ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին լչերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

Л. А. ПЕТРОСЯН

ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ЗАДЕРЖКОЙ ИНФОРМАЦИЙ У ИГРОКА P

В обширной литературе по теории дифференциальных игр в основном рассматривались игры с полной информацией, в которых игроки P (преследователь) и E (преследуемый) в каждый момент времени t при выборе управлений $u \in U \subset R^l$, $v \in V \subset R^k$ имеют информацию о состоянии процесса t, $x(t)$, $y(t)$. Иногда дополнительно предполагалось, что один из игроков имеет информацию об управляющей переменной, выбираемой противником. В случае, когда движения игроков P и E независимы, т. е. уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \dot{y} = g(y, v), \tag{1}$$

$x \in R^n, y \in R^n, x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ и игра имеет предписанную продолжительность T, доказаны теоремы, гарантирующие существование ситуаций ε-равновесия для любого $\varepsilon > 0$ в классе чистых (нерандомизированных) стратегий (см. [1], [2], [3]). Много сделано также для получения эффективных способов нахождения самих ε-оптимальных стратегий (см. [4], [5], [6]). При этом наиболее ощутимые результаты получены в задачах, где оптимальная стратегия E оказывается просто функцией времени. Хотя проблема еще далеко не исчерпана, дальнейшее развитие упомянутых методов сталкивается с обычными комбинаторными трудностями, которые присущи играм с полной информацией.

В то же время с точки зрения приложений предположение о наличии у игроков полной информации является сильной идеализацией. Поэтому представляется целесообразным постановка и изучение дифференциальных игр преследования с неполной информацией. К числу таких игр относится игра преследования с предписанной продолжительностью с задержкой информации у игрока P.

Состояние информации в игре следующее. Задано некоторое число $l > 0$, называемое задержкой информации. При $0 \leqslant t \leqslant l$ игрок P в каждый момент времени t знает свое состояние $x(t)$, время t и состояние игрока E в начальный момент y_0. При $l < t \leqslant T$, P в каждый момент t знает свое состояние $x(t)$, время t и состояние игрока E в момент $t-l$, $y(t-l)$. E в каждый момент времени t знает $x(t)$, $y(t)$, t. Выигрыш E равен $\rho(x(T), y(T))$. Игра антагонистическая. Обозначим эту игру через $\Gamma(x_0, y_0, T)$.

Кусочно-программные чистые стратегии. Под кусочно-программной чистой стратегией игрока E, $v(\cdot)$, мы будем понимать пару $\{\tau, b\}$, где τ—разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0=t_1<t_2<\cdots<t_s=T$ и b — отображение, которое каждому состоянию $x(t_k)$, $y(t_k)$, t_k ставит в соответствие отрезок измеримого программного управления $v(t)$ игрока E, при $t\in[t_k, t_{k+1})$. Под кусочно-программной чистой стратегией игрока P, $u(\cdot)$, мы будем понимать пару $\{\sigma, a\}$, где σ—произвольное разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0=t_1'<t_2'<\cdots<t_k'=T$ и a — отображение, которое каждому состоянию $x(t_k)$, $y(t_k-l)$, t_k, при $t_k>l$ ставит в соответствие отрезок измеримого программного управления игрока P, $u(t)$, при $t\in[t_k, t_{k+1})$; при $t_k<l$ отображение a ставит в соответствие каждому состоянию $x(t_k)$, y_0, t_k отрезок измеримого управления игрока P, $u(t)$, при $t\in[t_k, t_{k+1})$.

Множество всех кусочно-программных чистых стратегий игроков P и E мы будем обозначать, соответственно, через **P** и **E**.

Игра развивается в соответствии с уравнениями движения (1), при этом мы будем предполагать выполненными все условия, гарантирующие существование и единственность решения системы (1) на отрезке $[0, T]$ для любой пары измеримых программных управлений $u(t)$, $v(t)$. Это гарантирует существование единственного решения системы (1) при применении игроками P и E кусочно-программных стратегий $u(\cdot)\in\mathbf{P}$, $v(\cdot)\in\mathbf{E}$ и при заданных начальных условиях x_0, y_0.

Таким образом, в любой ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$ при заданных начальных условиях x_0, y_0 функция выигрыша определяется однозначно

$$K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot))=\rho(x(T), y(T)), \tag{2}$$

где $x(t)$, $y(t)$—решение системы (1) из начальных состояний x_0, y_0 в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$, а ρ—евклидово расстояние.

Хорошо известно, и это можно показать на простейших примерах, что, вообще говоря

$$\sup_{v(\cdot)\in E}\ \inf_{u(\cdot)\in P} K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot))\neq \inf_{u(\cdot)\in P}\ \sup_{v(\cdot)\in E} K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot)), \tag{3}$$

поскольку рассматриваемая игра $\Gamma(x_0, y_0, T)$ не является игрой с полной информацией. Из (3) следует, что, вообще говоря, ε-ситуации равновесия в этой игре существуют не для всех $\varepsilon>0$. Поэтому мы пойдем по пути, предложенному Ф. Нейманом и О. Моргенштерном для конечных позиционных игр с неполной информацией. Мы расширим пространства стратегий **P**, **E** до так называемых смешанных кусочно-программных стратегий поведения (СКПСП), которые включают в себя возможность случайного выбора управления на каждом шаге. Далее мы покажем, что в таком классе стратегий равенство (3) выполняется.

СКПСП. Под СКПСП игрока P мы будем понимать пару $\mu(\cdot)=\{\tau, \alpha\}$, где τ — произвольное разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0=t_1<t_2<\cdots<t_k=T$, и α—отображение, ставящее в соответствие состоянию $x(t_k)$, $y(t_k-l)$, t_k, при $t_k>l$, и состоянию $x(t_k)$, y_0, t_k при $t_k<l$ вероятностное распределение $\alpha_k(\cdot)$, сосредоточенное на конечном числе измеримых программных управлений

$u(t)$, при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Аналогично под СКПСП игрока E мы будем понимать пару $\nu(\cdot)=\{\sigma, \beta\}$, где σ есть произвольное разбиение отрезка времени $[0, T]$ конечным числом точек $0=t_1' < t_2' < \cdots < t_s' = T$ и β отображение, ставящее в соответствие состоянию $x(t_k)$, $y(t_k)$, t_k вероятностное распределение $\nu_k(\cdot)$, сосредоточенное на конечном числе измеримых программных управлений $v(t)$, при $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Множества СКПСП игроков P и E мы будем обозначать соответственно через $\overline{\mathbf{P}}$ и $\overline{\mathbf{E}}$.

Каждая пара СКПСП $(\mu(\cdot), \nu(\cdot))$ при фиксированных начальных условиях x_0, y_0 индуцирует распределение вероятностей на пространстве кусочно-программных стратегий $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, поэтому под выигрышем $M(x_0, y_0; \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ в СКПСП мы будем понимать математическое ожидание выигрыша $K(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot))$, усредненное по распределениям на пространствах $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$, которые индуцируются СКПСП $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$.

Определив пространства стратегий $\overline{\mathbf{P}}$, $\overline{\mathbf{E}}$ и выигрыш M, мы для некоторых начальных условий x_0, y_0, T определили смешанное расширение $\overline{\Gamma}(x_0, y_0, T)$ игры $\Gamma(x_0, y_0, T)$.

Введем в рассмотрение следующую вспомогательную величину. Пусть $C_E^T(y)$ — множество достижимости игрока E. Обозначим через $\overline{C}_E^T(y)$ выпуклую оболочку множества $C_E^T(y)$. Положим

$$\gamma(y, T) = \min_{\eta' \in \overline{C}_E^T(y)} \max_{\eta'' \in C_E^T(y)} \rho(\eta', \eta''). \tag{4}$$

Пусть $\gamma(y, T)$ достигается в точках $(\bar{\bar{y}}, \bar{y})$, так что

$$\min_{\eta' \in \overline{C}_E^T(y)} \max_{\eta'' \in \overline{C}_E^T(y)} \rho(\eta', \eta'') = \rho(\bar{\bar{y}}, \bar{y}). \tag{5}$$

Из определения $\bar{\bar{y}}$ следует, что это центр минимальной сферы, содержащей множество $C_E^T(y)$. Отсюда получаем, что точка $\bar{\bar{y}}$ единственна. В то же время существуют по крайней мере две точки касания этого множества с минимальной содержащей его сферой, которые совпадают с точками $\bar{y}$.

Пусть $y(t)$—некоторая траектория игрока E, $y(0) = y_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Когда E перемещается вдоль $y(t)$, величина $\gamma(y(t), T-t)$ также изменяется. Пусть $\bar{\bar{y}}(t)$— траектория точки $\bar{\bar{y}}$ из (5), соответствующая траектории $y(t)$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь случай, когда для всех траекторий $y(t)$, $\bar{\bar{y}}(T) \in C_P^T(x)$. Назовем точку $\overline{M}$ центром преследования, если в ней достигается

$$\gamma(\overline{M}, l) = \max_{y' \in C_E^{T-l}(y)} \gamma(y', l).$$

Таким образом

$$\gamma(\overline{M}, l) = \max_{y' \in C_E^{T-l}(y)} [\min_{\eta' \in \overline{C}_E^l(y')} \max_{\eta'' \in C_E^l(y')} \rho(\eta' \cdot \eta'')]. \quad ($$

Рассмотрим вспомогательную одновременную игру преследовани на выпуклой оболочке множества $C_E^T(y)$. Игрок P выбирает некот рую точку $\eta' \in \overline{C}_E^T(y)$ и игрок E выбирает точку $\eta'' \in C_E^T(y)$. Выбо ры совершаются одновременно, и игрок P при выборе η' не знае выбора η'' и наоборот. Игрок E выигрывает величину $\rho(\eta', \eta'')$. Об значим значение этой игры через $V(y, T)$, чтобы подчеркнуть зави симость значения от параметров y, T, определяющих множества стра тегий игроков P и E, $\overline{C}_E^T(y)$ и $C_E^T(y)$. Игра в нормальной форме за писывается следующим образом:

$$\Gamma(y, T) = < C_E^T(y), \ C_E^T(y), \rho(y', y'') >.$$

Множество стратегий минимизирующего игрока P, $\overline{C}_E^T(y)$ выпукло ка выпуклая оболочка множества $C_E^T(y)$, функция $\rho(y', y'')$ также вы пукла по своим аргументам и непрерывна. Для таких игр мы може применить следующую теорему (см. [7]).

Теорема 1. В игре $\Gamma(y, T)$ существует ситуация равновеси в смешанных стратегиях. Оптимальная стратегия P—чистая, а опти мальная стратегия E предписывает положительную вероятность н более, чем $n+1$-ой точке множества $C_E^T(y)$ ($C_E^T(y) \subset R^n$). Значение игры равно

$$V(y, T) = \min_{\eta' \in \overline{C}_E^T(y)} \max_{\eta'' \in C_E^T(y)} \rho(\eta', \eta'')$$

или $\gamma(y, T) = V(y, T)$.

Таким образом получаем, что оптимальная стратегия P в игре $\Gamma(y, T)$ совпадает с выбором точки y (которая единственная), а оп тимальная стратегия игрока E предписывает положительные вероят ности не более, чем $n+1$ точке из точек $\overline{y}$ касания минимальной сфе ры, содержащей множество $C_E^T(y)$, с центром в точке $\overline{\overline{y}}$. Значение игры равно радиусу этой сферы.

Рассмотрим одновременную игру $\Gamma(\overline{M}, l)$, где $\overline{M}$ — центр пре следования, определенный в (6). Обозначим через $\overline{y}_1(\overline{M}), \cdots, \overline{y}_{n+1}(\overline{M})$ точки из $C_E^l(\overline{M})$, которые входят в спектр оптимальной смешанной стратегии E в $\Gamma(\overline{M}, l)$ и через $\overline{\overline{y}}(\overline{M})$ — центр минимальной сферы, содержащей множество $\overline{C}_E^l(\overline{M})$, т. е. оптимальную стратегию P в игре $\Gamma(\overline{M}, l)$.

Определение. Траектория $y_k^*(t)$ называется условно-опти мальной, если $y^*(0) = y_0$, $y^*(T-l) = \overline{M}$, $y^*(T) = \overline{y}_k$ для некоторо го k из $k = 1, \cdots, n+1$. Для каждого k может существовать несколь ко условно-оптимальных траекторий игрока E.

Теорема 2. *Пусть $T \gg l$ и для любого $\varepsilon > 0$ игрок P к моменту времени T может гарантировать ε-встречу с центром $\bar{y}(t)$ минимальной сферы, содержащей множество $C_E^l(y(t))$, тогда игра $\Gamma(x_0, y_0, T)$ имеет ситуацию равновесия в кусочно-программных смешанных стратегиях. ε-оптимальная стратегия игрока P — чистая и совпадает с любой стратегией P, гарантирующей $\frac{1}{2}\varepsilon$-встречу с точкой $\bar{y}(t)$; оптимальная стратегия игрока E — смешанная: в течение времени $0 \leqslant t \leqslant T-l$ перемещаться в точку $\bar{M}$ по любой из условно-оптимальных траекторий $y^*(t)$ и далее выбирать с вероятностями $p_1, \cdots, p_{n+1}$ (оптимальная стратегия E в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$) одну из условно-оптимальных траекторий, переводящих точку $y^*(T-l)=\bar{M}$ в точки $\bar{y}_k(\bar{M})$, $k=1, \cdots, n+1$, входящие в спектр оптимальной смешанной стратегии игрока E в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$. Значение игры при этом равно $\gamma(\bar{M}, l)$.*

Доказательство. Обозначим через $\dot{u}_\varepsilon(\cdot)$ одну из стратегий игрока P, существование которой предполагается в теореме, и через $\nu^*(\cdot)$ СКПСП игрока E, оптимальность которой мы собираемся показать. Необходимо доказать, что

$$M(x_0, y_0; \mu(\cdot), \nu^*(\cdot)) + \varepsilon \geqslant M(x_0, y_0; \dot{u}_\varepsilon(\cdot), \nu^*(\cdot)) \geqslant$$
$$\geqslant M(x_0, y_0; \dot{u}_\varepsilon(\cdot), \nu(\cdot)) - \varepsilon \tag{7}$$

для всех $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$. Известно, однако (см. [8]), что для доказательства справедливости (7) достаточно доказать (7) не для всех СКПСП, а только для чистых КПС игроков P и E, т. е. достаточно доказать, что

$$M(x_0, y_0; u(\cdot), \nu^*(\cdot)) + \varepsilon \geqslant M(x_0, y_0; \dot{u}_\varepsilon(\cdot), \nu^*(\cdot)) \geqslant \tag{8}$$
$$\geqslant M(x_0, y_0; \dot{u}_\varepsilon(\cdot), v(\cdot)) - \varepsilon,$$

для всех $u(\cdot) \in \mathbf{P}$, $v(\cdot) \in \mathbf{E}$. Обозначим через $x^*(t)$ траекторию P в ситуации $(\dot{u}_\varepsilon(\cdot), \nu^*(\cdot))$. Тогда

$$M(x_0, y_0; \dot{u}_\varepsilon(\cdot), \nu^*(\cdot)) = \sum_{k=1}^{n+1} p_k \rho(x^*(T), \bar{y}_k). \tag{9}$$

Пусть R — радиус минимальной сферы, содержащей множество $C_E^l(\bar{M})$, т. е. $R = \gamma(\bar{M}, l)$, тогда $R - \varepsilon \leqslant \rho(x^*(T), \bar{y}_k) \leqslant R + \varepsilon$ для всех $k = 1, \cdots, n+1$. Из (9) имеем $\left(\sum_{k=1}^{n+1} p_k = 1\right)$

$$R - \varepsilon \leqslant M(x_0, y_0; \dot{u}_\varepsilon(\cdot), \nu^*(\cdot)) \leqslant R + \varepsilon. \tag{10}$$

Пусть теперь $Q(\cdot)$ — вероятностная мера, индуцированная СКПСП $\nu(\cdot)$ на множестве $C_E^l(\bar{M})$. Из оптимальности смешанной стратегии $p = (p_1, \cdots, p_{n+1})$ в игре $\Gamma(\bar{M}, l)$ имеем, что

$$R = \sum_{k=1}^{n+1} p_k \rho(\overline{M}, \overline{y}_k) > \int_{C_E^l(\overline{M})} \rho(\overline{M}, y)\, dQ. \tag{11}$$

Однако $\rho(x^*(T), \overline{M}) \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$\rho(x^*(T), y) \leqslant \varepsilon + \rho(\overline{M}, y) = R + \varepsilon. \tag{12}$$

Из (10), (11), (12) имеем

$$M(x_0, y_0;\ u_\varepsilon^*(\cdot), \nu^*(\cdot)) > \int_{C_E^l(M)} \rho(x^*(T), y)\, dQ - \varepsilon, \tag{14}$$

однако

$$\int_{C_E^l(\overline{M})} \rho(x^*(T), y)\, dQ = M(x_0, y_0;\ u_\varepsilon^*(\cdot), \nu(\cdot)). \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем правую часть неравенства (7). Левая часть (8) непосредственно следует из определения стратегии $u_\varepsilon^*(\cdot)$.

Замечание. При $T < l$ решение игры существенно не отличается и формулировка теоремы сохраняет силу, если вместо $C_E^l(y_0)$, $\overline{C}_E^l(y_0)$, $\gamma(\overline{M}, l)$, $y(T-l)$ понимать соответственно $C_E^T(y_0)$, $\overline{C}_E^T(y_0)$, $\gamma(\overline{M}, T)$, y_0.

При $l \to 0$ диаметр $D[C_E^l(\overline{M})]$ множества $C_E^l(\overline{M})$ стремится к нулю, что, в свою очередь, влечет стремление к нулю значения вспомогательной игры $\Gamma(\overline{M}, l)$. Однако значение вспомогательной одновременной игры $\Gamma(\overline{M}, l)$ относительно множеств $\overline{C}_E^l(\overline{M})$, $C_E^l(\overline{M})$ равно значению игры преследования с задержкой информации l, которое мы обозначим $\operatorname{Val}\Gamma(x_0, y_0, T) = V_l(x_0, y_0, T)$ (здесь индекс l означает задержку информации).

Отсюда имеем

$$\lim_{l \to 0} V_l(x_0, y_0, T) = 0. \tag{16}$$

Поскольку $\lim\limits_{l \to 0} D[C_E^l(\overline{M})] = 0$, то смешанная оптимальная стратегия E в игре $\Gamma(\overline{M}, l)$, сосредотачивающая свою массу на не более чем $n+1$ точках из $C_E^l(\overline{M})$ в пределе сосредотачивает всю массу в одной точке $\overline{M}$, т. е. превращается в чистую стратегию. Это, в свою очередь, влечет существование, при $l \to 0$ чистой оптимальной стратегии E в игре $\Gamma(x_0, y_0, T)$, что вполне согласуется с тем фактом, что при $l \to 0$ игра $\Gamma(x_0, y_0, T)$ превращается в игру с полной информацией.

Простейшим примером развитой в настоящей работе теории является пример простого преследования, опубликованный в заметке [9].

Пример 1. Уравнения движения имеют вид

$$P: \dot{x} = u, \ |u| \leqslant \alpha,$$

$$E: \dot{y} = v, \ |v| \leqslant \beta, \ \alpha > \beta, \ x \in R^2, \ y \in R^2.$$

Пусть x_0, y_0 — начальное состояние игры, время T удовлетворяет условию

$$T > \frac{\rho(x_0, y_0)}{\alpha - \beta} + l \tag{17}$$

(здесь ρ — евклидово расстояние между точками x_0, y_0). Множество достижимости $C_E^l(y_0) = \overline{C}_E^l(y_0)$ и совпадает с кругом с центром y_0 и радиусом βl. Значение игры $\Gamma(y, l)$ равно радиусу круга $C_E^l(y)$, т. е.

$$\mathrm{Val}\,\Gamma(y, l) = \beta l. \tag{18}$$

Мы видим, что $\mathrm{Val}\,\Gamma(y, l)$ не зависит от y, следовательно любая точка множества $C_E^{T-l}(y_0)$ может служить в качестве точки $\overline{M}$. Оптимальная стратегия P в игре $\Gamma(y, l)$ заключается в выборе y, а оптимальная стратегия E — смешанная и заключается в выборе двух любых диаметрально противоположных точек круга $C_E^l(y)$ с вероятностями (1/2, 1/2).

В соответствии с этим, оптимальная чистая стратегия P в игре $\Gamma(x_0, y_0, T)$ заключается в погонном нацеливании на точку $y(t-l)$, $l \leqslant t \leqslant T$ (при $0 \leqslant t \leqslant l$ на точку y_0) до встречи с этой точкой и до момента T оставаться в ε-окрестности этой точки. Оптимальная стратегия E есть КПССП и заключается в течении времени $T-l$ в переходе из y_0 в произвольную точку $\overline{M} \in C_E^{T-l}(y_0)$ и далее в выборе двух направлений на две диаметрально противоположные точки круга $C_E^l(\overline{M})$ с вероятностями (1/2, 1/2).

При этом

$$\mathrm{Val}\,\Gamma(x_0, y_0, l) = \beta l.$$

Очевидно имеем

$$\lim_{l \to 0} V_l(x_0, y_0, T) = \lim_{l \to 0} \beta l = 0$$

и в предельной игре с полной информацией P, для любого $\varepsilon > 0$, гарантирует ε-встречу с E, в то же время при $l > 0$, P может гарантировать встречу на расстоянии не менее чем βl.

Пример 2. Уравнения движения имеют вид

$$P: \begin{array}{l} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \end{array} \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant \alpha^2, \tag{19}$$

$$E: \begin{array}{l} \dot{y}_1 = v y_2 + y_1, \\ \dot{y}_2 = -1, \end{array} \quad -1 \leqslant v \leqslant +1. \tag{20}$$

Множество достижимости игрока P то же, что и в игре из примера 1. Найдем множество достижимости игрока E. Имеем

$$y_2(t) = y_2(0) - t, \qquad (21)$$

положим $v = +1$ и подставим (21) в первое из уравнений (20). Получим

$$y_1(t) = t + 1 + y_2(0) + [y_1(0) + y_2(0) - 1]\, e^t. \qquad (22)$$

Полагая $v = -1$, получим

$$y_1(t) = -t - 1 + y_2(0) + [y_1(0) - y_2(0) + 1]\, e^t. \qquad (23)$$

Можно показать, что множество достижимости $C_E^T(y_1(0),\ y_2(0))$ совпадает с отрезком, соединяющим точки

$$A = t + 1 - y_2(0) + (y_1(0) + y_2(0) - 1)\, e^t,$$

$$B = -t - 1 + y_2(0) + (y_1(0) - y_2(0) + 1)\, e^t.$$

Радиус минимальной сферы, содержащей $C_E^t(y_1(0),\ y_2(0))$ равен половине длины отрезка $[A,\ B]$

$$R\,[C_E^t(y_1(0),\ y_2(0))] = |1 - y_2(0) + t - (1 - y_2(0))\, e^t|.$$

Таким образом, значение вспомогательной одновременной игры $\Gamma(y_1(0),\ y_2(0);\ l)$ равно

$$\mathrm{Val}\ \Gamma(y_1(0),\ y_2(0);\ l) = |1 - y_2(0) + l - (1 - y_2(0))\, e^l|.$$

Для того чтобы найти значение игры преследования надо определить

$$\max_{(y_1,\ y_2) \in C_E^{T-l}(y_1(0),\ y_2(0))} \mathrm{Val}\ \Gamma(y_1,\ y_2;\ l) =$$

$$= \max_{(y_1,\ y_2) \in C_E^{T-l}(y_1(0),\ y_2(0))} |1 - y_2 + l - (1 - y_2)\, e^l|. \qquad (24)$$

Однако множество достижимости $C_E^{T-l}(y_1(0),\ y_2(0))$ состоит только из точек вида $\{y_1,\ y_2 = y_2(0) - T + l\}$, поэтому максимум в (24) равен просто

$$|1 + T - y_2(0) - (1 + T - l - y_2(0))\, e^l|.$$

Оптимальная стратегия P заключается в преследовании центра множества достижимости $C_E^l(y_1,\ y_2)$ (середина отрезка $[A,\ B]$). (Предполагается, что за время T, P может гарантировать встречу с этим центром).

Оптимальная стратегия E, при $t \in [0,\ T - l)$ произвольна, в момент времени $T - l$, E выбирает с вероятностями 1/2, 1/2 одно из двух возможных значений управления $v = +1$, $v = -1$, на оставшемся промежутке времени $(T - l,\ T]$ игрок E выбирает $v(t)$ тождественно равное управлению, выбранному им в момент $T - l$ в результате применения случайного механизма.

Ленинградский государственный
университет

Поступила 20.III.1972

Լ. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Հետապնդման խաղեր P խաղացողի տեղեկության ուշացումով *(ամփոփում)*

Դիտվում է P խաղացողի տեղեկության ուշացումով դիֆերենցյալ խաղերի մի դաս։ Խաղի լուծումը գտնվում է խառը վարքակերպերի (ստրատեգիաների) դասում։ Ապացուցվում է լուծման գոյությունը և տրվում է կոնստրուկտիվ մեթոդ վերջինս գտնելու համար։

L. A. PETROSIAN. *Pursuit games with an information lag* (summary)

We consider pursuit games with perscribed duration T and information lag l about the evaders position. The payoft is equal to the distance between the players at moment T. The game has incomplete information, thus no solution in pure strategies exists. We prove that there exist the optimal mixed strategy for the evader and an optimal pure strategy for the pursuer, and give a constructive method of finding this strategies,

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Петров.* О существовании значения игры преследования, ДАН СССР, 190, № 6, 1970.
2. *О. А. Малафеев.* О существовании обобщенного значения игры преследования, Управляемые системы, вып. 4—5, 1970.
3. *P. P. Varaiya.* On the existence of solutions to a differential game, SIAM Journal on Control, vol. 5, 1967.
4. *Н. Н. Красовский.* Игровые задачи о встрече движений, изд. „Наука", 1970.
5. *Б. Н. Пшеничный.* Структура дифференциальных игр, ДАН СССР, 184, № 2, 1969.
6. *Л. А. Петросян.* Топологические игры и их приложения к задачам преследования, I, Вестник ЛГУ, № 19, вып. 4, 1969.
7. *Д. Мак-Кинси.* Введение в теорию игр, М., ФМ, 1960.
8. *Н. Н. Воробьев.* Конечные бескоалиционные игры, УМН, 14, № 4, 1959.
9. *Л. А. Петросян.* Дифференциальные игры с неполной информацией, ДАН СССР, 195, № 3, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

А. М. ЛУКАЦКИЙ

О РАЗЛОЖЕНИИ В РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

В работе М. М. *Джрбашяна* [1] для произвольного ограниченного континуума K была построена система рациональных функций $\{M_n(z)\}_0^\infty$, являющаяся естественным обобщением хорошо известных полиномов Фабера на тот случай, когда полюса функций системы не совпадают все с бесконечностью, а лежат на произвольной последовательности точек $\{\omega_k\}_0^\infty \subset G^-$—неограниченной компоненте дополнения K. Было показано, что в случае, когда континуум K совпадает с замыканием жордановой области G^+, граница которой Γ—спрямляемая кривая, удовлетворяющая некоторому дополнительному условию, система $\{M_n(z)\}_0^\infty$ образует базис в пространстве функций, аналитических в G^+ и непрерывных в $G^+ \cup \Gamma$ при следующем условии на полюса:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = \infty, \tag{1}$$

где $w = \Phi(z)$ $(z = \psi(w))$—функция, конформно отображающая G^- на область $|w| > 1$, причем $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

Система $\{M_n(z)\}_0^\infty$ строилась следующим образом. Рассматривалась система Такенака-Мальмквиста, ортонормальная на единичной окружности $|w| = 1$:

$$\varphi_0(w) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_0|^2}}{1 - \bar{\alpha}_0 w},$$

$$\varphi_n(w) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_n|^2}}{1 - \bar{\alpha}_n w} \prod_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k - w}{1 - \bar{\alpha}_k w} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2}$$

где $\alpha_k = \overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. При $\alpha_k = 0$ полагаем $\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} = -1$.

Функция $M_n(z)$ определялась как сумма главных частей и постоянных в лорановском разложении функции $\varphi_n[\Phi(z)]$ в окрестности точек $\{\omega_k\}_0^n$.

В дальнейшем с целью освобождения от ограничения на спрямляемый контур Г. Ц. Тумаркин [2] рассмотрел модифицированную систему $\{M_n^*(z)\}_0^\infty$, определяемую аналогичным образом из лорановского разложения функций $\varphi_n[\Phi(z)]\sqrt{\Phi'(z)}$.

Наконец, М. М. *Джрбашян* в работах [3], [4] изучил разложения по модифицированным системам $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$:

$$\sum_{0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z) \tag{3}$$

при условии

$$\sum_{0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \tag{4}$$

для случая, когда континуум $K = \overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей.

Функция $M_n^{(s)}(z) (0 \leqslant s \leqslant 1)$ определялась из лорановского разложения функции $\varphi_n[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s$ в окрестности $\{\omega_k\}_0^n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

В настоящей работе рассматривается одна из модифицированных систем М. М. Джрбашяна, а именно, система $\{M_n^{(1)}(z)\}$.

Целью этой работы является, во-первых, исследовать сходимость рядов

$$\sum_{0}^{\infty} c_k M_k^{(1)}(z) \tag{5}$$

при более общих условиях на коэффициенты c_k, чем [4], причем уже для произвольного ограниченного континуума, во-вторых, в случае, когда K совпадает с замыканием жордановой области со спрямляемой границей, расширить класс функций, представимых рядами [5].

Отметим, что такое обобщение связано со значительными трудностями и не является простым перенесением результатов [3] и [4]. Если при условии [4] могли быть использованы теорема Рисса-Фишера и другие хорошо известные методы гильбертового пространства, то в нашем случае приходится привлекать сведения из теории особых интегралов, а также некоторые результаты автора для круга, что приводит к довольно громоздким выкладкам.

Автор выражает благодарность профессору А. И. Маркушевичу и профессору Г. Ц. Тумаркину за помощь и внимание к настоящей работе.

§ 1. Разложение в ряды по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ при условии (1):

$$\sum_{0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = \infty$$

Пусть K — произвольный ограниченный континуум, U — его внутренность, $\{G_l\}_0^l$ $(0 \leqslant l \leqslant \infty)$ — совокупность всех ограниченных компонент его дополнения, число которых может быть бесконечно, G^- — неограниченная компонента дополнения K. Положим

$$\tilde{K} = K \cup \left(\bigcup_{l=0}^{l} G_l\right).$$

Очевидно, что дополнение $\tilde{K}$ совпадает с G^-, откуда немедленно следует, что $\tilde{K}$ — континуум и $\partial\tilde{K} = \partial G^-$. Через $\tilde{U}$ будем обозначать внутренность $\tilde{K}$. Очевидно, что

$$\widetilde{U}\supset U\cup\left(\bigcup_{l=0}^{l}G_l\right).$$

Имеют место равенства, непосредственно вытекающие из определения $M_k^{(1)}(z)$ (см. [4])

$$M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)]\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R}\frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w)-z},\tag{1.1}$$

$$z\in G_R^+\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots);$$

$$M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R}\frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w)-z}+\varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z),\tag{1.2}$$

$$z\in G_R^{-*}\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

где $R>1$ выбрано так, что все точки $\{\omega_l\}_0^k$ лежат вне Γ_R.

Функция $z=\psi(w)$ ограничена вблизи единичной окружности, следовательно по теореме Фату [8], она имеет почти всюду на $|w|=1$ угловые граничные значения. Кроме того справедливы следующие очевидные неравенства, при $z\in\widetilde{U}$

$$\inf_{|w|>1}|\psi(w)-z|>\inf_{\zeta\in\partial G^-}|\zeta-z|=\inf_{\zeta\in\partial\widetilde{K}}|\zeta-z|=d(z)>0,\tag{1.3}$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до $\partial\widetilde{K}$.

Переходя к пределу в крайних членах равенств (1.1) при $R\to1+0$ (законность такого перехода вытекает из (1.3)), получим

$$M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\varphi_k(w)dw}{\psi(w)-z},\ z\in\widetilde{U}\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots).\tag{1.1'}$$

Переходя к пределу при $R\to1+0$ в равенстве (1.2), получим

$$M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\varphi_k(w)\,dw}{\psi(w)-z}+\varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z),\tag{1.2'}$$

$$z\in G^-\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Нам потребуется в дальнейшем следующая лемма о разложении по системе (2).

Лемма 1. *Пусть дана система* (2), *где* $\{\alpha_k\}_0^\infty$ — *произвольная последовательность точек внутри единичного круга, удовлетворяющая условию*

$$\sum_0^\infty(1-|\alpha_k|)=\infty,$$

* Через Γ_R $(R>1)$ обозначен образ окружности $|w|=R$ при отображении $z=\psi(w)$; G_R^+ и G_R^- — соответственно внутренность и внешность кривой Γ_R.

функция $f(w)$ *принадлежит* L_p $(p>1)$*; c_k — *коэффициенты Фурье* $f(w)$ *по системе* (2).

Тогда ряд

$$\sum_{0}^{\infty} c_k \varphi_k(w) \tag{1.4}$$

сходится равномерно внутри $|w|<1$ *к некоторой функции* $F(w)\in H_p$**, *сходится на* $|w|=1$ *в метрике* L_p *к угловым значениям* $F(w)$ *изнутри* $|w|=1$.

Доказательство. Равномерная сходимость ряда (1.4) внутри $|w|<1$ доказана в [12], там же показано, что

$$F(w)=\sum_{0}^{\infty} c_k \varphi_k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{t-w}\,dt,\ |w|<1.$$

Из того, что $f(t)\in L_p$ вытекает [11], что $F(w)\in H_p$ и

$$F(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{F(t)}{t-w}\,dt,\ |w|<1.$$

Таким образом, имеем следующее тождество:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)-F(t)}{t-w}\,dt\equiv 0,\ |w|<1. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что функция $f(t)-F(t)$ аналитически продолжается с единичной окружности в ее внешность, т. е. справедливо разложение

$$f(t)-F(t)=\sum_{1}^{\infty} d_k t^{-k},\ |t|>1. \tag{1.6}$$

Ряд (1.6), как следует из теории обычных рядов Фурье, сходится на $|t|=1$ к $f(t)-F(t)$ в метрике L_p. Кроме того

$$d_k=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}[f(t)-F(t)]\,t^k\,|dt|=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}f(t)\,t^k\,|dt|\ .\ (k=1,2,\cdots).$$

Таким образом, d_k — коэффициенты Фурье функции $f(w)$ по системе $\{w^{-k}\}_1^{\infty}$. Система $\{\varphi_k(w)\}_0^{\infty}\cup\{w^{-k}\}_1^{\infty}$ полна в пространстве L_p [13]. Как следует из [12] (теорема 1), ряд Фурье по этой системе сходится на $|w|=1$ к $f(w)$ в метрике L_p.

Учитывая все вышесказанное, имеем

---

* Через $L_p(\Gamma)(p>1)$, Γ — спрямляемая жорданова кривая, будем обозначать пространство функций $g(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, для которых $\int_{\Gamma}|g(\zeta)|^p\,|d\zeta|<\infty$; в случае, когда Γ — единичная окружность, $L_p(\Gamma)=L_p$.

** Определение H_p см. в [8].

$$\left\| F(t)-\sum_{0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right\|_p^{*} \leqslant \left\| F(t)-f(t)+\sum_{1}^{m} d_k t^{-k}+f(t)-\right.$$

$$\left.-\sum_{1}^{m} d_k t^{-k}-\sum_{0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right\|_p \leqslant \left\| f(t)-F(t)-\sum_{1}^{m} d_k t^{-k} \right\|_p +$$

$$+\left\| f(t)-\sum_{1}^{m} d_k t^{-k}-\sum_{0}^{n} c_k \varphi_k(t) \right\|_p . \tag{1.7}$$

Подбирая достаточно большое m, получим, что при $n > N(\varepsilon)$ правая часть (1.7) меньше произвольного $\varepsilon > 0$, и ряд (1.4) сходится к $F(t)$ на $|t|=1$ в метрике L_p. Лемма доказана.

Хорошо известно, что полиномы Фабера для континуума K могут быть определены как коэффициенты ряда Лорана производящей функции

$$\chi(w, z)=\frac{1}{\psi(w)-z}, \ |w|>1 \tag{1.8}$$

в окрестности $w=\infty$.

Аналогом этого для системы $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ является следующее утверждение.

Лемма 2. *При условии* (1) *имеет место разложение*

$$\chi(w, z)=\sum_{0}^{\infty} M_k^{(1)}(z) \frac{1}{w} \overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)}, \ |w|>1, \tag{1.9}$$

равномерно сходящееся внутри $|w|>1$ *и в любой метрике* $L_p\,(p>1)$ *на* $|w|=1$ *при любом фиксированном* $z \in \widetilde{U}$.

Разложение (1.9) было установлено М. М. Джрбашяном [4] для $K=\overline{G}^{+}$, G^{+}—жорданова область со спрямляемой границей, сходимость на $|w|=1$ доказана в [4] в метрике L_2.

Доказательство. Функция (1.8) при фиксированном $z \in \widetilde{U}$ аналитична и ограничена в области $|w|>1$ и $\chi(\infty, z)=0$, значит, функция

$$\chi^*(\zeta, z)=\zeta^{-1}\,\overline{\chi(\overline{\zeta^{-1}}, z)}$$

аналитична и ограничена в $|\zeta|<1$ и принадлежит поэтому пространству H_p для любого p.

По лемме 1 имеем следующее разложение:

$$\chi^*(\zeta, z)=\sum_{0}^{\infty} a_k(z)\, \varphi_k(\zeta), \tag{1.10}$$

равномерно сходящееся внутри $|\zeta|<1$ и сходящееся на $|\zeta|=1$ в любой метрике $L_p\,(p>1)$, причем $a_k(z)$ вычисляются по формулам

---

* Через $\|\cdots\|_p$ обозначается норма функции в пространстве $L_p\ (p>1)$.

$$a_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \chi^*(\zeta, z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.11}$$

Замечая, что равенства (1.11) можно, очевидно, записать следующим образом:

$$M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \overline{\chi^*(\zeta, z)}\,\varphi_k(\zeta)\,|d\zeta| \quad (k=0, 1, 2, \cdots), \tag{1.12}$$

из (1.11) и (1.12) имеем

$$a_k(z) = \overline{M_k^{(1)}(z)} \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.13}$$

Производя в (1.10) замену $w = \overline{\zeta^{-1}}$ и учитывая (1.13), получим искомое разложение (1.9). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь ряд по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$

$$\sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z), \tag{1.14}$$

где c_k — коэффициенты Фурье некоторой функции $\gamma(w)$ из L_r $(r>1)$ по системе $\{\varphi_k(w)\}_0^\infty$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \gamma(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw| \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Имеет место следующая теорема о сходимости рядов (1.14) при условии (1).

Теорема 1. *Пусть $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ — система* М. М. Джрбашяна для произвольного ограниченного континуума K. Тогда при условии (1) ряд (1.14) с коэффициентами (1.15) сходится равномерно внутри $\tilde{U}^*$ и имеет место равенство*

$$\sum_0^\infty c_k M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{\psi(w) - z}, \quad z \in \tilde{U}. \tag{1.16}$$

Доказательство. Умножив обе части равенства (1.9) на $(2\pi i)^{-1}\gamma(w)\,dw$ и заметив, что разложение (1.9) сходится на $|w|=1$ в метрике $L_{r/(r-1)}$, получаем после интегрирования, что ряд (1.14) сходится и справедливо равенство (1.16) при любом фиксированном $z \in \tilde{U}$.

Покажем, что ряд (1.14) сходится равномерно внутри $\tilde{U}$. Пусть $z \in P$, P — произвольный компакт, принадлежащий $\tilde{U}$. Тогда, подобно (1.3), имеем

* На компактах, целиком принадлежащих $\tilde{U}$.

$$\inf_{\substack{z\in P\\ |w|>1}} |\psi(w)-z| \geqslant \inf_{\substack{z\in P\\ \zeta\in\partial\tilde{K}}} |\zeta - z| = d(P) > 0,$$

где $d(P)$ — расстояние между множествами P и $\partial\tilde{K}$, откуда, используя (1.11), получаем при любых $n > m > 0$

$$\left|\sum_m^n c_k M_k^{(1)}(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|w|=1} - \sum_m^n \frac{c_k \varphi_k(w)}{\psi(w)-z}\, dw\right| \leqslant$$

$$\leqslant [d(P)]^{-1} \left\| \sum_m^n c_k \varphi_k(w) \right\|_{L_r}. \tag{1.17}$$

Из (1.17) вытекает равномерная сходимость ряда (1.14), поскольку, по лемме 1 ряд $\sum\limits_0^\infty c_k \varphi_k(w)$ сходится на $|w|=1$ в метрике L_r. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь частный случай теоремы 1, когда континуум $K=\overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей Γ.

Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\quad g[\psi(w)]\,\psi'(w) \in L_r,\ r > 1. \tag{1.18}$$

Положим

$$c_k = c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} g[\psi(w)]\,\psi'(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|\ (k=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.19}$$

Учитывая, что при $\gamma(w) = g[\psi(w)]\,\psi'(w)$ правая часть (1.16) совпадает в G^+ с $f(z)$, из теоремы 1 немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши* (1.18), *тогда при условии* (1) *$f(z)$ разлагается в равномерно сходящийся внутри G^+ ряд по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k(g)\, M_k^{(1)}(z),\ z \in G^+, \tag{1.20}$$

где $c_k(g)$ определяются из формул (1.19).

Отметим, что у М. М. Джрбашяна аналогичный результат справедлив при более жестких условиях на функцию $f(z)$, а именно $g[\psi(w)]\,\psi'(w)$ должна принадлежать L_2 (см. [4], теорема 6).

Замечание. Несложно показать, что функция $f(z)$ представима интегралом типа Коши (1.18), если она представима интегралом типа Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ g(\zeta) \in L_p(\Gamma),\ p > 1 \tag{1.21}$$

при следующем дополнительном условии на спрямляемый контур:

$$\int\limits_{|w|=1} |\psi'(w)|^{\varkappa}\, |dw| < \infty \tag{1.22}$$

при некотором $\varkappa > 1$.

Покажем теперь, что при условии (1) разложение (1.20) обладает свойством единственности. Точнее имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $f(z)$, представимая в G^+ интегралом типа Коши* (1.18), *разлагается в ряд* (1.20), *и пусть также имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_k^* M_k^{(1)}(z), \quad z \in G^+, \tag{1.23}$$

где

$$c_k^* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \gamma^*(w)\, \overline{\varphi_k}(w)\, |dw|, \ \gamma^*(w) \in L_s, \ s > 1.$$

Тогда при условии (1)

$$c_k = c_k^* \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Отметим, что подобная теорема была доказана ранее М. М. Джрбашяном [4] для случая, когда

$$\sum_{0}^{\infty} |c_k(g)|^2 < \infty, \sum_{0}^{\infty} |c_k^*|^2 < \infty,$$

однако условие (1) в [4] не требовалось.

Доказательство. Положим в $|w| < 1$

$$S(w) = \sum_{0}^{\infty} c_k \varphi_k(w), \quad S^*(w) = \sum_{0}^{\infty} c_k^* \varphi_k(w). \tag{1.24}$$

Ряды (1.24) сходятся равномерно внутри $|w| < 1$ по лемме 1. По той же лемме, из равенства

$$\sum_{0}^{n} c_k M_k^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \frac{\sum\limits_{0}^{n} c_k \varphi_k(w)}{\psi(w) - z}\, dw, \quad z \in G^+.$$

применяя неравенство Гёльдера, заключаем, что

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_k M_k^{(1)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{S(w)\, dw}{\psi(w) - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{S[\Phi(\zeta)]\, \Phi'(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G^+. \tag{1.25}$$

Аналогично

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} c_k^* M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{S^*[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+. \qquad (1.26)$$

Вычитая (1.26) из (1.25), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi'(\zeta)\,[S[\Phi(\zeta)]-S^*[\Phi(\zeta)]]}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv 0,\quad z\in G^+. \qquad (1.27)$$

Слева в тождестве (1.27) стоит аналитическая в G^- функция, по известному свойству интегралов типа Коши [8] ее угловые граничные значения извне контура Γ существуют и совпадают с

$$\Phi'(\zeta)\,[S[\Phi(\zeta)]-S^*[\Phi(\zeta)]],\ \zeta\in\Gamma.$$

Кроме того, эта аналитическая функция имеет нуль на бесконечности. Учитывая, что $\Phi'(z)\neq 0$ при $z\in G^-$ и $\Phi'(\infty)>0$, получаем, что функция $S[\Phi(z)]-S^*[\Phi(z)]$ аналитична в G^- и также обращается на бесконечности в нуль. Переходя на плоскость $w=\Phi(z)$ имеем целую функцию $S(w)-S^*(w)$, обращающуюся в нуль при $w=\infty$. По теореме Лиувилля $S(w)\equiv S^*(w)$, отсюда, как нетрудно видеть,

$$c_k=c_k^*\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Теорема доказана.

§ 2. Разложение в ряды по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ при условии: $\sum\limits_0^\infty (1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<\infty$

Пусть K, как и раньше, произвольный ограниченный континуум. Продолжая пользоваться обозначениями § 1, мы будем изучать здесь сходимость рядов

$$\sum_0^\infty c_k\, M_k^{(1)}(z), \qquad (2.1)$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1}\gamma(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|,\quad \gamma(w)\in L_r\ (r>1) \qquad (2.2)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

в принципиально отличном от рассмотренного в § 1 случае, когда

$$\sum_0^\infty (1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<\infty. \qquad (2.3)$$

Нам потребуются здесь некоторые результаты относительно приближения функций на единичной окружности рациональными дробями и о неполных системах Такенака-Мальмквиста.

Рассмотрим систему (2), где $\{\alpha_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность точек внутри единичного круга, для которой

$$\sum_{0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<\infty. \tag{2.4}$$

Имеют место следующие утверждения (см. [12]), которые мы приводим в виде леммы.

Лемма 3. 1°. *Пусть $f(w)$ суммируема на $|w|=1$ и a_k — коэффициенты Фурье функции $f(w)$ по системе (2).*

Тогда имеет место разложение, равномерно сходящееся внутри $|w|<1$

$$\sum_{0}^{\infty} a_k\,\varphi_k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{t-w}-\frac{B(w)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-w)}, \tag{2.5}$$

где

$$B(w)=\prod_{0}^{\infty}\frac{\alpha_k-w}{1-\bar{\alpha}_k\,w}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

—произведение Бляшке с нулями в точках $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$.

2°. *Пусть $f(w)\in L_p\,(p>1)$ на $|w|=1$, a_k имеют тот же смысл, что и выше. Тогда*

$$\left\|\sum_{0}^{n} a_k\,\varphi_k(w)\right\|_p\leqslant C_p\|f(w)\|_p, \tag{2.6}$$

где C_p—постоянная, зависящая от p.

Приведем также следующий частный случай общего критерия Г. Ц. Тумаркина [9] о возможности приближения функций на единичной окружности рациональными дробями, который для удобства ссылок сформулируем в качестве леммы.

Лемма 4. *Для того чтобы функция $f(w)\in L_p\,(p>1)$ приближалась на $|w|=1$ в метрике L_p рациональными дробями с полюсами в точках $\{\overline{\alpha_k^{-1}}\}_0^{\infty}$, где $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$ удовлетворяют условию (2.4), необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на $|w|=1$ $f(w)$ совпадала с угловыми граничными значениями мероморфных в $|w|<1$ и в $|w|>1$ фунций ограниченного вида, соответственно $F^+(w)$ и $F^-(w)$ с дополнительными условиями*

$$F^+(w)\in H_p,\ F^-(w)\,w\,B^{-1}(w)\in H_p \text{ в } |w|>1^*.$$

Докажем теперь важную лемму о разложении производящей функции (1.8) при условии (2.3).

Лемма 5. *Пусть K — произвольный ограниченный континуум. $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^{\infty}$ — система М. М. Джрбашяна для K. Справедливы следующие разложения:*

---

* Аналитическая в $|w|>1$ функция $F(w)$ принадлежит пространству H_p в $|w|>1$, если $F\left(\frac{1}{w}\right)\in H_p$.

1.

$$\frac{1}{\psi(w)-z}=\sum_{0}^{\infty} M_k^{(1)}(z)\frac{1}{w}\overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)}+\frac{\Omega(w,z)}{B(w)},\ z\in\widetilde{U}; \tag{2.7}$$

2.

$$\frac{1}{\psi(w)-z}=\sum_{0}^{\infty}[M_k^{(1)}(z)-\varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z)]\,\frac{1}{w}\overline{\varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)}+$$

$$+\frac{\Omega(w,z)}{B(w)}+\frac{\Phi'(z)}{w-\Phi(z)},\ z\in G^{-}. \tag{2.8}$$

Ряды в правой части равенств (2.7) *и* (2.8) *сходятся равномерно внутри* $|w|>1$ *и в любой метрике* L_p $(p>1)$ *на окружности* $|w|=1$. *Функция*

$$\Omega(w,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]} \tag{2.9}$$

принадлежит H_p *в* $|w|>1$ *для любого* $p>1$ *и* $z\overline{\in}\Gamma$.

Разложение (2.7) было установлено М. М. Джрбашяном [4] для $K=\overline{G^+}$, G^+ — жорданова область со спрямляемой границей, сходимость на $|w|=1$ была доказана в [4] в метрике L_2. Доказательство в общем случае опирается на леммы 3 и 4.

Доказательство леммы. Предположим вначале, что z — фиксированная точка, принадлежащая внутренности $\widetilde{K}$. Рассмотрим снова функцию $\chi^*(\zeta, z)$. Пользуясь тождеством М. М. Джрбашяна [4]

$$(1-\overline{t}\zeta)^{-1}=\sum_{0}^{n}\varphi_k(\zeta)\overline{\varphi_k(t)}+B_{n+1}(\zeta)\overline{B_{n+1}(t)}\,(1-\overline{t}\zeta)^{-1},$$

где

$$B_{n+1}(\zeta)=\prod_{0}^{n}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\overline{\alpha}_k\zeta}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k},$$

из интегральной формулы Коши получаем

$$\chi^*(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi^*(t,z)}{1-\overline{t}\zeta}|dt|=$$

$$=\sum_{0}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t,z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|\right]\varphi_k(\zeta)+$$

$$+\frac{B_{n+1}(\zeta)}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{B_{n+1}(t)}\,\chi^*(t,z)}{1-\overline{t}\zeta}|dt|,\ |\zeta|<1. \tag{2.10}$$

Как было показано при доказательстве леммы 2

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t,z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|=\overline{M_k^{(1)}(z)}\ (k=0,1,2,\cdots). \tag{2.11}$$

Кроме того

$$B_{n+1}(\zeta) \to B(\zeta) \text{ при } n \to \infty \qquad (2.12)$$

равномерно внутри $|\zeta|<1$ и в метрике L_2 на $|\zeta|=1$ [10].

Используя (2.11) и (2.12), перейдем в (2.10) к пределу при $n \to \infty$, получим равномерно сходящееся внутри $|\zeta|<1$ разложение (см. [4])

$$\chi^*(\zeta, z) = \sum_0^\infty \overline{M_k^{(1)}(z)}\, \varphi_k(\zeta) + \frac{B(\zeta)}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{\overline{B(t)}\, \chi^*(t, z)}{1-\bar{t}\zeta} |dt| \equiv$$

$$\equiv F_1(\zeta, z) + F_2(\zeta, z), \quad |\zeta|<1. \qquad (2.13)$$

Рассмотрим функцию

$$F_1(\zeta, z) = \sum_0^\infty \overline{M_k^{(1)}(z)}\, \varphi_k(\zeta), \quad |\zeta|<1. \qquad (2.14)$$

Нетрудно показать (см. [4]), что ряд (2.14) сходится на $|\zeta|=1$ в метрике L_2 к угловым граничным значениям $F_1(\zeta, z)$ изнутри единичной окружности. Отсюда по лемме 4 получаем, что $F_1(u, z)$ почти всюду на $|u|=1$ совпадает с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в $|\zeta|>1$ функции $F^-(\zeta, z)$ ограниченного вида, удовлетворяющей условию

$$\zeta B^{-1}(\zeta)\, F^-(\zeta, z) \in H_2 \text{ в } |\zeta|>1. \qquad (2.15)$$

Заметим, что угловые граничные значения функции $F_2(\zeta, z)$ изнутри единичной окружности $|u|=1$, равные по теореме И. И. Привалова [8]

$$\frac{\chi^*(u, z)}{2} + \text{v. p.}\, \frac{B(u)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\overline{B(t)}\; \chi^*(t, z)}{1-\bar{t}u} |dt|,$$

принадлежат L_p для любого $p>1$, в силу того, что функция $\overline{B(u)}\,\chi^*(u, z)$ ограничена на $|u|=1$ (см. [11]; [7], стр. 176) и, значит по теореме В. И. Смирнова [8], $F_2(\zeta, z) \in H_p$ для любого $p>1$. Отсюда и из (2.13) непосредственно следует, что угловые граничные значения функции $F_1(\zeta, z)$ изнутри единичной окружности также принадлежат любому пространству L_p $(p>1)$, и по той же теореме В. И. Смирнова заключаем, что

$$F_1(\zeta, z) \in H_p, \quad \zeta B^{-1}(\zeta)\, F(\zeta, z) \in H_p \text{ в } |\zeta|>1 \qquad (2.16)$$

для любого $p>1$. Из (2.16) вытекает по лемме 4, что функция $F_1(u, z)$ допускает приближение рациональными дробями с полюсами в точках $\{\overline{a_k^{-1}}\}_0^\infty$ в метрике L_p, поэтому, как следует из наших результатов [12], ряд (2.14) сходится на $|\zeta|=1$ в любой метрике L_p $(p>1)$.

Произведя в (2.13) замену $w = \overline{\zeta^{-1}}$, после несложных преобразований получим разложение (2.7). Из того, что $F_2(\zeta, z) \in H_p$ при любом $p>1$ и любом фиксированном $z \in \widetilde{U}$ непосредственно вытекает, что $\Omega(w, z) \in H_p$ в $|w|>1$ при любом $p>1$, $z \in \widetilde{U}$, и первая часть леммы установлена.

Пусть теперь z — фиксированная точка G^-. Рассмотрим снова функцию $\chi^*(\zeta, z)$, аналитическую в $|\zeta|<1$ за исключением точки $\zeta=\overline{\Phi^{-1}(z)}$, в которой $\chi^*(\zeta, z)$ имеет простой полюс. По теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\chi^*(t, z)}{t-\zeta}\,dt=\chi^*(\zeta, z)-\frac{1}{\overline{\psi'[\Phi(z)]}\,[1-\overline{\Phi(z)}\,\zeta]},\ |\zeta|<1.$$

Аналогично случаю $z \in \widetilde{U}$ здесь можно написать равенство

$$\chi^*(\zeta, z)-\frac{1}{\overline{\psi'[\Phi(z)]}\,[1-\overline{\Phi(z)}\,\zeta]}=\sum_0^n\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t, z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|\right]\varphi_k(\zeta)+$$

$$+\frac{B_{n+1}(\zeta)}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{B_{n+1}(t)}\,\chi^*(t, z)}{1-\bar{t}\,\zeta}\,|dt|,\ |\zeta|<1. \tag{2.17}$$

Несложно показать, используя (1.21), что при $z \in G^-$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\chi^*(t, z)\,\overline{\varphi_k(t)}\,|dt|=\overline{M_k^{(1)}(z)-\varphi_k[\Phi(z)]\,\Phi'(z)}\ \ (k=0, 1, 2, \cdots).$$

Переходя в (2.17) к пределу при $n\to\infty$ и совершая замену переменной $w=\overline{\zeta^{-1}}$, приходим к разложению (2.8) внутри $|w|>1$.

Остальные утверждения второй части леммы могут быть доказаны аналогично доказательству первой части. Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема о сходимости рядов (2.1) при условии (2.3).

Теорема 4. *Пусть K — произвольный ограниченный континуум, $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ — система М. М. Джрбашяна для K.*

Ряд (2.1) *с коэффициентами* (2.2) *при условии* (2.3) *сходится равномерно внутри $\widetilde{U} \cup (G^- \setminus \{\omega_k\}_0^\infty)$ и имеют место равенства*

$$f_i(z)=\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{\psi(w)-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,\Omega(w, z)}{B(w)}\,dw,\ z \in \widetilde{U}, \tag{2.18}$$

$$f_e(z)=\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{\psi(w)-z}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,\Omega(w, z)}{B(w)}\,dw-\frac{\Phi'(z)\,B[\Phi(z)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(z)]},$$

$$z \in G^- \setminus \{\omega_k\}_0^\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство. Умножив обе части равенства (2.7) на $(2\pi i)^{-1}\gamma(w)\,dw$ и проинтегрировав вдоль единичной окружности, получим разложение (2.18). (Законность почленного интегрирования вытекает из того, что разложение (2.7) сходится на $|w|=1$ в метрике $L_{r/(r-1)}$).

Для того чтобы получить разложение (2.19), достаточно проделать ту же процедуру с равенством (2.8) и использовать равенство

$$-\sum_{0}^{\infty} c_k\varphi_k[\Phi(z)]+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{w-\Phi(z)}=$$

$$=\frac{B[\Phi(z)]}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)\,[w-\Phi(z)]},$$

непосредственно вытекающее из (2.5).

Покажем теперь, что ряд (2.1) сходится равномерно внутри $\widetilde{U}$. Аналогично (1.17) имеем при $z\in P$, P — произвольный компакт, принадлежащий $\widetilde{U}$

$$\left|\sum_{0}^{n} c_k M_k^{(1)}(z)\right|\leqslant[d(P)]^{-1}\left\|\sum_{0}^{n} c_k\varphi_k(w)\right\|_r. \qquad (2.20)$$

Из (2.20) и (2.6) вытекает, что

$$\left|\sum_{0}^{n} c_k M_k^{(1)}(z)\right|\leqslant C(P, r)\,\|\gamma(w)\|_r,$$

где $C(P, r)$—постоянная, зависящая от P и r, и последовательность частных сумм ряда (2.1) компакта в $\widetilde{U}$, откуда по теореме Витали следует равномерная сходимость ряда (2.1) внутри $\widetilde{U}$. Равномерная сходимость внутри $G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty$ устанавливается аналогично. Теорема доказана.

В случае, когда $K=\overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей, в условиях теоремы 4 можно утверждать наличие в известном смысле „моногенного" продолжения через кривую $\Gamma=\partial G^+$. В терминах работы Г. Шапиро [5] функции $f_i(z)$ и $f_e(z)$ являются псевдопродолжениями одна другой в широком смысле слова.

Теорема 5. *Пусть $K=\overline{G^+}$ — замыкание жордановой области со спрямляемой границей Γ, и справедливы условия теоремы 4. Тогда дополнительно к (2.18) и (2.19) имеем*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}[f_i(\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})-f_e(\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})]=0, \qquad (2.21)$$

равномерно относительно $\psi_0\left(|\psi_0|\leqslant\frac{\pi}{2}\theta,\ 0<\theta<1\right)$, *где* φ_0 — *угол на-*

клона касательной к кривой Γ *в точке* ζ_0, *причем* (2.21) *выполняется почти для всех точек* $\zeta_0 \in \Gamma$.

Аналогичный результат доказан М. М. Джрбашяном [4] при условии (4) вместо условия (2.2).

Переход к общему случаю связан с дополнительными трудностями, о которых мы уже говорили во введении, поэтому доказательство теоремы 5 существенно отличается от доказательства в [4]. Это же замечание относится и к последующим теоремам § 3.

Доказательство. Пусть $z_1 \in G^+$, $z_2 \in G^-$. Рассмотрим разность $f_i(z_1) - f_e(z_2)$. Вычитая из (2.18) (2.19), имеем

$$f_i(z_1) - f_e(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_2}\,d\zeta +$$

$$+\frac{\Phi'(z_2)\,B[\Phi(z_2)]}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(z_2)]} + \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{\gamma(w)}{B(w)}\,\Omega(w, z_2)\,dw - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{\gamma(w)}{B(w)}\,\Omega(w, z_1)\,dw\right\}. \tag{2.22}$$

Заметим теперь, что по теореме И. И. Привалова [8] угловые граничные значения извне единичной окружности $|w| = 1$ функции $\Omega(w, z)$ равны

$$\text{v. p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]} + \frac{B(w)}{2[\psi(w)-z]}, \quad z \bar{\in} \Gamma. \tag{2.23}$$

В дальнейшем знак v. p. мы будем опускать. Нам потребуется одно предложение относительно особых интегралов, которые легко можно вывести из одного результата М. Рисса [6]. А именно, если $f(t) \in L_p$, $\varphi(t) \in L_q$ на $|t| = 1$ и $1/p + 1/q = 1$, то

$$\int_{|t|=1} f(t)\,dt \int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \int_{|\tau|=1}\varphi(\tau)\,d\tau\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{\tau - t}\,dt \tag{2.24}$$

(см., например, [11], стр. 17).

Применяя (2.24), имеем, учитывая, что $\Omega(w, z) \in L_p$ для любого $p > 1$ на $|w| = 1$ при $z \bar{\in} \Gamma$

$$\int_{|w|=1}\frac{\gamma(w)}{B(w)}\,dw\int_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]} = \int_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{\psi(t)-z}\int_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-t]} =$$

$$= \int_\Gamma \frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \int_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}, \quad z \bar{\in} \Gamma. \tag{2.24'}$$

Преобразуем теперь разность, стоящую в фигурных скобках в (2.22), используя (2.23) и (2.24′). Получим

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_2}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_2}\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]} - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta - z_1}\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}.$$

Пусть теперь $z_1 = \zeta_0 + i\varepsilon\, e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, $z_2 = \zeta_0 - i\varepsilon\, e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, где φ_0, ψ_0, ζ_0 из условия теоремы 5, $\varepsilon > 0$. Тогда по известному свойству интегралов типа Коши [8] при $\varepsilon \to 0^+$

$$\Delta(z_1, z_2) \to -\frac{\gamma[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2} - \frac{B[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta_0)]}.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0^+$

$$f_i(z_1) - f_e(z_2) \to \gamma[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0) - \frac{\Phi'(\zeta_0)\,B[\Phi(\zeta_0)]\,\gamma[\Phi(\zeta_0)]}{2B[\Phi(\zeta_0)]} +$$

$$+\frac{B[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta_0)]} -$$

$$-\frac{\gamma[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2} - \frac{B[\Phi(\zeta_0)]\,\Phi'(\zeta_0)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w-\Phi(\zeta_0)]} = 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Разложение в ряды по системе $\{M_k^{(1)}\}_0^\infty$ при условии $\sum\limits_0^\infty (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < \infty$ (продолжение)

Мы будем считать в этом параграфе, что континуум K совпадает с замыканием жордановой области G^+ со спрямляемой границей, причем предполагается выполненным условие (2.3).

Приведем критерий представимости функции в G^+ рядом по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$.

Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad g[\psi(w)]\,\psi'(w) \in L_r, \quad r > 1. \tag{3.1}$$

Положим

$$c_k = c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} g[\psi(w)]\,\psi'(w)\,\overline{\varphi_k(w)}\,|dw| \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.2}$$

Теорема 6. *Для того чтобы $f(z)$ разлагалась в G^+ в ряд по системе $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ при условии* (2.3)

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k(g)\, M_k^{(1)}(z),\quad z \in G^+, \tag{3.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало представление $f(z)$ интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_0(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\quad z \in G^+, \tag{3.4}$$

с функцией плотности $g_0(\zeta)$, совпадающей почти всюду на Γ с угловыми граничными значениями извне Γ мероморфной функции вида

$$\frac{B[\Phi(z)]\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,\bar{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\quad z \in G^-, \tag{3.5}$$

где $F(w) \in H_r$.

Теорема 6 доказана М. М. Джрбашяном [4] при $r = 2$. Для системы $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$ впервые подобная теорема была установлена Г. Ц. Тумаркиным [2].

Доказательство. Применим равенство (2.18) к $\gamma(w) = g[\psi(w)]\,\psi'(w)$. Имеем при $z \in G^+$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)}\,\Omega(w, z)\, dw +$$

$$+ \sum_0^\infty c_k(g)\, M_k^{(1)}(z), \tag{3.6}$$

где $c_k(g)$ определяются из формул (3.2).

Из (3.6) ясно, что $f(z)$ разлагается в ряд (3.3) в G^+ тогда и только тогда, когда интеграл, стоящий в правой части равенства (3.6) тождественно по $z \in G^+$ равен нулю.

Пусть теперь $f(z)$ допускает специальное представление (3.4). Тогда этот интеграл равен

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{B(w)\,\Phi'[\psi(w)]\,\psi'(w)}{w\,B(w)}\,\bar{F}\left(\frac{1}{w}\right)\Omega(w, z)\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{1}{w}\,\bar{F}\left(\frac{1}{w}\right)\Omega(w, z)\, dw \equiv 0,\quad z \in G^+,$$

так как $\Omega(w, z) \in H_p$ в $|w| > 1$ для любого $p > 1$ и имеет нуль при $w = \infty$.

Обратно, пусть интеграл в правой части (3.6) тождественно по $z \in G^+$ равен нулю. Запишем этот факт более подробно.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)}\left[\frac{B(w)}{2[\psi(w)-z]}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]}\right]\times$$

$$\times\,dw\equiv 0,\ z\in G^+. \tag{3.7}$$

Используя (2.24′), после несложных преобразований получим из (3.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv 0,\ z\in G^+, \tag{3.8}$$

где

$$\rho(\zeta)=\frac{g(\zeta)}{2}+\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}.$$

Обозначим

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)[w-t]}\,dw,\ |t|>1.$$

По теореме И. И. Привалова [8]

$$B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)\,F[\Phi(\zeta)]=-g(\zeta)/2+$$

$$+\frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)]\,\psi'(w)}{B(w)[w-\Phi(\zeta)]}\,dw. \tag{3.9}$$

Для окончания доказательства осталось заметить, что, как следует из (3.8) и (3.9)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)-\rho(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in G^+,$$

$$g(\zeta)-\rho(\zeta)=-B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)\,F[\Phi(\zeta)],\ \zeta\in\Gamma.$$

Функция $F(t)\in H_r$ в $|t|>1$ и имеет на бесконечности нуль. Таким образом $F(t)=t^{-1}\tilde{F}(t^{-1})$, где $\tilde{F}(w)\in H_r$ в $|w|<1$. Теорема доказана.

Нетрудно, проследив доказательство теоремы 6 и учитывая замечание к теореме 2, прийти к следующему утверждению.

Теорема 6′. *Пусть $f(z)$ представима в G^+ интегралом типа Коши* (1.21), *кривая Γ удовлетворяет условию* (1.22).

Для того чтобы $f(z)$ разлагалась в G^+ в ряд (3.3) *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $r>1$, что $f(z)$ представляется в G^+ интегралом типа Коши* (3.4) *с функцией плотности, удовлетворяющей условию* (3.5).

М. М. Джрбашян [3], [4] ввел класс $\lambda_2\{G^+, G^-, \omega_k\}$ в известном смысле „моногенных" функций и показал, что система $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ образует базис в пространстве $\lambda_2\{G^+, G^-, \omega_k\}$.

Мы определим аналогично [3], [4] класс функций $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$ и покажем в частности, что система $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ образует базис в любом пространстве $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$, откуда, учитывая включение $\lambda_{r_1}\{G^+, G^-, \omega_k\}\subset\lambda_{r_2}\{G^+, G^-, \omega_k\}$ при $r_1>r_2>1$, получаем, что система $\{M_k^{(1)}(z)\}_0^\infty$ — базис в более широких классах „моногенных" функций, чем в [3] и [4].

Определение. Предполагая выполненным условие (2.3), через $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$ будем обозначать класс функций $f(z)$, определенных на $G^+\cup G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+,$$

2. $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+F(z),\quad z\in G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty;$$

3. $g(\zeta)=F(\zeta)$ почти всюду на Γ, где $F(z)$ — мероморфная в G^- функция следующего вида:

$$F(z)=\frac{B[\Phi(z)]\,\Phi'(z)}{\Phi(z)}\tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\ \text{где}\ \tilde{F}(w)\in H_r.$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 7. *Класс функций $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $(r>1)$ совпадает с множеством функций, представимых в $G^+\cup G^-\setminus\{\omega_k\}_0^\infty$ рядами*

$$\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z),\tag{3.10}$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1}\gamma(w)\overline{\varphi_k(w)}\,|dw|,\quad \gamma(w)\in L_r\ (k=0,1,2,\cdots).\tag{3.11}$$

Теорема 7 доказана ранее М. М. Джрбашяном [4] при условии $r=2$.

Доказательство. Заметим вначале, что сумма ряда (3.10) с коэффициентами (3.11) (сходимость которого вытекает из теоремы 5) представляется в G^+ интегралом типа Коши.

В самом деле, из (2.18) имеем, используя (2.24′)

$$\sum_0^\infty c_k\,M_k^{(1)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\gamma(w)}{B(w)}\,dw\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)\,dt}{[\psi(t)-z][w-t]}-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\overline{g}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^+,\tag{3.12}$$

где

$$\bar{g}(\zeta) = \frac{\gamma[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2} - \frac{B[\Phi(\zeta)]\,\Phi'(\zeta)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w - \Phi(\zeta)]}, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Из (2.19) аналогичным образом выводим при $z \in G^- \diagdown \{\omega_k\}_0^\infty$

$$\sum_0^\infty c_k\, M_k^{(1)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{\Phi'(z)\, B[\Phi(z)]}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)[w - \Phi(z)]}. \qquad (3.13)$$

Из (2.12) и (2.13) следует, что сумма ряда (3.10) принадлежит классу $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$, поскольку функция

$$F(z) = \frac{\Phi'(z)\, B[\Phi(z)]}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{\gamma(w)\,dw}{B(w)\,[w - \Phi(z)]}, \quad z \in G^-,$$

удовлетворяет пункту 3 определения $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$.

Пусть теперь функция $f(z) \in \lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$. По теореме 6 имеет место разложение при $z \in G^+$

$$f(z) = \sum_0^\infty{}' c_k(g)\, M_k^{(1)}(z). \qquad (3.14)$$

Но ряд (3.14) по теореме 5 сходится также внутри $G^- \diagdown \{\omega_k\}_0^\infty$. В силу определения класса $\lambda_r\{G^+, G^-, \omega_k\}$ $f(z)$ при $z \in G^-$ является псевдоаналитическим продолжением $f(z)$ при $z \in G^+$. Этим же свойством обладает сумма ряда

$$\sum_0^\infty c_k(g)\, M_k^{(1)}(z).$$

Отсюда, в силу свойства единственности псевдоаналитического продолжения (которое легко вывести из теоремы Лузина-Привалова [8]) и в силу равенства (3.14), имеем

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k(g)\, M_k^{(1)}(z), \quad z \in G^- \diagdown \{\omega_k\}_0^\infty.$$

Теорема доказана.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических
измерений

Поступила 20.XII.1972

Ա. Մ. ԼՈՒԿԱՑԿԻ. Ըստ Մ. Մ. Ջրբաշյանի ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգի, շարքերի վերլուծման մասին *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանը [1], [3], [4] աշխատանքներում կառուցել է ուղղելի եզրով տված ժորդանյան տիրույթի համար ռացիոնալ ֆունկցիաների հատուկ համակարգեր՝ $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 < s < 1)$:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է ըստ Մ. Մ. Ջրբաշյանի կամայական կոնտինուումի համար կառուցված $\{M_n^{(1)}(z)\}_0^\infty$ համակարգի շարքերի վերլուծության զուգամիտությունը, գործակիցների վրա ավելի ընդհանուր պայմանների դեպքում, քան [3] և [4] աշխատանքներում։

A. M. LUKACKIĬ. *On the expansion in series by M. M. Džrbašian's system of rational functions* (summary)

The spetial systems $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 < s < 1)$ of rational functions for a given Jordanian domain with rectifiable boundary were constructed by M. M. Džrbašian in [1], [3], [4]. In this paper the convergence of the series expansion by M. M. Džrbašian's system $\{M_n^{(1)}(z)\}_0^\infty$, in studied for an arbitrary continuum under looser conditions on the coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О разложении аналитических функций в ряд по рациональным, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат., 10:1, 1957, 21—29.
2. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат., 14: 1, 1961, 9—31.
3. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143: 1, 1962, 17—20.
4. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
5. *H. S. Shapiro.* Generalized analytic continuation, Fifth Matscience Symposium, Plenum Press, New York, 1968.
6. *M. Risz.* Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr, Bd 27, 1927.
7. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.
8. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
9. *Г. Ц. Тумаркин.* Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер., матем., 1, № 2, 1966.
10. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация функций в комплексной области, М., 1961.
11. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, Тр. Тбил. матем. ин-та, 23, 1956.
12. *А. М. Лукацкий.* Разложения в ряды по системе рациональных функций, мат., 90 (132), № 4, 1973.
13. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

Ф. И. ГЕЧЕ, А. И. КУРЕЙ

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Исследуется вопрос существования и единственности целых решений дифференциального уравнения

$$w + Lw = w + \sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}} = f(z_1, z_2), \tag{1}$$

где $P_{n_1 n_2}(z_1, z_2)$ — полиномы, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, $f(z_1, z_2)$ — известная целая функция конечной степени. Увеличение числа независимых переменных не приводит к существенным изменениям.

Для обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка аналогичный вопрос был изучен Ю. Ф. Коробейником [1]. Существование и единственность решения уравнения (1) доказывается с помощью принципа сжатых отображений, следуя работе [1]. Доказанные нами теоремы включают в себя также результаты Ю. Ф. Коробейника с определенными уточнениями.

С. А. Еремин [2] рассматривал уравнение вида (1) с постоянными коэффициентами и при некоторых дополнительных условиях доказал теорему о существовании и единственности решения в определенном классе целых функций. С. А. Еремин использовал метод А. О. Гельфонда [3].

В работе существенно используются понятия систем сопряженных порядков и типов целых функций двух переменных, введенные для функций класса A М. М. Джрбашяном [4] (см. подробнее историю вопроса в [5]).

§ 1. Некоторые вспомогательные результаты

1.1. Пусть $f(z_1, z_2) \not\equiv \mathrm{const}$ — целая функция. Введем обозначение

$$M(f;\ r_1,\ r_2) = \max_{|z_1|=r_1,\ |z_2|=r_2} |f(z_1, z_2)|. \tag{1.1}$$

Напомним некоторые определения (см. [4]) в нужной нам форме.

Система неотрицательных чисел (ρ_1, ρ_2) называется системой сопряженных порядков (с.с.п.) функции $f(z_1, z_2)$, если при любом $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическое относительно $r_1 + r_2$ неравенство

$$\ln M(f;\ r_1,\ r_2) \leqslant r_1^{\rho_1+\varepsilon} + r_2^{\rho_2+\varepsilon}, \tag{1.2}$$

а с другой стороны, на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})\}$ $(r_1^{(k)}+r_2^{(k)}\to\infty)$ при некоторой постоянной $\delta>0$ выполняются неравенства

$$\ln M(f;\ r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})>\delta\,[(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon}+(r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}],\quad k=1,\ 2,\cdots. \tag{1.3}$$

Если $\rho_1=\rho_2=0$, то функция $f(z_1,\ z_2)$ называется функцией нулевого порядка.

Пусть $(\rho_1,\ \rho_2)$ $(\rho_1>0,\ \rho_2>0)$—некоторая с.с.п. функции $f(z_1,\ z_2)$. Система неотрицательных чисел $(\sigma_1,\ \sigma_2)$ называется системой сопряженных типов (с.с.т.) при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$, если при любом $\varepsilon>0$ выполняется, с одной стороны, асимптотическое относительно r_1+r_2 неравенство

$$\ln M(f;\ r_1,\ r_2)\leqslant(\sigma_1+\varepsilon)\,r_1^{\rho_1}+(\sigma_2+\varepsilon)\,r_2^{\rho_2}, \tag{1.4}$$

а с другой стороны, на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})\}$ $(r_1^{(k)}+r_2^{(k)}\to\infty)$ имеют место неравенства

$$\ln M(f;\ r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})>(\sigma_1-\varepsilon)(r_1^{(k)})^{\rho_1}+(\sigma_2-\varepsilon)(r_2^{(k)})^{\rho_2},\quad k=1,\ 2,\cdots. \tag{1.5}$$

Если (0, 0) является с.с.т. при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$ функции $f(z_1,\ z_2)$, то $f(z_1,\ z_2)$ называется функцией нулевого типа при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$. Если не существует такой системы чисел $(\sigma_1,\ \sigma_2)$, для которой имело бы место неравенство (1.4), то считаем, что $(\infty,\ \infty)$ является с.с.т. при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$ функции $f(z_1,\ z_2)$. В этом случае $f(z_1,\ z_2)$ называется функцией бесконечного типа при с.с.п. (ρ_1,ρ_2).

Далее считаем, что $(\sigma_1,\ \infty)$ является с.с.т. функции $f(z_1,\ z_2)$ при с.с.п. $(\rho_1,\ \rho_2)$, если: 1) при любом достаточно малом $\varepsilon>0$ существует положительное число $\sigma_2=\sigma_2(\varepsilon)$, такое, что имеет место асимптотическое неравенство (1.4); 2) на некоторой последовательности $\{(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})\}$ имеют место неравенства (1.5), какое бы ни было $\sigma_2>0$. Аналогично определяется с.с.т. $(\infty,\ \sigma_2)$.

З а м е ч а н и е. В неравенствах (1.2)—(1.5) переменные $(r_1,\ r_2)$, а также $(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})$ выбираются в множестве $R_+^2=\{(r_1,\ r_2):\ r_1>0,\ r_2>0\}$. Однако определения с.с.п. и с.с.т. можно видоизменять, заменяя R_+^2 на множество $Q_{R_1R_2}=\{(r_1,\ r_2):\ r_1\geqslant R_1,\ r_2>R_2\};\ R_1,\ R_2>0$. При этом получаются определения с.с.п. и с.с.т., эквивалентные предыдущим.

Действительно, пусть $(\rho_1,\ \rho_2)$ — с.с.п. функции $f(z_1,\ z_2)$. Тогда выполняется асимптотическое неравенство (1.2) при $(r_1,\ r_2)\in R_+^2$, и тем более оно справедливо при $(r_1,\ r_2)\in Q_{R_1R_2}$.

Пусть неравенства (1.3) имеют место на последовательности $\{(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)})\}$ $(r_2^{(k)}+r_1^{(k)}\to\infty)$. Обозначим через $\bar r_i^{(k)}=\max(r_i^{(k)},\ R_i)$, $i=1,\ 2$. Очевидно, $\bar r_1^{(k)}+\bar r_2^{(k)}\to\infty$, и при некотором $\delta_1=\delta_1(\delta)>0$ имеют место неравенства

$$\ln M(f;\, \bar r_1^{(k)},\ \bar r_2^{(k)}) \geqslant \ln M(f;\ r_1^{(k)},\ r_2^{(k)}) > \delta\,[(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon} +$$
$$+ (r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}] \geqslant \delta_1\ [(\bar r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon} + (\bar r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}],\ k=1,\, 2, \cdots$$

(если $\rho_1-\varepsilon>0$, $\rho_2-\varepsilon>0$, то $(r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon}+(r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon} \sim (\bar r_1^{(k)})^{\rho_1-\varepsilon}+(\bar r_2^{(k)})^{\rho_2-\varepsilon}$ при $k\to\infty$).

Следовательно, (ρ_1, ρ_2) является с.с.п. функции $f(z_1, z_2)$ в смысле видоизмененного определения.

Обратно, пусть выполняется асимптотическое относительно r_1+r_2 неравенство (1.2) при $(r_1, r_2)\in Q_{R_1R_2}$. Пусть, далее, $(\bar r_1, \bar r_2)\in R_+^2$ и $\tilde r_i = \max(\bar r_i,\ R_i)$, $i=1,2$. Тогда при достаточно больших $\tilde r_1+\tilde r_2$ имеют место неравенства

$$\ln M(f;\ \tilde r_1,\ \bar r_2) \leqslant \ln M(f;\ \ r_1,\ r_2) \leqslant r_1^{\rho_1+\varepsilon}+r_2^{\rho_2+\varepsilon} \leqslant \bar r_1^{\rho_1+2\varepsilon}+\bar r_2^{\rho_2+2\varepsilon}.$$

Условие (1.3) не меняется при переходе от $Q_{R_1R_2}$ к R_+^2. Следовательно, (ρ_1, ρ_2) будет с.с.п. функции $f(z_1, z_2)$ в смысле исходного определения.

Утверждение относительно с.с.т. доказывается аналогично.

Пусть $0<\rho_1<\infty$, $0<\rho_2<\infty$, $0\leqslant\sigma_1\leqslant\infty$, $0\leqslant\sigma_2\leqslant\infty$ — произвольные числа. Обозначим через $E[\rho_1, \rho_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$ класс целых функций $f(z_1, z_2)$, для которых существуют с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) и с.с.т. (σ_1^f, σ_2^f) при с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) удовлетворяющие условиям*: $\rho_i^f\leqslant\rho_i$, $i=1,\, 2$, причем равенство $\rho_j^f=\rho_j$ возможно только при условии, что $\sigma_j>0$ и тогда $\sigma_j^f<\sigma_j$. Если $\rho_j^f<\rho_j$, то σ_j^f произвольно. Индекс j здесь может принимать одно из значений 1, 2 или оба значения.

Далее, через $E[\rho_1, \rho_2;\ \sigma_1, \sigma_2]$ обозначим класс целых функций $f(z_1, z_2)$, для которых существуют с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) и с.с.т. (σ_1^f, σ_2^f) при с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f), такие, что $\rho_i^f\leqslant\rho_i$, $i=1,\, 2$, а σ_i^f — любое, если $\rho_i^f<\rho_i$, и $\sigma_i^f\leqslant\sigma_i$, если $\rho_i^f=\rho_i$ $(i=1,\ 2)$**.

1. 2. Приведем формулировку одной теоремы, которая является двумерным аналогом теоремы 2.2 из [1] и доказывается таким же методом.

Пусть каждой точке (μ, ν) из открытого прямоугольника (конечного или бесконечного) $(\alpha_1, \beta_1;\ \alpha_2, \beta_2)$, лежащего в квадранте R_+^2, ставится в соответствие B-пространство $J_{\mu\nu}$, причем

$$J_{\mu_1\nu_1}\subset J_{\mu_2\nu_2},\ \text{если}\ \mu_1<\mu_2,\ \ \nu_1\leqslant\nu_2. \tag{1.6}$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mu\nu}$ в пространствах $J_{\mu\nu}$ предполагаются согласованными так, что если $\|x_n-x\|_{\mu_1\nu_1}\to 0$ и $\mu_1\leqslant\mu_2$, $\nu_1\leqslant\nu_2$, то подавно $\|x_n-x\|_{\mu_2\nu_2}\to 0$ $(x_n,\ x\in J_{\mu_1\nu_1})$.

---

* Предполагается, что функции нулевого порядка также входят в $E[\rho_1, \rho_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$.

** В $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2]$ содержатся также функции порядка нуль.

Рассмотрим множество

$$A = \bigcup_{\substack{\alpha_1 < \mu < \beta_1 \\ \alpha_2 < \nu < \beta_2}} J_{\mu\nu},$$

которое легко превратить в топологическое пространство (индуктивный предел B-пространств).

Для произвольного $x \in A$ введем обозначение

$$\tilde{\varphi}_x(\nu) = \inf_{x \in J_{\mu\nu}} \mu, \quad \tilde{\psi}_x(\mu) = \inf_{x \in J_{\mu\nu}} \nu, \quad (\mu, \nu) \in (\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2).$$

При любом фиксированном $x \in A$ функции $\tilde{\varphi}_x(\nu)$ и $\tilde{\psi}_x(\mu)$, как функции переменных $\nu \in (\alpha_2, \beta_2)$ и соответственно $\mu \in (\alpha_1, \beta_1)$, монотонно убывающие.

Действительно, если, например, $\alpha_2 < \nu_1 < \nu_2 < \beta_2$, то в силу условия (1.6) $x \in J_{\mu\nu}$, при всех $(\mu, \nu) \in (\tilde{\varphi}_x(\nu_1), \beta_1; \nu_1, \beta_2)$, следовательно $x \in J_{\mu\nu_2}$, если $\mu > \tilde{\varphi}_x(\nu_1)$. Поэтому $\tilde{\varphi}_x(\nu_2) \leqslant \tilde{\varphi}_x(\nu_1)$. В силу сказанного корректно следующее определение:

$$\varphi_x(\nu) \stackrel{df}{=} \lim_{\nu' \to \nu+} \tilde{\varphi}_x(\nu'), \quad \psi_x(\mu) \stackrel{df}{=} \lim_{\mu' \to \mu+} \tilde{\psi}_x(\mu').$$

Теорема 1. *Пусть оператор L отображает пространство A в себя. Предположим, что существует множество S, плотное в $(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2)$, такое, что при всех $(\mu, \nu) \in S$ оператор L взаимно однозначно отображает $J_{\mu\nu}$ на $J_{\mu\nu}$. Тогда L взаимно однозначно отображает A на A, причем $\varphi_{Lx}(\nu) = \varphi_x(\nu)$ и $\psi_{Lx}(\mu) = \psi_x(\mu)$ для всех (μ, ν).*

Доказательство. В силу условия (1.6), так же как и в работе [1], легко доказать, что оператор L отображает A на A взаимно однозначно.

Пусть $x \in A$ и $y = Lx$ (x и y одновременно пробегают все пространство A). Пусть $\varphi_y(\nu_0) = a$. Из определения $\varphi_y(\nu)$ следует, что $y \in J_{\mu\nu}$, как только $(\mu, \nu) \in (a, \beta_1; \nu_0, \beta_2)$. Пусть $(\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon)$ — точка из непустого множества $S \cap (a, a+\varepsilon; \nu_0, \nu_0+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда $y \in J_{\mu_\varepsilon \nu_\varepsilon}$ и по предположению теоремы $x \in J_{\mu_\varepsilon \nu_\varepsilon}$ и $Ly \in J_{\mu_\varepsilon \nu_\varepsilon}$. Следовательно

$$\varphi_x(\nu_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \tilde{\varphi}_x(\nu_\varepsilon) \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0+} \mu_\varepsilon = a = \varphi_{Lx}(\nu_0),$$

и точно так же $\varphi_{Ly}(\nu_0) \leqslant a = \varphi_y(\nu_0)$. В силу произвольности x, а вместе с тем и y, $\varphi_x(\nu_0) = \varphi_{Lx}(\nu_0)$. Равенство $\psi_x(\mu) = \psi_{Lx}(\nu_0)$ доказывается аналогично.

1.3. Через $W = W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ будем обозначать линейное нормированное пространство целых функций $w(z_1, z_2)$, таких, что

$$\sup_{r_1 > R_{1w},\, r_2 > R_{2w}} M(w; r_1, r_2) \exp\left[-(\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2})\right] \stackrel{df}{=} \|w\| < \infty,$$

где R_{10}, R_{20} — некоторые положительные постоянные, $0<\rho_1, \rho_2<1$, $0<\sigma_1, \sigma_2<\infty$.

Корректность определения пространства W очевидна.

Не представляет труда доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пространство* $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ — *банахово.*

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$E(r_1, r_2)=E_1(r_1)E_2(r_2),\ E_i(r_i)=\exp(\sigma_i r_i^{\rho_i}),\ i=1, 2. \tag{1.7}$$

Лемма 2. *Пусть* $f(z_1, z_2)$ — *целая функция из класса* $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$, $0<\rho_i<\infty$, $0<\sigma_i<\infty$, $i=1, 2$. *Если*

$$f(z_1, z_2)=\sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} z_1^i z_2^j,\ f_k(z_1, z_2)=\sum_{0<i+j<k} b_{ij} z_1^i, z_2^j,$$

то $f_k(z_1, z_2)$ *и* $f(z_1, z_2)$ *принадлежат пространству*

$W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ *и* $f_k(z_1, z_2)\to f(z_1, z_2)$ *при* $k\to\infty$

в метрике этого пространства.

Доказательство. Из условия $f(z_1, z_2)\in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ следует, что при некотором θ $(\theta>1)$

$$f(z_1, z_2)\in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1', \sigma_2'),\quad \text{где } \sigma_i'=\sigma_i\theta^{-\rho_i},\ i=1, 2.$$

Отсюда, как и в работе [1], легко получить неравенство

$$M(f; \theta t_1, \theta t_2)[E(t_1, t_2)]^{-1}\leqslant C,\ C=\text{const}.$$

Используя неравенства Коши, найдем следующую оценку:

$$M(f-f_k; t_1, t_2)[E(t_1, t_2)]^{-1}\leqslant[E(t_1, t_2)]^{-1}\sum_{i+j=k+1}^{\infty}|b_{ij}|\,t_1^i t_2^j\leqslant$$

$$\leqslant[E(t_1, t_2)]^{-1}M(f; \theta t_1, \theta t_2)\sum_{i+j=k+1}^{\infty}\theta^{-i-j}\leqslant C\eta_k(\theta), \tag{1.8}$$

где $\eta_k(\theta)=\sum_{i+j=k+1}^{\infty}\theta^{-i-j}\to 0$ при $k\to\infty$. Переходя к точной верхней грани в неравенствах (1.8), придем к неравенству $\|f-f_k\|\leqslant C\eta_k(\theta)$, откуда следует $\|f-f_k\|\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ (по норме пространства $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$). Лемма доказана.

Будем пользоваться также обозначением

$$\|w\|_r=\|w\|_{(r_1, r_2)}=\sup_{t_1>r_1,\ t_2>r_2}\{M(w; t_1, t_2)\exp[-(\sigma_1 t_1^{\rho_1}+\sigma_2 t_2^{\rho_2})]\}.$$

Очевидно, при любых $h_1, h_2>0$

$$\|w\|_{(r_1+h_1, r_2+h_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1+h_1, r_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1, r_2)}=\|w\|_r,$$

$$\|w\|_{(r_1+h_1, r_2+h_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1, r_2+h_2)}\leqslant\|w\|_{(r_1, r_2)}=\|w\|_r.$$

1.4. Пусть $w(z_1, z_2)\in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$. Найдем оценку выражения $\|w^{(m, n)}\|_{(r_1, r_2)}$, где для простоты положено

$$w^{(n_1, n_2)} = \frac{\partial^{n_1+n_2} w(z_1, z_2)}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots.$$

Пусть $M(w^{n_1, n_2}; r_1, r_2) = |w^{(n_1, n_2)}(z_1^0, z_2^0)|$, $|z_i^0| = r_i > R_{i0}$, $i=1, 2$.

С помощью интегральной формулы Коши, записанной по осто бицилиндра $\{|z_1 - z_1^0| \leqslant h_1, |z_2 - z_2^0| \leqslant h_2\}$, легко получаем неравенства

$$M(w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2) \leqslant n_1!\, n_2!\, h_1^{-n_1} h_2^{-n_2} M(w; r_1 + h_1, r_2 + h_2) \leqslant$$
$$\leqslant n_1!\, n_2!\, h_1^{-n_1} h_2^{-n_2} \|w\|_{(r_1 + h_1, r_2 + h_2)} E(r_1 + h_1, r_2 + h_2) \leqslant \quad (1.$$
$$\leqslant \|w\|_r \Pi\, n_i!\, h_i^{-n_i} E_i(r_i + h_i).$$

Здесь и в дальнейшем знак умножения Π распространяется на значения из $i=1, 2$, для которых $n_i \neq 0$.

Функция $\eta(h) = h^{-k} \exp \sigma(r+h)^\rho$, $k=1, 2, \cdots$, определенная интервале $(0, \infty)$, принимает наименьшее значение в единственн точке h_k, удовлетворяющей уравнению

$$\rho\sigma(r+h)^{\rho-1} h = k, \text{ или же } \sigma(r+h)^\rho = \frac{k}{\rho}\left(1 + \frac{r}{h}\right).$$

Очевидно, при $\rho \leqslant 1$

$$h_k = \frac{k}{\rho\sigma}(r + h_k)^{1-\rho} > \frac{k}{\rho\sigma} r^{1-\rho}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{h_k} = \frac{\sigma\rho}{k}(r + h_k)^{\rho-1} < \frac{\sigma\rho r^{\rho-1}}{k}\left(1 + \frac{k}{\rho\sigma r^\rho}\right)^{\rho-1} \quad (1.1$$

и, следовательно

$$\sigma(r+h_k)^\rho = \frac{k}{\rho}\left(1 + \frac{r}{h_k}\right) \leqslant \frac{k}{\rho}\left[1 + \frac{\sigma\rho r^\rho}{k}\left(1 + \frac{k}{\rho\sigma r^\rho}\right)^{\rho-1}\right] =$$
$$= \frac{k}{\rho} + \sigma r^\rho \left[1 + \frac{(\rho-1)k}{\rho\sigma r^\rho} + \frac{(1-\rho)(2-\rho)}{2}\left(1 + \frac{\theta k}{\rho\sigma r^\rho}\right)^{\rho-3}\left(\frac{k}{\sigma\rho r^\rho}\right)^2\right] =$$
$$= \sigma r^\rho + k + \frac{(1-\rho)(2-\rho)\sigma r^\rho}{2}\left(\frac{k}{\sigma\rho r^\rho + \theta k}\right)^2\left(1 + \frac{\theta k}{\sigma\rho r^\rho}\right)^{\rho-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sigma r^\rho + k + \frac{(1-\rho)(2-\rho)k^2}{2\rho^2\sigma r^\rho} = \sigma r^\rho + k + k\omega(k, r), \quad (1.1$$

$$\omega(k, r) = \frac{(1-\rho)(2-\rho)k}{2\rho^2\sigma r^\rho}.$$

Учитывая неравенства (1.10), (1.11), получаем

$$\eta(h_k) = h_k^{-k} \exp \frac{k}{\rho}\left(1 + \frac{r}{h_k}\right) \leqslant (\sigma\rho)^k k^{-k} r^{k(\rho-1)} e^{k + \sigma r^\rho + k\omega(k, r)}. \quad (1.1$$

В силу оценки (1.12), можем написать

$$\min_{0<h_1,\, h_2<\infty} \Pi\, h_i^{-n_i} E_i(r_i+h_i) \leqslant$$

$$\leqslant \Pi (\sigma_i \rho_i)^{n_i}\, n_i^{-n_i}\, r_i^{n_i(\rho_i-1)}\, e^{n_i}\, e^{n_i \omega_i(n_i,\, r_i)}\, E_i(r_i), \tag{1.13}$$

где

$$\omega_i(n_i,\, r_i) = \frac{(1-\rho_i)(2-\rho_i)\, n_i}{2\rho_i^2 \sigma_i r_i^{\rho_i}},\ i=1,\ 2.$$

Пользуясь формулой Стирлинга, из (1.9) и (1.13) получаем

$$M(w^{(n_1,\, n_2)};\ r_1,\ r_2) \leqslant \|w\|_r \Pi \Omega_i(n_i)(\sigma_i\rho_i)^{n_i} r_i^{n_i(\rho_i-1)} E_i(r_i), \tag{1.14}$$

где

$$\Omega_i(n_i) = \sqrt{2\pi n_i}\, \exp n_i \left[\frac{1}{12 n_i^2} + \omega_i(n_i,\, r_i)\right] =$$

$$= \exp n_i \left[\frac{1}{12 n_i^2} + \frac{\ln \sqrt{2\pi n_i}}{n_i} + \omega_i(n_i,\, r_i)\right].$$

Выберем число N настолько большим, чтобы $\frac{1}{12N} + \frac{\ln\sqrt{4\pi N}}{N} \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Далее, пусть $R_\varepsilon > 1$ настолько большое, что

$$\omega_i(2N,\, R_\varepsilon) = \frac{(1-\rho_i)(2-\rho_i)\, 2N}{2\rho_i^2 \sigma_i R_\varepsilon^{\rho_i}} \leqslant \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon),\ i=1,\ 2.$$

Если $0 < n_1,\ n_2 \leqslant N$ и $r_1,\ r_2 > R_\varepsilon$, то справедливы неравенства

$$\Omega_i(N+n_i) \leqslant \exp\left\{(N+n_i)\left[\frac{1}{12N^2} + \frac{\ln\sqrt{4\pi N}}{N} + \omega_i(2N,\, R_\varepsilon)\right]\right\} <$$

$$< \varepsilon^{\frac{N+n_i}{2}},\ i=1,\ 2,$$

$$\Omega_i(n_i) \leqslant \exp\left\{N\left[\frac{1}{12 n_i N} + \frac{\ln\sqrt{2\pi N}}{N} + \omega_i(N,\, R_\varepsilon)\right]\right\} < \varepsilon^{N/2},\ i=1,\ 2.$$

Учитывая эти оценки и используя обозначение

$$H_1(\varepsilon) = \max_{\substack{1<n_1,\, n_2<N \\ r_1=r_2=R_\varepsilon}} \Omega_1(n_1)\, \Omega_2(n_2),$$

из неравенства (1,14) получим следующие оценки ($r_1,\ r_2 > R_\varepsilon$, $0 \leqslant$ $\leqslant n_1,\ n_2 < N$):

$$\|w^{(n_1,\, n_2)}\|_r \leqslant H_1(\varepsilon)\|w\|_r \Pi(\sigma_i\rho_i)^{n_i} r_i^{n_i(\rho_i-1)}, \tag{1.15}$$

$$\|w^{(N+n_1,\, n_2)}\|_r \leqslant$$

$$\leqslant \|w\|_r (1+\varepsilon)^{N+n_1+n_2} (\sigma_1\rho_1)^{N+n_1} (\sigma_2\rho_2)^{n_2} r_1^{(N+n)(\rho_1-1)} r_2^{n_2(\rho_2-1)} \tag{1.16}$$

$$\|w^{(n_1,\, N+n_2)}\|_r \leqslant \|w\|_r (1+\varepsilon)^{N+n_1+n_2} (\sigma_1\rho_1)^{n_1} (\sigma_2\rho_2)^{N+n_2} r_1^{n_1(\rho_1-1)} r_2^{(N+n_2)(\rho_2-1)}. \tag{1.17}$$

Применяя повторно неравенства (1.16) и (1.17), получим оценки при любых $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots, n_1 + n_2 \geqslant N = N(\varepsilon)$:

$$\|w^{(n_1, n_2)}\|_r \leqslant \|w\|_r \prod (1+\varepsilon)^{n_i} (\sigma_i \rho_i)^{n_i} r_i^{n_i(\rho_i - 1)}, \tag{1.18}$$

где $\varepsilon > 0$—произвольно малое, а $r_1, r_2 \geqslant R_\varepsilon$.

Действительно, если $n_1 = k_1 N + p_1$, $n_2 = k_2 N + p_2$, где k_1, k_2 — натуральные числа, $0 \leqslant p_1, p_2 < N$, то, обозначая через λ_i выражение $\sigma_i \rho_i r_i^{\rho_i - 1}$, $i = 1, 2$, можем написать

$$\|w^{(n_1, n_2)}\|_r \leqslant \|w^{((k_1-1)N, n_2)}\|_r (1+\varepsilon)^{N+p_1} \lambda_1^{N+p_1} \leqslant$$
$$\leqslant \|w^{((k_1-2)N, n_2)}\|_r (1+\varepsilon)^{2N+p_1} \lambda_1^{2N+p_1} \leqslant \cdots \leqslant$$
$$\leqslant \|w^{(0, n_2)}\|_r (1+\varepsilon)^{n_1} \lambda_1^{n_1} \leqslant \|w^{(0, (k_2-1)N)}\|_r (1+$$
$$+\varepsilon)^{n_1 + N + p_2} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{N+p_2} \leqslant \cdots \leqslant \|w^{(0, N)}\|_r (1+$$
$$+\varepsilon)^{n_1 + (k_2-1)N + p_2} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{(k_2-1)N+p_2} \leqslant \|w\|_r (1+\varepsilon)^{n_1+n_2} \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2}.$$

Заметим, что оценка (1.18) точнее соответствующей оценки из [1]. Неравенства (1.15) и (1.18) будут играть основную роль при оценке нормы оператора L.

§ 2. Теорема существования и единственности решения уравнения (1)

2.1. Ставится задача: доказать существование и единственность решения уравнения (1) в определенном классе целых функций, если коэффициенты уравнения (1)

$$P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) = \sum_{l_1=0}^{k^{(1)}_{n_1 n_2}} \sum_{l_2=0}^{k^{(2)}_{n_1 n_2}} a_{l_1 l_2}^{n_1 n_2} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \tag{2.1}$$

удовлетворяют условиям:

а) $$\sup_{\substack{n_i > 1 \\ n_j > 0}} \frac{k^{(i)}_{n_1 n_2}}{n_i} = \alpha_i < 1; \; i, j = 1, 2; \; i \neq j,$$

$$k^{(1)}_{0 n_2} = k^{(2)}_{n_1 0} = 0, \; n_1, n_2 = 1, 2, \cdots; \tag{2.2}$$

б) ряд

$$\sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) z_3^{n_1} z_4^{n_2}, \tag{2.3}$$

рассматриваемый как 4-кратный степенной ряд, сходится в окрестности начала координат пространства C^4 комплексных переменных z_1, z_2, z_3, z_4.

Условия а) и б) эквивалентны условиям а) и б$_1$), где под условием б$_1$) понимаем абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} P_{n_1n_2}(z_1, z_2)\, z_1^{n_1} z_2^{n_2} \tag{2.4}$$

в некоторой окрестности начала координат пространства C^2 переменных z_1, z_2.

Действительно, из условия б), очевидно, следует условие б$_1$). Наоборот, пусть ряд (2.4) абсолютно и равномерно сходится при $|z_1| = |z_2| = r < 1$. Тогда

$$\overline{\lim_{n_1+n_2\to\infty}} \sqrt[n_1+n_2]{|P_{n_1n_2}(z_1, z_2)|} \leqslant \frac{1}{r}$$

равномерно относительно z_1, z_2, когда $|z_1|=|z_2|=r$. В силу условия а) и неравенства Коши при $n_1+n_2>N=N(\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$) выполняются неравенства

$$|a_{i_1i_2}^{n_1n_2}|\, r^{n_1n_1+n_2n_2} \leqslant |a_{i_1i_2}^{n_1n_2}|\, r^{i_1+i_2} \leqslant M(P_{n_1n_2};\, r,\, r) < \left(\frac{1+\varepsilon}{r}\right)^{n_1+n_2}.$$

Следовательно

$$|a_{i_1i_2}^{n_1n_2}| < \left(\frac{1+\varepsilon}{r^2}\right)^{n_1+n_2} \tag{2.5}$$

и тем более выполняются неравенства

$$\sqrt[n_1+n_2+i_1+i_2]{|a_{i_1i_2}^{n_1n_2}|} < \frac{1+\varepsilon}{r^2},\ 0 \leqslant i_j \leqslant k_{n_1n_2}^{(j)},\ j=1,\ 2;\ n_1+n_2>N.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что ряд (2.3) сходится в полукруге $\{|z_i|<r^2,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, и наше утверждение доказано.

2.2. Используя условия а) и б), выведем оценку для коэффициентов (2.1) уравнения (1). Введем обозначения

$$c_{n_1n_2} = \max_{0\leqslant i_j\leqslant k_{n_1n_2}^{(j)}} |a_{i_1i_2}^{n_1n_2}|,\ n_1,\ n_2=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ n_1+n_2>0.$$

Из неравенства (2.5) заключаем, что $c_{n_1n_2} < \left(\frac{1+\varepsilon}{r^2}\right)^{n_1+n_2}$, как только $n_1+n_2>N$. Следовательно, ряд

$$\sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} c_{n_1n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \tag{2.6}$$

имеет непустую область сходимости.

Обозначим через Γ кривую сопряженных радиусов сходимости ряда (2.6). Пусть $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, т. е.

$$\overline{\lim_{n_1+n_2\to\infty}} \sqrt[n_1+n_2]{c_{n_1n_2}\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}} = 1.$$

Тогда, очевидно, какое бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$

$$H_2(\varepsilon) = H_2(\varepsilon, \gamma_1, \gamma_2) = \sup_{n_1+n_2>0} \left\{ c_{n_1n_2} \left(\frac{\gamma_1}{1+\varepsilon}\right)^{n_1} \left(\frac{\gamma_2}{1+\varepsilon}\right)^{n_2} \right\} < \infty.$$

Если кривая Г содержит несколько точек с одинаковой первой (второй) координатой, то число γ_2 (число γ_1) естественно выбирать по возможности наибольшим. Если же Г является лучом, параллельным первой (второй) координатной оси, то под γ_1 (под γ_2) будем понимать как угодно большое, но конечное число.

Аналогично, в случае, когда ряд (2.6) сходится во всем пространстве C^2, под γ_1 и γ_2 будем понимать как угодно большие, но конечные числа. Следовательно, при любых n_1 и n_2 $(n_1+n_2>0)$ выполняются неравенства

$$c_{n_1n_2} \leqslant H_2(\varepsilon) \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_1}\right)^{n_1} \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_2}\right)^{n_2},$$

и если $|z_1| = r_1 > 1$, $|z_2| = r_2 > 1$, то

$$|P_{n_1n_2}(z_1, z_2)| \leqslant c_{n_1n_2} r_1^{k^{(1)}_{n_1n_2}} r_2^{k^{(2)}_{n_1n_2}} (k^{(1)}_{n_1n_2}+1)(k^{(2)}_{n_1n_2}+1) \leqslant$$

$$\leqslant H_2(\varepsilon) \prod \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_l}\right)^{n_l} r_l^{k^{(l)}_{n_1n_2}} (k^{(l)}_{n_1n_2}+1). \qquad (2.7)$$

2.3. Перейдем теперь к исследованию оператора L:

$$Lw \stackrel{df}{=} \sum_{n_1+n_2\geqslant 1} P_{n_1n_2}(z_1, z_2)\, w^{(n_1, n_2)}(z_1, z_2)$$

в пространстве $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$.

Предположим сначала, что $\rho_1 < 1-\alpha_1$, $\rho_2 < 1-\alpha_2$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty$. Пусть $w(z_1, z_2) \in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$. Тогда в силу неравенств (1.15), (1.18), (2.7) и (2.2) при $r_1, r_2 \geqslant R_*$ будут иметь место неравенства

$$M(P_{n_1n_2} w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2)[E(r_1, r_2)]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant H_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon) \|w\|_r \prod (1+\varepsilon)^{n_l} \left(\frac{1+\varepsilon}{\gamma_l}\right)^{n_l} (k^{(l)}_{n_1n_2}+1)(\sigma_l\rho_l)^{n_l} r_l^{k^{(l)}_{n_1n_2}+n_l(\rho_l-1)} \leqslant$$

$$\leqslant H_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon) \|w\|_r \prod (1+\varepsilon)^{2n_l} (\alpha_l n_l + 1) \left(\frac{\sigma_l\rho_l}{\gamma_l}\right)^{n_l} r_l^{n_l(\alpha_l+\rho_l-1)}. \qquad (2.8)$$

Введем обозначения

$$H_3(\varepsilon) = H_1(\varepsilon) H_2(\varepsilon),\ \lambda_l = \frac{\sigma_l\rho_l(1+\varepsilon)^2}{\gamma_l},\ \beta_l = 1-\alpha_l-\rho_l,\ i = 1, 2.$$

Тогда для $\|Lw\|_r$ получаем следующую оценку:

$$\|Lw\|_r \leqslant H_3(\varepsilon)\|w\|_r \sum_{n_1+n_2\geqslant 1} \prod (n_l+1)\, \lambda_l^{n_l} r_l^{-\beta_l n_l}. \qquad (2.9)$$

Если $0<q<1$, а r_1 и r_2 — достаточно большие, т. е. $r_l \geqslant R_l$, где $R_l = R_l(\lambda_1, \lambda_2, q, \varepsilon) \geqslant R_*$, $i=1, 2$, то ряд в правой части неравенства (2.9) сходится и, более того, выполняется неравенство

$$H_3(\varepsilon)\sum_{n_1+n_2\geq 1}\Pi\,(n_i+1)\,\lambda_i^{n_i}\,r_i^{-\beta_i n_i}\leqslant q<1.$$

Таким образом, при условии $\rho_1<1-\alpha_1$, $\rho_2<1-\alpha_2$, $0<\sigma_1$, $\sigma_2<\infty$ оператор L отображает пространство $W(\rho_1,\ \rho_2;\ \sigma_1,\ \sigma_2)$ в себя, причем, если в нормировке этого пространства числа R_1 и R_2 выбраны достаточно большими, то оператор L является оператором сближения.

2.4. Пусть теперь $\rho_1=1-\alpha_1$, $\rho_2=1-\alpha_2$, $0<\sigma_2<\infty$, а величина σ_1 будет уточнена ниже. Обозначим через Q_1 множество тех натуральных чисел n_1, для которых $k_{n_10}^{(1)}=\alpha_1 n_1$.

Пусть $\sigma_1<\left[\dfrac{1}{\gamma_1}(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}$, т. е. $\lambda_1<\dfrac{1}{1+\varepsilon}$.

Выберем N_1 настолько большим, чтобы при $n_1>N_1$, $n_2=0$ выполнялись неравенства (1.18) и

$$H_2(\varepsilon)\sum_{N_1<n_1\in Q_1}(n_1+1)\,\lambda_1^{n_1}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.10}$$

Представим оператор L в виде

$$Lw=\Bigg(\sum_{\substack{N_1>n_1\in Q_1\\ n_2=0}}+\sum_{\substack{N_1<n_1\in Q_1\\ n_2=0}}+\sum_{\substack{n_1\overline{\in}Q_1\\ n_2=0}}+\sum_{\substack{0<n_1<\infty\\ n_2\geq 1}}\Bigg)P_{n_1n_2}\,w^{(n_1,\ n_2)}=$$

$$=L_1w+L_2w+L_3w+L_4w \tag{2.11}$$

и найдем оценку для норм $\|L_1w\|_r,\cdots,\ \|L_4w\|_r$.

Если $N_1<n_1\in Q_1$, $n_2=0$, то можно воспользоваться оценками (1.18). Следовательно, при r_1, $r_2\geqslant R_\varepsilon$ получим (ср. (2.9) при $\beta_1=0$ и (2.10)):

$$\|L_2w\|_r\leqslant H_2(\varepsilon)\,\|w\|_r\sum_{N_1<n_1\in Q_1}(n_1+1)\,\lambda_1^{n_1}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\,\|w\|_r. \tag{2.12}$$

Для получения оценки нормы оператора L_3 представим его в виде

$$L_3w=\Bigg(\sum_{\substack{N_1'>n_1\overline{\in}Q_1\\ n_2=0}}+\sum_{\substack{N_1'<n_1\overline{\in}Q_1\\ n_2=0}}\Bigg)P_{n_1n_2}\,w^{(n_1,\ n_2)}=L_3'\,w+L_3''\,w,$$

где N_1' настолько большое, что выполняется неравенство

$$H_3(\varepsilon)\sum_{\substack{N'<n_1\overline{\in}Q_1\\ n_2=0}}(\alpha_1 n_1+1)\,\lambda_1^{n_1}\leqslant\frac{\varepsilon}{8}.$$

Как и раньше, легко получить оценку

$$\|L_3''\,w\|_r<\frac{\varepsilon}{8}\,\|w\|_r,\ r_1,\ r_2\geqslant R_\varepsilon. \tag{2.13}$$

С другой стороны, из неравенств $k^{(1)}_{n_1 0} < \alpha_1 n_1$ при $n_1 \overline{\in} Q_1$ следует, что $\theta = \min\limits_{N_1' > n_1 \overline{\in} Q_1} \{\alpha_1 n_1 - k^{(3)}_{n_1 0}\} > 0$.

Тогда в силу неравенств (2.8)

$$\|L_3' w\|_r \leqslant H_3 \|w\|_r \, r_1^{-\theta} \sum_{N_1' > n_1 \overline{\in} Q_1} (\alpha_1 n_1 + 1) \lambda_1^{n_1}$$

и при достаточно больших r_1 имеет место неравенство $\|L_3' w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{8} \|w\|_r$. Объединяя это с (2.13), можем утверждать, что если R_1^0 ($R_1^0 > R_\varepsilon$) — достаточно большое, то при $r_1 > R_1^0$, $r_2 > R_2$ имеет место неравенство

$$\|L_3 w\|_r < \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r . \tag{2.14}$$

Далее, из (2.8) легко получить оценку

$$\|L_4 w\|_r \leqslant$$

$$\leqslant H_3(\varepsilon) \|w\|_r \lambda_2 r_2^{-\beta_2} \sum_{\substack{0 < n_1 < \infty \\ n_2 > 1}} (n_1+1)(n_2+1) \lambda_1^{n_1} (\lambda_2 r_2^{-\beta_2})^{n_2 - 1} < \infty. \tag{2.15}$$

Следовательно, можно выбрать R_2^0 ($R_2^0 \geqslant R_\varepsilon$) настолько большим, чтобы при $r_1 > R_\varepsilon$, $r_2 \geqslant R_2^0$ выполнялось неравенство

$$\|L_4 w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r. \tag{2.16}$$

Рассмотрим, наконец, оператор

$$L_1 w = \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} P_{n_1 0}(z_1) \, w^{(n_1, 0)}(z_1, z_2) =$$

$$= \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} a^{n_1, 0}_{\alpha_1 n_1, 0} \, z_1^{\alpha_1 n_1} w^{(n_1, 0)}(z_1, z_2) +$$

$$+ \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} \widetilde{P}_{n_1 0}(z_1) \, w^{(n_1, 0)}(z_1, z_2) = L_1^0 w + \widetilde{L}_1 w, \tag{2.17}$$

где

$$\widetilde{P}_{n_1 0}(z_1) = P_{n_1 0}(z_1) - a^{n_1 0}_{\alpha_1 n_1, 0} \, z_1^{\alpha_1 n_1}.$$

Как и для $\|L_3' w\|_r$, легко получить оценку

$$\|\widetilde{L}_1 w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \|w\|_r, \quad r_1 > \widetilde{R}_1 > R_\varepsilon, \quad r_2 \geqslant R_\varepsilon. \tag{2.18}$$

Для оценки $\|L_1^0 w\|_r$ воспользуемся неравенством (1.15). Тогда

$$\|L_1^0 w\|_r \leqslant \|w\|_r \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} |a^{n_1 0}_{\alpha_1 n_1, 0}| \, \Omega_1(n_1) (\sigma_1 \rho_1)^{n_1}. \tag{2.19}$$

Введем обозначения

$$d_{n_1} = \left|a^{n_1 0}_{\alpha_1 n_1, 0}\right|, \quad P(\tau) = \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} d_{n_1} \Omega_1(n_1)\, \tau^{n_1}.$$

Так как $P(0)=0$ и многочлен $P(\tau)$ монотонно возрастает при $\tau>0$ (если только $P(\tau)\not\equiv 0$), то существует единственное решение τ_ε уравнения $P(\tau)=1-2\varepsilon$. Накладывая на число σ_1 дополнительное условие $\sigma_1 < \frac{\tau_\varepsilon}{\rho_1}$, из (2.19) получаем оценку

$$\|L_1^0 w\|_r \leqslant (1-2\varepsilon)\, \|w\|_r; \quad r_1,\ r_2 > R_\varepsilon. \tag{2.20}$$

Итак, при достаточно больших r_1 и r_2 и

$$\sigma_1 \leqslant \min\left\{\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_1}, \left[\frac{1}{\gamma_1}(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}\right\}$$

из (2.10)—(2.20) следует неравенство

$$\|Lw\|_r < q\|w\|_r, \quad q = 1-\varepsilon < 1. \tag{2.21}$$

Заметим, что $\Omega_1(n_1)$ зависит также от r_1 ($\Omega_1(n_1)$—монотонно убывающая функция относительно r_1). Следовательно, для того чтобы получить по возможности большее число τ_ε, нужно r_1 выбрать достаточно большим. С другой стороны, число N_1 нужно выбирать по возможности наименьшим, согласуя это с условием (2.10). Но с уменьшением ε число N_1 растет, что приводит к увеличению $P(\tau)$, а это, в свою очередь, к возможному уменьшению τ_ε. Следовательно, допустимой верхней гранью для σ_1 будет

$$s = \sup_{\varepsilon>0}\left\{\min\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_1}, \left[\frac{1}{\gamma_1}(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}\right)\right\}.$$

Если $0<\sigma_1<s$, $0<\sigma_2<\infty$, то при подходящем выборе чисел R_1 и R_2 в нормировке пространства $W(\rho_1, \rho_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$ оператор L отображает $W(1-\alpha_1, \rho_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$ в это же пространство, причем он является оператором сближения. Пусть τ_1—единственный положительный корень уравнения $\Phi_1(\tau)=1$, где

$$\Phi_1(\tau) = \sum_{n_1 \in Q_1} d_{n_1} \sqrt{2\pi n_1}\left(\exp\frac{1}{12\, n_1}\right)\tau^{n_1}$$

—аналитическая функция в начале координат (если $\Phi_1(\tau)\equiv 0$, то положим $\tau_1=\infty$). Докажем, что при условии

$$\sigma_1 < \Xi_1 = \sup_{(\gamma_1, \gamma_2)\in\Gamma}\left\{\min\left(\frac{\tau_1}{\rho_1}, \frac{\gamma_1}{1-\alpha_1}\right)\right\} \tag{2.22}$$

оператор L будет оператором сближения в пространстве $W(1-\alpha_1, \rho_2;\ \sigma_1, \sigma_2)$, если числа R_1 и R_2 в нормировке этого пространства выбраны достаточно большими.

Действительно, пусть $\sigma_1 < \Xi_1$. Тогда существуют такое $\varepsilon > 0$ и система $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$, для которых $\min\left(\frac{\tau_\varepsilon'}{\rho_1}, \frac{\gamma_1}{(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3}\right) > \sigma_1$, где τ_ε' — решение уравнения $\Phi_1(\tau) = 1 - 3\varepsilon$. Выбирая N_1 так, чтобы выполнялось неравенство (2.10), рассмотрим многочлен

$$P_1(\tau) = \sum_{N_1 > n_1 \in Q_1} d_{n_1} \sqrt{2\pi n_1} \left(\exp \frac{1}{12 n_1}\right) \tau^{n_1}.$$

Очевидно, $P_1(\tau) \leqslant \Phi_1(\tau)$ при положительных τ. Следовательно, решение $\tilde{\tau}_\varepsilon'$ уравнения $P_1(\tau) = 1 - 3\varepsilon$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\tau}_\varepsilon' > \tau_\varepsilon'$. Далее, число R_1 можно выбрать настолько большим, чтобы при $r_1 > R_1$ выполнялось неравенство $P(\tilde{\tau}_\varepsilon') \leqslant P_1(\tilde{\tau}_\varepsilon') + \varepsilon$ (это следует из соотношения $\omega_1(n_1, r_1) \downarrow 0$ при $r_1 \to \infty$ и непрерывной зависимости значения многочленов от коэффициентов). Поэтому решение τ_ε уравнения $P(\tau) = 1 - 2\varepsilon$ будет удовлетворять неравенству $\tau_\varepsilon > \tilde{\tau}_\varepsilon' \geqslant$ $> \tau_\varepsilon'$. Это означает, что неравенство (2.21) имеет место, если

$$\sigma_1 < \min\left(\frac{\tau_\varepsilon'}{\rho_1}, \frac{\gamma_1}{(1-\alpha_1)(1+\varepsilon)^3}\right),$$

и наше утверждение доказано.

2.5. Случай $\rho_1 < 1 - \alpha_1$, $\rho_2 = 1 - \alpha_2$ рассматривается аналогично предыдущему. Оператор L будет оператором сближения в пространстве $W(\rho_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$, если $0 < \sigma_1 < \infty$ и

$$0 < \sigma_2 < \Xi_2 = \sup_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} \left\{\min\left(\frac{\tau_2}{\rho_2}\right), \frac{\gamma_2}{1-\alpha_2}\right\}, \tag{2.23}$$

где τ_2 — единственное решение уравнения

$$\Phi_2(\tau) = \sum_{n_2 \in Q_2} |a_{0,\, \alpha_2 n_2}^{0 n_2}| \sqrt{2\pi n_2} \left(\exp \frac{1}{12 n_2}\right) \tau^{n_2} = 1.$$

2.6. Пусть, наконец, $\rho_1 = 1 - \alpha_1$, $\rho_2 = 1 - \alpha_2$. Введем обозначение $Q_{12} = \{(n_1, n_2)\colon k_{n_1 n_2}^{(1)} = \alpha_1 n_1,\ k_{n_1 n_2}^{(2)} = \alpha_2 n_2;\ n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots\}$.

Пусть $\sigma_i < \left[\frac{1}{\gamma_i}(1-\alpha_i)(1+\varepsilon)^3\right]^{-1}$, т. е. $\lambda_i < \frac{1}{1+\varepsilon}$, $i = 1, 2$.

Выберем N_0 настолько большим, чтобы при $n_1 + n_2 > N_0$ выполнялись неравенства (1.18) и

$$H_2(\varepsilon) \sum_{\substack{n_1+n_2>N_0 \\ (n_1, n_2) \in Q_{12}}} (n_1+1)(n_2+1) \lambda_{21}^{n_1} \lambda_2^{n_2} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Представим оператор Lw в виде

$$Lw = \sum_{\substack{n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2) \in Q_{12}}} + \sum_{\substack{n_1+n_2>N_0 \\ (n_1, n_2) \in Q_{12}}} + \sum_{\substack{k_{n_1 n_2}^{(1)} < \alpha_1 n_1 \\ k_{n_1 n_2}^{(2)} = \alpha_2 n_2}} +$$

$$+\sum_{k^{(2)}_{n_1n_2}<\alpha_2 n_2}\Bigg) P_{n_1n_2} w^{(n_1, n_2)} = \widetilde{L}_1 w + \widetilde{L}_2 w + \widetilde{L}_3 w + \widetilde{L}_4 w. \tag{2.25}$$

Аналогично тому, как это делалось в п. 2.4, легко доказать, что если $r_1 \geqslant R_1$, $r_2 \geqslant R_2$, где $R_i = R_i(\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon)$, $i=1, 2,$—достаточно большие, то будут иметь место неравенства

$$\|\widetilde{L}_j w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|w\|_r, \ j=2, 3, 4. \tag{2.26}$$

Чтобы оценить $\|\widetilde{L}_1 w\|_r$, введем обозначения

$$d_{n_1n_2} = |a^{n_1n_2}_{\alpha_1n_1, \alpha_2n_2}|, \ \widetilde{P}_{n_1n_2}(z_1, z_2) = P_{n_1n_2}(z_1, z_2) - a^{n_1n_2}_{\alpha_1n_1, \alpha_2n_2} z_1^{\alpha_1n_1} z_2^{\alpha_2n_2},$$

$$L_1' w = \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} \widetilde{P}_{n_1n_2} w^{(n_1, n_2)},$$

$$L_1^{\cdot} w(z_1, z_2) = \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} a^{n_1n_2}_{\alpha_1n_1, \alpha_2n_2} z_1^{\alpha_1n_1} z_2^{\alpha_2n_2} w^{(n_1, n_2)}(z_1, z_2).$$

Очевидно, $\widetilde{L}_1 w = L_1' w + L_1^{\cdot} w$. Норма $\|L_1' w\|_r$ оценивается так же, как для операторов $\widetilde{L}_3$, $\widetilde{L}_4$, именно

$$\|L_1' w\|_r \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|w\|_r. \tag{2.27}$$

Для оценки $\|L_1^{\cdot} w\|_r$ воспользуемся неравенством (1.15) и получим

$$\|L_1^{\cdot} w\|_r <$$

$$\leqslant \|w\|_r \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} d_{n_1n_2}\, \Omega_1(n_1)\, \Omega_2(n_2) (\sigma_1\rho_1)^{n_1} (\sigma_2\rho_2)^{n_2}. \tag{2.28}$$

Пусть $(\tau_{1\varepsilon}, \tau_{2\varepsilon})$—положительное решение уравнения

$$P(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\substack{0<n_1+n_2<N_0 \\ (n_1, n_2)\in Q_{12}}} d_{n_1n_2}\, \Omega_1(n_1)\, \Omega_2(n_2)\, \tau_1^{n_1} \tau_2^{n_2} = 1 - 2\varepsilon.$$

Накладывая на числа σ_1, σ_2 дополнительные условия $\sigma_1 < \frac{\tau_{1\varepsilon}}{\rho_1}$, $\sigma_2 < \frac{\tau_{2\varepsilon}}{\rho_2}$, из (2.28) получим

$$\|L_1^{\cdot} w\|_r \leqslant (1-2\varepsilon)\|w\|_r. \tag{2.29}$$

Из (2.24), (2.26), (2.29) получаем окончательную оценку

$$\|Lw\|_r \leqslant q\|w\|_r, \ q = 1-\varepsilon < 1,$$

верную при $r_1 \geqslant R_1$, $r_2 \geqslant R_2$, R_1, R_2 — достаточно большие.

Рассуждая так же, как и в п. 2.4, приходим к следующему результату.

Оператор L будет оператором сближения в пространстве $W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$, если

$$0<\sigma_i<\Xi_i^0=\min\left(\frac{\tau_i^0}{\rho_i}, \frac{\gamma_i}{1-\alpha_i}\right), \quad i=1, 2, \tag{2.30}$$

где $(\gamma_1, \gamma_2)\in\Gamma$, (τ_1^0, τ_2^0) — положительное решение уравнения

$$\Phi(\tau_1, \tau_2)=\sum_{(n_1, n_2)\in Q_{12}} d_{n_1 n_2} 2\pi\sqrt{n_1 n_2}\left[\exp\left(\frac{1}{12 n_1}+\frac{1}{12 n_2}\right)\right]\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}=1,$$

а числа R_1, R_2 в нормировке пространства $W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$ выбраны достаточно большими.

2.7. Обозначим через E класс целых функций $w(z_1, z_2)$, принадлежащих хотя бы одному из классов $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1^0, \Xi_2^0)$, $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0)$, $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2)$ (см. п. 1.1), где α_i, Ξ_i и Ξ_i^0, $i=1, 2$, определены в (2.2), (2.22), (2.23) и (2.30)*.

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (1) *выполнены условия а) и б) п. 2.1. Тогда для любой функции $f(z_1, z_2)\in E$ уравнение* (1) *имеет единственное в E решение, причем с.с.п.* (ρ_1, ρ_2) *и с.с.т.* (σ_1, σ_2) *при с.с.п.* (ρ_1, ρ_2) *этого решения совпадают (в допустимых пространством E пределах) с с.с.п. и с.с.т. функции $f(z_1, z_2)$.*

Доказательство. 1. Прежде всего докажем, что уравнение (1) имеет единственное решение в каждом из классов

$$E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1^0, \Xi_2^0), \quad E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0), \quad E(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2),$$

к которому принадлежит функция $f(z_1, z_2)$.

а) Пусть (σ_1, σ_2) — любая точка из открытого прямоугольника $(0, \Xi_1^0; 0, \Xi_2^0)$. Введем пространство $J^{(1)}_{\sigma_1\sigma_2}=W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$ с нормой

$$\|w\|_{R_1, R_2}=\sup_{r_1>R_1,\ r_2>R_2} M(w; r_1, r_2)\exp\left[-(\sigma_1 r_1^{1-\alpha_1}+\sigma_2 r_2^{1-\alpha_2})\right],$$

где числа $R_i=R_i(\sigma_1, \sigma_2)$, $i=1, 2$, выбраны настолько большими, что для всех $w\in W(1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \sigma_1, \sigma_2)$ выполняется неравенство $\|Lw\|_{(R_1, R_2)}\leqslant q\|w\|_{(R_1, R_2)}$, $q<1$ и зависит от σ_1, σ, но не зависит от w (см. пп. 1.3 и 2.6).

Из принципа сжатых отображений [6] следует, что уравнение (1) имеет единственное решение в $J^{(1)}_{\sigma_1\sigma_2}$, если правая часть $f(z_1, z_2)$ принадлежит этому пространству. Тогда по теореме 1 уравнение (1) имеет единственное решение в классе

$$A_1=\bigcup_{\substack{0<\sigma_1<\Xi_1^0\\ 0<\sigma_2<\Xi_2^0}} J^{(1)}_{\sigma_1\sigma_2},$$

если $f(z_1, z_2)\in A_1$. Очевидно, $A_1=E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1^0, \Xi_2^0)$.

---

* Класс $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0)$ (класс $E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2)$) имеет смысл рассматривать только в случае, когда $\Xi_1>\Xi_1^0$ $(\Xi_2>\Xi_2^0)$.

б) Пусть теперь (σ_1, ρ_2) — произвольная точка из открытого прямоугольника $(0, \Xi_1; 0, 1-\alpha_2)$. Введем пространство $J^{(2)}_{\sigma_1\rho_2} = W(1-\alpha_1, \rho_2; \sigma_1, 1)$ с нормой

$$\|w\|_R = \sup_{r_1>R_1, r_2>R_2} M(w; r_1, r_2) \exp[-(\sigma_1 r_1^{1-\alpha_1} + r_2^{\rho_2})],$$

где числа $R_i = R_i(\rho_1, \rho_2)$, $i=1, 2$, выбраны настолько большими, чтобы для всех $w \in W(1-\alpha_1, \rho_2; \sigma_1, 1)$ выполнялось неравенство (см. п. 2.4)

$$\|Lw\|_R \leqslant q\,\|w\|_R, \quad q = q(\sigma, \rho) < 1.$$

На основании принципа сжатых отображений опять можем утверждать, что уравнение (1) имеет единственное решение в $J^{(2)}_{\sigma_1\rho_2}$, если правая часть $f(z_1, z_2)$ принадлежит этому пространству. По теореме 1 уравнение (1) имеет единственное решение в классе

$$A_2 = \bigcup_{\substack{0<\sigma_1<\Xi_1\\ 0<\rho_2<1-\alpha_2}} J^{(2)}_{\sigma_1\rho_2},$$

если $f(z_1, z_2) \in A_2$.

Очевидно, $A_2 = E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; \Xi_1, 0)$.

в) Аналогично доказывается существование единственного решения уравнения (1) в классе $A_3 = E[1-\alpha_1, 1-\alpha_2; 0, \Xi_2)$, когда $f(z_1, z_2) \in A_3$.

2. Докажем теперь, что с.с.п. (ρ_1, ρ_2) и с.с.т. (σ_1, σ_2) при с.с.п. (ρ_1, ρ_2) решения $w(z_1, z_2)$ и правой части $f(z_1, z_2)$ уравнения (1) совпадают. Доказательство можно было бы проводить на основании последнего утверждения теоремы 1 (ср. [1]), но мы воспользуемся другим методом, охватывающим сразу всевозможные варианты.

Пусть $f(z_1, z_2)$ — произвольная целая функция, имеющая с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f) и с.с.т. (σ_1^f, σ_2^f) при с.с.п. (ρ_1^f, ρ_2^f), где $0<\rho_i^f<\infty$, $0\leqslant\sigma_i^f\leqslant\infty$, $i=1, 2$. Введем обозначение

$$W_f = \begin{cases} W(\rho_1^f, \rho_2^f; \sigma_1^f+\varepsilon, \sigma_2^f+\varepsilon), & \text{если } \sigma_1^f<\infty,\ \sigma_2^f<\infty,\\ W(\rho_1^f+\varepsilon, \rho_2^f; 1, \sigma_2^f+\varepsilon), & \text{если } \sigma_1^f=\infty,\ \sigma_2^f<\infty,\\ W(\rho_1^f, \rho_2^f+\varepsilon; \sigma_1^f+\varepsilon, 1), & \text{если } \sigma_1^f<\infty,\ \sigma_2^f=\infty,\\ W(\rho_1^f+\varepsilon, \rho_2^f+\varepsilon; 1, 1), & \text{если } \sigma_1^f=\sigma_2^f=\infty;\ \varepsilon>0. \end{cases}$$

Очевидно, $f \in W_f$. Пусть $f(z_1, z_2) \in A_p$ $(p=1, 2, 3)$ и системы (ρ_1^f, ρ_2^f) и (σ_1^f, σ_2^f) выбраны в пределах, допускаемых в A_p. Из результатов пп. 2.3—2.6 следует, что оператор L является оператором сближения в пространстве W_f (при любом достаточно малом $\varepsilon>0$, фигурирующем в определении W_f). Следовательно, уравнение (1) с правой частью $f(z_1, z_2)$ имеет решение в пространстве W_f, совпадающее с единственным решением $w(z_1, z_2)$ из содержащего W_f пространства A_p. Но условие $w(z_1, z_2) \in W_f$ (при любом $\varepsilon>0$) означает, что существуют такие с.с.п. (ρ_1^w, ρ_2^w) и с.с.т. (σ_1^w, σ_2^w) при с.с.п. (ρ_1^w, ρ_2^w) функции $w(z_1, z_2)$, для которых имеют место неравенства $\rho_i^w \leqslant \rho_i^f$, $\sigma_i^w \leqslant \sigma_i^f$, $i=1, 2$.

С другой стороны, каково бы ни было пространство $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$, содержащее $w(z_1, z_2)$, в его нормировке справедливо неравенство (см. пп. 2.3—2.6)

$$\|f(z_1, z_2)\|_r = \|Lw(z_1, z_2)\|_r \leqslant q\|w(z_1, z_2)\|_r, \quad q<1.$$

Отсюда следует, что $\rho_i^f \leqslant \rho_i^w$, $\sigma_i^f \leqslant \sigma_i^w$, $i=1, 2$. Тем самым требуемые равенства $\rho_i^f = \rho_i^w$, $\sigma_i^f = \sigma_i^w$, $i=1, 2$, доказаны.

Кроме того, из последних неравенств следует, что если $w(z_1, z_2) \in A_p$, то $f(z_1, z_2) \in A_p$ $(p=1, 2, 3)$. Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение не только в пределах каждого класса A_p, но и в их объединении $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Теорема доказана.

§ 3. Приближенное решение уравнения (1)

Метод „урезания", который применяется в данном параграфе, неоднократно использовался при решении аналогичных задач Ю. Ф. Коробейником (см., например, [1]). В дальнейшем также предполагается, что выполняются условия а) и б) п. 2.1. Если правая часть уравнения (1) является многочленом степени k относительно переменных z_1, z_2, то согласно теореме 2 уравнение имеет единственное в классе E решение $w_k(z_1, z_2)$ (см. п. 2.7). Это решение является многочленом степени k относительно z_1, z_2. Его легко найти методом неопределенных коэффициентов. При этом, очевидно, уравнение (1) можно заменить „урезанным" уравнением

$$w + L_k w \equiv w + \sum_{n_1+n_2=1}^{k} P_{n_1 n_2}(z_1, z_2) \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}} = f(z_1, z_2). \tag{3.1}$$

Если $f(z_1, z_2)$—произвольная функция из класса E, то в качестве приближенного решения естественно выбирать полиномиальное решение „урезанного" уравнения

$$w + L_k w = f_k(z_1, z_2), \tag{3.2}$$

где

$$f_k(z_1, z_2) = \sum_{i+j=1}^{k} \frac{1}{i!\, j!} \frac{\partial^{i+j} f(0, 0)}{\partial z_1^i \partial z_2^j} z_1^i z_2^j$$

— частичная сумма тейлоровского разложения функции $f(z_1, z_2)$. Мы покажем, что этот процесс приближенного решения сходится. Точнее, имеет место

Теорема 3. *Если $f(z_1, z_2)$ — целая функция из класса E и $w_k(z_1, z_2)$—полиномиальное решение урезанного уравнения* (3.2), *то $w_k(z_1, z_2)$ стремится равномерно в любой ограниченной области к решению $w(z_1, z_2)$ уравнения* (1), *более того, $w_k(z_1, z_2) \to w(z_1, z_2)$ равномерно во всем пространстве C^2 с весом* $\exp[-(\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2})]$, *где ρ_i, σ_i, $i=1, 2$, — произвольные положительные числа такие, что $f(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2]$.*

Доказательство. Пусть положительные числа ρ_i, σ_i, $i=1, 2$, выбраны так, что $f(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2) \subset E$. Рассмотрим операторы L_k, $\widetilde{L}_k$:

$$L_k w \equiv \sum_{n_1+n_2=1}^{k} P_{n_1 n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}},$$

$$\widetilde{L}_k w \equiv \sum_{n_1+n_2=k+1}^{\infty} P^{n_1 n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} w}{\partial z_1^{n_1} \partial z_2^{n_2}}.$$

Нормы этих операторов оцениваются так же, как норма оператора L в п.п. 2.3—2.6. Так как

$$M(L_k w; r_1, r_2) \leqslant \sum_{n_1+n_2=1}^{k} M(P_{n_1 n_2} w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} M(P_{n_1 n_2} w^{(n_1, n_2)}; r_1, r_2),$$

то в силу результатов п.п. 2.3—2.6 имеет место неравенство

$$\|L_k w\|_r \leqslant q \|w\|_r, \ q<1, \ r_1>R_1, \ r_2>R_2, \tag{3.4}$$

где R_1, R_2—достаточно большие постоянные; q, R_1, R_2 от w и k не зависят.

Норма оператора $\widetilde{L}_k$ оценивается так же, как норма оператора L в п.п. 2.3—2.6. При этом соответствующие оценки уточняются следующим образом. Ряды, фигурирующие в неравенствах (2.9), (2.12), (2.15), заменяются на их остатки, соответствующие индексам (n_1, n_2) с $n_1+n_2>k$. Следовательно, число q, фигурирующее в оценках нормы оператора L, заменяется величиной $q(k)$, стремящейся к нулю вместе с $1/k$. Находить такие оценки, как для нормы операторов L_1 из (2.11) и $\widetilde{L}_1$ из (2.25), в данном случае нет надобности, так как k можно выбрать настолько большим, чтобы $k>N_1$, $k>N_0$. На основании сказанного можем написать

$$\|\widetilde{L}_k w\|_r \leqslant q(k) \|w\|_r, \ q(k) \to 0, \ r_1>R_1, \ r_2>R_2. \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.4) и (3.5) следует, что операторы L_k и $\widetilde{L}_k$ являются операторами сближения в пространстве $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$.

Рассмотрим урезанное уравнение (3.2) с правой частью (3.3) ($f(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$). Из сказанного выше следует, что это уравнение имеет единственное полиномиальное решение $w_k(z_1, z_2)$ в классе E, причем $w_k(z_1, z_2) \in W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ при любом натуральном k. Если $w(z_1, z_2)$ — решение полного уравнения (1), то $u_k(z_1, z_2) = w(z_1, z_2) - w_k(z_1, z_2)$ является решением уравнения

$$W + L_k W = f(z_1, z_2) - f_k(z_1, z_2) - \widetilde{L}_k w(z_1, z_2). \tag{3.6}$$

Так как правая часть уравнения (3.6) принадлежит классу $E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2] \subset E$, то по теореме 2 $u_k(z_1, z_2)$ является единственным в E решением уравнения (3.6), причем $u_k(z_1, z_2) \in E[\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2]$. Следовательно, в силу леммы 2 функции u_k и $f - f_k - \tilde{L}_k w$ принадлежат B-пространству $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$. Тогда, как известно [6], в нормировке пространства $W(\rho_1, \rho_2; \sigma_1, \sigma_2)$ имеют место неравенства

$$\|w - w_k\| = \|u_k\| \leqslant \frac{\|f - f_k - \tilde{L}_k w\|}{1-q} \leqslant \frac{\|f - f_k\|}{1-q} + \frac{\|\tilde{L}_k w\|}{1-q} <$$

$$\leqslant \frac{\|f - f_k\|}{1-q} + \frac{q(k)\|w\|}{1-q} \leqslant \frac{\|f - f_k\|}{1-q} + q(k)\frac{\|f\|}{1-q}.$$

Учитывая лемму 2 и условие (3.5), отсюда заключаем, что $\|w - w_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Но последнее означает, что при $k \to \infty$

$$\sup_{r_1 > R_{10},\ r_2 > R_{20}} M(w - w_k; r_1, r_2)[E(r_1, r_2)]^{-1} \to 0,$$

и последовательность полиномов $w_k(z_1, z_2)$ сходится к решению $w(z_1, z_2)$ равномерно во всем пространстве C^2 с весом $\exp\{-[\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}]\}$ и, подавно, равномерно в любой ограниченной области. Теорема доказана.

Ужгородский государственный
университет

Поступила 10.I.1972

Ֆ. Ի. ԳԵՉԵ, Ա. Ի. ԿՈՒՐԵՅ. Մասնական ածանցյալներով անվերջ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ամբողջ լուծումների մասին *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է [1] հավասարման լուծման գոյության ու միակության հարցը՝ երկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասում։

Հիմնավորված է տված հավասարման մոտավոր լուծման մեթոդը։

F. J. GEČE, A. I. KUREJ. *On entire solutions of linear partial differential equations of infinite order* (summary)

For the equation (1) the existence and the uniqueness of the solution in a class of entire functions of two variables has been considered. A method of approximate solution of this equation is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Ф. Коробейник.* О целых решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, Литовский матем. сб., вып. IV, № 2, 1964, 203—227.
2. *С. А. Еремин.* Некоторые вопросы приближения функций многих комплексных переменных, Киев, 1958.
3. *А. О. Гельфонд.* Исчисление конечных разностей, М., 1959.

4. *М. М. Джрбашян.* К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Известия АН Арм.ССР, сер. физ.-мат., 8, № 4, 1955, 1—23.
5. *А. А. Темляков.* Функции многих комплексных переменных, История отечественной математики, т. 4, книга 1, Киев, 1960.
6. *Л. В. Канторович* и *Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК, О. В. ЕПИФАНОВ

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В аналитической теории дифференциальных уравнений приходится в ряде случаев оценивать рост производных целой функции в зависимости от роста исходной функции (см., например, [1]). Эта же задача оценки роста производных целых функций из некоторого класса возникает в теории целых (в частности, экспоненциальных) функций. Характерным примером решения такой задачи является классический результат С. Н. Бернштейна, согласно которому, если $f(z)$ — целая функция первого порядка и типа $\leqslant \sigma$, ограниченная на вещественной оси, то

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(n)}(x)| \leqslant \sigma^n \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|.$$

В настоящей статье оценивается рост производных целых функций из некоторого весового банахового пространства целых функций, инвариантного относительно дифференцирования. Результаты §§ 1, 2 и 4 получены Ю. Ф. Коробейником, а § 3—О. В. Епифановым.

1°. Пусть функция $\varphi(r)$ определена при $r \geqslant r_0 > 0$, положительна, непрерывна и монотонно возрастает при $r \to \infty$. Будем предполагать, что это возрастание не слишком медленное, а именно, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \varphi(r)}{\ln r} = +\infty. \tag{1}$$

Если $y(z)$—произвольная целая функция, то, как обычно, положим $M(r, y) = \max_{|z|=r} |y(z)|$. Обозначим через B_φ нормированное пространство целых функций $f(z)$ таких, что

$$\sup_{r\geqslant r_0} \frac{M(r, f)}{\varphi(r)} = \|f\|_{r_0} < \infty.$$

Легко проверить, что B_φ—банахово пространство. Условие (1) обеспечивает включение в B_φ множества S всех многочленов. Предположим, что весовая функция $\varphi(r)$ возрастает не слишком быстро, а именно, что при некотором $a_0 > 0$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\varphi(r + a_0)}{\varphi(r)} = C < \infty. \tag{2}$$

Множество функций, удовлетворяющих условиям (1) и (2), достаточно обширно и содержит, например, функции вида $\exp \sigma (\ln r)^\gamma$, $\exp \sigma r^\alpha$, где $0 < \sigma < \infty$, $1 < \gamma < \infty$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Условие (2) обеспечивает инвариантность B_φ относительно дифференцирования. Действительно, если $y(z) \in B_\varphi$ и $r > r_0$, то

$$\frac{M(r, y')}{\varphi(r)} \leqslant \frac{M(r+a_0, y)}{a_0 \varphi(r)} \leqslant \frac{M(r+a_0, y)}{\varphi(r+a_0)} \frac{\varphi(r+a_0)}{\varphi(r)\, a_0} \leqslant \frac{C\, \|y\|_{r_0}}{a_0}.$$

Отсюда

$$\|y'\|_{r_0} \leqslant \frac{C}{a_0} \|y\|_{r_0} < \infty. \tag{3}$$

Заметим, что условие (2) выполнено, если, например, $\varphi(r)$ дифференцируема в промежутке $[r_0, +\infty)$, причем $\dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$ не возрастает. Тогда для $\forall a > 0$ и $\forall r > r_0$

$$\frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)} = \exp\{\ln \varphi(r+a) - \ln \varphi(r)\} = \exp \int\limits_r^{r+a} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt < \exp \frac{a\varphi'(r_0)}{\varphi(r_0)}.$$

Неравенство (3) уже представляет собой оценку роста производной в зависимости от роста нормы самой функции. Из нее при любом $n > 1$ следует

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant \left(\frac{C}{a_0}\right)^n \|y\|_{r_0}. \tag{4}$$

Постараемся уточнить оценку (4), предполагая, что функция $\varphi(r)$ положительна и дважды дифференцируема в промежутке $[r_0, +\infty)$, а функция $\mu(r) = \ln \varphi(r)$ неограниченно и монотонно возрастает и вогнута (выпукла вверх) в этом промежутке, причем

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mu(r)}{\ln r} = +\infty. \tag{5}$$

Условие (5) является другой формой записи условия (1). Вогнутость $\mu(r)$ равносильна условию невозрастания функции $\mu'(r) = \dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$. Для $\forall n \geqslant n_0$, $r \geqslant r_0$, $a > 0$ имеем из интегральной формулы Коши

$$\frac{M(r, y^{(n)})}{\varphi(r)} \leqslant \frac{n!\, M(r+a, y)}{a^n \varphi(r+a)} \frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)}.$$

Отсюда

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant n!\, \beta_n \|y\|_{r_0},$$

где

$$\beta_n = \inf_{a>0} \sup_{r>r_0} \frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)} \frac{1}{a^n}.$$

Но

$$\frac{\varphi(r+a)}{\varphi(r)} = \exp[\mu(r+a) - \mu(r)] = \exp \int\limits_r^{r+a} \mu'(t)\, dt \leqslant \exp a\mu'(r) \leqslant$$

$$\leqslant \exp a\mu'(r_0).$$

Следовательно

$$\beta_n < \inf_{a>0} \frac{1}{a^n} \exp a\mu'(r_0) = \gamma_n.$$

Обычными методами математического анализа находим, что наименьшее в промежутке $(0, +\infty)$ значение функции $\frac{1}{a^n} \exp a\mu'(r_0)$ достигается в точке $a_0 = \frac{n}{\mu'(r_0)}$ и равно $\left(\frac{e\mu'(r_0)}{n}\right)^n$. Итак, при $\forall n \geqslant 1$

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant n! \left(\frac{e\mu'(r_0)}{n}\right)^n \|y\|_{r_0}. \tag{6}$$

С помощью формулы Стирлинга формула (6) перепишется так:

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant \lambda_n (\mu'(r_0))^n \|y\|_{r_0}, \tag{7}$$

где $\lambda_n = \sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{1}{12n}}$, и $(\lambda_n)^{\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to \infty$. Иначе говоря

$$\|y^{(n)}\|_{r_0} \leqslant (1+\varepsilon_n)^n (\mu'(r_0))^n \|y\|_{r_0}, \tag{8}$$

$\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Оценкой (8) удобно пользоваться при больших значениях n.

Заметим еще, что если положить $\|y\|_r = \sup\limits_{t>r} \frac{M(t, y)}{\varphi(t)}$, то для $\forall r \geqslant r_0$ получаем таким же способом оценку

$$\|y^{(n)}\|_r \leqslant \lambda_n (\mu'(r))^n \|y\|_r. \tag{9}$$

В качестве примера рассмотрим функцию $\mu(r) = \sigma r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ является уточненным порядком (см. [2]), то есть удовлетворяет условиям

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0, \ \lim_{r\to\infty} r\rho'(r) \ln r = 0.$$

Как известно [2], из этих свойств следует, что $r^{\rho(r)}$ монотонно возрастает для всех достаточно больших r.

Мы будем считать, что это обстоятельство имеет место для $\forall r > r_0$ и что $\rho(r)$ дважды дифференцируема, причем $(r^{\rho(r)})'' \leqslant 0$ (то есть $\mu(r)$ вогнута). Тогда имеет место неравенство (9) при любых $n \geqslant 1$, $r > r_0$.

Запишем выражение для $\mu'(r)$:

$$\mu'(r) = \sigma[\rho(r) r^{\rho(r)-1} + r^{\rho(r)} \ln r\ \rho'(r)] = \sigma\rho(r) r^{\rho(r)-1}\left[1 + \frac{r \ln r\,\rho'(r)}{\rho(r)}\right] =$$
$$= \sigma\rho r^{\rho(r)-1}[1 + \varepsilon(r)],$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Итак

$$\|y^{(n)}\|_r \leqslant \lambda_n [1 + \varepsilon(r)] (\sigma\rho r^{\rho(r)-1})^n \|y\|_r. \tag{10}$$

В частности, если положить $\mu(r) = \sigma r^\rho$, где $0 < \sigma < +\infty$, $0 < \rho \leqslant 1$, то $\mu'(r) > 0$, $\mu''(r) \leqslant 0$, $\rho(r) \equiv \rho$, $\varepsilon(r) \equiv 0$, и по формуле (10) получим для

$\forall r>0$ (в качестве r_0 можно взять любое как угодно малое положительное число):

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho}\leqslant\lambda_n\,(\sigma\rho r^{\rho-1})^n\,\|y\|_r^{\sigma,\rho}. \tag{11}$$

Здесь $y(z)$ — произвольная целая функция из пространства $W_{\sigma,\rho}^r$ с нормой $\|y\|_r^{\sigma,\rho}=\sup\limits_{t>r}\dfrac{M(t,y)}{\exp\sigma t^\rho}$.

Попробуем оценить степень точности формулы (11). Положим $\rho=1$ и рассмотрим функцию $y_0=e^{\sigma z}\in W_{\sigma,1}^r$. Для нее при $\forall n\geqslant 1$ и $\forall r>0$, как легко вычислить

$$\|y_0^{(n)}\|_r^{\sigma,1}=\sigma^n\,\|y_0\|_r^{\sigma,1}.$$

Таким образом, если оценку (11) записать в асимптотическом виде

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho}}{\|y\|_r^{\sigma,\rho}}\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\rho\sigma r^{\rho-1},$$

то последнее неравенство точно в том смысле, что число $\sigma\rho$ нельзя заменить меньшим числом сразу для всех $\sigma\in(0,+\infty)$ и $\rho\in(0,+1]$.

Рассмотрим еще случай, когда $\dfrac{1}{2}<\rho\leqslant 1$. Функция Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma^{\frac{k}{\rho}}z^k}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{k}{\rho}\right)}.$$

является, как известно, целой функцией порядка ρ и типа σ. Из ее асимптотического представления (см. монографию [3], стр. 133—135), нетрудно вывести, что если $\mu>0$, то

$$M(r,E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ \mu))=\rho r^{\rho(1-\mu)}\,\sigma^{1-\mu}\,e^{\sigma r^\rho}+\varepsilon_1(r),$$

где $\varepsilon_1(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Следовательно, $E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\mu)\in W_{\sigma,\rho}^r$, если $\mu\geqslant 1$ и $r\geqslant 0$. Рассмотрим функцию $\psi(z)=E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\ 1)$. Имеем

$$\psi'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho\sigma^{\frac{k}{\rho}}z^{k-1}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{\rho}\right)}=\rho\sigma^{\frac{1}{\rho}}E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда

$$M(r,\psi')=\rho\sigma^{\frac{1}{\rho}}\rho r^\rho r^{-1}e^{\sigma r^\rho}\sigma^{1-\frac{1}{\rho}}+\varepsilon_2(r)=\rho e^{\sigma r^\rho}(\rho\sigma r^{\rho-1}+\varepsilon_3(r)),$$

где $\varepsilon_3(r)\,e^{\sigma r^\rho}\to 0$ при $r\to\infty$.

Следовательно, $\|\psi'\|_r^{\sigma,\rho}=\|\psi\|_r^{\sigma,\rho}(\rho\sigma r^{\rho-1}+\varepsilon_4(r))$, $r>0$, $\varepsilon_4(r)\cdot e^{\sigma r^\rho}\to 0$ при $r\to\infty$.

Аналогично, с помощью тех же асимптотических формул нетрудно показать, что при любом фиксированном $n\geqslant 1$ и при $\forall r>0$

$$\|\psi^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho}=\|\psi\|_r^{\sigma,\rho}\left[(\rho\sigma r^{\rho-1})^n+\eta_n(r)\right],$$

где $\eta_n(r)\,e^{\sigma r^\rho}\to 0$ при $r\to\infty$.

Таким образом, хотя оценка (11) и получена элементарным путем, но она оказалась довольно точной (при больших n и r). Менее точные оценки производных в пространстве $W^r_{\sigma,\rho}$ были получены ранее в работе [4].

Заметим еще, что пользуясь асимптотическим представлением функции $E_\rho(\sigma^{\frac{1}{\rho}}z;\mu)$ из [3], В. Богачев в своей курсовой работе показал, что пространство $W^r_{\sigma,\rho}$ не инвариантно относительно дифференцирования при любом $\rho>1$.

В качестве второго примера на применение формулы (9) рассмотрим функцию $\mu(r)=\sigma(\ln r)^\rho$, $r_0\geqslant 1$, $\rho>1$, $0<\sigma<\infty$ и образуем банахово пространство $V^{\sigma,\rho}_{r_0}$ целых функций нулевого порядка $y(z)$, для которых

$$\|y\|_{r_0}^{\wedge}=\sup_{r>r_0}\frac{M(r,y)}{\exp\sigma(\ln r)^\rho}<+\infty.$$

Функция $\mu(r)$ обладает всеми нужными нам свойствами, если $r_0>e^{\rho-1}$. По формуле (9) имеем для $\forall r>e^{\rho-1}$

$$\|y^{(n)}\|_r^{\wedge}\leqslant\lambda_n\left(\frac{\sigma\rho(\ln r)^{\rho-1}}{r}\right)^n\|y\|_r^{\wedge}. \tag{12}$$

Аналогичные оценки можно получить и в других классах достаточно медленно растущих целых функций.

2°. В этом параграфе мы получим оценки производных целой функции из весового пространства B_φ при несколько иных предположениях относительно весовой функции $\varphi(r)$. Именно, пусть $\varphi(r)$—положительная, дифференцируемая и монотонно возрастающая в промежутке $(b_0,+\infty)$, где $b_0\geqslant 0$, функция, удовлетворяющая условию (1). Как и раньше, будем, с другой стороны, предполагать, что $\varphi(r)$ возрастает не слишком быстро, но это условие выразим в иной форме, чем (2): именно, для некоторого $r_0>b_0$ можно указать такое $C=C(r_0, b_0)$, что для $\forall x\geqslant r_0$ и $\forall y>b_0$

$$\varphi(x+y)\leqslant C\varphi(x)\,\varphi(y). \tag{13}$$

Если, как и раньше, ввести функцию $\mu(x)=\ln\varphi(x)$, то условие (13) эквивалентно следующему:

$$\sup_{\substack{x>r_0\\ y>b_0}}\left[\mu(x+y)-\mu(x)-\mu(y)\right]<+\infty. \tag{14}$$

Заметим, что если функция φ удовлетворяет условию (14), то условие (2) выполняется при любом $a_0>b_0$, и пространство B_φ инвариантно относительно дифференцирования.

Пусть $y(z) \in B_\varphi$. Тогда при $\forall r \geqslant r_0$, $t \geqslant r$ и $\forall a > b_0$

$$\frac{M(t, y^{(n)})}{\varphi(t)} \leqslant n! \frac{M(t+a, y)}{\varphi(t+a)} \frac{\varphi(t+a)}{a^n \varphi(t)} \leqslant n! \|y\|_r \, C \cdot \frac{\varphi(a)}{a^n}.$$

Положим $\gamma_n = \inf\limits_{a > b_0} \frac{\varphi(a)}{a^n}$. Тогда $\|y^{(n)}\|_r \leqslant n! \, \gamma_n C \|y\|_r$, $r \geqslant r_0$. При любом $n \geqslant 1$ $\lim\limits_{a \to +\infty} \frac{\varphi(a)}{a^n} = +\infty$. Поэтому или $\gamma_n = \lim\limits_{a \to b_0 + 0} \frac{\varphi(a)}{a^n}$, или γ_n достигается где-то внутри конечного промежутка (b_0, N), в точках, удовлетворяющих условию

$$\varphi'(a)\, a^n - n a^{n-1} \varphi(a) = 0, \quad \text{или} \quad a = \frac{n \varphi(a)}{\varphi'(a)}. \tag{15}$$

В ряде случаев можно решить это уравнение точно или асимптотически и, тем самым, найти точное или асимптотическое значение a и γ_n.

Положим, например, $\varphi(r) = e^{\sigma r^\rho}$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \rho \leqslant 1$, $b_0 = 0$. Так как при $\forall x$, $y > 0$ $(x+y)^\rho \leqslant x^\rho + y^\rho$, то условие (13) выполнено, если в качестве r_0 взять как угодно малое положительное число, при этом $C = 1$, $\lim\limits_{a \to +0} \frac{\varphi(a)}{a^n} = +\infty$, и γ_n достигается внутри интервала $(0, +\infty)$.

Из равенства (15) находим $a = \left(\frac{n}{\sigma\rho}\right)^{1/\rho}$, $\gamma_n = \left(\frac{\sigma e \rho}{n}\right)^{n/\rho}$. Таким образом, при $\forall r \geqslant r_0 > 0$

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma, \rho} \leqslant n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho} \|y\|_r^{\sigma, \rho}. \tag{16}$$

Сравнивая оценки (11) и (16), видим, что они совпадают при $\rho = 1$, а при $\rho < 1$ имеют различный характер.

Покажем, что оценка (16) справедлива и при $r = 0$. Пусть $y(z) \in W^0_{\sigma, \rho}$. Тогда $y \in W^r_{\sigma, \rho}$ при любом $r > 0$ и

$$\|y^{(n)}\|_0^{\sigma, \rho} = \sup_{r > 0} \|y^{(n)}\|_r^{\sigma, \rho} \leqslant n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho} \sup_{r > 0} \|y\|_r^{\sigma, \rho} =$$

$$= n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho} \|y\|_0^{\sigma, \rho}.$$

Как заметил В. Богачев, последние оценки точны для любого $n \geqslant 1$: если $y_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, то $\|y_n^{(n)}(z)\|_0^{\sigma, \rho} = 1$; $\|y_n\|_0^{\sigma, \rho} = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{\sigma\rho e}\right)^{n/\rho}$. С помощью этого же примера легко установить, что в неравенстве (16) постоянную $n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho} (\sigma\rho)^{n/\rho}$ нельзя заменить меньшим числом C_n сразу для всех $r > 0$, ибо при $r \downarrow 0$

$$\sup_{y\in W^r_{\sigma,\rho}} \frac{\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho}}{\|y\|_r^{\sigma,\rho}} = a_n(r) \to n!\left(\frac{e}{n}\right)^{n/\rho}(\sigma\rho)^{n/\rho}.$$

Пусть γ—произвольное число из отрезка $[0,1]$. Возводя обе части неравенства (11) в степень γ, а неравенства (16)—в степень $1-\gamma$, мы приходим к такой комбинации оценок (11) и (15), в которой участвует параметр γ, а $r>0$:

$$\|y^{(n)}\|_r^{\sigma,\rho} \leqslant n!\left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n\left[\gamma+\frac{1-\gamma}{\rho}\right]} r^{(\rho-1)\gamma n}\|y\|_r^{\sigma,\rho}. \qquad (17)$$

Положим еще $\varphi(r)=\exp\sigma(\ln r)^\rho$, $0<\sigma<\infty$, $1<\rho<\infty$, $b_0=1$. Рассмотрим при фиксированном $y\geqslant 1$ функцию $\lambda(x)=(\ln(x+y))^\rho-(\ln x)^\rho$. Легко проверить, что функция $\dfrac{(\ln t)^{\rho-1}}{t}$ возрастает в промежутке $(1, e^{\rho-1})$ и убывает в интервале $(e^{\rho-1}, +\infty)$. Так как $\lambda'(x)=\rho\left[\dfrac{(\ln(x+y))^{\rho-1}}{x+y}-\dfrac{(\ln x)^{\rho-1}}{x}\right]$, то $\lambda'(x)<0$ для $\forall y>0$ и $\forall x>x_0=e^{\rho-1}$. Следовательно, если $x\geqslant x_0$ и $y>0$, то

$$[\ln(x+y)]^\rho-(\ln x)^\rho\leqslant(\ln(x_0+y))^\rho-(\ln x_0)^\rho.$$

Отсюда при $\forall x>x_0$ и $\forall y\geqslant 1$

$$(\ln(x+y))^\rho-(\ln x)^\rho-(\ln y)^\rho\leqslant(\ln(x_0+y))^\rho-(\ln x_0)^\rho-(\ln y)^\rho.$$

Заметим, что если $y\geqslant x_0=e^{\rho-1}$, то

$$(\ln(y+x_0))^\rho-(\ln y)^\rho<(\ln 2x_0)^\rho-(\ln x_0)^\rho=d_1.$$

Если $d=\max\limits_{1<y<x_0}[(\ln(x_0+y))^\rho-(\ln y)^\rho]$ и $d_2=\max\{d, d_1-(\ln x_0)^\rho\}$, то при $\forall x\geqslant x_0$ и $\forall y\geqslant 1$

$$(\ln(x+y))^\rho-(\ln x)^\rho-(\ln y)^\rho\leqslant d_2.$$

Таким образом, условие (14) выполнено ($b_0=1$, $r_0=x_0=e^{\rho-1}$). Из уравнения (15) получаем $\ln a=\left(\dfrac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ или $a_n=\exp\left(\dfrac{n}{\sigma\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$, откуда

$$\frac{\varphi(a_n)}{(a_n)^n}=\exp\frac{(1-\rho)\,n^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{(\sigma\rho^\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}}=\exp(1-\rho)\left(\frac{n^\rho}{\sigma\rho^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Так как $\lim\limits_{a\to 1+0}\dfrac{\varphi(a)}{a^n}=1$, а $\dfrac{\varphi(a_n)}{(a_n)^n}<1$, то $\gamma_n=\dfrac{\varphi(a_n)}{(a_n)^n}$ и окончательно при $\forall r>e^{\rho-1}$

$$\|y^{(n)}\|_r^\wedge\leqslant n!\cdot\exp(1-\rho)\left(\frac{n^\rho}{\sigma\rho^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\cdot\|y\|_r^\wedge. \qquad (18)$$

Неравенство (18) показывает, что норма n-ой производной функции из класса $V_r^{\gamma,\rho}$ очень быстро убывает при возрастании n.

Комбинируя оценки (12) и (18) точно так же, как в случае оценок (11) и (16), приходим к неравенству, содержащему параметр $\gamma\in[0, 1]$ $(r\geqslant e^{\rho-1})$:

$$\|y^{(n)}\|_r^{\wedge} \leqslant n! \left(\frac{e}{n}\right)^{n\gamma}\left(\frac{\sigma\rho\,(\ln r)^{\rho-1}}{r}\right)^{n\gamma} \exp\,(1-\rho)(1-\gamma)\left(\frac{n^\rho}{\sigma\rho^\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\|y\|_r^{\wedge}\,. \tag{19}$$

3°. В этом параграфе мы рассмотрим банахово пространство $E\,(k\,(\theta))$, состоящее из всех тех целых функций $y\,(z)$, для которых

$$\|y\| = \sup_{\substack{0<r<\infty\\ 0<\theta<2\pi}} \frac{|y\,(re^{i\theta})|}{\exp\,(k\,(\theta)\,r)} \sup_{|z|<\infty} \Phi\,(y\,(z);\,k) < \infty.$$

Здесь $k\,(\theta)$ — ограниченная тригонометрически выпуклая функция;

$$\Phi\;(y\,(z);\;k) = \frac{|y\,(z)|}{\exp\,(k\,(\arg z)\,|z|)}\,.$$

Перед тем, как дать оценку $\|y^{(n)}\|$ в $E\,(k\,(\theta))$, докажем одну лемму относительно свойств $k\,(\theta)$.

Л е м м а. *Для любых комплексных* z_1 *и* z_2

$$k\,(\arg z_2)\,|z_2| - k\,(\arg z_1)\,|z_1| \leqslant k\,(\arg\,(z_2-z_1))\,|z_1-z_2|. \tag{20}$$

З а м е ч а н и е. Как обычно, $\arg z$ отсчитывается от положительной полуоси против часовой стрелки.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Допустим сначала, что $\arg z_1 - \arg z_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Положим $\theta_2 = \arg z_2$. Проведем из начала координат векторы $\vec{z_1}$ и $\overrightarrow{z_2-z_1}$ и построим на них параллелограмм. Начало координат будет одной из вершин параллелограмма, а вектор $\vec{z_2}$ — его диагональю, проходящей через начало координат.

Обозначим (арифметический) угол между $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$ в этом параллелограмме через α, а между $\overrightarrow{z_2-z_1}$ и $\vec{z_2}$ — через β (так что угол параллелограмма при вершине, начале координат, равен $\alpha+\beta$). Пусть, далее, δ — угол между $\vec{z_1}$ и $\vec{z_2}$, отсчитываемый от $\vec{z_1}$ к $\vec{z_2}$ против часовой стрелки. Как предполагалось выше, $\delta\neq\pi$. Положим в случае $\delta>\pi$, $\theta_1=\theta_2+\alpha$, $\theta_3=\theta_2-\beta$, а в случае $\delta<\pi$ $\theta_1=\theta_2-\alpha$, $\theta_3=\theta_2+\beta$. Несложные геометрические рассмотрения показывают, что в обоих случаях $\theta_1\equiv \arg z_1 \pmod{2\pi}$; $\theta_3\equiv\arg\,(z_2-z_1) \pmod{2\pi}$; кроме того, в первом случае $\theta_1>\theta_2>\theta_3>\theta_1-\pi$, а во втором — $\theta_3>\theta_2>\theta_1>\theta_3-\pi$ (учитываем, что $\alpha+\beta<\pi$).

Запишем равенство $(z_2-z_1)+(z_1-z_2)=0$ в эквивалентной форме

$$\begin{cases} |z_2 - z_1| \cos\theta_3 + |z_1| \cos\theta_1 - |z_2| \cos\theta_2 = 0, \\ |z_2 - z_1| \sin\theta_3 + |z_1| \sin\theta_1 - |z_2| \sin\theta_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Умножив первое уравнение системы (21) на $\sin\theta_3$ и вычтя второе, умноженное на $\cos\theta_3$, получим

$$\frac{|z_1|}{\sin(\theta_3-\theta_2)} = \frac{|z_2|}{\sin(\theta_3-\theta_1)}.$$

Аналогично получим $\dfrac{|z_2|}{\sin(\theta_3-\theta_1)} = \dfrac{|z_1|}{\sin(\theta_3-\theta_2)}$, и в итоге

$$\frac{|z_2 - z_1|}{\sin(\theta_2-\theta_1)} = \frac{|z_2|}{\sin(\theta_3-\theta_1)} = \frac{|z_1|}{\sin(\theta_3-\theta_2)} \tag{22}$$

(фактически соотношения (22) выражают теорему синусов для треугольника со сторонами $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_2-z_1|$).

Рассмотрим для определенности случай, когда $\delta > \pi$ (случай $\delta < \pi$ исследуется совершенно аналогично).

Из условия тригонометрической выпуклости функции $k(\theta)$ (см. 2]) следует, что

$$k(\theta_2)\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} + k(\theta_1)\frac{\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \leqslant k(\theta_3).$$

Используя (22) и 2π-периодичность функции $k(\theta)$, приходим к соотношению (20).

Предположим теперь, что $\arg z_1 - \arg z_2 \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Тогда $\arg(-z_1) \equiv \arg z_2 \pmod{2\pi}$ и $\arg(z_2-z_1) = \arg z_2$. Далее, $|z_2-z_1| = |z_2 + (-z_1)| = |z_2| + |z_1|$.

Требуемое неравенство (20) принимает в этом случае такой вид (полагаем $\theta_2 = \arg z_2$):

$$k(\theta_2)|z_2| - k(\theta_2+\pi)|z_1| \leqslant k(\theta_2)(|z_2|+|z_1|),$$

что равносильно неравенству $k(\theta_2) + k(\theta_2+\pi) \geqslant 0$, справедливому для тригонометрически выпуклой функции. Тем самым лемма доказана.

Положим $\sigma = \max\limits_{0<\theta<2\pi} k(\theta)$. Если $\sigma = 0$, то $k(\theta) \leqslant 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. С другой стороны, как известно (см. [2]) для любого θ $k(\theta) + k(\theta+\pi) \geqslant 0$. Отсюда $k(\theta) \equiv 0$, если $\sigma = 0$, и $E(k(\theta))$ состоит из констант. Опуская этот тривиальный случай, можно считать, что $\sigma > 0$.

Пусть $y(z) \in E(k(\theta))$. Оценим $\|y^{(m)}(z)\|$, $m \geqslant 1$:

$$\|y^{(m)}(z)\| = \sup_{|z|<\infty} \Phi\left(\frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=\frac{m}{\sigma}} y(t)(t-z)^{-m-1}\,dt,\ k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|y(t)\|\frac{m!}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi m}{\sigma}} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{m+1} \sup_{|z|<\infty}\ \sup_{|t-z|=\frac{m}{\sigma}} \exp\left[k(\arg t)|t| - k(\arg z)|z|\right] dl \leqslant$$

$$\leqslant \|y(t)\| \, m! \left(\frac{\sigma}{m}\right)^m \sup_{|z|<\infty} \sup_{|t-z|=\frac{m}{\sigma}} k(\arg(t-z))\,|t-z| \leqslant m! \left(\frac{e\sigma}{m}\right)^m \|y\|.$$

Итак, справедлива оценка

$$\|y^{(m)}(z)\| \leqslant m! \left(\frac{e}{m}\right)^m \sigma^m \|y\|, \quad m=1, 2, \cdots. \tag{23}$$

Посмотрим, насколько точны оценки (23). Пусть $\sigma = k(\theta_0)$. Имеем $k(\theta) \geqslant \sigma\cos(\theta-\theta_0)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ (см. [2]). Поэтому функция $y_0(z) = \exp\{\sigma e^{-i\theta_0} z\}$ принадлежит $E(k(\theta))$, так как $|y_0(re^{i\theta})| = \exp \sigma\cos(\theta-\theta_0)\, r \leqslant \exp k(\theta)\, r$. При этом при $\theta = \theta_0$ $|y_0(re^{i\theta_0})| = \exp \sigma r$, и $\|y_0\| = 1$. В то же время $\|y_0^{(m)}(z)\| = \sigma^m \|y_0\| = \sigma^m$ при любом $m > 1$. Таким образом, оценка (23) тем точнее, чем больше m. Если ввести оператор $D^m y = y^{(m)}(z)$, то из только что полученных результатов следуют такие оценки для $\|D^m\| = \sup\limits_{y \in E(k(\theta))} \frac{\|D^m y\|}{\|y\|}$:

$$\sigma^m \leqslant \|D^m\| \leqslant m! \left(\frac{e}{m}\right)^m \sigma^m.$$

Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} \|D^m\|^{\frac{1}{m}} = \sigma = \max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} k(\theta)$.

4°. Полученные выше оценки оказываются полезными при доказательстве существования и единственности целых решений линейных дифференциальных уравнений конечного и бесконечного порядка с многочленными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим здесь пространство $W^r_{\sigma,\rho}$. Оценим вначале норму $\|y^{(n)}(z)\, z^k\|^{\sigma,\rho}_r$, $y \in W^r_{\sigma,\rho}$, $0 < \rho < 1$, считая, что $r \geqslant r_0$, $r > 0$, $k \leqslant n(1-\rho)$.

Имеем

$$\|z^k y^{(n)}\|^{\sigma,\rho}_r \leqslant \sup_{t>r} \frac{t^k M(t, y^{(n)})}{\exp \sigma t^\rho} \leqslant \sup_{t>r} t^k \|y^{(n)}\|^{\sigma,\rho}_t.$$

Используя оценку (17) и полагая в ней $\gamma = \frac{k}{n(1-\rho)}$, получим (учитывая, что $\gamma + \frac{1-\gamma}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$)

$$\|z^k y^{(n)}(z)\|^{\sigma,\rho}_r \leqslant n! \left(\frac{e\sigma\rho}{n}\right)^{\frac{1}{\rho} \cdot n\left(1-\frac{k}{n}\right)} \|y\|^{\sigma,\rho}_r.$$

Мы видим, что если $y(z) \in W^r_{\sigma,\rho}$, $r > 0$, $\rho < 1$ и $k \leqslant n(1-\rho)$, то $z^k y^{(n)}(z) \in W^r_{\sigma,\rho}$.

Рассмотрим оператор

$$Ly = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z)\, y^{(k)}(z), \quad P_k(z) = \sum_{s=0}^{n_k} a^k_s z^s, \tag{24}$$

где

$$\sup_{k>1} \frac{n_k}{k} = \alpha < 1. \tag{25}$$

Допустим, что при некотором $d > 0$

$$F(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n_k} |a_s^k| k! \left(\frac{e}{k}\right)^{\frac{k-s}{\rho}} d^{\frac{k-s}{\rho}} < \infty, \ \rho = 1 - \alpha.$$

(Например, что заведомо выполняется, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (c_k)^{\frac{1}{k}} < \infty$, где $c_k = \sup\limits_{0<s<n_k} |a_s^k|$).

Положим $c_0 = \sup \{c>0\colon F(c) < \infty\}$, $\alpha_0 = \lim\limits_{c\to c_0-0} F(c)$.

Если $\alpha_0 > 1$, то уравнение $F(x) = 1$ имеет единственный корень η в интервале $(0, c_0)$. Положим $\eta_0 = \eta$, если $\alpha_0 > 1$, и $\eta_0 = c_0$, если $\alpha_0 \leqslant 1$. Тогда при $\forall c < \eta_0$ $F(c) < 1$, и оператор Ly является оператором сжатия в любом пространстве $W^r_{\sigma,\rho}$, где $r > 0$, $\sigma < \frac{\eta_0}{\rho}$.

По теореме Банаха уравнение $y + Ly = f$ имеет единственное решение в таком пространстве $W^r_{\sigma,\rho}$ для любой правой части f из $W^r_{\sigma,\rho}$.

Переходя к индуктивным пределам пространств $W^r_{\sigma,\rho}$ и рассуждая точно так же, как в работе (4), найдем, что уравнение $y + Ly = f$ имеет единственное решение в классе $\left[1-\alpha, \frac{\eta_0}{1-\alpha}\right)$ для любой функции f из этого класса, причем порядок и тип решения совпадает с порядком и типом правой части.

Этот результат имеет непустое пересечение с теоремой 11 из работы [4].

Заметим, что если повторить дословно рассуждения п.п. 1—3 § 3 работы [4], но только вместо оценки (2.2) этой работы воспользоваться более точной оценкой (11) настоящей работы, то мы получим следующий результат:

Пусть оператор Ly (24) удовлетворяет условиям (25) и пусть, далее, $c = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{c_k} < \infty$, где $c_k = \sup\limits_{0<s<n_k} |a_s^k|$. Положим $d_k = |a_{\alpha k}^k|$, если $n_k = \alpha k$, и $d_k = 0$, если $n_k < \alpha k$, и рассмотрим функцию $\lambda(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k d_k x^k$, аналитическую в круге $|x| < \frac{1}{c}$. Положим $\eta_0 = \frac{1}{c}$, если $\lim\limits_{r\to\frac{1}{c}-0} \lambda(r) \leqslant 1$, и $\eta_0 = \theta$, если $\lim\limits_{r\to\frac{1}{c}-0} \lambda(r) > 1$, а θ — единственный положительный корень уравнения $\lambda(x) = 1$.

Тогда уравнение $y+Ly=f$ имеет единственное решение в классе $\left[1-\alpha, \frac{\gamma_0}{1-\alpha}\right)$ для любой правой части f из этого класса, причем порядки и типы решения в правой части совпадают. Решение может быть приближенно найдено методом урезания, описанным в [4].

Этот результат является более сильным, чем теорема 2.2 из [4], но, в свою очередь, содержится в недавнем результате Ю. Ф. Коробейника и О. В. Епифанова [5], полученном методами теории нормально разрешимых операторов (именно, в теореме 4.9 этой работы).

Если вместо оценок (11) и (17) использовать оценки (12), (19) и (23), то можно получить новые теоремы существования и единственности решения уравнения бесконечного порядка с многочленными коэффициентами в пространствах $V_r^{\gamma,\rho}$, $E(k(\theta))$, а также в индуктивных пределах этих пространств.

Систематическому изложению полученных в этом направлении результатов и переносу на случай n переменных оценок, полученных в настоящей работе, и их приложений, предполагается посвятить отдельную статью.

Ростовский государственный
университет

Поступила 25.III.1972

ՅՈՒ. Ֆ. ԿՈՐՈԲԵՅՆԻԿ, Օ. Վ. ԵՊԻՖԱՆՈՎ. Ածանցյալների գնահատականները ամբողջ ֆունկցիաների կշռային տարածություններում *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են դիֆերենցման նկատմամբ ինվարիանտ, ամբողջ ֆունկցիաների կշռային Բանախի տարածություններ՝ $\|y\| = \sup\limits_{r>0} \frac{M_r(y)}{\varphi(r)}$ *նորմայով և էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների տարածություններ՝* $\|y\| = \sup\limits_{r,\theta} |y(re^{i\theta})| \exp(-k(\theta)r)$ *նորմայով։*

Կշռային ֆունկցիաների նկատմամբ բավականին ընդհանուր բնույթի տարբեր ենթադրությունների դեպքում գտնվում են դիտարկվող տարածություններից վերցված կամայական ֆունկցիայի ածանցյալների նորմերի գնահատականները՝ ֆունկցիայի նորմի միջոցով։

Ցույց է տրվում, որ մի շարք դեպքերում ստացված գնահատականները ճշգրիտ են։

Ju. F. KOROBEINIK, O. V. EPIFANOV. *Estimation of derivatives in weighted spaces of entire functions* (summary)

This article investigates weighted (B)-spaces of entire functions invariant with respect to differentiation and having the norm $\|y\| = \sup\limits_{r>0} \frac{M_r(y)}{\varphi(r)}$, as well as (B)-spaces of exponential functions with the norm

$$\|y\| = \sup_{r,\theta} |y(re^{i\theta})| \exp(-k(\theta)r).$$

Under rather general restrictions on weighting function the authors estimate the norm of all derivatives of any function belonging to the spaces, in terms of the norm of the function itself. It is shown that in some cases the estimates obtained are exact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ж. Валирон.* Аналитические функции, ГИТТЛ, М., 1957.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, изд. „Наука", М., 1966.
4. *Ю. Ф. Коробейник.* О целых решениях дифференциального уравнения бесконечного порядка, Литовский матем. сб., 4, № 2, 1964, 203—227.
5. *Ю. Ф. Коробейник, О. В. Епифанов.* Нормальная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка, Матем. сб., 84, 126, № 3, 1971, 378—405.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

И. М. МИХЕЕВ

О СХОДИМОСТИ $K+\infty$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Хорошо известно, что тригонометрические ряды Фурье не могут сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Поэтому возникает вопрос о построении наиболее густых в каком-то смысле множеств меры 0, на которых соответствующие ряды Фурье сходятся к $+\infty$. Интересно также знать, как влияет степень суммируемости функции на сходимость ее ряда Фурье к $+\infty$.

А. А. Талалян [1] показал, что во всяком классе* $F(L[0, 2\pi])$ существует функция, ряд Фурье которой сходится к $+\infty$ на множестве, имеющем мощность континуума на любом интервале $(a, b) \subset \subset [0, 2\pi]$. П. Л. Ульянов (см. [2], стр. 27) дал пример лакунарного ряда Фурье функции, принадлежащей всем классам $L^p[0, 2\pi]$, сходящегося к $+\infty$ на множестве с названными свойствами.

Множества меры нуль иногда классифицируют по их так называемой размерности Хаусдорфа.

Определение 1. *Пусть X—метрическое пространство и p—любое действительное число $0 \leqslant p < +\infty$. Пусть для данного $\varepsilon > 0$*

$$m_p^\varepsilon = \inf \sum_{l=1}^{\infty} [\delta(A_l)]^p,$$

где $X = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$ — произвольное разложение пространства X на счетное число подмножеств диаметра меньшего, чем ε; $\delta(A_l)$— диаметр множества A_l, причем считается $[\delta(E)]^0 = 0$, если E пусто и $[\delta(E)]^0 = 1$ в противном случае.

Тогда

$$m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon$$

называется p-мерной мерой Хаусдорфа пространства X.

Определение 2. *Хаусдорфовой размерностью множества X называется верхняя грань всех действительных чисел p, для которых*

$$m_p(X) > 0.$$

---

* Функция $f(x) \in F(L[0, 2\pi])$, если $f(x)$ измерима на $[0, 2\pi]$ и $F(|f(x)|) \in \in L[0, 2\pi]$.

В качестве меры густоты множества ниже избирается его размерность Хаусдорфа: из двух множеств меры нуль то более густое, у которого размерность Хаусдорфа больше. Поскольку размерность Хаусдорфа линейных множеств не превышает 1 (размерность 1 имеют, например, множества положительной лебеговой меры), то самыми густыми в указанном смысле будут множества хаусдорфовой размерности 1.

В настоящей статье доказывается следующая

Теорема. *Для всякого класса $F(L[0, 2\pi])$ существует функция $f(x) \in F(L[0, 2\pi])$ с лакунарным рядом Фурье, который сходится к $+\infty$ на множестве, являющемся континуальным объединением попарно непересекающихся множеств, каждое из которых имеет в пересечении с любым интервалом мощность континуума и хаусдорфову размерность 1.*

Сначала приведем ряд лемм.

Лемма 1. *Для всякой функции* $F(x)$ существует гладкая, неубывающая на $[0, \infty)$ функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(x) \geqslant F(x)$ при всех $x \in [0, \infty)$.*

Эта лемма известна (см., например, [3], стр. 44).

Сделаем следующее замечание, полезное в дальнейшем. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда число

$$\lambda = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k}$$

будем называть степенью лакунарности последовательности $\{n_k\}$.

Лемма 2. *Если последовательность $\{n_k\}$ имеет степень лакунарности $\lambda > n+1$ и $a_1, a_2, \cdots a_k, \cdots$ — натуральные числа, не превосходящие n, то интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \cos^{a_1} n_1 x \cos^{a_2} n_2 x \cdots \cos^{a_k} n_k x dx = 0, \ k = 1, 2, \cdots,$$

если хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \cdots a_k$ нечетно.

Доказательство. Известно, что

$$\cos^k x = c_0 + \sum_{l=1}^{k} c_l \cos lx,$$

где $c_0, c_1, \cdots, c_k$ — вещественные числа и

$$c_0 = \begin{cases} 0 \text{ при } k \text{ — нечетном,} \\ >0 \text{ при } k \text{ — четном.} \end{cases}$$

---

* Всюду ниже считается, что функция $F(x)$ неотрицательна и неубывает на $[0, \infty)$.

По индукции легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} \cos m_1 x \cos m_2 x \cdots \cos m_s\ x dx = 0,\ s=1, 2, \cdots,$$

если $m_1, m_2, \cdots, m_s$ такие натуральные числа, что

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p < m_{p+1},\ p=1, 2, \cdots.$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \cos^{\alpha_1} n_1 x \cos^{\alpha_2} n_2 x \cdots \cos^{\alpha_k} n_k\ x dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} (c_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} c_i^{(1)} \cos in_1 x) \cdots (c_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{\alpha_k} c_i^{(k)} \cos in_k\ x)\ dx,$$

то при отсутствии нетригонометрического члена хотя бы в одном из сомножителей интегранта весь интеграл обратится в нуль. Но это возможно лишь тогда, когда хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ нечетно.

Лемма 3. *Пусть последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$ строго возрастает и*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty.$$

*Тогда для всякого $\alpha \in [0,1)$ множество всех чисел $x \in [0,1]$, для которых**

$$\lim_{k\to\infty} \{n_k x\} = \alpha,$$

имеет хаусдорфову размерность 1.

Эта лемма доказана Эглестоном (см. [4], стр. 90). Заметим, что не изменяя схемы доказательства этой леммы, можно показать, что при всяком $\alpha \in [0,1)$ множество тех чисел $x \in [0,1]$, для которых предел

$$\lim_{k\to\infty} \{n_k x\} = \alpha$$

имеет мощность континуума и хаусдорфову размерность 1 на любом интервале $(a, b) \subset [0,1]$. Впредь нам потребуется именно такая формулировка леммы.

Лемма 4. *Для каждой последовательности $\{q_n\}$ такой, что*

$$q_n \uparrow \infty,\ q_n > 1,\ n=1, 2, \cdots,$$

существуют последовательности $\{a_i\}$, $\{p_i\}$ такие, что

---

* Через $\{a\}$ обозн., как обычно, дробная часть числа a.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty, \ a_i \downarrow 0, \ a_i \leqslant 1, \ i=1, 2, \cdots;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{p_i} < \infty, \ 1 \leqslant p_i \leqslant 2, \ i = 1, 2, \cdots;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-p_i} \leqslant q_n, \ a_i^{2-p_i} \downarrow 0, n=1, 2, \cdots.$$

Доказательство. Легко показать, что существует последовательность $\{c_i\}$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty, \ c_i \downarrow 0, \sum_{i=1}^{n} c_i < q_n, \ c_1 = 1, \ n = 1, 2, \cdots.$$

Положим

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n,$$

$$a_n = \frac{c_n}{S_n}, \quad b_n = \frac{c_n}{S_n^2}, \quad p_n = \frac{\ln b_n}{\ln a_n}, \ n = 2, 3, \cdots,$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = S_1 = p_1 = 1.$$

Тогда по известной теореме Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Далее

$$a_n^{2-p_n} = \frac{a_n^2}{b_n} = c_n \downarrow 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-p_k} = \sum_{k=1}^{n} c_k < q_n, \ n=1, 2, \cdots.$$

Легко видеть, что

$$1 \leqslant p_n \leqslant 2, \ n=1, 2, \cdots.$$

Таким образом, лемма 4 полностью доказана.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. В силу леммы 1 функцию $F(x)$ можно считать целой, т. е.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n, \ x \in (-\infty, \infty), \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|r_n|}} = \infty.$$

Положим

$$m_k = (2k)^k, \ k=1, 2, \cdots;$$

$$q_n = 2 + \min_{k>n} \frac{1}{\sqrt[2k]{|r_k|}}, \ n=1, 2, \cdots.$$

Тогда $q_n \uparrow \infty$ и $q_n > 1$ $(n=1, 2, \cdots)$. Используя лемму 4, по последовательности $\{q_n\}$ находим соответствующие последовательности $\{a_k\}$ и $\{p_k\}$. Докажем, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos m_k x^*$$

искомая. Пусть

$$\sigma_k(x) = \sum_{p=1}^{k} a_p \cos m_p x, \quad 1 \leqslant n < k.$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} \sigma_k^{2n}(x)\, dx \leqslant 2^{2n} \left[\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=1}^{n} a_l \cos m_l x \right)^{2n} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=n+1}^{k} a_l \cos m_l x \right)^{2n} dx \right] \leqslant 2^{2n} \cdot 2\pi \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} a_l \right)^{2n} +$$

$$+ 2^{2n} \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = 2n} \int_0^{2\pi} \cos^{\alpha_1} m_{n+1} x \cdots \cos^{\alpha_s} m_{n+s} x\, dx \; \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_s)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_s!} a_{n+1}^{\alpha_1} \cdots a_{n+s}^{\alpha_s}.$$

Поскольку

$$\frac{m_{p+1}}{m_p} = 2(p+1) \left(\frac{p+1}{p} \right)^p > 2n + 2 > 2n + 1$$

при $p > n$, то к последней сумме применима лемма, так как

$$\alpha_i \leqslant 2n, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

Значит, используя то, что $0 \leqslant a_l \leqslant 1$, $1 < p_l \leqslant 2$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \sigma_k^{2n}(x)\, dx \leqslant 4^n \cdot 2\pi \left(\sum_{l=1}^{n} a_l^{2-p_l} \right)^{2n} +$$

$$+ 4^n \cdot 2\pi \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n} \cdot \frac{(2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_s)!}{(2\alpha_1)! \cdots (2\alpha_s)!} \cdot a_{n+1}^{2\alpha_1} \cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}.$$

Из формулы Стирлинга получаем

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot e^{\frac{\vartheta_{2n}}{24n}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{e} \right)^{2n} \cdot 2\pi n e^{\frac{\vartheta_n}{6n}}} \leqslant 4^n e,$$

---

* Написанный ряд сходится почти всюду на прямой $(-\infty, \infty)$ к некоторой функции $f \in L^2[0, 2\pi]$, ибо $\{a_k\} \in l^2$.

$$0<\delta_n<1,\ n=1,\ 2,\cdots.$$

Поэтому

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\frac{(2\alpha_1+\cdots+2\alpha_s)!}{(2\alpha_1)!\cdots(2\alpha_s)!}a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}=$$

$$=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\left[\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\right]^2 a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}\cdot\frac{(\alpha_1!)^2\cdots(\alpha_s!)^2}{(2\alpha_1)!\cdots(2\alpha_s)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\leqslant$$

$$\leqslant 4^n e\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\left[\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\right]^2 a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}.$$

По неравенству Коши

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\left[\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\right]^2 a_{n+1}^{2\alpha_1}\cdots a_{n+s}^{2\alpha_s}=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\times$$

$$\times a_{n+1}^{\alpha_1(2-p_{n+1})}\cdots a_{n+s}^{\alpha_s(2-p_{n+1})}\cdot\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}a_{n+1}^{\alpha_1 p_{n+1}}\cdots a_{n+s}^{\alpha_s p_{n+s}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{\alpha_i>0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_s=n}}\left[\frac{\dfrac{\alpha_1\cdot a_{n+1}^{2-p_{n+1}}}{\sqrt[\alpha n]{\alpha_1!}}+\cdots+\dfrac{\alpha_s\cdot a_{n+s}^{2-p_{n+s}}}{\sqrt[\alpha s]{\alpha_s!}}}{\alpha+\cdots+\alpha_s}\right]^n n!\,\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\times$$

$$\times a_{n+1}^{\alpha_1 p_{n+1}}\cdots a_{n+s}^{\alpha_s p_{n+s}}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n\\ \alpha_i>0}}\left[\frac{\dfrac{\alpha_1}{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_1!}}a_{n+1}^{2-p_{n+1}}+\cdots+\dfrac{\alpha_s}{\sqrt[\alpha s]{\alpha_s!}}a_{n+s}^{2-p_{n+s}}}{n}\right]^n n!\left(\sum_{s=n+1}^{k}a_s^{p_s}\right)^n.$$

В силу выбора $\{a_i\}$ и $\{p_i\}$ последнее выражение не превосходит

$$e^n\left(a_1^{2-p_1}+\cdots+a_n^{2-p_n}\right)^n\left(a_1^{p_1}+\cdots\right)^n.$$

Значит

$$\int_0^{2\pi}\sigma_k^{2n}(x)\,dx\leqslant C_1^n\ q_n^{2n},\ C_1=\mathrm{const}.$$

По лемме Фату

$$\int_0^{2\pi}f^{2n}(x)\,dx\leqslant C_1^n\cdot q_n^{2n},\ x=1,2,\cdots.$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi}|f^{2n+1}(x)|\,dx\leqslant\sqrt{\int_0^{2\delta}f^2(x)\,dx\cdot\int_0^{2\delta}f^{4n}(x)\,dx}\leqslant$$

$$\leqslant C_2^n\cdot q_{2n}^{2n}\leqslant C_2^n\,q_{2n+1}^{2n+1},\ C_2=\mathrm{const},\ n=1,2,\cdots,$$

то имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx \leqslant C^n q_n^n,\quad C=\text{const},\quad n=1,2,\cdots.$$

Далее

$$\int_0^{2\pi} F(|f|)\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |r_n| \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C^n\cdot|r_n|\cdot\left(2+\min_{k>n}\frac{1}{\sqrt[2k]{|r_k|}}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} C^n\,|r_n|\left(2+\frac{1}{\sqrt[2n]{|r_n|}}\right)^n.$$

Последний ряд сходится по признаку Коши, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|r_n|\left(2+\frac{1}{\sqrt[2n]{|r_n|}}\right)^n\cdot C_n} =$$

$$= C\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt[n]{|r_n|}+\sqrt[2n]{|r_n|}\right)=0<1.$$

Значит

$$f(x)\in F(L\,[0,2\pi]).$$

Лемма 3 естественно переносится с отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[0, 2\pi]$. Поэтому множества A_α тех чисел $x\in[0, 2\pi]$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} 2\pi\left\{\frac{m_k x}{2\pi}\right\}=\alpha,\quad \alpha\in[0, 2\pi),$$

попарно непересекаются и каждое в пересечении с любым интервалом $(a, b)\subset[0, 2\pi]$ дает множество мощности континуума и хаусдорфовой размерности 1.

Теперь остается только заметить, что на каждом множестве A_α при $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ построенный выше ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos m_k x$ сходится к $+\infty$, и теорема доказана.

В связи с этой теоремой отметим следующий факт. Докажем, что *ряды Фурье функций, принадлежащих всем классам* $F(L\,[0,2\pi])$ *не могут сходиться* к $+\infty$ *ни в одной точке.* Поскольку известно, что для рядов Фурье существенно ограниченных функций это так, то достаточно показать, что

$$\bigcap_F F(L\,[0, 2\pi])=m,$$

где m — класс существенно ограниченных функций. Очевидно, что достаточно доказать включение

$$\bigcap_\Phi F(L\,[0, 2\pi])\subset m,$$

где Φ пробегает соответствующие целые функции.

Пусть $f(x)$ принадлежит левой части последнего включения. Если

$$\int_0^{2\pi} F(|f(x)|)\,dx < \infty \quad \text{и} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \subset a_n > 0, \; n=1, 2, \cdots,$$

то, обращая теорему Б. Леви, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx < \infty.$$

Утверждается, что какова бы ни была положительная последовательность $q_n \to \infty$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx \cdot \frac{1}{q_n^n} = 0.$$

Действительно, пусть это не так, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx}{q_n^n} > 0.$$

Полагаем

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{q_n^n}}, \; n = 1, 2, \cdots.$$

Тогда функция

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

—целая. Но величина

$$a_n \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx = (\sqrt{q_n})^n \cdot \frac{\int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx}{q_n^n}$$

не стремится к нулю, и поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx$$

заведомо расходится. Но это противоречит выбору функции $f(x)$. Итак, при всякой $q_n \to \infty$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x)|^n\,dx \cdot \frac{1}{q_n^n} = 0.$$

Покажем, что тогда при всякой последовательности $q_n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx}{q_n^n}\right]^{1/n}=0.$$

Предположим противное, т. е. что по некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$

$$\left[\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^{n_k}\,dx\right]^{\frac{1}{n_k}}\cdot\frac{1}{q_{n_k}}>\alpha>0,\ k=1,2,\cdots.$$

Положим

$$\tilde{q}_n=q_n\cdot\frac{\alpha}{2},\ n=1,\ 2,\cdots.$$

Тогда

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^{n_k}dx\right)^{\frac{1}{n_k}}\frac{1}{\tilde{q}_{n_k}}>2,\ k=1,\ 2,\cdots,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx}{\tilde{q}_n^n}>0.$$

Противоречие с только что доказанным фактом говорит о том, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}}{q_n}=0$$

при всякой $q_n\to\infty$. Ясно, что тогда

$$\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^n\,dx<\left(\frac{C}{2}\right)^n,\ C=\text{const},\ n=1,\ 2,\cdots.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)}{C}\right|^n dx<\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n=1,\ 2,\cdots.$$

С другой стороны

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)}{C}\right|^n dx\geqslant\mu\{x:\ |f(x)|>C\}.$$

Значит

$$\mu\{x: |f(x)| > C\} < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ n=1, 2, \cdots.$$

Ввиду произвольности n отсюда следует, что

$$\mu\{x: |f(x)| > C\} = 0,$$

и, следовательно, $f(x)$ существенно ограничена константой C.

Автор выражает признательность П. Л. Ульянову за постановку задачи и руководство работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 26.IV.1971

Ի. Մ. ՄԻԽԵԵՎ. Ֆուրյեի եռանկյունաչափական շարքերի $+\infty$-յան զուգամիտելու մասին

(ամփոփում)

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ գոյություն ունեն Ֆուրյեի լակունար շարքերով որքան կարելի է լավ հանրագումարելի ֆունկցիաներ, որոնք ձգտում են $+\infty$-ի, 1 հաուսդորֆյան չափի բազմությունների վրա։

I. M. MIHEJEV. *On convergence to $+\infty$ of trigonometrical Fourier series*

(summary)

The article proves that there exist arbitrarily well summarisable functions with lacunary Fourier series which converge to $+\infty$ on sets of Hausdorff's dimension 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян.* О сходимости рядов Фурье к $+\infty$, Изв. АН АрмССР, сер. физ-мат. наук, № 3, 1961, 35—41.
2. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, № 1, 1964, 3—69.
3. *Г. Полиа* и *Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, т. 2, Гостехиздат, М., 1956.
4. *H. Cy. Fggleston.* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 54, 1951—1952, 42—93.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 2, 1973 Математика

В. А. МАРТИРОСЯН

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ПО СИСТЕМЕ МЮНЦА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В 1954 году М. Фекете в работах [1], [2] привел следующий результат:

Теорема. Пусть $[a, b]$—сегмент на вещественной оси. Чтобы действительнозначную функцию $f(x)$, непрерывную на $[a, b]$ и отличную от многочлена с целыми коэффициентами, можно было равномерно на $[a, b]$ аппроксимировать многочленами с целыми коэффициентами, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. $b-a<4$;

2. существует многочлен с целыми коэффициентами, который во всех целых точках, лежащих на сегменте $[a, b]$, принимает те же значения, что и $f(x)$.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел с условием

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots, \tag{1}$$

и пусть I — замкнутый отрезок на полуоси $[0, +\infty)$. $C_R(I)$—банахово пространство действительных функций, непрерывных на I с нормой $\|f\|=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$. Назовем многочленом по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ конечную сумму вида $\sum c_m x^{\lambda_m}$, где $c_m\in R$ (вещественные числа). По известной теореме Мюнца [3] имеем: любую функцию из $C_R(I)$ можно сколь угодно близко аппроксимировать многочленами по системе $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}=\infty. \tag{2}$$

Отметим, что если $0\notin I$, можно ограничиться системой $\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$. В связи с теоремой Фекете возникает следующий вопрос: в какой форме сохранится теорема Мюнца, если у аппроксимирующих многочленов по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ допускать только целые коэффициенты? Рассмотрению этого вопроса и посвящается настоящая работа. Кроме приведенных обозначений будут применяться еще такие. Через Z обозначается совокупность всех целых чисел. Под $C_R^*(I)$ понимается множество тех функций f из $C_R(I)$, которые удовлетворяют условию $f(I\cap\{0, 1\})\subset\{0\}$. Отметим, что $C_R^*(I)$ является подпространством $C_R(I)$, причем $C_R^*(I)=C_R(I)$, если $I\cap\{0, 1\}=\varnothing$.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda_\infty$; возможны два случая

$$\lambda_\infty=+\infty, \tag{3}$$

$$\lambda_\infty<+\infty. \tag{4}$$

В дальнейшем изложении целесообразно выделить три случая:

1) $\lambda_\infty=+\infty$ и $I\subset[0, 1)$; 2) $\lambda_\infty<+\infty$; 3) $\lambda_\infty=+\infty$ и $I=[0, 1]$.

1. Случай $\lambda_\infty=+\infty$ и $I\subset[0, 1)$.

Лемма 1. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *с условиями* (1), (2) *и* (3). *Тогда можно выделить подпоследовательность* $\{\lambda_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$, *удовлетворяющую условию* (2) *и такую, что ряд* $\sum\limits_{l=1}^{\infty} q^{\lambda_{n_l}}$ *сходится для любого* $q\in(0, 1)$.

Доказательство. Обозначим через m_k число членов последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, лежащих в полусегменте $(k-1, k]$, и рассмотрим два случая:

а) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{m_k}{k}<+\infty$. В этом случае мы полагаем $n_l=l$. Сходимость ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} q^{\lambda_l}$ следует из неравенства

$$\sum_{l=1}^{\infty} q^{\lambda_l}=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{k-1<l<k} q^{\lambda_l}\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} m_k\, q^{k-1};$$

б) Пусть теперь $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{m_k}{k}=+\infty$. Существует подпоследовательность $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ натуральных чисел такая, что $m_{k_j}>k_j$. Выделим подпоследовательность $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ следующим образом: в каждом полусегменте $(k_j-1, k_j]$, $j=1, 2,\cdots$ возьмем ровно k_j членов последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\lambda_{n_l}^{-1}$ расходится, так как $\sum\limits_{\lambda_{n_l}\in(k_j-1, k_j]}\lambda_{n_l}^{-1}>1$, $j=1, 2,\cdots$.

Кроме того

$$\sum_{\lambda_{n_l}\in(k_j-1, k_j]} q^{\lambda_{n_l}}\leqslant k_j\, q^{k_j-1},\ j=1, 2,\cdots,$$

откуда и следует сходимость ряда $\sum\limits_{l=1}^{\infty} q^{\lambda_{n_l}}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям* (1), (2) *и* (3), *и пусть* $I\subset[0, 1)$. *Если* $f(x)\in C_R(I)$ *и* $f(I\cap\{0\})\subset Z$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует многочлен* $p(x)$ *по системе* $\{x^{\lambda_n}\}$ *с коэффициентами из* Z *такой, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $I=[0, b]$, где $b<1$ и $f(0)=0$. По лемме 1 выделим подпоследовательность $\{\lambda_{n_l}\}_{l=0}^{\infty}$, где $\lambda_{n_0}=0$, и возьмем $q=b$. Тогда по $\varepsilon>0$ найдется номер N_0 такой, что

$$\sum_{l=N_0}^{\infty} b^{\lambda_{n_l}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Последовательность $\{\lambda_{n_l}\}_{l=N_0}^{\infty} \cup \{0\}$ удовлетворяет условию теоремы Мюнца. Но $f(0)=0$, поэтому существует многочлен $p_1(x)=\sum_{l=N_0}^{N} c_l\, x^{\lambda_{n_l}}$ такой, что

$$|f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in I. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $p(x)=\sum_{l=N_0}^{N}[c_l]\,x^{\lambda_{n_l}}$, где $[c_l]$ — целая часть c_l; ясно, что $p(x)$ — многочлен по системе $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z.

На основании (5) имеем

$$|p_1(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad x\in I,$$

откуда, с учетом (6), $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$, $x\in I$.

Теорема 1 доказана.

2. Случай $\lambda_\infty<+\infty$. Рассмотрим семейство функций

$$\{f_x(t)\}=\{x^t\}, \tag{7}$$

здесь $t\in[0, \lambda_\infty]$, $\lambda_\infty<+\infty$ и $x\in[a, b]$, $a>0$. Возьмем $0\leqslant\mu<\nu$ и применим теорему Лагранжа о среднем значении, имеем

$$|x^\mu-x^\nu|\leqslant K\cdot|\mu-\nu|,\quad x\in[a, b];$$

здесь K—постоянная, зависящая только от λ_∞ и положения сегмента $[a, b]$. Значит семейство функций (7) равностепенно непрерывно, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, $\delta=\delta(\varepsilon, K)$ такое, что для произвольных $t_1, t_2\in[0, \lambda_\infty]$ из условия $|t_2-t_1|<\delta$ следует $|x^{t_2}-x^{t_1}|<\varepsilon$, $x\in[a, b]$.

Лемма 2. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *с условиями* (1), (2), *и пусть* n_0—*произвольное целое положительное число. Тогда*

1. *система функций* $\{x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}\}_{n=n_0}^{\infty}$ *замкнута в* $\overset{\circ}{C}_R(I)$;

2. *если, кроме того, выполняется условие* (3), *то система функций* $\{x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}\}_{n=n_0}^{\infty}$ *замкнута в* $\overset{\circ}{C}_R(I)$, *где* $I=[0, 1]$.

Доказательство. 1. Достаточно рассмотреть случай, когда $I=[0, b]\subset b\geqslant 1$. Возьмем $f(x)\in\overset{\circ}{C}_R(I)$. К последовательности

$\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty} \cup \{0\}$ применима теорема Мюнца. Но $f(0)=0$, поэтому имеем: для данного $\varepsilon>0$ существует многочлен вида $p_2(x)=\sum_{n=n_0}^{N} c_n x^{\lambda_n}$ такой, что

$$|f(x)-p_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2b^{\lambda_{n_0}}},\ x\in I. \tag{8}$$

(1)=0, поэтому, положив в (8) $x=1$, получим

$$\left|\sum_{n=n_0}^{N} c_n\right|<\frac{\varepsilon}{2b^{\lambda_{n_0}}}. \tag{9}$$

Многочлен $p_2(x)$ можно записать в такой форме

$$p_2(x)=c_N(x^{\lambda_N}-x^{\lambda_{N-1}}+(c_N+c_{N-1})(x^{\lambda_{N-1}}-x^{\lambda_{N-2}})+\cdots+(c_N+c_{N-1}+$$

$$+\cdots+c_{n_0+1})(x^{\lambda_{n_0+1}}-x^{\lambda_{n_0}}+x^{\lambda_{n_0}}(c_N+c_{N-1}+\cdots+c_{n_0})=p_1(x)+x^{\lambda_{n_0}}\sum_{n=n_0}^{N} c_n,$$

где $p_1(x)$ — многочлен по системе $\{x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}\}_{n=n_0}^{\infty}$. Из (8) и (9) следует, что

$$|f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ x\in I.$$

2. Предположим, что выполнены соотношения

$$\int_0^1 \{x^{\lambda_n}-2x^{\lambda_{n+1}}+x^{\lambda_{n+2}}\}\,d\mu(x)=0,\ n=n_0,\ n_0+1,\cdots, \tag{10}$$

где $\mu(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации на [0, 1].

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)=\int_0^1 x^{\lambda}\,d\mu(x)$, голоморфную в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ и ограниченную. При $\mathrm{Im}\,\lambda=0$ и $\lambda\to+\infty$ имеем, что $\varphi(\lambda)\to 0$. Рассмотрим теперь рост $\varphi(\lambda)$ на последовательности $\{\lambda_n\}_{n=n_0}^{\infty}$. Из (10) легко видеть, что

$$\varphi(\lambda_n)=c_1 n+c_2,\ n=n_{n_0},\ n_0+1,\cdots, \tag{11}$$

где c_1, c_2 — постоянные, определяемые последовательностью $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ и числом n_0 (от n они не зависят).

При $n\to\infty$ $\lambda_n\to\infty$, поэтому $\varphi(\lambda_n)\to 0$. Из (10) получаем, что

$$\varphi(\lambda_n)=0,\ n=n_0,\ n_0+1,\cdots.$$

Применив к $\varphi(\lambda)$ теорему единственности для ограниченных аналитических функций, будем иметь

$$\varphi(\lambda)\equiv 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda>0,$$

откуда уже вытекает, что $\int\limits_0^1 f(x)\,d\mu(x)=0$ для любой функции $f\in C_R^{\cdot\cdot}(I)$. Остается сослаться на теорему Хана-Банаха [4]. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям* (1), (2) *и* (4). *Если* $f(x)\in C_R(I)$ *и* $f(I\cap\cap[0,1])\subset Z$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует многочлен* $p(x)$ *по системе* $\{x^{\lambda_n}\}$ *с коэффициентами из* Z *такой, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon,\ x\in I.$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением того случая, когда $I=[0,\ b]$, где $b\geqslant 1$: остальные случаи расположения I сводятся к отмеченному. Достаточно аппроксимировать функцию $\tilde f(x)=f(x)-r(x)$, где $r(x)=f(0)+x^{\lambda_1}[f(1)-f(0)]$ — многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z; $\tilde f(x)\in C_R^{\cdot}(I)$. По данному $\varepsilon>0$ подберем $a\in(0,1)$ так, чтобы $a^{\lambda_1}<\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем число $\delta=\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ из условия равностепенной непрерывности по $x\in[a,\ b]$ семейства (7). Вследствие (4) существует $n_0=n_0(\delta)$ такое, что $\lambda_\infty-\lambda_{n_0}<\delta$. Тогда будем иметь

$$x^{\lambda_{n_0}}-x^{\lambda_\infty}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[a,\ b].$$

Теперь к системе $\{x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}\}_{n=n_0}^{\infty}$ применим лемму 2. Получим, что существует многочлен вида $p_1(x)=\sum\limits_{n=n_0}^{N}c_n\,(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})$, где $c_n\in R$ при $n_0\leqslant n\leqslant N$ такой, что

$$|\tilde f(x)-p_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию $\bar p(x)=\sum\limits_{n=n_0}^{N}[c_n]\,(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})$, ясно, что $\bar p(x)$ — многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора n_0 имеем

$$|p_1(x)-\bar p(x)|\leqslant\sum_{n=n_0}^{N}(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}})=x^{\lambda_{n_0}}-x^{\lambda_{N+1}}\leqslant x^{\lambda_{n_0}}-x^{\lambda_\infty}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[a,\ b],$$

с другой стороны, в силу выбора a

$$|p_1(x)-\bar p(x)|\leqslant x^{\lambda_{n_0}}\leqslant x^{\lambda_1}<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in[0,\ a].$$

Следовательно

$$|p_1(x)-\bar p(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in I.$$

Если, кроме того, учесть (12), то получим

$$|\tilde{f}(x) - \bar{p}(x)| < \varepsilon, \ x \in I,$$

и значит, можно положить $p(x) = r(x) + \bar{p}(x)$.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорему 1 можно получить из леммы 2.

В самом деле, $f(x) \in C_R^*(I)$ можно аппроксимировать многочленом по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z следующим образом: по $\varepsilon > 0$ выберем номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы $b^{\lambda_{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Применив лемму 2, найдем многочлен $p_1(x) = \sum_{n=n_0}^{N} c_n (x^{\lambda_n} - x^{\lambda_{n+1}})$, где $c_n \in R$ при $n_0 \leqslant n \leqslant N$ такой, что

$$|f(x) - p_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ x \in I. \tag{13}$$

Введем функцию $p(x) = \sum_{n=n_0}^{N} [c_n] (x^{\lambda_n} - x^{\lambda_{n+1}})$; $p(x)$ многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора n_0 имеем

$$|p_1(x) - p(x)| \leqslant x^{\lambda_{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}, \ x \in I,$$

откуда, учитывая (13), получаем

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \ x \in I.$$

Последнее неравенство доказывает теорему 1.

3. Случай $\lambda_\infty = +\infty$ и $I = [0, 1]$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}|, \ x \in I = [0, 1], \tag{14}$$

и выясним, когда он сходится равномерно на I.

Лемма 3. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям* (1), (3) *и, кроме того*

$$1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \downarrow 0 \quad (\textit{невозрастая}) \ \textit{при} \ n \to \infty, \tag{15}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^2$ *сходится. Тогда* (14) *сходится равномерно на* I.

(16)

Доказательство. Обозначим $\varepsilon_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$; легко проверить справедливость тождества $x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}} = (1 - x^{\varepsilon_{n+1}})(x^{\lambda_n} - x^{\lambda_{n+1}}) + x^{\lambda_n}(x^{\varepsilon_{n+1}} - x^{\varepsilon_n})$, откуда следует, что достаточно установить равномерную на I сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^{\varepsilon_{n+1}})(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}\,|x^{\varepsilon_{n+1}}-x^{\varepsilon_n}|. \tag{17}$$

Построим для рядов (17) мажорантные ряды. Из теоремы Лагранжа о среднем значении следует, что

$$(1-x^{\varepsilon_{n+1}})(x^{\lambda_n}-x^{\lambda_{n+1}}) \leqslant \left(\log\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \varepsilon_n\,\varepsilon_{n+1}\,x^{\lambda_n}, \quad x\in I.$$

Рассмотрим функцию $y(x)=\left(\log\frac{1}{x}\right)^2\cdot x^{\lambda_n}$, $x\in I$; имеем $y(x)\in C_R^*(I)$ и $y(x)\geqslant 0$ при $x\in I$. Значит, $y(x)$ достигает на I своего максимума y_0. Легко найти, что $y_0=\frac{Le^{-2}}{\lambda_n^2}$. Отсюда получаем, что первый из рядов (17) мажорируется рядом

$$a_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}{\lambda_n^2},$$

где a_1—постоянная.

Аналогичным образом, для второго ряда получаем мажорантный ряд

$$a_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n|}{\lambda_n},$$

где a_2 — постоянная.

Покажем сходимость этих рядов. Положим $c_n=1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$, тогда $c_n\downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2<+\infty$. Имеем неравенства

$$\frac{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}{\lambda_n^2}=\frac{c_n\,c_{n+1}}{(1-c_n)^2(1-c_{n+1})}\leqslant b_1\,c_n^2$$

и

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n|}{\lambda_n}=\frac{|c_{n+1}-c_n+c_n\,c_{n+1}|}{(1-c_n)(1-c_{n+1})}\leqslant b_1\,(c_n-c_{n+1}+c_n^2),$$

где b_1, b_2—постоянные, откуда и следует сходимость нужных нам рядов. Лемма 3 доказана.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям* (1), (2), (3), (15) *и* (16). *Если* $f(x)\in C_R(I)$, *где* $I=[0,1]$, *и* $f(0), f(1)\in Z$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует многочлен* $p(x)$ *по системе* $\{x^{\lambda_n}\}$ *с коэффициентами из* Z *такой, что*

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon, \ x\in I.$$

Доказательство. Достаточно аппроксимировать функцию $\bar f(x)=f(x)-r(x)$, где $r(x)=f(0)+x^{\lambda_1}[f(1)-f(0)]$—многочлен с коэффициентами из Z; $\bar f(x)\in C_R^*(I)$. По лемме 3 для $\varepsilon>0$ найдем номер n_0 такой, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}}| < \frac{\varepsilon}{2}, \; x \in I.$$

Согласно лемме 2 существует многочлен $p_1(x) = \sum_{n=n_0}^{N} c_n (x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}})$, где $c_n \in R$ при $n_0 \leqslant n \leqslant N$ такой, что

$$|\tilde{f}(x) - p_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \; x \in I. \tag{18}$$

Функция $p(x) = \sum_{n=n_0}^{N} [c_n](x^{\lambda_n} - 2x^{\lambda_{n+1}} + x^{\lambda_{n+2}})$ есть многочлен по $\{x^{\lambda_n}\}$ с коэффициентами из Z. В силу выбора номера n_0 имеем

$$|p_1(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \; x \in I,$$

тогда из (18) следует, что

$$|\tilde{f}(x) - p(x)| < \varepsilon, \; x \in I.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Представляется правдоподобным, что для последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ условие (16) является следствием из (1), (2) и (15).

Приведем достаточный признак выполнения условия (16).

1. Пусть существует $\beta > 0$ такое, что

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^{1+\beta}} < +\infty. \tag{19}$$

Возьмем $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и выберем число σ, удовлетворяющее условию

$$0 < \sigma \leqslant \frac{\frac{1}{2} - \delta}{1 + \beta}.$$

По теореме Абеля-Дини [5] сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda_{n+1}^{\sigma}},$$

так как $\sigma > 0$; но кроме того, его члены не возрастают, следовательно

$$\frac{n+1}{\lambda_{n+1}^{\sigma}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Сходимость ряда (16) следует из неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^2 \leqslant a \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^{\sigma}}{n}\right)^2.$$

где a — постоянная, так как ряд справа сходится, в силу (19) и выбора числа σ.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные советы.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 9.II.1973

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է իրական [0, + ∞) *կիսաառանցքի հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաներին ըստ Մյունցի սիստեմի ամբողջ գործակիցներ ունեցող բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման հարցը։ Դիտարկված է երեք դեպք, որոնք պայմանավորված են հատվածի դիրքից կիսաառանցքի վրա և աստիճանների հաջորդականության սահմանից։*

V. H. MARTIROSIAN. *About uniform approximations by the polinomes on the system of Müntz with the integral coefficients* (summary)

Uniform approximations of functions continuous the segment from [0, +∞) with the polynoms by Müntz systems with diophantine coefficients is under investigation. There cases are considered the cases depend on the position of the segment on (0, ∞) and on the limits of the sequences of powers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Fekete*. Approximations par polinomes avec conditions diophantiennes, Compt. Rend. Acad. Sc., 239, № 21, 1954, 1337—1339.
2. *M. Fekete*. Approximations par polinomes avec conditions des diophantiennes, Compt. Rend. Acad. Sc., 239, № 21, 1954, 1455—1457.
3. *W. Rudin*. Real and Complex Analysis, „Mc. Graw—Hill Book Company", T., London, 1966.
4. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М., 1947.
5. *Г. М. Фихтенгольц*. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, Изд. „Наука", М., 1966.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS