесконечность. Согласно оценке (1.6), при $|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_1$ в пределе получим

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(\lambda, P)}{b(\lambda)}\, e^{-\lambda z}\, d\lambda,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_1, \tag{2.4}$$

где L — контур, идущий из ∞ по лучу $\arg\lambda=\varphi_1$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{i\varphi_1}$, затем по окружности $|\lambda|=\frac{|\lambda_1|}{2}$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2}e^{-i\varphi_1}$ и, наконец, по лучу $\arg\lambda=-\varphi_1$, до ∞.

Лемма 3. *Для полиномов Дирихле по системе* (2) *имеет место следующая оценка*:

$$|P(z)|\leqslant M(\varepsilon)\,\|P\|_{L(A,\infty)}\cdot e^{-\delta|z|},\quad |\arg(z-A-\varepsilon)|<\frac{\pi}{2}-\varphi_0-\varepsilon, \tag{2.5}$$

где $M(\varepsilon)$ *и* $\delta>0$ — *некоторые постоянные, зависящие от* ε, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}-\varphi_0$, *от последовательности* $\{\lambda_k\}$ *и от числа* A ($-\infty<A<\infty$) — *произвольное*).

Доказательство. Согласно оценке (1.6) и представлению (2.4) получаем

$$|P(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\|\psi\|_{L(0,\infty)}\cdot\|P\|_{L(0,\infty)}\cdot\int\limits_{L}\left|\frac{e^{-\lambda z}}{b(\lambda)}\right||d\lambda|,\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}-\varphi_1.$$

В силу свойства (2.1), при любом $\varepsilon_1>0$ имеем

$$|b(\lambda)| > m\, e^{-\varepsilon_1 |\lambda|}, \quad \lambda \in L,$$

где m — некоторая постоянная, зависящая от ε_1. Следовательно

$$|P(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi m} \|\psi\| \cdot \|P\| \int\limits_L e^{-|\lambda| \, [|z| \cos(\varphi+\theta) - \varepsilon_1]} |d\lambda|, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_1,$$

где $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi}$, $z = |z| e^{i\theta}$. Контур L разобьем на три части: L', L'' и L''', где L' — луч, идущий из ∞ по лучу $\arg\lambda = \varphi_1$ до точки $\frac{|\lambda_1|}{2} e^{i\varphi_1}$, L'' — дуга окружности $|\lambda| = \frac{|\lambda_1|}{2}$, лежащая между лучами $\arg\lambda = \varphi_1$ и $\arg\lambda = -\varphi_1$, и L''' — луч, идущий из точки $\frac{|\lambda_1|}{2} e^{-i\varphi_1}$ по лучу $\arg\lambda = -\varphi_1$ до ∞. Имеем

$$|P(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi m} \|\psi\| \cdot \|P\| \Big\{ \int\limits_{L'} e^{-|\lambda| \, [|z| \cos(\varphi+\theta) - \varepsilon_1]} |d\lambda| +$$

$$+ \int\limits_{L''} \cdots + \int\limits_{L'''} \cdots \Big\} \equiv \frac{1}{2\pi m} \|\psi\| \cdot \|P\| \, (J_1 + J_2 + J_3).$$

Пусть z лежит в области $|\arg(z-\varepsilon)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ — любое. Числа φ_1 и ε_1 выберем так, чтобы выполнялись условия: $\varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \varphi_0$, на лучах $\arg\lambda = \pm\varphi_1$ выполняется условие (2.1) и $\delta_1 \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$. Тогда получим

$$J_1 = \int\limits_{|\lambda_1|/2}^{\infty} e^{-r\,[|z| \cos(\varphi_1+\theta) - \varepsilon_1]} \, dr < \frac{e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}}{\delta_1 |z|} < \frac{e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}}{\delta_1 \varepsilon}.$$

Аналогично

$$J_3 \leqslant \frac{e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}}{\delta_1 \varepsilon}$$

и, наконец

$$J_2 = \frac{|\lambda_1|}{2} \int\limits_{-\varphi_1}^{\varphi_1} e^{-|\lambda| \, [|z| \cos(\varphi+\theta) - \varepsilon_1]} \, d\varphi < \varphi_1 |\lambda_1| \, e^{-\frac{|\lambda_1|}{2} \delta_1 |z|}.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$|P(z)| \leqslant M(\varepsilon) \|P\|_{L(0,\infty)} \cdot e^{-\delta |z|}, \quad |\arg(z-\varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon,$$

где $M(\varepsilon)$ и $\delta > 0$ зависят от ε. Путем замены переменного получаем и оценку (2.5).

Из этой леммы следует

Теорема 1. *Если последовательность полиномов Дирихле по системе* (2) *сходится по норме* $L(A, \infty)$, *то она сходится равномерно в угле* $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$.

§ 3. Доказательство теоремы I

Не нарушая общности, можем ограничиться случаем $A=0$. Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 4. *Если для некоторых* $\varepsilon > 0$, φ *и* $-\varphi$, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл* (6), *то полиномы семейства*

$$\{P: \|P\|_{L(0, \infty)} \leqslant 1\} \tag{3.1}$$

имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на множестве $(0, 1) \cap CE$.

Для доказательства леммы рассмотрим интегральное представление (2.4). В следующем параграфе мы докажем, что если числа $\{\lambda_k\}$ удовлетворяют условиям (1), то соотношение (2.1) выполняется для всех φ, $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, в представлении (2.4) в качестве угла φ_1 контура L мы можем взять тот угол φ, для которого сходится интеграл (6). Имеем

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\lambda, P)}{b(\lambda)} e^{-\lambda x} \, d\lambda,$$

где $x > 0$ — любое. Отсюда, согласно лемме 1, получаем следующую оценку:

$$|P(x)| < \frac{1}{2\pi} \max |\psi| \cdot \|P\|_{L(0, \infty)} \int_L \frac{e^{-xr\cos\varphi}}{r\cos\varphi\, |b(\lambda)|} |d\lambda|. \tag{3.2}$$

Положим $\gamma = \varepsilon$ (γ участвует в определении функции $b(\lambda)$). Учитывая условие (3.1) и форму контура L, из (3.2) имеем

$$|P(x)| \leqslant M_1 + M_2 \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(re^{i\varphi})|} \, dr + M_2 \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(re^{-i\varphi})|} \, dr, \tag{3.3}$$

где M_1 и M_2 от P не зависят. Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно показать, что функции

$$\int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(\lambda)|} \, dr, \quad \lambda = re^{i\varphi} \quad \text{и} \quad \lambda = re^{-i\varphi}, \tag{3.4}$$

как функции от x, суммируемы на множестве $(0, 1) \cap CE$. Для этого заметим, что

$$\sigma(x) = \int_0^x \chi_{CE}(x)\, dx,$$

где χ_{CE} — характеристическая функция множества CE. Согласно теореме Фубини, имеем

$$\int_{(0,1)\cap CE} \left\{ \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-xr\cos\varphi}}{|B(\lambda)|} dr \right\} dx = \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon}{|B(\lambda)|} \left\{ \int_0^1 e^{-xr\cos\varphi}\, d\sigma(x) \right\} dr =$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon}{|B(\lambda)|} \left\{ \sigma(1)\, e^{-r\cos\varphi} + r\cos\varphi \int_0^1 e^{-xr\cos\varphi}\, \sigma(x)\, dx \right\} dr =$$

$$= \sigma(1) \int_0^\infty \frac{r^\varepsilon e^{-r\cos\varphi}}{|B(\lambda)|} dr + \cos\varphi \int_0^\infty \frac{r^{1+\varepsilon}}{|B(\lambda)|} \left\{ \int_0^1 e^{-xr\cos\varphi}\, \sigma(x)\, dx \right\} dr.$$

Последний интеграл сходится, так как в силу теоремы Фубини, он равен интегралу (6), а интеграл (6) сходится по условию леммы. Тем самым доказана суммируемость функций (3.4), что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Если для некоторых* $\varepsilon > 0$, φ *и* $-\varphi$, $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ *сходится интеграл* (6), *то в пространстве полиномов Дирихле по системе* (2) *нормы* $\|P\|_{L(0,\infty)}$ *и* $\|P\|_{L(E)}$ *эквивалентны.*

Нам необходимо доказать, что существует постоянная C, зависящая от последовательности $\{\lambda_k\}$ и от множеств E такая, что

$$\|P\|_{L(0,\infty)} \leqslant C \|P\|_{L(E)}. \tag{3.5}$$

Доказательство проведем, предположив противное, что существует последовательность $\{P_n(x)\}$ такая, что $\|P_n\|_{L(0,\infty)} = 1$, но $\|P_n\|_{L(E)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Согласно лемме 3, имеем

$$|P_n(z)| \leqslant M(\varepsilon_1)\, e^{-\delta|z|}, \quad |\arg(z - \varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1. \tag{3.6}$$

Следовательно, семейство $\{P_n(z)\}$ нормально в угле $|\arg(z-\varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1$. Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что уже эта последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах угла $|\arg(z-\varepsilon_1)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon_1$.

Если ε_1 достаточно мало, то $m\{E \cap (\varepsilon_1, \infty)\} > 0$, и так как $\|P_n\|_{L(E)} \to 0$, то последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится к нулю в угле

$|\arg(z-\varepsilon_1)|<\frac{\pi}{2}-\varphi_0-\varepsilon_1$. Согласно оценке (3.6), отсюда следует, что последовательность $\{P_n(z)\}$ и по $L(\varepsilon_1,\infty)$-норме будет сходиться к нулю. Таким образом, имеем $\|P_n\|_{L(\varepsilon_1,\infty)}\to 0$, но $\|P_n\|_{L(0,\infty)}=1$, отсюда следует, что

$$\|P_n\|_{L(0,\varepsilon_1)}\to 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{3.7}$$

для любого $\varepsilon_1>0$.

С другой стороны, имеем

$$\|P_n\|_{L(0,\varepsilon_1)}=\|P_n\|_{L((0,\varepsilon_1)\cap E)}+\|P_n\|_{L((0,\varepsilon_1)\cap CE)}.$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю, когда $n\to\infty$, а второе слагаемое, согласно лемме 4, можно сделать меньше $\frac{1}{2}$. Это противоречит соотношению (3.7). Лемма доказана.

Комбинируя лемму 5 с теоремой 1 получаем теорему I.

§ 4. О росте произведения Бляшке

Для дальнейшего нам необходимо знать более точно, чем (2.1), поведение произведения Бляшке вдоль лучей, выходящих из начала координат. Докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Положим $\lambda=re^{i\varphi}$, $\lambda_k=r_k e^{i\varphi_k}$. При $\varphi_0<|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ имеет место оценка*

$$\ln|1/B(\lambda)|\leqslant\frac{2\cos\varphi}{1-\cos(|\varphi|-\varphi_0)}\left[n(4r)+r\sum_{r_k>r}1/r_k\right],$$

где $n(t)$ — число точек последовательности $\{\lambda_k\}$, не превосходящих по модулю t.

Доказательство. Имеем

$$\ln|1/B(\lambda)|=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|\frac{re^{i\varphi}+r_k e^{-i\varphi_k}}{re^{i\varphi}-r_k e^{i\varphi_k}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{r^2+2rr_k\cos(\varphi+\varphi_k)+r_k^2}{r^2-2rr_k\cos(\varphi-\varphi_k)+r_k^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2rr_k\cos(\varphi+\varphi_k)+2rr_k\cos(\varphi-\varphi_k)}{r^2-2rr_k\cos(\varphi-\varphi_k)+r_k^2}\right).$$

Так как $\ln(1+x)\leqslant x$, то отсюда получаем

$$\ln|1/B(\lambda)|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4rr_k\cos\varphi\cos\varphi_k}{r^2-2rr_k\cos(\varphi-\varphi_k)+r_k^2}\leqslant$$

$$\leqslant\cos\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2rr_k}{r^2-2rr_k\cos(|\varphi|-\varphi_0)+r_k^2}. \tag{4.1}$$

Обозначим $\cos(|\varphi| - \varphi_0) = \alpha$, $\psi_{\pm} = (1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 1}$. Если $r_k \overline{\in} (r\psi_-, r\psi_+)$, то

$$r_k^2 - 2r\, r_k\, \alpha + r^2 > 2r\, r_k. \tag{4.2}$$

Учитывая (4.1) и (4.2), получим

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant \cos\varphi \sum_{r_k < r\psi_-} \frac{2r\, r_k + 2r\, r_k\, \alpha}{r_k^2 + r^2} +$$

$$+ 2\cos\varphi \sum_{r\psi_- < r_k < r\psi_+} \frac{r r_k}{(r_k - r)^2 + 2r\, r_k (1-\alpha)} + \cos\varphi \sum_{r_k > r\psi_+} \frac{2r r_k + 2r r_k \alpha}{r_k^2 + r^2},$$

и, следовательно

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant 2(1+\alpha)\cos\varphi \cdot \frac{1}{r} \sum_{r_k < r\psi_-} r_k +$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{1-\alpha}\left[n(r\psi_+) - n(r\psi_-)\right] + 2(1+\alpha)\cos\varphi \cdot r \sum_{r_k > r\psi_+} 1/r_k. \tag{4.3}$$

Отсюда получаем оценку

$$\ln|1/B(\lambda)| \leqslant \frac{2\cos\varphi}{1-\alpha}\, n(r\psi_-) + \frac{\cos\varphi}{1-\alpha}\left[n(r\psi_+) - n(r\psi_-)\right] +$$

$$+ \frac{2\cos\varphi}{1-\alpha}\, r \sum_{r_k > r} 1/r_k.$$

Так как $\psi_+ \leqslant 4$, то отсюда следует утверждение леммы. Из этой леммы вытекает, что соотношение (2.1) имеет место для всех φ, удовлетворяющих условию $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Используя неравенство (4.3), можно доказать также следующую лемму (см. [5], стр. 107).

Лемма 7. *Если последовательность* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} > q > 1,$$

то функция $1/B(\lambda)$ *ограничена на лучах* $\arg\lambda = \varphi$ *при* $\varphi_0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

Теорема II непосредственно следует из леммы 6 и теоремы I.

Для доказательства теоремы III заметим, что в этом случае, согласно лемме 7, функция $g(x)$ удовлетворяет условию

$$g(x) \leqslant M \int_0^\infty r^{1+\varepsilon} e^{-xr\cos\varphi}\, dr,$$

где M — некоторая постоянная. Следовательно

$$g(x) \leqslant \frac{M_1}{x^{2+\varepsilon}}. \tag{4.4}$$

Из условия (7) следует, что

$$\sigma(x) \leqslant M_2\, x^{1+\varepsilon_1}, \tag{4.5}$$

где M_2 от x не зависит.

Положим $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, тогда из (4.4) и (4.5) имеем

$$\sigma(x)\, g(x) \leqslant \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}, \tag{4.6}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от x. Из (4.6) следует, что интеграл (6) сходится, и теорема III получается из теоремы I.

Ереванский ордена Трудового Красного
Знамени государственный университет

Поступила 17.VI.1973

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ. Դիրիխլեի սիստեմների մասին կամայական բազմությունների վրա *(ամփոփում)*

Դիցուք $\{\lambda_k\}$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը բավարարում է (1) պայմաններին։ Դիտարկվում է Դիրիխլեի (2) սիստեմը* L(E) *տարածությունում, որտեղ* E*-ն իրական թվերի Լեբեգի իմաստով չափելի դրական չափի բազմություն է։ Ապացուցվում է, որ եթե* E *բազմությունը* A *կետում բավականին խիտ է աջից, կախված* $\{\lambda_k\}$ *հաջորդականության խտությունից, ապա (2) սիստեմի ֆունկցիաների վերջավոր գծային կոմբինացիաների հաջորդականության համար* L(E) *տարածության նորմայով զուգամիտությունից բխում է հավասարաչափ զուգամիտություն* $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$ *անկյան մեջ, որտեղ* $\delta > 0$ *կամայական է, իսկ* φ_0*-ն մասնակցում է (1) պայմանում։*

V. Kch. MUSOYAN. *On Dirichlet systems on arbitrary sets* (summary)

Let $\{\lambda_k\}$ be a sequence of complex numbers such that (1) holds. The Dirichlet system (2) is considered in the space $L(E)$, where E is a measurable set of real numbers with positive Lebesque measure. It is proved, that if the set E is a sufficiently dense from the right at the point A with respect to the density of the ssequence $\{\lambda_k\}$, then for the sequence of finite linear combinations of functions of the system (2) the convergence in the norm of the space $L(E)$ implies the uniform convergence of this sequence in the angle $|\arg(z - A - \delta)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta$, for every $\delta > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Schwartz.* Etude des sommes d'exponentiales, Actualites Scientifiques et industrielles, 1959.
2. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x}\, x^{s_k - 1}\}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.
3. *В. Х. Мусоян.* Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле, ДАН Арм.ССР, XLII, № 2, 1966.

4. *W. A. J. Luxemburg* and *J. Korevaar*. Entire functions and Müntz-Szasz type approximation, Transactions..., June, 1971, v. 157, r 1.
5. *В. Х. Мусоян*. О лакунарных системах Дирихле, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 2, 1972.
6. *А. Ф. Леонтьев*. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси, Изв. АН СССР, сер. матем. 29, 1965, 269—328.
7. *R. P. Boas*. Entire functions, New York, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. Д. БЕЛОУСОВ, Ю. М. МОВСИСЯН

О РАНГЕ ОБОБЩЕННЫХ ТОЖДЕСТВ

Введение

В статье вводится понятие ранга обобщенных тождеств и дается полное описание приведенных обобщенных тождеств ассоциативности ненулевого ранга в системах квазигрупп.

Обобщенное тождество отличается от обычных тождеств тем, что в нем помимо фиксированных операций из данной алгебры $Q(\Sigma)$ могут быть и символы операций, которые могут пробегать часть (или все) операции из фиксированной алгебры*. Это понятие введено А. Садом ([1], [2] и др.) и изучено для некоторых специальных тождеств одним из авторов в [3], [4], а также и другими (см. [3]). В настоящей работе понятие ранга, введенного в [3] для сверхтождеств (см. ниже определение), вводится и для обобщенных тождеств.

1°. Пусть $E=\{x_1, x_2,\cdots\}$ — множество свободных элементов, $\Omega=\{x_1, x_2,\cdots\}$ — множество символов бинарных операций. Понятие слова относительно (Ω, E) определяется индуктивно: все элементы из E — слова. Если w_1, w_2 — слова, то и $X_i(w_1, w_2)$, $\forall X_i \in \Omega$ — слова.

Обозначим через S и Φ соответственно совокупности всех свободных элементов и всех символов операций в словах W_1, W_2. Пусть $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, $\Phi_1\cap\Phi_2=\varnothing$, $\Phi_1=\{X_1, X_2,\cdots, X_m\}$, $\Phi_2=\{Y_1, Y_2,\cdots, Y_n\}$.

В алгебре $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество

$$W_1=W_2, \tag{1}$$

если для любых значений символов операций $X_1, X_2,\cdots, X_m$ из Σ существуют такие значения символов операций $Y_1, Y_2,\cdots, Y_n$ из Σ, что равенство (1) имеет место при всех значениях свободных элементов S из Q.

Если в $Q(\Sigma)$ имеет место обобщенное тождество (1) и $\Phi_2=\varnothing$, то говорим, что в $Q(\Sigma)$ выполняется сверхтождество $w_1=w_2$.

Если $\Phi_1=\varnothing$, то обобщенное тождество (1) сводится к обычному тождеству.

Соответствие $\Phi_1\to\Phi_2$ определяет некоторую функцию $f\colon \Sigma^m\to\Sigma^n$ (Σ^k — k-тая декартовая степень Σ). Чтобы отметить, что обобщенное тождество (1) определяется функцией f, будем писать:

$$W_1=W_2;\ f\colon \Phi_1\to\Phi_2. \tag{2}$$

Функция f называется определяющей, а $f_i\colon (X_1, X_2,\cdots, X_m)\to Y_i$ $(i=1, 2,\cdots, n)$ называются проекциями f. Если $f_i\colon (X_1, X_2,\cdots, X_m)\to X_j$, то f_i называется j-тым селектором.

* Здесь предполагаем, что все операции из Σ — бинарные; легко видеть, что понятие обобщенного тождества может быть распространено и на случай, когда в Σ находятся операции различных арностей.

Обобщенное тождество (2) называется приведенным, если никакая проекция определяющей функции f не является селектором.

Два обобщенных тождества называются эквивалентными в алгебре $Q(\Sigma)$, если из выполнения одного из них в $Q(\Sigma)$ вытекает выполнение и второго обобщенного тождества в $Q(\Sigma)$.

Лемма. *Каждое обобщенное тождество эквивалентно некоторому приведенному обобщенному тождеству.*

В самом деле, пусть проекция f_i, $f_i(X_1, X_2, \cdots, X_m) = Y_i$ является j-тым селектором. Тогда, заменяя в (2) Y_i на X_j и переходя к новой определяющей функции f', $f'\colon (X_1, X_2, \cdots, X_m) \to (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \cdots \cdots, Y_n)$, приходим к новому обобщенному тождеству, эквивалентному (2). Продолжая этот процесс, после конечных шагов мы получим обобщенное тождество

$$W_1' = W_2';\ f''\colon \Phi_1 \to \Phi_2', \tag{3}$$

где никакая проекция определяющей функции f'' не является селектором.

Доказанная лемма дает возможность вместо обобщенных тождеств рассматривать приведенные обобщенные тождества.

Символ $X_i \in \Phi_1$ несущественен для функции f (в алгебре $Q(\Sigma)$), если для любых последовательностей операций $\langle A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_m \rangle \in \Sigma^{m-1}$ имеет место

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \cdots, A_m) = f(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \cdots, A_m)$$

для любых $B, C \in \Sigma$.

Несущественные аргументы определяющей функции обобщенного тождества называются свободными операциями. Количество всех свободных операций в приведенном обобщенном тождестве называется **рангом** приведенного обобщенного тождества.

Каждое сверхтождество само является приведенным обобщенным тождеством ненулевого ранга (все символы операций свободны).

Если в обобщенном тождестве (2) все проекции функции f являются селекторами, то приведенное обобщенное тождество (3) в этом случае является сверхтождеством, т. е. такое обобщенное тождество (2) эквивалентно некоторому сверхтождеству.

Пусть $\rho = r$ — ранг, а $f\colon \Sigma^m \to \Sigma^n$ — определяющая функция приведенного обобщенного тождества (2). Функция f индуцирует новое отображение $g\colon \Sigma^{m-r} \to \Sigma^n$, которое уже не содержит никакого несущественного аргумента. И наоборот, если задано индуцированное отображение g определяющей функции и ранг приведенного обобщенного тождества, то однозначным образом можно восстановить определяющую функцию приведенного обобщенного тождества. Поэтому приведенное обобщенное тождество (2) можно задавать при помощи индуцированного отображения g (указав ранг ρ):

$$W_1 = W_2;\ g\colon \Phi_1' \to \Phi_2. \tag{4}$$

Если индуцированное отображение является фиксацией, т. е. g: $\varnothing \to \Sigma^n$, то отображение g отдельно не будем указывать (достаточно символы операций из Φ_2 заменить в равенстве (4) соответствующими фиксированными значениями). Например, в алгебре $Q(\Sigma)$ следующее равенство:

$$X_1\{A[x, X_2(y, z)],\ u\} = B[X_3(x, y),\ C(z, u)]$$

рассматривается как приведенное обобщенное тождество ранга $\rho = 3$ (X_1, X_2, X_3 — свободные операции) с индуцированным отображением $g\colon \varnothing \to \Sigma^3$.

Следующий пример показывает существование приведенного обобщенного тождества ненулевого ранга, не являющегося сверхтождеством.

Пример. Пусть $Q(0)$ — группа, $1 \neq z_1 \in Z$ — центр группы $Q(0)$, $\Sigma = \{A_k \mid A_k(x, y) = xokoy;\ k \in Q\}$. Тогда в $Q(\Sigma)$ имеет место приведенное обобщенное тождество ранга $\rho = 1$:

$$X\{P'[x, P(y, z)], u\} = P'[P(x, y), X(z, u)];\ g\colon P \to P', \tag{5}$$

где $g(A_k)(x, y) = xokoz_1y$.

Из $k' = koz_1$ вытекает $k'oyok = koyok'$. Откуда $xok'oyokoz = xokoyok'oz$, или $(xok'o(yokoz))\,orou = (xokoy)\,ok'o\,(zorou)$, т. е.

$$A_r\{A_{k'}[x, A_k(y, z)], u\} = A_{k'}A[A_k(x, y), A_r(z, u)]$$

что означает выполнимость приведенного обобщенного тождества (5) в указанной алгебре $Q(\Sigma)$.

2°. Пусть Σ° — совокупность всех бинарных квазигрупп, определенных на множестве Q и $\Sigma \subseteq \Sigma^\circ$.

Рассмотрим вопрос о выполнимости обобщенного тождества (2) в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$.

Определение. Определяющая функция f называется особой, если

а) существует такой символ операции $X_l \in \Phi_1$, который в равенстве (2) встречается всего один раз,

б) существуют $B, C \in \Sigma$, $B \neq C$ такие, что для некоторого $\langle A_1, A_2, \cdots, A_{l-1}, A_{l+1}, \cdots, A_m\rangle \in \Sigma^{m-1}$,

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_{l-1}, B, A_{l+1}, \cdots, A_m) = f(A_1, A_2, \cdots, A_{l-1}, C, A_{l+1}, \cdots, A_m),$$

в) в подслове $X_l(\omega_1, \omega_2) = W$ существуют два различных свободных элемента x, y, содержащихся соответственно в ω_1 и в ω_2 так, что каждый из них встречается лишь один раз в W.

Теорема 1. *В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ не может выполняться никакое обобщенное тождество с особой определяющей функцией.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (2) с особой определяющей функцией f. Тогда, придавая один раз X_j $(j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m)$ значение A_j, X_i — значение B, а другой раз X_j $(j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m)$ значение A_j, X_i — значение C, символ операций Y_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ в обоих случаях получает одно и то же значение D_k, так как

$$(D_1, D_2, \cdots, D_n) = f(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \cdots, A_m) =$$
$$= f(A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, C, A_{i+1}, \cdots, A_m).$$

Получаем два равенства:

$$W_1' = W_2', \quad W_1'' = W_2''.$$

Пусть для определенности $X_i \in W_1$, следовательно $B \in W_1'$, $C \in W_1''$ и $W_2' = W_2''$ (поскольку операции из W_2' и W_2'', стоящие на одинаковых местах, совпадают), поэтому $W_1' = W_1''$. В W_1' и W_1'' все операции совпадают, кроме B и C. Так как все эти операции—квазигрупповые, то проделав все сокращения, получаем равенство: $B(\omega_1, \omega_2) = C(\omega_1, \omega_2)$, где ω_1 и ω_2 — некоторые подслова. Выберем два неповторяющихся в W различных свободных элемента $x \in \omega_1$ и $y \in \omega_2$ (ввиду определения особой определяющей функции), а остальные заставим принимать фиксированные значения из Q. Тогда ω_1 превращается в λx, а ω_2 — в μy, где λ и μ — подстановки множества Q, поскольку они являются произведениями трансляций для квазигрупповых операций. Таким образом, имеем $B(\lambda x, \mu y) = C(\lambda x, \mu y)$. Отсюда, учитывая, что λ и μ — подстановки, получаем $B(x, y) = C(x, y)$, т. е. $B = C$, что противоречит выбору B и C.

Определение. Свободная операция X называется одинокой в (2), если

а) X в равенстве (2) встречается только один раз,

б) в подслове $X(\omega_1, \omega_2) = W$ существуют два различных свободных элемента x, y, содержащихся соответственно в ω_1 и в ω_2 так, что каждый из них встречается лишь один раз в W.

Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ не может выполняться никакое обобщенное тождество с одинокой свободной операцией.

Отсюда немедленно вытекает

Теорема 2. *Приведенными обобщенными тождествами ассоциативности ранга $\rho = 2$ в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ являются сверхтождества*

$$X[X(x, y), z] = Y[x, Y(y, z)], \tag{6}$$

$$X[Y(x, y), z] = X[x, Y(y, z)], \tag{7}$$

$$X[Y(x, y), z] = Y[x, X(y, z)], \tag{8}$$

и только они.

Теорема 3. *Приведенными обобщенными тождествами ассоциативности ранга $\rho=1$ в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ являются:*

$$X[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{9}$$

$$X[x, X(y, z)] = X[A(x, y), z], \tag{10}$$

$$X[x, X(y, z)] = A[X(x, y), z], \tag{11}$$

$$X[x, A(y, z)] = X[X(x, y) z], \tag{12}$$

$$A[x, X(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{13}$$

$$A[x, X(y, z)] = X[A(x, y), z], \tag{14}$$

$$X[x, A(y, z)] = X[A(x, y), z], \tag{15}$$

$$X[x, A(y, z)] = A[X(x, y), z], \tag{16}$$

$$A[x, X(y, z)] = A[X(x, y), z], \tag{17}$$

$$X[x, X(y, z)] = A[A(x, y), z], \tag{18}$$

$$A[x, A(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{19}$$

и только они; A — фиксированная операция из Σ.

Доказательство. По следствию теоремы 1, каждая свободная операция в приведенном обобщенном тождестве ассоциативности должна появиться хотя бы два раза. Обобщенное тождество (9) ранга $\rho=1$ соответствует сверхтождеству ассоциативности. Тождества (10) — (13) — приведенные обобщенные тождества ранга $\rho=1$, определяющая функция которых индуцирует фиксацию $\varnothing \to \Sigma$. Тождества (14) — (19) — приведенные обобщенные тождества ранга $\rho=1$, определяющая функция которых индуцирует фиксацию $\varnothing \to \Sigma^2$ вида $\langle A, A\rangle$. Остается показать, что в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ не могут выполняться следующие приведенные обобщенные тождества ассоциативности ранга $\rho=1$ с индуцированным отображением $g: \Sigma \to \Sigma$:

$$X[P(x, y), z] = P'[x, X(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{20}$$

$$P[X(x, y), z] = P'[x, X(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{21}$$

$$X[P(x, y), z] = X[x, P'(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{22}$$

$$P[X(x, y), z] = X[x, P'(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{23}$$

$$X[X(x, y), z] = P[x, P'(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{24}$$

$$P[P'(x, y), z] = X[x, X(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{25}$$

$$X[P'(x, y), z] = P[x, X(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{20'}$$

$$P'[X(x, y), z] = P[x, X(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{21'}$$

$$X[P'(x, y), z] = X[x, P(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{22'}$$

$$P'[X(x, y), z] = X(x, P(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{23'}$$

$$X[X(x, y), z] = P'[x, P(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{24'}$$

$$P'[P(x, y), z] = X[x, X(y, z)]; \; g: P \to P', \tag{25'}$$

а также следующие приведенные обобщенные тождества, индуцированное отображение которых является фиксация $\varnothing \to \Sigma^2$ вида $<A, B>$; $A \neq B$:

$$A[x, X(y, z)] = X[B(x, y), z], \tag{26}$$

$$X[x, A(y, z)] = X[B(x, y), z], \tag{27}$$

$$X[x, A(y, z)] = B[X(x, y), z], \tag{28}$$

$$A[x, B(y, z)] = X[X(x, y), z], \tag{29}$$

$$X[x, X(y, z)] = A[B(x, y), z], \tag{30}$$

$$A[x, X(y, z)] = B[X(x, y), z]. \tag{31}$$

Для тождеств (26)—(30) это утверждение доказывается одинаково. Приведем доказательство для одного из них.

Пусть в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ имеет место обобщенное тождество (26). Тогда при $X = A$ получим: $A[x, A(y, z)] = A[B(x, y), z]$. По постулату Сушкевича [5] B является группой, поэтому

$$B[x, B(y, z)] = B[B(x, y), z].$$

Однако, из (26) при $X = B$ получаем $A[x, B(y, z)] = B[B(x, y), z]$. Следовательно, $A = B$, что противоречит выбору A, B, т. е. (26) не может выполняться в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$.

Методом квазиавтоморфизмов* (см. [4]) доказывается, что приведенные обобщенные тождества (20)—(25), (20′)—(25′) и (31) не могут выполняться ни в какой системе квазигрупп $Q(\Sigma)$.

Следующее утверждение очевидно: для того чтобы в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполнялось сверхтождество (9), необходимо и достаточно, чтобы $Q(\Sigma)$ была системой групп.

Предложение 1. Для того чтобы в системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполнялось обобщенное тождество (10) необходимо и достаточно, чтобы $A = (\cdot)$ была группой и для $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i(x \cdot \alpha_i^{-1} y)$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Необходимость. По постулату Сушкевича [5], квазигруппа $A = (\cdot)$ должна быть группой. Имеем, при $X = A_i$: $A_i[x, A_i(y, z)] = A_i[x \cdot y, z]$. Пусть $z = a$, тогда $A_i(x, R_i y) = R_i(x \cdot y)$ или $A_i(x, y) = R_i(x \cdot R_i^{-1} y)$, где R_i — правая трансляция квазигруппы A_i.

Достаточность проверяется простой проверкой.

Точно так же доказываются следующие предложения:

Предложение 2. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (12) тогда и только тогда, когда $A = (\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i(\alpha_i^{-1} x \cdot y)$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

---

* Подстановка α множества Q называется квазиавтоморфизмом, группы $Q(\cdot)$, если $\alpha(x \cdot y) = \alpha x \cdot (\alpha 1)^{-1} \cdot \alpha y$ (1 — единица группы $Q(\cdot)$).

Предложение 3. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (14) тогда и только тогда, когда $A=(\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = x \cdot \alpha_i y$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Предложение 4. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (15) тогда и только тогда, когда $A=(\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i(x \cdot y)$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Предложение 5. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (16) тогда и только тогда, когда $A=(\cdot)$ — группа и $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, $A_i(x, y) = \alpha_i x \cdot y$, где α_i — некоторая подстановка множества Q.

Следующие утверждения доказываются методом квазиавтоморфизмов (см. [4]).

Предложение 6. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (11) в том и только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot \psi_i y$, $\psi_i t_i = t$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где ψ_i — автоморфизм второго порядка группы $Q(\cdot)$.

Предложение 7. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (13) в том в только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = \varphi_i x \cdot t_i \cdot y$, $\varphi_i t_i = t$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где φ_i — автоморфизм второго порядка группы $Q(\cdot)$.

Предложение 8. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (17) в том и только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, $t_i = t \cdot z_i$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где z_i — элементы из центра группы $Q(\cdot)$.

Предложение 9. В системе квазигрупп $Q(\Sigma)$ выполняется обобщенное тождество (18) (или (19)) в том и только том случае, если существует группа $Q(\cdot)$ такая, что $A(x, y) = x \cdot t \cdot y$, $A_i(x, y) = x \cdot t_i \cdot y$, $t_i = t \cdot z_i$, $\forall A_i \in \Sigma \setminus A$, где z_i — элементы второго порядка из центра группы $Q(\cdot)$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22.I.1973.

Վ. Դ. ԲԵԼՈՈՒՍՈՎ, ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Ընդհանրացված նույնությունների ռանգի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ներմուծվում է ընդհանրացված նույնությունների ռանգի գաղափարը և տըրվում է դրական ռանգի բերված ասոցիատիվ ընդհանրացված նույնությունների լրիվ նկարագիրը քվազիխմբերի սիստեմներում։

V. D. BELOUSOV, Yu. M. MOVSISIAN. *On the rank of generalised identities* (summary)

In the present paper the notion of the rank of generalised identity is introduced and the full description of reduced generalised identities of positive for the systems of quasigroups is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Sade.* Theorie des systemes demosiens de groupoides, Pacif. Journ, Math., 10, n2, 1960, 625—660.
2. *A. Sade.* Quasigroupes obeissant a certains lois, Rev. Fac. Sci, Univ. Istambul, 22, 1957, 151—184.
3. *В. Д. Белоусов.* Системы квазигрупп с обобщенными тождествами, УМН, XX, вып. 1 (121), 1965, 75—146.
4. *В. Д. Белоусов.* Ассоциативные в целом системы квазигрупп, Мат. сб., 55 (97): 2, 1961, 221—236.
5. *А. К. Сушкевич.* Теория обобщенных групп, Киев, 1937.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

В. С. КОРОЛЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

В последнее время появился ряд работ [1, 2, 3], в которых изучаются различные классы функций комплексного переменного, регулярных в единичном круге и бесконечно дифференцируемых вплоть до окружности. В частности, в этих работах исследуются функции так называемых классов Жеврея, их множества единственности и ряд других свойств.

Однако, насколько нам известно, до настоящего времени не отмечено то обстоятельство, что некоторые классы Жеврея образуют банаховы алгебры функций (с обычным умножением); поэтому изучение этих банаховых алгебр еще не начато, не описаны даже их максимальные идеалы.

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые банаховы пространства функций, бесконечно дифференцируемых на окружности $\Gamma = \{z: z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$ и принадлежащих различным классам Жеврея. Параллельно рассматриваются подпространства, состоящие из функций, аналитически продолжимых в круг $U = \{z: z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$.

Мы устанавливаем некоторые критерии, при выполнении которых соответствующие банаховы пространства являются алгебрами относительно обычного умножения, и исследуем структуру максимальных и некоторых других идеалов этих алгебр. Некоторые из рассматриваемых нами банаховых алгебр несепарабельны, поэтому многие стандартные методы исследования максимальных идеалов к ним неприменимы.

§ 1. Алгебры Жеврея на окружности

Определение. $G_{\alpha, R}$ $(\alpha > 0,\ R > 0)$ — пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $f(z)$ $(z \in \Gamma)$, удовлетворяющих условиям

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant C_f R^n (n!)^\alpha \quad (z \in \Gamma,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$$

с нормой

$$\|f\|_G = \sup_{n \geq 0} \frac{|f^{(n)}(z)|}{R^n (n!)^\alpha}.$$

Как установлено в работе [4] пространство $G_{\alpha, R}$ несепарабельно. Сепарабельным является его подпространство $G^0_{\alpha, R}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\max_z |f^{(n)}(z)| = o[R^n (n!)^\alpha] \qquad (n \to \infty).$$

В случае $\alpha \leqslant 1$ классы $G_{\alpha, R}$ состоят как легко видеть из функций, аналитически продолжимых в некоторое кольцо $1-\delta < |z| < 1+\delta$ $(\delta > 0)$.

При $\alpha > 1$ классы $G_{\alpha, R}$ неквазианалитичны в силу теоремы Данжуа—Карлемана—Островского (см., например, [5]). Нижеследующая теорема показывает, что при $\alpha > 2$ классы $G_{\alpha, R}$ замкнуты относительно умножения.

Теорема 1. *Пусть, $\alpha > 2$. Пусть, далее, f и $g \in G_{\alpha, R}$. Тогда $f \cdot g \in G_{\alpha, R}$. Если, кроме того, один из множителей f, g принадлежит $G_{\alpha, R}$, то $f \cdot g \in G^0_{\alpha, R}$.*

Сначала докажем вспомогательное предложение.

Лемма. При $\beta > 1$

$$\sum_{k=0}^{n} [k! \, (n-k)!]^\beta \leqslant C \, (n!)^\beta \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

где C не зависит от n.

Доказательство леммы. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n} [k! \, (n-k)!]^\beta \leqslant (n!)^\beta \left(2 + 2 \frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{n}{2}\right) \leqslant 3 \, (n!)^\beta.$$

Теорема 1 непосредственно следует из формулы Ньютона—Лейбница и доказанной леммы. Из теоремы 1 вытекает, что пространства $G_{\alpha, R}$, $G^0_{\alpha, R}$ при $\alpha > 2$ являются банаховыми алгебрами относительно обычного умножения. Всюду в дальнейшем предполагается, что $\alpha > 2$.

В силу теоремы Данжуа—Карлемана—Островского $G_{\alpha, R}$ при $\alpha > 2$ — регулярные симметричные алгебры [6]. Структура максимальных идеалов алгебр $G_{\alpha, R}$, $G^0_{\alpha, R}$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Каждому максимальному идеалу $I \subset G_{\alpha, R}$ соответствует точка $z_0 \in \Gamma$ такая, что $I = \{f : f \in G_{\alpha, R},\ f(z_0) = 0\}$, причем пространство максимальных идеалов алгебры $G_{\alpha, R}$ гомеоморфно окружности Γ_0. Аналогичное утверждение справедливо для алгебры $G^0_{\alpha, R}$.*

Доказательство. Так как алгебра $G^0_{\alpha, R}$ сепарабельна [4] то она имеет две образующие $\{e^{it}; e^{-it}\}$ и структура максимальных идеалов этой алгебры устанавливается с помощью стандартного рассуждения (см., например, [6], стр. 31—32, применительно к алгебре W абсолютно сходящихся рядов Фурье).

С другой стороны, алгебра $G_{\alpha, R}$, не являясь сепарабельной, имеет несчетное число образующих. Поэтому справедливость теоремы 2 для алгебры $G_{\alpha, R}$ мы будем выводить из следующего предложения.

Лемма 1. *Если $f \in G_{\alpha, R}$, $f(z) \neq 0$ $(z \in \Gamma)$, то $f^{-1}(z)$ также принадлежит $G_{\alpha, R}$.*

Доказательство. Каждому элементу $f \in G_{\alpha, R}$ и каждой точке $z_0 \in \Gamma$ поставим в соответствие формальный степенной ряд

$$K_{f,z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad \text{где } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{2}$$

Рассмотрим алгебру П формальных степенных рядов (2) с нормой

$$\| K_{f,z_0} \|_{\Pi} = \sup \frac{|c_n|}{R^n (n!)^{\alpha-1}}. \tag{3}$$

Очевидно, соответствие $f \to K_{f,z_0}$ при каждом фиксированном $z_0 \in \Gamma$ устанавливает гомоморфизм алгебры $G_{\alpha,R}$ на алгебру П.

Далее

$$\| f \|_G = \max_z \| K_{f,z_0} \|_{\Pi}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Алгебра* П *примарна; другими словами единственный максимальный идеал* I *алгебры* П *имеет вид*

$$I = \{ K_{f,z_0} : K_{f,z_0} \subset \Pi, \ c_0 = 0 \}.$$

Пусть $K \overline{\subset} I$, т. е. $c_0 \neq 0$ (см. (2)). Построим формальный обратный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n = \left(\sum c_n t^n \right)^{-1}.$$

Очевидно, достаточно показать, что

$$\left\| \frac{1}{K_{f,z_0}} \right\|_{\Pi} < \infty. \tag{5}$$

Действительно

$$\frac{1}{K_{f,z_0}} = \left(\sum^{\infty} c_n t^n \right)^{-1} = \frac{1}{c_0} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n \right)^m. \tag{6}$$

Обозначим

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n, \quad K^m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(m)} t^n,$$

где

$$c_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-1} c_n^{(m-1)} c_{n-k}.$$

Используя (1) и (3), получим

$$\| K^m(t) \|_{\Pi} \leqslant \gamma^{m-1} \| K(t) \|_n^m \left[\frac{(n-m+1)!}{n!} \right]^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{R^{m-1}} \leqslant \gamma^{m-1} \frac{\| K(t) \|_n^m}{R^{m-1} [(m-1)!]^{\alpha-1}}. \tag{7}$$

Теперь, учитывая оценку (7) и применив признак сходимости Даламбера, легко показать, что ряд (6) сходится и выполняется (5).

Следовательно, формальный обратный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$$

принадлежит алгебре П. Отсюда следует, что других максимальных идеалов (кроме I) алгебра П не имеет.

Теперь нетрудно доказать лемму 1. В самом деле, функция $f^{-1}(z)$ бесконечно дифференцируемая на Γ и в каждой точке $z_0 \in \Gamma$ ее формальный ряд Тейлора принадлежит алгебре П, причем, в силу оценки (5), учитывая, что $\inf |f(z)| > 0$ и используя (4), находим $\|f^{-1}\|_a < \infty$. Следовательно для функции f, удовлетворяющей условиям леммы 1, в $G_{\alpha, R}$ существует функция $f^{-1}(z) \in G_{\alpha, R}$.

Теорема 2, которая утверждает, что алгебра $G_{\alpha, R}$ не имеет других максимальных идеалов кроме I, следует непосредственно из леммы 1 с помощью обычного рассуждения (см. [6], стр. 19—20).

§ 2. Алгебра Жеврея в круге

Наряду с пространствами $G_{\alpha, R}$ будем рассматривать пространства $AG_{\alpha, R}$, состоящие из аналитических функций.

Определение. $f \in AG_{\alpha, R}$, если $f \in G_{\alpha, R}$ и существует функция $\hat{f}(z)$ $(z \in \overline{U})$, голоморфная в U и бесконечно дифференцируемая в $\overline{U}$ такая, что

$$\hat{f}(z) = f(z) \qquad (z \in \Gamma).$$

Далее, $AG^0_{\alpha, R} = AG_{\alpha, R} \cap G^0_{\alpha, R}$.

В дальнейшем функции $f \in G_{\alpha, R}$ мы будем считать заданными в круге $\overline{U}$, т. е. будем отождествлять f и $\hat{f}$.

Из работы [3] следует, что при $\alpha < 2$ классы $AG_{\alpha, R}$ квазианалитичны в круге $\overline{U}$, т. е. из того, что

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \ (z_0 \in \partial U; \ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

следует $f(z) \equiv 0$. Поэтому изучение структуры подпространств, инвариантных относительно умножения на z, в этом случае $(\alpha \leqslant 2)$ не представляет интереса. При $\alpha > 2$ пространства $AG_{\alpha, R}$ являются банаховыми алгебрами. Для них справедлива

Теорема 3. *Пространство максимальных идеалов алгебры $AG_{\alpha, R}$, а также алгебры $AG^0_{\alpha, R}$, гомеоморфно замкнутому кругу $|z| \leqslant 1$.*

Легко показать, что алгебра $AG^0_{\alpha, R}$ сепарабельна, в то время, как алгебра $AG_{\alpha, R}$ несепарабельна.

§ 3. Примарные идеалы алгебр $AG_{\alpha, R}$, $AG^0_{\alpha, R}$ внутри круга и на окружности

Определение. Пусть $z_0 \in \overline{U}$, $n > 1$. Будем обозначать через $I^{(n)}_{z_0}$ множество всех элементов $f \in AG_{\alpha, R}$ таких, что $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$.

Легко видеть, что $I^{(n)}_{z_0}$ — замкнутое подпространство $AG_{\alpha, R}$ и следовательно примарный идеал алгебры $AG_{\alpha, R}$, принадлежащий максимальному идеалу $I_{z_0} = I^{(1)}_{z_0}$.

Следующая теорема показывает, что этими идеалами исчерпываются все примарные идеалы алгебры $AG_{\alpha, R}$, принадлежащие I_{z_0}.

Теорема 4. *Пусть I — некоторый примарный идеал алгебры $AG_{\alpha, R}$, принадлежащий максимальному идеалу $I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)}$ ($|z_0| < 1$). Пусть n — наименьшая кратность нуля z функций $f \in I$, т. е. $n = \min\limits_{f \in I} \min\limits_{m} \{m : f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$. Тогда $I = I_{z_0}^{(n)}$.*

Доказательство. Пусть $f \in I$, $g(z) = f(z)\ (z - z_0)^{-n}$ и $M = \{g(z);\ f \in I\}$. Очевидно множество функций $g(z) \in M$ не имеет общих нулей и $g(z) \in G_{\alpha, R}$. Кроме того, для любой функции $h \in G_{\alpha, R}$, $h \cdot g \in G_{\alpha, R}$, так как $G_{\alpha, R}$ является банаховой алгеброй. Из всего сказанного вытекает, что $M = G_{\alpha, R}$, а $I = G_{\alpha, R} \cdot (z - z_0)^n$.

Аналогичную структуру имеют примарные идеалы алгебры $AG_{\alpha, R}^0$ внутри круга.

Перейдем теперь к описанию примарных идеалов алгебры $AG_{\alpha, R}^0$, принадлежащих максимальному идеалу I_{z_0}, где $z_0 \in \Gamma$.

Очевидно, примарные идеалы

$$I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)} \supset I_{z_0}^{(2)} \supset \cdots \supset I_{z_0}^{(n)} \supset \cdots$$

и их пересечение

$$I_{z_0}^{(\infty)} = \bigcap I_{z_0}^{(n)} \qquad (z_0 \in \Gamma)$$

нетривиальны. Далее имеются нетривиальные примарные идеалы, содержащиеся в $I_{z_0}^{(\infty)}$.

Теорема 5. *Множество элементов $f \in G_{\alpha, R}$ таких, что внутренняя функция*

$$S_{z_0, \gamma} = \exp\left\{-\gamma\ \frac{z_0 + z}{z_0 - z}\right\}$$

($\gamma > 0$ — *фиксировано) делит внутреннюю часть функции f, образует примарный идеал*

$$I_{z_0, \gamma} \subset I_{z_0}^{(\infty)}.$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что $I_{z_0, \gamma}$ замкнуто, так как каждый предельный элемент f множества $I_{z_0, \gamma}$ имеет внутреннюю часть, которую делит функция $S_{z_0, \gamma}$ (см. [7], стр. 128).

Таким образом, указанные примарные идеалы, образуют упорядоченное множество

$$I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)} \supset I_{z_0}^{(2)} \supset \cdots \supset I_{z_0}^{(n)} \supset \cdots \supset I_{z_0}^{(\infty)} \supset I_{z_0, \gamma},$$

состоящее из дискретной и непрерывной цепочек.

Вопрос о том, имеются ли другие примарные идеалы, принадлежащие I_{z_0}, остается открытым.

Черкасский общетехнический факультет
Киевского инженерно-строительного института

Поступила 29.I.1973

Վ. Ս. ԿՈՐՈԼԵՎԻՉ. Անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների որոշ բանախյան հանրահաշիվների մասին (*ամփոփում*)

Սահմանվում են մի քանի հայտանիշներ, որոնց բավարարման դեպքում Ժևրեի դասերին պատկանող, $\Gamma = \{z : z \in C, |z| = 1\}$ *շրջանագծի վրա անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների* $J_{\alpha, k}$ $(\alpha > 0, R > 0)$ *բանախյան տարածությունները դառնում են հանրահաշիվներ սովորական բազմապատկման նկատմամբ։ Տրվում է այդ հանրահաշիվների և* $U = \{z : z \in C, |z| < 1\}$ *շրջանում նրանց անալիտիկ շարունակությունների մաքսիմալ և որոշ պրիմար իդեալների նկարագրությունը։*

V. S. KOROLEVITCH. *On some banach algebras of infinitely differentiable functions* (summary)

Some criteria are established under which Banach spaces of $J_{\alpha, k}$ $(\alpha > 0, K > 0)$ functions, infinitely differentiable on the circumference $\Gamma = \{z : z \in C, |z| = 1\}$ and belonging to the Zhevrey class turn to be algebras with usual multiplication.

The description of maximal and primary ideals of these algebras as well as of their analytic continuations into the circle $U = \{z : z \in C, |z| < 1\}$ is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson.* Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta Math., 87, №№ 3—4, 1952, 325—345.
2. *A. M. Cholet.* Ensembles de zéros de fonctions analytigues dans le disgue appartenant à une classe de Gevrey sur le bord, C. R. Acad. Sci. Paris, sér A—B 269, 1969, A 447—A 449.
3. *Б. И. Коренблюм.* Квазианалитические классы функций в круге, ДАН СССР, 164, № 1, 1965, 36—39.
4. *Б. И. Коренблюм.* Теорема Вейерштрасса в пространствах бесконечно дифференцируемых функций, ДАН СССР, 150, № 6, 1963, 1214—1217.
5. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, М., ИЛ, 1955.
6. *И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов.* Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз, 1960.
7. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИИЛ, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 2, 1974 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН, Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, задача Коши для уравнения в частных производных поставлена корректно, если начальное многообрзазие—нехарактеристическое, а характеристики действительны и различны (гиперболичность, [1], [2]).

В двухмерном случае в работе [3] получены достаточные условия корректности задачи Коши для гиперболических внутри области уравнений произвольного порядка с совпадающими на начальной кривой характеристиками (слабая гиперболичность, вырождение). Общий случай нарушения гиперболичности на начальной кривой исследован в работе [4]. Эти результаты применением преобразования Радона могут быть перенесены на многомерный случай при условии, что коэффициенты уравнения не зависят от пространственных переменных, а начальные данные заданы на гиперплоскости $t=\mathrm{const}$ (см. [5]).

Ниже результаты работы [3] переносятся на многомерный случай без этого жесткого ограничения.

Доказательство основной теоремы 1 о существовании, единственности и устойчивости решения вырождающегося на начальной гиперплоскости гиперболического уравнения основано на получении энергетического неравенства (13). Используется идея Лере о разделяющем операторе и метод обращения мажорантного интегрального уравнения с неинтегрируемым ядром [6], позволяющий применить схему Л. Гординга для вывода основного энергетического неравенства ([1]).

Сравнение с необходимыми условиями корректности, содержащимися в работе [7] (см. следствие из теоремы 1) показывает, что полученные достаточные условия корректности близки к точным.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $V=V_t=\{x=(x^1, x')=(\tau, x'),\ x'\in R^\nu,\ 0<\tau\leqslant t\}$ — переменная полоса, $S=S_t$ — гиперплоскость $\tau=t$. Изменение t происходит в конечном интервале, например, $0\leqslant t\leqslant 1$. Кроме полного порядка производной D^α, равного $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_{\nu+1}$, мы будем пользоваться двойным порядком $[\alpha]=\alpha_1, |\alpha'|$, где α_1 — порядок дифференцирования по x^1, а $\alpha_1+|\alpha'|=|\alpha|$. Запись $[\alpha]\leqslant p, q$ означает, что $\alpha_1\leqslant p$, $|\alpha|\leqslant p+q$. Обозначим через Lip^k множество всех определенных в V комплексно-значных функций, у которых производные порядка $\leqslant k$ существуют почти всюду, а Lip° — совокупность всех измеримых и ограниченных функций. Аналогично, $Lip^{p,q}$ — класс комплекснозначных функций с ограниченными производными порядка $\leqslant p,q$.

Пусть

$$a = a(x, D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha + \Sigma d_k D^k, \ |\alpha| = m+1, \ |k| \leqslant m, \tag{1}$$
$$Pa = Pa(x, D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha, \ |\alpha| = m+1.$$

Условимся записывать $a \in Lip^k$ $(a \in Lip^{n,q})$, если этим классам принадлежат все коэффициенты оператора a.

Оператору a сопоставим характеристический полином

$$Pa(x, \zeta) = \Sigma a_\alpha \zeta^\alpha = a_0(x) \prod_1^{m+1} [\zeta_1 - \lambda_l(x, \zeta')], \tag{2}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_{\nu+1})$, $\zeta' = (\zeta_2, \cdots, \zeta_{\nu+1})$, $|\zeta'|^2 = \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_{\nu+1}^2$.

Определение. Оператор a называется гиперболическим (относительно первой координаты), если в разложении на множители (2) $\lambda_l(x, \zeta')$ действительны и различны, когда вектор ζ' действителен и отличен от нуля.

Далее, везде оператор a предполагается нормальным, т. е. коэффициент D_1^{m+1} равен единице (это означает, что для гиперболического оператора a гиперплоскость S_0 нехарактеристическая). Полагая оператор a гиперболическим при $\tau > 0$, мы допустим при $\tau = 0$ совпадение чисел $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(2 \leqslant r \leqslant m+1)$.

Определение. Оператор a называется гиперболическим равномерно r-вырождающимся на S_0, если a — гиперболический в V_t при $\tau > 0$ и существует функция $\lambda(\tau) \in C^1[0, 1]$ такая, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(\tau) > 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и характеристические корни полинома $Pa(x, \zeta)$ удовлетворяют соотношениям

$$|D^{0,n} \lambda_i(x, \zeta')| \leqslant \text{const} \cdot \lambda^{\omega_i} \cdot |\zeta'|, \ i = 1, \cdots, r, \ n = 0, 1, \cdots, q+1, \tag{3}$$

причем $1 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_r$,

$$\lambda_i|_{\tau=0} \neq 0, \ r < i \leqslant m+1,$$
$$\left| \frac{D^{0,n} \lambda_{i\tau}}{\lambda_i} \right| \leqslant \text{const} \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda(\tau)}, \tag{4}$$
$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant \text{const} \cdot \lambda^{2\omega_j} \cdot |\zeta'|^2, \quad j < i \leqslant r,$$
$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant \text{const} \cdot |\zeta'|^2, \ r \leqslant j < i \text{ или } j \leqslant r < i. \tag{5}$$

Введем некоторые линейные пространства

1. E^k — пространство всех непрерывно дифференцируемых в V до порядка k функций с компактными носителями, $\mathrm{E}^\infty = \mathrm{E}$.

2. Если U является частью V, то $H^{p,q}(U)$ — пополнение ε по норме

$$|D^{p,q} f, U|^2 = \int_U |D^{p,q} f|^2 \, dU = \int_U \sum_{|\alpha| \leqslant p, q} |D^\alpha f|^2 \, dU, \tag{6}$$

где $dU = dx_1 \cdots dx_{\nu-1}$ при $U = V$ и $dU = dx_2 \cdots dx_{\nu-1}$, если U совпадает с S или его частью.

3. $L^{p,q}$ — пополнение E по норме

$$|D^{p,q} f|_1 = \int_0^t |D^{p,q} f, S_\tau| \, d\tau. \tag{7}$$

4. $B^{p,q}$ — подпространство пространства $L^{p,q}$, определяемое условием

$$|D^{p,q} f|_\infty = \operatorname*{ess\cdot sup}_{0<\tau<t} |D^{p,q} f, S_\tau| < \infty. \tag{8}$$

5. Пусть C_0^∞ — подпространство C^∞, элементы которого равны нулю в окрестности S_0 и $H_0^{p,q}(V)$ — замыкание C_0^∞ в $H^{p,q}(V)$.

Производные суммарного порядка $< p + q$ и порядка $< p$ по D_1 элементов $H_0^{p,q}$ равны нулю почти всюду на S_0.

Основной результат настоящей работы формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть a — гиперболический равномерно r-вырождающийся на S_0 оператор $(m+1)$-го порядка с коэффициентами*

$$a \in Lip^{0,q}, \quad Pa \in Lip^1. \tag{9}$$

Тогда, если младшие коэффициенты оператора a удовлетворяют условиям

$$\tau^{m-|k|} |D^{0,n} d_k(x)| \leqslant \begin{cases} c \cdot \lambda^{\Omega_1 - 1} \lambda', & m + 2 - r \leqslant |k| - k_1 \leqslant m \\ \text{const}, & \text{для остальных} \quad |k| \leqslant m, \end{cases} \tag{10}$$

$$\Omega_1 \equiv \omega_1 + \cdots + \omega_{r-1-k_1+|k|-m}, \quad n = 0, 1, \cdots, q; \; 2 \leqslant r < m + 1,$$

то задача Коши

$$a u = f \tag{11}$$

при

$$f \in H^{0,\, q+(m+1)\gamma}(V) \tag{12}$$

имеет единственное решение $u \in H_0^{m+1,q}$, причем при $q > 0$ имеет место неравенство

$$|D^{m+1,q-1} u, \; V_t| \leqslant \text{const} \, |D^{0,\, q+\gamma(m+1)} au, \; V_t| \tag{13}$$

для всех $t \in (0, 1]$ и всех $u \in H_0^{m+1,q}$.

Замечание: постоянная γ в (12), (13) зависит только от постоянных, фигурирующих в (4), (5), (10).

Пусть далее

$$a^\alpha(x, \zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^\alpha a(x, \zeta), \quad a_\beta = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^\beta a(x, \zeta)$$

$$a_s(x, \zeta) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha \zeta^\alpha \;\; (0 \leqslant s \leqslant m+1), \quad a_{s1}(x', \zeta') = a_s|_{\tau = \zeta_1 = 0}. \tag{14}$$

Следствие: Пусть a — гиперболический (относительно координаты $x^1 = \tau$) при $\tau > 0$, нормальный оператор с аналитическими коэффициентами и

$$a^{(r, 0, \cdots, 0)}(x', \zeta') \neq 0$$

для ζ' отличных от нуля

$$a^{(\alpha)}_{m+1\,(\beta)}(x', \zeta') = 0 \text{ при } \alpha + \frac{\beta}{p} < r, \tag{15}$$

где p — любое целое число $\geqslant 1$, $2 \leqslant r \leqslant m+1$. Тогда для того чтобы задача Коши для уравнения (11), $f \in C_0^\infty$ с нулевыми данными на S_0 была корректна в смысле теоремы 1, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{\alpha}_{s(\beta)}(x', \zeta') = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| + \frac{\beta}{p} + (m+1-s)\left(1 + \frac{1}{p}\right) < r. \tag{16}$$

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующее энергетическое неравенство:

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *существует постоянная* c *такая, что*

$$|D^{m, q} u, S_t| \leqslant c\, |D^{0, q+(m+1)\gamma} au|_1 \tag{17}$$

для всех $u \in H_0^{m+1, q}$ *и* $t \in [0, 1]$.

Если $q > 0$, *то имеет место также и оценка* (13).

§ 2. Подготовительные леммы

Пусть a и b — два гиперболических оператора порядков $m+1$ и m соответственно.

Определение. Будем говорить, что b разделяет a, если для всех x листы поверхности $Pb(x, \zeta) = 0$ разделяют листы $Pa(x, \zeta) = 0$.

Если задан произвольный нормальный гиперболический оператор a, то для построения нормального гиперболического разделяющего оператора b достаточно, следуя Лере, положить

$$b = Pb(x, \zeta) = \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} Pa(x, \zeta).$$

Пусть $\bar{x}$ обозначает точку пространства $\bar{R}^{\nu+1}$, отличного от $R^{\nu+1}$. Вводя, как обычно [1], двойные дифференциальные операторы, мы будем полагать, что операторы D^α и $\bar{D}^\alpha$ действуют в пространствах $R^{\nu+1}$ и $\bar{R}^{\nu+1}$ соответственно. Кроме (11) мы рассмотрим (необходимую для данного метода доказательства теоремы 1) вспомогательную задачу Коши для гиперболического уравнения с постоянной r-кратностью ($\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv \cdots \equiv \lambda_r \equiv 0$ во всей области V).

$$a'u = f,\ u|_{S_0} = D_1 u|_{S_0} = \cdots = D_1^m u|_{S_0} = 0. \tag{11'}$$

Здесь

$$a'(x, D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha, \ |\alpha| \leqslant m+1, \ \alpha_1 > |\alpha| - m + r - 1. \qquad (1')$$

Пусть

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ L = a\bar{b} + \bar{a} b, \ \bar{a}(x, D) = a(\bar{x}, \bar{D}).$$

Лемма 1. *Если главные части операторов действительны, а* $a \in Lip^0$, $Pa \in Lip^1$ *и* $b \in Lip^1$, *то*

$$L = \sum_1^{m+1} (D_j + \bar{D}_j) A^j + A^0, \qquad (18)$$

где $\{A^j\}_0^{m+1}$ — *двойные дифференциальные операторы порядка* $\leqslant m$, m, *а именно*

$$A^j = \sum a_\alpha b_\beta K^j_{\alpha\beta}, \ A^0 = -\sum (D_j a_\alpha b_\beta) K^j_{\alpha\beta} + d_k b_\beta (\bar{D}^\beta D^k + D^\beta \bar{D}^k), \qquad (19)$$

$$D^\alpha \bar{D}^\beta + \bar{D}^\alpha D^\beta = \sum (D_j + \bar{D}_j) K^j_{\alpha\beta}, \ |k| \leqslant m, \ |\beta| \leqslant m, \ |\alpha| = m+1,$$

при условиях (3), (4), (10) *имеем*

$$|A^0 u \bar{u}, V| \leqslant \int_0^t \left(c + M_0 \frac{\lambda'}{\lambda}\right) |\tau^{|\beta| - m} \lambda^{\Omega_1} D^\beta u, S_\tau|^2 \, d\tau, \qquad (20)$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + \cdots + \omega_{r-1-\beta_1+|\beta|-m}.$$

Здесь по $|\beta| \leqslant m$ идет суммирование, причем в членах суммы с множителями вида λ^{Ω_1}, где $r - 1 - \beta_1 + |\beta| - m < 0$, множители λ^{Ω_1} надо заменить единицей.

Замечание. Лемма 1 остается верной и для кратного оператора (1'), при этом

$$|A^{0'} u \bar{u}, V| \leqslant \text{const} \int_0^t |D^\beta u, S_\tau|^2 \, d\tau, \qquad (20')$$

$$|\beta| \leqslant m, \ \beta_1 \geqslant r - 1 - m + |\beta|.$$

Доказательство: Доказательство первой части леммы см [1], стр. 45. Докажем оценки (20) и (20'). Из (3), (4) вытекают следующие оценки для коэффициентов операторов Pa и b:

$$|D^{0,n} a_\alpha| \leqslant \text{const} \cdot \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-|\alpha_1}}, \ |D_1 a_\alpha| < c \cdot \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-\alpha_1}} \frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad (21)$$

$$|D^{0,n} b_\beta| \leqslant \text{const} \cdot \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-\beta_1 -1}}, \ |D_1 b_\beta| \leqslant c \lambda^{\omega_1 + \cdots + \omega_{r-1-\beta_1}} \frac{\lambda'}{\lambda}. \qquad (22)$$

Оценка (21) вытекает из (3), (4) и теоремы Виета, а (22) получается аналогично, если выбрать разделяющий оператор Лере:

$$b = Pb(x, \zeta) = \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} Pa(x, \zeta). \qquad (23)$$

Тогда (20) получается из представления для $A^\circ = (19)$ и (10) (20′) следует из (10), (19) и вида оператора a' (см. (1′)), так как

$$a_\alpha \equiv 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 < r - 1 + |\alpha| - m \tag{24}$$

$$\beta_\beta \equiv 0 \quad \text{при} \quad \beta_1 < r - 1 + |\beta| - m.$$

Лемма 2. *Если a и b — два гиперболических оператора, причем $a_0 b_0 > 0$ и b разделяет a, то форма $PA^1 u\bar{u}$ вполне положительна:*

$$PA^1(x, \zeta) = a_0 \bar{b}_0 \sum_1^{m+1} \gamma_k |a_k(x, \zeta)|^2, \tag{25}$$

где

$$\gamma_k = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (\lambda_k - \mu_j)}{\prod\limits_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad |a_k| = \prod_{j \neq k}^{m+1} |\zeta_1 - i\lambda_j|. \tag{26}$$

Замечание: формулы, аналогичные (25) и (26) верны и для операторов a' и b'.

Доказательство. Доказательство леммы см. в [1], стр. 47. Замечание доказывается аналогично, если заметить, что

$$Pa'(x, \zeta) = \zeta_1^{r-1} \prod_1^{m+2-r} (\zeta_1 - i\lambda_j),$$

так как

$$\lambda_{m+2-r} \equiv \lambda_{m+3-r} \equiv \lambda_{m+1} \equiv 0,$$

$$Pb'(x, \zeta) = \zeta_1^{r-1} \sum_{j=1}^{m+2-r} (\zeta_1 - i\mu_j) \quad (\mu_j \text{ лежат между } \lambda_j).$$

Вводя

$$a'_k(x, \zeta) = \zeta_1^{r-1} \prod_1^{m+2-r} (\zeta_1 - i\lambda_j), \tag{27}$$

имеем

$$Pb' = \sum_{k=1}^{m+1} \gamma'_k a'_k,$$

$$\gamma'_k = \prod_{j=1}^{m+1-r} (\lambda_k - \mu_j) \Big/ \sum_{j \neq k}^{m+2-r} (\lambda_k - \lambda_j).$$

Отсюда следует, что оценки (25) и (26) сохраняются и для a', b', если суммы и произведения распространять на все некратные корни.

Лемма 3. *Пусть оператор a — нормальный, гиперболический, равномерно r-вырождающийся на S_0. Тогда в условиях* (5), (9), $(q = 0)$ *имеет место неравенство*

$$PA^1(x, \zeta) > c \sum_{|\beta|=m} |\lambda^{\Omega} \zeta^\beta|^2, \tag{28}$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{r-\beta_1-1}$$

и, аналогично, для оператора a'

$$PA^1(x, \zeta) \geqslant \text{const} \sum |\zeta^\beta|^2, \ |\beta| = m, \ \beta_1 \geqslant r-1. \tag{28'}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\xi = (\zeta_1^m, \ -i\zeta_1^{m-1}|\zeta'|, \cdots, (-i|\zeta'|)^m),$$

$$\xi = (\zeta_1^m, \ -i\zeta_1^{m-1}|\zeta'|, \cdots,$$

$$\lambda^{\omega_1}\zeta_1^{r-2}|\zeta'|^{m+2-r}, \cdots, (-i|\zeta'|)^m \lambda^{\omega_1+\cdots+\omega_{r-1}}.$$

Пусть Q и Λ_k — диагональные матрицы с диагональными элементами, равными соответственно

$$\overbrace{1, \cdots, 1}^{(m+2-r)}, \ \lambda^{-\omega_1}, \ \lambda^{-\omega_1-\omega_2}, \cdots, \lambda^{-\omega_1-\cdots-\omega_{r-1}}$$

и

$$1, \sum_{l \neq k} \lambda_l, -\sum_{\substack{l_1 < l_2 \\ l_1, l_2 \neq k}} \lambda_{l_1}\lambda_{l_2}, \cdots, (-1)^m \prod_{l \neq k}^{m} \lambda_l$$

(здесь $\lambda_l = \lambda_l(x, \zeta'/|\zeta'|)$).

Пусть

$$\Lambda^0 = Q \Lambda Q,$$

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{m+1} \Lambda_k \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Lambda_k.$$

Из леммы 2 имеем

$$PA^1(x, \zeta) = \sum \gamma_k |a_k|^2 \geqslant c \sum |a_k|^2 \equiv$$

$$\equiv c\,\xi\,\Lambda\,\xi^+ \equiv c\,\xi_0\,\Lambda^0\,\xi_0 \geqslant c\,\xi_0\,\xi_0^+,$$

откуда и следует (28) (здесь использовано $\gamma_k > 0$, что следует из (23), (26)), если принять во внимание $\Lambda^0 > 0$, что вытекает из критерия Сильвестра и (5), так как главные $(s+1) \times (s+1)$ миноры матрицы Λ^0 равны

$$\frac{\displaystyle\sum_{(k_1, \cdots, k_{s+1}) \in (1, \cdots, m+1)} \ \prod_{\substack{l<j \\ l, j = k_1, \cdots, k_{s+1}}} (\lambda_l - \lambda_j)^2}{\lambda^{2(s-m+r-1)\omega_1+\cdots+2\omega_{s-m+r-1}}|\zeta'|^{s(s+1)}} \quad \text{при } s+1 > m+2-r,$$

$$\sum \prod (\lambda_l - \lambda_j)^2 / |\zeta'|^{s(s+1)} \quad \text{при } s+1 \leqslant m+2-r.$$

Соотношение (28′) доказывается аналогично.

Рассмотрим форму порядка (m, m)

$$H = \sum h_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u, \ |\alpha| = |\beta| = m$$

и характеристический полином

$$K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum K_{\alpha\beta} \zeta^{\alpha} \bar{\zeta}^{\beta}.$$

Используя частичное преобразование Фурье функции u по переменным $x_2, \cdots, x_{\nu+1}$,

$$F(x, \eta') = \int u(x) \exp(-i\eta_2 x_2 - \cdots)\, dS,$$

$$dS = dx_2 \cdots dx_{\nu+1}$$

с помощью формулы Парсеваля получим

$$\int H dS = (2\pi)^{-\nu} \int K(\sigma\, \bar{\sigma})\, F \bar{F}\, d\eta',$$

$$\eta' = (\eta_2, \cdots, \eta_{\nu+1}), \quad \sigma = (D_1, i\eta_2, \cdots, i\eta_{\nu+1}).$$

Пусть

$$K(\sigma, \bar{\sigma}) F \sim \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho} \sigma^{\beta} F|^2 \tag{29}$$

(здесь и далее знак $\sim$ означает, что отношение левой и правой частей можно отделить от нуля и бесконечности постоянными).

Определение. Форма H называется положительной по отношению к оси x_1, если имеет место соотношение (29).

Из (29) следует (согласно формуле Парсеваля)

$$\int H dS \sim \int \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho}(\tau)\, D^{\beta} u|^2\, dS. \tag{30}$$

Лемма 4. *Эрмитов однородный оператор степени (m, m) тогда и только тогда является положительным, когда*

$$K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho} \zeta^{\beta}|^2.$$

Доказательство. См. [1], стр. 37.

Лемма 5. *В предположениях теоремы 1 и компактности S имеет место неравенство*

$$\int A^1(x, D)\, u \bar{u}\, dS \geqslant c \sum_{|\beta| = m} |\lambda^{\varrho} D^{\beta} u, S|^2 -$$

$$- c^{-1} \sum |\lambda^{\varrho} D^{\beta_1, m-1-\beta_1} u, S|^2, \tag{31}$$

а в случае оператора a' (1′):

$$\int A'^1 (x, D)\, u \bar{u}\, dS \geqslant c \sum |D^{\beta} u, S|^2 -$$

$$- c^{-1} \sum |D^{\beta_1, m-1-\beta_1} u, S|^2, \quad \beta_1 \geqslant r - 1 + |\beta| - m, \tag{31′}$$

где c — достаточно большая постоянная.

Доказательство. Ввиду того, что

$$K^1_{\alpha\beta}=D^{\alpha_1-1,\, m+1-\alpha_1}\,\overline{D}^{\beta}+D^{\alpha_1-1,\, m+1-\alpha_1}\, D^{\beta}\quad (\alpha_1>1)$$

(см. (20)), имеем

$$|PA^1(x,\, D)\, u\bar{u}|=|\sum a_\alpha b_\beta K^1_{\alpha\beta}\, u\, \bar{u}|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum|\lambda^{\varrho} D^{\beta} u|\,|\lambda^{\omega_1+\cdots+\omega_r-\alpha_1} D^{\alpha_1-1,\, m+1-\alpha_1} u|\leqslant c\sum_{|\beta|=m}|\lambda^{\varrho} D^{\beta} u|^2. \qquad (32)$$

Пусть T — сфера радиуса ε с центром x_0, а $supp\, u\subset T\subset S$. Из лемм 3 и 4 следует

$$\int PA^1(x_0,\, \sigma)\, u\bar{u}\, dS\geqslant \text{const}\sum_{|\beta|=m}|\lambda^{\varrho} D^{\beta} u,\, S|^2. \qquad (33)$$

Далее

$$\int A^1(x,\, D)\, u\,\bar{u}\, dS=\int PA^1(x_0,\, D)\, u\bar{u}\, dS+$$

$$+\int [PA^1(x,\, D)-PA^1(x_0,\, D)]\, u\bar{u}\, dS=$$

$$=\int PA^1(x_0,\, \sigma)\, u\bar{u}\, dS+$$

$$+\int [PA^1(x,\, D)-PA^1(x_0,\, D)]\, u\bar{u}\, dS\geqslant$$

$$> \sum|\lambda^{\varrho} D^{\beta} u,\, S|-c\delta(\varepsilon)\sum|\lambda^{\varrho} D^{\beta}\bar{u},\, S|^2.$$

Из равномерной непрерывности коэффициентов PA^1 в $supp\, u\subset T$ следует, что $\varepsilon\to 0$ влечет $\delta(\varepsilon)\to 0$, поэтому

$$\int A^1(x,\, D)\, u\,\bar{u}\, dS\geqslant$$

$$\geqslant c\sum|\lambda^{\varrho} D^{\beta} u,\, S|^2,\ |\beta|=m. \qquad (34)$$

Пусть далее $1=\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots$ представляет собой разбиение единицы на S, удовлетворяющее следующим условиям:

а) каждая функция φ_j бесконечно дифференцируема,

б) производные ее до порядка m включительно равномерно ограничены,

в) носитель S_j функции φ_j пересекается лишь с конечным числом других носителей, причем для любой функции u, равной нулю вне S_j, соотношение (34) выполняется с постоянной, не зависящей от j.

В силу определения

$$\int A^1 u\,\bar{u}\, dS=\sum_j\int \varphi_j\varphi_j A^1 u\,\bar{u}=$$

$$= \sum \int [A^1 \varphi_j u \overline{\varphi_j u} + (\varphi_j \overline{\varphi}_j A^1 -$$

$$- A^1 \varphi_j \overline{\varphi}_j) u \overline{u}] \, dS, \tag{35}$$

$$\varphi\overline{\varphi}A^1 - A^1\varphi\overline{\varphi} = \sum a_\alpha b_\beta (\varphi \overline{\varphi} K -$$

$$- K \varphi \overline{\varphi} = \sum a_\alpha b_\beta [\varphi (\overline{\varphi} K - K \overline{\varphi}) + (\varphi K - K \varphi) \overline{\varphi}]$$

$$\sum a_\alpha b_\beta \varphi (\overline{\varphi} K - K \overline{\varphi}) u \overline{u} = \sum |a_\alpha b_\beta| \times$$

$$\times |\varphi D^\beta u - D^\beta (\varphi u)| \, |D^{\alpha_1 - 1, \, m+1-\alpha_1} u| \leqslant$$

$$\leqslant \sum |a_\alpha b_\beta| \cdot |\varphi D^{\alpha_1 - 1, \, m+1-\alpha_1} u| \, |D^{\beta_1, \, m-1-\beta_1} u|.$$

Поступив аналогично с другим слагаемым, из (35) получаем

$$(\varphi \overline{\varphi} A^1 - A^1 \varphi \overline{\varphi}) u \overline{u} \leqslant c \sum |a_\alpha b_\beta| \times$$

$$\times |D^{\alpha_1 - 1, \, m+1-\alpha_1} u| \, |D^{\beta_1, \, m-1-\beta_1} u| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum \left(r |a_\alpha D^{\alpha_1 - 1, \, m+1-\alpha_1} u|^2 + \frac{1}{r} |b_\beta D^{\beta_1, \, m-1-\beta_1} u|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant c r_1 \sum_{|\beta| < m} |\lambda^\varrho D^\beta u|^2 + c r_1^{-1} \sum |\lambda^\varrho D^{\beta_1, \, m-1-\beta_1} u|^2.$$

Итак

$$\int A^1 u \overline{u} \, dS = \sum_j \int A^1 \varphi_j u \overline{\varphi_j u} \, dS +$$

$$+ \sum_j \int (\varphi_j^2 A^1 - A^1 \varphi_j^2) u \overline{u} \, dS >$$

$$\geqslant c \sum |\lambda^\varrho D^\beta (\varphi_j u), S|^2 - c r_1 \sum |\lambda^\varrho D^\beta u, S_j|^2 -$$

$$- \frac{c}{r_1} \sum |\lambda^\varrho D^{\beta_1, \, m-1-\beta_1} u, S_j|^2 \geqslant$$

$$> c \sum |\lambda^\varrho D^\beta u, S|^2 - \frac{1}{c} \sum |\lambda^\varrho D^{\beta_1, \, m-1-\beta_1} u, S_j|^2.$$

Соотношение (31′) доказывается аналогично.

Лемма 6. *Если a и b — два нормальных оператора с действительными главными частями* $a \in \mathrm{Lip}^{p, q}$, $Pa \in \mathrm{Lip}^1$, $b \in \mathrm{Lip}^{p+1, q}$, *то*

$$\Delta^{p, q} L \equiv \sum (D_j + \overline{D}_j) B^j + B^0, \tag{36}$$

где

$$\Delta^{p, q} = \sum D^\gamma \overline{D}^\gamma, \; [\gamma] \leqslant p, \; q,$$

$\{B^j\}_0^{\nu+1}$ — *двойные дифференциальные операторы порядка* $\leqslant m + p$, q; $m + p$, q

$$B^j = A^j \Delta^{p, q} + a^j b_\Delta + \overline{a}^j b, \; j > 0, \tag{37}$$

$$a = \sum D_j a^j + a_0. \tag{38}$$

Доказательство. См. [1], стр. 51.

Далее нам понадобится лишь частный случай $p = 0$ в (36)—(38). Как и в случае лемм 1, 5 получаем

$$\int B^0 u \bar{u} \, dV \leqslant \int_0^t \left(c + M \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \times$$

$$\times |\lambda^{\Omega_1}(\tau) \tau^{|\beta| - m} D^\beta D^{0, q} u, S_\tau|^2 d\tau, \tag{39}$$

$$\int B^1 u \bar{u} \, dS_t > c \sum |\lambda^\Omega D^\beta D^{0, q} u, S_t|^2 -$$

$$- \frac{1}{c} \sum |\lambda^\Omega D^{\beta_1, m-1-\beta_1+q} u, S_t|^2.$$

§ 3. Доказательство теорем

Проинтегрируем по V тождество (36), (u финитно):

$$\int \Delta^{0, q} L u \bar{u} \, dV = \int [(D_1 + \bar{D}_1) B^1 + B^0] u \bar{u} \, dV$$

или

$$\int B^1 u \bar{u} \, dS_t = \int B^1 u \bar{u} \, dS_0 + \int (\Delta^{0, q} L - B^0) u \bar{u} \, dV.$$

Отсюда, учтя (39) и

$$\int \Delta^{0, q} L u \bar{u} \, dV \leqslant c \, |D^{0, q} a u|_1 \, |\lambda^\Omega D^\beta D^{0, q} u|_\infty,$$

получим (из $u|_{s_0} = \cdots D_1^m u|_{s_0} = 0$ следует $\int B^1 u \bar{u} \, dS_0 = 0$)

$$|\lambda^\Omega D^\beta D^{0, q} u, S_t| \leqslant \int_0^t \left(c + M \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \times$$

$$\times |\tau^{|\beta| - m} \lambda^{\Omega_1} D^\beta D^{0, q} u, S_\tau|^2 + \text{const} \, |D^{0, q} a u|_1 \, |\lambda^\Omega D^\beta D^{0, q} u|_\infty. \tag{40}$$

Докажем, что если

$$|D^{m, q} u, S_0| = 0, \tag{41}$$

то имеет место неравенство

$$|\tau^{|\beta| - m} \lambda^{\Omega_1} D^{\beta_1, \beta' + q} u|_\infty \leqslant \text{const} \, |\lambda^{\Omega_1} D^{m, q} u|_\infty. \tag{42}$$

Из

$$D^\beta D^{0, q} = \int_0^t D_1 D^\beta D^{0, q} u \, d\tau_1 + D^{\beta_1, q + \beta'} u(0, x')$$

или

$$|D^{\beta_1, \beta'+q} u|^2 \leqslant c \cdot t \int_0^t |D^{\beta_1+1, q-1-\beta'} u|^2 d\tau,$$

интегрируя по x', получаем (учитывая (41))

$$|D^{\beta_1, q+\beta'} u, S_t|^2 \leqslant c \cdot t \int_0^t |D^{\beta_1+1, q-1+\beta'} u, S_\tau|^2 d\tau$$

или

$$|D^{\beta_1, q+\beta'} u, S_t| \leqslant c \cdot t \cdot |D^{\beta_1+1, q-1+\beta'} u|_\infty.$$

Аналогично по индукции

$$|D^{\beta_1, q+\beta'} u, S_t| \leqslant \text{const} \cdot t^{m-|\beta_1|} |D^{m, q} u|_\infty.$$

Отсюда вытекает (42).

Итак, из (40) и (42) получаем

$$\rho(t) \leqslant \int_0^t \left(c + M \frac{\lambda'}{\lambda}\right) \rho(\tau)\, d\tau + \sigma(t), \tag{43}$$

где

$$\sigma(t) = c\, |D^{0, q} au|_1\, |\lambda^2 D^\beta D^{0, q} u|_\infty, \tag{44}$$

$$\rho(t) = |\lambda^2 D^\beta D^{0, q} u, S_t|^2_\infty, \tag{45}$$

$$K(\tau) = \text{const} + M \frac{\lambda'}{\lambda}. \tag{46}$$

Замечание. Если бы мы ту же процедуру проделали бы с оператором a', то вместо (43) мы получили бы неравенство (17′) (см. ниже).

Теорема 3. *Задача Коши* (11′) *имеет единственное решение, причем*

$$|D^{m+p, q} u|'_\infty \leqslant \text{const}\, |D^{p, q} a'u|_1, \tag{17′}$$

где

$$|D^{m+p, q} u|'_\infty = \text{ess sup} \left(\int \sum |D^\alpha u|^2 dS_\tau \right)^{1/2},$$

$$[\alpha] \leqslant \beta_1 + p, \ m - \beta_1 + q; \ \beta_1 \geqslant r - 1 + p.$$

Доказательство следует из априорной оценки (17′).

Доказательство теоремы существования мы опускаем (эта теорема доказана в [8], [9] иным методом).

Лемма 7. *Если* $\sigma(\tau)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^{t_0} K(\tau) \frac{\sigma(\tau)}{\rho_0(\tau)} d\tau < \infty, \tag{47}$$

где

$$\rho_0(\tau) = \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} K(t)\,dt\right\} = \mathrm{const}\cdot\lambda^{M}\cdot\exp(\tau), \tag{48}$$

то для ρ, *удовлетворяющего* (43) *и*

$$\rho(t) = \rho_0(t)\,o(1),\ \tau\to+0 \tag{49}$$

справедлива оценка

$$\rho(t) \leqslant \rho_0(t)\int_0^t K(\tau)\frac{\sigma(\tau)}{\rho_0(\tau)}\,d\tau + \sigma(t). \tag{50}$$

Доказательство. См. [3].

Для выполнения (47) достаточно потребовать

$$\int_0^{\tau} \lambda'\lambda^{-M-1}|D^{0,q}au|_1\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\tau}\lambda'\lambda^{\delta-1}\left|\frac{D^{0,q}au}{\lambda^{M+\delta}}\right|_1 d\tau;\ \delta=\mathrm{const},\ 0<\delta<1. \tag{51}$$

Пусть $L^{0,q}_{M_0}$ — подпространство пространства $L^{0,q}$, определяемое условием $(M_0>0)$

$$\left|\frac{D^{0,q}f}{\lambda^{M_0}}\right|_1 = \int_0^t \lambda^{-M_0}(\tau)|D^{0,q}f,\ S_\tau|\,d\tau<\infty. \tag{52}$$

Тогда для выполнения (47) достаточно потребовать

$$au\in L^{0,q}_{M_0}\quad (M_0\equiv M+\delta>0). \tag{53}$$

Упростим (50) $(\sigma(0)=0)$

$$\rho(t)\leqslant\sigma(t)+e^t\lambda^M\int_0^t\frac{K(\tau)\,\sigma(\tau)}{\lambda^M e^{\tau}}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\cdot\lambda^M|\lambda^2 D^3 D^{0,q}u|_\infty\int_0^t\frac{\lambda'}{\lambda^{M+1}}|D^{0,q}au|_1\,d\tau\leqslant$$

$$< c\lambda^M|\lambda^2 D^3 D^{0,q}u|_\infty\left\{\int_0^t ds\left[\lambda^{-M-\delta}(s)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times|D^{0,q}au,\ S_s|\int_s^t\lambda^{\delta-1}\lambda'\,d\tau\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c\lambda^{M+\delta}\,|\lambda^{\Omega} D^{\beta} D^{0,\,q}\, u|_{\infty} \left|\frac{D^{0,\,q}\, au}{\lambda^{M+1}}\right|_1 .$$

Итак

$$\rho(t) \leqslant \text{const}\, \lambda^{2(M+\delta)} \left|\frac{D^{0,\,q}\, au}{\lambda^{M+\delta}}\right|_1^2 . \tag{54}$$

Для доказательства основного неравенства (18) заметим, что задачу Коши

$$au = f,\; u|_{s_0} = \cdots = D_1^m\, u|_{s_0} = 0, \tag{11}$$

где f — достаточно гладкая функция, можно свести к задаче

$$a\hat{u} = \hat{f},\;\; \hat{u}|_{s_0} = \cdots = D_1^m \hat{u}|_{s_0} = 0;\; \hat{f} \in L_{M_0}^{0,\,q} . \tag{55}$$

Пусть u_{i+1} — решения уравнений (с нулевыми данными)

$$a'\, u_{i+1} = f_i,\; i = 0,\, 1, \cdots, \gamma, \tag{56}$$

а f_i определяются как

$$f_0 \equiv f,\; f_i = (a' - a)\, u_i,\; \hat{f} \equiv f_\gamma;\; i = 1, \cdots, \gamma.$$

Вычтем из уравнения (11) уравнение (56) $i = 0, 1, \cdots, \gamma$, при этом мы получим $a\hat{u} = f_\gamma \equiv \hat{f}$, т. е. (55), где $\hat{u} = u - u_1 - \cdots - u_\gamma$.

Если f — достаточно гладкая функция, то γ можно подобрать столь большим, что $f \in L_{M_0}^{0,\,q}$.

Оценим $\hat{f}$:

$$|\hat{f}| = |(a' - a)\, u_\gamma| = \Big|\sum_{\substack{|\alpha| = m+1\\ \alpha_1 < r}} a_\alpha D^\alpha u_\gamma +$$

$$+ \lambda' \sum \tau^{|\beta| - m} \lambda^{\Omega_1} D^\beta u_\gamma\Big|,$$

и так как u_γ — решение уравнения

$$a'\, u_\gamma = f_{\gamma-1},\; u_\gamma|_{s_0} = \cdots = D_1^m\, u_\gamma|_{s_0} = 0,$$

то из (11′)

$$\sum_{\substack{|\alpha| = m+1\\ \alpha_1 < r}} |D^\alpha D^{0,\,q} u_\gamma,\; S|^2 \leqslant |D^{r-1,\, m+2-r+q}\, u_\gamma,\; S| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\; |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1,$$

$$\tau^{|\beta| - m}\, |D^\beta D^{0,\,q}\, u_\gamma,\; S| \leqslant c\, |D^{m,\, q+m}\, u_\gamma|_\infty \leqslant \text{const}\; |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1,$$

откуда

$$|D^{0,\,q} f_\gamma,\; S| \leqslant \text{const} \cdot \lambda'\, |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1 .$$

Далее

$$|\lambda^{-h} D^{0,\,q} f_\gamma|_1 \leqslant \int_0^t \lambda^{-h} \lambda' |\, D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}|_1\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \lambda' \lambda^{\delta-1} \int_0^{\tau} \lambda^{1-\delta-h} |D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1},\ S_\tau|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \lambda^{\delta} \left| \frac{D^{0,\, q+m} f_{\gamma-1}}{\lambda^{h-(1-\delta)}} \right|_1 .$$

По индукции можно показать, что

$$|\lambda^{-h} D^{0,\, q} f_{\gamma}|_1 \leqslant c\, \lambda^{\gamma\delta} \int_0^t \frac{\lambda'}{\lambda^{1-\delta}} \left| \frac{D^{0,\, q+\gamma m} f_0}{\lambda^{h-\gamma(1-\delta)}} \right|_1 d\tau,$$

и за счет большого γ

$$\lambda^{\gamma(1-\delta)-h} \leqslant \mathrm{const} \ \left(\text{при } \frac{h}{1-\delta} \leqslant \gamma < 1 + \frac{h}{1-\delta} \right).$$

Тогда

$$|\lambda^{-h} D^{0,\, q} f_{\gamma}|_1 \leqslant c \cdot \lambda^{(\gamma+1)\delta}\, |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1,$$

так как $\hat{f} = f_{\gamma} \in L_h^{0,\, q}$ выполняется (54), то ($h \equiv M + \delta$)

$$|\lambda^{\varrho} D^{\beta} D^{0,\, q} \hat{u}|_{\infty} \leqslant c\lambda^{M+\delta+|\beta|(\gamma+1)} |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1 \leqslant \mathrm{const}\ \lambda^{2(M+\delta)} |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1.$$

Отсюда при $2(M+\delta) \geqslant \omega_1 + \cdots + \omega_{r-1}$ (без этого предположения в (57) надо D^{β} ($|\beta| = m$) заменить на $D^{r-1,\, m+1-r}$,

$$|D^{m,\, q} \hat{u}|_{\infty} = |D^{\beta} D^{0,\, q} u|_{\infty} \leqslant c\, |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1. \tag{57}$$

Для получения (17) оценим левую часть (57).

$$|D^{m,\, q} \hat{u}|_{\infty} \geqslant |D^{m,\, q} u|_{\infty} - |D^{m,\, q} u_1|_{\infty} - \cdots - |D^{m,\, q} u_{\gamma}|_{\infty},$$

$$|D^{m,\, q} u_l|_{\infty} \leqslant c\, |D^{0,\, q+1} f_{l-1}|_1 \leqslant c\, |D^{0,\, q+\gamma m} f|_1.$$

Из этих двух неравенств и (57) получаем (17). Неравенство (13) вытекает из (17) (см. [2]).

Доказательство теоремы существования 1. Пусть

$$j_0(\tau) = c \exp\left\{ -\frac{1}{1-\tau^2} \right\},\ j_{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon^{-1} j_0\left(\frac{\tau - 2\varepsilon}{\varepsilon} \right),$$

$$f_{\varepsilon} = f * j_{\varepsilon} = \int_0^{t_1} f(\tau, x')\, j_{\varepsilon}(t-\tau)\, d\tau.$$

Так как

$$\operatorname{supp} j_{\varepsilon}(t-\tau) = \{(t, x'),\ |t - \tau - 2\varepsilon| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

то

$$f_{\varepsilon}(\tau, x') \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant t < \varepsilon.$$

Задача Коши

$$a u_{\varepsilon} = f_{\varepsilon},\ u_{\varepsilon}|_{\tau=\varepsilon} = \cdots = D_1^m u_{\varepsilon}|_{\tau=\varepsilon}$$

(a — гиперболический при $\tau \geqslant \varepsilon > 0$) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in H_0^{m+1,\, q-1}$ (см. [2]).

Из (13) имеем

$$|D^{m+1,\, q-1}(u_n - u_m),\ V| \leqslant c\, |D^{0,\, q+\gamma m}(f_n - f_m),\ V| \tag{13'}$$

(мы обозначили $u_n = u_\varepsilon$; $f_n \in H^{0,\, q+\gamma m}$, $n \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$).

Пользуясь свойствами оператора осреднения (см. [1], стр. 68), мы получим, что правая часть (13′) стремится к нулю при $m > n \to \infty$, откуда следует фундаментальность последовательности u_n в $H_0^{m+1,\, q-1}$.

Предел $u = \lim u_n$ будет решением уравнения

$$au = f \in H^{0,\, q+\gamma m},\ u \in H_0^{m+1,\, q-1}\ (V).$$

Единственность и устойчивость следуют из (13). Следствие вытекает из теоремы 1 и [7].

Ереванский государственный университет,
Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.III.1973

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ, Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար։ Ենթադրվում է, որ խարակտերիստիկ թվերը ձգտում են զրոյի սկզբնական հիպերհարթությանը մոտենալիս։

Ապացուցվում է այդ Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ հավասարման ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշակի պայմանների։

A. B. NERSESIAN, G. R. HOVHANISIAN. *On Cauchy's problem for weakly hyperbolic equations* (summary)

In the paper the Cauchy's problem for weakly hyperbolic equations with initial conditions given on the hyperplane of degeneration is considered. The degeneration occures as a result of vanishing of some characteristic numbers on the initial hyperplane. The correctness of the Cauchy's problem, under some conditions on the low order terms is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961.
2. *Л. Гординг.* Прямое решение задачи Коши, Сб. пер. „Математика“, 2: 1, 1958, 81—95.
3. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Ученые записки ЕГУ, 3 (109), 1968.
4. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения с данными на линии вырождения, Диф. уравнения, 4, № 9, 1968, 16—58.
5. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—802.
6. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, № 2, 1968, 79—100.

7. *В. М. Петков*. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, ДАН СССР, 206, № 2, 1972.

8. *R. Courant* and *A. Lax*. Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, Communs. Pure and Appl. Math., 8, 1955, 497—502.

9. *A. Lax*. On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Communs. Pure and Appl. Math., 9, № 2, 1956, 135—169.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS