ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով. իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

И. Ц. ГОХБЕРГ, Н. Я. КРУПНИК

ОБ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ СО СДВИГОМ

Введение

Пусть Γ—простая замкнутая или разомкнутая ориентированная ляпуновская дуга и $\omega(t)$—функция, взаимно однозначно отображающая Γ на себя. Одномерным линейным *сингулярным интегральным оператором со сдвигом* $\omega(t)$ обычно называют оператор вида

$$A = a(t) I + b(t) S + (c(t) I + d(t) S) W, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ — ограниченные измеримые функции на Γ, S — оператор сингулярного интегрирования вдоль Γ:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (t \in \Gamma)$$

и W — оператор сдвига

$$(W\varphi)(t) = \varphi(\omega(t)).$$

Рассмотрим наиболее простой случай сдвига, когда $W^2 = I$, т. е. $\omega(\omega(t)) = t$. Будем предполагать, кроме того, что функция $\omega(t)$ имеет производную $\omega'(t)$, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$, а также, что $\omega(t) \not\equiv t$.

Оператор A будет рассматриваться в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ с весом*

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{N} |t - t_k|^{\beta_k},$$

где $t_k \in \Gamma$, $1 < p < \infty$ и $-1 < \beta_k < p - 1$. В этих пространствах оператор A является линейным ограниченным оператором.

Обычно (см. [1—3]) вместе с оператором A вида (1) рассматривается также оператор A_W, определенный в пространстве $L_p^2(\Gamma, \rho) = L_p(\Gamma, \rho) \times L_p(\Gamma, \rho)$ матрицей

$$A_W = \begin{Vmatrix} a(t) I + b(t) S & c(t) I + d(t) S \\ W(c(t) I + d(t) S) W & W(a(t) I + b(t) S) W \end{Vmatrix}.$$

Без труда проверяются равенства

$$W(a(t) I + b(t) S) W = a(\omega(t)) I + \varepsilon b(\omega(t)) S + T,$$

* Отметим, что полученные результаты сохраняют силу и для более широкого класса пространств.

где T — вполне непрерывный оператор, а $\varepsilon = 1$, если отображение $t = \omega(\tau)$ не изменяет направление контура Γ и $\varepsilon = -1$ в противном случае. Отсюда вытекает, что оператор A_W лишь вполне непрерывным слагаемым отличается от оператора $\widetilde{A}_W$, определенного в пространстве $L_p^2(\Gamma, \rho)$ равенством

$$\widetilde{A}_W = \begin{Vmatrix} a(t) & c(t) \\ c(\omega(t)) & a(\omega(t)) \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b(t) & d(t) \\ \varepsilon d(\omega(t)) & \varepsilon b(\omega(t)) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Оператор $\widetilde{A}_W$ является сингулярным интегральным оператором (без сдвига), однако с матричными коэффициентами. Для таких операторов в случае непрерывных и кусочно непрерывных коэффициентов выяснены необходимые и достаточные условия, при которых они являются Ф-операторами (см. [4, 5, 6]).

В статьях [1—3] (см. также [7, 8] и список литературы, приведенный в работе [1]), в частности, установлено следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ являются непрерывными функциями. Оператор A, определенный равенством* (1) *является Ф-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ в том и только том случае, когда оператор $\widetilde{A}_W$ является Ф-оператором в пространстве $L_p^2(\Gamma, \rho)$. Если A является Ф-оператором, то*

$$\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2} \operatorname{Ind} \widetilde{A}_W.$$

Сформулированная теорема сохраняет силу для любых измеримых ограниченных коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ в случае, когда отображение $\omega\colon \Gamma \to \Gamma$ не меняет ориентацию контура. Доказательство этого непосредственно вытекает из следующих трех фактов.

1. Имеет место тождество*

$$\begin{Vmatrix} I & W \\ I & -W \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X & Y \\ WYW & WXW \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I & I \\ W & -W \end{Vmatrix} = 2 \begin{Vmatrix} X+YW & 0 \\ 0 & X-YW \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где X, Y, W — любые линейные ограниченные операторы, действующие в некотором банаховом пространстве и $W^2 = I$;

2. Функция $\omega(t) - t$ нигде на Γ не обращается в нуль;

3. Для операторов $X = aI + bS$, $Y = cI + dS$ и $M = (\omega(t) - t)\, I$ имеет место равенство

$$(X - YW)\, M = M(X + YW) + T,$$

где T — вполне непрерывный оператор.

Из предложений 1)—3) вытекает также, что оператор A является Φ_+ (или Φ_-)-оператором в пространстве $L_p(\Gamma, \rho)$ в том и только том

* Отметим, что это тождество в ряде случаев позволяет получить явные формулы для обращения одномерных сингулярных интегральных уравнений со сдвигом.

случае, когда оператор $\tilde{A}_W$ является Φ_+ (или Φ_-)-оператором в пространстве $L_p^2(\Gamma, \rho)$.

Отметим, что все эти результаты сохраняют силу и в случае, когда коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ являются матрицами, состоящими из любых ограниченных измеримых функций.

В случае, когда функция $\omega: \Gamma \to \Gamma$ изменяет ориентацию контура Γ и коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ непрерывны, теорема 1 вытекает из тождества (3) и полной непрерывности оператора $(X - YW)N - N(X + YW)$, где $N = (\omega(t) - t)I + \lambda S$ и λ — произвольное комплексное число.

Из тождества (3) вытекает также, что если оператор $\tilde{A}_W$ является Φ (Φ_+, Φ_-)-оператором, то оператор A (с любыми ограниченными измеримыми коэффициентами) также является Φ (Φ_+, Φ_-)-оператором Однако обратное утверждение перестает быть верным. В § 4 приводится пример Φ-оператора A вида (1) с кусочно непрерывными коэффициентами, для которого оператор $\tilde{A}_W$ не является Φ-оператором.

В настоящей статье подробно разбирается один модельный класс сингулярных интегральных уравнений со сдвигом в случае, когда сдвиг меняет ориентацию, а коэффициенты имеют в каждой точке конечные пределы слева и справа. Выясняются условия, при которых такие операторы являются Φ-операторами. Исследуется алгебра, порожденная этими операторами. Получена формула для символа и индекса.

Обобщения результатов этой статьи на более общие классы сингулярных интегральных уравнений и более широкие классы сдвигов будут приведены в другом месте.

§ 1. Вспомогательные предложения

Через $L(\mathbf{B})$ обозначим алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ и через $\mathbf{J}(\mathbf{B})$-двусторонний идеал алгебры $L(\mathbf{B})$, состоящий из всех вполне непрерывных операторов.

Условимся еще о следующих обозначениях: $L_{p,\beta} = L_p([0, 1], \rho)$, где $\rho(t) = t^\beta$, $-1 < \beta < p-1$, $1 < p < \infty$; ΠC ($= \Pi C(a, b)$) — множество всех функций, заданных на отрезке $[a, b]$, имеющих в каждой внутренней точке конечные пределы слева и справа и непрерывных в граничных точках a и b.

В дальнейшем $L_{p,\beta}^n$ ($= L_{p,\beta}^n(0, 1)$) будет обозначать прямую сумму n пространств $L_{p,\beta}$ и $\Pi C^{(n)}(a, b)$—алгебру квадратных матриц порядка n с элементами из $\Pi C(a, b)$.

Обозначим через $\Sigma_{p,\beta}^{(n)}$ ($= \Sigma_{p,\beta}^{(n)}(0, 1)$) наименьшую подалгебру банаховой алгебры $L(L_{p,\beta}^n)$, содержащую все операторы вида $aI+$

$+bS$, где $a, b \in \Pi C^{(n)}(0, 1)$, а S — оператор сингулярного интегрирования на отрезке $[0, 1]$ в $L^n_{p,\beta}$.

Как показано в [9] алгебра $\Sigma^{(n)}_{p,\beta}$ гомоморфна некоторой алгебре матриц порядка $2n$, составленных из ограниченных функций на квадрате $[0, 1]\times[0, 1]$. Обозначим этот гомоморфизм через π. Условимся через $\mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu)(0 \leqslant t, \mu \leqslant 1)$ обозначать матрицу πA, где $A \in \Sigma^{(n)}_{p,\beta}$. Матрица-функция $\mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu)$ называется символом оператора A в пространстве $L^n_{p,\beta}$. Кроме того, следуя [9], матрицу $\mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu)$ будем записывать в виде блочной матрицы второго порядка

$$\mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu) = \| a^{p,\beta}_{j,k}(t, \mu)\|^2_{j,k=1}.$$

В статье [9] (теорема 5.1) доказано, что оператор $A \in \Sigma^{(n)}_{p,\beta}$ является Φ_+ или Φ_--оператором в пространстве $L^n_{p,\beta}$ в том и только том случае, когда функция $\det \mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu)$ не обращается в нуль на квадрате $[0, 1]\times[0, 1]$. Если это условие выполнено, то оператор A является Φ-оператором и его индекс вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Ind} A = -\frac{1}{2\pi}\{\arg \det \mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu)/\det a^{p,\beta}_{22}(t, 0)\, a^{p,\beta}_{22}(t, 1)\}_{0<t,\mu<1}. \tag{3'}$$

Кроме того, в [9] показано, что $\mathfrak{J}(L^n_{p,\beta}) \subset \Sigma^{(n)}_{p,\beta}$ и, если оператор $A \in \Sigma^{(n)}_{p,\beta}$ допускает регуляризацию, то регуляризирующий оператор также принадлежит алгебре $\Sigma^{(n)}_{p,\beta}$. В частности, если оператор $A \in \Sigma^{(n)}_{p,\beta}$ обратим, то и оператор $A^{-1} \in \Sigma^{(n)}_{p,\beta}$.

Символ $\mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu)$ оператора вида $A = a(t)I + b(t)S$ определяется в точках (t, μ) $(0 < t < 1,\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ равенством

$$\mathbf{A}_{p,\beta}(t, \mu) = \left\| \begin{matrix} \xi(\mu)\, x(t+0) + (1-\xi(\mu))\, x(t-0) & h(\mu)(y(t+0) - y(t-0)) \\ h(\mu)(x(t+0) - x(t-0)) & \xi(\mu)\, y(t-0) + (1-\xi(\mu))\, y(t+0) \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

где $x(t) = a(t) + b(t)$, $y(t) = a(t) - b(t)$,

$$\xi(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\theta\mu)\exp(i\theta\mu)}{\sin\theta\exp(i\theta)} & \left(\theta = \pi - \dfrac{2\pi}{p}\right) \text{ при } \theta \neq 0 \\ \mu & \text{при } \theta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

и $h(\mu)$ — некоторая фиксированная ветвь корня $\sqrt{\xi(\mu)(1-\xi(\mu))}$.

В точках $(0, \mu)$ и $(1, \mu)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ символ определяется равенством

$$\mathbf{A}_{p,\beta}(0, \mu) = \left\| \begin{matrix} a(0) + (2\xi_3(\mu) - 1)\, b(0) & 0 \\ 0 & a(0) - b(0) \end{matrix} \right\|.$$

---

* Объяснение этой формулы см. в [9], стр. 957.

и

$$\mathbf{A}_{p,\beta}(1,\mu)=\begin{Vmatrix} a(1)-(2\xi(\mu)-1)\,b(1) & 0 \\ 0 & a(1)-b(1) \end{Vmatrix},$$

где функция $\xi_\beta(\mu)$ отличается от функции $\xi(\mu)$ лишь тем, что в правой части равенства (5) число θ заменено на $\pi-2\pi(1+\beta)/p$.

Рассмотрим оператор R, определенный равенством

$$(R\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\sqrt{t}}{(\tau-t)\sqrt{\tau}}\,d\tau \quad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{6}$$

Из [10] (см. теорему 2.2) вытекает, что оператор R ограничен в пространстве $L_{p,\beta}$ в том и только том случае, когда выполнено условие $2(1+\beta)<p$.

Нам понадобится следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть числа β и p $(-1<\beta<p-1,\ 1<p<\infty)$ удовлетворяют условию $2(1+\beta)<p$, тогда оператор R принадлежит алгебре $\Sigma^{(1)}_{p,\beta}$ и его символ имеет вид*

$$\mathrm{R}_{p,\beta}(t,\mu)=\begin{Vmatrix} r_{11}^{p,\beta}(t,\mu) & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

где

$$r_{11}^{p,\beta}(t,\mu)=\begin{cases}(2\xi_\beta(\mu)-1)^{-1} & \text{при } t=0\\ 1 & \text{при } 0<t<1\\ 2\xi(\mu)-1 & \text{при } t=1.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_{p,\beta}$ оператор

$$B=aI+SbI,$$

где $a(t)=\sin\dfrac{\pi t}{2}$ и $b(t)=i\cos\dfrac{\pi t}{2}$. Из определения символа непосредственно следует, что

$$\det \mathfrak{M}_{p,\beta}(t,\mu)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<t\leqslant 1\\ 2\xi_\beta(\mu)-1 & \text{при } t=0.\end{cases}$$

Так как $2(1+\beta)<p$, то $\pi-2\pi(1+\beta)/p\neq 0$, откуда следует, что $2\xi_\beta(\mu)-1\neq 0$. Таким образом, оператор B является Ф-оператором в пространстве $L_{p,\beta}$. Покажем, что индекс B равен нулю. Пусть $f_{p,\beta}(t,\mu)=\det\mathfrak{M}_{p,\beta}(t,\mu)/b_{22}(t,0)\,b_{22}(t,1)$; нетрудно видеть, что

$$f_{p,\beta}(t,\mu)=\begin{cases}1-2\xi_\beta(\mu) & \text{при } t=0\\ -e^{-i\pi t} & \text{при } 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Множество значений функции $f_{p,\beta}(t,\mu)$ состоит из двух дуг окружностей, соединяющих точки -1 и 1. Обе эти дуги расположены в верхней полуплоскости, стало быть, $\{\arg f_{p,\beta}(t,\mu)\}_{0<t,\mu<1}=0$. Из формулы (3) вытекает, что $\operatorname{Ind} B=0$.

Как известно ([5], теорема 1) в этом случае оператор B обратим в $L_{p,\beta}$.

Для нахождения обратного оператора воспользуемся формулой (98,11) из монографии Н. И. Мусхелишвили [11]. Из этой формулы вытекает, что*

$$B^{-1} = aI - Z^{-1} SbZ,$$

где $Z = g(t)\sqrt{t}\, I$, причем функции $g(t)$ и $1/g(t)$ непрерывны на [0,1]. Так как $B \in \Sigma^{(1)}_{p,\beta}$, то $B^{-1} \in \Sigma^{(1)}_{p,\beta}$. В силу равенства $B^{-1} = aI + g^{-1} RbgI$, оператор $R_1 = RbI$ принадлежит алгебре $\Sigma^{(1)}_{p,\beta}$.

Рассмотрим оператор $R_2 = Rc(t)I$, где $c(t) = \sqrt{t}$. Так как оператор $R_2 - ScI = cS - ScI$ вполне непрерывен в $L_{p,\beta}$, то $R_2 \in \Sigma^{(1)}_{p,\beta}$. Таким образом, оператор $B(b+c)I \in \Sigma^{(1)}_{p,\beta}$ и, так как функция $b(t) + c(t)$ не обращается в нуль на отрезке [0, 1], то $B \in \Sigma^{(1)}_{p,\beta}$. Пусть $\mathbf{S}_{p,\beta}(t,\mu)$ и $\mathbf{C}_{p,\beta}(t,\mu)$ соответственно символы операторов S и $C = c(t)I$. Так как оператор $(R-S)cI$ вполне непрерывен, то

$$(\mathbf{R}_{p,\beta}(t,\mu) - \mathbf{S}_{p,\beta}(t,\mu))\, \mathbf{C}_{p,\beta}(t,\mu) = 0.$$

Так как $\mathbf{C}_{p,\beta}(t,\mu) = \begin{Vmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \sqrt{t} \end{Vmatrix}$, то для всех $t \neq 0$ выполняется равенство $\mathbf{R}_{p,\beta}(t,\mu) = \mathbf{S}_{p,\beta}(t,\mu)$. Из равенства $(aI + bS)(aI - g^{-1}RbgI) = I$ вытекает, что произведение $\mathbf{S}_{p,\beta}(0,\mu)\,\mathbf{R}_{p,\beta}(0,\mu)$ является единичной матрицей, стало быть $\mathbf{R}_{p,\beta}(0,\mu) = \mathbf{S}^{-1}_{p,\beta}(t,\mu)$. Таким образом

$$\mathbf{R}_{p,\beta}(t,\mu) = \begin{cases} \mathbf{S}_{p,\beta}(t,\mu) & \text{при} \quad t \neq 0 \\ \mathbf{S}^{-1}_{p,\beta}(0,\mu) & \text{при} \quad t = 0, \end{cases}$$

откуда следует (7). Лемма доказана.

§ 2. Основное предложение

Обозначим через $\Sigma^{(n)}_p(-1, 1; W)$ наименьшую подалгебру банаховой алгебры $L(L^n_p(-1,1))$ $(1 < p < \infty)$, содержащую все операторы вида

$$A = aI + bS + (cI + dS)\, W, \tag{8}$$

где коэффициенты $a, b, c, d \in \Pi C^{(n)}(-1, 1)$, оператор сдвига W определен равенством $(W\varphi)(t) = \varphi(-t)$ и S — оператор сингулярного интегрирования на отрезке [—1, 1].

Обозначим через η: $L^n_p(-1, 1) \to L^{2n}_p(0, 1)$ отображение, определенное равенством $(\eta\varphi)(t) = (\varphi(t), \varphi(-t))$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда для всяко-

---

* Из [11] вытекает, что оператор $C = aI + Z^{-1} SbZ$ обладает свойством $CB\varphi = BC\varphi = \varphi$ для всех функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера на [0,1]. Так как, кроме этого, оператор C ограничен в $L_{p,\beta}$, то $B^{-1} = C$.

го оператора $X \in L\ (L_p^n(-1, 1))$ оператор $\sigma X \sigma^{-1}$ можно представить в виде матрицы

$$\sigma X \sigma^{-1} = \begin{Vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{Vmatrix}$$

с элементами $X_{jk} \in L\ (L_p^n(0, 1))(j, k = 1, 2)$. В частности, для оператора A вида (8) будем иметь

$$\sigma A \sigma^{-1} = gI + hS_0 + fM_0, \tag{9}$$

где

$$g(t) = \begin{Vmatrix} a(t) & c(t) \\ c(-t) & d(-t) \end{Vmatrix}, \quad h(t) = \begin{Vmatrix} b(t) & d(t) \\ -d(-t) & -b(-t) \end{Vmatrix}, \quad f(t) = \begin{Vmatrix} -d(t) & -b(t) \\ b(-t) & d(-t) \end{Vmatrix}$$

и

$$(S_0\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad (M_0\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}\, d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

— операторы, действующие в пространстве $L_p^{2n}(0, 1)$.

Рассмотрим оператор ν, определенный равенством $(\nu\varphi)(t) = \varphi(t^{1/2})$. Очевидно, оператор ν является линейным ограниченным обратимым оператором, действующим из пространства $L_p^{2n}(0,1)$ в $L_{p,\ -1/2}^{2n}(0, 1)$. Легко видеть, что $\nu a(t)\nu^{-1} = a(t^{1/2})\, I$,

$$\nu S_0 \nu^{-1} = \frac{1}{2}(S_0 + M_1) \text{ и } \nu S_0 \nu^{-1} = \frac{1}{2}(S_0 - M_1),$$

где оператор M_1 определяется в $L_{p,-1/2}^{2n}(0, 1)$ равенством

$$(M_1\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\sqrt{t}}{(\tau - t)\sqrt{\tau}}\, d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Согласно лемме 1, оператор M_1 принадлежит алгебре $\Sigma_{p,-1/2}^{(2n)}(0,1)$. Следовательно, имеет место равенство

$$\nu\sigma\Sigma_p^{(n)}(-1, 1;\ W)\,\sigma^{-1}\nu^{-1} \subset \Sigma_{p,\ -1/2}^{(2n)}(0,1).$$

Пусть X — некоторый оператор из алгебры $\Sigma_p^{(n)}(-1, 1;\ W)$. Обозначим через $\mathbf{X}_p(t, \mu)(0 \leqslant t, \mu \leqslant 1)$ символ оператора $\nu\sigma X\sigma^{-1}\nu^{-1} \in \Sigma_{p,\ -1/2}^{(2n)}(0,1)$. Матрицу-функцию $\mathbf{X}_p(t, \mu)(0 \leqslant t, \mu \leqslant 1)$ порядка $4n$ условимся называть символом оператора X. Из выведенных правил и леммы 1 вытекает, в частности, что символ оператора (8) из алгебры $\Sigma_p^{(n)}(-1, 1;\ W)$ в интервале $0 < t < 1$ определяется равенством

$$\mathbf{A}_p(t^2, \mu) = \begin{Vmatrix} \xi(\mu)\, x(t+0) + (1 - \xi(\mu))\, x(t-0) & h(\mu)(y(t+0) - y(t-0)) \\ h(\mu)(x(t+0) - x(t-0)) & \xi(\mu)\, y(t-0) + (1 - \xi(\mu))\, y(t+0) \end{Vmatrix},$$

где

$$x(t)=\begin{Vmatrix} a(t)+b(t) & c(t)+d(t) \\ c(-t)-d(-t) & a(-t)-b(-t) \end{Vmatrix},$$

$$y(t)=\begin{Vmatrix} a(t)-b(t) & c(t)-d(t) \\ c(-t)+d(-t) & a(-t)+b(-t) \end{Vmatrix},$$

а $\xi(\mu)$ и $h(\mu)$— функции, определенные в § 1.

При $t=1$

$$\mathbf{A}_p(1,\mu)=\begin{Vmatrix} \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & \beta(\mu) \end{Vmatrix},$$

где

$$\alpha(\mu)=\begin{Vmatrix} a(1) & c(1) \\ c(-1) & a(-1) \end{Vmatrix}+(2\xi(\mu)-1)\begin{Vmatrix} b(1) & d(1) \\ -d(-1) & -b(-1) \end{Vmatrix},$$

$$\beta(\mu)=\begin{Vmatrix} a(1)-b(1) & c(1)-d(1) \\ c(-1)+d(-1) & a(-1)+b(-1) \end{Vmatrix}$$

и при $t=0$

$$\mathbf{A}_p(0,\mu)=\begin{Vmatrix} \gamma(\mu) & 0 \\ 0 & \delta(\mu) \end{Vmatrix},$$

где

$$\gamma(\mu)=\begin{Vmatrix} a(+0) & c(+0) \\ c(-0) & a(-0) \end{Vmatrix}+\frac{\eta(\mu)}{2}\begin{Vmatrix} b(+0)-d(+0) & d(+0)-b(+0) \\ b(-0)-d(-0) & d(-0)-b(-0) \end{Vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\eta(\mu)}\begin{Vmatrix} b(+0)+d(+0) & b(+0)+d(+0) \\ -b(-0)-d(-0) & -b(-0)-d(-0) \end{Vmatrix},$$

$$\eta(\mu)=2\xi_{-1/2}(\mu)-1 \text{ и}$$

$$\delta(\mu)=\begin{Vmatrix} a(+0)-b(+0) & c(+0)-d(+0) \\ c(-0)+d(-0) & a(-0)+b(-0) \end{Vmatrix}.$$

Символ $\mathbf{X}_p(t,\mu)$ оператора $X\in\Sigma_p^{(n)}(-1,1;W)$ будем записывать в виде $\|x_{jk}(t,\mu)\|_{j,k=1}^2$, где $x_{jk}(t,\mu)$ — матрицы-функции порядка $2n$. В силу свойства символов операторов из алгебры $\Sigma_{p,\beta}^{(2n)}(0,1)$ (см. [8]) и приведенных выше рассуждений имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы оператор $A\in\Sigma_p^{(n)}(-1,1;W)$ был Φ_+ или Φ_--оператором в $L_p^n(-1,1)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\det \mathbf{A}_p(t,\mu)\neq 0 \quad (0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant\mu\leqslant 1).$$

Если это условие выполнено, то оператор A является Φ-оператором и

$$\operatorname{Ind} A=-\frac{1}{2\pi}\{\arg\det \mathbf{A}_p(t,\mu)/\det a_{22}(t,0)\,a_{22}(t,1)\}_{\substack{0\leqslant t\leqslant 1\\ 0\leqslant\mu\leqslant 1}}.$$

§ 3. Пример

В этом параграфе приводится пример сингулярного оператора со сдвигом (изменяющим ориентацию контура), показывающий, что если коэффициенты оператора имеют точки разрыва, то теорема 1, вообще говоря, не имеет места.

Пусть $A = I + a\chi(t)\,SW$, где $a = \text{const}$, $\chi(t)(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ — характеристическая функция отрезка [0,1], S—оператор сингулярного интегрирования вдоль отрезка [—1, 1] и W—оператор сдвига $(W\varphi)(t) = \varphi(-t)$. Оператор A принадлежит алгебре $\Sigma_p^{(1)}(-1, 1)$. Его символ в пространстве $L_2(-1, 1)$ имеет вид

$$\mathbf{A}_2(t,\mu) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t, \mu) & 0 \\ 0 & a_{22}(t, \mu) \end{Vmatrix},$$

где $a_{22}(t, \mu) = \begin{Vmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и

$$a_{11}(t, \mu) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} & \text{при } 0 < t < 1 \\ \begin{Vmatrix} 1 & a(2\mu - 1) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} & \text{при } t = 1 \\ \begin{Vmatrix} 1 + ia \sin \pi\mu - a \cos \pi\mu \\ 0 \quad\quad 1 \end{Vmatrix} & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\det \mathbf{A}_2(t, \mu) = 1$ при $t \neq 0$ и $\det \mathbf{A}_2(0, \mu) = 1 + ia \sin \pi\mu$.

Если положить $a = -i$, то $\det \mathbf{A}_2(t, \mu) \neq 0$ $(0 \leqslant t, \mu < 1)$, стало быть, оператор $I - i\chi(t)SW$ является Ф-оператором в $L_2(-1, 1)$. Если же положить $a = i$, то $\det \mathbf{A}_2(0, 1/2) = 0$ и, стало быть, оператор $I + i\chi(t)\,SW$ не является Ф-оператором в пространстве $L_2(-1, 1)$.

Пусть $B = I - i\chi(t)\,SW$ и $C = I + i\chi(t)\,SW$; так как B является Ф-оператором в $L_2(-1, 1)$, а C не является Ф-оператором в этом пространстве, то, в силу равенства (3), оператор B_W (и оператор $\tilde{B}_W$) не является Ф-оператором в $L_2^2(-1, 1)$. Таким образом, для оператора B теорема 1 не верна.

Отметим, что в данном примере операторы B_W и $\tilde{B}_W$ совпадают. Отметим также, что можно привести примеры сингулярных операторов со сдвигом (изменяющим ориентацию контура) на замкнутом контуре с кусочно непрерывными коэффициентами, для которых теорема 1 не имеет места.

Институт математики с Вычислительным
центром АН Молдавской ССР

Поступила 10.IX.1972

Ի. Ց. ԳՈԽԲԵՐԳ, Ն. ՅԱ. ԿՐՈՒՊՆԻԿ. Սահքով միաչափ սինգուլյար օպերատորների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում դիտարկվում են սահքով միաչափ սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորներ՝ անընդհատ և խզվող գործակիցներով։ Ենթադրվում է, որ սահքի ձևափոխության քառակուսին հանդիսանում է նույնական ձևափոխություն։

Պարզվում է, որ ավանդական մեթոդները կիրառելի չեն այն դեպքում, երբ սահքը փոխում է եզրագծի կողմնորոշումը, և օպերատորի գործակիցները խզվող են։

Մանրամասն ուսումնասիրվում է նման բնույթի օպերատորների մի դաս։

I. C. GOHBERG, N. Ja. KRUPNIK. *On certain one-dimensional singular integral operators with a shift* (summary)

The paper discusses certain one-dimensional singular integral operators with a shift with continuous and discontinuous coefficients. It is supposed that the square of the shift is an identical mapping.

Traditional methods prove to be inapplicable in the case when the shift changes the orientation of the contour and the coefficients of the operators are discontinuous.

A detailed research of a class of operators of this type follows.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Литвинчук.* Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, вып. 3, 1967, 563—586.
2. *Э. И. Зверович* и *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН, 23, вып. 3 (141), 1968, 67—121.
3. *А. Б. Антоневич.* Об индексе псевдодифференциального оператора с конечной группой сдвигов, ДАН СССР, 190, № 4, 1970, 751—752.
4. *И. Ц. Гохберг.* Задача факторизации в нормированных кольцах функций от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН, 19, вып. 1, 1964, 71—124.
5. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом, ДАН СССР, 185, № 4, 1969, 745—748.
6. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Системы сингулярных уравнений в пространствах L_p с весом, ДАН СССР, 186, № 5, 1969, 998—1001.
7. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко.* Сингулярные интегральные операторы со сдвигом на разомкнутом контуре, ДАН СССР, 204, № 3, 1972, 536—539.
8. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко.* Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, ДАН СССР, 202, № 2, 1972, 273—276.
9. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы, Изв. АН СССР, 35, 1971, 940—964.
10. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами, Матем. исслед., Кишинев, т. 5, № 3, 1970,
11. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

В. В. САРАФЯН

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ В ОТДЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ

§ 1. Введение

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве R^n задан эллиптический оператор

$$L=\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot$$

Мы предполагаем, что оператор L вырождается только в начале координат и коэффициенты его таковы, что $a^{ij}(0)=b^i(0)=0$, $i, j=1,\cdots,n$. Обозначим через D ограниченную область с гладкой границей Γ, содержащую начало координат. Коэффициенты оператора L дважды непрерывно дифференцируемы и

$$\max_{\substack{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n\\ x\in D\cup\Gamma}}\left\{\frac{\partial^2 a^{ij}(x)}{\partial x^k\,\partial x^l};\ \frac{\partial b^i(x)}{\partial x^k}\right\}<K<\infty.$$

Рассмотрим в области D задачу

$$Lu(x)=0,\ u(x)|_\Gamma=\varphi(x). \tag{1}$$

Функцию $\varphi(x)$ мы считаем непрерывной. В [4] показано, что если начало координат является асимптотически устойчивым по вероятности, то при некоторых предположениях на скорость вырождения оператора L, для выделения единственного решения задачи (1) нужно задать предел $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$. Настоящая работа посвящена изучению некоторых регуляризаций задачи (1). Мы приведем условия, при которых решение задачи (1) является решением задачи Дирихле для возмущенных уравнений $(L+\varepsilon\tilde{L})\,u^\varepsilon(x)=0$, где $\tilde{L}$ — эллиптический, быть может, вырождающийся оператор второго порядка с гладкими коэффициентами. При небольших предположениях о $\tilde{L}$, например, если хотя бы один из его коэффициентов отличен от нуля в начале координат, эта задача уже имеет единственное решение $u^\varepsilon(x)$. Естественно ожидать, что при $\varepsilon\to 0$, $u^\varepsilon(x)$ стремится к некоторому решению задачи (1). Здесь возникают следующие вопросы: 1) К какому решению задачи (1) сходится $u^\varepsilon(x)$? 2) Зависит ли этот предел от возмущающего оператора $\tilde{L}$.

Если L—оператор первого порядка, характеристики которого входят в начало координат, то предел зависит от $\tilde{L}$ (см. [3]). В этом случае $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x)=\text{const}$.

Одна из целей этой работы—показать, что если L вырождается только в начале координат, то при небольших предположениях о виде вырождения, этот предел не зависит от $\widetilde{L}$ и вычислить предельную функцию. Отметим, что не любое решение вырожденной задачи можно построить как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x)$, так как этот предел должен удовлетворять принципу максимума для эллиптических уравнений. Чтобы построить любое решение, можно использовать параболическую регуляризацию. Вместе с задачей (1) рассмотрим в цилиндре $\Pi=[0, \infty)\times D$ первую смешанную задачу для параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu, \; u(0, x)=f(x), \; u(t, x)=\psi(x),$$

где $\psi(x)$—функция, совпадающая с $\varphi(x)$ там, где обе определены. Единственное решение задачи (1) можно выделить как функцию, к которой решение параболической задачи с заданной начальной функцией $f(x)$ сходится при $t\to\infty$.

В заметке рассматривается также регуляризация с помощью малого коэффициента $c(x)<-c_0<0$. А именно, рассматривается следующая задача:

$$(L+\varepsilon c(x))\,u^\varepsilon(x)=0, \; u^\varepsilon(x)|_\Gamma=\varphi(x)$$

и находится предел $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to 0$.

В § 2 будет изучено поведение решения задачи (1) вблизи начала координат. В § 3 эти результаты будут перенесены на случай, когда вместо оператора L рассматривается оператор условного процесса. §§ 4, 5 посвящены различным регуляризациям задачи (1).

Автор выражает искреннюю благодарность М. И. Фрейдлину за постановку задачи и помощь при ее решении.

§ 2. Теорема об устранимой особенности

В этом параграфе мы покажем, что при определенных условиях на вид вырождения оператора L ограниченное решение задачи (1) непрерывно в начале координат—точке O. Известно, [1], что с каждым дифференциальным оператором второго порядка связан диффузионный процесс; в частности, оператору L соответствует процесс $X=\{x_t; P_x\}$, который можно построить с помощью стохастического уравнения

$$x_t-x=\int_0^t \sigma(x_s)\,d\xi_s+\int_0^t b(x_s)\,ds, \tag{2}$$

где $\xi_t=\{\xi_t^1, \xi_t^2, \cdots, \xi_t^n\}$ — n-мерный винеровский процесс, $\sigma(x)$—матрица, такая, что $\sigma(x)\,\sigma^*(x)=\{a^{ij}(x)\}$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие факты.

Решение $x_t\equiv 0$ уравнения (2) называется асимптотически устойчивым по вероятности, если

1) для любого $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{x\to 0} P_x\{\sup\limits_{t>0}|x_t|>\varepsilon\}=0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} P_x\{\lim\limits_{t\to\infty} x_t=0\}=1$.

Для того чтобы решение уравнения (2) было асимптотически устойчивым по вероятности необходимо и достаточно (см. [2]), чтобы в некоторой окрестности G точки O существовала функция $v(x)$ такая, что: а) $v(O)=0$; б) $v(x)>0$ при $x\neq O$ и $x\in G$; в) $Lv\leqslant 0$ при $x\neq O$ и $x\in G$.

Поведение решения задачи (1) в окрестности точки O в случае, когда решение $x_t\equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности, описывается следующей теоремой [4].

Теорема 1. Пусть решение $x_t\equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности. Предположим, что в некоторой окрестности точки O выполнено условие

$$m_1|x|^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\geqslant\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j\geqslant m_2|x|^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2, \tag{3}$$

где $m_1>m_2>0$. Тогда 1) любое ограниченное решение задачи (1) имеет предел $\lim\limits_{x\to 0}u(x)$; 2) для выделения единственного решения задачи (1) достаточно задать предел $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=\mathrm{const}$.

Основной целью этого параграфа является исследование поведения решения в точке O, когда эта точка недостижима для траекторий процесса X. Для того чтобы точка O была бы недостижима для траекторий процесса X достаточно (см. [2]), чтобы в некоторой окрестности G точки O существовала функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) $Lv\leqslant 0$ при $x\in G$ и $x\neq O$; б) $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=+\infty$.

Теорема 2. *Если точка O недостижима для траекторий процесса X и выполнено* (3), *то любое ограниченное решение задачи* (1) *непрерывно в точке O.*

Доказательство. Так как точка O недостижима для траекторий процесса X, то с вероятностью 1 процесс X выходит на границу Γ. Поэтому существует единственное решение задачи (1).

Возьмем такую последовательность точек $\{x_k\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$ и пусть $\lim\limits_{k\to\infty}u(x_k)=\bar{u}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k_0, что при $k\geqslant k_0$

$$|u(x_k)-\bar{u}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$V_k=\left\{x\colon |u(x)-u(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\},\ k=k_0,\ k_0+1,\cdots$$

$$F_k=\{x\colon |x|=|x_k|\},\ k=k_0,\ k_0+1,\cdots.$$

Таким образом, при $x\in V_k$, $k=k_0$, $k_0+1,\cdots$,

$$|u\ (x) - \overline{u}| < \varepsilon. \tag{4}$$

Используя оценку градиента функции $u\,(x)$, полученную при доказательстве теоремы 1 (см. [4]), имеем, что $V_k = \left\{ x\colon |x - x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x_k|}{R} \right\}$, где R — положительная постоянная.

Процесс X с вероятностью 1 выходит на Γ и поэтому при $|x| \leqslant |x_k|$

$$P_x\ \{\text{существует такое } \tau_k\,(\omega), \text{ что } x_{\tau_k} \in F_k\} = 1. \tag{5}$$

Проведем через точки x_k, x_{τ_k} большую окружность G_k сферы F_k и рассмотрим тело E_k, полученное прямым произведением V_k на окружность G_k. Введем в E_k новые координаты

$$z_i = \frac{x_i}{r_k},\ i = 1,\ 2, \cdots, n,$$

где $r_k = \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x_k|}{R}$. В новых координатах диаметр V_k равен единице. Поэтому на основании леммы 1 из [4] при $x \in G_k$

$$P_x\ \{\text{процесс } X \text{ достигнет } V_k \text{ до выхода из } E_k\} > \delta_1 > 0. \tag{6}$$

Из того, что диффузия и перенос процесса X обращаются в нуль в точке O, следует, что если процесс X выпущен из точки, достаточно близкой к точке O, то он будет сколь угодно долго выходить из любой окрестности точки O. Поэтому из (5) и (6) следует, что с вероятностью как угодно близкой к 1 траектория процесса X, выпущенная из точки достаточно близкой к точке O, побывает в $\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$.

Рассмотрим теперь в $D \setminus \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$ следующую задачу:

$$Lw\ (x) = 0,\ w\ (x)|_\Gamma = \varphi\ (x),\ w\ (x)|_{\Gamma_1} = u\ (x),$$

где $u\,(x)$ — решение задачи (1), Γ_1 — граница $\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$. Пусть $\tau = \inf\left\{ t : x_t \in \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k \right\}$. Легко проверить, что функция $w\ (x) = M_x\, w\,(x_\tau)$ удовлетворяет уравнению $Aw\ (x) = 0$, где A инфинитезимальный оператор процесса X, совпадающий с L на дважды непрерывно дифференцируемых функциях из D_A. Так как на Γ_1 $w\ (x) = u\ (x)$, то $w\ (x) = M_x u\,(x_\tau)$. Отсюда, принимая во внимание (4), заключаем, что при $|x| < |x_k|$

$$|w\ (x) - \overline{u}| < \varepsilon.$$

Из единственности решения задачи (1) следует, что $u\,(x)$ совпадает на $D \setminus \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} V_k$ с $w\ (x)$ и поэтому для $|x| < |x_k|$

$$|u(x)-\bar{u}|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 3. Условный процесс, связанный с оператором L

Пусть X—марковский процесс с переходной функцией $\bar{P}(t, x, A)$, $u(x)$—ограниченная, положительная, измеримая, инвариантная функция, т. е. $\int\limits_{R^n} \bar{P}(t, x, dy)\, u(y) = u(x)$ для всех $t \geqslant 0$, $x \in R^n$. Формулой

$$P^u(t, x, A) = \frac{1}{u(x)} \int\limits_A \bar{P}(t, x, dy)\, u(y), \quad t>0, \; x \in R^n$$

определяется переходная функция, которой соответствует марковский процесс X^u. В работе [5] показано, что инфинитезимальным оператором процесса X^u будет оператор A^u, который для всякого $g \in D_A$ имеет представление $A^u g = \dfrac{1}{u} Aug$, где A— инфинитезимальный оператор процесса X.

Пусть решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности. Функция $V(x) = P_x\{x_\tau \in \Gamma\}$ (τ — момент первого попадания процесса X в O или на Γ) является единственным решением задачи

$$Lv(x) = 0, \quad v(x)|_\Gamma = 1, \quad v(O) = 0. \tag{7}$$

Так как $P_x\{x_\tau \in \Gamma\}$—инвариантная функция, то можно говорить о процессе X^v. Можно показать (см. [5]), что X^v является диффузионным процессом, для которого точка O является недостижимой, а инфинитезимальный оператор X^v совпадает с оператором L^v на гладких функциях из D_A, где L^v для всякой гладкой функции из D_A имеет представление $L^v g = \dfrac{1}{v} Lvg$.

Лемма 1. *Пусть решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности. Предположим, что выполнено условие (3), и $u^0(x)$ — решение следующей задачи в D:*

$$Lu^0(x) = 0, \quad u^0(x)|_\Gamma = \varphi(x), \quad u^0(O) = 0. \tag{7'}$$

Тогда функция $\dfrac{u^0(x)}{v(x)}$ непрерывна в точке O.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу в D:

$$\frac{1}{v(x)} Lv(x)\, w(x) = Lw(x) + \frac{1}{v(x)} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial w}{\partial x^j} = 0, \quad w(x)|_\Gamma = \varphi(x).$$

Ясно, что $\dfrac{u^0(x)}{v(x)}$ будет решением этой задачи. Поэтому, чтобы доказать непрерывность $\frac{u^0(x)}{v(x)}$ в точке O достаточно показать, что выполняются условия теоремы 2. Так как точка O является недостижимой для процесса X^v, управляемого оператором L^v, то достаточно доказать, что при $x \to 0$

$$\left|\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right| < K|x| \tag{8}$$

и что $\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}$ имеет ограниченные частные производные в окрестности точки O. Докажем сначала (8). Так как первые частные производные $a^{ij}(x)$ и $b^i(x)$ ограничены, а сами коэффициенты обращаются в нуль в точке O, то справедливы оценки

$$|a^{ij}(x)| < K_1|x|, \quad |b^i(x)| < K_1|x|. \tag{9}$$

Разложим $a^{ij}(x)$ по формуле Тейлора, получим

$$a^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^k}x^k + \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 a^{ij}(y)}{\partial x^k \partial x^l}x^k x^l,$$

где $0 \leqslant |y| \leqslant |x|$. Но из (3) следует, что в некоторой окрестности точки 0 $|a^{ij}(x)| < K_2|x|^2$, поэтому $\left.\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^l}\right|_{x=0} = 0$. Отсюда и из того, что $a^{ij}(x)$ имеет ограниченные частные производные второго порядка следует, что в некоторой окрестности точки O справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^l}\right| < K_3|x|. \tag{10}$$

Используя теперь эти оценки, докажем (8).

Так как $Lv(x) = 0$ в D, то

$$\frac{1}{v(x)}Lv(x) = \frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Пусть G—та окрестность точки O, содержащаяся в D, в которой справедливы оценки (3), (9) и (10). Пусть $y \in G$. Выберем $\delta > 0$ таким, чтобы $\{x\colon |y-x| \leqslant \delta\} \in G$. Имеем

$$\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx = 0.$$

Интегрируя первую сумму по частям, получим

$$\int\limits_{|y-x|=\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx + \int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v^2(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)dx -$$

$$- \int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx + \int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx = 0.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v^2(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{|y-x|=\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{ij}(x)}{\partial x^j}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx\right|+\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)dx\right|.$$

Используя теперь оценки (9) и (10), получим

$$\left|\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{1}{v^2(x)}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)dx\right|\leqslant K_4\int\limits_{|y-x|=\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx+$$

$$+K_4\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx\leqslant K_5\int\limits_{|y-x|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx.$$

Применяя (3), имеем

$$\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|^2}{v^2(x)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)^2\right]dx\leqslant K_5\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx.$$

Пользуясь теперь неравенством $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)$, получим

$$\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|^2}{v^2(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)^2dx\leqslant K_6\int\limits_{|x-y|<\delta}\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_{|x-y|<\delta}\left[\frac{|x|^2}{v^2(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)^2-K_6\frac{|x|}{v(x)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\right]dx\leqslant 0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна в точке $y\neq 0$, а последнее неравенство верно для всех достаточно малых δ, то

$$\frac{|y|^2}{v^2(y)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)^2-K_6\frac{|y|}{v(y)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\leqslant 0$$

или

$$\frac{|y|}{v(y)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\leqslant K_6.$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки O выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x^i}\right|\right)\leqslant\frac{K_6}{|y|}v(y). \tag{11}$$

Из (11) и (3) следует (8). Докажем теперь, что $\dfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\dfrac{1}{v(x)}\sum\limits_{i=1}^{n}\times\right.$

$\times a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\Big)$ ограничена в окрестности точки O. Для этого разложим функцию $\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}$ по формуле Тейлора

$$\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{v(y)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(y)\frac{\partial v(y)}{\partial x^i}\right)x^k,$$

где $0<|y|<|x|$. Используя (8), получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{1}{v(y)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(y)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)x^k\right|<K_1|x|.$$

Отсюда и следует ограниченность $\frac{\partial}{\partial x^s}\left(\frac{1}{v(x)}\sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)$ в окрестности точки O. Лемма доказана.

§ 4. Регуляризация с помощью возмущенных уравнений

В этом параграфе мы приведем условия, при которых решение задачи (1) является пределом решений задачи Дирихле для возмущенных уравнений $(L+\varepsilon\tilde{L})\,u^\varepsilon(x)=0$, где $\tilde{L}$ — эллиптический, быть может, вырождающийся оператор второго порядка с гладкими коэффициентами. Введем понятие устойчиво регулярной граничной точки. Это понятие необходимо, чтобы $u^\varepsilon(x)$ удовлетворяла принципу максимума для эллиптических уравнений. Пусть $\tau_D^\varepsilon=\inf\{t\colon x_t^\varepsilon\notin D\}$. Множество предельных точек траекторий x_t^ε при $t\to\tau_D^\varepsilon$ обозначим $\gamma_D^\varepsilon(\omega)$. Точка $x_0\in\Gamma$ называется устойчиво регулярной, если при любом $\delta>0$ и для любого оператора $\tilde{L}$

$$\lim_{x\to x_0,\ \varepsilon\to 0} P_x^\varepsilon\{\gamma_D^\varepsilon\subset G_\delta(x_0)\cap\Gamma\}=1, \tag{12}$$

где $G_\delta(x_0)$ — δ-окрестность точки x_0. Если (12) выполняется равномерно по $x_0\in\tilde{\Gamma}\subset\Gamma$, то множество $\tilde{\Gamma}$ называется равномерно устойчиво регулярным.

Для устойчивой регулярности точки $x_0\in\Gamma$ достаточно (см. [6]), чтобы в окрестности точки x_0 направляющие косинусы внешней нормали $n(x)=(n_i(x))$ были бы дважды непрерывно дифференцируемы и выполнялось хотя бы одно из следующих условий:

а) $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)\,n_i(x_0)\,n_j(x_0)\neq 0$; б) точка x_0 содержалась в замыкании открытого множества, на котором

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\,n_i(x)\,n_j(x)=0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} b^i(x_0)\,n_i(x_0)>0.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая теорема, доказательство которой близко к доказательству соответствующей теоремы в [6].

Теорема 3. *Пусть* $u^\varepsilon(x)$ — *решение следующей задачи в* $D\setminus G_\delta(O)$:

$$(L+\varepsilon\tilde{L})\,u^\varepsilon(x)=0,\ u^\varepsilon(x)/_{\Gamma\cup\Gamma_\delta}=\varphi(x),$$

где Γ_δ — *граница* $G_\delta(O)$. *Если* $\Gamma\cup\Gamma_\delta$ — *равномерно устойчивое регулярное множество, то* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x)=u(x)$, *где* $u(x)$ *решение следующей задачи в* $D\setminus G_\delta(O)$:

$$Lu(x)=0,\ u(x)/_{\Gamma\cup\Gamma_\delta}=\varphi(x).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая.

Теорема 4. *Пусть в некоторой окрестности* G *точки* O *существует функция* $v(x)$ *такая, что: а)* $v(O)=0$; *б)* $v(x)>0$ *при* $x\neq O$ *и* $x\in G$; *в)* $Lv(x)<0$ *при* $x\neq O$ *и* $x\in G$. *Обозначим* $u^\varepsilon(x)$ *решение в* D *задачи*

$$(L+\varepsilon\tilde{L})u^\varepsilon(x)=0,\ u^\varepsilon(x)|_\Gamma=\varphi(x). \tag{13}$$

Предположим, что для оператора L *выполнено условие* (3) *и что хотя бы один из коэффициентов эллиптического, быть может, вырождающегося оператора* $\tilde{L}$ *не равен нулю в точке* O. *Тогда, если* Γ *равномерно устойчиво регулярное множество, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x)=u^0(x)+[1-v(x)]\,w(O),$$

где $w(x)$ *есть решение следующей задачи в* D:

$$\frac{1}{v(x)}Lv(x)\,w(x)=0\quad w(x)|_\Gamma=\varphi(x), \tag{14}$$

а $v(x)$ *и* $u^0(x)$ *есть решение задачи* (7) *и* (7′) *соответственно.*

Доказательство. Используя вероятностные представления соответствующих задач, получим следующие оценки. Пусть γ_+ — граница области $G_{2\delta}(O)=\{x;\ |x|<2\delta\}$, γ_- — граница области $G_\delta(O)$. В силу леммы 1 по $\alpha>0$ можно выбрать такое $\delta_1>0$, что при $x,\ y\in\gamma_+$

$$\left|\frac{M_x\varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D}\in\Gamma\}}-\frac{M_y\varphi(x_{\tau_D})}{P_y\{x_{\tau_D}\in\Gamma\}}\right|<\frac{\alpha}{4}, \tag{15}$$

где τ_D — момент первого попадания на Γ или в точку O.

Так как точка недостижима для траекторий условного процесса, то решение задачи (14) можно построить как предел решений следующей задачи в $D_\delta=D\setminus G_\delta(O)$:

$$\frac{1}{v(x)}Lv(x)\,w^\delta(x)=0,\ w^\delta(x)|_\Gamma=\varphi(x),\ w^\delta(x)|_{\gamma_-}=0.$$

Поэтому можно выбрать такое $\delta_2>0$, что при $\delta<\delta_2$ и $x\in\gamma_+$

$$\left|\frac{M_x \varphi(x_{\tau_{D_\delta}})}{P_x\{x_{\tau_{D_\delta}} \in \Gamma\}} - \frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\right| < \frac{\alpha}{4}, \tag{16}$$

где $\tau_{D_\delta} = \inf\{t\colon x_t \overline{\in} D_\delta\}$.

Положим $\tau^\varepsilon_{D_\delta} = \inf\{t : x^\varepsilon_t \overline{\in} D_\delta\}$. Используя теорему 3, легко показать, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$, $x \in \gamma_+$

$$\left|\frac{M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}})}{P_x\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}} - \frac{M_x \varphi(x_{\tau_{D_\delta}})}{P_x\{x_{\tau_{D_\delta}} \in \Gamma\}}\right| < \frac{\alpha}{4}. \tag{17}$$

Собирая вместе (15), (16), (17) получим, что при $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $x, y \in \gamma_+$

$$\left|\frac{M_y \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}})}{P_y\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}} - \frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}\right| < \alpha. \tag{18}$$

Определим последовательность марковских моментов τ^k_+ и τ^k_- следующими равенствами: $\tau^0_+ = \inf\{t : x^\varepsilon_t \in \gamma_+\}$,

$$\tau^k_+ = \inf\{t > \tau^k_-,\ x^\varepsilon_t \in \gamma_+\},\quad \tau^k_- = \inf\{t > \tau^{k-1}_+, x^\varepsilon_t \in \gamma_-\}.$$

Положим $y^\varepsilon_n = x^\varepsilon_{\tau^n_+}$, $\nu = \sup\{n,\ \tau^n_+ < \tau^\varepsilon_D\}$. Так как хотя бы один из коэффициентов оператора $\bar{L}$ отличен от нуля в точке O, то решение задачи (13) существует и единственно. Используя вероятностное представление функции $u^\varepsilon(x)$, можно записать

$$u^\varepsilon(x) = M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_D}) = M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} M_x \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^0_+\}} M_{y_1} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^1_+\}} \cdots M_{y_n} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^n_+\}} M_{y_{n+1}} \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}),\ y_i \in \gamma_+.$$

Отсюда и из (18) при $z \in \gamma_+$ имеем

$$u^\varepsilon(x) = M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) + \frac{M_z \varphi(x_{\tau_D})}{P_z\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}} (1 + O_{\varepsilon,\delta}(1)) \times$$

$$\times \left(\sum_{n=0}^{\infty} M_x \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^0_+\}} M_{y_1} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^1_+\}} \cdots M_{y_n} \chi_{\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^n_+\}} P_{y_{n+1}}\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}\right) =$$

$$= M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) + \frac{M_z \varphi(x_{\tau_D})}{P_z\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}} (1 + O_{\varepsilon,\delta}(1)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_x\{\nu = n,\ \tau^\varepsilon_{D_\delta} > \tau^n_+\}\right) =$$

$$= M_x \varphi(x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}}) + \frac{M_z \varphi(x_{\tau_D})}{P_z\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}} (1 + O_{\varepsilon,\delta}(1)) (1 - P_x\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} < \tau^0_+\}),$$

где $O_{\varepsilon,\delta}(1)$—величина, стремящаяся к нулю при $\varepsilon, \delta \to 0$ равномерно по $x \in \gamma_+$. Так как $P_x\{\tau^\varepsilon_{D_\delta} < \tau^0_+\} = P_x\{x^\varepsilon_{\tau^\varepsilon_{D_\delta}} \in \Gamma\}$, то

$$u^{\varepsilon}(x) = M_x \varphi(x_{\tau_{D_\delta}}^{\varepsilon}) + \frac{M_x \varphi(x_{\tau_D})}{P_x\{x_{\tau_D} \in \Gamma\}}(1 + O_{\varepsilon,\delta}(1))(1 - P_x\{x_{\tau_{D_\delta}}^{\varepsilon} \in \Gamma\}).$$

Переходя теперь к пределу сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\delta \to 0$ и применяя теорему 3, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(x) = u^0(x) + w(O)(1 - v(x)).$$

Теорема доказана.

§ 5. Параболическая регуляризация и регуляризация с малым $c(x)$

Рассмотрим сначала параболическую регуляризацию. Для этого вместе с задачей (1) рассмотрим в цилиндре $\Pi = [0, \infty) \times D$ первую смешанную задачу для параболических уравнений

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Lu(t, x); \; u(0, x) = f(x), \; u(t, x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{19}$$

где $\varphi(x)$—граничная функция, совпадающая с граничной функцией задачи (1), $f(x)$—непрерывная функция.

Теорема 5. *Пусть* $u(t, x)$ — *решение задачи* (19). *Тогда, если решение* $x_t \equiv 0$ *уравнения* (2) *асимптотически устойчиво по вероятности и выполнено условие* (3), *то* $\lim\limits_{t \to \infty} u(t, x) = u(x)$, *где* $u(x)$ *есть решение следующей задачи в* D:

$$Lu(x) = 0, \; u(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \; \lim_{x \to 0} u(x) = f(O). \tag{20}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что задача (20) имеет единственное решение. Используя вероятностное представление, решение задачи (19) можно записать в виде

$$u(t, x) = M_x f(x_t) \chi_{\tau_D > t} + M_x \varphi(x_{\tau_D}) \chi_{\tau_D < t}, \tag{21}$$

где $\tau_D = \inf\{t: x_t \in D\}$. Положим $\tilde{\varphi}(\omega)$ равным $\varphi(x_{\tau_D})$, если траектория процесса X выходит на Γ и $f(O)$—если траектория попадает в точку O. Таким образом, $\tilde{\varphi}(\omega)$ определена для всех $\omega \in \Omega$ (Ω — выборочное пространство). Очевидно, что $u(x) = M_x \tilde{\varphi}(\omega)$ есть решение задачи (20). Из того, что кроме точки O, траектория процесса X, выходящая из любой точки $x \in D$, других предельных точек не имеет, следует, что переходя к пределу при $t \to \infty$ в (21) получим $\lim\limits_{t \to \infty} u(t, x) = u(x)$. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению регуляризации с помощью малого коэффициента $c(x)$. Рассмотрим следующую задачу в D:

$$(L + \varepsilon c(x)) u^{\varepsilon}(x) = 0, \; u^{\varepsilon}(x)|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{22}$$

где $c(x) < -c_0 < 0$ —непрерывная функция.

Теорема 6. *Пусть решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности и выполнено условие (3). Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x) = u^0(x)$, где $u^0(x)$ — решение задачи (7′).*

Доказательство. Определим функцию $\bar{\varphi}(x)$ следующим образом: $\bar{\varphi}(O) = 0$, $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in \Gamma$. Тогда, используя вероятностное представление, решения задач (22) и (7′) можно записать в виде

$$u^0(x) = M_x \bar{\varphi}(x_\tau), \quad u^\varepsilon(x) = M_x e^{\varepsilon \int\limits_0^\tau c(x_s)\, ds} \bar{\varphi}(x_\tau),$$

где $\tau = \inf\{t: x_t \in D \setminus O\}$. Единственной предельной точкой для траекторий процесса X, выходящих из $x \in D$, при $t \to \infty$ может быть точка O. Поэтому, если процесс X выходит на Γ, то τ конечно и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} M_x e^{\varepsilon \int\limits_0^\tau c(x_s)\, ds} \varphi(x_\tau) =$$

$$= M_x \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon \int\limits_0^\tau c(x_s)\, ds} \varphi(x_\tau) = M_x \varphi(x_\tau).$$

Предположим теперь, что X попадает в точку O. Так как решение $x_t \equiv 0$ уравнения (2) асимптотически устойчиво по вероятности, то существует такое $\delta_1 > 0$, что при $|x| < \delta_1$ $P_x\left\{\tau > \frac{1}{\varepsilon^2}\right\} > 1 - \varepsilon$. Поэтому при $|x| < \delta_1$

$$|u^\varepsilon(x)| < \max_\Gamma |\varphi(x)|\, e^{-\frac{1}{\varepsilon} c(\theta)},$$

где $|\theta| < \delta_1$. Таким образом, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\to 0}} u^\varepsilon(x) = 0$. Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12.X.1972

Վ. Վ. ՍԱՐԱՖՅԱՆ. Առանձին կետերում վերասերված հավասարումների եզրային խնդիրների կանոնավորման մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք $D \in R^n$ տիրույթում տրված է

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Էլիպտիկ օպերատորը, որի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի $O \in D$ կետում։ Հոդվածում ուսումնասիրվում են առաջին եզրային խնդրի տարբեր կանոնավորումները։

V. V. SARAFIAN. *On regularization boundary-value problems for equations degenarating in some points* (summary)

This paper studies some regularizations of the boundary-value problem for the equation

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}=0,$$

when all the coefficients of the operator L vanish at O.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Б. Дынкин.* Марковские процессы, Физматгиз, 1963.
2. *Р. З. Хасьминский.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. „Наука", 1969.
3. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин.* О малых случайных возмущениях динамических систем, УМН, 25, № 1 (151), 1970, 3—55.
4. *В. В. Сарафян.* Диффузионные процессы и дифференциальные уравнения, вырождающиеся в отдельных точках, Теория вероятн. и ее примен., 17, № 4, 1972.
5. *J. Doob.* Conditional Brownian motion and boundary limits of harmonic functions Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, 431—458.
6. *М. И. Фрейдлин.* Диссертация, МГУ, 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

ОБ ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Операторы вида

$$(H\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_{-\infty}^{\infty} l(t, \tau, t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

рассматриваются в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в случае, когда функция $l(t, \tau, \xi)$ вырождена по ξ:

$$l(t, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t, \tau)\, h_k(\xi). \tag{2}$$

В этом случае нетеровость оператора H устанавливается без требования гладкости $l(t, \tau, \xi)$ по t, τ, в предположении, что $a_k(t, \tau)$ — существенно ограниченные измеримые функции, имеющие в довольно слабом смысле значения $a_k(+\infty, +\infty)$, $a_k(-\infty, -\infty)$ (определения см. в § 1), а $h_k(\xi) \in L_1(-\infty, \infty)$, $k = 1, \cdots, n$.

Для оператора H вида (1)—(2) получены необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен индекс. Эти условия и индекс инвариантны относительно изменений функций $a_k(t, \tau)$, сохраняющих значения $a_k(+\infty, +\infty)$, $a_k(-\infty, -\infty)$. Основной для оператора H является теорема 1 § 2. Аналогичный результат (теорема 1 § 2) имеет место для дискретного аналога оператора (1)—(2).

Полученные для оператора H результаты применяются в § 3 к краевой задаче сопряжения аналитических функций, возмущенной интегральными слагаемыми типа свертки, и в § 4 к одному классу интегральных операторов с ядром типа однородной функции. Основные результаты этих параграфов содержатся в теоремах §§ 3 и 4.

Отметим, что операторы вида (1)—(2) были рассмотрены Л. С. Раковщиком [1] в том случае, когда $a_k(t, \tau) = a_k(t)$. Результаты работы [1] были дополнены авторами в [2]—[3]. Краткое сообщение о результатах, излагаемых в настоящей статье, содержится в заметке [4]. По сравнению с [4] здесь для функций $a_k(t, \tau)$ допускается более широкий класс функций, и, кроме того, показано, что условия нормальной разрешимости задачи § 3, полученные в [4] как достаточные, являются и необходимыми.

Заметим, что список литературы носит рабочий характер: он содержит лишь статьи, непосредственно используемые в работе.

§ 1. Пространства $M^{\sup}(R_2)$, $M^{\text{mes}}(R_2)$

Пусть R_2 — евклидова плоскость и $M(R_2)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на R_2 функций. Введем классы $M^{\sup}(R_2)$, $M^{\text{mes}}(R_2)$, допускаемые для функций $a_i(t, \tau)$ в (1)—(2).

Определение 1. Будем говорить, что $a(t, \tau) \in M^{\sup}(R_2)$, если $a(t, \tau) \in M(R_2)$ и существуют значения $a(+\infty, +\infty), a(-\infty, -\infty)$, достигаемые в следующем смысле:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{t>m\\ \tau>m}} |a(t, \tau) - a(\infty, \infty)| = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{t<-m\\ \tau<-m}} |a(t, \tau) - a(-\infty, -\infty)| = 0.$$

Очевидно, эти равенства определяют значения $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$ единственным образом.

Заметим, что класс $M^{\sup}(R_2)$ шире класса $M^{\sup}(\tilde{R}_2)$, введенного в [4]. Так, функция $a(t, \tau) = \sin(t+\tau)$ при $0<t<1$, $\tau>0$ или $0<\tau<1$, $t>1$ и $a(t, \tau)=0$ для остальных (t, τ), принадлежит $M^{\sup}(R_2)$, причем $a(+\infty, +\infty) = a(-\infty, -\infty) = 0$, однако $a(t, \tau) \bar{\in} M^{\sup}(\bar{R}_2)$.

Определение 2. Будем говорить, что $a(t, \tau) \in M^{\text{mes}}(R_2)$, если $a(t, \tau) \in M(R_2)$ и существуют значения $a(+\infty, +\infty)$, $a(-\infty, -\infty)$, достигаемые в следующем смысле: либо

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{\tau: \operatorname*{ess\,sup}_{t>m} |a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)| > \varepsilon, \tau > m\} = 0, \tag{4}$$

либо

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{t: \operatorname*{ess\,sup}_{\tau>m} |a(t, \tau) - a(+\infty, +\infty)| > \varepsilon, t > m\} = 0 \tag{4'}$$

и аналогично для $a(-\infty, -\infty)$.

Определение 3. Будем говорить, что $a(t, \tau) \in M_0^{\sup}(R_2)$ или $M_0^{\text{mes}}(R_2)$, если $a(t, \tau) \in M^{\sup}(R_2)$ или $M^{\text{mes}}(R_2)$ соответственно и $a(+\infty, +\infty) = a(-\infty, -\infty) = 0$.

Очевидно $M^{\sup}(R_2) \subset M^{\text{mes}}(R_2)$. Мы однако будем использовать оба класса. Это связано с тем, что для функций $a(t, \tau)$ из класса $M^{\sup}(R_2)$ нетеровость оператора (1)—(2) можно получить во всех пространствах $L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а для функций $a(t, \tau)$ из $M^{\text{mes}}(R_2)$ — лишь в $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$. В статье [3] указан контрпример, когда для $a(t, \tau) = a(t) \in M_0^{\text{mes}}(R_2)$ нарушается в пространстве $M = L_\infty$ основная лемма о полной непрерывности операторов свертки (см. лемму 1 настоящей статьи).

Определение класса $M^{\text{mes}}(R_2)$ корректно в следующих двух отношениях:

а) равенство (4) (равно как и (4')) определяет значение $a(+\infty, +\infty)$ единственным образом;

б) если функция $a(t, \tau) \in M^{mes}(R_2)$ имеет значение $a(+\infty, +\infty)$ и в смысле (4), и в смысле (4′) одновременно, то оно одно и то же*.

Доказательство а) нетрудно получить, применяя неравенство

$$\operatorname{mes}\{t\colon t \in E, |a(t)+b(t)| > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\left\{t\colon t \in E, |a(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \operatorname{mes}\left\{t\colon t \in E, |b(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \tag{5}$$

справедливое для любого измеримого множества E и функций $a(t)$, $b(t)$, измеримых на E.

б) Пусть от противного $\lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} Y_{m,\varepsilon} = \lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{mes} Y'_{m,\varepsilon} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, где

$$Y_{m,\varepsilon} = \{\tau\colon \tau > m, \operatorname*{ess\,sup}_{t>m} |a(t,\tau) - a_1(+\infty, +\infty)| > \varepsilon\},$$

$$Y'_{m,\varepsilon} = \{t\colon t > m, \operatorname*{ess\,sup}_{\tau>m} |a(t,\tau) - a_2(+\infty, +\infty)| > \varepsilon\}$$

и $a_1(+\infty, +\infty) \neq a_2(+\infty, +\infty)$. Пусть $CY'_{m,\varepsilon} = \{t\colon t > m,$ $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tau>m} |a(t,\tau) - a_2(+\infty, +\infty)| \leqslant \varepsilon\}$. Очевидно

$$\operatorname{mes} Y_{m,\varepsilon} \geqslant \operatorname{mes}\{\tau\colon \tau > m, \operatorname*{ess\,sup}_{t \in CY'_{m,\varepsilon}} |a(t,\tau) - a_1(+\infty, +\infty)| > \varepsilon\}. \tag{6}$$

С другой стороны

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in CY'_{m,\varepsilon}} |a(t,\tau) - a_1(+\infty, +\infty)| \geqslant |a_1(+\infty, +\infty) - a_2(+\infty, +\infty)| - \varepsilon$$

для $\tau > m$, так что $\operatorname{mes} Y_{m,\varepsilon} \geqslant \infty$ при всех $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\Big| a_1(+\infty, +\infty) - a_2(+\infty, +\infty)\Big|$, что невозможно.

Отметим случай $a(t,\tau) = a(\tau)$. Тогда $a(t,\tau)$ заведомо не имеет значения $a(+\infty, +\infty)$ в смысле (4′), а (4) принимает вид

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes}\{\tau\colon |a(\tau) - a(+\infty)| > \varepsilon, \tau > m\} = 0, \tag{7}$$

что совпадает с определением класса $M^{mes}(R_1)$ в статьях [2] и [3], где R_1—прямая. Класс $M^{mes}(R_1)$ можно эквивалентно определить также следующим образом:

Определение 4. $a(\tau) \in M^{mes}(R_1)$, если $a(\tau) \in M(R_1)$ и существуют постоянные c_1, c_2 такие, что меры $\operatorname{mes}\{\tau\colon \tau > 0, |a(\tau) - c_1| > \varepsilon\}$, $\operatorname{mes}\{\tau\colon \tau < 0, |a(\tau) - c_2| > \varepsilon\}$ конечны при любом $\varepsilon > 0$.

---

* Ясно, что существуют функции $a(t,\tau) \in M^{mes}(R_2)$, для которых значение $a(+\infty, +\infty)$ достигается только одним из способов (4)—(4′), например $a(t,\tau) = \dfrac{\sin\tau}{1+|t|}$.

Доказательство эквивалентности становится очевидным, если воспользоваться равенством:

$$\operatorname{mes}\{\tau:\ \tau>0,\ |a(\tau)-c_1|>\varepsilon\}=\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{mes}\{\tau:\ k<\tau<k+1,$$

$$|a(\tau)-c_1|>\varepsilon\}+\operatorname{mes}\{\tau:\ \tau>m,\ |a(\tau)-c_1|>\varepsilon\}.$$

§ 2. О нетеровости в L_p оператора H

Рассмотрим оператор

$$(H\varphi)(t)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}a_k(t,\tau)\,h_k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{8}$$

в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$. Все последующие выкладки для простоты будем проводить, считая в (8) $n=1$ и обозначив

$$a_1(t,\tau)=a(t,\tau),\ \ h_1(t)=h(t)\in L_1.$$

Будем предполагать, что $a(t,\tau)\in M^{\text{раз}}(R_2)$, если допускаются пространства L_p, $1<p<\infty$ и $a(t,\tau)\in M^{\sup}(R_2)$, если рассматриваются все пространства $L_p, 1\leqslant p\leqslant\infty$. Оператор H в таком случае представим в виде суммы парного оператора и вполне непрерывного оператора:

$$H\varphi=H_0\varphi+T_1\varphi+T_2\varphi. \tag{9}$$

Парный оператор H_0 имеет вид

$$(H_0\varphi)(t)=\begin{cases}\varphi(t)+a(\infty,\infty)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, & t>0\\[2ex] \varphi(t)+a(-\infty,-\infty)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, & t<0\end{cases} \tag{10}$$

и

$$(T_1\varphi)(t)=\theta(t)\int_{-\infty}^{\infty}[a(t,\tau)-a(+\infty,+\infty)]\,\theta(\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\theta(-t)\int_{-\infty}^{\infty}[a(t,\tau)-a(-\infty,-\infty)]\,\theta(-\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$(T_2\varphi)(t)=\theta(t)\int_{-\infty}^{\infty}[a(t,\tau)-a(+\infty,+\infty)]\,\theta(-\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\theta(-t)\int_{-\infty}^{\infty}[a(t,\tau)-a(-\infty,-\infty)]\,\theta(\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где $\theta(t)=\frac{1}{2}(1+\operatorname{sign} t)$. Полная непрерывность оператора T_2 в L_p следует из известного (см. [5]) факта о полной непрерывности в L_p оператора вида $\theta(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,\theta(-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ (см. по этому поводу [16], стр. 88—92). Полная непрерывность оператора T_1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Оператор*

$$(T\varphi)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(t,\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

вполне непрерывен в $L_p(-\infty,\infty)$ *при* $1<p<\infty$, *если* $a(t,\tau)\in M_0^{\mathrm{mes}}(R_2)$ *и при всех* $1\leqslant p\leqslant\infty$, *если* $a(t,\tau)\in M_0^{\sup}(R_2)$.

Доказательство. Имеем

$$(T\varphi)(t)=(T_m\varphi)(t)+\theta(|t|-m)\int\limits_{|\tau|>m} a(t,\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где

$$(T_m\varphi)(t)=\int\limits_{|\tau|<m} a(t,\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+\theta(m-|t|)\int\limits_{|\tau|>m} a(t,\tau)\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

—вполне непрерывные в L_p операторы (см. [6], стр. 30. В [6] $a(t,\tau)\equiv 1$, что несущественно, как и при рассмотрении полной непрерывности оператора T_2). Остается показать, что $T_m\to T$. Это очевидно при $a(t,\tau)\in M_0^{\sup}(R_2)$:

$$\|T-T_m\|_{L_p}\leqslant\|h\|_{L_1}\operatorname*{ess\,sup}_{|\tau|>m,\ |t|>m}|a(t,\tau)|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Пусть $a(t,\tau)\in M_0^{\mathrm{mes}}(R_2)$. Имеем

$$\|(T-T_m)\,\varphi\|_{L_p}\leqslant c\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\int\limits_{|\tau|>m}|a(t,\tau)\,h(t-\tau)|\,|\varphi(\tau)|^p d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $a(t,\tau)$ достигает свои значения $a(+\infty,+\infty)=a(-\infty,-\infty)=0$ в смысле (4′) (если одно из этих значений достигается в смысле (4), то доказательство на соответствующей полуоси получается переходом к сопряженному оператору).

Обозначим

$$X_{m,\varepsilon}=\{t:\ \operatorname*{ess\,sup}_{|\tau|>m}|a(t,\tau)|>\varepsilon\},$$

так что $\lim\limits_{m\to\infty}\operatorname{mes}X_{m,\varepsilon}=0$ для всякого $\varepsilon>0$.

Имеем

$$\|(T-T_m)\varphi\|_{L_p} < c_1\cdot\varepsilon\|\varphi\|_{L_p} + c_2\|\varphi\|_{L_p}\sup_{|\tau|>m}\left(\int\limits_{X_{m,\varepsilon}}|h(t-\tau)|\,dt\right)^{1/p} =$$

$$=\left\{c_1\varepsilon + c_2\sup_{|\tau|>m}\left(\int\limits_{\bar{X}_{m,\varepsilon}}|h(t)|\,dt\right)^{1/p}\right\}\|\varphi\|_{L_p},$$

где c_1, c_2 — постоянные и $\operatorname{mes}\bar{X}_{m,\varepsilon} = \operatorname{mes} X_{m,\varepsilon} \to 0$ при $m\to\infty$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если $a(t)\in M^{\mathrm{mes}}(R_1)$, то оператор*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[a(t)-a(\tau)]\,h(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

вполне непрерывен в $L_p(-\infty,\infty)$, $1<p<\infty$, $h(t)\in L_1$.

Следствие 2. *Оператор H вида* (8) *является оператором локального типа (см.* [6]) *в $L_p(-\infty,\infty)$ при $1<p<\infty$, если $a_k(t,\tau)\in M^{\mathrm{mes}}(R_2)$ и при $1\leqslant p\leqslant\infty$, если $a_k(t,\tau)\in M^{\sup}(R_2)$.*

Из (9) и из полной непрерывности операторов T_1, T_2 вытекает следующая

Теорема 1. *Пусть $h_k(t)\in L_1(-\infty,\infty)$ и $a_k(t,\tau)\in M^{\mathrm{mes}}(R_2)$ при $1<p<\infty$ и $a_k(t,\tau)\in M^{\sup}(R_2)$ при $1\leqslant p\leqslant\infty$. Для того чтобы оператор H вида* (8) *был оператором Нетера в $L_p(-\infty,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma(\lambda)^+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}a_k(+\infty,+\infty)\hat{h}_k(\lambda)\neq 0,\quad -\infty<\lambda<\infty,$$

$$\sigma(\lambda)^- \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}a_k(-\infty,-\infty)\hat{h}_k(\lambda)\neq 0,\quad -\infty<\lambda<\infty,$$

где $\hat{h}_k(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}h(t)\,dt$. Индекс оператора H вычисляется по формуле

$$\varkappa_{L_p}(H) = -\frac{1}{2\pi}\Delta\arg\left[\frac{\sigma(\lambda)^+}{\sigma(\lambda)^-}\right]\Bigg|_{-\infty}^{\infty}.$$

Имеет место также дискретный аналог теоремы 1 (ср. [7]). Пусть

$$(H\varphi)_r = a_r\varphi_r + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{rj}^{k}\,h_{r-j}^{k}\varphi_j\right),\quad r=0,\ \pm1,\cdots,$$

где

$$\{\varphi_r\}_{r=-\infty}^{\infty}\in l_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\quad \{h_r^k\}_{r=-\infty}^{\infty}\in l_1,\quad k=1,\cdots,n,$$

$\{a_r\}_{r=-\infty}^{\infty}\in c$ и двойные последовательности $\{a_{rj}^k\}_{r,j=-\infty,-\infty}^{+\infty,+\infty}$, $k=1,\cdots,n$, ограничены и имеют при $(r, j)\to(+\infty, +\infty)$ и $(r, j)\to(-\infty, -\infty)$ один из повторных (равномерных в каждом случае) пределов.

Теорема 1'. *Для того чтобы оператор $\{(H\varphi)_r\}_{r=-\infty}^{\infty}$ был оператором Нетера в l_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma(t)^{\pm}\overset{\mathrm{def}}{=}a_{\pm\infty}+\sum_{k=1}^{n}a_{\pm\infty,\pm\infty}h^k(t)\neq 0,\ |t|=1,$$

где $h^k(t)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}h_j^k t^j$. *При этом*

$$\varkappa_{l_p}(H)=-\frac{1}{2\pi}\Delta\left[\arg\frac{\sigma(t)^+}{\sigma(t)^-}\right]_{|t|=1}. \tag{11}$$

Заметим в заключение этого параграфа, что аналогичные результаты имеют место и для многомерных операторов типа (8) в областях с конической структурой на бесконечности. В настоящей статье мы, однако, на этом не останавливаемся.

§ 3. Об индексе краевой задачи Римана с интегральными слагаемыми

Применим результаты § 2 к вычислению индекса следующей краевой задачи:

$$(A\varphi)(t)\equiv\varphi^+(t)+\int_{-\infty}^{\infty}a(t,\tau)\,h_1(t-\tau)\,\varphi^+(\tau)\,d\tau-$$

$$-\left[G(t)\,\varphi^-(t)+\int_{-\infty}^{\infty}b(t,\tau)\,h_2(t-\tau)\,\varphi^-(\tau)\,d\tau\right], \tag{12}$$

где $\varphi^{\pm}(t)\in L_p^{\pm}(-\infty,+\infty)$, $p>1$; $L_p^{\pm}=(I\pm S)\,L_p$, S — сингулярный оператор с ядром Коши. Предполагается, что $h_1(t)$, $h_2(t)\in L_1(-\infty,\infty)$ и что

$$a(t,\tau),\ b(t,\tau)\in M^{\mathrm{mes}}(R_2),$$
$$a(+\infty,+\infty)=a(-\infty,-\infty),\ b(+\infty,+\infty)=b(-\infty,-\infty), \tag{13}$$
$$G(t)\in M^{\mathrm{mes}}(R_1)\cap A_p,\ G(+\infty)=G(-\infty).$$

Здесь $M^{\mathrm{mes}}(R_2)$ — класс, введенный в § 1 определением 2. Определение класса A_p см. в [8]. В частности можно считать $G(t)$ непрерывной на сомкнутой оси функцией, $G(t)\neq 0$.

Задачи вида (12) рассматривались ([9], § 35) в случае конечного контура и фредгольмовских ядер в гельдеровских классах. Естественно, что индекс таких задач определялся коэффициентом $G(t)$ краевой задачи, Мы покажем, что даже добавление нефредгольмовских интегральных слагаемых с разностным ядром, таких как в (12), не меняет индекса краевой задачи. Этот индекс, по-прежнему, равен индексу (Коши) коэффициента $G(t)$. Однако условие нормальной разрешимости зависит от интегральных слагаемых. Будет также рассмотрен случай $a(t, \tau) = \text{const}$, $b(t, \tau) = \lambda G(t)$, когда уравнение (12) решается в замкнутой форме.

В силу результатов § 2 о полной непрерывности операторов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} [a(t, \tau) - a(\infty, \infty)]\, h(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau$ достаточно вместо индекса оператора (12) вычислить индекс оператора $(A_1 \varphi)(t) = \varphi^+(t) - G(t)\varphi^-(t) + a(\infty, \infty) \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)\, \varphi^+(\tau)\, d\tau - b(\infty, \infty) \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau)\varphi^-(\tau)\, d\tau$.

Из условия $G(t) \in A_p$ следует, что $G(\infty) \neq 0$, так что оператор A_1 вполне непрерывным слагаемым $[G(t) - G(\infty)] \dfrac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} (h_2 * \varphi^-)$ отличается от оператора

$$(A_2\varphi)(t) = \varphi^+(t) + a(\infty, \infty) \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)\, \varphi^+(\tau)\, d\tau -$$

$$- G(t) \left[\varphi^-(t) + \frac{b(\infty, \infty)}{G(\infty)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau)\, \varphi^-(\tau)\, d\tau. \right. \tag{14}$$

Введем обозначения $a(\infty, \infty)\, h_1(t) = h(t)$, $\dfrac{b(\infty)}{G(\infty)} h_2(t) = k(t)$, $H\varphi = h * \varphi$, $K\varphi = k * \varphi$. Заметим, что для $h(t), k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ оператор свертки коммутирует с сингулярным оператором:

$$HS\varphi = SH\varphi,\ KS\varphi = SK\varphi,\ \varphi \in L_p(-\infty, \infty),\ 1 < p < \infty,$$

и, следовательно

$$H, K \in [L_p^{\pm} \to L_p^{\pm}].$$

Введем оператор

$$B = (I + H) P_+ + (I + K) P_-$$

и сингулярный оператор

$$N = P_+ - GP_-,$$

где G — оператор умножения на функцию $G(t)$, $P_{\pm} = \dfrac{1}{2}(I \pm S)$. Нетрудно видеть, что

$$A_2 = NB = BN + T, \tag{15}$$

где T — вполне непрерывный оператор (в силу леммы 1). Поэтому оператор A_2 нетеров тогда и только тогда, когда нетеровы N и B. Так как $G(t) \in A_p$, то оператор N нетеров в L_p и его индекс равен индексу (в смысле [8]) функции $G(t)$:

$$\varkappa = \varkappa_{L_p}(N) = \operatorname{ind} G(t). \tag{16}$$

Что же касается оператора B, то его нетеровость совпадает с обратимостью. Именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Оператор B нетеров в $L_p(-\infty, \infty)$ тогда и только тогда, когда он обратим в $L_p(-\infty, \infty)$. Необходимое и достаточное условие обратимости имеет вид*

$$1 + \hat{h}(x) \neq 0, \ x > 0,$$

$$1 + \hat{k}(x) \neq 0, \ x \leqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что при выполнении условий (17) оператор B обратим. Применим следующую очевидную лемму

Лемма 2. *Пусть E—банахово пространство, расподающееся на прямую сумму $E_+ \oplus E_-$ двух своих подпространств с проекторами $P_\pm$ соответственно. Если M_1, M_2—операторы, коммутирующие с проекторами P_+, P_- соответственно, то оператор $B = M_1P_+ + M_2P_-$ обратим в E тогда и только тогда, когда операторы M_1 и M_2 обратимы в E_+ и E_- соответственно.*

В силу этой леммы достаточно показать, что уравнение вида

$$(I+H)\varphi^+ \equiv \varphi^+(t) + (h * \varphi^+)(t) = f^+(t),$$

где $h \in L_1$ разрешимо в L_p^+, когда $1 + \hat{h}(x) \neq 0$, $x \geqslant 0$. Это очевидно при $p=2$. При $p \neq 2$ построим обратный оператор, ограниченный в L_p^+, $1 < p < \infty$. Заметим для этого, что всякую функцию $\hat{h}(x) \in R_0$*, удовлетворяющую условию $1 + \hat{h}(x) \neq 0$, $0 \leqslant x \leqslant \infty$, можно продолжить для $x < 0$:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \hat{h}(x), & x > 0 \\ \Psi(x), & x < 0 \end{cases}$$

так, чтобы $\tilde{h}(x) \in R_0$ и $1 + \tilde{h}(x) \neq 0$ для всех x, $-\infty < x < \infty$. Тогда в силу теоремы Винера-Леви $[1 + \tilde{h}(x)]^{-1}\hat{h}(x) \in R_0$ и обратный оператор имеет вид

$$(I+H)^{-1}f^+ = f^+(t) - (m * f^+)(t),$$

где $m(t) \in L_1$ и $\hat{m}(x) = [1 + \tilde{h}(x)]^{-1}\hat{h}(x)$.

* R_0 — кольцо преобразований Фурье функций из $L_1(-\infty, \infty)$.

Таким образом, из условий (17) следует обратимость оператора B и тем более его нетеровость.

Остается показать, что из нетеровости оператора B вытекают условия (17). Этим доказательство теоремы будет завершено.

Пусть оператор B нетеров в L_p. Так как B коммутирует с P_+, то нетеров в L_p^+ оператор $P_+BP_+ = P_+(I+H)P_+$. Покажем, что нетеровость последнего влечет первое из условий (17): $1+\hat{h}(x) \neq 0$, $x>0$. Доказательство этого проведем по схеме, по которой проводится доказательство необходимости условий нетеровости для различных операторов в [10]. Предположим от противного, что $1+\hat{h}(x_0)=0$, $x_0 \geqslant 0$ и оператор $P_+(I+H)P_+$ нетеров в L_p^+.

Обозначим $c_m = 1 + \int\limits_{|t|>m} e^{ix_0t} h(t)\,dt$, $\hat{h}_m(x) = \int\limits_{-m}^{m} h(t)e^{ixt}dt$. Так как $P_+(c_mI+H_m)P_+ \to P_+(I+H)P_+$ при $m \to \infty$, где $(H_m\varphi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_m(x-t)\varphi(t)\,dt$, то при достаточно большом m оператор $P_+(c_mI+H_m)P_+$ будет нетеров, причем по построению $c_m + \hat{h}_m(x_0) = 0$. Функция $c_m + \hat{h}_m(x)$ уже допускает выделение нуля (см. 11], лемма 4.1):

$$c_m + \hat{h}_m(x) = (x-x_0)\int\limits_{-m}^{m} g_m(t)\,e^{ixt}\,dt, \text{ где } g_m(t) \in L_1.$$

Но тогда

$$c_m + \hat{h}_m(x) = \frac{x-x_0}{x+i}(c_m + \hat{\psi}_m(x)), \tag{18}$$

где $\hat{\psi}(x) \in R_0$. Пусть H_{x_0} и $c_mI + \Psi_m$ — операторы свертки, отвечающие символам $\dfrac{x-x_0}{x+i}$ и $c_m + \hat{\psi}_m(x)$ соответственно:

$$H_{x_0}\varphi = \varphi(x) + i(x_0+i)\int\limits_{-\infty}^{x} e^{t-x}\varphi(t)\,dt,$$

$$(c_mI+\Psi_m)\varphi = c_m\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

В силу (18) имеем

$$P_+(c_mI+H_m)P_+ = (P_+H_{x_0}P_+)[P_+(c_mI+\Psi_m)P_+] = \\ = [P_+(c_mI+\Psi_m)P_+](P_+H_{x_0}P_+).$$

Отсюда вытекает, что оператор $P_+H_{x_0}P_+$ нетеров (теорема Аткинсона) в L_p^+. Покажем, что тогда и H_{x_0} нетеров в L_p.

Пусть вначале $x_0>0$. Тогда символ оператора H_{x_0} отличен от нуля при $x\leqslant 0$ и поэтому согласно уже доказанному оператор $P_-H_{x_0}P_-$ обратим (и тем более нетеров) в L_p^-. А из нетеровости операторов $P_+H_{x_0}P_+$, $P_-H_{x_0}P_-$ в L_p^+, L_p^- соответственно следует с учетом коммутации H_{x_0} с $P_\pm$ нетеровость H_{x_0} в L_p, что невозможно.

Остался случай $x_0=0$. Поступая как и раньше $\left(\text{выделяя } \dfrac{x}{x-i}\right.$ вместо $\left.\dfrac{x}{x+i}\right)$ получим, что нетеров как оператор $P_+H_0P_+$ в L_p^+, где

$(H_0\varphi)(x)=\varphi(x)-\int\limits_{-\infty}^{x}e^{t-x}\varphi(t)\,dt$, так и оператор $P_+H^0P_+$ в L_p^+, где

$(H^0\varphi)(x)=\varphi(x)-\int\limits_{x}^{\infty}e^{x-t}\varphi(t)\,dt$. А так как $P_-H_0P_-=QP_+H^0P_+Q$, где $Q\varphi=\varphi(-t)$, то оператор $P_-H_0P_-$ нетеров в L_p^-. Но тогда, как и выше, оператор H_0 нетеров в L_p, что невозможно.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 и из представления (15) вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть* $h_1(t)$, $h_2(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, $a(t,\tau)$, $b(t,\tau)$, $G(t)$ *удовлетворяют условиям* (13). *Для того чтобы задача* (12) *была нетерова в* L_p, $1<p<\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$1+a(\infty,\infty)\hat{h}_1(x)\neq 0,\ x\geqslant 0,$$

$$G(\infty)+b(\infty,\infty)\hat{h}_2(x)\neq 0,\ x\leqslant 0.$$

При выполнении этих условий

$$\varkappa_{L_p}(A)=\operatorname{ind}G(t).$$

Рассмотрим в заключение случай $a(t,\tau)=\text{const}$, $b(t,\tau)=\lambda G(t)$. Задача (12) принимает вид

$$(A\varphi)(t)\equiv\varphi^+(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\varphi^+(\tau)\,d\tau-$$

$$-G(t)\left[\varphi^-(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t-\tau)\varphi^-(\tau)\,d\tau\right]=f(t). \tag{19}$$

К оператору A применимо представление (15): $A=NB$, где

$$N=\frac{1}{2}(I+G)+\frac{1}{2}(I-G)S,\ B=(I+H)P_++(I+K)P_-.$$

Если выполнены условия $1+\hat{h}(x)\neq 0$, $x\geqslant 0$, $1+\hat{k}(x)\neq 0$, $x\leqslant 0$, то оператор B обратим: $B^{-1}=(I+H)^{-1}P_++(1+K)^{-1}P_-$, где $(I+H)^{-1}$,

$(I+K)^{-1}$ строятся как и при доказательстве теоремы 2. Следовательно, оператор A имеет d-характеристику вида $(\varkappa, 0)$ при $\varkappa \geqslant 0$ и $(0, |\varkappa|)$ при $\varkappa \leqslant 0$. Решения уравнения $A\varphi = f$ находятся в замкнутой форме: $\varphi = A^{-1} f = B^{-1} N^{-1} f$.

Обозначим еще $a_1(t) = \frac{1}{2}[1 + G(t)]$, $a_2(t) = \frac{1}{2}[1 - G(t)]$. Тогда задача (19) равносильна уравнению

$$a_1(t)\varphi(t) + \frac{a_2(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2}(H + GK)\varphi + \frac{1}{2}(H - GK)S\varphi = f.$$

В случае $G(t) = \text{const}$ и $H - GK = 0$ последнее уравнение было рассмотрено другим путем Г. И. Савельевым [12] в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

§ 4. Об одном обобщении интегральных уравнений с однородным ядром

Рассмотрим оператор

$$(K\psi)(x) \equiv \psi(x) + \int_0^a \gamma(x, y)\, k(x, y)\, \psi(y)\, dy = g(x), \quad 0 < x < a \ (< \infty), \tag{20}$$

где $k(x, y)$ — однородная функция произвольного порядка α: $k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} k(x, y)$, $-\infty < \alpha < \infty$. Функция $\gamma(x, y)$ будет принадлежать некоторому подклассу измеримых в основном квадрате функций, ограниченных всюду, кроме, быть может, начала координат.

Уравнение (20) было изучено Л. Г. Михайловым [13]—[14] в предположении, что $\alpha = -1$ и $\gamma(x, y)$ — непрерывная функция*. Заметим, что если $x^{1+\alpha}\gamma(x, y)$ — непрерывная функция, то утверждения этого параграфа можно получить с помощью результатов работы [14]. Мы, однако, будем пользоваться другими соображениями. Именно, мы приведем уравнение (20) к уравнению (1), изученному в § 2, что позволит рассматривать более широкий для $\gamma(x, y)$ класс функций.

Используем для этой цели известный [15] способ сведения уравнения с однородным ядром к уравнению типа свертки. В связи с этим будем считать, что для ядра $k(x, y)$ найдется число β такое, что выполняется одно из условий суммируемости:

$$k_\beta = \int_0^\infty |k(1, y)| y^{-\beta}\, dy < \infty, \tag{21}$$

---

* При этих предположениях в [13]—[14] рассмотрены также уравнения в случае $a < x, y < b$, $a < 0 < b$.

$$k_\beta' = \int_0^\infty |k(x, 1)|\, x^{\beta-1}\, dx < \infty \tag{21'}$$

(при $\alpha = -1$ условия (21)—(21′) совпадают). Соответствующее уравнение в свертках имеет вид

$$(H\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_0^\infty a(t, \tau)\, h(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t),\ t > 0,$$

где

$$x = ae^{-t},\ y = ae^{-\tau},$$

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}\psi(x),\ f(t) = e^{-\beta t} g(x), \tag{22}$$

и

$$h(t) = k(1, e^t)\, e^{(1-\beta)t},\ \|h\|_{L_1} = k_\beta,$$

$$a(t, \tau) = a^{1+\alpha}\, e^{-(1+\alpha)\tau}\gamma(ae^{-t},\ ae^{-\tau}) \tag{23}$$

в случае ядра $k(x, y)$, удовлетворяющего условию (21), и

$$h(t) = k(e^{-t}, 1),\ \|h\|_{L_\beta} = k_1'$$

в случае (21′). Замена (22) устанавливает изометрию между пространством $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и весовым пространством

$$L_p^\beta(0, a) = \{\psi(x):\ x^{\beta-1/p}\psi(x) \in L_p(0, a)\}.$$

(В частности при $\beta = \dfrac{1}{p}$ имеем изометрию между $L_p(0, \infty)$ и $L_p(0, a)$). Очевидно $\|\varphi\|_{L_p(0,\infty)} = \|\psi\|_{L_p^\beta(0, a)}$. Пусть U—оператор, осуществляющий изометрию $L_p^\beta(0, a)$ на $L_p(0, \infty)$. Тогда $K = U^{-1}HU$, $\|K\|_{L_p^\beta \to L_p^\beta} = \|H\|_{L_p \to L_p}$.

Обозначим через Q основной квадрат $Q = \{(x, y): 0 < x < a,\ 0 < y < a\}$.

Определение 4. Будем говорить, что $b(x) \in M^{\sup}(0, a)$, если $b(x)$ измерима, существенно ограничена на $[0, a]$ и существует предельное значение $b(0)$ в следующем смысле:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\frac{1}{m}} |b(x) - b(0)| = 0.$$

Определение 5. Будем говорить, что $\gamma(x, y) \in M^{\sup}(Q)$, если; 1) $\gamma(x, y)$ — измеримая, существенно ограниченная на Q функция: 2) $\gamma(x, y)$ имеет предельное значение $\gamma(0, 0)$, достигаемое в следующем смысле:

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{0<x<\frac{1}{m}\\ 0<y<\frac{1}{m}}} |\gamma(x, y) - \gamma(0, 0)| = 0.$$

Очевидно, класс $M^{\sup}(Q)$ содержит в себе класс непрерывных ограниченных в $\overline{Q}$ функций, имеющих в начале координат один из повторных (равномерных) пределов.

Применение теоремы 1 § 2 дает следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть $k(x, y)$—однородная функция, удовлетворяющая условию (21), и пусть $\gamma_1(x, y) = x^{1+\alpha}\gamma(x, y) \in M^{\sup}(Q)$. Для того чтобы оператор K был оператором Нетера в пространстве $L_p^{\beta}(0, a)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma(\lambda) = 1 + \gamma_1(0, 0)\,\mathfrak{M}(i\lambda - \beta + 1) \neq 0, \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty,$$

где $\mathfrak{M}(s) = \int\limits_0^{\infty} k(1, y)\, y^{s-1}\, dy$ — *преобразование Меллина функции* $k(1, y)$. *Индекс оператора K вычисляется по формуле*

$$\varkappa_{L_p^{\beta}}(K) = -\frac{1}{2\pi}\,\Delta\left[\arg\sigma(\lambda)\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Теорема 4 для определенности сформулирована для ядра $k(x, y)$, удовлетворяющего условию (21). Она справедлива и в случае (21′), если в ее формулировке заменить $\gamma_1(x, y)$ на

$$\gamma_2(x, y) = y^{1+\alpha}\gamma(x, y) \text{ и } \mathfrak{M}(i\lambda - \beta + 1) \text{ на } \mathfrak{M}_1(-i\lambda + \beta),$$

где $\mathfrak{M}_1(s) = \int\limits_0^{\infty} k(x, 1)\, x^{s-1}\, dx.$

Нетрудно видеть, что результаты § 4 переносятся на оператор K вида

$$(K\psi)(x) = \psi(x) + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{a}\gamma_j(x, y)\, k_j(x, y)\, \psi(y)\, dy,$$

где $k_j(x, y)$—однородные функции порядков α_j, удовлетворяющие условию суммируемости (21) для $1 \leqslant j \leqslant m$ и условию (21′) для $m+1 \leqslant j \leqslant n$, где $1 \leqslant m < n$. При этом от функций $\gamma_j(x, y)$ придется, очевидно, потребовать, чтобы

$$\gamma_j(x, y)\, x^{1+\alpha_j} \in M^{\sup}(Q), \quad j = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\gamma_j(x, y)\, y^{1+\alpha_j} \in M^{\sup}(Q), \quad j = m+1, \cdots, n.$$

Наконец, заметим, что аналогичным образом рассматривается случай, когда $a = \infty$. При этом поведение $\gamma(x, y)$ в точке (∞, ∞) следует задавать согласно определению 1 § 1.

Ростовский государственный
университет

Поступила 24.IX.1971

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Ինտեգրալ օպերատորների դասերի ինդեքսի մասին (*ամփոփում*)

Գտնված են $l(t, \tau, t-\tau) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(t, \tau)\, h_k(t-\tau)$ *տեսքի կորիզներով փաթեթի տիպի ընդհանրացված օպերատորների մի դասի նետերայնության անհրաժեշտ և բավարար*

պայմաններ և հաշված է նրանց ինդեքսը $a_k(t, \tau)$-ի՝ անվերջում վարքի վրա արված շատ թույլ ենթադրությունների դեպքում։ Այդ արդյունքները կիրառվում են անալիտիկ ֆունկցիաների լծորդման փաթեթի օպերատորներով գրգռված եզրային խնդրի, ինչպես համասեռ ֆունկցիայի տիպի կորիզով ինտեգրալ օպերատորների ուսումնասիրման համար։

N. K. KARAPETIANČ, S. G. SAMKO. *On the index of some classes of integral operators* (summary)

The necessary and sufficient conditions for a class of generalized convolution operators with the kernel $l(t, \tau, t-\tau) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t, \tau) h_k(t-\tau)$ to be noethorian are obtained under rather weak assumptions on the behaviour of $a_k(t, \tau)$ at infinity and the formula for the index is found. These results are applied to the investigation of the boundery value problem of conjugation analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. С. Раковщик*. К теории интегральных уравнений типа свертки, УМН, XVIII, вып. 4 (112), 1963, 171—178.
2. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*. Об одном классе интегральных уравнений типа свёртки и его приложении, ДАН СССР, 193, № 5, 1970, 981—984.
3. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки и его приложении, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 1971.
4. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*. Об индексе некоторых классов интегральных, операторов, ДАН СССР, 194, № 3, 504—507.
5. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Парное интегральное уравнение и его транспонирование, Журн. теоретич. и прикл. матем., № 1, 59—91, 1958, Львов.
6. *И. Б. Симоненко*. Операторы типа свертки в конусах, Мат. сб., 174 (116), № 2, 1967, 298—313.
7. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко*. О дискретных операторах Винера-Хопфа с осциллирующими коэффициентами, ДАН СССР.
8. *И. Б. Симоненко*. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее приложение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами, Изв. АН СССР, серия матем., 28, № 2, 1964, 277—366.
9. *Ф. Д. Гахов*. Краевые задачи, ФМ, М., 1963.
10. *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман*. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, изд. „Наука", М., 1971.
11. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 5 (83), 1958, 3—120.
12. *Г. И. Савельев*. Об одном классе линейных сингулярных интегральных уравнений, Тр. Новочеркасского политехн. ин-та, 109, 1960, 3—10.
13. *Л. Г. Михайлов*. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени—1, изд. АН Тадж.ССР, Душанбе, 1966.
14. *Л. Г. Михайлов*. Интегральные уравнения с локально-однородными ядрами степени—1. В сб. „Дифференц. и интегральн. уравнения с сингулярными коэффициентами", изд. АН Тадж.ССР, Душанбе, 1969, 54—72.
15. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
16. *М. А. Красносельский, П. П. Забрейко* и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., изд. „Наука", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

Р. В. АДИБЕКЯН

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РЯДА НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье рассматривается ряд Ньютона

$$f(z_1, z_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} P_m(z_1) Q_n(z_2). \tag{1}$$

Здесь

$$P_m(z_1)=\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right),\quad Q_n(z_2)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_2}{\lambda_k^{(2)}}\right),$$

$P_0(z_1)=1$, $Q_0(z_2)=1$, а $\{\lambda_k^{(1)}\}$, $\{\lambda_k^{(2)}\}$ —последовательности комплексных чисел.

Если функция $f(z_1, z_2)$ задана, то числа $C_{m,n}$ формально определяются с помощью значений $f(\lambda_p^{(1)}, \lambda_q^{(2)})(p=1, 2,\cdots, q=1, 2,\cdots)$.

При некоторых условиях, налагаемых на последовательности узлов $\{\lambda_k^{(1)}\}$, $\{\lambda_k^{(2)}\}$ в статье определяются область абсолютной сходимости ряда (1), а в более частном случае исследуется также область простой сходимости этого ряда. Все результаты легко распространить на случай функции любого конечного числа комплексных переменных. В случае функции одной переменной аналогичные задачи были рассмотрены Н. С. Насековской в статьях [1], [2].

1°. Будем предполагать, что последовательности $\{\lambda_k^{(1)}\}$ и $\{\lambda_k^{(2)}\}$ $(k=1, 2,\cdots)$ удовлетворяют, соответственно, следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_k^{(2)}|}=\infty,\ \lim_{k\to\infty}|\lambda_k^{(1)}|=\lim_{k\to\infty}|\lambda_k^{(2)}|=\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^{(1)}}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}}=A_1-iB_1\quad (A_1^2+B_1^2\neq 0), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k^{(2)}}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_k^{(2)}|}}=A_2-iB_2\quad (A_2^2+B_2^2\neq 0). \tag{4}$$

Оценим $|P_m(z_1)|$ при $m\to\infty$ и $|Q_n(z_2)|$ при $n\to\infty$. Пусть $|z_1|\leqslant r_1$, $z_1\neq\lambda_k^{(1)}$ $(k=1, 2,\cdots)$, а число N определяется так, что $|\lambda_k^{(1)}|>2r_1$ и $|\lambda_k^{(1)}|>\frac{2r_1^2}{\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$. При $k>N(\varepsilon, \varepsilon_1)$ имеем

$$\left|\ln\left(1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)+\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right|^2\left(1+\left|\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right|+\left|\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right|^2+\cdots\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2|\lambda_k^{(1)}|},$$

откуда

$$-\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)<\ln\left|1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\quad(r_k^{(1)}=|\lambda_k^{(1)}|),$$

то есть

$$\exp\left[-\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]<\left|1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right|\leqslant\exp\left[\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right].$$

Отсюда

$$\exp\left\{\sum_{k=N}^{m}\left[-\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]\right\}\leqslant\frac{|P_m(z_1)|}{|P_{N-1}(z_1)|}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{\sum_{k=N}^{m}\left[\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]\right\},$$

при $m>N$, или

$$\exp\left\{\sum_{k=N}^{m}\left[-\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]\right\}\leqslant\frac{|P_m(z_1)|}{|P_{N-1}(z_1)|}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{\sum_{k=N}^{m}\left[\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]\right\}.$$

Величины

$$|P_k(z_1)|\exp\left\{\sum_{l=1}^{k}\left[\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_l^{(1)}}\mp\frac{\varepsilon}{r_l^{(1)}}\right)\right]\right\}$$

при всех $k=1, 2,\cdots, N-1$ ограничены в круге $|z_1|<r_1$, $(z_1\neq\lambda_k^{(1)}$, $k=1, 2,\cdots)$ сверху и снизу положительными постоянными. Поэтому в любой замкнутой подобласти D_1 круга $|z_1|<r_1$, не содержащей точек $\lambda_k^{(1)}$ $(k=1, 2,\cdots)$, имеем

$$M_2\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]\right\}<|P_m(z_1)|\leqslant M_1\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\right]\right\},\tag{5}$$

для всех $m=1, 2,\cdots$ $(M_1>0$, $M_2>0$ и зависят от области D_1 и от $\varepsilon)$, или

$$M_2 \exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[-\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\operatorname{Re}\left(z_1\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\lambda_k^{(1)}}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}\right]\right\}\leqslant|P_m(z_1)|\leqslant$$

$$\leqslant M_1 \exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\varepsilon}{r_k^{(1)}}-\operatorname{Re}\left(z_1\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\lambda_k^{(1)}}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}\right]\right\}.$$

Из условия (3) теперь следует, что если $\alpha_m^{(1)}=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda_k^{(1)}|}$, то как бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такое N_1, что при $m\geqslant N_1(\varepsilon)$ в любой конечной замкнутой области, не содержащей точек $\lambda_k^{(1)}$ $(k=1, 2,\cdots)$ будут иметь место неравенства

$$M_2 \exp\{(-\varepsilon-\operatorname{Re}[z_1(A_1-iB_1)])\,\alpha_m^{(1)}\}\leqslant|P_m(z_1)|\leqslant$$
$$\leqslant M_1 \exp\{(\varepsilon-\operatorname{Re}[z_1(A_1-iB_1)])\,\alpha_m^{(1)}\}. \tag{6}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что в любой конечной замкнутой области D_2 плоскости z_2, не содержащей точек $\lambda_k^{(2)}$ $(k=1, 2,\cdots)$ имеют место неравенства

$$M_3 \exp\{(-\varepsilon-\operatorname{Re}[z_2(A_2-iB_2)])\,\alpha_n^{(2)}\}\leqslant|Q_n(z_2)|\leqslant$$
$$\leqslant M_4 \exp\{(\varepsilon-\operatorname{Re}[z_2(A_2-iB_2)])\,\alpha_n^{(2)}\}, \tag{7}$$

при $n\geqslant N_2(\varepsilon)$ $(M_3>0,\ M_4>0$ и зависят от области D_2 и от $\varepsilon)$, где $\alpha_n^{(2)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_k^{(2)}|}$.

Если взять $N=\max\{N_1, N_2\}$, то при $m\geqslant N$, $n\geqslant N$ получим при любом $\varepsilon>0$ в любой замкнутой конечной области D из C^2, не содержащей точек $z=\{z_1, z_2\}$, для которых либо $z_1=\lambda_k^{(1)}$, либо $z_2=\lambda_k^{(2)}$ $(k=1, 2,\cdots)$:

$$M' \exp\{-[(A_1x_1+B_1y_1+\varepsilon)\,\alpha_m^{(1)}+(A_2x_2+B_2y_2+\varepsilon)\,\alpha_n^{(2)}]\}\leqslant|P_m(z_1)Q_n(z_2)|\leqslant$$
$$\leqslant M'' \exp\{-[(A_1x_1+B_1y_1-\varepsilon)\,\alpha_m^{(1)}+(A_2x_2+B_2y_2-\varepsilon)\,\alpha_n^{(2)}]\}, \tag{8}$$

где $M'>0$, $M''>0$ и зависят только от ε и от области D. Обозначим $z_1=x_1+iy_1$; $z_2=x_2+iy_2$. Если $m<N$ или $n<N$, то в указанных областях имеют место, соответственно, неравенства

$$C_1\leqslant|P_m(z_1)|\leqslant C_2,\quad C_3\leqslant|Q_n(z_2)|\leqslant C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4—положительные постоянные, зависящие от соответствующей области.

Очевидно, что при $m \geqslant N$ и $n < N$ в области D справедливо неравенство

$$C' \exp\{-[(A_1x_1+B_1y_1+\varepsilon)\,\alpha_m^{(1)}]\} \leqslant |P_m(z_1)\,Q_n(z_2)| \leqslant$$
$$\leqslant C'' \exp\{-[(A_1x_1+B_1y_1-\varepsilon)\,\alpha_m^{(1)}]\}, \qquad (9)$$

где $C' = C_3M_2$, $C'' = C_4M_1$, а при $m < N$ и $n \geqslant N$

$$E_1 \exp\{-[(A_2x_2+B_2y_2+\varepsilon)\,\alpha_n^{(2)}]\} \leqslant |P_m(z_1)\,Q_n(z_2)| \leqslant$$
$$\leqslant E_2 \exp\{-[(A_2x_2+B_2y_2-\varepsilon)\,\alpha_n^{(2)}]\}, \qquad (10)$$

где $E_1 = C_1M_3$, $E_2 = C_2M_4$.

Перенумеруем теперь члены нашего двойного ряда, превратив его в простой ряд (с той же областью абсолютной сходимости).

Для этого числа

$$\{\alpha_k^{(1)}(A_1-iB_1),\ \alpha_l^{(2)}(A_2-iB_2)\} \in C^2 \quad (k=1, 2, \cdots, \ l=1, 2, \cdots)$$

упорядочим в порядке неубывания их модулей (это возможно, так как для последовательности этих чисел единственной предельной точкой является ∞). Иными словами, каждому n поставим в соответствие такие числа p_n и q_n, что

1) $\mu_n^{(1)} = \alpha_{p_n}^{(1)}(A_1-iB_1)$, $\mu_n^{(2)} = \alpha_{q_n}^{(2)}(A_2-iB_2)$,

2) $|\mu_n| \uparrow \infty$, где $\mu_n = \{\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}\} \in C^2$, $|\mu_n| = \sqrt{|\mu_n^{(1)}|^2 + |\mu_n^{(2)}|^2}$,

3) в каждой точке абсолютной сходимости ряда (1) имеет место равенство

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \prod_{k=1}^{p_n}\left(1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right)\prod_{k=1}^{q_n}\left(1-\frac{z_2}{\lambda_k^{(2)}}\right), \ (b_n = C_{p_n,\,q_n}) \qquad (11)$$

(то есть ряд, стоящий в правой части равенства (11), состоит из тех же членов, что и двойной ряд (1)).

Теперь обозначим

$$\widetilde{P}_n(z_1) = \prod_{k=1}^{p_n}\left(1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right),\ \widetilde{Q}_n(z_2) = \prod_{k=1}^{q_n}\left(1-\frac{z_2}{\lambda_k^{(2)}}\right),$$

тогда ряд (11) преобразуется к виду

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \widetilde{P}_n(z_1)\,\widetilde{Q}_n(z_2), \qquad (12)$$

и, по доказанному, в области D будут справедливы неравенства

$$M' \exp\{-[(A_1x_1+B_1y_1+\varepsilon)\,\widetilde{\alpha}_n^{(1)} + (A_2x_2+B_2y_2+\varepsilon)\,\widetilde{\alpha}_n^{(2)}]\} \leqslant$$
$$\leqslant |\widetilde{P}_n(z_1)\widetilde{Q}_n(z_2)| \leqslant M'' \exp\{-[(A_1x_1+B_1y_1-\varepsilon)\,\widetilde{\alpha}_n^{(1)} + (A_2x_2+B_2y_2-\varepsilon)\,\widetilde{\alpha}_n^{(2)}]\}, \qquad (13)$$

если $p_n \geqslant N$, $q_n \geqslant N$ (здесь $\tilde{\alpha}_n^{(1)} = \alpha_{p_n}^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_n^{(2)} = \alpha_{q_n}^{(2)}$).

$$C' \exp\{-[(A_1 x_1 + B_1 y_1 + \varepsilon)\tilde{\alpha}_n^{(1)}]\} \leqslant |\tilde{P}_n(z_1)\tilde{Q}_n(z_2)| \leqslant$$

$$\leqslant C'' \exp\{-[(A_1 x_1 + B_1 y_1 - \varepsilon)]\tilde{\alpha}_n^{(1)}\}, \tag{14}$$

если $p_n \geqslant N$, $q_n < N$.

$$E_1 \exp\{-[(A_2 x_2 + B_2 y_2 + \varepsilon)\tilde{\alpha}_n^{(2)}]\} \leqslant |P_n(z_1)\, Q_n(z_2)| \leqslant$$

$$\leqslant E_2 \exp\{-[(A_2 x_2 + B_2 y_2 - \varepsilon)]\tilde{\alpha}_n^{(2)}\}, \tag{15}$$

если $p_n < N$, $q_n \geqslant N$.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\mu_n z), \quad (z = (z_1, z_2)). \tag{16}$$

Положив

$$z_1 = \frac{A_1 + iB_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \tilde{z}_1, \quad z_2 = \frac{A_2 + iB_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tilde{z}_2, \tag{17}$$

перепишем ряд, составленный из модулей членов ряда (16) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp\{-\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_n^{(1)}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\tilde{z}_1 + \tilde{\alpha}_n^{(2)}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\,\tilde{z}_2]\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp\{-\operatorname{Re}[|\tilde{\mu}_n^{(1)}|\,\tilde{z}_1 + |\tilde{\mu}_n^{(2)}|\,\tilde{z}_2]\}, \tag{18}$$

где

$$\tilde{\mu}_n = \{\tilde{\mu}_n^{(1)}, \tilde{\mu}_n^{(2)}\} \in C^2, \quad |\tilde{\mu}_n| = \sqrt{|\tilde{\mu}_n^{(1)}|^2 + |\tilde{\mu}_n^{(2)}|^2}.$$

Обозначим

$$\cos\varphi_n = \frac{|\tilde{\mu}_n^{(1)}|}{|\tilde{\mu}_i|}, \quad \sin\varphi_n = \frac{|\tilde{\mu}_n^{(2)}|}{|\tilde{\mu}_n|}.$$

Тогда ряд (18) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp\{-(\tilde{x}_1 \cos\varphi_n + \tilde{x}_2 \sin\varphi_n)\,|\tilde{\mu}_n|\} \tag{19}$$

$$(\tilde{z}_1 = \tilde{x}_1 + i\tilde{y}_1, \quad \tilde{z}_2 = \tilde{x}_2 + i\tilde{y}_2).$$

Обозначим далее

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n\left(\frac{A_1 + iB_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\tilde{z}_1\right)\tilde{Q}_n\left(\frac{(A_2 + iB_2)\tilde{z}_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{P}_n(z_1)\tilde{Q}_n(z_2). \tag{20}$$

Теперь сравним ряд (20) с рядом (19), для этого разобьем ряд, состоящий из модулей членов ряда (20), следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n \tilde{P}_n(\bar{z}_1)\, \tilde{Q}_n(\bar{z}_2)| = \sum_{p_n<N,\, q_n>N} |b_n \tilde{P}_n(\bar{z}_1)\, \tilde{Q}_n(\bar{z}_2)| +$$

$$+ \sum_{p_n>N,\, q_n<N} |b_n \tilde{P}_n(\bar{z}_1)\, \tilde{Q}_n(\bar{z}_2)| + \sum_{p_n,\, q_n>N} |b_n \tilde{P}_n(\bar{z}_1)\, \tilde{Q}_n(\bar{z}_2)| +$$

$$+ \sum_{p_n,\, q_n<N} |b_n \tilde{P}_n(\bar{z}_1)\, \tilde{Q}_n(\bar{z}_2)| = \{1\}+\{2\}+\{3\}+\{4\}.$$

Пусть ряд Дирихле (19) сходится в некоторой окрестности точки $z=\{z_1, z_2\}\in C^2$. Докажем, что тогда каждый из рядов $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ тоже сходится в достаточно малой окрестности этой точки. Обозначим $z_1' = \bar{z}_1 + \eta_1$, $z_2' = \bar{z}_2 + \eta_2$, $\eta_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\eta_2 = \sigma_2 + i\tau_2$. В точке $z_1 = \{z_1', z_2'\}\in C^2$ ряд (19) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp\{-\operatorname{Re}[(\bar{z}_1+\eta_1)\cos\varphi_n + (\bar{z}_2+\eta_2)\sin\varphi_n]\,|\bar{\mu}_n|\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp\{-(\bar{x}_1\cos\varphi_n + \bar{x}_2\sin\varphi_n + \sigma_1\cos\varphi_n + \sigma_2\sin\varphi_n)\,|\bar{\mu}_n|\}. \qquad (21)$$

Ряд $\{1\}$, в силу неравенств (15), мажорируется в достаточно малой окрестности точки $\bar{z}$ рядом $\sum\limits_{p_n<N,\, q_n>N} |b_n| \exp\{-(\bar{x}_2\sin\varphi_n - \varepsilon_1)\,|\bar{\mu}_n|\}$,

где $\varepsilon_1>0$ сколь угодно мало. Действительно, как бы ни было мало $\varepsilon>0$ при достаточно больших n будет иметь место неравенство $|\cos\varphi_n|<\varepsilon$ и поэтому, если $|\sigma_1|$ и $|\sigma_2|$ достаточно малы, то

$$|\bar{x}_1\cos\varphi_n + \sigma_1\cos\varphi_n + \sigma_2\sin\varphi_n| < \varepsilon.$$

Аналогично доказывается сходимость рядов $\{2\}$ и $\{3\}$ в окрестности точки $\bar{z}$. Таким же образом, с использованием левых неравенств (13), (14), (15), доказывается следующее утверждение.

Если в некоторой окрестности точки $\bar{z}$ ряд (19) расходится, то ряд (20) не сходится абсолютно ни в одной точке достаточно малой окрестности точки $\bar{z}$, в которой $\bar{z}_1 \neq \bar{\lambda}_k^{(1)}$ и $\bar{z}_2 \neq \bar{\lambda}_k^{(2)}$.

Известно (см. [3]), что область сходимости ряда (19) строится следующим образом. Пусть $\{m_k\}$—последовательность всех натуральных чисел, для которых $|\varphi_{m_k}-\varphi|<\delta$, $\delta>0$

$$h(\varphi, \delta) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_{m_k}|\right)}{|\bar{\mu}_{m_n}|}, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{m_k}| = \infty,$$

$$h(\varphi, \delta) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} |b_{m_k}|\right)}{|\overline{\mu}_{m_n}|}, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{m_k}| < \infty$$

и

$$\lim_{\delta\to 0} h(\varphi, \delta) = h(\varphi).$$

Если последовательность $\{m_k\}$ конечна, то $h(\varphi, \delta) = -\infty$. Ряд (19) сходится в области

$$B = \bigcap_{0<\varphi<\frac{\pi}{2}} (\overline{x}_1 \cos\varphi + \overline{x}_2 \sin\varphi) > h(\varphi)$$

и расходится в точках, внешних к области B. Сходимость ряда (18) во всякой ограниченной замкнутой области B_0, принадлежащей области B, равномерна. Обозначив

$$\cos\theta_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, \ \sin\theta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, \ \cos\theta_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

$$\sin\theta_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

приходим к следующему выводу.

Теорема 1. *Ряд* (1) *сходится абсолютно в области*

$$B(z_1, z_2) = \bigcap_{0<\varphi<\frac{\pi}{2}} [(x_1\cos\theta_1 + y_1 \sin\theta_1)\cos\varphi +$$

$$+ (x_2\cos\theta_2 + y_2\sin\theta_2)\sin\varphi > h(\varphi)],$$

причем равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, принадлежащем $B(z_1, z_2)$. *Во всякой точке* $z = \{z_1, z_2\}$, *лежащей вне области* B *и такой, что* $z_1 \neq \lambda_k^{(1)}$ *и* $z_2 \neq \lambda_k^{(2)}$ $(k=1, 2, \cdots)$, *ряд* (1) *не сходится абсолютно.*

2°. Пусть ряд (1) таков, что $C_{m,n} = 0$ при $m \neq n$, то есть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(z_1) Q_n(z_2) \ (b_n = C_{n,n}), \tag{22}$$

и пусть

$$|\lambda_k^{(1)}| \leqslant |\lambda_{k+1}^{(1)}|, \ |\lambda_k^{(2)}| \leqslant |\lambda_{k+1}^{(2)}| \quad (k=1, 2, \cdots)$$

и выполнены условия (2), (3) и (4).

Предположим также, что существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}} \tag{23}$$

($\alpha_n^{(1)}$ и $\alpha_n^{(2)}$ те же, что и в п. 1°).

Обозначим

$$\cos\varphi=\sqrt{A_1^2+B_1^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{(1)}}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(\alpha_n^{(1)})^2+(A_2^2+B_2^2)(\alpha_n^{(2)})^2}},$$

$$\sin\varphi=\sqrt{A_2^2+B_2^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{(2)}}{\sqrt{(A_1+B_1^2)(\alpha_n^{(1)})^2+(A_2^2+B_2^2)(\alpha_n^{(2)})^2}}. \qquad (24)$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть ряд* (22) *сходится в точке* $z^\circ=\{z_1^0, z_2^0\}\in C^2$, *для которой* $z_1\neq\lambda_k^{(1)}$, $z_2\neq\lambda_k^{(2)}$ $(k=1, 2,\cdots)$. *Тогда он сходится в любой точке* $z=\{z_1, z_2\}\in C^2$, *для которой*

$$[(x_1-x_1^0)\cos\theta_1+(y_1-y_1^0)\sin\theta_1]\cos\varphi+[(x_2-x_2^0)\cos\theta_2+$$
$$+(y_2-y_2^0)\sin\theta_2]\sin\varphi>0$$

(θ_1 *и* θ_2 *определяются, как в п.* 1°).

С помощью преобразований (17) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(z_1)\,Q_n(z_2)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, P_n^*(\tilde z_1)\,Q_n^*(\tilde z_2), \qquad (25)$$

где

$$P_n^*(t)=P_n\left(\frac{A_1+iB_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\,t\right),\quad Q_n^*(t)=Q_n\left(\frac{A_2+iB_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\,t\right).$$

Пусть

$$\tilde\lambda_k^{(j)}=\frac{A_j-iB_j}{\sqrt{A_j^2+B_j^2}}\,\lambda_k^{(j)},\quad \tilde\alpha_n^{(j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\tilde\lambda_k^{(j)}|}$$

$$(j=1,\ 2;\ k=1,\ 2,\cdots).$$

Тогда $\tilde\alpha_n^{(j)}=\alpha_n^{(j)}$, и из (23) следует существование конечного или бесконечного предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde\alpha_n^{(1)}}{\tilde\alpha_n^{(2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}}.$$

Из равенства (24) получим

$$\cos\varphi=\sqrt{A_1^2+B_1^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{(1)}}{|\mu_n|},\quad \sin\varphi=\sqrt{A_2^2+B_2^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^{(2)}}{|\mu_n|},$$

где

$$|\mu_n|=\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(\alpha_n^{(1)})^2+(A_2^2+B_2^2)(\alpha_n^{(2)})^2}.$$

В новых обозначениях теорема 2 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2′. *Пусть ряд* (25) *сходится в точке* $\tilde z^0=\{\tilde z_1^0, \tilde z_2^0\}$, *для которой* $\tilde z_1^0\neq\tilde\lambda_k^{(1)}$, $\tilde z_2^0\neq\tilde\lambda_k^{(2)}$ $(k=1, 2,\cdots)$. *Тогда он сходится в любой точке* $\tilde z=\{\tilde z_1, \tilde z_2\}$, *для которой* $(\tilde x_1-\tilde x_1^0)\cos\varphi+(\tilde x_2-\tilde x_2^0)\sin\varphi>0$

$$(\widetilde{z}_j^0 = \widetilde{x}_j^0 + i\widetilde{y}_j^0, \quad j = 1, 2).$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=p}^{q} b_n P^*_n(\widetilde{z}_1) Q^*_n(\widetilde{z}_2) = \sum_{n=p}^{q} b_n P^*_n(\widetilde{z}_1^0) Q^*_n(\widetilde{z}_2^0) \ \frac{P^*_n(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2)}{P^*_n(\widetilde{z}_1^0) Q^*_n(\widetilde{z}_2^0)}.$$

Обозначим

$$c_n = b_n P^*_n(\widetilde{z}_1^0) Q^*_n(\widetilde{z}_2^0), \quad a_n = \frac{P^*_n(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2)}{P^*_n(\widetilde{z}_1^0)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2^0)}.$$

Пользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{n=p}^{q} b_n P^*_n(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2) = \sum_{n=p}^{q} a_n c_n b_n = \sum_{n=p}^{q} [(a_n - a_{n+1}) \sum_{k=p}^{n} c_k] + a_q \sum_{k=p}^{q} c_k.$$

Ввиду того, что ряд (25) сходится в точке $\widetilde{z}^0 = \{\widetilde{z}_1^0, \widetilde{z}_2^0\} \in C^2, \widetilde{z}_1^0 \neq \widetilde{\lambda}_k^{(1)}$, $\widetilde{z}_2^0 \neq \widetilde{\lambda}_k^{(2)}$, $k=1, 2, \cdots$, для любого $\eta > 0$ найдется такое N_0, что при

$$q \geqslant p \geqslant N_0 \ \left|\sum_{k=p}^{q} C_k\right| < \eta.$$

С помощью неравенства вида (13) получим в любой конечной замкнутой области, в которой $\widetilde{z}_1 \neq \widetilde{\lambda}_k^{(1)}$, $\widetilde{z}_2 \neq \widetilde{\lambda}_k^{(2)}$ $(k=1, 2, \cdots)$ при достаточно больших n

$$\alpha_1 \exp[-(\widetilde{x}_1 \cos\varphi + \widetilde{x}_2 \sin\varphi + \varepsilon)|\widetilde{a}_n|] \leqslant |P^*_n(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_2 \exp[-(\widetilde{x}_1 \cos\varphi + \widetilde{x}_2 \sin\varphi - \varepsilon)|\widetilde{a}_n|], \tag{26}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ — постоянные, зависящие от области D и от ε. Отсюда, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n имеем

$$|a_n| \leqslant \frac{\alpha_1 \exp[-(\widetilde{x}_1 \cos\varphi + \widetilde{x}_2 \sin\varphi - \varepsilon)|\widetilde{\mu}_n|]}{\alpha_2 \exp[-(\widetilde{x}_1^0 \cos\varphi + \widetilde{x}_2^0 \sin\varphi + \varepsilon)|\widetilde{\mu}_n|]} \leqslant \alpha_3 \exp\{-[(\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_1^0)\cos\varphi +$$

$$+ (\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_2^0)\sin\varphi - 2\varepsilon]|\widetilde{\mu}_n|\}$$ ($\alpha_3 > 0$ — некоторая постоянная).

Поэтому при достаточно большом n

$$|a_n - a_{n+1}| = \left|\frac{P^*_n(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2)}{P^*_n(\widetilde{z}_1^0)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2^0)} - \frac{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2)}{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1^0)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2^0)} + \frac{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2)}{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1^0)\, Q^*_n(\widetilde{z}_2^0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1)\, Q^*_{n+1}(\widetilde{z}_2)}{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1^0)\, Q^*_{n+1}(\widetilde{z}_2^0)}\right| \leqslant \left|\frac{P^*_n(\widetilde{z}_1)}{P^*_n(\widetilde{z}_1^0)} - \frac{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1)}{P^*_{n+1}(\widetilde{z}_1^0)}\right| \left|\frac{Q^*_n(\widetilde{z}_2)}{Q^*_n(\widetilde{z}_2^0)}\right| +$$

$$+\left|\frac{Q_n^*(\tilde{z}_2)}{Q_n^*(\tilde{z}_2^0)}-\frac{Q_{n+1}^*(\tilde{z}_2)}{Q_{n+1}^*(\tilde{z}_2^0)}\right|\left|\frac{P_{n+1}^*(\tilde{z}_1)}{P_{n+1}^*(\tilde{z}_1^0)}\right|\leqslant \alpha_4\left(\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{n+1}^{(1)}|}+\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{n+1}^{(2)}|}\right)\times$$

$$\times\exp\{-[(\tilde{x}_1-\tilde{x}_1^0)\cos\varphi+(\tilde{x}_2-\tilde{x}_2^0)\sin\varphi-2\varepsilon]|\mu_n|\},$$

где $\alpha_4>0$ зависит от области и от ε.

Таким образом

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n c_n\right|<\eta\left[\alpha_5\sum_{n=p}^{q-1}\exp\left\{-\left[(\tilde{x}_1-\tilde{x}_1^0)\cos\varphi+(\tilde{x}_2-\tilde{x}_2^0)\sin\varphi-2\varepsilon\right]|\mu_n|\right\}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{n+1}^{(1)}|}+\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{n+1}^{(2)}|}\right)+\alpha_3\exp\{-[(\tilde{x}_1-\tilde{x}_1^0)\cos\varphi+$$

$$+(\tilde{x}_2-\tilde{x}_2^0)\sin\varphi-2\varepsilon]|\mu_q|\} \tag{27a}$$

($\alpha_5>0$ — постоянная).

Пусть $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ такие, что $(\tilde{x}_1-\tilde{x}_1^0)\cos\varphi+(\tilde{x}_2-\tilde{x}_2^0)\sin\varphi>0$. Взяв $\varepsilon>0$ так, чтобы $(\tilde{x}_1-\tilde{x}_1^0)\cos\varphi+(\tilde{x}_2-\tilde{x}_2^0)\sin\varphi>3\varepsilon$, получим

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n c_n\right|<\eta\left[\alpha_5\sum_{n=p}^{q-1}\exp(-\varepsilon|\mu_n|)\left(\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{n+1}^{(1)}|}+\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{n+1}^{(2)}|}\right)+\alpha_3\exp(-\varepsilon|\mu_q|)\right]. \tag{27b}$$

Известно (см. [2]), что если $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau_k}$ ($\tau_k>0$, $\tau_k\uparrow\infty$, $k=1, 2, \cdots$), то при $K<0$ справедлива оценка

$$\sum_{n=p}^{q-1}\frac{\exp(KS_n)}{\tau_{n+1}}<\frac{N}{K}[\exp(KS_{q-1})-\exp(KS_{p-1})], \tag{28}$$

а если $K>0$, то

$$\sum_{n=p}^{q-1}\frac{\exp(KS_n)}{\tau_{n+1}}<\frac{N\exp(\varepsilon_1)}{K}[\exp(KS_{q-1})-\exp(KS_{p-1})]. \tag{29}$$

(Здесь ε_1—любая положительная постоянная такая, что $\frac{K}{\tau_p}\leqslant\varepsilon_1$, N— положительная постоянная, не зависящая от p и q).

Исходя из (27) и (28), получим

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n c_n\right|<\eta\left\{\beta_1\frac{[\exp(-\varepsilon|\tilde{\alpha}_{p-1}^{(1)}|)-\exp(-\varepsilon|\tilde{\alpha}_{q-1}^{(1)}|)]}{\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+\beta_2\frac{[\exp(-\varepsilon|\tilde{\alpha}_{p-1}^{(2)}|)-\exp(-\varepsilon|\tilde{\alpha}_{q-1}^{(2)}|)]}{\varepsilon}\right\}.$$

Ввиду того, что $\eta>0$ произвольно мало теорема 2′ доказана. Тем самым доказана и теорема 2.

3°. Обозначим $h=h_1=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\left|\sum\limits_{\nu=0}^{n}b_\nu\right|}{|\mu_n|}$, если ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}b_\nu$ расходится $(h_1\geqslant 0)$ $h=h_2=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\left|\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}b_\nu\right|}{|\mu_n|}$, если ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}b_\nu$ сходится $(h_2<0)$. Напомним, что $|\mu_n|=\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(\widetilde{\alpha}_n^{(1)})^2+(A_2^2+B_2^2)(\widetilde{\alpha}_n^{(2)})^2}$, тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Ряд* (22) *сходится во всех точках* $z=\{z_1, z_2\}\in C^2$, *принадлежащих области*

$$(x_1\cos\theta_1+y_1\sin\theta_1)\cos\varphi+(x_2\cos\theta_2+y_2\sin\theta_2)\sin\varphi-h>0$$

и расходится в точках z $(z_1\neq\lambda_k^{(1)}$ и $z_2\neq\lambda_k^{(2)}$, $k=1, 2,\cdots)$, *для которых имеет место неравенство*

$$(x_1\cos\theta_1+y_1\sin\theta_1)\cos\varphi+(x_2\cos\theta_2+y_2\sin\theta_2)\sin\varphi-h<0.$$

Очевидно, что теорема 3 равносильна следующему утверждению.

Теорема 3′. *Ряд* (25) *сходится во всех точках* $\widetilde{z}=\{\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2\}\in C^2$, *принадлежащих области* $\widetilde{x}_1\cos\varphi+\widetilde{x}_2\sin\varphi-h>0$ *и расходится в точках* $\widetilde{z}=\{\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2\}\in C^2$, *для которых* $\widetilde{z}_1\neq\widetilde{\lambda}_k^{(1)}$, $\widetilde{z}_2\neq\widetilde{\lambda}_k^{(2)}(k=1, 2,\cdots)$ *и* $\widetilde{x}_1\cos\varphi+\widetilde{x}_2\sin\varphi-h<0$.

Доказательство 1. Предположим, что ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}b_\nu$ расходится и $h_1<\infty$. Пользуясь преобразованием Абеля, получим

$$\sum_{n=p}^{q}b_nP_n^*(\widetilde{z}_1)\,Q_n^*(\widetilde{z}_2)=\sum_{n=p}^{q-1}\left\{\left[\left(P_n^*(\widetilde{z}_1)\,Q_n^*(\widetilde{z}_2)-P_{n+1}^*(\widetilde{z}_1)\,Q_{n+1}^*(\widetilde{z}_2)\right)\right]\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu\right\}-$$

$$-P_p^*(\widetilde{z}_1)\,Q_p^*(\widetilde{z}_2)\sum_{\nu=0}^{p-1}b_\nu+P_q^*(\widetilde{z}_1)\,Q_q^*(\widetilde{z}_2)\sum_{\nu=0}^{q}b_\nu.$$

Исходя из определения h_1, имеем для любого $\varepsilon>0$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu\right|<\omega_1\exp\left[(h_1+\varepsilon)\,|\mu_n|\right] \tag{30}$$

(где $\omega_1>0$—постоянная, не зависящая от n). С помощью выкладок, аналогичных тем, которые использованы при доказательстве теоремы 2, получим

$$|P_n^*(\tilde{z}_1)\,Q_n^*(\tilde{z}_2)-P_{n+1}^*(\tilde{z}_1)\,Q_{n+1}^*(\tilde{z}_2)|\leqslant\omega_3\left(\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{(1)}|}+\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{(2)}|}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-(\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-\varepsilon)|\mu_n|\right] \tag{31}$$

($\omega_3>0$ — постоянная).

Исходя из неравенств (30) и (31), будем теперь иметь

$$\left|\sum_{n=p}^{q} b_n P_n^*(\tilde{z}_1)\,Q_n^*(\tilde{z}_2)\right|\leqslant\sum_{n=p}^{q-1}\omega_4\exp\left[-(\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-h_1-2\varepsilon)|\alpha_n^{(1)}|\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{(1)}|}+\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{(2)}|}\right)+\omega_5\exp\left[-(\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-h_1-2\varepsilon)|\mu_p|\right]+$$

$$+\omega_5\exp\left[-(\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-h_1-2\varepsilon)|\mu_q|\right].$$

Возьмем точку $\tilde{z}=\{\tilde{z}_1,\tilde{z}_2\}$ такую, что $\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-h_1=2\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), имеем

$$\left|\sum_{n=p}^{q} b_n P_n^*(\tilde{z}_1)\,Q_n^*(\tilde{z}_2)\right|<\omega\sum_{n=p}^{q-1}\left(\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{(1)}|}+\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{(2)}|}\right)\exp(-\varepsilon|\mu_n|)+$$

$$+\Omega\left[\exp(-\varepsilon|\mu_p|)+\exp(-\varepsilon|\mu_q|)\right]$$

($\omega>0$, $\Omega>0$ — постоянные).

Если воспользоваться оценкой (28), то отсюда, ввиду произвольности числа ε, легко видеть, что ряд (24) сходится в точке $\tilde{z}=\{\tilde{z}_1,\tilde{z}_2\}\in C^2$, для которой $\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-h_1>0$.

II. Пусть теперь $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ сходится. С помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{n=p}^{q} b_n P_n^*(\tilde{z}_1)\,Q_n^*(\tilde{z}_2)=\sum_{n=p+1}^{q}\left[(P_n^*(\tilde{z}_1)\,Q_n^*(\tilde{z}_2)-P_{n-1}^*(\tilde{z}_1)\,Q_{n-1}^*(\tilde{z}_2))\sum_{\nu=n}^{\infty}b_\nu\right]+$$

$$+P_p^*(\tilde{z}_1)\,Q_p^*(\tilde{z}_2)\sum_{\nu=p}^{\infty}b_\nu-P_q^*(\tilde{z}_1)\,Q_q^*(\tilde{z}_2)\sum_{\nu=q+1}^{\infty}b_\nu.$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось выше и пользуясь неравенством $\left|\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}b_\nu\right|<\omega_6\exp[(h_2+\varepsilon)|\mu_n|]$, где $\omega_6>0$ — константа, не зависящая от n, получим, что ряд (25) сходится в точке $\tilde{z}=\{\tilde{z}_1,\tilde{z}_2\}$, в которой $\tilde{x}_1\cos\varphi+\tilde{x}_2\sin\varphi-h_2>0$.

Из доказательства очевидно, что сходимость ряда (25) на любом конечном замкнутом множестве, принадлежащем области $\bar{x}_1 \cos\varphi + \bar{x}_2 \sin\varphi - h_2 > 0$, равномерна.

III. Теперь предположим, что ряд (25) сходится в точке $\tilde{z} = \{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2\}$ и $\bar{x}_1 \cos\varphi + \bar{x}_2 \sin\varphi \geqslant 0$, $(\tilde{z}_1 \neq \bar{\lambda}_k^{(1)},\ \tilde{z}_2 \neq \bar{\lambda}_k^{(2)},$

$$k = 1,\ 2, \cdots).$$

Обозначим $b_\nu P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_\nu^*(\tilde{z}_2) = d_\nu$.

Применив преобразование Абеля, получим

$$\sum_{\nu=p}^{q} b_\nu = \sum_{\nu=p}^{q} \frac{d_\nu}{P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_\nu^*(\tilde{z}_2)} = \frac{1}{P_p^*(\tilde{z}_1) Q_p^*(\tilde{z}_2)} \sum_{\nu=p}^{\infty} d_\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{q-1} \left(\frac{1}{P_{\nu+1}^*(\tilde{z}_1) Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} - \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_\nu^*(\tilde{z}_2)} \right) \sum_{k=\nu+1}^{\infty} d_k -$$

$$- \frac{1}{P_q^*(\tilde{z}_1) Q_q^*(\tilde{z}_2)} \sum_{\nu=q+1}^{\infty} d_\nu .$$

При некотором фиксированном $\tilde{z}$ $(\tilde{z}_1 \neq \bar{\lambda}_k^{(1)},\ \tilde{z}_2 \neq \bar{\lambda}_k^{(2)},\ k=1,\ 2, \cdots)$ имеем по мощью (26)

$$\frac{1}{|P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_\nu^*(\tilde{z}_2)|} \leqslant \mu_1 \exp\left[(\bar{x}_1 \cos\varphi + \bar{x}_2 \sin\varphi + \varepsilon) |\mu_\nu| \right], \tag{32}$$

где $\mu_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от ν, а $\varepsilon > 0$ — любое. Имеем

$$\left| \frac{1}{P_{\nu+1}^*(\tilde{z}_1) Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} - \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_\nu^*(\tilde{z}_2)} \right| \leqslant \left| \frac{1}{P_{\nu+1}^*(\tilde{z}_1) Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} - \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} - \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_\nu^*(\tilde{z}_2)} \right| = \left| \frac{1}{Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} \right| \left| \frac{1}{P_{\nu+1}^*(\tilde{z}_1)} - \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{P_\nu^*(\tilde{z}_1)} \right| \left| \frac{1}{Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)} - \frac{1}{Q_\nu^*(\tilde{z}_2)} \right| \leqslant \mu_2 \frac{1}{|\bar{\lambda}_{\nu+1}^{(1)}|\, |Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2) P_{\nu+1}^*(\tilde{z}_1)|} +$$

$$+ \mu_3 \frac{1}{|\bar{\lambda}_{\nu+1}^{(2)}|\, |P_\nu^*(\tilde{z}_1) Q_{\nu+1}^*(\tilde{z}_2)|} \leqslant \mu_4 \left(\frac{1}{|\bar{\lambda}_{\nu+1}^{(1)}|} + \frac{1}{|\bar{\lambda}_{\nu+1}^{(2)}|} \right) \times$$

$$\times \exp\left[(\bar{x}_1 \cos\varphi + \bar{x}_2 \sin\varphi + \varepsilon) |\mu_{\nu+1}| \right], \tag{33}$$

где $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$ — некоторые положительные постоянные. Найдется такое p_0, что каковы бы ни были $\eta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, при $q > p > p_0$ будем иметь

$$\left|\sum_{\nu=p}^{q} d_\nu\right| < \eta \text{ и } \frac{\bar{x}_1 \cos\varphi + \bar{x}_2 \sin\varphi + \varepsilon}{|\tilde{\lambda}_p^{(j)}|} \leqslant \varepsilon_1 \quad (j=1,\ 2).$$

Тогда из (32) и (33) следует

$$\left|\sum_{\nu=p}^{q} b_\nu\right| < \eta\Big[\mu_4 \sum_{\nu=p}^{q-1} \exp\{(\bar{x}_1\cos\varphi + \tilde{x}_2 \sin\varphi)|\mu_{\nu+1}|\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{|\tilde{\lambda}_{\nu+1}^{(1)}|} + \frac{1}{|\tilde{\lambda}_{\nu+1}^{(2)}|}\right) + \mu_1\Big\{\exp\Big[(\bar{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi + \varepsilon)|\mu_p|+$$

$$+\exp\left[(\bar{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi + \varepsilon)|\mu_q|\right]\Big\}\Big]. \tag{34}$$

Положим $p = p_0$, тогда некоторые слагаемые в (34) будут постоянны и в силу неравенств (29) получим

$$\left|\sum_{\nu=p_0}^{q} b_\nu\right| < \eta\mu_5 \exp\left[(\bar{x}_1\cos\varphi + \tilde{x}_2\sin\varphi + \varepsilon)|\mu_q|\right].$$

Отсюда

$$\tilde{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi \geqslant \varlimsup_{q\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{\nu=0}^{q} b_\nu\right|}{|\mu_q|}, \tag{35}$$

то есть $\tilde{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi - h \geqslant 0$.

Это следует из определения числа h_1, если ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ расходится. Если же этот ряд сходится, то всегда можно считать, что его сумма отлична от нуля (для этого достаточно изменить один из коэффициентов b_ν) и поэтому из неравенств (35) тем более следует, что

$$\bar{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi \geqslant h_2 = h.$$

IV. Пусть теперь ряд (25) сходится в точке $\bar{z} = \{\bar{z}_1,\ \bar{z}_2\}$, для которой $\bar{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi < 0$. В этом случае ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ сходится, в силу теоремы 2'.

Из неравенств (34) и (28) при $q\to\infty$ получим

$$\left|\sum_{\nu=p}^{\infty} b_\nu\right| < \eta\mu_6 \exp\left[(\tilde{x}_1\cos\varphi + \bar{x}_2\sin\varphi + \varepsilon)|\mu_p|\right].$$

Отсюда

$$\tilde{x}_1\cos\varphi + \tilde{x}_2\sin\varphi \geqslant h.$$

Теорема 3' доказана. Тем самым доказана и теорема 3.

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 8.IX.1971

Ռ. Վ. ԱԴԻԲԵԿՅԱՆ. Երկու կոմպլեքս փոփոխականի Նյուտոնի շարքի զուգամիտության մասին *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է մի քանի թեորեմներ

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} P_m(z_1) Q_n(z_2)$$

շարքի զուգամիտության վերաբերյալ։ Որտեղ՝

$$P_m(z_1)=\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right),$$

$$Q_n(z_2)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_2}{\lambda_k^{(2)}}\right),\ \{\lambda_k^{(1)}\},\quad \{\lambda_k^{(2)}\}\ (k=1, 2,\cdots)$$

կոմպլեքս թվերի հաջորդականություն է, որոնք բավարարում են որոշ պայմանների։

R. V. ADIBEKIAN. *On the convergence of Newton interpolation series for a function of two complex variables* (summary)

Some theorems on tbe convergence of series

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} P_m(z_1) Q_n(z_2)$$

are proved. Here

$$P_m(z_1)=\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z_1}{\lambda_k^{(1)}}\right),$$

$$Q_n(z_2)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_2}{\lambda_k^{(2)}}\right)\ \text{and}\ \{\lambda_k^{(1)}\},\quad \{\lambda_k^{(2)}\}\qquad (k=1, 2,\cdots)$$

are sequences of complex numbers satisfying some conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. С. Насековская.* Абсолютная сходимость интерполяционного ряда, Литовский мат. сборник, VII, № 2, 1967, 297—304.
2. *Н. С. Насековская.* О сходимости интерполяционных рядов, Литовский мат. сборник, VII, № 3, 1967, 471—481.
3. *Г. Л. Лунц.* О некоторых обобщениях рядов Дирихле, мат. сборник, 10 (52), 1942, 33—50.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

Д. М. ЧАУСОВСКИЙ

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ НА ГРАФАХ

В работах М. С. Лившица и А. Г. Руткаса [1, 2] была указана возможность применения теории характеристических функций линейных операторов к исследованию некоторых классов электрических многополюсников или, в более общей постановке, открытых систем на графах [3].

В настоящей статье теория характеристических функций привлекается для изучения эквивалентных преобразований открытых систем на графах, т. е. преобразований, сохраняющих их передаточные отображения.

I. Основные определения

1. Согласно [1, 4] *операторным узлом*

$$N = N(E,\ H;\ J,\ \Gamma,\ T) \tag{1}$$

называется совокупность двух гильбертовых пространств E и H и линейных ограниченных операторов J, Γ, T, действующих соответственно в E, из E в H, в H, причем $J^2 = I$, $J^* = J$, $T - T^* = i\Gamma J\Gamma^*$.

Характеристическая функция (х. ф.) узла (1)—это операторнозначная функция комплексного параметра λ

$$W(\lambda) = I - iJ\Gamma^*(T - \lambda I)^{-1}\Gamma. \tag{2}$$

2. *Открытая система* [1]

$$F = F(E,\ H;\ S(\lambda),\ R(\lambda)) \tag{3}$$

— это набор гильбертовых пространств E и H и линейных отображений $S(\lambda)$ E в E и $R(\lambda)$ E в H. E и H называются *внешним* и *внутренним* пространством системы F соответственно. Открытую систему (3) и узел (1) будем называть *соответствующими* друг другу, если $S(\lambda)$—*передаточное отображение системы*—есть х.ф. узла, а $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}\Gamma$. Оператор T называется *внутренним оператором* системы, Γ-*оператором связи*, J-*каналовым оператором*. Векторы $\psi = R(\lambda)\varphi$, где $\varphi \in E$, рассматриваются как *внутренние состояния* системы.

3. В этом пункте определяется понятие LC-графа и порождаемого им передаточного отображения. В вопросах, относящихся к графам, мы пользуемся терминологией [5, 6].

Пусть G—конечный ориентированный граф, в котором отмечено $2n$ *внешних* ребер. Из них n ребер $q_1, \cdots, q_n$ назовем *входными*, а остальные $\bar{q}_1, \cdots, \bar{q}_n$ — *выходными*. Оставшиеся (*внутренние*) ребра разобьем на два класса: L-ребра $q_{L1}, \cdots, q_{L\mu}$ и C-ребра $q_{C_1}, \cdots, q_{C_\nu}$. С каждым L-ребром $q_{L\alpha}$ свяжем μ чисел $L_{\alpha k}$ $(1 \leqslant k \leqslant \mu)$, а с каждым C-ребром $q_{C\beta}$ — ν чисел $C_{\beta s}$ $(1 \leqslant s \leqslant \nu)$, так, чтобы матрицы

$$\Lambda = (L_{\alpha k})_1^\mu, \ \Sigma = (C_{\beta s})_1^\nu$$

были эрмитовыми и положительно определенными.

Граф G с отмеченными в нем внешними L и C-ребрами и набором *параметров* $L_{\alpha k}$ и $C_{\beta s}$ назовем LC-графом.

Далее мы будем предполагать, что выполнены условия:

q_1) В графе нет циклов и сечений, образованных входными ребрами;

q_2) В графе нет сечений, образованных выходными ребрами.

Каждому ребру графа q можно поставить в соответствие по два числа I_q и V_q, так, что выполнены условия:

K1. Для каждого цикла Q справедливо равенство $\sum\limits_{q \in Q} (-1)^{\varepsilon(q)} V_q = 0$, где $\varepsilon(q) = 1$, если q—выходное ребро и его направление совпадает с направлением цикла Q или q—не выходное ребро и его направление противоположно направлению цикла; $\varepsilon(q) = 0$— в остальных случаях;

*K*2. Для каждого сечения S в графе $\sum\limits_{q \in S} (-1)^{\varepsilon(q)} I_q = 0$, где $\varepsilon(q) = 1$, если направление q противоположно направлению S, и $\varepsilon(q) = 0$ — в остальных случаях;

*K*3.

$$V_{q_{L\alpha}} = i\lambda \sum_{k=1}^{\mu} L_{\alpha k} I_{q_{Lk}}, \quad I_{q_{C\beta}} = i\lambda \sum_{s=1}^{\nu} C_{\beta s} V_{q_{Ls}}.$$

$$(1 \leqslant \alpha \leqslant \mu) \qquad\qquad (1 \leqslant \beta \leqslant \nu)$$

Введем обозначения

$$V = \begin{bmatrix} V_{q_1} \\ \vdots \\ V_{q_n} \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} I_{q_1} \\ \vdots \\ I_{q_n} \end{bmatrix}, \ \widetilde{V} = \begin{bmatrix} V_{\widetilde{q}_1} \\ \vdots \\ V_{\widetilde{q}_n} \end{bmatrix}, \widetilde{I} = \begin{bmatrix} I_{\widetilde{q}_1} \\ \vdots \\ I_{\widetilde{q}_n} \end{bmatrix},$$

$$\varphi^- = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}, \ \varphi^+ = \begin{bmatrix} \widetilde{V} \\ \widetilde{I} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Столбцы φ^- и φ^+ будем рассматривать как векторы $2n$-мерного координатного гильбертова пространства E.

Если для каждого λ (исключая, возможно, конечное число значений) и для каждого вектора φ^- („входа“) условия K1—3 однозначно определяют вектор φ^+ („выход“), то отображение $S(\lambda)$: $\varphi^- \to \varphi^+$ будем называть *передаточным отображением* графа G. Условие q_1) позволяет приписывать координатам φ^- произвольные значения, не вступая в противоречие с условиями $K1$, 2.

В следующем параграфе в терминах структуры графа указаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы передаточное отображение графа совпадало с х. ф. некоторого операторного узла.

II. Передаточные отображения LC-графов и характеристические функции операторных узлов

1. Для составления полной системы независимых уравнений $K1-3$ построим дерево t графа G со следующими свойствами: а) t содержит все входные ребра и не содержит выходных ребер; б) из всех деревьев, удовлетворяющих условию а), t содержит максимально возможное число C-ребер [7]. Пусть L- и C-ребра, вошедшие в t, таковы: $q_{L_1}, \cdots, q_{L_r}$ и $q_{C_1}, \cdots, q_{C_p}$. L- и C-ребра, оказавшиеся хордами t, обозначим через $q_{L_{r+1}}, \cdots, q_{L_\mu}$ и $q_{C_{p+1}}, \cdots, q_{C_\nu}$.

Введем обозначения

$$V_L = \begin{bmatrix} V_{q_{L1}} \\ \vdots \\ V_{q_{Lr}} \end{bmatrix},\ I_L = \begin{bmatrix} I_{q_{L1}} \\ \vdots \\ I_{q_{Lr}} \end{bmatrix},\ \tilde{V}_L = \begin{bmatrix} V_{q_{Lr+1}} \\ \vdots \\ V_{q_{L\mu}} \end{bmatrix},\ \tilde{I}_L = \begin{bmatrix} I_{q_{Lr+1}} \\ \vdots \\ I_{q_{L\mu}} \end{bmatrix},$$

$$V_C = \begin{bmatrix} V_{q_{C_1}} \\ \vdots \\ V_{q_{Cp}} \end{bmatrix},\ I_C = \begin{bmatrix} I_{q_{C1}} \\ \vdots \\ I_{q_{Cp}} \end{bmatrix},\ \tilde{V}_C = \begin{bmatrix} V_{q_{Cp+1}} \\ \vdots \\ V_{q_{C\nu}} \end{bmatrix},\ \tilde{I}_C = \begin{bmatrix} I_{q_{Cp+1}} \\ \vdots \\ I_{q_{C\nu}} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} \cdots L_{1r} \\ \cdots\cdots \\ L_{r1} \cdots L_{rr} \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} L_{1,\, r+1} \cdots L_{1\mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_{r,\, r+1} \cdots L_{r\mu} \end{bmatrix},\ \tilde{L} = \begin{bmatrix} L_{r+1\ r+1} \cdots L_{r+1,\ \mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_{\mu,\ r+1} \cdots L_{\mu\mu} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} \cdots C_{1p} \\ \cdots\cdots \\ C_{p1} \cdots C_{pp} \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} C_{1\, p+1} \cdots C_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_{p,\, p+1} \cdots C_{p\nu} \end{bmatrix},\ \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{p+1,\, p+1} \cdots C_{p+1,\ \nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_{\nu,\ p+1} \cdots C_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

при этом $\Lambda = \begin{bmatrix} L & M \\ M^* & \tilde{L} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} C & N \\ N^* & \tilde{C} \end{bmatrix}$, и матрицы L, $\tilde{L}$, C, $\tilde{C}$ — эрмитовы и положительны.

Уравнения $K1$, 2, составленные для фундаментальных циклов и сечений, определяемых деревом t, в матричной форме имеют вид

$$[V',\ V'_L,\ V'_C,\ \tilde{V}'_L,\ \tilde{V}'_C,\ -\tilde{V}']'\,Q' = 0,\quad [I',\ I'_L,\ I'_C,\ \tilde{I}'_L,\ \tilde{I}'_C,\ \tilde{I}']'\,S' = 0, \tag{1}$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & U & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & U & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & U \end{bmatrix},\quad S = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & U & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & U & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

—фундаментальные матрицы циклов и сечений (штрихом $'$ обозначен переход к транспонированной матрице). Разбиение Q и S на блоки выполнено в соответствии с (1). Здесь U—единичная матрица надлежащих размеров.

Так как $QS'=0$ [5], то

$$B_{ki}=-A'_{ik}\ (k,\ i=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Как вытекает из свойства б), определяющего дерево t,

$$A_{22}=0,\ B_{22}=0. \tag{3}$$

Уравнения (1) и $K3$ с учетом (3) записываются так:

$$A_{11}V+A_{12}V_L+A_{13}V_C+\tilde{V}_L=0,\quad I+B_{11}\tilde{I}_L+B_{13}\tilde{I}_C+B_{13}\tilde{I}=0,$$

$$A_{21}V+A_{23}V_C+\tilde{V}_C=0,\quad I_L+B_{21}\tilde{I}_L+B_{23}\tilde{I}=0, \tag{4}$$

$$A_{31}V+A_{32}V_L+A_{33}V_C-\tilde{V}=0,\quad I_C+B_{31}\tilde{I}_L+B_{32}\tilde{I}_C+B_{33}\tilde{I}=0,$$

$$V_L=i\lambda\,(LI_L+M\tilde{I}_L),\quad I_C=i\lambda\,(CV_C+N\tilde{V}_C),$$

$$\tilde{V}_L=i\lambda\,(M^*I_L+\tilde{L}\tilde{I}_L),\ \tilde{I}_C=i\lambda\,(N^*V_C+\tilde{C}\tilde{V}_C). \tag{5}$$

Исключив из (4), (5) V_L, $\tilde{V}_L$, I_C, $\tilde{I}_C$, $\tilde{I}_L$, V_C, получим

$$\begin{bmatrix} i\lambda A_{32}(M-LB_{21}) & A_{33} \\ B_{11} & i\lambda B_{13}(N^*-\tilde{C}A_{23}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\lambda\Delta_L & A_{13} \\ B_{31} & i\lambda\Delta_C \end{bmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} -A_{11} & i\lambda\,(A_{12}L+M^*)B_{21} \\ i\lambda\,(N+B_{32}\tilde{C})A_{21} & B_{33} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} V \\ \tilde{I} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_{31} & -i\lambda A_{32}\tilde{L}B_{23} \\ -i\lambda B_{12}\tilde{C}A_{21} & B_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\tilde{V} \\ I \end{bmatrix}=0, \tag{6}$$

где

$$\Delta_L=[A_{12}\,U]\begin{bmatrix} L & M \\ M^* & \tilde{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A'_{12} \\ U \end{bmatrix},\ \Delta_C=[U,\ B_{32}]\begin{bmatrix} C & N \\ N^* & \tilde{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ B'_{32} \end{bmatrix} \tag{7}$$

—положительно определенные матрицы.

2. Теорема 1. *Для того чтобы передаточное отображение LC-графа G существовало и совпадало с х. ф. некоторого операторного узла, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$G1$) *В графе нет циклов, содержащих наряду с входными ребрами еще лишь C-ребра;*

$G2$) *Для каждой пары q_k и $\tilde{q}_k$ внешних ребер существует* *цикл, содержащий, кроме q_k и $\tilde{q}_k$, еще лишь C-ребра, и в этом цикле q_k и $\tilde{q}_k$ имеют одинаковую ориентацию**.

Необходимость. Если передаточное отображение $S(\lambda)$ графа совпадает с х. ф. операторного узла, то, согласно (1.2) и (1.4)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{V} = V, \ \lim_{\lambda\to\infty} \tilde{I} = I. \tag{8}$$

Разделим (6) на $i\lambda$ и устремим λ к ∞. Получим

$$A_{32}\{L-(M-LB_{21})\,\Delta_L^{-1}(M^*+A_{12}L)\}\,A_{32}'\,V=0, \tag{9}$$

$$B_{13}\{\tilde{C}-(N^*-\tilde{C}A_{23})\,\Delta_C^{-1}(N+B_{32}\tilde{C})\}\,B_{12}'\,I=0. \tag{10}$$

Так как

$$L-(M-LB_{21})\,\Delta_L^{-1}(M^*+A_{12}L)=\left\{[U\,B_{21}]\begin{bmatrix} L & M\\ M^* & \tilde{L}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} U\\ B_{21}'\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

и

$$\tilde{C}-(N^*-\tilde{C}A_{23})\,\Delta_C^{-1}(N+B_{32}\tilde{C})=\left\{[A_{23}\,U]\begin{bmatrix} C & N\\ N^* & \tilde{C}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_{23}'\\ U\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

—положительно определенные матрицы, то из (9) и (10) имеем

$$A_{32}'\,V=0,\ B_{12}'\,I=0.$$

Ввиду произвольности V и I

$$A_{32}=0,\ B_{23}=0,\ A_{21}=0,\ B_{12}=0. \tag{11}$$

Соотношение (6) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{33}\\ B_{11} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\lambda\Delta_L & A_{13}\\ B_{31} & i\lambda\Delta_C\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -A_{11} & 0\\ 0 & B_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V\\ \tilde{I}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_{31} & 0\\ 0 & B_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V\\ \tilde{I}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\tilde{V}\\ I\end{bmatrix}=0. \tag{12}$$

При $\lambda\to\infty$ с учетом (8) уравнение (12) приводится к виду

$$\begin{bmatrix} A_{31} & 0\\ 0 & B_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V\\ I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -V\\ I\end{bmatrix}=0.$$

Так как V и I произвольны, то

$$A_{31}=U,\ B_{13}=-U. \tag{13}$$

Итак, фундаментальная матрица циклов Q графа G имеет вид

$$Q=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & U & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & U & 0\\ U & 0 & A_{33} & 0 & 0 & U\end{bmatrix}. \tag{14}$$

* В [3] эти условия были указаны лишь как достаточные.

Принимая во внимание соответствие между ребрами графа и столбцами матрицы Q (см. (1)), мы из строения Q непосредственно усматриваем выполнение условий $G1$) и $G2$).

Достаточность. Если для графа G выполнены условия $G1$) и $G2$), то фундаментальная матрица циклов Q-графа G, построенная по дереву t, имеет вид (14). Уравнения (4) записываются так:

$$\begin{aligned} A_{11}V+A_{12}V_L+A_{13}V_C+\tilde{V}_L&=0, & I+B_{11}\tilde{I}_L-\tilde{I}&=0,\\ A_{23}V_C+\tilde{V}_C&=0, & I_L+B_{21}\tilde{I}_L&=0, \\ V+A_{33}V_C-\tilde{V}&=0, & I_C+B_{31}\tilde{I}_L+B_{32}\tilde{I}_C+B_{33}\tilde{I}&=0. \end{aligned} \tag{15}$$

После исключения из (5) и (15) V_L, $\tilde{V}_L$, I_C и $\tilde{I}_C$ получим

$$i\begin{bmatrix} 0 & \Delta_L^{-1}A_{13} \\ \Delta_C^{-1}(B_{31}+B_{33}B_{11}) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix}= =i\begin{bmatrix} -\Delta_L^{-1}A_{11} & 0 \\ 0 & -\Delta_C^{-1}B_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & A_{33} \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Здесь Δ_L и Δ_C—те же матрицы, что и в (7).

Введем в рассмотрение координатное пространство вектор-столбцов H, размерность которого равна числу элементов столбца $\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix}$. Заметим, что $\dim H$ однозначно определяется графом G. Зададим в H скалярное произведение равенством

$$(\psi_1,\ \psi_2)=\psi_2^*\begin{bmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{bmatrix}\psi_1.$$

Здесь, как и выше, * означает переход к эрмитово сопряженной матрице.

Пусть T, Γ, J—линейные операторы в H, из E в H и в E, матрицы которых в координатных базисах таковы

$$T=i\begin{bmatrix} 0 & \Delta_L^{-1}A_{13} \\ \Delta_C^{-1}(B_{31}+B_{33}B_{11}) & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma=i\begin{bmatrix} -\Delta_L^{-1}A_{11} & 0 \\ 0 & -\Delta_C^{-1}B_{33} \end{bmatrix},$$

$$J=\begin{bmatrix} 0 & U \\ U & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Положим $\psi=\begin{bmatrix} \tilde{I}_L \\ V_C \end{bmatrix}$. Уравнения (16), (17) в операторной форме перепишутся так

$$(T-\lambda I)\,\psi=\Gamma\varphi^-,\ \varphi^+=\varphi^--iJ\Gamma^\times\psi. \tag{19}$$

(Здесь и далее $\times$ обозначает переход к сопряженному оператору).

Используя матричные представления операторов, находим, что

$$J^2=I,\ J^\times = J,\ T - T^\times = i\Gamma J\Gamma^\times,$$

так что совокупность

$$N_G = N_G(E,\ H;\ J,\ \Gamma,\ T) \tag{20}$$

есть операторный узел.

Из (19) следует, что вектор $\varphi^+ = \begin{bmatrix} \tilde{V} \\ \tilde{I} \end{bmatrix}$ однозначно определяется вектором $\varphi^- = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$, причем передаточное отображение

$$S(\lambda) = I - iJ\Gamma^\times (T - \lambda I)^{-1}\,\Gamma$$

есть х. ф. узла (20). Теорема доказана.

LC-граф G, удовлетворяющий условиям $G1$) и $G2$), будем называть *графом класса* Ω. Открытую систему

$$F_G = F_G(E,\ H;\ S(\lambda),\ R(\lambda)), \tag{21}$$

соответствующую узлу (20), назовем *открытой системой на графе G класса* Ω.

III. Эквивалентность открытых систем на графах класса Ω

1. Операторные узлы

$$N_j = N_j(E,\ H_j;\ J,\ \Gamma_j,\ T_j),\ j=1,\ 2 \tag{1}$$

(и соответствующие им открытые системы F_j) называются *эквивалентными*, если их х. ф. (передаточные отображения систем) совпадают.

Для формулировки условий эквивалентности узлов (систем) приведем некоторые определения [1].

Обозначим через H_j^0 замыкание линейной оболочки векторов вида $(T_j - \lambda I)^{-1}\Gamma_j\,\varphi$ ($\varphi \in E$, $\lambda \bar{\in} \sigma(T_j)$) или, что то же, векторов вида $T_j^m\Gamma_j\varphi$ ($\varphi \in E$, $m=0,\ 1,\ 2,\cdots$). H_j^0 называется *простой компонентой* H_j. Это—наименьшее подпространство в H_j, вмещающее все внутренние состояния открытой системы, соответствующей узлу N_j. H_j^0-инвариантно относительно T_j и $T_j^\times$. Пусть P_j^0—ортопроектор из H_j на H_j^0. Положим $\Gamma_j^0 = P_j^0\,\Gamma_j$, $T_j^0 = T_j\,P_j^0$. Совокупность

$$N_j^0 = N_j^0(E,\ H_j^0;\ J,\ \Gamma_j^0,\ T_j^0) \tag{2}$$

является узлом [1]. Он называется *простой частью* узла N_j.

Операторный узел называется *простым*, если он совпадает со своей простой частью.

Открытая система F_j^0, соответствующая узлу N_j^0, называется *простой частью* системы F_j, соответствующей узлу N_j. Система, совпадающая со своей простой частью, называется *простой*.

Узлы (1) *унитарно эквивалентны*, если существует изометрический оператор W, отображающий H_1 на H_2, такой, что

$$T_2 = WT_1W^{-1}, \ \Gamma_2 = W\Gamma_1. \tag{3}$$

Теорема 2 [1] (об унитарной эквивалентности операторных узлов).

Для того чтобы операторные узлы N_1 и N_2 были эквивалентными , необходимо и достаточно, чтобы их простые части были унитарно эквивалентными.

Теорема 2 будет использована нами для изучения эквивалентных преобразований открытых систем на графах класса Ω.

2. Сохраним обозначения предыдущего параграфа.

Столбцы матрицы Γ (II. 18) суть векторы пространства H. Первые n из них обозначим через $g_1, \cdots, g_n$, последние n—через $f_1, \cdots, f_n$. Пусть H^L— подпространство векторов из H с равными нулю последними p координатами, а H^C—подпространство векторов с равными нулю первыми $\mu - r$ координатами (напомним, что μ—общее число L-ребер графа, r—число L-ребер, вошедших в дерево t, p — число C-ребер дерева). Тогда

$$H = H^L \oplus H^C, \ g_k \in H^L, f_k \in H^C, \ T(H^L) \subset H^C, \ T(H^C) \subset H^L. \tag{4}$$

Простая компонента H—подпространство H_0—есть линейная оболочка векторов вида $T^l g_k$, $T^l f_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$; $l = 0, 1, 2, \cdots$).

При этом

$$T^{2l} g_k \in H^L, \ T^{2l+1} f_k \in H^L, \tag{5}$$

$$T^{2l+1} g_k \in H^C, \ T^{2l} f_k \in H^C. \tag{6}$$

Линейную оболочку векторов вида (5) обозначим через H_0^L, векторов вида (6)—через H_0^C. Имеем

$$H_0^L \subset H^L, \ H_0^C \subset H^C, \ H_0 = H_0^L \oplus H_0^C. \tag{7}$$

Очевидно, $\mu - r \geqslant \dim H_0^L$, $p \geqslant \dim H_0^C$, так что и подавно

$$\mu \geqslant \dim H_0^L, \ \nu \geqslant \dim H_0^C \tag{8}$$

(ν—общее число C-ребер графа).

3. Рассматривая одновременно с системой F_a на графе $G \in \Omega$ систему $F_{\hat{a}}$ на графе $\hat{G} \in \Omega$ с тем же внешним пространством и канальным оператором J, все объекты, относящиеся к $F_{\hat{a}}$, будем обозначать теми же символами, что и аналогичные объекты для F_a, с добавлением значка $\wedge$.

Теорема 4. *Если $F_{\hat{a}}$ —открытая система на графе $\hat{G} \in \Omega$,* *эквивалентная системе F_a на графе $\hat{G}$ (п. 2), то число $L = (C\text{-})$ ребер графа $\hat{G}$ не меньше* $\dim H_0^L$ ($\dim H_0^C$), *так что общее число внутренних ребер графа $\hat{G}$ не меньше размерности простой компоненты H_0 внутреннего пространства H системы F_a.*

Доказательство. Пусть системы F_a и $F_{\hat{a}}$ эквивалентны. Согласно теореме 3 простые части соответствующих узлов N_a и $N_{\hat{a}}$ унитарно эквивалентны. Пусть W—изометрический оператор, отображающий H_0 на $\hat{H}_0$, такой, что

$$\hat{T} = WTW^{-1} \text{ (на } \hat{H}_0), \quad \hat{\Gamma} = W\Gamma. \tag{9}$$

Из (9) и строения матрицы $\hat{\Gamma}$ (см. (II. 18)),

$$\hat{\Gamma} = -i\begin{bmatrix} \hat{\Delta}_L^{-1} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}_C^{-1} \hat{B}_{22} \end{bmatrix},$$

следует, что

$$\hat{g}_k = Wg_k \in \hat{H}_0^L, \quad \hat{f}_k = Wf_k \in \hat{H}_0^C \ (k = 1, \cdots, n). \tag{10}$$

Отсюда следует, что W отображает H_0^L на $\hat{H}_0^C$ взаимно однозначно, так что

$$\dim \hat{H}_0^L = \dim H_0^L. \tag{11}$$

Аналогично

$$\dim \hat{H}_0^C = \dim H_0^C. \tag{12}$$

Неравенство (8), записанное для $F_{\hat{a}}$, имеет вид $\hat{\mu} \geqslant \dim \hat{H}_0^L$ $\hat{\nu} \geqslant \dim \hat{H}_0^C$. С учетом (11) и (12) имеем

$$\hat{\mu} \geqslant \dim H_0^L, \ \hat{\nu} \geqslant \dim H_0^C, \tag{13}$$

что доказывает теорему.

Теорема 4 дает оценку снизу для числа L- (C-) ребер графа класса Ω, реализующего открытую систему, эквивалентную заданной системе на графе того же класса.

4. Число внутренних ребер графа $G \in \Omega$ может превышать размерность внутреннего пространства H открытой системы на G ($\dim H$ есть сумма числа C-ветвей и L-хорд дерева t, см. II, п. I). Граф $G \in \Omega$ назовем *полусокращенным*, если в нем нет сечений, образованных L-ребрами, и циклов, состоящих из C-ребер. Полусокращенный граф G характеризуется тем, что число его внутренних ребер совпадает с размерностью внутреннего пространства F_a, так как все его C-ребра войдут в дерево t, а все L-ребра окажутся хордами t.

Теорема 5. *Открытая система F_a на графе $G \in \Omega$ эквивалентна открытой системе на полусокращенном графе.*

Граф G класса Ω с матрицей циклов (II. 14) подвергнем следующему преобразованию. Стянем все L-ветви дерева t и удалим все C-хорды. Граф G преобразуется в граф $\hat{G}$, а дерево t— в дерево $\hat{t}$. При этом новые матрицы циклов и сечений будут иметь вид

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & U & 0 \\ U & A_{33} & 0 & U \end{bmatrix}, \hat{S} = \begin{bmatrix} U & 0 & B_{11} & U \\ 0 & U & B_{31} & B_{33} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Граф $\hat{G}$—полусокращенный. Его L-(C-) ребрам в качестве матриц параметров припишем матрицы Δ_L (Δ_C) (II. 7). Для открытой системы $F_{\hat{G}}$ на графе $\hat{G}$ внутреннее пространство, внутренний оператор T, оператор связи Γ и каналовый оператор J—те же, что и для системы F_G (II. 18). Поэтому передаточные отображения F_G и $F_{\hat{G}}$ совпадают.

Теорема доказана.

Как видно из теоремы 4, простая открытая система на полусокращенном графе не допускает уменьшения числа внутренних ребер (L-ребер и C-ребер) графа без изменения передаточного отображения. В этом смысле полусокращенный граф, реализующий простую систему F, можно назвать минимальным. В связи с этим представляются интересными условия простоты систем на полусокращенных графах, а также отыскание простых систем, эквивалентных заданной системе.

5. Напомнив о соглашении об обозначениях, принятом в начале п. 3, рассмотрим эквивалентные системы F_G и $F_{\hat{G}}$ на графах G и $\hat{G}$.

Выберем в H_0^L и H_0^C (см. п. 2) базисы

$$e_1, \cdots, e_a \text{ и } h_1, \cdots, h_b \quad (a = \dim H_0^L,\ b = \dim H_0^C). \tag{15}$$

Изометрический оператор W (п. 3) переводит их в базисы

$$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_a \text{ и } \hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_b \tag{16}$$

пространств $\hat{H}_0^L$ и $\hat{H}_0^C$. Матрицы

$$(e_1, \cdots, e_a, h_1, \cdots, h_b) \text{ и } (\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_a, \hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_b)$$

имеют вид

$$\begin{array}{c} \mu - r \\ p \\ \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \hat{\mu} - \hat{r} \\ \hat{p} \end{array} \tag{17}$$
$$\quad a \ b \qquad\qquad a \ b$$

Пусть P и $\hat{P}$—ортопроекторы из H в H_0 и из $\hat{H}$ в $\hat{H}_0$ соответственно. В координатных базисах они задаются матрицами

$$P = \begin{vmatrix} \mathbf{E}\,(\mathbf{E}^* \Delta_L \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^* \Delta_L & 0 \\ 0 & \mathbf{H}\,(\mathbf{H}^* \Delta_C \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^* \Delta_C \end{vmatrix},$$

$$\hat{P} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{E}}\,(\hat{\mathbf{E}}^* \hat{\Delta}_L \hat{\mathbf{E}})^{-1} \hat{\mathbf{E}}^* \hat{\Delta}_L & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{H}}\,(\hat{\mathbf{H}}^* \hat{\Delta}_C \hat{\mathbf{H}})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^* \hat{\Delta}_C \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Равенства $\Gamma = P\Gamma$ и $PTP = TP$, первое из которых означает, что область значений Γ лежит в H_0, а второе выражает инвариантность H_0 относительно T, в матричной форме принимают вид (см. (II. 18))

$$\Delta_L^{-1} A_{11} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^* A_{11},\quad \Delta_C^{-1} B_{33} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^* B_{33},$$

$$\Delta_L^{-1} A_{13}\mathbf{H} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^* A_{13}\mathbf{H},\quad \Delta_C^{-1} B_{31}\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^* B_{31}\mathbf{E}. \qquad (19)$$

Аналогичные соотношения верны и для системы $F_{\hat{C}}$.

Изометричность оператора W равносильна выполнению равенств

$$\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E}^* = \hat{\mathbf{E}}^*\hat{\Delta}_L\hat{\mathbf{E}},$$

$$\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}^*\hat{\Delta}_C\mathbf{H}. \qquad (20)$$

Равенство (9) вместе с (20) приводит к соотношениям

$$\hat{\Delta}_L^{-1}\hat{A}_{11} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^* A_{11},\quad \hat{\Delta}_C^{-1} B_{32} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1} H^* B_{33}, \qquad (21)$$

$$\hat{\Delta}_L^{-1}\hat{A}_{13}\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{E}^*\Delta_L\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^* A_{14}\mathbf{H},\quad \hat{\Delta}_C^{-1}\hat{B}_{31}\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{H}^*\Delta_C\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^* B_{11}\mathbf{E}. \qquad (22)$$

Равенства (20), (21), (22) не только необходимы, но и достаточны для эквивалентности систем F_G и $F_{\hat{G}}$. Точнее, имеет место

Теорема 6. *Пусть F_G и $F_{\hat{G}}$ — открытые системы на графах G и $\hat{G}$. Матрицу*

$$\begin{array}{c} \mu - r \\ p \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} a & b \end{array} \end{array} \qquad (23)$$

определим по графу G, как это сделано в (17). *Если существует матрица вида*

$$\begin{array}{c} \hat{\mu} - \hat{r} \\ \hat{p} \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{E}} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} a & b \end{array} \end{array}, \qquad (24)$$

такая, что выполнены равенства (20), (21), (22), *то системы F_G и $F_{\hat{G}}$* эквивалентны.

Из (20) следует, что столбцы матрицы (24) линейно независимы. Будем рассматривать их как векторы в $\hat{H}$ — $\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_a$ и $\hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_b$. Линейную оболочку этих векторов обозначим через $\hat{H}_0$, а ортопроектор на $\hat{H}_0$ — через $\hat{P}$. Матрица $\hat{P}$ имеет вид (18). Определим оператор W из H_0 в $\hat{H}_0$, положив

$$We_k = \hat{e}_k,\ 1 \leqslant k < a;\quad Wh_j = \hat{h}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant b,$$

и продолжим его по линейности. В силу (20) W — изометрический оператор, отображающий H_0 на $\hat{H}_0$. Из (19) и (21)

$$\hat{\Gamma} = W\Gamma, \tag{25}$$

а из (19) и (22)

$$\hat{T}\hat{P} = WTW^{-1}\hat{P}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) $\hat{T}\hat{\Gamma} = WTW^{-1}\hat{P}W\Gamma = WT\Gamma$ и, вообще, $\hat{T}^k\hat{\Gamma} = WT^k\Gamma$. Из (25) $\hat{\Gamma}^\times = \Gamma^\times W^{-1}\hat{P}$. Поэтому $\hat{\Gamma}^\times \hat{T}^k \hat{\Gamma} = \Gamma^\times T^k \Gamma$. Отсюда вытекает совпадение передаточных отображений $\hat{S}(\lambda)$ и $S(\lambda)$ систем F_a и $F_{\hat{a}}$. Теорема доказана.

6. Существует ли простая система на (полусокращенном) графе $\hat{G}$, эквивалентная заданной системе на графе G?

Теорема 7. *Пусть F_a — открытая система на полусокращенном графе G и матрица*

$$\begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array}\begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{27}$$

определена, как это сделано в (17) (*ввиду полусокращенности графа $r=0$, $p=\nu$*). *Для существования графа $\hat{G}$, порождающего простую систему $F_{\hat{a}}$, эквивалентную системе F_a, необходимо и достаточно, чтобы можно было указать невырожденные квадратные матрицы A и B порядков a и b соответственно, такие, чтобы матрица*

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{E}^*A_{11} & A\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H}B & U & 0 \\ U & A_{33}\mathbf{H}B & 0 & U \end{bmatrix} \tag{28}$$

допускала реализацию как матрица циклов некоторого графа.

Необходимость. Пусть $F_{\hat{a}}$ — простая система на полусокращенном графе, эквивалентная F_a. В обозначениях (17) $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ — невырожденные матрицы порядков a и b. Из (20), (21), (22)

$$\hat{A}_{11} = \hat{\mathbf{E}}^{*-1}\mathbf{E}^*A_{11}, \quad \hat{A}_{33} = A_{33}\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}, \quad \hat{A}_{13} = \hat{\mathbf{E}}^{*-1}\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}^{-1}.$$

Положим $A = \hat{\mathbf{E}}^{*-1}$, $B = \hat{\mathbf{H}}^{-1}$. Матрица (28) есть матрица циклов графа $\hat{G}$.

Достаточность. Пусть (28) — матрица циклов некоторого графа $\hat{G}$. Ребра, отвечающие столбцам ее блоков

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{E}^*A_{11} \\ U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A\mathbf{E}^*A_{13}\mathbf{H}B \\ A_{33}\mathbf{H}B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix},$$

назовем соответственно входными, L-, C-и выходными ребрами. Очевидно, $\hat{G}\in\Omega$. Поставим в соответствие C- и L- ребрам матрицы параметров

$$\hat{\Delta}_C = B^*\mathrm{H}^*\Delta_C\mathrm{H}B,\ \hat{\Delta}_L = A\mathrm{E}^*\Delta_L\mathrm{E}A^*. \tag{29}$$

Полагая $\hat{\mathrm{E}}=A^{*-1}$, $\hat{\mathrm{H}}=B^{-1}$, убеждаемся в выполнении условий теоремы 7. Поэтому система $F_{\hat{a}}$ эквивалентна системе F_a. Система $F_{\hat{a}}$ — простая, ибо для нее $\hat{H}=\hat{H}_0^L\oplus\hat{H}_0^C=\hat{H}_0$ (см. (16)).

Теорема доказана.

7. Укажем некоторые условия простоты открытой системы на графе. Известно [4], что для простоты операторного узла (1.1) и соответствующей ему открытой системы (1.2) необходимо и достаточно, чтобы внутренний оператор T не имел нетривиального инвариантного подпространства, на котором аннулировался бы оператор $\Gamma^\times$. Если внутреннее пространство H конечномерно, это условие равносильно следующему: оператор T не имеет собственного вектора, на котором аннулируется оператор $\Gamma^\times$. Используя матричное представление операторов T и Γ (II. 18), мы приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 8. *Открытая система F_a* (II. 21) *проста тогда и только тогда, когда для каждого λ система уравнений*

$$A_{13}\psi_2=\lambda\Delta_L\psi_1,\ B_{31}\psi_1=\lambda\Delta_C\psi_2,\ B_{11}\psi_1=0,\ A_{33}\psi_2=0 \tag{30}$$

имеет лишь тривиальное решение относительно ψ_1 и ψ_2.

Отсюда, в частности, следует, что если система F_a на полусокращенном графе G проста, то в графе нет ни L-циклов, ни C-сечений.

Действительно, если в графе имеется L-цикл (т. е. цикл из L-ребер), то, как видно из (14), между строками матрицы (A_{11}, A_{13}) имеется линейная зависимость. Пусть первые s строк ее линейно независимы, а остальные суть их линейные комбинации. Матрицы, образованные первыми s строками матриц A_{11} и A_{12}, обозначим через a_{11} a_{13}. Тогда

$$A_{11}=\begin{pmatrix}U\\K\end{pmatrix}a_{11},\ A_{13}=\begin{pmatrix}U\\K\end{pmatrix}a_{13},$$

где K—некоторая матрица.

Система (30) при $\lambda=0$ допускает ненулевое решение: ψ_1—какой-нибудь столбец матрицы $\begin{pmatrix}-K'\\U\end{pmatrix}$, $\psi_2=0$, так что система не проста. Аналогично доказывается отсутствие C-сечений.

Полусокращенный граф класса Ω назовем *сокращенным*, если в нем нет ни L-циклов, ни C-сечений. С помощью теоремы 6 можно показать, что всякая система на графе $G\in\Omega$ эквивалентна системе на сокращенном графе.

Заметим, что сокращенность графа лишь необходима, но не достаточна для простоты порождаемой им системы.

Донецкий государственный
университет

Поступила 22.VI.1972

Դ. Մ. ՉԱՈՒՍՈՎՍԿԻ. Բաց համակարգերի համարժեք ձևափոխումներ գրաֆների վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում նշվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի LC-գրաֆով ծնված փոխանցման ֆունկցիան համընկնի որոշ օպերատորային հանգույցի բնութագրիչ ֆունկցիայի հետ, Մ. Ս. Բրոդսկու և Մ. Ս. Լիվշիցի իմաստով։

Այդպիսի գրաֆների համար, օպերատորային հանգույցների ունիտար համարժեքության մասին թեորեմի օգնությամբ, ուսումնասիրված են փոխանցման ֆունկցիան պահպանող ձևափոխություններ, մասնավորապես՝ գրաֆի ներքին կողերի քանակի կրճատման հետ կապված ձևափոխությունները։

D. M. CHAUSOVSKII. *Equivalent transformations of open systems on graphs*
(summary)

The necessary and sufficient conditions for the trans for function, generated by *LC*-graph to coincide with charakteristic function of some operator nodus are pointed out. Transformations, which retain the transfer function are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Лившиц.* Операторы, колебания, волны (открытые системы), изд. „Наука", 1966.
2. *А. Г. Руткас.* Несамосопряженные операторы в теории многополюсников, Записки Харьковского математического общества, т. XXXII, 1965.
3. *Д. М. Чаусовский.* Открытые системы на графах, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", 2, № 2, 1967.
4. *М. С. Бродский, Ю. Л. Шмульян.* Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции, УМН, XIX, I (115), 1964.
5. *С. Сешу, Н. Балабанян.* Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат, 1963.
6. *Myril B. Reed.* The Seg: A new class of graphs, IRE Transactions on C. T., v. CT—8, 1961.
7. *David P. Brown.* Derivative—explicit differential equations for RLC—graphs, J. Franklin Inst, 275, № 6, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VIII, № 1, 1973 Математика

О. А. МУРАДЯН

О РОСТЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ АГРЕГАТОВ В ТЕОРЕМЕ МЮНЦА

Введение

В работах Фань-Цзи и Дейвиса [1], [2] и С. Я. Хавинсона [3], [4], [5] предложен общий метод учета величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в вопросах полноты систем.

Ряд конкретных результатов получен этим методом в [6] — [8]. В работах [9], [10] приводится, в частности, обобщение хорошо известной аппроксимационной теоремы Мюнца (см., например [11] — [16]) в духе указанной теории. При этом, однако, аппроксимация в [9], [10] рассматривалась как и в классическом случае, на отрезке [0,1].

В настоящей работе мы рассматриваем дополнения к аппроксимационной теореме Мюнца, связанные с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих полиномов, в том случае, когда аппроксимация ведется на компактах более общих, чем [0,1].

Согласно соотношениям двойственности из [1] — [5], возможность учета величин коэффициентов аппроксимирующих полиномов связана с такими теоремами единственности теории аналитических функций, в которых заключение $F(z) \equiv 0$ выводится из того, что $F(z)$ достаточно быстро убывает на некотором множестве точек. В связи с этим, основное место в настоящей статье занимает рассмотрение вопросов единственности такого рода для функций, имеющих вид

$$F(z) = \int\limits_{\Gamma} e^{z \ln t} \, d\mu(t), \tag{1}$$

где Γ — некоторый компакт в комплексной плоскости, а μ — произвольная бэровская мера на Γ. Дело в том, что применение теорем из [1] — [5] к аппроксимационной задаче Мюнца приводит к рассмотрению функций вида (1).

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность профессору С. Я. Хавинсону за постановку задачи и помощь при выполнении настоящей работы, а также профессору М. А. Евграфову за ценные советы и консультации.

Для удобства чтения работы приведем ряд теорем единственности, на которых основаны излагаемые далее результаты.

Теорема 1 ([17]). Пусть $\{\zeta_k\}$ — последовательность точек единичного круга, лежащих внутри сектора с вершиной в точке $\zeta = 1$, образованного двумя хордами окружности $|\zeta|=1$, причем $\zeta_k \to 1$ и выполнены условия:

$$\sum_k 1-|\zeta_k| = \infty, \tag{2}$$

$$\left|\frac{1+\zeta_k}{1-\zeta_k}\right| - \left|\frac{1+\zeta_{k+1}}{1-\zeta_{k-1}}\right| \geqslant d > 0, \tag{3}$$

где d не зависит от k.

В таком случае всякая функция $f(\zeta)$, голоморфная и ограниченная внутри единичного круга, равна тождественно нулю, если выполнено соотношение

$$\lim_{k\to\infty} |1-\zeta_k| \ln |f(\zeta_k)| = -\infty. \tag{4}$$

(Заметим, что в работах [9], [10] теорема, дополняющая аппроксимационную теорему Мюнца, сформулирована неточно, так как при использовании теоремы 1 опущено условие о нахождении точек ζ_k внутри сектора).

В следующей теореме отсутствует предположение о том, что точки ζ_k находятся внутри угла, однако условие несгущаемости (3) имеет другой вид.

Теорема 2([18]). Пусть последовательность $\{\zeta_k\}$, $|\zeta_n|<1$ такова, что

$$\sum_1^\infty 1-|\zeta_k| = \infty, \tag{2}$$

$$\frac{|\zeta_k| - |\zeta_{k-1}|}{(1-|\zeta_k|)(1-|\zeta_{k-1}|)} \geqslant d > 0, \tag{5}$$

где $d>0$ не зависит от k.

Если $f(\zeta)$ — ограниченная в круге $|\zeta|<1$ аналитическая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \ln|f(\zeta_n)|\,(1-|\zeta_n|) = -\infty, \tag{6}$$

то $f(\zeta)\equiv 0$.

Теоремы 1 и 2 верны, конечно, также и для функций ограниченного вида в круге $|\zeta|<1$.

Теорема 3 ([15], [19], [20]). Пусть $F(z)$ — регулярная в угле $|\arg z| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ функция, и пусть

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r} \leqslant a\cos\theta + b\,|\sin\theta|, \tag{7}$$

где a и b — конечные числа.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{z_n} = D > 0, \tag{8}$$

$$|z_n - z_m| \geqslant |n - m|, \ d > 0. \tag{9}$$

Тогда если

$$\pi D > b, \tag{10}$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(r)|}{r}. \tag{11}$$

Теорема 4 ([19], [20]). Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в правой полуплоскости $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi$, для которой

$$|F(re^{i\theta})| = O(\exp\{\delta \log r \cos\theta + \pi\sigma |\sin\theta| + \varepsilon | r|\}), \ |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

где $\delta \geqslant 0$, $\sigma \geqslant -\frac{1}{2}\delta$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям (8), (9), где

$$D > \sigma + \frac{1}{2}\delta. \tag{8}$$

Тогда, если

$$F(z_n) = O\left(e^{-k|z_n|\ln|z_n|}\right), \tag{13}$$

где

$$k > 2\sigma, \tag{14}$$

то $F(z) \equiv 0$.

Замечание. Теоремы 3 и 4 остаются справедливыми ([20]) при замене требования аналитичности в замкнутой полуплоскости требованием непрерывности в замкнутой полуплоскости и аналитичности внутри полуплоскости.

Мы будем рассматривать функции вида (1), считая всегда компакт Γ удовлетворяющим следующему условию (A):

Функция $\arg t$ ($t \in \Gamma$) допускает на $\Gamma \setminus \{0\}$ выделение однозначной и ограниченной ветви $|\arg t| \leqslant b$, $t \in \Gamma$.

Приступая к рассмотрению функций вида (1), сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. *Если* $0 \notin \Gamma$, *то задаваемая формулой* (1) *функция* $F(z)$ — *целая. Если же* $0 \in \Gamma$, *то* $F(z)$ *аналитична в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *и при* $\mu\{0\} = 0$ *непрерывна в замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$

Замечание. Рассматривая функцию вида (1) в случае $0 \in \Gamma$ при $\operatorname{Re} z > 0$ мы всегда можем считать, что $\mu\{0\} = 0$. Действительно, обозначим атом меры в точке $t = 0$ через μ_0.
Тогда

$$F(z) = \int_{\Gamma} e^{z \ln t} d\mu(t) = \mu_0 \cdot 0 + \int_{\Gamma\setminus\{0\}} e^{z \ln t} d\mu(t).$$

Доказательство леммы 1. Пусть

$$x = \operatorname{Re} z, \; y = \operatorname{Im} z, \; \theta = \arg z.$$

Тогда

$$|e^{z \ln t}| = |e^{(x+iy)(\ln|t| + i \arg t)}| = e^{x \ln|t| - y \arg t}. \tag{15}$$

В силу условия (A) $|\arg t| \leqslant b$.

Когда точка $0 \bar{\in} \Gamma$, $|\ln(t)|$ ограничена и (15) показывает, что интеграл (1) абсолютно сходится при любом z, а потому представляет целую функцию.

Если $0 \in \Gamma$, то $-\infty \leqslant \ln|t| \leqslant C < \infty$ $(t \in \Gamma)$ и равенство (15) показывает, что (1) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и представляет аналитическую функцию $B \operatorname{Re} z > 0$.

Для доказательства непрерывности $F(z)$ при условии $\mu\{0\} = 0$ изолируем точку $t = 0$ сколь угодно малой δ-окрестностью. Часть компакта Γ, которая лежит вне окрестности обозначим через $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$. Тогда

$$F_\delta(z) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\delta} e^{z \ln t} \, d\mu(t)$$

— целая функция, так как $0 \bar{\in} \Gamma \setminus \Gamma_\delta$.

Покажем, что в замкнутом полукруге $|z| \leqslant R$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ (R — сколь угодно большое) функция $F_\delta(z)$ равномерно сходится к $F(z)$ при $\delta \to 0$. Оценим разность $F(z) - F_\delta(z)$ (при $\delta < 1$)

$$|F(z) - F_\delta(z)| \leqslant \int_{\Gamma_\delta} |e^{z \ln t}| \, |d\mu(t)| \leqslant \max_{t \in \Gamma_\delta} |e^{z \ln t}| \int_{\Gamma_\delta} |d\mu(t)| \leqslant e^{bR} \int_{\Gamma_\delta} |d\mu(t)|.$$

Так как $\mu\{0\} = 0$, то $\int_{\Gamma_\delta} |d\mu(t)| \to 0$ и $|F(z) - F_\delta(z)| \to 0$ равномерно относительно z, а это доказывает лемму.

В дальнейшем изложении мы считаем, что если $0 \in \Gamma$, то $\mu\{0\} = 0$

Выясним теперь, когда функции вида (1) при любой мере, сосредоточенной на Γ, являются функциями ограниченного вида.

Напомним ([21], [22]), что аналитическая функция $f(z)$ называется функцией ограниченного вида в некоторой области D, если $\ln^+ |f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту. Это определение инвариантно относительно конформных преобразований области.

Для случая, когда область D — единичный круг, наличие у $\ln^+|f(z)$ гармонической мажоранты эквивалентно ограниченности интегралов

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi \leqslant C < +\infty, \; 0 < r < 1. \tag{16}$$

Любая функция ограниченного вида может быть представлена как частное двух ограниченных аналитических функций. (Последнее условие есть необходимый и достаточный признак функций ограниченного вида).

Лемма 2. *Для того чтобы функция вида* (1) *была функцией ограниченного вида в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *при любой мере* μ, *сосредоточенной на заданном компакте* Γ, *необходимо и достаточно, чтобы компакт* Γ *лежал на положительной полуоси.*

Доказательство. Пусть сперва $\Gamma \subset [0, \infty)$. Положим

$$\alpha = \sup \Gamma, \quad a = \ln \alpha, \quad C = \int\limits_{\Gamma} |d\mu(t)|.$$

Из оценки (15) получаем

$$|F(z)| \leqslant Ce^{a \operatorname{Re} z}, \tag{17}$$

т. е. $\ln^+ |F(z)| \leqslant a \operatorname{Re} z + \ln C$ и, следовательно, гармоническая функция $a \operatorname{Re} z + \ln C$ есть мажоранта для $\ln^+ |F(z)|$. Поэтому $F(z)$ — функция ограниченного вида.

Допустим теперь, что компакт Γ не лежит на положительной оси, т. е. $\exists t \in \Gamma$, для которого $\arg t \neq 0$; для определенности считаем, что $\arg t > 0$.

Возьмем меру μ, сосредоточенную в одной этой точке t, пусть $\mu\{t\} = 1$. Тогда

$$F(z) = e^{z \ln t}.$$

Сделаем конформное отображение на единичный круг $|\zeta| < 1$

$$z = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad \zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Для функции $f(\zeta) = f(\rho e^{i\varphi}) = F\left(\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$ получаем

$$|f(\rho e^{i\varphi})| = e^{\ln |t| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2} - \arg t \frac{2\rho \sin\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}}.$$

Покажем, что для $f(\zeta)$ не выполняется условие (16). Действительно

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi \geqslant \int\limits_{\pi}^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\pi}^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \ln |t| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\, d\varphi +$$

$$+ |\arg t| \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{2\rho\, |\sin\varphi|}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2}\, d\varphi. \tag{18}$$

(Мы взяли интервал $[\pi, 2\pi]$, чтобы второй член (18) имел положительный знак). Но второй интеграл в (18) стремится к ∞ при $\rho \to 1$, а первый ограничен.

Основываясь на теоремах единственности для функций ограниченного вида (теоремы 1, 2) и лемме 2, можно доказать следующие две теоремы.

Теорема 5. *Пусть компакт* Γ *расположен на луче* $\arg t = c = \mathrm{const}$, *а последовательность точек* $\{z_k\} \to \infty$, $z_k \neq 0$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\{z_k\} \text{ лежит в угле } |\arg z| \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}, \tag{19}$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|z_k|} = \infty, \tag{20}$$

$$|z_{k+1}| - |z_k| \geqslant d > 0. \tag{21}$$

Если для функции вида (1) *выполняется условие*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln |F(z_k)|}{|z_k|} = -\infty, \tag{22}$$

то $F(z) \equiv 0$ *и мера* $\mu \equiv 0$. *В то же время, если* 0 — *предельная точка, то для любого сколь угодно большого* $N > 0$ *существует функция* $F(z) \not\equiv 0$ *вида* (1), *для которой*

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln |F(z_k)|}{|z_k|} < -N. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, когда Γ содержится в $[0, \infty)$ $(c = 0)$. Тогда по лемме 2 $F(z)$—функция ограниченного вида в $\operatorname{Re} z > 0$ и справедливость первого утверждения нашей теоремы получается из теоремы 1, если условия (2), (3) и (4) пересчитать с помощью конформного отображения $\zeta = \dfrac{z-1}{z+1}$ круга $|\zeta| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Условие (19) получается из требования в теореме 1 расположения точек $\{\zeta_k\}$ в секторе с вершиной в $\zeta = 1$.

Если компакт лежит на луче $\arg t = c \neq 0$, то при помощи функции

$$t = t' e^{i \arg t} = t' e^{ic}, \quad t \in \Gamma, \quad t' \in [0, \infty)$$

отобразим Γ на положительную ось. Образ компакта Γ обозначим Γ'. Получаем

$$F(z) = \int_\Gamma e^{z \ln t}\, d\mu(t) = \int_{\Gamma'} e^{z \ln (t' e^{ic})}\, d\mu(t' e^{ic}) =$$

$$= \int_{\Gamma'} e^{z \ln t'} e^{icz}\, d\mu(t' e^{ic}),$$

отсюда

$$F(z)=G(z)\,e^{izc}, \tag{24}$$

где $G(z)=\int\limits_{\Gamma'} e^{z\ln t'}\,d\mu(t'\,e^{ic})$ — функция ограниченного вида.

Из (24) имеем

$$\ln\frac{|G(z_k)|}{|z_k|}=\frac{\ln|F(z_k)|}{|z_k|}-\frac{\ln|e^{iz_kc}|}{|z_k|},$$

но $|e^{iz_kc}|=e^{\operatorname{Re}(iz_kc)}=e^{-c\operatorname{Im}z_k}$.

Значит

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|G(z_k)|}{|z_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|F(z_k)|}{|z_k|}+\lim_{k\to\infty}c\frac{\operatorname{Im}z_k}{|z_k|}.$$

Следовательно, в силу (22)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln|G(z_k)|}{|z_k|}=-\infty,$$

так как $\frac{\operatorname{Im}z_k}{|z_k|}$ ограничено.

Поэтому $G(z)\equiv 0$ и, следовательно, $F(z)\equiv 0$.

Докажем теперь, что из равенства $F(z)\equiv 0$ следует, что и $\mu(t)\equiv 0$.

В частности, из $F(z)\equiv 0$ вытекает, что $F(n)=0$, $n=1,2,\cdots$. Это дает $\int\limits_{\Gamma} t^n\,d\mu(t)=0$, $n=1,2,\cdots$. Если $\int\limits_{\Gamma}d\mu(t)=B\neq 0$, то присоединим к Γ точку 0 (если $0\notin\Gamma$) и положим $\Gamma_1=\Gamma\cup\{0\}$. На Γ_1 определим меру μ_1, положив

$\mu_1\{0\}=-B$, $\mu_1(e)=\mu(e)$, если $e\subset\Gamma$. Тогда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_1} t^n\,d\mu_1(t)=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Так как компакт не имеет внутренних точек и не разбивает плоскость, то система степеней $\{t^n\}$ на нем полна (в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса-Лаврентьева (см. [12]) и поэтому мера $\mu_1\equiv 0$. Но тогда и мера $\mu\equiv 0$, и первая часть теоремы доказана.

Для того чтобы убедиться в справедливости второй части теоремы, рассмотрим последовательность точек $\{t_m\}$ компакта Γ, сходящуюся к нулю. Пусть μ сосредоточена в единственной точке

$$t_m:\ t_m=|t_m|\,e^{ic},\ \mu\{t_m\}=1,\ 0<t_m<1.$$

Тогда $F(z)$ имеет вид

$$F(z)=e^{z\ln t_m},\ \text{где}\ \ln|t_m|<-N,$$

N — сколь угодно большое число. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|F(z_m)|}{|z_m|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\ln|t_m|(\operatorname{Re}z_n-c\operatorname{Im}z_n}{|z_n|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant -N\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\operatorname{Re}z_n}{|z_n|}-c\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\operatorname{Im}z_n}{|z_n|}\leqslant N\cos\delta-c\sin\delta.$$

Значит $F(z)=e^{z\ln t_m}$ удовлетворяет условию (23) и $F(z)\not\equiv 0$.

Замечание. В случае, когда 0 не является предельной точкой для Г не трудно понять, что условие

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|F(z_n)|}{|z_n|}=-\infty$$

не является необходимым для того, чтобы $F(z)$ вида (1) была тождественным нулем.

Такими же рассуждениями, как в теореме 5, но основываясь вместо теоремы 1 на теореме 2, придем к следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть компакт* Г, *по-прежнему расположен на луче* $\arg t=c$, *а* $z_k\to\infty$, *последовательность* $\{z_k\}$, $z_k\neq 0$ *такова, что*

$$\sum_n\frac{\operatorname{Re}z_n}{|z_n|^2}=\infty, \tag{25}$$

$$\frac{|z_{k-1}|^2}{\operatorname{Re}z_{k-1}}-\frac{|z_k|^2}{\operatorname{Re}z_k}\geqslant d>0,\ d \text{ не зависит от } k. \tag{26}$$

Если для функции вида (1)

$$\lim_{n\to\infty}\ln|F(z_n)|\frac{\operatorname{Re}z_n}{|z_n|^2}=-\infty, \tag{27}$$

то $F(z)\equiv 0$ *и мера* $\mu\equiv 0$.

Замечание. В случае, когда точки z_k лежат на вещественной оси, или более обще, расположены на некотором угле $|\arg z|\leqslant\delta<\frac{\pi}{2}$, то относительно точности теоремы 6 можно сказать то же самое, что было сказано в теореме 5.

В том случае, когда компакт Г не умещается на луче, свести задачу единственности для $F(z)$ вида (1) к задаче для функции ограниченного вида простейшими приемами не удается. Более того, уже простейшие примеры показывают, что для этого случая теоремы с условиями (19)—(23), или (25)—(27) для интегралов (1) не справедливы.

Пример. Рассмотрим компакт, состоящий из двух симметричных точек $t_1=e^{i\alpha}$, $t_2=e^{-i\alpha}$. Возьмем $\mu\{t_1\}=\frac{1}{2}$ и $\mu(t_2)=\frac{1}{2}$. Из $F(z)=\int\limits_{\Gamma}e^{z\ln t}d\mu(t)$ получаем

$$F(z)=\frac{1}{2}\left(e^{z\ln e^{i\alpha}}+e^{z\ln e^{-i\alpha}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha z}+e^{-i\alpha z}\right),$$

откуда $F(z)=\cos\alpha z$. Нули функции $F(z)=\cos\alpha z$ — следующие: $z_n=\frac{\pi}{\alpha}\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Они удовлетворяют условиям (19) — (21), но $\cos\alpha z\not\equiv 0$.

Перейдем теперь к нашей основной теореме, касающейся произвольного компакта Г, удовлетворяющего условию (A).

Только что приведенный пример показывает, что если мы хотим делать заключение $F(z)\equiv 0$ из условия (20) для любого $F(z)$ вида (1), то мы должны изменить условия на расположения точек $\{z_n\}$. Опять-таки рассмотрение указанного примера приводит к мысли, что условие (20) следует заменить условием типа

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{|z_n|}\geqslant D>0,$$

где D зависит от b (на $\Gamma\setminus\{0\}$ $|\arg t|\leqslant b$ согласно условию (A)).

В этом направлении имеет место следующая теорема, в доказательстве которой используется теорема 3.

Для случая произвольного компакта Г, удовлетворяющего условию (A), имеем для функции $F(z)$ вида (1) следующую оценку роста

$$|F(re^{i\theta})|\leqslant\int_\Gamma|e^{z\ln t}||d\mu(t)|=\int_\Gamma e^{x\ln|t|-y\arg t}|d\mu(t)|\leqslant$$

$$\leqslant e^{ax+b|y|}=e^{(a\cos\theta+b|\sin\theta|)r}, \tag{28}$$

где $a=\sup\limits_{t\in\Gamma}\ln|t|$.

Теорема 7. *Пусть Г — компакт, не разбивающий плоскость, не имеющий внутренних точек и удовлетворяющий условию* (A), *и пусть* $F(z)$ *имеет вид* (1). *Пусть, далее, последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям* (8), (9), (10). *Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|F(z_n)|}{|z_n|}=-\infty, \tag{22}$$

то $F(z)\equiv 0$ *и мера* $\mu\equiv 0$ (*предполагается, что* $\mu\{0\}=0$).

Доказательство. В интеграле (1) делаем замену переменной $\ln t=u$. Компакт Г переходит в некоторое множество, которое обозначим через E. Тогда

$$F(z)=\int_E e^{uz}\,d\mu(e^u). \tag{29}$$

Множество E является замкнутым, не имеет внутренних точек и имеет связное дополнение (не разбивает плоскость). Если $0\in\Gamma$, то $\infty\in E$.

Из условия (22) в силу теоремы 3 вытекает, что функция $F(z)$ на вещественной оси убывает по закону

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln|F(x)|}{x} \to -\infty. \tag{30}$$

Последнее можно написать в таком виде

$$|F(x)| \leqslant e^{-Mx} \tag{31}$$

для достаточно больших x, где $M>0$ — сколь угодно большое число.

В силу условия (31) интеграл

$$\int_0^\infty F(x)\, e^{-x\zeta}\, dx$$

равномерно сходится вместе со всеми производными по ζ в круге $|\zeta|<M$. Это означает, что функция

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty F(x)\, e^{-x\zeta}\, dx$$

регулярна в круге $|\zeta|<M$, а поскольку M произвольно, $\Phi(\zeta)$ — целая функция. С другой стороны

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty F(x)\, e^{-x\zeta}\, dx = \int_0^\infty \Bigl[\int_E e^{ux}\, d\mu(e^u)\Bigr] e^{-x\zeta}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \Bigl[\int_E e^{(u-\zeta)x}\, d\mu(e^u)\Bigr] dx.$$

Оценим подынтегральное выражение во внутреннем интеграле

$$|e^{(u-\zeta)x}| = e^{x\,\mathrm{Re}\,(u-\zeta)}.$$

При $\mathrm{Re}\,\zeta > a$, где $a = \sup \ln|t|$, $\mathrm{Re}\,(u-\zeta)<0$ и значит внутренний интеграл существует.

По теореме Фубини возможна перемена порядка интегрирования

$$\Phi(\zeta) = \int_E \Bigl[\int_0^\infty e^{(u-\zeta)x}\, dx\Bigr] d\mu(e^u) = \int_E \frac{d\mu(e^u)}{\zeta-u}. \tag{32}$$

Мы доказали это равенство при условии, что $\mathrm{Re}\,\zeta>a$, но по принципу аналитического продолжения, это равенство имеет место всюду, где сходится последний интеграл, т. е. везде вне множества E, поскольку это множество не разбивает плоскости.

Доказательство теоремы завершает следующая

Лемма 3. *Пусть E — замкнутое множество, не разбивающее плоскость и не имеющее внутренних точек. Пусть целая функция $\Phi(\zeta)$ представима вне E интегралом типа Коши-Стильтьеса*

$$\Phi(\zeta) = \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u},$$

где мера μ, заданная на E, имеет конечную вариацию

$$\int_E |d\mu(u)| < +\infty,$$

и если $\infty \in E$, то $\mu\{\infty\} = 0$. Тогда $\mu \equiv 0$.

Доказательство. Если $\infty \notin E$, то утверждение леммы следует хотя бы из того, что в ∞ получаем $\Phi(\infty) = 0$ и, следовательно, $\Phi(\zeta) = 0$ (по теореме Лиувилля). Отсюда следует, что $\int_E u^n d\mu = 0, n = 0, \cdots$, и в силу полноты системы $\{u^n\}$ на E (теорема М. А. Лаврентьева, см., например, [23]) $\mu \equiv 0$.

Рассмотрим случай, когда $\infty \in E$. Разлагаем $\int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u}$ в степенной ряд по степеням $\zeta - u_0$, где $u_0 \overline{\in} E$. Получаем

$$\Phi(\zeta) = \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u} \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta - u_0 - (u - u_0)} = \int_E \sum_0^\infty \frac{(\zeta - u_0)^n}{(u - u_0)^{n+1}} d\mu(u) =$$

$$= \sum_0^\infty (\zeta - u_0)^n \int_E (u - u_0)^{-n-1} d\mu(u). \tag{33}$$

В (33) сделаем замену переменной $v = \frac{1}{u - u_0}$. Замкнутое множество E переходит в компакт F. Точке ∞ на E соответствует точка 0 на F. В силу условия леммы

$$\mu\{0\} = 0. \tag{34}$$

Из (33) получаем

$$\Phi(\zeta) = \sum_0^\infty (\zeta - u_0)^n \int_F v^{n+1} d\mu\left(\frac{1}{v}\right), \tag{35}$$

где

$$c_n = \int_F v^{n+1} d\mu\left(\frac{1}{v}\right), \quad n = 0, 1, \cdots \tag{36}$$

—коэффициенты разложения целой функции $\Phi(\zeta)$. Поэтому c_n; $n = 0, 1, \cdots$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \tag{37}$$

Используем теперь следующую теорему С. Я. Хавинсона ([9]).

Пусть Γ — компакт в комплексной плоскости, и μ—некоторая борелевская комплексная мера на Γ. Положим

$$c_n = \int\limits_{\Gamma} z^n \, d\mu, \quad n=1, 2, \cdots,$$

и пусть $\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} = R$. Относительно устройства Γ предположим следующее. Пусть D — круг $|z| < R$ и Γ' — часть, лежащая вне D. Если Ω—дополнительная к $D \cup \Gamma$ область содержащая ∞, то $\Gamma \subset \partial\Omega$. При выполнении всех этих условий замкнутый носитель меры μ содержится в D.

В нашем случае, в силу (37), $R = 0$ и замкнутый носитель меры μ есть точка 0. Но нам дано, что $\mu\{0\} = 0$, следовательно, $\mu \equiv 0$.

Лемма доказана, а с ней завершено и доказательство теоремы 7.

Условие $\pi D > b$ в теореме 7 является существенным. Чтобы убедиться в этом рассмотрим компакт из двух точек $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$.

Как уже отмечали, функция

$$E(z) = \cos \alpha z \not\equiv 0$$

имеет вид (1).

К нулям этой функции теорема 7 неприменима, так как нули функции $\cos \alpha z$ не имеют необходимой плотности: не выполняется условие $\pi D > b$. Для нулей $\cos \alpha z$; $z_n = \frac{\pi}{\alpha}\left(n + \frac{1}{2}\right)$,

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{z_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\frac{\pi}{\alpha}\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\pi}$$

индикатор $\cos \alpha z$ есть $h(\theta) = \alpha(\sin\theta)$, следовательно здесь $b = \alpha$, значит $\pi \cdot D = \frac{\pi \cdot \alpha}{\pi} = \alpha = b$ и условие $\pi D > b$ не выполнено.

Важно отметить, что наша теорема 7 существенно связана с видом (1) нашей функции, а не просто с оценкой роста (28). Так, скажем, функция $e^{-z \ln z}$ удовлетворяет оценке (28), но убывает на вещественной оси как $e^{-x \ln x}$.

Но еще важным представляется то обстоятельство, что и для функций вида (1), где компакт Γ разбивает плоскость, теорема (7) перестает быть верной.

Рассмотрим следующий пример. Компакт Γ — контур сектора единичного круга, симметричный относительно оси OX, раствор угла $2\pi\sigma$, где σ — положительное число, мера

$$d\mu(t) = \frac{e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}} \, dt,$$

где $t = |t| e^{\pm i\pi\sigma}$ на боковых сторонах сектора и $t = e^{i\theta}, -\pi\sigma < \theta \leqslant \pi\sigma$ — на дуге единичной окружности и функция

$$G(z) = \int_\Gamma \frac{e^{\rho z \ln t}\, e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\, dt. \tag{38}$$

Выясним, когда мера μ будет иметь ограниченную вариацию, т. е. когда

$$\int_\Gamma \left|\frac{e^{-|-t|^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\right| |dt| < \infty.$$

Рассмотрим выражение

$$\left|\frac{e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\right| = |e^{-(-t)^{-\rho}}\, e^{-(\rho+1)\ln t}| = |e^{-(-t)^{-\rho}-(\rho+1)\ln t}| = e^{\mathrm{Re}\,(-t)^{-\rho}-(\rho+1)\ln|t|}. \tag{39}$$

Но $\mathrm{Re}\,(-t)^{-\rho} = |t|^{-\rho}\cos\rho\arg(-t) = |t|^{-\rho}\cos\pi\rho\sigma$.

Из (30) получаем

$$\left|\frac{e^{-(-t)^{-\rho}}}{t^{\rho+1}}\right| \leqslant e^{|t|^{-\rho}\cos\pi\sigma\rho-(\rho+1)\ln|t|} = e^{|t|^{-\rho}[\cos\pi\sigma\rho-(\rho+1)|t|^{\rho}\ln|t|]}. \tag{40}$$

Если $|t| \to 0$, то $|t|^{-\rho}\ln|t| \to 0$, а $|t|^{-\rho} \to \infty$. Тогда (40) показывает, что мера μ будет иметь ограниченную вариацию, если

$$\cos\pi\sigma\rho > 0,\ \text{т. е.}\ \rho > \frac{1}{2\sigma}.$$

Считая далее $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$, сделаем в (38) замену переменной

$$t = -u^{-1/\rho}. \tag{41}$$

Компакт Γ переходит в контур C, состоящий из окружности некоторого радиуса δ и двубережного разреза по лучу $[\delta, +\infty)$. Контур C пробегается так, чтобы движение по окружности происходило по часовой стрелке.

Из $t = -u^{-1/\rho}$ имеем

$$dt = \frac{1}{\rho}u^{-1/\rho-1}\,du,\quad t^{\rho z} = (-u^{-1/\rho})^{\rho z} = (-u)^{-z},$$

$$t^{\rho+1} = -u^{-1-1/\rho},\quad e^{-(-t)^{-\rho}} = e^{-u},$$

отсюда

$$G(z) = -\frac{1}{\rho}\int_C \frac{(-u)^{-z}\,e^{-u}\,u^{-1/\rho-1}}{u^{-1-1/\rho}}\,du = -\frac{1}{\rho}\int_C (-u^{-z}\,e^{-u}\,du. \tag{42}$$

При этом мы можем фактически считать радиус δ окружности, входящий в C сколь угодно малым. В теории гамма-функции Эйлера (см. [25]) известна формула

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi}\int_C (-u)^{-z}e^{-u}\,du \quad \text{(представление Ханкеля).}$$

Следовательно, из (42)

$$G(z)=\frac{2\pi i}{\rho\Gamma(z)}. \tag{43}$$

Для функции $\Gamma(z)$ известна асимптотическая формула Стирлинга ([24], [25]): $\ln\Gamma(z)\approx z\ln z$. Из (43) получаем, что на вещественной оси

$$\ln G(x)\approx -x\ln x.$$

Таким образом, условие (22) для произвольной последовательности $\{x_n\}\to\infty$ на вещественной оси выполнено, но $G(z)\not\equiv 0$.

Для случая произвольного компакта Γ, удовлетворяющего условию (A), оценка (28) показывает, что имеет место и оценка (12) со сколь угодно малым δ и $\pi\sigma=b$, а $\varepsilon=0$. Поэтому справедлива следующая теорема (нам удобно обозначить k из теоремы 4 через $\frac{1}{\rho}$).

Теорема 8. *Пусть дана функция вида* (1), *где* Γ — *произвольный компакт, удовлетворяющий условию* (*A*). *Пусть* $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям* (8), (9). *Если*

$$F(z_n)=O\left(e^{-1/\rho\,|z_n|\lg|z_n|}\right) \tag{13}$$

и $\rho<\frac{1}{2\sigma}$, *то* $F(z)\equiv 0$.

Наш пример показывает точность этой теоремы. Действительно, теорема утверждает, что при соответствующих условиях $F(z)\equiv 0$, если $\rho<\frac{1}{2\sigma}$. Пример показывает, что если $\rho>\frac{1}{2\sigma}$, то существует функция вида (1), не равная тождественно нулю и убывающая на вещественной оси со скоростью (13).

Покажем теперь, основываясь на теории двойственности из [1] — [6], применения теорем 5 — 7 в вопросах, связанных с учетом величин коэффициентов в аппроксимационной теореме Мюнца (для более общих компактов, чем [0,1]).

Приведем здесь нужные нам понятия и факты из [9], [10].

Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим, наряду с X, последовательность n-мерных пространств E_n, состоящих из точек $(\lambda_1\cdots\lambda_n)$, $n=1, 2,\cdots$. В E_n считаем заданной норму (или полунорму) $p(\lambda_1\cdots\lambda_n)$, причем предполагаем выполненным следующее условие согласования:

$$p(\lambda_1\cdots\lambda_n)=p(\lambda_1\cdots\lambda_n,\underbrace{0\cdots 0}_{m-n})$$

для $\forall\, m>n$ и любых $\lambda_1\cdots\lambda_n$. Сопряженное к E_n пространство обозначим через E_n^*, а норму в E_n^* — через p^*. Выделим в X систему элементов $\{\varphi_j\}$, $j=1, 2,\cdots$.

Определение. Мы скажем, что система $\{\varphi_j\}$ будет $o\,(p)$ полна в X, если для $\forall\,\omega \in X$ и $\forall\,\varepsilon > 0$ существует многочлен $\sum_1^n \lambda_l \varphi_l$ такой, что

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_l \varphi_l \right\| < \varepsilon \text{ и } p\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n) < \varepsilon. \tag{44}$$

Теорема 9 ([9], [10]). Для того чтобы система $\{\varphi_j\}$ была $0\,(p)$ полна в банаховом пространстве X необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, l \in X^*$ из условий

$$p^*\,(l\,(\varphi_1) \cdots l\,(\varphi_n)) \leqslant 1, \quad n = 1,\ 2, \cdots, \tag{45}$$

следовало бы, что $l \equiv 0$.

В качестве X будем рассматривать пространство $C\,(\Gamma)$ непрерывных на компакте Γ функций.

Теорема 10. *Пусть относительно компакта* Γ *и последовательности точек* $\{z_k\}$, $k = 1,\ 2, \cdots$ *выполнены условия теорем* 5 *или* 6. *Пусть дана также последовательность положительных чисел* ν_k, $k = 1,\ 2, \cdots$, $\nu_k \to \infty$. *Положим*

$$p\,(\lambda_0,\ \lambda_1 \cdots \lambda_n) = p\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \sum_1^n e^{-\nu_n |z_n|}\, |\lambda_n|. \tag{46}$$

Система степеней

$$1,\ t^{z_1} \cdots t^{z_n},\ \dots \tag{47}$$

будет $o\,(p)$ *полной в пространстве* $C\,(\Gamma)$. *Если* 0 — *предельная точка* Γ, $\{z_n\}$ *удовлетворяет условию* (19) *и при сколь угодно большом* $N > 0$ *положим*

$$p_1\,(\lambda_0,\ \lambda_1 \cdots \lambda_n) = p\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \sum_1^n e^{-N |z_n|}\, |\lambda_n|, \tag{48}$$

то система (47) *не будет* $o\,(p_1)$ *полна в* $C\,(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть l — произвольный линейный функционал над $C\,(\Gamma)$. Он имеет вид:

$$l\,(f\,(t)) = \int_\Gamma f\,(t)\, d\mu\,(t), \tag{49}$$

где $\mu\,(t)$ — некоторая бэровская мера на Γ. Условия (45) примут теперь вид

$$l\,(1) = 0,$$

$$e^{\nu_n |z_n|}\, |\,l\,(t^{z_n})| \leqslant 1, \quad n = 1,\ 2, \cdots \tag{50}$$

(первое из этих условий получается потому, что в устройстве p член с λ_0 отсутствует, т. е. соответствующий вес при λ_0 равен нулю).

Рассмотрим на Γ меру $\mu_1(e)=\mu(e)-\mu(e\cap\{0\})$, не имеющую атома в 0 (если $0\in\Gamma$). Для этой меры

$$\int_{\Gamma} t^{2n}\,d\mu_1(t)=\int_{\Gamma} t^{2n}\,d\mu(t),\quad n=1,2,\cdots \tag{51}$$

(см. замечание после леммы 1). Если ввести аналитическую функцию

$$F(z)=\int_{\Gamma} e^{z\ln t}\,d\mu_1(t), \tag{1}$$

то из условия (50) следует, что

$$|F(z_n)|=|l(z^n)|\leqslant e^{-\lambda_n|z_n|}, \tag{52}$$

и поэтому по теореме 5 (или 6) $\mu_1\equiv 0$. Но тогда в силу первого из условий (50) $\mu\equiv 0$.

Мы доказали первую часть теоремы 10. Доказательство второй части строится снова на использовании теоремы 9 и второй части теоремы 5.

Теорема 11. *Пусть относительно компакта* Γ *и последовательности точек* $\{z_k\}$, $k=1,2,\cdots$ *выполнены условия теоремы 7. Определим* p *и* p_1 *равенствами* (46) *и* (48) *соответственно. Система степеней* (47) *будет* $o(p)$ *полна в* $C(\Gamma)$, *и если* O*—предельная точка* Γ, *не будет* $o(p_1)$ *полной в* $C(\Gamma)$ *при сколь угодно большом* $N>0$.

Доказательство дословно такое же, как в теореме 10, но с ссылкой на теорему 7 вместо теоремы 5 или 6.

Мы не остановились здесь на аппроксимационной интерпретации теоремы 8, она связана уже не со всем пространством $C(\Gamma)$, а с пространством функций, непрерывных на Γ и аналитических во внутренних точках Γ.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 16.X.1972

Օ. Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ. Մյունցի թեորեմում՝ մոտարկող ագրեգատների գործակիցների աճի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մյունցի մոտարկման թեորեմայի մեջ գործակիցների թույլատրելի արժեքների հարցը։ Ընդ որում, t^{z_n} աստիճանների գործակիցները, ընդհանրապես ասած կոմպլեքս թվեր են, իսկ մոտարկումը կատարվում է [0, 1] հատվածից ավելի ընդհանուր կոմպակտների վրա։ Նշված հարցը երկակիորեն կապված է միակության այն թեորեմների հետ, որոնցում $f(z)\equiv 0$ մտահանգումը հետևում է $\{f(z_n)\}$-ի բավականաչափ արագ նվազումից։ Γ-ի և $\{z_n\}$ հաջորդականության վրա դրվող որոշ պայմանների դեպքում նրանից, որ ֆունկցիան այդ հաջորդականության վրա նվազում է տված ձևով, հետևում է ֆունկցիայի նույնաբար զրո լինելը։

O. A. MURADIAN. *On the grouth of coefficients of approximating aggregutes in Münts theorem* (summary)

The article sudies the coefficients in the Münts approximation problem, in which the exponents t^{z_n} are in general complex numbers, and approximation is carried out on the compacts more general then [0, 1]. The main result (theorem 7) states the conditions on $\{z_n\}$ and Γ, under which from the given rate of decrease of $f(z)$ is follows, that $f(z) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ky Fan* and *Ph. Davis*. Complete sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. Journ., 24, № 2, 1957, 183—192.
2. *Ky Fan*. Linear inequalities and closure properties in normed linear spaces, Seminars on analytic functions, Institute for advanced study, Princeton, 2, 1958, 202—213.
3. *С. Я. Хавинсон*. Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4 1961.
4. *С. Я. Хавинсон*. Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 60, 1961, 304—324.
5. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 135, № 2, 1960.
6. *С. Я. Хавинсон*. Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Матем. заметки, 6, № 5, 1969, 619—625.
7. *Е. Ш. Чацкая*. Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, XVII, № 4, 1964. 9—22.
8. *Е. Ш. Чацкая*. Некоторые вопросы аппроксимации на множествах комплексной плоскости, ДАН СССР, 162, № 4, 1965, 30—32.
9. *С. Я. Хавинсон*. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, №№2—3, 1971.
10. *С. Я. Хавинсон*. Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 196, № 6, 1971, 1283—1286.
11. *C. H. Müntz*. Über den Approximationssatz von Weirstrass, H. A. Schwarz Festchrift, Berlin, 1914, 303—312.
12. *И. П. Натансон*. Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
13. *Н. Винер, Р. Пели*. Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964.
14. *М. А. Евграфов*. Аналитические функции, М., 1968.
15. *R. P. Boas*. Entire functions, Academic Press, New Jork, 1954.
16. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.
17. *И. В. Ушакова*. Теорема единственности для ограниченных аналитических функций в круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960, 29—32.
18. *С. Я. Хавинсон*. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, XVIII, вып. 2 (110), 1964, 25—98.

19. *V. Bernstein.* Lecons sur les progres recents de la theorie des series de Dirichlet, Paris, 1933.
20. *W. Levinson.* Gap and density theorems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 26, New Jork, 1940.
21. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
22. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических ·функций, М., 1968.
23. *М. А. Лаврентьев.* Sur les fonctions d'one variable complex repre'sentabels par des se'ries de polynomes, P., 1936.
24. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962.
25. *Э. Уитекер* и *Дж. Ватсон.* Курс современного анализа, т. II, М., 1962.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS