ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՐԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» սագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն ան մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն ան մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով Նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանմամբ։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŻRBAŚIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 6, 1973 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

О БАЗИСЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КЛАССОВ ХАРДИ H_p $(1<p<\infty)$

Если $\{a_k\}_1^\infty$ $(0<|a_k|<1)$ — произвольная последовательность отличных друг от друга точек единичного круга, то, как хорошо известно, при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)<+\infty \tag{1}$$

система рациональных функций

$$r_k(z)=\frac{1}{1-\bar{a}_k z}\quad (k=1,2,\cdots) \tag{2}$$

не замкнута в классах H_p $(1\leqslant p<\infty)$ Харди.

В ряде работ (см. [1] и [2]) была дана полная внутренняя характеристика линейной оболочки $\lambda_p\{a_k\}\subset H_p$ незамкнутой системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$.

В работах [3] и [4] существенно пользуясь тем, что H_2 — гильбертово пространство, было установлено, что условие

$$\inf_{k>1}\prod_{l\neq k}\left|\frac{a_l-a_k}{1-\bar{a}_l a_k}\right|\geqslant\delta>0 \tag{3}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ была базисом в своей линейной оболочке $\lambda_p\{a_k\}$ в метрике L_2 на окружности $|z|=1$.

В настоящей статье исследуется вопрос о базисности системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в подпространствах $\lambda_p\{a_k\}$ негильбертовых классов Харди H_p $(1<p<\infty)$, когда методы, развитые в случае гильбертового пространства H_2 непосредственно не применимы.

В основе метода решения нашей задачи лежит тождество

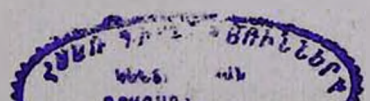
$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}=\sum_{k=1}^{m}r_k(z)\overline{\Omega_{m,k}(\zeta)}+\frac{B_m(z)\overline{B_m(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}, \tag{4}$$

где

$$\Omega_{m,k}(\zeta)=\frac{B_m(\zeta)}{(\zeta-a_k)B_m'(a_k)},\quad B_m(\zeta)=\prod_{k=1}^{m}\frac{a_k-\zeta}{1-\bar{a}_k\zeta}\frac{|a_k|}{a_k}\quad (m=1,2,\cdots), \tag{5}$$

а также простой факт биортогональности систем $\{r_k(z),\ \Omega_{m,k}(z)\}_1^m$ $(1\leqslant m\leqslant\infty)$ на окружности $|z|=1$.

Отметим, что как это тождество, так и свойство биортогональности указанных систем являются лишь специальными случаями более



общих результатов такого же рода, установленных в недавней работе М. М. Джрбашяна [5].

В § 1 статьи приводится ряд предварительных сведений и лемм. Здесь, в частности, при условии (1) определяется система функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, которая наряду с системой $\{\Omega_{m,k}\}_1^m$ биортогональна с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$.

В § 2 в предположении, что последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3), доказываются следующие два основных утверждения.

I. *Для любой функции $f(z)\in\lambda_p\{a_k\}$ $(1<p<\infty)$ имеет место представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z),\ z\in CK, \tag{6}$$

где K есть замыкание множества точек $\{1/\bar{a}_k\}_1^\infty$

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt| \quad (k=1,\ 2,\cdots), \tag{7}$$

и ряд сходится по метрике L_p на окружности $|z|=1$.

II. *Для любой функции $f(z)\in\lambda_p\{a_k\}$ $(1<p<\infty)$ имеет место разложение*

$$f(z)=B(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(a_k)}{(z-a_k)\,B'(a_k)},\ z\in CK, \tag{8}$$

причем ряд сходится по метрике L_p на окружности.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1.1 (а). Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ $(0<|a_k|<1)$ — произвольная последовательность отличных друг от друга комплексных чисел. Всюду дальше будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|^2)<+\infty \tag{1.1}$$

и писать $\{a_k\}_1^\infty\in B$.

В этом предположении нашу последовательность отнесем к классу BC и будем писать $\{a_k\}_1^\infty\in BC$, если при некотором δ $(0<\delta<1)$ соблюдается условие Л. Карлесона

$$\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\left|\frac{a_l-a_k}{1-\bar{a}_l\,a_k}\right|\geqslant\delta>0. \tag{1.2}$$

(б). С последовательностью $\{a_k\}_1^\infty$ ассоциируем ее функцию Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\frac{|a_k|}{a_k}, \tag{1.3}$$

а также функции

$$B_m(z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\frac{|a_k|}{a_k}\ (m=1, 2,\cdots). \tag{1.4}$$

Далее введем в рассмотрение следующие системы функций

$$r_k(z)=\frac{1}{1-\bar{a}_k z}, \tag{1.5}$$

$$(k=1, 2,\cdots)$$

$$\Omega_k(z)=\frac{B(z)}{(z-a_k)B'(a_k)}, \tag{1.6}$$

а также

$$\Omega_{k,m}(z)=\frac{B_m(z)}{(z-a_k)\,\overline{B_m(a_k)}}\quad (m=1, 2,\cdots)\ (k=1, 2,\cdots, m). \tag{1.7}$$

Заметим, что системы функций $\{r_k(t), \Omega_k(t)\}_1^{\infty}$, а также $\{r_k(t), \Omega_{k,m}(t)\}_1^{m}$ биортогональны на окружности $|t|=1$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\overline{r_p(t)}\,\Omega_k(t)\,|dt|=\delta_{k,p}=\begin{cases}1, & k=p\\ 0, & k\neq p,\end{cases} \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\overline{r_p(t)}\,\Omega_{k,m}(t)\,|dt|=\delta_{k,p}=\begin{cases}1, & k=p\\ 0, & k\neq p.\end{cases} \tag{1.9}$$

В самом деле, поскольку функции $\{b_k(z)\}_1^{\infty}$ голоморфны и ограничены в круге $|z|<1$, то по формуле Коши имеем

$$\Omega_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\Omega_k(t)\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\Omega_k(t)\frac{|dt|}{1-\bar{t}z},$$

откуда и непосредственно следует наше утверждение (1.8). Аналогично убеждаемся в справедливости утверждения (1.9).

Лемма 1.1. *Для произвольных значений переменных z и ζ имеет место тождество*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}=\sum_{k=1}^{m}r_k(z)\,\overline{\Omega_{k,m}(\zeta)}+\frac{B_m(z)\,\overline{B_m(\zeta)}^{*}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, достаточно установить справедливость (1.10), предполагая дальше, что $|z|<1$, $|\zeta|<1$.

---

* Специальный случай теоремы из [5] при условии, что все числа последовательности $\{a_k\}_1^{\infty}$ отличны друг от друга.

Рассмотрим теперь рациональную функцию от ζ

$$R_m(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta\bar{z}} - \sum_{k=1}^{m} \overline{r_k(z)}\, \omega_{k,m}(\zeta),$$

очевидно удовлетворяющую интерполяционным данным

$$R_m(\alpha_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, m).$$

Следовательно функция $R_m(\zeta)/B_m(\zeta)$ голоморфна в замкнутом круге $|\zeta|\leqslant 1$, и по формуле Коши будем иметь

$$\frac{R_m(\zeta)}{B_m(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{R_m(t)}{B_m(t)}\,\frac{dt}{t-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{1}{B_m(t)(1-t\bar{z})}\,\frac{dt}{t-\zeta} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_k z)(t-\alpha_k)(t-\zeta)}\,dt = \frac{\overline{B_m(z)}}{1-\zeta\bar{z}}.$$

Переходя здесь к сопряженным величинам, получаем (1.10).

1.2. (а). Следуя М. М. Джрбашяну [3], введем следующие классы функций. Пусть

$$D^{(+)} = \{z;\ |z|<1\},\ D^{(-)} = \{z;\ |z|>1\}.$$

Обозначим через $H_p\{\alpha_k\}$ $(1\leqslant p<\infty)$ класс мероморфных в $D^{(-)}$ функций, допускающих представление вида

$$f(z) = \frac{B(z)}{z}\,\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(-)}, \tag{1.11}$$

где $\tilde{f}(z)\in H_p$ произвольно.

Очевидно, что если $f(z)\in H_p\{\alpha_k\}$, то почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$ существует предел

$$\lim_{r\to 1+0} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta})\in L_p(0,2\pi).$$

Далее обозначим через $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1\leqslant p<\infty)$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям:

1) $f(z)\in H_p,\ z\in D^{(+)}$,

2) $f(z)\in H_p\{\alpha_k\},\ z\in D^{(-)}$,

3) почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1+0} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta}).$$

Что класс $\lambda_p\{\alpha_k\}$ не пуст показывает простой пример функций $B(z)/(z-\alpha_k)$.

(б). Обозначим через $H_p(D^{(+)})$ $(0<p<\infty)$ множество голоморфных в $D^{(+)}$ функций $F(z)$, принадлежащих известному классу H_p Харди с нормой

$$\|F\|_p = \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \right\}^{1/p}.$$

Аналогично, через $H_p(D^{(-)})$ будем обозначать множество голоморфных в $D^{(-)}$ функций $\Phi(z)$ с нормой

$$\|\Phi\|_p = \sup_{1<r<\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \right\}^{1/p},$$

представимых в виде

$$\Phi(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)}, \tag{1.12}$$

где $F(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Отметим, что из представления (1.10) следует, что

$$\|\Phi\|_p = \|F\|_p.$$

Докажем лемму.

Лемма А. 1°. *Для любого p $(0 < p < \infty)$ последовательность функций*

$$\overline{B}_m(z) = B(z) / B_m(z)$$

сходится к единице на окружности $t = e^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$ по норме $L_p(0,2\pi)$, то есть

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} |1 - \overline{B}_m(t)|^p \, |dt| = \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| 1 - \overline{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) \right|^p |dt| = 0. \tag{1.13}$$

2°. *Если последовательность функций*

$$\{f_m(t)\}_1^\infty, \; f_m(e^{i\vartheta}) \in L_p(0,2\pi) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

сходится к функции $f(e^{i\vartheta}) \in L_p(0,2\pi)$ в метрике $L_p(0,2\pi)$, то имеем также

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} |f(t) - \widetilde{B}_m(t) f_m(t)|^p \, |dt| = \lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} \left| f(t) - \right.$$

$$\left. - \overline{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) f_m(t) \right|^p |dt| = 0. \tag{1.14}$$

Доказательство. Как хорошо известно

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} |B_m(t) - B(t)|^2 \, |dt| = \lim_{m\to\infty} \int_{|t|=1} \left| B_m\left(\frac{1}{t}\right) - B\left(\frac{1}{t}\right) \right|^2 |dt| = 0. \tag{1.15}$$

Для любого $\sigma > 0$ на окружности $|t|=1$ рассмотрим дополняющие друг друга множества

$E_m(\sigma) = E\{t;\ |B_m(t) - B(t)| < \sigma\}$, $E_m^*(\sigma) = E\{t;\ |B_m(t) - B(t)| > \sigma\}$

и

$$F_m(\sigma) = E\left\{t; \left|B_m\left(\frac{1}{t}\right) - B\left(\frac{1}{t}\right)\right| < \sigma\right\},\quad F_m^*(\sigma) = E\left\{t; \left|B_m\left(\frac{1}{t}\right) - B\left(\frac{1}{t}\right)\right| > \sigma\right\}.$$

Из (1.15) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} E_m^*(\sigma) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} F_m(\sigma). \tag{1.16}$$

Тогда поскольку $|B_m(t)| = \left|B_m\left(\frac{1}{t}\right)\right|$, то следующие оценки очевидны:

$$\int_{|t|=1} |1 - B_m(t)|^p\,|dt| = \int_{|t|=1} \left|1 - \bar{B}_m\left(\frac{1}{t}\right)\right|^p |dt| = \int_{|t|=1} |B(t) - B_m(t)|^p\,|dt| +$$

$$+ \int_{|t|=1} \left|B\left(\frac{1}{t}\right) - B_m\left(\frac{1}{t}\right)\right|^p |dt| \leqslant 2\pi\sigma^p + 2^p \operatorname{mes} E_m^*(\sigma).$$

Отсюда, ввиду произвольности $\sigma > 0$ приходим к соотношениям (1.13).

2°. Заметим, что для любого $p \geqslant 1$

$$2^{-p} \int_{|t|=1} |f(t) - f_m(t)\,\bar{B}_m(t)|^p\,|dt| \leqslant \int_{|t|=1} |f_m(t) - f(t)|^p\,|dt| +$$

$$+ \int_{|t|=1} |f(t)|^p\,|\bar{B}_m(t) - 1|^p\,|dt| = J_m^{(1)} + J_m^{(2)},$$

причем мы полагаем, что $\lim\limits_{m\to\infty} J_m^{(1)} = 0$.

Далее, очевидно, что

$$J_m^{(2)} = \int_{|t|=1} |f|^p\,|B_m(t) - B(t)|^p\,|dt| \leqslant \sigma^p \int_{|t|=1} |f|^p\,|dt| + 2^p \int_{E_m^*(\sigma)} |f|^p\,|dt|,$$

откуда ввиду произвольности $\sigma > 0$ и (1.16) следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} J_m^{(2)} = 0$.

Таким образом, мы доказали первое соотношение (1.14). Второе соотношение (1.14) доказывается аналогично.

(в). Нам в дальнейшем понадобятся следующие теоремы М. Рисса и Шапиро-Шилдса.

Теорема А [5]. *Для любой функции* $f(e^{i\theta}) \in L_p(0, 2\pi)\ (1 < p < \infty)$ *интегралы типа Коши*

$$F^{(+)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,\quad z \in D^{(+)}$$

и

$$F^{(-)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,\quad z \in D^{(-)}$$

обладают следующими свойствами

1) $F^{(+)}(z) \in H_p(D^{(+)}),\ z \in D^{(+)};$

2) $F^{(-)}(z) = \frac{1}{z}\,\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) \in H_p(D^{(-)}),\ z \in D^{(-)},$

где $\overline{\Phi}(z) \in H_p(D^{(+)}),\ z \in D^{(+)};$

3) $\|F^{(+)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,\ \|F^{(-)}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p,$

где $A_p > 0$ *— постоянная, не зависящая от* f *и*

$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} |f(e^{i\vartheta})|^p\, d\vartheta\right\}^{1/p}.$$

Теорема B [6]. *Если последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in BC$, *то для любой функции* $g(z)$ *из* H_p $(1 \leqslant p < \infty)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(\alpha_k)|^p (1-|\alpha_k|^2) \leqslant K_p \|g\|_p^p,$$

где K_p *— постоянная, не зависящая от* g.

Наконец, отметим, что из известной теоремы о сильной сходимости биортогональных разложений в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ в случае ограниченных биортогональных систем, непосредственно следует

Теорема C [9]. *Пусть системы ограниченных функций* $\{\varphi_n(t)\}_1^\infty$ *и* $\{\Psi_n(t)\}_1^\infty$ *составляют биортогональную систему на окружности* $|t|=1$. *Тогда, если разложение каждой функции* $f(t) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ *типа*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(t),\ c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \overline{\Psi_k(t)}\, f(t)\,|dt| \tag{1.17}$$

слабо сходится, то для каждой функции $f(t) \in L_p$ *разложение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(f)\,\Psi_k(t),\quad d_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \overline{\varphi_k(t)}\, f(t)\,|dt| \tag{1.18}$$

будет сильно сходящимся, более того, разложение (1.17) *также будет сходиться сильно.*

(г) Лемма B. *Пусть функция* $f(z) \in H_p(D^{(+)})$. *Для того чтобы* $f(z)$ *принадлежала классу* $i_p\{\alpha_k\}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z} \equiv 0,\ z \in D^{(+)}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Если $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$, то из определения класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$ следует, что существует функция $\tilde f(z)\in H_p$ такая, что

$$f(t)=\frac{B(t)}{t}\,\tilde f\left(\frac{1}{t}\right)\ (|t|=1).$$

Теперь непосредственной проверкой получаем

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z}=\int\limits_{|t|=1}\frac{\tilde f\left(\frac{1}{t}\right)}{t(t-z)}\,dt\equiv 0,\quad z\in D^{(+)},$$

так что необходимость условия леммы доказана. С другой стороны, пусть выполняется условие (1.19). Тогда по теореме И. И. Привалова следует, что функция

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z},$$

которая согласно теореме A допускает представление вида

$$F(z)=\frac{1}{z}\,\tilde F\left(\frac{1}{z}\right)\in H_p(D^{(-)}),\ \text{где}\ \tilde F(z)\in H_p(D^{(+)}),$$

обладает граничными значениями $F(e^{i\vartheta})\in L_p(0,2\pi)$, совпадающими со значениями $f(e^{i\vartheta})/B(e^{i\vartheta})$ почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$. Следовательно, согласно определению (1.12)

$$\Phi(z)\equiv B(z)\,F(z)=\frac{B(z)}{z}\,\tilde f\left(\frac{1}{z}\right)\in H_p\{\alpha_k\}.$$

Таким образом, граничные значения функции $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ почти всюду на $|t|=1$ совпадают с граничными значениями функции $\Phi(z)\in H_p\{\alpha_k\}$. Это и значит, что $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ и лемма полностью доказана.

Лемма 1.2. *Любая функция* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *допускает представление вида*

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),\ z\in D^{(+)},$$

где

$$\begin{gathered}f_1(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\},\\ f_2(z)=B(z)\,f_2^*(z)\in H_p(D^{(+)})\end{gathered}\tag{1.20}$$

$$f_2^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z}\in H_p(D^{(+)}).\tag{1.21}$$

Доказательство. Поскольку $f(e^{i\vartheta})/B(e^{i\vartheta})\in L_p(0,2\pi)$, то по теореме А утверждение (1.21) справедливо.

Положив далее

$$f_1(z)=f(z)-f_2(z)$$

и применяя лемму B, достаточно установить справедливость условия (1.19) для функции $f_1(z)$. Действительно, при $z \in D^{(+)}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_1(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{t-z}\,dt=$$

$$=f_2(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{t-z}\,dt\equiv 0.$$

§ 2. Разложения по биортогональным системам $\{r_k(z),\ \Omega_k(z)\}_1^\infty$

2.1. (а). Лемма 2.1. *Для любой функции* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1\leqslant p<\infty)$ *имеет место тождество*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}c_k^{(m)}(f)\,r_k(z)+\frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\frac{dt}{t-z}, \tag{2.1}$$

где

$$c_k^{(m)}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_{k,\,m}(t)}\,f(t)\,|dt|\ (k=1,\,2,\cdots,\,m), \tag{2.2}$$

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}f(a_k)\,\Omega_{k,\,m}(z)+\frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\frac{dt}{t-z}. \tag{2.3}$$

В самом деле, поскольку

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,|d\zeta|,$$

то достаточно воспользоваться основным тождеством (1.10) леммы 1.1, чтобы получить (2.1). В этом же тождестве, поменяв местами z и ζ, приходим к (2.3).

(б) Лемма 2.2. *Если* $\{a_k\}_1^\infty\in BC$, *то для любой функции* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z),$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_k(t)}\,f(t)\,|dt|, \tag{2.4}$$

равномерно и абсолютно сходится вне замыкания $\overline{E}$ *точек множества* $E=\{1/\bar{a}_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Заметим сначала, что по (1.6)

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_k(t)}\,f(t)\,|dt|=\frac{1}{2\pi B'(\alpha_k)}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{|dt|}{t-\alpha_k}=$$

$$=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\pi_k}\cdot\frac{1}{\alpha_k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-\frac{1}{\alpha_k}}\,, \tag{2.5}$$

где

$$\pi_k=-\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{\infty}\frac{\alpha_l-\alpha_k}{1-\alpha_l}\,\frac{|\alpha_l|}{\alpha_k\alpha_l}\,, \tag{2.6}$$

причем согласно условию (1.2) $|\pi_k|\geqslant\delta>0$. Но поскольку при $|t|=1$ $f(t)/B(t)\in L_p$, то согласно теореме А функция

$$F(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z},\quad z\in D^{(-)}$$

принадлежит классу $H_p(D^{(-)})$. Отсюда следует, что $\Phi(z)\equiv F\left(\frac{1}{z}\right)\in$ $\in H_p(D^{(+)})$ и, тем самым, по (2.5)

$$c_k(f)=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\pi_k}\,\Phi(\alpha_k)\quad(k=1,\,2,\cdots). \tag{2.7}$$

Ввиду условия (1.2) и из (2.7) приходим к неравенствам

$$|c_k(f)|\leqslant\delta^{-1}\,(1-|\alpha_k|^2)\,|\Phi(\alpha_k)|\quad(k=1,\,2,\cdots),$$

где $\delta>0$ не зависит от k. Положив $q=p/p-1$, по неравенству Гельдера будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)|\leqslant\delta^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/q}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)\,|\Phi(\alpha_k)|^p\right\}^{1/p}<\infty. \tag{2.8}$$

Поскольку для любого компакта $K\subset\overline{CE}$

$$\sup_{\substack{z\in K\\ k\geqslant 1}}|r_k(z)|<+\infty,$$

то из (2.8) следует утверждение леммы.

(в). Пусть теперь $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$, тогда по лемме 1.2 имеем

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=f_1(z)+B(z)\,f_2^{*}(z),$$

где $f_1(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ и, следовательно, на окружности $|t|=1$

$$f_1(t)=\frac{B(t)}{t}\,\tilde{f}\left(\frac{1}{t}\right),\ \tilde{f}(z)\in H_p(D^{(+)}), \tag{2.9}$$

а функция $f_2^{*}(z)$ определяется формулой (1.20).

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{f}(t)\,\overline{B}_m\left(\frac{1}{t}\right)}{t-z}\,dt\quad(m=1,\,2,\cdots)\tag{2.10}$$

и

$$\rho_m(z)=\prod_{l=m+1}^{\infty}\frac{\overline{\alpha}_l-z}{1-\alpha_l\,z}\,\frac{|\alpha_l|}{\alpha_l}=\frac{\overline{B}(z)}{\overline{B}_m(z)}\quad(m=1,\,2,\cdots).\tag{2.11}$$

Ясно, что по теореме А $\varphi_m(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(m=1,\,2,\cdots)$.

Лемма 2.3. *Пусть* $f(z)\in H_p(D^{(+)})(1<p<\infty)$, *тогда*

$$c_k(f)-c_k^{(m)}(f)=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\overline{\pi}_k}\,\left|\overline{f}(\overline{\alpha}_k)-\rho_m(\overline{\alpha}_k)\,\varphi_m(\overline{\alpha}_k)\right|\quad(k=1,\,2,\cdots,\,m),\tag{2.12}$$

где π_k *определяется по формуле* (2.6).

Доказательство. Пользуясь леммой 1.2, можно утверждать, что

$$\frac{f_2(z)}{B(z)}\in H_p(D^{(+)})\text{ и }\frac{f_2(z)}{B_m(z)}\in H_p(D^{(+)})\quad(m=1,\,2,\cdots)$$

и поэтому

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{B(t)}\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k}=\int\limits_{|t|=1}\frac{f_2(t)}{B_m(t)}\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k}=0\quad(m=1,\,2,\cdots)\ (k=1,\,2,\cdots).\tag{2.13}$$

Так как по (2.2) и (2.4)

$$c_k(f)-c_k^{(m)}(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{B(t)}\,\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f_1(t)+f_2(t)}{B_m(t)}\,\frac{|dt|}{\overline{t}-\overline{\alpha}_k},$$

то в силу равенств (2.13) и (2.9) имеем

$$c_k(f)-c_k^{(m)}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{f}(t)}{(t-\overline{\alpha}_k)\,\overline{B'(\alpha_k)}}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{f}(t)\,\overline{\widetilde{B}}_m\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-\overline{\alpha}_k)\,\overline{B'_m(\alpha_k)}}\,dt\equiv$$

$$\equiv U_k(f)-U_k^{(m)}(f).$$

Заметим, что ввиду принятого нами обозначения (2.9) и обозначений (2.10), (2.11) имеем, соответственно

$$U_k(f)=\frac{1-|\alpha_k|^2}{\overline{\pi}_k}\,\overline{f}(\alpha_k)=c_k(f)\quad(k=1,\,2,\cdots)\tag{2.14}$$

и

$$U_k^{(m)}(f) = \frac{1-|a_k|^2}{\bar{\pi}_k}\, p_m(\bar{a}_k)\, \varphi_m(\bar{a}_k) \quad (k=1,\ 2,\cdots,\ m). \qquad (2.15)$$

Теперь из (2.14) и (2.15) получаем утверждение леммы.

Лемма 2.4. *Если* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *и* $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, *то последовательность функций*

$$T_m(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(m)}(f)\, r_k(z) \quad (m=1,\ 2,\cdots)$$

равномерно сходится к функции леммы 2.2

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) \qquad (2.16)$$

на любом компакте $K\subset CE$.

Доказательство. Заметим сначала, что для определенных нами выше функций $\tilde{f}(z)$ и $\{p_m(z)\}_1^\infty$ из класса $H_p(D^{(+)})$ будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} \|\tilde{f}(t) - p_m(t)\|_p = 0. \qquad (2.17)$$

Действительно, поскольку $\tilde{f}(z)\in H_p(D^{(+)})$, то из (2.10) имеем

$$p_m(z) - \tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{\tilde{f}(t)\,\tilde{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) - \tilde{f}(t)}{t-z}, \quad z\in D^{(+)}.$$

Но, согласно теореме А

$$\|\tilde{f} - p_m\|_p \leqslant A_p \left\|\tilde{f}(t)\,\tilde{B}_m\left(\frac{1}{t}\right) - \tilde{f}(t)\right\|_p,$$

откуда по лемме А следует (2.17).

Пусть теперь $K\subset \overline{CE}$, тогда

$$\rho = \inf_{\substack{z\in K\\ \zeta\in E}} |z-\zeta| > 0$$

и легко видеть, что

$$\sup_{z\in K} |r_k(z)| = \sup_{z\in K} \left|\frac{1}{1-\bar{a}_k z}\right| \leqslant C_0\,\rho^{-1} \quad (k=1,\ 2,\cdots), \qquad (2.18)$$

где, очевидно

$$C_0 = \inf_{k\geqslant 1} \{|a_k|^{-1}\} < \infty.$$

Из леммы 1.4 следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $N\geqslant 1$ такое, что

$$\sup_{z\in K}\left|\sum_{k=m}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad m>N.$$

Отсюда ввиду (2.16) и (2.18) вытекает, что при $m\geqslant N$

$$|\varphi(z)-\tau_m(z)|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m} c_k(f)\,r_k(z)-c_k^{(m)}(f)\,r_k(z)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$

$$\leqslant C_0\,\rho^{-1}\sum_{k=1}^{m}|c_k(f)-c_k^{(m)}(f)|+\frac{\varepsilon}{2},\ z\in K. \tag{2.19}$$

Теперь по лемме 2.3 имеем

$$\sum_{k=1}^{m}|c_k(f)-c_k^{(m)}(f)|\leqslant\delta^{-1}\sum_{k=1}^{m}(1-|\alpha_k|^2)\,|\widetilde{f}(\overline{\alpha}_k)-\rho_m(\overline{\alpha}_k)\,\varphi_m(\overline{\alpha}_k)|.$$

Применяя неравенство Гельдера и теорему B, получаем

$$\sum_{k=1}^{m}|c_k(f)-c_k^{(m)}(f)|\leqslant M\cdot K_p\,\delta^{-1}\,\|\widetilde{f}-\rho_m\,\varphi_m\|, \tag{2.20}$$

где

$$M=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2\right\}^{1/q}.$$

Поскольку $\rho_m(z)$ есть функция типа $\widetilde{B}(z)$, ассоциированная с последовательностью $\{\overline{\alpha}_k\}_1^m$, то из (2.18) согласно соотношению (1.14) леммы A непосредственно следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\|\widetilde{f}(t)-\rho_m(t)\,\varphi_m(t)\|_p=0.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ достаточно перейти к пределу в неравенстве (2.19), чтобы завершить доказательство леммы.

2.2 (a). Теорема 1. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in B\mathrm{C}$, *то*

1°. *Для любой функции* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ $(1<p<\infty)$ *имеет место разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z},\ z\in D^{(+)}, \tag{2.21}$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно на любом компакте $K\subset C\overline{E}$, *где* $E=\{1/\overline{\alpha}_k\}$.

2°. *Для любой функции* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ *имеет место разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z),\ z\in D^{(+)} \tag{2.22}$$

с тем же характером сходимости ряда.

Доказательство. 1°. Заметим, что

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\frac{dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\int\limits_{|t|=1}|f(t)\,\overline{B}_m(t)-$$

$$-f(t)|\,|dt|. \tag{2.23}$$

Тогда, пользуясь соотношением (1.14) леммы А в специальном случае, когда $f_m(z)=f(z)$ $(m=1, 2,\cdots)$, можем утверждать, что при $m\to\infty$ интегралы (2.23) стремятся к нулю.

Переходя к пределу в тождестве (2.1) леммы 2.1 при $m\to\infty$ и пользуясь леммой 2.4, получим разложение (2.21).

2°. Отметим, что в ходе доказательства леммы 1.2 было установлено, что если $f(z)\in\lambda_p\{a_k\}$, то интегральный член в разложении (2.21) в области $D^{(+)}$ тождественно равен нулю. Отсюда и приходим к разложению (2.22). Позднее мы установим гораздо более сильное утверждение, что разложение (2.22) остается справедливым на всем множестве $C\overline{E}$, а сейчас докажем следующую лемму.

(б). Лемма 2.5. *Биортогональное разложение функции* $f(e^{i\theta})\in L_p(0,2\pi)$ $(1<p<\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)\,r_k(z),$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_k(t)}\,f(t)\,|dt|, \tag{2.24}$$

совпадает с биортогональным разложением некоторой функции $\varphi(z)\in\lambda_p\{a_k\}$.

Доказательство. Пользуясь теоремой А и известными свойствами интегралов типа Коши, легко убедиться, что любая функция $f(e^{i\theta})\in L_p(0,2\pi)$ $(1<p<\infty)$ допускает представление вида

$$f(t)=F^{(+)}(t)-F^{(-)}(t),\ |t|=1,$$

где $F^{(+)}(z)\in H_p(D^{(+)})$ и $F^{(-)}(z)\in H_p(D^{(-)})$, причем существует функция $\Phi(z)\in H_p(D^{(+)})$ такая, что

$$F^{(-)}(z)=\frac{1}{z}\,\Phi\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(-)}.$$

Из этого представления функции $f(t)$ следует, что

$$c_k(f)=c_k(F^{(+)})-c_k(F^{(-)})\quad(k=1, 2,\cdots).$$

Но из (2.24), принимая во внимание определение (1.4) функции $b_k(z)$, получаем

$$\overline{B'(a_k)}\,c_k(F^{(-)})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{F^{(-)}(t)}{t-\overline{a}_k}|dt|=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi\left(\frac{1}{t}\right)}{B(t)(1-t\overline{a}_k)\,t}\,dt=0\quad(k=1, 2,\cdots),$$

поскольку подынтегральная функция аналитична в $D^{(-)}$ и при $|t| \to \infty$ имеет порядок $O(1/|t|^2)$, то

$$c_k(f) = c_k(F^{(+)}) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Но так как по лемме 1.2 $F^{(+)}(z) = \varphi(z) + \varphi_1(z)$, где

$$\varphi(z) \in \lambda_p\{a_k\} \text{ и } \varphi_1(z) = B(z)\,\varphi_1^*(z), \quad \varphi_1^*(z) \in H_p(D^{(+)}),$$

то легко видеть, что

$$c_k(f) = c_k(F^{(+)}) = c_k(\varphi).$$

Теорема 2. *Если* $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, *то для произвольной функции* $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ $(1 < p < \infty)$

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, r_k(t) \right\|_p = 0 \quad (|t| = 1). \tag{2.25}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\, r_k(t) \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{2.26}$$

Согласно теореме С и лемме 2.5, для доказательства теоремы достаточно установить слабую сходимость последовательности $S_m(t)$ на окружности $|t|=1$. Но по теореме 1 и ввиду слабой компактности пространств L_p $(1 < p < \infty)$ заключаем, что достаточно установить равномерную ограниченность норм в L_p последовательности $\{S_m(t)\}_1^\infty$.

Пользуясь известной теоремой Хана-Банаха, можем утверждать, что

$$\|S_m(t)\|_p = \sup_{\substack{g \in L_q \\ \|g\|_q \le 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{S_m(t)}\, g(t)\, |dt| \right|, \tag{2.27}$$

где $q = p/(p-1) > 1$. Но по (2.26) и (2.24) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{S_m(t)}\, g(t)\, |dt| = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{m} \overline{c_k(f)}\, \frac{g(t)}{1 - \bar{t}\,\bar{a}_k} |dt| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{c_k(f)}}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)}{t - a_k}\, dt = \sum_{k=1}^{m} \frac{1 - |a_k|^2}{\pi_k}\, \bar{f}(a_k)\, g^*(a_k), \tag{2.28}$$

где

$$g^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)}{t - z}\, dt \in H_p(D^{(\pm)}).$$

Заметим теперь, что ввиду условия $\{a_k\}_1^\infty \in BC$ $|\pi_k| \ge \delta > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Поэтому, применяя неравенство Гельдера, в силу теорем A и B, из (2.28) будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{S_m(t)}\,g(t)\,|dt|\right| \leqslant \delta^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{m}|\tilde{f}(\bar{\alpha}_k)|^p\,(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{m}|g^*(\alpha_k)|^q\,(1-|\alpha_k|^2)\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-1}\,K_q^{1/q}\,K_p^{1/p}\,\|\tilde{f}\|_p\,\|g^*\|_q \leqslant \delta^{-1}\,K_p^{1/p}\,K_q^{1/q}\,A_q\,\|g\|_q\,\|\tilde{f}\|_p.$$

Отсюда и из (2.27) следует неравенство

$$\|S_m(t)\|_p \leqslant \delta^{-1}\,M_{p,q}\,\|\tilde{f}\|_p \quad (m=1,\,2,\cdots),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

2.3 (а). Утверждение, аналогичное теоремам 1 и 2, справедливо и для системы $\{b_k(z)\}_1^\infty$.

Отметим сначала следующее свойство единственности для функций из класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$.

Лемма 2.6. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in BC$ *и* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$. *Если* $f(\alpha_k)=0$ $(k=1,\,2,\cdots)$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Действительно, по формуле (2.3) леммы 2.1 имеем

$$f(z)=\frac{B_m(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\,\frac{dt}{t-z},\quad z\in D^{(+)}\ (m=1,\,2,\cdots). \tag{1.29}$$

Но заметим, что при $z\in D^{(+)}$

$$\left|\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B_m(t)}\,\frac{dt}{t-z}-\int\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\int\limits_{|t|=1}|f(t)\,\tilde{B}_m(t)-f(t)|\,|dt|,$$

так что, переходя к пределу в (2.29), при $m\to\infty$, учитывая соотношение (1.14) леммы А, получим

$$f(z)=\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{dt}{t-z},\quad z\in D^{(+)}.$$

Но поскольку $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$, то по лемме В утверждаем, что $f(z)\equiv 0$.

Теорема 3. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in BC$, *то для произвольной функции* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ *имеет место разложение*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f(\alpha_k)\,\Omega_k(z)=B(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)\,\overline{B}'(\alpha_k)},\quad z\in D^{(+)}, \tag{2.30}$$

а также

$$\lim_{m\to\infty}\left\|f(t)-\sum_{k=1}^{m}f(\alpha_k)\Omega_k(t)\right\|_p=0, \tag{2.31}$$

причем ряд (2.30) *сходится равномерно на любом компакте* $K\subset C\overline{E}$.

Доказательство. Пользуясь обозначением (2.6), имеем $B'(a_k)=\pi_k/(1-|a_k|^2)$ и так как $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, то

$$|B'(a_k)|^{-1} \leqslant \delta^{-1}(1-|a_k|^2). \qquad (2.32)$$

Пусть $K \subset C\overline{E}$ — произвольный компакт. Очевидно, что

$$\max_{a_k \in K} |k| = p < \infty,$$

и поэтому

$$\inf_{\substack{k \geqslant p+1 \\ z \in K}} |z-a_k| = \rho_p > 0.$$

Но тогда из (2.32) следует, что

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{f(a_k)}{(z-a_k)B'(a_k)} \right| \leqslant (\delta\rho_p)^{-1}(1-|a_k|^2)|f(a_k)| \quad (k \geqslant p+1). \qquad (2.33)$$

С другой стороны, пользуясь неравенством Гельдера и теоремой B, легко выводим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|^2)|f(a_k)| < +\infty.$$

Отсюда в силу (2.33) вытекает равномерная и абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)}{(z-a_k)B'(a_k)}$$

на K и, следовательно, утверждение теоремы о характере сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\, b_k(z).$$

Согласно лемме 2.5 и теореме 2 для любой функции $\varphi(t) \in L_p$ на окружности $|t|=1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi)\, r_k(t), \quad c_k(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \varphi(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|$$

сильно сходится в L_p, определяя некоторую функцию из класса $\lambda_p\{a_k\}$.

Заметим теперь, что для любой функции $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$

$$d_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{r_k(t)}\,|dt| = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t-a_k}\,dt = f(a_k) \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Поэтому, согласно теореме C можем утверждать, что ряд

$$f^*(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)\,\Omega_k(z)$$

также сильно сходится в L_p, определяя некоторую функцию $f^*(z) \in H_p(D^{(+)})$. Легко видеть, что это же утверждение справедливо и для любой функции класса $H_p(D^{(+)})$. Покажем, что более того $f^*(z) \in \lambda_p\{a_k\}$. В самом деле, легко видеть, что для всех $(k=1, 2, \cdots)$

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(z-a_k)B'(a_k)} \in \lambda_p\{a_k\},$$

и поэтому имеем также

$$S_m(z) = \sum_{k=1}^{m} f(a_k)\,\Omega_k(z) \in \lambda_p\{a_k\} \quad (m=1, 2, \cdots).$$

Тогда согласно лемме B имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{S_m(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)} \quad (m=1, 2, \cdots). \tag{2.32}$$

Но поскольку сумма $S_m(t)$ сильно сходится к $f^*(t)$ в L_p, то переходя к пределу при $m \to \infty$ из (2.32) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{f^*(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)}.$$

Вновь пользуясь леммой B, отсюда заключаем, что $f^*(z) \in \lambda_p\{a_k\}$.

Так как функция $f^*(z)$ очевидно удовлетворяет интерполяционным данным $f^*(a_k) = f(a_k)$ $(k=1, 2, \cdots)$, то по лемме 2.6 можем утверждать, что $f^*(z) \equiv f(z)$. Итак, теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Пусть* $f(e^{i\theta}) \in L_p(0, 2\pi)(1<p<\infty)$, *тогда ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z), \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt|, \tag{2.33}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k(f)\,\Omega_k(z), \quad d_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{r_k(t)}\,|dt| \tag{2.34}$$

абсолютно и равномерно сходятся на любом компакте $K \subset CE$, ***определяя функции из класса*** $\lambda_p\{a_k\}$.

Доказательство. Утверждение о природе сходимости для ряда (2.33) было установлено нами в лемме 2.2, а для ряда (2.34)—в теореме 3.

Далее согласно лемме 2.5 существует функция $F_+(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ такая, что $c_k(f) = c_k(F_+)(k=1, 2, \cdots)$,

$$F_+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\,r_k(z), \quad z \in D^{(+)}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \left\| F_+(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^{m} c_k(f)\,r_k(e^{i\theta}) \right\|_p = 0. \tag{2.35}$$

При этом функция $F_+(z)$ допускает представление

$$F_+(z) = \frac{B(z)}{z}\widetilde{F}_+\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)}, \tag{2.36}$$

где $\widetilde{F}_+(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Введем в рассмотрение системы функций

$$\overline{r_k}(z) = \frac{1}{1-\bar{a}_k z} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

$$\overline{\Omega}_k(z) = \frac{\overline{B}(z)}{(z-\bar{a}_k)\overline{B}'(a_k)} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

которые, очевидно, также биортогональны на окружности $|t|=1$. Как было отмечено в ходе доказательства теоремы 3 ряд

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\widetilde{F}_+(a_k)}\,\overline{\Omega}_k(z), \quad z \in D^+$$

определяет функцию $\Phi(z) \in H_p(D^{(+)})$, причем

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \Phi(e^{i\theta}) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\widetilde{F}_+(\bar{a}_k)}\,\Omega_k(e^{i\theta}) \right\|_p = 0. \tag{2.37}$$

Далее, из представления (2.35) легко следует

$$c_k(F_+) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} F_+(t)\,\overline{\Omega_k(t)}\,|dt| = \frac{1}{B'(a_k)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{F_+(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-\bar{a}_k} = \frac{\overline{\widetilde{F}_+(a_k)}}{\overline{B'(a_k)}},$$

так что

$$c_k(f) = c_k(F_+) = \frac{\overline{\widetilde{F}_+(\bar{a}_k)}}{\overline{B'(a_k)}} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.38}$$

Поэтому ряд (2.33) можно записать также в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\widetilde{F}_+(\bar{a}_k)}}{\overline{B'(a_k)}}\, r_k(z). \tag{2.33'}$$

Сумму ряда (2.33) в области $D^{(-)}$ обозначим через $F_-(z)$ и заметим, что

$$r_k(z) = \overline{B'(a_k)}\,\frac{B(z)}{z}\,\overline{\Omega}_k\left(\frac{1}{z}\right) \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3.39}$$

Тогда будем иметь

$$F_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z) = \frac{B(z)}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \overline{\widetilde{F}(a_k)}\,\overline{\Omega}_k\left(\frac{1}{z}\right) =$$

$$= \frac{B(z)}{z}\,\Phi\left(\frac{1}{z}\right),\quad z \in D^{(-)}.$$

Если мы покажем, что почти для всех $\vartheta \in (0,2\pi)$

$$\lim_{r\to 1-0} F_+(re^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1+0} F_-(re^{i\vartheta}), \tag{2.40}$$

то тем самым будет установлено утверждение теоремы относительно ряда (2.33).

С этой целью заметим, что почти для всех $\vartheta \in [0,2\pi]$ существует предел

$$F_-(e^{i\vartheta}) = \frac{B(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta}}\,\Phi(e^{-i\vartheta}). \tag{2.41}$$

С другой стороны, в силу (2.39) и (2.38) имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{F(a_k)}\,\overline{\Omega}_k(e^{-i\vartheta}) \equiv \frac{e^{i\vartheta}}{B(e^{i\vartheta})} \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, r_k(e^{i\vartheta}).$$

Из (2.35) и (2.37) следует, что почти для всех $\vartheta \in [0,2\pi]$

$$\Phi(e^{-i\vartheta}) = \frac{e^{i\vartheta}}{B(e^{i\vartheta})}\,F_+(e^{i\vartheta}),$$

откуда и из (2.41) вытекает равенство (2.40). Что касается утверждения теоремы относительно ряда (2.34), то она устанавливается вполне аналогичным образом, на чем мы останавливаться не будем.

Из теорем 2, 3 и 4 получаем следующее

Следствие. Если $\{a_k\}_1^\infty \in BC$, то для любой функции $\{f(z)\} \in \lambda_p\{a_k\}$ справедливы разложения

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, r_k(z), \quad z \in C\overline{E}, \tag{2.42}$$

$$f(z) = B(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)}{(z-a_k)\,B'(a_k)}, \quad z \in C\overline{E}. \tag{2.43}$$

(б). Известно, что если $\{a_k\}_1^\infty \in BC$ и $\{w_k\}$ — произвольные последовательности комплексных чисел, подчиненные условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} (w_k)^p\,(1-|a_k|^2) < \infty, \tag{2.44}$$

то существует функция $F(z) \in H_p(D^{(+)})$, удовлетворяющая интерполяционным данным

$$F(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.45}$$

Но результаты настоящей статьи позволяют утверждать несколько большее: а именно, справедлива

Теорема 5. *Пусть* $\{a_k\}_1^\infty \in BC$ *и* $\{w_k\}_1^\infty$ *— произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненных условиям* (2.44). *Тогда существует единственная функция* $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ *такая, что*

$$f(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.46}$$

и допускающая разложение

$$f(z) = B(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{(z-a_k) B'(a_k)}, \quad z \in C\overline{E}. \tag{2.47}$$

Доказательство. Как уже было отмечено, в классе $H_p(D^{(+)})$ существует функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям (2.45), но по лемме 1.2 указанная функция допускает представление

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in D^{(+)},$$

где $f_1(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ и $f_2(z) = B(z) f_2^*(z)$, $f_2^*(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Поскольку, таким образом, $f_2(a_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то функция $f(z) \equiv f_1(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ удовлетворяет условию (2.45) и по теореме 3 имеет разложение вида (2.47). Единственность функции $f(z)$ при условии (2.46) была установлена в лемме 2.6.

В заключение, считаю своим приятным долгом выразить признательность моему научному руководителю, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.IX.1973

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. H_p $(1 < p < \infty)$ Հարդիի դասերի ենթատարածություններում ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսի մասին *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում ապացուցված է, որ $\{a_k\}_1^\infty$ $(0 < |a_k| < 1)$ *հաջորդականության վրա դրված* ֆունկցիաների բազիսի մասին *(ամփոփում)*,

$$\{r_k(z) = 1/(1 - \overline{a_k} z)\}_1^\infty, \quad \{\Omega_k(z) = B(z)/(z - a_k) B'(a_k)\}_1^\infty$$

H_p $(1 < p < \infty)$ *դասերում իրենց գծային թաղանթների մեջ կազմում են բազիս*։

H. M. HAIRAPETIAN. *On the basis of rational functions in subspaces of Hardy's* H_p *classes* $(1 < p < \infty)$ (summary)

The paper proves that under some conditions imposed on the $\{a_k\}_1^\infty (0 < |a_k| < 1)$ sequences the systems of functions

$$\{r_k(z) = 1/(1 - \overline{a_k} z)\}_1^\infty \text{ and } \{\Omega_k(z) = B(z)/(z - a_k) B'(a_k)\}_1^\infty$$

form bases in their linear shell in H_p $(1 < p < \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональны дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., № 1, 1961, 9—31.
2. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксир ванными полюсами, Изв. АН Армянской ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967.
3. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.* Базисы из собственных векторов вполне н унитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, се матем., 34, № 1, 1970, 90—133.
4. *В. Э. Кацнельсон.* Об условиях базисности системы корневых векторов нек торых классов операторов, „Функциональный анализ и его приложения", вып. 2, 1967, 39—51.
5. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и предста ления ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
6. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
7. *P. L. Duren.* Thery of H_p spaces, New York and London, 1970.
8. *H. S. Shapiro, A. L. Shilds.* On some interpolation problems for analytic fun tions, Amer. J. Math., vol. 83, 1961, 513—532.
9. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.
10. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 6, 1973 Математика

Б. В. ГРИГОРЯН

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ВНЕ ЕДИНИЧНОГО ГИПЕРДИСКА В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

Обозначим через K множество точек

$$\{x_n = 0,\ x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < 1\}$$

в R^n, где R^n — n-мерное евклидово пространство ($n \geqslant 3$). Рассмотрим функцию $H(P)$, определенную на $R^n \setminus K$ и удовлетворяющую следующим условиям:

а) $H(P)$ гармонична вне $\overline{K}$, где $\overline{K}$ — замыкание K;

б) $H(P) = O\left(\frac{1}{|PO|^{n-2}}\right)$, для достаточно далеких P, где $|PO|$ — расстояние P от начала координат.

Далее обозначим значения H для $x_n = +0$ и $x_n = -0$ соответственно через $H(x_1, \cdots, x_{n-1}, +0)$ и $H(x_1, \cdots, x_{n-1}, -0)$.

в) функции $H(x_1, \cdots, x_{n-1}, \pm 0)$, непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка (т. е. предполагается, что частные производные существуют и непрерывны вне K и значения этих частных производных можно продолжить на $\overline{K}$ с сохранением непрерывности).

В § 1 работы доказывается, что функция H — тождественный нуль при условии, что как сама функция H, так и ее нормальная производная достаточно быстро стремятся к нулю, когда точка $P = (x_1, \cdots, x_{n-1}, \pm 0)$ оставаясь на $\overline{K}$, приближается к гиперокружности $\{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1,\ x_n = 0\}$.

Множество функций, удовлетворяющих условиям а), б), в), четных относительно x_n и имеющих вид

$$H(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \equiv H(r, x_n),$$

где $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$, обозначим через $\mathfrak{M}^{(n)}$, а $\{H(r, 0),\ H \in \mathfrak{M}^{(n)}\} = \mathfrak{M}_0^{(n)}$.

§ 2 посвящен изучению некоторых свойств функций класса $\mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$.

§ 1. Теорема единственности

Обозначим через $\varepsilon(\delta)$ функцию

$$\sup_{1-\delta < \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2} < 1} \left\{|H(x_1, \cdots, x_{n-1}, \pm 0)|,\ \left|\frac{\partial H}{\partial \nu}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \pm 0)\right|\right\},$$

где $\partial/\partial\nu$ означает производную по нормали. Пусть $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Теорема 1. *Если*

$$\int_{r_0}^{1} \frac{\log \varepsilon (1-t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\infty, \tag{A}$$

то $H(P) \equiv 0$.

Легко заметить, что достаточно доказать теорему 1 для гармонических функций H вида

$$H(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \equiv H(r, x_n). \tag{1.1}$$

Любая функция $H_1(x_1, \cdots, x_n)$, удовлетворяющая условиям а), б), в), при помощи интегрального усреднения вида

$$H(r, x_n) =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n-3} \int_0^{2\pi} H_1(r\cos\theta_1, \cdots, r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}, x_n) \times$$
$$\times \lambda(\theta_1, \cdots, \theta_{n-2}) \sin^{n-3}\theta_1 \sin^{n-4}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-3}\, d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2}$$

по гиперокружности $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = r^2$, где $\lambda(\theta_1, \cdots, \theta_{n-2})$ — некоторая непрерывная функция на $\{0 \leqslant \theta_j \leqslant \pi,\ j = 1, 2, \cdots, n-3,\ 0 \leqslant \theta_{n-2} \leqslant 2\pi\}$, приводится к функции вида $H(r, x_n)$, удовлетворяющей тем же условиям а), б), в).

1°. Приведем доказательство теоремы 1 для функций вида (1.1), которые четны относительно x_n. Из этого условия вытекает, что $\dfrac{\partial H}{\partial \nu} = 0$ в точках гиперплоскости $x_n = 0$ вне K.

Если теперь обозначим значения функции $H(r, x_n)$ и $\dfrac{\partial H}{\partial \nu}(r, x_n)$ на гиперплоскости $x_n = +0$ соответственно через $H(r)$ и $\varphi(r)$, то пользуясь формулой Грина будем иметь

$$H(P) = c_1(n) \int_K \frac{\partial H(Q)}{\partial \nu} \frac{1}{|QP|^{n-2}} d\sigma_Q, \tag{1.2}$$

где $P = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$, а $c_1(n)$—постоянная.

Лемма 1.1. *Всякая функция* $H \in \mathfrak{M}^{(n)}$ *имеет следующее представление на гиперплоскости* $x_n = 0$:

$$H(r) = \frac{c(n)}{r^{n-3}} \int_0^r \frac{t^{n-3}}{\sqrt{r^2 - t^2}} \left\{ \int_t^1 \frac{\varphi(\rho)\, \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \right\} dt. \tag{1.3}$$

Доказательство. В формуле (1.2), перейдя к сферическом координатам, будем иметь

$$x_1 = \rho \cos \varphi_1,$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$x_{n-2} = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2},$$

$$x_{n-1} = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2},$$

где $0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi$, $j = 1, 2, \cdots, n-3$, $0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant 2\pi$, $\rho > 0$.

Тогда $d\sigma_Q = \rho^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-3}\, d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-2}$.

Для упрощения формулы (1.2), не нарушая общности, за точку P возьмем $(r, 0, \cdots, 0)$. После замены переменных соотношение (1.2) перепишется так:

$$H(r) = c_2(n) \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\varphi(\rho)\, \rho^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1\, d\varphi_1\, d\rho}{(r^2 - 2r\rho \cos \varphi_1 + \rho^2)^{n-2/2}}. \tag{1.4}$$

Обозначим $\min(r, \rho) = h$, $\max(r, \rho) = h_1$ и $h/h_1 = \lambda$, тогда

$$J_n(r, \rho) =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin^{n-3} \varphi}{(r^2 - 2r\rho \cos \varphi + \rho^2)^{n-2/2}} \frac{d\varphi}{} = \frac{1}{h_1^{n-2}} \int_0^\pi \frac{\sin^{n-3} \varphi}{(1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2)^{n-2/2}} \frac{d\varphi}{} =$$

$$= \frac{1}{(2hh_1)^{n-2}} \int_0^\pi \frac{\sin^{n-3} \varphi\, d\varphi}{(\alpha - \cos \varphi)^{n-2/2}},$$

где

$$\alpha = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} = \frac{\rho^2 + r^2}{2r\rho}.$$

Легко заметить, что

$$J_n(r, \rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2hh_1)^{m+1/2}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{m-1/2}}{(\alpha - t)^{m+1/2}}\, dt, & \text{если } n = 2m+3, \\ \dfrac{1}{(2hh_1)^{m+1}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^m}{(\alpha - t)^{m+1}}\, dt, & \text{если } n = 2m+4 \\ & m \geqslant 0. \end{cases}$$

Обозначим через $u = (\alpha - t)^{-1}$ и замечая, что

$$\frac{1}{(\alpha - t)^{m+1/2}} = \frac{2^m}{(2m-1)!!} \frac{d^m u}{dt^m}, \quad \frac{1}{(\alpha - t)^{m+1}} = \frac{1}{m!} \frac{d^m u}{dt^m},$$

будем иметь

$$J_n(r, \rho) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^m}{(2m+1)!!\,(2hh_1)^{m+1/2}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\alpha - t}} \frac{d^m[(1-t^2)^{m-1/2}]}{dt^m}\, dt, & \text{если } n=2m+3 \\ \dfrac{(-1)^m}{m!\,(2hh_1)^{m+1}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\alpha - t} \frac{d^m[(1-t^2)^m]}{dt^m}\, dt, & \text{если } n=2m+4. \end{cases}$$

Имея в виду, что

$$\frac{d^m[(1-t^2)^{m-1/2}]}{dt^m} = \frac{A(m)\, T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\frac{d^m[(x^2-1)^m]}{dx^m} = 2^m m!\, P_m(x),$$

где $T_m(t)$ — полином Чебышева (см., например, [1], стр. 205), $P_m(x)$ — полином Лежандра первого рода (см., например, [2], стр. 2 получим

$$J_n(r, \rho) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c_2(n)}{(2hh_1)^m} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)}{\sqrt{h^2-2hh_1t+h_1^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & \text{если } n=2m+3, \qquad (1. \\ \dfrac{c_2(n)}{2(hh_1)^{m+1}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P_m(t)}{\alpha - t}\, dt, & \text{если } n=2m+4. \qquad (1.5 \end{cases}$$

При $n=2m+3$ формулу (1.5) можно упростить следующим образо Учитывая, что ([1], стр. 215)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda\cos\varphi+\lambda^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l P_l(\cos\varphi) \quad (\lambda<1),$$

$$P_l(\cos\varphi) = \sum_{p=0}^{l} \alpha_p \alpha_{l-p} \cos(l-2p)\varphi,$$

где $P_l(t)$ — полином Лежандра, $\alpha_p = \dfrac{1\cdot 3\cdots 2p-1}{2\cdot 4\cdots 2p}$ и

$$\int_0^{\pi} \cos(l-2p)\varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{при } l-2p \neq m,\ l<m \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{при } l-2p=m, \text{ где } l>m \\ & \text{и } l,\ m \\ & \text{одной четности,} \end{cases}$$

получим,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \int_0^{\pi} P_l(\cos\varphi) \cos m\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \sum_{l=m}^{\infty} \lambda^l \alpha_{\frac{l-m}{2}} \alpha_{\frac{l+m}{2}}.$$

Обозначая $i - 2m = 2j$, имеем

$$J_{2m+3}(r, \rho) = \frac{c_4(m)}{(r\rho)^m h_1} \lambda^m \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} \alpha_j \alpha_{m+j}. \tag{1.6}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$K_m(\lambda) = \frac{1}{\lambda^m} \int_0^{\lambda} \frac{t^{2m}}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}\sqrt{1-t^2}} dt. \tag{1.7}$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p t^{2p}.$$

Подставляя это в (1.7) и учитывая равенство

$$\int_0^1 \frac{t^{2(m+p)} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \alpha_{m+p},$$

получим

$$K_m(\lambda) = \lambda^m \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{2p} \alpha_p \alpha_{m+p}. \tag{1.8}$$

Сравнивая (1.6) и (1.8), имеем

$$J_{2m+3}(r, \rho) = \frac{c_5(m) h_1^m}{(h_1 h)^m h_1 h^m} \int_0^{\frac{h}{h_1}} \frac{t^{2m}}{\sqrt{\left(\frac{h}{h_1}\right)^2 - t^2}\sqrt{1-t^2}} dt.$$

После замены переменных в последнем интеграле получим

$$J_{2m+3}(r, \rho) = \frac{c_5(m)}{r^{2m} \rho^{2m}} \int_0^{\min(r, \rho)} \frac{t^{2m} dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}\sqrt{r^2 - t^2}}. \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.4), имеем

$$\Psi(r) = \frac{c_5(m)}{r^{2m}} \int_0^1 \int_0^{\min(r, \rho)} \frac{\varphi(\rho) \rho t^{2m} dt d\rho}{\sqrt{r^2 - t^2}\sqrt{\rho^2 - t^2}} = \frac{c(m)}{r^{2m}} \int_0^r \frac{t^{2m}}{\sqrt{r^2 - t^2}} \left\{ \int_t^1 \frac{\varphi(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \right\} dt. \tag{1.3'}$$

Лемма доказана при $n=2m+3$.

Пусть $n=2m+4$. Учитывая определение полинома Лежан второго рода и его представление в виде определенного интеграла

$$Q_m(\mu)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_m(t)\,dt}{\mu-t}$$

(см., например, [2], стр. 65), имеем

$$J_{2m+4}(r,\rho)=\frac{Q_m(\alpha)}{(hh_1)^{m+1}}. \qquad (1.$$

С другой стороны, имеет место следующее интегральное пр ставление для $Q_m(\mu)$ (см. [2], стр. 68):

$$Q_m(\mu)=\int_0^{\frac{1}{z}}\frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-tz}\sqrt{1-tz^{-1}}},$$

где $z=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$, $z^{-1}=\mu-\sqrt{\mu^2-1}$, откуда (в нашем слу $z=\frac{h}{h_1}$)

$$Q_m\left(\frac{h^2+h_1^2}{2hh_1}\right)=\int_0^{\frac{h}{h_1}}\frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t\frac{h_1}{h}}\sqrt{1-t\frac{h}{h_1}}}=$$

$$=\sqrt{hh_1}\int_0^{\frac{h}{h_1}}\frac{t^m\,dt}{\sqrt{h-th_1}\sqrt{h_1-th}}.$$

В последнем интеграле произведем замену переменной, получим

$$Q_m\left(\frac{h^2+h_1^2}{2hh_1}\right)=\frac{2}{(hh_1)^m}\int_0^{h}\frac{t^{2m+1}\,dt}{\sqrt{h^2-t^2}\sqrt{h_1^2-t^2}}. \qquad (1.1$$

Подставляя (1.11) в (1.10), имеем

$$J_{2m+4}(r,\rho)=\frac{2}{(r\rho)^{2m+1}}\int_0^{\min(r,\rho)}\frac{t^{2m+1}\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}\sqrt{\rho^2-t^2}}. \qquad (1.9$$

Учитывая в (1.4) формулу (1.9′), окончательно получим

$$H(r)=\frac{c'(m)}{r^{2m+1}}\int_0^{r}\frac{t^{2m+1}}{\sqrt{r^2-t^2}}\left\{\int_t^1\frac{\rho\varphi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}}\right\}dt. \qquad (1.3$$

Лемма доказана.

Если в формуле (1.3) ввести обозначение

$$\lambda(t)=\int_t^1 \frac{\rho\varphi(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-t^2}}, \tag{1.12}$$

то $H(r)$ примет вид

$$H(r)=\frac{c(n)}{r^{n-3}}\int_0^r \frac{t^{n-3}\lambda(t)}{\sqrt{r^2-t^2}}\,dt. \tag{1.3'''}$$

Доказательство теоремы 1 для класса $\mathfrak{M}^{(n)}$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(w)=\frac{1}{w^{n-3}}\int_0^1 \frac{t^{n-3}\lambda(t)}{\sqrt{w^2-t^2}}\,dt, \tag{1.13}$$

где $w=r+i\tau$, а значение корня выбрано так, чтобы в бесконечности оно было эквивалентно функции $\frac{1}{w}$. Из определения $\Phi(w)$ видно, что она аналитична на плоскости w, разрезанной вдоль отрезка $[-1,1]$, $\Phi(\infty)=0$, $\Phi(-w)=(-1)^n\Phi(w)$, $\Phi(\overline{w})=\overline{\Phi}(w)$. Если граничные значения функции $\Phi(w)$ обозначить через $\Phi(r\pm i0)$, то

$$\Phi(r\pm i0)=\frac{1}{r^{n-3}}\int_0^r \frac{t^{n-3}\lambda(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\mp\frac{i}{r^{n-3}}\int_r^1 \frac{t^{n-3}\lambda(t)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dt,$$

отсюда видно, что с точностью до постоянной $\operatorname{Re}\{\Phi(r\pm i0)\}\equiv H(r)$, следовательно, если значения r находятся в полуинтервале $[r_0,1)$, то учитывая определение $\lambda(t)$, можно получить оценку

$$|\Phi(r\pm i0)|\leqslant c\varepsilon(1-r), \tag{1.14}$$

где c — абсолютная постоянная (в дальнейшем будем обозначать через c — любую абсолютную величину). Легко видеть, что функция $\Phi\left[\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\right]=F(\zeta)$ аналитична в $|\zeta|<1$. Учитывая (1.14), будем иметь

$$|F(e^{i\alpha})|=|\Phi(\cos\alpha)|\leqslant c\varepsilon(1-\cos\alpha)$$

для таких α, которые находятся в промежутке $(-\alpha_0,\alpha_0)$, где $\alpha_0=\arccos r_0$. Тогда

$$\int_0^{2\pi}\log|F(e^{i\alpha})|\,d\alpha\leqslant c+c\int_0^{\alpha_0}\log\varepsilon(1-\cos\alpha)\,d\alpha=c+c\int_{r_0}^1\frac{\log\varepsilon(1-t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Из условия (A) имеем

$$\int_0^{2\pi} \log |F(e^{i\alpha})|\, d\alpha = -\infty.$$

Согласно классической теореме единственности Карлемана [3] из по следнего равенства следует $F(\zeta) = \Phi\left[\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \equiv 0$, а отсюда по лучаем $H(r) \equiv 0$ и $\varphi(\rho) \equiv 0$, т. е. $H \equiv 0$.

2°. Если функция H имеет вид (1.1) и нечетна относительно x_n, т. е. $H(r, -x_n) = -H(r, x_n)$, то рассмотрим функцию

$$\widetilde{H}(r, x_n) = \int_0^{x_n} H(r, t)\, dt + \Psi(r),$$

где

$$\Psi(r) = -\int_r^1 \frac{d\rho}{\rho} \int_\rho^1 t\, \frac{\partial H(t, 0)}{\partial x_n}\, dt.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\widetilde{H}$ гармонична вне $\overline{K}$ и принадлежит множеству $\mathfrak{M}^{(n)}$. Так как

$$\widetilde{H}(r, 0) = \Psi(r) \text{ и } \frac{\partial \widetilde{H}(r, 0)}{\partial x_n} = H(r, 0),$$

то

$$\sup_{1-t < \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2} < 1} \left\{|\widetilde{H}(r, 0)|, \left|\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x_n}(r, \pm 0)\right|\right\} =$$

$$= \sup_{1-t < \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2} < 1} \{|\Psi(r)|, |H(r, \pm 0)|\} \leqslant c\, \varepsilon(t),$$

а для $\varepsilon(t)$ удовлетворяется условие (A), то согласно пункту 1° $\widetilde{H}(r, x_n) \equiv 0$ и отсюда вытекает, что $H(r, x_n) \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\varepsilon(\delta)$ — *положительная непрерывная монотонно неубывающая на* $(0, \delta_0]$ *функция такая, что*

$$\int_{1-\delta_0}^{1} \frac{\log \varepsilon(1-t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt > -\infty, \qquad (Б)$$

то существует нетривиальная гармоническая вне $\overline{K}$ *функция* H, *удовлетворяющая неравенству*

$$\sup_{1-\delta<\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)^{1/2}<1}\left\{|H(x_1,\cdots,x_{n-1},\pm 0)|,\left|\frac{\partial H}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},\pm 0)\right|\right\}\leqslant \varepsilon(\delta), \tag{1.15}$$

где $0<\delta\leqslant\delta_0$.

Доказательство. Обозначим через $\sigma=x_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_1\times\cos\theta_2+\cdots+x_{n-1}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}+ix_n$. Легко проверить, что если $f(\omega)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $f(\sigma)$ будет гармонической функцией переменных $x_1, x_2,\cdots, x_n$.

Заметим, что условия (Б) эквивалентны условию

$$\int_0^{\alpha_0}\log\varepsilon(1-\cos\alpha)\,d\alpha>-\infty,$$

где $\alpha_0=\arccos(1-\delta_0)$.

Пусть функция $\varepsilon(1-\cos\theta)$ непрерывно продолжена для $\alpha_0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, так что ее модуль не превосходит единицы. Далее определим на $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ неотрицательную функцию $m(e^{i\theta})$, которая для вышеуказанных θ дифференцируема и удовлетворяет следующим условиям:

$$m(e^{i\theta})\leqslant\varepsilon(1-\cos\theta), \quad \text{и}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log m(e^{i\theta})\,d\theta>-\infty.$$

Теперь на $|z|=1$ определим функцию $\gamma(e^{i\theta})$ следующим образом:

$$\gamma(e^{i\theta})=m(e^{i\theta}), \text{ при } -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\gamma(e^{i\theta})=m(e^{i(\theta-\pi)}), \text{ при } \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

Тогда функция

$$f(z)=z^{n-2}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log\gamma(e^{i\theta})\,d\theta\right\}$$

будет аналитической функцией в круге $|z|<1$ и непрерывной в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Из определения функций $f(z)$ и $\gamma(e^{i\theta})$ вытекает, что $f(\bar{z})=\bar{f}(z)$ и $f(-z)=(-1)^n f(z)$. Составим функцию

$$g(\omega)=\int_1^{\omega}f(z)\,dz,$$

где $|\omega| \leqslant 1$. Тогда $g(\omega)$ аналитична в $|\omega| < 1$, непрерывна в $|\omega| \leqslant 1$ и обладает следующими свойствами:

$$g(\overline{\omega}) = \overline{g}(\omega), \quad g(-\omega) = (-1)^{n+1} g(\omega).$$

Обозначим через $h(w) = g(w - \sqrt{w^2-1})$, тогда $h(w)$ будет аналитической функцией на плоскости w вне отрезка $[-1,1]$ и удовлетворяет тем же условиям, т. е. $h(\overline{w}) = \overline{h}(w)$ и $h(-w) = (-1)^{n+1} h(w)$.

Определим искомую гармоническую функцию формулой

$$H(\rho, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\rho \cos\alpha + i x_n)\, d\alpha,$$

где $\rho^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$.

Оценку (1.15) легко получить, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3 работы [4]. Теорема 2 доказана.

Замечание 1.1. Утверждение теоремы 1 остается верным, когда множество K является полусферой (размерность полусферы равна $n-1$).

§ 2. Свойства функций класса $\mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$

Обозначим через E семейство функций, обладающих следующими свойствами:

1. Каждая функция $E(w) \in \mathrm{E}$ аналитична во всей плоскости $w = r + i\tau$, разрезанной вдоль отрезка $[-1,1]$;

2. $E(\overline{w}) = \overline{E}(w)$;

3. $E(-w) = -E(w)$;

4. $|E(w)| < \infty$, $E(0)=0$, $E(\infty)=0$, так что $\lim\limits_{|w|\to\infty} |w^{2m+1} E(w)| < \infty$;

5. $E(r \pm i0)$ — гладкие функции.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция $\Phi(w) \in \mathrm{E}$ необходимо и достаточно, чтобы она имела следующее представление:*

$$\Phi(w) = \frac{1}{w^{2m}} \int_0^1 \frac{t^{2m} \lambda(t)\, dt}{\sqrt{w^2 - t^2}}, \tag{2.1}$$

где $\lambda(t)$ имеет ту же степень гладкости, что и $\Phi(r + i0)$ и $\lambda(-t) = \lambda(t)$, $\lambda(t) = 0$ при $t > 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\Phi(w) \in \mathrm{E}$. Допустим, что $\lambda(t)$ найдено. Тогда

$$\Phi(r + i0) = \frac{1}{r^{2m}} \int_0^r \frac{t^{2m} \lambda(t)\, dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{i}{r^{2m}} \int_r^1 \frac{t^{2m} \lambda(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \tag{2.1}$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Re}\{\Phi(r+i0)\} = \frac{1}{r^{2m}}\int_0^r \frac{t^{2m}\lambda(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}. \tag{2.3}$$

Обращением (2.3) является

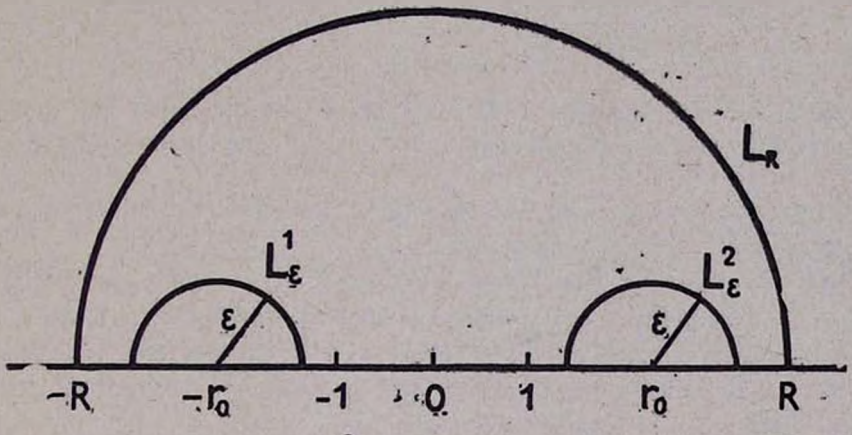
$$\lambda(r) = \frac{1}{r^{2m}}\frac{d}{dr}\left\{\int_0^r \frac{t^{2m+1}\operatorname{Re}\{\Phi(t+i0)\}\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\right\}. \tag{2.4}$$

Из этого представления следует, что $\lambda(0)=0$ и $\lambda(r)|_{r>1}=0$. Действительно, так как $\operatorname{Re}\{\Phi(r+i0)\}|_{r=0}=0$ (это следует из нечетности функции $\operatorname{Re}\{\Phi(r+i0)\}$), то функция под знаком производной в правой части (2.4) имеет в точке $r=0$ нуль порядка $2m+2$, следовательно $\lambda(r)$ будет иметь нуль первого порядка, т. е. $\lambda(0)=0$.

Теперь покажем, что $\lambda(r_0)|_{r_0>1}=0$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(t) = \frac{t^{2m+1}\Phi(t)}{\sqrt{r_0^2-t^2}}.$$

Так как она аналитична в верхней полуплоскости, то, согласно теореме Коши, имеем



$$\int_{C_{R,\varepsilon}} F(t)\,dt = 0,$$

где

$$C_{R,\varepsilon} = L_R \cup L_\varepsilon^1 \cup L_\varepsilon^2 \cup [-R, -r_0-\varepsilon] \cup [-r_0+\varepsilon, r_0-\varepsilon] \cup [r_0+\varepsilon, R].$$

Учитывая, что

$$\left|\int_{L_\varepsilon^j} F(t)\,dt\right| < M_1\sqrt{\varepsilon},\quad \left|\int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} F(t)\,dt\right| < M_2\sqrt{\varepsilon} \text{ и } \left|\int_{-r_0-\varepsilon}^{-r_0+\varepsilon} F(t)\,dt\right| < M_3\sqrt{\varepsilon}$$

$$(j=1,2)$$

при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\int_{L_R} \frac{t^{2m+1}\Phi(t)}{\sqrt{r_0^2-t^2}}\,dt + \int_{-R}^{R} \frac{t^{2m+1}\Phi(t)\,dt}{\sqrt{r_0^2-t^2}} = 0. \tag{2.5}$$

Далее, согласно свойству 4 функции $\Phi(t)$, в окрестности бесконечно удаленной точки разложение Лорана запишется в виде

$$\Phi(t) = \frac{a_1}{t^{2m+1}} + \frac{a_2}{t^{2m+2}} + \cdots + \frac{a_k}{t^{2m+k}} + \cdots,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} t^{2m+1}\Phi(t) = a_1$, где a_1 — действительные числа в силу 2—3, следовательно

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{t^{2m+1}\Phi(t)}{\sqrt{r_0^2 - t^2}}\,dt = \frac{2i\,a_1}{2m+1}.$$

Из равенства (2.5) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m+1}\Phi(t)}{\sqrt{r_0^2 - t^2}}\,dt = -\frac{2ia_1}{2m+1}.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m+1}\Phi(t)\,dt}{\sqrt{r_0^2 - t^2}}\right\} = \int_0^{r_0} \frac{t^{2m+1}\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}}{\sqrt{r_0^2 - t^2}}\,dt = 0$$

для всех $r_0 > 1$. Из формулы (2.4) $\lambda(r_0) = 0$. Таким образом, для любого $\Phi(w) \in \mathbf{E}$ соответствующая функция $\lambda(t)$ определяется формулой (2.4).

Достаточность условий теоремы (2.1) немедленно вытекает из представления (2.1). Теорема доказана.

Замечание 2.1. В § 1 функции $H \in \mathfrak{M}_0^{(n)}$ мы сопоставили функцию $\Phi(w)$ по формуле (1.13), так что $\operatorname{Re}\{\Phi(r+i0)\} \equiv H(r)$. Учитывая обратимость формул (1.3″′) и (1.12) можно утверждать, что между $\mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$ и $\mathbf{E}$ имеется изоморфное соответствие. В следующей теореме 2.2 существенно используется замечание 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $F(r)$ определена на $(0, \infty)$, причем $F(0) = 0$ и $F(\infty) = 0$, так что $\lim\limits_{r\to\infty} r^{2m+1}F(r) < \infty$. Для того чтобы $F \in \mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Phi \in \mathbf{E}$ такая, что $\operatorname{Re}\{\Phi(r+i0)\} \equiv F(r)$.*

Пусть $H_k \in \mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$ $(k = 1, 2, \cdots, \mu)$.

Теорема 2.3. *Функция $H = H_1 \cdot H_2 \cdots H_\mu$ принадлежит $\mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$ при $\mu = 2k+1$ $(k = 1, 2, \cdots)$.*

Следствие 1. *Если $H \in \mathfrak{M}_0^{2m+3}$, то $H^{2k+1} \in \mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$ $(k = 1, 2, \cdots)$.*

Следствие 2. *Пусть $F(x)$ — функция вещественной переменной и $H \in \mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$. Составим сложную функцию $F(H)$. Если $F(x)$ — целая нечетная функция нулевого порядка, принимающая на действительной оси вещественные значения, то $F(H) \in \mathfrak{M}_0^{(2m+3)}$.*

Следствие 3. *Пусть функция* $H \in \mathfrak{M}_0^{(2m-3)}$ *и бесконечно дифференцируема, тогда* $H^{(2k+1)} \in \mathfrak{M}_0^{(2m-3)}$, *где* $k=0, 1, 2, \cdots$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему научному руководителю, члену-корреспонденту АН СССР С. Н. Мергеляну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.V.1973

Բ. Վ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. R^n տարածություններում միավոր հիպերսկավառակից դուրս հարմոնիկ ֆունկցիաների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է R^n տարածություններում $x_n=0$ հիպերհարթության մեջ փակ սկավառակից դուրս (սկավառակի չափողականությունը հավասար է $(n-1)$-ի) հարմոնիկ ֆունկցիաներ։

Աշխատանքի նպատակն է ճշգրիտ միակության թեորեմայի ստացումը, որը պնդում է, եթե նշված սկավառակից դուրս հարմոնիկ ֆունկցիան իր նորմալ ածանցյալի հետ ձգտում է զերոյի սկավառակի $(n-2)$—չափանի եզրին մոտենալիս որոշակի արագությամբ (թեորեմա 1), ապա ֆունկցիան նույնաբար դառնում է զերո։

Ապացուցվում է նաև (թեորեմա 2), որ (A) պայմանը հանդիսանում է ճշգրիտ։

B. V. GRIGORIAN. *On harmonic functions in the complement of the unit hyperdisk in* R^n (summary)

The paper considers functions harmonic in R^n outside closed $(n-1)$-dimensional disk on $x_n=0$ hyperplane centered at 0.

The main result is the exact uniqueness theorem, which states, that a harmonic outside the mentioned disk function which tends together with its normal derivative to zero with sufficient speed when the argument approaches to the $(n-2)$-dimensional boundary of the disk, is the identical zero.

The theorem 2 proves, that the condition (A) can not be improved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. С. Кузнецов.* Специальные функции, Изд. „Высшая школа", М., 1965.
2. *Е. В. Гобсон.* Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИИЛ, М., 1952.
3. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, Изд. „Наука", М., 1968, гл., IV.
4. *Б. В. Григорян.* Теоремы единственности для гармонических функций трех переменных в области вращения, Известия АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 2, 1972, 81—89.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 6, 1973 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ С КАСАНИЕМ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$, а $\varepsilon(x) > 0$ — произвольная функция, непрерывная на $[0, +\infty)$.

В работе [1] В. Каплан доказал, что имеет место следующая

Теорема. *Для любых* $f(x)$, $\varepsilon(x)$, *удовлетворяющих указанным условиям, существует целая функция* $G(x)$ *такая, что*

$$|f(x) - G(x)| < \varepsilon(|x|), \quad |f'(x) - G'(x)| < \varepsilon(|x|), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

В настоящей работе задача об одновременном приближении решена в более общей постановке.

Пусть $\{l_k\}$, $l_k \subset \{|z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, $k \geqslant 1$ — последовательность взаимно непересекающихся локально спрямляемых кривых Жордана, заданных уравнениями в полярных координатах

$$\varphi_k = \varphi_k(r), \quad r \in [r_k, R), \quad m \leqslant r_k \to R, \quad k \to +\infty.$$

Тогда множество $L = \bigcup_{k=1}^{\infty} l_k$ удовлетворяет условию K ([2], [3]).

При этих предположениях справедлива

Теорема 1. *Для произвольной* n*-кратно непрерывно дифференцируемой на* L *функции* $f(z)$ *и непрерывной на* $[0, R)$ *функции* $\varepsilon(x) > 0$ *существует аналитическая в* $|z| < R$ *функция* $G(z)$ *такая, что*

$$|f^{(s)}(z) - G^{(s)}(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in L, \quad 0 \leqslant s \leqslant n.$$

Укажем на одно следствие этой теоремы. Пусть $\{\overset{\blacktriangle}{a}_k\}$, $k \geqslant 1$ — последовательность произвольных точек пространства C^{n+1}, $\overset{\blacktriangle}{a}_k = \{a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \cdots, a_k^{(n)}\}$. Тогда при $\varphi_k(r)$, непрерывных на $[r_k, 1]$, имеет место

Теорема 2. *Существует аналитическая в* $|z| < 1$ *функция* $G(z)$ *такая, что*

$$\lim_{|z| \to 1,\ z \in l_k} G^{(s)}(z) = a_k^{(s)}, \quad k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant n.$$

В самом деле, если взять

$$f(z) = a_k^{(0)} + a_k^{(1)}(z - z_k) + \cdots + \frac{a_k^{(n)}}{n!}(z - z_k)^n, \quad z \in l_k, \quad z_k = e^{i\overline{\varphi}_k(1)},$$

то утверждение теоремы 2 легко вытекает из теоремы 1.

Заметим, что концевые точки z_k кривых l_k могут образовать плотное на $|z| = 1$ множество, и каждая точка этого множества может быть концом счетного числа кривых l_k.

С точки зрения построения примеров, аналогичных построенным в теореме 2, представляется интересным следующий пример.

Пусть на $|\zeta|=1$ задана последовательность $\{f_{k,n}(\zeta)\}$, $k>1$, $n\geqslant 0$ непрерывных функций. Имеет место

Теорема 3. *Существует аналитическая в* $|z|<1$ *функция* $G(z)$ *такая, что для любого* ζ, $|\zeta|=1$ *и* $k>1$ *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} G^{(s)}(z_{k,n})=f_{k,s}(\zeta),\quad s\geqslant 0$$

по некоторой последовательности $\{z_{k,n}\}$, $z_{k,n}\to\zeta$.

Основная часть доказательства теоремы 1, заключающаяся в лемме 1, проводится с помощью методов, развитых М. А. Лаврентьевым и М. В. Келдышем (см. [2], [3]).

1°. Обозначим через $n(t)$ число точек множества $\{|z|=t\}\cap L$. Пусть непрерывно дифференцируемая на $[0, R)$ возрастающая функция $P(t)$ такова, что

a) $tP'(t)$ не убывает на $[0, R)$,

b) $e^{-P(t)}<\varepsilon(t)$,

c) $c=\int\limits_0^R n(t)\,P'(t)\,e^{-P(t)}\,dt<+\infty$.

Множество L покроем кругами $|z-\zeta|\leqslant e^{-P(|z|)}$, $z\in L$, выбирая $P(t)$ такой, чтобы полученное множество также удовлетворяло условию K и выполнялись условия a), b), c). Добавив к полученному множеству подходящие полоски, можем превратить его в континуум L_0, также удовлетворяющий условию K и такой, что мера дуг пересечения окружности $|z|=t$ с этим множеством не превышает $4n(t)\,e^{-P(t)}$. Пусть $L_1=L_0\cup\{|z|\leqslant m\}$. Все эти построения легко осуществимы благодаря условиям, наложенным на функции $\varphi_k(r)$, $k\geqslant 1$.

Согласно лемме, доказанной в работе [4], из свойства a) функции $P(t)$ вытекает существование субгармонической в $|z|<R$ функции $h(z)$ такой, что

a) $$h(z)=h(|z|), \tag{1}$$

b) $$\lim_{t\to R}\frac{h(t)}{P(t)}=1,$$

c) $$\frac{1}{2}\leqslant\frac{h(z)}{(|z|)}\leqslant 2. \tag{2}$$

Лемма 1. *Существует аналитическая в* $|z|<R$, *не обращающаяся в нуль функция* $\omega(z)$ *такая, что* $|\omega(z)|<e^{-P(|z|)}$ *при* $z\in L_1$.

Доказательство. Пусть при $0<r<R$, Δ_r обозначает компоненту множества $L_1\cap\{|z|\leqslant r\}$, содержащую точку $z=0$, и $u_r(z)$ является решением задачи Дирихле в Δ_r с граничными значениями $-2h(z)$.

В силу (2) и супергармоничности $-2h(z)$, будем иметь $u_r(z) \leqslant -2h(z) \leqslant -P(|z|)$, $z \in \Delta_r$. По принципу максимума гармонических функций отсюда вытекает, что при $r' > r$, $z \in \Delta_r$, имеем $u_{r'}(z) \leqslant u_r(z)$. Чтобы доказать сходимость $u_r(z)$ при $r \to R$ к гармонической в L_1^0 функции покажем, что $u_r(z)$ равномерно по r ограничены снизу в любом круге $|z| < s$, $s < R$.

Докажем, что при $|z| < s$, $m < s < R$, имеем $u_r(z) > -4P(s+\delta) - c'$, если $r > s + 2\delta$, где $c' > 0$ — не зависящая от r постоянная, а $\delta > 0$ — число такое, что $s + 2\delta < R$.

В силу (1) можно воспользоваться следующим представлением решения задачи Дирихле:

$$u_r(z) = 2\int_0^R h(t)\, d\mu_r(z, t),$$

где $\mu_r(z, t)$ является гармонической мерой части границы Δ_r, лежащей вне круга $|z| \leqslant t$ в точке z относительно Δ_r.

Для оценки $\mu_r(z, t)$ заметим, что по принципу расширения Карлемана ([5]) $\mu_r(z, t)$ не уменьшится, если при $|z| < t$ границу $\partial\Delta_r$ заменить окружностью $|z| = t$ и вычислить в точке z гармоническую меру дуг $|z| = t$, попадающих в L_1 относительно круга $|z| < t$. Следовательно, согласно нашему допущению о мере этих дуг, из представления упомянутой гармонической меры интегралом Пуассона имеем

$$\mu_r(z, t) \leqslant c_1 \frac{t+|z|}{t-|z|}\, n(t)\, e^{-P(t)}, \text{ при } |z| < t \tag{3}$$

(c_1—постоянная, не зависящая от r).

Теперь, учитывая (2), из формулы представления $u_r(z)$ интегрированием по частям получаем

$$u_r(z) > 4\int_0^R P(t)\, d\mu_r(z, t) = -4P(0) - 4\int_0^R \mu_r(z, t)\, P'(t)\, dt =$$

$$= -4P(0) - 4\int_0^{s+\delta} \mu_r(z, t)\, P'(t)\, dt - 4\int_{s+\delta}^{r} \mu_r(z, t)\, P'(t)\, dt.$$

Заменим в первом интеграле $\mu_r(z, t)$ единицей и применим оценку (3) ко второму интегралу. В силу свойства c) функции $P(t)$, при $|z| < s$ имеем

$$u_r(z) > -4P(s+\delta) - \frac{2c_2}{\delta}\int_{s+\delta}^{r} t n(t)\, P'(t)\, e^{-P(t)}\, dt > -4P(s+\delta) - c'.$$

Таким образом, при $r \to R$ функция $u_r(z)$ стремится к гармонической в L_1 функции $U(z)$ такой, что $U(z) < -P(|z|)$ при $z \in L_1$.

Обозначим через $V(z)$ сопряженную с $U(z)$ гармоническую функцию. Так как L_1 удовлетворяет условию K, а функция $f(z) = U(z) + iV(z)$ непрерывна на L_1 и аналитична внутри L_1, то по теореме Н. У. Аракеляна о равномерном приближении аналитическими в области функциями ([2]) можно найти аналитическую в $|z|<R$ функцию $g(z)$ такую, что

$$|f(z) - g(z)| < 1 \text{ при } z \in L_1.$$

На множестве L_1 имеем

$$\operatorname{Re} g(z) < 1 + U(z) < 1 - P(|z|),$$

Следовательно, функция $\omega(z) = e^{g(z)-1}$ удовлетворяет условиям леммы.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{a_k\}$, $k \geqslant 1$.

Лемма 2. *Существует аналитическая в $|z|<R$ функция $h(z)$ такая, что*

a) $|h(z) - a_k| < \varepsilon(|z|)$, $z \in l_k$, $k \geqslant 1$;

b) $|h^{(s)}(z)| < \varepsilon(|z|)$, $z \in L$, $1 \leqslant s \leqslant n$.

Доказательство. Определим непрерывную на L_0 и аналитическую внутри L_0 функцию $f(x)$ следующим образом: $f(z) = a_k$ на компоненте L_0, охватывающей l_k. По теореме Н. У. Аракеляна существует аналитическая в $|z| \leqslant R$ функция $h_0(z)$ такая, что

$$|2^n (n+1)! \frac{f(z)}{\omega^{n+1}(z)} - h_0(z)| < 1, \text{ при } z \in L_0.$$

Положим

$$h(z) = \frac{\omega^{n+1}(z)\, h_0(z)}{2^n (n+1)!}.$$

При $z \in l_k$, $k \geqslant 1$ имеем

$$|h^{(s)}(z)| = \left| \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon(|z|)} \frac{h(\zeta) - a_k}{(\zeta - z)^{s+1}}\, d\zeta \right| < \varepsilon^{n+1-s}(|z|), \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $l_k(t)$, $k \geqslant 1$ длину части l_k, содержащейся в круге $|z| \leqslant t$. Функции $l_k(t)$ строго возрастают и непрерывны, благодаря локальной спрямляемости l_k.

Лемма 3. *Для данной функции $\eta(x) > 0$, непрерывной на $[0, R)$, существует функция $\psi(x) > 0$, $x \in [0, R)$ такая, что*

$$\psi(x) < \frac{1}{2}\eta(x), \quad x \in [0, R);$$

$$\int\limits_x^R \psi(t)\, dl_k(t) < \frac{1}{2}\eta(x), \quad x \in [r_1, R), \quad k > 1.$$

Пусть $\alpha_n = \inf\limits_{x \in [r_n,\, r_{n+1})} \eta(x)$, $\alpha_0 = \inf\limits_{x \in [0,\, r_1)} \eta(x)$.

Последовательность $\{\beta_n\}$ построим так, чтобы

$$\beta_n > -\frac{\alpha_n}{2},\ \beta_n < \beta_{n+1},\ n \geqslant 1,\ \beta_n \to 0$$

при $n \to +\infty$.

Положим

$$\alpha_n' = \min\left\{\frac{\alpha_n}{3},\ \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\max\limits_k [l_k(r_{n+1}) - l_k(r_n)] + 1}\right\},\ n \geqslant 1,$$

$$\alpha_0' = \frac{\alpha_0}{3}.$$

Определим $\psi(x)$ следующим образом

$$\psi(x) = \alpha_0',\ x \in [0,\ r_1);\ \psi(x) = \alpha_n',\ x \in [r_n,\ r_{n+1}),\ n \geqslant 1.$$

Тогда легко видеть, что

$$\psi(x) < \frac{1}{2}\eta(x),\ x \in [0,\ R)$$

и при $x \in [r_n,\ r_{n+1})$, $n \geqslant 1$ имеем

$$\int_x^R \psi(t)\, dl_k(t) \leqslant \sum_{s=n}^{\infty} \int_{r_s}^{r_{s+1}} \alpha_s'\, dl_k(t) < \sum_{s=n}^{\infty} (\beta_{s+1} - \beta_s) = -\beta_n < \frac{\alpha_n}{2} < \frac{1}{2}\eta(x);\ k \geqslant 1.$$

Применив лемму 3 к функции $\frac{1}{2}\varepsilon(\tau)$ последовательно $n+1$ раз, построим систему положительных функций $\varepsilon_0(x), \cdots, \varepsilon_n(x)$ на $[0, R)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\varepsilon_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}(x) < \cdots < \frac{1}{2^{n+2}}\varepsilon(x),\quad \int_x^R \varepsilon_0(t)\, dl_k(t) < \frac{1}{2^2}\varepsilon(t),$$

$$\int_x^R \varepsilon_s(t)\, dl_k(t) < \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}(x),\ k \geqslant 1,\ 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{4}$$

2°. Доказательство теоремы 1. Соединим точки $z_k' = r_k e^{i\varphi_k(r_k)}$ с точкой $z = 0$ взаимно непересекающимися спрямляемыми дугами l_k'. Продолжим функцию $f(z)$ с l_k до n-кратно непрерывно дифференцируемой на $L_k = l_k \cup l_k'$ функции такой, что

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0, \tag{*}$$

где под производными в $z=0$ подразумеваются односторонние производные по l_k' в сторону убывания $|z|$ (здесь новая функция также обозначена через $f(z)$).

Согласно теореме Н. У. Аракеляна о касательном приближении, существует аналитическая в $|z|<R$ функция $g_n(z)$ такая, что

$$|f^{(n)}(z)-g_n(z)|<\varepsilon_n(|z|),\ z\in L \tag{5}$$

(здесь и далее $\varepsilon_k(x)$, $0\leqslant k\leqslant n$ определены согласно (4)).

Согласно (4), функция $\int_0^z (f^{(n)}(\zeta)-g_n(\zeta))\,d\zeta$ стремится к конечному пределу $a_k^{(n)}$ при $|z|\to R$, $z\in l_k$, $k\geqslant 1$ (интегрирование производится по кривой L_k).

Функцию $h_n(z)$ построим согласно лемме 2 так, чтобы

$$\text{a)}\ \ h_n(z)\to a_k^{(n)},\ |z|\to R,\ z\in l_k,\ k\geqslant 1; \tag{6}$$

$$\text{b)}\ \ |h_n'(z)|<\varepsilon_n(|z|),\ z\in L. \tag{7}$$

Положим

$$g_{n-1}(z)=h_n(z)+\int_0^z g_n(\zeta)\,d\zeta. \tag{8}$$

В силу (7) и (8), при $z\in L$ имеем

$$|f^{(n)}(z)-g_{n-1}'(z)|=|f^{(n)}(z)-g_n(z)-h_n'(z)|<2\varepsilon_n(|z|). \tag{9}$$

Далее, из (*), (6) и (7) вытекает, что

$$\lim_{|z|\to R,\ z\in l_k}(f^{(n-1)}(z)-g_{n-1}(z))=\lim\left\{\int_0^z(f^{(n)}(\zeta)-g_n(\zeta))\,d\zeta-h(z)\right\}=$$

$$=a_k^{(n)}-a_k^{(n)}=0.$$

Отсюда и из (4), (5) и (9) при $z\in l_k$ имеем

$$|f^{(n-1)}(z)-g_{n-1}(z)|=\left|-\int_z^R (f^{(n)}(\zeta)-g_{n-1}'(\zeta))\,d\zeta\right|<$$

$$<2\int_{|z|}^R \varepsilon_n(x)\,dl_k(x)<\varepsilon_{n-1}(|z|)$$

при любом $k\geqslant 1$.

Допустим, что при некотором p, $1\leqslant p<n$ построены функции $h_q(z)$, $g_q(z)$, $p\leqslant q\leqslant n$, аналитические в $|z|<R$ и удовлетворяющие условиям

$$g_q(z)=h_{q+1}(z)+\int_0^z g_{q+1}(\zeta)\,d\zeta,\ p\leqslant q\leqslant n-1, \tag{10}$$

$$h_q(z)\to a_k^{(q)},\ |z|\to R,\ z\in l_k,\ k\geqslant 1, \tag{11}$$

где $a_k^{(q)}$ — предел интеграла $\int_0^z (f^{(q)}(\zeta) - g_q(\zeta))\, d\zeta$ при $|z| \to R$, $z \in l_k$

$$|h_q^{(s)}(z)| < \varepsilon_q(|z|),\ z \in L,\ 1 \leqslant s \leqslant n-q+1;\ p \leqslant q \leqslant n; \tag{1}$$

$$|f^{(q)}(z) - g_q(z)| < \varepsilon_q(|z|),\ z \in L,\ p \leqslant q \leqslant n. \tag{1}$$

Положим

$$g_{p-1}(z) = h_p(z) + \int_0^z g_p(\zeta)\, d\zeta. \tag{1}$$

Имеем из (12), (13) и (14) при $z \in L$

$$|f^{(p)}(z) - g'_{p-1}(z)| = |f^{(p)}(z) - g_p(z) - h'_p(z)| < 2\varepsilon_p(|z|).$$

Из (*), (11) и (14) вытекает, что

$$\lim_{|z| \to R,\ z \in l_k} (f^{(p-1)}(z) - g_{p-1}(z)) = \lim \left\{ \int_0^z (f^{(p)}(\zeta) - g_p(\zeta))\, d\zeta - h_p(z) \right\} =$$

$$= a_k^{(p)} - a_k^{(p)} = 0.$$

Следовательно, из (4) и (14) получаем при $z \in l_k$

$$|f^{(p-1)}(z) - g_{p-1}(z)| = \left| - \int_z^R (f^{(p)}(\zeta) - g'_{p-1}(\zeta))\, d\zeta \right| <$$

$$< 2 \int_{|z|}^R \varepsilon_p(x)\, dl_k(x) < \varepsilon_{p-1}(|z|)$$

при любом $k \geqslant 1$.

При $p \geqslant 1$ функцию $h_{p-1}(z)$ построим согласно лемме 2 та чтобы

a) $h_{p-1}(z) \to a_k^{(p-1)}$, $|z| \to R$, $z \in l_k$, $k \geqslant 1$;

b) $|h_{p-1}^{(s)}(z)| < \varepsilon_{p-1}(|z|)$, $z \in L$, $1 \leqslant s \leqslant n-p+2$.

Тенерь докажем, что функция

$$G(z) \equiv g_0(z) = h_1(z) + \int_0^z (h_2(z_2) + \cdots + \int_0^{z_{n-1}} (h_n(z_n) +$$

$$+ \int_0^{z_n} g_n(z_{n+1})\, dz_{n+1}) \cdots)\, dz_2$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.

В самом деле, имеем из (4), (10, $p=1$), (12, $p=1$) и (13, $p=1$), при $z\in L$, $1\leqslant q\leqslant n$

$$|f^{(q)}(z)-G^{(q)}(z)|=|f^{(q)}(z)-h_1^{(q)}(z)-h_2^{(q-1)}(z)-\cdots-h_q'(z)-g_q(z)|<$$

$$<\varepsilon_q(|z|)+\sum_{s=1}^{q}\varepsilon_s(|z|)<\varepsilon(|z|)\left(\frac{1}{2^{q+2}}+\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{2^{s+2}}\right)<\varepsilon(|z|).$$

При $q=0$ имеем согласно построению $g_0(z)$, при $z\in L$,

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon_0(|z|)<\varepsilon(|z|).$$

Теорема 1 доказана.

3°. Доказательство теоремы 3. Пусть

$$S_n=\left\{\frac{\pi}{2^n},\ \frac{3\pi}{2^n},\cdots,\ \frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^n}\right\},\ n\geqslant 1;$$

l_n — совокупность радиусов, соответствующих аргументам из S_n, с концевыми точками на окружностях $|z|=1-\frac{1}{2^n}$ и $|z|=1$.

Зафиксируем число n_0 и отрезок λ семейства l_{n_0}, соответствующий аргументу $\theta_0\in S_{n_0}$. На интервалах $1-\frac{1}{2^k}\leqslant|z|\leqslant 1-\frac{1}{2^{k+1}}$, $k>n_0$, отрезка λ отметим k точек $z_1^{(k)}, z_2^{(k)},\cdots, z_k^{(k)}$ (во избежание громоздкости, у $z_j^{(k)}$ опущены индексы n_0 и порядка отрезка λ в семействе l_{n_0}), отстоящих друг от друга и от концов интервала на расстоянии $\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}$.

Функцию $F(z)$ определим следующим образом:

$$F(z)=f_{j,0}(e^{i\theta_0})+f_{j,1}(e^{i\theta_0})(z-z_j^{(k)})+\cdots+\frac{1}{k!}f_{j,k}(e^{i\theta_0})(z-z_j^{(k)})^k$$

при $|z-z_j^{(k)}|\leqslant\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}$, $1\leqslant j\leqslant k$, $k>n_0$.

По этому принципу определим $F(z)$ для всех отрезков семейств l_n, $n\geqslant 1$.

Обозначим через E совокупность точек всех замкнутых кругов

$$|z-z_j^{(k)}|\leqslant\frac{1}{(k+1)\,2^{k+3}},\ n\geqslant 1,\ k\geqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k.$$

Непрерывную функцию $\varepsilon(x)$ выберем так, чтобы на $[0,1)$ удовлетворялись неравенства

$$0<\varepsilon(x)<\frac{1}{k\,(k-1)!\,(k+1)^k 2^{k(k+3)}},\ 1-\frac{1}{2^k}\leqslant x<1-\frac{1}{2^{k+1}}. \qquad (1)$$

Так как множество E очевидным образом удовлетворяет условиям A и K ([6]), а функция $F(z)$ непрерывна на E и аналитична в E°, то по

реме, доказанной в работе [6], существует аналитическая в $|z|<1$ функция $G(z)$ такая, что

$$|F(z)-G(z)|<\varepsilon(|z|),\ z\in E. \tag{2}$$

Тогда для всех $z_j^{(k)}\in l_n$, $n\geqslant 1$, $k\geqslant n$, $1\leqslant j\leqslant k$ и $0\leqslant s\leqslant k$ имеем согласно (1) и (2)

$$|f_{j,s}(e^{ib_0})-G^{(s)}(z_j^{(k)})|=|F^{(s)}(z_j^{(k)})-G^{(s)}(z_j^{(k)})|=$$

$$=\frac{(s-1)!}{2\pi}\left|\int_{|\zeta-z_j^{(k)}|=\frac{1}{(k+1)2^{k+3}}}\frac{F(\zeta)-G(\zeta)}{(\zeta-z_j^{(k)})^{s+1}}\,d\zeta\right|\leqslant\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\frac{(s-1)!\,(k+1)^{s+1}\,2^{s(\lambda+3)}}{2\pi}<\frac{1}{k}. \tag{3}$$

При фиксированном j предельное множество точек $z_j^{(k)}\in l_n$, $n\geqslant 1$, $k\geqslant n$ совпадает с окружностью $|z|=1$.

Теперь для точек множества $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ теорема 3 вытекает из (3) и, так как S плотно в $[0,2\pi]$, из соображений непрерывности следует ее справедливость для любого ζ, $|\zeta|=1$. Теорема 3 доказана.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные обсуждения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 14.X.1973

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Ֆունկցիաների և նրանց ածանցյալների միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման մասին *(ամփոփում)*

$|z|<R$ շրջանի՝ հաշվելի ժորդանյան կորերից բաղկացած ենթաբազմությունների համար լուծված է ֆունկցիայի և նրա մինչև կամայական վերջավոր կարգի ածանցյալների միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման խնդիրը՝ շրջանում անալիտիկ ֆունկցիայով և նրա համապատասխան ածանցյալներով։

Կառուցված է ($|z|<1$) -ում անալիտիկ ֆունկցիայի օրինակ, որի մինչև կամայական վերջավոր կարգի ածանցյալների արժեքները ($f=f^{(0)}$)նախօրոք տրված ուղիներով ձգտում են տրված արժեքների, ինչպես նաև ֆունկցիայի օրինակ, որի բոլոր ածանցյալների արժեքները եզրային ցանկացած կետին մոտեցող ինչ-որ հաջորդականություններով, համընկնում են ($|\zeta|=1$)-ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականությունների հաշվելի սիստեմի արժեքների հետ։

A. H. NERSESIAN. *On simultaneous tangential approximation of functions and their derivatives* (summary)

Let the set $L\subset\{|z|<R\}$ beacountable union of Jordan curves, f be a function defined and n times continuously differentiable on L. It is proved, that f and its derivatives up to n-th order can be simultaneously tangentially approximated on L by an analytical in $|z|<R$ function $G(z)$ and its corresponding derivatives.

One example of analytical in $|z|<R$ function is given such that the values of the function and its derivatives (up to a finite order) tend to prescribed values along prescribed ways.

Let a sequence $\{f_{k,n}(\zeta)\}$, $k \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ of functions continuous on $|\zeta| = 1$ be given. The following statement holds:

Theorem. There is a function $G(z)$ analitical in $|z|<1$ such that for any ζ, $|\zeta| = 1$ and $k \geqslant 1$

$$\lim_{n \to \infty} G^{(s)}(z_{k,n}) = f_{k,s}(\zeta), \quad s \geqslant 0,$$

where $\{z_{k,n}\}$, $z_{k,n} \to \zeta$, $n \to +\infty$, is a sequence of points from $|z|<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Kaplan.* Approximation by entire functions, Mich. Math. Journ., 3, № 1, 1955—1956, 43—52.
2. *Н. У. Аракелян.* Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., III, №№ 4—5, 1968, 273—286.
3. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.
4. *Н. У. Аракелян.* Об асимптотическом приближении целыми функциями в бесконечных областях, Мат. сб., 53 (95), № 4, 1961, 515—537.
5. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
6. *А. А. Нерсесян.* О множествах Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, № 6, 1971, 463—471.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 6, 1973 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ДЕЛИМОСТЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1°. Пусть U — единичный круг, Γ — его граница, H^p — класс Харди аналитических функций с обычной L^p-нормой. Пусть $f \in H^p$, тогда f допускает каноническую факторизацию

$$f = BSQ,$$

где B — произведение Бляшке, S — сингулярная внутренняя, Q — внешняя функция. Следуя Бёрлингу, будем называть BS внутренней, Q — внешней частями функции f. Некоторая внутренняя функция $\tilde{J} = \tilde{B}\tilde{S}$ называется делителем функции f, если $BS\tilde{J}^{-1}$ является регулярной ограниченной функцией в U.

Пусть X — некоторое пространство функций, аналитических в круге $X \subset H^1$. При изучении инвариантных подпространств оператора умножения $(Tf)(z) = zf(z)$, существенно иметь утверждение, устанавливающее, что если $f \in X$ и $\tilde{J}$ — делитель функции f, то $f\tilde{J}^{-1} \in X$.

Первые результаты подобного рода для пространств A, H^p и для пространств D — функций с конечным интегралом Дирихле содержатся в [1] и [14].

Для различных классов функций, аналитических в круге и гладких вплоть до единичной окружности, утверждения такого рода были получены в [5]—[10].

В статьях [8], [9] (см. также [6]) для некоторых классов аналитических функций доказано, что если $h \in H^\infty$, то функция

$$g(z) = P(\bar{h} f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\bar{h}(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

не „хуже“ в смысле гладкости, чем f. В частности, в [8] доказано следующее утверждение.

Пусть $H(U)$—множество функций, аналитических в U, n — натуральное число, а

$$H^p_n = \{f;\ f^{(n)} \in H^p,\ \|f\|_{H^p_n} = \max_{0<k<n} \|f^{(k)}\|_{H^p}\},$$

$$A^p_n = \{f \in H(U):\ f \in L^p(U),\ \|f\|_{A^p_n} = \max_{0<k<n} \|f^{(k)}\|_{L^p(U)}\}.$$

Тогда, если $f \in H_1^p$ или $f \in A_1^p$ $(1 < p < +\infty)$, то функция $g = P(\overline{h} f)$ тоже принадлежит пространству H_1^p и, соответственно, пространству A_1^p; аналогичные утверждения верны для пространства A_n^2, H_n^2 при любом натуральном $n \geqslant 1$ (см. также [6]).

2°. В данной статье мы установим, что аналогичные утверждения верны также в пространствах A_n^p, H_n^p при всех $n \geqslant 1$, $1 < p < +\infty$ (теоремы 1, 4) и для A_n^1 при всех $n \geqslant 2$ (теорема 3).

В то же время доказывается (теорема 2), что существуют функция $h \in H^\infty$ и множество M второй категории в A^1 $(A^1 = A_0^1)$ такие, что для любого $\varphi \in M$ и $f(z) = \int_0^z \varphi(t)\, dt = (J\varphi)(z)$ функция $g = P(\overline{h} f) \in A_1^1$. Здесь же доказывается эквивалентность следующих утверждений:

а) $P(\overline{h} f) \in A_1^1$ для любого $f \in A_1^1$,

б) $\sup\limits_{|z|<1} \left[|h^{(1)}(z)|\,(1-|z|) \log \dfrac{1}{1-|z|} \right] < +\infty$.

Таким образом, в последнем случае налицо новый эффект, состоящий из необходимости дополнительной „гладкости" функций h, $h \in H^\infty$ для того, чтобы для всех $f \in A_1^1$ имели $P(\overline{h} f) \in A_1^1$.

Отметим, что в работе существенно используется тот факт, что рассмотренные нами пространства можно „отождествить" с сопряженными пространствами некоторых пространств функций, аналитических в круге.

§ 1. Ограниченность оператора $P(\overline{h}\,\cdot)$ в пространствах A_n^p $(1 < p < +\infty)$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. *Пусть $f \in A_n^p$, $h \in H^\infty$, тогда функция $g = P(\overline{h} f)$ принадлежит A_n^p.*

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $f \in A_1^1$, тогда $f \in H^1$.*

Доказательство. Положим $z = re^{i\varphi}$, тогда

$$f(re^{i\varphi}) = f(0) + \int_0^r f^{(1)}(te^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, dt.$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant |f(0)| + \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(1)}(te^{i\varphi})|\, dt d\varphi < +\infty.$$

Лемма доказана.

Следующие две леммы являются некоторым обобщением соответствующих теорем Литтльвуда-Пели (см. [3], стр. 316).

Лемма 2. *Пусть* $f \in H^p$, $1 \leq p < +\infty$ *и* n — *натуральное число. Положим*

$$g_n(\theta, f) = \left(\int_0^1 (1-r)^{2n-1} |f^{(n)}(re^{i\theta})|^2 \, dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

тогда существует постоянная $C(n, p)$ *такая, что*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(\theta, f) \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n, p) \|f\|_{H^p}.$$

Доказательство. Отметим, что при $n = 0$. $g_0(\theta, f) = g(\theta)$, $g(\theta)$ — известная функция Литтльвуда-Пели (см. [3], стр. 316). Выразим $f^{(n)}$ через контурный интеграл от функции $f^{(1)}$

$$f^{(n)}(re^{i\theta}) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f^{(1)}(t) \, dt}{(t - re^{i\tau})^n},$$

где Γ_ρ — окружность радиуса ρ, $\Gamma = \Gamma_1$ $(r < \rho < 1)$. Имеем

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})|^2 \leq \left(\frac{(n-1)!}{2\pi} \right)^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}(\rho e^{i(\theta-\tau)})|^2 \, d\tau}{|\rho - re^{i\tau}|^{2(n-1)}} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{|\rho - re^{it}|^2} =$$

$$= \left(\frac{(n-1)!}{2\pi} \right)^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 \, dt}{|\rho - re^{it}|^{2(n-1)}} \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(\rho - r)^2 + 4r\rho \sin^2 \frac{t}{2}} \right).$$

Положим $\rho = \frac{1+r}{2}$. Легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\frac{(1-r)^2}{4} + 2(1+r) r \sin^2 \frac{t}{2}} = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1-r)^2 + 8(1+r) \sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{16}{(1-r)}.$$

Заметим, что

$$\left| \frac{1+r}{2} - re^{it} \right|^2 \geq \frac{1}{4} \left[(1-r)^2 + 4r\rho \sin^2 \frac{t}{2} \right] = \frac{|1 - re^{it}|^2}{4}.$$

Поэтому

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})|^2 \leq \frac{4^n}{(1-r)} \left(\frac{(n-1)!}{\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}\left(\frac{(1+r)}{2} e^{i(\theta+t)} \right)|^2 \, dt}{|1 - re^{it}|^{2(n-1)}}.$$

Отсюда получаем

$$g_n(\theta, f) \leqslant \frac{2^n (n-1)!}{\pi}\left(\int_0^1 (1-r)^{2n-2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|f^{(1)}\left(\left(\frac{1+r}{2}\right)e^{i(\theta+t)}\right)\right|^2 dt\,dr}{|1-re^{it}|^{2n-2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

или же

$$g_n(\theta, f) \leqslant \frac{2^n (n-1)!}{\pi}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)\,|f^{(1)}(\rho e^{i(\theta+t)})|^2}{|1-(2\rho-1)e^{it}|^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

так как

$$|1-(2\rho-1)e^{it}|^2 \geqslant C_0 (1-\rho e^{it}|^2, \quad \frac{1}{2} \leqslant \rho < 1,$$

где C_0 не зависит от t и ρ, то

$$g_n(\theta, f) \leqslant C(n, p)\left(\int_0^1 (1-\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f^{(1)}(\rho e^{i(\theta+t)})|^2 (1-\rho^2)\,dt}{|1-\rho e^{it}|^2} d\rho\right)^{\frac{1}{2}} = g_*(\theta, f), \tag{1}$$

$g_*(\theta, f)$ — известная функция А. Зигмунда. Доказательство леммы следует из неравенства (1) и соответствующего результата А. Зигмунда (см. [15]).

Лемма 3. *Пусть* $1 < p < +\infty$, n — *натуральное число,*

$$f \in H^p, \quad f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Тогда существует постоянная $C(n, p)$ *такая, что*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(n, p)\left(\int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(\theta, f)\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство этой леммы, по существу, не отличается от случая $n=1$, только нужно применить вместо теоремы Литтльвуда-Пели лемму 2.

Лемма 4. *Пусть* $f \in A^p$, $1 < p < +\infty$, *предположим* $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, *положим* $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $0 < \rho < 1$, *тогда существуют положительные числа* $C_1(n, p)$, $C_2(n, p)$* *такие, что*

$$C_1(n, p) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p\, \rho\, d\rho dt \leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(t, f_\rho)\, \rho d\rho\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2(n, p) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p\, \rho d\rho dt.$$

---

* В дальнейшем $C_k(\ )$ будет обозначать положительное число, значение которого не будет играть никакой роли.

Доказательство. В силу лемм 2, 3 существуют $C_1(n, p)$ $C_2(n, p)$ такие, что для любого $\rho \in (0,1)$

$$C_1(n, p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p \, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} g_n^p(t, f_\rho) \, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2(n, p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p \, dt.$$

Остается умножить это неравенство на ρ и проинтегрировать по ρ.

Лемма 5. Пусть T — линейный функционал на A^p, $1 < p < +\infty$, предположим, что $g(z) = T\left(\frac{1}{1-\cdot z}\right)$, тогда $g \in A_1^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, кроме того*

$$T(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) \, g(e^{-i\theta}) \, d\theta, \tag{2}$$

*и обратно, для любых $f \in A^p$, $g \in A_1^q$ предел (2) существует и определяет линейный функционал на A^p**.*

Доказательство. Предположим, что $T \in (A^p)^*$, докажем (2), для этого заметим, что $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} T(z^k) z^k$. Пусть $f \in A^p$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \to 1-0} \|f_\rho - f\|_{A^p} = 0, \; f_\rho(z) = f(\rho z),$$

поэтому

$$T(f) = \lim_{\rho \to 1-0} T(f_\rho) = \lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(z^k) \rho^k. \tag{3}$$

Поскольку A^p является подпространством $L_p(U)$, то по теореме Хана—Банаха функционал T можно с сохранением нормы продолжить до линейного функционала F, определенного на всем пространстве $L^p(U)$. Используя известный вид линейного функционала в $L^p(U)$, получим

$$g^{(1)}(z) = T\left(\frac{t}{(1-tz)^2}\right) = \int\int_U \frac{th(t)}{(1-tz)^2} \, d\xi d\eta,$$

$$t = \xi + i\eta, \; \|T\| = \|F\| = \|h\|_{L^q(U)}.$$

---

* т. е. аддитивный ограниченный функционал.

** В [11] дано другое представление линейных функционалов в A^p, однако для применений нам удобно представление (2).

Пусть

$$G(w)=\iint\limits_{|t|<+\infty}\frac{h_1(t)\,d\xi d\eta}{(t-w)^2}, \tag{4}$$

$$h_1(t)=\begin{cases} th(t), & |t|<1 \\ 0, & |t|\geqslant 1 \end{cases}.$$

Сингулярный интеграл (4) принадлежит к типу интегралов, исследованных А. П. Кальдероном и А. Зигмундом (см. [4], стр. 207). Пользуясь их результатом, получим

$$\|g^{(1)}\|_{A^q}\leqslant\|G^1\|_{L_q(C)}<+\infty, \text{ т. е. } g\in A_1^q.$$

Учитывая (3) и лемму 1, получаем (2). Предположим теперь, что $g\in A_1^q$, тогда по лемме 1 $g\in H^1$. Докажем, что предел (2) существует и определяет линейный функционал на A^p.

Пусть

$$\varphi(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{i\theta})\,g(e^{-i\theta})\,d\theta,$$

заметим, что

$$\rho\varphi^{(1)}(\rho^2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{i\theta})\,g^{(1)}(\rho e^{-i\theta})\,e^{-i\theta}\,d\theta.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1\rho^2|\varphi^{(1)}(\rho^2)|\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\rho^{\frac{1}{2}}|\varphi^{(1)}(\rho)|\,d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^1|f(\rho e^{i\theta})\,g^{(1)}(\rho e^{-i\theta})|\,\rho d\rho d\theta\leqslant\|f\|_{A^p}\|g\|_{A_1^q}.$$

Следовательно

$$T(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{i\theta})\,g(e^{-i\theta})\,d\theta$$

существует и

$$|T(f)|\leqslant\|g\|_{A_1^q}\|f\|_{A^p}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Из леммы 5 можно получить характеристику тех множеств $E\subset C^1/U$, для которых $\left\{\frac{1}{z-\zeta}\right\}_{\zeta\in E}$ плотно в пространствах A^p.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f\in A_n^p$, $1<p<+\infty$, $h\in H^\infty$,

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,\overline{h}(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}.$$

Пусть, далее, $\psi \in A^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и

$$(J\psi)(z) = \int_0^z \psi(t)\,dt.$$

Из леммы 1 имеем $J\psi \in H^1$. Пусть $\varphi = J\psi$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{i\theta})\,\overline{\varphi(e^{i\theta})}\,d\theta = \frac{n!}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{\varphi(e^{i\theta})}\,d\theta\,det}{(e^{it}-re^{i\theta})^{n+1}} =$$

$$= -\frac{n!}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})}\,\overline{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta})\,e^{int}\,e^{int}\,de^{i\theta}\,dt}{(e^{i\theta}-re^{it})^{n+1}}},$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{i\theta})\,\overline{\varphi(e^{i\theta})}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})\,e^{int}\,(\varphi(z)\,z^n)^{(n)}}\,dt, \qquad (5)$$

$$z = re^{it}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})\,e^{int}\,(\varphi(z)\,z^n)^{(n)}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_{n-1}(e^{i\theta})\,\overline{F_r(e^{i\theta})}\,e^{in\theta}\,d\theta,$$

$$z = re^{it}$$

где $f_{n-1}(z) = (f(z)\,z^{n-1})^{(n-1)}$,

$$F_r(z) = \int_0^z dt_{n-2}\int_0^{t_{n-2}} dt_{n-3}\cdots\int_0^{t_1} h(t)\,t^n\,\varphi_n(rt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_0^z (z-t)^{n-2}\,h(t)\,t^n\,\varphi_n(rt)\,dt, \text{ где } \varphi_n(z) = (\varphi(z)\,z^n)^{(n)}.$$

По лемме 4 $F_r \in A^q$, $0 < r \leqslant 1$, $f_{n-1} \in A^p_1$, кроме того

$$\|F_r\|_{A^q} \leqslant C(g, n)\,\|h\|_\infty\,\|\psi\|_{A^q}.$$

Следовательно

$$T(\varphi_0) = \lim_{\rho\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(\rho e^{it})\,f_{n-1}(e^{it})\,dt$$

определяет линейный функционал на A^q. Из леммы 4 следует, что

$$\lim_{r\to 1-0} \|F_r - F\|_{A^q} = 0,$$

где $F = F_1$.

Поэтому

$$\lim_{r\to 1-0} T(F_r) = T(F) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\vartheta}) \overline{f_{n-1}(e^{i\vartheta})}\, d\vartheta,$$

$$|T(F)| \leqslant C(p, n) \|h\|_{H^\infty} \|F\|_{A^q} \|f\|_{A^p_n}.$$

В силу этого

$$T_1(\psi) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (J\psi)(e^{i\vartheta}) \overline{g^{(n)}(re^{i\vartheta})}\, d\vartheta$$

представляет линейный функционал на A^q. По доказанному функция $G(z) = T_1\left(\frac{z}{(1-tz)^2}\right)$ принадлежит A^p,

$$J\left(\frac{z}{1-tz)^2}\right) = \int_0^z \frac{z\,d\tau}{(1-\tau z)^2} = \frac{1}{1-wz} - 1.$$

В то же время

$$G(z) = -g^{(n)}(0) + \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{g^{(n)}(re^{i\vartheta})}\, d\vartheta}{1 - zre^{i\vartheta}} d\theta =$$

$$= \overline{g^{(n)}(0)} + \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \overline{g^{(n)}(re^{i\theta})}\, d\theta z^k = \overline{g^{(n)}(z)} - \overline{g^{(n)}(0)}, \text{ т. е. } g^{(n)} \in A^p.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f \in A^p_n$, $1 < p < +\infty$, $f = JF$, где J — внутренняя функция, $F \in H^1$, тогда $F \in A^p_n$.

§ 2. Случай пространства A^1_n

Теорема 2. *Пусть $h \in H^\infty$, тогда*

1. *Следующие утверждения равносильны:*

а) $$\sup_{|z|<1} \left[|h^{(1)}(z)|(1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] < +\infty,$$

б) *$P(\overline{h} f)$ принадлежит A^1_1 для любого $f \in A^1_1$.*

2. *Если*

$$\sup_{|z|<1} \left[|h^{(1)}(z)|(1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] = +\infty,$$

то существует множество M второй категории в A_1 такое, что для любого $\varphi \in M$ и $f(z) = \int_0^z \varphi(t)\, dt$ функция

$$g = P(\overline{h}\, f) \in A_1^1.$$

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Пусть $\lambda^{(n)}$ — пространство функций, аналитических в U и таких, что $f^{(n)} \in C_A$ (C_A — множество функций, аналитических в U и непрерывных в $\overline{U}$),

$$|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})| = o(|t|)$$

равномерно по $\theta \in (-\pi, \pi]$.

$\Lambda^{(n)}$ — множество функций, аналитических в U и таких, что $f^{(n)} \in C_A$ и

$$|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})| = O(|t|)$$

равномерно по $\theta \in [-\pi, \pi)$.

Эти пространства превращаются в банахово пространство по норме

$$\|f\|_\Lambda = \|f\|_\infty + \sup_{\theta, t} \frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})|}{|t|},$$

где $\Lambda = \lambda^{(n)}$, $\Lambda^{(n)}$.

Обозначим $\lambda_* = \lambda^{(0)}$, $\Lambda_* = \Lambda^{(0)}$.

Следующая лемма вытекает из теоремы А. Зигмунда (см. [12], стр. 76).

Лемма 6. *Пусть* $f \in C_\Lambda$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, $n \geqslant 2$, *тогда*

1°. $$f \in \Delta_* \iff f^{(n)}(z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{n-1}}\right),$$

2°. $$f \in \lambda_* \iff f^{(n)}(z) = o\left(\frac{1}{(1-|z|)^{n-1}}\right),$$

3°. $$\|f\|' = \|f\|_\infty + \sup_{|z|<1} [(1-|z|)\,|f^{(2)}(z)|]$$

эквивалентно норме $\|f\|_\Lambda$, $\Lambda = \Lambda_*, \lambda_*$.

Пусть $0 < r < 1$, $h \in H^\infty$, $\psi \in \Lambda_*$. Обозначим

$$T_r(\psi)(z) = \frac{1}{z^2} \int_0^z h(t)\, t^2 \psi^{(1)}(rt)\, dt.$$

Из леммы 6 следует, что $T_r \in L(\Lambda_*, \Lambda_*)$, где $L(\Lambda_*, \Lambda_*)$ — пространство линейных операторов $\Lambda_* \to \Lambda_*$.

Лемма 7.

$$\sup_{0<r<1} \|T_r\| < +\infty \iff \sup_{|z|<1} \left[|h^{(1)}(z)|\,(1-|z|)\log\frac{1}{1-|z|}\right] < +\infty,$$

где $\|T_r\|$ — *норма* T_r *в* $L(\Lambda_*, \Lambda_*)$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Легко заметить, что

$$(T_r(\psi)(z))^{(2)} = \frac{6}{z^4}\int_0^z h(t)\, t^2 \psi^{(1)}(rt)\, dt + \frac{rh^{(1)}(z)\,\psi^{(1)}(rz)}{z} + \\ + r\,h(z)\,\psi^{(2)}(rz). \tag{6}$$

По лемме 6 и (6)

$$|(T_r(\psi)(z))^{(2)}| \leqslant C\left(|h^{(1)}(z)|\,\|\psi\|_{\Lambda_*}\log\frac{1}{1-|z|} + \frac{\|h\|_*\|\psi\|_{\Lambda_*}}{(1-|z|)}\right)$$

при $|z|<1$, поэтому

$$\|T_r(\psi)\|_{\Lambda_*} \leqslant \left(C_1\|h\|_*\|\psi\|_{\Lambda_*} + \|\psi\|_{\Lambda_*}\left(\lg\frac{1}{1-|z|}\right)|h^{(1)}(z)|\right),$$

то есть

$$\sup_{\|\psi\|_{\Lambda_*}<1}\|T_r(\psi)\|_{\Lambda_*} \leqslant C_1\|h\|_*,$$

следовательно

$$\sup_{0<r<1}\|T_r\| \leqslant C_1\|h\|_* < +\infty.$$

Предположим теперь, что

$$\sup_{|z|<1}\left|\,|h^{(1)}(z)|\,(1-|z|)\log\frac{1}{1-|z|}\right| = +\infty \tag{7}$$

и докажем, что

$$\sup_{0<r<1}\|T_r\| = +\infty.$$

Из (7) следует существование последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|\lambda_k|<1$, $|\lambda_k|\to 1-0$, при $k\to\infty$ такой, что

$$\sup_k\left[|h^{(1)}(\lambda_k)|(1-|\lambda_k|)\log\frac{1}{1-|\lambda_k|}\right) = +\infty.$$

Положим

$$\psi_k(z) = \int_0^z \log\frac{1}{1-\bar{\lambda}_k t}\,dt,$$

тогда, как легко видеть, $\psi_k\in\Lambda_*$, $k=1, 2, \cdots$, и

$$\sup_k\|\psi_k\|_{\Lambda_*} < +\infty. \tag{8}$$

Из (6) имеем

$$\left|h^{(1)}(z)\log\frac{1}{1-\bar{\lambda}_k z}\right| \leqslant C_2\|h\|_*\left[|(T_r(\psi_k)(z))^{(2)}| + \frac{\|\psi_k\|_{\Lambda_*}}{1-|z|}\right].$$

Поэтому для любого $z\in U$

$$(1-|z|)\,|h^{(1)}(z)|\left|\log\frac{1}{1-\bar{\lambda}_k z\cdot r}\right| \leqslant C_3\|h\|_*\left[\|T_r(\psi_k)\|_{\Lambda_*} + \|\psi_k\|_{\Lambda_*}\right],$$

отсюда

$$\sup_{0<r<1}\sup_k\|T_r(\psi_k)\|_{\Lambda_*} = +\infty.$$

Из (8) получаем

$$\sup_{0<r<1} \|T_r\| = +\infty,$$

доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, что

1°. а) => б). Воспользуемся тем фактом, что сопряженное пространство $(\lambda_*)^*$ эквивалентно пространству A^1 (см. [13], теорему 11). Пусть $f \in A^1_1$ и

$$g^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,\overline{h(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta.$$

Предположим, что $\psi \in \lambda_*$. Как и при доказательстве теоремы 1. получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(1)}(re^{it})\,\overline{\psi(e^{it})}\,dt = r\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})\,\psi^{(1)}(re^{it})\,e^{2it}}\,dt +$$

$$+ r\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})\,\psi(re^{it})\,e^{it}}\,dt = r\lim_{\rho\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(1)}(\rho e^{it})\,\overline{T_r(\psi)(e^{it})}\,dt +$$

$$+ r\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,e^{it}\,\overline{T_r(\psi)(e^{it})}\,dt + r\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\overline{h(e^{it})\,\psi(re^{it})\,e^{it}}\,dt. \qquad (9)$$

Докажем теперь, что для любого $\psi \in \lambda_*$

$$\|T_r(\psi) - T_1(\psi)\|_{\lambda_*} \to 0 \text{ при } r \to 1-0. \qquad (10)$$

Очевидно (10) выполняется для любого $P \in \mathrm{P}_A$, (P_A — множество всех многочленов), но так как $\mathrm{P}_A = \lambda_*$, то (10) следует из леммы 7 и теоремы Банаха-Штейнгауза (см. [2], стр. 232). Пусть Φ—линейный функционал в λ_*, порожденный функцией $f^{(1)}$. Ввиду (9) и (10), предел

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^{(1)}(re^{it})}\,\psi(e^{it})\,dt$$

существует и равен

$$\Phi(T_1(\psi)) + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it})\,e^{it}}\,T_1(\psi)(e^{it})\,dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(e^{it})}\,h(e^{it})\,\psi(e^{it})\,e^{it}\,dt.$$

Поэтому, если

$$T_{g^{(1)}}(\psi) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^{(1)}(re^{it})}\ \psi(e^{it})\, dt,$$

то

$$|T_{g^{(1)}}(\psi)| \leqslant C_0 \|h\|_\infty \|f\|_{A_1^1} \|\psi\|_{\Lambda_*}.$$

Следовательно $T_{g^{(1)}}$ — линейный функционал в Λ_*. Из результатов работы [13] получим

$$T\left(\frac{1}{1-\zeta z}\right) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-re^{it}z} \overline{g^{(1)}(re^{it})}\ dt = \overline{g^{(1)}(z)},$$

$g^{(1)}$ принадлежит A^1. Легко заметить, что из 2 следует б) => а). Поэтому докажем пункт 2 теоремы.

В силу леммы 7, имеем

$$\sup_{0<r<1} \|T_r\|_{\mathcal{L}(\Lambda_*,\ \Lambda_*)} = +\infty.$$

Поэтому по принципу равномерной ограниченности существует функция $\psi \in \Lambda_*$ такая, что

$$\sup_{0<r<1} \|T_r(\psi)\|_{\Lambda_*} = +\infty. \tag{11}$$

Пусть

$$F_r(z) = T_r(\psi)(z).$$

Предположим Φ_r — функционал в A^1, порожденный функцией F_r. Ввиду эквивалентности норм $\|F_r\|_{\Lambda_*}$ и $\|\Phi_r\|$ (см. [13]), по (11) получаем

$$\sup_{0<r<1} \|\Phi_r\| = +\infty.$$

Снова применяя принцип равномерной ограниченности, докажем существование множества M второй категории в A^1 такого, что

$$\sup_{0<r<1} |\Phi_r(f)| = +\infty$$

для любого $f \in M$. Пусть $f_0 \in M$,

$$f = Jf_0,\ g = P(\bar{h}f).$$

Тогда из (9) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(1)}(re^{it})\ \overline{\psi(e^{it})}\, dt = r\Phi_r(f_0) +$$

$$+ r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\ \overline{e^{it}\ T_r(\psi)(e^{it})}\, dt +$$

$$+ r \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\ \overline{h(e^{it})\ \psi(re^{it})\, e^{it}\, dt}\ .$$

Очевидно последние два слагаемых равномерно ограничены на $0<r<$
откуда имеем

$$\sup_{0<r<1}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g^{(1)}(re^{it})\overline{\psi(e^{it})}\,dt\right| = \sup_{0<r<1}|\Phi_r(f_0)| + O(1) = +\infty.$$

Из результатов работы [13] следует, что $g^{(1)}\overline{\in} A^1$. Теорема доказан

Следствие. Пусть $f = JF$ принадлежит пространству A где J — внутренняя функция и $F \in H^1$, тогда если

$$\sup_{z\in U}\left|J^{(1)}(z)|\,(1-|z|)\log\frac{1}{1-|z|}\right| < +\infty,$$

то функция F тоже принадлежит A^1.

Замечание. Отметим, что существует достаточно широки класс функций, удовлетворяющих условию 2. Простым примеро функции с таким свойством является

$$S(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Для производных высших порядков справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $f \in A^1_n$, $n \geqslant 2$, *тогда для любого* $h \in H$ *функция* $g = P(\bar{h}f)$ *принадлежит пространству* A^1_n, кроме того

$$\|g\|_{A^1_n} \leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|f\|_{A^1_n}.$$

Доказательство. Пусть

$$T_r(\psi)(z) = \int_0^z dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2}\cdots\int_0^{t_1} h(t)\,t^n\,(\psi(\tau)\,\tau^n)^{(n)}_{\tau=rt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}\,t^n\,h(t)\,(\psi(\tau)\,\tau^n)^{(n)}_{\tau=rt}\,dt,\quad \psi\in\lambda_*.$$

Сначала докажем, что

$$T_r \in L(\lambda_*, \lambda_*)$$

и

$$\sup_{0<r<1}\|T_r\| \leqslant C(n)\,\|h\|_\infty. \qquad (12$$

Для этого используем лемму 6

$$(T_r(\psi)(z))^{(n)} = h(z)\,z^n\,(\psi(t)\,t^n)^{(n)}_{t=rz}.$$

По лемме 6 $T_r(\psi) \in \lambda_*$, кроме того

$$\|T_r(\psi)\|_* \leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|\psi\|_*,$$

т. е. $T_r \in L(\lambda_*, \lambda_*)$ и (12) выполняется. Пусть теперь $f \in A^1_n$, $g = P(\bar{h}f$ тогда учитывая (5), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it})\,\overline{\psi(e^{it})}\,dt=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(\rho e^{it})\,(\rho e^{it})^{n}\right)^{(n)} e^{int}\,\overline{T_r(\psi)(e^{it})}\,dt.$$

Предположим Φ — линейный функционал на $\mathfrak{H}_*$, порожденный функцией $(f(z)\,z^n)^{(n)}\,z^n$. Тогда имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\overline{g^{(n)}(re^{it})}\,\psi(e^{it})\,dt=\Phi(T_r(\psi)).$$

Аналогично, как и при доказательстве (10), получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\|T_r(\psi)-T_1(\psi)\|_*=0$$

для любого $\psi\in\mathfrak{H}_*$. Следовательно предел

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{g^{(n)}(re^{it})}\,\psi(e^{it})\,dt$$

существует и равен $\Phi(T_1(\psi))$.

Учитывая (12) и результаты работы [13] получаем, что если

$$T_{g^{(n)}}(\psi)=\lim_{r\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{g^{(n)}(re^{it})}\,\psi(e^{it})\,dt,$$

то

$$\|T_{g^{(n)}}(\psi)\|\leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|f\|_{A^1_n}\,\|\psi\|_*,$$

поэтому из [13] следует, что $g^{(n)}\in A^1$ и

$$\|g\|_{A^1_n}\leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|f\|_{A^1_n}.$$

Доказательство закончено.

Для пространств H^p_n $(1<p<+\infty)$ имеет место аналог теоремы 1, а именно:

Теорема 4. *Пусть $f\in H^p_n$ и $h\in H^\infty$, тогда функция $g=P(\overline{hf})$ принадлежит пространству H^p_n и*

$$\|g^{(n)}\|_{H^p}\leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|f\|_{H^p_n}.$$

Доказательство. Пусть $f\in H^p$, $h\in H^\infty$, $g=P(\overline{hf})$. Из теоремы М. Рисса (см. [12], стр. 55) и теоремы Ф. Рисса (см. [2], стр. 90) следует, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g^{(n)}(re^{it})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant A_q\sup_{\|\psi\|_{H^q}\leqslant 1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}g^{(n)}(re^{i\theta})\,\overline{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta\right|, \qquad (13)$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, A_q — постоянная из теоремы М. Рисса. Пусть $\psi \in H^q$, тогда (см. (5))

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it})\,\overline{\psi(e^{it})}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{it})\,e^{int})^{(n)} e^{int}\,\overline{F_r(e^{it})}\,dt,$$

где

$$F_r(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}\,t^n\,(\psi(w)\,w^n)^{(n)}_{w=rt}.$$

Теперь, используя леммы 2 и 3, получаем

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} g^{(n)}(re^{it})\,\overline{\psi(e^{it})}\,dt\right| \leqslant C(n)\,\|h\|_\infty\,\|\psi\|_{H^q}\,\|f\|_{H^p_n},$$

отсюда и из (13) следует, что

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g^{(n)}(re^{it})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(n,\,p)\,\|h\|_\infty\,\|f\|_{H^p_n}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть X совпадает с одним из следующих пространств: H^p_n, $n\geqslant 0$, $1<p<+\infty$, A^1_n при $n\geqslant 2$. Предположим $f=J$, где J — внутренняя функция, а $F\in H^1$, тогда функция F тоже принадлежит пространству X.

Замечание. После того как статья была готова к печати, автор узнал о недавно опубликованной заметке Н. А. Широкова [10], где без доказательства анонсирована теорема 4. Н. А. Широков сообщил мне, что леммы 2 и 3 другим методом ранее были доказаны в статье [16].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 12.III.197

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Մի դասի օպերատորների մասին, կապված անալիտիկ ֆունկցիաների բաժանելության հետ *(ամփոփում)*

Դիցուք A^p_n, H^p_n այն ֆունկցիաների դասերն են, որոնք անալիտիկ են U միավոր շրջանում, և որոնց n-րդ կարգի ածանցյալը պատկանում է $L_p(U)$-ին համապատասխանաբար H^p-ին.

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե $h\in H^\infty$ և X-ը համընկնում է հետևյալ դասերից մեկի ու մեկի հետ.

$$A^p_n,\ H^p_n,\ n\geqslant 1,\ 1<p<+\infty,\ A^1_n,\ n\geqslant 2,$$

ն եթե $f \in X$, ապա $P(\bar{h} f)$-ը նույնպես պատկանում է X-ին, որտեղ P-ն Մ. Ռիսսի պրոեկտորն է: A_1^1-ի համար ապացուցվում է հետևյալ երկու պնդումների էկվիվալենտությունը.

ա) $P(\bar{h}f) \in A_1^1$, ցանկացած $f \in A_1^1$ դեպքում

բ) $\sup\limits_{|z|<1} \left[|h^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] < +\infty$:

F. A. SHAMOIAN. *On a bounded class of operators in the theory of divisibility of analytical functions* (summary)

Let X denote one of the spaces A_n^p, H_n^p $n \geq 1$, $1<p<+\infty$, A_n^1, $n \geq 2$, where A_n^p (H_n^p are the spaces of functions analytical in the unit disc U with n-th derivative belonging to $L^p(U)$ (H^p).

The papers main result is the following: $f \in X$ and $h \in H^\infty$ implies $P(\bar{h}f) \in X$, P is the projector of M. Riss.

For A_1^1 space the following statements a) and b) have been proved to be equivalent:

a) $P(\bar{h}f) \in A_1^1$ for every $f \in A_1^1$,

b) $\sup\limits_{|z|<1} \left[|h^{(1)}(z)| (1-|z|) \log \frac{1}{1-|z|} \right] < +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
2. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1958.
3. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, „Мир", М., 1965.
4. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы, т. II, 1966.
5. *Б. И. Коренблюм.* Об одном экстремальном свойстве внешних функций, Мат. заметки, 10, № 1, 1971, 53—56.
6. *Б. И. Коренблюм, В. М. Файвишевский.* Об одном классе сжимающих операторов, связанных с делимостью аналитических функций, УМЖ, 24, № 5, 1972, 692—694.
7. *С. А. Виноградов, Н. А. Широков.* О факторизации функций с производной из H^p, Зап. научн. семинар., ЛОМИ, 22, 1971, 8—27.
8. *В. П. Хавин.* О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Зап. научн. семинар. ЛОМИ, 22, 1971, 202—205.
9. *Ф. А. Шамоян.* Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Зап. научн. семинаров, ЛОМИ, 22, 1972, 206—208.
10. *Н. А. Широков.* Обобщение теоремы Литтльвуда-Пэли, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 30, 1972, 179—180.
11. *В. П. Захарюта* и *В. И. Юдович.* Общий вид линейного функционала в H_p^1, УМН, 19, вып. 2 (16), 1964.

12. *P. L. Duren.* Theory of H^p spaces, Acad. Press, New York, 1970.
13. *P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shilds.* Linear functionals on H^p space with $0 < p < 1$, Journ. reine und angew, Math. Bd. 238, 1969, 32—60.
14. *L. Carleson.* A representation formula the Dirichlet integral, Math. Z., 73, 196
15. *A. Zygmund.* On certain integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 55, 1944, 170—20
16. *T. M. Flett.* On an exstension of absolute summability and some theorems Littlewood and Paley, Proc. London Math. Soc., 7, № 25, 1957, 113—149.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 6. 1973 Математика

А. И. СЕРГЕЕВА

ПРОСТРАНСТВА АНТИИНВОЛЮЦИЙ ВТОРОГО РОДА ОБОБЩЕННЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

В своей известной монографии [1] Эли Картан подробно рассмотрел своеобразную модель 3-мерного пространства Лобачевского L_3, в которой роль *точек* пространства L_3 играют так называемые *антиинволюции 2-го рода* комплексной прямой z, дополненной точкой $z=\infty$ (сферы Римана):

$$z'=\frac{a\,z+b}{c\,z-\bar{a}},\quad b=\bar{b},\ c=\bar{c},\ a\,\bar{a}=bc=-1. \tag{1}$$

Антиинволюцию (1) можно характеризовать коэффициентами a, b, c соответствующей дробно-линейной функции комплексного переменного, т. е. матрицей

$$\pm X,\ \text{где}\ X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -\bar{a}\end{pmatrix},\ b=\bar{b},\ c=\bar{c},\ a\,\bar{a}+bc=-1 \tag{1а}$$

(ясно, что матрицы X и $-X$ отвечают одному и тому же преобразованию (1)); эту матрицу X можно записать и так

$$X=\begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x\end{pmatrix},\ \bar{y}=y,\ z=\bar{z},\ x\,\bar{x}+y^2-z^2=-1. \tag{1б}$$

Движения в пространстве антиинволюций (1) (или в пространстве пар матриц $\pm X$) Картан определял формулами

$$X'=AXA^{-1},\ \det A=1, \tag{2}$$

где A — квадратная матрица 2-го порядка над полем C комплексных чисел.

Настоящая заметка посвящена обобщению этой конструкции Картана: поле C мы заменяем алгебрами чисел

$$Z=x^0+Ix^1+I^2x^2+\cdots+I^{n-1}x^{n-1},$$

где $x^0,\ x^1,\cdots,\ x^{n-1}\in R$, а

$$I^n=\begin{cases} 0\ (\textit{плюральные}\ \text{числа}),\\ -1\ (\textit{антициклические}\ \text{числа}),\\ 1\ (\textit{циклические}\ \text{числа}),\end{cases}$$

(см., например, [2]). При этом нам будет удобно сперва рассмотреть случаи

$n=1$ (*действительные* числа) и $n=2$, $I^2=\begin{cases}0 & (\textit{дуальные}\ \text{числа}),\\ 1 & (\textit{двойные}\ \text{числа})\end{cases}$

(ср. [3]).

1. Действительная прямая. Условимся обозначать символом A^2 пространство, *точками* которого являются пары матриц $\pm X$, где

$$X=\begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & x \end{pmatrix},\ x, y, z\in R;\ x^2+y^2-z^2=-1, \tag{1в}$$

а *движения* задаются формулами

$$X=AXA^{-1},\ \det A=\pm 1, \tag{2а}$$

где A — квадратные матрицы 2-го порядка над полем R действительных чисел; преобразования (2а), где $\det A=1$ и $\det A=-1$, удобно называть *движениями 1-го рода*, соответственно *движениями 2-го рода*. Группа преобразований (2а) действует на пространстве A^2 транзитивно, а две точки $X_1=\begin{pmatrix} x_1 & y_1+z_1 \\ y_1-z_1 & x_1 \end{pmatrix}$ и $X_2=\begin{pmatrix} x_2 & y_2+z_2 \\ y_2-z_2 & x_2 \end{pmatrix}$ (где можно условиться, например, считать, что $z_1>0$, $z_2>0$) имеют единственный независимый инвариант

$$\operatorname{tr}(X_1X_2)=2(x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2). \tag{4}$$

Если принять за *расстояние* между точками X_1 и X_2 пространства A^2 число φ, определяемое равенством

$$2\operatorname{ch}\varphi=-\operatorname{tr}(X_1X_2), \tag{5}$$

то метризованное таким образом многообразие A^2 обратится в *плоскость Лобачевского* L_2. Инволютивные движения (2а) пространства A^2 распадаются на два класса: а) *инволюции 2-го рода*, матрицу A каждой из которых соответствующей заменой координат x, y, z в пространстве A^2 можно привести к виду

$$A=\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

б) *инволюции 1-го рода*, матрицу A каждой из которых заменой координат можно привести к виду

$$A=\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Преобразование (2а) с матрицей (6) имеет единственную неподвижную точку

$$\pm J,\ \text{где}\ J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6а}$$

т. е. это преобразование можно отождествить с *симметрией относительно точки* (6а) в пространстве A^2 (или L_2); преобразование же (2а) с матрицей (7) имеет множество неподвижных точек $\pm X$, где

$$X = \begin{pmatrix} 0 & y+z \\ y-z & 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 - z^2 = -1, \tag{8}$$

заполняющих прямую плоскости Лобачевского; такое преобразование естественно отождествить с *симметрией относительно прямой* (8) плоскости L_2.

Таким образом, *множество точек плоскости Лобачевского* L_2 *взаимно однозначно отображается на множество инволюций* 2-го *рода пространства* $\mathbf{A}^2$ (матрицы этих инволюций можно записывать в виде (1б), после чего мы снова приходим к исходной модели плоскости L_2!), а *множество прямых плоскости* L_2 *взаимно однозначно отображается на множество инволюций* 1-го *рода пространства* $\mathbf{A}^2$, которые можно задавать, например, матрицами $\pm U$, где

$$U = \begin{pmatrix} u & v+w \\ v-w & -u \end{pmatrix}, \quad u^2 + v^2 - w^2 = 1 \tag{1г}$$

(*инволюции* 1-го *рода действительной прямой*; ср. [1]). Отсюда легко получить формулу *для расстояния* ψ *от точки* X (см. (1в)) *до прямой* U (см. (1г)):

$$\operatorname{sh} \psi = ux + vy - wz. \tag{9}$$

Из (9) легко выводится условие *инцидентности* точки X и прямой U:

$$ux + vy - wz = 0.$$

2. Дуальная прямая. Все матрицы, рассматриваемые в п. 2, являются квадратными матрицами 2-го порядка над алгеброй *дуальных чисел*. Мы рассмотрим пространство $\mathbf{A}_0^3$, *точки* которого определяются как пара матриц (6а) и все пары матриц, получаемые из (6а) преобразованиями

$$X' = AX\bar{A}^{-1}, \ \det A = \pm 1 \tag{2б}$$

(*движения* 1-го *рода* пространства $\mathbf{A}_0^3$) или

$$X' = A\bar{X}\bar{A}^{-1}, \ \det A = \pm 1 \tag{2в}$$

(*движения* 2-го *рода*). Движения 1-го рода (2б), оставляющие на месте точку (6а) (вращения вокруг точки (6а)) характеризуются матрицами

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \tag{10}$$

или

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \tag{10а}$$

Таким образом, группа вращений вокруг точки является 3-параметрической, что соответствует очевидному равенству $\dim \mathbf{A}_0^3 = 3$, и состоит из двух несвязных компонент. Так как из (2б) (и из (2в)) сле-

дует, что $X_0' = A_0 X_0 A_0^{-1}$, где A_0, X_0 и X_0' — действительные части дуальных матриц A, X и X', то за первые координаты точки X (которую можно записывать в форме (1б)) естественно принять координаты действительной части X_0 матрицы X, т. е. пару матриц $\pm X_0$, где (действительная) матрица $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 + z_0 \\ y_0 - z_0 & -x_0 \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию (1в). Последнюю координату точки X мы обозначим через x^1.

Группа движений пространства $\mathbf{A}_0^3$, оставляющая на месте две фиксированные точки этого пространства, не принадлежащие линии

$$x^0 = \text{const}, \quad y^0 = \text{const}, \tag{11}$$

является 1-параметрической; поэтому две точки X_1 и X_2 пространства $\mathbf{A}_0^3$, не принадлежащие одной линии (11), имеют единственный независимый инвариант, за который можно принять, например, число φ, определяемое по формуле (5), — *расстояние* между точками X_1 и X_2. При этом $\varphi = 0$ в том и только в том случае, когда точки X_1 и X_2 принадлежат одной линии (11); поэтому линии (11) можно назвать *изотропными линиями* пространства $\mathbf{A}_0^3$. Группа движений пространства $\mathbf{A}_0^3$, поточечно оставляющих на месте фиксированную линию (11), является 2-параметрической; любые две точки X_1 и X_2 линии (11) имеют единственный независимый инвариант, за который можно принять, например, разность $x_2^1 - x_1^1$ — *расстояние между точками* X_1 *и* X_2 *изотропной линии* (11) пространства $\mathbf{A}_0^3$.

Все *антиинволюции* пространства $\mathbf{A}_0^3$ (т. е. инволютивные движения (2в) 2-го рода) распадаются на три семейства, которым отвечают три вида пар матриц A:

$$\pm \begin{pmatrix} x^0 + \varepsilon x^1 & y^0 + z^0 \\ y^0 - z^0 & -x^0 + \varepsilon x^2 \end{pmatrix}, \text{ где } (x^0)^2 + (y^0)^2 - (z^0)^2 = \pm 1 \tag{12—13}$$

и

$$\pm \begin{pmatrix} x^0 + \varepsilon x^1 & \varepsilon (y^1 + z^1) \\ \varepsilon (y^1 - z^1) & x^0 - \varepsilon x^1 \end{pmatrix}, \text{ где } (x^0)^2 = 1, \tag{14}$$

$\varepsilon^2 = 0$. Матрицы (12—14) заменой координат x_0, y_0, z_0, x_1 в пространстве $\mathbf{A}_0^3$ могут быть сведены к „каноническим“ видам

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12а—14а}$$

Отсюда непосредственным вычислением получаем, что *антиинволюции 2-го рода* (12) оставляют на месте единственную *точку* пространства $\mathbf{A}_0^3$, а множество неподвижных точек *антиинволюции 1-го рода* (13) *и антиинволюции 3-го рода* (14) получается движением из поверхности $x^0 = 0$, соответственно, из поверхности $x^1 = 0$; эти поверхности мы назовем *плоскостью 1-го рода*, соответственно, *плоскостью 2-го рода*. Таким образом, антиинволюции пространства $\mathbf{A}_0^3$ можно отождествить с *сим-*

метриями относительно точек, симметриями относительно плоскостей 1-го рода и симметриями относительно плоскостей 2-го рода.

Инволюции пространства $\mathbf{A}_0^3$ (инволютивные движения (2б) 1-го рода) заменой координат сводятся к тем, которым отвечают следующие „канонические" пары матриц A:

$$\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ и } \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Неподвижными точками этих последних инволюций будут, соответственно, все точки линии

$$x^0 = y^0 = 0 \tag{15а}$$

и все точки линии

$$x^0 = x^1 = 0. \tag{15б}$$

Неподвижные точки произвольных инволюций пространства $\mathbf{A}_3^0$ заполняют линии, получаемые из линий (15а) и (15б) всевозможными движениями. Эти линии можно считать *геодезическими* относительно двух существующих в пространстве $\mathbf{A}_0^3$ типов метрик, где геодезическая характеризуется условием аддитивности вдоль нее расстояний между точками; их естественно назвать *прямыми 1-го рода* (линия (15а) и ее образы) и *прямыми 2-го рода* (линия (15б) и ее образы) пространства $\mathbf{A}_3^0$. Таким образом, инволюции пространства $\mathbf{A}_0^3$ можно трактовать как *симметрии относительно прямых* (1-го и 2-го рода) этого пространства.

Итак, множество антиинволюций пространства $\mathbf{A}_0^3$ можно отождествить с его точками и плоскостями, а множество инволюций — с его прямыми.

Используя методы, аналогичные примененным в п. 1, можно получить формулу для расстояния ψ от точки $X = \begin{pmatrix}x^0 + \varepsilon x^1 & y^0 + z^0\\ y^0 - z^0 & -x^0 + \varepsilon x^1\end{pmatrix}$ пространства $\mathbf{A}_0^3$ до плоскости $U = \begin{pmatrix}u^0 + \varepsilon u^1 & v^0 + w^0\\ v^0 - w^0 & -u^0 + \varepsilon u^1\end{pmatrix}$, соответственно, $\begin{pmatrix}u^0 + \varepsilon u^1 & \varepsilon(v^1 - w^1)\\ \varepsilon(v^1 - w^1) & u^0 - \varepsilon u^1\end{pmatrix}$:

$$\operatorname{sh}\psi = u^0x^0 + v^0y^0 - w^0z^0, \tag{9а}$$

если U является плоскостью 1-го рода, и

$$\psi = -x^1 + u^1x^0 + v^1y^0 - w^1z^0, \tag{9б}$$

если U — плоскость 2-го рода; отсюда следуют также условия инцидентности точки и плоскости.

Рассмотрим теперь пару матриц

$$\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{16}$$

и все пары матриц, получаемые из (16) движениями (2б). Действительная часть всех этих матриц имеет вид

$$\pm\begin{pmatrix}x^0 & y^0+z^0\\ y^0-z^0 & -x^0\end{pmatrix}, \text{ где } (x^0)^2+(y^0)^2-(z^0)^2=0. \tag{17}$$

Так как для пары матриц (17) и любой пары матриц (16) имеем $\varphi=\infty$, где φ определяется по формуле (5), то пары матриц (17) можно отождествить с точками *абсолюта* пространства $\mathbf{A}_0^3$. Вращению вокруг точки абсолюта $\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ соответствуют пары матриц A вида

$$\pm\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a}=1, \tag{18}$$

откуда можно вывести, что абсолют пространства $\mathbf{A}_0^3$ является 2-мерным многообразием. Аналогично пара матриц $\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, разнесенная движениями (2б), образует 3-мерное многообразие *идеальных* точек пространства $\mathbf{A}_0^3$.

3. Двойная прямая. Обратимся теперь к пространству $\mathbf{A}_1^3$ антиинволюций *двойной прямой*, дополненной несобственными элементами: парой несобственных прямых и несобственной точкой „пересечения" этих прямых; в результате такого пополнения (ср. [3]) двойная прямая обращается в многообразие, гомеоморфное тору.

Точками пространства $\mathbf{A}_1^3$ будем считать антиинволюции двойной прямой или пары двойных матриц $\pm X$, где

$$X=\begin{pmatrix}x+ey & z+t\\ z-t & -x+ey\end{pmatrix},\ x,\ y,\ t,\ z\in R \text{ и } x^2-y^2+z^2-t^2=1, \tag{19}$$

и $e^2=1$, а *движениями* — преобразования

$$X'=AX\bar{A}^{-1}, \text{ где } \det A=\pm 1 \text{ или } \det A=\pm e \tag{2г}$$

(*движения* 1-го *рода*) и преобразования

$$X'=A\bar{X}\bar{A}^{-1}, \text{ где } \det A=\pm 1 \text{ или } \det A=\pm e \tag{2д}$$

(*движения* 2-го *рода*). При этом любую точку пространства $\mathbf{A}_1^3$ можно перевести движением в точку (6а) и две точки X_1 и X_2 имеют единственный независимый инвариант

$$\operatorname{tr}(X_1\bar{X}_2)=2(x_1x_2-y_1y_2+z_1z_2-t_1t_2). \tag{20}$$

Расстояние φ между точками X_1 и X_2 пространства $\mathbf{A}_1^3$ мы определим формулой

$$\operatorname{tr}(X_1\bar{X}_2) = -\begin{cases} 2\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}, & \text{если } |x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2| \geqslant 1, \\ 2\cos\frac{\varphi}{2}, & \text{если } |x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2| < 1; \end{cases} \tag{21}$$

при этом, если $\varphi = 0$, то точки X_1 и X_2 совпадают. Множество пар матриц

$$\pm\begin{pmatrix} x + ey & z + t \\ z - t & -x + ey \end{pmatrix}, \text{ где } x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 0 \tag{22}$$

определяет *абсолют* пространства $\mathbf{A}_1^3$; его можно также описать как орбиту точки (16) при всевозможных движениях (2г).

Пара матриц $\pm A$, отвечающая произвольному инволютивному движению (2д) 2-го рода (*антиинволюции* пространства $\mathbf{A}_1^3$) заменой координат может быть приведена к виду (6), откуда непосредственным вычислением получаем, что неподвижные точки такого движения образуют пару: *точка* (6а) и *плоскость*, т. е. множество точек

$$\pm\begin{pmatrix} x + ey & z \\ z & -x + ey \end{pmatrix}, \text{ где } x^2 - y^2 + z^2 = 1. \tag{23}$$

Говорят, что точка (6а) и плоскость (23) *взаимно полярны* относительно абсолюта (22) пространства $\mathbf{A}_1^3$.

Виды пар матриц $\pm A$, соответствующих „каноническим" типам инволютивных движений (2г) 1-го рода (*инволюциям* пространства $\mathbf{A}_1^3$) и множества неподвижных точек этих преобразований собраны в следующей таблице; здесь $e_1 = \frac{1}{2}(1 + e)$ и $e_2 = \frac{1}{2}(1 - e)$ — идемпотентные элементы алгебры двойных чисел:

№№ п/п	Виды пар матриц	Множества неподвижных точек
1	$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$x = z = 0$ и $y = t = 0$
2	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$x = y = 0$ и $z = t = 0$
3	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$	нет
4	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$	нет
5	$\pm\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & -e_1 \end{pmatrix}$	нет
6	$\pm\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 \end{pmatrix}$	нет
7	$\pm\begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ -e_1 & -e_2 \end{pmatrix}$	нет
8	$\pm\begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ -e_1 & e_2 \end{pmatrix}$	нет

Полученные в случаях 1 и 2 пары линий пространства A_1^3 называются парами *взаимно полярных* относительно абсолюта *прямых* этого пространства. При этом в случае 1 мы приходим к паре: действительная прямая $y = t = 0$ + мнимая прямая $x = z = 0$ (ибо в действительной области равенства $x = z = 0$ несовместимы с условием $x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 1$); в случае 2 мы приходим к паре действительных прямых. Прямые $y = t = 0$, $x = y = 0$ и $z = t = 0$, а также образы этих линий при движениях (2г), мы назовем *прямыми* 1-*го*, соответственно 2-*го* и 3-*го рода* пространства A_1^3. Таким образом, и здесь, как и выше, можно связать точки и плоскости рассматриваемого пространства с его антиинволюциями, а прямые — с инволюциями.

Аналогично пп. 1 и 2 можно также найти метрические инварианты пар введенных нами геометрических образов пространства A_1^3.

4. Плюральная прямая. *Точками* пространства A_0^n, где уместно различать случаи $n = 2k$ четно и $n = 2k + 1$ нечетно, мы будем называть пару матриц (6а), а также все пары матриц, получаемые из (6а) *движениями* 1-*го рода* $X' = AX\bar{A}^{-1}$ и *движениями* 2-*го рода* $\bar{X}' = AX\bar{A}^{-1}$, где $\det A = \pm 1$; при этом теперь под A мы понимаем квадратные матрицы 2-го порядка над алгеброй *плюральных* чисел. Движению, оставляющему точку (6а) на месте (вращению вокруг точки (6а)) отвечают либо пары матриц $\pm A$ строения

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \tag{10б}$$

либо пары матриц $\pm A$ строения

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } a\bar{a} + b\bar{b} = 1. \tag{10в}$$

Отсюда следует, что группа вращений вокруг точки состоит из двух несвязных компонент и является $(3k)$-параметрической, соответственно $(3k+1)$-параметрической, а само пространство A_0^n является $(3k)$-мерным, соответственно $(3k+2)$-мерным.

Любой *точке* пространства A_0^n можно поставить в соответствие пару (плюральных) матриц $\pm X$, где

$$X = \begin{pmatrix} x & y + z \\ y - z & -x \end{pmatrix}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad x\bar{x} + y^2 - z^2 = -1. \tag{24}$$

Подгруппа группы движений пространства A_0^n, оставляющая на месте две точки этого пространства, не принадлежащие одной поверхности

$$x^0 = \text{const}, \quad y^0 = \text{const} \tag{11}$$

является k-параметрической, откуда вытекает, что пара точек, не принадлежащих одной поверхности (11), имеет k, соответственно $k+1$ независимых инвариантов, за которые можно принять, например, компоненты следа матрицы $(X_1\ \bar{X}_2)$:

$$\operatorname{tr}(X_1 \overline{X}_2) = x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1 + 2y_1 y_2 - 2z_1 z_2. \tag{25}$$

Рассмотрим плюральное число $\varphi = \varphi^0 + I^2\varphi^2 + \cdots + I^{2l}\varphi^{2l} + \cdots$, определяемое формулой

$$\operatorname{ch}\varphi = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(X_1\overline{X}_2), \tag{26}$$

где косинус плюрального аргумента φ вводится как обычно:

$$\operatorname{ch}\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2m}}{(2m)!}. \tag{27}$$

Компоненту φ^{2l} плюрального числа φ мы назовем $(2l)$-м расстоянием между точками X_1 и X_2; все эти расстояния являются инвариантами группы движений пространства $\mathbf{A}_0^n$. При этом расстояние φ^0 между двумя точками обращается в нуль в том и только в том случае, когда эти точки принадлежат одной поверхности (11), являющейся $(3k-2)$-мерным, соответственно $(3k)$-мерным многообразием. Подгруппа группы движений пространства $\mathbf{A}_0^n$, оставляющая на месте фиксированную точку этого пространства и проходящую через эту точку поверхность (11), является $(3k-1)$-параметрической, соответственно $(3k)$-параметрической, а ее подгруппа, оставляющая на месте еще одну точку поверхности (11)—$(k+1)$-параметрической. Отсюда следует, что точки X_1 и X_2 пространства $\mathbf{A}_0^n$, принадлежащие поверхности (11), но не принадлежащие никакой подповерхности

$$x^0 = \text{const},\ y^0 = \text{const},\ x^1 = \text{const} \tag{28}$$

поверхности (11) имеют k, соответственно $k+1$ независимых инвариантов, последним из которых является число $\det[(X_1\overline{X}_2)^1]^{n-2}$, где $(X_1\overline{X}_2)^1$ — коэффициент при I в плюральной матрице $X_1\overline{X}_2$.

Если точки X_1 и X_2 принадлежат $(3k-3)$-мерной, соответственно $(3k-1)$-мерной поверхности (28), то, вообще говоря, они имеют $k-1$, соответственно k, независимых инвариантов—это можно вывести из того, что подгруппа группы движений пространства $\mathbf{A}_0^n$, оставляющая на месте фиксированную точку этого пространства и проходящую через эту точку поверхность (28), будет $(3k-3)$-параметрической, соответственно $(3k-2)$-параметрической, а подгруппа этой последней группы, оставляющая на месте поверхность (28) и две точки этой поверхности—$(k-1)$-параметрической. Исключение здесь составляют точки, принадлежащие поверхности

$$x^0 = \text{const},\ y^0 = \text{const},\ x^1 = \text{const},\ x^2 = \text{const},\ y^2 = \text{const},\ x^3 = \text{const} \tag{29}$$

(ясно, что поверхность (28) „расслаивается“ на поверхности (29), каждая из которых имеет размерность, на 3 меньшую размерности поверхности (28)): две точки, принадлежащие поверхности (29), вообще говоря, имеют на единицу меньше независимых инвариантов чем точки поверхности (28).

Продолжая рассуждать таким же образом и далее, мы убедимся, что через каждую точку пространства $\mathbf{A}_0^n$ проходит система вложенных друг в друга *p-поверхностей*:

$$x^{2l} = \text{const},\ y^{2l} = \text{const},\ x^{2l+1} = \text{const};\ l=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ p \qquad (30)$$

(начинающаяся с не описываемых уравнениями (30) поверхностей (11)); при увеличении значения p на единицу размерность соответствующей поверхности понижается на три, а число инвариантов, принадлежащих p-поверхностям пар точек уменьшается на единицу. Если условиться называть линию пространства $\mathbf{A}_0^n$, характеризующуюся аддитивностью вдоль нее j-го инварианта пар точек, *j-й геодезической*, то мы отметим также понижение на единицу числа проходящих через две точки геодезических при переходе от точек p-поверхности к точкам $(p+1)$-поверхности: так, например, через две точки, не принадлежащие поверхности (28), проходит k, соответственно $k+1$ геодезических, а через точки, принадлежащие поверхности (28), но не принадлежащие поверхности (29) — уже только $k-1$, соответственно, k геодезических. Такая структура пространств $\mathbf{A}_0^n$ делает их близкими к n-мерным флаговым пространствам F_n (см., например, [4]); однако более детальное изучение геометрических свойств пространств $\mathbf{A}_0^n$ требует дальнейших исследований.

5. Антициклическая и циклическая прямые. *Точкой* пространства $\mathbf{A}_{-1}^n$, соответственно, пространства $\mathbf{A}_1^r$, мы будем называть пару матриц (6а) и любую пару матриц, получаемую из (6а) движением $X' = AX\overline{A}^{-1}$ или $X' = A\overline{X}\overline{A}^{-1}$, где теперь A — квадратная матрица 2-го порядка над алгеброй антициклических, соответственно, циклических чисел и $\det A = \pm 1$ при $n = 2k+1$ нечетном, $\det A = 1$ при $n = 2k$ четном в случае антициклических чисел и $\det A = \pm 1$ или $\det A = \pm e$ — в случае циклических чисел и $n=2k$; здесь $e = I^k$, так что $e^2 = 1$. Так как алгебра антициклических чисел при $n=2k$ разлагается в прямую сумму k полей комплексных чисел: алгебра циклических чисел при $n=2k$ разлагается в прямую сумму $n-1$ полей комплексных чисел и алгебру двойных чисел, а при $n=2k+1$ и алгебра циклических чисел и алгебра антициклических чисел разлагаются в прямую сумму k полей комплексных чисел и поля действительных чисел, то пространство $\mathbf{A}_{-1}^{2k}$ является прямой суммой k пространств L_3, пространство $\mathbf{A}_1^{2k}$ является прямой суммой $k-1$ пространств L_3 и пространства $\mathbf{A}_1^3$, а пространства $\mathbf{A}_{-1}^{2k+1}$ и $\mathbf{A}_1^{2k-1}$ представляют собой прямую сумму k пространств L_3 и пространства L_2.

Поступила 25.I.1972

Ա. Ի. ՍԵՐԳԵԵՎԱ. Ընդհանրացված կոմպլեքս ուղիղների երկրորդ սեռի անտիինվոլյուցիաների տարածություններ *(ամփոփում)*

[1]-ում է. Կարտանը դիտարկել է լոբաչևսկու եռաչափ տարածության մոդելը, որում որպես կետեր հանդես են գալիս կոմպլեքս ուղղի երկրորդ սեռի անտիինվոլյուցիաները։ Աշխատանքում այդ կառուցումն ընդհանրացվում է այն դեպքի համար, երբ կոմպլեքս թվերի դաշտը փոխարինվում է n կարգի պլյուրալ, անտիցիկլիկ, ցիկլիկ թվերի հանրահաշիվներով։ Ուսումնասիրվում է այդ դեպքում ստացվող տարածությունների երկրաչափությունը։ Առանձին և ավելի մանրամասնորեն դիտարկված են n=1,2 դեպքերը։

A. I. SERGEEVA. *The spaces of the second kind antiinvolutions of generalised complex lines* (summary)

E. Cartan [1] has considered a model of three-dimensional Lobatchevski space, in which second kind antiinvolutions of the complex line serve as points.

The present paper generalised this construction to the case, when the field of complex numbers is replaced by algebras of plural, anticiclic or ciclic numbers of order n. The geometry of the spaces so obtained is investigated. The cases of $n=1, 2$ are considered in more detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Cartan*. Lecons sur la geometrie projective complexe, Paris, 1950.
2. *Л. Б. Вымгина*. Проективные пространства над алгебрами циклических, антициклических и плюральных чисел, Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской, 173, вып. 2, 1967, 17—25.
3. *И. М. Яглом*. Комплексные числа и их применение в геометрии, М., Физматгиз, 1963.
4. *Б. А. Розенфельд*. Неевклидовы пространства, М., Изд. „Наука", 1969.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հ. Մ. Հայրապետյան. $H_p(1<p<\infty)$ Հարդիի դասերի ենթատարածություններում ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսի մասին 429
Բ. Վ. Գրիգորյան. R^n տարածությունում միավոր հիպերսկավառակից դուրս հարմոնիկ ֆունկցիաների մասին 451
Ա. Հ. Ներսիսյան. Ֆունկցիաների և նրանց ածանցյալների միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման մասին 464
Ֆ. Ա. Շամոյան. Մի դասի օպերատորների սահմանափակության մասին, կապված անալիտիկ ֆունկցիաների բաժանելիության հետ 474
Ա. Ի. Սերգեևա. Ընդհանրացված կոմպլեքս ուղիղների երկրորդ սերի անտիինվոլյուցիաների տարածություններ 491

СОДЕРЖАНИЕ

Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди H_p $(1<p<\infty)$ 429
Б. В. Григорян. О гармонических функциях вне единичного гипердиска в пространстве R^n 451
А. А. Нерсесян. Об одновременном приближении с касанием функций и их производных 464
Ф. А. Шамоян. Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций 474
А. И. Сергеева. Пространства антиинволюций второго рода обобщенных комплексных прямых 491

CONTENTS

H. M. Hairapetian. On the basis of rational functions in subspaces of Hardy's H_p classes $(1<p<\infty)$ 429
B. V. Grigorian. On harmonic functions in the complement of the unit hyperdisk in R^n 451
A. H. Nersesian. On simultaneous tangential approximation of functions and their derivatives 464
F. A. Shamoian. On a bounded class of operators in the theory of divisibility of analytical functions 474
A. I. Sergeeva. The spaces of the second kind antiinvolutions of generalised complex lines 491

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1973 թ., VIII, № № 1—6

Ռ. Վ. Ադիբեկյան. *Երկու կոմպլեքս փոփոխական Նյուտոնի շարքի զուգամիտության մասին* 1, 26

Ս. Ս. Աղայան. *Կոմպակտից դուրս որոշված ֆունկցիայի ներկայացումը հատուկ շարքով* 4, 279

Բ. Գ. Արարքցյան. *Որոշ օպերատորային հավասարումների լուծումների վարքը երբ $t \to \infty$* 3, 226

Ս. Ղ. Աֆյան. *Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի համար* . . . 4, 321

Ֆ. Ի. Գեչե, Ա. Ի. Կուրեյ. *Մասնական ածանցյալներով անվերջ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ամբողջ լուծումների մասին* 2, 123

Ի. Ց. Գոխբերգ, Ն. Յա. Կրուպնիկ. *Սահքով միաչափ սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների մասին* 1, 5

Ռ. Վ. Գրիգորյան. *R^n տարածությունում միավոր հիպերսկավառակից դուրս հարմոնիկ ֆունկցիայի մասին* 6, 451

Ն. Ե. Թովմասյան. *Մի քանի հավասարումներ Բանախի տարածության մեջ և նրանց կիրառությունները* 3, 181

Ա. Մ. Լուկացկի. *Ըստ Մ. Մ. Ջրբաշյանի ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգի շարքերի վերլուծման մասին* 2, 102

Ն. Կ. Կարապետյանց, Ս. Գ. Սամկո. *Որոշ դասերի ինտեգրալ օպերատորների ինդեքսի մասին* 1, 26

Յու. Ֆ. Կորոբեյնիկ, Օ. Վ. Եպիֆանով. *Ածանցյալների գնահատականներ ամբողջ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում* 2, 142

Վ. Ի. Կրուտին. *$|z|<1$ շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլիննյան դեֆեկտների մեծությունների մասին* 5, 347

Հ. Մ. Հայրապետյան. *$H_p(1<p<\infty)$ Հարդիի դասերի ենթատարածությունների մեջ ռացիոնալ ֆունկցիաների բազիսի մասին* 6, 429

Վ. Հովհաննիսյան. *«Գնդերի արտաքսման մեթոդի» որոշ կիրառությունները C^p-ում* 4, 306

Ս. Դ. Հովսեփյան. *Նոր մոտեցում տոպոլոգիական տարածությունների լայնացումների տեսության մեջ* 3, 235

Ս. Ն. Մանուկյան. *Ամենուրեք խիտ կոնստրուկտիվ պարզ աղեղների մասին* . . 4, 291

Վ. Հ. Մարտիրոսյան. *Ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին* 2, 167

Ի. Մ. Միխեև. *Ֆուրյեի եռանկյունաչափական շարքերի՝ $+\infty$-ին զուգամիտելու մասին* 2, 157

Է. Ա. Միրզախանյան. *Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի կառուցումը* 3, 212

Ռ. Ջ. Մկրտչյան. *Շտուրմ-Լիուվիլի տիպի օպերատորի սպեկտրի կորիզի մասին և մի շարք հայտանիշներ նրա սպեկտրի լեբեգյան կամ սինգուլյար լինելու վերաբերյալ* 3, 190

Օ. Ա. Մուրադյան. *Մյունցի թեորեմում՝ մոտարկող ագրեգատների գործակիցների աճի մասին* 1, 70

Է. Օ. Նազարյան. *Բերգմանյան մետրիկայի Ռիչչիի կորության գնահատման մասին* 5, 418

Ա. Հ. Ներսիսյան. *Ֆունկցիաների և նրանց ածանցյալների միաժամանակյա շոշափումային մոտարկման մասին* 6, 464

Ա. Բ. Ներսեսյան, Ա. Հ. Հովհաննիսյան. *Կոշու խնդրի կոռեկտությունը մի դասի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար* 3, 254

Ց. Ա. Շամոյան. Մի դասի օպերատորների սահմանափակության մասին, կապված անալիտիկ ֆունկցիաների բաժանելիության հետ 6, 474
Վ. Ա. Շմատկով. Միակողմանի մատարկում ինտերպոլյացիայով մի քանի փոփոխականների անընդհատ ֆունկցիաների տարածություններում 5, 410
Մ. Մ. Ջրբաշյան. Ռացիոնալ ֆունկցիաների բիորթոգոնալ սիստեմներ և կոշու կորիզի ներկայացումներ 5, 384
Լ. Հ. Գևորգյան. Հետադարձման խոցեր P խաղացողի տեղեկության ուշացումով 2, 93
Դ. Մ. Ջաուսովսկի. Բաց համակարգերի համարժեք ձևափոխումներ գրաֆների վրա . 1, 56
Ս. Դ. Սամկո. Կոտորակային ինտեգրալների $I^{\alpha}(L_p)$ տարածության և պոտենցիալի տիպի օպերատորների մասին 5, 359
Վ. Վ. Սարաֆյան. Առանձին կետերում վերասերված հավասարումների եզրային խնդիրների կանոնավորման մասին 1, 13
Ա. Ի. Սերգեևա. Ընդհանրացված կոմպլեքս ուղիղների երկրորդ սերի անտիինվոլյուցիաների տարածություններ 6, 491
Յու. Ս. Ֆրիդլյանդ. Յուրյեի ունիվերսալ շարք՝ ըստ տված ինտեգրելի ֆունկցիայից հանրահաշվական բազմանդամների 4, 329

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“ за 1973 г., VIII, №№ 1—6

В. Аванесян. Некоторые применения метода „исключения шаров“ в C^p . . . 4, 306
С. С. Агаян. Разложение функций, определенных вне компактов, в ряды специального вида 4, 279
Р. В. Адибекян. О сходимости интерполяционного ряда Ньютона для функций комплексных переменных 1, 41
Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди H_p $(1 < p < \infty)$ 6, 429
Б. Г. Араркцян. Поведение при $t \to \infty$ решений некоторых операторных уравнений 3, 226
С. К. Афян. Задача Римана-Гильберта для одного класса вырождающихся на границе области эллиптических систем дифференциальных уравнений 4, 321
Ф. И. Гече, А. И. Курей. О целых решениях линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка в частных производных 2, 123
И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник. Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом 1, 3
Б. В. Григорян. О гармонических функциях вне единичного гипердиска в пространстве R^n 6, 451
М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши 5, 384
Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. Об индексе некоторых классов интегральных операторов 1, 26
Ю. Ф. Коробейник, О. В. Епифанов. Оценки производных в весовых пространствах целых функций 2, 142
В. И. Крутинь. О величинах дефектов Р. Неванлинны для мероморфных при $|z| < 1$ функций 5, 347
А. М. Лукацкий. О разложении в ряды по системе рациональных функций М. М. Джрбашяна 2, 102
С. Н. Манукян. О конструктивных всюду плотных простых дугах 4, 291
В. А. Мартиросян. О равномерном приближении многочленами по системе Мюнца с целыми коэффициентами 2, 167
Э. А. Мирзаханян. Построение бесконечномерных гомотопических групп . . 3, 212
И. М. Михеев. О сходимости к $\pm\infty$ тригонометрических рядов Фурье . . 2, 157
Р. Э. Мкртчян. О ядре спектра оператора типа Штурма-Лиувилля, и о некоторых признаках лебеговости или сингулярности его спектра 3, 190
О. А. Мурадян. О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца 1, 70
Э. О. Назарян. Об оценке кривизны Риччи метрики Бергмана 5, 418
А. А. Нерсесян. Об одновременном приближении с касанием функций и их производных 6, 464
А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян. О корректности задачи Коши для одного класса гиперболических уравнений 3, 254

С. Г. Овсепян. Новый подход в теории расширений топологических пространств 3, 235
Л. А. Петросян. Игры преследования с задержкой информации у игрока P 2, 93
С. Г. Самко. О пространстве $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала 5, 359
В. В. Сарафян. О регуляризации краевых задач для уравнений, вырождающихся в отдельных точках 1, 13
А. И. Сергеева. Пространства антиинволюций второго рода обобщенных комплексных прямых 6, 491
Н. Е. Товмасян. Некоторые уравнения в банаховых пространствах и их применения 3, 181
Ю. С. Фридлянд. Универсальный ряд Фурье из алгебраических полиномов от заданной интегрируемой функции 4, 329
Д. М. Чаусовский. Эквивалентные преобразования открытых систем на графах 1, 56
Ф. А. Шамоян. Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций 6, 474
В. А. Шматков. Односторонняя аппроксимация с интерполяцией в пространстве непрерывных функций нескольких переменных 5, 410

CONTENTS

of the Isvestia of the Academy of Scieness of the Armenian SSR, seria "Matematika", 1973, vol. VIII, №№ 1—6

R. V. Adibekian. On the convergence of Newton interpolation series for a function of two complex variables 1, 41

S. K. Aftan. The Rieman-Hilbert problem for a class of elliptical systems of differential equations with degeneration on the boundary 4, 321

S. S. Aghayan. Special series expansion of the functions defined on the complements of compacts 4, 279

V. Avanissian. Some applications of the "exclusion-balls method" in C^p . . . 4, 306

B. G. Ararktzian. Asymptotic behaviour of the solutions of some operator equations 3, 226

D. M. Chausovskil. Equivalent transformations of open systems on graphs . . . 1, 56

Ju. S. Freedland. Universal Furie series of algebraic polynoms for given integrable function 4, 329

F. J. Gače, A. I. Kurej. On entire solutions of linear partial differential equations of infinite order 2, 123

I. C. Gohberg, N. Ja. Krupnik. On certain one-dimensional singular integral operators with a shift 1, 3

B. V. Grigorian. On harmonic functions in the complement of the unit hyperdisk in R^n 6, 451

H. M. Hairapetian. On the basis of rational functions in subspaces of Hardy's H_p classes $(1 < p < \infty)$ 6, 429

S. G. Hovsepian. A new approach in the theory of extensions of topological spaces 3, 235

M. M. Jrbashian (Džrbašian). Biorthogonal systems of rational functions and representations of Cauchy kernel 5, 384

N. K. Karapetianç, S. G. Samko. On the index of some classes of integral operators 1, 26

Ju. F. Korobeinik, O. V. Epifanov. Estimation of derivatives in weighted spaces of integral functions 2, 142

V. I. Krutin. On Nevanlinna's deficiencies values for functions meromorphic in $|z|<1$ 5, 347

A. M. Lukackil. On the expansion in series by M. M. Džrbašians system of rational functions 2, 102

S. N. Manukian. On constructive everywhere dense simple arcs 4, 291

V. H. Martirosian. About uniform approximations by the polinomes on the system of Müntz with the integral coefficients 2, 167

I. M. Mihejev. On convergence to $+\infty$ of trigonometrical Fourier series . . . 2, 157

E. A. Mirsakhanian. The construction of infinite-dimensional homotopic groups for subsets of Hilbert space 3, 212

R. Z. Mkrtchian. On the nucleus of the Sturm-Liuville type operator, and some criterions of lebesqueness or singularity of its spectrum 3, 190

O. A. Muradian. On the growth of coefficients of approximations aggregates in Münts theorem 1, 70
E. H. Nazarian. On the estimation of Ricci curvature of the Bergman metric 5, 418
A. H. Nersesian. On simultaneous tangential approximation of functions and their derivatives 6, 464
A. B. Hersesian, A. H. Hovanesian. On the correctness of the Chauchy's problem for a certain class of weakly hyperbolic equations 3, 254
L. A. Petrosian. Pursuit games with an information lag 2, 93
S. G. Samko. On the space $I^{\alpha}(L_p)$ of fractional integrals and on potential type operators 5, 359
V. V. Saraftan. On regularization boundary value problems for equations degenerating in some points 1, 13
A. I. Sergeeva. The spaces of the second kind antiinvolutions of generalised complex lines 6, 491
F. A. Shamoyan. On a bounded class of operators in the theory of divisibility of analytical functions 6, 474
V. A. Shmatkov. One-sided approximation with interpolation in the space of continuous functions several variables 5, 410
N. E. Tovmasian. Some equations in Banach spaces and their applications . 3, 181