ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ՝ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

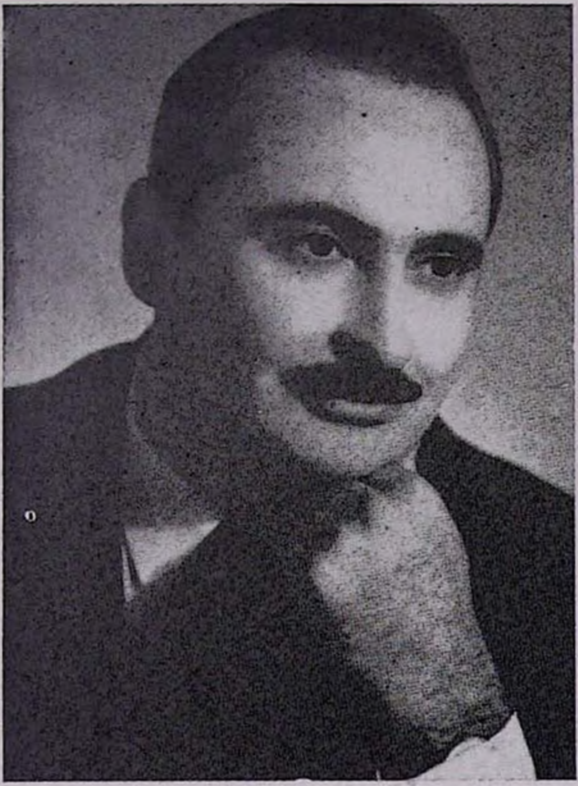
7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia



Член-корреспондент Академии наук Армянской ССР
Рафаэль Арамович Александрян

ДОРОГОЙ РАФАЭЛЬ АРАМОВИЧ!

Посвящая Вам этот выпуск, редакция журнала Математика поздравляет Вас с пятидесятилетием и искренне желает Вам крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Н. Е. ТОВМАСЯН

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Основные результаты и их доказательства

При решении краевых задач для дифференциальных уравнений возникает вопрос о гладкости решения, об условиях разрешимости в терминах сопряженной задачи и о подсчете индекса краевой задачи. Эти вопросы для конкретных классов краевых задач были рассмотрены многими авторами (см., например, [1]—[4]). В данной работе получены некоторые результаты для уравнений в банаховых пространствах, которые можно применять при выяснении этих же вопросов для широкого класса краевых задач.

В § 2 даются некоторые приложения полученных результатов к исследованию краевых задач для эллиптических уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями в классе аналитических функций со сдвигом.

Пусть A — оператор, действующий из банахового пространства B в банахово пространство F, а A^*—сопряженный оператор к оператору A. Обозначим через $R(A)$ область значений оператора A, $N(A)$ и $N(A^*)$—ядра или нуль-пространства операторов A и A^*. Оператор A называется Ф-оператором, если: 1) оператор A линеен и непрерывен в пространстве B, 2) $R(A)$ замкнуто, 3) размерности $N(A)$ и $N(A^*)$ ($\dim N(A)$ и $\dim N(A^*)$) конечны. Разность размерностей пространства $N(A)$ и $N(A^*)$ называется индексом оператора A и пишется $\operatorname{ind} A$.

Пусть M—линейное многообразие линейных функционалов, определенных в B. Через ${}^{\perp}M(B)$ обозначим множество элементов из B, ортогональных каждому функционалу из M, т. е.

$$ {}^{\perp}M(B) = \{x,\ x\in B,\ x\perp M\}. $$

Отметим, что в работе под линейностью операторов и функционалов понимается только их аддитивность и однородность.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть M_1 и M_2—линейные многообразия линейных функционалов, определенных в банаховом пространстве B. Если $\dim M_2 < \infty$ и*

$$ {}^{\perp}M_2(B) \subset {}^{\perp}M_1(B), \tag{1} $$

то $M_1 \subset M_2$.

Доказательство. Пусть $l_1, \cdots, l_k$ — базис в пространстве M_2, а $l \in M_1$. Рассмотрим подпространство $k+1$-мерных векторов

$$R = \{(l(x), l_1(x), \cdots, l_k(x)), x \in B\}.$$

Согласно условию (1), $k+1$-мерный вектор $(1, 0, \cdots, 0)$ не принадлежит пространству R. Поэтому R не совпадает с R^{k+1}. Следовательно существует отличный от нуля вектор $(\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, ортогональный R, т. е.

$$\alpha l(x) + \alpha_1 l_1(x) + \cdots + \alpha_k l_k(x) = 0, \ x \in B. \quad (2)$$

Отсюда получим, что $\alpha \neq 0$ и $l \in M_2$. Лемма доказана.

Пусть B, B_1, F и F_1 — банаховы пространства, $B_1 \subset B$, $F_1 \subset F$ и F_1 всюду плотно в F. Нормы этих пространств могут быть разными. Пусть A_1 — сужение оператора A на пространство B_1.

Теорема 1 (теорема о гладкости). *Если A и A_1 — Ф-операторы, действующие из B в F и из B_1 в F_1 соответственно и*

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A_1, \quad (3)$$

то при $y \in F_1$ всякое решение уравнения $A(x) = y$, принадлежащее пространству B, принадлежит пространству B_1.

Доказательство. Так как A и A_1 — Ф-операторы, то [5]

$$R(A_1) = {}^{\perp}M_1(F_1), \ R(A) = {}^{\perp}M(F), \quad (4)$$

где

$$M_1 = N(A_1^*), \ M = N(A^*). \quad (5)$$

Имея ввиду, что $R(A_1) \subset R(A)$ и $R(A_1) \subset F_1$ из (4) получим

$${}^{\perp}M_1(F_1) \subset {}^{\perp}M(F_1). \quad (6)$$

Следовательно, согласно лемме 1, $M \subset M_1$ на F_1, то есть

$$N(A^*) \subset N(A_1^*), \quad (7)$$

если эти функционалы рассмотреть на пространстве F_1.

Так как F_1 всюду плотно в F и элементы $N(A^*)$ — непрерывные функционалы в F, то из (7) получим

$$\dim N(A^*) \leqslant \dim N(A_1^*). \quad (8)$$

Ясно, что

$$N(A_1) \subset N(A). \quad (9)$$

Следовательно

$$\dim N(A_1) \leqslant \dim N(A). \quad (10)$$

Из (3), (8) и (10) получим

$$\dim N(A) = \dim N(A_1), \ \dim N(A^*) = \dim N(A_1^*). \quad (11)$$

Из (7), (9) и (11) имеем

$$N(A) = N(A_1), \ N(A_1^*) = N(A^*). \quad (12)$$

Пусть $y \in F_1$ и уравнение $A(x) = y$ имеет решение в пространстве B, т. е. $y \in R(A)$. Тогда согласно (4) и (12) $y \in R(A_1)$.

Следовательно, уравнение $A_1(x) = y$ имеет решение $x_0 \in B_1$, и общее решение этого уравнения дается формулой $x = x_0 + z$, где z — произвольный элемент из $N(A_1)$. Из (12) следует, что $x = x_0 + z$ будет общим решением и уравнения $A(x) = y$ в пространстве B. Следовательно, при $y \in F_1$ любое решение уравнения $A(x) = y$ принадлежит пространству B_1.

Пусть B_j, G_j и F_j — банаховы пространства, G_j^* — сопряженное пространство к пространству G_j $(j = 1, 2)$.

Рассмотрим уравнения

$$A_1(x) = T_1(\alpha), \tag{13}$$

$$A_2(y) = T_2(\beta), \tag{14}$$

где A_j — Ф-оператор, действующий из B_j в F_j; T_j — линейный оператор, действующий из G_j в F_j $(j=1, 2)$, α и β — заданные элементы из G_1 и G_2, а x и y — искомые элементы из B_1 и B_2 соответственно.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2 = 0$ *и для разрешимости уравнения* (13) *и* (14) *необходимы условия*

$$\alpha \perp v_j \ (j=1, \cdots, k_2;\ k_2 = \dim N(A_2)), \tag{15}$$

$$\beta \perp w_j \ (j=1, \cdots, k_1;\ k_1 = \dim N(A_1)), \tag{16}$$

где $v_1, \cdots, v_{k_2}$ *и* $w_1, \cdots, w_{k_1}$ — *некоторые линейно независимые элементы из* G_1^* *и* G_2^* *соответственно, то эти условия достаточны для разрешимости уравнения* (13) *и* (14) *и имеют место равенства*

$$\dim N(A_1) = \dim N(A_2^*), \quad \dim N(A_2) = \dim N(A_1^*). \tag{17}$$

Доказательство. Примем следующие обозначения:

$$M_1 = \{lT_1,\ l \in N(A_1^*)\}, \quad M_2 = \{c_1 v_1 + \cdots + c_{k_2} v_{k_2},\ (c_1, \cdots, c_{k_2}) \in R^{k_2}\}. \tag{18}$$

Так как оператор A_1 является Ф-оператором, то [5] для разрешимости уравнения (13) необходимо и достаточно, чтобы α удовлетворяла условию

$$\alpha \perp M_1(G_1). \tag{19}$$

Из (15) и (19) получим

$${}^{\perp}M_1(G_1) \subset {}^{\perp}M_2(G_1). \tag{20}$$

Следовательно, согласно лемме 1, имеем

$$M_2 \subset M_1, \tag{21}$$

$$\dim M_2 \leqslant \dim M_1. \tag{22}$$

Из (18) следует

$$\dim M_1 \leqslant \dim N(A_1^*), \quad \dim M_2 = \dim N(A_2). \tag{23}$$

Из (22) и (23) получим

$$\dim N(A_2) \leqslant \dim N(A_1^*). \tag{24}$$

Аналогично, рассматривая уравнение (14), имеем

$$\dim N(A_1) \leqslant \dim N(A_2^*). \tag{25}$$

Из условия теоремы $\operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2 = 0$ и из неравенств (24) и (25) следуют равенства (17).

Из соотношений (21), (23) и (17) получим, что $M_1 = M_2$.

Следовательно, условия $\alpha \perp M_1$ и $\alpha \perp M_2$ эквивалентны. Но так как условие $\alpha \perp M_2$ совпадает с условием (15), а условие $\alpha \perp M_1$ достаточно для разрешимости уравнения (13), то условие (15) также достаточно для разрешимости уравнения (13). Аналогично доказывается, что условие (16) достаточно для разрешимости уравнения (14).

Если краевая задача для дифференциальных уравнений и сопряженная краевая задача приводятся к уравнениям вида (13) и (14), где A_1 и A_2' — Ф-операторы, то эти уравнения, как правило, удовлетворяют всем условиям теоремы 2, где $w_1, \cdots, w_{k_1}$ и $v_1, \cdots, v_{k_2}$ явно выражаются через решения однородной задачи и сопряженной однородной задачи. Поэтому, применяя теорему 2, мы можем установить условия разрешимости этих задач и получить формулу для индекса. При помощи теоремы 1 мы можем выяснить гладкость решений рассмотренных краевых задач.

§ 2. Примеры

Пример 1. Пусть Γ — простой замкнутый гладкий контур, ограничивающий некоторую конечную связную открытую область D на плоскости комплексной переменной z. Положительным направлением на Γ мы считаем то, которое оставляет область D слева. Обозначим через B_n — класс аналитических в области D функций, n-ая производная которых непрерывна в замкнутой области $D+\Gamma$. Класс функций B_n является пространством Банаха с нормой

$$\|\varphi\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{z \in D+\Gamma} |\varphi^{(k)}(z)| \quad (\varphi^{(0)}(z) = \varphi(z)).$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$L_1(\varphi) \equiv A(z)\,\varphi^{(n)}(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(z)\,\varphi^{(j)}(\alpha_k(z)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} b_{jk}(z)\,\varphi^{(j)}(\omega_k(z)) = f(z), \tag{26}$$

где $A(z)$, $a_{jk}(z)$, $b_{jk}(z)$, $\alpha_k(z)$, $\omega_k(z)$, $f(z)$ — заданные аналитические функции в области D, $\varphi(z)$ — искомая функция из класса B_n, $\varphi^{(j)}(\omega_k(z))$ и $\varphi^{(j)}(\alpha_k(z))$ j-ая производная функции φ в точках $\omega_k(z)$ и $\alpha_k(z)$ соответственно. Предполагается, что функции $A(z)$, $a_{jk}(z)$, $b_{jk}(z)$ и $\omega_k(z)$ — достаточно гладкие функции в замкнутой области $D+\Gamma$, $f(z)\in B_0$; $\alpha_j(z)$ — конформно отображает область D на область D; $A(z)\neq 0$ при $z\in\Gamma$; $\omega_j(z)\in D$ при $z\in D+\Gamma$. Нашей целью является получение необходимого и достаточного условия разрешимости уравнения (26) в терминах сопряженного уравнения. Теперь определим сопряженное уравнение.

Через S обозначим область, дополняющую $D+\Gamma$ до полной плоскости. Функцию $\psi(z)$, заданную на всей плоскости, кроме точек Γ, будем называть кусочно аналитической со скачком на линии Γ, если: 1) функция $\psi(z)$ аналитична в каждой из областей D и S; 2) при приближении z к любой точке t на Γ по любому пути, расположенному целиком в D (или соответственно в S), функция $\psi(z)$ стремится к определенному конечному пределу $\psi^+(t)$ (или соответственно $\psi^-(t)$).

Обозначим через $F_{n,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ класс кусочно аналитических функций $\psi(z)$ со скачком на линии Γ, исчезающих в бесконечности и удовлетворяющих условию

$$\|\psi\|\equiv\sup_{z\in D+S}|\psi(z)|+\sup_{\zeta,\,z\in D}\frac{|\psi(z)-\psi(\zeta)|}{|z-\zeta|^{\alpha}}+\sup_{z,\,\zeta\in S}\frac{|\psi^{(n)}(z)-\psi^{(n)}(\zeta)|}{|\zeta-z|^{\alpha}}<\infty.$$

Пространство $F_{n,\alpha}$ также является пространством Банаха.

Обозначим через $H_\alpha(\Gamma)$ класс функций на Γ, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α. Пространство $H_\alpha(\Gamma)$ с нормой

$$\|g\|=\max_{t\in\Gamma}|g(t)|+\sup_{t,\,\tau\in\Gamma}\frac{|g(t)-g(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}}$$

является банаховым пространством.

С о п р я ж е н н о е у р а в н е н и е к у р а в н е н и ю (26). Требуется найти функцию $\psi(z)$ из класса $F_{n,\alpha}$, удовлетворяющую уравнению

$$L_2(\psi)\equiv(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}(A(t)\psi^-(t))+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}[\beta_k'(t)\,a_{jk}(\beta_k(t))\,\psi^-(\beta_k(t))]+$$
$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\frac{j!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{b_{jk}(\tau)\,\psi^-(\tau)\,d\tau}{(t-\omega_k(\tau))^{j+1}}-\psi^+(t)=g(t),\quad t\in\Gamma, \tag{27}$$

где $\beta_k(t)$ — обратная функция к функции $\alpha_k(z)$, $g(t)$ — заданная функция из класса $H_\alpha(\Gamma)$, $\beta_k'(t)=\dfrac{d\beta_k(t)}{dt}$.

Докажем, что уравнения (26) и (27) удовлетворяют всем условиям теоремы 2.

Операторы $L_1(\varphi)$ и $L_2(\psi)$ можно записать в виде

$$L_1(\varphi)=A(z)\,\varphi^{(n)}(z)+K_1(\varphi),\quad z\in D,$$

$$L_2(\psi) = (-1)^n A(t) \frac{d^n \psi^-(t)}{dt^n} - \psi^+(t) + K_2(\psi), \quad t \in \Gamma,$$

где $K_1(\varphi)$ и $K_2(\psi)$—вполне непрерывные операторы, действующие из B_n в B_0 и из $F_{n,\alpha}$ в $H_\alpha(\Gamma)$ соответственно.

В книге [6] доказано, что оператор $(-1)^n A(t) \dfrac{d^n \psi^-(t)}{dt^n} - \psi^+(t)$ является Ф-оператором из $H_{n,\alpha}$ в $H_\alpha(\Gamma)$ с индексом $m-n$, где m—полное число нулей функции $A(z)$ в области D. Ясно, что уравнение $A(z)\varphi^{(n)}(z)$ имеет n линейно независимых решений, а для разрешимости уравнения $A(z)\varphi^{(n)}(z) = f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f^{(j)}(z_k) = 0 \quad (j = 1, \cdots, m_k, \; k = 1, \cdots, l), \tag{28}$$

где $z_1, \cdots, z_l$—нули в области D функции $A(z)$, а $m_1, \cdots, m_l$—их кратности.

Легко показать, что условия (28) являются линейно независимыми. Следовательно, оператор $A(z)\varphi^{(n)}(z)$ является Ф-оператором из B_n в B_0 и индекс равен $n-m$.

Значит, [5] операторы $L_1(\varphi)$ и $L_2(\psi)$ являются Ф-операторами и

$$\operatorname{ind} L_1 = n - m, \quad \operatorname{ind} L_2 = m - n. \tag{29}$$

Легко проверить справедливость равенства

$$\int_\Gamma L_1(\varphi)\,\psi^-(t)\,dt = \int_\Gamma \varphi(t)\,L_2(\psi(t))\,dt, \quad \varphi \in B_n, \; \psi \in F_{n,\alpha}. \tag{30}$$

Из (30) получим, что для разрешимости уравнений (26) и (27) необходимо выполнение условий

$$\int_\Gamma f(t)\,\psi_j^-(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, \cdots, k_2), \tag{31}$$

$$\int_\Gamma g(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, \cdots, k_1), \tag{32}$$

где $\varphi_1, \cdots, \varphi_{k_1}$ и $\psi_1, \cdots, \psi_{k_2}$—полные системы линейно независимых решений однородных уравнений (26) и (27). Отметим, что правые части (31) и (32), как функционалы в пространствах B_0 и $H_\alpha(\Gamma)$, линейно независимы.

Из (29), (31) и (32) следует, что уравнения (26) и (27) удовлетворяют всем условиям теоремы 2. Применяя теорему 2 к этим уравнениям, получим

Следствие 1. *Для того чтобы уравнения* (26) *и* (27) *имели решения, необходимо и достаточно, чтобы* $f(z)$ *и* $g(t)$ *удовлетворяли условиям* (31) *и* (32), *причем* $k_1 - k_2 = n - m$, *где* m — *полное число нулей функции* $A(z)$ *внутри области* D.

Пример 2. Пусть D—трехмерная область с гладкой границей S. Рассмотрим следующую задачу: найти в области D дважды непрерывное дифференцируемое решение уравнения

$$L(u) \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\, u_{x_j} + a_4(x)\, u = 0, \tag{33}$$

принадлежащее классу $C^1(D+S)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$A_1(u) \equiv \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} - \sum_{j=1}^{k} a_j(x)\, u(\beta_j(x))\right)\bigg|_S = f(x), \tag{34}$$

где n—внешняя нормаль к границе S, $a_j(x)$ — заданные, достаточно гладкие функции в замкнутой области $D+S$; $a_j(x)$ и $g(x)$— непрерывные функции на S, $\beta_k(x)$—взаимно однозначно отображает S на S, причем $\beta_k(x)$ и $\gamma_k(x)$ принадлежат классу $C^1(S)$, $\gamma_k(x)$ — обратная функция к функции $\beta_k(x)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$.

Наряду с задачей (33) — (34) рассмотрим следующую задачу: найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$L^*(v) = 0, \tag{35}$$

принадлежащее классу $C^1(D+S)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$A_2(v) \equiv \left(\frac{\partial v(x)}{\partial n} - \sum_{j=1}^{3} a_j(x) \cos(n, x_j) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{k} b_k(x)\, a_k(\gamma_k(x))\, v(\gamma_k(x))\right)\bigg|_S = g(x), \tag{36}$$

где $L^*(v) = 0$ — сопряженное уравнение к уравнению $L(u)=0$; $b_k(x)$ — якобиан при отображении S на S при помощи отображающей функции $\beta_k(x)$; $g(x)$—заданная функция из $C(S)$.

Множество дважды непрерывно дифференцируемых в области D решений из класса $C^1(D+S)$ уравнения (33) и (35) обозначим соответственно через B_1 и B_2.

Пространства B_1 и B_2 являются банаховыми пространствами [7] с нормой

$$\|u\| = \max_{x \in D+S} |u| + \sum_{j=1}^{3} \max_{x \in D+S} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|.$$

Задачи (33)—(34) и (35)—(36) можно сформулировать следующим образом: найти функции $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащие классам B_1 и B_2, соответственно, и удовлетворяющие уравнениям

$$A_1(u) = f(x), \tag{37}$$

$$A_2(v) = g(x), \tag{38}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции из класса $C(S)$.

Докажем, что уравнения (37) и (38) удовлетворяют условиям теоремы 2. Операторы $A_1(u)$ и $A_2(v)$ имеют вид

$$A_1(u) = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S + K_1(u),$$

$$A_2(v) = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S + K_2(v),$$

где $K_1(u)$ и $K_2(v)$—вполне непрерывные операторы, действующие из B_1 в $C(S)$ и из B_2 в $C(S)$ соответственно. Как известно, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S$ и $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S$ являются Ф-операторами из B_1 в $C(S)$ и из B_2 в $C(S)$ соответственно и их индексы равны нулю. Следовательно, A_1 и A_2 также являются Ф-операторами, $\operatorname{ind} A_1=0$, $\operatorname{ind} A_2=0$.

Имеет место следующее равенство:

$$\iiint_D [L(u)\, v(x) - u(x)\, L(v)]\, dx = \iint_S [A_1(u)\, v - A_2(v)\, u]\, ds. \qquad (39)$$

Отсюда получим, что для разрешимости уравнений (37) и (38) необходимы условия

$$\iint_S f(x)\, v_j(x)\, ds = 0 \quad (j=1,\cdots, k_2), \qquad (40)$$

$$\iint_S g(x)\, u_j(x)\, ds = 0 \quad (j=1, \cdots, k_1), \qquad (41)$$

где $u_1,\cdots, u_{k_1}$ и $v_1,\cdots, v_{k_2}$ — линейно независимые решения однородных уравнений (37) и (38). Применяя теорему 2 для уравнений (37) и (38), получим:

Следствие 2. Для разрешимости задач (33) — (34) и (35) — (36) необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяли условиям (40) и (41), где $u_1,\cdots, u_{k_1}$ и $v_1, \cdots, v_{k_2}$ — линейно независимые решения однородных задач (33)—(34) и (35)—(36) соответственно, причем $k_1=k_2$.

Аналогично рассматривается задача типа (33)—(34) для эллиптической системы уравнений в n-мерном пространстве.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6.IV.1973

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Մի քանի հավասարումներ Բանախի տարածության մեջ և նրանց կիրառությունները *(ամփոփում)*

Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցյալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման ժամանակ հանդես են գալիս լուծման ողորկության, լուծելիության պայմանների և եզրային խնդրի ինդեքսի որոշման հարցերը։ Աշխատանքում ստացված են որոշ արդյունքներ Բանախի տարածություններում օպերատորային հավասարումների նկատմամբ, որոնք հնարավորություն են տալիս պարզաբանելու այդ հարցերը բավականաչափ լայն դասի եզրային խըն-

դիրների համար։ Աշխատանքի վերջում ստացված արդյունքները կիրառվում են էլիպտիկ տիպի դիֆերենցյալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների և անալիտիկ ֆունկցիաների դաշտում եզակիություններով սովորական դիֆերենցյալ հավասարումների հետազոտության համար։

N. E. TOVMASIAN. *Some equation in Banach spaces and their applications* (summary)

The paper presents some new results in the theory of differential equations in Banach spaces. The theorems obtained could be used in investigations the problems of smoothnesses of solution, and of the conditions of solvability in terms of conjugate boundary value problems and for calculations of indexes of wide classes of boundary value problems for differential equations.

Also, some applications of the results of the theory to the investigation of elliptical type boundary value problems and ordinary differential equations of analytical functions with singularities are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948.
2. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., изд. „Наука“, 1966.
3. *М. И. Вишик.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Мат. сб., 29 (71), 3, 1951.
4. *Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Некоэрцитивные краевые задачи, „Псевдодифференциальные операторы“ (сборник статей), изд. „Мир“, М., 1967.
5. *С. Г. Крейн.* Линейные уравнения в банаховом пространстве, изд. „Наука“, М. 1971.
6. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
7. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, изд. „Мир“, М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Р. Э. МКРТЧЯН

О ЯДРЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ЛЕБЕГОВОСТИ ИЛИ СИНГУЛЯРНОСТИ ЕГО СПЕКТРА

0°. Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля в гильбертовом пространстве $L^2(0, +\infty)$

$$Ly \equiv q(x)\, y - \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1}$$

где функция $q(x)$ непрерывна на каждом конечном интервале. Возьмем класс M финитных функций, которые определены в интервале $[0, +\infty)$, их производные первого и второго порядка принадлежат $L^2[0, +\infty)$ и удовлетворяют следующему краевому условию:

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0. \tag{2}$$

Хорошо известно, что оператор L симметричен в классе M финитных функций, и если он оказывается несамосопряженным, то допускает самосопряженное расширение, которое мы будем обозначать тем же символом L.

На основе теории, разработанной в работах [1], [2], [3], исследуем построение ядра спектра самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля и получим несколько критериев о лебеговости и сингулярности его спектра. Для этого, как известно ([2], [3]), нужно уметь построить резольвенту этого оператора. Как известно (см., например, [4], стр. 56), значение резольвенты R_z на функции $f(x)$ (которое принято обозначать через $\Phi(x, z)$) имеет следующий вид:

$$\Phi(x, z) = \psi(x, z)\int_0^x \varphi(y, z) f(y)\, dy + \varphi(x, z)\int_x^\infty \psi(y, z) f(y)\, dy, \tag{3}$$

где при подходящем выборе функции $m(z)$, $\psi(x, z) = \theta(x, z) + m(z) \times \varphi(x, z)$ принадлежит $L^2[0, +\infty)$, а функции $\theta(x, z)$, $\varphi(x, z)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \{z - q(x)\}\, y = 0 \tag{4}$$

и соответственно следующим краевым условиям:

$$\varphi(0) = \sin\alpha,\ \varphi'(0) = -\cos\alpha,$$
$$\theta(0) = \cos\alpha,\ \theta'(0) = \sin\alpha. \tag{4*}$$

Что касается функции $m(z)$, то она допускает, как хорошо известно (см., например, [5], стр. 181), следующее представление:

$$m(z) = -\operatorname{ctg} \alpha + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}, \tag{5}$$

где $\sigma(t)$ такая монотонно возрастающая функция, что $\sigma(-\infty)=0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+|t|^2} < +\infty$. Известно, далее ([4], [5]), что функция $\sigma(t)$ является в каком-то смысле спектральной функцией рассматриваемого оператора Штурма-Лиувилля.

П. 1, по существу, посвящен новому доказательству того факта, что мера σ эквивалентна спектральной мере $\rho(t) = \|E_t g\|^2$, где E_t так называемое разложение единицы оператора L, g— порождающий (циклический) элемент этого оператора.

1°. Принимая во внимание, что спектр оператора L простой, обозначим через V оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы и осуществляющий изометрическое отображение пространства $L^2[0, +\infty)$ в пространство L^2_ρ так, что оператор L переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Пусть $g(x)$—порождающий элемент оператора L и предположим, что функция $g(x)$ непрерывна. Построим функции $g_n(x)$ следующим образом:

$$g_n(x) = g(x), \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant n, \text{ и } g_n(x) = 0, \text{ если } n < x < +\infty.$$

Так как функции $g_n(x)$, очевидно, сходятся к функции $g(x)$ по метрике $L^2[0, +\infty)$, то в силу изометричности оператора V функции Vg_n сходятся к функции Vg (которую без ограничения общности можно считать тождественно равной единице) по метрике L^2_ρ.

Образуем выражение

$$\frac{\tau}{\pi} \|R_{\lambda+i\tau} g_n\|^2 = \frac{1}{2\pi i} ((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) g_n, g_n).$$

Из представления резольвенты (3) легко видеть, что

$$(R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) g_n =$$

$$= \theta(x, \lambda + i\tau) \int\limits_0^x \varphi(y, \lambda + i\tau) g_n(y)\, dy - \theta(x, \lambda - i\tau) \int\limits_0^x \varphi(y, \lambda - i\tau) g_n(y)\, dy +$$

$$+ \varphi(x, \lambda + i\tau) \int\limits_x^\infty \theta(y, \lambda + i\tau) g_n(y)\, dy - \varphi(x, \lambda - i\tau) \int\limits_x^\infty \theta(y, \lambda - i\tau) g_n(y)\, dy +$$

$$+ m(\lambda + i\tau) \varphi(x, \lambda + i\tau) G_n(\lambda + i\tau) - m(\lambda - i\tau) \cdot \varphi(x, \lambda - i\tau) G_n(\lambda - i\tau),$$

где

$$G_n(\lambda + i\tau) = \int\limits_0^\infty \varphi(x, \lambda + i\tau) g_n(x)\, dx = \int\limits_0^n \varphi(x, \lambda + i\tau) g(x)\, dx,$$

отсюда получается следующее равенство:

$$\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g_n\|^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g_n(x)\left\{\theta(x,\lambda+i\tau)\int_0^x\varphi(y,\lambda+i\tau)\,g_n(y)\,dy-\theta(x,\lambda-i\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^x\varphi(y,\lambda-i\tau)g_n(y)dy\right\}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g_n(x)\left\{\varphi(x,\lambda+i\tau)\int_x^\infty\theta(y,\lambda+i\tau)\,g_n(y)dy-\right.$$

$$\left.-\varphi(x,\lambda-i\tau)\int_x^\infty\theta(y,\lambda-i\tau)\,g_n(y)\,dy\right\}dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}[m(\lambda+i\tau)\,G_n^2(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)\,G_n^2(\lambda-i\tau)]. \tag{6}$$

Докажем, что для любого действительного числа λ предел как первого, так и второго слагаемого в (6) равен нулю. Как известно ([6], [4, 5]), при фиксированном x функции $\varphi(x,z)$, $\theta(x,z)$ — целые и непрерывны по совокупности аргументов, поэтому, согласно классическим теоремам теории функций (см., например, [7]), для каждого конечного интервала $(0, n)$

$$\int_0^n\varphi(x,z)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^n\theta(x,z)\,dx \quad \text{суть целые функции } z,$$

а следовательно, в силу финитности функций $g_n(x)$ легко доказать, что

$$\int_0^\infty\left\{g_n(x)\,\theta(x,z)\int_0^x\varphi(y,z)\,g_n(y)\,dy\right\}dx$$

и

$$\int_0^\infty\left\{g_n(x)\,\varphi(x,z)\cdot\int_x^\infty\theta(y,z)\,g_n(y)\,dy\right\}dx$$

также будут целыми функциями z. Теперь уже нетрудно заключить, что предел как первого, так и второго члена в (6) действительно равен нулю.

Таким образом, мы получили, что для любого λ равенство (6) принимает следующий вид:

$$\lim_{\tau\to+0}\left\{\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g_n\|^2-\frac{1}{2\pi i}[m(\lambda+i\tau)\,G_n^2(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)\,G_n^2(\lambda-i\tau]\right\}=0. \tag{6*}$$

Введем следующие обозначения:

$$J_\tau(\lambda, f, \rho, a, b) = \frac{\tau}{\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}, \tag{7}$$

если $a = -\infty$ $b = +\infty$, то

$$J_\tau(\lambda, f, \rho, -\infty, +\infty) = J_\tau(\lambda, f, \rho), \tag{8}$$

если же $f(t) \equiv 1$, то

$$J_\tau(\lambda, 1, \rho, -\infty, +\infty) = J_\tau(\lambda, \rho),$$

благодаря которым выражения, входящие в последующие формулы, не будут громоздкими.

Докажем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\left\{\frac{1}{2\pi i}[G_n^2(\lambda+i\tau)\,m(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)\,m(\lambda-i\tau)]-\right.$$

$$\left.-\,G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda, \sigma)\right\} = 0 \tag{9}$$

при всех тех λ, при которых функция $\sigma(t)$ непрерывна.

В самом деле, имея в виду (5), (7) и (8), можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}[G_n^2(\lambda+i\tau)\,m(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)\,m(\lambda-i\tau)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,G_n^2(\lambda+i\tau)\,[m(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\,m(\lambda-i\tau)\,[G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)] =$$

$$= G_n^2(\lambda+i\tau)\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)+\frac{1}{2\pi i}\left\{-\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\pi}{\tau}\cdot J_\tau(\lambda, \lambda-t, \sigma)+\right.$$

$$\left.+i\pi\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)\right\}\cdot[G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)] = G_n^2(\lambda+i\tau)\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)+$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\,[G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)]\cdot\left[\frac{\pi}{\tau}J_\tau(\lambda, \lambda-t, \sigma)-\operatorname{ctg}\alpha\right]+$$

$$+\frac{G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)}{2}\cdot J_\tau(\lambda, \sigma). \tag{9*}$$

По лемме 3 ([1]) из непрерывности $\sigma(t)$ в точке λ следует, что $\frac{1}{2}J_\tau(\lambda, \sigma) = o\left(\frac{1}{\tau}\right)$ при $\tau\to+0$. С другой стороны, из того факта, что выражение $G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)$ стремится к нулю не медленнее, чем τ, следует, что третье слагаемое правой части (9*) стремится к нулю.

В силу теоремы Радона-Никодима можем написать

$$J_\tau(\lambda, \lambda - t, \sigma) = J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_\lambda),$$

где $\tilde{\sigma}_\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} (\lambda - x)\, d\sigma(x)$. В силу того, что функция $\sigma(t)$ непрерывна в точке λ, легко доказать, что производная $\tilde{\sigma}_\lambda(t)$ в точке λ равна нулю.

В самом деле

$$\left| \frac{\tilde{\sigma}_\lambda(\lambda + \delta) - \tilde{\sigma}_\lambda(\lambda)}{\delta} \right| = \frac{\left| \int\limits_{\lambda}^{\lambda+\delta} (\lambda - t)\, d\sigma(t) \right|}{|\delta|} \leqslant |\sigma(\lambda + \delta) - \sigma(\lambda)|.$$

Следовательно, по лемме 2 ([2]) второе слагаемое правой части (9*) стремится к нулю. Итак, справедливость равенства (9) установлена.

Если даже в точке λ функция $\sigma(t)$ имеет разрыв, тем не менее в точке λ функция $\tilde{\sigma}_\lambda(t)$ непрерывна и все ее производные числа ограничены. Следовательно, из анализа доказательства леммы 1 ([1]) следует, что второй член правой части равенства (9*) ограничен по абсолютной величине, а в силу того, что $G_n^2(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)$ стремится к нулю не медленнее, чем τ, при τ стремящемся к нулю, то по лемме 3 ([1]) третий член правой части (9*) тоже ограничен по абсолютной величине. Таким образом, мы доказали, что для любого τ имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{2\pi i} [G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)] - \right.$$
$$\left. - G_n^2(\lambda + i\tau) \cdot J_\tau(\lambda, \sigma) \right| \leqslant O(1) \qquad (10$$

для каждого λ.

Теперь докажем, что для тех λ для которых предел

$$G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)$$

по любой последовательности τ_n не равен нулю, имеет место равенство

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)}{2\pi i\, G_n^2(\lambda + i\tau)\, J_\tau(\lambda, \sigma)} = 1. \qquad (11)$$

В самом деле, из (9*) можем написать

$$\frac{G_n^2(\lambda + i\tau)\, m(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)\, m(\lambda - i\tau)}{2\pi i\, G_n^2(\lambda + i\tau) \cdot J_\tau(\lambda, \sigma)} =$$

$$= 1 + \frac{[G_n^2(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)] \cdot \left[\frac{\pi}{\tau} J_\tau(\lambda, \lambda - t, \sigma) - \operatorname{ctg} \alpha \right]}{2\pi i\, G_n^2(\lambda + i\tau) \cdot J_\tau(\lambda, \sigma)} +$$

$$+ \frac{G_n^2(\lambda + i\tau) - G_n^2(\lambda - i\tau)}{2 G_n^2(\lambda + i\tau)}. \qquad (12)$$

Из (9^*) видно, что для таких λ $J_\tau(\lambda, \sigma)$ не стремятся к нулю по любой последовательности $\tau_n \to +0$.

Из того, что $G_n(z)$ — целая функция, следует, что

$$\frac{G_n^2(\lambda+i\tau)-G_n^2(\lambda-i\tau)}{G_n^2(\lambda+i\tau)}=O(\tau).$$

Отсюда и из того, что $|J_\tau(\lambda, \lambda-t, \sigma)| = o(J_\tau(\lambda, \sigma))$ при $\tau \to +0$ вытекает, что второй и третий члены правой части равенства (12) стремятся к нулю. Таким образом, равенство (11) доказано.

Введем теперь обозначение

$$\rho_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}|Vg_n|^2\,d\rho(t), \tag{13}$$

тогда, в силу теоремы Радона-Никодима и соотношения (9), равенству (6^*) можно придать удобный для дальнейшего вид

$$\lim_{\tau\to+0}[J_\tau(\lambda, \rho_n)-G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda, \sigma)]=0 \tag{14}$$

при тех λ, при которых $\sigma(t)$ непрерывна.

Теперь из равенства (6^*) легко заключаем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}\,g_n\|^2}{\frac{1}{2\pi i}[m(\lambda+i\tau)\,G_n^2(\lambda+i\tau)-m(\lambda-i\tau)\,G_n^2(\lambda-i\tau)]}=1 \tag{15}$$

при тех λ, при которых пределы знаменателя и числителя левой части равенства (15) по любой последовательности τ_n не равны нулю. Отсюда и из (11), (8), в свою очередь, заключаем, что для таких λ имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda, \rho_n)}{G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda,\sigma)}=1. \tag{15*}$$

Из (6^*), (10) и (13) вытекает, что для любого τ

$$|J_\tau(\lambda, \rho_n)-G_n^2(\lambda+i\tau)\,J_\tau(\lambda, \sigma)|\leqslant O(1) \tag{16}$$

для каждого λ.

Обозначим через $K_n=\{\lambda_p^{(n)}\in R^1;\ G_n(\lambda_p^{(n)})=0,\ p=\pm 1;\ \pm 2;\cdots\}$ множество тех точек вещественной оси, где целая функция $G_n(z)$ равняется нулю (можно предполагать, что $\lambda_p^{(n)}<\lambda_q^{(n)}$, если $p<q$). Обозначим $K=\bigcup\limits_{(n)}K_n$, ясно, что множество K счетно.

Легко видеть, что в каждой точке $\lambda\in K_n$ функция ρ_n непрерывна. В самом деле, так как в точке $\lambda\in K_n$ функция $G_n^2(\lambda+i\tau)$ стремится к нулю со скоростью τ^2 при $\tau\to+0$, то второй член левой части

(16) должен стремиться к нулю, тогда из (16) и леммы 3 ([1]) следует, что функция ρ_n непрерывна в этой точке.

Докажем, что для любой точки непрерывности функции $\sigma(t)$ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon) = (\lambda_p^{(n)} + \varepsilon;\ \lambda_{p+1}^{(n)} - \varepsilon)$, где ε — произвольное число, меньшее чем $\lambda_{p+1}^{(n)} - \lambda_p^{(n)}$, имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0}\left[G_n^2(\lambda+i\tau)\, J_\tau(\lambda, \sigma) - J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)\right] = 0. \tag{17}$$

В самом деле, согласно теореме Радона-Никодима, имеем

$$\lim_{\tau\to+0} J_\tau(\lambda, G_n^2(\lambda) - G_n^2(t);\ \sigma(t)) \leqslant \lim_{\tau\to+0} J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}),$$

где

$$\tilde{\sigma}(t) = \int_{-\infty}^{t} |G_n^2(\lambda) - G_n^2(x)|\, d\sigma(x).$$

Так как разность $G_n^2(\lambda) - G_n^2(x)$ стремится к нулю со скоростью $\lambda - x$ при x стремящемся к точке λ, то легко видеть, что производная $\tilde{\sigma}'(t)$ в точке λ равна нулю, следовательно по лемме 1 ([1]) и из того, что $\lim\limits_{\tau\to+0}[G_n^2(\lambda) - G_n^2(\lambda+i\tau]\cdot J_\tau(\lambda, \sigma) = 0$, верно (17).

Легко доказать, что для каждой точки из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{G_n^2(\lambda+i\tau)\cdot J_\tau(\lambda, \sigma)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} = 1. \tag{18}$$

В самом деле

$$\frac{G_n^2(\lambda)\, J_\tau(\lambda, \sigma)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} = 1 + \frac{J_\tau(\lambda, G_n^2(\lambda) - G_n^2(t), \sigma(t))}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)}. \tag{18*}$$

Так как $|G_n^2(\lambda) - G_n^2(t)| < \delta_2$, если $|t-\lambda| < \delta_1$, то

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{J_\tau(\lambda, G_n^2(\lambda) - G_n^2(t), \sigma(t))}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{J_\tau(\lambda, |G_n^2(\lambda) - G_n^2(t)|, \sigma(t), \lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma, \lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{\delta_2\cdot J_\tau(\lambda, 1, \sigma, \lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)}{J_\tau(\lambda, 1, \sigma, \lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)\cdot \min\limits_{t\in(\lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)} G_n^2(t)} = \frac{\delta_2}{\min\limits_{t\in(\lambda-\delta_1, \lambda+\delta_1)} G_n^2(t)}.$$

В силу произвольности δ_1 получается, что второй член правой части (18*) стремится к нулю, если $\tau\to+0$; следовательно верно (18).

Из (18) и (15*) получаем

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{J_\tau(\lambda, \rho_n)}{J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)} = 1$$

для тех λ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, $p=\pm 1, \pm 2, \cdots$, при которых пределы знаменателя и числителя левой части (19) по каждой последовательности τ_n не равны нулю.

Из (17) и (14) получаем, что для любой точки непрерывности функции $\sigma(t)$ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ можно написать

$$\lim_{\tau\to+0}\left[J_\tau(\lambda, \rho_n) - J_\tau(\lambda, G_n^2, \sigma)\right]=0. \tag{20}$$

Легко доказать, что на интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, где ε—произвольное число, точки непрерывности функций $\sigma(t)$ и $\rho_n(t)$ совпадают. В самом деле, пусть в точке $t_0 \in \Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ функция $\sigma(t)$ непрерывна. Применив теорему Радона-Никодима ко второму интегралу выражения (20) и принимая во внимание, что точка t_0 является точкой непрерывности для функции $\tilde{\sigma}_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} G_n^2(t)\,d\sigma(t)$, по лемме 3 ([1]) непосредственно следует, что в точке t_0 функция $\rho_n(t)$ непрерывна. Теперь предположим, что в точке $t_1 \in \Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ функция $\rho_n(t)$ непрерывна. Тогда из того, что функция $G_n^2(\lambda)$ отлична от нуля на всем интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, в силу леммы 3 ([1]) и (16) следует, что в точке t_1 функция $\sigma(t)$ непрерывна, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\sigma_c(t)$ и $\sigma_d(t)$ (соответственно $\rho_{nc}(t)$ и $\rho_{nd}(t)$) непрерывную и разрывную части функции $\sigma(t)$ (соответственно $\rho_n(t)$). Тогда легко доказать, что для всех $\lambda \in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{nd}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\,d\sigma_d(t). \tag{21}$$

В самом деле, в силу теоремы Радона-Никодима равенство (19) можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda, \rho_n)}{J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_n)}=1 \tag{22}$$

при тех λ из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ $p=\pm 1, \pm 2, \cdots$, при которых пределы знаменателя и числителя левой части (22) по каждой последовательности τ_n не равны нулю. Выше мы доказали, что на интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ функции $\rho_n(t)$ и $\tilde{\sigma}_n(t)$ имеют одинаковые точки непрерывности, следовательно эти функции имеют и одинаковые точки разрыва. Теперь докажем, что рост разрыва для обеих функций $\rho_n(t)$ и $\tilde{\sigma}_n(t)$ в точке $\lambda_0 \in \Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ (если существуют такие точки) один и тот же. Для этого введем в рассмотрение функции $\rho_{nd_0}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{nd_0}(t)$, определенные следующим образом:

$$\rho_{nd_0}(t)=[\rho_n(\lambda_0+0)-\rho_n(\lambda_0)]\cdot\theta(t-\lambda_0),$$

$$\tilde{\sigma}_{nd_0}(t)=[\tilde{\sigma}_n(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_n(\lambda_0)]\cdot\theta(t-\lambda_0).$$

После этих обозначений, в силу аддитивности интеграла, равенство (22) можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda,\rho_n-\rho_{nd_0})+J_\tau(\lambda,\rho_{nd_0})}{J_\tau(\lambda,\tilde{\sigma}_n-\tilde{\sigma}_{nd_0})+J_\tau(\lambda,\tilde{\sigma}_{nd_0})}=1. \qquad (22^*)$$

Так как точка λ_0 для функций $\rho_n(t)-\rho_{nd_0}(t)$ и $\tilde{\sigma}_n(t)-\tilde{\sigma}_{nd_0}(t)$ является точкой непрерывности, то в силу леммы 3 ([1]) первые слагаемые знаменателя и числителя левой части (22*) при $\lambda=\lambda_0$ имеют оценку $o\left(\frac{1}{\tau}\right)$, следовательно по этой лемме левую часть равенства (22*) при $\lambda=\lambda_0$ можно записать в виде

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{J_\tau(\lambda_0,\rho_{nd_0})}{J_\tau(\lambda_0,\tilde{\sigma}_{nd_0})}=\lim_{\tau\to+0}\frac{\frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\rho_{nd_0}(\lambda_0+0)-\rho_{nd_0}(\lambda_0)}{\tau^2}}{\frac{\tau}{\pi}\cdot\frac{\tilde{\sigma}_{nd_0}(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_{nd_0}(\lambda_0)}{\tau^2}}=$$

$$=\frac{\rho_n(\lambda_0+0)-\rho_n(\lambda_0)}{\tilde{\sigma}_n(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_n(\lambda_0)}=1.$$

Итак, $\rho_n(\lambda_0+0)-\rho_n(\lambda_0)=\tilde{\sigma}_n(\lambda_0+0)-\tilde{\sigma}_n(\lambda_0)$ для каждой точки разрыва из интервала $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$, следовательно

$$\rho_{nd}(\lambda)=\tilde{\sigma}_{nd}(\lambda)+c(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}G_n^2(t)\,d\sigma_d(t)+c(\lambda) \qquad (23)$$

для любого $\lambda\in R^1-\bigcup_{(n)}\{\lambda_p^{(n)}\}$, где $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}=(\lambda_p^{(n)};\lambda_{p+1}^{(n)})$. В силу того, что функция $G_n^2(t)$ стремится к нулю со скоростью $|\lambda_p^{(n)}-t|^2$, когда t стремится к $\lambda_p^{(n)}$, функция

$$\tilde{\sigma}_n(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}G_n^2(t)\,d\sigma(t)$$

непрерывна в точке $\lambda_p^{(n)}$, $p=\pm1;\ \pm2;\ \cdots$. Поскольку $\rho_n(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda_p^{(n)}$, то формула (23) показывает, что $c(\lambda)\equiv C$. С другой стороны, $\rho_n(-\infty)=0$, значит $C=0$. Далее, легко видеть, что равенство (23) имеет место для всех $\lambda\in R^1$, и поэтому формула (23) действительно принимает вид (21).

Теперь докажем, что для любого $\lambda\in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{nc}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_c(t). \tag{24}$$

В самом деле, если в равенстве (20) вместо $\rho_n(t)$ и $\sigma(t)$ подставим соответственно $\rho_{nc}(t) + \rho_{nd}(t)$ и $\sigma_c(t) + \sigma_d(t)$, то в силу аддитивности интеграла получим

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [J_\varepsilon(\lambda, \rho_{nc}) - J_\varepsilon(\lambda, G_n^2, \sigma_c)] = 0 \tag{25}$$

для всех $\lambda \in R^1$, кроме счетного числа точек (поскольку множество точек разрыва функции $\sigma(t)$ счетно).

Если обозначим $\sigma_a(t)$ и $\sigma_s(t)$ (соответственно ρ_{na} и ρ_{ns}) абсолютно непрерывную и сингулярную части функции $\sigma(t)$ (соответственно $\rho_{nc}(t)$), то функции

$$\tilde{\sigma}_{na}(t) = \int_{-\infty}^{t} G_n^2(x)\, d\sigma_a(x),\ \tilde{\sigma}_{nc}(t) = \int_{-\infty}^{t} G_n^2(x)\, d\sigma_c(x) \text{ и } \tilde{\sigma}_{ns}(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} G_n^2(x)\, d\sigma_s(x),$$

очевидно, будет соответственно абсолютно непрерывной, непрерывной и сингулярной частями функции $\tilde{\sigma}_n(t)$.

Из равенства (25), в силу леммы 1 ([1]), можно заключить, что почти везде на интервале $\Delta_p^{(n)}(\varepsilon)$ производные функций $\rho_{na}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{na}(t)$ равны, следовательно, в силу произвольности ε, абсолютно непрерывные части этих функций отличаются лишь константой на интервале $\Delta_p^{(n)} = (\lambda_p^{(n)}; \lambda_{p+1}^{(n)})$, т. е.

$$\rho_{na}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_a(t) + c(\lambda), \tag{26}$$

где $\lambda \in \bigcup_{(p)} (\lambda_p^{(n)}; \lambda_{p+1}^{(n)}) = R^1 - \bigcup_{(p)} \{\lambda_p^{(n)}\}$ и $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}$.

Так как непрерывная функция $\rho_{na}(\lambda)$ удовлетворяет условию $\rho_{na}(-\infty) = 0$ и $\int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_a(t)$ — непрерывная функция на R^1, то из (26) следует, что $c(\lambda) \equiv 0$ и для любого $\lambda \in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{na}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\, d\sigma_a(t). \tag{26*}$$

Из (25), (26*) и аддитивности интеграла вытекает, что имеет место равенство

$$\lim_{\tau\to+0}[J_\tau(\lambda, \rho_{ns})-J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_{ns})]=0 \tag{27}$$

для любой точки $\lambda\in\Delta_p^{(n)}$, кроме счетного числа точек.

Теперь уже из условия (27) и из того, что монотонно возрастающие функции $\rho_{ns}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{ns}(t)$ сингулярны по мере Лебега, можно заключить, что в интервале $\Delta_p^{(n)}$ функции $\rho_{ns}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{ns}(t)$ отличаются друг от друга постоянной величиной. Доказательство этого факта будем проводить от противного. Пусть мера $\tilde{\sigma}_{ns}$ не является абсолютно непрерывной относительно меры ρ_{ns}, тогда (см., например, [8], стр. 56) будем иметь

$$\tilde{\sigma}_{ns}=\tilde{\sigma}_{ns_1}+\tilde{\sigma}_{ns_2}, \tag{28}$$

где монотонно возрастающие функции $\tilde{\sigma}_{ns_1}(t)$ и $\tilde{\sigma}_{ns_2}(t)$ соответственно абсолютно непрерывная и сингулярная составляющие меры $\tilde{\sigma}_{ns}$ относительно меры ρ_{ns}. Очевидно, что

$$\tilde{\sigma}_{ns_1}(\lambda)=\int\limits_{\lambda_p^{(n)}}^{\lambda}\varphi(t)\,d\rho_{ns}(t)+c, \quad \text{где } \lambda\in\Delta_p^{(n)}, \tag{29}$$

и функция $\tilde{\sigma}_{ns_2}$ сингулярна относительно меры

$$\tilde{\rho}_{ns}=\rho_{ns}-\tilde{\sigma}_{ns_1}. \tag{30}$$

Тогда по теореме Лебега-Витали ([9], стр. 200) производная по системе Витали* [9]

$$\frac{d\tilde{\rho}_{ns}}{d\tilde{\sigma}_{ns_2}}=0 \tag{31}$$

на множестве F, полном по мере $\tilde{\sigma}_{ns_2}$.

Так как функция $\tilde{\sigma}_{ns_2}$ сингулярна относительно меры Лебега, то в силу леммы 4 ([1]), не нарушая общности, можем сказать, что в любой точке F производная $\tilde{\sigma}'_{ns_2}=+\infty$. Тогда из условия (31) сразу следует, что в любой точке множества F производная $(\tilde{\sigma}_{ns_2}-\tilde{\rho}_{ns})'=+\infty$.

Из (27), (28), (30) и аддитивности интеграла заключаем, что

$$\lim_{\tau\to+0}J_\tau(\lambda, \tilde{\sigma}_{ns_2}-\tilde{\rho}_{ns})=0 \tag{32}$$

в любой точке, кроме счетного числа точек из R^1.

Теперь нам нужна следующая лемма, доказательство которой приведено в конце этого пункта.

---

* состоящей из всевозможных замкнутых интервалов из R^1.

Лемма 1. *Если $\rho(t)$ является функцией ограниченной вариации и в точке λ производная $\rho'(\lambda)=+\infty$, то существует последовательность $\tau_n\to+0$ такая, что*

$$\lim_{\tau_n\to+0} J_{\tau_n}(\lambda, \rho)=+\infty.$$

Так как функция $\tilde{\sigma}_{ns_0}-\tilde{\rho}_{ns}$ имеет ограниченную вариацию и производная $(\tilde{\sigma}_{ns_1}-\tilde{\rho}_{ns})'=+\infty$ на несчетном множестве F, то в силу леммы 1 получается противоречие с (32), откуда и следует, что в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}$ мера $\tilde{\sigma}_{ns}$ является абсолютно непрерывной относительно меры ρ_{ns}, т. е.

$$\tilde{\sigma}_{ns}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\varphi(t)\,d\rho_{ns}(t)+c(\lambda), \tag{33}$$

где $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $\Delta_p^{(n)}$.

Из (27), (33), в силу теоремы Радона-Никодима, получаем

$$\lim_{\tau\to+0} J_\tau(\lambda, \rho_{ns})\left[1-\frac{J_\tau(\lambda, \varphi, \rho_{ns})}{J_\tau(\lambda, \rho_{ns})}\right]=0 \tag{34}$$

для любой точки (кроме счетного числа).

Так как функции $\rho_{ns}(t)$ сингулярны относительно меры Лебега, то в силу леммы 3 ([2]) заключаем, что первый сомножитель левой части равенства (34) стремится к $+\infty$ на множестве F_1 полной ρ_{ns} меры, следовательно второй множитель левой части равенства (34) стремится к нулю на множестве F_1 (кроме, может быть, счетного числа точек), поэтому из равенства (15) ([10]) заключаем, что $\varphi(t)\equiv1$ почти везде по мере ρ_{ns}. Теперь уже, в силу (33), получаем

$$\rho_{ns}(\lambda)=\tilde{\sigma}_{ns}(\lambda)+c(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}G_n^2(t)\,d\sigma_s(t)+c(\lambda), \tag{35}$$

где $\lambda\in R^1-\bigcup_{(p)}\{\lambda_p^{(n)}\}$ и $c(\lambda)$ постоянна в каждом интервале $(\lambda_p^{(n)}, \lambda_{p+1}^{(n)})$.

Наконец, из непрерывности функции $\rho_{ns}(t)$ и $\sigma_s(t)$ следует, что функция $c(\lambda)$ не зависит от λ, а из условия $\rho_{ns}(-\infty)=0$ вытекает, что $c(\lambda)\equiv0$. Итак, для любого $\lambda\in R^1$ имеет место равенство

$$\rho_{ns}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}G_n^2(t)\,d\sigma_s(t), \tag{35*}$$

сопоставление которого с (26*) доказывает справедливость равенства (24).

Теперь докажем, что мера ρ и мера σ эквивалентны. В самом деле, так как для любого n функция $G_n^2(t)$ отлична от нуля на каждом множестве положительной σ_c-меры, то из (24) видно, что меры ρ_{nc} и σ_c эквивалентны. Докажем, что меры ρ_c и σ_c тоже эквивалентны. Пусть множество E имеет положительную σ_c меру, т. е. $\sigma_c(E)>0$, тогда $\rho_{nc}(E)>0$ для любого n, следовательно из того, что мера ρ_c не слабее, чем мера ρ_{nc} (т. е. из $\rho_{nc}(E)>0 \to \rho_c(E)>0$), легко заключаем, что мера ρ_c не слабее σ_c. Для доказательства того, что σ_c, в свою очередь, не слабее ρ_c, прежде всего заметим, что из сходимости Vg_n к $Vg\equiv 1$ в метрике $L^2\rho$ легко заключить, что для любого измеримого подмножества F $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n(F)=\rho(F)$, а также $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{nc}(F)=\rho_c(F)$, поэтому из $\rho_c(F)>0$ будет следовать, что $\rho_{nc}(F)>0$ для достаточно больших n, но поскольку σ_c и ρ_{nc} эквивалентны при всех n, будем иметь $\sigma_c(F)>0$, т. е. σ_c не слабее ρ_c.

Теперь уже из эквивалентности мер ρ_c и σ_c заключаем, что существует положительная на полной σ_c-мере функция $f_1(t)$ такая, что

$$\rho_c(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f_1(t)\,d\sigma_c(t). \tag{36}$$

Докажем, наконец, что меры ρ_d и σ_d тоже эквивалентны. Заменяя целое n произвольным неотрицательным l как при доказательстве формулы (21), так и в фигурирующих в ней обозначениях, будем иметь формулу

$$\rho_{ld}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} G_l^2(t)\,d\sigma_d(t). \tag{37}$$

Предположим теперь, что функция σ_d имеет разрыв в точке λ_0, тогда из $G_{l_0}^2(\lambda_0)\neq 0$ и формулы (37) получаем, что функция ρ_{l_0d} имеет разрыв в той же точке λ_0, но поскольку мера ρ_d, очевидно, не слабее меры ρ_{l_0d}, заключаем, что функция ρ_d также имеет разрыв в точке λ_0, а это означает, что ρ_d не слабее σ_d. Мы утверждаем, что найдется $l_0>0$ такое, что $G_{l_0}^2(\lambda_0)\neq 0$, ибо в противном случае имело бы место тождество $\varphi(x,\lambda_0)\,g(x)\equiv 0$, которое очевидно невозможно.

Теперь предположим, что в точке λ_0 $\rho_d(\lambda_0+0)-\rho_d(\lambda_0-0)>0$; так как меры ρ_{nd} сходятся к мере ρ_d, то существует n_0 такое, что $\rho_{n_0d}(\lambda_0+0)-\rho_{n_0d}(\lambda_0-0)>0$, поэтому, принимая во внимание (21), заключаем, что $\sigma_d(\lambda_0+0)-\sigma_d(\lambda_0-0)>0$, т. е. σ_d не слабее ρ_d, а значит они эквивалентны. Далее, аналогично предыдущему, существует положительная на полной σ_d-мере функция $f_2(t)$ такая, что имеет место равенство

$$\rho_d(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f_2(t)\,d\sigma_d(t). \tag{38}$$

Введем функцию $f(t)$, определенную на множестве полной σ-меры, которая совпадает с $f_2(t)$ в точках разрыва $\sigma(t)$ и с $f_1(t)$ в точках ее непрерывности. Тогда из формул (36) и (38) следует, что для любого $\lambda\in R^1$

$$\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} f(t)\,d\sigma(t), \tag{39}$$

где функция $f(t)$ отлична от нуля на множестве полной σ-меры.

Далее, из (39), применяя теорему Радона-Никодима, будем иметь

$$\sigma(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{1}{f(t)}\,d\rho(t), \tag{39*}$$

что и доказывает эквивалентность мер σ и ρ.

Отметим, что во всех точках разрыва функции $\sigma(t)$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} G_n^2(\lambda)=f(\lambda)>0. \tag{40}$$

В самом деле, из (21), (38) и из того, что для любого $\lambda\in R^1$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{nd}(\lambda)=\rho_d(\lambda),$$

будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\lambda} G_n^2(t)\,d\sigma_d(t)=\int_{-\infty}^{\lambda} f_2(t)\,d\sigma_d(t). \tag{41}$$

Так как в равенстве (41) число λ произвольно, то нетрудно видеть, что для любого борелевского множества E имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_E G_n^2(t)\,d\sigma_d(t)=\int_E f_2(t)\,d\sigma_d(t).$$

В частности, если вместо множества E взять точку λ, в которой функция σ_d имеет разрыв, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} G_n^2(\lambda)\,[\sigma_d(\lambda+0)-\sigma_d(\lambda-0)]=f_2(\lambda)\,[\sigma_d(\lambda+0)-\sigma_d(\lambda-0)]>0.$$

Переходим к доказательству леммы 1. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале $[a, b]$ и на этом интервале функция $\rho(x)$, имеющая конечную вариацию, удовлетворяет условию $\rho(x)\leqslant\rho(b)$ (соответственно $\rho(b)\leqslant\rho(x)$), то имеет место неравенство*

$$\int_a^b f(x)\,d\rho(x)\geqslant f(a)\,[\rho(b)-\rho(a)]$$

$$\left(\textit{соответственно}\ \int_a^b f(x)\,d\rho(x)\leqslant f(a)\,[\rho(b)-\rho(a)]\right).$$

Доказательство. Используя формулу интегрирования по частям в интеграле Лебега-Стильтьеса и условия леммы, можем написать

$$\int_a^b f(x)d\rho(x) = f(x)\rho(x)\Big|_a^b - \int_a^b \rho(x)\,df(x) > f(b)\rho(b) - f(a)\cdot\rho(a) -$$

$$-\rho(b)[f(b)-f(a)] = f(a)[\rho(b)-\rho(a)].$$

Аналогичным способом можем доказать справедливость утверждения этой леммы, которое написано в скобках. Таким образом, лемма 2 полностью доказана.

Доказательство леммы 1 получается теперь следующим образом. Так как производная $\rho'(\lambda) = +\infty$, то существует такое число $\delta > 0$, что имеет место неравенство

$$\rho(t) < \rho(\lambda), \text{ если } t \in (\lambda-\delta, \lambda)$$

и

$$\rho(t) > \rho(\lambda), \text{ если } t \in (\lambda, \lambda+\delta). \tag{42}$$

Более того, легко показать, что существует последовательность $\tau_n \to +0$ такая, что для каждого n имеет место неравенство

$$\rho(\lambda-\tau_n) > \rho(t), \text{ если } t \in [\lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n), \tag{43}$$

где $\tau_n < \sqrt{\tau_n} < \delta$.

В силу аддитивности интеграла можем написать

$$J_{\tau_n}(\lambda,\rho) = J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau_n}) + J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n) +$$

$$+ J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\tau_n, \lambda) + J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda, \lambda+\delta) + J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda+\delta, \infty). \tag{44}$$

Покажем, что первое слагаемое правой части (44) ограничено по τ. В самом деле, так как функция $\rho(x)$ имеет конечную вариацию, то $\rho(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x)$, где ρ_1 и ρ_2 — монотонно возрастающие функции. Следовательно для каждого τ можем написать следующее неравенство:

$$J_\tau(\lambda, 1, \rho, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau}) \leqslant J_\tau(\lambda, 1, \rho_1, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau}) +$$

$$+ J_\tau(\lambda, 1, \rho_2, -\infty, \lambda-\sqrt{\tau}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\rho_1(\lambda-\sqrt{\tau})}{\tau+\tau^2} + \frac{\rho_2(\lambda-\sqrt{\tau}}{\tau+\tau^2}\right) \leqslant \frac{\rho_1(\lambda)+\rho_2(\lambda)}{\pi}.$$

Таким же образом можно доказать, что ограничено и пятое слагаемое правой части (44); что же касается второго и четвертого слагаемых, то легко видеть, что они неотрицательны. В самом деле, так как подынтегральная функция $\dfrac{1}{(t-\lambda)^2+\tau_n^2}$ монотонно возрастает в интервале $[\lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n]$, то из условия (43) и леммы 2 будем иметь

$$J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\sqrt{\tau_n}, \lambda-\tau_n) > \frac{\tau_n}{\pi}\cdot\frac{1}{(\sqrt{\tau_n})^2+\tau_n^2}[\rho(\lambda-\tau_n)-\rho(\lambda-\sqrt{\tau_n})] > 0$$

для любого τ_n.

Далее, используя лемму 2 и (42), легко видеть, что

$$\frac{\pi}{\tau_n}\cdot J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda+\delta, \lambda) < \frac{1}{\delta^2+\tau_n^2}\left[\rho(\lambda)-\rho(\lambda+\delta)\right] < 0,$$

следовательно четвертый член правой части (44) больше нуля для любого τ_n.

Опять используя лемму 2 и (42), можем написать

$$J_{\tau_n}(\lambda, 1, \rho, \lambda-\tau_n, \lambda) \geqslant \frac{\tau_n}{\pi}\cdot\frac{1}{\tau_n^2+\tau_n^2}\left[\rho(\lambda)-\rho(\lambda-\tau_n)\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{\rho(\lambda)-\rho(\lambda-\tau_n)}{\tau_n}.$$

Следовательно, в силу того, что производная $\rho'(\lambda)=+\infty$, получается, что третий член правой части (44) стремится к $+\infty$, когда $\tau_n \to +0$.

Наконец, в силу сказанного выше о каждом члене правой части равенства (44), следует справедливость леммы 1.

З а м е ч а н и е. Используя рассуждения этого пункта и формулу (1) ([10]), можно доказать следующее:

1) участвующая в формуле (39) функция $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} G_n^2(\lambda) = G^2(\lambda)$$

почти всюду по мере ρ;

2) для изометрического оператора V (соответствующего оператору Штурма-Лиувилля) имеет место равенство

$$Vh(x) = \frac{H(\lambda)}{G(\lambda)},$$

где

$$H(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(x, \lambda)\, h(x)\, dx.$$

2°. В этом пункте мы, опираясь на установленную выше эквивалентность ρ и σ, построим ядро спектра самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля и получим несколько признаков лебеговости, чистой точечности и сингулярности его спектра.

Прежде всего из (5) в силу леммы 5 ([1]) и леммы 4 ([2]) ясно, что функция

$$Q(\lambda) \overset{\text{опр.}}{=} \lim_{\tau\to+0} \{-\operatorname{Im} m(\lambda+i\tau)\} \tag{45}$$

определена и неотрицательна почти всюду как по мере Лебега, так и по мере σ.

Рассмотрим теперь множество

$$Q(L) = \{\lambda \in R^1,\ Q(\lambda) > 0\}$$

и докажем следующее основное.

Предложение 1. *Множество $Q(L)$ является ядром спектра оператора Штурма-Лиувилля**.

В силу предложения 3 ([3]) достаточно доказать, что множество $Q(L)$ имеет полную ρ-меру и что множество $M=(Q(L)\setminus S^*(L))\cup$ $\cup(S^*(L)\setminus Q(L))$ имеет нулевую лебеговскую меру.

Из (5) и (45) получается, что

$$\frac{1}{\pi}Q(\lambda)=\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{46}$$

Согласно лемме 5 ([1]), множество $Q(L)$ имеет полную σ-меру, т. е. $\sigma(R^1\setminus Q(L))=0$. С другой стороны, из эквивалентности мер σ и ρ множество $Q(L)$ имеет полную ρ-меру, т. е. $\rho(Q(L))=\rho(R^1)$.

Теперь покажем, что множество M имеет нулевую лебеговскую меру. Предположив обратное, без нарушения общности, можем считать, что $\operatorname{mes}(Q(L)\setminus S^*(L))>0$. Тогда из предложения 5 ([3]) следует, что функция $\sigma(t)$ имеет абсолютно непрерывную часть, следовательно по лемме 2 ([2]) $\sigma(Q(L))\setminus S^*(L)>0$, но поскольку меры σ и ρ эквивалентны, то $\rho(Q(L)\setminus S^*(L))>0$. Далее, из определения множества $S^*(L)$ следует, что на множестве $Q(L)\setminus S^*(L)$ функция $\Phi(\lambda)$ или равна нулю или не определена, следовательно, учитывая лемму 5 ([1]), приходим к противоречию. Таким образом, мы доказали, что симметрическая разность множеств $Q(L)$ и $S^*(L)$ имеет нулевую лебеговскую меру.

Предложение 1 позволяет сделать некоторые заключения о характере спектра оператора Штурма-Лиувилля в терминах функции $m(z)$ и в терминах множества $Q(L)$, которые соответствуют общим критериям, приведенным в работах ([1], [2], [3]).

Предложение 2. *Чтобы непрерывный спектр оператора Штурма-Лиувилля был лебеговым на участке* $(\alpha,\beta)\subset R^1$, *достаточно, чтобы для любого* λ *из этого участка (кроме, быть может, счетного их числа) существовал конечный предел* $\lim\limits_{\tau\to+0}\{-\operatorname{Im} m(\lambda+i\tau)\}$.

Предложение 3. *Для того чтобы на участке* $(\alpha,\beta)\subset R^1$ *не было ни одного собственного значения оператора* L, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda\in(\alpha,\beta)$

$$\operatorname{Im} m(\lambda+i\tau)=o\left(\frac{1}{\tau}\right) \text{ при } \tau\to+0.$$

Предложение 4. *Для того чтобы спектр оператора Штурма-Лиувилля был чисто точечным на участке* $(\alpha,\beta)\subset R^1$, *достаточно, чтобы для любого* $\lambda\in(\alpha,\beta)$, *кроме, быть может, счетного их множества, имело место*

---

* Точнее говоря, $Q(L)$ отличается от ядра на множество нулевой спектральной и лебеговской меры.

$$\lim_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}=0.$$

Предложение 5. *Для того чтобы спектр оператора L не содержал лебеговской части, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{mes} Q(L)=0$ *или, что то же самое, чтобы* $\lim\limits_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}=0$ *почти всюду по мере Лебега.*

Предложение 6. *Для отсутствия непрерывной части спектра оператора Штурма-Лиувилля достаточно, чтобы ядро спектра $Q(L)$ состояло из не более чем счетного множества точек.*

Предложение 7. *Для отсутствия сингулярной части спектра оператора Штурма-Лиувилля достаточно, чтобы предел* $\lim\limits_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}$ *равнялся бесконечности в не более чем счетном числе точек.*

Доказательство предложения 2 проводится следующим образом. Предположим, что спектральная функция $\rho(t)$ имеет на участке (α, β) сингулярную часть. Тогда, в силу эквивалентности мер ρ и σ, функция $\sigma(t)$ также содержит сингулярную часть, следовательно, из (45), (46) и в силу леммы 3 ([2]) получается, что на множестве мощности континуум предел

$$\lim_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}=+\infty.$$

Полученное противоречие означает, что на участке (α, β) спектральная мера ρ не может содержать сингулярную часть.

Доказательство предложения 3. Пусть $\rho(t)$ — непрерывная функция. Тогда, в силу эквивалентности мер ρ и σ, функция $\sigma(t)$ непрерывна, следовательно, из (45), (46) и леммы 3 ([1]) вытекает необходимость условия предложения 3. Предположим теперь, что функция $\rho(t)$ имеет точку разрыва $\lambda_0 \in (\alpha, \beta)$, тогда, в силу эквивалентности мер ρ и σ, функция $\sigma(t)$ также разрывна в точке λ_0, следовательно, по лемме 3 ([1]) получаем противоречие.

Доказательство предложения 4. Пусть спектральная функция $\rho(t)$ на участке (α, β) имеет непрерывную часть, тогда $\sigma(t)$ тоже имеет непрерывную часть, следовательно, по лемме 5 ([1]) предел $\lim\limits_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}$ отличен от нуля на множестве мощности континуум. Полученное противоречие означает, что спектральная мера $\rho(t)$ чисто точечная в интервале (α, β).

Справедливость предложения 5 вытекает из предложения 1, предложения 3 ([3]), предложения 5 ([3]) и из эквивалентности мер σ и ρ.

Доказательство предложения 6. По условию имеем

$$Q(\lambda)=\lim_{\tau\to+0} \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=0$$

при всех $\lambda \in R^1$, кроме счетного множества точек. Применяя предложение 4 ([3]) и леммы 2, 3 ([2]), получаем $\sigma_a(t)\equiv 0$ и $\sigma_s(t)\equiv 0$. Отсюда и из эквивалентности мер σ и ρ следует, что мера ρ чисто точечная.

Доказательство предложения 7. Предположим, что в спектре содержится сингулярная часть, тогда по эквивалентности мер ρ и σ функция $\sigma(t)$ тоже имеет сингулярную составляющую $\sigma_s(t)\not\equiv 0$, следовательно, из (45), (46) и по лемме 3 ([2]) получаем, что предел $\lim\limits_{\tau\to+0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda+i\tau)\}$ равняется бесконечности на множестве полной σ_s-меры, что противоречит условию доказываемого предложения.

Замечание. Совершенно ясно, что последние три предложения остаются справедливыми, если вместо R^1 рассмотреть какой-либо интервал $(\alpha, \beta)\subset R^1$.

3°. В этом пункте мы рассмотрим пример оператора Штурма-Лиувилля, показывающий в каких ситуациях применение предложения 4 может оказаться проще и эффективнее, чем построение самой спектральной меры.

Пусть функция $\sigma_0(t)$ определена на интервале $(-\infty, +1]$ по формуле

$$\sigma_0(t) = \sum_{x_p^k<t} \frac{1}{3^k}\,\theta(t-x_p^k),$$

где θ—функция Хевисайда, а точки $x_p^k\in(0, 1)$ выбраны следующим образом:

$$x_p^k = \frac{2p-1}{2^k}\quad (k=1, 2, 3,\cdots;\ p=1, 2, 3,\cdots, 2^{k-1}),$$

а затем продолжены на всю ось R^1 с сохранением монотонности и так, чтобы функция

$$F(x) = \int\limits_1^\infty \frac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\lambda}\,d\sigma(\lambda)$$

имела бы непрерывные производные до четвертого порядка.

Легко доказать, что $\sigma_0'(t)=0$, когда $t\in(0, 1)$ и $t\neq x_p^k$. В интервале $(t-h, t+h)\subset(0, 1)$ существует не более чем $[2h\cdot 2^{k-1}]+1$ точек вида x_p^k, где $p=1, 2,\cdots, 2^{k-1}$. Обозначим через $k(h)$ наименьшее целое число k такое, что в интервале $(t-h, t+h)$ находится хотя бы одна из точек вида x_p^k. Очевидно, что $k(h)\to+\infty$, если $h\to+0$. В силу того, что на интервале $[0, 1]$ функция $\sigma(t)$, очевидно, чисто точечная, а в точках вида x_p^k $(p=1, 2,\cdots, 2^{k-1})$ имеет один и тот же разрыв, равный $\frac{1}{3^k}$, легко видеть, что имеет место неравенство

$$\frac{\sigma(t+h)-\sigma(t-h)}{2h} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=k(h)}^{\infty} \frac{1}{3^k}\{[2h\cdot 2^{k-1}]+1\}}{2h} \leqslant$$

$$< \frac{\sum\limits_{k=k(h)}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot 2h \cdot 2^k}{2h} = \sum_{k=k(h)}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k,$$

из которого непосредственно следует наше утверждение.

Пусть теперь оператор Штурма-Лиувилля L_0 таков, что ему соответствует именно построенная нами функция $\sigma = \sigma_0(t)$, тогда легко проверить, что в этом случае выполняется достаточное условие предложения 4. В самом деле, из (45), (46) и по лемме 1 ([1]) получается, что

$$\lim_{\tau \to +0} \operatorname{Im} \{-m(\lambda + i\tau)\} = \lim_{\tau \to +0} \tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0,$$

если только λ отлична от всех точек вида x_p^k, которых очевидно лишь счетное множество.

Таким образом, в тех случаях, когда оператору L соответствует такая функция $\sigma(t)$, разрывы которой расположены всюду плотно на некотором интервале Δ, а предел $\lim\limits_{\tau \to +0} \operatorname{Im}\{-m(\lambda + i\tau)\}$ равен нулю везде в Δ, кроме счетного множества точек, то из предложения 4 непосредственно следует полнота системы собственных функций в подпространстве, соответствующем рассматриваемому интервалу Δ. Вместе с тем построение спектральной меры, например, по известной ([4], стр. 56) формуле

$$K(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \int\limits_0^{\lambda} \{-\operatorname{Im} m(u + i\tau)\}\, du, \tag{47}$$

может представить значительные трудности.

Что же касается тех случаев, когда потенциал $q(x)$ таков, что функция $\sigma(t)$, соответствующая оператору L, не обладает абсолютно непрерывной составляющей в интервале Δ, то обнаружение этого обстоятельства посредством предложения 5 также может быть проще и эффективнее, чем построение самой спектральной меры, например, по формуле (47).

В самом деле, в таких случаях для подынтегрального выражения этой формулы очевидно не существует суммируемой мажоранты, что исключает возможность предельного перехода под знаком интеграла, тогда как из предложения 5 следует, что в этих случаях соответствующее заключение о характере спектра может быть сделано на основании лишь поведения функции $\operatorname{Im} m(\lambda + i\tau)$ при $\tau \to +0$.

Наконец, обратимся к тем случаям, когда соответствующий оператор L функции $\sigma(t)$ не имеет сингулярных составляющих в интервале Δ (например, $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \bar{\sigma}(t)$, где $\bar{\sigma}(t)$ обладает конечной производной в каждой точке $t \in \Delta=[0, 1]$). Здесь тоже обнаружение характера спектра посредством предложения 7 может оказаться проще и эффективнее, чем построение самой спектральной меры по формуле (47). Дело в том, что из-за наличия составляющей $\sigma_0(t)$ подынтегральные выражения в этой формуле опять-таки не могут иметь суммируемой мажоранты, и поэтому для соответствующего заключения о характере спектра по формуле (47) необходимо построение самой спектральной меры, т. е. произвести интегрирование, а затем совершить предельный переход, тогда как в рассмотренном случае условия предложения 7 очевидным образом выполняются.

В заключение считаю приятным долгом выразить признательность своему научному руководителю Р. А. Александряну за постоянное внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.IV.1973

Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Շտուրմ-Լիուվիլի տիպի օպերատորի սպեկտրի կորիզի մասին, և մի շարք հայտանիշներ նրա սպեկտրի լեբեգյան կամ սինգուլյար լինելու վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում դիտարկվում է

$$Ly \equiv q(x)\, y - \frac{d^2y}{dx^2}, \quad 0 \leqslant x < +\infty$$

$$y(0) = \sin\alpha, \quad y'(0) = -\cos\alpha$$

Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի սպեկտրի կորիզը, որը նկարագրված է

$$m(z) = -\operatorname{ctg}\alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}$$

ֆունկցիայի տերմիններով։ Տրված է մի նոր ապացույց $\sigma(t)$ *և* $\rho(t) = \|E_t g\|^2$ *ֆունկցիաներով ծնված չափերի էկվիվալենտության մասին, որտեղ* E_t*-ն* L *օպերատորի միավորի վերլուծությունն է, իսկ g-ն՝ նրա որևէ ծնիչ էլեմենտ է։*

$m(z)$ *ֆունկցիայի տերմիններով ստացված է մի շարք թեորեմներ* L *օպերատորի սպեկտրի լեբեգյան, սինգուլյար և զուտ կետային լինելու վերաբերյալ։*

R. Z. MKRTCHIAN. *On the nucleus of the Sturm-Liuville type operator, and some criterions of lebesqueness or singularity of its spectrum* (summary)

The nucleus of the spectrum of Sturm-Liuville operator

$$Ly \equiv q(x)\, y - \frac{d^2y}{dx^2} \quad 0 \leqslant x < +\infty$$

$$y(0) = \sin\alpha, \quad y'(0) = -\cos\alpha$$

is considered. The nucleus is described in terms of the function

$$m(z) = -\operatorname{ctg} \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{z-t}.$$

A new proof of equivalence of measures generated by the functions $\sigma(t)$ and $\rho(t) = \|E_t g\|^2$ where E_t is the decomposition of unity with respect to L, g is a certain generator is given.

In terms of the function $m(z)$ some new theorems on lebesqueness, singularity and pure pointwiseness of the spectrum of the operator L are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1, № 1, 1966, 25—34.
2. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 2, 1970, 97—108.
3. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра общего самосопряженного оператора, и о некоторых признаках лебеговости или сингулярности его спектра, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 1, 1972, 3—13.
4. *Э. Ч. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I, М., 1960.
5. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию, Изд. „Наука", М., 1970.
6. *Б. М. Левитан.* Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения, М., 1962.
7. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, Изд. „Наука", М., 1968, стр. 79.
8. *С. Сакс.* Теория интеграла, ИИЛ, М., 1949.
9. *Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич.* Интеграл, мера и производная, Изд. „Наука", М., 1967.
10. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 3, №№ 4—5, 1968, 358—368.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Э. А. МИРЗАХАНЯН

ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП

В этой статье строятся абсолютные бесконечномерные гомотопические группы индекса q подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H. Основой всех построений служит класс отображений K_0, построенный В. Г. Болтянским [1].

При этом определяются два подхода к определению гомотопических групп. Первый подход (для несколько другого класса отображений, в общих чертах описан в заметке [2]) связан с выбором ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве H. Второй подход не связан с выбором базиса. Установленная ниже эквивалентность обоих подходов показывает независимость, в первом подходе, построенных гомотопических групп от выбора базиса. Здесь дается подробное изложение результатов заметки [3].

Пусть $\sigma = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$—некоторый ортонормированный базис пространства H. Через S_σ, обозначим линейный оператор (с нормой 1), определяемый соотношениями

$$S_\sigma (e_1)=0, \; S_\sigma (e_n) = e_{n-1} \text{ при } n>1.$$

Таким образом, для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n + \cdots \in H$ мы имеем

$$S_\sigma (x) = \xi_1 S_\sigma (e_1) + \xi_2 S_\sigma (e_2) + \cdots + \xi_n S_\sigma (e_n) + \cdots =$$
$$= \xi_2 e_1 + \xi_3 e_2 + \cdots + \xi_{n+1} e_n + \cdots .$$

Мы будем также рассматривать степени оператора S_σ. Именно степень S_σ^k оператора S_σ представляет собой линейный оператор (с нормой 1), удовлетворяющий соотношениям $S_\sigma^k (e_i) = 0$ при $i = 1, 2, \cdots, k$; $S_\sigma^k (e_n) = e_{n-k}$ при $n > k$. Таким образом, для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n + \cdots \in H$ мы имеем

$$S_\sigma^k (x) = \xi_1 S_\sigma^k (e_1) + \xi_2 S_\sigma^k (e_2) + \cdots + \xi_n S_\sigma^k (e_n) + \cdots =$$
$$= \xi_{k+1} e_1 + \xi_{k+2} e_2 + \cdots + \xi_{n+k} e_n = \cdots .$$

Далее, через T_σ мы обозначим линейный оператор (с нормой 1), определяемый соотношением $T_\sigma (e_n) = e_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$. Его k-ая степень T_σ^k удовлетворяет соотношению $T_\sigma^k (e_n) = e_{n+k}$ $(n=1, 2, \cdots)$. Таким образом, для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n + \cdots \in H$ имеем

$$T_a^k(x) = \xi_1\, T_a^k(e_1) + \xi_2\, T_a^k(e_2) + \cdots + \xi_n\, T_a^k(e_n) + \cdots =$$
$$= \xi_1\, e_{k+1} + \xi_2\, e_{k+2} + \cdots + \xi_n\, e_{n+k} + \cdots.$$

Из приведенных равенств непосредственно вытекает, что операторы T_a и S_a удовлетворяют следующим соотношениям:

$$S_a^k \circ T_a^k = E, \tag{1}$$

$$(T_a^k \circ S_a^k)(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant k; \\ e_n & \text{при } n > k. \end{cases}$$

Иными словами, $S_a^k \circ T_a^k$ есть тождественный оператор, но $T_a^k \circ S_a^k$ тождественным оператором не является, а представляет собой ортогональную проекцию пространства H на ортогональное дополнение подпространства L_k (натянутого на векторы $e_1, \cdots, e_k$). Из этого ясно, что отображение $T_a^k \circ S_a^k\colon H \to H$ принадлежит классу K_0. Мы видим, что T_a^k является правым обратным оператором для S_a^k, но левым обратным не является.

Пусть теперь G — произвольное открытое множество пространства H. Условимся говорить, что отображение $f\colon G \to H$ принадлежит классу $K_a^{(q)}$ $(q \geqslant 0)$, если его можно представить в виде $f = \varphi \circ T_a^q$, где отображение φ определено на $T_a^q(G)$ и принадлежит классу K_0. Далее условимся говорить, что отображение $f\colon G \to H$ принадлежит классу $K_a^{(-q)}$ $(q \geqslant 0)$, если его можно представить в виде $f\colon S_a^q \circ \varphi$, где $\varphi\colon G \to H$ принадлежит классу K_0. Таким образом, класс отображений $K_a^{(q)}$ определен для любого целого q.

Предложение 1. *При $q > 0$ отображение f в том и только том случае принадлежит классу $K_a^{(q)}$, если $f \circ S_a^q \in K_0$. При $q \leqslant 0$ отображение f в том и только том случае принадлежит классу $K_a^{(q)}$, если $T_a^{-q} \circ f \in K_0$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $q \geqslant 0$. Пусть $f \in K_a^{(q)}$, т. е. $f = \varphi \circ T_a^q$, где отображение φ определено на $T_a^q(G)$ и принадлежит классу K_0. Тогда

$$f \circ S_a^q = (\varphi \circ T_a^q) \circ S_a^q = \varphi \circ (T_a^q \circ S_a^q).$$

Но отображение φ и $T_a^q \circ S_a^q$ оба принадлежат классу K_0, а потому и их композиция, т. е. отображение $f \circ S_a^q$ принадлежит классу K_0.

Обратно, пусть отображение f обладает тем свойством, что $f \circ S_a^q \in K_0$ (где по-прежнему, $q \geqslant 0$). Обозначим это отображение через φ, т. е. $\varphi = f \circ S_a^q \in K_0$.

Пусть G—область определения отображения f. Тогда для любой точки $x \in T_a^q(G)$ мы имеем (в силу (1))

$$S_a^q(x) \in S_a^q(T_a^q(G)) = E(G) = G,$$

и потому определена точка $f(S^q_\sigma(x)) = (f \circ S^q_\sigma)(x) = \varphi(x)$, т. е. точка x принадлежит области определения отображения φ. Мы видим, что отображение φ определено на множестве $T^q_\sigma(G)$. Далее, $\varphi \circ T^q_\sigma = (f \circ S^q_\sigma) \circ T^q_\sigma = f \circ (S^q_\sigma \circ T^q_\sigma) = f$ (см. (1)), а это и означает, что $f \in K^{(q)}_\sigma$.

Рассмотрим теперь случай $q \leqslant 0$. Пусть $f \in K^{(q)}_\sigma$, т. е. $f = S^{-q}_\sigma \circ \varphi$, где $\varphi : G \to H$ принадлежит классу K_0. Тогда имеем

$$T^{-q}_\sigma \circ f = T^{-q}_\sigma (S^{-q}_\sigma \circ \varphi) = (T^{-q}_\sigma \circ S^{-q}_\sigma) \circ \varphi.$$

Но отображения $T^{-q}_\sigma \circ S^{-q}_\sigma$ и φ оба принадлежат классу K_0, а потому и их композиция, т. е. отображение $T^{-q}_\sigma \circ f$ принадлежит классу K_0.

Обратно, пусть отображение f обладает тем свойством, что $T^{-q}_\sigma \circ f \in K_0$ (где, по-прежнему, $q \leqslant 0$). Обозначим это отображение через φ, т. е. $\varphi = T^{-q}_\sigma \circ f \in K_0$. Тогда область определения отображения φ совпадает с областью определения G отображения f. Далее

$$S^{-q}_\sigma \circ \varphi = S^{-q}_\sigma \circ (T^{-q}_\sigma \circ f) = (S^{-q}_\sigma \circ T^{-q}_\sigma) \circ f = E \circ f = f \quad \text{(см. (1))},$$

а это и означает, что $f \in K^{(q)}_\sigma$.

Предложение 1 доказано полностью.

Отметим, что при $q \neq 0$ указание базиса σ в обозначении класса отображений $K^{(q)}_\sigma$ существенно: для разных базисов σ эти классы отображений (при одном и том же $q \neq 0$) могут не совпадать. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Прежде всего заметим, что, согласно определению, мы имеем: $T^q_\sigma \in K^{(q)}_\sigma$ при $q > 0$ и $S^{-q}_\sigma \in K^{(q)}_\sigma$ при $q < 0$. Следовательно, для того чтобы классы $K^{(q)}_\sigma$ и $K^{(q)}_{\sigma'}$ совпадали, необходимо чтобы при $q > 0$ были выполнены включения $T^q_\sigma \in K^{(q)}_{\sigma'}$, $T^q_{\sigma'} \in K^{(q)}_\sigma$, а при $q < 0$ были выполнены включения $S^{-q}_\sigma \in K^{(q)}_{\sigma'}$, $S^{-q}_{\sigma'} \in K^{(q)}_\sigma$. В силу предложения 1 эти необходимые условия можно записать в виде

$$T^q_\sigma \circ S^q_{\sigma'} \in K_0, \quad T^q_{\sigma'} \circ S^q_\sigma \in K_0 \quad \text{при } q > 0;$$

$$T^{-q}_{\sigma'} \circ S^{-q}_\sigma \in K_0, \quad T^{-q}_\sigma \circ S^{-q}_{\sigma'} \in K_0 \quad \text{при } q < 0.$$

Иными словами, для того чтобы классы отображений $K^{(q)}_\sigma$ и $K^{(q)}_{\sigma'}$ совпадали, необходимо выполнение условия

$$T^n_\sigma \circ S^n_{\sigma'} \in K_0, \quad T^n_{\sigma'} \circ S^n_\sigma \in K_0, \quad \text{где} \quad n = |q|. \tag{2}$$

Легко видеть, что это необходимое условие является и достаточным. Действительно, рассмотрим для примера случай $q > 0$ (случай $q < 0$ аналогичен). Если $f \in K^{(q)}_\sigma$, то, согласно предложению 1, $f \circ S^q_\sigma \in K_0$. Учитывая соотношение (2), получаем, что отображение

$$(f \circ S^q_\sigma) \circ (T^q_\sigma \circ S^q_{\sigma'}) = f \circ (S^q_\sigma \circ T^q_\sigma) \circ S^q_{\sigma'} = f \circ S^q_{\sigma'}$$

(см. (1)) также принадлежит классу K_0. Но это означает, в силу предложения 1, что $f \in K^{(q)}_{\sigma'}$. Итак, если $f \in K^{(q)}_\sigma$, то, при выполнении условия (2), $f \in K_{\sigma}^{(q)}$, т. е. $K_{\sigma}^{(q)} \subset K_{\sigma'}^{(q)}$. Аналогично устанавливается и обратное включение $K_{\sigma'}^{(q)} \subset K_{\sigma}^{(q)}$. (Заметим, что условие (2) симметрично относительно σ и σ'). Таким образом, при выполнении условия (2) классы $K_{\sigma}^{(q)}$ и $K_{\sigma'}^{(q)}$ совпадают.

Тем самым доказано

Предложение 2. *Для совпадения классов $K_{\sigma}^{(q)}$ и $K_{\sigma'}^{(q)}$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (2).

Рассмотрим пример. Пусть $\sigma = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ — некоторый ортонормированный базис в H. Определим последовательность векторов $\sigma' = \{e_1', e_2', \cdots, e_n', \cdots\}$ следующим образом:

$$e_l' = \begin{cases} e_{k(k-1)+1} & \text{при } l = k(k+1),\ k = 1, 2, \cdots; \\ e_{l+1} & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко проверить, что σ' также представляет собой ортонормированный базис, так как в последовательности σ' встречаются все векторы базиса σ (без повторения), только в другом порядке. Возьмем теперь произвольное целое $q \neq 0$. Тогда при любом $k > n$ (где $n = |q|$) мы имеем (учитывая, что $n \neq 0$)

$$(T_{\sigma}^n \circ S_{\sigma'}^n)(e_{k(k+1)+n+1}) = (T_{\sigma}^n \circ S_{\sigma'}^n)(e'_{k(k+1)+n}) =$$

$$= T_{\sigma}^n (e'_{k(k+1)}) = T_{\sigma}^n (e_{k(k-1)+1}) = e_{k(k-1)+n+1}.$$

Так как, очевидно, $k(k+1)+n+1 \neq k(k-1)+n+1$, то отображение $T_{\sigma}^n \circ S_{\sigma'}^n$, переводит вектор $e_{k(k+1)+n+1}$ в ортогональный ему вектор. Итак, как угодно далеко в последовательности σ найдутся единичные векторы, которые переводятся отображением $T_{\sigma}^n \circ S_{\sigma'}^n$ в ортогональные им единичные векторы, и потому $T_{\sigma}^n \circ S_{\sigma'}^n \overline{\in} K_0$. Иначе говоря, условие (2) не выполнено, и потому классы отображений $K_{\sigma}^{(q)}$ и $K_{\sigma'}^{(q)}$ для рассматриваемых базисов σ, σ' не совпадают (ни при каком $q \neq 0$).

Перейдем теперь к определению гомотопических групп. Через Σ всюду в дальнейшем будет обозначаться единичный шар пространства H (т. е. множество всех элементов $x \in H$, для которых $\|x\| \leqslant 1$)) Пусть $x_0 \in H$. Отображение f: $H \to H$ мы условимся называть сфероидом индекса q в точке x_0, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) отображение f принадлежит классу $K_{\sigma}^{(q)}$;

2) $f(H \setminus \Sigma) = x_0$.

Заметим, что при определении сфероидов базис $\sigma = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ предполагается фиксированным.

Введем теперь операцию сложения сфероидов. Пусть f, g — два сфероида индекса q в точке $x_0 \in H$.

Положим

$$h(x)=\begin{cases} f(2x+e_1) & \text{при} \quad xe_1 \leqslant 0 \\ g(2x-e_1) & \text{при} \quad xe_1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Мы докажем сейчас, что отображение $h: H \to H$ также является сфероидом индекса q в точке x_0; этот сфероид h называется суммой сфероидов f и g и обозначается через $f+g$.

В самом деле, рассмотрим $q \geqslant 0$. В этом случае отображения $\varphi = f \circ S^q_0$, $\psi = g \circ S^q_0$ принадлежат классу K_0 (см. предложение 1). Обозначим через $\Gamma_{-1}, \Gamma_0, \Gamma_1$ гиперплоскости, определяемые соответственно уравнениями $xe_1 = -1$, $xe_1 = 0$, $xe_1 = 1$. Для точек $x \in \Gamma_0$ мы имеем: $(2x+e_1)e_1 = 1$, $(2x-e_1)e_1 = -1$, т. е. $2x+e_1 \in \Gamma_1$, $2x - e_1 \in \Gamma_{-1}$. Но в силу определения сфероидов выполнены соотношения $f(\Gamma_1) = x_0$, $g(\Gamma_{-1}) = x_0$ (поскольку внутренность шара Σ не пересекается с гиперплоскостями Γ_{-1} и Γ_1). Следовательно, при $x \in \Gamma_0$ мы имеем $f(2x+e_1) \in f(\Gamma_1) = x_0$, $g(2x-e_1) \in g(\Gamma_{-1}) = x_0$, т. е. $f(2x+e_1) = g(2x-e_1) = x_0$. Мы видим, что две строки определения (3) согласованы на гиперплоскости Γ_0, по обе стороны которой отображение $h(x)$ определяется по-разному. Следовательно, отображение $h: H \to H$ непрерывно. Далее

$$(h \circ S^q_0)(x) =$$

$$= \begin{cases} f(2S^q_0(x)+e_1) = f(S^q_0(2x+e_{q+1})) = \varphi(2x+e_{q+1}) & \text{при } S^q_0(x)\,e_1 \leqslant 0, \\ g(2S^q_0(x)-e_1) = g(S^q_0(2x-e_{q+1})) = \psi(2x-e_{q+1}) & \text{при } S^q_0(x)\,e_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Иначе говоря

$$(h \circ S^q_0)(x) = \begin{cases} \varphi(2x+e_{q+1}) & \text{при} \quad xe_{q+1} \leqslant 0, \\ \psi(2x-e_{1+q}) & \text{при} \quad xe_{q+1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Отображение $x \to 2x + e_{q+1}$ пространства H на себя, очевидно, принадлежит классу K_0 (и имеем в любой точке терминальную производную, равную 2). Так как $\varphi \in K_0$, то отображение $x \to \varphi(2x+e_{q+1})$ также принадлежит классу K_0. Точно так же, принадлежит классу K_0 и отображение $x \to \psi(2x - e_{q+1})$. Из этого следует, что в каждой точке x, удовлетворяющей условию $xe_{q+1} \neq 0$, отображение $h \circ S^q_0$ удовлетворяет условиям, указанным в определении класса K_0 (см. [1]). Если же $xe_{q+1} = 0$, то оба отображения $x \to \varphi(2x+e_{q+1})$, $x \to \psi(2x - e_{q+1})$ имеют в точке x терминальную производную, равную нулю. Следовательно, и в точках x, удовлетворяющих условию $xe_{q+1} = 0$, отображение $h \circ S^q_0$ удовлетворяет условиям, указанным в определении класса K_0, причем в этих точках отображение $h \circ S^q_0$ имеет терминальную производную, равную нулю. Тем самым доказано, что $h \circ S^q_0 \in K_0$ и потому, в силу предложения 1, отображение h принадлежит классу $K^{(q)}_0$. (Мы провели доказательство этого факта для $q \geqslant 0$, в случае $q < 0$ рассуждения аналогичны).

Итак, $h \in K_{\sigma}^{(q)}$, т. е. отображение h удовлетворяет условию 1), указанному в определении сфероида. Второе условие, т. е. $h(H \setminus \Sigma) = x_0$ проверяется непосредственно. Таким образом, h есть сфероид индекса q в точке x_0, чем и завершается обоснование определения сложения сфероидов.

Пусть X — произвольное подмножество гильбертова пространства H и x_0 — фиксированная точка множества X. Если сфероид f: $H \to H$ индекса q в точке x_0 обладает тем свойством, что $f(H) \subset X$, то мы будем его называть сфероидом индекса q множества X в точке x_0. Ясно, что сумма двух сфероидов индекса q множества X в точке x_0 снова является сфероидом индекса q множества X в точке x_0.

Для завершения построения бесконечномерных гомотопических групп остается определить понятие гомотопности двух сфероидов индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через R числовую прямую, а через I—отрезок $[0, 1]$. Прямое произведение $H^* = R \times H$ будем рассматривать как гильбертово пространство, считая для двух элементов (t, x), (t', x') пространства $H^* = R \times H$ их скалярное произведение равным $tt' + xx'$. Если обозначить вектор $(1,0) \in H^*$ через e_0, то (при указанном определении скалярного произведения) последовательность $\sigma^* = (e_0, e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ будет ортонормированным базисом пространства H^* (где $\sigma = (e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots)$—тот фиксированный базис, который использовался при рассмотрении сфероидов). По отношению к пространству H^* исходное пространство H является гиперплоскостью (ортогональной вектору e_0). Мы будем рассматривать полосу $(I \times H) \subset H^*$.

Отображение Φ: $I \times H \to H$ мы будем называть гомотопией сфероидов индекса q в точке x_0, если оно, во-первых, принадлежит классу $K_{\sigma^*}^{(q)}$ и, во-вторых, для любого $t \in I$ отображение $\Phi_t : H \to H$, определяемое равенством $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, $x \in H$ является сфероидом индекса q в точке $x_0 \in H$. Если при этом $\Phi_0 = f$ и $\Phi_1 = g$, то мы будем говорить, что гомотопия Φ соединяет сфероиды f и g. Два сфероида f, g индекса q множества X в точке x_0 называются гомотопными между собой в X, если существует такая гомотопия Φ: $I \times H \to H$, индекса q в точке x_0, соединяющая f и g, что $\Phi(I \times H) \subset X$. Гомотопность сфероидов будем отмечать записью $f \sim g$.

Предложение 3. *Пусть X — произвольное множество пространства H и $x_0 \in X$. Отношение гомотопности сфероидов индекса q множества X в точке x_0 (рассматриваются гомотопии во множестве X) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если θ означает постоянный сфероид (т. е. $\theta(H) = x_0$), то $f + \theta \sim f$ для любого сфероида f. Далее, $f + g \sim g + f$ для любых двух сфероидов f, g. Наконец, если сфероиды f и g симметричны относительно гиперплоскости Γ_0, определяемой уравнением $xe_1 = 0$ (т. е. $f(x) = g(y)$) при выполнении условий $x + y \in \Gamma_0$, $x - y \perp \Gamma_0$), то $f + g \sim \theta$.*

Доказательство. Установим последнее утверждение. Пусть сфероиды f и g симметричны. Положим

$$\Phi(t, x)=\begin{cases} f(2x+(1-2t)e_1) & \text{при } xe_1 \leqslant 0, \\ g(2x-(1-2t)e_1) & \text{при } xe_1 \geqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $x \in H$, $t \in I$. Мы получаем по этой формуле отображение $\Phi\colon I \times H \to H$. В силу симметричности сфероидов f и g обе строки определения (4) согласованы при $x \in \Gamma_0$ (т. е. при $xe_1=0$), и потому отображение Φ непрерывно. Далее, определив отображение $\Phi_t\colon H \to H$ формулой $\Phi_t(x)=\Phi(t, x)$, мы легко найдем, что $\Phi_t(H \setminus \Sigma)=x_0$, т. е. Φ_t есть сфероид при любом $t \in I$ (причем из того, что f и g сфероиды индекса q, легко вытекает, так же как и при рассмотрении формулы (3), что $\Phi \in K_0^{(q)}$, $\Phi_t \in K_0^{(q)}$). Остается заметить, что $\Phi_0=f+g$, $\Phi_1=\theta$. Этим гомотопия $f+g \sim \theta$ установлена.

Докажем предпоследнее утверждение предложения 3. С этой целью для любых двух сфероидов f, g положим

$$\Phi(t, x)=\begin{cases} f(2x+e_1\cos\pi t+e_2\sin\pi t) & \text{при } x(e_1\cos\pi t+e_2\sin\pi t) \leqslant 0, \\ g(2x-e_1\cos\pi t-e_2\sin\pi t) & \text{при } x(e_1\cos\pi t+e_2\sin\pi t) \geqslant 0. \end{cases}$$

Как и прежде, это отображение является гомотопией сфероидов. Далее, определив сфероиды $\Phi_t\colon H \to H$ формулой $\Phi_t(x)=\Phi(t, x)$, мы найдем, что сфероид Φ_0 определяется формулой

$$\Phi_0(x)=\begin{cases} f(2x+e_1) & \text{при } xe_1 \leqslant 0, \\ g(2x-e_1) & \text{при } xe_1 \geqslant 0, \end{cases}$$

а сфероид Φ_1—формулой

$$\Phi_1(x)=\begin{cases} f(2x-e_1) & \text{при } xe_1 \geqslant 0, \\ g(2x+e_1) & \text{при } xe_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, $\Phi_0=f+g$, $\Phi_1=g+f$, и потому построенное отображение $\Phi\colon I \times H \to H$ устанавливает гомотопию $f+g \sim g+f$.

Докажем второе утверждение предложения. Пусть f—произвольный сфероид. Положим

$$\Phi(t, x)=f((1+t)x+te_1), \quad t \in I, \ x \in H.$$

Непосредственно проверяется, что это отображение $\Phi\colon I \times H \to H$ устанавливает гомотопность $f \sim f+\theta$ предложения.

Наконец, первое утверждение устанавливается дословно так же как и в случае „конечномерных“ (т. е. обычных) гомотопических групп. Итак, предложение 3 доказано.

В силу предложения 3 все сфероиды индекса q множества X в точке x_0 разбиваются на классы гомотопности. Множество всех этих классов мы обозначим через $\Pi_q^c(X; x_0)$. Введенное выше сложение сфероидов определяет сложение гомотопических классов (по представителям). Относительно определенной таким образом операции сложения множество $\Pi_q^\sigma(X; x_0)$ оказывается коммутативной группой. В самом деле, коммутативность сложения вытекает из предпоследнего утверждения предложения 3. Ассоциативность устанавливается аналогично тому, как это делается в случае „конечномерных“ групп (т. е. построением гомотопии Φ, как это несколько раз мы делали при доказательстве предложения 3). Далее, из второго утверждения предложения 3 вытекает, что гомотопический класс, содержащий сфероид θ, является нулевым элементом (для сложения в множестве $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$). Наконец, если α—произвольный элемент множества $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ и f—произвольный сфероид класса α, то обозначив через g симметричный ему сфероид, а через β—гомотопический класс сфероида g, мы найдем (в силу последнего утверждения предложения 3), что $\alpha+\beta=0$, т. е. β—противоположный элемент для α. Тем самым доказано, что $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ есть (относительно введенной операции сложения) коммутативная группа. Эту группу мы и назовем бесконечномерной гомотопической группой индекса q множества X в точке x_0. Группа $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ определена для любого целого q (положительного, отрицательного или равного нулю). Заметим, что в процессе всего построения группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ базис $\sigma=\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ пространства H предполагался фиксированным. Независимость группы $\Pi_q^\sigma(X, x_0)$ от выбора базиса σ требует специального доказательства, которое мы проведем ниже (при описании второго подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп). Таков первый подход к построению бесконечномерных групп.

Перейдем к описанию второго подхода. Подпространство A гильбертова пространства H будем называть подпространством дефекта q, если ортогональное дополнение к A (в пространстве H) имеет размерность q. Здесь q может быть нулем или любым натуральным числом. Нам, однако, понадобится ввести понятие подпространства дефекта q и в том случае, если q будет отрицательным числом. Именно, если $q=-n$, где n—натуральное число, то A мы будем называть (по отношению к H) подпространством дефекта q, если A является гильбертовым пространством, содержащим H в качестве своего подпространства дефекта $n=-q$.

Дадим теперь определение класса отображений K_q^*, где q—произвольное целое число. При $q=0$ мы определим K_0^* как множество всех отображений f: $H\to H$, принадлежащих классу K_0. Если $q>0$, то под K_q^* мы будем понимать множество всех отображений f: $A\to H$, принадлежащих классу K_0, где $A\subset H$—некоторое подпространство дефекта q. Наконец, при $q<0$ под K_q^* мы будем понимать множество всех отображений f:$A\to H$, принадлежащих в гильбертовом пространстве A классу K_0, где $A\supset H$—некоторое подпространство дефекта q

Пусть A -подпространство гильбертова пространства H, имеющее конечный дефект q (положительный, отрицательный или равный нулю). Пусть, далее, Σ_A—единичный шар подпространства A и x_0—

некоторая точка пространства H. Отображение f: $A \to H$ класса K_q^* мы будем называть сфероидом индекса q в точке x_0, если $f(A \setminus \Sigma_A) = x_0$.

Определим теперь сумму двух сфероидов f, g индекса q, определенных на одном и том же подпространстве A пространства H (имеющем дефект q). С этой целью выберем в A произвольный единичный вектор a и положим

$$h(x) = \begin{cases} f(2x+a) & \text{при} \quad xa \leqslant 0, \ x \in A, \\ g(2x-a) & \text{при} \quad xa \geqslant 0, \ x \in A \end{cases} \tag{5}$$

(ср. (3)). Так же как и при первом подходе к определению бесконечномерных гомотопических групп доказывается, что отображение $h: A \to H$, определенное этой формулой, является сфероидом индекса q в точке x_0. Этот сфероид мы будем называть суммой сфероидов f и g и будем обозначать его через $f+g$. Заметим, что это определение суммы сфероидов предполагает, что фиксировано подпространство A дефекта q (на котором заданы оба сфероида f, g) и, кроме того, фиксирован единичный вектор $a \in A$. Вопрос о независимости наших построений от выбора этих элементов мы рассмотрим ниже.

Определим теперь понятие гомотопности двух сфероидов. Пусть f, $g: A \to H$ — два сфероида индекса q в точке $x_0 \in H$, определенные на одном и том же подпространстве A дефекта q. Обозначим, как и выше, через R числовую прямую, а через I — отрезок $[0,1]$. Прямое произведение $A' = R \times A$ можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого A является подпространством дефекта 1. По отношению к исходному пространству H пространство A' можно рассматривать как подпространство дефекта $q-1$ (для этого в случае $q>0$ следует за R принять любую содержащуюся в H прямую, проходящую через нуль и ортогональную подпространству $A \subset H$). Отображение $\Phi: I \times A \to H$ мы будем называть гомотопией сфероидов, если оно принадлежит классу K_0 (в гильбертовом пространстве $A' \cup H$) и, кроме того, для любого $t \in I$ отображение $\Phi_t: A \to H$, определяемое равенством $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$, $x \in A$ является сфероидом индекса q в точке $x_0 \in H$. Если при этом $\Phi_0 = f$ и $\Phi_1 = g$, то мы будем говорить, что гомотопия Φ соединяет сфероиды f и g. Два сфероида, которые можно соединить гомотопией, называются гомотопными между собой.

Теперь мы можем доказать, что, с точностью до гомотопности, сумма сфероидов не зависит от выбора единичного вектора $a \in A$. В самом деле, пусть f, $g: A \to H$ — два сфероида индекса q в точке x_0, определенные на одном и том же подпространстве A дефекта q. Пусть, далее, a и b — два произвольных единичных вектора подпространства A. Обозначим через φ угол между этими векторами $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$. Далее, через $c \in A$ обозначим такой единичный вектор, лежащий с векторами a и b в одной (двумерной) плоскости, что $a \perp c$

и угол между векторами b и c не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Тогда поворот вектора a на угол φ в направлении от вектора a к c переводит a в вектор b. Положим теперь

$$\Phi(t, x)=\begin{cases} f(2x+a\cos\varphi t+c\sin\varphi t) & \text{при } x(a\cos\varphi t+c\sin\varphi t)\leqslant 0, \\ g(2x-a\cos\varphi t-c\sin\varphi t) & \text{при } x(a\cos\varphi t+c\sin\varphi t)\geqslant 0. \end{cases}$$

Мы получаем непрерывное отображение $\Phi: I\times A\to H$, являющееся гомотопией сфероидов (ср. конец доказательства предложения 3). Определим сфероиды Φ_t: $A\to H$ формулой $\Phi_t(x)=\Phi(t, x)$. Тогда построенная гомотопия Φ соединяет сфероиды Φ_0 и Φ_1, причем как легко видеть, Φ_0 есть сумма $f+g$, вычисленная с использованием вектора $a\in A$, а сфероид Φ_1 есть сумма $f+g$, вычисленная с использованием вектора $b\in A$. Тем самым независимость, с точностью до гомотопности, суммы $f+g$ от выбора вектора $a\in A$ установлена. Если сфероид $f: A\to H$ индекса q в точке x_0 обладает тем свойством, что $f(A)\subset X$, где X — некоторое подмножество пространства H, то мы будем его называть сфероидом индекса q множества X в точке x_0.

Предложение 4. *Пусть X—произвольное множество пространства H и $x_0\in X$. Пусть, далее, A — фиксированное подпространство дефекта q пространства H. Отношение гомотопности сфероидов f: $A\to H$ индекса q множества X в точке x_0 (рассматриваются гомотопии в множестве X, т. е. такие, что $\Phi(I\times A)\subset X$) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если θ означает постоянный сфероид (т. е. $\theta(A)=x_0$), то $f+\theta\sim f$ для любого сфероида f. Далее, $f+g\sim g+f$ для любых сфероидов f, g. Наконец, если сфероиды f и g симметричны относительно гиперплоскости Γ_0 подпространства A, определяемой уравнением $xa=0$, то $f+g\sim\theta$.*

Доказательство полностью повторяет доказательство предложения 3 (с очевидными изменениями), и мы его не приводим.

Наконец, перейдем к определению бесконечномерных гомотопических групп. Пусть X—произвольное подмножество гильбертова пространства H и x_0—фиксированная точка множества X. Пусть далее A—фиксированное подпространство дефекта q пространства H. Согласно предложению 4, отношение гомотопности сфероидов индекса q множества X в точке x_0 рефлексивно, симметрично и транзитивно, благодаря чему все сфероиды индекса q множества X в точке x_0 разбиваются на классы гомотопности. Множество всех этих классов мы обозначим через $\Pi_q^A(X, x_0)$. Введенное выше сложение сфероидов определяет сложение гомотопических классов (по представителям). Относительно определяемой таким образом операции сложения множество $\Pi_q^A(X, x_0)$ оказывается коммутативной группой—это устанавливается на основании предложения 4 так же, как и при первом подходе (на основании предложения 3) построена группа $\Pi_q^c(X, x_0)$.

Группу $\Pi_q^A(X, x_0)$ мы и назовем (при рассматриваемом втором подходе) бесконечномерной гомотопической группой индекса q множества X в точке x_0.

Из сказанного видно, что построение гомотопической группы $\Pi_q^A(X, x_0)$ зависит при таком подходе от одного элемента произвола, а именно, от выбора фиксированного подпространства A индекса q.

Предложение 5. *С точностью до изоморфизма, группа $\Pi_q^A(X, x_0)$ не зависит от выбора подпространства A дефекта q.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2—два подпространства дефекта q пространства H. Тогда существует линейное обратимое отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, принадлежащее классу K_0. В самом деле, если $q \leqslant 0$, то мы построим произвольный ортонормированный базис $\sigma = (e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ пространства H, а затем дополним его векторами $a_1, \cdots, a_{|q|}$ до ортонормированного базиса подпространства A_1—и векторами $b_1, \cdots, b_{|q|}$ до ортонормированного базиса подпространства A_2. Линейное отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, определяемое соотношениями

$$\varphi(e_i) = e_i,\ i = 1, 2, \cdots;\ \varphi(a_j) = b_j,\ j = 1, 2, \cdots, |q|,$$

является в этом случае искомым. Если же $q > 0$, то пересечение $A_1 \cap A_2$ является в H подпространством конечного (положительного) дефекта $q + s$ (где $s > 0$). Выберем в $A_1 \cap A_2$ произвольный ортонормированный базис $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ и дополним его векторами $c_1, \cdots, c_s$ до ортонормированного базиса подпространства A_1—и векторами $d_1, \cdots, d_s$ до ортонормированного базиса подпространства A_2. Линейное отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, определяемое соотношениями

$$\varphi(b_i) = b_i,\ i = 1, 2, \cdots;\ \varphi(c_j) = d_j,\ j = 1, 2, \cdots, s,$$

является искомым в рассматриваемом случае.

Итак, существует линейное обратимое отображение $\varphi: A_1 \to A_2$, принадлежащее классу K_0. Фиксируем такое отображение и условимся два сфероида $f_1: A_1 \to H$, $f_2: A_2 \to H$ считать эквивалентными, если $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Этим устанавливается (в силу обратимости отображения φ) взаимно однозначное соответствие между сфероидами $f_1: A_1 \to H$ и сфероидами $f_2: A_2 \to H$ (индекса q). Непосредственно проверяется, что при переходе к гомотопическим классам это соответствие превращается в изоморфизм бесконечномерных гомотопических групп $\Pi_q^{A_1}(X, x_0)$ и $\Pi_q^{A_2}(X, x_0)$, построенных с помощью подпространства A_1 и A_2. Таким образом, предложение 5 доказано.

Этим и завершается построение бесконечномерных гомотопических групп при втором подходе.

Рассмотрим теперь вопрос о связи первого и второго подходов к построению бесконечномерных гомотопических групп. Мы докажем, что оба рассмотренных подхода равносильны, т. е. приводят к изоморфным между собой группам $\Pi_q(X, x_0)$. В частности, из этих рассмотрений будет вытекать, что группы $\Pi_q^{\sigma}(X, x_0)$, построенные при первом подходе, в действительности, не зависят (с точностью до изоморфизма) от выбора базиса σ. При обсуждении этих вопросов мы будем говорить о сфероидах первого или второго типа (в соответствии с тем, какой подход к построению гомотопических групп рассматривается), о гомотопических группах первого или второго типа и т. д.

Предложение 6. *Оба рассмотренных подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп равносильны, т. е. группа $\Pi_q^A(X, x_0)$, построенная при втором подходе, изоморфна группе $\Pi_q^{\sigma}(X, x_0)$, построенной при первом подходе (при любом выборе базиса σ и подпространства A дефекта q). Отсюда, в частности, следует, что группы $\Pi_q^{\sigma}(X, x_0)$, построенные для различных базисов σ, изоморфны между собой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $q \geqslant 0$. Пусть σ — произвольный ортонормированный базис пространства H. Обозначим через L_q подпространство, натянутое на первые q векторов этого базиса, а через A — ортогональное дополнение (в H) подпространства L_q. Тогда A есть подпространство дефекта q в H.

Докажем, что группы $\Pi_q^{\sigma}(X, x_0)$ и $\Pi_q^A(X, x_0)$ изоморфны (здесь $X \subset H$ — произвольное множество и x_0 — точка множества X). С этой целью мы рассмотрим произвольный сфероид $f: H \to H$ первого типа индекса q множества X в точке x_0 и обозначим через $A(f)$ отображение $A(f) = f \circ S_{\sigma}^q: A \to H$. Так как, по определению сфероидов первого типа, отображение f принадлежит классу $K_{\sigma}^{(q)}$, то, в силу предложения 1, отображение $A(f) = f \circ S_{\sigma}^q$ принадлежит классу K_0 и, следовательно (так как это отображение имеет вид $A \to H$) оно принадлежит классу $K_q^{\cdot}$. Далее, так как отображение S_{σ}^q, очевидно, отображает изометрично единичный шар Σ_A подпространства A на единичный шар Σ пространства H, то

$$A(f)(A \setminus \Sigma_A) = f(S_{\sigma}^q(A \setminus \Sigma_A)) = f(H \setminus \Sigma) = x_0.$$

Таким образом, $A(f)$ есть сфероид второго типа индекса q множества X в точке x_0. Мы получаем таким образом соответствие $f \to A(f)$ между сфероидами первого и второго типов.

Обратно, пусть $g: A \to H$ — произвольный сфероид второго типа индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через $B(g)$ отображение $B(g) = g \circ T_{\sigma}^q: H \to H$. Так как $g \in K_0$, то в силу определения класса $K_{\sigma}^{(q)}$ отображение $B(g) = g \circ T_{\sigma}^q$ принадлежит этому классу. Далее

$$B(g)(H \setminus \Sigma) = g(T_{\sigma}^q(H \setminus \Sigma)) = g(A \setminus \Sigma_A) = x_0.$$

Таким образом, $B(g)$ есть сфероид первого типа индекса q множества X в точке x_0. Мы получаем таким образом соответствие $g \to B(g)$ между сфероидами второго и первого типа.

Непосредственно проверяется (в силу формул (1)), что отображения A и B взаимно обратны, т. е. $A(B(g)) = g$ для любого сфероида g второго типа и $B(A(f)) = f$ для любого сфероида f первого типа. Непосредственно проверяется также, что если за вектор a в определении суммы сфероидов второго типа принять вектор $e_{q+1} \in A$, то будут справедливы соотношения

$$A(f_1 + f_2) = A(f_1) + A(f_2), \quad B(g_1 + g_2) = B(g_1) + B(g_2),$$

где f_1, f_2—произвольные сфероиды первого типа индекса q множества X в точке x_0, а g_1, g_2—сфероиды второго типа (ср. формулы (3) и (5)).

Наконец, отметим, что при отображениях A и B сохраняются гомотопии сфероидов, т. е. если $f_1 \sim f_2$, то $A(f_1) \sim A(f_2)$ и если $g_1 \sim g_2$, то $B(g_1) \sim B(g_2)$. Это также непосредственно вытекает из определения отображений A и B.

Из сформулированных фактов непосредственно следует, что отображения A и B порождают при переходе к гомотопическим классам отображения

$$A^* : \Pi_q^{\sigma}(X, x_0) \to \Pi_q^{A}(X, x_0),$$

$$B^* : \Pi_q^{A}(X, x_0) \to \Pi_q^{\sigma}(X, x_0),$$

которые являются взаимно обратными (т. е. отображения $A^* \circ B^*$ и $B^* \circ A^*$ являются тождественными) и сохраняют операцию сложения. Следовательно, отображения A^* и B^* являются взаимно обратными изоморфизмами групп $\Pi_q^{\sigma}(X, x_0)$ и $\Pi_q^{A}(X, x_0)$. Остается заметить, что в силу предложения 5 группа $\Pi_q^{A}(X, x_0)$ не зависит с точностью до изоморфизма, от выбора подпространства A дефекта q. Таким образом, при $q \geqslant 0$ предложение 6 доказано.

В случае $q < 0$ рассуждения аналогичны, и мы лишь кратко наметим их. Пусть A—подпространство дефекта $q < 0$. Выберем и фиксируем векторы $a_1, \cdots, a_{-q}$, дополняющие базис $\sigma = \{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ пространства H до ортонормированного базиса $\sigma^* = \{a_1, \cdots, a_{-q}, e_1, \cdots \cdots, e_n, \cdots\}$ подпространства A. Пусть теперь $f: H \to H$—произвольный сфероид первого типа индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через $A(f)$ отображение $A(f) = f \circ T_{\sigma^*}^{-q}: A \to H$. Тогда $A(f)$ есть сфероид второго типа. Далее, пусть $g: A \to H$—произвольный сфероид второго типа индекса q множества X в точке x_0. Обозначим через $B(g)$ отображение $B(g) = g \circ S_{\sigma^*}^{-q} : H \to H$. Тогда $B(g)$ есть сфероид первого типа. Эти отображения A и B и порождают (как и при $q \geqslant 0$) взаимно обратные изоморфизмы

$$A^* : \Pi_q^{(\sigma)}(X, x_0) \to \Pi_q^A(X, x_0); \quad B^* : \Pi_q^A(X, x_0) \to \Pi_q^{(\sigma)}(X, x_0).$$

Таким образом, предложение 6 полностью доказано.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 27.IV.1973

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի կառուցումը (*ամփոփում*)

Հոդվածում կառուցվում են իրական սեպարաբել Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափանի բացարձակ հոմոտոպիկ խմբերը։

Բերվում է այդ խմբերի կառուցման երկու եղանակ և ապացուցվում նրանց համարժեքությունը։

Բոլոր կառուցումների հիմքում ընկած է Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից կառուցված անընդհատ արտապատկերումների K_0 *դասը։*

E. A. MIRSAKCHANIAN. *The construction of infinite-dimensional homotopic groups for subsets of Hilbert space* (summary)

The construction in the heading is carried out for real separabel Hilbert spaces. Two ways for constructing the groups are proposed and their equivalence is shown. Boltjanski's class K_0 of continuous mappings is utilized.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений гильбертова пространства, ДАН Арм.ССР, 51, № 3, 1970, 129—131.
2. *Э. А. Мирзаханян*. Бесконечномерные гомотопические группы, ДАН Арм.ССР, 43, № 1, 1966, 3—5.
3. *Э. А. Мирзаханян*. Два подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп, ДАН Арм.ССР, 51, № 5, 1970, 257—260.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

Б. Г. АРАРКЦЯН

ПОВЕДЕНИЕ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена поведению при $t \to \infty$ решений некоторых нестационарных краевых задач.

Основные результаты этой работы были анонсированы в заметке [1].

§ 1. Абстрактные почти-периодические и асимптотические почти-периодические функции

Пусть B—некоторое банахово пространство. Через J_a обозначим полупрямую $(a < t < +\infty)$, при некотором $a > -\infty$, $J_{-\infty} \equiv J$.

Пусть $x = f(t)$ — непрерывная функция из J со значениями в B. Непрерывность понимается в сильном смысле, а именно, $\|f(t+\tau) - f(t)\|_B \underset{\tau \to 0}{\to} 0$. Далее обозначим через $C(J_a; B)$ банахово пространство непрерывных функций $f(t)$: $J_a \to B$ с нормой

$$\|f(t)\|_{C(J_a;\,B)} = \sup_{t \in J_a} \|f(t)\|_B.$$

Определение 1. Функция $f(t) \in C(J; B)$ называется почти-периодической (п.-п.) в B, если множество $\{f(t+h)\}$ компактно в $C(J; B)$, $h \in J$.

Это определение является обобщением классического определения Бохнера на абстрактные функции. Подробно абстрактные п.-п. функции изучены в [2].

Определение 2. Функция $f(t) \in C(J_a; B)$ называется почти-периодической на J_a, если она является сужением на J_a некоторой п.-п. функции $F(t) \in C(J; B)$.

Определение 3. Функция $f(t) \in C(J_a; B)$ называется асимптотически почти-периодической (а.п.-п.) в B, если

$$f(t) = p(t) + q(t),$$

где $p(t)$ — п.-п. функция на J_a, а $\lim\limits_{t \to \infty} \|q(t)\|_B = 0$. А.п.-п. функция в случае $B = R^1$ были введены и изучены М. Фреше в [3].

Теорема 1. Для того чтобы $f(t) \in C(J_a; B)$ являлась а.п.-п. функцией в B необходимо и достаточно, чтобы любая числовая последовательность $\{h_k\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} h_k = +\infty$ содержала подпоследовательность $\{h_{k_l}\}$, для которой $\{f(t+h_{k_l})\}$ сходится в $C(J_a; B)$.

В [3] эта теорема доказана для $B = R^1$. Доказательство в случае произвольного банахова пространства проводится без изменений.

Определение 4. Множество $E \subseteq J_a$ называется относительно плотным в J_a, если существует некоторое число $l > 0$ такое, что в любом интервале длины l, принадлежащем J_a, содержится по крайней мере одна точка из E.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(t) \in C(J_a; B)$ была а.п.-п., необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ соответствовали два числа $l > 0$ и $c \geqslant a$, таких, что в произвольном интервале длины l из J_a содержалось число τ, для которого

$$\|f(t+\tau) - f(t)\|_B \leqslant \varepsilon \text{ для } t \in J_c.$$

Доказательство этой теоремы также можно найти в [3]. В дальнейшем нам понадобится следующий критерий асимптотической почти-периодичности.

Теорема 3. *Для того чтобы функция* $f(t) \in C(J_a; B)$ *являлась а.п.-п. функцией в* B, *необходимо и достаточно, чтобы существовала относительно плотная в* J_a *последовательность* $\{h_k\}$, $\lim_{k\to\infty} h_k = +\infty$ *такая, что множество* $\{f(t+h_k)\}$ *компактно в* $C(J_a; B)$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.

Докажем достаточность.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно; так как множество $\{f(t+h_k)\}$ компактно в $C(J_a; B)$, то в этом множестве существует конечная ε-сеть. Это означает, что существуют n чисел $h_{1,0}, h_{2,0}, \cdots, h_{n,0} \in \{h_k\}$, такие что для любого k

$$f(t+h_k) \in \bigcup_{i=1}^{n} S(f(t+h_{i,0}), \varepsilon).$$

Здесь $S(x, \varepsilon)$ означает открытый шар в пространстве $C(J_a; B)$ радиуса ε с центром в точке x. Это, в свою очередь, означает, что любому $k=1, 2, \cdots$, соответствует некоторое $i=1, 2, \cdots, n$, такое что

$$\sup_{t \in J_a} \|f(t+h_k) - f(t+h_{i,0})\|_B \leqslant \varepsilon.$$

Разобьем последовательность $\{f(t+h_k)\}$ на n подпоследовательностей $\{f(t+h_{i,p})\}$ следующим образом:

$$f(t+h_{i,p}) \in S(f(t+h_{i,0}), \varepsilon), \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Тогда имеем

$$\sup_{t \in J_a} \|f(t+h_{i,p}) - f(t+h_{i,0})\|_B \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $m_0 = \max_{1 < i < n} \{h_{i,0}\}$. Тогда для $c > a + m_0$ имеет место

$$\sup_{t \in J_c} \|f(t+h_{i,p} - h_{i,0}) - f(t)\|_B \leqslant \varepsilon,$$

т. е. числа $\tau_{i,p}=h_{i,p}-h_{i,0}$ для любого i и p являются асимптотически ε-почти-периодами для функции $f(t)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\tau_{i,p}\}$ относительно плотно в J_a. По условию существует некоторое $d>0$ такое, что произвольный интервал длины d, принадлежащий J_a, содержит некоторое h_k.

Положим $m_1=\min\limits_{1<i<n}\{h_{i,0}\}$, $l=m_0-m_1+d$. Очевидно, что $l>0$. Рассмотрим произвольный интервал длины l, принадлежащий J_a.

В интервале $[b-m_1,\ b-m_1+d]$, если $b-m_1>a$, содержится по крайней мере одно число вида h_{i_1,p_1} из последовательности $\{h_k\}$. Тогда, в силу выбора чисел m_0 и m_1

$$b\leqslant h_{i_1,p_1}-h_{i_1,0}\leqslant b-m_1+m_0+d.$$

Теперь теорема 3 следует из теоремы 2.

§ 2. Постановки задач и основные результаты

Пусть H_1 и H_2 — два комплексных гильбертовых пространства, причем $H_1\subseteq H_2$ и оператор вложения H_1 в H_2 вполне непрерывен.

Обозначим через M банахово пространство линейных ограниченных операторов A, действующих из H_1 в H_2, с обычной нормой

$$\|A\|_M=\sup_{\|x\|_{H_1}=1}\|Ax\|_{H_1}.$$

Обозначим через $D(J_a;\ H_1)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в J_a функций $\varphi(t)$, таких что

$$\varphi(t)\in C(J_a;\ H_1),\ \varphi'(t)\in C(J_a;\ H_2).$$

Рассмотрим уравнение

$$\int\limits_{J_a}\{(u(t),\ \varphi'(t))_{H_2}+(A(t)\,u(t)+f(t),\ \varphi(t))_{H_1}\}\,dt=0, \tag{1}$$

где $A(t)\in C(J_a;\ M)$ и $f(t)\in C(J_a;\ H_1)$ при некотором $a>-\infty$.

Определение 5. Функция $u(t)\in C(J_a;\ H_1)$ называется решением уравнения (1), если (1) имеет место для всех $\varphi(t)\in D(J_a;\ H_1)$. Мы будем предполагать, что $A(t)=-A_1(t)+iA_2(t)$, где $A_1(t)$, $A_2(t)$ — самосопряженные операторы, причем $A_1(t)$ — положительно определенный, т. е.

$$(A_1(t)\,x,\ x)_{H_1}\geqslant\gamma\,\|x\|^2_{H_1}\ \text{для всех}\ x\in H_1,\ \gamma>0. \tag{2}$$

При этих предположениях вопросы существования и единственности решения уравнения (1) рассматривались, например, в [4].

Пусть теперь $A(t)=B(t)+C(t)$ и $f(t)=h(t)+g(t)$, где $B(t)$ и $h(t)$ — периодические функции, соответственно, в M и H_1 с соизмеримыми периодами T_1 и T_2. Не ограничивая общности, можно полагать $T_1=T_2=1$.

Нас интересует поведение решения $u(t)$ уравнения (1) при $t \to \infty$ в зависимости от поведения при $t \to \infty$ функций $C(t)$ и $g(t)$.

А именно, справедливы

Теорема 4. *Если*

$$\|C(t)\|_M \in L_1(a, \infty),\ \|g(t)\|_{H_1} \in L_1(a, \infty), \tag{3}$$

то ограниченное в H_1 *решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *является а.п.-п. функцией в* H_2.

Пусть функции $A(t)$ и $f(t)$ являются асимптотически периодическими, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \|C(t)\|_M = 0,\ \lim_{t\to\infty} \|g(t)\|_{H_1} = 0,$$

Теорема 5. *Равномерно непрерывное и ограниченное в* H_1 *решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *является а.п.-п. функцией в* H_1, *если выполнены условия* (3) *теоремы* 4, *а функции* $A(t)$ *и* $f(t)$ *являются асимптотически периодическими.*

Замечание. В приложениях важную роль играет случай $A_1 \geqslant 0$. В этом случае теоремы 4, 5 остаются справедливыми, если существует и ограничен A^{-1}. При выполнении условия (2) A^{-1} существует и ограничен. Прежде чем перейти к доказательству теорем 4, 5 приведем примеры краевых задач для уравнений с частными производными, которые приводятся к уравнению вида (1).

Пример 1. Уравнение Шредингера. Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с границей Γ; $G_\tau = J_\tau \times \times \Omega$, $\Sigma = J_\tau \times \Gamma$. Рассмотрим в G_τ смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = iLu + F(t, x),$$

$$u(0, x) = \varphi(x),\ u|\Sigma = 0,$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a_0(t, x)\, u.$$

Предполагается, что L — равномерно эллиптический оператор, т. е.

$$\gamma_1 \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant (Lu, u)_{L_2(\Omega)} \leqslant \gamma \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \quad (\gamma_1 > 0).$$

В качестве пространств H_1 и H_2 берутся, соответственно, пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, причем

$$(A(t)\, u, \varphi)_{H_1} = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + a_0(t, x)\, u\, \bar{\varphi} \right\} d\Omega.$$

Тогда, если обычным образом определить обобщенное решение, то получим уравнение вида (1) с $A_1 = 0$, решение которого должно удовлетворять начальному условию $u(0, x) = \varphi(x)$.

§ 3. Доказательство теорем 4, 5

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если* $A_1 \geqslant 0$, $u(t)$ — *решение уравнения* (1), *то* $\|u(t)\|^2_{H_2}$ — *абсолютно непрерывная функция, причем справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H_2} \leqslant 2\,\mathrm{Re}\,(f(t),\ u(t))_{H_1}. \tag{4}$$

Доказательство. Положим в (1) $\varphi(t) = h(t)\,v$, где $h(t) \in D(J_a;\ R^1)$ (т. е. $h(t)$—обычная бесконечно дифференцируемая финитная в J_a функция), $v \in H_1$ произвольно. Тогда из (1) получим

$$\int_{J_a}(u(t),\ v)_{H_2}\,h'(t)\,dt = -\int_{J_a}(A(t)\,u(t) + f(t),\ v)_{H_1}\,h(t)\,dt$$

для произвольной $h(t) \in D(J_a;\ R^1)$. Отсюда следует, что $(u(t),\ v)_{H_2}$— абсолютно непрерывна (см., например, [5]) и

$$\frac{d}{dt}(u(t),\ v)_{H_2} = (A(t)\,u(t) + f(t),\ v)_{H_1}. \tag{5}$$

Проинтегрируем (5) от t до $t+\sigma$ ($t,\ t+\sigma \in J_a$), получим

$$\left(\frac{u(t+\sigma) - u(t)}{\sigma},\ v\right)_{H_2} = \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma}(A(\tau)\,u(\tau) + f(\tau),\ v)_{H_1}\,d\tau =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma}[A(\tau)\,u(\tau) + f(\tau)]\,d\tau,\ v\right)_{H_1}. \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$u_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma}u(\tau)\,d\tau,$$

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma}f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma}(A(\tau) - A(t))\,u(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Тогда $u_\sigma \underset{\sigma\to 0}{\to} u$ и $f_\sigma \underset{\sigma\to 0}{\to} f$ в слабом смысле в пространстве H_1, функция $u_\sigma(t)$ имеет в H_2 непрерывную производную, причем

$$u_\sigma'(t) = \frac{u(t+\sigma) - u(t)}{\sigma}.$$

Так как (6) имеет место для всех $v \in H_1$, в частности для $u_\rho(t)$, то используя обозначения (7), имеем

$$(u'_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_2} = (A(t)\, u_\sigma(t) + f_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_1}. \tag{8}$$

Аналогично

$$(u'_\rho(t),\ u_\sigma(t))_{H_2} = (u_\sigma(t),\ A(t)\, u_\rho(t) + f_\rho(t))_{H_1}. \tag{9}$$

Из (8) и (9), используя (2), самосопряженность A_1 и A_2, получим

$$\frac{d}{dt}(u_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_2} \leqslant (f_\sigma,\ u_\rho)_{H_1} + (u_\sigma,\ f_\rho)_{H_1}. \tag{10}$$

Проинтегрировав (10) от t_0 до t, получим

$$(u_\sigma(t),\ u_\rho(t))_{H_2} - (u_\sigma(t_0),\ u_\rho(t_0))_{H_2} \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \{(f_\sigma(\tau),\ u_\rho(\tau))_{H_1} + (u_\sigma,\ f_\rho)_{H_1}\}\, d\tau. \tag{11}$$

Тогда (4) следует из (11), если устремить σ и ρ последовательно к нулю.

Доказательство теоремы 4. Запишем уравнение (1) в виде

$$\int\limits_{J_a} \{(u(t),\ \varphi'(t))_{H_2} + (B(t)\, u(t) + h(t),\ \varphi(t))_{H_1} +$$
$$+ (C(t)\, u(t) + g(t),\ \varphi(t))_{H_1}\}\, dt = 0.$$

Пусть m и n—произвольные целые числа $(m > n)$. Тогда функция $w(t) = u(t+m) - u(t+n)$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_{J_c} \{(w(t),\ \varphi'(t))_{H_2} + (B(t)\, w(t),\ \varphi(t))_{H_1} +$$
$$+ (F(t),\ \varphi(t))_{H_1}\}\, dt = 0,$$

где

$$F(t) = B(t+m)\, u(t+m) - B(t+n)\, u(t+n) + g(t+m) - g(t+n)$$

При получении этого соотношения мы воспользовались линейностью уравнения (1) и периодичностью функций $B(t)$ и $h(t)$.

Из (4) имеем

$$\|w(t)\|^2_{H_2} \leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t} (F(\tau),\ w(\tau))_{H_1}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2\int\limits_{t_0} |(F(\tau),\ w(\tau))_{H_1}|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2\int\limits_{t_0} \|F(\tau)\|_{H_1} \|w(\tau)\|_{H_1}\, d\tau = \tag{12}$$

$$= \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2\int_{t_0}^{t} \|B(\tau+m)\,u(\tau+m) - B(\tau+n)\,u(\tau+n) +$$

$$+ \alpha(\tau+m) - \alpha(\tau+n)\|_{H_1} \|w(\tau)\|_{H_1}\,d\tau.$$

По условию теоремы $\|w(t)\|_{H_1} \leqslant C$. Тогда из (12) следует

$$\|w(t)\|^2_{H_2} \leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + 2C\Big[\int_{t_0}^{t} \|B(\tau+m)\,u(\tau+m)\|_{H_1}\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \|B(\tau+n)\,u(\tau+n)\|_{H_1}\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \|\alpha(\tau+m)\|_{H_1}\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \|\alpha(\tau+n)\|_{H_1}\,d\tau. \tag{13}$$

Но

$$\|B(t+m)\,u(t+m)\|_{H_1} \leqslant \|B(t+m)\|_M \|u(t+m)\|_{H_1},$$

$$\|B(t+n)\,u(t+n)\|_{H_1} \leqslant \|B(t+n)\|_M \|u(t+n)\|_{H_1}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) получим окончательно

$$\|w(t)\|^2_{H_2} \leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + C\int_{t_0}^{t} \{\|B(\tau+m)\|_M +$$

$$+ \|B(\tau+n)\|_M + \|\alpha(\tau+m)\|_{H_1} + \|\alpha(\tau+n)\|_{H_1}\}\,d\tau \leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant \|w(t_0)\|^2_{H_2} + C\int_{t_0+n}^{\infty} \{\|B(\tau)\|_M + \|\alpha(\tau)\|_{H_1}\}\,d\tau.$$

Так как $\|B(t)\|_M$ и $\|\alpha(t)\|_{H_1} \in L_1(a, \infty)$, то слагаемые, стоящие в скобках в правой части (15), можно сделать меньше произвольного $\varepsilon > 0$ за счет выбора n.

С другой стороны, из полной непрерывности оператора вложения H_1 в H_2 и ограниченности $u(t)$ в H_1, следует, что множество значений $u(t)$ компактно в H_2. Поэтому из последовательности натуральных чисел $\{N\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{N_k\}$, такую что при $p,\ q > N_0$

$$\|u(N_p) - u(N_q)\|_{H_2} < \varepsilon,$$

а, следовательно, и

$$\|u(a+N_p) - u(a+N_q)\|_{H_2} \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Из (15) и (16) вытекает, что множество $\{u(t+N)\}$ компактно в $C(J_a;\ H_2)$, что и доказывает теорему, так как множество натуральных чисел относительно плотно в J.

Доказательство теоремы 5. Для произвольных $v_1,\ v_2 \in H_1$ имеет место

$$|(v_1, v_2)_{H_2}| \leqslant \|v_1\|_{H_2} \|v_2\|_{H_2} \leqslant \gamma \|v_1\|_{H_1} \|v_2\|_{H_2},$$

где γ—норма оператора вложения пространства H_1 в H_2.

Тогда по теореме Рисса

$$(v_1, v_2)_{H_2} = (Pv_1, v_2)_{H_1}, \tag{17}$$

где P — некоторый ограниченный оператор из H_2 в H_1. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(u(t), v)_{H_2} = (u(t_0), v)_{H_2} + \left(\int_{t_0}^{t} [A(\tau) u(\tau) + f(\tau) d\tau, v \right)_{H_1}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) имеем

$$Pu(t) = Pu(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) u(\tau) + f(\tau)] d\tau.$$

С другой стороны, так как $u(\tau)$—а.п.-п. функция в H_2 из оценки

$$\|Pu(t+\tau) - Pu(t)\|_{H_1} \leqslant \|P\| \|u(t+\tau) - u(t)\|_{H_2}$$

следует, что функция $Pu(t)$ является а.п.-п. функцией в H_1. Из (18) следует, что и функция

$$\int_{t_0}^{t} [A(\tau) u(\tau) + f(\tau)] d\tau$$

является а.п.-п. функцией в H_1. Функция $A(t) u(t) + f(t)$ является равномерно непрерывной. По теореме Фреше о производной а.п.-п. функции [3] вытекает, что и функция $A(t) u(t) + f(t)$ является а.п.-п., следовательно и функция $z(t) = A(t) u(t)$ есть а.п.-п. функция в H_1. Так как $A = -A_1 + iA_2$, где A_1 — положительно определенный самосопряженный оператор, то существует $A^{-1}(t)$ и

$$\|A^{-1}(t)\|_M \leqslant K.$$

Для завершения доказательства достаточно установить, что оператор $A^{-1}(t)$ является а.п.-п. в M. Это следует из теоремы 1 и оценки

$$\|A^{-1}(t+h_p) - A^{-1}(t+h_q)\|_M =$$

$$= \|A^{-1}(t+h_p) [A(t+h_p) - A(t+h_q)] A^{-1}(t+h_q)\|_M <$$

$$< K^2 \|A(t+h_p) - A(t+h_q)\|_M,$$

справедливой для любой последовательности $\{h_k\}$. Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.II.1973

Բ. Գ. ԱՐԱՐՔՑՅԱՆ. Որոշ օպերատորային հավասարումների լուծումների վարքը երբ $t \to \infty$ *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում են Հիլբերտյան տարածության մեջ որոշ օպերատորային հավասարումների ասիմպտոտորեն համարյա պարբերական լուծումները։ Դիտարկված խնդիրների դասի մեջ մասնավորապես մտնում է առաջին եզրային խնդիրը Շրեդինգերի հավասարման համար։

B. G. ARARKTZIAN. *Asymptotic behaviour of the solutions of some operator equations* (summary)

Asymptotically almost-periodic solutions of some operator equations in Hilbert space particularly, the first boundary problem for Shröedienger equation, are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Г. Араркцян.* Об асимптотической почти-периодичности решений некоторых нестационарных уравнений, ДАН СССР, 205, № 3, 1972, 511—512.
2. *L. Amerio, G. Prouse.* Almost periodic functions and functional equations, New York, 1971.
3. *M. Fréchet.* Les fonctions asymptotiement presque—periodiques, Revue Scientifique, 79, 1941.
4. *М. И. Вишик.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения, Мат. сб., 39 (81), № 1, 1956.
5. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. 5, Изд. физ.-мат. литературы, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

НОВЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Первоначальные исследования в теории расширений топологических пространств велись в основном теоретико-функциональными или родственными методами [1—3].

В работе [4] П. С. Александров дал новый метод построения расширений топологических пространств, известный под названием метода центрированных систем открытых множеств, и применил его, в частности, к новому построению максимального бикомпактного, или стоун-чеховского, расширения βX вполне регулярного пространства X. Этот метод, будучи весьма плодотворным и универсальным, впоследствии широко применялся многими математиками (см., например, [5—8]). В последнее время в теории расширений топологических пространств В. И. Зайцев [9, 10] успешно применяет также метод проекционных спектров.

В настоящей работе приводится подробное изложение предложенного автором нового подхода в теории расширений топологических пространств, основанного на построении категории так называемых псевдотопологических пространств. Часть результатов настоящей статьи опубликована без доказательств в заметке [11].

В § 1 приведены некоторые используемые в статье сведения о псевдотопологических пространствах.

В § 2 каждому топологическому пространству (X, V) приписывается некоторое семейство псевдотопологических пространств и устанавливается связь между этим семейством и семейством всех расширений пространства (X, V), в которых гомеоморфный образ пространства (X, V) представляет собой плотное открытое подпространство.

§ 3 посвящен описанию некоторых классов расширений топологических пространств.

§ 1. Предварительные определения и обозначения

В этом параграфе приведем некоторые, используемые в статье, сведения о псевдотопологических пространствах [12].

Определение 1. Назовем псевдотопологией (п. т.) пару $(U, >)$, состоящую из непустого множества U и отношения частичного упорядочения $>$ на U, которая удовлетворяет следующим условиям:

(a) $u_1, u_2 \in U$, $u_1 > u_2$ и $u_2 > u_1 \Rightarrow u_1 = u_2$,

(b) $\forall u \in U$ $u > u$, т. е. отношение $>$ рефлексивно,

(c) U обладает наибольшим и наименьшим элементами,

(d) U — полное.

Наименьший элемент п. т. $(U, >)$ будем обозначать через θ_U и в дальнейшем (когда это не может вызвать недоразумения) мы будем опускать символ $>$ и обозначать п. т. через U.

Определение 2. Псевдообъединением элементов $u_\alpha \in U$ для всех α, принадлежащих произвольному индексному множеству A, назовем $\sup \{u_\alpha;\ \alpha \in A\}$ и обозначим символом $\dot{\bigcup}_{\alpha\in A} u_\alpha$ или $\dot{\bigcup} \{u_\alpha;\ \alpha \in A\}$.

Аналогично, псевдопересечением элементов $u_j \in U$ для всех j, принадлежащих любому конечному множеству индексов J, назовем $\inf \{u_j;\ j \in J\}$ и обозначим символом $\dot{\bigcap}_{j\in J} u_j$ или $\dot{\bigcap} \{u_j;\ j \in J\}$.

Ясно, что любая топология с отношением обратного включения $\supset$, представляет собой п. т.

Пусть f—отображение (не обязательно однозначное) множества U в множество V. Для любого подмножества U' множества U положим

$$f(U') = \cup \{f(u);\ u \in U'\},$$

где $f(u)$—множество всех образов элемента u. В классе многозначных отображений, очевидно, каждое отображение $f\colon U \to V$ имеет единственное обратное $f^{-1}\colon f(U) \to U$, где $\forall v \in f(U)$, $u \in f^{-1}(v)$ тогда и только тогда, когда $v \in f(u)$.

Определение 3. Отображение $f\colon U \to V$ назовем морфизмом п. т. U в п. т. V, если выполнены следующие условия:

(M_1) $\theta_V \in f(\theta_U)$,

(M_2) $v_j \in f(u_j)$ $\forall j$ из произвольного конечного индексного множества

$$J \Rightarrow \dot{\bigcap}_{j\in J} v_j \in f\Big(\dot{\bigcap}_{j\in J} u_j\Big),$$

(M_3) $v_\alpha \in f(u_\alpha)$ $\forall \alpha$ из произвольного множества индексов

$$A \Rightarrow \dot{\bigcup}_{\alpha\in A} v_\alpha \in f(\dot{\bigcup} u_\alpha).$$

Морфизм $f\colon U \to V$ назовем сильным тогда и только тогда, когда из $\theta_V \in f(u)$ следует, что $u = \theta_U$.

Предложение 1. *Пусть f—морфизм п. т. U на п. т. V, тогда обратное к нему отображение f^{-1} является морфизмом п. т. V на п. т. U.*

Доказательство непосредственно следует из определения морфизма. В самом деле, так как по (M_1) $\theta_V \in f(\theta_U)$, то $\theta_U \in f^{-1}(\theta_V)$, т. е. f^{-1} удовлетворяет условию (M_1). Пусть $u_j \in f^{-1}(v_j)$ $\forall j$ из конечного множества J, тогда $v_j \in f(u_j)$ и в силу (M_2) $\dot{\bigcap}_{j\in J} v_j \in f\ (\dot{\bigcap}_{j\in J} u_j)$, следовательно $\dot{\bigcap}_{j\in J} u_j \in f^{-1}(\dot{\bigcap}_{j\in J} v_j)$, т. е. f^{-1} удовлетворяет условию (M_2). Аналогично проверяется, что f^{-1} удовлетворяет и условию (M_3).

Легко доказать также следующее

Предложение 2. *Композиция $\psi = g \circ f$ морфизмов $f: U \to V$ и $g: V \to W$ является морфизмом п. т. U в п. т. W. При этом, если f и g — сильные морфизмы, то ψ—сильный морфизм.*

В самом деле, так как $\Theta_W \in g(\Theta_V)$ и $\Theta_V \in f(\Theta_U)$, то $\Theta_W \in \psi(\Theta_U)$. Пусть $w_j \in \psi(u_j)$ $\forall j \in J$, где J—конечное множество, тогда существует $v_j \in f(u_j)$ такое, что $w_j \in g(v_j)$ и так как f и g удовлетворяют условию (M_2), то $\dot{\bigcap\limits_{j\in J}} w_j \in \psi(\dot{\bigcap\limits_{j\in J}} u_j)$. Аналогично проверяется, что ψ удовлетворяет и условию (M_3).

Пусть $\Theta_W \in \psi(u)$, тогда существует $v \in f(u)$ такое, что $\Theta_W \in g(v)$, отсюда в случае, когда f и g—сильные морфизмы, следует $v = \Theta_V$ и, следовательно, $u = \Theta_U$, т. е. ψ — сильный морфизм.

Определение 4. Две п. т. U и V назовем изоморфными, если существует биективный морфизм п. т. U на п. т. V.

Заметим, что каждый гомеоморфизм h одного топологического пространства (Y, U) на другое (X, V) естественным образом порождает изоморфизм $h_*: U \to V$, где $\forall u \in U$ $h_*(u) = h(u)$.

Определение 5. Непустое подмножество p п. т. Φ назовем фильтром п. т. Φ, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(F_1) $\Theta_\Phi \overline{\in} p$,

(F_2) $\varphi_1, \varphi_2 \in p \Rightarrow \varphi_1 \dot{\cap} \varphi_2 \in p$,

(F_3) $\varphi \in p$, $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_1 > \varphi \Rightarrow \varphi_1 \in p$.

Определение 6. Псевдотопологическим пространством (п.т.п.) назовем пару $\{P, \Phi\}$, состоящую из п.т. Φ и из некоторого непустого семейства P фильтров этой п.т.

Если семейство P фильтров п.т. Φ обладает тем свойством, что $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$ существует $p \in P$ такой, что только один из φ_1, φ_2 принадлежит p, то будем говорить, что P различает элементы Φ.

Учитывая предложение 2, легко проверить, что п.т. образуют категорию, если определить Mor (U, V), как множество морфизмов п.т. U в п.т. V. П.т.п. также образуют категорию (см. [12]).

П.т.п. $\{P, \Phi\}$ назовем бикомпактным, если для каждого подсемейства $\Phi' \subset \Phi$, обладающего тем свойством, что $\forall p \in P$ существует $\varphi' \in \Phi'$ такое, что $\varphi' \in p$, существует конечное подсемейство $\Phi'' \subset \Phi'$ с таким же свойством.

Будем говорить, что п.т.п. $\{P, \Phi\}$ удовлетворяет T_1 аксиоме отделимости, если для любых двух различных элементов p_1 и p_2 из P существуют $\varphi_1 \in p_1$ и $\varphi_2 \in p_2$ такие, что $\varphi_1 \overline{\in} p_2$ и $\varphi_2 \overline{\in} p_1$.

П.т.п. $\{P, \Phi\}$ назовем хаусдорфовым, если для любых двух различных элементов p_1 и p_2 из P существуют φ_1 и φ_2 из Φ такие, что $\varphi_1 \in p_1$, $\varphi_2 \in p_2$ и $\varphi_1 \dot{\cap} \varphi_2 = \Theta_\Phi$.

Пусть $\{P, \Phi\}$—п.т.п. Для каждого $\varphi \in \Phi$ обозначим через s_φ подмножество $\{p;\ p \in P,\ \varphi \in p\}$ множества P, и пусть $\hat{S}$ — семейство всех s_φ, когда φ пробегает все Φ. Рассмотрим отображение $l: \Phi \to \hat{S}$, которое каждому $\varphi \in \Phi$ сопоставляет $l(\varphi) = s_\varphi$. Нетрудно проверить следующие свойства этого отображения:

$$l\left(\dot{\bigcap_{j \in J}} \varphi_j\right) = \bigcap_{j \in J} l(\varphi_j) \tag{1}$$

и

$$l\left(\dot{\bigcup_{\alpha \in A}} \varphi_\alpha\right) \supset \bigcup_{\alpha \in A} l(\varphi_\alpha), \tag{2}$$

где J — конечное, а A — произвольное индексные множества.

В самом деле, пусть $\varphi = \dot{\bigcap\limits_{j \in J}} \varphi_j$ и $p \in l(\varphi)$, тогда $\varphi \in p$ и в силу (F_3) $\varphi_j \in p$, т. е. $\forall j \in J$ $p \in l(\varphi_j)$, следовательно $p \in \bigcap\limits_{j \in J} l(\varphi_j)$.

Обратно, пусть $p \in \bigcap\limits_{j \in J} l(\varphi_j)$, тогда $p \in l(\varphi_j)$ $\forall j \in J$, следовательно $\varphi_j \in p$ и в силу (F_3) $\varphi \in p$, т. е. $p \in l(\varphi)$.

Пусть теперь $p \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} l(\varphi_\alpha)$, тогда $p \in l(\varphi_{\alpha_0})$ для некоторого $\alpha_0 \in A$, т. е. $\varphi_{\alpha_0} \in p$ и в силу (F_3) $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in A}} \varphi_\alpha \in p$, значит $p \in l\left(\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in A}} \varphi_\alpha\right)$.

Из (1) следует, что $\overset{*}{S}$ — база некоторой топологии S на множестве P.

Таким образом, определено отображение F множества всех п.т.п. в множество топологических пространств, которое каждому п.т.п. $\{P, \Phi\}$ сопоставляет вышеописанным способом вполне определенное топологическое пространство $(P, S) = F\{P, \Phi\}$.

§ 2. Связь псевдотопологических пространств с расширениями топологических пространств

Расширением топологического пространства (X, V) называется пара $[(Z, W); \beta]$, где β—гомеоморфизм пространства (X, V) на плотное истинное подпространство пространства (Z, W).

В тех случаях, когда гомеоморфизм β является канонической инъекцией множества X в множество Z, соответствующее расширение будем обозначать просто через (Z, W).

В можестве всех расширений данного пространства вводится отношение $>$ частичного упорядочения следующим образом: $[(Z_1, W_1); \beta_1] > [(Z_2, W_2); \beta_2]$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение H пространства (Z_1, W_1) на пространство (Z_2, W_2) такое, что $\beta_2 = H \circ \beta_1$. Если в качестве H можно взять гомеоморфизм, то указанные расширения называются топологически эквивалентными.

Обозначим через $M(V)$ семейство всех сильных морфизмов, каждый из которых переводит некоторую топологию U на топологию V. Всюду в дальнейшем предполагается, что $X \cap Y = \varnothing$, где $Y = \bigcup\{u;\ u \in U\}$ (в противном случае следует рассматривать различные экземпляры одного и того же множества).

Два морфизма $f_1: U_1 \to V$ и $f_2: U_2 \to V$ из $M(V)$ будем считать эквивалентными тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм h пространства (Y_1, U_1) на пространство (Y_2, U_2) такой, что $f_1 = f_2 \circ h_*$, где Y_i — пространство топологии U_i $(i=1, 2)$.

Пусть $[(Z, W); \beta]$—некоторое расширение пространства (X, V), и (Y, U) — подпространство пространства (Z, W), где $Y = Z \setminus \beta(X)$. Легко проверить, что отображение $J_U^W: W \to U$, где $\forall w \in W$ $J_U^W(w) = w \cap Y \in U$, является однозначным морфизмом топологии W на топологию U. В силу предложения 1 обратное к нему отображение $(J_U^W)^{-1}$, которое будем обозначать через J_W^U, является морфизмом топологии U на топологию W. Так как $\forall u \in U$ и $\forall w \in J_W^U(u)$ имеем $u \subset w$, то из $w = \varnothing$ следует, что $u = \varnothing$, и стало быть, J_W^U — сильный морфизм. Пусть W индуцирует на $X' = \beta(X)$ топологию V'. Учитывая, что (X', V') — плотное подпространство пространства (Z, W), легко проверить, что $J_{V'}^W$— сильный морфизм топологии W на топологию V'. В силу предложения 2 $f' = J_{V'}^W \circ J_W^U$ является сильным морфизмом топологии U на V', и так как изоморфизм п. т. всегда является сильным морфизмом, то $f = \beta_*^{-1} \circ f'$ — сильный морфизм топологии U на топологию V, т. е. $f \in M(V)$. Таким образом, каждому расширению пространства (X, V) указанным способом сопоставляется определенный морфизм из $M(V)$, т. е. имеем отображение

$$\mu: R(V) \to M(V)$$

множества $R(V)$ всех расширений пространства (X, V) в множество $M(V)$.

Теорема 1. *Отображение $\mu: R(V) \to M(V)$ сюръективно, а с точностью до эквивалентности расширений и морфизмов оно является биекцией.*

Доказательство. Пусть $f: U \to V$ — морфизм из $M(V)$, Y — пространство топологии U и W_1 — семейство всех подмножеств множества $Z_1 = X \cup Y$, имеющих вид: $w = u \cup v$, где $u \in U$, а $v \in f(u)$. Исходя из свойств морфизмов и учитывая, что $Y \cap X = \varnothing$, легко проверить, что W_1 является топологией на Z_1. В самом деле, из (M_1) вытекает, что $\varnothing \in W_1$, из (M_2) следует, что пересечение конечного числа элементов из W_1 принадлежит W_1, а из (M_3) следует, что объединение любого семейства элементов из W_1 принадлежит W_1. Так как $X \in V$ и f — сюръективное отображение, то существует $u \in U$ такое, что $X \in f(u)$. Пусть $v \in f(Y)$, тогда в силу (M_3), $X \in f(Y)$, следовательно $Z_1 \in W_1$. Из построения топологии W_1 непосредственно следует, что она на X индуцирует топологию V, а на Y—топологию U. Покажем, что (X, V) — плотное подпространство пространства (Z_1, W_1). В самом деле, пусть $w \in W_1$ и $w \cap X = v$, тогда $w = u \cup v$, где $u \in U$, а $v \in f(u)$, и так как f— сильный морфизм, то из $v = \varnothing$ следует, что $u = \varnothing$, т. е. $w = \varnothing$. Таким образом, каждый морфизм $f \in M(V)$ указанным выше способом порождает определенное расширение (Z_1, W_1) пространства (X, V), следовательно имеем отображение

$$\mu_{-1}: M(V) \to R(V).$$

Легко убедиться, что композиция $\mu \circ \mu_{-1}$ является тождественным отображением множества $M(V)$, следовательно μ—сюръективное отображение.

Покажем, что композиция $\mu_{-1} \circ \mu$ переводит каждое расширение пространства (X, V) в эквивалентное ему расширение. В самом деле, пусть $\xi = [(Z, W); \beta] \in R(V)$, $\mu(\xi) = f: U \to V$, $\mu_{-1}(f) = (Z_1, W_1)$ и $H: Z_1 \to Z$—отображение, которое тождественно на множестве Y, а на X совпадает с β. Учитывая равенство $f' = \beta_* \circ f$ и то, что $w \in W$ тогда и только тогда, когда $w = u \cup v'$, где $u \in U$ и $v' \in f'(u)$, легко проверить, что H—гомеоморфизм пространства (Z_1, W_1) на пространство (Z, W), осуществляющий эквивалентность расширений ξ и (Z_1, W_1).

Пусть $\xi_1 = [(Z_1, W_1); \beta_1]$ и $\xi_2 = [(Z_2, W_2); \beta_2]$— эквивалентные расширения пространства (X, V), $Y_i = Z_i \setminus \beta_i(X)$, (Y_i, U_i)— подпространство пространства $(Z_i, W_i)(i = 1, 2)$, H — гомеоморфизм пространства (Z_1, W_1) на (Z_2, W_2), осуществляющий эквивалентность расширений ξ_1, ξ_2 и h—сужение H на Y_1. Тогда, очевидно, что h— гомеоморфизм пространства (Y_1, U_1) на пространство (Y_2, U_2). Исходя из определения μ нетрудно проверить, что если $\mu(\xi_i) = f_i: U_i \to V$ $(i = 1, 2)$, то $f_1 = f_2 \circ h_*$, т. е. μ эквивалентные расширения переводит в эквивалентные морфизмы.

Обратно, пусть $f_1: U_1 \to V$ и $f_2: U_2 \to V$—эквивалентные морфизмы из $M(V)$, Y_i — пространство топологии $U_i (i = 1, 2)$ и h — гомеоморфизм пространства (Y_1, U_1) на (Y_2, U_2) такой, что $f_1 = f_2 \circ h_*$. Легко видеть, что если $\mu_{-1}(f_i) = (Z_i, W_i)$ $(i, =1, 2)$, то отображение $H: Z_1 \to Z_2$, которое тождественно на X и совпадает с h на Y_1, является гомеоморфизмом (Z_1, W_1) на (Z_2, W_2), т. е. эквивалентные морфизмы μ_{-1} переводит в эквивалентные расширения. Отсюда, учитывая также, что композиция $\mu_{-1} \circ \mu$ каждое расширение переводит в эквивалентное ему расширение, заключаем, что неэквивалентные расширения μ переводит в неэквивалентные морфизмы. Теорема доказана.

Пусть (X_0, V_0)—открытое подпространство пространства (X, V). Скажем, что расширение $[(Z, W); \beta]$ сохраняет V_0 тогда и только тогда, когда X_0—наибольшее открытое множество пространства (X, V), для которого $\beta(X_0)$ открыто в (Z, W). Очевидно V_0 — наибольшее подсемейство топологии V такое, что $\forall v \in V_0$ $\beta_*(v) \in W$.

Пусть $R_V(V_0)$—множество всех расширений пространства (X, V), которые сохраняют V_0, а $M_V(V_0)$ — подмножество множества $M(V)$ такое, что $f \in M_V(V_0)$ тогда и только тогда, когда $f(\varnothing) = V_0$. В случае, когда V_0 совпадает с V, $R_V(V)$ будем обозначать через R_V, а $M_V(V)$ через M_V.

Теорема 1′. *Отображение μ переводит $R_V(V_0)$ на $M_V(V_0)$ и с точностью до эквивалентности расширений и морфизмов является биекцией между ними.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что достаточно доказать первую часть теоремы. Пусть $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V(V_0)$ и $\mu(\xi) = f = \beta_*^{-1} \circ f'$. Из определения морфизма $f' = J_V^W \circ J_W^U$ непосредственно следует, что $\beta_*(V_0) = f'(\varnothing)$, следовательно, $f(\varnothing) = V_0$. Обратно, пусть $f \in M_V(V_0)$ и $\mu_{-1}(f) = (Z_1, W_1)$. Имеем $w \in W_1$ тогда и только тогда, когда $w = u \cup v$, где $u \in U$ и $v \in f(u)$, следовательно, $v = w \in W_1$ в том и только в том случае, когда $u = \varnothing$. Таким образом, расширение $\mu_{-1}(f)$ сохраняет $f(\varnothing) = V_0$, т.е. μ_{-1} переводит $M_V(V_0)$ в $R_V(V_0)$ и теорема доказана.

Обозначим через Φ_V семейство подмножеств множества V, состоящее из всех открытых фильтров* пространства (X, V) и из V. В множестве Φ_V введем отношение частичного упорядочения $>$ следующим образом: $\varphi_1 > \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \subset \varphi_2$. Легко проверить, что Φ_V с указанным отношением образует п. т., наименьшим элементом которой служит V, а псевдообъединение элементов из Φ_V совпадает с пересечением этих же элементов как подмножеств из V.

Подмножество Φ множества Φ_V назовем полуподтопологией п.т. Φ_V, если Φ с тем же отношением $>$ образует п.т. такую, что ее наименьший элемент θ_Φ совпадает с наименьшим элементом п.т. Φ_V и псевдообъединение элементов в Φ совпадает с псевдообъединением тех же элементов в Φ_V.

Таким образом, полуподтопология п. т. Φ_V — это любое семейство открытых фильтров пространства (X, V), замкнутое относительно операции пересечения, дополненное одним элементом — множеством V.

Обозначим через K_V семейство всех п.т.п. $\{\dot{P}, \Phi\}$, где Φ — полуподтопология п. т. Φ_V, а P различает элементы Φ.

Пусть $f: U \to V$ — некоторый элемент из M_V и Φ — семейство всех $f(u)$, когда u пробегает все U, тогда f порождает однозначное отображение

$$\hat{f}: U \to \Phi,$$

где $\forall u \in U$ $\hat{f}(u) = f(u)$.

Предложение 3. *Множество Φ является полуподтопологией п.т. Φ_V.*

Доказательство. Так как $f \in M_V$, то $\hat{f}(\varnothing) = V \in \Phi_V$. Исходя из свойств сильных морфизмов, легко проверить, что если $u \in U$ и $u \neq \varnothing$, то $\hat{f}(u)$ — открытый фильтр пространства (X, V). В самом деле, так как из $\varnothing \in f(u)$ следует $u = \varnothing$, то $\varnothing \bar{\in} \hat{f}(u)$. Из (M_2) вытекает, что если $v_j \in \hat{f}(u)$ $\forall j \in J$, где J — конечное множество, то $\cap \{v_j;\ j \in J\} \in \hat{f}(u)$.

* Фильтры топологии V мы называем также открытыми фильтрами пространства (X, V).

Пусть $v\in\hat f(u)$, $v_1\in V$ и $v\subset v_1$, тогда учитывая, что $v_1\in\hat f(\varnothing)$, из (M_3) получаем $v_1\in\hat f(u)$. Таким образом, $\forall u\neq\varnothing$ $\hat f(u)$ — открытый фильтр пространства (X, V), следовательно, Φ — подмножество п.т. Φ_V. Покажем, что $\hat f$ — возрастающее отображение. Пусть $u_1\supset u_2\neq\varnothing$ и $v_1\in\varphi_1=\hat f(u_1)$, тогда $\forall v_2^*\in\varphi_2=\hat f(u_2)$ согласно (M_3) имеем $v_2=v_1\cap\cap v_2^*\in\varphi_2$. Так как $v_2\subset v_1\in V$ и φ_2 — открытый фильтр пространства (X, V), то $v_1\in\varphi_2$, т. е. $\varphi_1\subset\varphi_2$ или, что то же самое, $\varphi_1>\varphi_2$. Далее, для произвольного семейства $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из U справедливо равенство

$$\hat f(\bigcup_{\alpha\in A}u_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}\hat f(u_\alpha). \tag{3}$$

В самом деле, пусть $u=\bigcup_{\alpha\in A}u_\alpha$, $\varphi=\hat f(u)$ и $\varphi_\alpha=\hat f(u_\alpha)$, тогда так как $\hat f$ — возрастающее отображение $\forall\alpha\in A$ $\varphi>\varphi_\alpha$, следовательно $\varphi\subset\subset\bigcap_{\alpha\in A}\varphi_\alpha$. Обратно, если $v\in\bigcap_{\alpha\in A}\varphi_\alpha$, то $\forall\alpha\in A$ $v\in\varphi_\alpha$, и в силу (M_3) $v\in\varphi$, т. е. равенство (3) верно. Из этого равенства следует, что Φ замкнуто относительно операции пересечения, и так как $\hat f(\varnothing)=V\in\Phi$, то Φ — полуподтопология п.т. Φ_V.

Пусть U_y — система всех открытых окрестностей точки y в пространстве (Y, U), где Y — пространство топологии U. Обозначим, для краткости, $\hat f(U_y)$ через p_y, и пусть P — множество всех p_y, когда y пробегает все Y. Итак, имеем однозначное отображение

$$h_f: Y\to P,$$

где $\forall y\in Y$ $h_f(y)=p_y\in P$.

Предложение 4. *Каждый элемент p множества P представляет собой фильтр п.т.* Φ, *и P различает элементы* Φ.

Доказательство. Мы видели, что если $u\in U$ и $u\neq\varnothing$, то $\hat f(u)\neq\hat f(\varnothing)=\theta_\Phi$, следовательно $\theta_\Phi\,\bar\in\,p$ $\forall p\in P$, т. е. p удовлетворяет условию (F_1). Пусть $\varphi\in p=h_f(y)$, $\varphi_1\in\Phi$ и $\varphi_1>\varphi$, т. е. $\varphi_1\subset\varphi$, тогда существуют $u\in U_y$ и $u_1\in U$ такие, что $\hat f(u)=\varphi$ и $\hat f(u_1)=\varphi_1$, и поскольку $u\cup u_1\in U_y$, то $\hat f(u\cup u_1)\in p$. С другой стороны, в силу (3) $\hat f(u\cup a_1)=\varphi\cap\varphi_1=\varphi_1$, т. е. $\varphi_1\in p$, следовательно p удовлетворяет условию (F_3).

Пусть $\varphi_j\in p$ $\forall j$ из конечного множества J, тогда существует $u_j\in U_y$ такое, что $\varphi_j=\hat f(u_j)$. Пусть $u=\bigcap\{u_j;\ j\in J\}$, тогда $\varphi=\hat f(u)\in p$, и так как $\hat f$ — возрастающее, то $\varphi_j>\varphi$ $\forall j\in J$, следовательно $\varphi^*=\dot\bigcap\{\varphi_j;\ j\in J\}>\varphi$, и так как p удовлетворяет условию (F_3), то $\varphi^*\in p$, т. е. p — фильтр п.т. Φ. Покажем теперь, что P различает элементы Φ. Пусть $u_\varphi=\bigcup\{u;\ \hat f(u)=\varphi\}$ и $\hat U$ — множество всех u_φ, когда φ пробегает все Φ. В силу равенства (3) имеем $\hat{f}(u_\varphi)=\varphi$ и так как $\hat{f}$ — однозначное отображение, то легко видеть, что сужение $\hat{f}$ на $\hat{U}$ (которое снова обозначим через $\hat{f}$) — биекция между $\hat{U}$ и Φ. Пусть φ_1 и φ_2 — различные элементы из Φ, тогда $u_{\varphi_1} \neq u_{\varphi_2}$, т. е. существует точка y_0, принадлежащая только одному из них. Обозначим $\hat{U}_y = U_y \cap \hat{U}$ и заметим, что $\forall y \in Y\ \hat{f}(\hat{U}_y) = \hat{f}(U_y)$, и так как только одно из u_{φ_1} и u_{φ_2} принадлежит $\hat{U}_{y_0}$, а $\hat{f}$ — биекция на $\hat{U}$, то $p_0 = h_f(y_0)$ содержит только одно из φ_1 и φ_2, т. е. P различает элементы Φ.

Согласно предложению 3 и 4, пара $\{P, \Phi\}$, порожденная морфизмом $f \in M_V$, является п.т.п., принадлежащим K_V. Следовательно, имеем отображение

$$\nu : M_V \to K_V,$$

которое каждому $f: U \to V$ из M_V сопоставляет $\nu(f) = \{P, \Phi\}$, где $\Phi = \hat{f}(U)$, а $P = h_f(Y)$.

Легко показать, что эквивалентные морфизмы из M_V ν переводит в один и тот же элемент, однако простые примеры показывают, что образы неэквивалентных элементов из M_V при отображении ν могут совпадать. Ясно, что аналогичными свойствами будет обладать и отображение

$$T = \nu \circ \mu : R_V \to K_V.$$

Пусть R_V^* — множество всех классов эквивалентных между собой расширений из R_V, тогда T порождает, вообще говоря, неинъективное отображение

$$T^* : R_V^* \to K_V,$$

которое каждому $\xi^* \in R_V^*$ сопоставляет $T^*(\xi^*) = T(\xi)$, где ξ — произвольный представитель из класса ξ^*.

Пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$ и $F\{P, \Phi\} = (P, S)$, тогда, как было показано в § 1, семейство $\hat{S}$ подмножеств вида $s_\varphi = \{p;\ p \in P,\ \varphi \in p\}$ образует базу топологии S. Множество $\hat{S}$ частично упорядочим отношением обратного включения. Пусть $l: \Phi \to \hat{S}$ — отображение, определенное следующим образом: $\forall \varphi \in \Phi\ l(\varphi) = s_\varphi$.

Предложение 5. *Отображение l является биекцией, причем как l, так и l^{-1} возрастающие.*

Доказательство. Так как по определению K_V, P различает элементы Φ, то для любых различных φ_1 и φ_2 из Φ существует точка $p \in P$, принадлежащая только одному из множеств s_{φ_1} и s_{φ_2}, следовательно $l(\varphi_1) \neq l(\varphi_2)$. Пусть $\varphi_1 > \varphi_2$, т. е. $\varphi_1 \subset \varphi_2$ и $p \in l(\varphi_2)$, тогда $\varphi_2 \in p$ и в силу (F_3) $\varphi_1 \in p$, следовательно $p \in l(\varphi_1)$, и, стало быть, $l(\varphi_1) > l(\varphi_2)$. Обратно, пусть $s_1 \supset s_2$ и $l^{-1}(s_i) = \varphi_i$ $(i=1, 2)$, тогда согласно (1) $l(\varphi_1 \dot{\cap} \varphi_2) = s_2$ и так как l — биекция, то $\varphi_2 = \varphi_1 \dot{\cap} \varphi_2$, следовательно $\varphi_1 > \varphi_2$.

Следствие 1. *Для любого семейства* $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из $\hat{S}$ если $s = \cup\{s_\alpha;\ \alpha \in A\} \in \hat{S}$, то

$$l^{-1}(s) = \dot{\cup}\ \{l^{-1}(s_\alpha);\ \alpha \in A\}.$$

Следствие 2. Если подсемейства $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{s_\beta\}_{\beta \in B}$ семейства $\hat{S}$ такие, что

$$\cup\ \{s_\alpha;\ \alpha \in A\} = \cup\ \{s_\beta;\ \beta \in B\} = s,$$

то

$$\dot{\cup}\ \{l^{-1}(s_\alpha);\ \alpha \in A\} = \dot{\cup}\ \{l^{-1}(s_\beta);\ \beta \in B\}. \tag{4}$$

В самом деле, пусть $s_{\alpha\beta} = s_\alpha \cap s_\beta$, тогда имеем

$s = \cup\{s_{\alpha\beta};\ \alpha \in A,\ \beta \in B\}$, $s_\alpha = \cup\{s_{\alpha\beta};\ \beta \in B\}$ и $s_\beta = \cup\{s_{\alpha\beta};\ \alpha \in A\}$.

Согласно следствию 1, так как $\forall \alpha \in A$ и $\forall \beta \in B$ $s_{\alpha\beta} \in \hat{S}$, имеем

$$l^{-1}(s_\alpha) = \dot{\cup}\ \{l^{-1}(s_{\alpha\beta});\ \beta \in B\},$$

$$l^{-1}(s_\beta) = \dot{\cup}\ \{l^{-1}(s_{\alpha\beta});\ \alpha \in A\},$$

откуда легко следует равенство (4).

Именно следствия 1 и 2 предложения 5 и позволяют распространить отображение l^{-1} из $\hat{S}$ на все S. В самом деле, пусть $s \in S$ и $s = \cup\{s_\alpha;\ \alpha \in A\}$, где $s_\alpha \in \hat{S}$. Положим

$$\hat{f}_{-1}(s) = \dot{\cup}\ \{l^{-1}(s_\alpha);\ \alpha \in A\}.$$

В силу следствия 2 $\hat{f}_{-1}$ является отображением S на Φ, а в силу следствия 1 сужение $\hat{f}_{-1}$ на $\hat{S}$ совпадает с l^{-1}. Из самого определения $\hat{f}_{-1}$ следует, что если $s_1 \supset s_2$, то $\hat{f}_{-1}(s_1) > \hat{f}_{-1}(s_2)$, т. е. $\hat{f}_{-1}$—возрастающее отображение.

Покажем, что для любого конечного множества J справедливо неравенство

$$\dot{\bigcap_{j \in J}} \hat{f}_{-1}(s_j) > \hat{f}_{-1}(\bigcap_{j \in J} s_j). \tag{5}$$

В самом деле, пусть $s_j = \cup\{s_{\alpha_j};\ \alpha_j \in A_j\}$, где $s_{\alpha_j} \in \hat{S}$ и пусть $\hat{f}_{-1}(s_{\alpha_j}) = \varphi_{\alpha_j}$, тогда $l(\varphi_{\alpha_j}) = s_{\alpha_j}$ и в силу (2) имеем

$$s_j \subset l(\dot{\bigcup_{\alpha_j \in A_j}} \varphi_{\alpha_j}) = \hat{s}_j \in \hat{S},$$

и так как $\hat{f}_{-1}$—возрастающее, то

$$\hat{f}_{-1}(\bigcap_{j\in J} s_j) > \hat{f}_{-1}(\bigcap_{j\in J} s_j).$$

Согласно (1), так как $\hat{f}_{-1}$ на $\hat{S}$ совпадает с l^{-1}, имеем

$$\dot{\bigcap_{j\in J}} \hat{f}_{-1}(\hat{s}_j) = \hat{f}_{-1}(\bigcap_{j\in J} \hat{s}_j),$$

поэтому остается учесть, что $\hat{f}_{-1}(\hat{s}_j) = \hat{f}_{-1}(s_j)\ \forall j \in J$.

Пусть $f_{-1}: S \to V$ определено следующим образом: $\forall s \in S\ f_{-1}(s) = \hat{f}_{-1}(s) \subset V$. Покажем, что $f_{-1} \in M_V$, т. е. f_{-1} — сильный морфизм топологии S на топологию V и $f_{-1}(\varnothing) = V$.

В самом деле, так как $\hat{f}_{-1}$ на $\hat{S}$ совпадает с l^{-1} и при $\varphi = \theta_\Phi$ $s_\varphi = \varnothing$, то $f_{-1}(\varnothing) = \theta_\Phi = V$. Поскольку, очевидно, f_{-1} удовлетворяет условию (M_1), то перейдем к проверке выполнения условий (M_2) и (M_3). Пусть $v_j \in f_{-1}(s_j)\forall_j$ из конечного множества J, тогда, так как $\hat{f}_{-1}(s_i) \subset \dot{\bigcap_{j\in J}} \hat{f}_{-1}(s_j)$ для каждого i из J, то $\bigcap_{j\in J} v_j \in \dot{\bigcap_{j\in J}} \hat{f}_{-1}(s_j)$ и в силу (5) $\bigcap_{j\in J} v_j \in f_{-1}(\bigcap_{j\in J} s_j)$, т. е. f_{-1} удовлетворяет условию (M_2). Пусть $s_\alpha \in S\ \forall_\alpha$ из произвольного индексного множества A и $v_\alpha \in f_{-1}(s_\alpha)$, тогда в силу (F_3) $\forall \beta \in A\ v = \bigcup_{\alpha\in A} v_\alpha \in f_{-1}(s_\beta)$, следовательно $v \in \bigcap_{\alpha\in A} f_{-1}(s_\alpha)$. Так как в Φ псевдообъединение элементов совпадает с их пересечением, то

$$\bigcap_{\alpha\in A} f_{-1}(s_\alpha) = \dot{\bigcup_{\alpha\in A}} \hat{f}_{-1}(s_\alpha) = \hat{f}_{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} s_\alpha),$$

следовательно $v \in f_{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} s_\alpha)$, т. е. f_{-1} удовлетворяет условию (M_3), и остается показать, что f_{-1} — сильный морфизм. Пусть $s \in S$ и $s \neq \varnothing$, тогда существует $s_\varphi \in \hat{S}$ такое, что $s_\varphi \neq \varnothing$ и $s_\varphi \subset s$. Так как l — биекция, то $l^{-1}(s_\varphi) = \varphi \neq \theta_\Phi$, следовательно φ — открытый фильтр пространства (X, V), и так как $\hat{f}_{-1}$ — возрастающее, то $\theta_V = \varnothing \overline{\in} f_{-1}(s)$, т. е. f_{-1} — сильный морфизм.

Таким образом, каждому $\{P, \Phi\} \in K_V$ указанным выше способом сопоставляется определенный элемент $f_{-1}: S \to V$ из M_V, т. е. имеем отображение

$$\nu_{-1}: K_V \to M_V.$$

Нетрудно убедиться, что $\nu \circ \nu_{-1}$ — тождественное отображение множества K_V.

В самом деле, пусть $\nu_{-1}\{P, \Phi\} = f_{-1}: S \to V$, тогда по построению $\hat{f}_{-1}(S) = \Phi$. Кроме того, так как $\hat{S}$ — база топологии S, то $\hat{S}_p = \{s_\varphi;\ \varphi \in p\}$ — базис системы окрестностей точки p в пространстве (P, S). Пусть S_p — система всех открытых окрестностей точки p в пространстве (P, S), тогда, так как $\hat{f}_{-1}$ возрастающее и $\hat{f}_{-1}(\hat{S}_p) = p$, то в силу (F_3) $\hat{f}_{-1}(s) \in p$ $\forall s \in S_p$, т. е. $\hat{f}_{-1}(S_p) = p$, следовательно $h_{f_{-1}}(P) = P$ и $\nu(\hat{f}_{-1}) = \{P, \Phi\}$.

Следствие. Отображение ν сюръективно.

Рассмотрим теперь отображения

$$T_{-1} = \mu_{-1} \circ \nu_{-1} : K_V \to R_V$$

и

$$T^*_{-1} = \rho \circ T_{-1} : K_V \to R^*_V,$$

где $\rho : R_V \to R^*_V$ — каноническая проекция. Из докаяанных свойств отображений μ, μ_{-1}, ν, ν_{-1} следует, что отображения $T \circ T_{-1}$ и $T^* \circ T^*_{-1}$ совпадают с тождественным отображением множества K_V, следовательно T и T^*—сюръективные отображения.

Предложение 6. *Для любого расширения* $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$ *существует непрерывное отображение* H *пространства* (Z, W) *на пространство* $(Z_1, W_1) = T_{-1} \circ T(\xi)$ *такое, что* $H \circ \beta$ — *тождественное отображение.*

Доказательство. Пусть $\mu(\xi) = f : U \to V$, $\nu(f) = \{P, \Phi\}$ и $F\{P, \Phi\} = (P, S)$, тогда очевидно h_f является сюръективным отображением пространства (Y, U) на пространство (P, S). Покажем, что $\forall s_\varphi \in \hat{S}\, h_f^{-1}(s_\varphi) = u_\varphi \in \hat{U}$, (напомним, что $u_\varphi = \bigcup \{u;\ u \in U,\ f(u) = \varphi\}$, а $\hat{U}$ — семейство всех u_φ, когда φ пробегает все Φ).

Пусть $p \in s_\varphi$ и $y \in h_f^{-1}(p)$, тогда $\varphi \in p$ и, поскольку $p = \hat{f}(U_y)$, где U_y — система всех открытых окрестностей точки y в пространстве (Y, U), то существует $u \in U_y$ такое, что $\hat{f}(u) = \varphi$, и так как $u \subset u_\varphi$, то $y \in u_\varphi$. Обратно, пусть $y \in u_\varphi$, тогда $u_\varphi \in U_y$, следовательно $\hat{f}(u_\varphi) = \varphi \in \in h_f(y) = p$, т. е. $p \in s_\varphi$. Рассмотрим теперь отображение H множества $Z = \beta(X) \cup Y$ на множество $Z_1 = X \cup P$, совпадающее на Y с h_f, а на $\beta(X)$ с β^{-1}. Очевидно, что $H \circ \beta$ — тождественное отображение. Пусть $\nu_{-1}\{P, \Phi\} = f_{-1} : S \to V$, тогда $w \in W_1$ равносильно тому, что $w = s \cup v$, где $s \in S$ и $v \in f_{-1}(s)$. Пусть $\hat{W}_1$—подсемейство топологии W_1, состоящее из всех $\hat{w} \in W_1$, имеющих вид $\hat{w} = s_\varphi \cup v$, где $s_\varphi \in \hat{S}$ и $v \in f_{-1}(s_\varphi) = \varphi$. Легко убедиться, что $\hat{W}_1$ — база топологии W_1. В самом деле, пусть $w \in W_1$, тогда $w = s \cup v$, где $s \in S$ и $v \in \hat{f}_{-1}(s)$, и так как $\hat{S}$ — база топологии S, то $w = \bigcup_{\alpha \in A} (s_\alpha \cup v)$, где $s_\alpha \in \hat{S}$. Поскольку $\hat{f}_{-1}$ — возрастающее, то из $s \supset s_\alpha$ следует, что $\hat{f}_{-1}(s) \subset \hat{f}_{-1}(s_\alpha)$ $\forall \alpha \in A$, следовательно $v \in \hat{f}_{-1}(s_\alpha) = \varphi_\alpha$, т. е. $\forall \alpha \in A$ $s_\alpha \cup v \in \hat{W}_1$.

Замечание. Если ξ такое расширение из R_V, что $\hat{U}$ образует базу топологии U, то аналогично убеждаемся, что подсемейство

$\hat{W}$ топологии W, состоящее из всех $\hat{w} \in W$, имеющих вид $\hat{w} = u_\varphi \cup v'$, где $u_\varphi \in \hat{U}$ и $v' \in f'(u_\varphi)$, или $\beta^{-1}(v') \in f(u_\varphi) = \varphi$, образует базу топологии W.

Пусть $\hat{w} \in \hat{W}_1$, тогда $\hat{w} = s_\varphi \cup v$, где $s_\varphi \in \hat{S}$ и $v \in f_{-1}(s_\varphi) = \varphi$, следовательно $H^{-1}(\hat{w}) = h_f^{-1}(s_\varphi) \cup \beta(v) = u_\varphi \cup \beta(v)$. Но если $v \in \varphi$, то $\beta(v) \in \in \beta_*(\varphi) = f'(u_\varphi)$, где $f' = J_{V'}^{W} \circ J_{W'}^{U}$, т. е. $u_\varphi \cup \beta(v) \in W$, следовательно H—непрерывное отображение.

Следствие 1. Если расширение $\xi \in R_V$ такое, что соответствующее ему семейство $\hat{U}$ образует базу топологии U, то, согласно сделанному замечанию, отображение H к тому же и открыто, следовательно $(Z_1, W_1) = T_{-1} \circ T(\xi)$ гомеоморфно фактор пространству пространства (Z, W).

Следствие 2. Если соответствующее расширению $\xi \in R_V$ отображение h_f инъективно, и семейство $\hat{U}$ образует базу топологии U, то отображение H — гомеоморфизм, и так как $H \circ \beta$—тождественное отображение, то расширение $T_{-1} \circ T(\xi)$ эквивалентно расширению ξ.

Предложение 7. *Пусть* $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$ — *полурегулярное расширение пространства* (X, V) *и* $T_{-1} \circ T(\xi) = (Z_1, W_1)$, *тогда существует непрерывное и открытое отображение* H *пространства* (Z, W) *на пространство* (Z_1, W_1) *такое, что* $H \circ \beta$ — *тождественное отображение.*

Доказательство. В силу следствия 1 предложения 6, достаточно показать, что семейство $\hat{U}$ образует базу топологии U. Пусть w — канонически открытое множество пространства (Z, W) и пусть $w \cap \beta(X) = v'$, $w \cap Y = u$, тогда $v' \in f'(u)$ и так как $f = \beta^{-1} \circ f'$, то $v = = \beta^{-1}(v') \in f(u)$. Пусть далее $f(u) = \varphi$, тогда $v \in f(u_\varphi) = \varphi$, следовательно $v' \in f'(u_\varphi)$, т. е. $w_\varphi = u_\varphi \cup v' \in W$. Так как $\beta(X)$ плотно в (Z, W), то $\overline{v'} = \overline{w} = \overline{w_\varphi}$ (замыкания производятся в пространстве (Z, W)), поэтому $w_\varphi \subset w$, т. е. $u_\varphi \subset u$ и поскольку $u \subset u_\varphi$, то $u = u_\varphi \in \in \hat{U}$. Таким образом, следы на Y канонически открытых множеств пространства (Z, W) принадлежат $\hat{U}$, и так как эти следы образуют базис в пространстве (Y, U), то $\hat{U}$—базис топологии U. Таким образом, если $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$—полурегулярное расширение пространства (X, V), то расширение $T_{-1} \circ T(\xi)$ гомеоморфно фактор пространству пространства (Z, W).

Теорема 2. *Для любого хаусдорфова полурегулярного расширения* $\xi \in R_V$ *пространства* (X, V) *расширение* $T_{-1} \circ T(\xi)$ *эквивалентно расширению* ξ.

Доказательство. В силу предложения 7 и следствия 2 предложения 6 достаточно показать, что для хаусдорфова расширения $\xi = [(Z, W); \beta] \in R_V$ соответствующее отображение h_f инъективно.

Пусть $\mu(\xi)=f: U\to V$, $h_f: Y\to P$ (напомним, что $\forall y\in Y\ h_f(y)=\hat{f}(U_y)=p\in P$). Заметим, что если $p^*=\cup\{\varphi;\ \varphi\in p\}$, то $\beta_*(p^*)$ является следом на $X'=\beta(X)$ системы W_y всех открытых окрестностей точки y в пространстве (Z, W). Пусть $y_1, y_2\in Y\subset Z$ и $y_1\neq y_2$, тогда, так как (Z, W)—хаусдорфово пространство, то $p_1^*\neq p_2^*$, следовательно $h_f(y_1)\neq h_f(y_2)$, т. е. h_f— инъективное отображение.

Следствие. Сужение отображения T^* на множество всех классов эквивалентных между собой хаусдорфовых полурегулярных расширений является инъективным отображением, причем композиция $T^*_{-1}\circ T^*$ — тождественное отображение.

§ 3. Некоторые классы расширений топологических пространств

Пусть σ_V — семейство всех открытых множеств пространства (X, V), дополнения которых бикомпактны.

Теорема 3. *Для любого бикомпактного расширения $\xi\in R_V$ пространства (X, V) $T(\xi)=\{P, \Phi\}$ является бикомпактным п.т.п. таким, что наибольший элемент $\hat{\varphi}$ п.т. Φ содержится в σ_V.*

Обратно, если $\{P, \Phi\}$—бикомпактное п.т.п. из K_V такое, что $\hat{\varphi}\subset\sigma_V$, то $T_{-1}\{P, \Phi\}$ является бикомпактным расширением пространства (X, V).

Доказательство. Пусть $\xi=[(Z, W);\ \beta]\in R_V$— бикомпактное расширение пространства (X, V), $T(\xi)=\{P, \Phi\}$ и Φ' — произвольное подмножество множества Φ, обладающее тем свойством, что $\forall p\in P$ $\exists\varphi\in\Phi'$ такое, что $\varphi\in p$. Нетрудно проверить, что $U'=\hat{f}^{-1}(\Phi')$ — открытое покрытие подпространства (Y, U) пространства (Z, W), где $Y=Z\setminus\beta(X)$ и $\mu(\xi)=f: U\to V$. В самом деле, пусть $y\in Y$, $h_f(y)=p$ и $\varphi\in\Phi'$ такое, что $\varphi\in p$, тогда существует $u\in U_y$ такое, что $\hat{f}(u)=\varphi$, т. е. U'— открытое покрытие пространства (Y, U). Поскольку расширение ξ сохраняет V и следовательно Y замкнуто в бикомпактном пространстве (Z, W), то U' содержит конечное подпокрытие U''. Пусть $\hat{f}(U'')=\Phi''\subset\Phi'$ и p — произвольный элемент из P, тогда существует $y\in Y$ такое, что $h_f(y)=p$ и так как U''—покрытие пространства (Y, U), то для некоторого $u\in U''$ $\hat{f}(u)=\varphi\in p$, т. е. $\{P, \Phi\}$--бикомпактное п.т.п.

Пусть $\hat{\varphi}$—наибольший элемент п.т. Φ, тогда так как $\hat{f}: U\to\Phi$—возрастающее, то $\hat{\varphi}=\hat{f}(Y)$, следовательно $\forall v\in\hat{\varphi}$ существует открытая окрестность w множества Y в пространстве (Z, W) такая, что $v=\beta^{-1}(w\cap\beta(X))$. Имеем $X\setminus v=\beta^{-1}(Z\setminus w)$, и так как $Z\setminus w$ замкнуто в бикомпактном пространстве (Z, W), то $v\in\sigma_V$, т. е. $\hat{\varphi}\subset\sigma_V$.

Обратно, пусть $\{P, \Phi\}$— бикомпактное п.т.п. из K_V, $\hat{\varphi} \subset \delta_V$ и $F\{P, \Phi\}=(P, S)$, тогда, поскольку $\hat{S}$ образует базу топологии S, а отображение $l: \Phi \to \hat{S}$ является биекцией (см. предложение 5), то легко видеть, что (P, S)—бикомпактное пространство. В самом деле, пусть S'—произвольное подмножество множества $\hat{S}$, покрывающее пространство (P, S) и $l^{-1}(S') = \Phi'$, тогда $\forall p \in P$ $\exists s_\varphi \in S'$ такое, что $p \in s_\varphi$, т. е. $\varphi \in p$ и $\varphi \in \Phi'$ и, так как $\{P, \Phi\}$—бикомпактное п.т.п., то существует конечное подсемейство Φ'' семейства Φ', обладающее тем свойством, что $\forall p \in P$ $\exists \varphi \in \Phi''$ такое, что $\varphi \in p$. Отсюда легко заключить, что $l(\Phi'')$—конечное подпокрытие покрытия S'', т. е. (P, S) бикомпактно. Пусть $T_{-1}\{P, \Phi\}=(Z_1, W_1)$ и W' некоторое открытое покрытие пространства (Z_1, W_1), тогда так как (P, S)—его бикомпактное подпространство, то из W' можно подобрать конечное подпокрытие W'' множества $P \subset Z_1$. Пусть далее $w_0 = \cup\{w;\ w \in W''\}$, тогда учитывая, что $\hat{f}_{-1}(P) = \hat{\varphi}$ ($\hat{f}_{-1}$—возрастающее) и то, что $w \in W_1$ равносильно $w = s \cup v$, где $s \in S$ и $v \in \hat{f}_{-1}(s)$, легко заключить, что $v = w_0 \cap X \in \hat{\varphi}$. Но по условию $\hat{\varphi} \subset \delta_V$, следовательно $X \setminus v$ бикомпактно, и так как $Z_1 \setminus w_0 = X \setminus v$, то W' содержит конечное подпокрытие множества Z_1.

Пусть δ_V — семейство открытых множеств T_1 пространства (X, V), состоящее из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X.

Теорема 4. *Пусть* (X, V)— T_1*-пространство и* $\{P, \Phi\} \in K_V$, *тогда* $T_{-1}\{P, \Phi\}$ *является* T_1*-расширением пространства* (X, V) *в том и только в том случае, когда* $\{P, \Phi\}$ — T_1 *п.т.п. и* δ_V *содержится в наибольшем элементе* $\hat{\varphi}$ *п.т.* Φ.

Доказательство. Пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$ T_1 п.т.п., $\delta_V \subset \hat{\varphi}$ и z_1, z_2 различные точки пространства $(Z_1, W_1) = T_{-1}\{P, \Phi\}$, где $Z_1 = P \cup X$. Рассмотрим случай, когда $z_i = p_i \in P$ $(i=1, 2)$. По определению T_1, п.т.п. существуют $\varphi_1 \in p_1$ и $\varphi_2 \in p_2$ такие, что $\varphi_1 \bar{\in} p_2$ и $\varphi_2 \bar{\in} p_1$, следовательно $p_1 \bar{\in} l(\varphi_2) = s_2$ и $p_2 \bar{\in} l(\varphi_1) = s_1$. Пусть $\hat{\gamma}_{-1}\{P, \Phi\} = f_{-1}$, $v_1 \in \hat{f}_{-1}(s_1)$ и $v_2 \in \hat{f}_{-1}(s_2)$, тогда $w_1 = s_1 \cup v_1$ и $w_2 = s_2 \cup v_2$ соответственно открытые окрестности точек p_1 и p_2 в пространстве (Z_1, W_1) такие, что $p_1 \bar{\in} w_2$ и $p_2 \bar{\in} w_1$.

Пусть теперь $z_1, z_2 \in X$, тогда так как (X, V) T_1-пространство и $V \subset W_1$, то в пространстве (Z_1, W_1) существуют окрестность w_1 точки z_1 и окрестность w_2 точки z_2 такие, что $z_1 \bar{\in} w_2$ и $z_2 \bar{\in} w_1$.

Пусть, наконец, $z_1 = x \in X$ и $z_2 = p \in P$. Так как p — фильтр п.т. Φ, то $\hat{\varphi} \in p$ и, поскольку по условию $\delta_V \subset \hat{\varphi}$, то $\cap\{v;\ v \in p^*\} = \varnothing$, где $p^* = \cup\{\varphi;\ \varphi \in p\}$. Таким образом, для некоторого $\varphi \in p$ существует $v \in \varphi$ такое, что $x \bar{\in} v$, и так как $\varphi = \hat{f}_{-1}(s_\varphi)$, то $w = s_\varphi \cup v$ является окрестностью точки p в пространстве (Z_1, W_1), не содержащей точку x. Кроме того из $V \subset W_1$ следует, что любая окрестность $v \in V$ точки x не содержит точку p. Итак, (Z_1, W_1) есть T_1-расширение пространства (X, V).

Обратно, пусть $(Z_1, W_1) = T_1\{P, \Phi\}$ — T_1-расширение пространства (X, V). Тогда, поскольку (P, S)—подпространство пространства (Z_1, W_1) и $\hat{S}$—база топологии S, то для любых двух различных p_1 и p_2 из P существуют s_{φ_1} и s_{φ_2} из $\hat{S}$ такие, что $p_i \in s_{\varphi_i}$ и $p_i \overline{\in} s_{\varphi_j}$, следовательно $\varphi_i \in p_i$ и $\varphi_i \overline{\in} p_j$ $(i, j=1, 2, i \neq j)$ т. е. $\{P, \Phi\}$ — T_1 п.т.п. Пусть $v \in \delta_V$, т. е. $X \setminus v = B$—конечное подмножество множества X, тогда так как $P \cup v = Z_1 \setminus B$ и (Z_1, W_1) является T_1-пространством, то $w = P \cup \cup v \in W_1$, которое означает, что $v \in \hat{f}_{-1}(P) = \hat{\varphi}$, т. е. $\delta_V \subset \hat{\varphi}$.

Следствие. T_1-пространство (X, V) допускает бикомпактное T_1-расширение тогда и только тогда, когда X-бесконечное множество.

В самом деле, так как конечное подмножество T_1- пространства замкнуто, то условие необходимо. Обратно, если X бесконечно, то δ_V—открытый фильтр пространства (X, V), следовательно п.т.п. $\{P, \Phi\}$, где Φ состоит из двух элементов $\hat{\varphi} = \delta_V$ и $\Theta_\Phi = V$, а P состоит из единственного фильтра $\{\delta_V\}$ п.т. Φ, удовлетворяет всем условиям теорем 3 и 4, т. е. (X, V) допускает бикомпактное T_1-расширение.

Перейдем теперь к рассмотрению хаусдорфовых расширений.

Пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$, тогда $\forall p \in P$ семейство $p^* = \cup \{\varphi; \varphi \in p\}$ образует открытый фильтр пространства (X, V). В самом деле, так как каждый элемент $\varphi \in p$ представляет собой открытый фильтр пространства (X, V), то $\varnothing \overline{\in} p^*$. Пусть $v_j \in p^*$ $\forall j$ из конечного множества J, тогда $\exists \varphi_j \in p$ такое, что $v_j \in \varphi_j$, и так как p—фильтр п.т. Φ, то $\dot{\cap} \{\varphi_j; j \in J\} = \varphi \in p$. Отсюда, так как $\forall j \in J$ $\varphi_j \subset \varphi$, следует, что $\cap \{v_j; j \in J\} \in p^*$. Пусть $v \in p^*$, $v_1 \in V$ и $v \subset v_1$, тогда $\exists \varphi \in p$ такое, что $v \in \varphi$ и, так как φ—открытый фильтр пространства (X, V), то $v_1 \in \varphi$, т. е. $v_1 \in p^*$.

Таким образом, имеем отображение $E: P \to \Phi_V$, которое каждому $p \in P$ сопоставляет $E(p) = p^*$.

Пусть $P^* = E(P)$, а γ — отображение, которое каждому $\{P, \Phi\} \in K_V$ сопоставляет п.т.п. $\{P^*, V\}$.

Теорема 5. *Пусть* $\xi \in R_V$—*хаусдорфово расширение пространства* (X, V) *и* $T(\xi) = \{P, \Phi\}$, *тогда наибольший элемент* $\hat{\varphi}$ *п.т.* Φ *содержит* δ_V *и выполнены следующие условия:*

(*i*) *Отображение* $E: P \to \Phi_V$ *инъективно.*

(*ii*) $\cap \{\bar{v}; v \in p^*\} = \varnothing$ $\forall p^* \in P^*$, *т. е. базис фильтра* p^* *пространства* (X, V) *не имеет точек прикосновения.*

(*iii*) $\gamma\{P, \Phi\} = \{P^*, V\}$—*хаусдорфово п.т.п.*

Обратно, пусть (X, V) — *хаусдорфово пространство и* $\{P, \Phi\} \in K_V$ *такое, что выполнены условия* (i) — (iii), *тогда* $T_{-1}\{P, \Phi\}$ — *хаусдорфово расширение пространства* (X, V).

Доказательство. Пусть $v \in \sigma_V$ и $B = X \setminus v$, тогда $\beta(B)$ замкнуто в хаусдорфовом пространстве (Z, W), и поскольку $Z \setminus \beta(B) = Y \cup \beta(v)$, то $v \in f(Y) = \hat{\varphi}$, т. е. $\sigma_V \subset \hat{\varphi}$. Пусть $p_i \in P$ и $E(p_i) = p_i^*$, тогда $\exists y_i \in Y$ такое, что $h_f(y_i) = p_i$ $(i = 1, 2)$. Из определения h_f следует, что $\beta_*(p_i^*)$ — след на $\beta(X)$ системы открытых окрестностей точки y_i в пространстве (Z, W). Поэтому так как (Z, W) хаусдорфово, из $p_1 \neq p_2$ следует, что существуют $v_1 \in p_1^*$ и $v_2 \in p_2^*$ такие, что $v_1 \cap v_2 = \varnothing$, следовательно E — инъективно, а $\{P^*, V\}$ хаусдорфово п.т.п. Теперь пусть $p^* \in P^*$, тогда $\exists y \in Y$ такое, что $h_f(y) = p$ и $E(p) = p^*$, причем $\beta_*(p^*)$ — след на $\beta(X)$ системы W_y открытых окрестностей точки y в пространстве (Z, W). Так как $\bigcap\{\overline{w};\ w \in W_y\} = \{y\}$, то $\bigcap\{\overline{v};\ v \in p^*\} = \varnothing$, где $\overline{v}$ — замыкание множества v в пространстве (X, V).

Обратно, пусть $\{P, \Phi\} \in K_V$ такое, что выполнены условия (i) — (iii). Докажем, что $(Z_1, W_1) = T_{-1}\{P, \Phi\}$ — хаусдорфово расширение пространства (X, V). Пусть z_1 и z_2 — различные точки множества $Z_1 = X \cup P$. Рассмотрим случай, когда $z_i = p_i \in P$ $(i = 1, 2)$, тогда согласно (i) $p_1^* \neq p_2^*$ и в силу (iii) существуют $v_1 \in p_1^*$ и $v_2 \in p_2^*$ такие, что $v_1 \cap v_2 = \varnothing$. Пусть $v_i \in \varphi_i \in p_i$, тогда $w_i = s_{\varphi_i} \cup v_i$ — открытая окрестность точки p_i в пространстве (Z_1, W_1) $(i = 1, 2)$ и так как X плотно в (Z_1, W_1), то $w_1 \cap w_2 = \varnothing$.

В случае, когда z_1 и z_2 принадлежат множеству X, учитывая, что (X, V) — хаусдорфово пространство и $V \subset W_1$, заключаем, что z_1 и z_2 в пространстве (Z_1, W_1) обладают непересекающимися окрестностями.

Наконец, пусть $z_1 = x \in X$, а $z_2 = p \in P$. В силу условия (ii) существует $v \in p^*$ такое, что $x \,\overline{\in}\, \overline{v}$, следовательно существует окрестность $v_x \in V$ точки x такая, что $v_x \cap v = \varnothing$. Пусть $v \in \varphi \in p$, тогда $p \in s_\varphi$ и $v \in \hat{f}_{-1}(s_\varphi) = \varphi$, следовательно, $w = s_\varphi \cup v$ является окрестностью точки p в пространстве (Z_1, W_1) такой, что $w \cap v_x = \varnothing$, т. е. (Z_1, W_1) — хаусдорфово пространство. Теорема доказана.

Пусть $\overline{R}_V$ — множество всех классов эквивалентных между собой хаусдорфовых бикомпактных расширений локально бикомпактного хаусдорфова пространства (X, V), а $\widetilde{K}_V$ — множество всех бикомпактных п.т.п. $\{P, \Phi\}$ из K_V таких, что $\hat{\varphi} = \sigma_V$, отображение $E\colon P \to \Phi_V$ инъективно и $\{P^*, V\}$ хаусдорфово п.т.п.

Так как для локально бикомпактного пространства (X, V) выполняется условие $\bigcap\{\overline{v};\ v \in \sigma_V\} = \varnothing$, а $\hat{\varphi}$ как наибольший элемент п.т.

Φ принадлежит любому $p \in P$, то каждое п.т.п. $\{P, \Phi\}$ из $\bar{K}_V$ удовлетворяет условию (*ii*) теоремы 5. Сопоставляя теоремы 3, 5 и следствие теоремы 2, приходим к следующему основному утверждению.

Теорема 6. *Отображение T^* является биекцией между множествами $\bar{R}_V$ и $\bar{K}_V$, причем $(T^*)^{-1} = \overset{*}{T}_{-1}$.*

Перейдем теперь к рассмотрению H-замкнутых расширений.

Пусть H_V—семейство всех открытых множеств хаусдорфова пространства (X, V), дополнения которых H-замкнуты.

Теорема 7. *Пусть $\xi \in R_V$ — H-замкнутое расширение пространства (X, V) и $T(\xi) = \{P, \Phi\}$, тогда $H_V \subset \hat{\varphi}$, и кроме условий (i)—(iii) теоремы 5 выполняется также следующее условие:*

(IV) *Для каждого максимального открытого фильтра F пространства (X, V), не имеющего точек прикосновения, существует $p^* \in P^*$ такое, что $p^* \subset F$.*

Обратно, пусть (X, V)—хаусдорфово пространство и $\{P, \Phi\} \in K_V$ такое, что выполнены условия (i) — (IV), тогда $T_{-1}\{P, \Phi\}$ — H-замкнутое расширение пространства (X, V).

Доказательство. Пусть $\xi = [(Z, W); \beta]$, $v \in H_V$ и $B = X \setminus v$, тогда $\beta(B)$ замкнуто в хаусдорфовом пространстве (Z, W), и поскольку $Z \setminus \beta(B) = Y \cup \beta(v)$, то $v \in \hat{f}(Y) = \hat{\varphi}$, т. е. $H_V \subset \hat{\varphi}$. Так как ξ —хаусдорфово расширение пространства (X, V), то по теореме 5 п.т.п. $\{P, \Phi\} = T(\xi)$ удовлетворяет условиям (i)—(iii) этой теоремы. Пусть F — максимальный открытый фильтр пространства (X, V) без точек прикосновения, тогда так как $X' = \beta(X)$ открыто в пространстве (Z, W), то $\beta_*(F) = F'$—базис открытого фильтра пространства (Z, W). В силу критерия П. С. Александрова о H-замкнутости хаусдорфова пространства [8], F' имеет точку прикосновения в пространстве (Z, W), т. е. существует точка $y \in Y \subset Z$ такая, что $\forall w \in W_y$ и $\forall v' \in F'$ $w \cap v' \neq \varnothing$, где W_y—система открытых окрестностей точки y в пространстве (Z, W). Пусть $h_f(y) = p$ и $E(p) = p^*$, тогда $p^* = \beta^{-1}(p_1^*)$, где p_1^*—след системы W_y на X'. Имеем $\forall v_1^* \in p_1^*$ и $\forall v' \in F'$ $v_1^* \cap v' \neq \varnothing$ и так как F'—максимальный открытый фильтр пространства (X', V'), то $p_1^* \subset F'$ и, стало быть, $p^* \subset F$.

Обратно, пусть (X, V) — хаусдорфово пространство $\{P, \Phi\} \in K_V$ такое, что выполнены условия (i)—(IV) и $T_{-1}\{P, \Phi\} = (Z_1, W_1)$. Допустим, что (Z_1, W_1), которое по теореме 5 является хаусдорфовым расширением пространства (X, V), не является H-замкнутым пространством, тогда, в силу того же критерия П. С. Александрова, существует открытый фильтр Q этого пространства, не имеющий точек прикосновения. Пусть q — след Q на X, тогда так как X плотно в (Z_1, W_1), то q — открытый фильтр пространства (X, V) без точек прикосновения, следовательно q содержится в некотором максимальном открытом фильтре F без точек прикосновения. По условию существует $p^* \in P^*$ такое, что $p^* \subset F$. Пусть $p = E^{-1}(p^*)$ и W_p—система открытых окрестностей точки p в пространстве (Z_1, W_1), тогда из определения W_1 вытекает, что след системы W_p на X совпадает с p^*. Так как открытые фильтры q и p^* принадлежат F, то $\forall v^* \in p^*$ и $\forall v \in q$ имеем $v^* \cap v \neq \varnothing$, следовательно $\forall w \in Q$ и $\forall w_0 \in W_p$ $w_p \cap w \neq \varnothing$, т. е. p — точка прикосновения для Q. Противоречие показывает, что (Z_1, W_1) — H-замкнутое расширение пространства (X, V).

Следствие. Хаусдорфово пространство (X, V) допускает H-замкнутое расширение, принадлежащее R_V тогда и только тогда, когда существует непустое семейство P^* открытых фильтров пространства (X, V), не имеющих точек прикосновения, такое, что каждый максимальный открытый фильтр без точек прикосновения содержит некоторый $p^* \in P^*$, кроме того для любых двух различных элементов p_1^* и p_2^* из P^* существует $v_1 \in p_1^*$ и $v_2 \in p_2^*$ такие, что $v_1 \cap \cap v_2 = \varnothing$, или что то же самое $\{P^*, V\}$ — хаусдорфово п.т.п.

Пусть (X, V) допускает H-замкнутое расширение из R_V, тогда существование семейства P^* с указанными свойствами является непосредственным следствием первой части теоремы 7. Для обратного утверждения, согласно второй части теоремы 7, достаточно показать, что каждое семейство P^* с указанными свойствами порождает некоторое п.т.п. $\{P, \Phi\}$ из K_V, удовлетворяющее условиям (i)—(IV) теоремы 7. В самом деле, семейство Φ всевозможных пересечений элементов из p^*, дополненное одним элементом — множеством V, представляет собой полуподтопологию п.т. Φ_V. Каждому $p^* \in P^*$ сопоставим подмножество $p = \{\varphi;\ \varphi \in \Phi,\ \ \varphi \subset p^*\}$ множества Φ, представляющее собой фильтр п.т. Φ, и пусть P — множество всех p, когда p^* пробегает все P^*. Учитывая, что $E(p) = p^*$, следовательно $\gamma\{P, \Phi\} = \{P^*, V\}$, легко проверить, что п.т. п. $\{P, \Phi\}$ удовлетворяет условиям (i)—(IV) теоремы 7. Ясно также, что P различает элементы Φ и, стало быть, $\{P, \Phi\} \in K_V$.

Из этого следствия сразу получается известное утверждение (см. [13—15]) о том, что всякое хаусдорфово пространство, не являющееся H-замкнутым, допускает H-замкнутое расширение.

В самом деле, семейство M всех максимальных открытых фильтров без точек прикосновения такого пространства, согласно упомянутому выше критерию П. С. Александрова, непусто и, очевидно, обладает всеми требуемыми в следствии свойствами, поэтому всякое хаусдорфово пространство, не являющееся H-замкнутым, допускает H-замкнутое расширение, принадлежащее R_V.

Заметим, что если D — разбиение множества M на конечные подмножества, то семейство P^* всех открытых фильтров $p^* = \cap\{\varphi;\ \varphi \in d\}$, когда d пробегает все D, также обладает всеми свойствами, требуемыми в следствии теоремы 7.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.V.1973

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Նոր մոտեցում տոպոլոգիական տարածությունների լայնացումների տեսության մեջ *(ամփոփում)*

Նախկինում մուծված պսևդոտոպոլոգիայի և պսևդոտոպոլոգիական տարածության գաղափարների միջոցով հոդվածում ուսումնասիրվում են տոպոլոգիական տարածությունների լայնացումների զանազան դասեր։ Ամեն մի տոպոլոգիական տարածության վերագրվում է պսևդոտոպոլոգիական տարածությունների որոշակի ընտանիք և անմիջական կապ է հաստատվում այդ ընտանիքի և տվյալ տարածության լայնացումների ընտանիքի միջև։

S. G. HOVSEPIAN. *A new approach in the theory of extensions of topological spaces* (summary)

Different classes of extensions of topological spaces are investigated with the aid of earlier introduced notions of pseudo-topology and pseudo-topological space.

To each topological space certain family of pseudotopological spaces is ascribed. Close interconnections between this family and the family of extensions of the given space is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Tychonoff.* Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann., 102, 1929, 544—561.
2. *E. Cech.* On bicompact spaces, Ann. of Math., 30, 1937, 823—845.
3. *M. H. Stone.* Application of Boolean algebras to topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41, 3, 1937, 375—481.
4. *П. С. Александров.* О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб., 5 (47), 2, 1939, 403—423.
5. *S. Fomin.* Extensions of topological spaces, Ann. of Math., 44, 3, 1943, 471—480.
6. *Ю. М. Смирнов.* О пространствах близости, Матем. сб., 31, № 3, 1952, 543—574.
7. *П. С. Александров, В. И. Пономарев.* О бикомпактных расширениях топологических пространств, ДАН СССР, 121, № 4, 1958, 575—578.
8. *С. Илиадис, С. В. Фомин.* Метод центрированных систем в теории топологических пространств, УМН, 21, № 4, 1966, 47—76.
9. *В. И. Зайцев.* О бикомпактных полурегулярных и хаусдорфовых расширениях, ДАН СССР, 182, № 1, 1968, 27—30.
10. *В. И. Зайцев.* Бесконечные спектры топологических пространств и их предельные пространства, ДАН СССР, 185, № 1, 1969, 20—23.
11. *С. Г. Овсепян.* Об одном новом способе построения расширений топологических пространств, ДАН СССР, 206, № 4, 1972, 819—822.
12. *С. Г. Овсепян.* Псевдотопологии и псевдотопологические пространства, ДАН Арм.ССР, LV, № 5, 1972, 257—261.
13. *M. Katetov.* Über *H*-abgerschlossene und bikompakte Räume, Casopis math. fys., 69, 1940, 36—49.
14. *S. Fomin.* Extensions of topological spaces, Ann. math., 44, 1943, 471—480.
15. *M. Katetov.* On *H*-closed extensions of topological spaces, Casopis math. fys., 72, 1947, 17—32.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 3, 1973 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН, А. О. ОГАНЕСЯН

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Как известно (см., напр., [1]) задача Коши для строго гиперболических уравнений с данными на нехарактеристическом многообразии поставлена корректно.

При нарушении условия строгой гиперболичности изучение этой задачи значительно затрудняется. Оказывается, что, вообще говоря, корректность постановки подобных задач зависит от поведения коэффициентов при младших производных в уравнении. Наиболее общие результаты в этом направлении получены в двухмерном случае ([2]) методом сведения задачи Коши к системе интегральных уравнений с неограниченным ядром. Полученные таким образом достаточные условия корректности (строгая гиперболичность нарушается на кривой с начальными данными) переносятся на многомерные уравнения с коэффициентами, не зависящими от пространственных переменных ([3]). Условия эти формулируются через оценки коэффициентов младших членов уравнения. Несколько иной вид условия корректности, содержащего оценку соответствующей квадратичной формы, указан О. А. Олейник ([4]) в случае многомерного уравнения второго порядка.

В предлагаемой работе изучается определенный класс гиперболических уравнений четного порядка, вырождающихся на начальной гиперплоскости. Указываются достаточные условия корректности задачи Коши, носящие, как и в ([4]), в основном, алгебраический характер.

При попытке применить классическую схему ([1]) к решению поставленной задачи встречается ряд принципиальных затруднений. Основная квадратичная форма („энергия") оказывается не строго положительно определенной, вследствие чего при выводе априорных оценок нельзя воспользоваться леммой Гронуолла.

Соответствующие оценки в данном случае удается получить применением метода, заключающегося в редукции задачи Коши к задаче с быстро стремящимся к нулю свободным членом с последующим обращением интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром ([2], [5], [6]).

§ 1. Постановка задачи

Обозначим

$$V=V_t=\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ 0\leqslant x_1\leqslant t\},\ S=S_t$$

— гиперплоскость $x_1=t$, Lip^k — множество всех определенных в R^n

комплекснозначных функций, у которых производные порядка $\leqslant k$ существуют почти всюду и ограничены, а через Lip^0 — совокупность всех измеримых и ограниченных функций.

Пусть

$$a=a(x,D)=\sum a_\alpha(x)D^\alpha \quad |\alpha|\leqslant m+1 \quad D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}\ D_j^{\alpha_j}=\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

— линейный дифференциальный оператор порядка $m+1$ с главной частью

$$Pa=Pa(x,D)=\sum a_\alpha(x)D^\alpha, \qquad |\alpha|=m+1.$$

Коэффициенты предполагаются симметричными относительно перестановок в α. Обозначим через $a_0=a_0(x)$ коэффициент при D_1^{m+1} и условимся называть оператор a нормальным, если $a_0(x)\equiv\text{const}$. Запись $a\in Lip^k$ будет означать, что коэффициенты оператора a принадлежат Lip^k. Пусть

$$Pa(x,\zeta)=\sum a_\alpha(x)\zeta^\alpha,\ \zeta^\alpha=\zeta_1^{\alpha_1}\dots\zeta_n^{\alpha_n},\ |\alpha|=m+1$$

— характеристический полином оператора Pa. Как известно, оператор a называется гиперболическим (относительно первой координаты), если $a_0(x)\neq 0$ при всех x и если в разложении на множители

$$Pa(x,\zeta)=a_0(x)\prod(\zeta_1-\lambda_j) \qquad (1\leqslant j\leqslant m+1)$$

числа $\lambda_j=\lambda_j(x,\zeta')$ ($\zeta'=(\zeta_2,\dots,\zeta_n)$) действительны и различны, когда ζ' действительно и $\neq 0$. Если же хотя бы два корня совпадают хотя бы в одной точке $x\in V$, то оператор назовем вырождающимся гиперболическим оператором (слабо гиперболическим оператором).

В дальнейшем рассматривается следующая задача Коши:

$$\prod_{l=1}^{\frac{m+1}{2}}(D_1^2-\nu_l^2(x)\sum_{j=2}^{n}\mu_j^2(x)D_j^2)u+\sum_{|\alpha|<m}a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x), \tag{1.1}$$

$$D_1^i u(0,x')=0 \quad (i=0,1,\dots,m) \qquad x'=(x_2,\dots,x_n), \tag{1.2}$$

где $m+1$ — четное, $\min\limits_{x,j}\mu_j^2(x)\neq 0$, а $\nu_l(x)$ стремятся к нулю при $x_1\to 0$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_1(x,\xi'),\dots,\lambda_{m+1}(x,\xi')$ пронумеруем так, чтобы

$$-\lambda_l(x,\xi')=\lambda_{m+1-(l-1)}(x,\xi') \text{ и } \lambda_i(x,\xi')<\lambda_j(x,\xi')$$

при $x_1>0$ и $i<j$.

§ 2. Неотрицательные формы. Разделяющий оператор

Рассмотрим форму

$$H=\sum h_{\alpha\beta}D^\alpha u(x)\overline{D^\beta u(x)}$$

с характеристическим полиномом

$$K = \sum h_{\alpha\beta} \zeta^{\alpha} \overline{\zeta}^{\beta}.$$

Будем говорить, следуя Л. Гордингу [1], что порядок формы H в точке x равен m; m', если $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| \leqslant m'$ и найдется хотя бы один коэффициент, у которого $|\alpha| = m$, и один, у которого $|\beta| = m'$, не обращающиеся в нуль в точке x.

В дальнейшем будем пользоваться частичным преобразованием Фурье

$$U(x_1, \eta') = \int e^{-i(\eta_2 x_2 + \dots)} u(x)\, dS \qquad (dS = dx_2 \dots dx_n), \quad \eta' = (\eta_2, \dots, \eta_n).$$

Из формулы Парсеваля имеем

$$\int H dS = (2\pi)^{1-n} \int K(\sigma, \overline{\sigma})\, U \overline{U}\, d\eta',$$

где $\sigma = (D_1, i\eta_2, \dots, i\eta_n)$.

Эрмитовый однородный оператор H порядка m; m называется вполне положительным оператором, если

$$K(\sigma, \overline{\sigma})\, U \overline{U} \sim \sum |\sigma^{\alpha} U|^2, \qquad |\alpha| = m \tag{2.1}$$

или же

$$\int H dS \sim \int \sum |D^{\alpha} u|^2\, dS. \tag{2.2}$$

Пусть

$$a = \sum a_{\alpha}(x) D^{\alpha}, \qquad b = \sum b_{\beta}(x) D^{\beta}$$

— два дифференциальных оператора порядков $m+1$ и m соответственно, а $\overline{a}(x, D)$ и $\overline{b}(x, D)$ — операторы, получающиеся из a и b заменой их коэффициентов на сопряженные. Рассмотрим двойной дифференциальный оператор

$$L = L(a, b) = a\overline{b} + \overline{a}b,$$

где $\overline{a} = \overline{a}(x, \overline{D})$, $\overline{b} = \overline{b}(x, \overline{D})$.

Имеет место

Лемма 1 [1]. *Если главные части операторов a и b действительны, $a \in Lip^0$, $Pa \in Lip^1$, $b \in Lip^1$, то*

$$L(a, b) \equiv \sum (D_j + \overline{D}_j) A^j + A^0,$$

где $\{A^j\}_0^n$ — двойные дифференциальные операторы порядка $\leqslant m$; m с ограниченными коэффициентами

$$A^j = \sum a_{\alpha}(x)\, b_{\beta}(x) K^j_{\alpha\beta}, \tag{2.4}$$

и если $a = Pa$, $b = Pb$, то

$$A^0 = -\sum c_{j\alpha\beta}(x)\, K^j_{\alpha\beta}, \tag{2.5}$$

где $c_{j\alpha\beta} = D_j\, (a_{\alpha}(x)\, b_{\beta}(x))$.

Для формы $Lu\overline{u}$ получаем

$$Lu\bar{u} = 2Re\, a\, u\, \overline{bu} = \sum D_l\, A^l u\bar{u} + A^0 u\bar{u}.$$

Для того, чтобы форма $A^1 u\bar{u}$ при $x_1 > 0$ была вполне положительной, возьмем в качестве b разделяющий гиперболический оператор.

Определение. Пусть a и b — два гиперболических оператора порядков $m+1$ и m соответственно. Оператор b разделяет оператор a, если для всех x листы поверхности $Pb\,(x, \xi) = 0$ разделяют листы $Pa\,(x, \xi) = 0$, где $\xi = \mathrm{Re}\zeta$.

Лемма 2 [1]. *Если a и b — два гиперболических оператора, причем $a_0 b_0 > 0$ и b разделяет a, то форма $PA^1 u\bar{u}$ вполне положительна.*

Для PA^1 получается выражение

$$PA^1(x, \zeta, \bar{\zeta}) = a_0 \bar{b}_0 \sum \gamma_k\, |a_k(x, \zeta)|^2, \qquad Re\, \zeta' = 0, \tag{2.6}$$

где $a_k = a_k(x, \zeta) = \prod\limits_{j \neq k} (\zeta_1 - i\lambda_j)$,

$$\gamma_k = \frac{\prod\limits_{1}^{m} (\lambda_k - \omega_j)}{\prod\limits_{k \neq j} (\lambda_k - \lambda_j)},$$

ω_j — корни характеристического уравнения разделяющего оператора. В качестве ω_j можно взять

$$\omega_j = \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $b\,(x,\xi) = Pb\,(x, \xi)$, то $A^1(x, \zeta, \bar{\zeta}) = PA^1\,(x, \zeta, \bar{\zeta})$.
Для уравнения (1.1) $\gamma_k\,(x, \xi') \equiv \gamma_k\,(x)$ и $\gamma_k = \gamma_{m+1-(k-1)}$ для всех k,

$$|a_k(x, \zeta)|^2 + |a_{m+1-(k-1)}\,(x, \zeta)|^2 = \Big|\prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{\frac{m+1}{2}} (\zeta_1^2 - (i\lambda_j)^2)\Big|^2 (\zeta_1 \bar{\zeta}_1 - |i\lambda_k|^2),$$

где $|i\lambda_k|^2 = \nu_k^2(x) \sum\limits_{j=2}^{n} \mu_j^2(x)\, i\eta_j \overline{i\eta_j}$.

Отсюда выражение для $A^1\,(x, D, \bar{D})\, u\bar{u}$ имеет вид

$$A^1\,(x, D, \bar{D})\, u\bar{u} = \sum_k \gamma_k \Big| \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{\frac{m+1}{2}} (D_1^2 - \nu_j^2(x) \sum \mu_i^2(x) D_i^2) \Big|^2 (D_1 \bar{D}_1 -$$
$$- \nu_k^2(x) \sum \mu_j^2(x)\, D_j\, \bar{D}_j) u\bar{u}.$$

Обозначим $\lambda^2(x, D') = \sum\limits_{i=2}^{n} \mu_i^2(x)\, D_i^2$.

Лемма 3. *Для $A^1\,(x, D, \bar{D})\, u\bar{u}$ имеет место оценка*

$$A^1(x, D, \overline{D})\, u\overline{u} \geqslant c\left[\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}(x)}{\Delta_{2l+1}(x)} \sum_{j=2}^{n} \mu_j^2(x)\left|\lambda^{2l}(x, D')D_jD_1^{m-(2l+1)}u\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}(x)}{\Delta_{2l}(x)}\left|\lambda^{2l}(x, D')\, D_1^{m-2l}\, u\right|^2\right], \qquad (2.7)$$

где Δ_l зависит только от $(\lambda_s - \lambda_r)$.

Доказательство.

$$\gamma'_k = \frac{\prod\limits_{l}\left(\lambda_k - \dfrac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}\right)}{\prod\limits_{j \neq k}(\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{1}{2^m}\prod_{j \neq k}\left(1 + \frac{\lambda_k - \lambda_{j+1}}{\lambda_k - \lambda_j}\right) > 0. \qquad (2.8)$$

Поэтому $A^1(x, D, \overline{D})\, u\overline{u}$ удовлетворяет оценке, которую можно записать в следующем виде

$$A^1(x, D, \overline{D})\, u\overline{u} > c\,(\theta^+ \mathbf{A}\, \theta), \qquad (2.9)$$

где $\mathbf{A} = \| A_{ij} \|$ —блочная матрица размерности $[(m+1)(n-1)] \times \times [(m+1)(n-1)]$, у которой $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $A_{ii} = B$, $B = \| b_{rl} \|_1^{m+1}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$,

$$b_{rl} = (-1)^{(r-1)(l-1)} \sum_{k=1}^{m+1}\left[\left(\sum_{\substack{l_1 < \ldots < l_{r-1} \\ l_1 \ldots l_{r-1} \neq k}} \nu_{l_0}\nu_{l_1} \ldots \nu_{l_{r-1}}\right)\left(\sum_{\substack{j_1 < \ldots < j_{l-1} \\ j_1 \ldots j_{l-1} \neq k}} \nu_{j_0}\nu_{j_1} \ldots \nu_{j_{l-1}}\right)\right], \qquad (2.10)$$

$$\nu_{l_0} \equiv 1, \qquad \nu_{j_0} \equiv 1.$$

Чтобы записать вектор θ, определим сначала следующие $(n-1)$- -мерные векторы

$$\vec{a}_{2i} = \left(\mu_2\lambda^{2(i-1)}(x, D')\, D_2 D_1^{m-(2i-1)}\, u, \cdots, \mu_n\lambda^{2(i-1)}(x, D')\, D_n D_1^{m-(2i-1)} u\right)$$

$$\left(i = 1, \cdots, \frac{m+1}{2}\right), \qquad (2.11)$$

$$a_{2j+1} = \left(\frac{\lambda^{2j}(x, D')\, D_1^{m-2j} u}{\sqrt{n-1}}, \cdots, \frac{\lambda^{2j}(x, D')\, D_1^{m-2j} u}{\sqrt{n-1}}\right)\left(j = 0, 1, \cdots, \frac{m-1}{2}\right).$$

Тогда в обозначениях $a_i = (a_i^1, a_i^2, \cdots, a_i^{n-1})$ вектор-столбец θ будет иметь компоненты

$$\theta = (a_1^1, a_2^1, \cdots, a_{m+1}^1, a_1^2, a_2^2, \cdots, a_{m+1}^2, \cdots, a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \cdots, a_{m+1}^{n-1}). \qquad (2.12)$$

Из условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы следует, что для того чтобы форма $\theta^+ \mathbf{A} \theta$ была положительно определенной, достаточно, чтобы главные миноры матрицы B, стоящие на диагонали, были бы положительными. При этом имеет место оценка

$$\theta^+ A\theta \geqslant c \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m+1} a_l^j a_l^j \tag{2.13}$$

(θ^+ — эрмитово сопряженный к θ вектор-строка).

Подсчитаем главные миноры матрицы B, стоящие на диагонали. Обозначим

$$\Delta_{s+1} = \det \| b_{rl} \|_1^{s+1}. \tag{2.14}$$

Из легко проверяемого соотношения

$$\Delta_{s+1} = \sum_{|k|=s+1} \det \| \alpha_{er} \|_1^{s+1} = \sum_{|k|=s+1} [\det \| \beta_{er} \|_1^{s+1}]^2,$$

где

$$\alpha_{lr} = \sum_{l_1 \ldots l_{l-1} \neq k_l} \nu_{l_0} \nu_{l_1} \cdots \nu_{l_{l-1}} \sum_{l_1 \ldots j_{r-1} \neq k_l} \nu_{j_0} \nu_{j_1} \cdots \nu_{j_{r-1}}, \quad \beta_{lr} = \sum_{l_1 \ldots l_{r-1} \neq k_l} \nu_{l_0} \nu_{l_1} \cdots \nu_{l_{r-1}}$$

следует формула

$$\Delta_{s+1} = \sum \prod_{k_i < k_j} (\nu_{k_i} - \nu_{k_j})^2, \tag{2.15}$$

где суммирование производится по всем наборам $(k_1, k_2, \cdots, k_{s+1})$ из чисел $(1, 2, \cdots, m+1)$.

Теперь, если выражение $(\theta^+ A\theta)$ записать в виде $(\xi^+ \widetilde{A} \xi)$, где ξ определяется так же, как и θ, только вместо a_l надо брать $\sqrt{\frac{\Delta_l}{\Delta_{l-1}}}\, \vec{a}_l$ $(i=1, \cdots, m+1)$, $\Delta_0 \equiv 1$, то $\widetilde{A}$ будет положительно определенной во всей области, включая и гиперплоскость $x_1=0$, так как главные миноры на диагонали равны 1. Поэтому

$$A^1 (x, D, \overline{D})\, u\bar{u} \geqslant c (\xi^+ \widetilde{A} \xi) \geqslant c\, \xi^+ \xi =$$

$$= c \left(\sum_{l=0}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\, a_{l+1}^j a_{l+1}^j \right). \tag{2.16}$$

Подставляя векторы $\vec{a}_l$, получим требуемую оценку (2.7).

Обозначим теперь

$$Q(x, u) \equiv \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}(x)}{\Delta_{2l+1}(x)} \sum_{j=2}^{n} \mu_j^2(x)\, |\lambda^{2l}(x, D') D_j D_1^{m-(2l+1)} u(x)|^2 +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}(x)}{\Delta_{2l}(x)}\, |\lambda^{2l}(x, D')\, D_1^{m-2l} u(x)|^2, \tag{2.17}$$

$$Q(x_0, u) \equiv \sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{\Delta_{2(l+1)}(x_0)}{\Delta_{2l+1}(x_0)} \sum_{j=2}^{n} \mu_j^2(x_0)\, |\lambda^{2l}(x_0, D') D_j D_1^{m-(2l+1)} u(x)|^2 +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Delta_{2l+1}(x_0)}{\Delta_{2l}(x_0)}\, |\lambda^{2l}(x_0, D')\, D_1^{m-2l} u(x)|^2. \tag{2.18}$$

В дальнейшем, кроме полного порядка производной D^{α}, равного $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, будем пользоваться двойным порядком $[\alpha]=j,\ k$, где j — порядок дифференцирования по x_1, а $j+k=|\alpha|$. Запись $[\alpha]\leqslant p,\ q$ означает, что $j<p$ и $j+k\leqslant p+q$, а $\{\alpha\}\leqslant p,\ q$; $j\leqslant p,\ k\leqslant q$.

§ 3. Оценка интеграла от дивергентной части

Введем некоторые линейные пространства.

1. E^k — пространство всех непрерывно дифференцируемых в V до порядка k функций с компактными носителями, $E^{\infty}=E$.

2. Если W является частью V, то $H^{p,q}(W)$ — пополнение E по норме

$$|D^{p,q}f,\ W|^2=\int|D^{p,q}f(x)|^2\,dW=\int\sum_{[\alpha]<p,q}|D^{\alpha}f(x)|^2\,dW, \tag{3.1}$$

где $dW=dx_1\cdots dx_n$ при $W=V$ и $dW=dx_2\cdots dx_n$, если W совпадает с S или его частью. $H^{p,q}$ — гильбертово пространство.

Следующий результат обобщает известную ([1]) оценку для гиперболических операторов.

Теорема 1. *Пусть $A^1(x,u)$ при любом $\varepsilon>0$ является равномерно вполне положительным оператором при $x_1>\varepsilon$ с равномерно непрерывными коэффициентами. Тогда существует постоянная $c>0$, не зависящая от и такая, что*

$$\int A^1(x,\ u)\,dS\geqslant c\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\sum_{[\alpha]=m-l,\,l}|D^{\alpha}u|^2\Big]\,dS-$$

$$-\frac{1}{c}\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\sum_{\{\alpha\}<m-1-l,\,l}|D^{\alpha}u|^2\Big]\,dS. \tag{3.2}$$

Доказательство. В произвольной фиксированной точке x_0 согласно (2.18) имеем

$$\int Q(x_0,U)\,d\eta'=$$

$$=\int\Big[\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1}\frac{\Delta_{2(l+1)}(x_0)}{\Delta_{2l+1}(x_0)}\sum_{j=2}^{n}\mu_j^2(x_0)\left|\lambda^{2l}\Big(x_0,\frac{i\eta'}{s}\Big)\right|^2\frac{|i\eta_j|^2}{s^2}s^{2(2l+1)}|D_1^{m-(2l+1)}U|^2+$$

$$+\sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\Delta_{2l+1}(x_0)}{\Delta_{2l}(x_0)}\left|\lambda^{2l}\Big(x_0,\frac{i\eta'}{s}\Big)\right|^2s^{4l}\left|D_1^{m-2l}U\right|^2\Big]\,d\eta', \tag{3.3}$$

где $d\eta'=d\eta_2\cdots d\eta_n$, $s=\sum_{l=2}^{n}|\eta_l|$.

Внесем $\min\left(\sum_{j=2}^{n}\mu_j^2(x_0)\left|\lambda^{2l}\Big(x_0,\frac{i\eta'}{s}\Big)\right|^2\frac{|i\eta_j|^2}{s^2},\ \left|\lambda^{2l}\Big(x_0,\frac{i\eta'}{s}\Big)\right|^2\right)$.

Учитывая, что $s^{2p} \sim \sum_{j=2}^{n} |\eta_j|^{2p}$, получим

$$\int Q(x_0, U)\, d\eta' \geqslant c \int \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{\Delta_{l+1}(x_0)}{\Delta_l(x_0)} \sum_{j=2}^{n} |\eta_j|^{2l} |D_1^{m-l} U|^2 \right] d\eta'. \tag{3.4}$$

Применяя равенство Парсеваля, приходим к оценке

$$\int Q(x_0, u)\, dS \geqslant c \int \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{\Delta_{l+1}(x_0)}{\Delta_l(x_0)} \sum_{[\alpha]=m-l,\, l} |D^\alpha u|^2 \right] dS. \tag{3.5}$$

Пусть носитель функции u заключен внутри сферы $T \subset S$ диаметра ε с центром в точке x_0

$$\int Q(x, u)\, dS = \int Q(x_0, u)\, dS + \int \left[Q(x, u) - Q(x_0, u) \right] dS. \tag{3.6}$$

Второй член ограничен величиной

$$\delta(\varepsilon) \, | D^m u |^2,$$

где $\delta(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ независимо от u и x_0 в силу равномерной непрерывности коэффициентов оператора. Тогда для достаточно малого ε получаем

$$\int Q(x, u)\, dS \geqslant c \int \left[\sum_{l=0}^{m} \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{[\alpha]=m-l,\, l} |D^\alpha u|^2 \right] dS. \tag{3.7}$$

Пусть $1 = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k^2$ — разбиение единицы на S, удовлетворяющее следующим условиям: каждая функция $\varphi_k \geqslant 0$ бесконечно дифференцируема, и производные ее до $m+1$ порядка включительно равномерно ограничены; носитель S_k функции φ_k пересекается лишь с конечным числом других носителей, причем для любой функции u, равной нулю вне S_k, соотношение (3.7) выполняется с постоянной, не зависящей от k

$$\int Q(x, u)\, dS = \sum_{k=1}^{p} \int \varphi_k^2(x)\, Q(x, u)\, dS. \tag{3.8}$$

Разность $\varphi_k^2 Q(x, u) - Q(x, \varphi_k u)$ может быть записана в виде

$$\left[\left(\varphi(x) \varphi(\bar{x}) K(x, D, \bar{D}) - K(x, D, \bar{D}) \varphi(x)\, \varphi(\bar{x}) \right) u(x) \overline{u(\bar{x})} \right]_{\bar{x} = x},$$

где $\varphi \equiv \varphi_k$, а K — двойные дифференциальные операторы, входящие в Q. Далее

$$\varphi(x) \varphi(\bar{x}) K - K \varphi(x) \varphi(\bar{x}) = \varphi(x) (\varphi(\bar{x}) K - K \varphi(\bar{x})) +$$
$$+ (\varphi(x) K - K \varphi(x))\, \varphi(\bar{x}),$$

где в роли K могут фигурировать следующие выражения:

1.

$$K=\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1}\frac{\Delta_{2(l+1)}(x)}{\Delta_{2l+1}(x)}\sum_{j=2}^{n}\mu_j^2(x)\lambda^{2l}(x,D')D_jD_1^{m-(2l+1)}\lambda^{2l}(x,\overline{D'})\,\overline{D_j}\,\overline{D_1^{m-(2l+1)}},$$

$$\left|\left(\varphi(x)\varphi(\bar x)K-K\varphi(x)\varphi(\bar x)\right)u\bar u\right|<c\left(r\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1}\frac{\Delta_{2(l+1)}}{\Delta_{2l+1}}\sum_{[\alpha]=m-(2l+1),\ 2l+1}|D^\alpha u|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\frac{m+1}{2}-1}\frac{\Delta_{2(l+1)}}{\Delta_{2l+1}}\sum_{\{\alpha\}<m-1-(2l+1),\ 2l+1}|D^\alpha u|^2\right),$$

2. $$K=\sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\Delta_{2l+1}}{\Delta_{2l}}\lambda^{2l}(x,D')D_1^{m-2l}\lambda^{2l}(x,\overline{D'})\overline{D_1^{m-2l}},$$

$$\left|\left(\varphi(x)\varphi(\bar x)K-K\varphi(x)\varphi(\bar x)\right)u\bar u\right|\leqslant c\left(r\sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\Delta_{2l+1}}{\Delta_{2l}}\sum_{[\alpha]=m-2l,\ 2l}|D^\alpha u|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}}\frac{\Delta_{2l+1}}{\Delta_{2l}}\sum_{\{\alpha\}<m-1-2l,\ 2l}|D^\alpha u|^2\right).$$

Учитывая эти оценки, получаем

$$\varphi_k^2Q(u)-Q(\varphi_k u)\geqslant -c\left[r\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{[\alpha]=m-l,\ l}|D^\alpha u|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-1-l,\ l}|D^\alpha u|^2\right]. \tag{3.9}$$

Интегрируя это неравенство по S_k и суммируя результаты по всем k, получаем

$$\int Q(x,u)\,dS\geqslant\sum_{k=1}^{p}\int Q(\varphi_k u)\,dS-c\sum_{k=1}^{p}\int\left[r\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{[\alpha]=m-l,\ l}|D^\alpha u|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-1-l,\ l}|D^\alpha u|^2\right]dS_k. \tag{3.10}$$

Из неравенства (3.7) имеем

$$\int Q(\varphi_k u)\,dS\geqslant c\int\left[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{[\alpha]=m-l,\ l}|D^\alpha\varphi_k u|^2\right]dS\equiv c\,|D^m\varphi_k u|^2_\Delta\equiv$$

$$\equiv c\int|D^m\varphi_k u(x)|^2_\Delta\,dS. \tag{3.11}$$

Так же, как в случае разности $\varphi_k^2Q(u)-Q(\varphi_k u)$, оценивая на S_k выражение

$$|D^m \varphi_k u|_\Delta - \varphi_k^2(x)\,|D^m u|_\Delta^2$$

и подставляя в (3.11), получаем

$$\int Q(\varphi_k u)\,dS \geqslant c\int \varphi_k^2 |D^m u(x)|_\Delta^2\,dS - cr\int |D^m u(x)|_\Delta^2\,dS_k -$$

$$-\frac{c}{r}\int\left[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-1-l,\,l}|D^\alpha u|^2\right]dS_k. \tag{3.12}$$

Суммируя это неравенство по всем k, подставляя в (3.9) и выбирая r достаточно малым, приходим к оценке

$$\int Q(x,u)\,dS > c\int\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{[\alpha]=m-l,l}|D^\alpha u|^2\,dS -$$

$$-\frac{1}{c}\int\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-1-l,\,l}|D^\alpha u|^2\,dS. \tag{3.13}$$

Здесь также учтено, что

$$\sum_k\int|D^j u(x)|^2\,dS_k \leqslant N\int|D^j u(x)|^2\,dS \qquad (j\text{—любое}),$$

где N — максимальное число S_k, которым может принадлежать фиксированная точка плоскости S.

Исходное неравенство следует из неравенства (3.13) и предыдущей леммы.

Применим к уравнению (1.1) оператор $\sum\limits_{[\gamma]<0,\,q} D^\gamma$

$$\sum_{[\gamma]<0,\,q} D^\gamma a(u) \equiv Pa\Big(\sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma u\Big) + \sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma Pq(u) - Pa\Big(\sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma u\Big) +$$

$$+\sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma\sum_{[\alpha]<m}a_\alpha D^\alpha u = \sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma f.$$

Сделав приведение подобных членов в последних трех слагаемых и введя соответствующие обозначения, запишем уравнение в следующем виде:

$$Pa\Big(\sum_{[\gamma]<0,q}D^\gamma u\Big) + \sum_{[\alpha]<m,q}\bar a_\alpha D^\alpha u = \sum_{[\gamma]<0,q}D^\gamma f. \tag{3.14}$$

В качестве разделяющего оператора можно взять выражение $b = b\Big(\sum\limits_{[\gamma]<0,q}D^\gamma u\Big)$. Тогда

$$\sum_{[\gamma]<0,q}D^\gamma a\cdot\bar b + \overline{\sum_{[\gamma]<0,q}D^\gamma a}\cdot b = \sum(D_j+\overline{D}_j)\,B^j + B^0,$$

где $B^j(x,u,u) = A^j\Big(x,\ \sum\limits_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma u,\ \overline{\sum\limits_{[\gamma]<0,q}D^\gamma u}\Big)$ $(j=1,\cdots,n)$, а

$$B^0(x, u, \overline{u}) = -\sum D_j(a_\alpha(x)\, b_\beta(x))\, K^j_{\alpha\beta}\Big(\sum_{[\gamma]<0,q} D^\gamma u, \overline{\sum_{[\gamma]<0,q} D^\gamma u}\Big) +$$

$$+\, b\Big(\sum_{[\gamma]<0,q} D^\gamma u\Big) \sum_{[\alpha]<m,q} \tilde{a}_\alpha D^\alpha u.$$

Для $B^1(x, u, \overline{u})$ имеет место оценка

$$\int B^1(x, u, \overline{u})\, dS > c \int\Big[\sum_{l=0}^{m} \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{\alpha\}<m-l,\, l+q} |D^\alpha u|^2\Big] dS -$$

$$-\frac{1}{c}\int\Big[\sum_{l=0}^{m} \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{\alpha\}<m-1-l,\, l+q} |D^\alpha u|^2\Big] dS. \qquad (3.15)$$

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\rho(\tau) = \int_0^\tau K(t)\, \rho(t)\, dt + \sigma(\tau) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1), \qquad (3.16)$$

K и σ — непрерывные функции при $\tau > 0$ и $\int_0^1 K(t)\, dt = \infty$. Если $K > 0$, то

$$\rho^* = \exp\Big\{\int_1^\tau K(t)\, dt\Big\} \qquad (3.17)$$

является непрерывным ненулевым решением однородного уравнения.

Ниже нам понадобится следующий результат.

Лемма 4 ([3]). Пусть $\sigma(t)$ — непрерывная функция при $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяет условию $\int_0^1 \frac{K(t)\,\sigma(t)}{\rho^*(t)}\, dt < \infty$. Тогда, если

$$\rho_n(\tau) \leqslant \int_0^\tau K(t)\, \rho_{n-1}(t)\, dt + \sigma(\tau) \qquad (n \geqslant 1,\ \rho_0 = \sigma), \qquad (3.18)$$

то ряд $\rho(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ равномерно сходится и его сумма удовлетворяет условию

$$\rho(\tau) = \rho^*(\tau)\, O(1) \qquad \text{при} \quad \tau \to +0$$

и оценке

$$\rho(\tau) \leqslant \rho^*(\tau) \int_0^\tau \frac{K(t)\,\sigma(t)}{\rho^*(t)}\, dt. \qquad (3.19)$$

§ 4. Достаточные условия корректности задачи Коши

Теперь сформулируем и докажем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1.1) — (1.2) *коэффициенты уравнения и правая часть—достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. $$c_2\lambda^{2\alpha}(x_1) \leqslant \sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{m+1} (\nu_i(x)-\nu_j(x))^2 \leqslant c_1\lambda^{2\alpha}(x_1),$$

$$c_4\lambda^{2\beta}(x_1) \leqslant \sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{m+1} (\nu_i(x)-\nu_j(x))^2 \leqslant c_3\lambda^{2\beta}(x_1),$$

где $\lambda(x_1) \to 0$ при $x_1 \to \underline{0}$, $D_1\lambda(x_1) > 0$, $\lambda(x_1) > 0$;

2. $|D_j^k \nu_i(x)| \leqslant c\lambda^{\varepsilon}(x_1)$ $(\varepsilon > 0)$, $(j=2,\cdots,n)$, $(k=1,\cdots,q)$, $(i=1,\cdots,m+1)$;

3. $$\sum D_l(a_\alpha(x)\,b_\beta(x))\,K'_{\alpha\beta}\Big(\sum_{|\gamma|<0,q}\zeta^\gamma,\ \overline{\sum_{|\gamma|<0,q}\zeta^\gamma}\Big) - b\Big(\sum_{|\gamma|<0,q}\zeta^\gamma\Big)\sum_{|\alpha|<m,\,q}\overline{a_\alpha}(x)\,\zeta^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant c\,\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\sum_{\langle\alpha\rangle<m-l,\ l+q}|\zeta^\alpha|^2\,x_1^{2[\alpha_1-(m-l)]}\quad (q > m+1);$$

4. $$D_1\left(\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\right) \leqslant c\,\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}\,\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)},$$

тогда для любого $f \in H^{0,\,q+d}$, *где* d — *достаточно большая постоянная, существует единственное решение задачи* (1.1) — (1.2) $u \in H^{m+1,\,q-1-m}$. *Справедлива оценка*

$$|D^{m+1,\,q-1-m}u,\ V_t|^2 \leqslant c\,|D^{0,\,q+d}f,\ V_t|^2. \tag{4.1}$$

Доказательство. Сначала покажем, что если выполнены условия теоремы, то за счет гладкости $f(x)$ по $(x_2,\cdots,x_n)$ можно заменить уравнение (1.1) аналогичным уравнением, у которого правая часть имеет порядок $\lambda^{c_1}(x_1)$, где $c_1>0$ — произвольно. Из условия 3 следует, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ (см. (3.14)) $\alpha_1 \neq |\alpha|$ при $x_1 \to 0$ имеют порядок $D_1\lambda^s(x_1)$ $s>0$, а из условия 2 следует, что и $a_\alpha(x)$ $\alpha_1 \neq |\alpha|$ имеют порядок $D_1\lambda^\delta(x_1)$ $\delta>0$.

Отнимем из уравнения (1.1) уравнение

$$a'(\bar u) \equiv D_1^{m+1}\bar u + \sum_{\alpha_1=|\alpha|<m} a_\alpha(x)\,D^\alpha \bar u = f(x). \tag{4.2}$$

Однородная задача Коши для этого обыкновенного дифференциального уравнения, очевидно, имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$|D_1^{m+1}\tilde{u}| \leqslant \text{const} \max_{\substack{(x_2,\ldots,x_n)\\ 0<\tau<x_1}} |f(\tau, x_2, \cdots, x_n)|. \tag{4.3}$$

Для функции $\tilde{u}_1 = \tilde{u} - \tilde{u}$ получим уравнение

$$a\,(u_1) = (a'-a)\,\tilde{u} \equiv f_1(x) \tag{4.4}$$

с нулевыми начальными условиями, где $|f_1| \leqslant cD_1\lambda^\delta(x_1)$. Зная решение полученной задачи и прибавляя к нему $\tilde{u}$, получим решение первоначальной задачи. Функция $\tilde{u}$ должна иметь непрерывные производные порядка $m+1$ по $(x_2, \cdots, x_n)$, поэтому такую же гладкость должна иметь $f(x)$. Отнимем из полученного уравнения уравнение

$$a'\,(\tilde{u}_1) = f_1\,(x). \tag{4.5}$$

Решение $\tilde{u}_1$ удовлетворяет условию $|D_1^{m+1}\tilde{u}_1) \leqslant c\,D_1\lambda^\delta(x_1)$, то есть $|D_1^m\,\tilde{u}_1| \leqslant c\,\lambda^\delta(x_1)$. Для разности $u_2 = u_1 - \tilde{u}_1$ получим уравнение

$$a\,(u_2) = (a'-a)\,\tilde{u}_1 \equiv f_2, \tag{4.6}$$

где $|f_2| \leqslant c\,D_1\lambda^\delta\cdot\lambda^\delta$. Продолжая аналогичным образом, на n-ом шаге получим

$$a\,(u_n) = (a'-a)\,\tilde{u}_{n-1} \equiv f_n, \tag{4.7}$$

где $a'\,(\tilde{u}_{n-1}) = f_{n-1}$, $|f_n| \leqslant c\,D_1\,\lambda^\delta\,\lambda^{\delta(n-1)}$, $n > 1$.

При этом функция $f(x)$ должна иметь производные порядка $(m+1)n = d$ по $(x_2, \cdots, x_n)$. Выбрав n достаточно большим, получим $\delta\,(n-1) = c_1$. Первоначальная неизвестная функция равна

$$u = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{u}_k \qquad (\tilde{u}_0 \equiv \tilde{u},\quad f_0 \equiv f). \tag{4.8}$$

Отсюда

$$|D^{m+1,\,q-1-m}\,u,\ V_t\,|^2 \leqslant c\left(|D^{m+1,\,q-1-m}\,u_n\ V_t|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} |D^{m+1,\,q-1-m}\tilde{u}_k,\ V_t|^2\right) \leqslant c\left(|D^{m+1,\,q-1-m}\,u_n,\ V_t|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} |\,D^{0,q}\,f_k,\ V_t|^2\right) \leqslant c\left(|\,D^{m+1,\,q-1-m}\,u_n,\ V_t|^2 + |\,D^{0,q}\,f,\ V_t\,|^2\right). \tag{4.9}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка:

$$\int \sum_{|\tau|<0,q} |\,D^\tau\lambda^{-c_1}f_n(x)\,|\,dV_t = \int \sum_{[\tau]<0,q} |\,D^\tau\lambda^{-c_1}(a'-a)\,\tilde{u}_{n-1}\,|\,dV_t \leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^t D_1\lambda^\delta\cdot\lambda^{-c_1}\int |\,D^{m,\,q+1}\,\tilde{u}_{n-1}\,|\,dS_\tau\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^t D_1\,\lambda^\delta\cdot\lambda^{-c_1}\int |\,D^{0,\,q+m+1}\,f_{n-1}\,|\,dV_\tau\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \int \sum_{|\gamma|<0,\ q+m+1} | D^{\gamma} \lambda^{-c_1+\delta} f_{n-1} | \, dV_t.$$

Сделав аналогичные оценки n раз и возведя в квадрат обе части неравенства, после очевидных оценок получим

$$| D^{0,q} \lambda^{-c_1} f_n, V_t |^2 \leqslant c \, | D^{0,q+(m+1)n} f, V_t |^2 = c \, | D^{0,q+d} f, V_t |^2. \quad (4.10)$$

Таким образом, достаточно решить задачу (1.1)—(1.2) в классе функций $|f| \leqslant c \lambda^{c_1}(x_1)$.

Получим теперь для решения энергетическую оценку. Пусть существует решение уравнения

$$a(v) = \lambda^{c_1}(x_1)\, g(x) \qquad (c_1 = \mathrm{const}) \quad (4.11)$$

с однородными начальными условиями, где $v \equiv u_n$, $\lambda^{c_1} g \equiv f_n$. Из уравнения (4.11) и нулевых начальных условий следует, что

$$\sum_{k=0}^{m} | D_1^k v |^2 \leqslant c \lambda^{\varepsilon_1}(x_1) \qquad (\varepsilon_1 > 0). \quad (4.12)$$

Учитывая компактность носителя v, проинтегрируем тождество

$$2\,Re \left(\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} a(v)\; b\left(\overline{\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} v} \right) \right) = \sum_{j=1}^{n} D_j B^j(x, v, \bar v) + B^0(x, v, \bar v) \quad (4.13)$$

по V_τ

$$\int B^1(x, v, \bar v)\, dS_\tau = \int B^1(x, v, \bar v)\, dS_0 - \int B^0(x, v\, \bar v)\, dV_\tau +$$

$$+ 2 \int Re \left(\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} a(v) \cdot b\left(\overline{\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} v} \right) \right) dV_\tau, \quad (4.14)$$

$$\int B^1(x, v, \bar v)\, dS_0 = 0, \quad (4.15)$$

$$2 \left| \int Re \left(\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} a(v) \cdot b\left(\overline{\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} v} \right) \right) dV_\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \int \left| \lambda^{c_1}(x_1) \sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} g(x) \right| \left| b\left(\sum_{|\gamma|<0,\ q} D^{\gamma} v \right) \right| dV_\tau \equiv \sigma(\tau). \quad (4.16)$$

Из условия 3 следует, что

$$- \int B^0(x, v, \bar v)\, dV_\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \int \left| \frac{D_1 \lambda(x_1)}{\lambda(x_1)} \sum_{l=0}^{m} \frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)} \sum_{\{\alpha\} < m-l,\ l+q} | D^{\alpha} v |^2 \, x_1^{2[\alpha_1 - (m-l)]} \right| dV_\tau. \quad (4.17)$$

Оценка (4.12) обеспечивает сходимость интеграла в правой части. Используя (4.15), (4.16), (4.17) и оценку снизу для $\int B^1(x, v, \bar v)\, dS_\tau$, получаем

$$c\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2\Big]dS_\tau-\frac{1}{c}\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\sum_{\{\alpha\}<m-1-l,l+q}|D^\alpha v|^2\Big]dS_\tau\leqslant$$

$$\leqslant c_2\int\Big[\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}(x)}{\Delta_l(x)}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2 x_1^{2[\alpha_1-(m-l)]}\Big]dV_\tau+o(\tau). \quad (4.18)$$

Заметим, что

$$\int\varphi(x)\sum_{\{\alpha\}<r,\,p}|D^\alpha v|^2dS_\tau\leqslant c\int|D_1\varphi(x)|\sum_{\{\alpha\}<r+1,\,p}|D^\alpha v|^2dV_\tau$$

и (4.19)

$$\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2\tau^{2[\alpha_1-(m-l)]}\Big]dS_\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\operatorname*{essup}_{0<x_1<\tau}\int\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\substack{\alpha_1=m-l\\|\alpha'|<l+q}}|D^\alpha v|^2dS_{x_1}\leqslant$$

$$\leqslant c\operatorname*{essup}_{0<x_1<\tau}\int\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2dS_{x_1}.$$

Поэтому, учитывая условие 4, приходим к оценке

$$\operatorname*{essup}_{0<x_1<\tau}\int\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2dS_{x_1}\leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^\tau\Big[\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}\operatorname*{essup}_{0<r<x_1}\int\Big(\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2dS_r\Big)\Big]dx_1+o(\tau). \quad (4.20)$$

Используя (3.19) — результат леммы 4, получаем

$$\operatorname*{essup}_{0<x_1<\tau}\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\,l+q}|D^\alpha v|^2\Big]dS_{x_1}\leqslant c_3\lambda^c(\tau)\int_0^\tau\frac{D_1\lambda(x_1)\,o(x_1)}{\lambda^{c+1}(x_1)}dx_1$$

или

$$\int\Big[\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,l+q}|D^\alpha v|^2\Big]dS_\tau\leqslant c_3\lambda^c(\tau)\int_0^\tau\frac{D_1\lambda(x_1)\,o(x_1)}{\lambda^{c+1}(x_1)}dx_1. \quad (4.21)$$

Обозначая левую часть $|D^{m,q}v,S_\tau|_\Delta^2$

$$|D^{m,q}v,S_\tau|_\Delta^2\leqslant$$

$$\leqslant c_4\int_0^\tau\frac{D_1\lambda(x_1)\displaystyle\int_0^{x_1}\!\!\int\lambda^{c_1}(r)\Big|\sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma g(x)\Big|\,\Big|b\Big(\sum_{[\gamma]<0,\,q}D^\gamma v\Big)\Big|dS_r\,dr}{\lambda^{c+1}(x_1)}dx_1. \quad (4.22)$$

Если $c_1=c_5+\beta$, где β — постоянная, фигурирующая в условии 1, то

$$|D^{m,q}v,S_\tau|_\Delta^2\leqslant c_4\int\Big[\lambda^\beta(x_1)\Big|\sum_{[\gamma]<0,q}D^\gamma g(x)\Big|\,\Big|b\Big(\sum_{[\gamma]<0,q}D^\gamma v\Big)\Big|\Big]dV_\tau\int\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda^{c+1-c_5}(x_1)}dx_1$$

(4.23)

и если $c+1-c_5<1$, то

$$|D^{m,q}v, S_\tau|^2_\Delta \leqslant c\int \lambda^\beta(x_1)\left|\sum_{|\gamma|<0,q} D^\gamma g(x)\right|\left|b\left(\sum_{|\gamma|<0,q} D^\gamma v\right)\right| dV_\tau. \quad (4.24)$$

Проинтегрируем по τ от 0 до t

$$|D^{m,q}v, V_t|^2_\Delta \leqslant cr^{-1}\int \left|\sum_{|\gamma|<0,q} D^\gamma g(x)\right|^2 dV_t + cr\int \lambda^{2\beta}(x_1)\left|b\left(\sum_{|\gamma|<0,q} D^\gamma v\right)\right|^2 dV_t.$$

Взяв r достаточно малым, получим

$$|D^{m,q}v, V_t|^2_\Delta \leqslant c\,|D^{0,q}g(x), V_t|^2. \quad (4.25)$$

Учитывая, что

$$\sum_{l=0}^{m}\frac{\Delta_{l+1}}{\Delta_l}\sum_{\{\alpha\}<m-l,\, l+q}|D^\alpha v|^2 \geqslant c\sum_{\{\alpha\}<m,\, q}|D^\alpha v|^2 \geqslant c\sum_{|\alpha|<m,\, q-m}|D^\alpha v|^2, \quad (4.26)$$

получим

$$|D^{m,\, q-m}v, V_t|^2 \leqslant c\,|D^{0,q}g(x), V_t|^2. \quad (4.27)$$

Из тождества

$$D^\beta v = D^\gamma a(v) - \sum D^\gamma a_\alpha D^\alpha v, \quad (4.28)$$

$|\alpha|\leqslant m+1,\quad \alpha_1\leqslant m,\quad \beta=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),\quad |\beta|\leqslant q,\quad \beta_1=m+1,$
$\gamma=(0, \beta_2, \cdots, \beta_n),$

приходим к оценке

$$|D^{m+1,\, q-1-m}v, V_t|^2 \leqslant c\,|D^{0,q}g(x), V_t|^2. \quad (4.29)$$

Учитывая неравенства (4.9) и (4.10), получаем

$$|D^{m+1,\, q-1-m}u, V_t|^2 \leqslant c\,|D^{0,\, q+d}f, V_t|^2. \quad (4.30)$$

Из этой оценки следует единственность и устойчивость решения.

Для доказательства существования решения воспользуемся следующей известной процедурой. Введем оператор осреднения. Пусть $j_0 \in E([0,1])$ и обращается в нуль в окрестности 0 и t, $j_0\geqslant 0$ и

$$\int j_0(s)\,ds = 1,$$
$$j_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-1}j_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad (0<\varepsilon<1). \quad (4.31)$$

Оператор осреднения для функции $f(x)\in H^{0,\, q+d}$, $x\in R^n$ определим по формуле

$$T_\varepsilon f(x) = \int f(x_1-s, x_2, \cdots, x_n)\, j_\varepsilon(s)\,ds = \int j_\varepsilon(x_1-s) f(s, x_2, \cdots, x_n)\,ds, \quad (4.32)$$

$T_\varepsilon f(x)$ бесконечно дифференцируема по x_1, равна нулю в окрестности гиперплоскости $x_1=0$ и при $\varepsilon\to 0$

$$|D^{0,\,q+d}(T_\varepsilon f-f)|^2\to 0. \tag{4.33}$$

Для таких функций задача (1.1)—(1.2) имеет решение. Обозначим через $u_\varepsilon(x)$ решение для $T_\varepsilon f(x)$. Тогда

$$|D^{m+1,\,q-1-m}(u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})|^2\leqslant c\,|D^{0,\,q+d}(T_{\varepsilon_1}f-T_{\varepsilon_2}f)|^2, \tag{4.34}$$

то есть последовательность $u_\varepsilon(x)$ фундаментальна и из полноты пространства $H^{p,\,q}$ следует, что имеет предел $u(x)\in H^{m+1,\,q-1-m}$, который и является решением задачи (1.1)—(1.2). Теорема 2 доказана.

В случае уравнения второго порядка, записанного в симметрическом виде

$$D_1^2u-\sum_{l=2}^{n}D_l(\nu_1^2(x)\mu_l^2(x)D_lu)+\sum_{l=1}^{n}b_l(x)D_lu+c_0u=f, \tag{4.35}$$

условие 3 теоремы 2 принимает вид

$$c\,\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}\nu_1^2(x)\sum_{l=2}^{n}\xi_l^2-D_1\nu_1^2(x)\sum_{l=2}^{n}\xi_l^2+c\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}|\xi_1|^2-$$
$$-\sum_{l=1}^{n}b_l(x)\xi_l\xi_1-c_0\xi_1\geqslant 0. \tag{4.36}$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы существовала постоянная $c>0$ такая, что

$$c\left(\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}\right)^2\nu_1^2(x)\sum_{l=2}^{n}\xi_l^2-\left(\sum_{l=2}^{n}b_l(x)\xi_l\right)^2\geqslant 0,$$

$$|b_1(x)|\leqslant \mathrm{const}\,\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)},$$

$$|c_0(x)|\leqslant \mathrm{const}\,\frac{D_1\lambda(x_1)}{\lambda(x_1)}x_1^{-1},\quad (\mathrm{Im}\,\xi_l=0).$$

Это, по существу, совпадает с условием О. А. Олейник [4] при $\lambda(x_1)\sim x_1^{\beta}$.

В случае уравнения четвертого порядка

$$\left(D_1^2-\nu_1^2(x)\sum_{l=2}^{n}D_l^2\right)\left(D_1^2-\nu_2^2(x)\sum_{l=2}^{n}D_l^2\right)u+\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n}a_{ijk}(x)D_iD_jD_ku+$$
$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x)D_iD_j\,u+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_i\,u+a_0(x)\,u=f(x),$$

где $a_{1ii}(x)\equiv\alpha_1(x)$ для всех i, для которого, насколько нам известно, корректность задачи Коши до сих пор не изучена, из результатов теоремы 2 получаются следующие достаточные условия корректности:

1. Существует постоянная $c>0$, для которой матрица $D=\|d_{ij}\|_1^4$ является неотрицательно определенной, где

$$d_{11} = c\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}\,\Delta_1 - a_{111}, \quad d_{22} = c\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}\,\frac{\Delta_2}{\Delta_1} - D_1\,(\nu_1^2 + \nu_2^2),$$

$$d_{33} = c\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2} - \left[D_1\,(\nu_1^4 + \nu_2^4) + \frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + \nu_2^2)\,\alpha_1 \right],$$

$$d_{44} = c\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}\,\frac{\Delta_4}{\Delta_3} - D_1 \left[(\nu_1^2 + \nu_2^2)\lambda_1^2\lambda_2^2 \right],$$

$$d_{31} = d_{13} = \left[D_1\,(\nu_1^2 + \nu_2^2) - \alpha_1 + \frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + \nu_2^2)\,a_{111} \right],$$

$$d_{24} = d_{42} = 2D_1\,(\nu_1^2\,\nu_2^2),$$

а остальные $d_{ij} = 0$.

2. Существуют постоянные $c_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, 7)$, для которых

$$c_1\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \sum_{l=2}^{n} |\zeta_1^2\zeta_l|^2 - \left(\sum_{l=2}^{n}\left[-2D_l\,(\nu_1^2\,\nu_2^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + \nu_2^2)a_{11l}\right]\zeta_1^2\zeta_l\right)^2 \geqslant 0,$$

$$c_2\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2} \sum_{l,\,j,\,k=2}^{n} |\zeta_l\zeta_j\zeta_k|^2 - \left(\sum_{l,\,j=2}^{n}\left[\nu_1^2\,\nu_2^2\,D_l\,(\nu_1^2 + \nu_2^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\,(\nu_1^2 + \nu_2^2)a_{ljj}\right]\zeta_l\zeta_j^2\right)^2 \geqslant 0,$$

$$c_3\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)^2 \sum_{l,\,j=2}^{n} |\zeta_1\zeta_l\zeta_j|^2 - (\nu_1^2 + \nu_2^2)^2\left(\sum_{l+j=2}^{n} a_{1lj}\,\zeta_1\zeta_l\zeta_j\right)^2 \geqslant 0,$$

$$c_4\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2} \sum_{l,\,j,\,k=2}^{n} |\zeta_l\zeta_j\zeta_k|^2 - (\nu_1^2 + \nu_2^2)^2\left(\sum_{l,\,j+k,\,=2}^{n} a_{ljk}\,\zeta_l\zeta_j\zeta_k\right)^2 \geqslant 0,$$

$$c_5\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)^2 \sum_{l,\,j=2}^{n} |\zeta_l\zeta_j|^2 - x_1^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2\left(\sum_{l,\,j=2}^{n} a_{lj}\,\zeta_l\zeta_j\right)^2 \geqslant 0,$$

$$c_6\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \sum_{l=2}^{n} |\zeta_1\zeta_l|^2 - x_1^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2\left(\sum_{l=2}^{n} a_{1l}\,\zeta_1\zeta_l\right)^2 \geqslant 0,$$

$$c_7\left(\frac{D_1\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \sum_{l=2}^{n} |\zeta_l|^2 - x_1^4(\nu_1^2 + \nu_2^2)^2\left(\sum_{l=1}^{n} a_l\,\zeta_l\right)^2 \geqslant 0,$$

$$|a_{111}(x)| \leqslant \text{const}\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}, \quad |a_{11}(x)| \leqslant \text{const}\,x_1^{-1}\frac{D_1\lambda}{\lambda},$$

$$|a_1(x)| \leqslant \text{const}\,x_1^{-2}\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}, \quad |a_0(x)| \leqslant \text{const}\,x_1^{-3}\,\frac{D_1\lambda}{\lambda}.$$

В частности, при $\nu_1 = x_1^{\alpha}$, $\nu_2 = x_1^{\beta}$, $\beta < \alpha$, условиями корректности могут служить следующие простые оценки:

$$
\begin{aligned}
&|a_{ijk}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{3\beta-1}, && |a_i| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{\beta-3},\\
&|a_{Ijk}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{2\beta-1}, && |a_{III}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{-1},\\
&|a_{IIk}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{\beta-1}, && |a_{II}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{-2},\\
&|a_{ij}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{2\beta-2}, && |a_I| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{-3},\\
&|a_{Ij}| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{\beta-2}, && |a_0| \leqslant \mathrm{const}\; x_1^{-4}.
\end{aligned}
$$

Ереванский государственный университет

Поступила 19.III.1973

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ, Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կոշու խնդրի կոռեկտությունը մի դասի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը որոշ դասի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար։ Ենթադրվում է, որ խարակտերիստիկ թվերը ձգտում են զրոյի սկզբնական հիպերհարթությանը մոտենալիս։

Ապացուցվում է այդ Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը, միակությունը և կայունությունը, երբ հավասարման ցածր կարգի անդամների գործակիցները բավարարում են որոշակի հանրահաշվական բնույթի պայմանների։

A. B. NERSESIAN, A. H. HOVANESIAN. *On the correctness of the Chauchy's problem for a certain class of weakly hyperbolic equations* (summary)

In the present paper the Chauchy's problem for weakly hyperbolic equations from a certain class is considered. Under the assumption that characteristic numbers of the equation vanish on the initial hyperplane, and the coefficients of low order terms satisfy a certain algebraic conditions, the correctness of the Chauchy's problem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961.
2. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения произвольного порядка с данными на линии вырождения, Дифференциальные уравнения, 4, № 9, 1968.
3. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 181, № 4, 1968, 798—801.
4. *О. А. Олейник, Е. В. Радкевич.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, Итоги Науки, серия Математика, Мат. анализ, 1969, Москва, 1971.
5. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, 3, № 2, 1968.
6. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений, Учёные записки ЕГУ, 3(109), 1968.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS