ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածների ծավալը, որպես կանոն, չպետք է գերազանցի մեկ տպագրական մամուլը (այսինքն՝ ոչ ավել քան տեքստի 24 մեքենագրած էջ)։

Մեկ տպագրական մամուլը գերազանցող ծավալով հոդվածներն ընդունվում են հրապարակման բացառիկ դեպքերում՝ խմբագրական կոլեգիայի հատուկ որոշմամբ։

2. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն, անգլերեն և ռուսերեն լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

3. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները՝ շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

4. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

5. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը. հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

6. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

7. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

8. Հոդվածը մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

9. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

10. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

11. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Объем статей, как правило, не должен превышать 1 печатного листа (то есть не более 24 страниц текста на машинке). Статьи, по объему превышающие 1 печатный лист, принимаются к опубликованию в исключительных случаях, по особому решению Редколлегии.

2. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском, английском и русском языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

3. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

4. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

5. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

6. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

7. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

8. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

9. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

10. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

11. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24. Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գին 50 կ.
ЦЕНА 50 к.
Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The manuscripts normally should not comprise more than 24 pages of typescript. More extensive manuscripts require special decision of the Editerial Board for their publication.

2. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

3. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

4. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

5. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

6. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

7. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

8. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

9. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

10. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

11. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

А. И. ПЕТРОСЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ В БИЦИЛИНДРЕ

Введение

Бергману [1] принадлежит идея каждой вещественной дважды гармонической функции $u(z_1, z_2)$ в бицилиндре ставить в соответствие комплексную функцию $f(z_1, z_2)=u(z_1, z_2)+iv(z_1, z_2)$ следующим образом:

1) при фиксированном z_2 функция $f(z_1, z_2)$ аналитична по z_1;

2) $v(0, z_2)\equiv 0$.

Полученное множество функций, названное им расширенным классом комплексных функций, можно изучать методами теории потенциала, так как задача Дирихле с заданными значениями на остове бицилиндра в классе всех дважды гармонических функций разрешима. Если условие 2) заменить на условие

2^1) $f(0, z_2)$ аналитична,

то полученный класс функций, который будем называть классом полуаналитических функций, уже является расширением класса аналитических функций в том смысле, что для бигармонической функции $u(z_1, z_2)$ соответствующая функция $f(z_1, z_2)$ аналитична.

Основным результатом статьи является распространение на класс полуаналитических функций теоремы М. М. Джрбашяна об интегральном представлении по существу произвольных гармонических в круге функций [2]. Эта теорема является существенным расширением известной теоремы Герглотца и сводится к ней в специальном случае.

В работах М. М. Джрбашяна введен обобщенный оператор типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$, с помощью которого построена теория факторизации функций, мероморфных в круге, а также получены обобщенные интегральные формулы Коши, Шварца и Пуассона. Напомним некоторые определения и результаты из работы [2].

Рассматривается множество Ω положительных и непрерывных на $[0, 1)$ функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\omega(0)=1, \int_0^1 \omega(x)\,dx<+\infty.$$

Каждой функции $\omega(x)\in\Omega$ ставится в соответствие последовательность положительных чисел

$$\Delta(0)=1,\ \Delta(k)=k\int\limits_0^1 \omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,\ 2,\cdots). \tag{1}$$

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$ оператор $L^{(\omega)}$ определяется следующим образом:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=-\frac{d}{dr}\left\{r\int\limits_0^1 \varphi(\tau r)\,dp(\tau)\right\},\ r\in(0,1),$$

где функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0)=1,\ p(\tau)=\tau\int\limits_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx.$$

Отметим, что на степенные ряды оператор $L^{(\omega)}$ действует следующим образом:

$$L^{(\omega)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(re^{i\varphi})^k\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta(k)\,a_k\,(re^{i\varphi})^k.$$

Затем строятся функции, аналитические в круге $|z|<1$

$$C(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta(k)},\quad S(z;\ \omega)=2C(z;\ \omega)-1, \tag{2}$$

являющиеся аналогами ядер Коши и Шварца. При этом аналог интегральной формулы Шварца имеет вид:

$$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho}\,e^{-i\theta};\ \omega\right)\mathrm{Re}\,f_{(\omega)}\,(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{3}$$

где $0<\rho<1$ и $f_{(\omega)}(re^{i\theta})=L^{(\omega)}\{f(re^{i\theta})\}$.

Пусть R_ω — класс аналитических в круге $|z|<1$ функций, для которых выполняется условие

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int\limits_0^{2\pi}|\mathrm{Re}\,f_{(\omega)}\,(re^{i\varphi})|\,d\varphi\right\}<+\infty.$$

В работе [2] установлена следующая теорема о представлении класса R_ω.

Теорема А (М. М. Джрбашян). Класс R_ω совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z)=iC+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(ze^{-i\theta};\ \omega)\,d\psi(\theta)\qquad(|z|<1),$$

где $\operatorname{Im} C = 0$, $\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечной полной вариацией на $[0, 2\pi]$.

Для распространения интегрального представления (3) на случай функций n комплексных переменных следует, очевидно, вместо одной функции $\omega(x)$ взять систему из n функций $\omega_1(x), \cdots, \omega_n(x)$ и применить последовательно операторы $L^{(\omega_1)}, \cdots, L^{(\omega_n)}$ соответственно по каждой переменной $z_1, \cdots, z_n$. Таким образом, легко можно получить аналог формулы (3), что и было сделано в заметке [3].

Однако, получаемое при этом n-мерное ядро Шварца обладает тем недостатком, что оно не положительно и, более того, его вещественная часть по модулю в среднем не ограничена, поэтому аналог теоремы A с таким ядром неверен. В настоящей работе в случае пространства C^2 вводится новое ядро с положительной вещественной частью, причем это ядро годится для представления не только аналитических, но и полуаналитических функций.

§ 1. Полуаналитические функции

Пусть C^2 — двумерное комплексное пространство; $z = (z_1, z_2)$ — точка этого пространства; $B = \{z \in C^2: |z_i| < 1, \quad i = 1, 2\}$ — единичный бицилиндр; $T = \{z \in C^2: |z_i| = 1, \ i = 1, 2\}$ — остов этого бицилиндра. Функция $u(z_1, z_2) = u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, определенная в B, называется бигармонической, если выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} \equiv 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} \equiv 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1\, \partial y_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial y_1} \equiv 0. \tag{1.3}$$

Если же выполняются лишь условия (1.1) и (1.2), то функция $u(z_1, z_2)$ называется дважды гармонической.

Определение. Функцию $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$, определенную в B, назовем полуаналитической, если

а) $u(z_1, z_2)$ — дважды гармоническая;

в) при фиксированном z_2, $|z_2| < 1$ функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в круге $|z_1| < 1$;

с) $f(0, z_2)$ аналитична в круге $|z_2| < 1$.

Связь между аналитичностью и полуаналитичностью дается в следующей лемме.

Лемма. *Всякая полуаналитическая функция $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$, вещественная часть $u(z_1, z_2)$ которой бигармонична, является аналитической функцией.*

Доказательство. Известно, (см., например, [4]), что всякая бигармоническая в бицилиндре функция $u(z_1, z_2)$ является вещественной частью аналитической функции $\tilde{f}(z_1, z_2)$. Итак, $\tilde{f}(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + i\tilde{v}(z_1, z_2)$. В силу условия в) при фиксированном z_2 функции $f(z_1, z_2) - \tilde{f}(z_1, z_2) = i[v(z_1, z_2) - \tilde{v}(z_1, z_2)]$, вещественная часть которой есть тождественный нуль, аналитична в круге $|z_1| < 1$.

Поэтому

$$f(z_1, z_2) - \tilde{f}(z_1, z_2) = i\varphi(z_2), \tag{1.4}$$

где $\varphi(z_2)$ — некоторая вещественная функция. Далее, из (1.4) и условия с) следует, что функция $i\varphi(z_2) = f(0, z_2) - \tilde{f}(0, z_2)$ аналитична в $|z_2| < 1$, т. е. $\varphi(z_2) \equiv C$, где C — константа. Отсюда и из (1.4) имеем

$$f(z_1, z_2) = \tilde{f}(z_1, z_2) + iC,$$

что и доказывает лемму.

Пусть $\omega_1(x), \omega_2(x) \in \Omega$; $\{\Delta_1(k)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\Delta_2(k)\}_{k=0}^{\infty}$ — соответствующие этим функциям по формуле (1) последовательности чисел. Пусть, далее

$$S(z; \omega) = P(z; \omega) + iQ(z; \omega)$$

— обобщенное ядро Шварца, определяемое по формуле (2). Введем функцию

$$\tilde{S}(z_1, z_2; \omega) = S(z_1; \omega_1)\, P(z_2; \omega_2) + iQ(z_2; \omega_2), \tag{1.5}$$

где для краткости используется обозначение $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Следующая теорема дает интегральное представление для полуаналитических функций.

Теорема 1. *Пусть $f(z_1, z_2)$ — полуаналитическая функция, ρ_1 и ρ_2 — произвольные числа из интервала* (0,1). *Тогда при любом $|z_1| < \rho_1$, $|z_2| < \rho_2$ справедливо равенство*

$$f(z_1, z_2) = i\,\mathrm{Im}\, f(0, 0) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\vartheta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\vartheta_2}; \omega\right) \mathrm{Re}\, f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\vartheta_1}, \rho_2 e^{i\vartheta_2})\, d\vartheta_1 d\vartheta_2, \tag{1.6}$$

где

$$f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) = L^{(\omega)}\{f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})\}. \tag{1.7}$$

Здесь оператор $L^{(\omega_1)}$ действует как на функцию от r_1, а $L^{(\omega_2)}$ — как на функцию от r_2.

Доказательство. При фиксированном z_2, $|z_2| < 1$ функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в круге $|z_1| < 1$. По теореме 3 М. М. Джрбашяна [2] имеем

$$f(z_1, z_2) = i\,\mathrm{Im}\, f(0, z_2) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(\frac{z_1}{\rho_1}\, e^{-i\theta_1};\ \omega_1\right) L^{(\omega_2)}\,[\mathrm{Re}\, f(\rho_1 e^{i\theta_1},\ z_2)]\, d\theta_1. \tag{1.8}$$

Далее, при фиксированном $\rho_1 e^{i\theta_1}$ функция $L^{(\omega)_2}\,\{\mathrm{Re}\, f(\rho_1 e^{i\theta_1}, z_2)\}$ гармонична в $|z_2|<1$. По теореме 4 из [2]

$$L^{(\omega_2)}\,[\mathrm{Re}\, f(\rho_1 e^{i\theta_1},\ z_2)] =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z_2}{\rho_2}\, e^{-i\theta_2};\ \omega_2\right) \mathrm{Re}\, f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1},\ \rho_2 e^{i\theta_2})\, d\theta_2. \tag{1.9}$$

Приравнивая мнимые части в обобщенной формуле Шварца, получим:

$$\mathrm{Im}\, f(0, z_2) = \mathrm{Im}\, f(0, 0) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2}\, e^{-i\theta_2};\ \omega_2\right) L^{(\omega_1)}\,\{\mathrm{Re}\, f(0,\ \rho_2 e^{i\theta_2})\}\, d\theta_2. \tag{1.10}$$

Далее, написав формулу (1.9) для функции $L^{(\omega_2)}\,\{\mathrm{Re}\, f(z_1, \rho_2 e^{i\theta_2})\}$ при фиксированном $\rho_2 e^{i\theta_2}$ и, положив в ней $z_1=0$, будем иметь

$$L^{(\omega_1)}\{\mathrm{Re}\, f(0,\ \rho_2 e^{i\theta_2})\} =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\omega_1)}\,\{L^{(\omega_2)}\,\{\mathrm{Re}\, f(\rho_1 e^{i\theta_1},\ \rho_2 e^{i\theta_2})\}\}\, d\theta_1. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) получаем

$$\mathrm{Im}\, f(0, z_2) = \mathrm{Im}\, f(0, 0) +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\left(\frac{z_2}{\rho_2}\, e^{-i\theta_2};\ \omega_2\right) \mathrm{Re}\, f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1};\ \rho_2 e^{i\theta_2})\, d\theta_1 d\theta_2. \tag{1.12}$$

Подставляя в правую часть равенства (1.8) соотношения (1.9) и (1.12), получим утверждение теоремы.

Рассмотрим частный случай теоремы 1, когда $\omega_1(x)\equiv 1$, $\omega_2(x)\equiv 1$. Формула (1.6) тогда примет вид

$$f(z_1, z_2) = i\,\mathrm{Im}\, f(0, 0) +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1},\ \frac{z_2}{\rho_2}\, e^{-i\theta_2}\right) \mathrm{Re}\, f(\rho_1 e^{i\theta_1},\ \rho_2 e^{i\theta_2})\, d\theta_1 d\theta_2, \tag{1.13}$$

где положено $\widetilde{S}(z_1, z_2) \equiv \bar{S}(z_1, z_2; 1)$.

Формула (1.13) является аналогом формулы Шварца для полуаналитических функций.

Теорема 2. *Мнимая часть полуаналитической функции $f(z_1, z_2)=u(z_1, z_2)+iv(z_1, z_2)$ есть функция дважды гармоническая.*

Доказательство. Отделив мнимые части в формуле (1.13), получим

$$v(z_1, z_2) = v(0, 0)+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \tilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) \operatorname{Re} f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})\, d\theta_1 d\theta_2. \quad (1.14)$$

Согласно определению (1.5) ядра $\tilde{S}$ имеем

$$\operatorname{Im} \tilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) = P\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right) Q\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}\right) + Q\left(\frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right). \quad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что $\operatorname{Im} \tilde{S}\left(\frac{z_1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}, \frac{z_2}{\rho_2} e^{-i\theta_2}\right)$ есть функция, дважды гармоническая в бицилиндре $\{|z_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_2\}$. Отсюда и из формулы (1.14), учитывая, что ρ_1 и ρ_2—произвольные числа из интервала (0,1), получаем утверждение теоремы.

§ 2. Представление некоторых классов функций

Пусть $\omega_1(x)$, $\omega_2(x) \in \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Обозначим через A_ω — множество полуаналитических в бицилиндре B функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<\rho_1, \rho_2<1} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})|\, d\theta_1 d\theta_2 < +\infty. \quad (2.1)$$

В следующей теореме дается представление класса A_ω.

Теорема 3. *Класс A_ω совпадает с множеством функций, имеющих вид*

$$f(z_1, z_2) = iC + \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega)\, d\mu(\theta_1, \theta_2), \quad (2.2)$$

где $\operatorname{Im} C = 0$, μ — *произвольная конечная мера на торе T.*

Доказательство. Пусть $f(z_1, z_2) \in A_\omega$. Тогда для фиксированных чисел ρ_1 и ρ_2 $(0<\rho_1, \rho_2 < 1)$ имеет место формула (1.6). Рассмотрим семейство мер на остове T

$$d\mu_{\rho_1\rho_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})\, d\theta_1 d\theta_2. \quad (2.3)$$

Полные вариации этих мер в силу условия (2.1) равномерно ограничены. По теореме Алаоглу [5] существует последовательность мер

$\mu_n = \mu_{\rho_1^{(n)}, \rho_2^{(n)}}$, $\rho_1^{(n)} \to 1$, $\rho_2^{(n)} \to 1$, слабо сходящаяся к некоторой конечной мере μ, т. е. для любой непрерывной на T функции $F(\theta_1, \theta_2)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_T F(\theta_1, \theta_2)\, d\mu_n(\theta_1, \theta_2) = \int_T F(\theta_1, \theta_2)\, d\mu(\theta_1, \theta_2).$$

В частности, при фиксированном $z=(z_1, z_2)$, $|z_1|<1$, $|z_2|<1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega)\, d\mu_n(\theta_1, \theta_2) =$$

$$= \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega)\, d\mu(\theta_1, \theta_2). \tag{2.4}$$

С учетом (2.3) напишем интегральную формулу (1.6) для точки $(z_1 \rho_1^{(n)}, z_2 \rho_2^{(n)})$ в виде

$$f(z_1 \rho_1^{(n)}, z_2 \rho_2^{(n)}) = i \operatorname{Im} f(0, 0) +$$

$$+ \int_T \tilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega)\, d\mu_n(\theta_1, \theta_2). \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует представление (2.2). Докажем обратное. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ допускает представление (2.2). Покажем, что $f \in A_\omega$. Учитывая, что $L^{(\omega)}\{\tilde{S}(z_1, z_2; \omega)\} \equiv \tilde{S}(z_1, z_2)$ и $\operatorname{Re} \tilde{S}(z_1, z_2) = P(z_1)\, P(z_2)$, где $P(z) = \operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z}$ — ядро Пуассона, применим оператор $L^{(\omega)}$ к равенству (2.2) и, отделяя вещественные части, получим

$$\operatorname{Re} f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) =$$

$$= \int_T P(r_1 e^{i(\varphi_1-\theta_1)})\, P(r_2 e^{i(\varphi_2-\theta_2)})\, d\mu(\theta_1, \theta_2),$$

где $r_1 e^{i\varphi_1} = z_1$, $r_2 e^{i\varphi_2} = z_2$. Отсюда

$$|\operatorname{Re} f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| \leqslant$$

$$\leqslant \int_T P(r_1 e^{i(\varphi_1-\theta_1)})\, P(r_2 e^{i(\varphi_2-\theta_2)})\, |d\mu(\theta_1, \theta_2)|. \tag{2.6}$$

Проинтегрировав неравенство (2.6) и применив теорему Фубини, получим

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f_{(\omega)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|\, d\varphi_1 d\varphi_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_T \left\{ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(r_1 e^{i(\varphi_1-\theta_1)}\right) P\left(r_2 e^{i(\varphi_2-\theta_2)}\right) d\varphi_1 d\varphi_2 \right\} d\mu(\theta_1, \theta_2) =$$

$$= 4\pi^2 \int\limits_T |d\mu(\theta_1, \theta_2)| < +\infty,$$

т. е. функция f принадлежит классу A_∞. Теорема доказана.

В частном случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, теорема 3 является аналогом теоремы Герглотца для полуаналитических функций.

Теорема 4. *Для того чтобы ассоциированная с мерой μ функция*

$$f(z_1, z_2) = i \operatorname{Im} f(0,0) + \int\limits_T \tilde{S}\left(z_1 e^{-i\theta_1},\ z_2 e^{-i\theta_2};\ \omega\right) d\mu(\theta_1, \theta_2) \tag{2.7}$$

была бы аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_T e^{-in\theta_1} e^{ik\theta_2} d\mu(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad (n, k = 1, 2, \cdots). \tag{2.8}$$

Доказательство. По определению (1.5) ядра $\tilde{S}$ имеем

$$\tilde{S}\left(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega\right) = S\left(z_1 e^{-i\theta_1}; \omega_1\right) P\left(z_2 e^{-i\theta_2}; \omega_2\right) + iQ\left(z_2 e^{-i\theta_2}; \omega_2\right) =$$

$$= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n e^{-in\theta_1}}{\Delta_1(n)} - 1\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k e^{-ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_2^k e^{ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} - 1\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k e^{-ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_2^k e^{ik\theta_2}}{\Delta_2(k)} = \tag{2.9}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^n z_2^k e^{-in\theta_1} e^{-ik\theta_2}}{\Delta_1(n)\Delta_2(k)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_1^n \bar{z}_2^k e^{-in\theta_1} e^{ik\theta_2}}{\Delta_1(n)\Delta_2(k)} - 1.$$

Это разложение сходится равномерно относительно $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \in T$ при любом фиксированном $z = (z_1, z_2) \in B$. Подставляя в (2.7) разложение (2.9), получим

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z_1^n z_2^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,-k} z_1^n \bar{z}_2^k - \frac{a_0}{2}, \tag{2.10}$$

где

$$a_{n,k} = \frac{2}{\Delta_1(n)\Delta_2(k)} \int\limits_T e^{-in\theta_1} e^{-ik\theta_2} d\mu(\theta_1, \theta_2) \tag{2.11}$$

$(n = 0, 1, \cdots,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Из разложения (2.10) ясно, что функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в том и только в том случае, если

$$a_{n,-k}=0 \quad (n,\ k=1,\ 2,\cdots). \tag{2.12}$$

Условия (2.12) с учетом (2.11) эквивалентны (2.8). Теорема доказана.

Пусть функция $f(z_1,\ z_2)$ аналитична в бицилиндре B. Величину

$$T_\omega(r_1,\ r_2;\ f)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\omega)}_{(+)}\{\log|f(r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2})|\}\, d\theta_1,\ d\theta_2,$$

где

$$L^{(\omega)}_{(+)}\{\varphi(r)\}=\max[0,\ L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}],$$

по аналогии с одномерным случаем (см. [6]) назовем ω-характеристикой функции $f(z_1,\ z_2)$. Обозначим через N^0_ω множество функций, аналитических в B и не обращающихся в нуль, которые имеют ограниченную характеристику, т. е. для которых выполняется условие

$$\sup_{0<r_1,\ r_2<1} T_\omega(r_1,\ r_2;\ f)<+\infty.$$

Теорема 5. *Класс N^0_ω совпадает с множеством функций (z_1, z_2), представимых интегральной формулой*

$$f(z_1,\ z_2)=\exp\left\{iC+\int_T \widetilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1},\ z_2 e^{-i\theta_2};\ \omega)\, d\mu(\theta_1,\ \theta_2)\right\}, \tag{2.13}$$

где $\operatorname{Im} C=0$, μ — *конечная мера на T, удовлетворяющая условию* (2.8).

Доказательство. Пусть функция $f(z_1;\ z_2)$ аналитична и не обращается в нуль в бицилиндре B. Тогда функция $\log f(z_1,\ z_2)$ регулярна в B. Покажем, что условия

$$\sup_{0<r_1,\ r_2<1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\omega)}_{(+)}\{\log|f(r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2})|\}\, d\theta_1 d\theta_2<+\infty \tag{2.14}$$

и

$$\sup_{0<r_1,\ r_2<1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |L^{(\omega)}\{\log|f(r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2})|\}|\, d\theta_1 d\theta_2<+\infty \tag{2.15}$$

эквивалентны. В самом деле, напишем формулу (1.6) для функции $\log f(z_1,\ z_2)$ и, подставив $z_1=z_2=0$, получим

$$\log f(0,\ 0)=i\arg f(0,\ 0)+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\omega)}\{\log|f(\rho_1 e^{i\theta_1},\ \rho_2 e^{i\theta_2})|\}\, d\theta_1 d\theta_2. \tag{2.16}$$

Используя очевидное равенство

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\} = 2L^{(\omega)}_{(+)}\{\varphi(r)\} - |L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}|,$$

из соотношения (2.16) получаем

$$\log f(0, 0) = i \arg f(0, 0) + \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L^{(\omega)}_{(+)}\{\log|f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})|\}\, d\theta_1 d\theta_2 -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |L^{(\omega)}\{\log f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2})\}|\, d\theta_1 d\theta_2.$$

Отсюда ясно, что условия (2.14) и (2.15) выполняются одновременно По теореме 3 функция $\log f(z_1, z_2)$ представляется интегралом

$$\log f(z_1, z_2) = iC + \int\limits_T \widetilde{S}(z_1 e^{-i\theta_1}, z_2 e^{-i\theta_2}; \omega)\, d\mu(\theta_1, \theta_2) \qquad (2.17)$$

в том и только в том случае, если выполнено условие (2.15), которое, по доказанному выше, эквивалентно (2.14), т. е. если $f \in N^0_\omega$. Из (2.17) очевидным образом следует (2.13). Так как функция $\log f(z_1, z_2)$ аналитична, то, в силу теоремы 4, соответствующая мера μ удовлетворяет условию (2.8).

Отметим, что в теореме 3 дано интегральное представление по существу произвольных полуаналитических функций. Это следует из того, что класс A_ω можно сделать сколь угодно широким, выбрав соответствующим образом функцию ω. Точнее, справедлива следующая

Теорема 6. *Для произвольной полуаналитической функции f существует функция $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ такая, что $f \in A_\omega$.*

Доказательство этой теоремы идентично доказательству для одномерного случая, приведенного в [6].

В заключение автор выражает благодарность профессору М. М. Джрбашяну за полезные обсуждения и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1973

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Երկգլանում ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացման մասին (*ամփոփում*)

C^2 *տարածության մեջ երկգլանում որոշված կիսաանալիտիկ ֆունկցիաների համար ստացված է Հերգլոտցի թեորեմային, ինչպես նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի որոշ արդյունքների անալոգը։*

A. I. PETROSIAN. *On integral representation of function in bicylinder* (summary)

Analogues of Herglotz's theorem as well as of some results of Dźrbašian for semi-analytic function in the bicylinder of the C^2 space are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Bergman.* The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc., 1970, 214—215.
2. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 5, 1968, 1075—1111.
3. *И. И. Баврин.* Обобщенные интегральные представления в случае полицилиндра, ДАН СССР, 196, № 1, 1971, 9—11.
4. *Б. В. Шабат.* Введение в комплексный анализ, Изд. „Наука", 1969, стр. 478.
5. *Н. Данфорд* и *Дж. Т. Шварц.* Линейные операторы, том 1, Изд. ИЛ, 1962, стр. 459.
6. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121), вып. 4, 1969, 517—615.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

К. А. АБГАРЯН, В. В. ВАРДАНЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При анализе процессов в линейных системах автоматического управления и, в частности, при определении реакций системы на те или иные входные воздействия, применяются динамические характеристики систем—импульсная переходная функция и передаточная функция.

Рассмотрим нестационарную многомерную линейную систему, описываемую векторно-матричным уравнением

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)\,x + H(t)\,u, \tag{1}$$

где x — столбцовая матрица выходных сигналов $x_1, x_2, \cdots, x_n$, u — столбцовая матрица входных сигналов $u_1, u_2, \cdots, u_l$, A, B, H — матрицы динамических коэффициентов системы с размерами $n \times n$, $n \times n$ и $n \times l$ соответственно.

1. Реакция предварительно не возбужденной системы на входной сигнал в виде импульсной функции δ (дельта-функции) называется импульсной переходной функцией (или весовой функцией). Если на j-ый вход предварительно невозбужденной системы в момент времени ξ подается сигнал в виде дельта-функции $\delta(t-\xi)$, то выходной сигнал на i-ом выходе в момент времени t, обозначаемый $g_{ij}(t, \xi)$, будет импульсной переходной функцией. Матрица $G(t, \xi) = (g_{ij}(t, \xi))$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, l)$ называется матрицей импульсных переходных функций.

Таким образом, по определению $G(t, \xi)$ есть решение уравнения

$$A(t)\frac{dG}{dt} = B(t)\,G + H(t)\,\delta(t-\xi) \tag{2}$$

при начальном условии

$$G(\xi - 0, \xi) = 0. \tag{3}$$

Имея $G(t, \xi)$, можно найти решение (1) по формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Можно показать, что $G(t, \xi)$ можно найти как решение однородного уравнения

$$A(t)\frac{dG}{dt}=B(t)G \qquad (5)$$

при неоднородных начальных условиях

$$G(\xi,\ \xi)=A^{-1}(\xi)H(\xi), \qquad (6)$$

а это решение, как известно, имеет вид

$$G(t,\ \xi)=X(t)X^{-1}(\xi)A^{-1}(\xi)H(\xi), \qquad (7)$$

где $X(t)$—фундаментальная матрица однородного уравнения

$$A(t)\frac{dx}{dt}=B(t)x. \qquad (8)$$

Таким образом, для построения $G(t,\ \xi)$ требуется знание фундаментальной матрицы $X(t)$ уравнения (8). В случае произвольного дифференциального уравнения (8) определение $X(t)$ сопряжено со значительными трудностями, и не всегда эта матрица может быть выражена в замкнутой форме. Поэтому, имея в виду произвольную линейную нестационарную систему, можно лишь говорить о приближенном построении фундаментальной матрицы и, тем самым, импульсных переходных функций.

Возможны различные пути построения приближенного выражения импульсных переходных функций, и существующая литература содержит описание некоторых способов такого построения [1]. Ниже приводится один метод построения выражения для $G(t,\ \xi)$, основанный на использовании разложения в ряд фундаментальной матрицы $X(t)$. Идея этого метода приведена в [2], согласно которому построение приближенного выражения для $X(t)$ сводится к следующему.

Пусть собственные значения матрицы $U(t)=A^{-1}(t)B(t)$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$|U(t)-\lambda E_n|=0 \qquad (9)$$

на сегменте $t\in[0,\ T]$ разбиты на p непересекающиеся группы $\lambda_1^{(\sigma)},\ \lambda_2^{(\sigma)},\cdots,\ \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}\left(\sigma=1,\ 2,\cdots,\ p;\ \sum\limits_{\sigma=1}^{p}k_\sigma=n\right)$ так, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)}(t)-\lambda_j^{(s)}(t)|\geqslant c>0. \qquad (10)$$

$$(\sigma\neq s,\ i=1,\ 2,\cdots,\ k_\sigma;\ j=1,\ 2,\cdots,\ k_s;\ t\in[0,\ T]).$$

Тогда можно построить [3] квадратные матрицы K и $M=K^{-1}$ так, что U представляется в виде $U=K\Lambda M$, где Λ—квазидиагональная матрица, K и M—коагулированные матрицы

$$\Lambda=\mathrm{diag}\,(\Lambda_1,\ \Lambda_2,\cdots,\ \Lambda_p),$$

$$K=(K_1,\ K_2,\cdots,\ K_p),\ M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\\ \cdots\\ M_p\end{pmatrix},$$

а K_σ, Λ_σ, M_σ—матрицы с размерами $n\times k_\sigma$, $k_\sigma\times k_\sigma$, $k_\sigma\times n$ соответственно. При этом фундаментальная матрица уравнения (8) представляется в виде

$$X(t)=\widetilde{K}Y, \tag{11}$$

где $\widetilde{K}=(\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2,\cdots, \widetilde{K}_p)$, $Y=\operatorname{diag}(Y_1, Y_2,\cdots, Y_p)$, а Y_σ являются фундаментальными матрицами подсистем

$$\frac{dy_\sigma}{dt}=\widetilde{\Lambda}_\sigma y_\sigma. \tag{12}$$

Матрицы $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{\Lambda}_\sigma$ представляются асимптотическими рядами

$$\widetilde{K}_\sigma=K_\sigma+K_\sigma^{[1]}+K_\sigma^{[2]}+\cdots, \tag{13}$$

$$\widetilde{\Lambda}_\sigma=\Lambda_\sigma+\Lambda_\sigma^{[1]}+\Lambda_\sigma^{[2]}+\cdots, \tag{14}$$

где $K_\sigma^{[k]}$, $\Lambda_\sigma^{[k]}$ $(k=1, 2,\cdots)$ определяются рекуррентным соотношением

$$\Lambda_\sigma^{[k]}=-M_\sigma\left(\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{dt}+\sum_{l=1}^{k-1}K_\sigma^{[l]}\Lambda_\sigma^{[k-l]}\right), \tag{15}$$

$$K_\sigma^{[k]}=kQ_\sigma^{[k]}, \tag{16}$$

$$(\Lambda_\sigma^{[0]}\equiv\Lambda_\sigma,\ K_\sigma^{[0]}\equiv K_\sigma).$$

Здесь $Q_\sigma^{[k]}$—коагулированная матрица с размерами $n\times k_\sigma$, субматрицы которой $Q_{s\sigma}^{[k]}$ размерами $k_s\times k_\sigma$ определяются из соотношений

$$Q_{\sigma\sigma}^{[k]}=0, \tag{17}$$

$$\Lambda_s Q_{s\sigma}^{[k]}=Q_{s\sigma}^{[k]}\Lambda_\sigma+M_s\left(\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{dt}+\sum_{l=1}^{k-1}K_\sigma^{[l]}\Lambda_\sigma^{[k-l]}\right), \tag{18}$$

$$(s\neq\sigma)$$

причем равенства (18) однозначно определяют $Q_{s\sigma}^{[k]}$, так как согласно (10) матрицы Λ_s и Λ_σ не имеют общих собственных чисел.

Рассмотрим частный случай, когда матрица U имеет простые корни.

В этом случае матрица Λ будет диагональной

$$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n),$$

субматрицы $\Lambda_\sigma^{[k]}$, $\widetilde{\Lambda}_\sigma$ будут числами $\lambda_\sigma^{[k]}$, $\widetilde{\lambda}_\sigma$, матрицы $Q_\sigma^{[k]}$, $K_\sigma^{[k]}$, $\widetilde{K}$ будут столбцовыми с размерами $n\times1$, матрицы M_σ — строчными с размерами $1\times n$, субматрицы $Q_{s\sigma}^{[k]}$ — числами $q_{s\sigma}^{[k]}$. Вместо (18) будем иметь

$$q_{s\sigma}^{[k]}=\frac{1}{\lambda_s-\lambda_\sigma}M_s\left(\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{dt}+\sum_{l=1}^{k-1}K_\sigma^{[l]}\lambda_\sigma^{[k-l]}\right), \tag{19}$$

а вместо подсистем (10) будем иметь отдельные уравнения

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \tilde{\lambda}_\sigma y_\sigma \ (\sigma = 1, 2, \cdots, n). \tag{20}$$

Фундаментальные матрицы Y_σ для уравнений (20) будут скалярами

$$Y_\sigma = \exp \int \tilde{\lambda}_\sigma (t)\, dt. \tag{21}$$

В качестве примера рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, представленную скалярным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2q}{dt^2} + a_1(t)\frac{dq}{dt} + a_2(t)\, q = u. \tag{22}$$

Записав это уравнение в векторно-матричной форме, имеем

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\, x + H(t)\, u, \tag{23}$$

где $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} q \\ \frac{dq}{dt} \end{pmatrix}$.

Корни характеристического уравнения (9) будут

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Пусть при $t \in [0, T]$ имеем $a_1^2 - 4a_2 \neq 0$, тем самым $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда будем иметь

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (15)—(19) имеем

$$K^{[1]} = a^2\begin{pmatrix} \dot\lambda_1 & \dot\lambda_2 \\ \dot\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\dot\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{[1]} = a\begin{pmatrix} -\dot\lambda_1 & 0 \\ 0 & \dot\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{[2]} = a^3\begin{pmatrix} -\dot\lambda_1\dot\lambda_2 & 0 \\ 0 & \dot\lambda_1\dot\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$K^{[2]} = a^4\begin{pmatrix} 3\dot\lambda_1^2 - \dot\lambda_1\dot\lambda_2 - \frac{1}{a}\ddot\lambda_1 & 3\dot\lambda_2^2 - \dot\lambda_1\dot\lambda_2 + \frac{1}{a}\ddot\lambda_2 \\ \lambda_2\left(3\dot\lambda_1^2 - \dot\lambda_1\dot\lambda_2 - \frac{1}{a}\ddot\lambda_1\right) & \lambda_1\left(3\dot\lambda_2^2 - \dot\lambda_1\dot\lambda_2 + \frac{1}{a}\ddot\lambda_2\right) \end{pmatrix},$$

где $a = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$, а точка сверху означает d/dt. Останавливаясь на втором приближении в рядах (13) и (14), получим

$$\tilde{K} \approx K + K^{[1]} + K^{[2]} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde\Lambda \approx \Lambda + \Lambda^{[1]} + \Lambda^{[2]} = \begin{pmatrix} \tilde\lambda_1 & 0 \\ 0 & \tilde\lambda_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde\lambda_1 = \lambda_1 - a\,\dot\lambda_1 - a^3\dot\lambda_1\dot\lambda_2, \tag{24}$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 + a\dot{\lambda}_2 + a^3\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2, \tag{24}$$

$$k_{11} = 1 + a^2\dot{\lambda}_1 - a^3\ddot{\lambda}_1 + 3a^4\dot{\lambda}_1^2 - a^4\dot{\lambda}_1\lambda_2,$$

$$k_{12} = 1 + a^2\dot{\lambda}_2 + a^3\ddot{\lambda}_2 + 3a^4\dot{\lambda}_2^2 - a^4\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2. \tag{25}$$

Коэффициенты же k_{21} и k_{22} выражаются через k_{11} и k_{12} соотношениями

$$k_{21} = k_{11}\tilde{\lambda}_1 + \frac{dk_{11}}{dt},$$

$$k_{22} = k_{12}\tilde{\lambda}_2 + \frac{dk_{12}}{dt}. \tag{26}$$

Формулы (26) выражают тот факт, что вторая строка решения уравнения (23) является производной первой строки. Фундаментальная матрица решения уравнения (23) будет

$$X(t) = \bar{K}Y = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\int\tilde{\lambda}_1\,dt & 0 \\ 0 & \exp\int\tilde{\lambda}_2\,dt \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Обратная матрица будет

$$X^{-1}(\xi) = Y^{-1}\bar{K}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \exp\left(-\int\tilde{\lambda}_1\,d\xi\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\int\tilde{\lambda}_2\,d\xi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{22}(\xi) & -k_{12}(\xi) \\ -k_{21}(\xi) & k_{11}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где $\Delta = k_{11}(\xi)\,k_{22}(\xi) - k_{12}(\xi)\,k_{21}(\xi)$, или же с учетом (26)

$$\Delta = k_{11}(\xi)\,k_{12}(\xi)\,[\tilde{\lambda}_2(\xi) - \tilde{\lambda}_1(\xi)] + k_{11}(\xi)\frac{dk_{12}(\xi)}{d\xi} - k_{12}(\xi)\frac{dk_{11}(\xi)}{d\xi}. \tag{29}$$

Подставляя (27) и (28) в (7), где $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим выражение для $G(t, \xi) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$. Для интересующей нас импульсной переходной функции $g_1 = g(t, \xi)$ заданного уравнения (22) получим

$$g(t, \xi) = \frac{k_{11}(t)\,k_{12}(\xi)\exp\int\limits_{\xi}^{t}\tilde{\lambda}_1\,dt - k_{12}(t)\,k_{11}(\xi)\exp\int\limits_{\xi}^{t}\tilde{\lambda}_2\,dt}{k_{11}(\xi)\,k_{12}(\xi)\,[\tilde{\lambda}_1(\xi) - \tilde{\lambda}_2(\xi)] + k_{12}(\xi)\frac{dk_{11}(\xi)}{d\xi} - k_{11}(\xi)\frac{dk_{12}(\xi)}{d\xi}}. \tag{30}$$

В случае, когда по (25) получается $k_{11}, k_{12} = \text{const}$, формула (30) принимает вид

$$g(t, \xi) = \frac{\exp\int\limits_{\xi}^{t} \tilde{\lambda}_1(t')\,dt' - \exp\int\limits_{\xi}^{t} \tilde{\lambda}_2(t')\,dt'}{\tilde{\lambda}_1(\xi) - \tilde{\lambda}_2(\xi)}, \qquad (31)$$

которая по форме совпадает с формулой, приведенной в [1], стр. 249, и отличается способом определения $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$.

Пример:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dq}{dt} - \frac{1}{t^2}q = u.$$

В данном случае $\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2t}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2t}$, $a = \frac{t}{\sqrt{5}}$. По (24) получается $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\beta}{t}$, $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{\beta}{t}$, где $\beta = \frac{11\sqrt{5}}{25}$. По (25) получается $k_{11} = \frac{28-3\sqrt{5}}{25} = \text{const}$, $k_{12} = \frac{28+3\sqrt{5}}{25} = \text{const}$ и формула (25) дает

$$g(t, \xi) = \frac{1}{2\beta}\left(t^{\beta}\,\xi^{1-\beta} - t^{-\beta}\,\xi^{1+\beta}\right).$$

Это решение отличается от точного тем, что имеем значение $\beta = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}984$, а в точном решении $\beta = 1$.

2. Матрица $W(\lambda, t)$ передаточных функций определяется через матрицу импульсных переходных функций $G(t, \xi)$ при помощи соотношения

$$W(\lambda, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t, \xi)\, e^{-\lambda(t-\xi)}\, d\xi. \qquad (32)$$

Отсюда для передаточных функций $w_{ij}(\lambda, t)$ будем иметь

$$w_{ij}(\lambda, t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{t} g_{ij}(t, \xi)\, e^{\lambda\xi}\, d\xi}{e^{\lambda t}}, \qquad (33)$$

т. е. $W(\lambda, t)$ есть отношение реакции системы на сигнал в виде показательной функции $e^{\lambda t}$ (по всем входам) к этому сигналу. Таким образом, $W(\lambda, t)\,e^{\lambda t}$ удовлетворяет данному уравнению (1). Подставляя в (1) вместо x $W(\lambda, t)\,e^{\lambda t}$, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $W(\lambda, t)$:

$$\frac{dW}{dt} = [U(t) - \lambda E_n]\, W + A^{-1}(t)\, H(t), \qquad (34)$$

причем $W(\lambda, t)$ является решением уравнения (28) при нулевых начальных условиях.

Смысл $W(\lambda, t)$ заключается в том, что ее произведение на изображение по преобразованию Лапласа входного сигнала u является изображением выходного сигнала x, т. е.

$$L\{x\} = W(\lambda, t) L\{u\}, \tag{35}$$

где $L\{x\}$ и $L\{u\}$ — изображения x и u соответственно. В самом деле, имеем

$$L\{x\} = \int\limits_0^\infty x(t) e^{-\lambda t} dt, \tag{36}$$

$$L\{u\} = \int\limits_0^\infty u(t) e^{-\lambda t} dt. \tag{37}$$

Подставляя в (36) значение $x(t)$ по (4) и поменяв порядок интегрирования с учетом (32) и (37) получим (35).

Таким образом, имея $W(\lambda, t)$, часто можно найти искомое решение, пользуясь лишь таблицами преобразования Лапласа, или же, в худшем случае, по интегралу обратного преобразования Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} L\{x\} e^{\lambda t} d\lambda \tag{38}$$

$(c > c_0$, где c_0 — абсцисса абсолютной сходимости преобразования Лапласа). Применение формулы (38) обычно проще, чем определение $x(t)$ по (4) даже при известном $G(t, \xi)$ [4].

Для определения приближенного выражения $W(\lambda, t)$ можно использовать вышеприведенный метод определения $G(t, \xi)$.

Если собственные значения матрицы $U(t)$ разбиты на непересекающиеся группы $\lambda_i^{(\sigma)}$ $(i=1, 2, \cdots, k_\sigma,\ \sigma=1, 2, \cdots, p,\ \sum\limits_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n)$, то собственные значения матрицы $U(t) - \lambda E$, равные $\lambda_i^{(\sigma)} - \lambda$ могут быть разбиты на те же непересекающиеся группы. Введя матрицы K, Λ, M и асимптотические ряды (13) и (14) как и в предыдущем случае, решение системы (34) представится в виде

$$W(\lambda, t) = \sum_{\sigma=1}^{p} \widetilde{K}_\sigma Z_\sigma, \tag{39}$$

где Z_σ являются решениями подсистем

$$\frac{dZ_\sigma}{dt} = (\widetilde{\Lambda}_\sigma - \lambda E_{k_\sigma}) Z_\sigma + \widetilde{M}_\sigma A^{-1} H. \tag{40}$$

Здесь $\widetilde{M}_\sigma$ являются субматрицами матрицы $\widetilde{M}$, представляемой асимптотическим рядом

$$\tilde{M} = M + M^{[1]} + M^{[2]} + \cdots, \tag{41}$$

где $M^{[k]}$ $(k=1, 2,\cdots)$ определяются по рекуррентным формулам

$$M^{[k]} = -M \sum_{l=1}^{k} K^{[l]} M^{[k-l]}, \tag{42}$$

$$(M^{[0]} \equiv M).$$

Для рассмотренного выше уравнения (23) имеем матрицу—столбец передаточных функций $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Для интересующей нас передаточной функции $w_1 = w(\lambda, t)$ уравнения (22) по (39) получим

$$w(\lambda, t) = k_{11} z_1 + k_{12} z_2, \tag{43}$$

где $z_\sigma (\sigma = 1, 2)$ определяются из независимых уравнений

$$\frac{dz_\sigma}{dt} = (\bar{\lambda}_\sigma - \lambda) z_\sigma + m_{\sigma 2}. \tag{44}$$

Здесь $\bar{\lambda}_\sigma$ и $k_{1\sigma}$ определяются по (24) и (25), а по (42) получается

$$M^{[1]} = a^3 \begin{pmatrix} -\lambda_1 \dot{\lambda}_2 & \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_1 \lambda_2 & -\dot{\lambda}_1 \end{pmatrix},$$

$$M^{[2]} = a^4 \begin{pmatrix} -3a\lambda_1 \dot{\lambda}_2 - \lambda_1 \ddot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 & 3a\dot{\lambda}_2^2 + \ddot{\lambda}_2 \\ 3a\dot{\lambda}_1 \lambda_2 - \ddot{\lambda}_1 \lambda_2 + \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 & -3a\dot{\lambda}_1^2 + \ddot{\lambda}_1 \end{pmatrix}.$$

Останавливаясь на втором приближении, определим матрицу $\tilde{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. Для интересующих нас величин $m_{\sigma 2}$ будем иметь

$$m_{12} = a + a^3 \dot{\lambda}_2 + 3a^5 \dot{\lambda}_2^2 + a^4 \ddot{\lambda}_2,$$

$$m_{22} = -a - a^3 \dot{\lambda}_1 - 3a^5 \dot{\lambda}_1^2 + a^4 \ddot{\lambda}_1. \tag{45}$$

Для рассмотренного выше примера по (45) получается $m_{12} = \mu_1 t$, $m_{22} = -\mu_2 t$, где

$$\mu_1 = \frac{108 + 12\sqrt{5}}{100\sqrt{5}}, \quad \mu_2 = \frac{108 - 12\sqrt{5}}{100\sqrt{5}}.$$

Система (34) принимает вид

$$\frac{dz_1}{dt} = \left(\frac{\beta}{t} - \lambda\right) z_1 + \mu_1 t,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \left(-\frac{\beta}{t} - \lambda\right) z_2 - \mu_2 t, \tag{46}$$

и искомая передаточная функция $w(\lambda, t)$ по (37) получается

$$w(\lambda, t) = \frac{(k_{11}\mu_1 - k_{12}\mu_2)}{\lambda} t + \frac{2k_{12}\mu_2}{\lambda^2} - \frac{2k_{12}\mu_2}{\lambda^3 t}. \tag{47}$$

В случае входного сигнала $u(t) = at$ по (37) будем иметь изображение $L\{u\} = \frac{a}{\lambda^2}$, а согласно (35)

$$L\{x\} = \frac{a(k_{11}\mu_1 - k_{12}\mu_2)}{\lambda^3} t + \frac{2k_{12}\mu_2 a}{\lambda^4} - \frac{2k_{12}\mu_2 a}{\lambda^5 t}. \tag{48}$$

Оригинал изображения (48) получается

$$x(t) = at^3 \left(\frac{k_{11}\mu_1}{2} - \frac{k_{12}\mu_2}{4}\right) \approx 0{,}131\, at^3. \tag{49}$$

Это решение достаточно близко к точному решению $x = \frac{a}{8} t^3$.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 10.I.1973

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ, Վ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ. Ոչ ստացիոնար գծային սիստեմների դինամիկ բնութագրերի որոշման վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում բերված է բազմաչափ ոչ ստացիոնար գծային սիստեմների իմպուլսային անցումային ֆունկցիաների և փոխանցման ֆունկցիաների մատրիցաների որոշման ասիմպտոտիկ մեթոդ։ Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ։

K. A. ABGARIAN, V. V. VARTANIAN. *Ondetermination of dynamic characteristics of nonstacionary linear systems* (summary)

The paper gives an asymptotic method for definition of impulse transition functions matrices and transfer functions of multidimensional nonstationary linear systems.

The specific examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. А. Михайлов* и др. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами, Изд. „Наука", М., 1971.
2. *К. А. Абгарян.* Асимптотическое расщепление уравнений линейной системы автоматического управления, ДАН СССР, 166, № 2, 1966.
3. *К. А. Абгарян.* Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем., XVIII, № 2, 1965.
4. *L. A. Zadeh.* Frequency analysis of variable networks, Proc. IRE, 1950, 58.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

Ю. Ш. АБРАМОВ

ВАРИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, НЕЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА

В литературе известны следующие (близкие по своей природе) вариационные характеристики для собственных значений вполне непрерывных симметричных операторов: принцип Релея, принцип минимакса Фишера—Куранта—Вейля, принцип максимина Пуанкаре—Ритца и новый принцип минимаксимина, недавно доказанный Стенджером [1].

С другой стороны, в некоторых вопросах математической физики встречаются задачи на собственные значения, в которых параметр входит нелинейно (см., например, [2, 3]). Такие задачи часто удается свести к обобщенным задачам (параметр λ входит нелинейно) на собственные значения в некотором гильбертовом пространстве.

Прежде всего, изучались задачи с полиномиальной зависимостью от параметра. В частности, Даффин [3] выделил класс сильно демпфированных динамических систем и исследовал случай квадратичных матричных пучков. Он показал, что собственные значения характеризуются как минимаксные значения некоторых функционалов, обобщающих известное отношение Релея. Роджерс [4] расширил эти результаты на более общую матричную проблему. Подобный подход к этого рода задачам разрабатывался в дальнейшем в работах [5—12], где доказывались те или иные вариационные принципы при различных предположениях относительно зависимости от спектрального параметра. Другие пути к этим задачам можно найти, например, в работах М. В. Келдыша [13], Д. Ф. Харазова [14], М. Г. Крейна и Г. Лангера [15].

В этой работе для некоторого класса задач, с нелинейным вхождением спектрального параметра, мы докажем вариационные принципы, указанные выше, а также некоторые новые. В частности, из наших результатов следуют соответствующие результаты работ [4—11].

Введем некоторые обозначения, нужные нам в дальнейшем. Если не оговорено особо, считаем, что H—бесконечномерное вещественное гильбертово пространство, E_n (E^n)—совокупность подпространств H размерности (коразмерности) n. Стрелки $\to$, $\rightharpoonup$ означают сходимость по норме и слабую сходимость в H. Через B, S и S_∞ обозначим соответственно множество ограниченных, симметричных ограниченных и симметричных компактных операторов в H. Если $A \in S$, то через $\sigma(A)$, $\pi(A)$ и $p\sigma(A)$ обозначим спектр, предельный спектр и множество собственных значений оператора A. Если функция $M_\lambda \in B$, $\lambda \in R$, то непрерывность и дифференцируемость ее понимается в смысле нормы операторов.

1. Основные определения

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L_\lambda x = 0,\ \lambda \in (c,\ d),\ x \in H, \tag{1.1}$$

где L: $(c,\ d) \to S$ — непрерывно дифференцируемая функция от λ на интервале $(c,\ d)$ вещественной оси.

Определение 1.1. ([4]). Пусть $p: H \setminus \{0\} \to (c,\ d)$ — непрерывный функционал. Если выполнены условия:

1) $$p(\alpha x) = p(x),\ \alpha \in R,\ \alpha x \neq 0, \tag{1.2}$$

2) $$(L_{p(x)}\, x,\ x) = 0,\ x \neq 0, \tag{1.3}$$

3) $$(L'_{p(x)}\,(x,\ x) > 0,\ x \neq 0, \tag{1.4}$$

то p называется функционалом Релея (ф. Р.) для L_λ, а пара $(L,\ p)$ — системой Релея. Пусть W множество значений p. Всякое решение λ, x, $\lambda \in W$, $x \neq 0$ уравнения (1.1) называется собственной парой, причем λ называется собственным значением, а x — собственным элементом с. Р. Через $p\sigma$ обозначим множество собственных значений с. Р. (в дальнейшем, собственные значения с. Р. будем для сокращения называть собственными значениями). Кратностью λ называется размерность собственного подпространства P_λ. Ортогональный проектор на P_λ мы всегда обозначаем через P_λ. Для множества $E \subseteq H$ положим

$$\gamma_c(E) = \inf_{x \in E} p(x),\ \gamma_d(E) = \sup_{x \in E} p(x),\ \gamma_c(H) = \gamma_c,\ \gamma_d(H) = \gamma_d. \tag{1.5}$$

Функционал p называется $d(c)$-ограниченным, если $\gamma_d < d$ $(\gamma_c > c)$ и просто ограниченным, если p — d и c-ограничен. Если p — ограничен, то $\overline{W} \subset (c,\ d)$. Через χ обозначим множество нормированных последовательностей, а через χ_0 — элементы из χ, слабо сходящиеся к нулю. Введем следующие множества точек:

$$w = \{\lambda: \exists\ \{x_n\} \in \chi_0,\ p(x_n) \to \lambda\},$$

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \overline{W}: \exists\ \{x_n\} \in \chi,\ L_\lambda x_n \to 0\},$$

$$\pi_1 = \{\lambda \in \overline{W}: \exists\ \{x_n\} \in \chi_0,\ L_\lambda x_n \to 0\},$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \overline{W}: \exists\ \{x_n\} \in \chi,\ L_\lambda x_n \to 0,\ p(x_n) \to \lambda\},$$

$$\pi_2 = \{\lambda \in \overline{W}: \exists\ \{x_n\} \in \chi_0,\ L_\lambda x_n \to 0,\ p(x_n) \to \lambda\}.$$

Кроме того, если p — $d(c)$-неограничен, считаем, что $d(c)$ принадлежит σ_i и π_i, $i=1,\ 2$. Очевидны следующие включения:

$$w \subseteq \overline{W},\ p\sigma \subseteq \sigma_2 \subseteq \sigma_1 \subseteq \overline{W},\ \pi_2 \subseteq \pi_1 \cap w,\ \pi_i \subseteq \sigma_i,\ i = 1,\ 2. \tag{1.6}$$

Замечание 1.2. Для классического случая $L_\lambda = \lambda I - A$, $p(x) = (Ax, x)/(x, x)$ является обычным ф.Р., W—числовой областью A. Кроме того, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma(A)$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi(A)$, $p\sigma = p\sigma(A)$.

Лемма 1.3. ([4]). Пусть $\lambda \in W$ и $x \neq 0$. Тогда

$$p(x) < \lambda \iff (L_\lambda x, x) > 0, \tag{1.7}$$

$$p(x) = \lambda \iff (L_\lambda x, x) = 0, \tag{1.8}$$

$$p(x) > \lambda \iff (L_\lambda x, x) < 0. \tag{1.9}$$

Следствие 1.4. Если $\lambda \in p\sigma$, $x \in P_\lambda \setminus \{0\}$, то $p(x) = \lambda$.

Следствие 1.5. Если p — d-ограничен, то $L_{\gamma_d} \gg 0$.

Соответствующим образом следствие 1.5 формулируется для c-ограниченного функционала. В дальнейшем мы все формулируем для правого конца γ_d.

Следствие 1.6. Если p — d-ограничен, то справедливо неравенство

$$\|L_{\gamma_d} x\|^2 \leqslant \|L_{\gamma_d}\| \, \|L_{\gamma_d} - L_{p(x)}\| \, \|x\|^2, \quad x \neq 0. \tag{1.10}$$

Доказательство. Так как $L_{\gamma_d} \geqslant 0$, то (1.10) следует из неравенства Рида [16] и (1.3).

2. Леммы о структуре множеств σ_i, π_i и w

Лемма 2.1. *Множества w, σ_i, π_i, $i=1, 2$— замкнуты, а множества W и w — выпуклы.*

Доказательство леммы не сложно, однако громоздко, поэтому мы его опускаем.

Лемма 2.2. *Множества σ_1, π_1, σ_2 и w не пусты γ_d, $\gamma_c \in \sigma_2$. Если p — d-ограничен и $0 \overline{\in} p\sigma(L_{\gamma_d})$, то $\gamma_d \in \pi_2$.*

Доказательство. Так как $\dim H = \infty$, то $\chi_0 \neq \varnothing$, поэтому $w \neq \varnothing$. То, что $\pi_1 \neq \varnothing$, будет показано позднее (см. § 5). Если p—d-неограничен, то $d \in \sigma_1$, σ_2 по определению. В противном случае найдем $\{x_n\} \in \chi$, $p(x_n) \to \gamma_d$. Из неравенства (1.10) тогда $\gamma_d \in \sigma_2$. Пусть теперь $0 \overline{\in} p\sigma(L\gamma_d)$. Можно считать, что $x_n \rightharpoonup x$. Тогда $L\gamma_d x = 0$ и, тем самым, $x=0$, т. е. $\gamma_d \in \pi_2$.

Лемма 2.3. *Пусть $E \subseteq H$, $\operatorname{codim} E < \infty$ и $\gamma = \gamma_d(E) \overline{\in} \pi_2$. Тогда существует элемент $y \in E \setminus \{0\}$ такой, что $\gamma = p(y)$ и $PL_\gamma y = 0$, где P—проектор на E. В частности, $\gamma \in W$.*

Доказательство. Пусть, сначала $E = H$. Так как $\gamma_d \overline{\in} \pi_2$, то p—d-ограничен. По лемме 2.2 $\gamma_d \in \sigma_2$, т. е. существует $\{y_n\} \in \chi$, $p(y_n) \to \gamma_d$, $L_{\gamma_d} y_n \to 0$, $y_n \rightharpoonup y \neq 0$. Покажем, что $p(y) = \gamma_d$. Допустим, что $p(y) < \gamma_d$. Тогда в силу непрерывности p, $z_n = y_n - y \rightharpoonup 0$. Положив $\tilde{z}_n = z_n/\|z_n\|$, будем иметь $\{\tilde{z}_n\} \in \chi_0$. Пусть $p(y) < \lambda < \gamma_d$. Тогда $(L_\lambda z_n, z_n) = (L_\lambda y_n, y_n) - 2(L_\lambda y, y_n) + (L_\lambda y, y)$. Из (1.7) и того, что $d_n = -2(L_\lambda y_n, y) + (L_\lambda y, y) - (-L_\lambda y, y)$ следует, что $d_n < 0$ для достаточно большого n. Далее, так как $\lambda < \gamma_d$ и $p(y_n) \to \gamma_d$, то $p(y_n) > \lambda$ и поэтому $(L_\lambda y_n, y_n) < 0$. Таким образом, для достаточно большого n (зависящего от λ) $(L_\lambda z_n, z_n) < 0$, поэтому в силу (1.2) и (1.9) $p(\tilde{z}_n) > \lambda$. Устремляя λ к γ_d, найдем последовательность $\{x_n\} \subset \{\tilde{z}_n\}$, $p(x_n) \to \gamma_d$. Из (1.10) тогда $L_{\gamma_d} x_n \to 0$ и противоречит тому, что $\gamma_d \overline{\in} \pi_2$. Пусть теперь codim $E < \infty$. По лемме 2.2, примененной к с.Р. (PL, p) на E, найдем $\{y_m\} \subset E$, $\|y_m\| = 1$, $p(y_m) \to \gamma$, $PL_\gamma y_m \to 0$, $y_m \rightharpoonup y$. Покажем, что $y \neq 0$. Действительно, из разложения $L_\gamma y_m = PL_\gamma y_m + P^\perp L_\gamma y_m$ и вполне непрерывности $P^\perp$ следует, что $L_\gamma y_m \to P^\perp L_\gamma y$. Теперь, если бы $y = 0$, то $\gamma \in \pi_2$. Далее, $y \in E$, $PL_\gamma y = 0$ и $(L_\gamma y, y) = (PL_\gamma y, y) = 0$. Заметим, что $\gamma \in W$. Действительно, $\gamma \in \overline{W}$ и если $\gamma = \gamma_d(H)$ или $\gamma_c(H)$, то из первой части доказательства $\gamma \in W$. Из (1.8) тогда $p(y) = \gamma$.

Следующая лемма есть аналог критерия Вейля.

Лемма 2.4. *Точка $\lambda \in \sigma_1 \setminus \pi_1$ тогда и только тогда, когда λ—изолированная точка σ_1, являющаяся собственным значением конечной кратности и 0—изолированная точка спектра оператора L_λ.*

Доказательство. Пусть 0—изолированная точка $\sigma(L_\lambda)$ и $\lambda \in p\sigma$—собственное значение конечной кратности. Тогда в силу критерия Вейля $0 \in \sigma(L_\lambda) \setminus \pi(L_\lambda)$, что эквивалентно $\lambda \in \sigma_1 \setminus \pi_1$. Пусть теперь $\lambda \in \sigma_1 \setminus \pi_1$, тогда $0 \in \sigma(L_\lambda) \setminus \pi(L_\lambda)$, в частности, $\lambda \in p\sigma$ и dim $P_\lambda < \infty$. (Если $\lambda = \gamma_c$ или γ_d, это следует из леммы 2.3). Докажем изолированность λ в σ_1. Пусть $\lambda_n \in \sigma_1$, $\lambda_n \to \lambda$. В силу замкнутости π_1 (лемма 2.1) можно считать, что $\lambda_n \in \sigma_1 \setminus \pi_1$, поэтому $\{\lambda_n\} \subset p\sigma$. Пусть $\{x_n\} \in \chi$—соответствующие собственные вектора. Можно считать, что $x_n \rightharpoonup x$. Легко видеть, что $L_\lambda x_n \to 0$. Покажем, что $x = 0$. Положим $\varphi(\mu) = (L_\mu x, x)$. Тогда φ—дифференцируема на (c, d) и $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_n) = 0$. Поэтому найдется θ_n между λ и λ_n такое, что $(L'_{\theta_n} x, x_n) = 0$. Используя непрерывность L'_μ, имеем $L'_{\theta_n} x \to L'_\lambda x$, в частности, $(L'_\lambda x, x) = 0$. С другой стороны, $(L_\lambda x, x) = 0$. Заметим, что $\lambda \in W$. Если $\lambda = \gamma_c$ или γ_d, то так как $\lambda \overline{\in} \pi_1$, согласно лемме 2.3 $\lambda \in W$. Таким образом, всегда $\lambda \in W$ и по (1.8), если $x \neq 0$, то $p(x) = \lambda$ и, тем самым, $(L'_{p(x)} x, x) = 0$. А это противоречит (1.4). Таким образом, $x = 0$ и мы получили противоречие с тем, что $\lambda \overline{\in} \pi_1$.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2.5. *Если $\lambda \in \sigma_2 \setminus \pi_2$, то λ—изолированная точка σ_2 и собственное значение конечной кратности.*

Положим

$$\gamma_d^{(w)} = \sup\{\lambda : \lambda \in w\}, \quad \gamma_d^{(\pi_i)} = \sup\{\lambda : \lambda \in \pi_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Соответствующим образом вводятся $\gamma_c^{(w_i)}$ и $\gamma_c^{(\pi_i)}$.

Лемма 2.6. 1) $\gamma_d^{(\pi_1)} \leqslant \min\{\gamma_d^{(\pi_1)}, \gamma_d^{(w)}\}$, 2) *если $\gamma_d \overline{\in} \pi_1$, то $\gamma_d^{(\pi_1)} \leqslant \gamma_d^{(w)}$.*

Доказательство. 1) следует из (1.6). Положим $\lambda_0 = \gamma_d^{(\pi_1)}$ и $\gamma = \sup\limits_{x \neq 0} (-L_{\lambda_0} x, x)/(x, x)$. При доказательстве 2) надо отдельно рассматривать два случая $\gamma \overline{\in} p\sigma(-L_{\lambda_0})$ и $\gamma \in p\sigma(-L_{\lambda_0})$. Детали опускаем.

Замечание 2.7. В критерии Вейля (лемма 2.4) условие: 0 — изолированная точка спектра оператора L_λ — существенно. Также, в лемме 2.6, 2) существенно условие $\gamma_d \overline{\in} \pi_1$. Для того и другого случая контр-пример уже дает специально построенный квадратичный пучок.

3. Леммы о свойствах функции $R(\lambda, x)$

Пусть $M: (\alpha, \beta) \to B$. Если в точке λ существует $M_\lambda^{-1} \in B$, то λ отнесем к резольвентному множеству $\rho(M)$, а оператор $R_\lambda = M_\lambda^{-1}$ будем называть резольвентой.

Обычным образом доказывается следующая

Лемма 3.1. 1). *Если M_λ непрерывна по λ в точке λ_0 и $\lambda_0 \in \rho(M)$, то в некоторой окрестности λ_0 (окрестность в R) существует резольвента R_λ, непрерывная в λ_0.* 2). *Если в точке λ_0 существует M'_λ, то $R'_{\lambda_0} = -R_{\lambda_0} M'_{\lambda_0} R_{\lambda_0}$, $\lambda_0 \in \rho(M)$.*

Введем следующее обозначение

$$\Delta_M[\alpha, \beta] = \begin{cases} (\alpha - \beta)^{-1}(M_\alpha - M_\beta), & \alpha \neq \beta, \\ M'_\alpha, & \alpha = \beta. \end{cases} \tag{3.1}$$

Для функции L_λ значок L внизу будем опускать.

Следующую лемму можно найти в [17].

Лемма 3.2. Пусть $A \in S$ *и* $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \pi(A)$. Тогда в некоторой (проколотой) окрестности λ_0 для резольвенты r_λ оператора A справедливо разложение

$$r_\lambda = (\lambda - \lambda_0)^{-1} P_{\lambda_0} + q_\lambda, \tag{3.2}$$

причем функция q_λ дифференцируема в точке λ_0 и $q'_{\lambda_0} = -q^2_{\lambda_0}$, q_{λ_0}: $\mathbf{P}^\perp_{\lambda_0} \to \mathbf{P}^\perp_{\lambda_0}$.

Лемма 3.3. *Пусть (L, p) — с. Р. и $\lambda_0 \in \sigma_1 \setminus \pi_1$. Тогда в некоторой окрестности λ_0 для резольвенты R_λ справедливо разложение*

$$R_\lambda = (\lambda - \lambda_0)^{-1} P_{\lambda_0} K_\lambda + Q_\lambda, \tag{3.3}$$

причем функции K_λ и Q_λ непрерывны в точке λ_0 и

$$K_{\lambda_0} x = L_{\lambda_0} Q_{\lambda_0} x = x, \quad x \in \mathbf{P}^\perp_{\lambda_0}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Положим $A = \lambda_0 I - L_{\lambda_0}$. Легко видеть, что $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \pi(A)$. Из обычного критерия Вейля и леммы 2.4 следует, что найдется некоторая общая окрестность $(\alpha, \beta) \setminus \{\lambda_0\}$, в которой определены функции r_λ и R_λ. Положим $H_\lambda = I + (L_\lambda - L_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) I) r_\lambda$. Используя (3.2), найдем, что

$$R_\lambda = r_\lambda \cdot H_\lambda^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} P_{\lambda_0} H_\lambda^{-1} + q_\lambda H_\lambda^{-1}. \tag{3.5}$$

Положим $K_\lambda = H_\lambda^{-1}$, $Q_\lambda = q_\lambda H_\lambda^{-1}$. Из (3.2) имеем

$$H_\lambda = I + (\Delta[\lambda, \lambda_0] - I) P_{\lambda_0} + (L_\lambda - L_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) I) q_\lambda. \tag{3.6}$$

Доопределим H_λ в точке λ_0 по формуле

$$H_{\lambda_0} = I + (L'_{\lambda_0} - I) P_{\lambda_0}. \tag{3.7}$$

Очевидно, что функция H_λ непрерывна на области определения и

$$H_\lambda - H_{\lambda_0} = (\Delta[\lambda, \lambda_0] - \Delta[\lambda_0, \lambda_0]) P_{\lambda_0} + (L_\lambda - L_{\lambda_0} - (\lambda - \lambda_0) I) q_\lambda. \tag{3.8}$$

Покажем, что $\lambda_0 \in \rho(H)$. Допустим, что это не так. Так как оператор $(L'_{\lambda_0} - I) P_{\lambda_0}$ вполне непрерывен (в силу леммы 2.4 P_{λ_0}—конечномерен), то существует $y \neq 0$, $H_{\lambda_0} y = y + (L'_{\lambda_0} - I) P_{\lambda_0} y = 0$. Поэтому $(L'_{\lambda_0}(P_{\lambda_0} y), P_{\lambda_0} y) = 0$, $P_{\lambda_0} y \neq 0$. Из следствия 1.4 $p(P_{\lambda_0} y) = \lambda_0$ и мы получим противоречие с (1.4). Таким образом, $\lambda_0 \in \rho(H)$. Теперь по лемме 3.1 и 3.2 получим, что (3.3) есть следствие (3.5). Свойства (3.4) следуют из (3.3) и (3.7).

В разложении (3.3) функции K_λ и Q_λ зависят от λ_0. Эту зависимость мы иногда будем отмечать верхним индексом. Удобно для $\lambda \bar{\in} p\sigma$ считать $\mathrm{P}_\lambda = \{0\}$, $P_\lambda = 0$. Определим функции $Q_\lambda^{(\lambda_0)}$ и $K_\lambda^{(\lambda_0)}$ в точках $\lambda, \lambda_0 \in [\gamma_c, \gamma_d] \setminus \sigma_1$ по формулам

$$Q_\lambda^{(\lambda_0)} = R_\lambda, \ K_\lambda^{(\lambda_0)} = I.$$

Введем следующие функции на множестве $[\gamma_c, \gamma_d] \setminus \pi_1$:

$$\hat{R}_\lambda = Q_\lambda^{(\lambda)}, \ I_\lambda = K_\lambda^{(\lambda)}, \ F_\lambda = (I - P_\lambda I_\lambda L'_\lambda) \hat{R}_\lambda,$$

$$\mathrm{R}(\lambda, x) = \mathrm{R}(\lambda) = (\hat{R}_\lambda x, x), \ x \in H.$$

Лемма 3.4. *Справедливы равенства*

$$L_\lambda F_\lambda x = L_\lambda \hat{R}_\lambda x = I_\lambda x, \quad x \in \mathrm{P}_\lambda^\perp, \tag{3.9}$$

$$L'_\lambda F_\lambda = L_\lambda \hat{R}_\lambda L'_\lambda \hat{R}_\lambda. \tag{3.10}$$

Доказательство. (3.9) есть следствие (3.4) и определений, (3.10) выводится из (3.3).

Лемма 3.5. *Пусть* $\lambda_0 \in [\gamma_c, \gamma_d] \setminus \pi_1$ *и* $x \in \mathrm{P}_{\lambda_0}^\perp$. *Тогда функция* $\mathrm{R}(\lambda, x)$ *дифференцируема в точке* λ_0 *и*

$$\mathrm{R}(\lambda_0, x) = (L_{\lambda_0} F_{\lambda_0} x, F_{\lambda_0} x), \ \mathrm{R}'(\lambda_0, x) = -(L'_{\lambda_0} F_{\lambda_0} x, F_{\lambda_0} x). \tag{3.11}$$

Доказательство. Если $\lambda_0 \bar{\in} \sigma_1$, то первая часть (3.11) очевидна, а вторая следует из леммы 3.1. Пусть поэтому, $\lambda_0 \in \sigma_1 \setminus \pi_1$. Нетрудно показать, что

$$\mathrm{R}'(\lambda_0) = (q'_{\lambda_0} I_{\lambda_0} x, x) - (q_{\lambda_0} I_{\lambda_0} (L'_{\lambda_0} - I) q_{\lambda_0} x, x).$$

Далее, используя, что x, $q_{\lambda_0} x \in \mathrm{P}_{\lambda_0}^\perp$, а также лемму 3.2 и тождество (3.9), предыдущее равенство приводится к виду $\mathrm{R}'(\lambda_0) = -(\hat{R}_{\lambda_0} L'_{\lambda_0} \hat{R}_{\lambda_0} x, x)$.

Теперь, используя (3.9) и (3.10), нетрудно получить второе равенство в (3.11). Первая часть (3.11) следует из (3.9).

Лемма 3.6. *Справедливы следующие свойства функции* $\mathrm{R}(\lambda, x)$:

1) *если* $\lambda \in \pi_1$, $y \in \mathrm{P}_\lambda^+ \setminus \{0\}$ *и* $R(\lambda, y)=0$, *то* $\mathrm{R}'(\lambda, y)<0$,

2) *если* $\alpha \in \overline{W}$, $(\alpha, \gamma_d] \cap \pi_1 = \varnothing$ *и* $y \in \mathrm{P}_\lambda^+ \setminus \{0\}$, $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$, *то* $\mathrm{R}(\lambda, y)>0$, $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$.

Доказательство. Заметим, что в силу леммы 2.3 $\lambda \in W$. 1) Пусть $\mathrm{R}(\lambda, y)=0$, тогда из (3.9) и (3.11) следует, что $(L_\lambda F_\lambda y, F_\lambda y)=0$, $F_\lambda y \neq 0$. Поэтому $p(F_\lambda y)=\lambda$, и 1) следует из (1.4) и (3.11). По лемме 3.5 $\mathrm{R}(\lambda, y)$ — дифференцируема на $(\alpha, \gamma_d]$. Из следствия 1.5 и (3.11) $\mathrm{R}(\gamma_d, y) \geqslant 0$. Покажем, что $\mathrm{R}(\gamma_d, y)>0$. Допустив противное, из (1.11) и (3.11) получим $F_{\gamma_d} y \neq 0$ и $p(F_{\gamma_d} y)=\gamma_d$. Из неравенства (1.10), $L_{\gamma_d} F_{\gamma_d} y=0$ и из (3.11) получим противоречие $y=0$.

Допустим, что существуют точки из $(\alpha, \gamma_d]$, в которых $\mathrm{R}(\lambda, y)=0$. В силу непрерывности и того, что $\mathrm{R}(\gamma_d, y)>0$, существуют точки $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$, в которых $\mathrm{R}(\lambda, y)=0$. Пусть γ — самая правая из таких точек, тогда $\gamma<\gamma_d$. Согласно 1) $\mathrm{R}'(\gamma, y)<0$, следовательно, в правосторонней окрестности $\gamma \mathrm{R}(\lambda, \gamma)<0$. Но $\mathrm{R}(\gamma_d, y)>0$, поэтому интервал (γ, γ_d) содержит нуль $\mathrm{R}(\lambda, y)$, что противоречит выбору γ. Таким образом, 2) доказано.

Лемма 3.7. *Пусть* $\alpha \in W$, $x \neq 0$ *и* $(\alpha, \gamma_d] \cap \pi_1=\varnothing$. *Если* $\hat{x}=L_{p(x)} x \neq 0$ *и* $\hat{x} \in \mathrm{P}_\lambda^+$ *для* $\lambda \in (\alpha, \gamma_d]$, *то* $p(x) \leqslant \alpha$.

Доказательство. Если $p(x) \in (\alpha, \gamma_d]$, то из (3.9) и (3.11) $\mathrm{R}(p(x), \hat{x})=0$, а это противоречит п. 2) леммы 3.6.

4. Некоторые другие леммы

Введем следующие формы для $\lambda \in (c, d)$:

$$[x, y]_\lambda=\begin{cases}(\Delta[\lambda, p(y)] x, y) \neq 0, & y \neq 0 \\ 0, & y=0,\end{cases} \qquad [x, y]=\begin{cases}[x, y]_{p(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Отметим некоторые свойства этих форм, которыми мы будем, не оговаривая, пользоваться:

1°. если $\lambda \in W$, то $[x, x]_\lambda>0$, $[x, x]_\lambda=0 \Longleftrightarrow x=0$,

2°. $[x, x] \geqslant 0$, $[x, x]=0 \Longleftrightarrow x=0$,

3°. $[x, y]=[y, x]$, форма $[x, y]_\lambda$ линейна по первому аргументу,

4°. если (λ, x) и (μ, y) — собственные пары, $\lambda \neq \mu$, то $[x, y]=0$,

5°. если $\lambda \in p\sigma$, то форма $[x, y]$ на P_λ есть скалярное произведение,

6°. если (λ_i, x_i), $i=1, \cdots, n$ — собственные пары и $[x_i, x_j]=\delta_{ij}$, то элементы $x_1, \cdots, x_n$ — линейно независимы,

7°. если (λ, y) — собственная пара, $x \neq 0$ и $[x, y]=0$, то $(\hat{x}, y)=0$.

Лемма 4.1. *Пусть* $E \in \mathbf{E}_N$ *и* $y_1, \cdots, y_n$ — *произвольные элементы из* H. *Если* $n < N$, *то существует* $x \in E \setminus \{0\}$ *такой, что* $[x, y_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $N < \infty$. Пусть $\mu_0 \in W$. Найдем элемент $z_0 \in E$, $\|z_0\| = 1$ и $(\Delta[\mu_0, p(y_i)]y_i, z_0) = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Это всегда можно сделать, так как $n < N$. Положив $\mu_1 = p(z_0)$, рекуррентно определим последовательность $\{z_k\} \subset E$, $\|z_k\| = 1$:

$$(\Delta[\mu_k, p(y_i)]y_i, z_k) = 0,\ i = 1, \cdots, n,\ \mu_k = p(z_{k-1}).$$

В силу конечномерности E можно считать, что $z_k \to x$, $\|x\| = 1$. Тогда $\mu_k \to p(x)$ и $[x, y_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$.

Пусть $\lambda_i \in p\sigma$, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ — собственные значения, повторяющиеся со своей кратностью. Согласно 4°—6° собственные элементы $x_1, \cdots, x_n$, им соответствующие, можно выбрать линейно независимыми. Положим

$$X_n = [x_1, \cdots, x_n],\ E^n = H \ominus X_n,\ x_n(\lambda) = \Delta[\lambda, \lambda_n]x_n,$$

$$X_n(\lambda) = [x_1(\lambda), \cdots, x_n(\lambda)],\ E^n(\lambda) = H \ominus X_n(\lambda),\ \lambda \in (c, d).$$

Из определений непосредственно видно, что $X_n \in \mathbf{E}_n$, $E^n \in \mathbf{E}^n$ и

$$L_\lambda: E^n(\lambda) \to E^n,\ [x, x_i] = (x, x_i(\lambda)),\ i = 1, \cdots, n.$$

Введем также обобщенную матрицу Грама для векторов $x_1, \cdots, x_n$.

$$A_\lambda = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n,\ a_{ij}(\lambda) = [x_i, x_j]_\lambda,\ \lambda \in (c, d).$$

Через e_λ^i обозначим ортогональный проектор на $E^i(\lambda)$.

Лемма 4.2. *Пусть* $\lambda \in W$, $\lambda \leqslant \lambda_n$. *Тогда*: 1) $\det A_\lambda \neq 0$, 2) $X_n(\lambda) \in \mathbf{E}_n$, $E^n(\lambda) \in \mathbf{E}^n$, 3) $H = X_n + E^n(\lambda)$, 4) e_λ^n — *непрерывная функция*.

Доказательство. 1) доказано в работе [8]; 2) и 3) — непосредственное следствие 1); 4) доказывается обычным образом с использованием непрерывности функций $a_{ij}(\lambda)$ и 1).

Лемма 4.3. *Пусть* $x \neq 0$. *Если выполнено одно из условий*

1) $[x, x_i]_\lambda = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $\lambda \in W$ *и* $\lambda \leqslant \lambda_n$,

2) $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $p(x) \leqslant \lambda_n$,

то элементы $x_1, \cdots, x_n$, x *линейно независимы.*

Доказательство. 1) следует из п. 3) леммы 4.2, а 2)—из того, что $[x, x_i] = [x, x_i]_\lambda$, $\lambda = p(x)$ и 1).

Введем в рассмотрение функцию:

$$\Gamma(\lambda) = \Gamma^n(\lambda) = \gamma_d(E^n(\lambda)),\ \lambda \in (c, d).$$

Положим также $\overline{\Gamma^n}(\lambda) = \overline{\lim\limits_{\mu \to \lambda}}\, \Gamma^n(\mu)$, $\underline{\Gamma}^n(\lambda) = \underline{\lim\limits_{\mu \to \lambda}}\, \Gamma^n(\mu)$.

Лемма 4.4. *Пусть* $\lambda_0 \in W$ *и* $\lambda_0 \leqslant \lambda_n$. *Если* $[\underline{\Gamma}^n(\lambda_0), \overline{\Gamma}^n(\lambda_0)] \cap \pi_2 = \varnothing$, *то функция* $\Gamma^n(\lambda)$ *непрерывна в точке* λ_0.

Доказательство. Полунепрерывность снизу $\underline{\Gamma}^n(\lambda_0) \geqslant \Gamma^n(\lambda_0)$ доказывается обычным образом с использованием непрерывности p и

$\bar{\lambda}$. Покажем, что $\overline{\Gamma^n}(\lambda_0) < \Gamma^n(\lambda_0)$. Пусть $\mu_k \to \lambda_0$, $\Gamma(\mu_i) \to s$. В силу условий леммы и замкнутости π_2, для достаточно большого k, $\Gamma(\mu_k) \in \overline{\in} \pi_2$. По лемме 2.3 для этих k найдем элементы $y_k \in E^n(\mu_k)$, $\|y_k\| = 1$ такие, что $\Gamma(\mu_k) = p(y_k)$ и $e^n_{\mu_k} L_{p(y_k)} y_k = 0$. Считая $y_k \to y$, покажем, что $y \neq 0$. Допустим, что $y = 0$. Нетрудно видеть, что $(e^n_{\mu_k})^{\perp} L_{p(y_k)} y_k \to \to 0$. Отсюда, нетрудно вывести, что $L_s y_k \to 0$, поэтому $s \in \pi_2$. Но это противоречит тому, что $s \in [\Gamma^n(\lambda_0), \overline{\Gamma^n}(\lambda_0)]$. Используя непрерывность $e^{(n)}_{\lambda}$ (лемма 4.2, 4), а также (1.8), можно получить, что $y \in E^n(\lambda_0)$ и $p(y) = s$. Окончательно получим $\Gamma^n(\lambda_0) > p(y) = s$.

Положим

$$\underline{n} = \min\{i: \lambda_i = \lambda_n\}, \quad \overline{n} = \max\{i: \lambda_i = \lambda_n\}.$$

Как легко видеть, имеет место следующая

Лемма 4.5. 1) *Если $n < \overline{n}$, то существует $x \neq 0$, $\hat{x} = 0$, $p(x) = = \lambda_n$ и $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$; 2) если $n = \overline{n}$, $(\lambda_{i+1}, \lambda_i) \cap p\sigma = \varnothing$, $i = 1, \cdots \cdots, n$ и $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$, $x \neq 0$, то либо $\hat{x} \neq 0$, либо $p(x) < \lambda_n$.*

В заключение параграфа приведем некоторую, легко проверяемую модификацию одной леммы из работы [4]:

Лемма 4.6. *Если $x \in X_l$, $x \neq 0$, то $\lambda_l \leqslant p(x) \leqslant \lambda_1$.*

5. Основные теоремы

Следующая теорема есть аналог принципа Релея.

Теорема 5.1. *Пусть $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_1 = \varnothing$. Тогда множество $(\beta, \gamma_d] \cap \cap \sigma_1 \neq \varnothing$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n > \cdots (\lambda_1 = \gamma_d)$, которым соответствует такая последовательность линейно независимых собственных элементов, что*

$$\max_{\substack{[x, x_i] = 0 \\ i = 1, \cdots, n-1}} p(x) = \lambda_n, \quad [x_i, x_j] = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2, \cdots, \tag{5.1}$$

причем максимум в (5.1) *достигается на элементе x_n ($n = 1, 2, \cdots$).*

Доказательство. Первая часть теоремы следует из лемм 2.2 и 2.4. Равенство (5.1) для $n = 1$ вытекает из следствия 1.4. Допустив, что (5.1) доказано для $k = 1, \cdots, n$, покажем его справедливость для $k = n + 1$. Рассмотрим два случая. а) $n < \overline{n}$. В этом случае надо воспользоваться леммой 4.5, 1) и индукционным предположением. б) $n = \overline{n}$, т. е. $\lambda_{n+1} < \lambda_n$. Пусть $x \neq 0$, $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Из индукционного предположения следует, что $p(x) \leqslant \lambda_n$. Если $\hat{x} = 0$, то по лемме 4.8, 2) $p(x) < \lambda_n$. Но так как $p(x) \in p\sigma$ и $(\lambda_{n+1}, \lambda_n) \cap p\sigma = \varnothing$, то $p(x) \leqslant \lambda_{n+1}$. Если же $\hat{x} \neq 0$, то так как $\hat{x} \in P^{\perp}_{\lambda}$, $\lambda \in (\lambda_{n+1}, \gamma_d]$, предыдущее неравенство следует из леммы 3.7 с $\alpha = \lambda_{n+1}$. Максимум достигается на собственном элементе в силу следствия 1.4. Линейная независимость $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ следует из леммы 4.3.

Теорема 5.2. *Пусть* $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $(\lambda_1 = \gamma_d)$ — *собственные значения, причем* $[\lambda_n, \lambda_1] \cap \pi_1 = \varnothing$. *Если* $x \neq 0$, $[x, x_i] = 0$, $i=1, \cdots, n$, *то*

$$p(x) < \lambda_n, \quad [p(x), \lambda_n) \cap \sigma_1 \neq \varnothing. \tag{5.2}$$

Доказательство. Если $\hat{x} = 0$, то по лемме 4.5, 2) $p(x) < \lambda_n$. В этом случае $p(x) \in p\sigma$ и (5.2) очевидно. Если теперь $\hat{x} \neq 0$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $(\lambda_n - \varepsilon, \gamma_d] \cap \pi_1 = \varnothing$. В частности, $\hat{x} \in P_\lambda^+$, $\lambda \in (\lambda_n - \varepsilon, \gamma_d]$. По лемме 3.7 $(\alpha = \lambda_n - \varepsilon)$ $p(x) \leqslant \alpha = \lambda_n - \varepsilon < \lambda_n$. Допустив, что $[p(x), \lambda_n) \cap \sigma_1 = \varnothing$, имеем $(p(x) - \varepsilon, \gamma_d] \cap \pi_1 = \varnothing$ и $\hat{x} \in P_\lambda^+$, $\lambda \in (p(x) - \varepsilon, \gamma_d]$. Поэтому снова, используя лемму 3.7 $(\alpha = p(x) - \varepsilon)$, получим противоречие $p(x) \leqslant p(x) - \varepsilon$.

Следствие 5.3. Пусть $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$ и $p(x) > \gamma_d^{(\pi_1)}$. Тогда

$$[p(x), \lambda_n) \cap p\sigma \neq \varnothing.$$

Пусть $\gamma_d^{(\pi_1)} < \gamma_d$, тогда согласно лемме 2.2 и 2.4 множество $(\gamma_d^{(\pi_1)}, \gamma_d] \cap \sigma_1 \neq \varnothing$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Введем функцию распределения числа собственных значений, т. е. пусть $n(\lambda)$ — число собственных значений в интервале $(\lambda, \gamma_d]$, где $\lambda > \gamma_d^{(\pi_1)}$. Положим также

$$\mathbf{E} = \bigcup_n \mathbf{E}_n, \quad K(\lambda) = \{E \in \mathbf{E}\colon\ p(x) > \lambda,\ x \in E \setminus \{0\}\}. \tag{5.3}$$

Тогда

1°. $n(\lambda) \geqslant 1$, $n(\lambda)$ — неубывающая функция,

2°. $K(\lambda) = \mathbf{E}$, $\lambda < \gamma_r$ и $K(\lambda) = \varnothing$, $\lambda > \gamma_d$,

3°. $K(\lambda) = \{E \in \mathbf{E}\colon\ (L_\lambda x, x) < 0,\ x \in E \setminus \{0\}\}$.

Следующая теорема есть аналог одного результата И. М. Глазмана (см., например, [18]).

Теорема 5.4. *Справедливо равенство*

$$n(\lambda) = \sup_{E \in K(\lambda)} \dim E, \quad \lambda > \gamma_d^{(\pi_1)}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Через n и N обозначим левую и правую часть (5.4) соответственно. Пусть $n < N$ и $E \in K(\lambda)$ такое, что $n < \dim E$. Согласно лемме 4.1 найдем $x \in E \setminus \{0\}$, $[x, x_i] = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Тогда $p(x) > \lambda \geqslant \gamma_d^{(\pi_1)}$ и в силу следствия 5.3 $[p(x), \lambda_n) \cap p\sigma \neq \varnothing$. Поэтому $n \geqslant N$. В случае $N = \infty$, (5.4) справедливо. Пусть, поэтому $N < \infty$. Если $n > N$, то интервал $(\lambda, \gamma_d]$ содержит не менее $N+1$ собственных значений. По лемме 4.6 $X_{N+1} \in K(\lambda)$, а это дает противоречие $N \geqslant \dim X_{N+1} = N+1$.

Известно, что если $A \in S_\infty$, $A > 0$ (это эквивалентно условию $\gamma_c = 0 \overline{\in} W$, $\pi(A) = \{0\}$), то A имеет счетное множество собственных значений. Нелинейным аналогом этого результата является

Теорема 5.5. *Если $\gamma_c \overline{\in} W$ и $\pi_1 = \{\gamma_c\}$, то существует счетное множество собственных значений конечной кратности, имеющих единственную предельную точку γ_c.*

Доказательство. В этом случае $\gamma_d^{(\pi_1)} = \gamma_c$, $H \in K(\gamma_c)$. Теперь теорема следует из леммы 2.4 и (5.4).

Нам нужен следующий аналог „неравенства Вейля“:

Лемма 5.6. *Если $E \in \mathrm{E}^i$, $1 \leqslant i \leqslant \bar{n} - 1$, то $\sup\limits_E p(x) \geqslant \lambda_n$.*

Доказательство. Так как $i \leqslant \bar{n} - 1$, то существует $y \neq 0$, $y \in X_{\bar{n}} \cap E$. Тогда по лемме 4.6 $\sup\limits_E p(x) \geqslant p(y) \geqslant \lambda_{\bar{n}} = \lambda_n$.

Следующая теорема есть также аналог принципа Релея (ср. с (5.1)).

Теорема 5.7. *Пусть $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \varnothing$. Тогда множество $(\beta, \gamma_d] \cap \cap \sigma_2 \neq \varnothing$ и состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$ ($\lambda_1 = \gamma_d$), которым соответствует такая последовательность линейно независимых собственных элементов, что*

$$\max_{\substack{[x,\, x_i]_{\lambda_n} = 0 \\ i = 1,\, \cdots,\, n-1}} p(x) = \lambda_n, \tag{5.5}$$

причем максимум в (5.5) *достигается на элементе* x_n $(n = 1, 2, \cdots)$.

Доказательство. (5.5), как и (5.1) доказывается по индукции и существенное различие в доказательстве начинается со случая б) (см. доказательство теоремы 5.1). По леммам 4.2, 2) и 4.6 $\Gamma^n(\lambda) \geqslant \lambda_{n+1}$ для $\lambda \leqslant \lambda_n$. Согласно лемме 4.4, тогда $\Gamma^n \in C[\lambda_{n+1}, \lambda_n]$. Кроме того, $\Gamma^n(\lambda_n) \leqslant \lambda_n$. Теперь нетрудно видеть, что существует точка $\theta \in [\lambda_{n+1}, \lambda_n]$ такая, что $\Gamma^n(\theta) = \theta$. По лемме 2.3 найдем $y \in E_\theta \setminus \{0\}$ такой, что $e_\theta^n L_\theta y = 0$ и $p(y) = \theta$. Теперь из п. 3 леммы 4.2 видим, что $L_\theta y = 0$, т. е. $\theta \in p\sigma$ и поэтому $\theta \overline{\in} (\lambda_{n+1}, \lambda_n)$. Если бы $\theta = \lambda_n$, то $y \in X_n$. Но $E^n(\lambda_n) \cap X_n = \{0\}$ и поэтому $\theta = \lambda_{n+1} = p(y)$, что и доказывает (5.5) для $k = n+1$. Оставшаяся часть доказательства как в теореме 5.1.

Следующая теорема есть аналог принципа Фишера—Куранта—Вейля.

Теорема 5.8. *Если $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \varnothing$, то*

$$\min_{E \in \mathrm{E}^{n-1}} \max_E p(x) = \lambda_n. \tag{5.6}$$

Доказательство. (5.6) следует из леммы 5.6 и того, что на $E^{n-1}(\lambda_n) \in \mathrm{E}^{n-1}$ неравенство Вейля превращается в равенство (см. (5.5)). Заметим, что в неравенстве Вейля верхняя грань достигается в силу леммы 2.3.

Другим вариантом неравенства Вейля является следующая

Лемма 5.9. *Пусть* $y_1, \cdots, y_i \in H$, $1 \leqslant i \leqslant \bar{n} - 1$, *тогда*

$$\sup \{p(x), [x, y_j] = 0, j = 1, \cdots, i\} \geqslant \lambda_n.$$

Доказательство. По лемме 4.1 найдем $y \in X_{\bar{n}} \setminus \{0\}$, $[y, y_j] = 0$, $j = 1, \cdots, i$. Далее доказательство как в лемме 5.6.

Аналогично (5.6) доказывается другой вариант принципа Фишера—Куранта—Вейля.

Теорема 5.10. *Если* $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_1 = \varnothing$, *то*

$$\min_{y_1, \cdots, y_{n-1}} \sup_{\substack{[x, y_j] = 0 \\ j = 1, \cdots, n-1}} p(x) = \lambda_n. \tag{5.7}$$

Нам нужен следующий аналог „неравенства Пуанкаре".

Лемма 5.11. *Если* $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \varnothing$ *и* $E \in \mathrm{E}_i$, $i \geqslant n$, *то*

$$\min_E p(x) \leqslant \lambda_n.$$

Доказательство. В силу того, что $E_-^{\bar{n}-1}(\lambda_{\underline{n}}) \in \mathrm{E}_-^{\bar{n}-1}$, существует $y \in E_-^{\bar{n}-1}(\lambda_{\underline{n}}) \cap E$, $y \neq 0$. Из теоремы 5.7 тогда $\min\limits_E p(x) \leqslant p(y) \leqslant$ $\leqslant \max\limits_{E_-^{\bar{n}-1}(\lambda_{\underline{n}})} p(x) = \lambda_{\underline{n}} = \lambda_n$.

Далее, не оговаривая, мы считаем, где нужно, выполненным условие теоремы 5.7.

Следующая теорема есть аналог принципа Пуанкаре-Ритца.

Теорема 5.12. *Справедливо равенство*

$$\max_{E \in \mathrm{E}_n} \min_E p(x) = \lambda_n. \tag{5.8}$$

Доказательство. (5.8) есть следствие леммы 5.11 и того факта, что на $X_n \in \mathrm{E}_n$ неравенство Пуанкаре превращается в равенство (см. лемму 4.6).

Если $E \subset H$, то на E индуцируется с.Р. (PL, p), где P—проектор на E. Пусть $\lambda_1(E) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(E) \geqslant \cdots$ее собственные значения. Обычным образом из вариационных принципов выводятся следующие следствия:

Следствие 5.13. Если (M, q)—другая с.Р. и $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \cdots$— ее собственные значения, причем $p(x) \leqslant q(x)$, $x \in H \setminus \{0\}$, то $\lambda_n \leqslant \mu_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

Следствие 5.14. Пусть $E_2 \subseteq E_1 \subseteq H$, $n \leqslant \dim E_2$, тогда

$$\lambda_n(E_2) \leqslant \lambda_n(E_1).$$

Следствие 5.15. Пусть $\|p\| = \sup |p(x)|$, $\|q\| < \infty$, тогда

$$|\lambda_n - \mu_n| \leqslant \|p - q\|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Следующая теорема есть аналог теоремы отделения Коши-Пуанкаре и следует из леммы 5.6 и теоремы 5.7.

Теорема 5.16. Пусть $E \in \mathrm{E}^l$, тогда $\lambda_{n+l} \leqslant \lambda_n^l \leqslant \lambda_n$, $n = 1, 2, \cdots$, где $\lambda_n^l = \lambda_n(E)$.

Следствие 5.17. Если $E = E^l(\lambda_{n+l})$, то $\lambda_{n+l} = \lambda_n^l$.

Следующая теорема есть аналог принципа Стенджера [1].

Теорема 5.18. *Пусть* $n=1, 2, \cdots$; $i = 0, 1, 2, \cdots$, *тогда*

$$\min_{E \in \mathrm{E}^l} \max_{F \in \mathrm{E}_n(E)} \min_F p(x) = \lambda_{n+l}.$$

Доказательство. Пусть $E \in \mathrm{E}^l$. Из теоремы 5.16 и принципа Пуанкаре-Ритца $\lambda_{n+l} \leqslant \lambda_n^l = \max\limits_{F \in \mathrm{E}_n(E)} \min\limits_F p(x)$. Заметим, далее, что следствие 5.17 обеспечивает существование подпространства $E \in \mathrm{E}^l$ такого, что $\lambda_{n+l} = \lambda_n^l$.

Принципы Фишера—Куранта—Вейля и Пуанкаре—Ритца следуют из принципа Стенджера. Первый — при $n = 1$, а второй — при $i = 0$.

Следующая теорема есть аналог теоремы отделения Штурма [19].

Теорема 5.19. *Пусть* $H = E^0 \supset E^1 \supset \cdots \supset E^k$, $E^l \in \mathrm{E}^l$, *тогда* $\lambda_{n+1}^{l-1} \leqslant \lambda_n^l \leqslant \lambda_n^{l-1}$, *т. е. собственные значения „перемеживаются"* $\lambda_1^{l-1} \geqslant \lambda_1^l \geqslant \lambda_2^{l-1} \geqslant \lambda_2^l \geqslant \lambda_3^{l-1} \geqslant \cdots$.

Это есть легкое следствие принципа Стенджера и следствия 5.14.

6. Выпуклые и вогнутые системы Релея

В этом параграфе считаем функцию L_λ дважды дифференцируемой на некотором интервале Λ, $W \subset \Lambda \subset (c, d)$. Кроме того, пусть выполнено следующее условие:

$$(L_\lambda' x, x) > 0, \ x \neq 0, \ \lambda \in \Lambda, \tag{6.1}$$

являющееся усилением условия (1.4) в определении p.

Определение 6.1. Система Релея (L, p) называется выпуклой, вогнутой или линейной (на Λ), если соответственно $L_\lambda'' \geqslant 0$, $L_\lambda'' = 0$, $L_\lambda'' \leqslant 0$, $\lambda \in \Lambda$. В последнем случае, $L_\lambda = \lambda B - A$.

С системой Релея (L, p) свяжем линейные с.Р. $(L_\lambda^{(\alpha)}, p_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, где

$$L_\lambda^{(\alpha)} = \lambda L_\alpha' - (\alpha L_\alpha' - L_\alpha), \quad p_\alpha(x) = \alpha - (L_\alpha x, x)/(L_\alpha' x, x). \tag{6.2}$$

Для удобства формулировок мы рассматриваем только выпуклые с.Р. Для вогнутых—результаты изменяются очевидным образом.

Доказательство сдедующей леммы несложно и использует идею „квазилинеаризации" Р. Беллмана [20].

Лемма 6.2. *Если* (L, p) — *выпуклая с.Р., то*

$$p(x) = \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x).$$

Допустим, что $(\beta, \gamma_d] \cap \pi_2 = \varnothing$, тогда для собственных значений из $(\beta, \gamma_d]$ справедлив принцип Пуанкаре-Ритца (5.8). По аналогии с (5.8) положим

$$\lambda_n(\alpha) = \sup_{E \in \mathrm{E}_n} \min_E p_\alpha(x), \ \alpha \in \Lambda, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{6.3}$$

Лемма 6.3. *Справедливо равенство* $\lambda_n(\lambda_n) = \lambda_n$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathrm{E}_n$, тогда в силу компактности сферы пространства E, $\min\limits_E p(x) = p(x_0)$, $x_0 \in E$. Из (5.8) $\lambda_n \geqslant p(x_0)$ и поэтому $(L_{\lambda_n} x_0, x_0) \geqslant 0$. Следовательно, $\min\limits_E p_{\lambda_n}(x) \leqslant \lambda_n$ и, тем самым, $\lambda_n(\lambda_n) \leqslant \lambda_n$. Если теперь $E = X_n$, то

$$\lambda_n(\lambda_n) = \min_{X_n} p_{\lambda_n}(x) = \lambda_n + \min_{X_n} \frac{(-L_{\lambda_n} x, x)}{(L'_{\lambda_n} x, x)}. \tag{6.4}$$

Из леммы 4.6 $p(x) \geqslant \lambda_n$, $x \in X_n$, поэтому $(-L_{\lambda_n} x, x)/(L'_{\lambda_n} x, x) \geqslant 0$, $x \in X_n$. Но так как $(L_{\lambda_n} x_n, x_n) = 0$, то второе слагаемое в (6.4) равно нулю. Это дает обратное неравенство $\lambda_n(\lambda_n) \geqslant \lambda_n$.

Лемма 6.4. *Если* (L, p) — *выпуклая с.Р., то*

$$\lambda_n = \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_n(\alpha).$$

Доказательство. Из леммы 6.2 $p(x) \leqslant p_\alpha(x)$, $\alpha \in \Lambda$. Тогда из (5.8) и (6.3) $\lambda_n(\alpha) \geqslant \lambda_n$. Теперь лемма 6.4 следует из леммы 6.3.

Используя вариационные принципы § 5, леммы 6.2 и 6.4, получим новые вариационные принципы для вогнутых и выпуклых с.Р. (они интересны тем, что в них не участвует функционал p, а все выражено через L_α и L'_α).

Теорема 6.5. *Пусть с.Р.* (L, p) *выпукла на* Λ *и выполнено условие* (6.1), *тогда справедливы следующие принципы*:

$$\lambda_n = \max_{\substack{[x, x_i] = 0 \\ i=1,\cdots,n-1}} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \max_{\substack{[x, x_i]_{\lambda_n} = 0 \\ i=1,\cdots,n-1}} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) =$$

$$= \min_{E \in \mathrm{E}^{n-1}} \sup_{x \in E} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \min_{y_1,\cdots,y_{n-1}} \sup_{\substack{[x, y_i] = 0 \\ i=1,\cdots,n-1}} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) =$$

$$= \max_{E \in \mathrm{E}_n} \min_{x \in E} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x) = \min_{\alpha \in \Lambda} \sup_{E \in \mathrm{E}_n} \min_{x \in E} p_\alpha(x),$$

$$\lambda_{n+i} = \min_{E \in \mathrm{E}^i} \max_{F \in \mathrm{E}_n(E)} \min_{x \in F} \min_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x),$$

где $p_\alpha(x) = \alpha - (L_\alpha x, x)/(L'_\alpha x, x)$, $n = 1, 2, \cdots$; $i = 0, 1, 2, \cdots$.

7. Некоторые следствия

1°. В работе [4] Роджерс показал, что в случае конечномерного пространства H существует базис из собственных элементов с.Р., а для собственных значений справедливы принципы (5.6) и (5.8). В [5] Хаделер установил справедливость принципа (5.1). В этом случае $\pi_1 =$

$=\pi_2=\varnothing$. Указанные результаты следуют из теорем 5.4, 5.6 и 5.8.

2°. В работе [11] Вернер доказал, что для собственных значений из интервала $(\gamma_d^{(w)}, \gamma_d]$ справедлив принцип Пуанкаре-Ритца. Его результат, а также справедливость и других принципов следуют из леммы 2.6 и теорем § 5.

3°. Пусть (L, p)—система Релея с функцией

$$L_\lambda = r(\lambda) B_\lambda - A_\lambda,\ \lambda \in (c, d), \tag{7.1}$$

где $r(\lambda)$—непрерывная на (c, d) функция, B_λ, A_λ: $(c, d) \to S$—непрерывные операторозначные функции, причем $|(B_\lambda x, x)| \geqslant k\|x\|^2$, $k>0$ и $A_\lambda \in S_\infty$, $\lambda \in W$. Считая $r(c) = r(d) = 0$, положим $\Lambda_r = \{\lambda \in \overline{W}: r(\lambda)=0\}$. Нетрудно видеть, что $\pi_1=\Lambda_r$ и, тем самым, для собственных значений из $(\beta, \gamma_d]$ справедливы все принципы § 5 с $\beta = \max\{\lambda: \lambda \in \Lambda_r\}$.

4°. В работе [8] Хаделер рассмотрел с.Р. с функцией

$$L_\lambda = r(\lambda) I - A_\lambda,\ \lambda \in (c, d), \tag{7.2}$$

где $r(\lambda)$ и A_λ удовлетворяют условиям п. 3. Так как (7.2) есть (7.1) при $B_\lambda = I$, то результаты Хаделера следуют из п. 3.

5°. В работе [6] Тёрнер рассмотрел с.Р. с функцией

$$L_\lambda = \lambda^n B_n + \cdots + \lambda^2 B_2 + \lambda I - A,\ \lambda \in (-\infty, \infty), \tag{7.3}$$

где $B_i \in S$, $A \in S_\infty$, $B_i \geqslant 0$, $i=2,\cdots, n$, $A>0$, а $p(x)$ есть единственное решение уравнения

$$(L_\lambda x, x)=0,\ \lambda \in R^+. \tag{7.4}$$

Тёрнер при некоторых ограничениях установил принципы (5.1), (5.6) и (5.8). В рассматриваемом случае $\pi_1=\pi_2=\{0\}$, $\gamma_c=0$. И из п. 3 при $B_\lambda = I + \sum_{\nu=2}^{n} \lambda^{\nu-1} B_\nu$, $A_\lambda = A$ следует существование счетного множества собственных значений, скапливающихся лишь к точке 0. Система Релея (7.3), (7.4) выпукла на R^+, и справедливы все принципы §§ 5 и 6.

6°. Пусть с.Р. (L, p) задана функцией

$$L_\lambda = \lambda^k I - \sum_{\nu=0}^{k-1} \lambda^\nu A_\nu,\ \lambda \in (-\infty, \infty), \tag{7.5}$$

где $A_\nu \in S_\infty$, $A_\nu \geqslant 0$, $\nu = 0, \cdots, k-1$, $A_{i_0}>0$ для некоторого i_0, $0 \leqslant i_0 \leqslant k-1$, а $p(x)$ есть единственное решение (7.4). В этом случае $\gamma_c = 0$, $\pi_1 = \pi_2 = \{0\}$, существует счетное множество собственных значений, для которых справедливы принципы § 5. Это есть следствие того, что (7.5) есть частный случай (7.1) при $r(\lambda) = \lambda^k$,

$$B_\lambda = I,\ A_\lambda = \sum_{\nu=0}^{k-1} \lambda^\nu A_\nu.$$

7°. Пусть (L, p) с.Р. с функцией

$$L_\lambda = B + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \lambda^\nu A_\nu, \quad \lambda \in \infty, \infty),$$

где $B = B_0 - A_0$, $A_\nu \in S_\infty$, $\nu = 0, \cdots, k$, $B \geq 0$, $A_1 > 0$, $A_\nu \geq 0$, $\nu = 2, \cdots, k$, $(B_0 x, x) \geq h \|x\|^2$, $h > 0$ и $p(x)$ есть единственное решение уравнения $(L_\lambda x, x) = 0$, $\lambda \in R^-$. В этом случае $\gamma_c = -\infty$, $W \subset (-\infty, 0]$, $\pi_1 = \pi_2 = \{-\infty\}$. Существует счетное множество собственных значений, скапливающихся лишь к $-\infty$. Система Релея вогнута на R^-, и справедливы все принципы §§ 5 и 6.

8°. Пусть $L_\lambda = \lambda^2 A + \lambda B + C$ — сильно демпфированный квадратичный пучок, т. е. $(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x) > 0$, $x \neq 0$. Из последнего условия следует (см. [9]) постоянство знака формы (Bx, x) на множестве $a_0 = \{x \neq 0;\ (Ax, x) = 0\}$. Пусть $(Bx, x) > 0$, $x \in a_0$. Положим

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(Ax, x)} [-(Bx, x) + d(x)], & x \notin a_0 \\ -(Cx, x)/(Bx, x), & x \in a_0, \end{cases}$$

где $d(x) = \{(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x)\}^{1/2}$. Из вышеуказанных условий легко следует, что (L, p) — система Релея. В работе [9] Кюне показал справедливость принципов (5.5) и (5.6). На самом деле, в рассматриваемом случае, как это следует из § 5, справедливы все вариационные принципы § 5.

9°. Лангер в [10] рассмотрел сильно демпфированный квадратичный пучок при следующих дополнительных ограничениях:

а) $C \geq 0$, б) $(Bx, x) > 0$, $x \in a_+ \cup c_0$, где $a_+ = \{x \neq 0;\ (Ax, x) \geq 0\}$, в) $0 \notin \sigma(A)$, г) $\sigma(A) \cap R^-$ состоит из $N < \infty$ собственных значений. Результаты Лангера легко следуют из теоремы 5.4 и результатов § 5.

Автор благодарен Д. Ф. Харазову за помощь в работе.

Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского

Поступила 25.I.1973

ՅՈՒ. Շ. ԱԲՐԱՄՈՎ. Պարամետրի նկատմամբ ոչ-գծային որոշ խնդիրների սեփական արժեքների վարիացիոն հատկությունները *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ ոչ-գծային խնդրի սեփական արժեքները բնութագրվում են վարիացիոն սկզբունքներով, որոնք հանդիսանում են Ռելեի, Ֆիշեր-Կուրանտ-Վեյլի, Պուանկարե-Ռիտցի դասական վարիացիոն սկզբունքների և Ստենչերի սկզբունքի նմանատիպերը։

Ju. Sh. ABRAMOV. *Variational properties of eigenvalues of some nonlinear problems* (summary)

It is proved that the eigenvalues of some nonlinear problem are characterized by variational principles analogous to the classical ones for linear problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Stenger.* On the variational principles for eigenvalues for a class of unbounded operators, J. Math. Mech., 17, 1968, 641—648.
2. *Л. Коллатц.* Задачи на собственные значения, М., 1968.
3. *R. J. Duffin.* A minimax theory for overdamped network, J. of Rat. Mech. Anal., 4, 1955, 221—233.
4. *E. H. Rogers.* A minimax theory for overdamped systems, Arch. Rat. Mech. Anal., 16, 1964, 89—96.
5. *K. P. Hadeler.* Mehrparametrige und nichtlineare Eigenwertaufgaben, Arch. Rat. Mech. Anal., 27, 1967, 306—328.
6. *R. E. L. Turner.* A class of nonlinear eigenvalue problems, J. of Func. Anal., 2. 1968, 297—322.
7. *R. E. L. Turner.* Some variational principles for a nonlinear eigenvalue problem, J. Math. Anal. and Appl., 17, 1967, 151—160.
8. *K. P. Hadeler.* Variationsprinzipien bei nichtlinearen Eigenwertaufgaben, Arch. Rat. Mech. Anal., 30, 1968, 297—307.
9. *R. Kühne.* Minimaxprinzipe für stark gedämpfte Scharen, Acta Sci Math. Szeqed, 29, №№ 1—2, 1968, 39—68.
10. *H. Langer.* Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum, J. Math. Mech., 17, 1968, 685—705.
11. *B. Werner.* Das Spectrum von Operatorscharen mit verallgemeinerten Rayleigh-quotienten, Arch. Rat. Mech. and Anal., 42, № 3, 1971, 223—238.
12. *E. H. Rogers.* Variational properties of nonlinear spectra, J. of Math. Mech., 18, 1968, 479—490.
13. *М. В. Келдыш.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 71, № 4, 1951, 11—14.
14. *Д. Ф. Харазов.* Спектральная теория вполне непрерывных линейных операторов, зависящих квадратично от параметра, Труды Тбил. мат. инст., 26, 1959, 172—187.
15. *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, Труды межд. симп. „Приложение теории функций в механике сплошной среды", М., 1965.
16. *W. Reid.* Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space, Duke Math. Journ., 18, № 1, 1951, 41—56.
17. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.
18. *И. М. Глазман.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963.
19. *Р. Беллман.* Введение в теорию матриц, М., 1969.
20. *Р. Беллман, Р. Калаба.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

Х. О МОВСИСЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

1°. Будем рассматривать на единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]\equiv[0,1]^2$ двойные ряды Хаара и Уолша

$$\sum_{n,\,m=0}^{\infty} a_{nm}\,\chi_{nm}(x,\,y), \tag{1}$$

$$\sum_{n,\,m=0}^{\infty} a_{nm}\,W_{nm}(x,\,y). \tag{2}$$

Под сходимостью каждого из этих рядов будем понимать стремление его частичных сумм $S_{nm}(x,\,y)$ к пределу, когда n и m стремятся к бесконечности независимо друг от друга. Это обстоятельство мы будем обозначать так: $(n,\,m)\to\infty$.

В настоящей работе исследуются вопросы единственности сходящихся всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, рядов (1) и (2), когда сходимость понимается в указанном выше смысле.

Заметим, что за последние годы было получено много результатов о единственности обычных (одномерных) рядов по системам Хаара и Уолша (см. [1], [2], [3], [4], [5], [8]), являющихся или аналогами известных теорем о единственности тригонометрических рядов или же содержащих утверждения, которые в случае тригонометрической системы до сих пор не доказаны.

В случае двойных рядов, когда рассматривается сходимость по прямоугольникам, опубликована работа [6]. В этой работе очень сложным путем установлена

Теорема А. Если тригонометрический ряд

$$\sum a_{mn}\,e^{i\,(mx+ny)}$$

сходится всюду к конечной суммируемой функции $f(x,\,y)$, то он является рядом Фурье функции $f(x,\,y)$.

Отметим, что теорема А доказана только для двойных тригонометрических рядов. Эта теорема в частности содержит аналог теоремы Кантора для двойных тригонометрических рядов, который до указанной работы также не был установлен.

В работе [7] без доказательства сформулирована теорема о единственности многомерных рядов по системе Хаара, когда под сходимостью понимается сходимость по ограниченным прямоугольникам.

Нами установлена теорема о единственности двойных рядов Хаара, являющаяся распространением теоремы 3 работы [1] Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна на двойные ряды Хаара, а также в усиленной форме доказан аналог теоремы А для двойных рядов Уолша.

В доказательстве этих теорем использованы метод работы [1] и одна лемма о свойствах коэффициентов всюду сходящихся двойных рядов Уолша (см. лемму 2).

Полученные теоремы формулируются следующим образом.

Теорема 1. *Пусть ряд* (1) *обладает свойствами:*

а) *некоторая подпоследовательность* $S_{N_k M_k}(x, y)$ *частичных сумм ряда* (1) *сходится к суммируемой функции* $f(x, y)$ *всюду на единичном квадрате* $[0,1]^2$, *кроме, быть может, счетного множества точек;*

в) *для любой точки* $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ *и для любого фиксированного* m

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{n_k m}}{\chi_{n_k m}(x_0, y_0)} = 0, \tag{3}$$

где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ *— все те номера, для которых* $\chi_{n_k m}(x_0, y_0) \neq 0$;

с) *для любой точки* $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ *и для любого фиксированного* n

$$\lim_{l \to \infty} \frac{a_{n m_l}}{\chi_{n m_l}(x_0, y_0)} = 0, \tag{4}$$

где $m_1 < m_2 < \cdots < m_l < \cdots$ *— все те номера, для которых* $\chi_{n m_l}(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда ряд* (1) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Хаара.*

Теорема 2. *Пусть ряд* (2) *сходится всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, к суммируемой функции* $f(x, y)$. *Тогда ряд* (2) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Уолша, т. е.*

$$a_{nm} = \iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y)\, W_{nm}(x, y)\, dxdy, \quad n, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Теорема 2 получается как следствие из доказанной в настоящей работе 2 и формулируемой ниже теоремы.

Теорема 3. *Пусть ряд* (2) *обладает свойствами:*

1°. $\lim\limits_{n \to \infty} a_{nm} = 0$ *при любом* m, $m = 0, 1, 2, \cdots$,

$\lim\limits_{m \to \infty} a_{nm} = 0$ *при любом* n, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

2°. *Для некоторых последовательностей натуральных чисел*

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_l < \cdots,$$

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_i < \cdots$$

частные суммы $S_{2^{k_i} 2^{l_i}}(x, y)$, $i = 1, 2, \cdots,$ *ряда* (2) *при* $i \to \infty$ *сходятся к суммируемой функции* $f(x, y)$ *всюду, кроме, быть может, счетного множества точек. Тогда ряд* (2) *является рядом Фурье функции* $f(x, y)$ *по двойной системе Уолша, т. е.*

$$a_{nm} = \iint_{[0, 1]^2} f(x, y)\, W_{nm}(x, y)\, dxdy, \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots.$$

Эти теоремы верны также для n-кратных ($n>2$) рядов по системам Хаара и Уолша. Доказательство теорем в общем случае совпадает с доказательствами теорем 1, 2, 3, сформулированных для двойных рядов.

Прежде чем приступить к доказательству теорем, напомним определения систем Хаара и Уолша.

Система Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\ \chi_1^{(2)}(x),\ \cdots,\ \chi_n^{(1)}(x), \cdots,\ \chi_n^{(2^n)}(x), \cdots \tag{5}$$

определяется следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x) = 1 \text{ при } x \in [0, 1],$$

$$\chi_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 \text{ при } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 \text{ при } x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Для определения функций $\chi_n^{(k)}(x)$, $n=1, 2, \cdots$, $k=1, 2, \cdots, 2^n$, разделим отрезок [0, 1] на 2^{n+1} равных частей и обозначим через $\Delta_n^{(i)}$, $i=1, 2, \cdots, 2^{n+1}$, полученные открытые интервалы. Положим

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} \text{ при } x \in \Delta_n^{(2k-1)} \\ -\sqrt{2^n} \text{ при } x \in \Delta_n^{(2k)} \\ 0 \text{ при } x \in \Delta_n^{(i)},\ i \neq 2k-1, 2k,\ 1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}. \end{cases} \tag{6}$$

В точках $x=0$ и $x=1$ значения функции $\chi_n^{(k)}(x)$ полагаем равными ее значениям, соответственно, на интервалах $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2^{n+1})}$. В остальных точках значения функции $\chi_n^{(k)}(x)$ принимаются равными среднему арифметическому ее левого и правого пределов.

Через

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \chi_2(x), \cdots, \chi_n(x), \cdots \tag{7}$$

обозначаются функции системы Хаара, перенумерованные в порядке (5).

Система Уолша

$$W_0^{(0)}(x),\ W_0^{(1)}(x),\ W_1^{(1)}(x),\ W_1^{(2)}(x),\cdots,\ W_n^{(1)}(x),\cdots,\ W_n^{(2^n)}(x),\cdots \quad (8)$$

определяется через систему Хаара (см. [9], стр. 155) следующим образом:

$$W_0^{(0)}(x)=\chi_0^{(0)}(x),\ W_0^{(1)}(x)=\chi_0^{(1)}(x), \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} W_1^{(1)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_1^{(1)}(x)+\chi_1^{(2)}(x)\right]\\ W_1^{(2)}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_1^{(1)}(x)-\chi_1^{(2)}(x)\right]\end{aligned}\right\}, \quad (10)$$

и вообще

$$W_n^{(k)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{l=1}^{2^n} a_{kl}^{(n)}\ \chi_n^{(l)}(x),\quad n=2,3,\cdots;\ k=1,2,\cdots,2^n, \quad (11)$$

где выбранная определенным образом матрица $\|a_{kl}^{(n)}\|$ такова, что ее строки ортогональны и $a_{kl}^{(n)}=\pm 1$.

Через

$$W_0(x),\ W_1(x),\ W_2(x),\cdots,\ W_n(x),\cdots,$$

обозначаются функции системы Уолша, перенумерованные в порядке (8).

Двойные системы Хаара и Уолша соответственно определяются следующим образом:

$$\chi_{nm}(x,y)=\chi_n(x)\cdot\chi_m(y)\quad (x,y)\in[0,1]^2,\ n,m=0,1,2,\cdots, \quad (12)$$

$$W_{nm}(x,y)=W_n(x)\cdot W_m(y)\quad (x,y)\in[0,1]^2,\ n,m=0,1,2,\cdots. \quad (13)$$

II°. **Доказательство теоремы 1.** Пусть ряд

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm}\chi_{nm}(x,y) \quad (14)$$

является рядом Фурье функции $f(x,y)$ по двойной системе Хаара, и пусть подпоследовательность $\{S_{N_k M_k}(x,y)\}$ частных сумм ряда (1) сходится к $f(x,y)$ всюду на квадрате $[0,1]^2$, кроме, быть может, точек z_k, $k=1,2,\cdots$, $z_k\in[0,1]^2$.

Предполагая, что ряды (1) и (14) не совпадают, т. е. что $a_{nm}\neq c_{nm}$ хотя бы для одного номера (n,m), мы придем к противоречию, доказав, что тогда будет существовать точка $(\xi,\eta)\in[0,1]^2$, отличная от всех точек z_k, $k=1,2,\cdots$, в которой последовательность $S_{N_k M_k}(x,y)$ расходится.

Через $\Delta_{nm}^{(1)}$ и $\Delta_{nm}^{(3)}$ обозначим те наибольшие прямоугольники, внутри которых функция $\chi_{nm}(x,y)$ принимает положительные значения, а через $\Delta_{nm}^{(2)}$ и $\Delta_{nm}^{(4)}$ — те наибольшие прямоугольники, внутри которых функция $\chi_{nm}(x,y)$ принимает отрицательные значения.

Нетрудно проверить следующие свойства ряда (14).

I. Частные суммы ряда (14) на своих прямоугольниках постоянства равны интегральному среднему функции $f(x, y)$ в соответствующих прямоугольниках. Прямоугольником постоянства частной суммы $S_{nm}(x, y)$ мы называем всевозможные декартовые произведения, $\Delta_x \times \Delta_y$, где каждый интервал Δ_x является максимальным интервалом постоянства одновременно для всех функций $\chi_0(x), \chi_1(x), \cdots, \chi_n(x)$ и Δ_y является таким интервалом для всех функций $\chi_0(y), \chi_1(y), \cdots, \chi_m(y)$. Очевидно интервалов Δ_x будет n штук и Δ_y — m штук. Интервалы Δ_x (соответственно Δ_y) попарно не пересекаются и покрывают отрезок $[0, 1]$.

II. Частные суммы ряда (14) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

III. Ряд (14) сходится в метрике L_1 к $f(x, y)$.

Обозначим через $\sigma_{nm}(x, y)$ частные суммы ряда (14). Из свойства III следует, что некоторая подпоследовательность последовательности $\sigma_{N_k M_k}(x, y)$ сходится почти всюду к $f(x, y)$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{N_k M_k}(x, y) = f(x, y) \tag{15}$$

почти всюду на $[0, 1]^2$.

В силу условия а) теоремы 1 и (15) будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} [S_{N_k M_k}(x, y) - \sigma_{N_k M_k}(x, y)] = 0 \tag{16}$$

почти всюду на $[0, 1]^2$.

Далее, ряд (14) удовлетворяет условиям в) и с) теоремы 1. В самом деле

$$|c_{nm}| = \left|\iint\limits_{[0,1]^2} f(x, y)\,\chi_{nm}(x, y)\,dxdy\right| \leqslant \max_{[0,1]^2} |\chi_{nm}(x, y)| \left[\iint\limits_{\Delta_{nm}^{(1)}} |f(x, y)|\,dxdy + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\Delta_{nm}^{(2)}} |f(x, y)|\,dxdy + \iint\limits_{\Delta_{nm}^{(3)}} |f(x, y)|\,dxdy + \iint\limits_{\Delta_{nm}^{(4)}} |f(x, y)|\,dxdy \right].$$

Отсюда, так как $\mathrm{mes}\,(\Delta_{nm}^{(1)} \cup \Delta_{nm}^{(2)} \cup \Delta_{nm}^{(3)} \cup \Delta_{nm}^{(4)}) \to 0$ при $n + m \to \infty$, следует

$$\lim_{n+m\to\infty} \frac{c_{nm}}{\max\limits_{[0,1]^2} |\chi_{nm}(x, y)|} = 0, \tag{17}$$

из которого вытекает выполнение условий в) и с).

Пусть p_1 — наименьший номер n, для которого при некотором значении $m = m_0$, $c_{nm_0} \neq a_{nm_0}$, а q_1 — наименьший номер m, для которого $c_{p_1 m} \neq a_{p_1 m}$. Тогда будут выполнены следующие условия:

1) Внутри некоторого замкнутого прямоугольника вида $\overline{\Delta}_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$ $i_{p_1q_1}=1$ или 2* частные суммы $S_{p_1q_1}(x, y)$ и $\sigma_{p_1q_1}(x, y)$ рядов (1) и (14) принимают отличные друг от друга постоянные значения.

2) При $p>p_1$ и $q>q_1$ функция $\chi_{pq}(x, y)$ может принимать отличные от нуля значения или только на прямоугольнике $\overline{\Delta}_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$, или же только вне прямоугольника $\Delta_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$.

Выполнение этих условий непосредственно следует из определения двойной системы Хаара и из выбора чисел p_1 и q_1.

Для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть x_0 и y_0—произвольные точки отрезка* $[0, 1]$ *и через* $[x_0]$ *и* $[y_0]$ *соответственно обозначены отрезки прямых* $x=x_0$ *и* $y=y_0$, *лежащие в квадрате* $[0, 1]^2$.

Пусть p_0, q_0 — произвольные натуральные числа, для которых выполнены условия 1) *и* 2), *т. е.*

α) *Внутри некоторого прямоугольника* $\overline{\Delta}_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$, *где* $i_{p_0q_0}=1$ *или* 2, *частные суммы* $S_{p_0q_0}(x, y)$ *и* $\sigma_{p_0q_0}(x, y)$ *рядов* (1) *и* (14) *принимают отличные друг от друга постоянные значения.*

β) *При* $p>p_0$ *и* $q>q_0$ *функция* $\chi_{pq}(x, y)$ *может принимать отличные от нуля значения или только на прямоугольнике* $\overline{\Delta}_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$ *или только вне* $\Delta_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$.

Тогда для любого $Q>0$ *и натуральных чисел* M, N *можно определить числа* $N_k\in[N_k]$ *и* $M_k\in[M_k]$, *натуральные числа* p *и* q, *прямоугольник вида* $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}$, $i_{pq}=1$ *или* 2, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

1°. $N_k>N$, $M_k>M$;

2°. *прямоугольник* $\overline{\Delta}_{pq}^{(i_{pq})}$ *не пересекается с отрезками* $[x_0]$ *и* $[y_0]$ *и* $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}\subset\Delta_{p_0q_0}^{(i_{p_0q_0})}$;

3°. *частная сумма* $S_{N_kM_k}(x, y)$ *ряда* (1) *постоянна внутри прямоугольника* $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}$ *и по абсолютной величине больше* Q;

4°. *для чисел* p, q *и прямоугольника* $\Delta_{pq}^{(i_{pq})}$ *выполнены условия* α) *и* β), *в которых вместо* p_0 *и* q_0 *взяты соответственно* p *и* q.

Доказательство. Сначала докажем существование чисел p_0', q_0' и прямоугольника $\Delta_{p_0'q_0'}^{(i_{p_0'q_0'})}$, $i_{p_0'q_0'}=1$ или 2, которые удовлетворяют условиям α) и β), где вместо p_0 и q_0 взяты соответственно p_0' и q_0', причем

---

* Когда $p_1=0$, $q_1=0$, прямоугольник $\overline{\Delta}_{p_1q_1}^{(i_{p_1q_1})}$ совпадает с квадратом $[0, 1]^2$. Здесь $\overline{\Delta}$ обозначает замыкание прямоугольника Δ.

$$\Delta^{(l'_{p_0'q_0'})}_{p_0'q_0'} \subset \Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0} \text{ и } [x_0] \cap \overline{\Delta}^{(l'_{p_0'q_0'})}_{p_0'q_0'} = \varnothing,\ [y_0] \cap \overline{\Delta}^{(l'_{p_0'q_0'})}_{p_0'q_0'} = \varnothing. \tag{18}$$

В силу условия α) имеем

$$S_{p_0q_0}(x, y) - \sigma_{p_0q_0}(x, y) = d \tag{19}$$

всюду внутри прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0}$, где d — отличная от нуля постоянная.

Рассмотрим ряд

$$d + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{q_0} \left(a^{(l_i)}_{p_0ij} - c^{(l_i)}_{p_0ij}\right) \chi^{(l_i)}_{p_0i}(x) \chi_j(y), \tag{20}$$

где $\chi^{(l_i)}_{p_0i}(x)$, $i=1, 2, \cdots$ — все те функции системы Хаара, которые равны нулю вне проекции прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0}$ на ось x, а числа $a^{(l_i)}_{p_0ij}$ и $c^{(l_i)}_{p_0ij}$ — коэффициенты функций $\chi^{(l_i)}_{p_0i}(x) \chi_j(y)$ в рядах (1) и (14) соответственно.

Положим

$$d_{ij} = a^{(l_i)}_{p_0ij} - c^{(l_i)}_{p_0ij},\ i=1, 2, \cdots;\ j = 1, 2, \cdots, q_0 \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{q_0} d_{ij} \chi_j(y) = b_i(y). \tag{22}$$

Ясно, что в точках проекции прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0}$ на ось y функция $b_i(y)$ принимает постоянное значение. Поэтому в прямоугольнике $\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0}$ ряд (20) можно записать в виде

$$d + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(y) \chi^{(l_i)}_{p_0i}(x), \tag{23}$$

где $b_i(y) \equiv \mathrm{const}$ в точках проекции прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0}$ на ось y.

Обозначим через $\Delta^{(1)}_{p_0q_0i}$ и $\Delta^{(2)}_{p_0q_0i}$ те прямоугольники, лежащие в $\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0}$, внутри которых функция $b_i(y) \chi^{(l_i)}_{p_0i}(x)$, $i = 1, 2, \cdots$, принимает соответственно положительные и отрицательные значения. Очевидно найдется по крайней мере одна последовательность вложенных прямоугольников $\Delta^{(\gamma_k)}_{p_0q_0i_k}$, $\gamma_k=1$ или 2, $k=1, 2, \cdots$, такая, что

$$\Delta^{(\gamma_1)}_{p_0q_0i_1} \supset \Delta^{(\gamma_2)}_{p_0q_0i_2} \supset \cdots \supset \Delta^{(\gamma_k)}_{p_0q_0i_k} \supset \cdots,\ \mathrm{mes}\, \Delta^{(\gamma_{k+1})}_{p_0q_0i_{k+1}} = \frac{1}{2} \mathrm{mes}\, \Delta^{(\gamma_k)}_{p_0q_0i_k} \tag{24}$$

и

$$[x_0] \cap \overline{\Delta}^{(\gamma_k)}_{p_0q_0i_k} \neq \varnothing,\ k=1, 2, \cdots. \tag{25}$$

Рассмотрим также последовательность прямоугольников $\Delta^{(\gamma'_k)}_{p_0q_0i_k}$, $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$, где $\gamma'_k \neq \gamma_k$, $\gamma'_k = 1$ или 2.

А приори возможны только два случая:

I) Частные суммы ряда (23) с номерами i_k, $k=1, 2, \cdots$, обращаются в нуль внутри прямоугольников $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ для всех $k=1, 2, \cdots$, т. е.

$$d+\sum_{l=1}^{i_k} b_l(y)\,\chi^{(i_0)}_{p_0 l}(x)=0 \tag{26}$$

всюду внутри $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$, $k=1, 2, \cdots$.

II) Равенство (26) имеет место не для всех $k=1, 2, \cdots$.

Из определения прямоугольников $\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ и $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ непосредственно видно, что

$$\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, i_1}\equiv\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, 1}\subset\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0},\quad \Delta^{(\tau'_{k+1})}_{p_0q_0\, i_{k+1}}\subset\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k},\quad k=1, 2, \cdots, \tag{27}$$

$$\operatorname{mes}\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, i_1}=\frac{1}{2}\operatorname{mes}\Delta^{(l_{p_0q_0})}_{p_0q_0},\quad \operatorname{mes}\Delta^{(\tau'_{k+1})}_{p_0q_0\, i_{k+1}}=\frac{1}{2}\operatorname{mes}\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k},\quad k=1, 2, \cdots. \tag{28}$$

Далее, по определению $\Delta^{(\tau_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ и $\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}$ суть те прямоугольники, внутри которых функция $b_l(y)\,\chi^{(i_0)}_{p_0 i_k}(x)$ принимает постоянные значения разных знаков, равных по абсолютной величине. Поэтому ясно, что в случае I), т. е. когда выполнены равенства (26), имеем

$$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, i_1}}|b_{i_1}(y)\,\chi^{(i_0)}_{p_0 i_1}(x)|=\max\limits_{\Delta^{(\tau'_1)}_{p_0q_0\, 1}}|b_1(y)\,\chi^{(i_0)}_{p_0 1}(x)|=|d|\\ \max\limits_{\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}}|b_{i_k}\chi^{(i_0)}_{p_0 i_k}(x)|=2^{k-1}\cdot|d|,\ k=1, 2, \cdots\end{array}\right\}. \tag{29}$$

В силу (22)

$$\max_{\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}}\left|\chi^{(i_0)}_{p_0 i_k}(x)\sum_{j=1}^{q_0} d_{i_k j}\,\chi_j(y)\right|=2^{k-1}\cdot|d|. \tag{30}$$

Следовательно, для каждого k, $k=1, 2, \cdots$ найдется номер j_k, $1\leqslant j_k\leqslant q_0$ такой, что

$$\max_{\Delta^{(\tau'_k)}_{p_0q_0\, i_k}}|d_{i_k j_k}\,\chi^{(i_0)}_{p_0 i_k}(x)\,\chi_{j_k}(y)|\geqslant\frac{2^{k-1}\cdot|d|}{q_0},\quad k=1, 2, \cdots. \tag{31}$$

Отсюда следует существование числа j_0, для которого имеет место соотношение

$$\max_{[0,1]^2}|d_{i_{k_l} j_0}\,\chi^{(i_0)}_{p_0 i_{k_l}}(x)\,\chi_{j_0}(y)|=\max_{\Delta^{(\tau'_{k_l})}_{p_0q_0\, i_{k_l}}}|d_{i_{k_l} j_0}\,\chi^{(i_0)}_{p_0 i_{k_l}}(x)\,\chi_{j_0}(y)|\geqslant\frac{2^{k_l-1}\cdot|d|}{q_0} \tag{32}$$

при $l=1, 2,\cdots$.

Пусть m_0 и ν_0—те числа, для которых $\chi^{(l_0)}_{p_0 j_1}(x)\equiv\chi^{(\nu_0)}_{m_0}(x)$. Тогда

$$\max_{[0,\,1]}|\chi^{(l_0)}_{p_0 l_1}(x)|=\sqrt{2^{m_0}}. \tag{33}$$

В силу (24), (27) и (28) имеют место также равенства

$$\max_{[0,\,1]}|\chi^{(l_0)}_{p_0 l_{k_l}}(x)|=\sqrt{2^{m_0+k_l-1}},\ l=1,\ 2,\cdots. \tag{34}$$

Сравнивая неравенства (32) с равенствами (33) и (34), получаем

$$\frac{|d_{l\,k_l,\,j_0}|}{\max\limits_{[0,\,1]^2}|\chi^{(l_0)}_{p_0 l_{k_l}}(x)\,\chi_{j_0}(y)|}\geqslant\frac{|d|}{q_0\cdot 2^{m_0}},\ l=1,\ 2,\cdots. \tag{35}$$

Пусть $y_0\in\{y;\ \chi_{j_0}(y)\neq 0\}$ — некоторая двоично-иррациональная точка. В том случае, когда x_0 не является двоично-рациональной точкой, из (35) следует, что

$$\frac{|d_{l_{k_l},\,j_0}|}{|\chi^{(l_0)}_{p_0 l_{k_l}}(x_0)\,\chi_{j_0}(y_0)|}>\frac{|d|}{q_0\cdot 2^{m_0}},\quad l=1,\ 2,\cdots. \tag{36}$$

Если же x_0—двоично-рациональная точка, то из определения значений функций системы Хаара в таких точках непосредственно следует, что в точке $(x_0,\ y_0)$ тоже выполняются неравенства (36).

С другой стороны, очевидно, что ряд

$$\sum_{n,\,m=0}^{\infty}(a_{nm}-c_{nm})\,\chi_{nm}(x,\ y) \tag{37}$$

удовлетворяет условиям в) и с) теоремы 1, так как он представляет собой разность рядов (1) и (14), для которых эти условия выполнены. Поэтому будем иметь

$$\lim_{l\to\infty}\frac{|d_{l\,k_l,\,j_0}|}{|\chi^{(l_0)}_{p_0 l_{k_l}}(x_0)\,\chi_{j_0}(y)|}=0, \tag{38}$$

что противоречит соотношению (36). Таким образом, случай I) не имеет места.

Допустим, что имеет место случай II). Пусть $k=s$ — наименьший номер, для которого равенство (26) не выполнено. Тогда из определения прямоугольников $\Delta^{(\,i'_k)}_{p_0 l_0 j_k}$ следует, что

$$d+\sum_{l=1}^{i_s}b_l(y)\,\chi^{(l_0)}_{p_0 l}(x)=d' \tag{39}$$

всюду внутри прямоугольника $\bar{\Delta}^{(\,i'_s)}_{p_0 l_0 i_s}$, где d' — отличная от нуля постоянная. Пусть t — тот номер, для которого функция $\chi^{(l_s)}_{p_0 i_s}(x)$ совпадает с функцией $\chi_t(x)$. Тогда прямоугольник $\Delta^{\left(\tau_s'\right)}_{p_0 q_0 i_s}$ будет иметь вид $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$, $\gamma_{tq_0}=1$ или 2.

Из условия β) леммы 1, равенства (19), определения функций $\chi^{(l_s)}_{p_0 i}(x)$ и чисел $a^{(l_s)}_{p_0 ij}, c^{(l_s)}_{p_0 ij}$ следует, что частная сумма ряда (37) с номером (t, q_0) внутри прямоугольника $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$ принимает значение d' (см. (39)), т. е.

$$S_{tq_0}(x, y)-\sigma_{tq_0}(x, y)=d'\neq 0 \tag{40}$$

всюду внутри прямоугольника $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$, причем $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}\subset\Delta^{(l_{p_0 q_0})}_{p_0 q_0}$.

Можно считать, что число t и прямоугольник $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$ помимо свойства (40) обладают также свойством

$$[x_0]\cap\bar{\Delta}^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}=\varnothing.$$

В самом деле, если бы имело место $[x_0]\cap\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}\neq\varnothing$, то точка $x=x$ была бы правым или левым концом проекции прямоугольника $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$ на ось x и тогда дословным повторением предыдущих рассуждений, где вместо чисел p_0, q_0 и прямоугольника $\Delta^{(l_{p_0 q_0})}_{p_0 q_0}$ взяты, соответственно числа t, q_0 и прямоугольник $\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$, определим число $p_0'>t$ и прямоугольник $\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0}\right)}_{p_0' q_0}$, $\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0}\right)}_{p_0' q_0}\subset\Delta^{(\gamma_{tq_0})}_{tq_0}$ такие, что $[x_0]\cap\bar{\Delta}^{\left(\tau_{p_0' q_0}\right)}_{p_0' q_0}=\varnothing$ и выполнено (40) при $t=p_0'$.

Повторением тех же рассуждений относительно переменной y, определим число $q_0'>q_0$ и прямоугольник $\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}$ такие, что

$$\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}\subset\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0}\right)}_{p_0' q_0},\quad [y_0]\cap\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}=\varnothing$$

и

$$S_{p_0' q_0'}(x, y)-\sigma_{p_0' q_0'}(x, y)=c\neq 0$$

всюду внутри прямоугольника $\bar{\Delta}^{\left(\tau_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}$.

Таким образом, взяв $\Delta^{\left(l_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}\equiv\Delta^{\left(\tau_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}$, имеем

$$\Delta^{\left(l_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}\subset\Delta^{\left(l_{p_0 q_0}\right)}_{p_0 q_0},\quad [x_0]\cap\bar{\Delta}^{\left(l_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}=\varnothing,\quad [y_0]\cap\bar{\Delta}^{\left(l_{p_0' q_0'}\right)}_{p_0' q_0'}=\varnothing, \tag{41}$$

$$S_{p_0'\,q_0'}(x, y) - \sigma_{p_0'\,q_0'}(x, y) = c \tag{42}$$

всюду внутри $\overline{\Delta}^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$, где c — отличная от нуля постоянная.

Ясно, что прямоугольник $\overline{\Delta}^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$ не содержит точки (x_0, y_0) и обладает свойствами α) и β), где вместо p_0 и q_0 взяты соответственно p_0' и q_0'.

Рассмотрим частные суммы $S_{nm}(x, y)$ и $\sigma_{nm}(x, y)$ рядов (1) и (14), где $n > p_0'$, $m > q_0'$ внутри прямоугольника $\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$.

Обозначим

$$S^{*}_{nm}(x, y) = S_{nm}(x, y) - S_{p_0'\,q_0'}(x, y),\ \sigma^{*}_{nm}(x, y) = \sigma_{nm}(x, y) - \sigma_{p_0'\,q_0'}(x, y). \tag{43}$$

Тогда при $N_k > p_0'$, $M_k > q_0'$ будем иметь

$$S_{N_k M_k}(x, y) = S^{*}_{N_k M_k}(x, y) + S_{p_0'\,q_0'}(x, y),\ \sigma_{N_k M_k}(x, y) =$$

$$= \sigma^{*}_{N_k M_k}(x, y) + \sigma_{p_0'\,q_0'}(x, y). \tag{44}$$

Пусть $Q > 0$, M и N — числа, фигурирующие в формулировке леммы. Возьмем

$$k_0 > p_0',\ k_0 > q_0',\ N_{k_0} > N,\ M_{k_0} > M. \tag{45}$$

Мы утверждаем, что неравенства

$$|S_{N_k M_k}(x, y)| \leqslant Q + |\sigma_{N_k M_k}(x, y)|,\ k \geqslant k_0 \tag{46}$$

не могут выполняться почти всюду на прямоугольнике $\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$.

В самом деле, из свойства II ряда (14) следует, что функции $\sigma_{N_k M_k}(x, y)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на прямоугольнике $\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$. Если бы каждое из неравенств (46) выполнялось почти всюду на $\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$, то функции $S_{N_k M_k}(x, y)$, $k \geqslant k_0$, тоже имели бы равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на прямоугольнике $\Delta^{(l,\,p_0',\,q_0')}_{p_0,\,q_0}$. Тогда в силу (16) и по теореме Витали о переходе к пределу под знаком интеграла мы имели бы

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}} [S_{N_kM_k}(x, y) - \sigma_{N_kM_k}(x, y)]\, dxdy = 0. \tag{47}$$

Так как

$$\iint\limits_{\Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}} S^{*}_{N_kM_k}(x, y)\, dxdy = 0, \qquad \iint\limits_{\Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}} \sigma^{*}_{N_kM_k}(x, y)\, dxdy = 0,$$

то в силу (42) и (44)

$$\iint\limits_{\Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}} [S_{N_kM_k}(x, y) - \sigma_{N_kM_k}(x, y)]\, dxdy = c\cdot \mathrm{mes}\, \Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0} \neq 0,\ k \geqslant k_0,$$

которое противоречит равенству (47).

Пусть $k \geqslant k_0$ —наименьшее число, для которого не выполнено неравенство (46), т. е. неравенство

$$|S_{N_kM_k}(x, y)| > Q + |\sigma_{N_kM_k}(x, y)| \tag{48}$$

имеет место на некотором подмножестве положительной меры прямоугольника $\Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}$.

Пусть $2^{r_k} \leqslant N_k < 2^{r_k+1}$, $2^{s_k} \leqslant M < 2^{s_k+1}$. Тогда, очевидно, неравенство (48) будет выполняться на некотором прямоугольнике вида $\Delta^{(lpq)}_{pq} \subset \Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}$, являющемся прямоугольником постоянства функции $\chi_{pq}(x, y)$. $2^{r_k-1} < p < 2^{r_k+1}$, $2^{s_k-1} < q < 2^{s_k+1}$.

Найденные числа N_k, M_k и прямоугольник $\Delta^{(lpq)}_{pq}$ удовлетворяют требованиям леммы 1.

Свойство 1° вытекает из (45) и из того, что $k \geqslant k_0$. Свойство 2° вытекает из (41) и из того, что $\Delta^{(lpq)}_{pq} \subset \Delta^{\left(l\ p_0'\ q_0'\right)}_{p_0\ q_0}$. Свойство 3° следует из выбора прямоугольника $\Delta^{(lpq)}_{pq}$ и из (48). Из выбора прямоугольника $\Delta^{(lpq)}_{pq}$ также вытекает, что

$$\sigma_{pq}(x, y) = \sigma_{N_kM_k}(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(lpq)}_{pq}, \tag{49}$$

$$S_{pq}(x, y) = S_{N_kM_k}(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Delta^{(lpq)}_{pq}. \tag{50}$$

Так как частные суммы $S_{pq}(x, y)$ и $\sigma_{pq}(x, y)$ постоянны на прямоугольнике $\Delta_{pq}^{(l_{pq})}$, то из (48) следует, что эти постоянные отличны друг от друга. Следовательно числа p, q и прямоугольник $\Delta_{pq}^{(l_{pq})}$ удовлетворяют условию α) леммы, где положено $p_0=p$ и $q_0=q$.

Так как прямоугольник $\Delta_{pq}^{(l_{pq})}$ есть один из прямоугольников постоянства функции $\chi_{pq}(x, y)$, то ясно, что выполнено также условие β) леммы, где положено $p_0=p$ и $q_0=q$. Тем самым требование леммы 1 тоже выполнено.

Легко видеть, что теорема 1 непосредственно следует из доказанной леммы 1 и из того, что выполнены условия 1) и 2).

В самом деле, пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — множество абсцисс точек z_k и всех двоично-рациональных точек на $[0, 1]$ и $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ — множество ординат точек z_k и всех двоично-рациональных точек на $[0, 1]$. Последовательным применением леммы 1, в формулировке которой вместо точки $(x_0\ y_0)$ берутся $\{(x_k, y_l)\}_{k, l=1}^{\infty} \equiv \{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, можно определить подпоследовательности $\{N_{k_n}\}$ и $\{M_{k_n}\}$ последовательностей $\{N_k\}$ и $\{M_k\}$ соответственно, прямоугольники $\Delta_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}$, $n=1, 2, \cdots$, $i_{\tau_n\delta_n}=1$ или 2, которые обладают свойствами

$$\Delta_{p_1q_1}^{(l_{p_1q_1})} \supset \Delta_{\tau_1\delta_1}^{(l_{\tau_1\delta_1})}, \quad \Delta_{\tau_{n+1}\delta_{n+1}}^{(l_{\tau_{n+1}\delta_{n+1}})} \subset \Delta_{\tau_n\delta_n}, \tag{51}$$

$$[a_n] \cap \overline{\Delta}_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})} = \varnothing, \quad [b_n] \cap \overline{\Delta}_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})} = \varnothing, \tag{52}$$

$$|S_{N_{k_n}M_{k_n}}(x, y)| > n \tag{53}$$

для всех $(x, y) \in \Delta_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}$, $n=1, 2, \cdots$.

Из определения последовательности $\{(a_n, b_n)\}$ и из (51) и (52) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} \Delta_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})} = 0$$

и общая точка (ξ, η) прямоугольников $\overline{\Delta}_{\tau_n\delta_n}^{(l_{\tau_n\delta_n})}$ для всех этих прямоугольников будет внутренней точкой. На основании (53) следует, что последовательность $S_{N_{k_n}M_{k_n}}(x, y)$ в точке (ξ, η) расходится, чего не может быть, так как (ξ, η) отлична от всех точек z_k, $k=1, 2, \cdots$ (см. (52)). Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 3 получается из теоремы 1 следующим образом:

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} a_{ij} W_i(x) W_j(y), \tag{55}$$

где $W_{2^{-1}}(x)\equiv W_{2^{-1}}(y)\equiv 0$.

Подставляя вместо функций $W_i(x)$ и $W_j(y)$ их выражения (9), (10), (11), получим ряд

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m} \alpha_{nm}^{(ij)} \chi_n^{(i)}(x)\chi_m^{(j)}(y), \tag{56}$$

где

$$\sum_{i=1}^{2^n}\sum_{j=1}^{2^m} \alpha_{nm}^{(ij)} \chi_n^{(i)}(x)\chi_m^{(j)}(y)\equiv \sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} a_{ij} W_i(x) W_j(y), \tag{57}$$

причем

$$\left.\begin{array}{l}\chi_{-1}^{(1)}(x)\equiv\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_{-1}^{(1)}(y)\equiv\chi_0^{(0)}(y)\\ \chi_{-1}^{(2^{-1})}(x)\equiv 0,\ \chi_{-1}^{(2^{-1})}(y)\equiv 0\end{array}\right\}. \tag{58}$$

Если ряд (56) раскрыть по внутренним суммам, то вновь полученный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\chi_{nm}(x, y) \tag{59}$$

будет удовлетворять условиям а), в), с) теоремы 1.

В самом деле, из условия 2° теоремы 3 следует, что подпоследовательность частных сумм ряда (59) с номерами $(2^{k_i}, 2^{l_i})$ $i=1, 2,\cdots$ сходится к $f(x, y)$ всюду на квадрате $[0, 1]^2$, кроме, быть может, счетного множества точек, т. е. условие а) теоремы 1 для ряда (59) выполнено.

С другой стороны, так как $|W_{nm}(x, y)|\leqslant 1$, то из определения двойной системы Хаара имеем

$$\begin{aligned}\max_{[0,1]^2}\left|\alpha_{nm}^{(ij)}\chi_n^{(i)}(x)\chi_m^{(j)}(y)\right| &\leqslant \max_{\substack{2^n\leqslant i<2^{n+1}\\ 2^m\leqslant j<2^{m+1}}}|a_{ij}|\cdot 2^{n+m}=\\ &= \max_{\substack{2^n\leqslant i<2^{n+1}\\ 2^m\leqslant j<2^{m+1}}}|a_{ij}|\cdot\max_{[0,1]^2}|\chi_n^{(i)}(x)\cdot\chi_m^{(j)}(y)|^2.\end{aligned} \tag{60}$$

Из (60) и условий 1° теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{nm}|}{\max\limits_{[0,1]^2}|\chi_{nm}(x, y)|}=0 \text{ при любом } m,\ m=0, 1, 2,\cdots, \tag{61}$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|a_{nm}|}{\max\limits_{[0,1]^2}|\chi_{nm}(x, y)|}=0 \text{ при любом } n,\ n=0, 1, 2,\cdots. \tag{62}$$

Из определения функций двойной системы Хаара непосредственно видно, что равенства (61) и (62) влекут выполнение условий в) и с) теоремы 1, так как если $\chi_{nm}(x_0, y_0)\neq 0$, то

$$|\chi_{nm}(x_0, y_0)| > \frac{1}{4}\max_{[0,1]^2}|\chi_{nm}(x, y)|.$$

В силу теоремы 1 ряд (59) является рядом Фурье функции $f(x, y)$. Но по свойству III) ряд (59), а следовательно и ряд (56), сходится к $f(x, y)$ в метрике L_1. Тогда ряд (55) тоже будет сходиться к $f(x, y)$ в метрике L_1. Отсюда непосредственно вытекает, что ряд (2) является рядом Фурье функции $f(x, y)$. Теорема 3 доказана.

При доказательстве теоремы 2 используется следующая

Лемма 2. *Если ряд*

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} W_n(x) W_m(y) \tag{63}$$

сходится в каждой точке единичного квадрата $[0, 1]^2$, *кроме, быть может, счетного множества точек, то*

1°. $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm} = 0$ *при любом* n, $n=0, 1, 2,\cdots$,

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm} = 0$ *при любом* m, $m=0, 1, 2,\cdots$.

Доказательство. Докажем свойство 1°. Свойство 2° доказывается аналогично.

Пусть ряд (63) сходится всюду на квадрате $[0, 1]^2$, кроме, быть может, точек $z_k\in[0, 1]^2$, $k=1, 2,\cdots$.

Обозначим через $\{x_k\}$, $k=1, 2,\cdots$ совокупность всех двоично-рациональных точек отрезка $[0, 1]$ и проекций точек z_k на ось x.

Введем некоторые обозначения. Через $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$ обозначим те интервалы, внутри которых функция $\chi_i(x)$, $2^{k-1}\leqslant i<2^k$ принимает положительные и отрицательные значения соответственно, и назовем их интервалами ранга k. Через $[\xi]$ обозначим отрезок прямой $x=\xi$, лежащий в квадрате $[0, 1]^2$.

Предполагая, что свойство 1° не имеет места, мы придем к противоречию, доказав существование точки $\xi_0\in[0, 1]$, отличной от всех точек x_k, $k=1, 2,\cdots$ и такой, что на отрезке $[\xi_0]$, кроме, быть может счетного множества точек, ряд (63) расходится.

Пусть для некоторого целого числа n_0, $n_0>0$ равенство 1° леммы не имеет места, т. е. существует число $c>0$ и последовательность $\{m_k\}$ такие, что

$$|a_{n_0 m_k}| > c,\quad k=1, 2,\cdots. \tag{64}$$

Возьмем * натуральное число p_0 так, что

* При $n_0=0$ примем $p_0=0$.

$$2^{p_0-1} < n_0 \leqslant 2^{p_0} - 1 \tag{65}$$

и рассмотрим ряды

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{lm_k} W_l(x) W_{m_k}(y) \equiv W_{m_k}(y) \sum_{l=0}^{\infty} a_{lm_k} W_l(x), \tag{66}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{lm_k} W_l(x) \tag{67}$$

при $k = 1, 2, \cdots$.

Для каждого значения k, $k=1, 2, \cdots$ через $A_{nm_k}(x, y)$ и $B_{nm_k}(x)$ обозначим, соответственно, частные суммы рядов (66) и (67)

$$\left.\begin{aligned} A_{nm_k}(x, y) &= \sum_{l=0}^{n} a_{lm_k} W_l(x) W_{m_k}(y) \\ B_{nm_k}(x) &= \sum_{l=0}^{n} a_{lm_k} W_l(x) \end{aligned}\right| \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Если y_0 не является двоично-рациональным числом, то для любого x в точке (x, y_0) $|B_{nm_k}(x)| = |A_{nm_k}(x, y)|$ при любом $n=0, 1, 2, \cdots$ $\cdots$, $k=1, 2, \cdots$.

Легко показать, что на некотором интервале $\Delta_{p_0}^{(i_{p_0})}$, $i_{p_0} = 1$ или 2, ранга p_0, для некоторой бесконечной подпоследовательности номеров $\{m_k^{(1)}\}$, выбранной из $\{m_k\}$, имеют место неравенства

$$|B_{2^{p_0}-1,\, m_k^{(1)}}(x)| > c \tag{68}$$

при любом $k=1, 2, \cdots$.

В самом деле, если предположить, что при некотором k, $k = 1$, 2, $\cdots$ почти всюду на [0, 1] имеет место неравенство

$$|B_{2^{p_0}-1,\, m_k}(x)| < c,$$

то в силу (64) и (65) будем иметь

$$c^2 > \int_0^1 B^2_{2^{p_0}-1,\, m_k}(x)\, dx = \sum_{l=1}^{2^{p_0}-1} a^2_{lm_k} > c^2.$$

Поэтому для каждого k, $k=1, 2, \cdots$ существует интервал ранга p_0, где

$$|B_{2^{p_0}-1,\, m_k}(x)| > c.$$

Так как количество отличных друг от друга интервалов ранга p_0 конечно, то (68) доказано.

Ясно, что будут иметь место также неравенства

$$|A_{2^{p_0}-1,\, m_k^{(1)}}(x, y)| > c, \quad k=1, 2, \cdots \tag{69}$$

при $(x, y) \in \Delta_{p_0}^{(l_{p_0})} \times [0, 1]$, кроме, быть может, тех точек (x, y), ординаты которых являются двоично-рациональными точками.

Теперь для дальнейшего удобно выделить доказательство следующего утверждения А).

А) Пусть $a_{nm} \to 0$ при $(n, m) \to \infty$ и на некотором интервале $\Delta_p^{(l_p)}$ ранга p имеют место неравенства

$$|B_{2^p-1,\, m_k}(x)| > a > 0, \quad k = 1, 2, \cdots, \quad m_k < m_{k+1} \tag{70}$$

и $x_0 \in \Delta_p^{(l_p)}$ — произвольная точка.

Тогда для любого натурального N и для любого числа ε, $0 < \varepsilon < a$ можно найти интервал $\Delta_q^{(l_q)}$ ранга q, который обладает свойствами:

а) $q > N$,

в) $\Delta_q^{(l_q)} \subset \Delta_p^{(l_p)}$, $\quad x_0 \overline{\in} \bar{\Delta}_q^{(l_q)}$,

с) $|B_{2^q-1,\, m_k'}(x)| > a - \varepsilon$, $k=1, 2, \cdots$, $x \in \Delta_q^{(l_q)}$, где $\{m_k'\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{m_k\}$.

Доказательство. Пусть

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^{p+2}}, \tag{71}$$

выберем число M так, что $2^M > 2^p$ и

$$|a_{nm}| < \delta \text{ при } n, m \geqslant 2^M. \tag{72}$$

Возьмем $q > N$ и $q > M$. Не будет нарушением общности, если считать, что $m_k \geqslant 2^M$, $k = 1, 2, \cdots$.

Рассмотрим частные суммы $B_{2^{p+j}-1,\, m_k}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant M+1-p$ при произвольном фиксированном значении k, $k=1, 2, \cdots$.

Очевидно, найдется по крайней мере одна последовательность вложенных интервалов $\Delta_{p+j}^{(l_j)}$, $j=1, 2, \cdots, M+1-p$ таких, что

$$|B_{2^{p+j}-1,\, m_k}(x)| > a \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{p+j}^{(l_j)}. \tag{73}$$

Рассмотрим также интервалы $\Delta_{p+j}^{(i_j')}$, $1 \leqslant j \leqslant M+1-p$, где $i_j' \neq i_j$, $i_j' = 1$ или 2. Ясно, что

$$\Delta_{p+1}^{(i_1')} \subset \Delta_p^{(l_p)}, \quad \Delta_{p+j+1}^{(i_{j+1}')} \subset \Delta_{p+j}^{(l_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, M-p;$$

$$\text{mes}\, \Delta_{p+1}^{(i_1')} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_p^{(l_p)}, \quad \text{mes}\, \Delta_{p+j+1}^{(i_{j+1}')} = \frac{1}{2} \text{mes}\, \Delta_{p+j}^{(l_j)},$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots, M-p.$$

Заметим также, что на интервалах $\Delta_{p+j-1}^{(l_{j+1})}$ и $\Delta_{p+j+1}^{(l'_{j+1})}$ суммы

$$\sum_{l=2^{p+j}}^{2^{p+j+1}-1} a_{lm_k} W_l(x)$$

принимают постоянные значения, равные по абсолютной величине и разных знаков. Это следует из определения системы Уолша и из выбора интервалов $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$. Для выполнения (73) интервалы $\Delta_{p+j}^{(l_j)}$ нужно взять так, чтобы на них знаки этих сумм совпадали со знаком суммы $B_{2^p-1, m_k}(x)$ на интервале $\Delta_p^{(l_p)}$.

А приори возможны два случая:

I) при $x \in \Delta_{p+j}^{(l'_j)}$ справедливо неравенство

$$|B_{2^{p+j}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \quad j = 1, 2, \cdots, M + 1 - p; \tag{74}$$

II) неравенства (74) имеют место не для всех $j=1, 2, \cdots, M+1-p$.

Допустим, что имеет место случай I). Тогда при $x \in \Delta_{p+j}^{(l_j)}$

$$|B_{2^{p+j}-1, m_k}(x)| > a + (2^j - 1)\varepsilon, \quad j=1,\ 2, \cdots, M+1-p. \tag{75}$$

При $j=1$ справедливость неравенства (75) очевидна.

Пусть неравенство (75) верно для j. Покажем его справедливость для $j+1$. Так как

$$|B_{2^{p+j+1}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon$$

при $x \in \Delta_{p+j+1}^{(l'_{j+1})}$, то

$$|B_{2^{p+j+1}-1, m_k}(x)| > a + (2^j - 1)\varepsilon + [a + (2^j - 1)\varepsilon - (a - \varepsilon)] =$$

$$= a + (2^{j+1} - 1)\varepsilon$$

при $x \in \Delta_{p+j+1}^{(l_{j+1})}$ и, следовательно, неравенство (75) доказано.

При $j = M - p$ будем иметь

$$|B_{2^M-1, m_k}(x)| > a + (2^{M-p} - 1)\varepsilon \text{ на интервале } \Delta_M^{(l_M)},$$

а при $j=M+1-p$

$$|B_{2^{M+1}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \quad \left|\sum_{l=2^M}^{2^{M+1}-1} a_{lm_k} W_l(x)\right| > 2^{M-p}\varepsilon$$

на интервале $\Delta_{M+1}^{(l'_{M+1})}$ и тогда существует слагаемое вида $a_{nm_k} W_n(x)$, $2^M \leqslant n \leqslant 2^{M+1} - 1$, для которого

$$|a_{nm_k} W_n(x)| > \frac{2^{M-p}\varepsilon}{2^M} = \frac{\varepsilon}{2^p}, \quad x \in \Delta_{M+1}^{(l'_{M+1})}, \text{ т. е.}$$

$$|a_{nm_k}| > \frac{\varepsilon}{2^p} > \delta,$$

которое противоречит условию (72).

Таким образом, предположение, что имеет место случай I), приводит к противоречию.

Теперь допустим, что имеет место случай II).

Пусть $j=j_0$—наименьший номер, для которого неравенство (74) не выполнено, т. е.

$$|B_{2^p+j_0-1,\, m_k}(x)| \geqslant a-\varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0}')}. \tag{76}$$

Из (75) получим

$$|B_{2^p+j_0-1,\, m_k}(x)| > a + (2^{j_0-1}-1)\,\varepsilon, \quad x \in \Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}.$$

Если точка x_0 не принадлежит хотя бы одному из сегментов $\bar\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$ или $\bar\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$, то внутри такого интервала можно выбрать конечную последовательность интервалов $\Delta_{p+j}^{(i_j)}$, $j>j_0$, до ранга q таких, чтобы знаки значений сумм

$$\sum_{l=2^{p+j-1}}^{2^{p+j}-1} a_{lm_k} W_l(x)$$

внутри этих интервалов совпадали со знаком суммы $B_{2^p+j_0-1,\, m_k}(x)$ на первоначальном интервале, и тогда будем иметь

$$|B_{2^q-1,\, m_k}(x)| > a-\varepsilon, \quad x \in \Delta_q^{(i_q)}, \tag{77}$$

причем $x_0 \overline{\in} \Delta_q^{(i_q)}$.

Если $x_0 \in \Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})} \cap \Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0}')}$, то точка x_0 является концом интервала $\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$. Внутри интервала $\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$ выберем новую конечную последовательность интервалов $\Delta_{p+j}^{(i_j)}$, $j_0<j\leqslant M-p+1$ таким образом, чтобы на них знаки сумм

$$\sum_{l=2^{p+j-1}}^{2^{p+j}-1} a_{lm_k} W_l(x)$$

совпали со знаком суммы $B_{2^p+j_0-1,\, m_k}(x)$ на $\Delta_{p+j_0}^{(i_{j_0})}$, и рассмотрим соответствующие им интервалы $\Delta_{p+j}^{(i_j')}$, $i_j'\neq i_j$, $i_j'=1$ или 2. Неравенство

$$|B_{2^p+j-1,\, m_k}(x)| < a-\varepsilon, \quad j_0<j\leqslant M-p+1$$

на $\Delta_{p+j}^{(i_j')}$ нарушится хотя бы для одного значения j, так как в противном случае получили бы (см. (75))

$$|B_{2^M-1, m_k}(x)| > a + (2^{M-p-1} - 1)\,\varepsilon, \quad x \in \Delta_M^{(i_M)},$$

причем

$$|B_{2^{M+1}-1, m_k}(x)| < a - \varepsilon, \quad x \in \Delta_{M+1}^{(i'_{M+1})}.$$

Из последних неравенств следует, что

$$\left|\sum_{i=2^M}^{2^{M+1}-1} a_{im_k} W_i(x)\right| > 2^{M-p-1}\,\varepsilon, \quad x \in \Delta_{M+1}^{(i_{M+1})}$$

и, значит,

$$|a_{im_k}| > \frac{2^{M-p-1}\,\varepsilon}{2^M} = \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} > \delta$$

для некоторого значения i, где $2^M \leqslant i < 2^{M+1}$, что противоречит условию (72).

Таким образом, для некоторого $j_0 < j \leqslant M+p-1$ неравенство

$$|B_{2^{p+j}-1, m_k}(x)| > a - \varepsilon$$

имеет место на каждом из интервалов $\Delta_{p+j}^{(i_j)}$, $\Delta_{p+j}^{(i'_j)}$.

Замыкание одного из этих интервалов не содержит точки x_0. Остается вышеуказанным способом внутри этого интервала найти интервал ранга q, на котором выполнено неравенство

$$|B_{2^q-1, m_k}(x)| > a - \varepsilon. \tag{78}$$

Так как интервалов ранга q всего конечное число, то существует интервал $\Delta_q^{(i_q)}$ такой, что неравенство (78) имеет место для бесконечного числа значений m_k.

Утверждение A) доказано.

Для доказательства леммы 2 заметим, что если ряд (63) сходится всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, то $a_{nm} \to 0$ при $(n, m) \to \infty$ и

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} W_i(x)\, W_j(y) \to 0 \quad \text{при } (n, j) \to \infty, \tag{79}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} W_i(x)\, W_j(y) \to 0 \quad \text{при } (i, m) \to \infty \tag{80}$$

всюду, кроме, быть может, счетного множества точек.

Сравнивая доказанное нами неравенство (68) и утверждение A), мы можем выбрать последовательность интервалов $\Delta_{q_k}^{(i_{q_k})}$, $q_1 < q_2 < \cdots$ $\cdots < q_n < \cdots$, обладающих тем свойством, что

$$\Delta_{q_1}^{(i_{q_1})} \supset \Delta_{q_2}^{(i_{q_2})} \supset \cdots \supset \Delta_{q_k}^{(i_{q_k})} \supset \cdots,$$

$$x_k \in \overline{\Delta}_{q_k}^{(l_{q_k})}$$

и для каждого фиксированного k существует бесконечная последовательность натуральных чисел $\{m_\nu^{(k)}\}_{\nu=1}^{\infty}$, для которых имеют место неравенства

$$|B_{2^{q_k}-1,\, m_\nu^{(k)}}(x)| > c - \sum_{l=1}^{k} \frac{c}{2^{l+1}}, \quad x \in \Delta_{q_k}^{(l_{q_k})}, \ \nu = 1, 2, \cdots.$$

Общая точка ξ_0 сегментов $\overline{\Delta}_{q_k}^{(l_{q_k})}$ не совпадает ни с одним из x_k, $k=1, 2, \cdots$ и принадлежит всем интервалам $\Delta_{q_k}^{(l_{q_k})}$.

Так как для каждого фиксированного k имеет место неравенство

$$|B_{2^{q_k}-1,\, m_\nu^{(k)}}(\xi_0)| > c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}, \quad \nu = 1, 2, \cdots,$$

то некоторая последовательность сумм

$$\sum_{l=1}^{2^{q_k}-1} a_{l m_{\nu_k}^{(k)}} W_l(x) W_{m_{\nu_k}^{(k)}}(y)$$

не стремится к нулю при $q_k \to \infty$, $m_{\nu_k}^{(k)} \to \infty$ всюду на отрезке $[\xi_0]$, кроме, быть может, счетного числа двоично-рациональных точек этого отрезка. Это противоречит условию (79) и лемма 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.X.1973

Խ. Հ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ. Հաարի և Ուոլշի սիստեմներով կրկնակի շարքերի միակության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում միապատիկ եռանկյունաչափական շարքերի միակության վերաբերյալ Վալլե-Պուսենի հայտնի թեորեմը տարածվում է Ուոլշի բազմապատիկ շարքերի վրա։

Նման արդյունք միայն կրկնակի եռանկյունաչափական շարքերի համար և ավելի մասնավոր դեպքում, երբ պահանջվում է շարքի ամենուրեք զուգամիտություն, ստացված էր [6] աշխատանքում։

Kch. O. MOVSISIAN. *On the uniqueness of double series by Haar and Walsh systems* (summary)

The paper extends the well-known Valle-Poussin's theorem on the uniqueness of one dimensional trigonometric series to the case of multiple Walsh series.

An analogous result for double trigonometric series has been obtained in [6] under strouger assumption of everywhere convergence of the series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1964, 1391—1408.
2. *Ф. Г. Арутюнян.* Восстановление коэффициентов рядов по системе Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данжуа, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 2, 1966, 325—344.
3. *В. А. Скворцов.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм, Мат. заметки, 4, № 6, 1968, 707—714.
4. *N. Fine.* On the Walsch functions, Trans. Amer. Math. Soc., 65, 1949, 372—414.
5. *W. Willmar, R. Wade.* A uniqueness theorem for Haar and Walsch series, Trans. Amer. Math. Soc. 141, 1969, 187—194.
6. *J. Ash, G. Welland.* Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series, Trans. Amer. Math., Soc., 163, 1972, 401—436.
7. *А. Д. Эбралидзе.* О единственности кратных рядов по системе Хаара, Сообщения АН Груз.ССР, 70, № 3, 1973, 537—539.
8. *В. А. Скворцов.* Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара, Мат. сб., 75, № 3, 1968, 349—360.
9. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IX, № 1, 1974 Математика

Н. А. ШИРОКОВ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ С НЕНУЛЕВЫМИ ВНЕШНИМИ УГЛАМИ

Настоящая работа является развернутым изложением заметки [1]. Пусть G — замкнутое множество точек комплексной плоскости z, содержащее не менее двух точек, дополнение G^1 которого есть односвязная область, содержащая точку ∞; $\overset{\circ}{G}$ — множество внутренних точек множества $\overline{G}$; $z=\psi(t)=\gamma t+\gamma_0+\gamma_1 t^{-1}+\cdots$, $\gamma>0$, — функция регулярная в области $1<|t|<\infty$, однолистно отображающая эту область на G^1; $t=\varphi(z)$ — обратная функция для $z=\psi(t)$; $\Gamma=\Gamma_1=\partial G$ — граница $\overline{G}$; $\Gamma_R=\psi(\{|t|=R\})$, $R>1$ — линия уровня G^1; $G^1_R=\psi(\{|t|>R\})$, $R\geqslant 1$, $G_R=cG^1_R$; $\rho(E_1, E_2)$ — расстояние между множествами E_1 и E_2; $\rho_R(z)=\rho(\{z\}, \Gamma_R)$; $\lambda=\lambda(z)=\rho(\{z\}, \Gamma)$; $z_0=z_0(z)\in\Gamma$; $|z-z_0|=\lambda$; $\rho=\rho(z, n)=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$; $N>0$ — произвольное фиксированное число; $K(z, \delta)$ — круг $\{\zeta: |\zeta-z|\leqslant\delta\}$; $K(z, \delta, \Delta)$, $\delta<\Delta$, — кольцо $\{\zeta: \delta<|\zeta-z|<\Delta\}$.

Далее рассматриваем такие множества $\overline{G}$, что $\psi(t)$ непрерывна при $1\leqslant|t|<\infty$. Пусть $t_j=e^{i\theta_j}$, $-\pi<\theta_j\leqslant\pi$, $j=1,\cdots, l$, $l=0, 1,\cdots$ — различные точки окружности $|t|=1$; α_j, $0<\alpha_j\leqslant 2$, $\alpha_j\neq 1$, $j=1,\cdots, l$ — фиксированные числа; h, $0<h<\frac{1}{2}\min\left(|\theta_j-\theta_{j'}|, \frac{1}{2}\right)$, $j\neq j'$ — фиксированное число;

$$u_j=\left\{t: \left|\arg\frac{t_j}{t}\right|<h, |t|>1\right\}, j=1,\cdots, l,$$

u — дополнение $\bigcup\limits_{j=1}^{l} u_j$ до области $|t|>1$.

Будем говорить, что $\overline{G}$ имеет l (и только l) угловых точек $z_j=\psi(t_j)$ с внешними углами $\alpha_j\pi$, $j=1,\cdots, l$, если существуют две такие постоянные c_1 и c_2, $0<c_1<c_2<\infty$, что

$$\left.\begin{aligned} c_1\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}, \quad t\in u_j, \ j=1,\cdots, l, \\ c_1\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2, \quad t\in u \\ \psi(t)=\psi(t_j)+A_j(t)\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j}, \quad t\in u_j, \ j=1,\cdots, l, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

где $A_j(t)$ — функции, регулярные в $1<|t|<\infty$ и непрерывные в точке t_j, $A_j(t_j)\neq 0$ и выбрана та ветвь функции $\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j}$, которая обращается в 1 при $t=\infty$.

Класс множеств $\overline{G}$ без кратных граничных точек, удовлетворяющих условиям (1), обозначим через $\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$ (пишем $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$), если $l=0$, то обозначаем через $\Psi^*(c_1, c_2)$.

Пусть, далее, $\lambda'=\lambda'(z)=\min\limits_{1\leq k\leq l}|z-z_k|$, $z_j=z_j(z)$: $|z-z_j|=\lambda'$, $\rho'=\rho'(z, n)=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_j)$; A — достаточно большое фиксированное число, зависящее лишь от области, которое будет определено в дальнейшем;

$$\overline{G}'=\overline{G}\cap[\bigcup_{\zeta\in\Gamma}K(\zeta, A\cdot\rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta))],\ G''=\overline{G}\setminus\overline{G}';$$

$H>0$ — достаточно малое фиксированное число, зависящее лишь от области, будет определено ниже, но, во всяком случае, $|z_s-z_t|>4H$, $s\neq t$, $s, t=1,\cdots, l$;

$$\tilde{G}=G''\cap\left[\bigcup_{s=1}^{l}K(z_s, H)\right],\ \check{G}=G''\setminus\tilde{G}.$$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в G и имеет в $\overline{G}$ r непрерывных производных $(r=0, 1,\cdots)$,

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{\zeta_1,\zeta_2\in\overline{G}\\|\zeta_1-\zeta_2|<\delta}}|f^{(r)}(\zeta_1)-f^{(r)}(\zeta_2)|.$$

Тогда пишем $f\in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}$.

Для областей рассматриваемого вида и $f\in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}$ в [2] доказано существование полиномов $P_n(z)$ степени $\leq n$ таких, что для $z\in\Gamma$ выполнено условие

$$|f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)|\leq A_\nu\rho^{r-\nu}\omega(\rho),\ \rho=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z),\ \nu=0, 1,\cdots, r,$$

где A_ν зависят только от ν, $\overline{G}$*. В настоящей работе приближение $f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)$ оценивается не только на границе, но и внутри области.

Теорема. *Пусть* $f\in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}$, $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1,\cdots, t_l, \alpha_l)$. *Тогда при любом фиксированном натуральном* N *и для каждого* $n=0, 1, 2,\cdots$ *существует полином* $P_n(z)$ *степени* $\leq n$ *такой, что*

$$|f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)|\leq A_{1,\nu}\begin{cases}\rho^{r-\nu}\omega(\rho),\ z\in\overline{G}',\ \rho=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0),\ z_0=z_0(z)\\ \dfrac{\rho^{r-\nu+N}}{\lambda^N}\omega(\rho)+\dfrac{\rho'^{r-\nu+N}}{\lambda'^N}\omega(\rho'),\ z\in G'',\end{cases}\qquad(2)$$

$$\nu=0, 1,\cdots, r,$$

где $A_{1,\nu}$ *— постоянные, зависящие лишь от* $\overline{G}$.

* Недавно появилась работа В. К. Дзядыка [3], в которой при $z\in\Gamma$ получена та же оценка при несколько иных условиях на множество $\overline{G}$, чем в [2].

Замечание. Оценку (2) можно переписать, как нетрудно видеть, следующим образом:

$$|f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)|\leqslant A'_{1,\nu}\left[\frac{\rho^{r-\nu+N}}{(\rho+\lambda)^N}\,\omega(\rho)+\frac{\rho'^{\,r-\nu+N}}{(\rho'+\lambda')^N}\,\omega(\rho')\right], \tag{2'}$$

$$\rho=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0),\ \rho'=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_j),$$

$$z_0=z_0(z),\quad z_j=z_j(z),$$

где $z\in\overline{G}$, $A'_{1,\nu}$ — некая новая постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$. При этом правая часть (2) или (2′) $\leqslant \mathrm{const}\cdot\rho^{r-\nu}\,\omega(\rho)$, т. е. приближение полиномом в точке z не хуже, чем в точке $z_0=z_0(z)$ (см. обозначения). Если же $\lambda\geqslant\varepsilon>0$, то при достаточно большом N приближение в точке z лучше, чем в любой граничной точке.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм, большинство из которых доказаны в [2].

Определение. Пусть на множестве E заданы функции $a>0$ и $b>0$. Будем писать $a\asymp b$, если существуют постоянные B_1 и B_2, $0<B_1<B_2<\infty$ такие, что $B_1<\frac{a}{b}<B_2$. Будем писать $a<\cdot\, b$ или $b\cdot> a$, если существует постоянная $B<\infty$ такая, что $a< Bb$.

Лемма 1. *Пусть* $\zeta\in\Gamma_R$, $1\leqslant R\leqslant 2$, $z\in\overline{G}$,

$$\Gamma\ni z_0=z_0(z)\colon |z-z_0|=\lambda. \quad \textit{Тогда}\quad |\zeta-z|\asymp|\zeta-z_0|+\lambda.$$

Доказательство. Имеем $|\zeta-z|\leqslant|\zeta-z_0|+|z_0-z|=|\zeta-z_0|+\lambda$. Если $|\zeta-z_0|\leqslant 2\lambda$, то $|\zeta-z_0|+\lambda\asymp\lambda$, $|\zeta-z|\geqslant\lambda$, т. е. $|\zeta-z|\asymp|\zeta-z_0|+\lambda$; если $|\zeta-z_0|>2\lambda$, то

$$|\zeta-z_0|+\lambda\asymp|\zeta-z_0|,\ |\zeta-z|\geqslant|\zeta-z_0|-\lambda\geqslant\frac{1}{2}|\zeta-z_0|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. (см. [2]). Пусть $z', z''\in G_2\cap G^1$, $t'=\varphi(z')$, $t''=\varphi(z'')$, z_{j_0} — ближайшая к z'' угловая точка. Если $0<\alpha_j<2$, то

$$|z''-z'|\asymp|t''-t'|\left[|z''-z_{j_0}|^{1/\alpha_{j_0}}+|t''-t'|\right]^{\alpha_{j_0}-1}\asymp$$

$$\asymp|t''-t'|\left[|t''-t_{j_0}|+|t''-t'|\right]^{\alpha_{j_0}-1},$$

$$|\psi'(t'')|\asymp\left|1-\frac{t_j}{t''}\right|^{\alpha_j-1}.$$

Соответствующая оценка сверху имеет место и при $\alpha_j=2$. Соответствующая оценка снизу для $\alpha_j=2$ имеет место, если модуль приращения $\arg(z-z_j)$ при движении точки z от z' до z'' по некоторой кривой, соединяющей z' и z'' и лежащей в $\overline{G^1}$, не превосходит $2\pi-\delta$, где $\delta>0$ фиксировано.

Лемма 3. *Пусть a, b, $\lambda > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, b — корень уравнения $b(a+b)^{\alpha-1} = \lambda$. Тогда имеем*

$$b \asymp \begin{cases} \lambda a^{1-\alpha}, & \lambda \prec a^\alpha \\ \lambda^{1/\alpha}, & \lambda \succ a^\alpha . \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что условия $b \prec a$ и $\lambda \prec a^\alpha$, и $b \succ a$ и $\lambda \succ a^\alpha$ эквивалентны (константы в знаках $\prec$ и $\asymp$ зависят только от α). Но если $b \prec a$, то

$$a + b \asymp a, \quad b(a+b)^{\alpha-1} \asymp b a^{\alpha-1} \asymp \lambda, \quad b \asymp \lambda a^{1-\alpha},$$

если же $b \succ a$, то $a + b \asymp b$, $b(a+b)^{\alpha-1} \asymp b^\alpha \asymp \lambda$, $b \asymp \lambda^{1/\alpha}$. Лемма доказана.

Лемма 4 (см. [2]). Пусть z', $z'' \in \overline{G}$. Тогда существует спрямляемая простая кривая $\Lambda = \Lambda(z', z'') \subset \overline{G}$ с концами в точках z' и z'' такая, что

$$|\Lambda(z', z'')| \leqslant U|z' - z''|,$$

где U — некоторая постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$, а $|\Lambda|$ здесь (и в дальнейшем) — длина кривой Λ.

Лемма 5 (см. [2]). Пусть $z \in \Gamma$, $t = \varphi(z)$, t_{j_0} — ближайший к t прообраз угловой точки. Тогда существуют A_3 и A_3', зависящие лишь от $\overline{G}$ такие, что

$$A_3(R-1)\left[|t - t_{j_0}| + R - 1\right]^{\alpha_{j_0}-1} \leqslant \varphi_R(z) \leqslant A_3'(R-1)\left[|t - t_{j_0}| + R - 1\right]^{\alpha_{j_0}-1},$$
$$1 \leqslant R \leqslant 2, \quad 0 < \alpha_{j_0} \leqslant 2.$$

Приступим теперь к доказательству теоремы. Будем, не умаляя общности, считать, что в некоторой точке $z_* \in \overline{G}$ выполнено условие $f(z_*) = f'(z_*) = \cdots = f^{(r)}(z_*) = 0$, ибо в противном случае включим в $P_n(z)$ слагаемое

$$f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*) + \cdots + \frac{f^{(r)}(z_*)}{r!}(z - z_*)^r .$$

Выберем достаточно большие натуральные k и m, условия на которые получим в процессе доказательства, и положим, как в [2],

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{p=1}^{k} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^p}\, d\zeta,$$

где

$$J_m(\theta) = J_{m,n}(\theta) = \frac{1}{\gamma_{m,n}}\left(\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta}\right)^m, \quad \gamma_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta}\right)^m d\theta,$$

$$\zeta_{R,\theta} = \zeta_{R,\theta}(\zeta) = \psi(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta)), \quad R = 1 + \frac{1}{n} .$$

Напишем формулу для разности

$$P_n(z)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma} f(\zeta)\,\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta}-z)^k(\zeta-z)}\,d\zeta. \tag{3}$$

Продифференцировав правую и левую части (3) ν раз, получим выражение для $P_n^{(\nu)}(z)-f^{(\nu)}(z)$ через сумму слагаемых вида

$$a_{s,t}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma} f(\zeta)\,\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta}-z)^{k+t}(\zeta-z)^{1+s}}\,d\zeta, \tag{4}$$

$$s\geqslant 0,\ t\geqslant 0,$$

где $a_{s,t}$ — постоянные, $s+t=\nu$. Следовательно, достаточно оценить отдельное слагаемое вида (4). Имеем

$$M_{s,t}(z)=\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma} f(z)\,\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta}-z)^{k+t}(\zeta-z)^{1+s}}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma}\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta}-z)^{k+t}(\zeta-z)^{1+s}}\,d\zeta\times$$

$$\times\int_{z}^{\zeta}(\zeta-\tau)^{r-1}\left(f^{(r)}(\tau)-f^{(r)}(z)\right)d\tau+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma_2} P_r(z,\zeta)\,\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^k}{(\zeta-z)^{1+s}(\zeta_{R,\theta}-z)^{k+t}}\,d\zeta= \tag{5}$$

$$=M_{s,t,1}+M_{s,t,2},$$

где

$$P_r(z,\zeta)=f(z)+\frac{f'(z)}{1!}(\zeta-z)+\dots+\frac{f^{(r)}(z)}{r!}(\zeta-z)^r,\ r\geqslant 1.$$

Если $r=0$, то $P_0(z,\zeta)=f(z)$, а в первом слагаемом в правой части (5) стоит $f(\zeta)-f(z)$. Второе слагаемое в правой части (5) оценивается (см. [2]) как $O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ и при $k>2(N+r+1)$ меньше необходимой оценки (2). Поэтому в (5) осталось оценить лишь первое слагаемое. Для $z\in\overline{G'}$ оценка (2) получается почти дословным проведением рассуждений из [2], поэтому ограничимся случаем $z\in G''$.

Имеем

$$|M_{s,t,1}(z)|<\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta\int_{\Gamma}\frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^k\,|\zeta-z|^r\,\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|^{1+s}\,|\zeta_{R,\theta}-z|^{k+t}}\,|d\zeta|,$$

поскольку по лемме 4 для любых точек z, $\zeta \in \overline{G}$ существует путь $\Lambda(z, \zeta)$ с концами в этих точках и длиной $<\cdot |z-\zeta|$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int \frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^k\, |\zeta - z|^{r-s}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{k+t}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta| <\cdot$$

$$<\cdot \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{k+r-s}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{k+t}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta| + \tag{6}$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{k+\nu-r}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|.$$

Значит, нужно оценить выражение вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma} \frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{k_1+\mu}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{k_1}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|, \tag{7}$$

где $\mu = r - \nu$, $k_1 = k + \nu - r$ или $k_1 = k + t$. Далее для сокращения записи через k будем обозначать не только собственно k, но и k_1, что не приведет к недоразумениям.

Допустим теперь, что $z \in \overset{*}{G}$. Тогда для $\zeta \in K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right)$ имеем $|\zeta - z| \geqslant \frac{H}{2}$, $j_0 = 1, \cdots, l$. Ясно, что за счет выбора большого m и малого H можно рассматривать интегрирование по θ лишь на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \varepsilon(H)$ такое, что $\zeta_{R,\theta}$ лежат в круге $K\left(z_{j_0}, \frac{3}{4}H\right)$, если $\zeta \in K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right) \cap \Gamma$, $|\theta| \leqslant \varepsilon$, $R = 1 + \frac{1}{n}$, $n \geqslant n_0 = n_0(H)$ и $\zeta_{R,\theta}$ лежат вне кругов $\bigcup_{j=1}^{l} K\left(z_{j_0}, \frac{H}{4}\right)$, если ζ лежит вне кругов $K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right)$, $j_0 = 1, \cdots, l$, $R = 1 + \frac{1}{n}$, $n > n_0$. Оценим внутренний интеграл в (7). Имеем

$$\frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} <\cdot \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}.$$

Если $|\zeta - z_{j_0}| < \frac{H}{2}$, то $|\zeta_{R,\theta} - z| > \frac{H}{4}$, $|\zeta_{R,\theta} - \zeta| <\cdot \theta_*^{\alpha}$, где $\alpha = \min\limits_{1 < j < l} \alpha_j$, $\theta_* = |\theta| + \frac{1}{n}$, что следует из леммы 2, и для внутреннего интеграла (7) по $\Gamma \cap K\left(z_{j_0}, \frac{H}{2}\right)$ получится оценка $\theta_*^{(k+\mu)\alpha} \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$, что после интегрирования по θ даст

$$\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha}} \cdot \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}. \tag{8}$$

Видно, что (8) при $k > \dfrac{2(N+r)}{\alpha}$ меньше правой части (2). Если

$$|\zeta - z_{j_0}| \geqslant \frac{H}{2},\ j_0 = 1, \cdots, l, \text{ то } |\zeta_{R,\theta} - \zeta| \asymp \theta_*,\ \zeta'_{R,\theta}\left(= \frac{d\zeta_{R,\theta}}{d\zeta}\right) \asymp 1,$$

и

$$\int\limits_{\Gamma \setminus \left\{\bigcup\limits_{j=1}^{l} K\left(z_j, \frac{H}{2}\right)\right\}} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^{k+\mu}}{|\zeta_{R,\theta} - z|^k} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta| <\cdot$$

$$<\cdot \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{k+\mu} \int\limits_{\Gamma \setminus \left\{\bigcup\limits_{j=1}^{l} K\left(z_j, \frac{H}{2}\right)\right\}} \frac{d\zeta}{|\zeta_{R,\theta} - z|^k} <\cdot$$

$$<\cdot \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{k+\mu} \int\limits_{\Gamma \setminus \left\{\bigcup\limits_{j=1}^{l} K\left(z_j, \frac{H}{2}\right)\right\}} \frac{|d\zeta_{R,\theta}|}{|\zeta_{R,\theta} - z|^k} <\cdot \frac{\omega(\lambda)}{\lambda} \theta_*^{k+\mu} \frac{1}{\lambda^{k-1}}. \tag{9}$$

Теперь, если $|z_0 - z_{j_0}| < \dfrac{H}{2}$ для какого-нибудь j_0, то $\lambda = |z - z_0| \geqslant \dfrac{H}{2}$, и интегрирование (9) по θ опять дает величину меньшую, чем в (2); если же $|z_0 - z_{j_0}| \geqslant \dfrac{H}{2}$ для всех j_0, то $\rho = \rho_R(z_0) \asymp \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\omega(\lambda)}{\lambda} <\cdot n \cdot \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)$ и интегрирование (9) по θ дает

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}},$$

что доказывает теорему в случае $z \in \mathring{G}$.

Рассмотрим теперь случай $z \in \bar{G}$. Пусть, для определенности, $|z - z_j| < H$. Отметим, что часть внутреннего интеграла в (7) по $|\zeta - z_l| > 2H$ после интегрирования по θ имеет оценку $\dfrac{1}{n^{(k+\mu)\alpha}}$, так что достаточно оценить

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta)\, d\theta \int\limits_{\Gamma \cap K(z_j, 2H)} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^{k+\mu}}{|\zeta_{R,\theta} - z|^k} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |d\zeta|.$$

Если $t_0 = \varphi(z_0)$, $t_l = \varphi(z_l)$, $t = \varphi(\zeta)$, то по лемме 2

$$\left.\begin{array}{l} |\zeta_{R,\theta}-\zeta|\asymp|t_{R,\theta}-t|\,[|t-t_j|+|t_{R,\theta}-t|]^{\alpha_j-1}<\cdot\,\theta_*(|t-t_j|(+\theta_*)^{\alpha_j-1}\\ |\zeta_{R,\theta}-z_0|\asymp|t_{R,\theta}-t_0|\,[|t_0-t_j|+|t_{R,\theta}-t_0|]^{\alpha_j-1}\\ |\varphi'(t)|\asymp|t-t_j|^{\alpha_j-1},\ t_{R,\theta}=R\,e^{-i\theta}\,t \end{array}\right| \qquad (10)$$

Учитывая лемму 1 и (10), нужный нам интеграл перепишем в виде

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta)\,d\theta\int\limits_{\Gamma_*}\frac{\theta_*^{k+\mu}\,(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,|t-t_j|^{\alpha_j-1}}{[|t_{R,\theta}-t_0|\;(|t_0-t_j|+|t_{R,\theta}-t_0|^{\alpha_j-1}+\lambda]^k}\,\frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|}\,|dt|, \tag{11}$$

$$\Gamma_*=\varphi\,(\Gamma\cap K\,(z_j,\ 2H)).$$

Далее придется рассматривать несколько случаев, которые мы будем нумеровать римскими цифрами. Подслучаи в каждом случае будем нумеровать арабскими цифрами, а различные варианты каждого подслучая будем обозначать латинскими и греческими буквами.

Случай I. $a=|t_0-t_j|>\dfrac{4A_2}{n}$, $A_2=A_2\,(\overline{G})$ — большая постоянная,

1) $|t-t_0|<A_2\theta_*$. Тогда

$$|t_{R,\theta}-t_0|\;(|t_0-t_j|+|t_{R,\theta}-t_0|^{\alpha_j-1}\cdot>\frac{1}{n}\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}\asymp\rho,$$

$$\frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|}<\cdot\,\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}<\cdot\,\frac{\omega(\rho)}{\rho}.$$

Нужный нам внутренний интеграл по какой-либо части $\gamma\subset\Gamma_*$ обозначим через $\int\limits_{\gamma}$. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,A_2\theta_*)}<\cdot\,\frac{\theta_*^{k+\mu}}{\lambda^k}\frac{\omega(\rho)}{\rho}\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,A_2\theta_*)}(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,|t-t_j|^{\alpha_j-1}\,|dt|.$$

а) $a>2A_2\theta_*$. Тогда $|t-t_j|\asymp a$,

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,A_2\theta_*)}(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,|t-t_j|^{\alpha_j-1}\,|dt|<\cdot\,a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,a^{\alpha_j-1}\,\theta_*.$$

в) $a\leqslant 2A_2\,\theta_*$. Тогда $|t-t_j|+\theta_*\asymp\theta_*$,

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,A_2\theta_*)}(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,|t-t_j|^{\alpha_j-1}\,|dt|<\cdot\,\theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,A_2\theta_*)}|t-t_j|^{\alpha_j-1}\,|dt|<\cdot\,\theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)+\alpha_j}.$$

Поскольку

$$J_m(\theta) \asymp \begin{cases} n, & |\theta| \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^{m-1}|\theta|^m}, & |\theta| > \frac{1}{n}, \end{cases} \tag{12}$$

то интегрирование по θ в случае а) даст

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k} \frac{a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}}{n^{k+\mu+1}} \asymp \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^k} \omega(\rho), \tag{13}$$

а в случае в) интегрирование по θ производится по промежутку $\varepsilon + \frac{1}{n} > \theta_* \geqslant \frac{a}{2A_2}$, т. е. интеграл меньше интеграла по промежутку $|\theta| > \frac{a}{4A_2} > \frac{1}{n}$ и, учитывая (12), получим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma_*\cap K(t_0, A_2\theta_*)} < \cdot \frac{1}{n^{m-1}} \frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k} \int_{\frac{a}{4A_2}}^{\infty} \theta^{(k+\mu+1)\alpha_j - m} d\theta < \cdot$$

$$< \cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k} \frac{1}{n^{m-1}} a^{(k+\mu+1)\alpha_j - m+1} = \frac{\omega(\rho)}{\rho} \frac{1}{\lambda^k n^{k+\mu+1}} a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} \times$$

$$\times \frac{1}{(na)^{m-k-\mu-2}}.$$

Поскольку $na \cdot > 1$, то при $m > k + r + 2$ в этом случае имеем оценку

$$\frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^k} \omega(\rho). \tag{14}$$

Тогда (13) и (14) дают нужную оценку в случае 1).

2) $|t - t_0| \geqslant A_2\theta_*$. Поскольку выбор A_2 в нашем распоряжении, мы его выбираем так, что $|t_{R,\theta} - t| \leqslant \frac{1}{2} A_2\theta_*$, что, как легко видеть, сделать можно, тогда $|t_{R,\theta} - t_0| \asymp |t - t_0|$ и интересующий нас интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma_*\setminus K(t_0, A_2\theta_*)}$$

перепишется в виде

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma_*\setminus K(t_0, A_2\theta_*)} \frac{\theta_*^{k+\mu} (|t - t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t - t_j|^{\alpha_j - 1}}{[|t - t_0|(|t_0 - t_j| + |t - t_0|^{\alpha_j - 1}) + \lambda]^k} \times$$

$$\times \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |dt|. \tag{15}$$

Пусть $b > 0$ — корень уравнения

$$b\,(a+b)^{\alpha_j-1} = \lambda.$$

Тогда $\lambda \geqslant A\rho$ влечет за собой: $b\,(a+b)^{\alpha_j-1} \geqslant A\,A_3\,\frac{1}{n}\left(a+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}$,

где A_3 — постоянная из леммы 5, зависящая лишь от $\overline{G}$. Тогда, выбрав A_2 и зная A_3, можно выбрать A настолько большим (и зависящим только от $\overline{G}$), что $b > \frac{1+2A_2}{n}$. Опять рассмотрим несколько случаев.

а) $b < A_2\theta_*$. Тогда знаменатель в (15) можно заменить на

$$|t-t_0|^k\,(|t_0-t_j|+|t-t_0|)^{k(\alpha_j-1)},$$

α) $a \geqslant 2A_2\theta_*$. Тогда при $|t-t_j| < A_2\,\theta_*$ будет

$$|t-t_0| \asymp a,\quad |t-t_j|+\theta_* \asymp \theta_*,$$

$$\int\limits_{[\Gamma_*\setminus K(t_0,\,A_2\theta_*)]\cap K(t_j,\,A_2\theta_*)} <\cdot\ \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\,\theta_*^{(k+\mu)\alpha_j}\,\frac{1}{a^{k\alpha_j}}\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_j,\,A_2\theta_*)} |t-t_j|^{\alpha_j-1}\,|dt| <\cdot$$

$$<\cdot\ \frac{\omega(\rho)}{\rho}\,\theta_*^{(k+\mu+1)\alpha_j}\,a^{-k\alpha_j}. \tag{16}$$

При $A_2\theta_* \leqslant |t-t_j| \leqslant \frac{a}{2}$ имеем

$$|t-t_0| \asymp a,\quad |t-t_j|+\theta_* \asymp |t-t_j|,$$

$$\int\limits_{[\Gamma_*\setminus K(t_0,\,A_2\theta_*)]\cap K\left(t_j,\,A_2\theta_*,\,\frac{a}{2}\right)} <\cdot\ \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\,\theta_*^{k+\mu}\,a^{-k\alpha_j}\,\times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma_*\cap K\left(t_j,\,A_2\theta_*,\,\frac{a}{2}\right)} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}\,|dt| <\cdot$$

$$<\cdot \begin{cases} \dfrac{\omega(\rho)}{\rho}\,\theta_*^{k+\mu}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}, & \alpha_j > 1, \\ \dfrac{\omega(\rho)}{\rho}\,\theta_*^{(k+\mu+1)\alpha_j}\,a^{-k\alpha_j}, & \alpha_j < 1. \end{cases} \tag{17}$$

В случае $\alpha_j < 1$ в (17) k предполагается настолько большим, что $k\,(1-\alpha_j) > 1$.

При $|t-t_0| \leqslant \frac{a}{2}$ имеем $|t-t_j| \asymp a$, $|t-t_j|+\theta_* \asymp a$, $|t-t_0|+a \asymp a$, в таком случае

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K\left(t_0,\,A_2\theta_*,\,\frac{a}{2}\right)} <\cdot\ \frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\,\theta_*^{k+\mu}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)}\int\limits_{\Gamma_*\cap K\left(t_0,\,A_2\theta_*,\,\frac{a}{2}\right)} \frac{|dt|}{|t-t_0|^k} <\cdot$$

$$<\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{\mu+1}\, a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)}. \tag{18}$$

Если же $|t-t_0|>\frac{a}{2}$ и $|t-t_j|>\frac{a}{2}$, то

$$|t-t_0|\asymp|t-t_j|\asymp|t-t_j|+\theta_*\asymp|t-t_0|+a,$$

$$\int\limits_{\Gamma_*\setminus\left[K\left(t_0,\frac{a}{2}\right)\cup K\left(t_j,\frac{a}{2}\right)\right]} <\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{k+\mu} \int\limits_{|t-t_0|>\frac{a}{2}} |t-t_0|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k}\,|dt|<\cdot$$

$$<\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{k+\mu}\, a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}. \tag{19}$$

β) $a<2A_2\theta_*$. Если $|t-t_j|\leqslant\frac{a}{2}$, то $|t-t_0|\asymp a$, $|t-t_j|+\theta_*\asymp\theta_*$,

$$\int\limits_{\Gamma_*\setminus K(t_0,A_2\theta_*))\cap K\left(t_j,\frac{a}{2}\right)} <\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{(k+\mu)\alpha_j}\, a^{-k\alpha_j}\, \theta_*^{\alpha_j}=\frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{(k+\mu+1)\alpha_j}\, a^{-k\alpha_j}. \tag{20}$$

Если $|t-t_0|>\frac{a}{2}$, $|t-t_j|>\frac{a}{2}$, то $|t-t_j|\asymp|t-t_0|$ и при $|t-t_0|<$ $<4A_2\theta_*$ имеем $|t-t_0|+a\asymp|t-t_0|$, $|t-t_j|+\theta_*\asymp\theta_*$,

$$\int\limits_{[\Gamma_*\cap K(t_0,A_2\theta_*,4A_2\theta_*)]\setminus\left[K\left(t_0,\frac{a}{2}\right)\cup K\left(t_j,\frac{a}{2}\right)\right]} <\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{(k+\mu)\alpha_j}\times$$

$$\times\int\limits_{|t-t_0|>\frac{a}{2}} |t-t_0|^{-(k-1)\alpha_j-1}\,|dt|<\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{(k+\mu)\alpha_j}\, a^{-(k-1)\alpha_j}. \tag{21}$$

Если же $|t-t_0|\geqslant 4A_2\theta_*$, то $|t-t_j|+\theta_*\asymp|t-t_0|$ и

$$\int\limits_{\Gamma_*\setminus K(t_0,4A_2\theta_*)} <\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{k+\mu} \int\limits_{|t-t_0|\geqslant 4A_2\theta_*} |t-t_0|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k}\,|dt|<\cdot$$

$$<\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{k+\mu}\, \theta_*^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1} <\cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}\, \theta_*^{k+\mu}\, a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}. \tag{22}$$

Применим лемму 3 для завершения оценок в случае 2), а). Интегрирование ведется по интервалу $\theta_*\geqslant\frac{b}{A_2}$ или $\theta\geqslant\frac{b}{2A_2}$, поскольку A выбрано так, что $\frac{b}{2A_2}>\frac{1}{n}$. Если $\varkappa$ — какой-либо показатель у θ_*, участвующий в оценках (15)—(22), то

$$\int\limits_{\frac{b}{2A_j}}^{b} J_m(\theta)\,\theta^{x}\,d\theta \asymp \frac{1}{n^{m-1}}\,b^{x-m+1}.$$

Если $x = v + \mu + 1$, $0 \leqslant v \leqslant k$, то соответствующая оценка имеет вид

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,\frac{1}{n^{m-1}}\,b^{v+\mu+2-m}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v}.$$

Если $b < \cdot\, a$ (т. е. $\lambda < \cdot\, a^{\alpha_j}$), то

$$\frac{1}{n^{m-1}}\cdot b^{v+\mu+2+m}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} < \cdot\,\frac{1}{n^{m-1}}\,b^{\mu+2-m}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{\mu+2-m}\,a^{(\mu+2-m)(1-\alpha_j)}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)} \asymp \frac{\rho^{m-1}}{\lambda^{m-\mu-2}} = \frac{\rho^{m_1+\mu+1}}{\lambda^{m_1}}, \qquad (23)$$

$$m_1 = m - \mu - 2.$$

Если $b \cdot > a$ ($\lambda \cdot > a^{\alpha_j}$), то

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,b^{v+\mu+2-m}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} \asymp \frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{\frac{v+\mu+2-m}{j}}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v}.$$

Имеем

$$(\mu+1)(\alpha_j-1) - v = \left(\frac{m-v-\mu-2}{\alpha_j} + \mu + 1\right)(\alpha_j - 1) -$$

$$-\left[(m-\mu-2)\,\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} + \frac{v}{\alpha_j}\right],$$

$$m-1 = \frac{m-v-\mu-2}{\alpha_j} + \mu + 1 + \left[(m-\mu-2)\,\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} + \frac{v}{\alpha_j}\right]$$

и, если $\alpha_j > 1$, в силу $na \cdot > 1$ получим

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{\frac{v+\mu+2-m}{\alpha_j}}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} < \cdot\,\frac{\rho^{m_2+\mu+1}}{\lambda^{m_2}},\quad m_2 = \frac{m-v-\mu-2}{\alpha_j}. \qquad (24)$$

Если $\alpha_j < 1$, то

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{\frac{v+\mu+1-m}{\alpha_j}}\,a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-v} = \frac{1}{n^{m-1}}\,a^{(m-1)(\alpha_j-1)}\,\frac{1}{\lambda^{m-\mu-2}}\times$$

$$\times\left(\frac{a}{\lambda^{1/\alpha_j}}\right)^{(\mu+2-m)(\alpha_j-1)-v} < \cdot\,\frac{\rho^{m_3+\mu+1}}{\lambda^{m_3}},\quad m_3 = m-1, \qquad (25)$$

в силу того, что $\frac{a}{\lambda^{1/\alpha_j}} < \cdot\, 1$ и $(\mu+2-m)(\alpha_j-1) - v > 0$. Если же $x = (v+\mu+1)\,\alpha_j$, $v = k$, $k-1$, то интегрирование соответствующих оценок даст нам

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,\frac{1}{n^{m-1}}\,b^{(v+\mu+1)\alpha_j-m+1}\,a^{-v\alpha_j}\,. \tag{26}$$

Вновь, если $b<\cdot a$, то при $\alpha_j>1$ получим

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,b^{(v+\mu+1)\alpha_j-m+1}\,a^{-v\alpha_j}<\cdot\frac{1}{n^{m-1}}\,a^{(m-1)(\alpha_j-1)}\frac{1}{\lambda^{m-\mu-2}}\,\frac{\lambda^{(\mu+1)(\alpha_j-1)}}{a^{(\mu+1)\alpha_j(\alpha_j-1)}}<\cdot$$

$$<\cdot\frac{\rho^{m_4+\mu+1}}{\lambda^{m_4}},\; m_4=m-\mu-2, \tag{27}$$

ибо $\lambda<\cdot a^{\alpha_j}$.

Если же $b<\cdot a$, но $\alpha_j<1$, то

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{(v+\mu+1)\alpha_j-m+1}\,a^{[(v+\mu+1)\alpha_j-m+1](1-\alpha_j)}\,a^{-v\alpha_j}=$$

$$=\left[\frac{1}{n^{u+\mu+1}}\,a^{(u+\mu+1)(\alpha_j-1)}\frac{1}{\lambda^{u}}\right]\left\{\frac{1}{n^{m-u-\mu-2}}\cdot\lambda^{(v+\mu+1)\alpha_j-m+1+u}\times\right.$$

$$\left.\times a^{[m-u-\mu-2-(v+\mu+1)\alpha_j](\alpha_j-1)-v\alpha_j}\right\}. \tag{28}$$

При $2(k-1)\leqslant 2v<u<\frac{m}{2}-r-1$ в выражении, стоящем в фигурных скобках, заменим λ на ρ и легко убедимся в том, что $an\cdot>\cdot 1$ влечет ограниченность его сверху, т. е. для всего выражения (28) получим оценку

$$\frac{\rho^{m_5+\mu+1}}{\lambda^{m_5}},\; m_5=u\,. \tag{29}$$

Если же $b\cdot>a$ $(\lambda\cdot>a^{\alpha_j})$ и $\alpha_j>1$, то

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,b^{(v+\mu+1)\alpha_j-m+1}\,a^{-v\alpha_j}\asymp\frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{v+\mu+1-\frac{m-1}{\alpha_j}}\,a^{-v\alpha_j}=$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{m-1}{\alpha_j}-v}}\,a^{\left(\frac{m-1}{\alpha_j}-v\right)(\alpha_j-1)}\,\frac{1}{\lambda^{\frac{m-1}{\alpha_j}-v-\mu-1}}\cdot\frac{1}{an^{(m-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}-v}}<\cdot$$

$$<\cdot\frac{\rho^{m_6+\mu+1}}{\lambda^{m_6}},\; m_6=\frac{m-1}{\alpha_j}-v-\mu-1. \tag{30}$$

Если $\alpha_j<1$, то

$$\frac{1}{n^{m-1}}\,\lambda^{v+\mu+1-\frac{m-1}{\alpha_j}}\,a^{-v\alpha_j}=\frac{1}{n^{m-1}}\,a^{(m-1)(\alpha_j-1)}\frac{1}{\lambda^{m-\mu-2}}\cdot\frac{a^{(m-1)(1-\alpha_j)-v\alpha_j}}{\lambda^{(m-1)\frac{1-\alpha_j}{\alpha_j}-v}}<\cdot$$

$$<\cdot\frac{\rho^{m_7+\mu+1}}{\lambda^{m_7}},\; m_7=m-1. \tag{31}$$

В результате оценок (23)—(31) заключаем, что в случае 2), а) для соответствующей части интеграла (15) имеем оценку

$$\omega(\rho)\,\frac{\rho^{\mu+N}}{\lambda^N},$$

где N — любое достаточно большое фиксированное число.

в) $b > A_2\theta_*$. В этом случае внутренний интеграл в (15) разбиваем на два: на интеграл, взятый по $\Gamma_* \cap K(t_0,\ A_2\theta_*,\ b)$ и на интеграл по $\Gamma_* \setminus K(t_0,\ b)$. В первом интеграле знаменатель заменим на λ^k и будем оценивать выражение

$$\frac{1}{\lambda^k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\,d\theta \int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0, A_2\theta_*, b)} \theta_*^{k+\mu}(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}|t-t_j|^{\alpha_j-1}\frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|}\,|dt|. \tag{32}$$

В случае $\alpha_j > 1$ имеем

$$(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} <\cdot\, |t-t_j|^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}+\theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}$$

и, если $a > 2b$, то $|t-t_j| \asymp a$

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0, A_2\theta_*, b)} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}\,|dt| <\cdot\, b\,a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)},$$

тогда для рассматриваемого выражения (32) получится оценка

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho\lambda^k}\left(\frac{1}{n^{k+\mu}}\,a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}b+\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}}\,b\,a^{\alpha_j-1}\right).$$

Но $b \asymp \lambda a^{1-\alpha_j}$ и

$$\frac{1}{\lambda^k}\,\frac{1}{n^{k+\mu}}\,a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}b \asymp \frac{1}{\lambda^{k-1}}\,\frac{1}{n^{k+\mu}}\,a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} \asymp \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^{k-1}},$$

$$\frac{1}{\lambda^k}\,\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}}\,b a^{\alpha_j-1} \asymp \frac{1}{\lambda^{k-1}}\,\frac{1}{n^{(k+\mu)\mu_j}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k-1}}\,\frac{1}{n^{k+\mu}}\,a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,\frac{1}{(na)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}} <\cdot\, \frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^{k-1}},$$

тогда выражение (32) будет меньше

$$\mathrm{const}\cdot\omega(\rho)\,\frac{\rho^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}}, \tag{33}$$

где const — постоянная, не зависящая от ρ и λ.

Если же $a \leqslant 2b$, то $|t-t_j| <\cdot\, b$ и

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0, A_2\theta_*, b)} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}\,|dt| <\cdot\, b^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)+1},$$

следовательно выражение (32) оценится так:

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho\lambda^k}\left(\frac{1}{n^{k+\mu}}\, b^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)+1}+\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}}\, b^{\alpha_j}\right).$$

Поскольку $b \asymp \lambda^{1/\alpha_j}$, получаем оценку

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho\lambda^k}\left(\frac{1}{n^{k+\mu}}\,\lambda^{(k+\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}+\frac{1}{\alpha_j}}+\frac{1}{n^{(k+\mu)\alpha_j}}\,\lambda\right),$$

а затем

$$\frac{1}{n^{k+\mu}\,\lambda^{\frac{k}{\alpha_j}-(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}-\frac{1}{\alpha_j}}}=\frac{1}{n^{\frac{k+\mu}{\alpha_j}}}\,a^{(k+\mu)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}\,\frac{1}{(na)^{(k+\mu)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{k-1}{\alpha_j}-(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}}<\cdot$$

$$<\cdot\,\frac{\rho^{m_8+\mu+1}}{\lambda^{m_8}},\quad m_8=\frac{k-1}{\alpha_j}-(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j},$$

$$\frac{1}{\lambda^{k-1}\,n^{(k+\mu)\alpha_j}}<\cdot\,\frac{1}{\lambda^{k-1}}\,\rho^{k+\mu},$$

и в результате нужный нам интеграл оценится как

$$\omega(\rho)\,\frac{\rho^{m_9+\mu}}{\lambda^{m_9}},\quad m_9=\frac{k-1}{\alpha_j}-(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}. \tag{34}$$

При $\alpha_j<1$ и $a>2b$ будем иметь $|t-t_j|\asymp a\cdot>\theta_*$, $|t-t_j|+\theta_*\asymp a$ и получим оценку для (32):

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho\lambda^k}\int_{-\pi}^{\pi} J_m(\theta)\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,\,A_2\theta_*,\,b)}(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,|t-t_j|^{\alpha_j-1}\,|dt|<\cdot$$

$$<\cdot\,\frac{\omega(\rho)}{\rho\lambda^k}\,\frac{1}{n^{k+\mu}}\,a^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}\,b<\cdot\,\omega(\rho)\,\frac{\rho^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}}. \tag{35}$$

Если же $a\leqslant 2b$, то

$$\int\limits_{\Gamma_*\cap K(t_0,\,A_2\theta_*,\,b)}(|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\,|t-t_j|^{\alpha_j-1}\,\frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|}\,|dt|<\cdot$$

$$<\cdot\,\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\left(\int\limits_{\Gamma_*\setminus K(t_j,\,A_2\theta_*)}|t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}\,|dt|+\theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)+\alpha_j}\right)<\cdot$$

$$<\cdot\,\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\,\theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)+\alpha_j}.$$

После умножения на $\theta_*^{k+\mu}$ и интегрирования по θ получим оценку $\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^k}\,\frac{1}{n^{(k+\mu+1)\alpha_j}}$. Но в рассматриваемом случае мы имеем

$$\lambda'=|z-z_j|\geqslant\lambda=|z-z_0|,\quad |z-z_j|\leqslant|z-z_0|+|z_0-z_j|<\cdot\,\lambda+a^{\alpha_j}<\cdot\,\lambda,$$

т. е. в нашем случае $\lambda' \asymp \lambda$, $\frac{1}{n^{\alpha_j}} \asymp \rho_n(z_j) = \rho' < \cdot \lambda'$, $R = 1 + \frac{1}{n}$ по выбору области $\widetilde{G}$ и оценку можно переписать в виде

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{\rho'^{k+\mu+1}}{\lambda'^k} < \cdot \omega(\rho') \frac{\rho'^{k+\mu}}{\lambda'^k}. \tag{37}$$

Следовательно, интеграл по $\Gamma_* \cap K(t_0, A_2\theta_*, b)$ оценен, перейдем к оценке интеграла по $\Gamma_* \setminus K(t_0, b)$, который можно записать следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} J_m(\theta)\, \theta_*^{k+\mu}\, d\theta \int_{\Gamma_* \setminus K(t_0, b)} \frac{(|t-t_j| + \theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j - 1)} |t - t_j|^{\alpha_j - 1}}{|t - t_0|^k (|t_0 - t_j| + |t - t_0|)^{k(\alpha_j - 1)}} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} |dt|. \tag{38}$$

α) $b < 2a$. Рассмотрим интеграл по $|t - t_j| < A_5\theta_*$, где $A_5 = \frac{1}{2} A_2 A_4$, а $A_4 < \frac{1}{2}$ будет определено ниже. Пусть $\tau \min |\zeta - z|$, когда ζ пробегает образ γ дуги $\Gamma_* \cap K(t_j, A_4 a)$ при отображении $\zeta = \psi(t)$. Пусть $\zeta_0 \in \gamma$, $|\zeta_0 - z| = \tau$. Существуют постоянные B_1 и B_2, $0 < B_1 < B_2 < \infty$, зависящие только от области $\overline{G}$, такие, что для $t \in \Gamma_*$ имеем $B_1 (t - t_j|^{\alpha_j} \leqslant |\psi(t) - z_j| \leqslant B_2 |t - t_j|^{\alpha_j}$. Выберем $A_4 = \min\left(\left(\frac{1}{2} \frac{B_1}{B_2}\right)^{1/\alpha_j}, \frac{1}{2}\right)$.
Тогда имеем

$$|\zeta - z| \leqslant |z_j - z| = \lambda', \quad |\zeta_0 - z| \asymp |z - z_0| + |z_0 - \zeta_0| \geqslant \lambda + |z_0 - z_j| -$$

$$- |\zeta_0 - z_j| \geqslant B_1 a^{\alpha_j} - B_2 A_4^{\alpha_j} a^{\alpha_j} \geqslant \frac{1}{2} B_1 a^{\alpha_j} \asymp a^{\alpha_j} + \lambda \asymp \lambda'.$$

Это влечет

$$\frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} < \cdot \frac{\omega(\lambda')}{\lambda'}, \quad \zeta \in \gamma.$$

Далее (напомним, что в рассматриваемом случае $|t - t_j| < A_5\theta_*$)

$$|t - t_j| + \theta_* \asymp \theta_*, \quad |t - t_0| \asymp a \asymp |t - t_0| + a,$$

и весь интеграл (38) в данном случае оценится так:

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{1}{n^{(k+\mu+1)\alpha_j}} a^{-k\alpha_j},$$

что, как мы видели, равносильно

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \frac{1}{n^{\alpha_j(k+\mu+1)}} \frac{1}{\lambda'^k} < \cdot \omega(\rho') \frac{\rho'^{k+\mu}}{\lambda'^k}. \tag{39}$$

Если $A_5\theta_* < |t - t_j| \leqslant A_4 a$, то

$$|t - t_j| + \theta_* \asymp |t - t_j|, \quad |t - t_0| \asymp |t - t_0| + a \asymp a,$$

и мы имеем оценку

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'}\frac{1}{n^{k+\mu}}a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1},\quad \alpha_j>1,$$

$$\frac{\omega(\lambda')}{\lambda'}\frac{1}{n^{(k+\mu+1)\alpha_j}}a^{-k\alpha_j},\quad \alpha_j<1,$$

но поскольку

$$\frac{1}{n^{k+\mu}}a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}=\frac{1}{n^{k+\mu}}a^{(k+\mu)(\alpha_j-1)}\frac{1}{a^{(k-1)\alpha_j}}\asymp\frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda'^{k-1}}<\cdot\frac{\rho^{k+\mu}}{\lambda^{k-1}},\tag{40}$$

то из (39) и (40) заключаем, что и в этом случае есть нужная оценка. Если же $b<|t-t_0|\leqslant\frac{a}{2}$, то $|t-t_j|\asymp a\asymp|t-t_j|+\theta_*$, и мы получаем оценку

$$\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{n^{k+\mu}}a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)}b^{-k+1}\asymp\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{n^{k+\mu}}a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)}\,-$$

$$-\,\lambda^{-k+1}a^{(k-1)(\alpha_j-1)}<\cdot\,\omega(\rho)\frac{\rho^{k-1+\mu}}{\lambda^{k-1}}.\tag{41}$$

Интеграл же по $|t-t_0|\geqslant\frac{a}{2}$, $|t-t_j|\geqslant A_4a$ дает, в силу $|t-t_0|\asymp|t-t_j|$

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho}\frac{1}{n^{k+\mu}}a^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}<\cdot\,\omega(\rho)\frac{\rho^{k+\mu-1}}{\lambda^{k-1}}.\tag{42}$$

β) $b\geqslant 2a$. В таком случае в интеграле (38) $|t-t_j|\asymp|t-t_0|\asymp\asymp|t-t_j|+\theta_*\asymp|t-t_0|+a$, $\frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|}<\cdot\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$, и (38) оценивается следующим образом:

$$\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}J_m(\theta)\,\theta^{k+\mu}\,d\theta\int_{\Gamma_*\setminus K(t_0,b)}|t-t_0|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k}|dt|<\cdot$$

$$<\cdot\frac{1}{n^{k+\mu}}b^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1}\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\asymp\frac{1}{n^{k+\mu}}\lambda^{(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}-\frac{k-1}{\alpha_j}}\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}<\cdot$$

$$<\cdot\begin{cases}\omega(\rho)\dfrac{\rho^{k+\mu-1}}{\lambda^{k-1}}, & \alpha_j<1,\\[2mm] \omega(\rho')\dfrac{\rho'^{m_{11}+\mu}}{\lambda'^{m_{11}}}, & \alpha_j>1,\quad m_{11}=\dfrac{k-1}{\alpha_j}-(\mu+1)\dfrac{\alpha_j-1}{\alpha_j}.\end{cases}\tag{43}$$

При выводе (43) мы воспользовались тем, что

$$\lambda'=|z-z_j|\asymp|z-z_0|+|z_0-z_j|\asymp\lambda+a^{\alpha_j}\asymp\lambda.$$

Соотношения (13)—(43) доказывают теорему в случае I.

Случай II. $a = |t_0 - t_j| \leqslant \frac{4A_2}{n}$; это влечет эквивалентность $|t_{R,\theta} - t_0| \asymp |t_{R,\theta} - t_j|$, $|t_0 - t_j| + |t_{R,\theta} - t_0| \asymp |t_{R,\theta} - t_j|$, $\lambda \asymp \lambda'$ и нам нужно оценить интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} J_m(\theta)\, d\theta \int_{\Gamma_*} \frac{\theta_*^{k+\mu} (|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t-t_j|^{\alpha_j-1}}{(|t_{R,\theta}-t_j|^{\alpha_j}+\lambda')^k} \frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|} |dt|. \tag{44}$$

1) $|t - t_j| < A_2\theta_*$, тогда заменим в (44) знаменатель на

$$\lambda'^k, \quad \frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|} < \cdot \frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} \qquad \text{и}$$

$$\int_{\Gamma_* \cap K(t_j, A_2\theta_*)} (|t-t_j|+\theta_*)^{(k+\mu)(\alpha_j-1)} |t-t_j|^{\alpha_j-1} |dt| \asymp \theta_*^{(k+\mu)(\alpha_j-1)+\alpha_j},$$

(44) оценится как

$$\frac{1}{n^{(k+\mu+1)\alpha_j}} \frac{1}{\lambda'^k} \frac{\omega(\lambda')}{\lambda'} < \cdot\, \omega(\rho') \frac{\rho'^{k+\mu}}{\lambda'^k}. \tag{45}$$

2) $|t - t_j| > A_2\theta_*$, тогда $|t_{R,\theta} - t_j| \asymp |t - t_j|$, $|t-t_j| + \theta_* \asymp |t - t_j|$. При $\alpha_j < 1$ имеем

$$\int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, A_2\theta_*)} \frac{|t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}}{(t-t_j|^{\alpha_j}+\lambda')^k} |dt| < \cdot \frac{1}{\lambda'^k} \theta_*^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)+1}. \tag{46}$$

Учитывая, что $\frac{\omega(|\zeta-z|)}{|\zeta-z|} < \cdot \frac{\omega(\rho')}{\rho'}$ и интегрируя (46) по θ, получим оценку

$$\frac{\rho'^{k+1}}{\lambda'^k} \omega(\rho'). \tag{47}$$

Если же $\alpha_j > 1$, то

$$\int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, A_2\theta_*)} \frac{|t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)}}{(|t-t_j|^{\alpha_j}+\lambda')^k} |dt| \asymp \frac{1}{\lambda'^k} \int_{\Gamma_* \cap K(t_j, A_2\theta_*, \lambda'^{1/\alpha_j})} |t-t_j|^{(k+\mu+1)(\alpha_j-1)} |dt| +$$

$$+ \int_{\Gamma_* \setminus K(t_j, \lambda'^{1/\alpha_j})} |t-t_j|^{(\mu+1)(\alpha_j-1)-k} |dt| < \cdot$$

$$< \cdot \frac{1}{\lambda'^k} \lambda'^{(k+\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j}} + \lambda'^{[(\mu+1)(\alpha_j-1)-k+1]\frac{1}{\alpha_j}}.$$

После интегрирования по θ окончательно получим оценку

$$\frac{\omega(\rho')}{\rho'} \frac{1}{n^{k+\mu}} \lambda'^{(\mu+1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j} - \frac{k-1}{\alpha_j}} < \cdot\, \omega(\rho') \frac{\rho'^{m_{11}+\mu}}{\lambda'^{m_{11}}}, \tag{48}$$

$$m_{12} = \frac{k-1}{\alpha_j} - (\mu+1)\,\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j}.$$

Соотношения (44)—(48) доказывают теорему и в случае II, т. е. теорема доказана.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила 15.III.1972

Ն. Ա. ՇԻՐՈԿՈՎ. Ոչ-զրոյական արտաքին անկյուններով փակ բազմությունների վրա ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

Ոչ-զրոյական արտաքին անկյուններ ունեցող վերջավոր թվով անկյունային կետերով G տիրույթի եզրի ողորկության վրա բավականաչափ թույլ սահմանափակումների դեպքում ապացուցված է

Թեորեմ. Դիցուք $f \in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}(\bar{G})$*։ Այդ ժամանակ ցանկացած N-ի համար, N > 0, գոյություն ունի n-ից փոքր կամ հավասար կարգի* $P_n(z)$ *բազմանդամ այնպես որ z-ի համար,* $z \in \bar{G}$, *տեղի ունի*

$$|f^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| \leqslant A_\nu \left[\frac{\rho^{r-\nu+N}}{(\rho+\lambda)^N}\,\omega(\rho) + \frac{\rho'^{\,r-\nu+N}}{(\rho'+\lambda')^N}\,\omega(\rho') \right],$$

որտեղ A_ν*-ն կախված է միայն* $\bar{G}$*-ից, ν-ից, N-ից, իսկ ρ, λ, ρ′, λ′ մեծությունները միայն n-ից և* $\bar{G}$*-ից։ Բավականաչափ մեծ n-երի համար* $\bar{G}$*-ի խիստ ներսն ընկնող z կետերում (այսինքն երբ* $\lambda > \varepsilon_0 > 0$*) մոտարկումը կլինի հավասարաչափ ավելի լավ, քան ցանկացած եզրային կետում։*

N. A. SHIROKOV. *On uniform approximation of functions on closed sets with nonzero exterion angles* (summary)

Let G be a domain whose boundary $\hat{G}$ possesses a finite number of corner points with nonzero exteriour angles. Under slight restrictions on the smoothness of $\hat{G}$ the following is proved:

Theorem. Let $f \in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}(\bar{G})$. Then for an arbitrary $N > 0$ there exists a polinomial $p_n(z)$ of degree $\leqslant n$ such that for $z \in \bar{G}$ the condition

$$|f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z)| \leqslant A_\nu \left[\frac{\rho^{r-\nu+N}}{(\rho+\lambda)^N}\,\omega(\rho) + \frac{\rho'^{\,r-\nu+N}}{(\rho'+\lambda')^N}\,\omega(\rho') \right]$$

is satisfied, where A_ν depends only on $\bar{G}$, ν and N; ρ, λ, ρ', λ' depend only on $\bar{G}$ and z. When n is sufficiently large the approximation in the points z, wich are situated strictly inside $\bar{G}$ (i. e. when $\lambda > \varepsilon_0 > 0$) will be better, than in any boundary point.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. А. Широков.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами, ДАН СССР, 205, № 4, 1972, 798—800.
2. *Н. А. Лебедев* и *Н. А. Широков.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 4, 1971, 311—341.
3. *В. К. Дзядык.* О применении обобщенных полиномов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций классов в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей, Укр. М. Ж., 24, вып. 1, 1972, 3—20.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS