ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.
Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

В. И. КРУТИНЬ

О ВЕЛИЧИНАХ ДЕФЕКТОВ Р. НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ПРИ $|z|<1$ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $|z|<R$ функция, $T(r, f)$—ее неванлинновская характеристика*. Определим

$$\delta(a, f)=\varliminf_{r\to R}\frac{m(r, a)}{T(r, f)}=1-\varlimsup_{r\to R}\frac{N(r, a)}{T(r, f)}.$$

Величина $\delta(a, f)$ называется величиной дефекта $f(z)$ в точке a в смысле Р. Неванлинны.

Обозначим (см. [4], стр. 147)

$$E_N(f)=\{a\colon \delta(a, f)>0\}.$$

$E_N(f)$ называется множеством дефектных значений $f(z)$ в смысле Р. Неванлинны.

Теорема Р. Неванлинны о величинах дефектов и о множестве дефектных значений $E_N(f)$ (см. [3], стр. 271, 275) утверждает:

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z\neq\infty$, либо мероморфная при $|z|<1$ функция и

$$\varliminf_{r\to 1}\frac{\ln\frac{1}{1-r}}{T(r, f)}=0, \tag{1.1}$$

тогда

а) множество $E_N(f)$ не более чем счетно;

б) величины дефектов мероморфной функции $f(z)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{(a)}\delta(a, f)\leqslant 2. \tag{1.2}$$

Если же условие (1.1) не выполне

$$\varliminf_{r\to 1}\frac{T(r, f)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\lambda>0, \tag{1.3}$$

то утверждение (a) остается в силе, при этом

---

* Здесь и далее мы будем придерживаться стандартных обозначений неванлинновской теории.

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2 + \frac{1}{\lambda}.$$

Известно, что для функций $f(z)$, мероморфных при $|z| < 1$, ограниченного вида множество $E_N(f)$ может иметь положительную линейную меру, а если $f(z)$ не является функцией ограниченного вида, то множество $E_N(f)$ имеет внутреннюю емкость нуль (см. [3], стр. 280).

Величины дефектов мероморфных функций в настоящее время исследованы еще не до конца. Здесь, главным образом, получены результаты для мероморфных при $z \neq \infty$ функций.

Известен следующий результат (см. [2], стр. 139, [6]).

Теорема А. *Если $f(z)$—мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ*, то дефекты Р. Неванлинны подчинены следующему условию:*

$$\sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, f) < \infty \tag{1.4}$$

при

$$\alpha \geqslant \frac{1}{3}.$$

Если же $\alpha < \frac{1}{3}$, *то для мероморфных при $z \neq \infty$ функций конечного нижнего порядка λ ряд* (1.4) *может расходиться.*

При переходе от мероморфных функций при $z \neq \infty$ конечного нижнего порядка к мероморфным при $z \neq \infty$ функциям бесконечного нижнего порядка мы наблюдаем резкое отличие в свойствах их величин дефектов.

Именно, справедливо такое утверждение (см. [2], стр 125).

Теорема Б. *Пусть a_ν — произвольная последовательность конечных комплексных чисел, и δ_ν — последовательность положительных чисел $1 \leqslant \nu \leqslant N \leqslant \infty$, подчиненная условию*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu \leqslant 1.$$

Тогда существует целая функция $f(z)$ бесконечного нижнего порядка λ такая, что $\delta(a_\nu, f) = \delta_\nu$ $(1 \leqslant \nu < N)$ и $f(z)$ не имеет дефектных значений, отличных от a_ν.

---

* Напомним определение порядка ρ и нижнего порядка λ мероморфной при $|z| < R < \infty$ функции $f(z)$. Если $R = \infty$

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, f)}{\ln r}; \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, f)}{\ln r}.$$

Если $R < \infty$

$$\rho = \overline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln(T(r, f))}{\ln \frac{1}{R-r}}; \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln \frac{1}{R-r}}.$$

Этим самым в 1962 году полностью была решена „узкая" обратная задача теории распределения значений мероморфных функций для целых функций бесконечного нижнего порядка (см. [4], стр. 488).

Приведем теперь следующие две теоремы о величинах дефектов и структуре множества дефектных значений мероморфных при $|z|<1$ функций.

Теорема В. (см. [5]). *Для любого $\rho>0$ и для произвольной последовательности комплексных чисел $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ существует аналитическая в единичном круге функция порядка ρ и нормального типа, для которой a_j, $j=1, 2,\cdots$ являются дефектными.*

Теорема С. (см. [1]). *Для любого ρ, $0<\rho<\infty$ и последовательности $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k<\infty$ существует мероморфная при $|z|<1$ функция $h_\rho(z)$ порядка ρ, для которой*

$$\delta(a_k, h_\rho)\geqslant\frac{\pi\rho}{1+\pi\rho}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2(1+\rho)}}{4}\right)^{3+2\rho}\cdot\eta_k^3,$$

где a_k принадлежит наперед заданному не более чем счетному множеству конечных комплексных чисел.

В настоящей работе мы усиливаем результат теоремы С.

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\leqslant 2,$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность конечных комплексны чисел и $\rho>0$ — любое наперед заданное число.

Существует мероморфная при $|z|<1$ функция $g(z, \rho)$ порядка ρ такая, что

$$\delta(a_n, g)\geqslant\frac{\delta_n}{4},\ n=1, 2,\cdots.$$

Таким образом, эта теорема показывает, что свойства величин дефектов мероморфных при $|z|<1$ функций конечного порядка ρ более близки к свойствам величин дефектов мероморфных при $z\neq\infty$ функции бесконечного нижнего порядка.

§ 2. Вспомогательные соотношения

Проведем доказательство теоремы для случая, когда ρ — любое конечное положительное число. Для дальнейших конструкций нам необходимо исследовать асимптотические свойства специального класса аналитических при $|z|<1$ функций. Рассмотрим для $\rho>0$ целую функцию Миттаг-Леффлера конечного порядка $\rho+1$

$$E_{\rho+1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho+1}\right)}.$$

Для этой функции хорошо известно следующее асимптотическое представление:

$$E_{\rho+1}(z)=\begin{cases}(\rho+1)\,e^{z^{\rho+1}}+\psi_1(z), & |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2(\rho+1)} \quad (2.1)\\ \psi_2(z), & \frac{\pi}{2(\rho+1)}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi, \quad (2.2)\end{cases}$$

где при $|z|>1$

$$|\psi_j(z)|\leqslant\frac{C_1}{|z|}\quad (j=1,\ 2). \tag{2.3}$$

Если же $|z|\leqslant 1$, то очевидно*

$$|E_{\rho+1}(z)|\leqslant E_{\rho+1}(1)\leqslant C_2.$$

Рассмотрим круг $|z|<1$ и область A_0, которую мы назовем круговой луночкой, ограниченную двумя дугами

$$\Gamma_1\left(\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right)=\left\{|z|<1\cap\operatorname{Re}z>0\cap\left|z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right|=\right.$$
$$\left.=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}}\right\};$$

$$\Gamma_2\left(\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right)=\left\{|z|<1\cap\operatorname{Re}z>0\cap\left|z-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(\rho+1)}\right|=\right.$$
$$\left.=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}}\right\}.$$

Пусть $z_1^r=x_1^r+iy_1^r$; $z_2^r=x_1^r-iy_1^r$ есть точки пересечения границы луночки A_0 с окружностью $|z|=r$ $(0<r_0\leqslant r<1)$

$$x_1^r=r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}+r\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}};$$

$$y_1^r=-r^2\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}+r\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}};$$

$$\alpha(r)=\arg z_1^r=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{\pi}{2(\rho+1)}\cdot(1-r^2)}{\cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}+r\sqrt{1-r^2\sin^2\frac{\pi}{2(\rho+1)}}}; \tag{2.4}$$

---

* Здесь и далее буквы C обозначают положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от рассматриваемой функции.

$$-\alpha(r) = \arg z_2'. \tag{2.5}$$

Выберем для аналитической при $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ функции $d(z) = \frac{z}{1-z}$ непрерывную ветвь $\arg d(z)$ такую, что $-\frac{\pi}{2} < \arg d(z) < \frac{\pi}{2}$. Тогда для любого ρ, $0 < \rho < \infty$, функция $d^{1+\rho}(z)$ будет однозначной и аналитической при $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Легко видеть, что функция $d(z)$ отображает луночку A_0 на угол $|\arg d(z)| \leqslant \frac{\pi}{2(\rho+1)}$

$$\arg d(re^{i\varphi}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - r}; \quad z = re^{i\varphi}.$$

При изменении z вдоль дуги $\theta = \{z\colon |z| = r,\ |\arg z| < \alpha(r)\}$ $\arg d(z)$ изменяется монотонно от $-\frac{\pi}{2(\rho+1)}$ до $\frac{\pi}{2(\rho+1)}$. Заметим также, что $|d(re^{i\varphi})|$ монотонно убывает при $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha(r)$, $0 \geqslant \varphi \geqslant -\alpha(r)$

$$\max_{z\in\theta} |d(z)| = d(r) = \frac{r}{1-r}, \tag{2.6}$$

$$\min_{z\in\theta} |d(z)| = |d(re^{i\alpha(r)})|, \tag{2.7}$$

причем $(0 < r_0 \leqslant r < 1)$

$$\frac{C_3(1-\varepsilon(r))}{1-r} \leqslant |d(re^{i\alpha(r)})| < \frac{C_3(1+\varepsilon(r))}{1-r}, \tag{2.8}$$

где $C_3 = \cos\frac{\pi}{2(\rho+1)}$; $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 1$.

Определим далее аналитическую при $|z| < 1$ функцию

$$e(z, \rho) = E_{\rho+1}\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

Используя (2.1)—(2.3) имеем при $z \in A_0$ $(0 < r_0 \leqslant r < 1)$

$$|e^{d^{\rho+1}(z)}|(\rho + 1 - |\psi_1(z)|) \leqslant |e(z,\rho)| \leqslant |e^{d^{\rho+1}(z)}|(\rho + 1 + |\psi_1(z)|).$$

$$I = \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln^+ |e(re^{i\varphi}, \rho)|\, d\varphi \geqslant \operatorname{Re} \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} d^{\rho+1}(re^{i\varphi})\, d\varphi +$$

$$+ \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln(\rho + 1 - |\psi_1(re^{i\varphi})|)\, d\varphi = I_1 + \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln \omega_1(re^{i\varphi})\, d\varphi;$$

$$I\leqslant \operatorname{Re}\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} d^{\rho+1}(re^{i\varphi})\,d\varphi+\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \ln\left(1+\rho+|\psi_1(re^{i\varphi})|\right)d\varphi=$$

$$=I_1+\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\ln\omega_2(re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{2.9}$$

В силу (2.3), (2.7) — (2.9) $(0<r_0\leqslant r<1)$

$$\omega_1(re^{i\varphi})=\rho+1-|\psi_1(re^{i\varphi})|\geqslant\rho+\frac{1}{2}=C_4,$$

$$\omega_2(re^{i\varphi})=\rho+1+|\psi_1(re^{i\varphi})|<\rho+2=C_5.$$

Поэтому из (2.4) следует

$$\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\ln\omega_1(re^{i\varphi})\,d\varphi\geqslant C_6\,(1-r), \tag{2.10}$$

$$\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\ln\omega_2(re^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant C_7\,(1-r). \tag{2.11}$$

Оценим I_1.

Рассмотрим сектор $D_r=\{z\colon |z|\leqslant r,\ \ |\arg z|\leqslant\alpha(r)\}$. Функция $d^{\rho+1}(z)$ — аналитическая в этом секторе. Обозначим через L границу сектора D_r.

По теореме Коши

$$0=i\int\limits_L\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\rho+1}\frac{dz}{z}=i\int\limits_0^r\left[\left(\frac{t\,e^{-i\alpha}}{1-te^{-i\alpha}}\right)^{\rho+1}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{te^{i\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\right)^{\rho+1}\right]\frac{dt}{t}-\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\left(\frac{re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^{\rho+1}d\varphi,$$

откуда

$$\int\limits_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)}\left(\frac{re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^{\rho+1}d\varphi=i\int\limits_0^r\left[\left(\frac{te^{-i\alpha}}{1-te^{-i\alpha}}\right)^{\rho+1}-\left(\frac{te^{i\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\right)^{\rho+1}\right]\frac{dt}{t}, \tag{2.12}$$

$$\int\limits_0^r\left(\frac{te^{-i\alpha}}{1-te^{-i\alpha}}\right)^{\rho+1}\frac{dt}{t}=\int\limits_0^{re^{-i\alpha}}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\rho+1}\frac{du}{u}=\int\limits_0^{re^{-i\alpha}}\frac{u^\rho\,du}{(1-u)^{\rho+1}}=$$

$$=\int\limits_0^{re^{-i\alpha}}\frac{du}{(1-u)^{\rho+1}}-\int\limits_0^{re^{-i\alpha}}\frac{1-u^\rho}{(1-u)^{\rho+1}}\,du=\frac{1}{\rho\,(1-re^{-i\alpha})^\rho}-\frac{1}{\rho}+Q_1(r),$$

где

$$|Q_1(r)| \leqslant \begin{cases} 2\ln\dfrac{1}{1-r}, & \rho \leqslant 1 \\ \dfrac{2(\rho+1)}{\sin\dfrac{\pi}{4\rho}} \cdot \dfrac{1}{(1-r)^{\rho-1}}, & \rho > 1. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Аналогично

$$\int_0^r \left(\frac{te^{i\alpha}}{1-te^{i\alpha}}\right)^{\rho+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{(1-re^{i\alpha})^\rho} - \frac{1}{\rho} + Q_2(r),$$

где $Q_2(r)$ удовлетворяет соотношению (2.13).

Учитывая (2.4), (2.12) имеем: $(0 < r_0 \leqslant r < 1)$

$$\operatorname{Re} \int_{-\alpha(r)}^{\alpha(r)} \left(\frac{re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}\right)^{\rho+1} d\varphi = \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{\rho}\left[\frac{1}{(1-re^{-i\alpha})^\rho} - \frac{1}{(1-re^{i\alpha})^\rho}\right]\right\} +$$

$$+ Q(r) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{(1+r^2-2r\cos\alpha(r))^{\rho/2}} \times$$

$$\times \sin\left[\rho \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\alpha(r)}{1-r\cos\alpha(r)}\right] + Q(r), \qquad (2.14)$$

где $Q(r)$ удовлетворяет соотношению (2.13).

Из (2.4), (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) следует $(0 < r_0 < r < 1)$

$$I \leqslant \frac{C_8(1+2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \qquad (2.15)$$

$$I \geqslant \frac{C_8(1-2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \qquad (2.16)$$

где

$$C_8 = \frac{2}{\rho} \cos^\rho \frac{\pi}{2(\rho+1)} \sin \frac{\rho\pi}{2(\rho+1)}; \qquad (2.17)$$

$$\varepsilon(r) \to 0 \quad \text{при } r \to 1. \qquad (2.18)$$

§ 3. Доказательство основной теоремы

Пусть $\rho > 0$ — произвольное конечное число. Положим $\alpha_k = \dfrac{1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2.$$

Рассмотрим далее функции

$$d_k(z, \rho) = \delta_k^{\frac{1}{1+\rho}} d(ze^{-i2\pi a_k}),$$

$$e_k(z, \rho) = E_{\rho+1}(d_k(z, \rho)).$$

Асимптотические свойства $e_k(z, \rho)$ следуют из асимптотических свойств $e(z, \rho)$. В частности

$$\int\limits_{2\pi a_k - \alpha(r)}^{2\pi a_k + \alpha(r)} \ln^+ |e_k(re^{i\varphi}, \rho)|\, d\varphi \leqslant \frac{\delta_k C_8 (1 + 2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{2\pi a_k - \alpha(r)}^{2\pi a_k + \alpha(r)} \ln^+ |e_k(re^{i\varphi}, \rho)|\, d\varphi \geqslant \frac{\delta_k C_8 (1 - 2\varepsilon(r))}{(1-r)^\rho}, \tag{3.2}$$

где C_8, $\varepsilon(r)$ определяются (2.17), (2.18).

Рассмотрим далее две последовательности чисел: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность произвольных конечных комплексных чисел, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k |a_k| = S_2, \quad S = \max(S_1, S_2).$$

Определим

$$g_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(z, \rho), \tag{3.3}$$

$$g_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k e_k(z, \rho). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что функции (3.3), (3.4) — аналитические в круге $|z| < 1$,

$$g(z, \rho) = \frac{g_2(z, \rho)}{g_1(z, \rho)} \tag{3.5}$$

— мероморфная при $|z| < 1$ функция.

Лемма 1. *Для характеристики $T(r, g)$ справедлива следующая оценка*

$$T(r, g) \leqslant \frac{C_8 (1 + 3\varepsilon(r))}{\pi (1-r)^\rho} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 1$, C_8 определяется (2.17).

Доказательство.

$$T(r, g) \leqslant T(r, g_1) + T(r, g_2) + O(1), \tag{3.7}$$

$$T(r, g_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho) \right| d\varphi. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$\theta_1^k = \{z\colon |z| = r,\ |\arg z - 2\pi a_k| \leqslant \alpha(r)\},$$

$$\theta_2^k = \{z\colon |z| = r \setminus \theta_1^k\}.$$

Найдем номер N такой, что

$$\theta_1^k \cap \theta_1^j = \varnothing,\ k, j < N$$

из соотношения

$$2\pi a_N - 2\pi a_{N+1} \leqslant 2\alpha(r)$$

или

$$\frac{1}{2^N} \leqslant \frac{2}{\pi}\alpha(r). \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что мера длины дуги окружности радиуса r на которой множества θ_1^k пересекаются при различных k не превосходит $\left(\frac{2}{\pi}+2\right)\alpha(r)$ и в силу (2.4) имеет порядок $1-r$ при $0 < r_0 \leqslant r < 1$. При $i < N$ учитывая (2.1)—(2.3), (3.1), имеем

$$\int\limits_{2\pi a_l - \alpha(r)}^{2\pi a_l + \alpha(r)} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{2\pi a_l - \alpha(r)}^{2\pi a_l + \alpha(r)} \ln\left(C_9 \cdot S + (\rho+1)\, b_l \left|e^{d_l^{\rho+1}(re^{i\varphi}, \rho)}\right|\right) d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_l C_8 (1 + 2\varepsilon(r))}{(1-r)^{\rho}} + \ln(C_9 \cdot S + 1 + \rho) \cdot 2\alpha(r),$$

где $C_9 = \max(C_1, C_2)$.

Обозначим

$$\Omega_1 = \bigcup_{l=1}^{N-1} [2\pi a_l - \alpha(r),\ 2\pi a_l + \alpha(r)],$$

$$\Omega_2 = [0,\ 2\pi a_N + \alpha(r)] \cup [2\pi - \alpha(r),\ 2\pi],$$

$$\Omega_3 = 2\pi \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2).$$

Тогда учитывая (2.1)—(2.4), (2.6), (3.1), (3.8), имеем

$$T(r, g_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_1} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2} \ln^+ \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k (re^{i\varphi}, \rho)\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{N-1} \delta_l \frac{C_8 (1+2\varepsilon (r))}{(1-r)^\rho} + \frac{\delta_N C_{10} (1+\varepsilon (r))}{2\pi \ (1-r)^\rho} + C_{11}, \tag{3.10}$$

где $C_{10} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2(\rho+1)}$.

Аналогично получаем, что оценка (3.10) имеет место для характеристики $T(r, g_2)$. Из (3.9) следует, что $N\to\infty$ при $r\to 1$, т. е. $\delta_N\to 0$ при $r\to 1$. Поэтому соотношение (3.6) непосредственно следует из (3.7), (3.10).

Лемма 2. *Для неванлинновской функции приближения $m(r, a_n, g)$ справедлива следующая оценка:*

$$m(r; a_n, g) > \frac{1}{2\pi}\frac{\delta_n C_8 (1-2\varepsilon (r))}{(1-r)^\rho}, \tag{3.11}$$

где $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to 1$, C_8 определяется соотношением (2.17).

Доказательство.

$$|g(z) - a_n| = \frac{\left|\sum\limits_{k\neq n} b_k (a_k - a_n) e_k (z, \rho)\right|}{\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_k (z, \rho)\right|}$$

n — фиксировано.

Выберем r_0 настолько большим, чтобы $\theta_1^n \cap \theta_1^k = \varnothing$, $k\neq n$, $0 < r_0 \leqslant r < 1$.

Пусть $z\in\theta_1^n$. Учитывая (2.1),(2.3) имеем

$$\left|\sum_{k\neq n} b_k (a_k - a_n) e_k(z, \rho)\right| \leqslant 2S\cdot C_9,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k (z, \rho)\right| \geqslant b_n |e_n (z, \rho)| - 2SC_9,$$

$$\frac{1}{|g(z, \rho) - a_n|} \geqslant \frac{b_n |e_n (z, \rho)| - 2SC_9}{2SC_9}.$$

Из (3.2) следует, что

$$m(r, a_n, g) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi\alpha_n - \alpha(r)}^{2\pi\alpha_n + \alpha(r)} \ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\varphi}, \rho) - a_n|} d\varphi > \frac{\delta_n C_8 (1-2\varepsilon (r))}{2\pi (1-r)^\rho}.$$

Теорема 1 следует теперь из оценок (3.6), (3.11).

Действительно

$$\delta(a_n, g) = \varlimsup_{r \to 1} \frac{m(r, u_n, g)}{T(r, g)} > \frac{\delta_n}{2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k} > \frac{\delta_n}{4}.$$

Из (3.6), (3.11) вытекает также, что порядок функции $h(z, \rho)$ равен ρ

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогично можно доказать теорему для функций бесконечного порядка, если вместо функций Миттаг-Леффлера конечного порядка брать функции Миттаг-Леффлера бесконечного порядка (см. [2], стр. 125).

Роль луночки A_0 теперь будет играть область B_0, которая является пересечением двух областей:

$$B_0^1 = \left\{\operatorname{Re} z > 0 \cap |z| < 1 \cap \left|z - 1 - \frac{i}{2\pi}\right| > \frac{1}{2\pi} \cap \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\},$$

$$B_0^2 = \left\{\operatorname{Re} z > 0 \cap |z| < 1 \cap \left|z - 1 + \frac{i}{2\pi}\right| > \frac{1}{2\pi} \cap \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Замечание 2. Для доказательства теоремы при $\rho = 0$ достаточно рассмотреть функции ограниченного вида (см. [3], стр. 185).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за постановку задачи и руководство работой.

Харьковский государственный
университет
им. А. М. Горького

Поступила 20.III.1972

Վ. Ի. ԿՐՈՒՏԻՆ. $|z|<1$ շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների Նևանլիննայի դեֆեկտների մեծությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը. դիցուք $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ մոնոտոն նվազող դրական թվերի հաջորդականությունը այնպիսին է, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — վերջավոր կոմպլեքս թվերի կամայական հաջորդականություն է և $\rho > 0$ ցանկացած նախօրոք տված թիվ է։

Գոյություն ունի $|z|<1$ շրջանում ρ կարգի այնպիսի մերոմորֆ $g(z, \rho)$ ֆունկցիա, որ

$$\delta(a_n, g) \geqslant \frac{\delta_n}{4}, \; n = 1, 2, \cdots.$$

V. I. KRUTIN. *On Nevanlinna's deficiencies values for functions meromorphic in* $|z| < 1$ (summary)

In this paper the following theorem is proved.

Let $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an decreasing sequence of positive numbers, such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \leqslant 2$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an arbitrary sequence of finite complex numbers and $\rho > 0$ —an arbitrary number.

There exists a function $g(z, \rho)$ of order ρ meromorphic in $|z| < 1$, with

$$\delta(a_n, g) \geqslant \frac{\delta_n}{4}, \ n=1, 2, \cdots.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Петренко*. Исследование асимптотических свойств мероморфных функций, Диссертация, Харьков, 1970.
2. *У. Хейман*. Мероморфные функции, М., Изд. „Мир", 1966.
3. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
4. *А. А. Гольдберг*. *И. В. Островский*. Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.
5. *Н. У. Аракелян*. Целые и аналитические функции ограниченного роста с бесконечным множеством дефектных значений, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 6, 1970, 486—506.
6. *A. Weitsman*. A theorem on Nevanlinna deficiencies, Acta Math., 128, № 1, 1972.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

С. Г. САМКО

О ПРОСТРАНСТВЕ $I^\alpha(L_p)$ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

Введение

В работе изучается пространство $I^\alpha(L_p)$ функций, являющихся дробными интегралами (лиувиллевского типа) от функций из $L_p(-\infty, \infty)$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$, $0<\alpha<1$, и исследуются операторы типа потенциала, как операторы из L_p в $I^\alpha(L_p)$.

Дробное дифференцирование и интегрирование лиувиллевского типа в рамках пространств $L_p(-\infty, \infty)$ исследовано исчерпывающим образом. Отметим в первую очередь работы П. И. Лизоркина [1]—[3], из результатов которых, в частности, следует, что функции, представимые дробными интегралами от функций из L_p и сами принадлежащие L_p, совпадают с бесселевыми потенциалами: $I^\alpha(L_p)\cap L_p = L_p^{(\alpha)}$.

Мы будем рассматривать здесь класс $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов от p-суммируемых функций, не ограничивая его условием p-суммируемости самих дробных интегралов. Отказ от последнего условия заставляет, естественно, ограничить порядок суммируемости p до пределов $1<p<\frac{1}{\alpha}$, в которых операторы дробного интегрирования определены на всем пространстве $L_p(-\infty, \infty)$.

Один из основных результатов будет состоять (§ 2) в описании пространства $I^\alpha(L_p)$ в терминах дробной дифференцируемости (по Маршо), P-суммируемости, $P=\frac{p}{1-\alpha p}$, и интегрального модуля непрерывности $\omega_p(f, \delta)$. Получается также другой вариант описания, в котором P-суммируемость заменена p-суммируемостью с весом $(1+|x|)^{-\alpha p}$.

Даются (§ 3) достаточные условия, обеспечивающие принадлежность пространству $I^\alpha(L_p)$. Исследуется (§ 4) поведение некоторых классов операторов в пространстве $I^\alpha(L_p)$, надлежащим образом нормированном.

В §§ 5—6 рассматриваются операторы типа потенциала, действующие из L_p в $I^\alpha(L_p)$. В частности, в § 5 для потенциалов феллеровского [14] типа:

$$(M_\alpha\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1+c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt,\quad \varphi(x)\in L_p. \tag{1}$$

$$1<p<\frac{1}{\alpha},\qquad c_1,\ c_2=\text{const},$$

получено обращение, построенное по типу интеграла Маршо. Ранее в [11] обращение M_{α}^{-1} оператора M_{α} было найдено для $p=1$ в виде аналога лиувиллевского дифференцирования. (В [11] описан также образ $M_{\alpha}(L_1)$ оператора M_{α}).

В § 6 исследуется нетеровость операторов типа потенциала общего вида:

$$(M\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(x,t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

в предположении, что $c(x, t)$ терпит разрыв на диагонали $x=t$. Основной результат § 6 — теорема 7 — содержит необходимые и достаточные условия нетеровости оператора M из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$ и формулу для индекса.

Краткие сообщения о некоторых результатах статьи опубликованы без доказательств в заметках [5], [7]. Отметим также, что в работе [10] получено утверждение о нетеровости операторов (2) при более жестких предположениях, чем в § 6 настоящей статьи.

Автор выражает признательность Н. К. Карапетянцу за полезное обсуждение.

§ 1. Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов

Введем необходимые обозначения и определения. Норму в $L_p(-\infty, \infty)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_p$. Пусть $I_{\pm}^{\alpha}$ означают операторы лиувиллевского дробного интегрирования

$$(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad (I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},$$

$$\varphi(t)\in L_p(-\infty,\infty),\ 0<\alpha<1,\ 1\leqslant p<\frac{1}{\alpha},$$

а

$$(I_{+}^{-\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\quad (I_{-}^{-\alpha}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}$$

—операторы лиувиллевского дифференцирования. Дробные производные Маршо [17] определяются равенствами

$$(D_{+}^{\alpha}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{3}$$

$$(D_-^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

Всюду в дальнейшем интегралы в (3) понимаются в смысле сходимости по норме $L_p(-\infty, \infty)$

$$D_\pm^\alpha f = \lim_{\substack{(L_p)\\ \varepsilon \to 0}} D_{\pm, \varepsilon}^\alpha f, \tag{4}$$

где

$$(D_{\pm, \varepsilon}^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{f(x) - f(x \mp t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \tag{5}$$

Для достаточно хороших функций, например, для $f \in C_0^\infty$ лиувиллевские производные и производные Маршо совпадают

$$I_+^{-\alpha} f = D_+^\alpha f,\ I_-^\alpha f = D_-^\alpha f,\ f \in C_0^\infty$$

(см., например, [1], стр. 107).

Через $I_\pm^\alpha(L_p)$ будем обозначать пространство образов $I_\pm^\alpha(L_p) = \{f \,|\, f = I_\pm^\alpha \varphi,\ \varphi \in L_p\}$. Известно, что при $p = 1$ операторы $I_+^{-\alpha}$, $I_-^{-\alpha}$ определены в $I_+^\alpha(L_1)$, $I_-^\alpha(L_1)$ соответственно и $I_+^{-\alpha} I_+^\alpha \varphi \equiv \varphi$, $I_-^{-\alpha} I_-^\alpha \varphi \equiv \varphi$, $\varphi \in L_1$. При $p \neq 1$ лиувиллевские производные перестают работать в $I_\pm^\alpha(L_p)$. Покажем, что их заменяют производные (3). Элементарные преобразования дают для $f(x) = (I_+^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p$, $1 \leqslant p < \frac{1}{\alpha}$

$$f(x+h) - f(x) = h^\alpha \int\limits_0^\infty k(t)\, \varphi(x + h - ht)\, dt, \tag{6}$$

где $h > 0$ и $k(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} - \frac{1 + \operatorname{sign}(t-1)}{2} (t-1)^{\alpha-1} \right]$, причем непосредственная проверка показывает, что

$$\int\limits_0^\infty k(t)\, dt = 0. \tag{7}$$

Из (6) без труда получаем (ср. [9], теорема 2) представление

$$(D_{+,\delta}^\alpha f)(x) = \int\limits_0^\infty K(t)\, \varphi(x - \delta t), \tag{8}$$

где

$$K(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{t} \int\limits_0^t k(s)\, ds = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[t^{\alpha-1} - \frac{1 + \operatorname{sign}(t-1)}{2} \frac{(t-1)^\alpha}{t} \right]$$

— „усредняющее“ ядро

$$\int_0^{\infty} K(t)\,dt = 1, \quad K(t) > 0. \tag{9}$$

Из (8), (9) вытекает, что

$$\|D^{\alpha}_{+,\delta} f - \varphi\|_p \leqslant \int_0^{\infty} K(t)\,\omega_p(\varphi, \delta t)\,dt, \tag{10}$$

где $\omega_p(\varphi, \delta t)$—интегральный модуль непрерывности в L_p

$$\omega_p(\varphi, h) = \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_p. \tag{11}$$

Оценка, аналогичная (10), имеет место и для $D^{\alpha}_{-,\delta} f$. Следовательно, пределы (4) существуют для всех $f \in I^{\alpha}_{\pm}(L_p)$ и в силу (10)

$$D^{\alpha}_{+} I^{\alpha}_{+} \varphi \equiv \varphi, \; D^{\alpha}_{-} I^{\alpha}_{-} \varphi \equiv \varphi, \; \varphi \in L_p, \; 1 \leqslant p < \frac{1}{\alpha}. \tag{12}$$

Если $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, то пространства $I^{\alpha}_{+}(L_p)$, $I^{\alpha}_{-}(L_p)$ совпадают, что очевидным образом вытекает из тождеств

$$I^{\alpha}_{\pm} \varphi \equiv \cos \alpha\pi \, I^{\alpha}_{\mp} \varphi \mp \sin \alpha\pi \, S I^{\alpha}_{\mp} \varphi, \tag{13}$$

$\varphi \in L_p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, связывающих операторы $I^{\alpha}_{\pm}$ друг с другом посредством сингулярного оператора

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t - x}\,dt \tag{14}$$

(см. [4], [8], [12]).

Мы положим

$$I^{\alpha}(L_p) \stackrel{\text{def}}{=\!=} I^{\alpha}_{+}(L_p) = I^{\alpha}_{-}(L_p), \; 1 < p < \frac{1}{\alpha}. \tag{15}$$

Как уже отмечалось во введении

$$I^{\alpha}(L_p) \cap L_p = L_p^{(\alpha)},$$

где $L_p^{(\alpha)}$ — пространство бесселевых потенциалов

$$I_p^{(\alpha)} = \{f \mid f \in L_p, \; D^{\alpha}_{+} f \in L_p\}$$

(см. [1], стр. 126, 128, а также [3], стр. 90).

Введем еще обозначения

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^{-\alpha p} |f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \; L_{p,\alpha} = \{f \mid \|f\|_{p,\alpha} < \infty\}. \tag{16}$$

Операторы $I_{\pm}^{\alpha}$ действуют, как известно, ограниченно из L_p в $L_{p,\alpha}$ и из L_p в L_P, $P=p(1-\alpha p)^{-1}$ (см. [16]):

$$\|I_{\pm}^{\alpha}\varphi\|_{p,\alpha}\leqslant c\,\|\varphi\|_p,\quad \|I_{\pm}^{\alpha}\varphi\|_P\leqslant c\,\|\varphi\|_p. \tag{17}$$

§ 2. Описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$

Основной результат этого параграфа содержит следующая

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\dfrac{1}{\alpha}$, $0<\alpha<1$. *Следующие утверждения равносильны*:

I. $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$,

II. $f(x)\in L_P$, $P=\dfrac{p}{1-\alpha p}$; $D_{+}^{\alpha}f\in L_p$; $\lim\limits_{\delta\to 0}\delta^{-\alpha}\omega_p(f,\delta)=0$,

III. $f(x)\in L_{p,\alpha}$; $D_{+}^{\alpha}f\in L_p$; $\lim\limits_{\delta\to 0}\delta^{-\alpha}\omega_p(f,\delta)=0$,

где $\omega_p(f,\delta)$ — *интегральный модуль непрерывности* (11)*.

Заметим, что условие $f(x)\in L_{p,\alpha}$ в III в некотором смысле предпочтительнее условия $f(x)\in L_P$ в II: оно представляется более слабым

$$L_P\cap L_{p,\alpha+\varepsilon}\left(\|f\|_{p,\alpha+\varepsilon}<\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)^{\alpha}\|f\|_P\right),\quad \varepsilon>0, \tag{18}$$

хотя $L_P\subset L_{p,\alpha}$ (что подтверждается примером функции $f(x)=|x|^{-1/P}\times$ $\times\ln^{-1/p}|x|$ при $|x|>2$ и $f(x)=0$ при $|x|<2$. И если равносильность утверждений I и II будет получена относительно простыми рассуждениями, то вывод I из III потребует более тонких средств (применение теорем о p-мультипликаторах).

Заметим еще, что в утверждении III можно заменить условие суммируемости с весом $(1+|x|)^{-\alpha p}$ условием суммируемости с весом $|x|^{-\alpha p}$. Очевидно, при описании пространства $I^{\alpha}(L_p)$ в необходимой части предпочтителен вес $|x|^{-\alpha p}$, а в достаточной — $(1+|x|)^{-\alpha p}$.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *При* $y<a<b$ *справедливо равенство***

---

* Утверждение теоремы остается в силе, если заменить $D_{+}^{\alpha}f$ на $D_{-}^{\alpha}f$ или на оператор

$$K_{\alpha}^{-1}f=\int_{0}^{\infty}\frac{2f(x)-f(x-t)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,$$

обратный (с точностью до постоянного множителя) к риссовскому потенциалу (ср. с теоремой 1′ из [3]). Можно даже заменить $D_{+}^{\alpha}f$ оператором $M_{\alpha}^{-1}f$, обратным к потенциалу феллеровского типа (1). Подчеркнем еще, что сходимость интегралов $D_{\pm}^{\alpha}f$, $K_{\alpha}^{-1}f$, $M_{\alpha}^{-1}f$ понимается всегда в смысле (4).

** Лемма представляет собой уточнение леммы 6 из работы [1], стр. 129.

$$J(a, b; y) \overset{\text{def}}{=} \alpha \int_a \frac{dt}{(b-t)^{1-\alpha}(t-y)^{1+\alpha}} = \frac{1}{b-y}\left(\frac{b-a}{a-y}\right), \quad 0<\alpha<1. \tag{19}$$

Доказательство формулы (19) получается с помощью замены $t = y + \frac{b-y}{t_1}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть имеет место утверждение 1. Условия $\|f\|_p < \infty$ и $\|f\|_{p,\alpha} < \infty$ тогда выполняются в силу (17). Условие $\|D_+^\alpha f\|_p < \infty$ вытекает из (4), (10). Чтобы оценить $\omega_p(f, \delta)$ запишем представление (6) с учетом (7):

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta^\alpha \int_0^\infty k(t)\,[\varphi(x+\delta-\delta t) - \varphi(x)]\,dt.$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\omega_p(f, \delta) \leqslant \delta^\alpha \int_0^\infty |k(t)|\,\omega_p(\varphi, \delta-\delta t)\,dt. \tag{20}$$

Так как $\omega_p(\varphi, \delta-\delta t) \leqslant 2\|\varphi\|_p$, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе, получаем

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-\alpha}\,\omega_p(f, \delta) = 0.$$

Таким образом, II и III следуют из I. В случаях II и III мы можем ввести функции

$$\varphi(x) = (D_+^\alpha f)(x) \text{ и } \varphi_\delta(x) = (D_{+,\delta}^\alpha f)(x) \in L_p,$$

так что $\lim\limits_{\delta\to 0}\|\varphi - \varphi_\delta\|_p = 0$. Покажем, что

$$f(x) = (I_+^\alpha \varphi)(x) \tag{21}$$

при выполнении условий II или III. Введем в рассмотрение интеграл

$$(I_N^\alpha \varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-N}^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{22}$$

Требуемое равенство (21) будет доказано, если

$$\lim_{N\to\infty} (I_N^\alpha \varphi)(x) = f(x) \tag{23}$$

почти для всех x*. Предельный переход (23) будет осуществлен с помощью следующей леммы.

Лемма 2. *Если $f(x)$ удовлетворяет утверждению* II *или* III *теоремы* 1, *то для интеграла $I_N^\alpha \varphi$ с плотностью $\varphi = D_+^\alpha f$ справедливо представление*

* Ниже мы увидим (теорема 2), что предел (23) существует также и в смысле сходимости в L_p.

$$(I_N^{\alpha}\varphi)(x) = f(x) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x-N}\left(\frac{N}{x-N-t}\right)^{\alpha}\frac{f(t)}{x-t}\,dt. \tag{24}$$

Доказательство. Преобразуем вначале $I_N^{\alpha}\varphi_\delta$. Имеем

$$(I_N^{\alpha}\varphi_\delta)(x) = \frac{\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{x-N}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\left[\frac{f(t)}{\alpha\delta^{\alpha}} - \int\limits_{-\infty}^{t}\frac{f(\tau-\delta)\,d\tau}{(t-\tau+\delta)^{1+\delta}}\right].$$

После перестановки порядка интегрирования, допустимой при условиях леммы, получим

$$(I_N^{\alpha}\varphi_\delta)(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\delta^{\alpha}}\int\limits_{0}^{N}\frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}}\,dt - \alpha\int\limits_{-\infty}^{x-N-\delta}f(\tau)\,d\tau\int\limits_{x-N}^{x}\frac{(x-t)^{\alpha-1}\,dt}{(t-\tau)^{\alpha+1}} -\right.$$

$$\left. - \alpha\int\limits_{x-N-\delta}^{x-\delta}f(\tau)\,d\tau\int\limits_{\tau+\delta}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1+\alpha}}\right\}. \tag{25}$$

Внутренние интегралы

$$J_1(x,\tau,N) = \alpha\int\limits_{x-N}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{-\alpha-1}\,dt,\quad J_2(x,\tau,\delta) =$$

$$= \alpha\int\limits_{\tau+\delta}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{-1-\alpha}\,dt$$

преобразуются на основании леммы 1

$$J_1(x,\tau,N) = J(x-N,\ x;\ \tau) = \frac{1}{x-\tau}\left(\frac{N}{x-N-\tau}\right)^{\alpha},$$

$$J_2(x,\tau,\delta) = J(\tau+\delta,\ x;\ \tau) = \frac{1}{x-\tau}\left(\frac{x-\tau-\delta}{\delta}\right)^{\alpha}.$$

Подставляя в (25), после элементарных преобразований получим

$$(I_N^{\alpha}\varphi_\delta)(x) = f(x) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x-N}\left(\frac{N}{x-N-t}\right)^{\alpha}\frac{f(t)}{x-t}\,dt + M(\delta),$$

где $M(\delta) = \sum\limits_{j=1}^{4} M_j(\delta)$ и

$$M_1(\delta) = \delta^{-\alpha}\int\limits_{0}^{N}\frac{f(x-\tau)-f(x-\tau-\delta)}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau,\quad M_2(\delta) =$$

$$= \delta^{1-\alpha}\int\limits_{0}^{N}\frac{f(x-\tau-\delta)-f(x)}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)}\,d\tau,$$

$$M_3(\delta) = -\delta^{1-\alpha} f(x) \int\limits_N^\infty \frac{d\tau}{(\tau+\delta)\,\tau^{1-\alpha}},\quad M_4(\delta) = \int\limits_{x-N-\delta}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-\tau}\right)^\alpha \frac{f(\tau)\,d\tau}{x-\tau}.$$

Устремим φ_δ к φ в L_p. Так как оператор I_N^α ограниченно действует из L_p в $L_{p,\alpha}$ (и тем более в $L_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$), то для получения (24) достаточно показать, что $\lim\limits_{\delta\to 0} M(\delta)=0$ в метрике $L_{p,\alpha}$ или $L_{p,\alpha+\varepsilon}$. Покажем, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \|M(\delta)\|_{p,\alpha}=0$ при $f(x)\in L_{p,\alpha}$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} \|M(\delta)\|_{p,\alpha+\varepsilon}=0$, $\varepsilon>0$ при $f(x)\in L_p$. Для $f(x)\in L_{p,\alpha}$ имеем

$$\|M_1\|_{p,\alpha} \leqslant \frac{1}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\left\{\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{|f(x-\tau)-f(x-\tau-\delta)|^p}{(1+|x|)^{\alpha p}}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_p(f,\delta)}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} \to 0,$$

$$\|M_2\|_{p,\alpha} \leqslant \delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N \frac{\omega_p(f,\tau+\delta)}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)}\,d\tau \leqslant c\delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)^{1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant c\delta^{\min(\alpha,1-\alpha)}\ln\frac{1}{\delta} \to 0,$$

$$\|M_3\|_{p,\alpha} \leqslant \delta^{1-\alpha}\|f\|_{p,\alpha}\cdot\int\limits_N^\infty \frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}} \to 0,$$

$$\|M_4\|_{p,\alpha} \leqslant \int\limits_0^\delta \frac{N^\alpha\,d\tau}{\tau^\alpha(\tau+N)}\left\{\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{|f(x-N-\tau)|^p\,dx}{(1+|x|)^{\alpha p}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{p,\alpha} N^\alpha \int\limits_0^\delta \frac{(1+2|\tau+N|)^\alpha}{\tau^\alpha(\tau+N)}\,d\tau \to 0,$$

в последнем неравенстве мы воспользовались легко получаемой оценкой

$$\|\tau_h f\|_{p,\alpha} \leqslant (1+2|h|)^\alpha \|f\|_{p,\alpha}, \tag{26}$$

где $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ — операция сдвига.

В случае $f(x)\in L_p$ оценки для $\|M_1\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_2\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ не меняются, а для $\|M_3\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_4\|_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ получаются в силу вложения (18). Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, видим на основании леммы 2, что (23) будет иметь место, если функция

$$(K_N f)(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t}\right)^\alpha \frac{f(t)\,dt}{x-t} \tag{27}$$

стремится $p \cdot p$ к 0 при $N \to \infty$ как для $f(x) \in L_p$, так и для $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Если $f(x) \in L_p$, то

$$|(K_N f)(x)| \leqslant \left\{ \int_0^\infty |f(x-t-N)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{N}{t}\right)^{\alpha p'} \frac{dt}{(N+t)^{p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_p}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\alpha p'} (1+t)^{p'}} \right\}^{1/p'} \to 0, \quad \alpha p' = \frac{\alpha p'}{1+\alpha p'} < 1 \tag{28}$$

и равносильность утверждений II и I получена.

Пусть $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Если $\alpha p' < 1$, то оценка проста и аналогична (28):

$$(K_N f)(x) \leqslant \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{(1+|x-tN-N|)^{\alpha p'}}{t^{\alpha p'} (1+t)^{p'}} \, dt \right\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p-\alpha}}, \quad c = c(x).$$

В общем случае (когда не обязательно $\alpha p' < 1$) понадобятся дополнительные соображения. Мы имеем из леммы 2: $(I - K_N) f = f_N$, причем $f_N \in L_p \cap L_p$, так как $\|f_N\|_p \leqslant \frac{N^\alpha}{\alpha} \|\varphi\|_p$, $\|f_N\|_p \leqslant \|I_+^\alpha (|\varphi|)\|_p$ $(f_N = I_N^\alpha \varphi)$. Справедлива следующая

Лемма 3. *Если $f \in L_{p,\alpha}$ и $(I - K_N) f \in L_p \cap L_p$, то $f \in L_p$.*

Доказательство. Пусть, как обычно

$$(F\varphi)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) \, dx,$$

и пусть вначале $f(x)$ — достаточно хорошая функция, например, $f(x) \in C_0^\infty$. Замечая, что K_N — оператор свертки

$$K_N f = k_N * f, \quad k_N(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \begin{cases} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{N}{x-N}\right)^\alpha, & x > N, \\ 0, & x < N, \end{cases}$$

$k_N(x) \in L_r$, $1 \leqslant r < \frac{1}{\alpha}$, получаем

$$[F(f - K_N f)](\lambda) = \sigma(\lambda N) \hat{f}(\lambda), \tag{29}$$

где

$$\sigma(\lambda) = 1 - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{1 - e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt =$$

$$M_3(\delta)=-\delta^{1-\alpha}f(x)\int\limits_N^\infty\frac{d\tau}{(\tau+\delta)\,\tau^{1-\alpha}},\quad M_4(\delta)=\int\limits_{x-N-\delta}^{x-N}\left(\frac{N}{x-N-\tau}\right)^\alpha\frac{f(\tau)\,d\tau}{x-\tau}.$$

Устремим φ_δ к φ в L_p. Так как оператор I_N^α ограниченно действует из L_p в $L_{p,\alpha}$ (и тем более в $L_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$), то для получения (24) достаточно показать, что $\lim\limits_{\delta\to0}M(\delta)=0$ в метрике $L_{p,\alpha}$ или $L_{p,\alpha+\varepsilon}$. Покажем, что $\lim\limits_{\delta\to0}\|M(\delta)\|_{p,\alpha}=0$ при $f(x)\in L_{p,\alpha}$ и $\lim\limits_{\delta\to0}\|M(\delta)\|_{p,\alpha+\varepsilon}=0$, $\varepsilon>0$ при $f(x)\in L_p$. Для $f(x)\in L_{p,\alpha}$ имеем

$$\|M_1\|_{p,\alpha}\leqslant\frac{1}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(x-\tau)-f(x-\tau-\delta)|^p}{(1+|x|)^{\alpha p}}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\omega_p(f,\delta)}{\delta^\alpha}\int\limits_0^N\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\to0,$$

$$\|M_2\|_{p,\alpha}\leqslant\delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N\frac{\omega_p(f,\tau+\delta)}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)}\,d\tau\leqslant c\delta^{1-\alpha}\int\limits_0^N\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}(\tau+\delta)^{1-\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant c\delta^{\min(\alpha,1-\alpha)}\ln\frac{1}{\delta}\to0,$$

$$\|M_3\|_{p,\alpha}\leqslant\delta^{1-\alpha}\|f\|_{p,\alpha}\cdot\int\limits_N^\infty\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}\to0,$$

$$\|M_4\|_{p,\alpha}\leqslant\int\limits_0^\delta\frac{N^\alpha\,d\tau}{\tau^\alpha(\tau+N)}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(x-N-\tau)|^p\,dx}{(1+|x|)^{\alpha p}}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{p,\alpha}N^\alpha\int\limits_0^\delta\frac{(1+2|\tau+N|)^\alpha}{\tau^\alpha(\tau+N)}\,d\tau\to0,$$

в последнем неравенстве мы воспользовались легко получаемой оценкой

$$\|\tau_h f\|_{p,\alpha}\leqslant(1+2|h|)^\alpha\|f\|_{p,\alpha},\tag{26}$$

где $(\tau_h f)(x)=f(x-h)$ — операция сдвига.

В случае $f(x)\in L_p$ оценки для $\|M_1\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_2\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ не меняются, а для $\|M_3\|_{p,\alpha+\varepsilon}$ и $\|M_4\|_{p,\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ получаются в силу вложения (18). Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1, видим на основании леммы 2, что (23) будет иметь место, если функция

$$(K_N f)(x)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{x-N}\left(\frac{N}{x-N-t}\right)^\alpha\frac{f(t)\,dt}{x-t}\tag{27}$$

стремится $p \cdot p$ к 0 при $N \to \infty$ как для $f(x) \in L_p$, так и для $f(x) \in \in L_{p,\alpha}$. Если $f(x) \in L_p$, то

$$|(K_N f)(x)| \leqslant \left\{ \int_0^\infty |f(x-t-N)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{N}{t}\right)^{\alpha p'} \frac{dt}{(N+t)^{p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_p}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\alpha p'} (1+t)^{p'}} \right\}^{1/p'} \to 0, \ \alpha P' = \frac{\alpha p'}{1+\alpha p'} < 1 \tag{28}$$

и равносильность утверждений II и I получена.

Пусть $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Если $\alpha p' < 1$, то оценка проста и аналогична (28):

$$(K_N f)(x) \leqslant \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{(1+|x-tN-N|)^{\alpha p'}}{t^{\alpha p'} (1+t)^{p'}} \, dt \right\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{N^{1/p-\alpha}}, \ c = c(x).$$

В общем случае (когда не обязательно $\alpha p' < 1$) понадобятся дополнительные соображения. Мы имеем из леммы 2: $(I - K_N) f = f_N$, причем $f_N \in L_p \cap L_P$, так как $\|f_N\|_p \leqslant \frac{N^\alpha}{\alpha} \|\varphi\|_p$, $\|f_N\|_P \leqslant \|I_+^\alpha (|\varphi|)\|_P$ $(f_N = I_N^\alpha \varphi)$. Справедлива следующая

Лемма 3. *Если $f \in L_{p,\alpha}$ и $(I - K_N) f \in L_p \cap L_P$, то $f \in L_P$.*

Доказательство. Пусть, как обычно

$$(F\varphi)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) \, dx,$$

и пусть вначале $f(x)$ — достаточно хорошая функция, например, $f(x) \in C_0^\infty$. Замечая, что K_N — оператор свертки

$$K_N f = k_N * f, \quad k_N(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\frac{N}{x-N}\right)^\alpha, & x > N, \\ 0, & x < N, \end{cases}$$

$k_N(x) \in L_r$, $1 \leqslant r < \frac{1}{\alpha}$, получаем

$$[F(f - K_N f)](\lambda) = \sigma(\lambda N) \hat{f}(\lambda), \tag{29}$$

где

$$\sigma(\lambda) = 1 - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{1 - e^{i\lambda t}}{t(t-1)^\alpha} \, dt =$$

$$= \frac{\operatorname{sign}\lambda}{\Gamma(\alpha)\, e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}} \int\limits_0^{\lambda} \frac{e^{it}\,dt}{|t|^{1-\alpha}}.$$

Функция $\sigma(\lambda)$ принадлежит винеровскому кольцу R [24], но $\sigma^{-1}(\lambda)\overline{\in} R$, поскольку $\sigma(0)=0$. Однако, $\lambda=0$ — единственный нуль функции $\sigma(\lambda)$:

$$\operatorname{Re}\sigma(\lambda) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\cos\lambda t}{t(t-1)^{\alpha}}\,dt > 0$$

при $\lambda \neq 0$, причем

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\sigma(\lambda)}{|\lambda|^{\alpha}} = \frac{e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \neq 0. \tag{30}$$

Положим на основании (30)

$$a(\lambda) = \frac{|\lambda|^{\alpha}}{1+|\lambda|^{\alpha}}\,\frac{1}{\sigma(\lambda)}. \tag{31}$$

Покажем, что $a(\lambda)$ является p-мультипликатором [21], $1<p<\infty$. Представим $a(\lambda)$ в виде $a_1(\lambda)+a_2(\lambda)$, где

$$a_1(\lambda)=\theta(1-\lambda^2)\,a(\lambda),\quad a_2(\lambda)=\theta(\lambda^2-1)\,a(\lambda),\quad \theta(\lambda)=\frac{1+\operatorname{sign}\lambda}{2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$|a_1(\lambda)|\leqslant M,\quad |\lambda a_1'(\lambda)|<M, \tag{32}$$

так что $a_1(\lambda)$ — p-мультипликатор в силу теоремы С. Г. Михлина [20] (см. также [21], теорема 2.5). Изменим функцию $\sigma(\lambda)$ на отрезке $[-1, 1]$: $\tilde{\sigma}(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda), & |\lambda|\geqslant 1,\\ \sigma(\lambda)+\omega(\lambda), & |\lambda|<1\end{cases}$ выбрав бесконечно дифференцируемую функцию $\omega(\lambda)$ с носителем $[-1, 1]$ так, чтобы $\tilde{\sigma}(\lambda)\neq 0$, $-\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty$ и $\tilde{\sigma}(\lambda)\in R$. Тогда $a_2(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\theta(\lambda^2-1)\dfrac{|\lambda|^{\alpha}}{1+|\lambda|^{\alpha}}\dfrac{1}{\tilde{\sigma}(\lambda)}$ — также p-мультипликатор, поскольку $\dfrac{1}{\tilde{\sigma}(\lambda)}\in R$, а для функции $a_3(\lambda) = \theta(\lambda^2-1)\dfrac{|\lambda|^{\alpha}}{1+|\lambda|^{\alpha}}$ выполняется условие (32) (ср. с теоремой 3 из [23], стр. 9). В силу доказанного оператор

$$A_N f = F^{-1} a(\lambda N)\, Ff$$

ограничен в L_p-пространствах, $1<p<\infty$. Полагая теперь $(I-K_N)f = f_N$, для $f_N\in C_0^{\infty}$ имеем на основании (28) — (31)

$$f=(I-K_N)^{-1}f_N = A_N f_N + F^{-1}\frac{1}{|\lambda|^{\alpha}}F A_N f_N = A_N f_N + K_{\alpha} A_N f_N, \tag{33}$$

где $K_\alpha f$ — риссовский потенциал. Так как пространство C_0^∞ входит в образ $(I-K_N)(L_{p,\alpha})$, то для любой функции $f_N \in C_0^\infty$ функция f определяется равенством (53). Оператор $A_N + K_\alpha A_N$ ограниченно действует из пространства $E = L_p \cap L_P$ с нормой $\|f\|_E = \|f\|_p + \|f\|_P$ в пространство L_P

$$\|(I+K_\alpha) A_N f\|_P \leqslant \|A_N f\|_P + \|K_\alpha (A_N f)\|_P \leqslant c_1 \|f\|_P + c_2 \|A_N f\|_p \leqslant c_3 \|f\|_E.$$

Следовательно, обращение (33) справедливо при условиях леммы 3, тогда $f \in L_P$ и лемма 3 доказана.

Если же $f \in L_P$, то $K_N f \to 0$ в силу оценки (28). Теорема 1 доказана полностью.

Полученное в лемме 2 представление (24) позволяет нам говорить о сходимости дробных интегралов не только в смысле сходимости $p \cdot p \cdot$, но и по норме L_P. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in L_p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, *и* $I_N^\alpha \varphi$ — *интеграл* (22). *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \|I_+^\alpha \varphi - I_N^\alpha \varphi\|_P = 0, \quad P = \frac{p}{1-\alpha p}\cdot$$

Доказательство. Обозначим $(I_+^\alpha \varphi)(x) = f(x)$. Функция $f(x)$ удовлетворяет утверждению II теоремы 1 и тогда в силу леммы 2 имеет место равенство

$$I_+^\alpha \varphi - I_N^\alpha \varphi = K_N f,$$

где K_N — оператор (27). Покажем, что последовательность операторов K_N сильно сходится к 0 в $L_r(-\infty, \infty)$ при любом r, $1 < r < \infty$ (и тогда, в частности, при $r = P$). Нормы $\|K_N\|_{L_r \to L_r}$ ограничены

$$\|K_N f\|_r \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} k_N(x)\, dx \cdot \|f\|_r = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1+x)} \|f\|_r = \|f\|_r,$$

так что достаточно проверить, что $\|K_N f\|_r \to 0$ на плотном в L_r множестве, например, для финитной бесконечно дифференцируемой функции $\omega(x)$ с носителем в $(-a, a)$, $0 < a < \infty$. Имеем

$$\|K_N \omega\|_r \leqslant \left\{ \int_{N-a}^{N+a} dx \left| \int_{-a}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t} \right)^\alpha \frac{\omega(t)}{x-t}\, dt \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}} +$$

$$+ \left\{ \int_{N+a}^{\infty} dx \left| \int_{-a}^{a} \left(\frac{N}{x-N-t} \right)^\alpha \frac{\omega(t)}{x-t}\, dt \right|^r \right\}^{\frac{1}{r}} = A_1(N) + A_2(N).$$

Очевидно

$$A_1(N) \leqslant \int_0^{2a} \left(\frac{N}{t} \right)^\alpha \frac{dt}{t+N} \left\{ \int_t^{2a} |\omega(x-a-t)|^r\, dx \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\|\omega\|_r}{N^{1-\alpha}} \int_0^{2a} \frac{dt}{t^\alpha} \to 0,$$

а для $A_2(N)$ имеем

$$A_2(N) \leqslant \frac{1}{N^{\frac{1}{r'}}} \int_{-a}^{a} |\omega(t)|\, dt \left\{ \int_{\frac{a-t}{N}}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha r}(1+x)^r} \right\}^{\frac{1}{r}}, \quad r' = \frac{r}{r-1}.$$

Далее оценка ясна в случае $\alpha r < 1$. Если же $\alpha r > 1$, то

$$\int_{\frac{a-t}{N}}^{\infty} \cdots \leqslant c_1 \left(\frac{N}{a-t}\right)^{\alpha r - 1} + c_2$$

и оценка следует. Случай $\alpha r = 1$ аналогичен:

$$\int_{\frac{a-t}{N}}^{\infty} \cdots \leqslant c_1 \left| \ln \frac{N}{a-t} \right| + c_2.$$

Следовательно

$$\lim_{N\to\infty} \|K_N \omega\|_r \leqslant \lim_{N\to\infty} A_1(N) + \lim_{N\to\infty} A_2(N) = 0$$

и теорема 2 доказана.

В заключение этого параграфа отметим случай $p=1$. Для того чтобы $f(x) \in I^{\alpha}_{\pm}(L_1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(I^{1-\alpha}_{\pm} f)(x) \in AC(-\infty, \infty) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\mp\infty} (I^{1-\alpha}_{\pm} f)(x) = 0$$

соответственно. Это утверждение представляет собой перенос на всю ось теоремы Я. Д. Тамаркина [18] (см. также [19], стр. 574), относящейся к случаю конечного отрезка. Аналогичное описание допускает и область значений $M_\alpha(L_1)$ феллеровского потенциала (1) (см. [11]). Отметим еще, что некоторое описание функций, представимых дробными интегралами от локально суммируемых функций по существу содержится в работе [13] L. S. Bosanquet.

§ 3. Достаточные условия

Укажем в этом параграфе некоторые условия, достаточные для принадлежности функции $f(x)$ пространству $I^{\alpha}(L_p)$. Непосредственно из теоремы 1 получаем: *если*

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\omega_p(f,t)}{t^{1+\alpha}}\, dt < \infty; \quad 2) \ \frac{\omega_{\bar r}(f,t)}{t^{\alpha}} = o(1) \quad \text{при} \quad t\to 0;$$

$$3) \ \|f\|_p < \infty \quad (\text{*или*} \ \|f\|_{p,\alpha} < \infty),$$

то

$$f(x) \in I^{\alpha}(L_p).$$

Отметим в связи с этим утверждением одну оценку для интегрального модуля непрерывности функции $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$ через модуль непрерывности ее дробной производной $\varphi(x) = (D^{\alpha}_{+} f)(x)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega_p(f, t)}{t^{1+\alpha}} dt \leqslant \frac{2}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\omega_p(\varphi, t)}{t} dt, \tag{34}$$

вытекающую из (20).

Простое достаточное условие содержит следующая

Лемма 4. *Пусть $f(x)$ принадлежит пространству $H^{\lambda}(-\infty, \infty)$ гельдеровских на сомкнутой оси функций порядка λ. Если $f(\infty)=0$ и $\lambda > \max\left(\alpha, \frac{1}{p}\right)$, то $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$.*

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой условий $f \in L_p$, $\omega_p(f, \delta) = o(\delta^{\alpha})$, $D_{+}^{\alpha} f \in L_p$ теоремы 1. При этом стоит применять „глобальную" оценку гельдеровости на оси:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{A|x_1 - x_2|^{\lambda}}{(1+|x_1|)^{\lambda}(1+|x_2|)^{\lambda}}, \quad A \leqslant \|f\|_{H^{\lambda}}, \tag{35}$$

и при проверке условия $D_{+}^{\alpha} f \in L_p$ воспользоваться оценкой интегралов вида

$$J_{a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{-a}(1+|x-z|)^{-b} dx:$$

$$J_{a,b}(z) \leqslant \frac{c}{(1+|z|)^{\nu}}, \quad \nu < \min(a, b, a+b-1), \tag{36}$$

при $a>0$, $b>0$, $a+b>1$ и $c=c(\nu)$.

Несколько больший интерес представляет следующая

Лемма 5. *Если $f(x) \in H^{\lambda}(-\infty, \infty)$, $\lambda > \alpha$, то*

$$\frac{f(x)-f(0)}{|x|^{\gamma}} \in I^{\alpha}(L_p),$$

при $\frac{1}{p} < \gamma < \frac{1}{p}$.

Доказательство. Обозначим $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{|x|^{\gamma}}$. Выполнимость условия $g(x) \in L_p$ очевидна. Для проверки условия $D_{+}^{\alpha} g \in L_p$ составляем согласно (4) срезку $\varphi_\delta(x) = (D_{+,\delta}^{\alpha} g)(x)$, и оценим вначале $\varphi_\delta(x)$ для конечных значений x ($|x| < N$). Имеем

$$|\varphi_\delta(x)| \leqslant c_1 |g(x)| + \|g\|_p \left\{ \int_{\delta}^{\infty} t^{-(1+\alpha)p'} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{c_2}{|x|^{\gamma-\lambda}} + c_3, \tag{37}$$

$c_{2,3} = c_{2,3}(\delta)$, так что $\varphi_\delta(x) \in L_p(-N, N)$. Для $|x| > N$

$$|\varphi_\delta(x)| \leqslant \frac{1}{|x|^{\gamma}} \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(x) - f(x-t)|}{t^{1+\alpha}} dt + \int_{\delta}^{\infty} \left| \frac{1}{|x|^{\gamma}} - \frac{1}{|x-t|^{\gamma}} \right| \times$$

$$\times \frac{|f(x-t)-f(0)|\,dt}{t^{1+\alpha}} = A_1(x) + A_2(x).$$

Оценка для $A_1(x)$ получается за счет гельдеровости функции $f(x)$:

$$A_1(x) \leqslant \frac{c}{(1+|x|)^{\gamma+\lambda}} \int_{\delta}^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1}\,dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}} \leqslant \frac{c(\delta)}{(1+|x|)^{\gamma+\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{(1+t)^{\lambda-\alpha-1}\,dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\delta)}{(1+|x|)^{\gamma+\alpha+\lambda}}$$

(последний переход получен с помощью оценки (36)). Для $A_2(x)$ имеем

$$A_2(x) \leqslant \frac{c}{|x|^{\gamma+\alpha}} \int_{\frac{\delta}{|x|}}^{\infty} \left|1-|\operatorname{sign} x - t|^{-\gamma}\right| \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \leqslant \frac{c}{|x|^{\gamma+\alpha}}$$

и тогда $|\varphi_\delta(x)| \leqslant c(\delta)(1+|x|)^{-\gamma-\alpha}$, $|x|>N$, так что $\varphi_\delta(x) \in L_p$. Покажем, что φ_δ — фундаментальная в L_p последовательность. В самом деле

$$\|\varphi_{\delta_1} - \varphi_{\delta_2}\|_p \leqslant \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dt}{t^{\gamma+\alpha}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f(xt)-f(0)}{|x|^{\gamma}} - \frac{f(xt-t)-f(0)}{|x-1|^{\gamma}} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \right|.$$

Очевидно, достаточно показать, что $J(t) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\cdot|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} < ct^{\varepsilon}$ при $\varepsilon > \gamma+\alpha-1$. Имеем: $J(t) \leqslant \left\{ \int_{|x|<2} \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{|x|>2} \right\}^{\frac{1}{p}} = J_1(t) + J_2(t)$. Нетрудно видеть, что $J_1(t) \leqslant ct^{\lambda}$, в силу гельдеровости $f(x)$, а для $J_2(t)$ получаем

$$J_2(t) \leqslant ct^{\lambda} \left\{ \int_{|x|>2} (1+|xt|)^{-\lambda p} (1+|xt-t|)^{-\lambda p} |x|^{-\gamma p}\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ ct^{\lambda} \left\{ \int_{|x|>2} \frac{|x-1|^{\lambda p}}{(1+|xt-t|)^{\lambda p}} \left| |x-1|^{-\gamma} - |x|^{-\gamma} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = D(t) + E(t).$$

Далее несложные преобразования дают

$$D(t) \leqslant ct^{\lambda+\gamma-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{\infty} (1+s)^{-2\lambda p} s^{-\gamma p} \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(t^{\lambda+\gamma-\frac{1}{p}}\right)$$

и

$$E(t) \leqslant ct^{\lambda} \left\{ \int_2^{\infty} \frac{ds}{(1+st)^{\lambda p} (s+1)^{(1+\gamma-\lambda)p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant ct^{1+\gamma-\frac{1}{p}}\left\{\int_{2t}^{\infty}\frac{ds}{(1+s)^{\lambda p}(s+t)^{(1+\gamma-\lambda)p}}\right\}^{\frac{1}{p}}=ct^{1+\gamma-\frac{1}{p}}\left(\int_{2t}^{1}+\int_{1}^{\infty}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=O\left(t^{1+\gamma-\frac{1}{p}}\right)+O\left(t^{\lambda}\ln^{\frac{1}{p}}\frac{1}{t}\right),$$

что и завершает оценку для $J(t)$.

Оценка для $\delta^{-\alpha}\omega_p(g,\delta)$ получается аналогичными преобразованиями и мы их опускаем.

Остановимся еще в этом параграфе на принадлежности к $I^{\alpha}(L_p)$ суммируемых на оси функций. Воспользуемся следующим простым соображением: если функция $\varphi(x)$ сохраняет знак на всей оси, то функция $f(x)=(I^{\alpha}_{\pm}\varphi)(x)$ „плохо“ ведет себя при $x\to\pm\infty$ соответственно. Действительно, для $\varphi(x)\geqslant 0$ имеем при $x>n$

$$(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{-x}+\int_{-x}^{n}+\int_{n}^{x}\right)\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}>\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-x}^{n}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}>$$

$$>\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_{-n}^{n}\varphi(t)\,dt\geqslant\frac{c}{(1+x)^{1-\alpha}},\quad c\neq 0.$$

Следовательно, если $f(x)\in L_r\cap I^{\alpha}(L_p)$, $1\leqslant r\leqslant\frac{1}{1-\alpha}$, то функция $\varphi(x)=(D^{\alpha}_{\pm}f)(x)$ меняет знак на оси. Для суммируемых функций $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ можно получить более точную информацию: *Если $f(x)\in L_1\cap I^{\alpha}(L_p)$, то дробная производная $\varphi(x)=(D^{\alpha}_{+}f)(x)$, а также ее „срезки“ $\varphi_{\delta}(x)=(D^{\alpha}_{+,\delta}f)(x)$ ортогональны единице*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\delta}(x)=0. \tag{38}$$

Для $\varphi_{\delta}(x)$ равенство (38) следует из возможности интегрирования $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\delta}(x)\,dx=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,dx\right]=0,$$

в предельном случае ($\delta=0$) проще всего воспользоваться представлением (24): $I^{\alpha}_{N}\varphi=f-K_N f$, откуда

$$\frac{N^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}(I^{\alpha}_{N}\varphi)(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}(x+1)}=0.$$

§ 4. Об ограниченности некоторых классов операторов в пространстве $I^\alpha(L_p)$

Введем в $I^\alpha(L_p)$ естественную норму

$$\|f\|_I = \|D_+^\alpha f\|_p. \tag{39}$$

Равенство (39) определяет, вообще говоря, полунорму. Однако, на функциях $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ полунорма $\|D_+^\alpha f\|_p$ служит в силу (12) нормой. На основании теоремы 1 можно ввести также нормы

$$\|f\|_{II} = \|D_+^\alpha f\|_p + \|f\|_p, \quad \|f\|_{III} = \|D_+^\alpha f\|_p + \|f\|_{p,\alpha}. \tag{39'}$$

В силу (17) нормы $\|f\|_I$, $\|f\|_{II}$, $\|f\|_{III}$ эквивалентны на функциях $f(x) \in$ $\in I^\alpha(L_p)$. Очевидно также, что $I^\alpha(L_p)$ полно относительно введенных норм.

Теорема 3. *Оператор „усеченного" дробного дифференцирования*

$$(D_{+,\delta}^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\delta^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt$$

при любом $\delta > 0$ является оператором сжатия из $I^\alpha(L_p)$ в L_p

$$\|D_{+,\delta}^\alpha f\|_p \leqslant \|D_+^\alpha f\|_p. \tag{40}$$

Доказательство следует из представления (8) и условия (9):

$$\|D_{+,\delta}^\alpha f\|_p \leqslant \|K\|_1 \|\varphi\|_p = \|D_+^\alpha f\|_p.$$

Теорема 4. *Оператор сингулярного интегрирования* (14) *ограничен в пространстве $I^\alpha(L_p)$, причем при нормировке* (39)

$$\|S\|_{I^\alpha(L_p) \to I^\alpha(L_p)} = \|S\|_{L_p \to L_p}.$$

Для доказательства теоремы 4 достаточно заметить, что операторы S и $I_\pm^\alpha$ коммутируют

$$SI_\pm^\alpha \varphi = I_\pm^\alpha S\varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 < p < \frac{1}{\alpha} \tag{41}$$

(что без труда проверяется, например, на функциях $\varphi \in C_0^\infty$).

Пусть $H^\lambda(-\infty, \infty)$—пространство гельдеровских на сомкнутой оси функций порядка λ (так что имеет место оценка (35)). Справедлива следующая

Теорема 5*. *Пространство $I^\alpha(L_p)$ инвариантно относительно операции умножения на функции $h(x) \in H^\lambda(-\infty, \infty)$, $\lambda > \alpha$, причем*

$$\|hf\|_I \leqslant k \|h\|_{H^\lambda} \cdot \|f\|_I, \tag{42}$$

где k не зависит от h и f.

---

* Более сложное доказательство теоремы 5 не полностью приведено в работе автора 6].

Доказательство. Пусть $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$. Покажем, что для $h(x) f(x)$ выполняется утверждение II теоремы 1. Условие $hf \in L_p$ очевидно. Для $\omega_p(hf, \delta)$, пользуясь оценками (35)—(36), получаем

$$\omega_p(hf, \delta) \leqslant \max_x |h(x)| \, \omega_p(f, \quad +$$

$$+ \delta^{\lambda} \|h\|_{H^{\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^p \, dx}{(1+|x|)^{\lambda p} (1+|x-\delta|)^{\lambda p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c_1 \omega_p(f, \delta) + \tag{43}$$

$$+ c_2 \delta^{\lambda} \|f\|_p \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha} (1+|x-\delta|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^{\alpha} = o(\ ^{\alpha}).$$

Остается убедиться в L_p сходимости „усеченной“ дробной производной $\psi_\delta = D^{\alpha}_{+,\delta}(hf)$. Очевидно, $\psi_\delta(x) = h(x)(D^{\alpha}_{+,\delta} f)(x) + B_\delta(x)$, где

$$B_\delta(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\delta^{\infty} \frac{h(x) - h(x-t)}{t^{1+\alpha}} f(x-t) \, dt.$$

Так как $D^{\alpha}_{+,\delta} f$ сходится в L_p, то это верно и для $hD^{\alpha}_{+,\delta} f$, а для $B_\delta(x)$ аналогично (43) имеем

$$\|B_\delta\|_p \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \|h\|_{H^{\lambda}} \cdot \|f\|_p \cdot \int_\delta^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha} (1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c \|h\|_{H^{\lambda}} \|f\|_p \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1} \, dt}{(1+t)^{\lambda}},$$

так что $B_\delta \in L_p$ и $\|B_\delta\|_p \leqslant c_1 \|h\|_{H^{\lambda}} \|f\|_p$ и тогда

$$\|D^{\alpha}_{+,\delta}(hf)\|_p \leqslant \|h\|_C \|D^{\alpha}_{+,\delta} f\|_p + c_2 \|h\|_{H^{\lambda}} \|f\|_p. \tag{44}$$

Аналогично проверяется фундаментальность

$$\|B_{\delta_1} - B_{\delta_2}\|_p \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \|h\|_{H^{\lambda}} \cdot \|f\|_p \cdot \left| \int^{\delta_2} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda} (1+t)^{\lambda}} \right|.$$

И, наконец, оценка (42) следует из (44) и из (40). Теорема 5 доказана.

Выясним в заключение этого параграфа поведение свертки $A\varphi = a * \varphi$, как оператора, действующего из L_r в $I^{\alpha}(L_p)$ и из $I^{\alpha}(L_r)$ в $I^{\alpha}(L_p)$.

Лемма 6. *Оператор свертки ограниченно действует из* L_r, $1 \leqslant r \leqslant p$, *в* $I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, *если* $a(x) \in I^{\alpha}(L_q)$ *при* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.

Пусть далее M_p^p — пространство p-мультипликаторов [21]. Спра-ведлива следующая

Лемма 7. *Если* $a(x) \in I^\alpha(L_q)$ *при каком-нибудь* $q \in \left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$ *и* $|x|^\alpha \hat{a}(x) \in M_p^p$, *то оператор свертки ограниченно действует из* L_p *в* $I^\alpha(L_p)$.

Следствие. Если $a(x) \in I^\alpha(L_q)$ при $q \in \left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$ и $(D_+^\alpha a)(x) \in L_1$, то оператор свертки ограничен из L_p в $I^\alpha(L_p)$.

Лемма 8. *Оператор свертки* $Af = a * f$ *ограниченно действует из* $I^\alpha(L_r)$ *в* $I^\alpha(L_p)$, $1 < r \leqslant p < \frac{1}{\alpha}$ *при* $a(x) \in L_q$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$.

Доказательство лемм следует из равенства

$$a * \varphi = I_+^\alpha (D_+^\alpha a * \varphi), \quad \varphi \in L_r, \quad a \in I^\alpha(L_q), \tag{45}$$

$$r \geqslant 1, \quad 1 < q < \frac{1}{\alpha + \frac{1}{r'}},$$

справедливость которого очевидна на множествах, плотных в соответствующих пространствах, а левые и правые части равенств порождают операторы, ограниченные при условиях лемм в соответствующих пространствах.

§ 5. Обращение потенциалов феллеровского типа

Рассмотрим операторы типа потенциала вида

$$M_\alpha \varphi = M_{c_1, c_2; \alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \tag{46}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные; при $c_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha\delta}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}$, $c_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\sin \alpha\delta}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}}$, $-\infty < \delta < \infty$, получим потенциалы, изученные В. Феллером в связи с уравнением диффузии в [14] (см. также [15], стр. 684). Для операторов (46) имеет место „обобщенное полугрупповое свойство"

$$M_{c_1, c_2; \alpha}(M_{d_1, d_2; \beta} \varphi) = M_{e_1, e_2; \alpha+\beta} \varphi$$

для $\varphi \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < (\alpha+\beta)^{-1}$, произвольных c_1, c_2, d_1, d_2 и

$$e_1 = c_1 d_1 + c_2 d_2 + (c_1 d_1 - c_2 d_2) \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\pi}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\pi}, \quad e_2 = c_1 d_2 + c_2 d_1 + (c_2 d_1 - c_1 d_2) \times$$
$$\times \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\pi}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\pi}.$$

Доказательство этого свойства (сформулированного в ином виде) содержится в работе [11] автора. В [11] получено также описание образа $M_\alpha(L_1)$, $L_1 = L_1(-\infty, \infty)$, оператора M_α и найден обратный оператор

$$M_\alpha^{-1} f = M_{c_1, c_2; \alpha}^{-1} f = \frac{1}{k} \frac{d}{dx} M_{c_1, c_2; 1-\alpha} f, \tag{47}$$

$k = 4\left(c_1^2 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} + c_2^2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma(1-\alpha)$ на образе $M_\alpha(L_1)$. Покажем, что потенциал (46) допускает простое обращение и на образе $M_\alpha(L_p)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. В этом случае обращение „лиувиллевского" типа (47) заменяется оператором, построенным подобно производным Маршо (3).

Замечаем, что

$$M_\alpha(L_p) = I^\alpha(L_p) \tag{48}$$

при $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ (исключая, разумеется, единственный случай, когда $c_1 = c_2 = 0$). Действительно, $M_\alpha \varphi = u\, I_+^\alpha \varphi + v\, I_-^\alpha \varphi$, где $u = c_1 + c_2$, $v = c_1 - c_2$ и тождества (13), (41) дают

$$M_\alpha = I_+^\alpha N = N I_+^\alpha, \quad N\varphi = a_1 \varphi + a_2 S\varphi, \tag{49}$$

где $a_1 = u + v \cos \alpha\pi$, $a_2 = v \sin \alpha\pi$ и S — сингулярный оператор (14). Остается заметить, что оператор N осуществляет изоморфизм пространства L_p на себя (при $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$).

В силу (49) получаем $M_\alpha^{-1} f = N^{-1} D_+^\alpha f$ для $f \in I^\alpha(L_p)$. Нетрудно видеть, что $N^{-1} f = (a_1^2 + a_2^2)^{-1} (a_1 f - a_2 Sf)$ и что $SD_+^\alpha f = \operatorname{cosec} \alpha\pi\, D_-^\alpha f - \operatorname{ctg} \alpha\pi\, D_+^\alpha f$ для $f \in I^\alpha(L_p)$ (в силу (13) и (12)). Следовательно, $M_\alpha^{-1} f = (a_1^2 + a_2^2)^{-1} (u D_+^\alpha f + v D_-^\alpha f)$. Окончательно

$$(M_\alpha^{-1} f)(x) = \frac{1}{k_0} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\alpha}} [f(x) - f(t)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{k_0} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{2c_1 f(x) - (c_1 + c_2) f(x-t) - (c_1 - c_2) f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \tag{50}$$

где $k_0 = 4\left(c_1^2 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} + c_2^2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}\right) = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha\pi$; $M_\alpha^{-1} M_\alpha \varphi \equiv$ $\equiv \varphi$ для $\varphi \in L_p$ и $M_\alpha M_\alpha^{-1} f \equiv f \in I^\alpha (L_p)$. Очевидно, формально мы можем записать, что $M_\alpha^{-1} = \frac{1}{k_0} M_{-\alpha}$.

§ 6. О нетеровости операторов типа потенциала

Перейдем к рассмотрению операторов типа потенциала общего вида

$$(M\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{51}$$

Функцию $c(x, t)$ будем предполагать разрывной, вообще говоря, на диагонали $x = t$

$$c(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t < x \\ v(x, t), & t > x. \end{cases}$$

Определение. Будем говорить, что функция $a(x, t) \in H_x^\lambda(R_2)$, если: 1) она определена в одной из полуплоскостей $t > x$, $t < x$ и гельдерова там по x порядка λ (равномерно по t):

$$|a(x_1, t) - a(x_2, t)| \leqslant c\, |x_1 - x_2|^\lambda (1 + |x_1|)^{-\lambda} (1 + |x_2|)^{-\lambda} \tag{52}$$

(ср. с (35)) и 2) $a(x, x) \overset{\text{def}}{=} a(x \pm 0, x) \in C(-\infty, \infty)$.

Будем считать, что $u(x, t)$, $v(x, t) \in H_x^\lambda(R_2)$. В статье [10] дается доказательство нетеровости оператора (51) как оператора из L_p, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, в $I^\alpha(L_p)$ (при нормировке (39)—(39′)) в предположении, что $\lambda > \frac{1}{p}$. (В [10] рассматриается класс $H(\lambda, \mu, \nu)$, несколько более широкий, чем $H_x^\lambda(R_2)$: $H_x^\lambda(R_2) = H(\lambda, \lambda, 0)$, причем в [10] $\lambda > \frac{1}{p} + \nu$). Мы покажем здесь, что порядок гельдеровости λ можно снизить до естественного предела $\lambda > \alpha$.

Теорема 7*. *Пусть* $u(x, t)$, $v(x, t) \in H_x^\lambda(R_2)$, $\lambda > \alpha$. *Для того чтобы оператор* (51) *был нетеровым оператором из* L_p *в* $I^\alpha(L_p)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$c^2(x, x-0) + c^2(x, x+0) \neq 0, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty.$$

При выполнении этого условия индекс оператора M равен

---

* Теорема 7 в сформулированном виде анонсирована в [5]. Отметим в связи с нетеровостью оператора (51) работу М. И. Вишика и Г. И. Эскина [22], в которой операторы типа потенциала с „почти-разностным“ ядром рассматривались в иной постановке в случае области с конечной мерой.

$$\varkappa_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \left\{ c_1(x) + i c_2(x) \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right\}, \tag{53}$$

где $c_1(x) = c(x, x-0) + c(x, x+0)$, $c_2(x) = c(x, x-0) - c(x, x+0)$.

Доказательство. Отмечаем прежде всего вложение

$$M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p), \tag{54}$$

проверяемое с помощью теоремы 1 (подробное доказательство при $\lambda > \alpha$ см. в [10], § 2). Введем оператор

$$(M_0 \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1(t) + c_2(t) \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt$$

с коэффициентами $c_1(t)$, $c_2(t)$ из (53). В [6] найдены условия нетеровости этого оператора из L_p в $I^\alpha(L_p)$ и вычислен его индекс (53) в предположении, что $c_1(t)$, $c_2(t) \in C(-\infty, \infty)$. Покажем, что оператор $T = M - M_0$ вполне непрерывен из L_p в $I^\alpha(L_p)$ при $\lambda > \alpha$. Мы имеем $T = T_u^+ + T_v^-$, где

$$(T_u^+ \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{u(x, t) - u(t, t-0)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt$$

и аналогично для $T_v^- \varphi$. Очевидно, достаточно рассмотреть один из операторов T_u^+, T_v^-. Так как $T_u^+(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$, то остается показать, что оператор $A \overset{\text{def}}{=} D_+^\alpha T_u^+$ вполне непрерывен из L_p в L_p. Несложные преобразования дают

$$(A\varphi)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{u(x, x-t-s) - u(x-t, x-t-s)}{s^{1-\alpha}} \times$$
$$\times \varphi(x-t-s)\, ds. \tag{55}$$

Отметим, кстати, что ограниченность оператора A в L_p легко получается из (55), если воспользоваться оценкой (52):

$$\|A\varphi\|_p \leqslant c \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^P\, dx}{(1+|x+t|)^{\lambda P} (1+|x|)^{\lambda P}} \right\}^{\frac{1}{P}}, \tag{56}$$

где обозначено $f(x) = \int_0^{\infty} |\varphi(x-s)|\, s^{\alpha-1}\, ds \in L_P$, $P = \dfrac{p}{1-\alpha p}$ и далее, используя (36), имеем

$$\|A\varphi\|_p \leqslant c \|f\|_P \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x+t|)^{\lambda/\alpha} (1+|x|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_p\cdot\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}(1+t)^\lambda}.$$

Доказательство же полной непрерывности A в L_p при $\lambda>\alpha$ потребует больших усилий. Приводим оператор A простыми преобразованиями к виду

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}(A\varphi)(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}A(x,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где $A(x,\tau)=\int\limits_{\tau}^{x}\frac{u(x,\tau)-u(t,\tau)}{(x-t)^{1+\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau$. Оценим норму в L_p разности

$$\Delta=(A\varphi)(x+\delta)-(A\varphi)(x)=\int\limits_{x}^{x+\delta}A(x+\delta,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+\int\limits_{-\infty}^{x}[A(x+\delta,\tau)-$$

$-A(x,\tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau=\Delta_1+\Delta_2$. Оценка для Δ_1 проста:

$$\|\Delta_1\|_p\leqslant\int\limits_0^\delta d\tau\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p\,|A(x+\tau+\delta,x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^\delta\frac{d\tau}{(\tau+\delta)^{1-\lambda}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p\,dx\,\left|\int\limits_0^1\frac{ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\alpha-\lambda}}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<c_1\delta^\lambda\,\|\varphi\|_p. \quad (57)$$

Далее

$$\|\Delta_2\|_p\leqslant\int\limits_0^\infty d\tau\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|A(x+\tau+\delta,x)-A(x+\tau,x)|^p\,|\varphi(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Представим $A(x+\tau+\delta,x)-A(x+\tau,x)$ в виде $A_1+A_2+A_3$, где

$$A_1=\int\limits_x^{x+\tau}\frac{u(x+\tau+\delta,x)-u(x+\tau,x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}(t-x)^{1-\alpha}}\,dt,\quad A_2=$$

$$=\int\limits_{x+\tau}^{x+\tau+\delta}\frac{u(x+\tau+\delta,x)-u(t,x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}(t-x)^{1-\alpha}}\,dt,$$

$$A_3=\int\limits_x^{x+\tau}\left[\frac{1}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha}}-\frac{1}{(x+\tau-t)^{1+\alpha}}\right]\frac{u(x+\tau,x)-u(t,x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Оценим A_1, имеем

$$|A_1|\leqslant\frac{c\delta^\lambda\tau^\alpha}{(1+|x+\tau|)^\lambda}\int\limits_0^1\frac{ds}{s^{1-\alpha}[\delta+\tau(1-s)]^{1+\alpha}}=c_1\frac{\delta^{\lambda-\alpha}\tau^\alpha}{(1+|x+\tau|)^\lambda(\delta+\tau)}$$

(в последнем равенстве использована лемма 1), так что

$$|A_1| \leqslant \frac{c_1}{(1+|x+\tau|)^{\lambda}}\,\frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{\tau^{1-\alpha}}. \tag{58}$$

Оценка для A_2 получается аналогично и совпадает с (58). Далее, применяя в A_3 теорему о среднем, получаем

$$|A_3| \leqslant \frac{c}{(1+|x+\tau|)^{\lambda}}\,\frac{\delta}{\tau^{2-\lambda}}\int\limits_0^1 \frac{(1-s+\xi)^{\alpha}\,ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\alpha-\lambda}\left(1-s+\frac{\delta}{\tau}\right)^{1+\alpha}},$$

где $0<\xi<\dfrac{\delta}{\tau}$, так что

$$|A_3| \leqslant \frac{c}{(1+|x+\tau|)^{\lambda}}\,\frac{\delta}{\tau^{2-\lambda}}\int\limits_0^1 \frac{ds}{s^{1-\alpha}(1-s)^{1+\varepsilon-\lambda}\left(1-s+\frac{\delta}{\tau}\right)^{1-\varepsilon}\left(1-s+\frac{\delta}{\tau}\right)^{\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1(1+|x+\tau|)^{-\lambda}\,\delta^{\varepsilon}\,\tau^{\lambda+\varepsilon-1},$$

где $c_1=c_1(\varepsilon)$ и $0<\varepsilon<\lambda-\alpha$. В силу оценок для A_1, A_2, A_3, имеем

$$\|\Delta_\delta\| \leqslant c\delta^{\varepsilon}\int\limits_0^{\infty}\frac{a(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-\lambda+\varepsilon}} + c\delta^{\lambda-\alpha}\int\limits_0^{\infty}\frac{a(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-\alpha}}, \tag{59}$$

где обозначено $a(\tau)=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x+\tau|)^{-\lambda p}|\varphi(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$. Очевидны следующие свойства функции $a(\tau)$:

$$|a(\tau)|<\|\varphi\|_p,\ \|a\|_q<k\,\|\varphi\|_p \quad \text{при} \quad q>\max\left(p,\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $k=k(q)$. Простое применение неравенства Гельдера показывает, что интегралы в (59) конечны и допускают оценку $\int\limits_0^{\infty}\frac{a(\tau)}{\tau^{\nu}}\,d\tau\leqslant c\,\|\varphi\|_p$ при $\nu=1-\lambda+\varepsilon$ или $\nu=1-\alpha$, $c=c(\lambda,\varepsilon,\alpha,q)$, если порядок суммируемости q для функции $a(\tau)$ выбрать в пределах $\max\left(p,\frac{1}{\lambda}\right)<q<$ $<\dfrac{1}{\lambda-\varepsilon}$, что приводит к следующему (всегда возможному) выбору ε: $\max\left(0,\lambda-\dfrac{1}{p}\right)<\varepsilon<\lambda-\alpha$.

В силу оценок (57) и (59) мы получаем: $\|\Delta\|_p=\|(A\varphi)(x+\delta)-$ $-(A\varphi)(x)\|_p\leqslant c\delta^{\varepsilon}\|\varphi\|_p$. Для того чтобы эта последняя оценка обеспечила полную непрерывность оператора A в $L_p(-\infty,\infty)$ остается проверить, что $\int\limits_{|x|>N} |(A\varphi)(x)|^p dx \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по φ, $\|\varphi\|_p \leqslant c$. Возвращаясь для этого к оператору A в форме (55), аналогично оценкам в (56) находим, что

$$\left\{ \int\limits_{|x|>N}^{\infty} |(A\varphi)(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int\limits_{|x|>N} \frac{|f(x-t)|^p dx}{(1+|x|)^{\lambda p} (1+|x-t|)^{\lambda p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c \|f\|_p \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left(\int\limits_{|x|>N} \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha} (1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}} \right)^{\alpha} \leqslant \frac{c_1 \|\varphi\|_p}{(N+1)^{\varepsilon}} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{\lambda-\alpha-1}\, dt}{(t+1)^{\lambda-\varepsilon}},$$

где ε выбрано в пределах $0 < \varepsilon < \min(\lambda-\alpha, \alpha)$ и при последнем переходе мы воспользовались оценкой (36). Тем самым полная непрерывность оператора A в L_p получена, что и завершает доказательство теоремы 7.

Ростовский государственный
университет

Поступила 28.IV.1972

Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Կոտորակային ինտեգրալների $I^\alpha(L_p)$ տարածության և պոտենցիալի տիպի օպերատորների մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է $L_p(-\infty, \infty)$ $\left(1<p<\frac{1}{\alpha}\right)$ տարածության ֆունկցիաներից α կարգի (լիուվիլյան տիպի) կոտորակային ինտեգրալներով ներկայացվող ֆունկցիաների $I^\alpha(L_p)$ տարածությունը։ Տրվում է նրա նկարագրությունը՝ տարբերական կոտորակային ածանցյալների և L_P, $P=\frac{p}{1-\alpha p}$ կամ $L_{p,\alpha}$ կշռային տարածությանը պատկանելու թերմիններով.

Ստացված են նույնպես ֆունկցիաների՝ $I^\alpha(L_p)$ պատկանելու մի շարք բավարար պայմաններ և հետազոտված է $I\ (L_p)$-ում օպերատորների որոշ դասերի վարքը։

Պոտենցիալի տիպի օպերատորների համար ստացված է նետերյանությունը L_p-ց $I^\alpha(L_p)$: Ֆելլերյան տիպի պոտենցիալների մասնավոր դեպքում կառուցված է հակադարձ օպերատորը։

S. G. SAMKO. *On the space $I^\alpha(L_p)$ of fractional integral and on potential type operators* (summary)

The space $I^\alpha(L_p)$ consists of functions representable by fractional integrals (of Liouville type) of order α with density in $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. The description of $I^\alpha(L_p)$ is given in the terms of difference fractional derivatives and in the terms of belonging of a function to the space L_P, $P = \frac{p}{1-\alpha p}$, or to the weight space $L_{p,\alpha}$. Some sufficient conditions for a function to belong to the space $I^\alpha(L_p)$ are obtained. The behaviour of some classes of operators in $I^\alpha(L_p)$ is investigated.

The operators of potential type are considered acting from L_p to $I^\alpha(L_p)$ and are shown to be Notherian. In the case of Feller type potentials the inverse operator is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. И. Лизоркин.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, т. 105, 1969, 89—167.
2. *П. И. Лизоркин.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$, Матем. сб., 60, № 3, 1963, 325—353.
3. *П. И. Лизоркин.* Описание пространств $L_p^r(R_n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов, Матем. сб., 81, № 1, 1970, 79—91.
4. *С. Г. Самко.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши, ДАН СССР, 176, № 5, 1967, 1019—1022.
5. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 299—301.
6. *С. Г. Самко.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля на прямой, Изв. ВУЗ, Математика, № 8, 1970, 83—93.
7. *С. Г. Самко.* Интегральные уравнения первого рода с ядром типа потенциала, „Материалы Всесоюзн. конференции по краевым задачам", 1969, Казань, Изд-во Каз. ун-та, 1970, 216—220.
8. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнение Абеля и операторах дробного интегрирования, Диф. уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
9. *С. Г. Самко.* Об интегральном модуле непрерывности потенциалов с плотностями, суммируемыми на оси с весом, „Матем. анализ и его приложения", изд-во РГУ, Ростов н/Д., 1969, 175—184.
10. *С. Г. Самко.* Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала, Изв. ВУЗ, Математика, № 4, (107) 1971, 78—86.
11. *С. Г. Самко.* Об одном классе операторов типа потенциала на прямой, Изв. ВУЗ, Математика, № 5 (108), 1971, 92—100.
12. *L. von Wolfersdorf.* Uber eine Beziehung zwischen integralen nichtganzer Ordnung, Math. Z., 90, № 1, 1965, 24—28.
13. *J. S. Bosanquet.* On Liouville's extension of Abel's integral equation, Mathematika (Gr. Br.) 16, № 1, 1969, 59—85.
14. *W. Feller.* On a generalization of M. Riesz' potentials and the semigroups generated by them, Meddel. Lunds. Univ. mat. sem. supplem. 21, 1952, 73—81.
15. *Э. Хилле, Р. Филлипс.* Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
16. *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИЛ., 1948.
17. *A. Marchaud.* Sur les derivées et sur les differences des fonctions de variables reéles, Journ. Mathém. pures et appliq., 6, 1927, 337—425.
18. *J. D. Tamarkin.* On integrable solutions of Abel's integral equation, Ann. Math. (2), 31, 1930, 219—228.
19. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
20. *С. Г. Михлин.* Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы, Вестник ЛГУ, № 7, 1957, 143—155.
21. *Л. Хермандер.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962.
22. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках переменного порядка, Труды ММО, 16, 1967, 25—50.
23. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, М., ИЛ., 1962.
24. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 5 (83), 1958, 3—120.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЯДРА КОШИ

Мальмквистом и Такенака были введены ортонормированные на окружности $|z|=1$ системы рациональных функций с фиксированными полюсами.

В ряде работ автора ([1]—[4]) с помощью этих систем и образуемых на их основе систем рациональных функций (аналогов полиномов Фабера), порожденных континуумом K и последовательностью чисел $\{\omega_k\}_1^\infty \subset K$ — полюсов этих систем, были установлены представления для ядра Коши в круге и в жордановых областях со спрямляемой границей.

Указанные представления позволили установить, что в надлежащих классах аналитических функций, существенно зависящих от распределения полюсов этих систем, они образуют базис в том или ином смысле. Этим вопросам была посвящена также работа Г. Ц. Тумаркина [5].

В настоящей статье предлагается другой подход к задаче о представлении ядра Коши с помощью простейших рациональных дробей *с фиксированными полюсами, имеющими наперед заданные кратности.*

В § 1 для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ вводится система простейших рациональных дробей

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

где $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$. Затем методом, примененным уже в ряде работ для других задач анализа*, строится система функций $\{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n$, биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^n$ на окружности $|z|=1$ при любом $n \geqslant 1$ (теорема 1).

В § 2 устанавливается явная формула представления для ядра Коши $\dfrac{1}{1-\bar{\zeta}z}$ с помощью наших биортогональных систем (теорема 2), и отмечается ряд важных следствий из такого рода представлений.

В § 3 с помощью системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ для любого ограниченного континуума K строится система простейших рациональных дробей

---

* Подробные указания об этих работах приведены во введении статьи автора [6].

$\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ с полюсами, лежащими на произвольной последовательности точек $\{\omega_k\}_1^\infty \subseteq K$.

Наряду с системой $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ строится также система $\{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}^n$ аналитических вне континуума K функций. В случае, когда K—жорданова область со спрямляемой границей Γ, доказывается биортогональность этих двух систем на Γ (теорема 3).

Наконец, с помощью построенных систем устанавливается основная теорема 4 о представлении ядра Коши $\dfrac{1}{\zeta - z}$ посредством рациональных дробей $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^n$.

Возникающие в связи с этими результатами вопросы о базисе наших систем в надлежащих классах аналитических функций не затрагиваются нами.

§ 1. Биортогональные системы рациональных функций на окружности

1.1 (а) Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа конечной или даже бесконечной кратности.

Для любого фиксированного значения $k \geqslant 1$ через s_k будем обозначать кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^k$ нашей последовательности.

Далее, для произвольного фиксированного целого числа $n > 1$ и при любом k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ обозначим через $p(n)$кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_j\}_1^n$ той же последовательности.

Очевидно, что будем иметь

$$1 \leqslant s_k \leqslant p_k(n) \ (1 \leqslant k \leqslant n) \text{ и } s_n = p_n(n). \tag{1.1}$$

Заметим, что если последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) < +\infty, \tag{1.2}$$

то число $p_k(\infty) \equiv p_k$ $(k \geqslant 1)$, т. е. кратность появления α_k во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, будет конечным, причем легко видеть, что для любого $k \geqslant 1$ будем иметь

$$1 \leqslant s_k \leqslant p_k < +\infty, \ p_k(n) = p_k \ (n \geqslant N_k). \tag{1.3}$$

(б) Полагая вновь, что $n > 1$—фиксированное целое число, рассмотрим конечное произведение Бляшке

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \cdot \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.4}$$

условившись при $\alpha_j = 0$ положить $\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} = \frac{\bar{\alpha}_j}{|\alpha_j|} = -1$. Очевидно, что функция $B_n(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и имеет нули в точках $\{\alpha_j\}_1^n$, при этом для любого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ в точке $z = \alpha_k$ она имеет нуль кратности $p_k(n)$.

Отметим, что при условии (1.2) существует также функция Бляшке

$$B_\infty(z) \equiv B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \bar{\alpha}_j z} \cdot \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.5}$$

обращающаяся в нуль лишь в точках последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, причем каждая из точек $z = \alpha_k (1 \leqslant k_j < +\infty)$ является для нее нулем порядка $p_k = p_k(\infty) < +\infty$.

Впредь, пользуясь символом $B_n(z)$, будем полагать, что $1 \leqslant n \leqslant +\infty$, причем в случае $n = +\infty$, не оговаривая особо, будем считать, что выполнено условие (1.2), обеспечивающее существование функции Бляшке $B_\infty(z) \equiv B(z) \not\equiv 0$.

(в) Рассмотрим функцию

$$\omega_{n,k}(z) = \frac{(z - \alpha_k)^{p_k(n)}}{B_n(z)} \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{1.6}$$

регулярную и отличную от нуля в окрестности точки $z = \alpha_k$. Очевидно, что при достаточно малом $\delta > 0$ справедливо разложение

$$\omega_{n,k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n,\nu}(\alpha_k)(z - \alpha_k)^\nu, \quad |z - \alpha_k| < \delta, \tag{1.7}$$

где

$$a_{n,\nu}(\alpha_k) = \frac{\omega_{n,k}^{(\nu)}(\alpha_k)}{\nu!} \quad (0 \leqslant \nu < +\infty. \tag{1.8}$$

Введем, далее, в рассмотрение полиномы

$$q_{n,k}(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k(n) - s_k} a_{n,\nu}(\alpha_k)(z - \alpha_k)^\nu \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{1.9}$$

а также функции

$$\Omega_{n,k}(z) = \frac{(z - \alpha_k)^{s_k - 1} q_{n,k}(z)}{(s_k - 1)!\, \omega_{n,k}(z)} \equiv$$

$$\equiv \frac{B_n(z)\, q_{n,k}(z)}{(s_k - 1)!\, (z - \alpha_k)^{p_k(n) - s_k + 1}} \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{1.10}$$

регулярные в круге $|z| < 1$, поскольку по (1.6) таковы и функции $\omega_{n,k}^{-1}(z)$.

В заключение особо отметим, что поскольку выше было оговорено считать в случае $n=+\infty$ условие (1.2) автоматически выполненным, то введенные нами функции $\omega_{n,k}(z)$ и $\Omega_{n,k}(z)$ сохраняют смысл и в этом случае.

(г) Докажем лемму.

Лемма 1. *Система функций*

$$\{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n \ (1\leqslant k\leqslant n) \tag{1.11}$$

обладает следующими интерполяционными свойствами:

$$\Omega_{n,k}^{(r)}(\alpha_\nu)=$$

$$=\begin{cases} 0, & \alpha_\nu\neq\alpha_k;\ 0\leqslant r\leqslant p_\nu(n)-1\\ 1, & \alpha_\nu=\alpha_k;\ r=s_k-1\\ 0, & \alpha_\nu=\alpha_k;\ r\neq s_k-1,\ 0\leqslant r\leqslant p_k(n)-1=p_\nu(n)-1.\end{cases} \tag{1.12}$$

Доказательство. Из разложения (1.7) функции $\omega_{n,k}(z)$, принимая во внимание определение (1.9) полинома $q_{n,k}(z)$, следует, что

$$q_{n,k}(z)=\omega_{n,k}(z)-\sum_{\nu=p_k(n)-s_k+1}^{\infty} a_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta.$$

Отсюда и из (1.10) получим представление

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-$$

$$-\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!\,\omega_{n,k}(z)}\sum_{\nu=p_k(n)-s_k+1}^{\infty} a_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta,$$

которое с учетом (1.6) запишется также в виде

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-\frac{B_n(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n,\nu}(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\delta, \tag{1.13}$$

где

$$b_{n,\nu}(\alpha_k)=a_{n,\varkappa}(\alpha_k),\ \varkappa=p_k(n)-s_k+\nu+1.$$

Вторая и третья из формул (1.12) леммы следуют из (1.13), если учесть, что в точке $\alpha_\nu=\alpha_k$ функция $B_n(z)$ имеет нуль порядка $p_k(n)=p_\nu(n)$.

Что касается первой из формул (1.13) леммы, то она непосредственно следует из определения (1.10) функции $\Omega_{n,k}(z)$, так как в каждой точке $\alpha_\nu\neq\alpha_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ она совместно с функцией $B_n(z)$ имеет нуль кратности $p_\nu(n)$.

1.2 (а) Наряду с системой функций $\{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n$, регулярных и ограниченных в единичном круге

$$D^{(+)}=\{z;\ |z|<1\},$$

рассмотрим также систему рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1, 2,\cdots),\tag{1.14}$$

множество полюсов которых $\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^{\infty}$ лежит в области

$$D^{(-)}=\{z;\ |z|>1\},$$

дополнительной к замкнутому кругу $\overline{D}^{(+)}$.

Теорема 1. *Системы функций*

$$\{r_k(z)\}_1^n \ \text{и}\ \{\Omega_{n,k}(z)\}_1^n\ (1\leqslant n\leqslant+\infty)\tag{1.15}$$

биортогональны на единичной окружности $|z|=1$ *в смысле*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} r_\nu(t)\,\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,|dt|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\Omega_{n,k}(t)\,\overline{r_\nu(t)}\,|dt|=$$

$$=\delta_{k,\nu}=\begin{cases}0, & \nu\neq k\\ 1, & \nu=k\end{cases}\quad (1\leqslant k,\ \nu\leqslant n).\tag{1.16}$$

Доказательство. Функция $\Omega_{n,k}(z)$ регулярна и ограничена в круге $D^{(+)}$, и поэтому она представима интегралом Коши

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Omega_{n,k}(t)}{t-z}\,dt,\ z\in D^{(+)}.$$

Отсюда r-кратным дифференцированием по параметру z получим

$$\overline{\Omega^{(r)}_{n,k}(z)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,\frac{r!\,t^r}{(1-\bar{z}t)^{r+1}}\,|dt|$$

$$(1\leqslant k,\ \nu\leqslant n;\ 0\leqslant r<+\infty).$$

При данном $\nu\,(1\leqslant\nu\leqslant n)$, положив здесь $z=\alpha_\nu$ и $r=s_\nu-1$, ввиду определения (1.14) системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$, приходим к равенствам

$$\overline{\Omega^{(s_k-1)}_{n,k}(\alpha_\nu)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,r_\nu(t)\,|dt|\quad(1\leqslant k\leqslant n),\tag{1.17}$$

пользуясь которыми доказательство теоремы сводится к лемме 1.

С этой целью заметим, что при фиксированном $\nu\ (1\leqslant\nu\leqslant n)$ множество значений $k\ (1\leqslant k\leqslant n)$ можно разбить на три взаимно непересекающихся подмножества: 1) $k=\nu$, 2) $k\neq\nu$, но $\alpha_k=\alpha_\nu$, и, наконец, 3) $k\neq\nu$ и $\alpha_k\neq\alpha_\nu$.

Если $k=\nu$, то ясно, что $\alpha_k=\alpha_\nu$, $s_k=s_\nu$ и в силу второй из формул (1.12) леммы 1 наш интеграл (1.17) равен единице.

Если $k\neq\nu$, но $\alpha_k=\alpha_\nu$, то ясно, что $s_\nu-1\neq s_k-1$, и поскольку $0\leqslant s_\nu-1\leqslant p_\nu(n)-1=p_k(n)-1$, то интегралы (1.17) равны нулю, согласно третьей из формул (1.12).

Наконец, если $k \neq \nu$ и $\alpha_k \neq \alpha_\nu$, то интегралы (1.17) вновь равны нулю, в силу первой из формул (1.12), поскольку тогда мы имеем $0 \leqslant s_\nu - 1 \leqslant p_\nu(n) - 1$. Таким образом, теорема полностью доказана.

(б) В заключение параграфа приведем одну лемму интерполяционного характера.

Лемма 2. *Пусть* $\{c_k\}_1^m$ $(1 \leqslant m < +\infty)$ — *произвольные комплексные числа. Тогда рациональная функция*

$$R_{n,m}(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k \Omega_{n,k}(z) \quad (1 < m \leqslant n < +\infty) \tag{1.18}$$

с полюсами в точках $\{1/\bar{\alpha}_k\}_1^n$, *а также регулярная и ограниченная в круге* $D^{(+)}$ *функция*

$$R_{\infty,m}(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k \Omega_{n,k}(z) \quad (1 \leqslant m < +\infty) \tag{1.19}$$

удовлетворяет следующим интерполяционным данным:

$$R_{n,m}^{(s_k-1)}(\alpha_k) = R_{\infty,m}^{(s_k-1)}(\alpha_k) = c_k \quad (1 \leqslant k \leqslant m). \tag{1.20}$$

Доказательство. Поскольку функция $R_{n,m}(z)$ $(1 \leqslant m \leqslant n \leqslant \leqslant +\infty)$ регулярна и ограничена в круге $D^{(+)}$, то справедлива интегральпая формула Коши

$$R_{n,m}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{R_{n,m}(t)}{1 - \bar{t} z} |dt| \quad (1 \leqslant m \leqslant n \leqslant +\infty).$$

Отсюда $(s_k - 1)$-кратным дифференцированием по параметру z получим

$$R_{n,m}^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} R_{n,m}(t) \frac{(s_k-1)!\, \bar{t}^{s_k-1}}{(1 - \alpha_k \bar{t})^{s_k}} |dt| =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \Omega_{n,m}(t) \overline{r_k(t)} |dt| = c_k \quad (1 \leqslant k \leqslant m),$$

в силу формул (1.17) биортогональности теоремы 1.

§ 2. Представления ядра Коши в круге; некоторые приложения

2.1 (а) Пусть вновь $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_j| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а $s_k \geqslant 1$, $p_k(n) \leqslant p_k(\infty) \leqslant +\infty$ связанные с нею параметры, имеющие тот же смысл, что и в § 1.

С последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ассоциируем систему рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$\varphi_1(z) = \frac{(1 - |\alpha_1|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_1 z}, \tag{2.1}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_k z} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha_j - z}{1-\bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \quad (k=2, 3, \cdots), \tag{2.1}$$

условившись при этом, что при $\alpha_j = 0$, $\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} = \frac{\bar{\alpha}_j}{|\alpha_j|} = -1$.

Система $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ была введена в анализ Мальмквистом и Такенака ([7], [8], [9]), впервые установившими, что она ортонормальна на окружности $|t|=1$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \varphi_n(t) \overline{\varphi_m(t)}\, |dt| = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$(n;\ m=1, 2, \cdots).$$

Заметим, что в простейшем случае, когда $\alpha_j = 0$ $(j \geqslant 1)$, система Мальмквиста переходит в систему степеней $\{z^k\}_0^\infty$, очевидно, также ортонормальной на окружности $|z|=1$ в том же смысле (2.2).

Следующая лемма, доказательство которой содержится в работах [1], [10], существенно понадобится нам ниже.

Лемма 3. *Для произвольных значений переменных z и ζ, и для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi_k(\zeta)}\, \varphi_k(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\, B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z}, \tag{2.3}$$

где

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - z}{1-\bar{\alpha}_j z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}. \tag{2.4}$$

(б) Для определенных нами в § 1 биортогональных систем также имеют место тождества вида (2.3). А именно, справедлива

Теорема 2. *Для произвольных значений переменных z и ζ, и для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливы тождества*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z} \equiv \sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\ r_k(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\, B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k(\zeta)}\, \Omega_{n,k}(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)}\, B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z}. \tag{2.4'}$$

Доказательство. Отметим сначала, что поскольку в подлежащих доказательству тождествах участвуют лишь рациональные функции от переменных z и $\bar{\zeta}$, то очевидно, что достаточно установить их справедливость, полагая, например, что $z \in D^{(+)}$ и $\zeta \in D^{(+)}$.

Рассмотрим рациональную функцию от двух переменных z и $\bar{\zeta}$

$$S_n(z;\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k(\zeta)}\, \Omega_{n,k}(z), \tag{2.5}$$

и заметим, что согласно лемме 2, для любого $\zeta \in D^{(+)}$ она удовлетворяет интерполяционным данным

$$\left\{ \frac{\partial^{s_k-1} S_n(z;\zeta)}{\partial z^{s_k-1}} \right\}_{z=\alpha_k} = \overline{r_k(\zeta)} \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\left\{ \frac{\partial^{s_k-1}}{\partial z^{s_k-1}} \left(\frac{1}{1-\overline{\zeta} z} \right) \right\}_{z=\alpha_k} =$$

$$= \left\{ \frac{(s_k-1)!\,(\overline{\zeta})^{s_k-1}}{(1-\overline{\zeta} z)^{s_k}} \right\}_{z=\alpha_k} = \overline{r_k(\zeta)} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

ввиду определения (1.14) функций $r_k(z)$. Поэтому, определив функцию

$$\Delta_n(z;\zeta) = \frac{1}{1-\overline{\zeta} z} - S_n(z;\zeta), \tag{2.6}$$

можем утверждать, что она удовлетворяет интерполяционным данным

$$\left\{ \frac{\partial^{s_k-1} \Delta_n(z;\zeta)}{\partial z^{s_k-1}} \right\}_{z=\alpha_k} = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{2.7}$$

Теперь, фиксируя $\zeta \in D^{(+)}$, введем в рассмотрение функцию

$$\Psi_n(z;\zeta) = \frac{\Delta_n(z;\zeta)}{B_n(z)}, \tag{2.8}$$

и убедимся, что она регулярна по переменной z в замкнутой области $\overline{D}^{(+)}$.

С этой целью заметим, что для любого $j\ (1 \leqslant j \leqslant n)$ точки $z=\alpha_j$ для функции $B_n(z)$ являются нулем кратности $p_j(n)$. Вместе с тем из (2.17) следует, что для функции $\Delta_n(z;\zeta)$ та же точка $z=\alpha_j$ является нулем той же кратности $p_j(n)$, так как очевидно, что

$$\max_{\substack{1 < k < n \\ \{\alpha_k\} = \alpha_j}} \{s_k\} = p_j(n).$$

Таким образом, функция $\Psi_n(z;\zeta)$, особые точки-полюса которой могли быть расположены лишь в нулях $B_n(z)$, регулярна в замкнутом круге $\overline{D}^{(+)}$. Поэтому, представив функцию $\Psi_n(z;\zeta)$ интегралом Коши, и пользуясь определением (2.6) функции $\Delta_n(z;\zeta)$, при любом $\zeta \in D^{(+)}$ будем иметь

$$\Psi_n(z;\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\Delta_n(t;\zeta)}{B_n(t)} \frac{dt}{t-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{(1-\overline{\zeta} t)(t-z)B_n(t)} - \sum_{k=1}^{n} \overline{r_k(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\Omega_{n,k}(t)}{B_n(t)(t-\zeta)}\, dt \equiv$$

$$\equiv J_1(z;\zeta) + J_2(z;\zeta), \quad z \in D^{(+)}. \tag{2.9}$$

Но в $J_1(z;\zeta)$ подынтегральная функция в области $D^{(-)}$ имеет лишь одну особую точку—простой полюс в точке $t=\frac{1}{\bar\zeta}$, а при $|t|\to\infty$ она имеет порядок $O(t^{-2})$. Поэтому, пользуясь теоремой о вычетах и очевидным тождеством

$$B_n^{-1}\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)=\overline{B_n(\zeta)},$$

мы получим

$$J_1(z;\zeta)=\frac{\overline{B_n(\zeta)}}{1-\bar\zeta z},\quad z,\ \zeta\in D^{(+)}. \tag{2.10}$$

Заметим теперь, что в силу второй формулы определения (1.10) функции $\Omega_{n,k}(z)$ имеем

$$\frac{\Omega_{n,k}(z)}{B_n(z)}=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}\,q_{n,k}(z)}{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

Поскольку $q_{n,k}(z)$ — полином степени $p_k(n)-s_k$, то эта функция регулярна всюду в области $\bar D^{(-)}$, причем при $|z|\to\infty$ имеет порядок $O(z^{-1})$.

Из этого замечания, очевидно, следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Omega_{n,k}(t)}{B_n(t)(t-z)}\,dt\equiv 0,\quad z\in D^{(+)}\ (1\leqslant k\leqslant n),$$

откуда непосредственно получим

$$J_2(z;\zeta)\equiv 0,\quad z,\ \zeta\in D^{(+)}.$$

Отсюда, и ввиду (2.10), формула (2.9) принимает вид

$$\Psi_n(z;\zeta)=\frac{\overline{B_n(\zeta)}}{1-\bar\zeta z},\quad z,\ \zeta\in D^{(+)}. \tag{2.9'}$$

Наконец, из (2.5), (2.6), (2.8) и (2.9′) приходим ко второму из тождеств (2.4′) теоремы. Поменяв местами переменные z и ζ, переходом к сопряженным значениям оттуда получим первое из тождеств теоремы.

2.2. Отметим некоторые следствия из предыдущих результатов.

(а) Следствие 1. *Для произвольных значений переменных z и ζ, и для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ справедливы тождества*

$$S_n(z;\zeta)\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{r_k(\zeta)}\,\Omega_{n,k}(z)\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\,r_k(z)\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z). \tag{2.11}$$

Это утверждение непосредственно следует из леммы 3 и теоремы 2.

Следствие 2. *Для произвольного фиксированного значения* n $(1 \leqslant n < +\infty)$ *семейства рациональных функций видов*

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k r_k(z)\right\} \text{ и } \left\{\sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(z)\right\} \tag{2.12}$$

совпадают.

В самом деле, положив

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k r_k(z)$$

и пользуясь теоремой 1, имеем

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Поэтому, в силу тождеств (2.11) будем иметь

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta)\, S_n(z;\zeta)\, |d\zeta| = \sum_{k=1}^{n} A_k^{*} \varphi_k(z),$$

где

$$A_k^{*} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Теперь, положив

$$\widetilde{R}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(z)$$

и пользуясь свойством (2.2) ортогональности системы $\{\varphi_k(z)\}_1^{\infty}$, будем иметь

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} R_n(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta| \, (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Следовательно, в силу тождества (2.11), получим

$$\widetilde{R}_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \widetilde{R}_n(\zeta)\, S_n(z;\zeta)\, |d\zeta| = \sum_{k=1}^{n} B_k^{*} r_k(z),$$

где

$$B_k^{*} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \widetilde{R}_n(\zeta) \overline{\Omega_{n,k}(\zeta)}\, |d\zeta| \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Таким образом, наше утверждение полностью доказано.

Следствие 3. *Среди всех рациональных функций вида*

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k r_k(z) \quad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{2.13}$$

минимум функционала

$$J[R_n] \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - R_n(z) \right|^2 |dz| \quad (|\zeta|<1) \tag{2.14}$$

реализует функция $S_n(z; \zeta)$, *причем*

$$\inf_{R_n} J[R_n] = J[S_n] = \frac{|B_n(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}. \tag{2.15}$$

Действительно, согласно следствию 2 семейства рациональных функций (2.12) совпадают.

Поэтому, положив

$$\tilde{R}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} B_k \varphi_k(z),$$

очевидно, имеем

$$\inf_{R_n} J[R_n] = \inf_{\tilde{R}_n} J[\tilde{R}_n]. \tag{2.16}$$

Заметим далее, что при $\zeta \in D^{(+)}$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} \overline{\varphi_k(z)} |dz| = \overline{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{\varphi_k(z)}{1-\zeta \bar{z}} |dz|} =$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\varphi_k(z)}{z-\zeta} dz} = \overline{\varphi_k(\zeta)} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Отсюда следует, что с функцией $\dfrac{1}{1-\bar{\zeta} z}$, $z \in D^{(+)}$ можно ассоциировать следующий формальный ряд Фурье по ортонормальной системе $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$:

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\varphi_k(\zeta)} \varphi_k(z).$$

Поэтому, в силу экстремального свойства отрезков $S_n(z; \zeta)$ этого ряда можем утверждать, что

$$\inf_{\tilde{R}_n} J[\tilde{R}_n] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| \frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - S_n(z; \zeta) \right|^2 |dz|.$$

Наконец, поскольку в силу леммы 3

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z} - S_n(z; \zeta) \equiv \frac{\overline{B_n(\zeta)} B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z}$$

и поэтому

$$\inf_{\bar{R}_n} J[\bar{R}_n] = \frac{|B_n(\zeta)|^2}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|1-\bar{\zeta}z|^2} = \frac{|B_n(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2},$$

то в силу равенства (2.16) наше утверждение (2.15) доказано.

Следствие 4. *Для любого* $\zeta \in D^{(+)}$ *и* n $(1 \leqslant n < +\infty)$ *минимум функционала*

$$U[R_n] = \max_{|z|=1} \left\{ |1-\bar{\zeta}z| \left| \frac{1}{1-\bar{\zeta}z} - R_n(z) \right| \right\} \tag{2.17}$$

на семействе рациональных функций вида (2.13) *реализует функция* $S_n(z;\zeta)$, *причем*

$$\inf_{R_n} U[R_n] = U[S_n] = |B_n(\zeta)|. \tag{2.18}$$

Действительно, из (2.14) и (2.17) имеем

$$J[R_n] \leqslant U^2[R_n] \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|1-\bar{\zeta}z|^2} = \frac{U^2[R_n]}{1-|\zeta|^2},$$

откуда и из (2.15) следует неравенство

$$\inf_{R_n} U[R_n] \geqslant |B_n(\zeta)|.$$

С другой стороны, пользуясь тождеством (2.3) леммы 3 или тождеством (2.4) теоремы 2, получим равенство

$$U[S_n] = |B_n(\zeta)|,$$

что в силу предыдущего неравенства приводит нас к утверждению (2.18).

В заключение приведем некоторые общие замечания о поведении отрезков рядов Фурье по нашим биортогональным системам.

(б) Пусть $f(e^{i\theta})$ — произвольная функция из класса $L(0, 2\pi)$, и

$$S_n(z;f) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\,\varphi_k(z), \tag{2.19}$$

где

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt| \quad (k=1, 2, \cdots) \tag{2.19'}$$

суть n-ый отрезок ее ряда Фурье по системе Мальмквиста.

Тогда, обозначив

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{r_k(t)}\,|dt|,$$

$$b_k^{(n)}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\Omega_{n,k}(t)}\,|dt| \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{2.20}$$

и воспользовавшись тождествами (2.11), мы заключаем, что сумма $\sigma_n(z; f)$ допускает также представления вида

$$S_n(z; f) \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)}(f)\, r_k(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, \Omega_{n,k}(z). \tag{2.21}$$

Ввиду известного экстремального свойства функции $S_n(z; f)$, из тождеств (2.21) вытекает следующее

Следствие 5. *Если* $f(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$, *то для любого* n $(1 \leqslant \leqslant n < +\infty)$

$$\inf_{\{b_k\}} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k r_k(z)\right|^2 |dz| =$$

$$= \inf_{\{c_k\}} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k \Omega_{n,k}(z)\right|^2 |dz| = \tag{2.22}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z) - S_n(z; f)|^2 |dz| \equiv \delta_n(f),$$

причем нижние грани достигаются, когда, соответственно

$$b_k = b_k^{(n)}(f), \quad c_k = c_k(f) \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{2.23}$$

(в) Если $f(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ суть граничные значения некоторой функции $f(z)$, принадлежащей в круге $D^{(+)}$ классу H_2 Харди, то хорошо известно ([8], [9], [4]), что для замкнутости системы функций $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ в классе H_2, т. е. для справедливости равенства

$$\lim_{n \to +\infty} \delta_n(f) = 0, \ f \in H_2$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty. \tag{2.24}$$

Ввиду равенств (2.21) условие (2.24) остается в силе и для замкнутости системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в том же смысле.

В случае, когда $f(e^{i\theta}) \in L_p$ суть граничные значения функции $f(z) \in H_p$, из одного результата А. А. Китбаляна [11] следует, что при $1 < p < +\infty$ условие (2.24) достаточно также для замкнутости системы $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ в метрике

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{|z|=1} \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\, \varphi_k(z)\right|^p |dz| = 0. \tag{2.25}$$

Из результатов Г. Ц. Тумаркина [12] следует, что для (2.25) условие (2.24) также необходимо.

Из указанных результатов, ввиду тождеств (2.21) вытекает

Следствие 6. *Для того чтобы для произвольной функции $f(z) \in H_p$ $(1 < p < +\infty)$ имело место*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)}(f)\, r_k(z) \right|^p |dz| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\, \Omega_{n,k}(z) \right|^p |dz| = 0, \tag{2.26}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (2.24).

(в) Пусть последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$, порождающая систему $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$, удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty \tag{2.27}$$

и, таким образом, система Мальмквиста не замкнута в H_p $(1 < p < +\infty)$.

Как известно ([12], [4]), в этом случае аппроксимацию вида (2.25), и следовательно, видов (2.26), допускают *лишь* функции $f(z)$ из класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$, которые на окружности $z = e^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$ одновременно являются граничными значениями некоторой функции $f(z) \in H_p$ в круге $D^{(+)}$, и некоторой мероморфной в области $D^{(-)}$ функции, допускающей представление вида

$$f(z) = \frac{B(z)}{z} \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tilde{f}(z) \in H_p.$$

С другой стороны, при условии (2.27), согласно теореме 1 системы функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_{\infty,k}(z)\}_1^\infty$ также биортогональны на окружности $|z| = 1$. Поэтому в этом случае для каждой функции $f(z) \in \lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ могут быть составлены формальные ряды типа Фурье по этим системам

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\, \Omega_{\infty,k}(z), \tag{2.28}$$

где

$$b_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f(t)\, \overline{\Omega_{\infty,k}(t)}\, |dt| = \lim_{n \to +\infty} b_k^{(n)} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

а также

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\, \Omega_{\infty,k}(z), \tag{2.28'}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f(t)\, \overline{r_k(t)}\, |dt| \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

В связи с формальными разложениями (2.28) и (2.28′), естественно ставить задачу о природе их сходимости как в областях $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$, так и на их общей границе — на единичной окружности $|z|=1$*.

§ 3. Биортогональные системы, порожденные ограниченными континуумами

3.1 (а) Пусть K — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, и $G^{(-)}$—та из смежных с ним компонент, которая содержит точку $z=\infty$. Очевидно, что $G^{(-)}$ является односвязной областью расширенной плоскости z, граница Γ которой принадлежит континууму K.

Пусть функция

$$w=\Phi(z)\ \ (z=\Psi(w)), \tag{3.1}$$

подчиненная условиям нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, конформно отображает область $G^{(-)}$ на внешность единичного круга $D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}$.

Очевидно, что в окрестности точки $z=\infty$, а именно, при $|z|>R_0=\sup\limits_{\zeta\in K}\{|\zeta|\}$ имеют место следующие разложения в ряд Лорана:

$$\Phi(z)=\tau z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\cdots,$$

$$\Phi'(z)=\tau-\frac{\alpha_1}{z^2}-\frac{2\alpha_2}{z^3}-\cdots. \tag{3.2}$$

(б) Пусть $\{\omega_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел (в том числе возможно и равных ∞), лежащих в области $G^{(-)}$.

Определим теперь другую последовательность комплексных чисел $\{\alpha_j(\omega)\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j(\omega)|<1)$, положив

$$\alpha_j(\omega)=\begin{cases}\overline{[\Phi(\omega_j)]^{-1}}, & \text{при } \omega_j\neq\infty,\\ 0, & \text{при } \omega_j=\infty.\end{cases} \tag{3.3}$$

В данном параграфе впредь будем предполагать, что система рациональных функций $\{r_k(w)\}_1^\infty$, определенная нами в § 1, ассоциирована именно с последовательностью $\{\alpha_j(\omega)\}_1^\infty$, т. е.

$$r_k(w)=\frac{(s_k-1)!\ w^{s_k-1}}{(1-\Phi^{-1}(\omega_j)\,w)^{s_k}}\quad(1\leqslant k<+\infty). \tag{3.4}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что s $(0\leqslant s\leqslant 1)$—произвольный параметр и введем в рассмотрение последовательность функций

---

* Полное решение этой задачи в случае, когда точки последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ *отличны друг от друга,* содержится в публикуемой в следующем номере журнала статье Г. М. Айрапетяна.

$$\Psi_k^{(s)}(z) \equiv r_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^s =$$

$$= \frac{(s_k-1)!\,[\Phi(z)]^{s_k-1}\,[\Phi'(z)]^s}{[1-\Phi^{-1}(\omega_j)\,\Phi(z)]^{s_k}} \quad (1 \leqslant k < +\infty). \tag{3.5}$$

Заметим, что функция $\Psi_k^{(s)}(z)$ регулярна* в области $G^{(-)}$ за исключением точки $z=\omega_k$, где она имеет полюс порядка s_k, если $\omega_k \neq \infty$ и порядка s_k-1, если $\omega_k=\infty$. Заметим также, что если $\omega_k \neq \infty$, то как следует из (3.2) и (3.5), $\Psi_k^{(s)}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, при $z \to \infty$.

Обозначим теперь через $m_k^{(s)}(z)$ главную часть функции $\Psi_k^{(s)}(z)$ в окрестности точки $z=\omega_k$, если $\omega_k \neq \infty$; если же $\omega_k=\infty$, то под $m_k^{(s)}(z)$ будем понимать главную часть той же функции $\Psi_k^{(s)}(z)$ в окрестности точки $z=\omega_k=\infty$ вместе с постоянной в ее разложении в ряд Лорана. Таким образом, если при данном k $(1 \leqslant k < +\infty)$, $\omega_k \neq \infty$, то $m_k^{(s)}(z)$—рациональная функция вида

$$m_k^{(s)}(z) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}}{(z-\omega_k)^j}, \quad a_{s_k}^{(k)} \neq 0, \tag{3.6}$$

если же $\omega_k=\infty$, то $m_k^{(s)}(z)$—полином степени s_k-1:

$$m_k^{(s)}(z) = \sum_{j=0}^{s_k-1} b_j^{(k)} z^k, \quad b_{s_k-1}^{(k)} \neq 0. \tag{3.6'}$$

Из нашего определения непосредственно следует, что при любом k $(1 \leqslant k < +\infty)$

$$\Psi_k^{(s)}(z) - m_k^{(s)}(z) \equiv r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s - m_k^{(s)}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \; z \to \infty. \tag{3.7}$$

Назовем систему рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ *системой функций, порожденной континуумом K и последовательностью чисел* $\{\omega_k\}_1^\infty \subset G^{(-)}$.

Отметим, что система $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ представляет собой естественное обобщение известной системы полиномов Фабера и ее модификаций.

В самом деле, положим, что все полюсы $\{\omega_k\}_1^\infty$, порождающие нашу систему $m_k^{(s)}(z)$, лежат в бесконечности, т. е. $\omega_k=\infty$ $(1 \leqslant k < \infty)$. Тогда, очевидно, будем иметь $s_k=k$ $(k \geqslant 1)$, и поэтому, по (3.4), $r_k(w)=(k-1)!\,w^{k-1}$ $(k \geqslant 1)$. Следовательно, в рассматриваемом случае функция $m_k^{(s)}(z)$ определяется как совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановском разложении функции $(k-1)!\,[\Phi(z)]^{k-1}\,[\Phi'(z)]^s$ в окрестности точки $z=\infty$. Это значит, что

---

* поскольку таковы функции $\Phi(z)$ и $\Phi'(z)$, причем $\Phi'(z) \neq 0$, $z \in G^{(-)}$.

в силу формулы (3.2) можно утверждать, что для любого $k \geqslant 0$ функция $\dfrac{m_{k+1}^{(s)}(z)}{k!}$ будет полиномом степени k вида

$$\frac{m_{k+1}^{(s)}(z)}{k!} = \tau^{k+s} z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \cdots + a_0^{(k)}.$$

Отсюда, в частности, следует, что функции $m_k^{(0)}(z)$ и $m_k^{(1)}(z)$ связаны с известными полиномами Фабера первого и второго рода $\Phi_k^{(1)}(z)$ и $\Phi_k^{(2)}(z)$ соотношениями вида

$$\Phi_k^{(1)}(z) = \tau^{-k} \frac{m_{k+1}^{(0)}(z)}{k!}, \quad \Phi_k^{(2)}(z) = \tau^{-k-1} \frac{m_{k+1}^{(1)}(z)}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \cdots).$$

(в) Определив систему рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$, установим для них интегральное представление.

С этой целью обозначим через Γ_ρ $(1 < \rho < +\infty)$ образ окружности $|w| = \rho$ на плоскости z при отображении $z = \Psi(w)$ области $D^{(-)} = \{w;\ |w| > 1\}$ на область $G^{(-)}$.

Пусть, далее, $G_\rho^{(-)} \subset G^{(-)}$ есть внешняя область, ограниченная контуром Γ_ρ, а $G_\rho^{(+)} \supset K$ — дополнительная к ней область плоскости z, имеющая ту же границу Γ_ρ.

Лемма 4. *Пусть при данном* k $(1 \leqslant k < +\infty)$ ρ *является произвольным числом из интервала*

$$1 < \rho < \rho_k = |\Phi(\omega_k)|, \tag{3.8}$$

тогда

1) *для любого* $z \in G_\rho^{(+)}$, *и в частности при* $z \in K$ *справедлива формула*

$$m_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta; \tag{3.9}$$

2) *для любого* $z \in G_\rho^{(-)}$ *справедлива формула*

$$m_k^{(s)}(z) = r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.10}$$

Доказательство. Функция

$$r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s - m_k^{(s)}(z)$$

регулярна и ограничена в области $G_\rho^{(-)}$, причем согласно (3.7) в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ она имеет нуль порядка не ниже первого. Поэтому, согласно теореме Коши будем иметь в любой точке $z \in G_\rho^{(+)}$ $(1 < \rho < +\infty)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s-m_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv 0. \tag{3.11}$$

Если для данного значения $k\geqslant 1$ параметр ρ удовлетворяет условию (3.8), то функция $m_k^{(s)}(z)$, как уже отмечалось, регулярна в замкнутой области $\overline{G}_\rho^{(+)}$. Поэтому, очевидно, что

$$m_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{m_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G_\rho^{(+)},$$

откуда и из (3.11) вытекает представление (3.9) леммы.

2) Как следует из условия (3.8), $\omega_k\in G_\rho^{(-)}$. Предположим, что $z\neq\omega_k$ — произвольная точка области $G_\rho^{(-)}$.

Выберем число $\rho_0>\rho$ таким образом, чтобы точка $z=z_0$, а также точка $z=\omega_k$, если $\omega_k\neq\infty$, принадлежали области $G_{\rho_0}^{(+)}$. Тогда, с одной стороны, по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\,d\zeta-$$
$$-r_k[\Phi(z_0)][\Phi'(z_0)]^s-\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta=\omega_k\\ \omega_k\neq\infty}}\left\{\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\right\}^* \tag{3.12}$$

с другой стороны, из уже установленной нами формулы (3.9) леммы 4 следует, что если $z\in G_\rho^{(+)}$, то

$$m_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta-$$
$$-\operatorname*{Res}_{\substack{\zeta=\omega_k\\ \omega_k\neq\infty}}\left\{\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\right\}^*. \tag{3.13}$$

Однако, первое слагаемое, стоящее справа в (3.13), регулярно всюду в области $G_{\rho_0}^{(+)}$, а второе, — очевидно, является рациональной функцией от z. Поэтому представление (3.13) остается справедливым всюду в области $G_\rho^{(+)}$ и, в частности, в точке $z=z_0$. Следовательно, из (3.12) и (3.13) вытекает формула (3.10) леммы.

В заключение отметим, что интегральные члены, стоящие в обеих формулах (3.9) и (3.10) леммы 4, могут быть заменой переменного интегрирования $\Phi(\zeta)=t$, $\zeta=\Psi(t)$ записаны также в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{r_k(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{\Psi(t)-z}\,dt. \tag{3.14}$$

---

* Таким образом, если при данном $k\geqslant 1$ $\omega_k=\infty$, то это слагаемое просто отпадает.

3.2 (а) Всюду дальше мы будем предполагать, что континуум K представляет собой замыкание односвязной области $G^{(+)}$, ограниченной *замкнутой спрямляемой кривой* Г. Тогда, как известно, кривая Г одновременно является полной границей для единственной смежной с континуумом $K=\overline{G}^{(+)}$ области $G^{(-)}$, содержащей точку $z=\infty$.

Для функции $z=\Psi(w)$, конформно отображающей область $D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}$ на внешность $G^{(-)}$ области $G^{(+)}$, справедливы следующие утверждения*:

1°. *Для любого* p $(0\leqslant p<1)$

$$\sup_{1<r<\infty}\left\{\int_0^{2\pi}|\Psi'(re^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta\right\}<+\infty; \tag{3.15}$$

2°. *Почти для всех* $\vartheta\in[0,2\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r\to 1+0}\Psi'(re^{i\vartheta})=\Psi'(e^{i\vartheta})\in L(0,2\pi), \tag{3.16}$$

причем

$$\lim_{r\to 1+0}\int_0^{2\pi}|[\Psi'(e^{i\vartheta})]^p-[\Psi'(re^{i\vartheta})]^p|\,d\vartheta=0. \tag{3.17}$$

В рассматриваемом нами случае, когда Г — замкнутая спрямляемая кривая Жордана, из леммы 4 вытекает

Лемма 4′. *Для функций системы* $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ *имеют место следующие формулы представления:*

1) *при* $z\in G^{(+)}$

$$m_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{r_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw\quad(k=1,2,\cdots); \tag{3.18}$$

2) *При* $z\in G^{(-)}$

$$m_k^{(s)}(z)-r_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{r_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{r_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw \tag{3.19}$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

Действительно, заметим сперва, что поскольку особенность функции $r_k(w)$ находится в точке $w=1/\overline{\alpha}_k(w)=\Phi(\omega_k)$, то она непрерывна в любом замкнутом кольце $1\leqslant|t|\leqslant\rho<\rho_k=|\Phi(\omega_k)|$.

Рассмотрим далее функцию

* См. [4], лемму 2.

$$\frac{r_k(w)}{\Psi(w)-z},\quad z\overline{\in}\Gamma \tag{3.20}$$

и отметим, что она непрерывна в каждом кольце $1\leqslant|t|\leqslant\rho$, если при $z\in G^{(+)}$, $\rho<\rho_k$, а при $z\in G^{(-)}$, $\rho<\min(\rho_k, |\Phi(z)|)$. Теперь, принимая во внимание формулу (3.17) и отмеченное свойство непрерывности функции (3.20), при фиксированном $z\overline{\in}\Gamma$ и любом s $(0\leqslant s\leqslant 1)$ будем иметь

$$\lim_{\rho\to 1+0}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{r_k(w)\,[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw=\int\limits_{|w|=1}\frac{r_k(w)\,[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\frac{r_k[\Phi(\zeta)]\,[\Phi'(\zeta)]^{s}}{\zeta-z}\,d\zeta\qquad(k=1,2,\cdots). \tag{3.21}$$

Наконец, переходя к пределу в формулах (3.9), приходим к требуемым представлениям (3.18) и (3.19).

(б) Выше, посредством формулы (3.4), мы определили систему рациональных функций $\{r_k(w)\}_1^{\infty}$, ассоциированную с последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j(\omega)\}_1^{\infty}$, где $\alpha_j(\omega)=[\overline{\Phi(\omega_j)}]^{-1}$ $(j\geqslant 1)$.

С последовательностью чисел $\{\alpha_j(\omega)\}_1^{\infty}$ мы можем ассоциировать систему функций $\{\Omega_{n,k}(w)\}_1^{n}$ $(1\leqslant n\leqslant+\infty)$, биортогональную с системой $\{r_k(w)\}_1^{n}$ на окружности $|w|=1$, согласно теореме 1, предполагая при этом, что в случае $n=+\infty$ соблюдается условие

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\alpha_j(\omega)|)=\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_j)|^{-1})<+\infty. \tag{3.22}$$

Как следует из определения (1.10), если $1<n<+\infty$, то функции $\Omega_{n,k}(w)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ рациональны и имеют полюса лишь на множестве точек $\{1/\overline{\alpha_j(\omega)}\}_1^{n}\subset D^{(-)}$, если же $n=+\infty$, то функции $\Omega_{\infty,k}(w)$, $1\leqslant k<+\infty$ регулярны и ограничены в круге $D^{(+)}$.

Теперь, наряду с системой рациональных функций $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^{\infty}$, порожденной континуумом $K=\overline{G}^{(+)}$, введем в рассмотрение еще систему функций $\{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}_1^{n}$ $(1\leqslant n\leqslant+\infty)$, регулярных в области $G^{(-)}$, положив

$$\rho_{n,k}^{(s)}(z)=\frac{[\Phi'(z)]^{1-s}}{\Phi(z)}\,\overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)\;[(1\leqslant k\leqslant n). \tag{3.23}$$

Заметив, что при любом n $(1<n\leqslant+\infty)$ и k $(1\leqslant k\leqslant n)$

$$\sup_{z\in G^{(-)}}\left|\overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right)\right|\leqslant M_{n,k}<+\infty$$

и поэтому, согласно утверждениям 1° и 2°

$$\int\limits_{\Gamma}|\rho_{n,k}(\zeta)|\,|d\zeta|<M_{n,k}\int\limits_{\Gamma}|\Phi'(\zeta)|^{1-s}\,|d\zeta|=$$

$$= M_{n,k} \int\limits_{|t|=1} |\Psi'(t)|^s \, |dt| < +\infty, \tag{3.24}$$

докажем теорему.

Теорема 3. *Системы функций*

$$\{m_k^{(s)}(z)\}_1^n \text{ и } \{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}_1^n \quad (1 < n \leqslant +\infty) \tag{3.25}$$

биортогональны на общей границе Γ *областей* $G^{(+)}$ *и* $G^{(-)}$ *в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_\nu^{(s)}(\zeta)\, \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \delta_{\nu,k} = \begin{cases} 1, & k = \nu \\ 0, & k \neq \nu \end{cases} \quad (1 \leqslant k,\ \nu \leqslant n). \tag{3.26}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_\nu^{(s)}(\zeta)\, \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} m_\nu^{(s)}(\zeta) \left\{ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right)\right\} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \{m_\nu^{(s)}(\zeta) - r_\nu[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s\} \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) d\zeta + \tag{3.27}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} r_\nu[\Phi(\zeta)] \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) d\zeta = J_1 + J_2.$$

Но согласно (3.7), при $\zeta \to \infty$

$$m_\nu^{(s)}(\zeta) - r_\nu[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s = O\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

а в силу (3.2) и регулярности функции $\Omega_{n,k}(w)$ в круге $D^{(+)}$ имеем также

$$\frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right),\ \zeta \to \infty.$$

Поскольку, таким образом, подынтегральная функция в J_1 при $\zeta \to \infty$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$, то отсюда легко заключаем, что $J_1 = 0$.

Обращаясь к интегралу J_2, после замены переменной $t = \Phi(\zeta)$ получим согласно теореме 1

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} r_\nu(t) \left\{\frac{1}{t} \overline{\Omega}_{n,k}\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} r_\nu(t)\, \overline{\Omega_{n,k}(t)}\, |dt| = \delta_{\nu,k}.$$

Наконец, отсюда и из тождества (3.27) вытекает утверждение (3.26) теоремы ввиду того, что $J_1 \equiv 0$.

(в) Функции системы $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ регулярны в замкнутой области $\overline{G}^{(+)}$, и поэтому представимы интегральной формулой Коши

$$m_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{m_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^{(+)} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.28}$$

Но эти формулы можно трактовать таким образом: при любом $k \geqslant 1$ функция $m_k^{(s)}(z)$ является k-тым коэффициентом Фурье ядра Коши $\dfrac{1}{\zeta - z}$ $(z \in G^{(+)},\ \zeta \in \Gamma)$ относительно системы функций $\{m_k^{(s)}(\zeta)\}_1^n$ $(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$, биортогональной с системой $\{\rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\}_1^n$ на контуре Γ, согласно теореме 3.

Таким образом, в предположении, что при $n = +\infty$ соблюдается условие (3.22) для любого n $(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$, естественно принять, что для ядра Коши $\dfrac{1}{\zeta - z}$ формальное разложение в ряд Фурье по биортогональной системе (3.25) имеет вид

$$\frac{1}{\zeta - z} \sim \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, m_k^{(s)}(z); \quad \zeta \in \Gamma,\ z \in G^{(+)}. \tag{3.29}$$

Следующая теорема, являющаяся существенным обобщением теоремы 2, служит важной основой для сделанного выше замечания.

Теорема 4. *Для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, m_k^{(s)}(z) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{B_n[\Phi(\zeta)]}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{B_n[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]}\, d\eta, \quad \zeta \in G^{(-)},\ z \in G^{(+)}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Полагая, что точка $z \in G^{(+)}$ фиксирована, рассмотрим функцию

$$\chi_s(w; z) = \frac{[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}, \tag{3.31}$$

очевидно, регулярную в области $D^{(-)} = \{w;\ |w| > 1\}$. Тогда легко видеть, что функция

$$\chi_s^*(w; z) = \frac{1}{w}\,\overline{\chi_s\left(\frac{1}{\overline{w}};\ \overline{z}\right)} \tag{3.32}$$

будет уже регулярной в единичном круге $D^{(+)} = \{w;\ |w| < 1\}$.

Обозначая

$$d(z) = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z| > 0,$$

для любого $|w| = \rho > 1$ будем иметь

$$|\Psi(w) - z| \geqslant d(z).$$

Поэтому, из (3.25) в силу (3.15) следует, что

$$\overline{\lim_{\rho \to 1+0}} \int_0^{2\pi} |\chi_s(\rho e^{i\vartheta};\ z)|\, d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-1} \overline{\lim_{\rho \to 1+0}} \int_0^{2\pi} |\Psi'(\rho e^{i\vartheta})|^{1-s}\, d\vartheta < +\infty. \tag{3.33}$$

Наконец, из (3.32) имеем при $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |\chi_s^*(re^{i\vartheta};\ z)|\, d\vartheta = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \left|\chi_s\left(\frac{1}{r} e^{-i\vartheta};\ z\right)\right| d\vartheta,$$

откуда, в силу неравенства (3.33), можем утверждать, что функция $\chi_s^*(w;\ z)$ по переменной $w \in D^{(+)}$ принадлежит классу H_1 Харди.

Следовательно, функция $\chi_s^*(w;\ z)$ представима интегралом Коши через свои граничные значения на единичной окружности

$$\chi_s^*(w;\ z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\chi_s^*(t;\ z)}{1 - w\bar{t}}\, |dt|, \quad w \in D^{(+)}. \tag{3.34}$$

Заметив теперь, что согласно (3.32)

$$\overline{\chi_s^*(t;\ z)} = t\,\chi_s(t;\ w), \quad |t| = 1$$

после перехода к сопряженным значениям формулу (3.34) можно записать в виде

$$\frac{1}{\bar{w}}\, \chi_s\left(\frac{1}{\bar{w}};\ z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\chi_s(t;\ z)}{1 - \bar{w}t}\, dt, \quad \bar{w} \in D^{(+)}. \tag{3.34'}$$

Отметим, далее, что при $\bar{w} \in D^{(+)}$ будем иметь $\zeta = \Psi\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) \in G^{(-)}$, и следовательно, $\bar{w} = 1/\Phi(\zeta)$. Но после таких замен, принимая во внимание определение (3.31) функции $\chi_s(w;\ z)$, формула (3.34′) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\chi_s(t;\ z)}{1 - t/\Phi(\zeta)}\, dt, \quad \zeta \in G^{(-)}. \tag{3.35}$$

Заметим, наконец, что согласно теореме 2, вообще для любого $\zeta \in G^{(-)}$, т. е. $\Phi(\zeta) \in D^{(-)}$ и t справедливо тождество

$$\frac{1}{1-t/\Phi(\zeta)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega_{n,k}\left(\frac{1}{\overline{\Phi(\zeta)}}\right)}\, r_k(t) + \frac{\overline{B_n\left(\frac{1}{\overline{\Phi(\zeta)}}\right)} B_n(t)}{1-t/\Phi(\zeta)}. \tag{3.36}$$

Подставляя значение функции $[1-t/\Phi(\zeta)]^{-1}$ из (3.36) под интеграл (3.35) и заметив, что согласно формуле (3.18) леммы 4′, при $z \in G^{(+)}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \chi_s(t;\, z)\, r_k(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{r_k(t)\,[\Psi'(t)]^{1-s}}{\Psi(t)-z}\, dt = m_k^{(s)}(z) \quad (k=1,\, 2, \cdots),$$

приходим к тождеству

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \sum_{k=1}^{n} \overline{\Omega_{n,k}}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) m_k^{(s)}(z) +$$

$$+ [\Phi'(\zeta)]^{1-s}\, \overline{B}_n\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{B_n(t)\,\chi_s(t, z)}{\Phi(\zeta)-t}\, dt, \quad \zeta \in G^{(-)}, \quad z \in G^{(+)}. \tag{3.35'}$$

Отметим, наконец, что ввиду очевидного тождества $\overline{B}_n\left(\frac{1}{w}\right) = B_n^{-1}(w)$, пользуясь определениями (3.23) и (3.31) системы $\{\rho_{n,k}^{(s)}(z)\}_1^n$ и функции $\chi_s(w;\, z)$, мы приходим к формуле (3.30) теоремы, так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{B_n(t)\,\chi_s(t;\, z)}{\Phi(\zeta)-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{B_n[\Phi(\eta)]\,[\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta)-\Phi(\eta)]}\, d\eta.$$

г) В заключение отметим, что в работе [4] была установлена формула представления ядра Коши с помощью других систем функций — $\{M_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ и $\{R_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$. Эти системы определялись таким образом.

Положим, что $\{\varphi_k(z)\}_1^\infty$ — система Мальмквиста, ассоциированная с последовательностью комплексных чисел (3.3) — $\{\alpha_j(\omega)\}_1^\infty$. Функция $M_k^{(s)}(z)$ определялась аналогично функции $m_k^{(s)}(z)$ посредством главной части выражения

$$\varphi_k[\Phi(z)]\,[\Phi'(z)]^s \quad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

в окрестности точек $\{\omega_j\}_1^k$, а функция $R_k^{(s)}(z)$ — посредством формулы

$$R_k^{(s)}(z) = \frac{[\Phi'(z)]^{1-s}}{\Phi(z)}\, \overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right), \quad z \in G^{(-)}.$$

Тождество, аналогичное формуле (3.30) теоремы 4 посредством этих систем, имело вид*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{n} R_k^{(s)}(\zeta)\, M_k^{(s)}(z) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{B_n[\Phi(\zeta)]}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{B_n[\Phi(\eta)]\,[\Phi'(\eta)]^{s}}{(\eta - z)\,[\Phi(\zeta)-\Phi(\eta)]}\,d\eta,\quad z\in G^{(+)},\ \zeta\in G^{(-)}. \qquad (3.37)$$

Из сравнения тождеств (3.30) и (3.37) непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. *Для любого* $n\ (1\leqslant n<+\infty)$ *справедливы тождества*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_{n,k}^{(s)}(\zeta)\, m_k^{(s)}(z) \equiv \sum_{k=1}^{n} R_k^{(s)}(\zeta)\, M_k^{(s)}(z),\quad \zeta\in G^{(-)},\ z\in G^{(+)}. \qquad (3.38)$$

Тождество (3.38) дает нам возможность трактовать ряд основных результатов работы [4] о разложениях по системам вида $\{M_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ в терминах, введенных в данной статье, более простых по своей природе систем простых дробей $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$. На этом, однако, мы останавливаться не будем.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.X.1973

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Ռացիոնալ ֆունկցիաների բիօրթոգոնալ սիստեմներ և Կոշու կորիզի ներկայացումներ *(ամփոփում)*

Մալմքվիստի և Տակենակայի կողմից ([7]—[8]) մտցվել են ֆիքսված բևեռներով ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմներ՝ օրթոնորմավորված $|z| = 1$ շրջանագծի վրա։

Հեղինակի մի շարք աշխատանքներում ([1]—[4]) այս սիստեմների և դրանց հիման վրա կազմված (ֆաբերի բազմանդամներին համանման) ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների միջոցով, որոնք առաջանում են K կոնտինուումից և այդ սիստեմների բևեռներ հանդիսացող $\{\omega_k\}_1^\infty \subset K$ կետերի հաջորդականությունից, ստացվել են Կոշու կորիզի ներկայացումներ շրջանում և ուղղելի եզրով ժորդանյան տիրույթներում։

Նշված ներկայացումները թույլ տվեցին բացահայտելու, որ անալիտիկ ֆունկցիաների պատշաճ դասերում, որոնք էապես կախված են վերոհիշյալ սիստեմների բևեռների տեղաբաշխումից, այդ սիստեմները այս կամ այն իմաստով բազիս են կազմում։

Ներկա աշխատանքում առաջարկվում է Կոշու կորիզի ներկայացման խնդրի մեկ այլ մոտեցում նախօրոք տրված բազմապատկության ֆիքսված բևեռներ ունեցող պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների միջոցով։ Այս մոտեցումը հիմնվում է շրջանագծի կամ ուղղելի ժորդանյան տիրույթի եզրի վրա բիօրթոգոնալ ռացիոնալ ֆունկցիաների հատուկ սիստեմների կառուցման վրա։

* См. [4], формулу (4.8).

M. M. JRBASHIAN (Džrbašian). *Biorthogonal systems of rational functions and representations of Cauchy kernel* (summary)

Malmquist and Takenaka [7]—[8] had introduced systems of rational functions with fixed poles, orthonormal on the circumference $|z|=1$.

In a series of papers by the author [1]—[4] representations of Cauchy kernel have been established in the circle and in Jordan domains with rectifiable boundaries by means of these systems and systems of rational functions formed on their basis (analogues of Faber polynomials), generated by the continuum K and the sequence of numbers $\{\omega_k\}_1^\infty \overline{\subset} K$ — the poles of these systems.

The indicated representations permitted to show that in proper classes of analytical functions, essentially depending on the distribution of poles of the mentioned above systems, the letter form bases in this or that sense.

In the present paper another approach to the problem of representation of Cauchy kernel is offered this time by means of simplest fractions with fixed poles of prescribed multiplicity. Thy approach is based on the construction of special systems of rational functions biorthogonal on the circumference or the boundary of a Jordan domain with rectifiable boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 9, № 7, 1956, 3—28.
2. *М. М. Джрбашян.* О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 10, № 1, 1957, 21—29.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143, № 1, 1962, 17—20.
4. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
5. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 4, № 1, 1961, 9—31.
6. *М. М. Джрбашян.* Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле-Тейлора, Мат. сб. 91 (133): 4 (8), 1973, 580—626.
7. *E. Malmquist.* Sur la détermination d'une classe de fonctions analytique par lerusvaleurs dans un ensemble donné de points, comptes rendus du simième congrès (1925) des mathèmaticiens Scandinaves, Kopenhagen, 1926, 253—259.
8. *S. Takenaka.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japanese journal of mathematics, 2, 1925, 129—145.
9. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.
10. *М. М. Джрбашян.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 1, 1966, 3—24.
11. *А. А. Китбалян.* Разложения по обобщенным тригонометрическим системам, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 16, № 6, 1964, 3—24.
12. *Г. Ц. Тумаркин.* Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 2, 1966, 89—105.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

В. А ШМАТКОВ

ОДНОСТОРОННЯЯ АППРОКСИМАЦИЯ С ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задачи аппроксимации функций с одновременной интерполяцией рассматривались в работах Пашковского [1], Ямабе [2], Зингера [3], Волибнера [4], Де Ворэ [5] и других авторов.

В работах [4] и [5] на аппроксимирующие элементы помимо интерполяционных условий накладывались дополнительные ограничения. Интерполяции функций нескольких переменных также посвящено много работ (см., например, [6] и цитированную там литературу. Вопросы полиномиального одностороннего приближения функций нескольких переменных с одновременной интерполяцией без фиксации узлов интерполирования рассматривались в работах Чакалова [7].

В настоящей заметке рассматривается задача односторонней аппроксимации с одновременной интерполяцией непрерывных функций нескольких переменных посредством элементов всюду плотных многообразий. Устанавливаются условия, при которых возможна как угодно хорошая односторонняя аппроксимация функции при ее интерполяции в конечном числе заданных узлов. Как показано далее, условие равномерной плотности аппроксимирующего многообразия не является еще достаточным для такого приближения даже в случае, когда приближаемая функция и функции многообразия предполагаются как угодно гладкими.

Ради упрощения, теоремы формулируются и доказываются для случая функций двух переменных.

Рассмотрим на плоскости XOY открытое множество $D=\{u\equiv(x, y)\}$. Через $C^q(D)$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных функций $F(u)$, имеющих на D ограниченные непрерывные частные производные до порядка q включительно, с нормой

$$\|F\| = \max_{\substack{l=0,1,\cdots,q\\ s=1,\cdots,l}} \sup_{u\in D} \left|\frac{\partial^{(l)}F(u)}{\partial x^s\,\partial y^{l-s}}\right|.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, вытекающая из одной теоремы Ямабе [2].

Лемма. *Пусть f_i $(i=1,\cdots,m)$ — линейно независимые линейные функционалы, заданные на банаховом пространстве B, и M — линейное всюду плотное многообразие в B. Тогда для любых $z\in B$ и $\varepsilon>0$ найдется элемент $v\in M$ такой, что*

$$f_i(v)=f_i(z),\ i=1,\cdots,k;\ f_i(v)>f_i(z),\ i=k+1,\cdots,m,\ \|v-z\|<\varepsilon.$$

Действительно, по теореме Ямабе [2] существует $w \in M$ такой, что

$$f_i(w) = f_i(z),\ i = 1, \cdots, m;\ \|w - z\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, можно найти элемент $u \in M$, удовлетворяющий условиям

$$f_i(u) = 0,\ i = 1, \cdots, k;\ f_i(u) > 0,\ i = k + 1, \cdots, m,\ \|u\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, как легко проверить, элемент $v = w + u \in M$ обладает требуемыми свойствами.

Теорема 1. *Пусть линейное многообразие $M \subset C^2(D)$ всюду плотно в пространстве $C^2(D)$. Тогда для всякой функции $F(u) \in C^2(D)$, любых точек $u_i \equiv (x_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, m < \infty$ из D и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется функция $p(u) \in M$ такая, что будут выполнены условия:*

А) $p(u_i) = F(u_i)$, $u_i = (x_i, y_i) \in D$, $i = 1, \cdots, m$,

Б) $p(u) \leqslant F(u)$, $u \in D$,

В) $F(u) - \varepsilon < p(u)$, $u \in D$.

Доказательство: Учитывая, что величины

$$p(u_i),\ \frac{\partial p(u_i)}{\partial x},\ \frac{\partial p(u_i)}{\partial y},\ \frac{\partial^2 p(u_i)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 p(u_i)}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 p(u_i)}{\partial y^2}$$

при фиксированных $u_i \in D$ и $p \in C^2(D)$, являются линейно независимыми линейными функционалами на $C^2(D)$, на основании леммы можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $p_1(u) \in M$, удовлетворяющая условиям

$$F(u) - p_1(u) = Q(|u - u_i|^2),\ i = 1, \cdots, m, \tag{1а}$$

$$d^2[F(u_i) - p_1(u_i)] > 0,\ i = 1, \cdots, m, \tag{1б}$$

$$\|F - p_1\|_C < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1в}$$

Из условий (1а), (1б) следует, что существует окрестность g_i точки $u_i (i = 1, \cdots, m)$ такая, что $F(u) - p_1(u) > 0$, $u \in g_i$. Положив $G = \bigcup g_i$, получим

$$F(u) - p_1(u) > 0,\ u \in G. \tag{2}$$

Построим на множестве D функцию $\varphi(u) \in C^2(D)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\varphi(x, y) = F(x, y) - p_1(x, y) + \frac{\varepsilon}{8}[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] < \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon}{2}$, (3а)

для всех точек из некоторой окрестности $\bar{g}_i \subset g_i$ каждой точки $u_i (i = 1, \cdots, m)$;

$$2.\ \varphi(x, y) = \frac{\varepsilon}{2},\ u = (x, y) \in D \setminus G; \tag{3б}$$

$$3.\ 0 < \mu = \inf_{(x,\,y) \in \partial \tilde{G}} \varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y) < \frac{\varepsilon}{2},\ u \in G \setminus \tilde{G}, \tag{3в}$$

где $\partial \tilde{G}$ — граница замыкания множества $\tilde{G} = \bigcup \tilde{g}_i$.

В силу плотности многообразия M в пространстве $C^2(D)$ для $\varepsilon > 0$ найдется функция $p_2(u) \in M$ такая, что

$$p_2(u) - \varphi(u) = Q(|u - u_i|^2),\ i = 1, \cdots, m, \tag{4а}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[p_2(u_i) - \varphi(u_i)] = 0,\ i = 1, \cdots, m, \tag{4б}$$

$$\|p_2 - \varphi\|_{C^2} < \min\left(\frac{\varepsilon}{4}, \mu\right). \tag{4в}$$

Из (1а) и (4а) следует, что функция $p(u) = p_1(u) - p_2(u)$ удовлетворяет условию А) теоремы. Докажем, что $p(u)$ удовлетворяет и условиям Б) и В).

Из условия (4в), используя (3а), получаем для всех $u \in \tilde{G}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[F(u) - p_1(u) - p_2(u)] < 0,$$

$$\frac{\partial_2}{\partial y^2}[F(u) - p_1(u) - p_2(u)] < 0.$$

Поскольку

$$F(u) - p_1(u) - p_2(u) = Q(|u - u_i|^2),\ i = 1, \cdots, m,$$

принимая во внимание (4б), будем иметь

$$F(u) - p_1(u) - p_2(u) \leqslant 0,\ u \in \tilde{G}.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$0 \leqslant F(u) - p_1(u) \leqslant p_2(u), \tag{5}$$

и следовательно для всех $u \in \tilde{G}$

$$F(u) - p(u) = F(u) - p_1(u) + p_2(u) \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть $u \in D \setminus G$. Из (3б) и (4б) следует, что

$$\frac{\varepsilon}{4} < p_2(u) < \frac{3\varepsilon}{4},$$

отсюда, учитывая (1в), получаем, что для всех $u \in D \setminus G$

$$F(u) - p(u) = F(u) - p_1(u) + p_2(u) > p_2(u) -$$

$$-|F(u)-p_1(u)|>\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}=0. \qquad (7)$$

Пусть теперь $u\in G\diagdown\widetilde{G}$; тогда, согласно (3в) и (4в),

$$p_2(u)>\varphi(u)-\mu>0.$$

Учитывая (2), получаем для $u\in G\diagdown\widetilde{G}$

$$F(u)-p(u)>0. \qquad (8)$$

Из условий (6), (7), (8) следует, что для всех $u\in D$

$$p(u)\leqslant F(u). \qquad (9)$$

С другой стороны, из (3а)—(3в) и (4в) вытекает, что для всех $u\in D$ $0\leqslant p_2(u)\leqslant\frac{3}{4}\varepsilon$; поэтому, учитывая (1в), имеем для $u\in D$

$$|F(u)-p(u)|\leqslant|F(u)-p_1(u)|+p_2(u)<\zeta. \qquad (10)$$

Из неравенств (9) и (10) следует, что элемент $p(u)$ удовлетворяет условиям Б) и В).

Замечание. Условия плотности многообразия M в пространстве $C^2(D)$ и принадлежности $F(u)\in C^2(D)$ нельзя существенно ослабить. Действительно, если функция $F(u)$ принадлежит лишь $C^1(D)$, то для такой функции может не существовать ни одного элемента из M, удовлетворяющего даже условиям А) и Б).

Пример: $F(x,y)=-\sqrt[3]{(x+y-x_1-y_1)^4}$, $u_1=(x_1, y_1)$—узел интерполяции ($m=1$), M—многообразие алгебраических многочленов. С другой стороны, если многообразие $M\subset C^2(D)$ плотно лишь в $C^1(D)$, то условия А) и Б) могут оказаться невыполненными для как угодно гладкой функции.

Пример:

$$M=\left\{p(u)\in C^2(D):\frac{\partial^2 p(u_1)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 p(u_1)}{\partial y^2}=0\right\},$$

$$F(x,y)=-[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2],\quad u_1=(x_1, y_1)\in D.$$

Но оказывается, что если многообразие M является алгеброй, то условие плотности M в $C^2(D)$ можно ослабить.

Теорема 2. *Пусть алгебра A функций из $C^2(D)$ плотна в пространстве $C^1(D)$. Тогда для всякой функции $F(u)\in C^2(D)$, любых точек $u_i=(x_i, y_i)$ ($i=1,\cdots, m<\infty$) из D и произвольного $\varepsilon>0$ найдется функция $p(u)\in A$ такая, что будут выполнены условия А), Б), В). В этом утверждении условие плотности A в $C^1(D)$ нельзя заменить на условие плотности A в $C(D)$.*

Доказательство. Поскольку алгебра A плотна в $C^1(D)$, то, используя теорему Ямабе, заключаем, что для всякой функции $F(u)\in C^2(D)$ и любого $\varepsilon>0$ найдется элемент $p_1(u)\in A$, удовлетворяющий условиям:

$$F(u) - p_1(u) = Q(|u - u_i|^3), \quad i = 1, \cdots, m, \tag{11а}$$

$$|F(u) - p_1(u)| < \frac{\varepsilon}{8}, \quad u \in D. \tag{11б}$$

Выберем константы $\bar{c}_i$ и $\bar{\bar{c}}_i$ настолько большими по абсолютной величине, чтобы выполнялись неравенства

$$2\bar{c}_i^2 > \left| \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial x^2} \right|, \quad i=1, \cdots, m, \tag{12а}$$

$$2\bar{\bar{c}}_i^2 > \left| \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial y^2} \right|, \quad i=1, \cdots, m, \tag{12б}$$

$$\left[\frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial x^2} + 2\bar{c}_i^2 \right] \cdot \left[\frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial y^2} + 2\bar{\bar{c}}_i^2 \right] >$$

$$> \left[\frac{\partial^2 F(u_i)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p_1(u_i)}{\partial x \partial y} \right]^2, \quad i=1, \cdots, m, \tag{13}$$

и рассмотрим функции $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ из $C^1(D)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\psi_j(u_i) = 0, \quad i=1, \cdots, m, \quad j=1, 2, \tag{14а}$$

$$\frac{\partial \psi_1(u_i)}{\partial x} = \bar{c}_i, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{14б}$$

$$\frac{\partial \psi_1(u_i)}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{14в}$$

$$\frac{\partial \psi_2(u_i)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{14г}$$

$$\frac{\partial \psi_2(u_i)}{\partial y} = \bar{\bar{c}}_i, \quad i=1, \cdots, m, \tag{14д}$$

$$|\psi_j(u)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8}, \quad u \in D, \quad j=1, 2. \tag{14е}$$

Используя теорему Ямабе, как и в теореме 1 заключаем, что в силу плотности A в $C^1(D)$ существуют элементы $\pi_1(u)$ и $\pi_2(u)$ из A такие, что

$$\pi_j(u) - \psi_j(u) = Q(|u - u_i|^3), \quad i=1, \cdots, m, \quad j=1, 2, \tag{15а}$$

$$|\pi_j(u) - \psi_j(u)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8}, \quad u \in D, \quad j = 1, 2. \tag{15б}$$

Используя условия (11а), (12а), (12б), (14а)—(14д), (15а) и (13), нетрудно заключить, что в точках u_i ($i = 1, \cdots, m$) функция $\varphi(u) = F(u) - p_1(u) + \pi_1^2(u) + \pi_2^2(u)$ имеет минимум, равный нулю. Следовательно существует окрестность g_i каждой точки u_i такая, что для всех $u \in G = \bigcup g_i$ выполняется неравенство

$$F(u)-p_1(u)+\pi_1^2(u)+\pi_2^2(u)\geqslant 0. \tag{16}$$

Заметив, что из неравенств (14е) и (15б) следует

$$|\pi_j(u)|\leqslant|\pi_j(u)-\psi_j(u)|+|\psi_j(u)|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4},\quad j=1,2,$$

и используя (11б), получаем

$$\|\varphi\|_C\leqslant\|F-p_1\|+\|\pi_1\|^2+\|\pi_2\|^2<\frac{\varepsilon}{4}\cdot \tag{17}$$

Рассмотрим теперь функцию $\Phi(u)\in C^1(D)$ такую, что

$$|\Phi(u)|=\begin{cases}0, & u=u_i,\ i=1,\cdots,m,\\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, & u\in D\setminus G,\end{cases}$$

$$|\Phi(u)|\leqslant\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},\quad u\in D.$$

Снова, в силу плотности A в $C^1(D)$, для $\varepsilon>0$ найдется элемент $p_2(u)\in A$, удовлетворяющий условиям

$$p_2(u_i)=\Phi(u_i),\quad i=1,\cdots,m, \tag{18}$$

$$|\Phi(u)-p_2(u)|\leqslant\sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}}-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},\quad u\in D. \tag{19}$$

Из ограниченности функции $\Phi(u)$ и неравенства (19) получим последовательно

$$|p_2(u)|<\sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}},\quad u\in D, \tag{20}$$

$$\|\Phi^2-p_2^2\|_C\leqslant\|\Phi-p_2\|\cdot\|\Phi+p_2\|\leqslant\|\Phi-p_2\|\cdot(\|\Phi\|+\|p_2\|)<$$

$$<\left(\sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}}-\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}+\sqrt{\frac{3\varepsilon}{4}}\right)=\frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Отсюда, учитывая, что при $u\in D\setminus G$ $|\Phi(u)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, имеем

$$\frac{\varepsilon}{4}<p_2^2(u),\quad u\in D\setminus G. \tag{21}$$

Из свойств функции $\varphi(u)$ и равенств (18) следует

$$F(u_i)-p_1(u_i)+\pi_1^2(u_i)+\pi_2^2(u_i)+p_2^2(u_i)=0,\quad i=1,\cdots,m. \tag{22}$$

Пусть $u\in G$, тогда, поскольку $p_2^2(u)>0$, из условия (16) получим

$$F(u)-p_1(u)+\pi_1^2(u)+\pi_2^2(u)+p_2^2(u)\geqslant 0. \tag{23}$$

Пусть теперь $u\in D\setminus G$. Так как $\pi_1^2(u)$ и $\pi_2^2(u)$ неотрицательны, то из (21) и (11б) следует

$$F(u)-p_1(u)+\pi_1^2(u)+\pi_2^2(u)+p_2^2(u)\geqslant p_2^2(u)-|F(u)-p_1(u)|>0. \quad (24)$$

Кроме того, из (17) и (20) вытекает неравенство

$$F(u)-p_1(u)+\pi_1^2(u)+\pi_2^2(u)+p_2^2(u)=\varphi(u)+p_2^2(u)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{3\varepsilon}{4}=\varepsilon. \quad (25)$$

Из условий (22)—(25) следует, что функция $p(u)=p_1(u)-\pi_1^2(u)-\pi_2^2(u)-p_2^2(u)$ удовлетворяет условиям А), Б), В) теоремы. Остается заметить, что поскольку $\pi_1^2(u)$, $\pi_2^2(u)$, $p_2^2(u)$ являются элементами алгебры A, то и функция $p(u)$ также принадлежит A.

Для доказательства последнего утверждения теоремы приведем пример алгебры A, плотной лишь в пространстве $C(D)$ и такой, что не для всякой функции из $C^2(D)$ существует элемент из A, удовлетворяющий условиям теоремы. Алгебра

$$A=\left\{p(u)\in C^2: \frac{\partial p(u_1)}{\partial x}=\frac{\partial p(u_1)}{\partial y}=0\right\}$$

плотна в $C(D)$, но для функции $p(x, y)\equiv x+y$ условия А) и Б) одновременно не могут выполняться, если узлом интерполяции является u_1 — внутренняя точка множества D.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность А. Л. Гаркави за постановку задач и полезные советы.

Московский технологический институт
пищевой промышленности Поступила 15.II.1972

Վ. Ա. ՇՄԱՏԿՈՎ. Միակողմանի մոտարկում ինտերպոլյացիայով մի քանի փոփոխականների անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է մի քանի փոփոխականների անընդհատ ֆունկցիաների միաժամանակյա ինտերպոլյացիայով միակողմանիորեն մոտարկելու խնդիրը ամենուրեք խիտ բազմակերպությունների էլեմենտների միջոցով։

Սահմանվում են պայմաններ, որոնց դեպքում ֆունկցիան վերջավոր թվով հանգույցներում ինտերպոլացնելու հետ հնարավոր է որքան ասես լավ միակողմանիորեն մոտարկել։

V. A. SHMATKOV. *One-sided approximation with interpolation in the space of continuous functions of several variables* (summary)

The note consideres the problem of one-sided approximation with simultaneous interpolation of the continuous functions of several variables by the elements of dense varieties.

The conditions, under which arbitralily close approximation is possible when the interpolation is carried out in jinite number of modes are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Paszkowski.* On approximation with nodes, Rozprawy Mathematyczne XIV, Warszawa, 1957.

2. *H. Yamabe.* On an extension of the Helly's theorem, Osaka Math, J., 2, 1950, 15—17.
3. *J. Singer.* Cea mai buna approximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bucuresti acad. RSR, 1967.
4. *W. Wolibner.* Sur on polynome d'interpolation, Colloq. Math., 2, 1951, 136—137.
5. *R. Devore.* One sided approximation of functions, Journ. Approxim. theory, 1, 1, 1968, 11—25.
6. *W. Haussmann.* Tensorprodukte und mehrdimensionale Interpolation, Math. Z., 113, 1970, 17—23.
7. *В. Чакалов.* Односторонние приближения непрерывных функций, Труды международной конференции по конструктивной теории функций, София, БАН, 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 5, 1973 Математика

Э. О. НАЗАРЯН

ОБ ОЦЕНКЕ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ МЕТРИКИ БЕРГМАНА

В работе [2] Б. А. Фуксом была получена оценка $\rho_D(z, U) < n+1$, где $\rho_D(z, U)$—кривизна Риччи бергмановой метрики, вычисленной в точке z ограниченной области $D \subset C^n$ в направлении вектора $U \in C^n$. В работе [4] было построено семейство областей голоморфности в C^n, для которых кривизны Риччи в точке $z=0$ имеют точную верхнюю грань, равную 7/5. Позже был получен результат (см. [5]), устанавливающий, что указанная выше оценка точна в C^2.

Ниже устанавливается, что оценка Фукса для кривизны Риччи бергмановой метрики точна в C^n $(n \geqslant 3)$.

1. Пусть $D \subset C^n$ — ограниченная область пространства C^n, $n > 2$ комплексных переменных, $K = K(z, \bar{z})$ — бергманова керн-функция области D. Рассмотрим в области D бергманову метрику

$$ds^2 = dz^* \, T^{(D)}(z, \bar{z}) \, dz, \quad T^{(D)} = (\ln K^{(D)})''_{z^*z}.$$

Как известно (см. [3]) кривизна Риччи бергмановой метрики определяется формулой

$$\rho_D(z, U) = -U^* (\ln \det T^{(D)})''_{z^*z} \, U \{U^* T^{(D)} U\}^{-1},$$

$$(\ln \det T^{(D)})''_{z^*z} = \frac{\partial^2}{\partial z^* \partial z} \ln \det T^{(D)} = \frac{\partial}{\partial z^*} \times \frac{\partial}{\partial z} \ln \det T^{(D)}.$$

Известно также (см. [4]), что для n-круговых областей D, содержащих свой центр $z=0$ имеют место равенства

$$\max_U \rho_D(0, U) = \max_{1 < j < n} \sigma_j^{(D)}(0), \quad \min_U \rho_D(0, U) = \min_{1 < j < n} \sigma_j^{(D)}(0),$$

где

$$\sigma_j^{(D)}(0) = n+1 - \left\{ K^{(D)} (K^{(D)''}_{z_j \bar{z}_j})^{-1} \sum_{s=1}^{n} K^{(D)(IV)}_{z_j z_s \bar{z}_j \bar{z}_s} (K^{(D)''}_{z_s \bar{z}_s})^{-1} \right\}_{z=0}, \tag{1.1}$$

$j = 1, \cdots, n$. Поскольку керн-функция n-круговых областей имеет вид (см. [1])

$$K^{(D)}(z, \bar{z}) = \sum_{i_1 \cdots i_n = 0}^{\infty} a^{-1}_{i_1 \cdots i_n} |z_1|^{2i_1} \cdots |z_n|^{2i_n},$$

где

$$a_{i_1 \cdots i_n} = \int_D |z_1|^{2i_1} \cdots |z_n|^{2i_n} \, dv,$$

то формулы (1.1) для n-круговых областей примут следующий вид:

$$\sigma_j^{(D)}(0)=n+1-\left(\int_D dv\right)^{-1}\int_D |z_j|^2\,dv\sum_{s=1}^{n}\gamma_{js}\left(\int_D |z_jz_s|^2\,dv\right)^{-1}\int_D |z_s|^2\,dv, \quad (1.2)$$

где

$$\gamma_{js}=\begin{cases}1, & j\neq s\\ 4, & j=s\end{cases},\quad dv=dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n,\quad x_j+iy_j=z_j.$$

Обозначая $|z_j|^2=r_j$, $\arg z_j=\varphi_j$, получаем

$$dv=\frac{1}{2^n}\,dr_1\wedge d\varphi_1\wedge\cdots\wedge dr_n\wedge d\varphi_n.$$

Тогда в пространстве квадратов модулей R_n^+, (1.2) преобразуются в следующие формулы:

$$\sigma_j^{(D)}(0)=n+1-\left(\int_{D^+} d\omega\right)^{-1}\int_{D^+} r_j\,d\omega\sum_{s=1}^{n}\gamma_{js}\left(\int_{D^+} r_jr_s\,d\omega\right)^{-1}\int_{D^+} r_s\,d\omega, \quad (1.3)$$

где $d\omega=dr_1\wedge\cdots\wedge dr_n$.

2. В пространстве C^n $(n>3)$ рассмотрим n-круговую область

$$D_a^{(\alpha)}=\left|\begin{array}{l} z\in C^n,\ D_1\cup D_2,\ D_1=\{|z|^2<\sqrt{n}\},\ D_2=\{\sqrt{n}\leqslant|z|^2<\sqrt{n}\,a,\\ |z|^{4\alpha}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\Big[(k-1)|z_k|^2-\sum_{m=1}^{n}|z_m|^2\Big]^2<\frac{n^\alpha}{n-1},\ \alpha>0\end{array}\right|, \quad (2.1)$$

содержащую свой центр $z=0$.

Вычислим кривизну Риччи области $D_a^{(\alpha)}$ в точке $z=0$.

При преобразовании $z\to r=(r_1,\cdots,r_n)$, $r_j=|z_j|^2$, $j=1,\cdots,n$, область $D_a^{(\alpha)}$ переходит в область $D_a^{(\alpha)+}$, лежащую в R_n^+

$$D_a^{(\alpha)+}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} r\in R_n^+,\ D_1^+\cup D_2^+,\ D_1^+=\Big\{\displaystyle\sum_{m=1}^{n}r_m<\sqrt{n}\Big\};\ D_2^+=\Big\{\sqrt{n}\leqslant\sum_{m=1}^{n}r_m<\sqrt{n}\,a,\\ \Big(\displaystyle\sum_{m=1}^{n}r_m\Big)^{2\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\Big[(k-1)r_k-\sum_{m=1}^{k-1}r_m\Big]^2<\frac{n^\alpha}{n-1},\ \alpha>0\Big\}\end{array}\right| \quad (2.2)$$

Из формулы (1.3) имеем

$$\sigma_j^{(D_a^{(\alpha)})}(0)=n+1-\left(\int_{D_1^+}d\omega+\int_{D_2^+}d\omega\right)^{-1}\left(\int_{D_1^+}r_j\,d\omega+\int_{D_2^+}r_j\,d\omega\right)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{n}\gamma_{js}\left(\int_{D_1^+}r_jr_s\,d\omega+\int_{D_2^+}r_jr_s\,d\omega\right)^{-1}\left(\int_{D_1^+}r_s\,d\omega+\int_{D_2^+}r_s\,d\omega\right). \quad (2.3)$$

Соответствующий подсчет показывает, что

$$\int\limits_{D_1^+} d\omega = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}, \quad \int\limits_{D_1^+} r_j d\omega = \frac{1}{2} n^{\frac{n+1}{2}}, \int\limits_{D_1^+} r_j^2 d\omega = \frac{1}{3} n^{\frac{n+2}{2}}, \quad \int\limits_{D_1^+} r_j r_s d\omega = \frac{1}{4!} n^{\frac{n+2}{2}}. \tag{2.4}$$

Для вычисления интегралов по D_2^+, входящих в (2.3), сделаем следующую замену:

$$\begin{gathered} r_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k, \\ r_j = \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} u_j - \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k, \\ r_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} u_n, \; j = 2, \cdots, n-1. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Непосредственно проверяется, что это ортогональное преобразование переводит прямую $r_1 = \cdots = r_n$ в ось u_1.

Решение системы (2.5) задается формулой

$$\begin{gathered} u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} r_m, \\ u_k = \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} \left[(k-1) r_k - \sum_{m=1}^{k-1} r_m \right], \; k=2, \cdots, n. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в условия, определяющие область D_a^{*+}, получаем

$$D_2^+ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k > 0, \; \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{j-1}{\sqrt{j(j-1)}} u_j - \\ - \sum\limits_{k=j+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} u_k > 0; \; j=2, \cdots, n-1; \frac{1}{\sqrt{n}} u_1 + \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} u_n > 0, \\ 1 \leqslant u_1 < a, \; u_1^{2*} \sum\limits_{k=2}^{n} u_k^2 < \frac{1}{n-1}, \; a > 0 \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

или

$$D_2^+ = \left\{ 1 < u_1 < a, \; |u_n| < \frac{1}{\sqrt{n-1}\, u_1^{*}}, \; |u_k| < \left(\frac{1}{(n-1) u_1^{2*}} - \sum_{m=k+1}^{n} u_m^2 \right)^{1/2}, \right.$$

$$\left. k = 2, \cdots; n-1 \right\}. \tag{2.8}$$

Действительно, условия, входящие в (2.8), совпадают с последними двумя неравенствами, входящими в (2.7) и из них легко следуют первые n неравенств, входящих в (2.7).

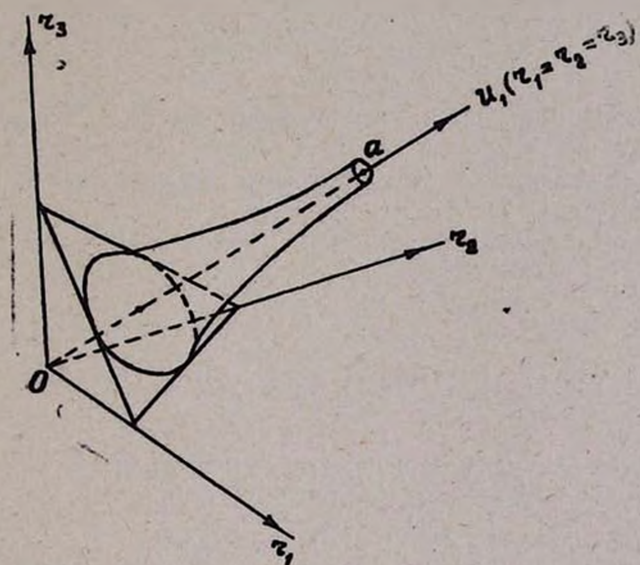
Из (2.7) заключаем, что область D_2^+ ограничена поверхностью полученной при вращении гиперболы

$$u_n u_1^{*} = \frac{1}{n-1}, \; u_j = 0, \; j = 2, \cdots, n-1$$

вокруг оси u_1 по $n-2$-мерной сфере, стало быть, D_2^+ — область, симметричная относительно u_1 и поскольку преобразованием (2.6) ось u_1 переходит в прямую $r_1 = \cdots = r_n$, то D^+ — область, симметричная относительно прямой $r_1 = \cdots = r_n$. Поэтому для вычисления интегралов по D_2^+, входящих в (2.3), можно ограничиться случаем $j=n$, $s=n$, $n-1$.

Пределы интегрирования указаны в (2.8) и остается заметить, что $d\omega = dp$, где $dp = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$.

В случае $n=3$, образ области $D_a^{(\alpha)}$ в R_3^+ имеет следующее изображение



Вычисления показывают, что

$$\int\limits_{D_2^+} d\omega = \begin{cases} \dfrac{c\,[a^{1-\alpha(n-1)}-1]}{1-\alpha(n-1)}, & \alpha \neq \dfrac{1}{n-1} \\ c \ln a, & \alpha = \dfrac{1}{n-1}, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{D_2^+} r_j\, d\omega = \begin{cases} \dfrac{c\,[a^{2-\alpha(n-1)}-1]}{\sqrt{n}\,[2-\alpha(n-1)]}, & \alpha \neq \dfrac{2}{n-1} \\ \dfrac{c}{\sqrt{n}} \ln a, & \alpha = \dfrac{2}{n-1}, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\int\limits_{D_2^+} r_j^2\, d\omega = \begin{cases} \dfrac{c}{n}\left\{\dfrac{a^{3-\alpha(n-1)}-1}{3-\alpha(n-1)} + \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n+1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha \neq \dfrac{3}{n-1},\ \dfrac{1}{n+1}, \\ \dfrac{c}{n}\left\{\ln a + \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n+1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha = \dfrac{3}{n-1}. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{D_2^+} r_j r_s\, d\omega =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c}{n}\left\{\dfrac{a^{3-\alpha(n-1)}-1}{3-\alpha(n-1)} - \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n^2-1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha \neq \dfrac{3}{n-1},\ \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{c}{n}\left\{\ln a - \dfrac{a^{1-\alpha(n+1)}-1}{(n^2-1)[1-\alpha(n+1)]}\right\}, & \alpha = \dfrac{3}{n-1}, \end{cases} \tag{2.12}$$

где

$$c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Подставляя (2.4), (2.9)—(2.12) в формулы (2.3), приходим к теореме.

Теорема. *Пусть ограниченные области* $D_a^{(\alpha)} \subset C^n$ $(n > 3)$ *определяются соотношениями* (3.1). *Тогда в случаях* $\alpha = \dfrac{1}{n-1}$, $\dfrac{2}{n-1}$, $\dfrac{3}{n-1}$

$$\lim_{a\to\infty} \min_U \rho_{D_a^{(\alpha)}}(0, U) = \lim_{a\to\infty} \max_U \rho_{D_a^{(\alpha)}}(0, U) = n+1.$$

В заключение выражаю свою благодарность Б. А. Фуксу и Б. Я. Лебедь за внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный университет

Поступила 11.VI.1973

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. Բերգմանյան մետրիկայի Ռիչչիի կորության գնահատման մասին (ամփոփում)

[2] աշխատանքում Բ. Ա. Ֆուկսի կողմից ստացված է $\rho_D(z, U) < n+1$ գնահատականը, որտեղ $\rho_D(z, U)$-ն բերգմանյան մետրիկայի Ռիչչիի կորությունն է $D \subset C^n$ սահմանափակ տիրույթի z կետում $U \in C^n$ վեկտորի ուղղությամբ։ [5] աշխատանքում ցույց է տրված այդ գնահատականի ճշգրիտ լինելը C^2-ում։

Ներկա հոդվածում ապացուցված է, որ բերգմանյան մետրիկայում Ռիչչիի կորության Ֆուկսի գնահատականը ճշգրիտ է C^n $(n > 3)$ տարածությունում։

E. H. NAZARIAN. ***On the estimation of Ricci curvature of the Bergman metric*** **(summary)**

In the paper [2] B. A. Fuchs obtained the estimate $\rho_D(z, U) < n+1$, where $\rho_D(z, U)$, $z \in D \subset C^n$, denotes the Ricci curvature of the Bergman metric, calculated for the point z of a bounded domain $D \subset C^n$, in the direction of the vector $U \in C^n$. It has shown in [5] that this estimate is precise in C^3. In the present paper the precision in C^n ($n > 3$) of the Fuchs's estimate is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., изд. „Наука", 1963, 76—100.
2. *Б. А. Фукс.* О кривизне Риччи бергмановой метрики, ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 996—999.
3. *J. Tashiro.* Sci Repts Tokyo Kyoiki Daigaku, A8, 1965, 196—201.
4. *Б. Я. Лебедь.* Функциональный анализ и его приложения, 5, вып. 3, 100—101.
5. *А. М. Кытманов.* Сборник статей „Голоморфные функции многих комплексных переменных", Институт физики СО АН СССР, 1972, 197—199.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS