ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

С. С. АГАЯН

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕ КОМПАКТОВ, В РЯДЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть E (mes $E>0$)—некоторый компакт на действительной оси, а G—дополнение E: $G=\{(-\infty, +\infty)\setminus E\}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j$, и пусть $\gamma(z)$—гармоническая мера множества E относительно верхней полуплоскости. Обозначим через $\mu(z)=\tilde{\gamma}(z)+i\gamma(z)$, где $\tilde{\gamma}(z)$—функция, сопряженная с $\gamma(z)$. И, наконец, пусть функция $f(z)$ определена на $C\setminus E$, где C — комплексная плоскость. Рассмотрим ряд

$$f(z)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z)\, e^{in\mu(z)}, \tag{1}$$

„коэффициенты" которого определяются по формуле

$$c_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_G f(t)\, e^{-in\mu(t)}\frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(z)]}{t-z}\,dt, \tag{2}$$

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots,$$

где z — любая точка, принадлежащая $C\setminus E$.

Знак „$\sim$" указывает на то, что мы построили ряд чисто формальным образом, и означает лишь, что $c_n(z)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$ связаны с $f(z)$ формулой (2), причем не предполагается, что ряд вообще говоря, сходится, тем более сходится к функции $f(z)$.

Главным вопросом, как и в теории тригонометрических рядов, является вопрос о возможности замены знака „$\sim$" знаком равенства.

Целью предлагаемой работы является рассмотрение вопросов, связанных с этой задачей, а именно:

а) В каком смысле и при каких условиях ряд (1) представляет функцию $f(z)$?

б) Какова скорость сходимости ряда (1)? Для нашего ряд, возникает также задача следующего типа:

в) Если ряд (1) сходится в G, то где еще, кроме G, ряд сходится, более того, сходится ли он к функции $f(z)$?

Основной результат настоящей работы заключается в представлении аналитической (ограниченной и неограниченной) вне E функции рядами типа (1)и в оценке скорости этой сходимости. В работе рассматривается также сходимость ряда (1) на действительной оси, что само по себе представляет определенный интерес, так как при этом мы получае[м] разложение непериодической, более того, определенной вне некоторо[-] го компакта E ($E \subset (-\infty, +\infty)$) функции в ряды типа (1).

Далее, доказывается, что на эти ряды распространяется ря[д] основных теорем теории рядов Фурье (например, принцип локализа[-] ции Римана, критерий сходимости рядов Фурье, оценка частных сум[м] рядов Фурье и т. д.).

§ 1. Сходимость ряда (1) в комплексной плоскости

Предварительно введем некоторые обозначения, а затем дока[-] жем ряд лемм.

Обозначим через

$$\Pi_+ = \{z\colon z \in C,\ \operatorname{Im} z > 0\},$$
$$\Pi_- = \{z\colon z \in C,\ \operatorname{Im} z < 0\},$$

а через $F_+(x)$ и $F_-(x)$ соответственно пределы:

$$\lim_{\substack{y \to 0\\ z \in \Pi_+}} F(z) = \lim_{y \to 0} F(x + iy) = F_+(x)$$

и

$$\lim_{\substack{y \to 0\\ z \in \Pi_-}} F(z) = \lim_{y \to 0} F(x - iy) = F_-(x).$$

Сформулируем лемму, которая является очевидным следствием теорем Коши и Фату.

Лемма 1. *Если ограниченная функция $F(z)$ аналитична в Π_+ и имеет в точке $z=\infty$ нуль по меньшей мере второго порядка (т. е. величина $z^2F(z)$ стремится к конечному пределу при $n \to \infty$), то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(t)\, dt = 0.$$

Лемма 2. *Если ограниченная функция $F(z)$ аналитична в $C \setminus E$ и имеет в точке $z=\infty$ нуль по меньшей мере второго порядка, то справедливо*

$$\int_E F_+(z)\, dz = \int_E F_-(z)\, dz.$$

Доказательство. По предыдущей лемме имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(z)\, dz = 0,$$

аналогично и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_-(z)\, dz = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_+(z)\,dz - \int_{-\infty}^{+\infty} F_-(z)\,dz = 0.$$

Из аналитичности $F(z)$ в $C\setminus E$ вытекает, что для $z \in C\setminus E$ справедливо равенство $F_+(z) = F_-(z)$, откуда

$$\int_E F_+(z)\,dz = \int_E F_-(z)\,dz.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если ограниченная функция $f(z)$ аналитична в $C\setminus E$ и $f(\infty)=0$, то для любого z, $z \in C\setminus E$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f_+(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f_-(t)\,dt}{t-z}.$$

Идея доказательства та же, что и в лемме 2.

Получим теперь частичную сумму $S_n(f, z)$

$$S_n(f,z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(z)\,e^{ln\mu(z)} \tag{1.10}$$

ряда (1) от функции $f(z)$ в интегральной форме.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$S_n(f, z) = \frac{1}{\pi}\int_G f(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(z)]\,dt}{t-z}. \tag{1.1}$$

В самом деле, подставляя выражения $c_k(z)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \cdots, \pm n)$ в (1.0) и принимая во внимание равенство

$$\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(z)]\sum_{k=-n}^{n} e^{ik[\mu(t)-\mu(z)]} = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(z)],$$

получим (1.1). Лемма доказана.

Теорема 1. *Если аналитическая и ограниченная вне E функция f такая, что $f(\infty)=0$, то ряд (1) сходится к $f(z)$ для любого z, принадлежащего $C\setminus E$, причем сходимость равномерна вне любого открытого множества, содержащего множество E.*

Доказательство. Согласно леммам 4 и 1 имеем

$$S_n(f,z) = -\frac{1}{\pi}\int_E f_+(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}{t-z}\,dt, \tag{1.2}$$

откуда и

$$S_n(f, z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_E f_+(t)\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt. \tag{1.3}$$

Далее, согласно лемме 3 получим

$$S_n(f, z) - f(z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_E f_+(t)\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_E f_-(t)\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_-(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt. \tag{1.4}$$

Оценим теперь каждый интеграл в отдельности. С этой целью рассмотрим разность

$$\mu_+(t) - \mu(z) = \tilde{\gamma}_+(t) + i\gamma_+(t) - \tilde{\gamma}(z) - i\gamma(z) =$$

$$= \tilde{\gamma}_+(t) - \tilde{\gamma}(z) - i[\gamma_+(t) - \gamma(z)], \tag{1.5}$$

откуда, учитывая и тот факт, что почти всюду на E $\gamma_+(t) = 1$, получаем

$$\left| e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]} \right| = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)[1-\gamma(z)]} \tag{1.6}$$

почти всюду на E.

Рассмотрим интеграл

$$J_n^1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_E f_+(t)\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_+(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt. \tag{1.7}$$

Согласно (1.6) и учитывая ограниченность функции $f(z)$ ($|f(z)| \leqslant M$) имеем

$$J_n^1(z) \leqslant \frac{M}{2\pi\delta}\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)[1-\gamma(z)]} \operatorname{mes} E \leqslant \frac{M}{2\pi\delta} \operatorname{mes} E \cdot q^{n+\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

где δ — расстояние от точки z до множества E, а $q = [e^{1-\gamma(z)}]^{-1}$. Но так как $\gamma(z) < 1$, то $1 - \gamma(z) > 0$, откуда и $q < 1$, следовательно, для достаточно больших „n“ справедливо

$$|J_n^1(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.9}$$

где ε—наперед заданное число.

Аналогично оценивается и интеграл

$$J_n^2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E f_-(t)\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu_-(t)-\mu(z)]}}{t-z}\,dt, \tag{1.10}$$

т. е. для достаточно больших „n“ справедливо

$$|J_n^2(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{1.11}$$

Итак, согласно (1.4), учитывая (1.9) и (1.11), получаем для достаточно больших „n“ неравенство

$$|S_n(f, z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь D—область, содержащая множество E, тогда легко видеть, что сходимость интегралов (1.7) и (1.10) к нулю при $n \to \infty$ равномерна в $C \setminus D$. Теорема полностью доказана. Фактически теорема 1 определяет порядок убывания аналитических функций „полиномами“ ряда (1), а именно справедлива

Теорема 2. *Для аналитической и ограниченной вне E функции f, такой что $f(\infty)=0$, справедливо неравенство*

$$|S_n(f, z) - f(z)| < K \cdot q^n,$$

где $z \in C \setminus E$. K — константа, зависящая от расстояния точки z до компакта E, а $q = e^{\gamma(z)-1}$ $(q < 1)$.

Если выбрать некоторое открытое множество D, содержащее множество E, то можно вывести аналогичное неравенство, имеющее место одновременно для всех z; при этом K и q зависят только от выбора множества D.

Теорема 1 сохраняет силу, если на функцию f вместо ее ограниченности наложить более слабое условие, а именно условие интегрируемости функции $|f(x)|(1+|x|)^{-1}$ на множестве G. Но тогда сходимость ряда (1) к функции $f(z)$ будет равномерной уже в области

$$G_\alpha = \{z\colon z \in C \setminus E,\ \gamma(z) \leqslant \alpha\},$$

где α — произвольное число с условием $\alpha \in (0, 1)$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопросов сходимости на действительной оси.

§ 2. Стремление к нулю коэффициентов ряда (1)

Теорема 3. *Если $|f(t)|(1+|t|)^{-1}$ интегрируема на G, то*

$$\lim_{n \to \infty} c_n(x) = 0, \tag{2.1}$$

причем сходимость равномерна на любом отрезке $[a, b]$, целиком содержащемся внутри G.

Эта теорема является непосредственным следствием следующей леммы.

Лемма 5. *Если G_j—компонента связности множества G, то*

$$\int\limits_{G_j} f(t)\, e^{-in\mu(t)} \frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt = \int\limits_{\mu(G_j)} F_j(v)\, e^{-inv}\, dv, \tag{2.2}$$

где функция $F_j(v)$ *интегрируема на* $\mu(G_j)$

$$\left(\text{здесь} \quad F_j(v) = f[\varphi_j(v)]\cdot\varphi_j'(v)\frac{\sin\frac{1}{2}[v-v_0]}{\varphi(v)-\varphi(v_0)}\right),$$

а $\varphi_j(v)$ — *обратная функция к функции* $\mu(t)$ *и* $\mu(x)=v$.

Доказательство. Сначала докажем существование обратной функции $\mu(x)$, $x\in G_j$, а для этого получим интегральное представление функции $\mu(z)$. Легко видеть, что

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{dt}{t-z}.$$

В самом деле, пусть $\chi_E(t)$ есть функция, равная 1 на E и равная 0 вне E. Далее, решая задачу Дирихле для полуплоскости с граничным значением функции $\chi_E(t)$, получим

$$\gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,\frac{\chi_E(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2},$$

где $z=x+iy$. Так как очевидно

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2} = \operatorname{Im}\frac{1}{t-z},$$

то можем написать

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi_E(t)}{t-z}\,dt + c = \frac{1}{\pi}\int\limits_E\frac{dt}{t-z}+c,$$

где c — действительная постоянная. Полагая $c=0$ (в противном случае мы взяли бы вместо $\tilde{\gamma}(z)$ функцию $\tilde{\gamma}(z)-c$), устанавливаем справедливость равенства (2.3), откуда и для любого $x\in G_j$ имеем

$$\mu'(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_E\frac{dt}{(t-x)^2},$$

т. е. $\mu'(x)>0$ для $x\in G_j$. Таким образом, существование обратной функции на G_j доказано. Поэтому мы можем перейти к замене переменной в первом интеграле (2.2). Далее, заменяя $\mu(t)$ на v, $\mu(x)=v_0$, $t=\varphi(v)$, получаем равенство (2.2). Лемма 5 доказана.

Сформулируем еще следующую лемму, доказательство которой аналогично предыдущей.

Лемма 6. *Для любого $\delta > 0$ с условием $(x-\delta, x+\delta) \cap E = \varnothing$ справедливо равенство*

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} f[\varphi(v)]\,\psi(v) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\, dv, \tag{2.4}$$

где $\delta_1 = v_0 - \mu(x-\delta)$, $\delta_2 = \mu(x+\delta) + v_0$,

$$\psi(v) = \left[\frac{\varphi(v_0+v)-\varphi(v)}{v}\right]^{-1} \varphi'(v).$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы 3.

Доказательство. Пусть x — фиксированная точка множества G. Представим выражение $c_n(x)$ (см. (2)) в следующем виде:

$$c_n(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_j} f(t)\, e^{-in\mu(t)} \frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt = \tag{2.5}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{j=1}^{m} + \sum_{j=m+1}^{\infty}\right) \int_{a_j} f(t)\, e^{-in\mu(t)} \frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt.$$

Далее, пусть ε — некоторое положительное число. Тогда, учитывая ограниченность функции $\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]$ по переменной t на G, для ε и точки x выберем m таким образом, чтобы

$$\left|\frac{2}{\pi}\sum_{j=m+1}^{\infty} \int_{a_j} f(t)\, e^{-in\mu(t)} \frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Перейдем теперь к оценке суммы

$$J_n^m(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m} \int_{a_j} f(t)\, e^{-in\mu(t)} \frac{\sin\frac{1}{2}[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\, dt. \tag{2.7}$$

Докажем, что эту сумму можно сделать по модулю меньше наперед заданного числа ε. С этой целью заметим, что согласно лемме 5 $J_n^m(x)$ можно представить в виде

$$J_n^m(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m} \int_{\mu(a_j)} F(v)\, e^{-inv}\, dv, \tag{2.8}$$

где функция $F(v)$ интегрируема на $\bigcup_{j=1}^{m} \mu(G_j)$.

Отсюда по теореме Римана-Лебега $J_n^m(x)$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Далее из (2.5), если учесть соотношения (2.7) и (2.8), заключаем

$$\lim_{n \to \infty} c_n(x) = 0. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что сходимость равномерна на любом отрезке $[a, b] \subset G$. Теорема полностью доказана.

Используя идею доказательства этой теоремы, мы получаем:

Теорема 4 (о локализации). *Если* $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ *интегрируема на* G, *то для любого* x *и* $\delta > 0$ *справедливо равенство*

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G \cap \{x-\delta, x+\delta\}} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t) - \mu(x)]}{t-x} dt + o(1). \tag{2.10}$$

Другими словами, поведение ряда (1) функции $f(x)$, $x \in G$ в некоторой точке x зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в некоторой (произвольно малой) окрестности точки x.

На самом деле, пусть x—фиксированная точка, а $\delta > 0$— произвольное число. Представим $S_n(f, x)$ в виде суммы двух слагаемых

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{G \setminus G_\delta} + \int\limits_{G \cap G_\delta}\right) f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t) - \mu(x)]}{t-x} dt, \tag{2.11}$$

где $G_\delta = \{x-\delta, x+\delta\}$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{G \setminus G_\delta} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t) - \mu(x)]}{t-x} dt = 0.$$

Согласно (2.11) и (2.12) имеем

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{G \cap G_\delta} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t) - \mu(x)]}{t-x} dt + o(1).$$

Отсюда видно, что значения функции $f(x)$ вне интервала $(x-\delta, x+\delta)$ совершенно не фигурируют в формуле (2.13), а потому вопрос о том, стремится ли $S_n(f, x)$ к пределу при $n \to \infty$ зависит только от поведения f на этом интервале. Теорема доказана.

§ 4. Необходимый и достаточный признак сходимости

Теорема 5. *Если* $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ *интегрируема на* G, *то для того чтобы в некоторой точке* x *частичная сумма* $S_n(f, x)$ *сходилась к некоторому числу* S, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{f(x+t)-S}{t}\right] \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t+x)-\mu(x)]\,dt = 0, \tag{3.0}$$

где $\delta > 0$ — *произвольное число.*

Прежде чем приступить к доказательству нашего критерия, докажем следующую лемму.

Лемма 7. *Для любого* x, $x \in G$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(1, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt = 1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt. \tag{3.2}$$

Согласно лемме 6, при условии $f(t)=1$ имеем

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \psi(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv. \tag{3.3}$$

Далее легко видеть, что функция $\psi(t)$ дифференцируема и в точке нуль равна 1, т. е. $\psi(0)=1$, следовательно, в силу признака Дини (см.[1], стр. 120) сходимости рядов Фурье получаем, что $J_n(x)$ сходится при $n \to \infty$ к $\psi(0)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x) = 1. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание теорему 4 о локализации и равенство (3.4), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt = 1 \tag{3.5}$$

для любого x, $x \in G$. Лемма доказана.

Приступим, наконец, к доказательству нашего критерия. По те-реме о локализации имеем

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt + o(1). \quad (3$$

Согласно лемме 7

$$1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]}{t-x}\,dt + o(1), \quad (3.$$

откуда и заменяя $t-x$ на t в интегралах (3.6), (3.7), находим

$$S_n(f, x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{f(x+t)-S}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t+x)-\mu(x)]\,dt + o(1). \quad (3.$$

Отсюда ясно, что для сходимости $S_n(f, x)$ к числу S в точк x необходимо и достаточно выполнение условия (3.0).

Если мы хотим, чтобы в точке x ряд (1) имел „естественну сумму“, т. е. сумму, равную $f(x)$, то для этого достаточно взя $S = f(x)$.

Если $f(x)$ непрерывна на (a, b) и ε — любое положительное числ то для равномерной сходимости ряда (1) на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ необходим и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t+x)-\mu(x)]\,dt = 0$$

равномерно на $[a, b]$, где δ — любое, и $0 < \delta < \varepsilon$.

Отсюда можно вывести интересное для приложений

Следствие. Если $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ интегрируема на G и при фиксиро-ванном x интегралы

$$\int\limits_{-\delta}^{0}\left[\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right]dt, \quad \int\limits_{0}^{\delta}\left[\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right]dt$$

с некоторым δ существуют, то частичные суммы $S_n(f, x)$ ряда (1 функции f сходятся в точке x к $\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$, где $f(x+0$

и $f(x-0)$ суть левый и правый пределы функции f в точке x (предполагается, что x есть точка разрыва первого рода функции f).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]\subset G$, и если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, так что сразу для всех $x\in[a, b]$ выполняется неравенство

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt<\varepsilon,$$

то ряд (1) для функции $f(x)$ стремится к ней равномерно на $[a, b]$.

Заметим, что мы получили условия для разложения функции непериодической, более того, неопределенной на некотором компакте E, $E\subset(-\infty, +\infty)$, в ряды типа (1).

§ 4. Оценка частичных сумм ряда (1)

Теорема 6. *Если* $\frac{|f(t)|}{1+|t|}$ — *интегрируемая функция на* G, *то почти всюду справедливо*

$$S_n(f, x)=o(\ln n). \tag{4.0}$$

Доказательство. Учитывая равенства (2.6) и (3.1), получаем

$$S_n(f, x)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)[\mu(t)-\mu(x)]\,dt+o(1). \tag{4.1}$$

Далее, согласно лемме 6, получаем

$$S_n(f, x)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta_1}^{\delta_2}[F(v+v_0)-F(v_0)]\,\psi(v)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv+o(1), \tag{4.2}$$

где $F(v+v_0)=f[\varphi(v+v_0)]$, $F(v_0)=f[\varphi(v_0)]$.

Воспользовавшись второй раз теоремой Римана о локализации, но уже для рядов Фурье, получаем

$$S_n(f, x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta_3}^{\delta_3}[F(v)-F(v_0)]\,\psi(v)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv+o(1), \tag{4.3}$$

где δ_3 — любое положительное число.

Далее, ссылаясь на идею доказательства аналогичной оценки ча
т ной суммы ряда Фурье функции $F(t)$ (см. [1], стр. 144), получае

$$\int_{-\delta_0}^{+\delta_0} [F(v)-F(v_0)]\,\psi(v)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv = o\,(\ln n). \qquad (4.$$

Итак, согласно (4.3), (4.4), (4.5) и учитывая, что $f(x)=o\,(\ln n$
имеем $S_n(f,\,x)=o/\ln n)$. Теорема полностью доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность С. Н
Мергеляну за постановку задачи и внимание к работе.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступила 26.I.19

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ. Կոմպակտից դուրս որոշված ֆունկցիայի ներկայացումը հատուկ շար
(ամփոփում)

Դիցուք E(mesE>O), որևէ կոմպակտ է իրական առանցքի վրա։

Ներկա աշխատանքում սահմանվում է շարք, որի միջոցով E-ից դուրս որոշված անալիտ
(սահմանափակ կամ անսահմանափակ) ֆունկցիան ներկայացվում է այդպիսի շարքով։

Այնուհետև դիտարկվում է սահմանված շարքի զուգամիտությունը իրական առանցքի վրա
որը առանձին դիտարկված ներկայացնում է ինքնուրույն հետաքրքրություն, քանի որ մենք ստա
նում ենք ոչ պարբերական (ավելին, որոշված որևէ կոմպակտից դուրս) ֆունկցիայի ներկայա
ցումը այդպիսի շարքերով։

Աշխատանքում ապացուցվում է նաև, որ այդպիսի շարքերի վրա տարածվում են մի շար
հիմնական թեորեմներ Ֆուրյեի շարքերի տեսությունից։

S. S. AGHAIAN. *Special series expansion of the functions defined on the complements of compacts* (summary)

Let E (mes $E>0$) be a compact on the real axis.

In this paper a series for the representation of an analytical outside of E com
plements function is defined.

The convergence of introduced series on the real axis is considered.

Extensions of a number of fundamental theorems of Fourier series theory ar
obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
2. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-ое, М.—Л. 1950.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

С. Н. МАНУКЯН

О КОНСТРУКТИВНЫХ ВСЮДУ ПЛОТНЫХ ПРОСТЫХ ДУГАХ

В этой статье строится пример конструктивной плоской простой дуги, заданной на $0\Delta 1$ и проходящей через все рациональные точки плоскости.

Понятия конструктивного анализа, определенные в работах [1], [2], [3], будут употребляться в том же смысле, как и в указанных статьях. В частности, будут употребляться алгорифмы $Э_л$, $Э_п$, $Э^с_л$, $Э^с_п$, определенные такими же схемами, как и в § 1 из [3].

Понятие конструктивной простой дуги, а также другие понятия, связанные с конструктивными кривыми, и не определенные особо, понимаются так же, как в [3] и [4].

Отметим, что понятие прямоугольника определяется различным образом в [3] и [4]; в настоящей статье оно будет пониматься в смысле соответствующего определения из [3] (см. [3], стр. 80).

Основной целью дальнейших рассмотрений является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Осуществима конструктивная простая дуга F, заданная на $0\Delta 1$ и такая, что для всякой рациональной точки $a \circ b$ можно построить FR-число $t \in 0\Delta 1$, удовлетворяющее условию $F(t) = a \circ b$.*

Все рассматриваемые ниже конструктивные объекты являются словами в алфавите $\{0, |, \diagdown, -, \Diamond, \Delta, \nabla, *, \sigma, \tau\}$ обозначаемом, как и в [3], через Щ.

Посредством $<P>$, где P — запись некоторого алгорифма в стандартном расширении алфавита Щ, будем, как обычно, обозначать тот алгорифм в стандартном расширении алфавита Щ, записью которого является слово P.

Вначале мы введем некоторые вспомогательные понятия и докажем несколько лемм. Отметим, что леммы 1—4 являются модификациями некоторых утверждений из [3] и [4].

Пусть K—кривая, заданная на $\alpha\Delta\beta$; тогда точку $K(\alpha)$ будем называть *начальной вершиной* кривой K, а точку $K(\beta)$ — *заключительной вершиной* кривой K.

Результатом склеивания кривых F и G, заданных на сегментах соответственно $x\Delta y$ и $y\Delta z$ и таких, что $F(y) = G(y)$, мы будем называть кривую H, заданную на сегменте $x\Delta z$ и такую, что при любом $t \in x\Delta z$

$$H(t) = \begin{cases} F(t), & \text{если } t \in x \Delta y, \\ G(t), & \text{если } t \in y \Delta z. \end{cases}$$

Исходя из кривых F и G, удовлетворяющих указанным условиям, результат их склеивания строится очевидным образом на основании леммы о склеивании конструктивных функций (см., например, лемму 2.13 из [3]).

Будем говорить, что кривая L содержится в прямоугольнике Q, если всякая точка, лежащая на L, принадлежит Q.

Верхней стороной и *нижней стороной* прямоугольника $x \omega_1 y \tau u \omega_2 v$ будем называть отрезки, соответственно, $x \square v \nabla y \square v$ и $x \square u \nabla y \square u$.

Будем говорить, что *цепочка отрезков*

$$x_1 \square y_1 \Delta x_2 \square y_2 * x_2 \square y_2 \Delta x_3 \square y_3 * \cdots * x_{n-1} \square y_{n-1} \Delta x_n \square y_n$$

соединяет точки $u_1 \square v_1$ и $u_2 \square v_2$, если

$$x_1 = u_1 \& y_1 = v_1 \& x_n = u_2 \& y_n = v_2.$$

Границей прямоугольника $x \omega_1 y \tau u \omega_2 v$ будем называть кривую

$$\Lambda \mathrm{O}_{0\Delta 1} (x \square u \Delta y \square u * y \square u \Delta y \square v * y \square v \Delta x \square v * x \square v \Delta x \square y).$$

Лемма 1. *Пусть Q—прямоугольная сетка квадратов. Пусть T—связное множество квадратов сетки Q, $Q_{ij} \overline{\in} T$ и R есть множество квадратов сетки Q, не связных с Q_{ij} в сT. Тогда множество квадратов TUR правильно связно, и всякий граничный отрезок множества TUR является стороной некоторого квадрата, принадлежащего T.*

Доказательство получается посредством таких же рассуждений, как в статье [3] (ср. [3], 3-й абзац на стр. 114 и 4-й абзац на стр. 115).

Лемма 2. *Пусть K—равномерно непрерывная кривая, заданная на $\alpha \Delta \beta$. Тогда для всяких положительных рациональных чисел η и ε осуществимо положительное рациональное число δ такое, что для всякой точки $x \square y$, η-удаленной от K и для всякой угловой функции φ кривой K относительно точки $x \square y$ оказывается*

$$\forall uv \, (u, v \in \alpha \Delta \beta \& |u - v| < \delta \supset |\varphi(u) - \varphi(v)| < \varepsilon).$$

Доказательство по существу проведено при установлении теоремы 4.1 из [3]. В самом деле: для построения требуемого δ достаточно найти натуральные числа m и k такие, что $2^{-m} < \eta$, $2^{-k} < \varepsilon$, затем построить FR-число z так, как это делается в 1-м и 2-м абзацах на стр. 68 из [3], после чего в случае $z > 2^{-(m+3)}$ строятся натуральные числа l и N, удовлетворяющие условиям, указанным на стр. 68 из [3], и в качестве δ берется число 2^{-n_1}, где n_1 удовлетворяет условию $2^{-n_1} < \dfrac{\beta - \alpha}{N}$ и условиям (M) на стр. 71 из [3]; в случае

$z < 2^{-(m-2)}$ в качестве ζ берется число 2^{-n_1}, где n_1 удовлетворяет условиям, указанным на стр. 74 из [3].

Лемма 3. *Пусть K — равномерно непрерывная замкнутая континентная кривая, заданная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть η есть некоторое положительное рациональное число. Тогда можно построить прямоугольную сетку квадратов Q, удовлетворяющую следующему условию: для всяких двух точек $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \supset y_2$, η-удаленных от кривой K и одноименных относительно нее, осуществима цепь квадратов $R_1 * R_2 * \cdots * R_s$ сетки Q такая, что линейный образ цепочки отрезков*

$$x_1 \supset y_1 \nabla \xi_1 * \xi_1 \nabla \xi_2 * \xi_2 \nabla \xi_3 * \cdots \xi_{s-1} \nabla \xi_s * \xi_s \nabla x_2 \supset y_2$$

(где $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ суть центры квадратов $R_1, R_2, \cdots, R_s$) $2h$-удален от кривой K, где h—шаг сетки Q.

Доказательство получается посредством незначительной модификации доказательства теоремы 1 из [3], а именно:

(1) Так же, как в пункте 1 из доказательства теоремы 1 из [3], убеждаемся в том, что достаточно рассмотреть случай невырожденного сегмента $\alpha\Delta\beta$. Действительно, обозначив через α' и α'' точные нижние границы и через β' и β'' точные верхние границы функций, соответственно, K^{ξ} и K^{η} на $\alpha\Delta\beta$, согласно теореме 1.3 из [2] имеем:

$$\max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') < \frac{\eta}{8} \vee \max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') > \frac{\eta}{16}.$$

Если $\max(\beta' - \alpha', \beta'' - \alpha'') < \frac{\eta}{8}$, то в роли сетки Q, как легко видеть, можно взять сетку с начальной вершиной $u \supset v$, где

$$u = -\frac{\eta}{4} + D^{-}\left(\alpha' * \mu k\left[2^{-k} < \frac{\eta}{8}\right]\right),$$

$$v = -\frac{\eta}{4} + D^{-}\left(\alpha'' * \mu k\left[2^{-k} < \frac{\eta}{8}\right]\right),$$

с шагом $\frac{\eta}{12}$, с размерами 9 и 9 (в самом деле, легко проверить, что всякая точка, лежащая на кривой K, принадлежит в этом случае квадрату $\left(u + \frac{\eta}{4}\right) \nabla \left(v + \frac{\eta}{4}\right) \tau \left(u + \frac{\eta}{2}\right) \nabla \left(v + \frac{\eta}{2}\right)$, и никакая точка, η-удаленная от K, не может принадлежать квадрату $u\Delta v \tau \left(u + \frac{3}{4}\eta\right) \Delta$ $\Delta \left(v + \frac{3}{4}\eta\right)$; отсюда легко усматривается, что требуемая в формулировке леммы цепь квадратов может быть всегда составлена из граничных квадратов сетки Q). Если же $\max(\beta'-\alpha', \beta''-\alpha'')>\frac{\eta}{16}$, то $\beta-\alpha>0$.

(2). В случае $\beta-\alpha>0$, пользуясь леммой 2 и доказательством леммы 2.12 из [3], строим положительное рациональное число ε_0 такое, что $\varepsilon_0<\frac{\beta-\alpha}{2}$ и для всякой точки $x\sigma y$, η-удаленной от кривой K, для любой угловой функции φ кривой K относительно точки $x\sigma y$ и для любой всюду определенной функции $\overline{\varphi}$, полученной исходя из функции φ на основании леммы 2.12 из [3], оказывается

$$\forall uv\left(|u-v|<\varepsilon_0\supset|\overline{\varphi}(u)-\overline{\varphi}(v)|<\frac{\pi}{2}\right).$$

(3). Дословно так же как на стр. 109 из [3] строятся положительное рациональное число δ_0 и натуральные числа N_0 и H_0, такие что $\delta_0<\frac{\eta}{2}$,

$$\forall uv\,(u, v\in\alpha\Delta\beta\,\&\,\rho\,(K(u),\ K(v))<\delta_0\supset\rho_{\alpha\Delta\beta}(u,\ v)<\varepsilon_0),$$

$$\forall t\,(t\in\alpha\Delta\beta\supset|K^{\xi}(t)|\leqslant N_0),$$

$$\forall t\,(t\in\alpha\Delta\beta\supset|K^{\eta}(t)|\leqslant N_0),$$

$$\frac{1}{H_0}<\frac{\delta_0}{9}.$$

Далее строится сетка Q' с начальной вершиной $\left(-N_0-\frac{3}{H_0}\right)\sigma\left(-N_0-\frac{3}{H_0}\right)$, шагом $\frac{1}{H_0}$ и размерами $2\cdot H_0\cdot N_0+6$, $2\cdot H_0\cdot N_0+6$, и сетка Q с той же начальной вершиной, что и Q', с шагом $\frac{1}{5H_0}$ и размерами $10\cdot H_0\cdot N_0+30$, $10\cdot H_0\cdot N_0+30$ (сетка Q является, так сказать, „пятикратным измельчением“ сетки Q'). Мы покажем, что сетка Q удовлетворяет условию, указанному в формулировке леммы.

В самом деле, пусть $x_1\sigma y_1$ и $x_2\sigma y_2$—произвольные фиксированные точки, η-удаленные от кривой K. Тогда, как легко видеть, можно построить квадраты U_1 и U_2 сетки Q' с центрами соответственно, $\overline{x}_1\sigma\overline{y}_1$ и $\overline{x}_2\sigma\overline{y}_2$, такие, что линейные образы отрезков $x_1\sigma y_1\nabla\overline{x}_1\sigma\overline{y}_1$ и $\overline{x}_2\sigma\overline{y}_2\nabla x_2\sigma y_2$ $\frac{2}{H_0}$-удалены* от кривой K.

---

* Метод построения можно пояснить следующим образом. Согласно теореме 1.3 из [2], имеем: $\max(|x_1|,\ |y_1|)<N_0+\frac{5}{H_0}\vee\max(|x_1|,\ |y_1|)>N_0+\frac{4}{H_0}$. Если $\max(|x_1|,\ |y_1|)<N_0+\frac{5}{H_0}$, то можно построить квадрат сетки Q' с центром в некоторой

Далее, проводя для точек $x_1 \sqsupset y_1$ и $x_2 \sqsupset y_2$ и для сетки Q' все те рассмотрения, которые указаны* на стр. 109—126 статьи [3] для точек, обозначенных там через $x_1 \sqsupset y_1$ и $x_2 \sqsupset y_2$, и для сетки, обозначенной там через Q, мы получим цепь квадратов $R_1' * R_2' * \cdots R_s'$ сетки Q', такую, что центр квадрата R_1' есть $\bar{x}_1 \sqsupset \bar{y}_1$, центр квадрата R_s' есть $\bar{x}_2 \sqsupset \bar{y}_2$, и никакая точка, лежащая на кривой K, не может принадлежать замыканию какого-либо из квадратов R_1', R_2', $\cdots$, R_s'. Обозначим центры квадратов R_1', R_2', $\cdots$, R_s' соответственно через $u_1 \sqsupset v_1$, $u_2 \sqsupset v_2$, $\cdots$ $\cdots$, $u_s \sqsupset v_s$.

Построим, наконец, цепь квадратов R_1, R_2, $\cdots$, $R_{5\cdot s-4}$ сетки Q, такую, что каждый квадрат вида R_{5i-5+j} при $1 \leqslant i < s$, $1 \leqslant j < 5$ имеет своим центром точку $\left(u_i + \frac{u_{i+1}-u_i}{5}\cdot(j-1)\right) \sqsupset \left(v_i + \frac{v_{i+1}-v_i}{5} \times \times (j-1)\right)$ и квадрат $R_{5\cdot s-4}$ имеет своим центром точку $u_s \sqsupset v_s$. Легко видеть, что цепь квадратов $R_1 * R_2 * \cdots * R_{5\cdot s-4}$ удовлетворяет всем требуемым условиям. Лемма доказана.

Замечание. Сетки Q' и Q были построены в доказательстве леммы 3, исходя из натуральных чисел H_0 и N_0; при этом если бы вместо первоначально выбранных H_0 и N_0 мы бы взяли в их роли какие-либо бо́льшие числа, то все утверждения, устанавливаемые по ходу доказательства для сеток Q' и Q, остались бы в силе. В частности, сетка Q снова удовлетворяла бы всем условиям, указанным в формулировке леммы. Поэтому, если задано несколько кривых K_1, K_2, $\cdots$, K_n и соответствующие η_1, η_2, $\cdots$, η_n так, что для каждой пары (K_i, η_i) выполнены условия леммы, то можно построить сетку Q, удовлетворяющую требуемым условиям одновременно для всех пар (K_i, η_i).

Лемма 4. *Пусть K — равномерно непрерывная континентная простая дуга, заданная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть η есть некоторое поло-*

точке $\bar{x}_1 \sqsupset \bar{y}_1$, такой, что $\rho\,(x_1 \sqsupset y_1,\ x_1 \sqsupset \bar{y}_1) < \frac{3}{H_0}$; этот квадрат и будет требуемым квадратом U_1. Если же $\max\,(|x_1|, |y_1|) > N_0 + \frac{4}{H_0}$, то $x_1 > N_0 + \frac{3}{H_0} \vee x_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right) \vee y_1 > N_0 + \frac{3}{H_0} \vee y_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$; в качестве квадрата U_1 в случаях $x_1 > N_0 + \frac{3}{H_0}$, $x_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$, $y_1 > N_0 + \frac{3}{H_0}$, $y_1 < -\left(N_0 + \frac{3}{H_0}\right)$ может быть взят квадрат, соответственно, $Q'_{2\cdot H_0\cdot N_0+5,0}$, Q'_{00}, $Q'_{0,2\cdot H_0\cdot N_0+5}$, Q'_{00}. Построение квадрата U_2 производится дословно таким же образом.

* За исключением построения квадратов J_1 и J_2 на стр. 110; в модифицированном варианте доказательства в роли J_1 непосредственно берется U_1, а в роли J_2 берется U_2.

жительное рациональное число. Тогда можно построить прям... угольную сетку квадратов Q, удовлетворяющую следующе... условию: для всяких двух точек $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \sigma y_2$, η-удаленных от ... осуществима цепь квадратов $R_1 * R_2 * \cdots * R_s$ сетки Q, тако... что линейный образ цепочки отрезков

$$x_1 \supset y_1 \nabla \xi_1 * \xi_1 \nabla \xi_2 * \xi_2 \nabla \xi_3 * \cdots * \xi_{s-1} \nabla \xi_s * \xi_s \nabla x_2 \supset y_2$$

(где $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$—центры квадратов $R_1, R_2, \cdots, R_s$) $2h$-удален ... кривой K, где h— шаг сетки Q.

Доказательство получается посредством такой же модиф... кации доказательства теоремы 2.1 из [4], какая была проведена п... установлении предыдущей леммы, исходя из теоремы 1 из [3].

Замечание. Сетка Q, в соответствии с методом доказате... ства теоремы 2.1 из [4], строится по тому же плану, как и сетка Q... предыдущей лемме. Поэтому в отношении леммы 4, как нетруд... убедиться, справедливо такое же утверждение, какое было отмечен... выше для леммы 3: если $K_1, K_2, \cdots, K_n$—простые дуги, и $\eta_1, \eta_2, \cdots,$... таковы, что для каждой пары (K_i, η_i) выполняются условия леммы ... то можно построить сетку Q, удовлетворяющую условиям леммы ... одновременно для всех пар (K_i, η_i).

Лемма 5. *Пусть имеем несамопересекающиеся попарно ... пересекающиеся ломаные $P_1, P_2, \cdots, P_n$ с рациональными вершин... ми. Тогда можно построить несамопересекающиеся замкнут... ломаные $L_1, L_2, \cdots, L_n$ с рациональными вершинами, не пересека... щиеся друг с другом, такие, что всякая точка, лежащая на л... маной P_i (где $1 \leqslant i \leqslant n$), является внутренней относительно соо... ветствующей ломаной L_i и внешней относительно всякой лом... ной L_j при $i \neq j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и, кроме того, всякая точка, лежаща... на ломаной L_i (где $1 \leqslant i \leqslant n$), является внешней относительн... всякой ломаной L_j при $i \neq j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Доказательство. Построим положительное число ρ тако... что всякие точки, лежащие на линейных образах различных ломаны... P_i и P_j $(1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j)$ удалены друг от друга больше, чем н... ρ. Пользуясь леммой 4 и замечанием к ней, построим прямоугольну... сетку Q с шагом, меньшим $\rho/3$, такую, чтобы для всякого i от 1 до ... и для всяких точек $x_1 \sigma y_1$ и $x_2 \sigma y_2$, $\rho/3$-удаленных от линейного образ... P_i, имелась бы цепь квадратов, удовлетворяющая условиям леммы 4... и никакая точка, лежащая на одной из кривых $P_1, P_2, \cdots, P_n$, не при... надлежала бы никакому краевому квадрату сетки Q. Шаг сетки ... обозначим через h. Для каждой ломаной P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ построим мно... жество квадратов сетки Q, замыканиям которых принадлежит хотя б... одна точка ломаной P_i. Обозначим эти множества через $A_1, A_2, \cdots, A_n$... Нетрудно убедиться в том, что все множества A_i попарно не пере... секаются и являются связными внутренними множествами квадрато... сетки Q причем никакие квадраты, принадлежащие различным множе... ствам A_i и A_j, не являются соседними или полусоседними. Для каж...

дого i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, построим множество $Ж_i$ квадратов сетки Q, не принадлежащих A_i и не связных с квадратом Q_{00} в cA_i. Ясно, что $Ж_i$ для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ является внутренним множеством квадратов сетки Q. Построим теперь множества Π_i квадратов сетки Q, являющиеся объединениями множеств A_i и $Ж_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ соответственно. Очевидно, что каждое Π_i также является внутренним множеством квадратов сетки Q.

Согласно лемме 1, Π_i является правильно связным множеством квадратов сетки Q. В соответствии с леммой 5.6 из [3] для каждого i от 1 до n построим замкнутую несамопересекающуюся цепочку отрезков R_i, составленную из граничных отрезков множества Π_i, такую, что всякая точка, принадлежащая некоторому открытому квадрату из этого множества, является внутренней относительно кривой $\Lambda O_{0\text{л}1} R_i$, а всякая точка, принадлежащая некоторому открытому квадрату вне этого множества, является внешней относительно $\Lambda O_{0\text{л}1} R_i$. Обозначим через L_i кривую $\Lambda O_{0\text{л}1} R_i$. Докажем, что таким образом построенные ломаные $L_1, L_2, \cdots, L_n$ удовлетворяют всем требуемым условиям. Действительно, сначала докажем, что каждая точка кривой $P_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ является внутренней относительно кривой $L_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Пусть Z—некоторая точка, лежащая на ломаной P_i. Тогда, очевидно, точка Z не может лежать на L_i; следовательно, она является внутренней или внешней относительно L_i (напомним, что L_i — континентная кривая). Но точка Z не может быть внешней относительно L_i, потому что в случае, когда она принадлежит некоторому открытому квадрату сетки Q, этот квадрат будет принадлежать Π_i, а потому всякая точка, принадлежащая ему — внутренняя относительно L_i; в случае же, когда точка Z лежит на границе двух квадратов сетки Q, оба этих квадрата принадлежат Π_i, а потому в любой близости от точки Z мы можем построить внутренние точки относительно L_i, и снова Z не может быть внешней точкой относительно L_i. Таким образом, мы доказали, что Z—внутренняя точка относительно L_i.

Теперь докажем, что всякая точка, лежащая на P_i — внешняя относительно всякой ломаной L_j при $i \neq j$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть точка Z лежит на P_i и пусть $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$; покажем, что Z—внешняя точка относительно L_j. Действительно, пользуясь теоремой 4.5 из [3], построим точку Z_1, являющуюся внешней относительно L_j и $\rho/3$-удаленную от ломаной P_j (в роли Z_1 мы можем взять, например, какую-либо точку, находящуюся вне сетки Q). Так как сетка Q удовлетворяет условиям леммы 4 по отношению к ломаной P_i и числу $\rho/3$, то мы можем построить цепь квадратов $D_1 * D_2 * \cdots * D_s$ такую, что линейный образ L цепочки отрезков $Z \nabla \xi_1 * \xi_1 \nabla \xi_2 * \xi_2 \nabla \xi_3 * \cdots * \xi_{s-1} \nabla \xi_s * * \xi_s \nabla Z_1$ (где $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ суть центры квадратов $D_1, D_2, \cdots, D_s$), $2h$-удален от кривой P_j.

Но, согласно лемме 1, все отрезки, из которых составлена цепочка R_j, являются граничными отрезками квадратов из A_j, а потому всякая точка, принадлежащая одному из таких отрезков (следовательно, и всякая точка, лежащая на ломаной L_j) удалена от ломаной P_j на расстояние, не большее, чем $h\sqrt{2}$. Ломаная же L удалена от P_j на расстояние, большее $2h$, следовательно, L не может пересекаться с L_j. Отсюда вытекает, согласно теореме 4.4 из [3], что точки Z и Z_1 одноименны относительно L_j. Таким образом, точка Z является внешней относительно L_j.

Остается показать что всякая точка, лежащая на какой-либо из ломаных L_i, является внешней относительно всякой ломаной L_j при $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$. В самом деле, поскольку ломаные L_i и L_j не пересекаются и, следовательно, удалены друг от друга, то всякая точка, лежащая на L_i, является внешней или внутренней относительно L_j; если бы хоть одна точка, лежащая на L_i, была бы внутренней относительно L_j, то тогда, в силу теоремы 4.4 из [3], всякая точка, лежащая на L_i была бы внутренней относительно L_j, а тогда, в силу теоремы 2.3 из [4], всякая точка, лежащая на P_i, была бы внутренней относительно L_j, что невозможно.

Лемма доказана.

Л е м м а 6. *Пусть $P_1, P_2, \cdots, P_n$ суть несамопересекающиеся попарно не пересекающиеся ломаные с рациональными вершинами, содержащиеся в некотором прямоугольнике* П *с рациональными вершинами и удаленные от его границы. Пусть $1 \leqslant r \leqslant n$, и точка Z есть заключительная вершина ломаной P_r. Тогда можно построить цепочку отрезков R с рациональными концами, линейный образ которой по сегменту $0\Delta 1$ есть такая несамопересекающаяся ломаная с рациональными вершинами, которая не пересекается с ломаными $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ни в одной точке, отличной от Z, и соединяет точку Z с некоторой точкой, лежащей на верхней стороне прямоугольника* П.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ломаные $P_1, P_2, \cdots, P_n$ удовлетворяют условиям леммы 5, то, согласно этой лемме, построим замкнутые несамопересекающиеся ломаные $L_1, L_2, \cdots, L_n$ с рациональными вершинами, которые не пересекаются друг с другом и таковы, что всякая точка, лежащая на ломаной P_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, является внутренней относительно L_k и внешней относительно всякой L_j такой, что $k \neq j$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.

Из способа построения ломаных $L_1, L_2, \cdots, L_n$, указанного в лемме 5, легко видеть, что эти ломаные могут быть построены так, чтобы они строго содержались в П (для этого достаточно соответствующим образом уменьшить шаг сетки, рассматриваемой в лемме 5).

Теперь докажем, что точку Z можно соединить с некоторой точкой Z_1, лежащей на L_r, посредством некоторой цепочки отрезков S, линейный образ которой не пересекается с ломаными $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ни в одной точке, отличной от Z. Действительно, пусть δ есть положительное рациональное число, такое что для любых i и j, где $1 \leqslant i \leqslant n$,

$1 < j < n$ и для любых точек Z_1 и Z_2, лежащих, соответственно, на P_i и P_j, оказывается: $\rho(Z_1, Z_2) > \delta$; пусть w есть минимум расстояний точки Z от линейных образов тех сторон ломаной P_r, на которых не лежит сама точка Z; η есть рациональное число такое, что $\eta < \min(\delta, w)$. Построим рациональную точку Z_0, внутреннюю относительно L_r, удаленную от P_r и такую, что $\rho(Z, Z_0) < \eta$. Тогда, как легко видеть, линейный образ отрезка $Z \Delta Z_0$ не имеет точек пересечения с ломаной P_r, отличных от Z. Возьмем некоторую точку Z', лежащую на L_r.

Согласно теореме 2.1 из [4], точки Z_0 и Z' можно соединить ломаной K с рациональными вершинами и рациональным определяющим дроблением, удаленной от P_r и определенной на сегменте $0\Delta 1$ (при этом полагаем, что $K(0) = Z_0$, $K(1) = Z'$). Пользуясь тем, что K и L_r суть ломаные с рациональными вершинами, построим наименьшее $t \in 0\Delta 1$, такое, что $K(t)$ лежит на L_r; легко видеть, что t есть положительное рациональное число.

Пусть $\xi_1 * \xi_2 * \cdots * \xi_m$ есть определяющее дробление для ломаной K. Построим i, такое что $1 \leqslant i < m$ и $\xi_i < t \leqslant \xi_{i+1}$. Теперь в качестве S возьмем цепочку отрезков

$$Z \Delta K(\xi_1) * K(\xi_1) \Delta K(\xi_2) * \cdots * K(\xi_i) \Delta K(t).$$

В качестве точки Z_1 возьмем $K(t)$. Ясно, что цепочка отрезков S удовлетворяет указанным выше условиям.

Через M обозначим прямую $x = \text{Э}^{\sigma}_{л}(Z_1)$. Через Z_2 обозначим точку, лежащую одновременно на ломаной L_r и на прямой M и такую, что ордината ее является максимальной среди всех точек, лежащих одновременно на L_r и на M.

Пусть $t_1 * t_2 * \cdots * t_m$ есть определяющее дробление ломаной L_r.

Пусть i и j таковы, что $1 \leqslant i, j < m$, точки Z_1 и Z_2 лежат на отрезках $L_r(t_i) \Delta L_r(t_{i+1})$ и $L_r(t_j) \Delta L_r(t_{j+1})$ соответственно.

Построим цепочку отрезков E следующим образом:

$$E = \begin{cases} Z_1 \Delta L_r(t_{i+1}) * L_r(t_{i+1}) \Delta L_r(t_{i+2}) * \cdots * L_r(t_j) \Delta Z_2, & \text{при } i < j \\ Z_1 \Delta L_r(t_i) * L_r(t_i) \Delta L_r(t_{i-1}) * \cdots * L_r(t_{j+1}) \Delta Z_2, & \text{при } i > j \\ Z_1 \Delta Z_2, \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Пусть $L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_s}$ (где $s \leqslant n$) суть те ломаные среди ломаных $L_1, L_2, \cdots, L_n$, которые пересекаются с прямой M и все ординаты их точек пересечений больше чем $\text{Э}^{\sigma}_{п}(Z_2)$. Обозначим эти ломаные через $D_1, D_2, \cdots, D_s$. Для каждого i от 1 до s обозначим через U_i и V_i точки пересечения прямой M с ломаной D_i, имеющие соответственно, наибольшую и наименьшую ординату. Построим систему натуральных чисел $(i_1, i_2, \cdots, i_q)$ таким образом, что $\text{Э}^{\sigma}_{п}(U_{i_1}) \leqslant \text{Э}^{\sigma}_{п}(V_{i_1}) < \text{Э}^{\sigma}_{п}(U_{i_2}) \leqslant \text{Э}^{\sigma}_{п}(V_{i_2}) < \cdots < \text{Э}^{\sigma}_{п}(U_{i_q}) \leqslant \text{Э}^{\sigma}_{п}(V_{i_q})$, никакое число вида $\text{Э}^{\sigma}_{п}(U_i)$ или $\text{Э}^{\sigma}_{п}(V_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant s$ не меньше $\text{Э}^{\sigma}_{п}(U_{i_1})$ и не больше $\text{Э}^{\sigma}_{п}(V)$ и не принадлежат ни одному из интервалов

$Э^{z}_{п}(V_{i_1}) \triangledown Э^{z}_{п}(U_{i_2}),\ Э^{z}_{п}(V_{i_2}) \triangledown Э^{z}_{п}(U_{i_3}), \cdots, Э^{z}_{п}(V_{i_{q-1}}) \triangledown Э^{z}_{п}(U_{i_q})$.

(Возможность построения такой системы индексов очевидна).

Теперь для каждого j от 1 до q построим рациональное определяющее дробление $t_1^{(j)} * t_2^{(j)} * \cdots * t_{k_j}^{(j)}$ ломаной D_{i_j}, построим отрезки $D_{i_j}(t_h^{(j)}) \Delta D_{i_j}(t_{h+1}^{(j)})$ и $D_{i_j}(t_g^{(j)}) \Delta D_{i_j}(t_{g+1}^{(j)})$, на которых лежат точки соответственно U_{i_j} и V_{i_j} и построим цепочку отрезков E_j следующим образом:

$$E_j = \begin{cases} U_{i_j} \Delta D_{i_j}(t_{h+1}^{(j)}) * D_{i_j}(t_{h+1}^{(j)}) \Delta D_{i_j}(t_{h+2}^{(j)}) * \cdots * D_{i_j}(t_g^{(j)}) \Delta V_{i_j} \\ \qquad\qquad \text{при } h < g; \\ U_{i_j} \Delta D_{i_j}(t_h^{(j)}) * D_{i_j}(t_h^{(j)}) \Delta D_{i_j}(t_{h-1}^{(j)}) * \cdots * D_{i_j}(t_{g-1}^{(j)}) \Delta V_{i_j} \\ \qquad\qquad \text{при } h > g; \\ U_{i_j} \Delta V_{i_j} \text{ при } h = g. \end{cases}$$

Построим, наконец, цепочку отрезков

$$S * E * Z_2 \Delta U_{i_1} * E_1 * V_{i_1} \Delta U_{i_2} * E_2 * V_{i_2} \Delta U_{i_3} * \cdots * E_q * V_{i_q} \Delta P,$$

где P есть точка пересечения верхней стороны прямоугольника П с прямой M. Затем построим цепочку отрезков R, которая получается из только что построенной цепочки отрезков при помощи удаления из нее всех вырожденных отрезков. Нетрудно убедиться в том, что цепочка R удовлетворяет всем требуемым условиям. В самом деле, из построения очевидно, что линейный образ цепочки S не пересекается ни с одной из ломаных $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ни в одной точке, отличной от Z; линейные образы цепочек $E_1, E_2, \cdots, E_q$ обладают тем свойством, что каждая точка, лежащая на одном из них, лежит на некоторой ломаной L_i, а потому не может находиться ни на одной из ломаных $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Наконец, каждая точка, лежащая на одном из отрезков $Z_2 \triangledown U_{i_1}$, $V_{i_1} \triangledown U_{i_2}, \cdots, V_{i_q} \triangledown P$, как легко видеть, является внешней относительно всех ломаных $L_1, L_2, \cdots, L_n$ и потому также не может находиться ни на одной из ломаных $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Согласно [1] построим сингулярное сегментное дизъюнктное невырожденное точное покрытие А сегмента $0\Delta 1$. Алгорифм А, таким образом, перерабатывает каждое натуральное i в невырожденный рациональный сегмент, содержащийся в $0\Delta 1$, и удовлетворяет следующим условиям: (1) сегменты $\mathrm{A}(i)$ и $\mathrm{A}(j)$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; (2) осуществимы алгорифмы R и L (называемые характеристическими алгорифмами покрытия А), перерабатывающие всякое FR-число $x \in 0\Delta 1$ в натуральные числа, такие, что сегменты $\mathrm{A}(\mathrm{R}(x))$ и $\mathrm{A}(\mathrm{L}(x))$ пересекаются, и x принадлежит их объединению.

Рассмотрим конструктивную взаимно-однозначную нумерацию всех рациональных точек плоскости. Пусть алгорифм D определяет эту нумерацию, т. е. по каждому натуральному n выдает соответствующую рациональную точку $\mathrm{D}(n)$.

Основная цель дальнейших рассмотрений заключается в построении алгорифма T, обладающего следующими свойствами: (1) алгорифм T перерабатывает всякое натуральное число n в запись несамопересекающейся ломаной с рациональными вершинами, определенной на А (n) и имеющей рациональное определяющее дробление;

(2) если Эл (А $(n)) < x <$ Эп (А (n)),

$$\text{Эл}\,(\mathrm{A}\,(m)) < y < \text{Эп}\,(\mathrm{A}\,(m)),\ n \neq m,$$

то

$$< T(n) > (x) \neq < T(m) > (y);$$

3) если Эл (А (n)) = Эп (А (m)), то

$$< T(n) > (\text{Эл}\,(\mathrm{A}\,(n))) = < T(m) > (\text{Эп}\,(\mathrm{A}\,(m)));$$

4) если n есть произвольное положительное натуральное число и k есть минимальное натуральное число, такое, что точка D(k) не лежит ни на одной из ломаных с записями $T(0)$, $T(1), \cdots, T(n)$, то точка D (k) лежит на ломаной с записью $T(n+1)$.

Вначале мы докажем, что из осуществимости алгорифма T, удовлетворяющего указанным условиям, вытекает утверждение теоремы, а затем построим соответствующий алгорифм T.

Пусть имеется алгорифм T, обладающий указанными выше свойствами. Построим алгорифм H, такой, что при любых n и m оказывается: (1) если $n=m$, или же $n \neq m$, и сегменты А (n) и А (m) не имеют общих концов, то $H\,(n \square m) = T\,(n)$; (2) если $n \neq m$ и сегменты А (n) и А (m) имеют общий конец, то $H\,(n \square m)$ есть запись ломаной, определенной на объединении А (n) и А (m) и являющейся результатом склеивания ломаных $T\,(n)$ и $T\,(m)$ (возможность построения алгорифма H, удовлетворяющего указанным условиям, следует из свойства (3) алгорифма T). Построим, наконец, алгорифм F, такой, что для всякого $x \in 0\Delta 1$

$$F(x) = < H\,(\mathrm{R}\,(x) \square \mathrm{L}\,(x)) > (x).$$

Тогда F является требуемой простой дугой.

В самом деле, из построения алгорифма F легко следует, что всегда при $x \in$ А (n) будет

$$F(x) = < T(n) > (x).$$

Отсюда легко получаем, что каковы бы ни были $x \in 0\Delta 1$ и $y \in 0\Delta 1$, если $x = y$, то $F(x) = F(y)$. Следовательно, F есть кривая, заданная на $0\Delta 1$.

Из свойств (1) и (2) алгорифма T вытекает, что F — простая дуга. Наконец, из свойства (4) алгорифма T вытекает, что при всяком натуральном k точка D (k) лежит на одной из ломаных с записями $T(0)$, $T(1), \cdots, T(k+1)$; следовательно, она лежит на F, и, таким образом, для всякой рациональной точки D (k) осуществимо* FR-число $t \in 0\Delta 1$, такое, что $F(t) =$ D (k).

---

* Из дальнейших построений легко усматривается, что в роли t может быть взято рациональное число.

Переходим к построению алгорифма T, удовлетворяющего указанным выше условиям. В качестве $T(0)$ берем запись алгорифма v, такого, что при любом $t \in \mathrm{A}(0)$

$$v(t) = \left(Э_л^\sigma (\mathrm{D}(0)) + t - \frac{Э_п(\mathrm{A}(0)) + Э_л(\mathrm{A}(0))}{2} \right) \sigma\, Э_п^\sigma (\mathrm{D}(0)).$$

Предположим теперь, что уже построены ломаные $L_0, L_1, \cdots, L_n$ с записями $T(0), T(1), \cdots, T(n)$ и покажем каким образом, исходя из них, строится $T(n+1)$.

Прежде всего, найдем наименьшее натуральное число k, такое, что точка $\mathrm{D}(k)$ не лежит на ломаных $L_0, L_1, \cdots, L_n$.

Мы будем далее строить несамопересекающуюся ломаную L с рациональными вершинами, определенную на $\mathrm{A}(n+1)$ и обладающую следующими свойствами:

(1) точка $\mathrm{D}(k)$ лежит на L; (2) если для некоторого r при $0 \leqslant r \leqslant n$ оказывается $Эл(\mathrm{A}(n+1)) = Э_п(\mathrm{A}(r))$ или $Эп(\mathrm{A}(n+1)) = Э_л(\mathrm{A}(r))$, то, соответственно, $L(Э_л(\mathrm{A}(n+1))) = L_r(Э_п(\mathrm{A}(r)))$, или $L(Э_л(\mathrm{A}(n+1))) = L_r(Э_п(\mathrm{A}(r)))$; (3) ломаная L не имеет точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \cdots, L_n$, отличных от $L(Э_л(\mathrm{A}(n+1)))$ и $L(Э_п(\mathrm{A}(n+1)))$, причем точки $L(Э_л(\mathrm{A}(n+1)))$ и $L(Э_п(\mathrm{A}(n+1)))$ являются точками пересечения L с какими-либо из ломаных $L_0, L_1, \cdots, L_n$ лишь в случаях, соответственно,

$$\exists r\, (0 \leqslant r \leqslant n \,\&\, Э_л(\mathrm{A}(n+1)) = Э_п(\mathrm{A}(r))) \quad \text{и}$$
$$\exists r\, (0 \leqslant r \leqslant n \,\&\, Э_п(\mathrm{A}(n+1)) = Э_л(\mathrm{A}(r))).$$

Построив ломаную L, обладающую указанными свойствами, мы затем определим $T(n+1)$ как запись ломаной L.

Очевидно, что при таком определении алгорифма T автоматически обеспечивается выполнение перечисленных выше условий, которым должен удовлетворять этот алгорифм. Итак, доказательство теоремы сводится к построению ломаной L с указанными свойствами.

Переходим к построению L. Построим отрезок

$$(Э_л^\sigma(\mathrm{D}(k)) - a)\, \sigma\, Э_п^\sigma(\mathrm{D}(k))\, \Delta\, (Э_л^\sigma(\mathrm{D}(k)) + a)\, \sigma\, Э_п^\sigma(\mathrm{D}(k)),$$

где a есть рациональное число, меньшее половины минимума расстояний от точки $\mathrm{D}(k)$ до ломаных $L_0, L_1, \cdots, L_n$. Построенный отрезок обозначим через Ω.

Построим систему попарно не пересекающихся ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots \cdots, \Gamma_t$, получающихся после проведения всех возможных склеиваний в системе, состоящей из $n+1$ ломаных $L_0, L_1, \cdots, L_n$, $\Lambda O_{отл}(\Omega)$. В силу индуктивного характера определения алгорифма T, мы имеем право предполагать, что ломаные $L_0, L_1, \cdots, L_n$ удовлетворяют условиям, указанным для ломаных с записями $T(0), T(1), \cdots, T(n)$ в списке условий, которым должен удовлетворять алгорифм T; отсюда легко следует, что ломаные $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$ являются самопересекающимися и не пересекаются друг с другом.

Дальнейшие построения проводятся по отдельности для трех случаев.

Случай 1. Сегмент $\mathrm{A}(n+1)$ не имеет общих концов с сегментами $\mathrm{A}(r)$ $(r=0, 1, \cdots, n)$. Тогда L определяется как $\Lambda\mathrm{O}_{\mathrm{A}(n+1)}(\Omega)$.

Случай 2. Сегмент $\mathrm{A}(n+1)$ имеет общий конец в точности с одним из сегментов $\mathrm{A}(r)$ $(r=0, 1, \cdots, n)$. Пусть, для определенности $Э_п(A(r)) = Э_л(A(n+1))$, где $0 \leqslant r < n$.

Согласно построению ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$, осуществима некоторая ломаная Γ_l (где $0 \leqslant l \leqslant t$), которая совпадает с L_r или получается при помощи склеивания некоторых ломаных $L_r, L_{n_1}, L_{n_2}, \cdots, L_{n_k}$ (где $0 \leqslant n_1, n_2, \cdots, n_k \leqslant t$).

Очевидно, что система ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$ удовлетворяет всем условиям леммы 6.

Построим некоторый прямоугольник Π_1, такой, что все ломаные $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$ содержатся в Π_1 и удалены от его границы. Обозначим через U_1, точку $L_r(Э_п(\mathrm{A}(r))) = \Gamma_l(Э_п(\mathrm{A}(r)))$.

Применим лемму 6 к системе ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$, беря в качестве точки Z точку U_1, и в качестве Π—прямоугольник Π_1.

На основании этой леммы построим цепочку отрезков R_1 с рациональными концами, такую что линейный образ R_1 по сегменту $0\Delta 1$ не пересекается с ломаными $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$ ни в одной точке, кроме U_1, и R_1 соединяет точку U_1 с некоторой точкой P_1, лежащей на верхней стороне Π_1. Обозначим через G ломаную, получаемую в результате склеивания ломаных Γ_l и $\Lambda\mathrm{O}_{\mathrm{A}(n+1)}(R_1)$. Построим прямоугольник Π_2, граница которого строго содержит границу прямоугольника Π_1. Очевидно, что система ломаных $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{l-1}, \Gamma_{l+1}, \cdots, \Gamma_t$, G удовлетворяет всем условиям леммы 6. Обозначим начальную точку отрезка Ω через U_2. Беря точку U_2 в роли точки Z, и прямоугольник Π_2 в роли прямоугольника Π, согласно лемме 6 построим цепочку отрезков R_2 с рациональными концами, линейный образ которой по сегменту $0\Delta 1$ не пересекается с ломаными $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{l-1}, \Gamma_{l+1}, \cdots, \Gamma_t$, G (следовательно—и с $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_t$, $\Lambda\mathrm{O}_{0\Delta 1}(R_1)$) ни в одной точке, кроме точки U_2 и соединяет точку U_2 с некоторой точкой P_2, лежащей на верхней стороне прямоугольника Π_2.

Пусть цепочка отрезков R_2 имеет вид $Z_1\Delta Z_2 * Z_2\Delta Z_3 * \cdots * Z_{k-1}\Delta Z_k$. Обозначим через $\overline{R}_2$ цепочку отрезков $Z_k\Delta Z_{k-1} * Z_{k-1}\Delta \Delta Z_{k-2} * \cdots * Z_2\Delta Z_1$; через I и J обозначим, соответственно, ломаные $\Lambda\mathrm{O}_{0\Delta 1}(P_1\Delta P_2)$ и $\Lambda\mathrm{O}_{0\Delta 1}(\overline{R}_2)$. Пользуясь тем, что I и J пересекаются (например, в точке P_2) и являются ломаными с рациональными вершинами, построим точку пересечения I и J с наименьшей возможной ординатой; обозначим эту точку через P_3. Из способа построения ломаной R_2 непосредственно усматривается, что точка P_3 отлична от точки P_1. Возьмем определяющее дробление $t_1 * t_2 * \cdots * t_m$ ломаной J и найдем отрезок $J(t_l)\Delta J(t_{l+1})$, на котором лежит точка P_3; при это мы можем считать, что P_3 отлична от $J(t_{l+1})$, поскольку точка P_3 о лична от $J(t_m)$, т. е. от U_2. Обозначим через R цепочку отрезков

$$R_1 * P_1\Delta P_3 * P_3\Delta J(t_{l+1}) * J(t_{l+1})\Delta J(t_{l+2}) * \cdots * J(t_{m-1})\Delta U_2.$$

Тогда цепочка R по построению обладает следующими сво ствами; ломаная $\Lambda O_{0\Delta 1}(R)$ является несамопересекающейся, соединяю точку $L_r(Э_л(\mathbf{A}(n+1)))$ с начальной точкой отрезка Ω и не имеет н каких точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \cdots, L_n$, $\Lambda O_{0\Delta 1}(\Omega)$, отли ных от начальной и конечной точки ломаной $\Lambda O_{0\Delta 1}(R)$. Теперь оч видно, что в качестве ломаной L, удовлетворяющей требуемым усл виям, мы можем взять $\Lambda O_{\mathbf{A}(n+1)}(R * \Omega)$.

Случай 3. Сегмент $\mathbf{A}(n+1)$ имеет два общих конца с некот рыми сегментами $\mathbf{A}(r)$ и $\mathbf{A}(s)$ $(0 \leqslant r, s \leqslant n)$. Пусть $Э_п(\mathbf{A}(r)) = Э_л(\mathbf{A}(n+1))$, $Э_п(\mathbf{A}(n+1)) = Э_л(\mathbf{A}(s))$. Совершенно аналогичн тому как делалось в случае 2, строим цепочки отрезков R' и R'', о ладающих следующими свойствами: (1) ломаная $\Lambda O_{0\Delta 1}(R')$ являетс несамопересекающейся, соединяет точку $L_r(Э_п(\mathbf{A}(r)))$ с начально точкой отрезка Ω и не имеет никаких точек пересечения с ломаным $L_0, L_1, \cdots, L_n$, $\Lambda O_{0\Delta 1}(\Omega)$, отличных от начальной и конечной точек ло маной $\Lambda O_{0\Delta 1}(R')$; (2) ломаная $\Lambda O_{0\Delta 1}(R'')$ является несамопересекающе ся, соединяет заключительную точку отрезка Ω с точкой $L_s(Э_л(\mathbf{A}(s)$ и не имеет никаких точек пересечения с ломаными $L_0, L_1, \cdots, L$ $\Lambda O_{0\Delta 1}(\Omega)$, R', отличных от начальной и конечной точек ломано $\Lambda O_{0\Delta 1}(R'')$. Ясно, что в качестве ломаной L, удовлетворяюще требуемым условиям, мы можем взять $\Lambda O_{\mathbf{A}(n+1)}(R' * \Omega * R'')$. Теоре ма доказана.

Формулировка основной теоремы настоящей статьи была опуб ликована в [5].

Автор приносит глубокую благодарность М. А. Хачатряну И. Д. Заславскому за ряд ценных советов и замечаний.

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и
Ереванского государственного
университета

Поступила 15.VII.197

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Ամենուրեք խիտ կոնստրուկտիվ պարզ աղեղների մասին *(ամփոփում)*

Ապացուցված է, որ գոյություն ունի այնպիսի կոնստրուկտիվ պարզ աղեղ, որն անցնում է հարթության բոլոր ռացիոնալ կետերով։

S. N. MANUKIAN. *On constructive everywhere dense simple arcs* (summary)

It is proved that there exists a planar constructive curve defined on $0\Delta 1$ without selfintersections which passes through all two-dimensional rational points.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 458—502.
2. *И. Д. Заславский.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 385—457.
3. *И. Д. Заславский, С. Н. Манукян.* О разбиениях плоскости конструктивными кривыми, Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ „Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники", т. V, 1968, 26—138.
4. *С. Н. Манукян.* Некоторые вопросы теории конструктивных кривых и криволинейных интегралов, Диссертация, МГУ, 1969.
5. *С. Н. Манукян.* Пример конструктивной простой дуги, всюду плотной на плоскости. Вторая Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы кратких сообщений), 1972, 30.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII. № 4. 1973 Математик

V. AVANISSIAN

QUELQUES APPLICATIONS DE LA METHODE DES "BOULES d'EXCLUSION" DANS C^p

§ 1. Introduction

1.1. Dans le plan complexe le comportement asymptotique du module d'une fonction entière d'ordre nul, à l'extérieur d'une certaine suite de disques sontenant les zéros, a fait dès 1925 l'objet de nombreuses études et a donné naissance à la méthode dite des "cercles d'exclusion" (H. Cartan, Denjoy-Littelwood, Nevanlinna-Polya, Valiron, Wiemann, etc.).

Parmi les fonctions entières d'ordre nul les fonctions à croissance logarithmique (i. e. $(\mathrm{Log} r)^{-m} M(r; f)$ borné, $m \geqslant 1$, $M(r; f) = \sup_{|z|=r} \mathrm{Log} |f(z)|$) possèdent des propriétés remarquables. Par exemple, si $m=2$, $M(r; f)$ est équivalent à $\int_0^r \frac{\mu_f(t)}{t}\, dt$ $(r \to \infty)$ avec $\mu_f = \sum_k n_k \delta(a_k)$ où $\delta(a_k)$ est la mesure de Dirac au point a_k zéro de f, n_k la multiplicité de ce zéro et $\mu_f(t)$ le nombre des zéros de f dans le disque ouvert de centre O et de rayon $t>0$ ($O \notin \mathrm{Supp}\, \mu_f$); en outre on a $\mathrm{Log} |f(z)| \sim M(r; f)$ $(|z| = r \to \infty)$ à condition d'exclure du plan une suite de disques contenant les zéros de f. De façon précise si $u(z)$ est sous-harmonique dans tout le plan et vérifie $(\mathrm{Log} r)^{-2} \sup_{|z|=r} u(z) < \infty$, la même conclusion subsiste à l'extérieur d'une suite de disques dont la somme des angles vus de l'origine est finie ([3]).

On rencontre les fonctions entières à croissance logarithmique dans la recherche des solutions entières d'une équation differentielle algébrique de troisième ordre: la fonction

$$F: z \to \prod_{n \geqslant 0} \left(1 + \frac{a^{2n+1}}{1+a^{4n+2}} z\right) \quad (|a| < 1)$$

en est un exemple, F vérifie une telle èquation et $M(r; F) \sim A\, (\mathrm{Log} r)^2$; la fonction composée $F \circ F$ vérifie

$$M(r; F \circ F) \sim B\, (\mathrm{Log}\, r)^4$$

(A, B étant des constantes). De même, si l'équation fonctionnelle de Poincaré

$$f(zs) = P(z) f(z) + Q(z) \quad (s \text{ donné, } |s| > 1)$$

(P, Q polynômes) admet une solution entière f, celle-ci vèrifie

$$M\,(r;\,f) \sim A\ (\mathrm{Log}\ r)^2 \quad (A = \mathrm{cte}).$$

1.2. — Les résultats analogues dans le cas de plusieurs variables sont plus récents [2]; leur étude est liée très étroitement aux propriétés des fonctions plurisousharmoniques et leur représentation potentielle. Contrairement au cas $p=1$ on ne peut espérer dans C^p $(p>2)$ obtenir une relation telle que $\mathrm{Log}\,|f\,(z_1, \cdots, z_p)| \sim A\,M\,(r;\,f)$ $(\|z\|=r \to \infty)$ hors d'une suite de boules constituant un recouvrement de l'ensemble analytique $W_f = \{z \in C^p |\, f\,(z)=0\}$ avec la somme des angles solides vus de l'origine finie. Les zéros de f sont non isolés et il existe dans une telle suite de boules au moins un couple consécutif de boules d'adhérences disjointes (cf. 4.2). Néanmoins (et c'est l'objet du présent travail) en supprimant de C^p un certain voisinage de W_f supposé algébrique, on obtient des résultats analogues au cas $p=1$. L'étude faite ici permettra de simplifier quelques démonstrations de l'article [2] et de le compléter par des éléments nouveaux. Signalons, par exemple, que si la variété algébrique $W_p = \{z \in C^p \,|\, P\,(z)=0\}$ est portée par un certain cône de révolution c de sommet O avec $\overline{C} \cap \mathrm{R}^p = \{0\}$, on a si $R \to \infty$

$$\sup_{\substack{\|z\|<R \\ z\in C^p}} \mathrm{Log}\,|P\,(z_1, \cdots, z_p)| \sim \inf_{\substack{\|x\|=R \\ x\in R^p}} \mathrm{Log}\,|P\,(x_1, \cdots, x_p)|$$

L'hypothèse faite sur W_p entraîne que P et un polynôme hypoelliptique au sens de la théorie des équations aux dérivées partielles [4].

§ 2. Notations—rappel

2.1. On se place une fois pour toute dans $C^p\,(p>2)$ et on renvoie á [5], [6], [7] pour les rappels qui vont suivre. Un point courant de C^p est noté

$$z = (z_1, \cdots, z_p) \quad \text{et} \quad \|z\| = \Big(\sum_{j=1}^{p} z_j \bar{z}_j\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\omega_{2p}\,(1)$ (resp. $V_{2p}\,(1)$) désigne la mesure-aire (resp. mesure-volume) de la sphére (resp. boule) unité de R^{2p}. Si V est plurisousharmonique

$$\sigma_V = \frac{1}{2\pi}\,\Delta V = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 V}{\partial z_j\,\partial \bar{z}_j} \quad \text{(au sens des distributions)},$$

$$\mu_V = \frac{\sigma_V}{\omega_{2p-2}(1)}, \quad \sigma_V\,(t) = \int_{\|a\|<t} d\sigma\,(a),$$

$$\lambda\,(V, z, r) = \frac{1}{\omega_{2p}\,(1)} \int_{\|a\|=1} V\,(z+ra)\,d\omega_{2p}\,(a),$$

$$M\,(r) = \sup_{\|z\|<r} V\,(z),$$

$$M(r; f) = \sup_{|z|<r} \operatorname{Log} |f(z)| \quad \text{si } f \text{ est entière.}$$

λ et M sont fonctions croissantes convexes de $\operatorname{Log} r$ et de limite $V(z)$ quand $r \to 0$. Les dérivées á gauche et á droite $\nu^-(z, r)$, $\nu^+(z, r)$ de $\lambda(V, z, r)$ par rapport à $\operatorname{Log} r$ sont positives croissantes. μ_V est la mesure de Radon positive associée à V en tant que fonction sousharmonique de 2n variables réelles. On note supp μ_V le support de μ_V. La masse $\mu_V(z, t)$ portée par la boule ouverte (resp. fermée) $B(z, t)$ de centre z et de rayon t est égale à

$$\frac{1}{2p-2} t^{2p-2} \nu_V^-(z, t) \left(\text{resp. } \frac{1}{2p-2} t^{2p-2} \nu_V^+(z, t)\right).$$

Dans le cas $V = \operatorname{Log}|f|$, f holomorphe, on a $\nu_V^+(z, t) = \nu_V^-(z, t) = \nu_f(z, t)$ et $\nu_f(z) = \lim\limits_{t \to 0} \nu_f(z, t)$ est égal au degré du premier polynôme homogène non identiquement nul obtenu en développant f au voisinage de z en série de polynômes homogénes de degrés croissants. Pour un polynôme P de degré m on a toujours $\nu_P(z, t) \leqslant m$ pour tout z et t; donc

$$\mu_P(z, t) = \frac{1}{2p-2} t^{2p-2} \nu_P(z, t) \leqslant \frac{m}{2p-2} t^{2p-2}. \tag{1}$$

Contrairement au cas $p=1$, si V est plurisousharmonique $\dfrac{\mu_V(z, t)}{t^{2p-2}}$ reste bornée quand $t \to 0$ et la limite est nulle si $V(x) > -\infty$ (i. e. μ_V ne peut comporter des masses isolées). Si $V = \operatorname{Log}|f|$ et $f(z_0) = 0$ on a $\nu_f(z_0, t) \geqslant 1$ et

$$\sigma^f(z_0, t) = \omega_{2p-2}(1)\, \mu_f(z_0, t) = \frac{\omega_{2p-2}(1)}{2p-2} t^{2p-2} \nu_f(z_0, t) > V_{2p-2}(1)\, t^{2p-2} \tag{2}$$

(résultat dû à Rütishauser — P. Lelong). Avec la terminologie usuelle dans la théorie de fonctions entières de plusieurs variables complexes, si $V = \operatorname{Log}|f|$, f entière et ν_f: $t \to \nu_f(t) = (2p-2) t^{-2p+2} \mu_f(t)$ ($\mu_f(t) = \mu_f(0, t)$), $\nu_f(t)$ joue le rôle d'indicatrice de croissance. La mesure positive ν_f a pour expression: $\nu_f = \pi^{-(p-1)}\, \theta \Lambda \alpha^{p-1}$, oú θ est le courant (au sens de De Rham) positif $\dfrac{i}{\pi} \partial_z \partial_{\bar z} V$ et $\alpha = \dfrac{i}{2} \partial_z \partial_{\bar z} \operatorname{Log}\left[\sum_j z_j \bar z_j\right]$ est la forme extérieure positive liée à la métrique de l'espace projectif P^{p-1} des droites complexes issues de l'origine. μ_f est proportionnelle à l'aire σ_f de l'ensemble analytique $w_f = \{z \in C^p \mid f(z) = 0\}$ dans C^p et ν_f est l'airede l'image W_f dans P^{p-1}. Si $p=1$, $\sigma_f(t)$ est égal au nombre $n(t)$ des zéros de f de module $< t$, comptés avec leur multiplicité. Dans ce cas, $\mu_f(t) = \nu_f(t) = \sigma(t) =$

$$= \frac{\partial}{\partial \operatorname{Log} t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|\, d\theta\right] \text{et} \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|(f(re^{i\theta})\, d\theta -$$

$-\operatorname{Log}|f(O)|,\ f(O) \neq 0.$

2.2. Theoreme (P. Lelong [6]).— *Si V est plurisousharmonique dans tout C^p et vérifie*

$$1)\quad M(r) = o(r)\ (r \to \infty)$$

$$2)\quad \int^{\infty} \frac{d\nu_V(t)}{t} < \infty\ (\nu_V(t) = \nu_V(O;\ t))$$

on a si $O \notin$ supp μ_V:

$$V(z) = V(O) + \int_{C^p} d\mu_V(a) \left| \frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|z-a\|^{2p-2}} \right|$$

(En particulier cette représentation est valable pour toute fonction de la forme $V = \operatorname{Log}|f|$, f entière d'ordre <1, $f(O) \neq 0$. Si $O \notin$ supp μ_V, la condition 2 équivaut aux deux conditions

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\nu_V(t)}{t} = 0, \int^{\infty} \frac{\nu_V(t)}{t^2}\,dt < \infty).$$

2.3. Theoreme (Avanissian [2].—*Soit $V(z_1, \cdots, z_p)$ une fonction plurisousharmonique dans tout C^p (non constante) telle que*

$$\limsup_{r \to \infty} M(r)(\operatorname{Log} r)^{-m} < +\infty \quad (m > 1).$$

On a si $O \notin$ supp μ_V:

$$(2)\quad M(r) = \int_0^r \frac{\nu_V(t)}{t}\,dt + (2p-1)\,\theta_1(r)\, r \int_r^{\infty} \frac{\nu_V(t)}{t^2}\,dt - \theta_2(r)$$

avec $0 < \theta_1(r) < 1,\ \theta_2(r) > 0,\ \limsup_{r \to \infty} \theta_2(r)(\operatorname{Log} r)^{1-m} < \infty.$

La représentation (2) *est aussi valable pour les fonctions plurisous harmoniques d'ordre nul* $\left(\text{i. e. } \limsup_{r \to \infty} \dfrac{\operatorname{Log} M(r)}{\operatorname{Log} r} = 0\right)$ *avec*

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\theta_2(r)}{\displaystyle\int_0^r \frac{\nu_V(t)}{t}\,dt} = 0\cdot$$

Remarquer que dans les théorèmes 2.2 et 2.3 la condition $O \notin$ supp μ_V peut être remplacée par $V(O) > -\infty$ [1].

§ 3. P—jauge d'une boule

3. 1. Definition. — *Soient $P(z_1, \cdots, z_p)$ un polgnôme (non constant),*

$$W_P = \{z \in C^p \mid P(z) = 0\}$$

et $B(O, R)$ *la boule ouverte de centre* O *et rayon* $R > 0$ *avec* $W_P \cap B(O, R) \neq \varnothing$. *Si* $W_{R,P} = B(O, R) \cap W_P$, *la* P*— jauge de* $B(O, R)$ *est le nombre* $\delta_{R,P}$ *défini par*

$$\delta_{R,P} = \inf \{\rho \mid \overline{B(O, R)} \subset \bigcup_{z \in W_{R,P}} B(z, \rho)\}$$

Exemple. Considérons dans C^2 le polynôme $P = z_1 z_2$ et la boule $B(O, R)$ $(R > 0)$ on vérifie que $\frac{\delta_{R,P}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (Fig. 1). Il est évident, que dans le cas du polynôme $Q = z_1 z_2 \times \times \left(z_1 - \frac{R}{2}\right)$ (par exemple) on obtient

$$\delta_{R,Q} \leqslant \delta_{R,P}.$$

Il est clair aussi, que $\varepsilon > 0$ étant donné on peut trouver un polynôme S tel que

$$\delta_{R,S} < \varepsilon.$$

L'énoncé suivant montre, que le polynôme irréductible P de degré $q > 0$ étant donnè, pour tout R tel, que $W_P \cap B(O, R) \neq \varnothing$, la P—jauge de $B(O, R)$ vérifie

$$\frac{\delta_{R,P}}{R} \geqslant \chi(p, q) > 0,$$

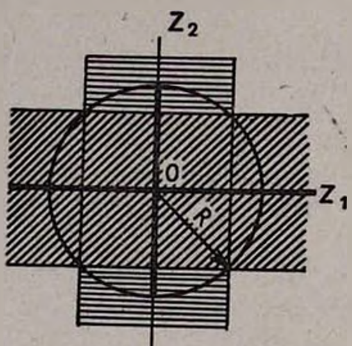

Fig. 1.

où χ ne dépend que de la dimension de l'espace et le degré du polynôme.

3.2. Proposition. *Soit* P *un polynôme irréductible de degré* $q > 0$. *On a*

$$\frac{\delta_{R,P}}{R} \geqslant \chi(p, q) > \frac{1}{\sqrt{c_{2p}\, q}} \left(\frac{\sqrt{c_{2p}\, q}}{1 + \sqrt{c_{2p}\, q}}\right)^{p-1}$$

où χ *est la racine positive de l'équation*

$$x(1 + x)^{p-1} - \frac{1}{\sqrt{c_{2p}\, q}} = 0,$$

et $C_{2p} > 0$ *une constante numérique ne dépendant pas de* q.

La proposition rèsulte des énoncés suivants.

Lemme 1. *Soit* E *un ensemble mesurable* (Lebesgue) *de* R^p *recouvert par une famille de boules ouvertes* $(B_j)_{j \in J}$ *telle que*

$$\sup_{j \in J} |B_j| < \infty \quad (\textit{avec } |B_j| = \text{Vol } B_j).$$

On peut extraire de cette famille une suite (finie ou infinie) *de boules* B_{k_j} *deux à deux disjointes et telle que*

$$|E| \leqslant c \sum_k |B_{k_j}| \quad (|E| = \text{Mes } E;\ c_p = 5^p \text{ convient}).$$

Pour la démonstration de ce lemme moins subtil que le théorème de recouvrement de Vitali, on renvoie á E. Stein [8].

L'énoncé suivant moins raffinè qu'un résultat de P. Lelong [5] est néanmoins suffisant pour la suite:

Lemme 2. *Soient F une fonction holomorphe* (non constante) *dans un domaine D de C^p ayant des zéros, et $D_1 \subset D$ un ouvert tel que*

$$0 < \mu_F(D_1) < \infty \quad \text{(cf. 2.1)}.$$

Soient W_1 une partie non vide de $W_F = \{z \in C^p \mid F(z) = 0\}$ et $\rho > 0$ tel que

$$\Omega_\rho = \bigcup_{z \in W_1 \subset W_F} B(z, \rho) \subset D_1,$$

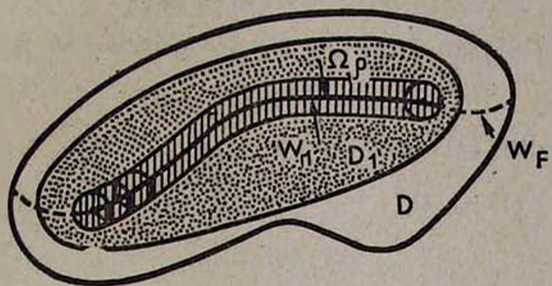

Fig. 2.

alors on a

$$|\Omega_\rho| \leqslant c_{2p} \frac{\pi\rho^2}{p} \sigma(D_1)$$

avec $\sigma(D_1) = \omega_{2p-2}(1)\, \mu_F(D_1)$ *et* $|\Omega_\rho| =$ *mesure de Lebesgue de* Ω_ρ. Fig. 2).

Démonstration. Soit $(K_m)_{m \geqslant 1}$ une suite exhaustive de compacts de réunion $\Omega_\rho \cdot K_m$ est couvert par une suite finie de boules figurant dans la définition de Ω_ρ. D'après le lemme 1 il existe une suite finie de boules extraites

$$B_1(\xi^1, \rho), \cdots, B_{n_m}(\xi^n, \rho) \quad (\xi^j \in W_1 \; j = 1, \cdots, n)$$

deux à deux disjointes et telles que

$$|K_m| \leqslant c_{2p} \sum_{k=1}^{n(m)} |B_k|.$$

Les B_k étant centrées sur W_1, d'aprés l'inégalité (2) de § 2 on a:

$$\sigma(\xi^k, \rho) \geqslant V_{2p-2}(1)\, \rho^{2p-2} \quad (k = 1, \cdots, n(m)),$$

$$\rho^2 \sigma(\xi^k, \rho) \geqslant V_{2p-2}(1)\, \rho^{2p} = \frac{V_{2p-2}(1)}{V_{2p}(1)} |B_k|,$$

or $V_{2p}(1) = \frac{\pi^p}{p!}$, $\frac{V_{2p-2}(1)}{V_{2p}(1)} = \frac{p}{\pi}$. Donc pour tout $m \geqslant 1$,

$$|B_k| \leqslant \frac{\pi}{p} \rho^2 \sigma(\xi^k, \rho),$$

$$|K_m| \leqslant c_{2p} \cdot \frac{\pi}{p} \rho^2 \sum_{k=1}^{n(m)} \sigma(\xi^k, \rho) \leqslant c_{2p} \frac{\pi}{p} \rho^2 \sigma(D_1).$$

Le second membre étant indépendant de m d'où le résultat:

$$|\Omega_\rho| \leqslant c_{2p} \frac{\pi}{p} \rho^2 \sigma(D_1).$$

Démonstration de la proposition 3.2.— Considérons la boule $B(O, R)$ avec

$$B(O, R) \cap W_P \neq \varnothing.$$

Soit $\delta_{R,P}$ la P—jauge de $B(O, R)$. Dans le lemme 2 choisissons

$$D_1 = B(O, R + \delta_{R,Q}).$$

D'aprés l'inégalitè (1) de § 2 on a:

$$\sigma(D_1) = \omega_{2p-2}(1)\, \mu_P(D_1) = \frac{\omega_{2p-2}(1)}{2p-2} (R + \delta_{R,P})^{2p-2} \nu_P(O, R + \delta_{R,P}) \leqslant$$

$$\leqslant V_{2p-2}(1)\, (R + \delta_{R,P})^{2p-2} q,$$

et

$$V_{2p}(1)\, R^{2p} \leqslant c_{2p} \frac{\pi}{p} V_{2p-2}(1)\, \delta^2_{R,P}\, R + \delta_{R,P})^{2p-2} q, \tag{3}$$

or $\frac{\pi}{p} \cdot V_{2p-2}(1) = V_{2p}(1)$. Donc en posant $x = \frac{\delta_{R,P}}{R}$, (3) s'ècrit

$$x(1+x)^{p-1} - \frac{1}{\sqrt{c_{2p}\, q}} \geqslant 0. \tag{4}$$

L'application $l: x \to x(1+x)^{p-1}$ de $R_+ \to R_+$ étant convexe croissante on en déduit la proposition 3.2. (Fig. 3).

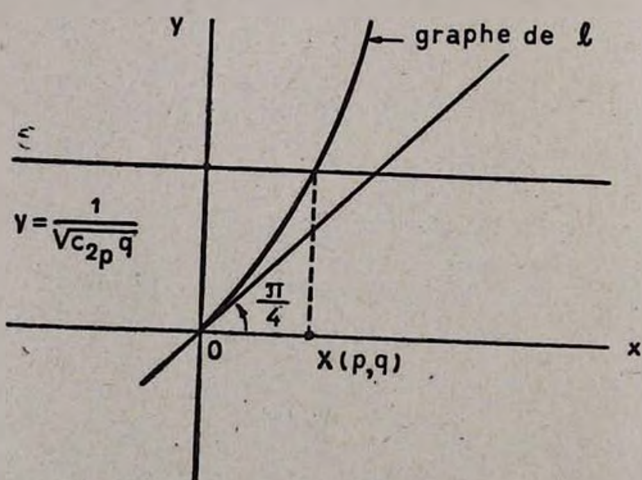

Fig. 3.

3.3. Corollaire. *Soit P un polynôme non constant. Pour toute fonction continue $r \to \varphi(r)$ de $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ avec $\varphi(r)$ décroissante vers zéro et $r\varphi(r)$ croissante quand $r \to \infty$, le complémentaire de l'ensemble*

$$\Omega_\varphi = \{z \in C^p | d(z, W_p) \leqslant \varphi(\|z\|)\|z\|\}$$

où $d(z, W_P)$ désigne la distance de z à $W_P = \{z \in C^p | P(z) = 0\}$ est un ouvert non borné de C^p avec

$$\lim_{R \to \infty} \frac{|\Omega_\varphi \cap B(O, R)|}{\varphi(R)|B(O, R)|} = 0. \qquad (4)$$

(Fig. 4)

Démonstration: $d(z, W_P)$ étant continue Ω_φ est fermé, donc Ω_φ^c est ouvert, il suffit pour conclure d'établir l'éqalité (4).

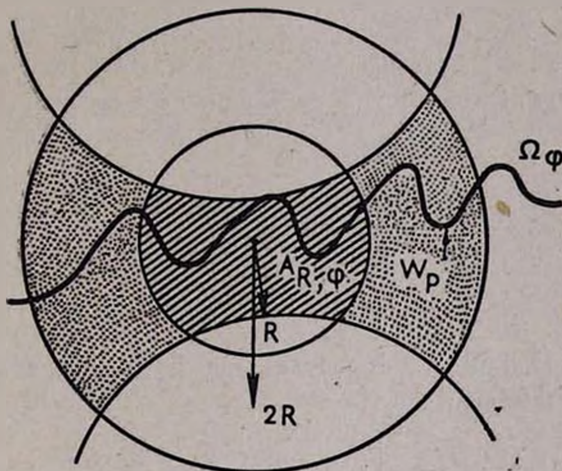

Fig. 4.

Soit $A_{R,\varphi} = \Omega_\varphi \cap \overline{B(O, R)}$. Si $z \in A_{R,\varphi}$ on a $d(z, W_P) \leqslant \varphi(\|z\|)\|z\| \leqslant \varphi(R) R$, puisque $\varphi(r) r$ est croissante. La réunion Ω_ρ des boules de rayon $\rho = \varphi(R) R$ et centrées sur $W_P \cap B(O, 2R)$ contient $A_{R,\varphi}$ pour R assez grand. D'aprés le lemme 2 on a:

$$|A_{R,\varphi}| \leqslant |\Omega_\rho| \leqslant k \rho^2 (3R)^{2p-2} = k' \varphi^2(R) R^{2p},$$

k et k' étant des constantes indépendantes de R. D'où le résultat.

§ 4. Minoration d'une fonction entiere d'ordre <1 hors d'un voisinage de ses zeros

4.1. Appelons σ-boules fermées (resp. ouvertes) une suite $(B_n)_{n \geqslant 1} = (B(\xi_n, r_n))_{n \geqslant 1}$ de boules fermées (resp. ouvertes) portées par $C^p - \{O\}$ avec $\sum_{n \geqslant 1} \Omega_n < \infty$ et $\lim_{n \to \infty} \|\xi_n\| = \infty$ où Ω_n est l'angle solide vu de O de B_n et ξ_n le centre de B_n.

Il est aisé de constater que dans une σ-boule fermée, il existe au moins un couple (B_n, B_{n+1}) disjointes (il existe donc une infinité de tels couples).

En effet, supposons le contraire; dans ce cas toute sphére $S(O, R)$ $r \geqslant \|\xi_1\| - r_1 > 0$ a une intersection non vide avec $A = \bigcup_{n>1} B_n$. Donc l'ensemble

$$\{r > 0 \mid S(O, R) \cap A \neq \varnothing\}$$

est un intervalle non borné I de R et sa mesure logarithmique $m_I = \int_I \frac{dt}{t} = \infty$. Or, si $d_n = \|\xi_n\|$, on a

$$I \subset \bigcup_{n>1} [d_n - r_n, d_n + r_n] = U$$

donc

$$m_I \leqslant w_U \leqslant \sum_{n>1} \int_{d_n - r_n}^{d_n + r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n>1} \mathrm{Log} \frac{d_n + r_n}{d_n - r_n}. \tag{5}$$

D'autre part

$$\Omega_n = k_p \int_0^{\mathrm{Arc\,sin}\frac{r_n}{d_n}} \sin^{2p-2} \theta d\theta$$

où k_p est une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace.

On vérifie aisément que

$$\left(\sum_{n>1} \Omega_n < +\infty\right) <=> \left(\sum_{n>1} \frac{r_n}{d_n} < \infty\right)$$

et que la série du second membre de (5) converge $\left(\text{en effet, } \mathrm{Log} \times \frac{d_n + r_n}{d_n - r_n} < 3\frac{r_n}{d_n} \text{ si } \frac{r_n}{d_n} < \frac{1}{2}\right)$; d'où une contradiction. Il en résulte:

4.2. Proposition. *Si $F(z_1, \cdots, z_n)$ est une fonction entiére, l'ensemble W_F, de ses zéros* (supposé non vide) *ne peut être couvert par une σ-boules fermées* (resp. ouvertes).,

4.3. Une inegalite. *Soient F une fonction entiére (non constante) d'ordre <1, $F(O)=1$, W_F l'ensemble des zéros de F, $B(O, R)$ la boule ouverte de centre O et de rayon $R>0$ et $W_{R,F} = B(v, R) \cap W_F \neq \varnothing$. Soit $1 < \tau < 2$ un nombre tel que la rèunion E des boules fermées de rayon $\rho = (\tau - 1)R$ et centrées sur $W_{\tau R, F}$ ne couvre pas $B(O, R)$. Alors pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de E on a:*

$$\mathrm{Log}\,|F(z_1, \cdots, z_n)| > \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t} dt - \frac{c(\tau)}{(\tau - 1)^{2p}} \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2} dt +$$

$$+\left[\frac{1}{2p-2}+\frac{(\tau R)^{2p-2}\,\|z\|}{(\tau R-\|z\|)^{2p-1}}\right]\nu_F(\tau R)$$

avec $c(\tau)=\dfrac{1}{2p-2}(\tau-1)^2\,\tau^{2p-2}+(2p-1)\,\tau^{2p}$; $\quad \lim\limits_{\tau\to 1} c(\tau)=2p-1$, et

$$\frac{|E\cap B(O,R)|}{|B(O,R)|}\leqslant c_{2p}\,\tau^{2p-2}\,(\tau-1)^2\,[\nu_F(\tau R).$$

D é m o n s t r a t i o n: La représentation 2.2 de § 2 donne:

$$\operatorname{Log}|F(z)|=\int\limits_{C^p} d\mu_F\left[\frac{1}{\|a\|^{2p-2}}-\frac{1}{\|z-a\|^{2p-2}}\right]=$$

$$=\int\limits_{\|a\|<\tau R} d\mu_F[\cdots]+\int\limits_{\|a\|>\tau R} d\mu_F[\cdots]=I_1+I_2.$$

1. M i n o r a t i o n d e I_1.

Pour $\|z\|\leqslant R$ et hors de E on a $\|a-z\|>\rho=(\tau-1)R$ et

$$I_1\geqslant\int\limits_{\|a\|<\tau R} d\mu_F(a)\left[\frac{1}{\|a\|^{2p-2}}-\frac{1}{\rho^{2p-2}}\right]=$$

$$=\int\limits_{\|a\|<\tau R}\frac{d\mu_F(a)}{\|a\|^{2p-2}}-\frac{\mu_F(\tau R)}{\rho^{2p-2}};$$

une intégration par parties donne:

$$\int\limits_{\|a\|<\tau R}\frac{d\mu_F(a)}{\|a\|^{2p-2}}=\left[\frac{\mu_F(t)}{t^{2p-2}}\right]_0^{\tau R}+(2p-2)\int\limits_0^{\tau R}\frac{\mu_F(t)}{t^{2p-1}}\,dt.$$

$\mu_F(t)$ étant nulle au voisinage de $t=0$ et $\mu_F(t)=\dfrac{1}{2p-2}\,t^{2p-2}\,\nu_F(t)$, on obtient

$$\int\limits_{\|a\|<\tau R}\frac{d\mu_F(a)}{\|a\|^{2p-2}}=\frac{1}{2p-1}\,\nu_F(\tau R)+\int\limits_0^{\tau R}\frac{\nu_F(t)}{t}\,dt,$$

$$I_1\geqslant\frac{1}{2p-2}\,\nu_F(\tau R)+\int\limits_0^{\tau R}\frac{\nu_F(t)}{t}\,dt-\frac{1}{2p-2}\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p-2}\nu_F(\tau R)\tag{6}$$

or

$$R\int\limits_R^{\infty}\frac{\nu_F(t)}{t^2}\,dt\geqslant R\,\nu_F(R)\int\limits_R^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\nu_F(R),\tag{7}$$

donc d'après (6) et (7):

$$I_1 \geqslant \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t} dt - \frac{1}{2p-2}\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p-2} \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2p-2} \nu_F(\tau R). \quad (8)$$

(Remarquer que l'hypothèse $F(O)=1$ entraîne, que la première intégrale figurant dans le second membre de (8) est égale à $\lambda(\text{Log}\,|F|, O, \tau R)$ et que la dernière intégrale est convergente puisque F étant d'ordre $\rho<1$ on a si $\rho+\varepsilon<1$, $\sup\limits_{\|z\|<r} \text{Log}\,|F(z)| \leqslant A r^{\rho+\varepsilon}$ (pour $r > r_0(\varepsilon)$, A=cte et

$\nu_F(r) \leqslant \lambda(\text{Log}\,|F|, O, er) - \lambda(\text{Log}\,|F|, O, r) \leqslant \lambda(\text{Log}\,|F|, O, er) \leqslant A' r^{\rho+\varepsilon}$)

2. Minoration de I_2.

Pour $\|a\| \geqslant \tau R$, $r=\|z\| \leqslant R$, $z \in E$, on a $\|a-z\| \geqslant \|a\| - \|z\|$ et

$$\frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|a-z\|^{2p-2}} \geqslant \frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{(\|a\|-r)^{2p-2}}$$

Posons $f(r) = (\|a\| - r)^{2-2p}$. Comme

$$f(r) - f(o) = r\frac{\partial f}{\partial r}(\theta r) = -r(2-2p)(\|a\| - \theta \cdot r)^{1-2p} \quad o<\theta<1$$

$$f(r) - f(o) \leqslant \frac{(2p-2)\,r}{(\|a\|-r)^{2p-1}}$$

d'où

$$\frac{1}{\|a\|^{2p-2}} - \frac{1}{\|a-z\|^{2p-2}} = f(0) - f(r) \geqslant -\frac{(2p-2)\,r}{(\|a\|-r)^{2p-1}}$$

$$I_2 \geqslant -(2p-2)\,r \int_{\|a\| \geqslant \tau R} \frac{d\mu_F(a)}{(\|a\|-r)^{2p-1}}$$

et grâce à une intégration par parties:

$$I_2 \geqslant -(2p-2)\,r\left[\left(\frac{\mu_F(t)}{(t-r)^{2p-1}}\right)_{\tau R}^{\infty} + (2p-1)\int_{\tau R}^{\infty} \frac{\mu_F(t)}{(t-r)^{2p}} dt\right] =$$

$$= -r\left[\left(\frac{t^{2p-2}\,\nu_F(t)}{(t-r)^{2p-1}}\right)_{\tau R}^{\infty} + (2p-1)\int_{\tau R}^{\infty} \frac{t^{2p-2}\,\nu_F(t)}{(t-r)^{2p}} dt\right] =$$

$$= -r\left[-\nu_F(\tau R)(\tau R)^{-1}\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{1-2p} + (2p-1)\int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\left(1-\frac{r}{t}\right)^{-2p} dt\right]$$

$$I_2 \geqslant r\,\nu_F(\tau R)(\tau R)^{-1}\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{1-2p} - (2p-1)\,r\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{-2p}\int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2} dt \quad (9)$$

et en rappelant que $r < R$,

$$I_2 \geqslant -(2p-1)\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p} \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt + r\nu_F(\tau R)(\tau R)^{-1}\left(1-\frac{r}{\tau R}\right)^{1-2p}.$$

Finalement pour $\|z\| = r \leqslant R$, $z \notin E$, on obtient

$$\operatorname{Log}|F(z)| \geqslant I_1 + I_2 \geqslant \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t}\, dt - \left[\frac{1}{2p-2}\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p-2} + \right.$$

$$\left. + (2p-1)\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2p}\right] \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt + \left[\frac{1}{2p-2} + \frac{(\tau R)^{2p-2}\|z\|}{(\tau R-\|z\|)^{2p-1}}\right] \nu_F(\tau R).$$

Enfin, d'après le lemme 2 où D_1 est la boule de centre O et de rayon $R+(\tau-1)\ R = \tau R$,

$$\frac{|E \cap B(\mathrm{O}, R)|}{|B(\mathrm{O}, R)|} \leqslant c_{2p}(\tau-1)^2\ \tau^{2p-2}\ \nu_F(\tau R).$$

4.4. Theoreme. *Soient F une fonction entiére* (non constante) *d'ordre nul;* $F(0)=1$, *W_F l'ensemble des zéros de F, $B(\mathrm{O}, R)$ la boule ouverte de centre O et de rayon $R>0$ et $W_{R,F} = W_F \cap B(\mathrm{O}, R) \neq \varnothing$. Soit $1<\tau<2$ un nombre tel que la réunion E des boules fermées de rayon $\rho = (\tau-1)\ R$ et centrées sur $W_{\tau R, F}$ ne couvre pas $B(\mathrm{O}, R)$. Alors pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de E on a:*

$$\operatorname{Log}|F(z_1,\cdots,z_p)| \geqslant M(R; F) - \frac{A}{(\tau-1)^{2p}}\ \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2} dt,$$

$A>0$ est une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace et $M(R; F) = \sup\limits_{\|z\|<R} \operatorname{Log}|F(z)|$.

En effet, F étant d'ordre nul, le théorème 2.3 de § 2 s'applique et on a:

$$M(R; F) \leqslant M(\tau R, F) \leqslant \int_0^{\tau R} \frac{\nu_F(t)}{t}\, dt + (2p-1)\ \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt.$$

D'après l'inégalité 4.3, pour $\|z\| \leqslant R$ et hors de E:

$$\operatorname{Log}|F(z)| \geqslant M(R; F) - \left[(2p-1) + \frac{c(\tau)}{(\tau-1)^{2p}}\right] \tau R \int_{\tau R}^{\infty} \frac{\nu_F(t)}{t^2}\, dt,$$

d'où l'énoncé 4.4 avec $A = (2p-1) + c\,(2)$.

4.5. Corollaire. *Pour un polynôme P de degré $q>0$ on a avec les hypothèses du théorème* 4.4:

$$\operatorname{Log}|P(z_1,\cdots,z_p)| \geqslant M(R; P) - \frac{Aq}{(\tau-1)^{2p}},\quad \|z\| < R,\ z \notin E.$$

Avec

$$\frac{|E\cap B(O, R)|}{|B(O, R)|}\leqslant c_{2p}\,(\tau-1)^2\,\tau^{2p-2}\,q.$$

En effet dans ce cas $\nu_p(t)\leqslant q$ pour tout t (cf. § 2).

4.6. Theoreme. *Soient P un polynôme* (non constante) $P(O)\neq 0$ *et* φ: $r\to\varphi(r)$ *de* $R_+\to R_+$ *une fonction continue vérifiant les conditions suivantes:*

1 — $\varphi(r)$ *tend en décroissant vers zéro.*

2 — $r\varphi(r)$ *est croissante.*

3 — $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi^{2p}(r)\operatorname{Log} r=\infty.$

Alors, on a uniformèment par rapport au vecteur $\vec{a}$ $(\|\vec{a}\|=1)$

$$\operatorname{Log}|P(R\vec{a})|\sim M(R;\ P)\quad (R\to\infty,\quad z=R\vec{a}\in C^p-\Omega_\varphi)$$

où

$$\Omega_\varphi=\{z\in C^p\,|\,d(z,\ W_P)\leqslant\varphi(\|z\|)\,\|z\|\},$$

et

$$\lim_{R\to\infty}\frac{|\Omega_\varphi\cap B(O,R)|}{\varphi(R)\,|B(O,\ R)|}=0.$$

Démonstration: D'aprés le corollaire 3.3, $C^p-\Omega_\varphi$ est un ouvert non borné. Si $z=R\vec{a}\in C^p-\Omega_\varphi$, z est à l'extérieur de toute boule fermée centrée sur W_P et de rayon $\varphi(R)\,R$. Le corollaire 4.5 appliqué avec $\tau=1+\varphi(R)$ au point z donne

$$M(R;\ P)\geqslant\operatorname{Log}|P(z)|>M(R;P)-\frac{Aq}{\varphi^{2p}(R)}\quad(\|z\|=R,\ z\notin\Omega_\varphi)$$

d'où

$$1\leqslant\frac{\operatorname{Log}|P(z)|}{M(R;P)}<1-\frac{Aq}{\varphi^{2p}\ (R)\ M\ (R;P)}\quad(R\geqslant R_0,\ M\,(R_0\cdot F)>0).$$

L'hypothèse 3 entraîne que $\varphi^{2p}\,M(R,P)\to\infty$ avec R. D'où le résultat.

4.7. Corollaire. *Avec les hypothèses et les notations du théorème 4.6 soit Λ_R une partie compacte de la sphère* $\{z\in C^p|\,\|z\|=R\}$ *située dans* $C^p-\Omega_\varphi$ *on a:*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\operatorname*{Min}\limits_{z\in\Lambda_R}\operatorname{Log}|P(z)|}{M(R;\ P)}=1.$$

4.8. Application aux polynômes hypoelliptiques.

Appelons ρ-polynôme hypoelliptique un polynôme P tel que la distance $d(x;\ W_P)$ d'un point $x\in R^p$ à $W_P=\{z\in C^p\,|\,P(z)=0\}$ vérifie à partir d'une certaine valeur de $\|x\|$ l'inègalite

$$d(x,\ W_P)>A\,\|x\|^\rho\ (A=\text{cte}>0,\ \|x\|>r_0,\ 0\notin W_P).$$

5.2. **Proposition.** *Si P est un ρ-polynôme hypoelliptique avec $\rho > 1$, on a*

$$\underset{\substack{\|x\|=R \\ x\in R^p}}{\mathrm{Min}} \operatorname{Log} |P(x)| \sim \underset{\substack{\|z\|<R \\ z\in C^p}}{\mathrm{Max}} \operatorname{Log} |P(z)| \quad (R \to \infty).$$

Démonstration: Si φ vérifie les hypothèses du théorème 4.6, on a pour $\|x\|$ assez grand

$$d(x, W_P) \geqslant A \|x\|^{\rho} > \varphi(\|x\|) \|x\|$$

et avec les notations du théorème 4.6, à partir d'une certaine valeur de $\|x\|$, la sphère $B(O, R) \cap R^p$ est contenue dans $C^p - \Omega_\varphi$; le corollaire 4.7 s'applique.

Remarque. En particulier la proposition 5.2 est valable si les zéros d'un polynôme P ($P(O) \neq 0$) sont portés par le cône

$$c = \left\{ z \in C^p; \frac{|z_1 x_1 + \cdots + z_p x_p|}{\|z\| \, \|x\|} < \cos\theta, \text{ pour tout } x \in R^p - \{O\} \right\} \times$$

$$\times \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right). \text{ (Fig. 5).}$$

En effet, on a

$$\delta(x; W_P) \geqslant \|x\| \sin\theta.$$

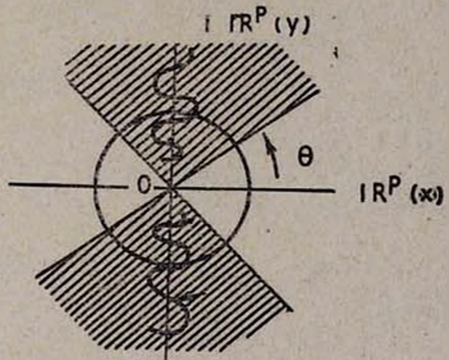

Fig. 5.

Recu le 31.III.1972

Վ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. «Գնդերի արտաքսման մեթոդի» որոշ կիրառությունները C^p-ում (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է մի քանի փոփոխականի բազմանդամների ասիմպտոտիկ վարքը՝ նրանց զրոների որոշակի տեսքի շրջակայքերից դուրս։

Մեթոդը հիմնված է շատ փոփոխականի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների և որպես պոտենցիալ նրանց ներկայացումների հատկությունների կիրառման վրա։

В. АВАНЕСЯН. *Некоторые применения „метода исключения шаров" в* C^p (резюме)

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение полиномов от нескольких переменных вне определенного вида окрестностей их нулей. Метод использует свойства субгармонических функций многих переменных и их представлений в виде потенциалов.

BIBLIOGRAPHIE

1. *V. Avanissian.* Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, Ann. sc. E.N.S., t. 67, 1961.
2. *V. Avanissian.* Fonctions entières de p variables... J. d'Analyse math., vol. IX, 1961/62, Jérusalem.
3. *W. K. Hayman.* Slowly growing integral and subharmonic functions, Comm. Math. Helvetica. vol. 34, 1960.
4. *L. Hormander.* Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1964, pp. 100.
5. *P. Lelong.* Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, Ann. Sc. E.N.S. t. 62, 1950.
6. *P. Lelong.* Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques. J. Analyse Math., vol. XII, 1964, Jérusalem.
7. *P. Lelong.* Séminaire d'Eté. Montréal, 1967.
8. *J. E. Stein.* Séminaire d'Orsay, 1966—67.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

С. К. АФЯН

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Введение

Рассмотрим в круге $|z|\leqslant 1$ $(z=x+iy)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\overline{B(z)}\,\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z\partial \overline{z}}=0, \tag{1.1}$$

где $u(z)=u_1(x,y)+iu_2(x,y)$—искомая функция, $B(z)$ — заданная, аналитическая в круге $|z|<1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ функция, удовлетворяющая условию

$$|B(z)|<1 \text{ при } |z|<1, \ |B(z)|=1 \text{ при } |z|=1. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что (1.1) эквивалентно системе уравнений, эллиптической в $|z|<1$ и вырождающейся на всей границе $|z|=1$. Невырожденные эллиптические системы и связанные с ними краевые задачи хорошо изучены (см., например, [3]).

Для систем, вырождающихся только на некотором участке, изучены такие краевые задачи, в которых граничные условия для одних компонент вектора-решения задаются на всей границе, а для остальных компонент—только на невырожденном участке границы (см., например, [1] и [2]).

В настоящей работе рассматривается краевая задача Римана-Гильберта в случае вырождения на всей границе. Для точной формулировки этой задачи приведем определения.

Функция $u(z)$, принадлежащая $C^{(1)}(|z|\leqslant 1)\cap C^{(2)}(|z|<1)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в круге $|z|<1$, называется регулярным решением этого уравнения.

Формулировка задачи. Требуется найти регулярное решение $u(z)$ уравнения (1.1) по краевому условию

$$\operatorname{Re}\{[a(t)-ib(t)]\,u(t)\}=c(t) \text{ при } |t|=1, \tag{1.3}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — заданные на границе $|t|=1$ вещественные функции, принадлежащие классу $C^{(1,h)}$ и такие, что $a^2+b^2\neq 0$ при любом t, $|t|=1$.

В параграфе 2 получено общее решение уравнения (1.1). В па-
раграфе 3 изложен метод нахождения общего решения задачи Римана-
Гильберта для уравнения (1.1) и найден индекс этой задачи.

§ 2. Построение общего решения

Как известно (см. [7], стр. 312) верна

Лемма 2.1. Если функция $B(z)$ отлична от постоянной, анали-
тична в круге $|z|<1$, непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и удовле-
творяет условию (1.2), то она представима в виде

$$B(z)=e^{i\theta}\prod_{k=1}^{m}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}, \tag{2.}$$

где θ—некоторое действительное число и $|a_k|<1$, $k=1,\cdots,m$.

В дальнейшем, без ограничения общности, можно взять $\theta=0$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{a_k\colon |a_k|<1,\ k=1,2,\cdots,m\}$ — *произвольные комплексные числа. Тогда*:

1. *Выражение*

$$Q_m(z)=(1-|z|^2)^{-1}\left(\prod_{k=1}^{m}|1-\bar{a}_k z|^2-\prod_{k=1}^{m}|z-a_k|^2\right) \tag{2.}$$

является полиномом относительно z *и* $\bar{z}$, *где* m—*произвольное целое число.*

2. *Существует константа* $q_m>0$ *такая, что*

$$Q_m(z)\geqslant q_m>0 \quad при \quad |z|<1. \tag{2.}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$Q_1(z)=1-|a_1|^2. \tag{2.}$$

Следовательно утверждение леммы справедливо при $m=1$.

Пусть лемма верна при $m=s$. Докажем, что тогда она верна
также при $m=s+1$. Согласно предположению индукции существует
постоянная q_s такая, что

$$Q_s(z)\geqslant q_s>0 \quad при \quad |z|\leqslant 1. \tag{2.5}$$

С другой стороны, легко убедиться в справедливости следую-
щего соотношения

$$Q_{s+1}(z)=|1-\bar{a}_{s+1}z|^2\,Q_s(z)+(1-|a_{s+1}|^2)\prod_{k=1}^{s}|z-a_k|^2. \tag{2.6}$$

Отсюда и следует, что $Q_{s+1}(z)$ есть полином относительно z и
$\bar{z}$. Из (2.5) вытекает, в силу условий $|a_k|<1$, $k=1,2,\cdots,s+1$, что
функция $Q_{s+1}(z)$ в замкнутом круге непрерывна, положительна и не
обращается в нуль. Отсюда и следует (2.3) при $m=s+1$.

Лемма 2.3. *Пусть $m \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant m$. Тогда для любых комплексных чисел $a_1, \cdots, a_m$ выражение*

$$P_{k,m}(z) = (1-|z|^2)^{-1}\left[z^k \prod_{p=1}^{m}(1-a_p\bar{z}) - \bar{z}^{m-k}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p)\right] \tag{2.7}$$

есть полином относительно z и $\bar{z}$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.2.

В дальнейшем, для простоты, ограничимся случаем, когда m — нечетное число. В случае, когда m—четное число, все дальнейшие утверждения можно получить аналогичными рассуждениями.

Лемма 2.4. *Пусть $P_{l,m}(z)(l=0, 1,\cdots, m)$ и $Q_m(z)$ — полиномы, определенные по формулам (2.7) и (2.2), в которых в качестве чисел a_k $(k=1, 2,\cdots, m)$ взяты все нули коэффициента $\overline{B(z)}$ уравнения (1.1), а*

$$R_k(z) = \begin{cases} [Q_m(z)]^{-1}[P_{k,m}(z)+P_{m-k,m}(z)] \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{m-1}{2} \\ i[Q_m(z)]^{-1}[P_{k-\frac{m+1}{2},m}(z) - P_{\frac{3m+1}{2}-k,m}(z) \\ \qquad \text{при } \dfrac{m+1}{2} \leqslant k \leqslant m. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тогда для произвольного регулярного решения $u(z)$ уравнения (1.1) можно указать действительные числа d_k $(k=0, 1,\cdots, m)$ такие, что $u(z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=0}^{m} d_k R_k(z). \tag{2.9}$$

Обратно, если для произвольно выбранных действительных чисел d_k $(k=0, 1,\cdots, m)$, $u(z) \in C^{(2)}(|z|<1) \cap C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$ есть некоторое решение уравнения (2.9), то оно является также регулярным решением уравнения (1.1).

Доказательство. Пусть $u(z)$ —произвольное регулярное решение уравнения (1.1) в круге $|z|<1$. Тогда имеет место

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{B(z)}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right) = 0, \tag{2.10}$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{B(z)}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \overline{\varphi(z)}, \tag{2.11}$$

где $\varphi(z) \in C(|z| \leqslant 1)$—некоторая аналитическая в круге $|z|<1$ функция.

Перейдя в (2.11) к комплексно сопряженным, получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + B(z)\,\frac{\partial u}{\partial z} = \varphi(z), \tag{2.12}$$

а из (2.11) и (2.12)

$$[1-|B(z)|^2]\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}}=\varphi(z)-B(z)\,\overline{\varphi(z)}\,. \tag{2.13}$$

Подставляя в (2.13) выражение для $B(z)$ из (2.1), получим

$$\left(1-\prod_{p=1}^{m}\frac{|z-a_p|^2}{|1-\overline{a}_p z|^2}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}}=\varphi(z)-\overline{\varphi(z)}\prod_{p=1}^{m}\frac{z-a_p}{1-\overline{a}_p z}\,. \tag{2.14}$$

В силу ограниченности $\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}}$, левая часть (2.14) стремится к нулю при $|z|\to 1$. Кроме того, так как $\varphi(z)\in C(|z|\leqslant 1)$, то

$$\varphi(z)=\overline{\varphi(z)}\prod_{p=1}^{m}\frac{z-a_p}{1-\overline{a}_p z}\quad \text{при } |z|=1. \tag{2.15}$$

Из (2.15) получим

$$\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\overline{a}_p z)=\overline{\varphi\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p)\quad \text{при}\quad |z|=1. \tag{2.16}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z)=\begin{cases}\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\overline{a}_p z) \text{ при } |z|\leqslant 1\\ \overline{\varphi\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p) \text{ при } |z|>1.\end{cases} \tag{2.17}$$

Функция $F(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $|F(z)|=O(|z|^m)$ при $|z|\to\infty$. Поэтому $F(z)$ имеет вид

$$F(z)=c_0+c_1 z+\cdots+c_m z^m.$$

Следовательно

$$\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\overline{a}_p z)=c_0+c_1 z+\cdots+c_m z^m \text{ при } |z|\leqslant 1 \tag{2.18}$$

и

$$\overline{\varphi\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\prod_{p=1}^{m}(z-a_p)=c_0+c_1 z+\cdots+c_m z^m \text{ при } |z|>1. \tag{2.19}$$

Из (2.19) получим

$$\varphi(z)\prod_{p=1}^{m}(1-\overline{a}_p z)=\overline{c}_0 z^m+\overline{c}_1 z^{m-1}+\cdots+\overline{c}_m \text{ при } |z|<1. \tag{2.20}$$

Из (2.18) и (2.20) следует, что

$$c_{m-k}=\overline{c}_k,\ k=0,1,\cdots,m. \tag{2.21}$$

Пусть

$$d_k = \begin{cases} \operatorname{Re} c_k \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{m-1}{2}, \\ \operatorname{Im} c_{k-\frac{m+1}{2}} \text{ при } \dfrac{m+1}{2} \leqslant k \leqslant m. \end{cases} \tag{2.22}$$

Тогда в силу (2.21)

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m = \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} [d_k (z^k + z^{m-k}) + i d_{k+\frac{m+1}{2}} (z^k - z^{m-k})]. \tag{2.23}$$

Учитывая (2.23), определим из (2.18) функцию $\varphi(z)$ и подставим в (2.15). Из (2.8) следует, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2.9). Легко проверить справедливость также и утверждений второй части леммы. Таким образом, лемма доказана.

Теперь перейдем к построению общего решения уравнения (1.1). Из лемм 2.2 и 2.3 вытекает, что функции $R_k(z)$, $k=0, 1, \cdots, m$, а, следовательно, и правая часть (2.9), принадлежат классу $C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$ при произвольных комплексных a_p, $p=1, 2, \cdots, m$, для которых $|a_p| < 1$. Тогда, как известно (см. [4], стр. 42), общее решение уравнения (2.9) задается формулой

$$u(z) = \overline{\Phi(z)} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m} d_k \iint_{|t|<1} \frac{\overline{R_k(t)}}{\overline{t - z}} \, d\xi d\eta, \tag{2.24}$$

где $t = \xi + i\eta$, $\Phi(z) \in C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$—произвольная аналитическая в круге $|z| < 1$ функция и d_k—произвольные действительные числа. Тогда, в силу леммы 2.4, получаем, что общее решение уравнения (1.1) дается формулой (2.24).

§ 3. Задача Римана-Гильберта для уравнения (1.1)

Введем сначала некоторые обозначения. Положим

$$\sigma = \frac{1}{\pi} [\arg (a(t) - ib(t))]_{|t|=1}, \tag{3.1}$$

где символ $[\ ]_{|t|=1}$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при полном обходе окружности $|t|=1$ в положительном направлении;

$$g_k(\theta) = -\operatorname{Re}\left[(a(t) - ib(t)) \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{R_k(\zeta)}{\zeta - t} \, d\xi d\eta \right], \quad t = e^{i\theta}, \ k=0, 1, \cdots, m, \tag{3.2}$$

где $R_k(z)$ $(k=0, 1, \cdots, m)$—функции, определенные по формулам (2.8).

Согласно (2.24) и (3.2) краевое условие (1.3) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\{[a(t)+ib(t)]\,\Phi(t)\}=c(t)-\sum_{k=0}^{m} d_k\, g_k(t) \text{ при } |t|=1. \tag{3.3}$$

Тогда нахождение решения $u(z)$ задачи Римана-Гильберта для уравнения (1.1) сводится к нахождению действительных чисел d_k $(k=0, 1, \cdots, m)$ и функции $\Phi(z)$, аналитической в круге $|z|<1$ и принадлежащей классу $C^{(1)}(|z|<1)$, для которых справедливо условие (3.3). Последнюю задачу будем коротко называть задачей (3.3). Для заданных $d_0, d_1, \cdots, d_m$ задача (3.3) есть известная задача Римана-Гильберта о нахождении аналитической функции, которая полностью изучена (см. [5], стр. 149).

Как известно, при $\sigma\geqslant 0$ неоднородная задача Римана-Гильберта всегда имеет решение.

Рассмотрим сначала однородную задачу (1.1), (1.3), т. е. когда $c(t)=0$. При $\sigma\geqslant 0$, подставляя в (2.24) вместо $\Phi(z)$ общее решение задачи Римана-Гильберта с краевым условием (3.3), выраженное через $d_0, d_1, \cdots, d_m$, получим общее решение однородной задачи (1.1), (1.3), зависящее линейно от $\sigma+m+2$ действительных постоянных (см. [5], стр. 148—151). В случае $\sigma<-2$ (σ — четное число), как известно (см. [5], стр. 149), неоднородная задача Римана-Гильберта с краевым условием (3.3) ($c(t)=0$) имеет решение в том случае, когда правая часть (3.3) ($c(t)=0$) удовлетворяет некоторым условиям ортогональности. В данном случае для выполнения этих условий необходимо, чтобы $d_0, d_1, \cdots, d_m$ удовлетворяли некоторой алгебраической линейной однородной системе уравнений.

Пусть $d_0^1, d_1^1, \cdots, d_m^1$ — некоторое решение системы этих алгебраических уравнений. Это решение подставим в (3.3), после чего, заменяя в (2.24) $\Phi(z)$ решением задачи Римана-Гильберта с краевым условием (3.3), $d_0, d_1, \cdots, d_m$ на $d_0^1, d_1^1, \cdots, d_m^1$, будем иметь некоторое решение исходной однородной задачи (1.1), (1.3) при $\sigma\leqslant-2$. Очевидно, что каждое решение задачи (1.1), (1.3) будет получено описанным способом.

Перейдем к вычислению индекса $\varkappa$ задачи (1.1), (1.3). Легко убедиться, что $\varkappa$ равно индексу задачи (3.3), для вычисления которого рассмотрим банаховые пространства E_1 и E_2, определенные следующим образом:

E_1—пространство элементов $(\Phi(z), d_0, d_1, \cdots, d_m)$ с обычными операциями и нормой $\max\limits_{|z|<1}|\Phi'(z)|+\max\limits_{|z|<1}|\Phi(z)|+\max\limits_{0<k<m}|d_k|$, где $\Phi(z)$— аналитическая в круге $|z|<1$ функция, имеющая непрерывную производную в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$;

E_2—пространство элементов $(\alpha(t), d_0, d_1, \cdots, d_m)$, также с обычными операциями и нормой $\max\limits_{|t|=1}|\alpha(t)|+\max\limits_{0<k<m}|d_k|$, где $\alpha(t)\in C^{(1)}(|t|=1)$.

Пусть теперь операторы K_1; $E_1 \to E_2$ и K_2: $E_2 \to C^{(1)}$ $(|t|=1)$ определены следующим образом:

$$K_1(\Phi(z), d_0, d_1, \cdots, d_m) = (\operatorname{Re}((a+ib)\Phi)|_{|t|=1}, d_0, d_1, \cdots, d_m),$$

$$K_2(\alpha(t), d_0, d_1, \cdots, d_m) = \alpha(t) + d_0 g_0(t) + d_1 g_1(t) + \cdots + d_m g_m(t).$$

Тогда условие (3.3) можно записать в виде

$$K_2 \circ K_1(\Phi(z), d_0, d_1, \cdots, d_m) = c(t).$$

По теореме об индексе произведения двух операторов (см., например, [6], стр. 45) имеем

$$\operatorname{ind}(K_2 \circ K_1) = \operatorname{ind} K_1 + \operatorname{ind} K_2.$$

Легко видеть, что $\operatorname{ind} K_1$ равняется индексу задачи Римана-Гильберта, т. е. $\operatorname{ind} K_1 = \sigma + 1$, а $\operatorname{ind} K_2 = m+1$. Откуда получим

$$\varkappa = \sigma + m + 2. \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е. Все приведенные утверждения остаются в силе и в том случае, когда требование принадлежности $u(z)$ к классу $C^{(1)}(|z| \leqslant 1)$ заменим условиями:

1. $u(z) \in C^{(0,h)}(|z| \leqslant 1)$;
2. $\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \dfrac{\text{const}}{(1-|z|)^{\alpha}}$, $|z|<1$ $(0 < \alpha < 1)$;
3. Функция $\left[\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + B(z)\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]$ имеет конечный предел при $|z| \to 1$.

Автор выражает признательность проф. Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный
университет

Поступила 18.VII.1972

Ս. Կ. ԱՖՅԱՆ. Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի համար (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքում ստացված է տիրույթի եզրում վերածվող դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմների մի դասի ընդհանուր լուծումը։ Դիտարկված է Ռիման-Հիլբերտի խնդիրը այդպիսի սիստեմների համար և հաշված է այդ խնդրի ինդեքսը։

S. K. AFIAN. *The Rieman-Hilbert problem for a class of elliptical systems of differential equations with degeneration on the boundary* (summary)

The general solution for a class of elliptical systems of diferential equations with degeneration on the boundary is obtained. The Rieman-Hilbert problem is considered and the index is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Диденко.* Первая краевая задача для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений с вырождением на границе, Сибирский мат. журн., VI, № 4, 1965, 814—831.
2. *С. А. Терсенов.* К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области, Сибирский мат. журн., VI, № 5, 1965, 1120—1143.
3. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.
4. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., 1959.
5. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.
6. *С. Г. Крейн.* Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
7. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 4, 1973 Математика

Ю. С. ФРИДЛЯНД

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ РЯД ФУРЬЕ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ОТ ЗАДАННОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L^p_{(0,\,1)}$ $(1 \leqslant p < 2)$ по полной, ортонормированной, ограниченной в совокупности системе функций $\{\varphi_n\}$. Обязан ли этот ряд сходиться почти всюду к f? Вообще говоря, нет, так как справедлива следующая теорема А. М. Олевского [1]:

Теорема. Существуют полная, ортонормированная, ограниченная в совокупности система функций $\{\varphi_n\}$ и функция $f \in L^p_{(0,\,1)}$ при всех $p \in [1,\,2)$ такие, что ряд Фурье функции f по системе $\{\varphi_n\}$ π-универсален, т. е. для любой измеримой функции g существует такая перестановка натурального ряда $\{n_k\}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ сходится п. в. к g.

В настоящей работе этот результат усиливается в двух направлениях. Во-первых, показывается, что в качестве функции f может быть взята любая наперед заданная интегрируемая функция (не принадлежащая $L^2_{(0,\,1)}$). С другой стороны, вышеупомянутая система $\{\varphi_n\}$ состоит из разрывных функций. Ниже показывается, что подобная система может быть построена из алгебраических полиномов. Заметим, что этот результат не может быть получен путем аппроксимации исходной системы полиномами и последующей ортогонализацией, так как из работы А. М. Олевского [2] вытекает, что полученная система полиномов лишь квадратично близка к исходной системе, а такая близость не обеспечивает равносходимости соответствующих рядов.

Итак, справедлива

Теорема. *Для любой функции $f \in L_{(0,\,1)}$, $f \overline{\in} L^2_{(0,\,1)}$ существует замкнутая в $C_{(0,\,1)}$, ортонормированная, ограниченная в совокупности система алгебраических полиномов $\{p_n\}$ такая, что ряд Фурье функции f по системе $\{p_n\}$ π-универсален.*

Обозначим

$$\|f\|_p = \left\{ \int\limits_0^1 |f|^p \, dx \right\}^{1/p}, \; 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

где

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,\,1]} |f(x)|,$$

$\chi(E)$ — характеристическая функция множества E, и докаже предварительно ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть заданы ортонормированная система пол номов* $\{p_k\}$, $k=1, 2, \cdots, n$ *на отрезке* $[0, 1]$, *функция* $f \in L_{(0,1)}$. *Тог существует полином* g, *обладающий свойствами:*

а) $\|g\|_2=1$,

б) $(g, p_i)=0, \ i=1, 2, \cdots, n,$

в) $$\int_0^1 fg dx = 0,$$

г) $\|g\|_\infty < C$, *где* C — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Построим полином g_1, который удовлетворяет условиям а), б) и г). Существование такого полинома обеспечивается леммой 3 работы А. М. Олевского [2]. Применяя эту лемм еще раз к системе полиномов $p_1, \cdots, p_n, g_1$, получим полином g удовлетворяющий тем же условиям и условию $(g_1, g_2)=0$.

Положим далее

$$\alpha_1 = \int_0^1 fg_1 \, dx, \quad \alpha_2 = \int_0^1 fg_2 \, dx.$$

Тогда полином

$$g = \frac{\alpha_2 g_1 - \alpha_1 g_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

удовлетворяет всем условиям леммы. В самом деле, условия а), б) г) выполнены для g, так как они выполнены для g_1 и g_2.

Проверим выполнение в). Имеем

$$\int_0^1 gf dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \left[\alpha_2 \int_0^1 g_1 f dx - \alpha_1 \int_0^1 g_2 f dx \right] = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда дл любого отрезка* $\Delta \subset [0, 1]$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует полином* g *обладающий свойствами:*

а) *выполнены требования* а)—в) *леммы* 1;

б) *существует множество* $E \subset \Delta$ *такое, что*

$$\left.\begin{array}{l} \mu E \leqslant |\Delta|^2 + \varepsilon \\ |g(x) - (1 - |\Delta|)^{-1/2}| < \varepsilon; \ x \in \Delta \setminus E \\ |g(x)| < \varepsilon, \ x \overline{\in} \Delta \end{array}\right\} ; \qquad (1)$$

Доказательство. По заданному $\varepsilon>0$ выберем числа γ, η и θ, которые будут зафиксированы впоследствии. Разделим отрезок Δ на 2^N равных отрезков Δ_k $(k=1, 2, \cdots, 2^N)$ и определим функцию

$$r_1 = \begin{cases} \gamma, \ x \in \Delta_k; \ k=1, 3, \cdots, 2^N-1 \\ -\gamma, \ x \in \Delta_k; \ k=2, 4, \cdots, 2^N \\ 0, \ x \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

причем N выбрано столь большим, что выполнены соотношения

$$|(p_i, r_1)| < \eta, \ i=1, 2, \cdots, n. \tag{2}$$

Очевидны равенства

$$\|r_1\|_2 = \gamma \sqrt{\Delta}, \ \|r_1\|_\infty = \gamma. \tag{3}$$

Приблизим r_1 полиномом r_2 так, чтобы

$$\|r_1 - r_2\|_2 < \eta, \ \|r_2\|_\infty \leqslant \|r_1\|_\infty + \eta \tag{4}$$

и положим

$$r = r_2 - \sum_{i=1}^{n} (r_2, p_i) p_i, \ a = \int_0^1 rf dx.$$

Каждый из отрезков Δ_k $(k = 1, 2, \cdots, N)$ разделим на 2^R равных отрезков Δ_{km} $(m=1, 2, \cdots, 2^R)$ и определим функцию

$$q_1 = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-|\Delta|}}{|\Delta|}, \ x \in \left(a_{km}, a_{km} + \dfrac{|\Delta|^2}{2^{N+R}}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-|\Delta|}}, \ x \in \left(a_{km} + \dfrac{|\Delta|^2}{2^{N+R}} b_{km}\right) \\ 0, \qquad x \overline{\in} \Delta, \end{cases}$$

где $\Delta_{km} = (a_{km}, b_{km})$. Число R выбрано так, что

$$\left|\int_0^1 f q_1 \, dx\right| < \theta, \ |(g_1, p_i)| < \theta \ (i=1, 2, \cdots, n), \ |(q_1, r)| < \theta. \tag{5}$$

Очевидно, что $\|q_1\|_2=1$. Приблизим q_1 полиномом q_2 так, чтобы

$$\begin{gathered} \|q_1 - q_2\|_2 < \theta, \\ \sup_{x \in (\Delta \setminus F) \cup ([0, 1] \setminus \Delta)} |q_1(x) - q_2(x)| < \theta, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} F \subset \Delta, \ \mu F \leqslant |\Delta|^2 + \varepsilon, \\ \|q_2\|_\infty \leqslant \|q_1\|_\infty + \theta, \\ \int_F |f| \, dx < \theta \end{gathered}$$

и положим

$$q=\frac{q_2-\sum\limits_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i-\dfrac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r}{\left\|q_2-\sum\limits_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i-\dfrac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r\right\|_2},$$

$$\beta=\int\limits_0^1 qf\,dx,\quad g=\frac{q-\dfrac{\beta}{\alpha}\,r}{\left\|q-\dfrac{\beta}{\alpha}\,r\right\|_2}.$$

Полином g — искомый. Чтобы доказать это, получим ряд оценок. Из соотношений (2) и (4) имеем

$$|(r_2, p_i)|\leqslant|(r_1-r_2, p_i)|+|(r_1, p_i)|<\eta\ (i=1, 2,\cdots, n). \tag{7}$$

Из (7), (3) и (4) вытекает

$$\|r\|_\infty\leqslant\|r_2\|_\infty+\sum_{i=1}^{n}|(r_2, p_i)|\,\|p_i\|_\infty\leqslant\gamma+\eta\,(1+n\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|p_i\|_\infty),$$

$$\|r\|_2\geqslant\|r_2\|_2-\sum_{i=1}^{n}|(r_2, p_i)|>\gamma\sqrt{\Delta}-\eta\,(2n+1), \tag{8}$$

$$\|r\|_2\leqslant\|r_2\|_2+\sum_{i=1}^{n}|(r_2, p_i)|\leqslant\gamma\sqrt{\Delta}+\eta\,(2n+1).$$

Соотношения (5), (6) и (3) дают

$$|(q_2, r)|\leqslant|(q_1-q_2, r)|+|(q_1, r)|\leqslant\theta\,(1+\gamma\sqrt{\Delta}), \tag{9}$$

$$|(q_2, p_i)|\leqslant|(q_1-q_2, p_i)|+|(q_1, p_i)|\leqslant 2\theta\ (i=1, 2,\cdots, n). \tag{10}$$

Наконец, из (9), (10), (8) и (6) получаем

$$\left\|q_2-\sum_{i=1}^{n}(q_2, p_i)\,p_i-\frac{(q_2, r)}{(r, r)}\,r\right\|_2>1-\theta-2n\theta-$$

$$-\frac{\theta\,(1+\gamma\sqrt{\Delta})}{\gamma\sqrt{\Delta}-\eta(2n+1)}>1/2, \tag{11}$$

если выбрать η и θ достаточно малыми. Используя далее (5), (6), имеем

$$\left|\int\limits_0^1 q_2 f\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_0^1(q_1-q_2)\,f\,dx\right|+\left|\int\limits_0^1 q_1 f\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\theta+\left|\int\limits_{CF}(q_1-q_1)\,f\,dx\right|+\left|\int\limits_F(q_1-q_2)\,f\,dx\right|\leqslant\theta+\theta\|f\|_2+$$

$$+ (\|q_1\|_\infty + \|q_2\|_\infty) \int_F |f|\, dx \leqslant \theta\, [1 + \|f\|_1 + \|q_1\|_\infty + \|q_2\|_\infty].$$

Из последнего неравенства, учитывая также оценки (9) — (11), получаем

$$|\beta| < \frac{1}{\left\| q_2 - \sum_{i=1}^{n} (q_2, p_i)\, p_i - \frac{(q_2, r)}{(r, r)}\, r \right\|_2} \left[\left| \int_0^1 q_2 f dx \right| + \sum_{i=1}^{n} |(q_2, p_i)| \times \right.$$

$$\left. \times \left| \int_0^1 f p_i\, dx \right| + \frac{|(q_2, r)|}{|(r, r)|}\, |\alpha| \right] <$$

$$\leqslant 2\theta \left[1 + \|f\|_1 + \|q_1\|_\infty + \|q_2\|_\infty + \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^1 f p_i\, dx \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \gamma \sqrt{\Delta}}{[\gamma \sqrt{\Delta} - \eta (2n + 1)]^2}\, |\alpha| \right] \equiv \theta A. \qquad (12)$$

Из (8) и (12) вытекает $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1,$

$$\left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2 \leqslant 1 + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|r\|_2 \leqslant 1 + 2\gamma \sqrt{\Delta},$$

$$\left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2 \geqslant 1 - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|r\|_2 \geqslant 1 - 2\gamma \sqrt{\Delta} > \frac{1}{2} \qquad (13)$$

при достаточно малых η, θ и γ. Таким образом

$$\left| \left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\| - 1 \right| \leqslant 2\gamma \sqrt{\Delta}. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) получаем

$$\|g - q\|_\infty \leqslant \frac{1}{\left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2} \left[\|q\|_\infty \left(1 - \left\| q - \frac{\beta}{\alpha} r \right\|_2 \right) + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|r\|_\infty \right] \leqslant 2\, [\, \|q\|_\infty\, 2\gamma \sqrt{\Delta} + \theta A \gamma] < \varepsilon \qquad (15)$$

при достаточно малом γ. Тем самым числа η, θ и γ фиксированы.

Проверим теперь выполнение требований леммы. Условия а)—в) леммы 1 выполнены для q и r, а следовательно и для g, что вытекает непосредственно из построения. Условия (1) выполнены для q_1 при $E = \varnothing$. В силу (6) эти условия будут выполнены и для q_2 при $E = F$. Но тогда из (15) вытекает их выполнение и для полинома g. Лемма полностью доказана.

Следующая лемма принадлежит А. М. Олевскому [3].

Лемма 3. *Для любого натурального k существует ортогональная матрица $A_k=\|a_{ij}^{(k)}\|$ порядка 2^k, удовлетворяющая условиям:*

а) $a_{1j}^{(k)}=2^{-k/2},\ 1\leqslant j\leqslant 2^k$,

б) $a_{2j}^{(k)}=2^{-k/2},\ 1\leqslant j\leqslant 2^{k-1},\ a_{2j}^{(k)}=-2^{-k/2},\ 2^{k-1}<j\leqslant 2^k$,

в) $|a_{ij}^{(k)}|<C,\ 1\leqslant j\leqslant 2^k$,

г) $\sum\limits_{i=1}^{2^k}|a_{ij}^{(k)}|<C,\ 1\leqslant j\leqslant 2^k$,

д) $\sum\limits_{i=1}^{2^k}\left|\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}^{(k)}\right|\leqslant C2^{k/2},\ 1\leqslant m\leqslant 2^k$.

Лемма 4. *Пусть $B\subset L^2_{(0,1)}$ — n-мерное подпространство из полиномов, функция $f\in L_{(0,1)}$, $f\overline{\in} L^2_{(0,1)}$, $H(f,B)=\{\varphi:\varphi\in L^{\infty}_{(0,1)}\}$ — множество функций таких, что*

$$\int_0^1 f\varphi dx=0,\ (\varphi,g)=0\ (\forall g\in B). \tag{16}$$

Тогда

а) $\overline{H}(f,B)=B^1$ (*черта обозначает замыкание в* L^2)

б) *в* $H(f,B)$ *существует замкнутая, ограниченная в совокупности (некоторой абсолютной константой) система полиномов.*

Доказательство. Прежде всего можно считать, что $\int_0^1 fgdx=0$ $(\forall g\in B)$ (в противном случае рассмотрим функцию $f_1=f-\sum\limits_{i=1}^{n}(f,g_i)\,g_i$, где $\{g_i\}$ — ортонормированный базис в B, $(f,g_i)=\int_0^1 fg_i\,dx$.

Рассмотрим множество $H_1\subset H$ полиномов, удовлетворяющих условиям (16) и предположим, что H_1 не плотно в B^1. Тогда существует функция $F\in B^1$ такая, что

$$\int_0^1 Fhdx=0,\ \forall h\in H_1.$$

Кроме того, существует полином $h_0\in B^1$ такой, что

$$\int_0^1 fh_0dx\neq 0, \tag{17}$$

так как в противном случае мы бы имели $\int\limits_0^1 fhdx=0$ для любого полинома, что невозможно. Поэтому для любого полинома $p\in B^1$ существует такое число t, что

$$\int\limits_0^1 f(p-th_0)\,dx=0. \tag{18}$$

Из (18), с учетом того, что $p-th_0\in B^1$ вытекает, что $p-th_0\in H_1$ откуда следует, в силу предположения

$$\int\limits_0^1 F(p-th_0)\,dx=0.$$

Отсюда и из (17) и (18) получаем

$$\int\limits_0^1 Fpdx=t\int\limits_0^1 Fh_0\,dx=\int\limits_0^1 fpdx\cdot\left(\int\limits_0^1 Fh_0\,dx\Big/\int\limits_0^1 fh_0dx\right)\equiv\lambda\int\limits_0^1 fpdx.$$

Учитывая, что $\int\limits_0^1 fgdx=0\ \forall g\in B$, получаем $F\equiv\lambda f$, что невозможно, так как $f\in L^2$. Утверждение а) доказано.

Пусть теперь $\{l_n\}$—произвольная, замкнутая в H_1 (а следовательно и в H) система нормированных полиномов. Пусть еще $\{h_i\}$, $i=1,2,\cdots,k$ — ортонормированная система полиномов, $h_i\in H_1$, причем

$$\|h_i\|_\infty<1+C^2,\quad i=1,2,\cdots,k. \tag{19}$$

Существование таких полиномов обеспечено леммой 1.

Пусть еще $\hat{l}_{n_{k+1}}$ — перпендикуляр в $L^2_{(0,1)}$, опущенный из $l_{n_{k+1}}$ на линейную оболочку, натянутую на полиномы $h_1,\cdots,h_k$ ($l_{n_{k+1}}$—первый из не вошедших в эту линейную оболочку полиномов l_n). Найдется натуральное число s_{k+1} такое, что

$$\|\hat{l}_{n_{k+1}}\|_\infty\leqslant 2^{\frac{s_{k+1}}{2}}. \tag{20}$$

Применяя последовательно $2^{s_{k+1}}-1$ раз лемму 1, получим ортонормированную систему полиномов $\{\hat{h}_j\}$, $j=k+2,\cdots,2^{s_{k+1}}+k$, причем будет выполнено соотношение (16) и

$$\|\hat{h}_j\|_\infty<C,\quad j=k+2,\cdots,2^{s_{k+1}}+k. \tag{21}$$

Определим полиномы $\{h_j'\}$, $j=k+1,\cdots,2^{s_{k+1}}+k$ следующим образом:

$$h_j = a_{j,}^{(s_k+1)} \hat{l}_{n_{k+1}} + \sum_{\nu=k+2}^{2^{s_k+1}+k} a_{j,\nu-k}^{(s_k+1)} \hat{h}_\nu, \quad j = k+1, \cdots, 2^{s_k+1}+k,$$

где $A_{s_{k+1}} = \|a_{ij}^{(s_k+1)}\|$ — матрица из леммы 3.

Из (20), (21) и свойств а) и г) матрицы вытекает

$$|h_j| \leqslant 2^{\frac{s_k+1}{2}} \cdot 2^{-\frac{s_k+1}{2}} + \sum_{\nu=k+2}^{2^{s_k+1}+k} |a_{j,\nu-k}^{(s_k+1)}| \cdot |\hat{h}_\nu| \leqslant 1 + C^2,$$

т. е. (19) выполнено. Так как система $\hat{l}_{s_{k+1}}, \hat{h}_j$ $(j=k+2, \cdots, 2^{s_k+1}+k)$ ортонормирована, а матрица $A_{s_{k+1}}$ ортогональна и нормирована, то система $h_j (j = k+1, \cdots, 2^{s_k+1+k})$ также ортонормирована. Кроме того, очевидно, что полиномы $\{l_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n_{k+1})$ линейно выражаются через полиномы h_j $(j = 1, 2, \cdots, 2^{s_k+1}+k)$.

Таким образом, по индукции построена требуемая полная, ортонормированная и ограниченная в совокупности система полиномов $\{h_n\}$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и, кроме того*

$$f \in L^2_{(0,1)} \int_0^1 f p_i \, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *функция* f *может быть представлена в виде*

$$f = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i h_i + f_1,$$

где $\gamma_i = \int_0^1 f h_i \, dx$, h_i $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ — *ортонормированная система полиномов*, $\nu = \nu(\varepsilon)$ — *натуральное число, причем выполнены условия*

а) $\int_0^1 f_1 h_i \, dx = 0, \; i = 1, 2, \cdots, \nu,$

б) $(h_i, p_j) = 0; \; i = 1, 2, \cdots, \nu; \; j = 1, 2, \cdots, n,$

в) $\|f_1\|_{L_2} < \varepsilon,$

г) $\|h_i\|_\infty < 1 + C^2, \; i = 1, 2, \cdots, \nu.$

Доказательство. Выберем число $\eta > 0$, которое зафиксируем ниже, и разобьем отрезок [0,1] на два множества $E \cup CE$ так, чтобы

$$\left|\int\limits_{E} fp_i dx\right| = \left|\int\limits_{CE} fp_i dx\right| < \eta, \ i=1, 2, \cdots, n, \tag{22}$$

$$\sup_{x \in CE} |f(x)| < R,$$

$$\int\limits_{E} |f|\, dx < \eta.$$

Определим функции φ_2 и ψ_2 равенствами

$$\varphi_2 = f\chi(CE), \quad \psi_2 = f\chi(E)$$

и положим

$$\psi_1 = \psi_2 - \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)\, p_i, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)\, p_i$$

(так как $\psi_2 \overline{\in} L^2$, то (ψ_2, p_i) есть лишь обозначение для интеграла $\int\limits_0^1 \psi_2\, p_i \cdot dx$).

Очевидны равенства

$$(\psi_1, p_i) = (\varphi_1, p_i) = 0, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

Кроме того очевидно, что φ_1 ограничена. Из (22) вытекает

$$\|\psi_2 - \psi_1\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |(\psi_2, p_i)|\, \|p_i\|_2 \leqslant n\eta$$

и

$$|(\varphi_1, \psi_1)| = \left|(\varphi_2, \psi_2) - \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)(\varphi_2, p_i) + \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} (\psi_2, p_i)^2 \right| \leqslant n\eta^2,$$

так как $(\varphi_2, \psi_2) = 0$. Наконец, положим

$$\psi = \psi_1 - \frac{(\varphi_1, \psi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\, \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_1 + \frac{(\varphi_1, \psi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\, \varphi_1.$$

Очевидно, что функция φ ограничена. Оценка для $|(\psi_1, \varphi_1)|$ дает

$$\|\psi - \psi_1\|_1 \leqslant n\eta^2 \|\varphi_1\|_2.$$

Таким образом, мы имеем $f = \varphi + \psi$, причем

$$(\varphi, \psi) = 0, \tag{23}$$

$$\|\psi\|_1 \leqslant \|\psi - \psi_1\|_1 + \|\psi_1 - \psi_2\|_1 \leqslant n\eta^2 \|e_1\|_2 + n\eta + \eta < \frac{\varepsilon}{2} \tag{24}$$

при достаточно малом η.

Пусть $H(\psi, p_l, \cdots, p_n)$—многообразие, определенное в лемме 4. Выберем в нем систему полиномов $\{h_n\}$, удовлетворяющую условию (19). Так как, в силу (23), $\varphi \in H(\psi, p_1, \cdots, p_n)$, то $\varphi = \sum_{l=1}^{\infty} (\varphi, h_l)\, h_l$ (в L^2).

Положим $f_1 = \psi + \sum_{l=\nu+1}^{\infty} (\varphi, h_l)\, h_l$, где ν выбрано так, что

$$\left\| \sum_{l=\nu+1}^{\infty} (\varphi, h_l)\, h_l \right\|_2 < \varepsilon/2.$$

Тогда, принимая во внимание (24), имеем $\|f_1\|_1 < \varepsilon$, т. е. в) выполнено. Учитывая (16) и (23) имеем далее

$$(f_1, h_l) = \left(\varphi + \psi - \sum_{l=1}^{\nu} (\varphi, h_l)\, h_l,\, h_l\right) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant \nu,$$

т. е. б) верно. Справедливость а) и г) очевидна. Лемма доказана.

Заметим теперь, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ π-универсален и для системы функций $\{q_n\}$ выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n - q_n| < \infty, \tag{25}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ также π-универсален.

Лемма 6. *Для любой функции $f \in L_{(0,1)}$, $f \overline{\in} L^2_{(0,1)}$ существует ортонормированная, замкнутая в $C_{[0,1]}$, ограниченная в совокупности и состоящая из полиномов система $\{t_n\}$, содержащая три непересекающиеся подсистемы $\{t_s^i\}$ $(i = 0, 1, 2,\ s = 1, 2, \cdots)$ со свойствами:*

а) $|t_s^{(0)}| < C$;

б) *существует последовательность чисел $\{\gamma_s\}$*

$$\gamma_s \to 0,\ \sum_{s=1}^{\infty} |\gamma_s| = \infty \tag{26}$$

такая, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s\, t_s^{(1)} \tag{27}$$

есть ряд Фурье функции f;

в) *ряд $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{1} (-1)^r\, \gamma_s\, t_s^{(2)}$ π-универсален.*

Доказательство. Зафиксируем последовательность действительных чисел $\{\varepsilon_i^k\}$ $(i=1, 2, \cdots, 2^k;\ k=0, 1, 2, \cdots)$,

$$\varepsilon_i^k > 0, \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_i^k < \infty, \tag{28}$$

и пусть $\{l_n\}$ — произвольная, замкнутая в $C_{(0,1)}$ система полиномов. Построение искомой системы полиномов осуществляется по индукции.

Пусть уже построены для всех номеров $1 \leqslant j \leqslant r-1$ натуральные числа n_s, k_s, ν_s, полиномы $\{g_j^s\}(j=1,2,\cdots,2^s)$, $\{h_i^s\}$ $(i=1, 2, \cdots, 2^{k_s}+\nu_s)$, q_s; функции f_s и множества E_j^s $(j=1, 2, \cdots, 2^s)$, причем справедливы соотношения:

1) $$f_{s-1} = \sum_{j=1}^{2^{k_s}+\nu_s} c_j^s h_j^s + f_s, \tag{29}$$

2) $$\int_0^1 f_{r-1} \cdot \{g_j^s;\ h_i^s;\ q_s\}\, dx = 0;\ j=1, 2, \cdots, 2^s, \quad i=1, 2, \cdots, 2^{k_s}+\nu_s, \tag{30}$$

3) система $\{g_j^s\}$, $\{h_j^s\}$, q_s — ортонормирована, (31)

4) $$|g_i^s - (1-2^{-2s})^{-1/2}| < \varepsilon_i^s,\ x \in \Delta_i^s \setminus E_i^s, \tag{32}$$

$$\Delta_i^s = [i-1/2^s;\ i/2^s],\ E_i^s \subset \Delta_i^s,$$

5) $$\mu E_i^s < 2^{-2s} + \varepsilon_i^s,\ i=1, 2, \cdots, 2^s, \tag{33}$$

6) $$|g_i^s| < \varepsilon_i^s,\ x \overline{\in} \Delta_i^s;\ i=1, 2, \cdots, 2^s, \tag{34}$$

7) $$\|q_s\|_\infty < C, \tag{35}$$

8) $$\|h_j^s\|_\infty < 1 + C^2,\ j=1, 2, \cdots, 2^{\nu_s} + k_s, \tag{36}$$

9) $$\|f_s\|_2 < \frac{1}{s}, \tag{37}$$

10) линейная оболочка H_{r-1} полиномов $\{g_1^s\} \cup \{h_j^s\} \cup q_s$ содержит полиномы l_i $(i=1, 2, \cdots, n_{r-1};\ n_{r-1} \geqslant r-1)$.

Разделим отрезок [0,1] на 2^r отрезков Δ_i^r $(i=1, 2, \cdots, 2^r)$. К каждому отрезку Δ_i^r, H_{r-1} и функции f_{r-1} последовательно 2^r раз применим лемму 2. Получим ортонормированную систему многочленов $\{g_i^r\}$, множеств E_i^r $(i=1, 2, \cdots, 2^r)$, для которых выполнены соотношения (30)—(34) при $s=r$. Применяя к функции f_{r-1} и ко всем построенным полиномам лемму 1, получим полином q_r, удовлетворяющий соотношениям (30), (31) и (35).

Пусть l_{n_r} $(n_r > r)$ полином из $\{l_n\}$, еще не вошедший в линейную оболочку, натянутую на уже построенные полиномы. Тогда его можно представить в виде

$$l_{n_r}=\sum_{s=1}^{r}\sum_{i=1}^{2^s} a_i^s g_i^s+\sum_{s=1}^{r} b_s q_s+\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{2^{k_s+\nu_s}} d_j^s h_j^s+\frac{\hat{l}_{n_r}}{\|\hat{l}_{n_r}\|_2},$$

причем $\hat{l}_{n_r}$ уже ортогонален к этой линейной оболочке. Пусть k_r — натуральное число такое, что

$$|\hat{h}_1^r|=\left|\frac{\hat{l}_{n_r}}{\|\hat{l}_{n_r}\|_2}\right|\leqslant 2^{\frac{k_r}{2}}. \tag{38}$$

В силу леммы 1 найдутся ортонормированные полиномы $\{\hat{h}_j^r\}$, $j=2,\cdots,2^{k_r}$, для которых будут выполнены соотношения (30), (31), (35) при $s=r$. Определим полиномы $\{h_j^r\}$ $(1\leqslant j\leqslant 2^{k_r})$ с помощью матрицы A_{k_r} из леммы 3 следующим образом:

$$h_j^r=\sum_{i=1}^{2^{k_r}} a_{ij}^{(k_r)}\hat{h}_j^r,\ j=1,2,\cdots,2^{k_r}.$$

Так как система $\{\hat{h}_i^r\}$ и матрица A_{k_r} ортонормированы, то система полиномов $\{h_j^r\}$ также удовлетворяет соотношениям (30), (31), (35). Из (38), свойств а) и г) матрицы A_{k_r} и условия г) леммы 1 имеем

$$|h_j^r|<\frac{1}{\sqrt{2^{k_r}}}\sqrt{2^{k_r}}+C\sum_{j=2}^{2^{k_r}}|a_{ij}^{(k_r)}|\leqslant 1+C^2. \tag{39}$$

Функция $\hat{f}_{r-1}=f_{r-1}-\sum_{j=1}^{2^{k_r}} c_j^r h_j^r$, где $c_j^r=\int_0^1 f_{r-1}h_j^r\,dx$, ортогональна ко всем построенным полиномам, поэтому применяя лемму 5 с $\varepsilon=\frac{1}{r}$ имеем

$$\hat{f}_{r-1}=\sum_{j=2^{k_r}+1}^{2^{k_r+\nu_r}} c_j^r h_j^r+f_r.$$

Следовательно

$$f_{r-1}=\sum_{j=1}^{2^{k_r+\nu_r}} c_j^r h_j^r+f_r,$$

т. е. условие (29) выполнено. Из (39) и условия г) леммы 5 вытекает справедливость соотношения (36), а из условия г) леммы 1 вытекает справедливость отношения (35). Остальные соотношения справедливы в силу соответствующих условий лемм 1, 2, 3 и 5. Кроме того, построенная система полиномов содержит, очевидно, l_{n_r}. Предположения индукции оправданы.

Объединим все построенные полиномы в одну систему, обозначим ее через $\{t_n\}$ и покажем, что эта система искомая.

Так как каждый полином l_n линейно выражается через систему $\{t_n\}$, то $\{t_n\}$ замкнута в $C_{[0,1]}$ вместе с $\{l_n\}$.

Положим $\{t_s^{(0)}\}=\{q_s\}$. Тогда в силу (35) система $\{t_s^0\}$ ограничена в совокупности, т. е. а) выполнено.

Далее положим $\{t_s'\}=(h_j^r)$

$$(s=2^{k_r}+\nu_r+j, \quad j=1, 2, \cdots, 2^{k_r}+\nu_r, \quad r=0, 1, \cdots, k_0=\nu_0=0)$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\gamma_s\, t_s' = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{k_r}+\nu_r} c_j^r h_j^r. \tag{40}$$

Подпоследовательность его частных сумм S_{m_n}, где $m_n=\sum_{r=0}^{n}(2^{k_r}+\nu_r)$, имеет вид

$$S_{m_n}=\sum_{r=0}^{n}\sum_{j=1}^{2^{k_r}+\nu_r} c_j^r h_j^r = f - f_n.$$

Но тогда из соотношения (37) вытекает

$$\|S_{m_n}-f\|_1=\|f_n\|_1<\frac{1}{n}\to 0, \quad n\to\infty.$$

Это означает, что ряд (40) есть ряд Фурье функции f. Поэтому из (36) и теоремы Мерсера (см. [4], стр. 181) следует

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|=\infty,$$

т. е. условие б) выполнено. Проверим справедливость в). Как известно (см. [1], стр. 252) ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^s}\sum_{n=0}^{1}(-1)^n\,\hat{\gamma}_j^s\,\chi(\Delta_j^s) \tag{41}$$

π-универсален для любой последовательности $\{\hat{\gamma}_j^s\}$, удовлетворяющей условиям (26). Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^s}\sum_{n=0}^{1}(-1)^n\,\hat{\gamma}_j^s\,\tau_j^s, \tag{42}$$

где

$$\tau_j^s=\begin{cases}(1-2^{-2s})^{-1/2}, & x\in\Delta_j^s\setminus E_j^s\\ g_j^s, & x\in E_j^s\\ 0, & x\notin\Delta_j^s,\end{cases}$$

положим $\hat{\gamma}_j^s = \gamma_j^s (1-2^{-2s})^{-1/2} \equiv \beta_s \gamma_j^s$. Так как $\beta_s \to 1$, а $\{\gamma_j^s\}$ удовлетворяет условию (26), то это же верно и для $\{\hat{\gamma}_j^s\}$, поэтому ряд (41) π-универсален. Но члены ряда (42) отличаются от членов ряда (41) лишь на множествах E_j^s. А так как в силу (28) и (33), справедлива оценка

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} \mu E_j^s \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} (2^{-2s} + \varepsilon_j^s) < \infty$$

и, как следствие

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\gamma}_j^s \chi(\Delta_j^s) - \hat{\gamma}_j^s \tau_j^s| < \infty,$$

то это означает, что выполнено условие (25), поэтому ряд (42) π-универсален. С другой стороны, из определения τ_j^s и из соотношений (32) и (34) имеем

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} |\tau_j^s - g_j^s| \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} \varepsilon_j^s < \infty.$$

Но это означает выполнение условия (25). Поэтому ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^s} \sum_{m=0}^{1} (-1)^m \gamma_j^s g_j^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{1} (-1)^m \gamma_n t_n^{(2)}$$

π-универсален. Лемма полностью доказана.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Так как каждый полином $\{t_s^j\}$ ($j=0, 1, 2;\ s=1, 2, \cdots$) ограничен, то найдется последовательность номеров $2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ такая, что

$$|t_s^j| < 2^{\lambda_s/2}, \quad s=0, 1, 2, \quad x \in [0, 1]. \tag{43}$$

Перенумеруем множество $\{t_s^{(0)}\}$ следующим образом:

$$\{t_s^j\} \quad (j=3, 4, \cdots, 2^{\lambda_s}, \ s=1, 2, \cdots).$$

Имеем

$$|t_s^{(j)}| < C \quad (3 \leqslant j \leqslant 2^{\lambda_s};\ s=1, 2, \cdots). \tag{44}$$

Зафиксируем s и положим

$$p_s^i = \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} a_{ji}^{(\lambda_s)} t_s^j,$$

где $A_{\lambda_s} = \|a_{ji}^{(\lambda_s)}\|$ — матрица из леммы 3. Наконец, объединим все полиномы $\{p_s^i\}$ ($1 \leqslant i \leqslant 2^{\lambda_s}$, $s=1, 2, \cdots$) в одну систему, обозначим ее $\{p_n\}$ и покажем, что $\{p_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Ортонормированность ее вытекает из соответствующих свойств системы $\{t_n\}$ и матриц A_{λ_n}. Замкнутость $\{p_n\}$ в $C_{[0,1]}$ вытекает из соответствующего свойства системы $\{t_n\}$. Далее, используя свойства а), б) и г) матриц A_{λ_n} и соотношения (43) и (44), имеем

$$|p_s^j| \leqslant \sum_{i=1}^{2^{\lambda_s}} |a_{ji}^{(\lambda_s)}|\,|t_s^i| \leqslant 1 + C^2,$$

т. е. система $\{p_n\}$ ограничена в совокупности. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n p_n = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} \frac{\gamma_s}{\sqrt{2^{\lambda_s}}} p_s^j, \tag{45}$$

где числа γ_s определены в лемме 5. Учитывая ортогональность матриц A_{λ_s}, условие а) леммы 3 и определение полиномов $\{p_s^j\}$, имеем

$$t_s' = \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} a_{1j}^{(\lambda_s)} p_s^j = \sum_{j=1}^{2^{\lambda_s}} 2^{-\frac{\lambda_s}{2}} p_s^j,$$

т. е. внутренняя сумма ряда (45) есть $\gamma_s t_s'$. Таким образом, ряд (45) есть ряд (27) и, следовательно является рядом Фурье функции f по системе $\{p_n\}$. Доказательство π-универсальности ряда (45) осуществляется дословным повторением соответствующего места работы [1] (см. стр. 256—257). Теорема доказана.

Отметим одно следствие. Напомним, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ называется универсальным (в обычном смысле), если для любой измеримой функции g существует возрастающая последовательность номеров n_k такая, что $s_{n_k} \to g$ почти всюду. Из доказанной выше теоремы и леммы 3 работы А. А. Талаляна [5] вытекает

Следствие. Для любой функции $f \in L_{(0,1)}$, $f \notin L^2_{(0,1)}$ существует замкнутая в $C_{[0,1]}$, ограниченная в совокупности, ортонормированная система полиномов $\{\tau_n\}$ такая, что ряд Фурье функции f по системе $\{\tau_n\}$ является универсальным рядом.

В качестве системы $\{\tau_n\}$ можно взять соответствующим образом переставленную систему $\{p_n\}$.

Автор благодарен А. М. Олевскому, под руководством которого выполнена эта работа.

Государственный всесоюзный центральный
научно-исследовательский институт
комплексной автоматизации

Поступила 24.V.1972

ՅՈՒ. Ս. ՏՐԻԴԼՅԱՆԴ. Ֆուրյեի ունիվերսալ շարք՝ ըստ ինտեգրելի ֆունկցիայից ճառաճաշվական բազմանդամների (ամփոփում)

Յուրաքանչյուր $f \in L\,(f \notin L^2)$-ի համար կառուցվում է օրթոգոնալ, լրիվ ու C-ում փակ [illegible] բազմանդամների $\{p_n\}$ համակարգ։ Այդ համակարգը այնպիսին է, որ f-ի Ֆուրյեի շարքը ըստ $\{p_n\}$ համակարգի ունիվերսալ է տեղափոխությունների նկատմամբ։

Yu. S. FREEDLAND. *Universal Furie series of algebraic polynoms for given integrable function* (summary)

For any function $f \in L$ ($\sqrt{f} \in L^2$) a system of closed in C, orthonormal, constrained in total polynomials $\{p_n\}$ is built. This system is such that Fourier series f by the system $\{p_n\}$ is universal with respect to permitations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Олевский.* О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p ($p<2$), Мат. сборник, 77/119: 2, 251—258.
2. *А. М. Олевский.* Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта, Изв. АН СССР, серия мат., 34, № 4, 1970, 803—826.
3. *А. М. Олевский.* Об одной ортонормированной системе и ее применениях, Мат. сборник, 71/113: 3, 1966, 297—336.
4. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.

А. А. Талалян. Ряды, универсальные относительно перестановок, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 4,1960, 567—604.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ԵՐԵՎԱՆ