ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր. սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в с оответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը ЦЕНА 50 կ. К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

Г. Б. МАРАНДЖЯН

О СТРОГО ЭФФЕКТИВНОЙ ИММУННОСТИ СТЕРЖНЕЙ АДДИТИВНО ОПТИМАЛЬНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [2] А. Н. Колмогоров ввел понятие сложности натурального числа относительно частично рекурсивной функции и понятие асимптотически оптимальной рекурсивной функции (АОФ)*. В [4] исследованы некоторые свойства этих функций, в частности, введено понятие стержня частично рекурсивной функции и доказано, что стержень АОФ—иммунное, но не гипериммунное множество (теорема 10). В настоящей работе будет доказано, что стержень любой АОФ есть строго эффективно иммунное множество. Будет также доказано, что всякая нижняя вычислимая оценка сложностей натуральных чисел относительно АОФ конструктивно ограничена, что является усилением теоремы 8 из [4].

Символы $\simeq$, [ ] и ν используются в том же смысле, в каком они используются в [1]. Напомним, что если R—$(n+1)$-местный перечислимый предикат, то через $\nu y R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ обозначается n-местная частично рекурсивная функция, определенная на наборе $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\exists y R(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ и принимающая в качестве значения такое натуральное число t, что имеет место $R(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$.

Следуя [7], суждение „частично рекурсивная функция α определена на наборе чисел $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$" будем записывать следующим образом: $!\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; если A и B—предметные термы, то суждение $A\&!B\&A\simeq B$ будем записывать следующим образом: $A \doteq B$.

Будем предполагать, что зафиксирована некоторая универсальная нумерация частично рекурсивных функций и связанная с ней постовская нумерация рекурсивно перечислимых множеств и, следуя [9], одноместную функцию с номером n в этой нумерации будем обозначать φ_n, а область ее определения — W_n.

Все термины и утверждения понимаются конструктивно [5], [7].

Предикат M определим следующим образом ([3], [4]):

$$M(\alpha, \beta, c) \leftrightarrows \forall x\,(!\,\beta(x) \supset \exists y\,(\alpha(y) \doteq \beta(x)\,\&\,\lambda(y) \leqslant \lambda(x) + c)),$$

где $\lambda(x) = [\log_2(x+1)]$.

Содержательно $M(\alpha, \beta, c)$ означает, что функция α кодирует натуральные числа, быть может, на константу c „хуже" чем β.

---

* Ниже будет использоваться термин „аддитивно оптимальная функция" вместо „асимптотически оптимальная функция".

Предикат $\bar{\alpha}$ определяется следующим образом ([4]):

$$\bar{\alpha}(x, y) \leftrightarrows \exists z(\alpha(z) \doteq x \,\&\, \lambda(z) = y) \,\&\, \forall z(\alpha(z) \doteq x \supset \neg \lambda(z) < y).$$

$\bar{\alpha}(x, y)$ содержательно означает, что y есть сложность числа x относительно частично рекурсивной функции α.

Всякой частично рекурсивной одноместной функции α ставим в соответствие множество S_α, именуемое *стержнем* функции α следующим образом [3]: относим к S_α те и только те натуральные числа x, которые удовлетворяют условию

$$!\alpha(x) \,\&\, \forall y(y < x \supset \neg(!\alpha(y) \,\&\, \alpha(y) \doteq \alpha(x))).$$

Таким образом, S_α — множество тех значений аргументов, при которых функция α „впервые" принимает то или иное значение. Напомним теперь определение строго эффективно иммунного множества [8].

Определение. Бесконечное множество A называется *строго эффективно иммунным*, если существует такая частично рекурсивная* одноместная функция π, что выполняется условие

$$\forall x(W_x \subseteq A \supset (!\pi(x) \,\&\, \forall y(y \in W_x \supset y < \pi(x)))).$$

Лемма. *Каковы бы ни были функция α, аддитивно оптимальная для множества $\Psi^{(1)}$ всех одноместных частично рекурсивных функций и двухместная частично рекурсивная функция θ, можно построить такую одноместную обще рекурсивную функцию ρ, что будет выполнено следующее условие*:

$$\forall xy(!\theta(x, y) \supset \forall z(\bar{\alpha}(\theta(x, y), z) \supset z \leqslant \rho(x) + \lambda(y))). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть α — АОФ для $\Psi^{(1)}$ и θ — двухместная частично рекурсивная функция. По определению АОФ имеем

$$\forall x \exists c M(\alpha, \varphi_x, c),$$

что конструктивно понимается как возможность построения такой обще рекурсивной функции β, что выполняется условие

$$\forall x M(\alpha, \varphi_x, \beta(x)). \qquad (2)$$

Используя S_n^m-теорему из § 65 монографии [1], можно построить такую обще рекурсивную функцию γ, что будем иметь

$$\varphi_{\gamma(x)}(y) \simeq \theta(x, y), \qquad (3)$$

а также такую обще рекурсивную функцию δ, что

$$\varphi_{\delta(x)}(y) \simeq \varphi_{\gamma(x)}(\alpha(y)). \qquad (4)$$

Из (2) следует

$$\forall x M(\alpha, \varphi_{\delta(x)}, \beta(\delta(x))),$$

или, более подробно

---

* Класс определяемых множеств не изменится, если в определении заменить „частично рекурсивная" на „обще рекурсивная" (см. [8]).

$$\forall xy\,(!\,\varphi_{\delta(x)}(y) \supset \exists t\,(\alpha(t) \simeq \varphi_{\delta(x)}(y)\ \&\ \lambda(t) < \lambda(y) + \beta(\delta(x)))),$$

откуда вытекает

$$\forall xyz\,(\varphi_{\delta(x)}(y) \simeq \varphi_{\gamma(x)}(z) \supset \exists t\,(\alpha(t) \simeq \varphi_{\gamma(x)}(z)\ \&\ \lambda(t) \leqslant \lambda(y) + \beta(\delta(x)))). \tag{5}$$

Из (4) получаем

$$\forall xyz\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\alpha(y) \simeq z \supset \varphi_{\delta(x)}(y) \simeq \varphi_{\gamma(x)}(z))). \tag{6}$$

Из совместного рассмотрения (5) и (6) получим

$$\forall xyz\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\alpha(y) \simeq z \supset \exists t\,(\alpha(t) \simeq \varphi_{\gamma(x)}(z)\ \&\ \lambda(t) \leqslant \lambda(y) + \beta(\delta(x))))), \tag{7}$$

откуда непосредственно следует

$$\forall xtzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset ((\bar{\alpha}(z, \lambda(t))\ \&\ \bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p))) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(t) + \beta(\delta(x)))). \tag{8}$$

Поскольку α—АОФ, то, согласно лемме 4 из § 1 гл. 1 [4], найдется такая константа c, что будем иметь

$$\forall zt\,(\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset \lambda(t) \leqslant \lambda(z) + c). \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$\forall xtzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset ((\bar{\alpha}(z, \lambda(t))\ \&\ \bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p))) \supset \lambda(p) < \lambda(z) + c + \beta(\delta(x)))),$$

откуда, после несложных преобразований, следует

$$\forall xtzp\,(\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset (!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))))),$$

а тогда

$$\forall xzp\,(\neg\neg\exists t\,\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset \neg\neg(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))))),$$

откуда, используя разрешимость отношения $\lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))$, получим

$$\forall xzp\,(\neg\neg\exists t\,\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset (!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x))))),$$

а затем

$$\forall z\neg\neg\exists t\,\bar{\alpha}(z, \lambda(t)) \supset \forall xzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x)))). \tag{10}$$

Согласно следствию 2 из § 1 гл. 1 [4] имеем

$$\forall z\neg\neg\exists t\,\bar{\alpha}(z, \lambda(t)). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует

$$\forall xzp\,(!\,\varphi_{\gamma(x)}(z) \supset (\bar{\alpha}(\varphi_{\gamma(x)}(z), \lambda(p)) \supset \lambda(p) \leqslant \lambda(z) + c + \beta(\delta(x)))). \quad (12)$$

Для завершения доказательства леммы достаточно теперь взять

$$\rho(x) = \beta(\delta(x)) + c,$$

тогда из (3) и (12) последует (1). Лемма доказана.

Докажем теперь следующую теорему, дающую, в частности, естественный пример строго эффективно иммунного множества.

Теорема 1. *Стержень функции, аддитивно оптимальной для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, есть строго эффективно иммунное множество.*

Доказательство. Пусть α — одноместная частично рекурсивная функция, аддитивно оптимальная для класса $\mathcal{Y}^{(1)}$. Построим частично рекурсивную функцию ψ следующим образом:

$$\psi(n, 0) \simeq \nu t\,(!\,\varphi_n(t) \,\&\, \varphi_n(t) > 0);$$

$$\psi(n, x+1) \simeq \nu t\,(!\,\varphi_n(t) \,\&\, \varphi_n(t) \geqslant 2\psi(n, x)).$$

Нетрудно видеть, что одноместная функция, получающаяся из ψ фиксацией на месте первого аргумента произвольного натурального числа n, является стройной функцией [6] по второму аргументу*, причем в области своего определения эта функция перечисляет в возрастающем порядке некоторое подмножество множества W_n. Нетрудно также видеть, что

$$!\,\psi(n, x) \supset \psi(n, x) \geqslant 2^x. \quad (13)$$

Определим функцию θ следующим образом:

$$\theta(n, x) \simeq \alpha(\psi(n, x)).$$

По лемме, доказанной выше, найдется такая общерекурсивная функция ρ, что будет выполнено условие

$$\forall xnz\,(!\,\theta(n, x) \supset (\bar{\alpha}(\theta(n, x), z) \supset z \leqslant \rho(n) + \lambda(x))). \quad (14)$$

Докажем теперь, что при любом n, если $W_n \subseteq S_\alpha$, то

$$\forall y\,(y \in W_n \supset y < 2^{3(\rho(n)+1)}).$$

Пусть n таково, что $W_n \subseteq S_\alpha$. Тогда

$$\forall x\,((!\,\theta(n, x) \equiv !\,\psi(n, x)) \,\&\, \psi(n, x) \in S_\alpha), \quad (15)$$

следовательно

$$\forall xz\,(!\,\theta(n, x) \supset (\bar{\alpha}(\theta(n, x), z) \supset z = \lambda(\psi(n, x)))). \quad (16)$$

Рассматривая совместно (14) и (16) и учитывая (15), получим

$$\forall xz\,(!\,\psi(n, x) \supset (\bar{\alpha}(\theta(n, x), z) \supset \lambda(\psi(n, x)) \leqslant \rho(n) + \lambda(x))),$$

---

* $(n+1)$-местная частично рекурсивная функция ξ называется стройной по $(n+1)$-му аргументу, если выполнено условие

$$\forall x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}\,(!\,\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}+1) \supset !\,\xi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})).$$

откуда следует

$$\forall x\,(!\,\psi(n,x)\supset\forall z\,(\bar{\alpha}\,(\theta\,(n,x),\,z)\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x))),$$

а затем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset(\exists z\bar{\alpha}\,(\theta\,(n,x),\,z)\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x))),$$

откуда получаем

$$\forall x\,((!\,\psi\,(n,x)\,\&\,\neg\neg\exists z\,\bar{\alpha}\,(\theta\,(n,x),\,z))\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x))).$$

Из предыдущей формулы, используя следствие 2 из § 1 гл. 1 [4], получим

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))\leqslant\lambda\,(x+\rho\,(n)). \tag{17}$$

Из (13) имеем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))\geqslant x). \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset x\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(x)), \tag{19}$$

откуда, учитывая очевидное неравенство

$$\lambda\,(x)\leqslant\frac{x+1}{2}, \tag{20}$$

получаем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset x\leqslant 2\rho\,(n)+1). \tag{21}$$

Из (17) и (21) вытекает

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))\leqslant\rho\,(n)+\lambda\,(2\rho\,(n)+1)),$$

откуда, еще раз использовав неравенство (20), получим

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset\lambda\,(\psi\,(n,x))<3\rho\,(n)+1),$$

следовательно, имеем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(n,x)\supset\psi\,(n,x)<2^{3\rho\,(n)+2}). \tag{22}$$

Из (22), учитывая способ построения функции ψ, получаем

$$\neg\exists t\,(!\,\varphi_n\,(t)\,\&\,t\geqslant 2\cdot 2^{3\rho\,(n)+2}),$$

то есть

$$\forall t\,(!\,\varphi_n\,(t)\supset t<2^{3\,(\rho\,(n)+1)}),$$

откуда получим

$$\forall t\,(t\in W_n\supset t<2^{3\,(\rho\,(n)+1)}),$$

завершая тем самым доказательство теоремы.

Теорема 2. *Какова бы ни была АОФ α для $Ч^{(1)}$, любая частично рекурсивная нижняя оценка сложностей натуральных чисел относительно функции α конструктивно ограничена.*

Доказательство. Определим частично рекурсивную функцию ψ следующим образом:

$$\psi(x, 0) \simeq \nu t\,(!\,\varphi_x(t)),$$
$$\psi(x, y+1) \simeq \nu t\,(!\,\varphi_x(t)\,\&\,\varphi_x(t) > \varphi_x(\psi(x, y))).$$

Используя лемму, доказанную выше, построим такую обще рекурсивную функцию ρ, чтобы выполнялось условие

$$\forall xy\,(!\,\psi(x, y) \supset \forall z\,(\overline{\alpha}(\psi(x, y), z) \supset z \leqslant \rho(x) + \lambda(y))). \tag{23}$$

Допустим теперь, что частично рекурсивная функция β является нижней оценкой сложностей натуральных чисел относительно α. Это означает, что имеем

$$\forall x\,(!\,\beta(x) \supset \forall z\,(\overline{\alpha}(x, z) \supset \beta(x) \leqslant z)). \tag{24}$$

Пусть число m есть номер функции β в выбранной нами нумерации. Тогда (24) можно переписать следующим образом:

$$\forall x\,(!\,\varphi_m(x) \supset \forall z\,(\overline{\alpha}(x, z) \supset \varphi_m(x) \leqslant z)),$$

а тогда, учитывая то обстоятельство, что

$$\forall mx\,(!\,\psi(m, x) \supset !\,\varphi_m(\psi(m, x))),$$

получаем

$$\forall x\,(!\,\psi(m, x) \supset \forall z\,(\overline{\alpha}(\psi(m, x), z) \supset \varphi_m(\psi(m, x)) \leqslant z)). \tag{25}$$

Из (23) и (25) следует

$$\forall x\,(!\,\psi(m, x) \supset \forall z\,(\overline{\alpha}(\psi(m, x), z) \supset \varphi_m(\psi(m, x)) \leqslant \rho(m) + \lambda(x))). \tag{26}$$

Из построения функции ψ очевидным образом следует

$$\forall nx\,(!\,\varphi_n(\psi(n, x)) \supset \varphi_n(\psi(n, x)) \geqslant x). \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем

$$\forall x\,(!\,\psi(m, x) \supset \forall z\,(\overline{\alpha}(\psi(m, x), z) \supset x \leqslant \rho(m) + \lambda(x))),$$

откуда, после несложных преобразований, следует

$$\forall x\,(x > \rho(m) + \lambda(x) \supset (!\,\psi(m, x) \supset \neg\exists z\,(\overline{\alpha}(\psi(m, x), z)))). \tag{28}$$

Докажем теперь, что

$$\forall x\,(x > 2\rho(m) + 4 \supset \neg\,!\,\psi(m, x)). \tag{29}$$

В самом деле, легко видеть, что выполнено следующее условие:

$$\forall x\,(x > 2\rho(m) + 4 \supset x > \rho(m) + \lambda(x)),$$

что вместе с (28) дает

$$\forall x\,(x > 2\rho(m) + 4 \supset (!\,\psi(m, x) \supset \neg\exists z\,(\overline{\alpha}(\psi(m, x), z)))). \tag{30}$$

Пусть теперь a таково, что

$$a > 2\rho(m) + 4.$$

Тогда, если $!\,\psi(m, a)$, то из (30) следует, что выполнено условие

$$\neg\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, a),\ z)).$$

Но, как вытекает из следствия 2 § 1 гл. 1 [4], из $!\,\psi\,(m, a)$ имеем

$$\neg\neg\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, a),\ z)). \tag{31}$$

Из полученного противоречия следует (29).

Пусть теперь b таково, что имеем $!\,\psi\,(m, b)$. Тогда из (26) и (29) получим

$$\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, b),\ z)) \supset \varphi_m(\psi\,(m, b)) \leqslant \rho\,(m) + \lambda\,(2\rho\,(m) + 4),$$

откуда следует

$$\exists z\,(\overline{\alpha}\,(\psi\,(m, b),\ z) \supset \varphi_m\,(\psi\,(m, b)) \leqslant 2\,\rho\,(m) + 2.$$

Рассматривая последнюю формулу совместно с (31), получаем

$$\varphi_m\,(\psi\,(m, b)) \leqslant 2\,\rho\,(m) + 2.$$

Обозначим через τ обще рекурсивную функцию, определяемую следующим образом:

$$\tau\,(x) = 2\rho\,(x) + 2.$$

Очевидно, имеем

$$\forall x\,(!\,\psi\,(m, x) \supset \varphi_m\,(\psi\,(m, x)) \leqslant \tau\,(m)). \tag{32}$$

Из (32), принимая во внимание схему задания функции ψ, получаем

$$\forall x\ (!\ \varphi_m\,(x) \supset \varphi_m\,(x) \leqslant \tau\,(m)),$$

то есть

$$\forall x\,(!\ \beta\,(x) \supset \beta\,(x) \leqslant \tau\,(m)).$$

Таким образом, построена такая обще рекурсивная функция τ, которая по номеру любой частично рекурсивной функции β, ограничивающей сложности натуральных чисел относительно АОФ, выдает число, ограничивающее сверху функцию β. Теорема доказана.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 25.V.1972

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ. Ադիտիվորեն օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների խիստ էֆեկտիվ իմունության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են Ա. Ն. Կոլմոգորովի [2] աշխատության մեջ սահմանված ասիմպտոտիկ օպտիմալ ֆունկցիաների (ԱՕՖ) որոշ հատկություններ։

Ապացուցվում են հետևյալ 2 թեորեմները։

1. Կամայական ԱՕՖ-ի կորիզը խիստ էֆեկտիվ իմունային բազմություն է։

2. Ամեն մի մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիա, որը ներքին գնահատական է հանդիսանում ԱՕՖ-ի նկատմամբ բնական թվերի բարդությունների համար, կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ է։

H. B. MARANDJIAN. *On strongly effective immunity of the pivots of additively optimal recursive functions* (summary)

The paper deals with the properties of asymptotically optimal partial recursive functions (AOF) defined by A. N. Kolmogorov [2]. The following two theorems are proved.

1. The "pivot" [4] of any AOF is a strongly effectively immune set.

2. Any partial recursive function minorising the complexities of natural numbers with respect to an AOF is constructively bounded.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. К. Клини.* Введение в метаматематику, ИИЛ, М., 1957.
2. *А. Н. Колмогоров.* Три подхода к определению понятия „количество информации", Проблемы передачи информации, 1, № 1, 1965, 3—11.
3. *Г. Б. Маранджян.* О некоторых свойствах асимптотически оптимальных рекурсивных функций, Известия АН АрмССР, „Математика", IV, № 1, 1969, 3—22.
4. *Г. Б. Маранджян.* О сложностях представлений натуральных чисел с помощью рекурсивных функций, Исследования по теории алгорифмов, М., 1972.
5. *А. А. Марков.* О конструктивной математике, Труды Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова, LXVII, М.—Л., 1962, 8—14.
6. *А. А. Мучник.* Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгорифмов, Труды ММО, 7, 1958, 391—405.
7. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова, LVII, М.—Л., 1958, 226—311.
8. *T. G. McLaughlin.* On a class of complete simple sets, Canadian Mathematical Bulletin, 8, № 1, 1965, 33—37.
9. *H. Jr. Rogers.* Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

A. ABIAN

SET-THEORETICAL CANONICAL MODELS

In what follows ZF denotes a first order theory whose only non-logical symbol is the elementhood binary predicate $\in(x, y)$ and whose axioms are the usual Zermelo-Fraenkel settheoretical axioms (also denoted by ZF) of Extensionality (E), Powerset (P), Sumset (S), Infinity (I), Choice (C) and the axiom scheme of Replacement (R).

By a model $(M, \in)$ for $\in(x, y)$ we mean a domain M of individuals ("sets") and an assignment of *Truth* "1" or *Falsehood* "0" to every atomic formula $\in(a, b)$ where a and b are individuals ("sets") of M.

By a dyadic sequence we mean a (finite or transfinite) sequence whose terms are 0 or 1. Also, as expected, $\in(x, y)$ is more often denoted by $x \in y$.

Definition. *Let u be an ordinal number. A model $(M, \in)$ is called a set-theoretical canonical model of type u provided its domain M is a family $((d_i^j)_{i<u})_{j<u}$ of type u of dyadic sequences $(d_i^j)_{i<u}$ of type u and where $\in$ is defined by*:

$$(d_i^k)_{i<u} \in (d_i^j)_{i<u} \quad \textit{if and only if} \quad d_k^j = 1. \tag{1}$$

In what follows we refer to "set-theoretical canonical model" simply as "*canonical model*". Moreover, when no confusion is likely to arise, we denote $(d_i^j)_{i<u}$ by (d_i^j) and we denote a canonical model $(M, \in)$ by M.

Although $\omega_u = \aleph_u$ for every ordinal u, we use ω_u notation in the cases pertaining primarily to order and we use $\aleph_u$ notation in the cases pertaining primarily to cardinality. As usual, we denote ω_0 by ω. Also, in Propositions 5 and 6 we use the Generalized Continuum Hypothesis (GCH), i. e.,

$$2^{\aleph_u} = \aleph_{u+1} = \omega_{u+1} \tag{2}$$

Based on the above Definition, we prove:

Lemma 1. *In every canonical model every two distinct dyadic sequences represent distinct sets (individuals).*

Proof. Let $(d_i^j) \neq (d_i^h)$. Hence, for some ordinal k it must be the case that, say, $d_k^j = 1$ and $d_k^h = 0$. But then from (1) it follows that $(d_i^k) \in (d_i^j)$ whereas $(d_i^k) \bar{\in} (d_i^h)$. Thus, the sets (d_i^j) and (d_i^h) are distinct.

In view of Lemma 1 we have:

Proposition 1. *In every canonical model the axiom of Extensionality is valid.*

Next, we give a necessary and sufficient condition for the existence of a special kind of canonical models.

Proposition 2. *Let u be an ordinal number and $\overline{\overline{v}}$ be a cardinal number. Then there exists a canonical model M of type u whose domain consists of all dyadic sequences of type u each having less than $\overline{\overline{v}}$ ones, if and only if*

$$\overline{\overline{u}} = \sum_{\overline{\overline{c}}<\overline{\overline{v}}} \overline{\overline{u}}^{\overline{\overline{c}}}. \tag{3}$$

Proof. If M exists then by Definition 1, we have $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{u}}$. On the other hand, clearly, $\overline{\overline{M}}$ is equal to the cardinality of the set of all functions from a cardinal $\overline{\overline{c}}$ into u such that $\overline{\overline{c}} < \overline{\overline{v}}$. Hence, (3) holds.

Conversely, let (3) hold. Let M be the set of all functions from a cardinal $\overline{\overline{c}}$ into u such that $\overline{\overline{c}} < \overline{\overline{v}}$. But then from (3) it follows that $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{u}}$. Consequently, in view of Definition 1, it is clear that M can serve as a domain for a canonical model of type u.

Proposition 3. *Let M be a canonical model of ordinal type u whose domain consists of all dyadic sequences of type u each having less than $\overline{\overline{v}}$ ones. Then every set of M has less than $\overline{\overline{v}}$ elements. Moreover, for every collection of less than $\overline{\overline{v}}$ sets*

$$(d_i^a)_{i<u},\quad (d_i^b)_{i<u},\quad (d_i^c)_{i<u}, \cdots \tag{4}$$

of M there exists a set $(d_i^j)_{i<u}$ of M whose elements are precisely the sets of M which are listed in (4).

Proof. The fact that every element of M has less than $\overline{\overline{v}}$ elements follows directly from (1).

Now, let us consider the dyadic sequence $(d_i^j)_{i<u}$ such that

$$d_i^j = 1 \quad \textit{if and only if } i = a,\ i = b,\ i = c, \cdots \tag{5}$$

But then from (5) it follows that $(d_i^j)_{i<u}$ is a dyadic sequence of type u having less than $\overline{\overline{v}}$ ones. Hence, $(d_i^j)_{i<u}$ is a set of model M.

On the other hand, from (1) and (5) it follows that $(d_i^k) \in (d_i^j)$ if and only if $d_k^j = 1$, if and only if $k = a$, $k = b$, $k = c, \cdots$ Thus, by (1), the elements of (d_i^j) are precisely the sets of M which are listed in (4).

Below, we give an example of a canonical model in which, except for the axiom of Infinity, all other axioms of ZF are valid.

Since $\aleph_0 = \sum_{n<\omega} \aleph_0^n$ from (3) it follows that a canonical model such as described in the following Proposition, exists.

Proposition 4. *Every canonical model A of type ω whose domain consists of all dyadic sequences of type ω each having less than $\aleph_0$ (i. e., no or only finitely many) ones is a model for $ZF-I$.*

Proof. Clearly, to prove the Proposition, in view of Proposition 1, it is enough to show that axioms P, S, C and axiom scheme R are valid in a canonical model A described in the Proposition and that axiom I is not valid in A.

Let s be a set in A.

By Proposition 3 we see that in A there exist only finitely many subsets $s_1, \cdots, s_n$ of s. But then, from Proposition 3 it follows that in A there exists a set $P_A(s)$ whose elements are precisely $s_1, \cdots, s_n$. Thus, in A every set s has a powerset $P_A(s)$. Hence, axiom P is valid in A.

Similarly, by Proposition 3 we see that in A there exist no or only finitely many elements $e_1, \cdots, e_k$ of elements of s. But then, from Proposition 3 it follows that in A there exists a set $U_A\, s$ which is the emtpy set (the zero sequence of type ω) or whose elements are precisely $e_1, \cdots, e_k$. Thus, in A every set s has a sumset $U_A\, s$. Hence, axiom S is valid in A.

Let $P(x, y)$ be a set-theoretical binary predicate functional in x on s in A. By Proposition 3 we see that in A there exist no or only finitely many sets $c_1, \cdots, c_m$ such that $P(a_i, c_i)$ is true in A for some element a_i of s. But then, from Proposition 3 it follows that in A there exists a set which is the empty set or whose elements are precisely $c_1, \cdots, c_m$. Thus, axiom scheme R is valid in A.

Let d be a disjointed (i. e., whose elements are pairwise disjoint) nonempty set in A. By Proposition 3 we see that in A there exist no or only finitely many sets $r_1, \cdots, r_n$ which can be unique representatives of elements of d. But then from Proposition 3 it follows that in A there exists a set which is the empty set or whose elements are precisely $r_1, \cdots, r_n$. Thus, in A there exists a choice set of d. Hence axiom C is valid in A.

On the other hand, from Proposition 3 it follows that in A there exists no set t such that $\varnothing \in t$ and if $x \in t$ then $(x \cup \{x\}) \in t$, where $\varnothing$ is the zero sequence of type ω. Hence, in A axiom I is not valid.

Thus, Proposition 4 is proved.

Below, under the assumption of GCH, we give an example of a canonical model in which, except for the axiom of Powerset, all other axioms of ZF are valid.

Let us observe that (2) implies $\aleph_1 = \sum\limits_{\bar{k} < \omega_1} \aleph_1^{\bar{k}}$. Therefore, from (3) it follows that a canonical model such as described in the following Proposition, exists.

Proposition 5. *Every canonical model B of type ω_1 whose domain consists of all dyadic sequences of type ω_1 each having less than $\aleph_1$ ones, is a model for $ZF - P$.*

Proof. Clearly, to prove the Proposition, in view of Proposition 1, it is enough to show that axioms S, C, I and axiom scheme R are valid in a canonical model B described in the Proposition and that axiom P is not valid in B.

Let h be a set in B such that h has $\aleph_0$ ones. By Proposition 3, in view of (2), we see that in B there exist $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ subsets of h. However, since every set in B has less than $\aleph_1$ ones, the set h has no powerset in B. Hence axiom P is not valid in B.

Let s be a set in B.

Let us recall that the product of two cardinals each less than $\aleph_1$ is less than $\aleph_1$. Thus, by Proposition 3 we see that in B there exist no or only less than $\aleph_1$ elements $e_1, \cdots$ of elements of s. But then, from Proposition 3 it follows that in B the sumset of s exists. Hence, axiom S is valid in B.

Let $P(x, y)$ be a set-theoretical binary predicate functional in x on s in B. By Proposition 3 we see that in B there exist no or only less than $\aleph_1$ sets $c_1, \cdots$ such that $P(a_i, c_i)$ is true in B for some element a_i of s. But then, from Proposition 3 it follows that axiom scheme R is valid in B.

Let us observe that if x is a set in B then in view of Proposition 3 both $\{x\}$ and $x \cup \{x\}$ is a set in B. But then since $\aleph_0<\aleph_1$, from Proposition 3 it follows that in B there exists a set whose elements are denumerably many sets $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \cdots$, where $\varnothing$ is the zero sequence of type ω_1. Hence axiom I is valid in B.

Let d be a nonempty disjointed set in B. By Proposition 3 we see that in B there exist no or only less than $\aleph_1$ sets $r_1, \cdots$ which can be unique representatives of elements of d. But then from Proposition 3 it follows that axiom C is valid in B.

Thus, Proposition 5 is proved.

Below, again under the assumption of GCH, we give an example of a canonical model in which, except for the axiom of Sumset, all other axioms of ZF are valid.

Let us observe that (2) implies $\aleph_{\omega+1} = \sum\limits_{\bar{\bar{k}}<\omega_\omega} \aleph_{\omega+1}^{\bar{\bar{k}}}$. Therefore, from (3) it follows that a canonical model such as described in the following Proposition, exists.

P r o p o s i t i o n 6. *Every canonical model G of type $\omega_{\omega+1}$ whose domain consists of all dyadic sequences of type $\omega_{\omega+1}$ each having less than $\aleph_\omega$ ones, is a model for $ZF-S$.*

P r o o f. Clearly, to prove the Proposition, in view of Proposition 1, it is enough to show that axioms P, C, I and axiom scheme R are valid in a canonical model G described in the Proposition and that axiom S is not valid in G.

Since $\aleph_i<\aleph_\omega$ for every $i<\omega$, in view of Proposition 3, we see that each of the following denumerebly many sets

$$\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_i, \cdots \quad with \quad i<\omega \tag{6}$$

is a set in G. Also since $\aleph_0<\aleph_\omega$, again by Proposition 3 we see that in G there exists a set g whose elements are the sets listed in (6).

However, since $\aleph_\omega = \bigcup_{i<\omega} \aleph_i$ and since every set in G has less than $\aleph_\omega$ ones, the set g has no sumset in G. Hence axiom S is not valid in G.

Let s be a set in G.

Let us observe that in view of (2) we have $2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1} < \aleph_\omega$ for every $i < \omega$. Thus, in G there exist only I less than $\aleph_\omega$ subsets $s_1, \cdots$ of s. But then from Proposition 3 it follows that in G the powerset of s exists. Hence axiom P is valid in G.

Let $P(x, y)$ be a set-theoretical binary predicate functional in x on s in G. By Proposition 3 we see that in G there exist no or only less than $\aleph_\omega$ sets $c_i, \cdots$ such that $P(a_i, c_i)$ is true in G for some element a_i of s. But then, from Proposition 3 it follows that axiom scheme R is valid in G.

Again, as in the case of the proof of Proposition 5, it can readily be verified that axioms I and C are valid in G.

Thus, Proposition 6 is proved.

Based on the assumption of the existence of a strongly inaccessible cardinal $\aleph_s$, we give below an example of a canonical model in which all axioms of ZF are valid.

Since for a strongly inaccessible cardinal $\aleph_s$ we have $\aleph_s = \sum_{\bar{t}<\omega_s} \aleph_s^{\bar{t}}$, from (3) it follows that a canonical model such as described in the following Proposition, exists.

P r o p o s i t i o n 7. *Let $\aleph_s$ be a strongly inaccessible cardinal. Every canonical model H of type $\aleph_s$ whose domain consists of all dyadic sequences of type $\aleph_s$ each having less than $\aleph_s$ ones, is a model for ZF.*

P r o o f. Since $\aleph_s$ is a strongly cardinal, $2^{\aleph_u} < \aleph_s$ for every $u < s$. But then, as in the proof of Proposition 6, we see that axiom P is valid in H.

Again, since $\aleph_s$ is a strongly inaccessible cardinal, $\bigcup_{i<v} \bar{\bar{c}}_i < \aleph_s$ for $v < \aleph_s$ and $c_i < \aleph_s$ for every $i < v$. But then, as in the proof of Proposition 4, or that of Proposition 5, we see that axiom S is valid in H.

As in the case of the proof of Proposition 5, it can readily be verified that axioms E, I, C and axiom scheme R are also valid in H.

Thus, Proposition 7 is proved.

R e m a r k. We observe that the independence of each of the axioms I, P, S from the remaining axioms of ZF is easily established by means of the canonical models A, B, G. Also (under the assumption of the existence of a strongly inaccessible cardinal) the consistency of the axioms of ZF is readily established by means of the canonical model H.

Iowa State University Received 10.VII.1972

Ա. ԱԲՅԱՆ. Բազմությունների տեսության կանոնական տիպարներ *(ամփոփում)*

Սահմանվում է կանոնական տիպարի գաղափարը բազմությունների տեսության աքսիոմատիկ սիստեմների համար։ Ապացուցվում է, որ

1) եթե Ցերմելո-Ֆրենկելի տեսության համապատասխանող ենթասիստեմները անհակասելի են, ապա կարելի է հիմնավորել անվերջության աքսիոմի անկախությունը, բազմությունների գումարի աքսիոմի անկախությունը և ենթաբազմությունների բազմության աքսիոմի անկախությունը Ցերմելո-Ֆրենկելի սիստեմի մնացած աքսիոմներից կանոնական տիպարների միջոցով.

2) եթե Ցերմելո-Ֆրենկելի սիստեմը անհակասելի է ու գոյություն ունի ոչ հասանելի կարդինալ թիվ, ապա գոյություն ունի Ցերմելո-Ֆրենկելի սիստեմի կանոնական մի տիպար։

А. АБИЯН. *Канонические модели теории множеств* (резюме)

Вводится понятие канонической модели для аксиоматических систем теории множеств. Доказывается, что

(1) если соответствующие подсистемы теории Цермело-Френкеля непротиворечивы, то при помощи канонических моделей можно установить независимость аксиомы бесконечности, независимость аксиомы суммы множеств и независимость аксиомы множества подмножеств от остальных аксиом системы Цермело-Френкеля,

(2) если система Цермело-Френкеля непротиворечива и существует недостижимое кардинальное число, то существует каноническая модель системы Цермело-Френкеля.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

О РАВНОМЕРНОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Замкнутое множество E назовем множеством равномерной аппроксимации мероморфными функциями, если для любой функции $f(z)$, непрерывной на E и аналитической на внутренней части E° множества E и любого числа $\varepsilon>0$, существует мероморфная функция $\mu(z)$ такая, что $|f(z)-\mu(z)|<\varepsilon$ при $z\in E$. Если же для любой функции $\varepsilon(x)>0$, непрерывной на $[0, \infty)$ и стремящейся к нулю произвольно быстро при $x\to\infty$, существует мероморфная функция $\mu(z)$ такая, что $|f(z)-\mu(z)|<\varepsilon(|z|)$ при $z\in E$, то множество E назовем множеством касательной аппроксимации мероморфными функциями.

В настоящей работе рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях, налагаемых на множество, при которых оно становится множеством равномерной аппроксимации мероморфными функциями. Необходимые и достаточные условия для случая касательной аппроксимации найдены для множеств с пустой внутренностью.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Для того чтобы замкнутое множество E было множеством равномерной аппроксимации мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого круга $\overline{D}$ множество $E\cap\overline{D}$ было множеством, допускающим равномерную аппроксимацию рациональными функциями.*

Теорема 2. *Для того чтобы замкнутое множество E, $E^\circ=\varnothing$, было множеством касательной аппроксимации мероморфными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого круга $\overline{D}$ множество $E\cap\overline{D}$ было множеством, допускающим рациональную аппроксимацию.*

Необходимость условия теоремы 1 докажем в терминах аналитической C-емкости множеств, используя известную теорему А. Г. Витушкина о рациональной аппроксимации ([1], [2]). Доказательство достаточности проводится с помощью методов, развитых М. В. Келдышем (см. работу [3]). Теорема 2 получается как следствие теоремы 1.

Приведем без доказательства одну теорему А. Г. Витушкина ([1], [2]), которой воспользуемся в дальнейшем.

Теорема 3. Пусть U — ограниченное открытое множество. Непрерывную на всей плоскости и аналитическую вне U функцию $f(z)$ с любой точностью можно равномерно приблизить на некотором компакте F рациональными функциями с полюсами вне F. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти рациональную функцию $r(z)$ такую, что $|f(z) - r(z)| < \varepsilon$ при $z \in F \cup CU$.

Согласно теореме А. Г. Витушкина о равномерной аппроксимации рациональными функциями, для доказательства необходимости условия теоремы 1 достаточно показать, что $\alpha(K \setminus E) = \alpha(K \setminus E^\circ)$ для любого открытого круга K (через $\alpha(K \setminus E)$, $\alpha(K \setminus E^\circ)$ обозначены аналитические C-емкости соответствующих множеств).

Через $C(K, m)$ обозначим класс функций, непрерывных на плоскости, аналитических вне K, равных нулю на бесконечности и ограниченных по модулю числом m.

Перед тем, как перейти к доказательствам теорем, заметим, что их аналоги верны также при более общей постановке задачи. Дана плоская область D $(\partial D \neq \varnothing)$, найти необходимые и достаточные условия на замкнутое относительно D множество $E \subset D$, при которых оно становится множеством равномерной (соответственно, касательной) аппроксимации мероморфными в D функциями. Для этого случая теоремы 1, 2 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1* (2*). *Замкнутое относительно D множество $E \subset D$ является множеством равномерной* (соответственно, в случае $E^\circ = \varnothing$ — касательной) *аппроксимации мероморфными в D функциями, тогда и только тогда, когда $E \cap K$ — множество рациональной аппроксимации при произвольном замкнутом круге $K \subset D$.*

Доказательство проведем для случая $D = C$, ограничиваясь замечаниями об общем случае.

Докажем необходимость условия теоремы 1. Пусть E — множество равномерной аппроксимации мероморфными функциями, K — открытый круг, $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. По определению аналитической C-емкости в $K \setminus E^\circ$ можно найти замкнутое подмножество F и функцию $f(z) \in C(F, 1)$ такие, что $f'(\infty) > \alpha(K \setminus E^\circ) - \varepsilon$. Ясно, что $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности CK, и, так как она аналитична на E° и непрерывна на E, ее можно равномерно на E приблизить мероморфными функциями. Это значит, что $f(z)$ можно равномерно приблизить рациональными функциями на $E \cap \overline{K}$. Отсюда, принимая во внимание теорему 3, получим существование последовательности $\{f_n(z)\}$ рациональных функций, для которой $f_n(z) \to f(z)$ равномерно на $E \cup CK$. После подходящей модификации этих функций на $K \setminus E$, не нарушая общности можем считать, что $f_n(z) \in C(K \setminus E, 1)$. Тогда $f_n'(\infty) \to f'(\infty)$ и $|f_n'(\infty)| \leqslant \alpha(K \setminus E)$. Отсюда, $\alpha(K \setminus E^\circ) - \varepsilon < f'(\infty) \leqslant \alpha(K \setminus E)$. В силу произвольности ε получаем $\alpha(K \setminus E^\circ) \leqslant \alpha(K \setminus E)$. Обратное неравенство очевидно.

Все приводимые ниже выкладки в доказательстве достаточности верны также и для общего случая, если вместо кругов (с центрами в $z=0$) будем брать множества $D \setminus V_\sigma(\partial D)$ при подходящих $\sigma > 0$ ($V_\sigma(\partial D)$ — открытая сферическая σ-окрестность ∂D) и заметим, что из теоремы А. Г. Витушкина легко следует эквивалентность условия теоремы 1 требованию, что $E \setminus V_\sigma$ является множеством рациональной аппроксимации.

Пусть дана функция $f(z)$, непрерывная на E, аналитическая на E° и число $\varepsilon>0$. От положительной, непрерывной на $[0, \infty)$, монотонной функции $\alpha(x)$ потребуем, чтобы

$$0<\alpha(x)<\varepsilon \text{ и } \iint\limits_{|\zeta|<\infty} \frac{\alpha\left(|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{|\zeta-z|}\, d\xi d\eta<\varepsilon \quad (\zeta=\xi+i\eta) \tag{1}$$

для всех z.

При нашем условии на E существует последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ рациональных функций с полюсами вне E, удовлетворяющая следующим неравенствам:

$$|\varphi_1(z)-f(z)|<\alpha\left(2+\frac{1}{2}\right), \quad z\in E\cap\left\{|\zeta|<2+\frac{1}{2}\right\},$$

$$|\varphi_n(z)-f(z)|<\alpha\left(2n+\frac{1}{2}\right), \quad z\in E\cap\left\{2(n-1)-\frac{1}{2}\leqslant|\zeta|\leqslant 2n+\frac{1}{2}\right\}, \tag{*}$$

$$n=2, 3, \cdots.$$

С помощью полученной последовательности определим функцию $\varphi(z, r)$ следующим образом: при фиксированной z, $\varphi(z, r)=\varphi_n(z)$, если $2(n-1)\leqslant r<2n$, $n=1, 2, \cdots$.

Имеем, $|\varphi(z, r)-f(z)|<\alpha(r)$ при $r-\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant r+\frac{1}{2}$.

По определению, функция $\varphi(z, r)$ является кусочно-постоянной по r при фиксированном z, и любая точка z попадает самое большее в два не совпадающих кольца, на пересечении которых с E выполняется (*).

Для каждой точки $z\in E$ существует открытый круг с центром в z и радиуса $\delta(z)>0$, такой, что колебание в этом круге функций $\varphi(z, r)$, приближающих $f(z)$ в этой точке, не превышают $\alpha\left(r'-\frac{1}{2}\right)$, где r' — наибольший радиус колец, соответствующих этим функциям. Совокупность точек этих кругов является открытым покрытием замкнутого множества E. Из этого покрытия можем выделить такое счетное покрытие, чтобы любой круг пересекал лишь конечное число кругов нашего покрытия. Объединение E^* точек кругов этого покрытия содержит замкнутое множество E.

Граница ∂E^* множества E^* состоит из счетного числа жордановых кривых, образованных дугами окружностей, причем так, что любой круг пересекает конечное число граничных кривых. Пусть $\{\gamma_k\}$, $k=1, 2, \cdots$ — последовательность граничных кривых множества E^*.

Определим на E функцию

$$\varphi(z) = \int\limits_{|z|-\frac{1}{2}}^{|z|+\frac{1}{2}} \varphi(z, t)\, dt.$$

При $z \in E$ имеем $|f(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$.

Последовательность функций $\{Q_n(z)\}$ определим следующим образом:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma_k \cap (C_l \setminus C_{l-1})} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где $C_l = (|z| \leqslant l)$, $C_0 = \varnothing$, $L_n = E^* \cap (|z| = n)$.

По этой последовательности определим функции

$$R_n(z) = \sum_{l=1}^{n} r_l(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad n=1, 2, \cdots,$$

где $r_l(z)$ — рациональная функция с полюсами вне $E \cup C_{l-1}$ такая, что

$$\left| r_l(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma_k \cap (C_l \setminus C_{l-1})} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{2^l}, \tag{2}$$

$$z \in E \cup C_{l-2}, \quad C_0 = C_{-1} = \varnothing, \quad l=1, 2, \cdots.$$

Функции $r_l(z)$ находим, заменяя интегралы по конечному числу дуг подходящими интегральными суммами.

Докажем, что последовательность функций $\{R_n(z)\}$ равномерно сходится на любом круге S. Для этого рассмотрим разность

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{n+m}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где n такое, что $\overline{S} \subset (|z| < n - 2)$, $m > 0$ — целое число.

Заметим, что если $L_r = E^* \cap (|\zeta| = r)$ и $\psi(\zeta)$ аналитична на $\overline{E}^*$, то по теореме Коши

$$d_r \int\limits_{L_r} \psi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{(r)} \psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Суммирование в правой части этого равенства распространяется на точки пересечения $\{|z| = r\}$ с ∂E^*. Через $d\zeta$ обозначен дифференциал дуги вдоль ∂E^*, соответствующий отрицательному обходу множества E^*.

В силу этого, при $z \in S$, $r > n$

$$d_r \int\limits_{L_r} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = d_r \int\limits_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} dt \int\limits_{L_r} \frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$=\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}_{t=r-\frac{1}{2}}^{t=r+\frac{1}{2}} dr+\int\limits_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} d_r\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi(\zeta, t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dt=$$

$$=\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi\left(\zeta, r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dr+\int\limits_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}}\left\{\sum_{(r)}\frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dt=$$

$$=\left\{\int\limits_{L_r}\frac{\varphi\left(\zeta, r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}dr+\sum_{(r)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Интегрируя это равенство в пределах $n\leqslant t\leqslant n+m$ получаем

$$\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int\limits_{n}^{n+m}dr\int\limits_{L_r}\frac{\varphi\left(\zeta, r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right)= \tag{3}$$

$$=\iint\limits_{E^*\cap(C_{n+m}\setminus C_n)}\frac{\varphi\left(\zeta, r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, r-\frac{1}{2}\right)^{l}}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}\,d\xi d\eta-$$

$$-\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right).$$

В равенстве (3) интегралы под знаками суммы взяты по положительному обходу множества E^*.

Согласно (2), (3) и выбору числа n для S, имеем

$$|R_{n+m}(z)-R_n(z)|=\left|\sum_{l=n+1}^{n+m}r_l(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|=$$

$$=\left|\sum_{l=n+1}^{n+m}r_l(z)-\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)+\right.$$

$$+\sum_{l=n+1}^{n+m}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k\cap(C_l\setminus C_{l-1})}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{n+m}}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant\varepsilon\sum_{l=n+1}^{n+m}\frac{1}{2^l}+$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{E^*\cap(C_{n+m}\setminus C_n)}\frac{\varphi\left(\zeta, r+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, r-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}d\xi d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{l=n+1}^{n+m}\frac{1}{2^l}+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{C_{n+m}\setminus C_n}\frac{\alpha\left(|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{|\zeta-z|}d\xi d\eta.$$

Согласно (1) правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой за счет увеличения n.

Таким образом, доказано, что ряд $R_1(z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))$ сходится равномерно на любом конечном круге, если отбросить конечное число начальных слагаемых. Так как особенностями последних могут быть лишь конечное число полюсов, то $\mu(z)=R_1(z)+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))$ является мероморфной функцией.

Пусть $z\in E$ — фиксировано и $\rho>0$ такое, что $(|\zeta-z|\leqslant\rho)\subset E^*$.

Аналогично тому, как мы доказывали равенство (6), применяя соответствующие выкладки к множеству $E^*\setminus(|\zeta-z|<\rho)$, получим

$$Q_n(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{(E^*\cap C_n)\setminus(|\zeta-z|<\rho)}\frac{\varphi\left(\zeta, |\zeta|+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta, |\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}d\xi d\eta. \tag{4}$$

Пусть число $N>0$ такое, что для точки $z\in E$ имеет место неравенство $\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))\right|<\varepsilon.$

Согласно (1), (2), (4) и конструкции множества E^*, при ρ достаточно малом, имеем

$$|\mu(z)-\varphi(z)|<\left|\sum_{n=N}^{\infty}(R_{n+1}(z)-R_n(z))\right|+|R_N(z)-\varphi(z)|<$$

$$<\varepsilon+|R_N(z)-\varphi(z)|<\varepsilon+\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\varepsilon+$$

$$+|Q_N(z)-\varphi(z)|<2\varepsilon+\left|Q_N(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leqslant2\varepsilon+$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(E^{*}\cap C_N)\setminus(|\zeta-z|<\rho)}\frac{\varphi\left(\zeta,|\zeta|+\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\zeta,|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{|d\zeta|}\,d\xi d\eta\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant 2\varepsilon+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<\infty}\frac{\alpha\left(|\zeta|-\frac{1}{2}\right)}{|\zeta-z|}\,d\xi d\eta+$$

$$+\max_{\zeta,\,|\zeta-z|=\rho}|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|<4\varepsilon.$$

Отсюда, принимая во внимание то, что $\varphi(z)$ приближает $f(z)$ на E с точностью ε, получаем $|\mu(z)-f(z)|<5\varepsilon$. Теорема доказана.

Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается следующее обобщение теоремы Рунге:

Если функция $f(z)$ аналитична на замкнутом множестве E, то для любого $\varepsilon>0$ можно найти мероморфную на плоскости функцию $\mu(z)$ такую, что $|f(z)-\mu(z)|<\varepsilon$ при $z\in E$.

Пусть теперь $E^{\circ}=\varnothing$, $f(z)$—непрерывная на E функция и $\varepsilon(x)>0$—произвольная непрерывная на $[0,\infty)$ функция, стремящаяся к нулю при $x\to\infty$. Не нарушая общности можем считать, что $\varepsilon(x)\leqslant 1$. Тогда по теореме 1 существует мероморфная функция $\mu(z)$ такая, что $\left|\frac{2}{\varepsilon(|z|)}-\mu(z)\right|<1$ при $z\in E$. Имеем для $\mu(z)$

$$|\mu(z)|>\frac{2}{\varepsilon(|z|)}-1=\frac{2-\varepsilon(|z|)}{\varepsilon(|z|)}\geqslant\frac{1}{\varepsilon(|z|)},$$

следовательно, для $z\in E$, $\frac{1}{|\mu(z)|}<\varepsilon(|z|)$. Применив теорему 1 к функции $f(z)\,\mu(z)$, получим, что существует функция $\nu(z)$ такая, что $|f(z)\,\mu(z)-\nu(z)|<1$ при $z\in E$. Отсюда, $\left|f(z)-\frac{\nu(z)}{\mu(z)}\right|<\frac{1}{|\mu(z)|}<\varepsilon(|z|)$.
Теорема 2 доказана.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук Н. У. Аракеляну за помощь, оказанную во время выполнения этой работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 30.X.1972

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաներով հավասարաչափ և շոշափումային մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ապացուցված է, որ կոմպլեքս հարթության մեջ D $(\partial D\neq\varnothing)$ *տիրույթի նկատմամբ փակ* $E\subset D$ *ենթաբազմությունը* D-*ում մերոմորֆ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկման բազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած փակ* $K\subset D$ *շրջանի համար* $E\cap K$ *բազմությունը հանդիսանում է ռացիոնալ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկման բազմություն։*

Ցույց է տրված նաև, որ նույն պայմանն անհրաժեշտ ու բավարար է, որպեսզի ներքին կետեր չունեցող D-ում փակ բազմությունը հանդիսանա D-ում մերոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափումային մոտարկման բազմություն։

A. H. NERSESIAN. *On the uniform and tangential approximation by meromorphic functions* (summary)

It is proved that a relatively closed subset of a domain D $(\partial D \neq \varnothing)$ on the complex plane is a set of uniform approximation by functions meromorphic in D if and only if its intersection with any closed circle $K \subset D$ is a set of uniform approximation by rational functions.

It is proved also that the same condition is necessary and sufficient for a relatively closed subset of D without interior to be a set of tangential approximation by functions meromorphic in D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Витушкин.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, XXII, вып. 6, 1967, 141—199.
2. *L. Zalcman.* Analytic capacity and rational approximation, Berlin—Heidelberg—New York, Spriger Verlag, 1968.
3. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

Г. С. МИКАЕЛЯН

О Q-КАРТЕРОВСКИХ ПОДГРУППАХ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП С Q-РАДИКАЛОМ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Введение

В статье вводится понятие Q-картеровской подгруппы (см. п. 2°). (Такие подгруппы в более частной форме, а именно, когда для всякого $\alpha \in M$ вместе силовского класса Σ_α (см. п. 2°) берется некоторый класс P_α групп, где P_α—простое число и различным α соответствуют различные P_α, рассматривались в работе Стонехевера [2]). Доказываются некоторые теоремы о существовании и сопряженности таких подгрупп в локально конечных группах с Q-радикалом конечного индекса. В частности, из этих теорем для рассматриваемых Стонехевером типов групп утверждения теоремы 2.1 работы [2] получены в более слабых предположениях (см. следствия 2, 3).

В п. 3° приводится определение силовской LQ-базы, введенное ранее в работе автора [7], где, в частности, доказаны некоторые теоремы о сопряженности таких баз периодических групп. Здесь же доказывается один критерий о существовании полной силовской нижней Q-базы (см. п. 3°) в локально конечной группе с Q-радикалом конечного индекса.

1°. Пусть Σ—некоторый абстрактный класс групп. Обозначим через $L\Sigma$ класс всех групп, обладающих локальными системами из Σ-групп, $E\Sigma$—класс всех расширений Σ-групп при помощи Σ-групп, $T\Sigma$—класс всех гомоморфных образов Σ-групп и $S\Sigma$—класс всех подгрупп Σ-групп. Обозначим, далее, через Φ некоторую подсистему системы операторов $\langle S, T, E, L \rangle$. (Здесь Φ могла быть и любая система теоретико-групповых операций, но нам достаточно ограничиваться только рассматриваемыми подсистемами). Теперь минимальный класс групп, содержащий Σ и замкнутый относительно каждого из операторов из Φ будем обозначать через $\{\Sigma|\Phi\}$. Ясно, что группы из класса $\{\Sigma|\Phi\}$ будут получаться из Σ-групп всевозможными последовательными применениями операторов из Φ в конечное число раз. Если некоторая группа из $\{\Sigma|\Phi\}$ получена из Σ-групп n-кратным применением указанных операторов, то скажем, что она имеет *глубину* (*Φ-глубину*) n до класса Σ.

Лемма 1. *Для произвольного класса групп Σ справедливы следующие равенства:*

$$\{\Sigma|S,\ T,\ E,\ L\} = \{S\Sigma|T,\ E,\ L\}, \tag{1}$$

$$\{\Sigma|S,\ T,\ E,\ L\} = \{TS\Sigma|E,\ L\}. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем сначала соотношение (1). Для этого, индукцией по глубине n до класса $S\Sigma$ докажем, что

$$S\{S\Sigma|T,\ E,\ L\} \subseteq \{S\Sigma|T,\ E,\ L\} = \Sigma'. \tag{3}$$

При $n=0$ (3) следует из равенства $SS\Sigma = S\Sigma$.

Пусть теперь $G \subseteq G_1$, где G_1 — Σ'-группа глубины $n+1$ до $S\Sigma$. Здесь возможны такие случаи:

1) $G_1 = G'/H$, где G' — Σ'-группа глубины n до $S\Sigma$. Тогда $G = G_1'/H$, где $G_1' \subset G'$. По индукции $G_1' \in \Sigma'$ и так как $T\Sigma' \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$.

2) $G/A \simeq B$, где A и B Σ'-группы глубины меньше, чем $n+1$. Тогда $GA/A \simeq G/G \cap A$ и, так как по индукции $G \cap A \in \Sigma'$, $GA/A \in \Sigma'$, а также $E\Sigma' \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$.

3) Пусть $[G_\alpha'|\alpha \in M]$ — локальная система группы G_1 из Σ'-групп, каждая из которых имеет глубину меньшую, чем $n+1$. Тогда, очевидно, система $[G_\alpha|\alpha \in M]$, где $G_\alpha = G \cap G_\alpha'$, будет локальной для группы G и по индукции для каждого $\alpha \in M$ $G_\alpha \in \Sigma'$. Но $L\Sigma' = \Sigma'$. Следовательно $G \in \Sigma'$.

Утверждение (3) доказано. Из него сразу следует (1). Докажем теперь (2). Обозначим $\Sigma' = \{TS\Sigma|E,\ L\}$ и снова индукцией по глубине n до $TS\Sigma$ докажем, что

$$T\Sigma' \subseteq \Sigma',\quad S\Sigma' \subseteq \Sigma'. \tag{4}$$

Докажем сначала первое включение. При $n=0$ имеем $TTS\Sigma \subseteq \Sigma'$, что очевидно.

Пусть теперь $G = G'/H$, где G' есть Σ'-группа глубины $n+1$ до $TS\Sigma$. Рассмотрим два случая:

1) $G'/A \simeq B$, где A и B есть Σ'-группы глубины, меньше $n+1$. Ввиду изоморфизмов $G'/AH \simeq (G'/A)/(AH/A)$, $AH/H \simeq A/A \cap H$ и, в силу индуктивного предположения, имеем G'/AH, $AH/H \in \Sigma'$. Рассмотрим, далее, изоморфизм $(G'/H)/(AH/H) \simeq G'/AH$. Отсюда, и из $E\Sigma' \subseteq \Sigma'$ следует, что

$$G'/H \in \Sigma', \text{ т. е. } G \in \Sigma'.$$

2) $[G_\alpha'|\alpha \in M]$ — локальная система группы G' из Σ'-групп, каждая из которых имеет глубину до $TS\Sigma$, меньшую $n+1$. Тогда система подгрупп $[G_\alpha/\alpha \in M]$, где $G_\alpha = G_\alpha'H/H$, будет локальной для группы G'/H. Ввиду изоморфизма $G_\alpha'H/H \simeq G_\alpha'/G_\alpha \cap H$ и в силу индуктивного предположения, $G_\alpha \in \Sigma'$ для всех $\alpha \in M$ и, так как $L\Sigma' \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$. Первое из утверждений (4) доказано, докажем второе.

При $n=0$ мы имеем $STS\Sigma \subseteq \Sigma'$. Действительно, пусть $G \in STS\Sigma$. Тогда $G \subseteq G' \in TS\Sigma$ и $G' = G''/H$, где $G'' \in S\Sigma$. Ясно, что $G = G_1/H$, $G_1 \subseteq G''$. Но тогда $G_1 \in S\Sigma$. Следовательно, $G \in TS\Sigma$

и так как $TS\Sigma \subseteq \Sigma'$, то $G \in \Sigma'$. Теперь предположим, что $G \subseteq G'$, где G' есть Σ'-группа глубины $n+1$ до $TS\Sigma$. Тогда возможны такие случаи:

1) $G'/A \simeq B$, где A и B—Σ'—группы глубины, меньше $n+1$. Ясно, что $GA/A \simeq G/G \cap A$. С другой стороны, по индуктивному предположению $G \cap A \in \Sigma'$ и $GA/A \in \Sigma'$. Отсюда и из $E\Sigma' \subseteq \Sigma'$ следует, что $G \in \Sigma'$.

2) $[G'_\alpha \mid \alpha \in M]$—локальная система группы G' из Σ'-групп, каждая из которых имеет глубину, меньшую $n+1$ до $TS\Sigma$. Тогда, очевидно, система $[G_\alpha \mid \alpha \in M]$, где $G_\alpha = G \cap G'_\alpha$, будет локальной для группы G и по индукции получаем $G_\alpha \in \Sigma'$ для всех $\alpha \in M$. Но $L\Sigma' \subseteq \Sigma'$. Следовательно, $G \in \Sigma'$. Доказано и второе из утверждений (4). Из этих утверждений следует (2). Лемма доказана.

Класс групп называется *силовским*, если $\theta\Sigma \subseteq \Sigma$, где $\theta = S$, T, E, L. Из доказанной леммы следуют некоторые утверждения о силовском классе, порожденном данным (замкнутым относительно подгрупп и гомоморфных образов), классом групп Σ, т. е. о минимальном силовском классе, содержащем Σ.

Следствие 1. Если класс групп Σ замкнут относительно подгрупп (подгрупп и гомоморфных образов), то порожденный им силовский класс получается из Σ-групп всевозможными последовательными применениями операторов T, E и L (E и L) конечное число раз.

Для произвольного класса Σ обозначим через $\overline{\Sigma}$ класс групп, каждый элемент которых порождает циклическую Σ-группу. Если, например, Σ—класс всех локально конечных p-групп, то $\overline{\Sigma}$—будет классом всех p-групп. Ясно, что если $S\Sigma \subseteq \Sigma$, то $\Sigma \subseteq \overline{\Sigma}$.

Лемма 2. *Пусть $\langle \Sigma_\alpha \mid \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов* (*см.* [3] *и* [6]). *Тогда для всякого $\alpha \in M$*

$$\{\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha \mid S, T, E, L\} \cap \overline{\Sigma}_\alpha = \Sigma_\alpha.$$

Доказательство. Ясно, что $TS(\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha$.

Следовательно, по предыдущей лемме достаточно показать, что

$$\{\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha \mid E, L\} \cap \overline{\Sigma}_\alpha = \Sigma_\alpha.$$

Последнее равенство докажем индукцией по глубине n. При $n=0$ оно очевидно. Пусть G есть $\overline{\Sigma}$-группа глубины $n+1$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $G/A \simeq B$, где A и B принадлежат классу $\{\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha \mid E, L\}$ и имеют глубины, меньшие $n+1$. Из $G \in \overline{\Sigma}_\alpha$ и из того, что $\overline{\Sigma}_\alpha$ — силовский класс (это очевидно), следует, что A, $B \in \overline{\Sigma}_\alpha$. По индукции A, $B \in \Sigma_\alpha$. Но $E\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha$. Следовательно, $G \in \Sigma_\alpha$.

2) $[G_\beta / \beta \in N]$—локальная система группы G из $\{\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha \mid E, L\}$-групп, каждая из которых имеет глубину, меньшую $n+1$. Тогда из $G_\beta \subseteq G$

следует $G_\beta \in \overline{\Sigma}_\alpha$. По индукции $G_\beta \in \Sigma_\alpha$ для всех $\beta \in N$, и так как $L\Sigma_\alpha \subseteq \subseteq \Sigma_\alpha$, то $G \in \Sigma_\alpha$. Лемма доказана.

2°. В дальнейшем всюду через Q будет обозначена расщепляемая система силовских классов $\langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$. Для всякой группы G обозначим через $R_\alpha(G)$ максимальную нормальную Σ_α-подгруппу этой группы. Далее положим

$$R_Q(G) = \prod_{\alpha \in M} R_\alpha(G).$$

Подгруппа $R_Q(G)$ будет максимальной Q-разложимой (см. [3]) нормальной подгруппой группы G. В работе Б. И. Плоткина [3] показано, что класс Q-разложимых групп радикальна в смысле Плоткина. Следовательно, подгруппа $R_Q(G)$ определена однозначно. Это же верно и для $R_\alpha(G)$. Эти подгруппы назовем Q и Σ_α-*радикалами* групы G.

Подгруппу A некоторой группы G назовем *Q-картеровской*, если она

1) Q-разложима,

2) максимальна в G как Q-разложимая подгруппа,

3) совпадает со своим нормализатором в G.

В работе Стонехевера [2] рассматривались совпадающие со своими нормализаторами, максимальные локально-нильпотентные подгруппы периодических групп. Эти подгруппы будут Q-картеровскими, если для каждого $\alpha \in M$ вместо класса Σ_α взять класс всех p_α-групп, где p_α — простое число и различным α соответствуют различные p_α.

В дальнейшем всюду через K обозначается некоторый класс групп со свойствами $SK \subseteq K$ и $TK \subseteq K$.

Скажем, что для группы G имеет место *CQ-теорема*, если для всякого $\alpha \in M$ в G имеет место сопряженность силовских Σ_α— подгрупп.

Теорема 1. *Пусть в каждой конечной K-группе имеет место CQ-теорема. Тогда каждая локально конечная K-группа, являющаяся расширением Q-разложимой группы при помощи конечной Q-разложимой группы, обладает Q-картеровской подгруппой.*

Доказательство. Пусть G — заданное расширение, H—ее Q-разложимая нормальная подгруппа конечного индекса. Проведем доказательство индукцией по числу тех $\alpha \in M$, для которых силовские Σ_α-подгруппы группы G не нормальны в ней (так как группа $\overline{G} = G/H$ конечна, то число таких α также конечно). Если таких α не существует, то G сама Q-разложима. Действительно, пусть G не является Q-разложимой. Тогда ясно, что $G \neq R_Q(G)$. Далее, из $H \subseteq R_Q(G)$ следует, что группа $G/R_Q(G)$ также Q-разложима. Следовательно существует такая $\alpha \in M$ и такая подгруппа A группы G, что

$$1 \neq A/R_Q(G) \in \Sigma_\alpha.$$

Теперь, так как $A \in \{\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha / S, \Sigma, E, L\}$, то здесь можно применить лемму 1 из [6]. По этой лемме существует Σ_α-элемент группы A, не содержащийся в $R_Q(G)$. Но, по предположению, все Σ_α-элементы группы G содержатся в $R_\alpha(G)$ и, значит, в $R_Q(G)$. Полученное противоречие и показывает, что G—Q-разложима.

Для дальнейшего необходимо доказать две леммы.

Лемма 3. *Пусть для некоторого $\alpha \in M$ в каждой конечной K-группе имеет место $C\langle\Sigma_\alpha\rangle$-теорема. Тогда, если локально конечная K-группа G обладает Q-разложимым нормальным делителем H конечного индекса, то в G также имеет место $C\langle\Sigma_\alpha\rangle$-теорема.*

Доказательство. Пусть A и B—силовские Σ_α-подгруппы группы G. Обозначим каждое из равных подгрупп $A \cap H$ и $B \cap H$ через C. Она будет составлена из всех Σ_α-элементов группы H, следовательно характеристична в ней и нормальна в G. Ввиду изоморфизмов $AH/H \simeq A/C$ и $BH/H \simeq B/C$ подгруппы A/C и B/C конечны, и так как G—локально конечна, то конечна и группа $D=\{A, B\}/C$. С другой стороны, A/C и B/C—силовские Σ_α-подгруппы в группе G/C и, следовательно, в D. Если, например, $A/C \subseteq A_1/C \in \Sigma_\alpha$, где A_1—подгруппа в G, то $A_1 \in \Sigma_\alpha$ и отсюда из $A \subseteq A_1$ получаем $A=A_1$. Теперь по предположению в D имеет место сопряженность подгрупп A/C и B/C, откуда и следует сопряженность A и B.

Лемма 4. *Пусть для некоторого $\alpha \in M$ в каждой конечной K-группе имеет место $C\langle\Sigma_\alpha\rangle$-теорема. Тогда, если локально конечная K-группа G обладает Q-разложимой нормальной подгруппой H конечного индекса, то образ $\overline{A}$ силовской Σ_α-подгруппы A группы G при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G} = G/H$ будет силовской Σ_α-подгруппой в $\overline{G}$.*

Доказательство. Предположим, что

$$\overline{A} \subseteq \overline{A}_1 = A_1/H \in \Sigma_\alpha. \tag{5}$$

Ясно, что $\overline{A}_1$—конечная, а A_1—локально конечная группы. Следовательно

$$A_1 = BH, \tag{6}$$

где B—конечная группа. Обозначим

$$\Sigma_{\overline{\alpha}} = \{ \bigcup_{\beta \in M/\langle\alpha\rangle} \Sigma_\beta | E, L\}.$$

Из леммы 2 работы [6] следует, что

$$\Sigma_\alpha \cap \Sigma_{\overline{\alpha}} = \varepsilon, \tag{7}$$

где ε — силовский класс, состоящий только из единичной группы. Пусть теперь a—некоторый $\Sigma_{\overline{\alpha}}$-элемент группы A_1. Тогда из (5) и (7) следует, что $a \in H$, т. е. $a \in R_{\overline{\alpha}}(H)$ и все $\Sigma_{\overline{\alpha}}$-элементы группы A_1 составляют подгруппу в ней. Но $B \subseteq A_4$, значит $\Sigma_{\overline{\alpha}}$-элементы группы

B также составляют подгруппу в ней. Ясно, что это будет подгруппа $R_{\bar{\alpha}}(B)$. Отсюда, учитывая, что $B \in \{\bigcup_{\alpha \in M} \Sigma_\alpha / E, L\}$ и (7) получаем

$$B/R_{\bar{\alpha}}(B) \in \Sigma_{\bar{\alpha}},$$

или

$$B/R_{\bar{\alpha}}(B) \in \Sigma_\alpha,$$

в силу леммы 2.

Теперь, по известной теореме Шура, $B = CR_{\bar{\alpha}}(B)$, где $C \cong B/R_{\bar{\alpha}}(B)$ и, следовательно, $C \in \Sigma_\alpha$. Далее, имея ввиду (6), получим

$$A_1 = C R_{\bar{\alpha}}(B) H =$$

$$= CR_\alpha(H) R_{\bar{\alpha}}(B) R_{\bar{\alpha}}(H) = CR_\alpha(H) R_{\bar{\alpha}}(H),$$

где $CR_\alpha(H) \in \Sigma_\alpha$. По лемме 3 в группе A_1 имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$. Следовательно, для некоторого $a \in A_1$ имеем

$$a^{-1} CR_\alpha(H) a \subseteq A.$$

Но тогда $A_1H = AH$ и $\overline{A}_1 = \overline{A}$, т. е. действительно $\overline{A}$ — силовская Σ_α-подгруппа в $\overline{G}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть для $\alpha \in M$ силовская Σ_α-подгруппа G_α группы G не ненормальна в ней. Обозначим $\overline{G}_\alpha = G_\alpha H/H$. По лемме 4 $\overline{G}_\alpha$ будет силовской Σ_α-подгруппой в группе $\overline{G}$. Но $\overline{G}$ — Q-разложима. Следовательно $\overline{G}_\alpha \trianglelefteq \overline{G}$ или $G_\alpha H \trianglelefteq G$. Обозначим, далее, $D = N_G(G_\alpha)$. Покажем, что

$$HD = G. \tag{8}$$

Действительно, пусть $g \in G$. Тогда G_α и $g^{-1} G_\alpha g$ будут силовскими Σ_α-подгруппами группы $G_\alpha H$, и так как по лемме 3 в группе $G_\alpha H$ имеетя место $C\langle\Sigma_\alpha\rangle$-теорема, то существует такой элемент c из $G_\alpha H$, что

$$c^{-1} G_\alpha c = g^{-1} G_\alpha g.$$

Отсюда $cg^{-1} \in D$, т. е. $g \in HD$ и (8) доказано. Докажем теперь, что в G существует Q-разложимая подгруппа L с условием

$$G = LH. \tag{9}$$

Ясно, что в группе D меньше таких α, для которых силовска Σ_α-подгруппа нормальна в ней (по сравнению с G). По индуктивному предположению в ней существует Q-разложимая подгруппа L с условием

$$D = L(H \cap D).$$

Отсюда, имея ввиду (8), получаем (9).

Берем теперь максимальную подгруппу из L, удовлетворяющую равенству (9). Тогда

$$L = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha), \tag{10}$$

где G_α — некоторая силовская Σ_α-подгруппа группы G.

Действительно, так как L — Q-разложима, то $L \subseteq N_G(L_\alpha)$, где L_α — силовская Σ_α-подгруппа группы L. Далее, $L \subseteq N_G(R_\alpha(G))$ и, следовательно, $L \subseteq N_G(L_\alpha R_\alpha(G))$. Но $L_\alpha R_\alpha(G)$ — силовская Σ_α-подгруппа в G, так как

$$G = LH = (L_\alpha L_{\bar\alpha}) R_\alpha(H) R_{\bar\alpha}(H) =$$
$$= (L_\alpha R_\alpha(H))(L_{\bar\alpha} R_{\bar\alpha}(H)),$$
$$G_\alpha = L_\alpha R_\alpha(H) \in \Sigma_\alpha, \quad L_{\bar\alpha} R_{\bar\alpha}(H) \in \Sigma_{\bar\alpha},$$

и

$$\Sigma_\alpha \cap \Sigma_{\bar\alpha} = \varepsilon.$$

Но группа $\bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha)$ Q-разложима (это доказывается точно так же, как в начале доказательства теоремы устанавливалась Q-разложимость группы G), и поскольку L — максимальная Q-разложимая подгруппа группы G, то (10) справедливо.

Пусть теперь $x \in N_G(L)$. Тогда $x \in N_G(L_\alpha)$ для всех $\alpha \in M$, или $x \in N_G(L_\alpha R_\alpha(H))$, т. е. $x \in N_G(G_\alpha)$ и, следовательно, $x \in L$. Теорема доказана.

Под фактором группы G, как это принято, будем понимать каждую фактор-группу любой ее подгруппы.

Из хода доказательства теоремы 1 видно, что можно было доказать и такую теорему.

Теорема 1*. *Локально конечная группа, в каждом конечном факторе которой имеет место CQ-теорема и которая является расширением Q-разложимой группы, при помощи конечной Q-разложимой группы, обладает Q-картеровской подгруппой.*

3°. Обозначим через $\{\Sigma\}$ — силовский класс, порожденный классом групп Σ, т. е. $\{\Sigma\} = \{\Sigma | S, T, E, L\}$. Напомним, что $Q = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов. Для всякого $N \subseteq M$, $|N| > 1$, где $|N|$ — мощность множества N, отметим силовский класс L_N с условием $\{\Sigma_\beta | \beta \in N\} \subseteq L_N \subseteq \overline{\{\Sigma_\beta | \beta \in N\}}$. Совокупность всех таких L_N обозначим через L. Теперь систему подгрупп $\langle G_\alpha | \alpha \in M \rangle$ некоторой группы G назовем ее *силовской LQ-базой*, если

1) Для каждого $\alpha \in M$ G_α является силовской Σ_α-подгруппой группы G.

2) Для всякого $N \subseteq M$, $|N| > 1$ $\{G_\beta | \beta \in N\} \in L_N$. В частности, если $L_N = \{\Sigma_\beta | \beta \in N\}$ для всех $N \subseteq M$, то эту систему назовем *силовской нижней Q-базой*. Очевидно, каждая силовская нижняя Q-база будет и силовской LQ-базой для всякой совокупности L.

Обратное же утверждение неверно. Если вместе с 1) и 2) выполняется еще и

3) $\{G_\alpha | \alpha \in M\} = G$,

то заданную систему назовем *полной силовской LQ-базой*. Аналогично определяется *полная силовская нижняя Q-база*.

Примерами силовских LQ-баз являются известное понятие силовской П-базы (см. [1]), силовской θ-базы, силовской Σ-базы (см. [6]) и т. д.

Сейчас мы докажем один критерий существования полной силовской нижней Q-базы.

Теорема 2. *Пусть в произвольной конечной K-группе имеет место CQ-теорема. Тогда каждая локально конечная K-группа, являющаяся расширением Q-разложимой группы при помощи конечной Q-разложимой группы, обладает полной силовской нижней Q-базой.*

Доказательство. Здесь выполняются все условия теоремы 1 и в обозначениях этой теоремы существует Q-картеровская подгруппа L группы G, представимая в виде $L=\bigcap\limits_{\alpha\in M} N_G(H_\alpha L_\alpha)$, где $H_\alpha L_\alpha$ — силовская Σ_α-подгруппа группы G. Из $H_{\alpha_1} L_{\alpha_1}\cdots, H_{\alpha_n} L_{\alpha_n}=(H_{\alpha_1}\cdots H_{\alpha_n})(L_{\alpha_1}\cdots L_{\alpha_n})$ и из $H_{\alpha_1}\cdots H_{\alpha_n}, L_{\alpha_1}\cdots L_{\alpha_n}\in\{\Sigma_{\alpha_1},\cdots,\Sigma_{\alpha_n}\}$, ввиду изоморфизма $H_{\alpha_1}\cdots H_{\alpha_n} L_{\alpha_1}\cdots L_{\alpha_n}/H_{\alpha_1}\cdots H_{\alpha_n}\cong L_{\alpha_1}\cdots L_{\alpha_n}/H_{\alpha_1}\cdots H_{\alpha_n}\cap L_{\alpha_1}\cdots L_{\alpha_n}$ получаем $H_{\alpha_1}\cdots L_{\alpha_n}\in\{\Sigma_{\alpha_1},\cdots,\Sigma_{\alpha_n}\}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in M$. Но существует только конечное число $\alpha\in M$, для которых силовская Σ_α-подгруппа не нормальна в G. Следовательно, система $\langle H_\alpha L_\alpha|\alpha\in M\rangle$ будет силовской нижней Q-базой группы G. Покажем, что она полная. Действительно, по лемме 4 подгруппа $H_\alpha L_\alpha H/H=L_\alpha H/H$, $\alpha\in M$, будет силовской Σ_α-подгруппой в группе G/H. Следовательно, система $\langle G_\alpha H/H|\alpha\in M\rangle$ является нижней силовской Q-базой в G/H. Но G/H Q-разложима. Следовательно $G/H=\{L_\alpha H/H|\alpha\in M\}$ или $G=\{L_\alpha H|\alpha\in M\}=\{L_\alpha H_\alpha|\alpha\in M\}$. Теорема доказана.

Аналогично можно было доказать и такую теорему.

Теорема 2*. *Пусть в любом конечном факторе локально конечной группы G имеет место CQ-теорема. Тогда, если G является расширением Q-разложимой группы при помощи конечной Q-разложимой группы, то она обладает полной силовской нижней Q-базой.*

4°. Теорема 3. *Пусть в каждой конечной K-группе справедлива CQ-теорема, и пусть локально конечная K-группа G обладает Q-разложимой нормальной подгруппой конечного индекса. Тогда из существования в группе $\overline{G}=G/H$ Q-картеровских подгрупп следует существование таких подгрупп и в группе G.*

Доказательство. Пусть $\overline{B}=B/H$ — Q-картеровская подгруппа группы $\overline{G}$. Группа B удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. По этой теореме в B существует такая максимальная, совпадающая со своим нормализатором Q-разложимая подгруппа L, что $B=LH$. Пусть $x\in N_G(L)$. Тогда $x\in N_G(B)$. Следовательно $x\in B$ и $x\in N_B(L)$, откуда $x\in L$. Предположим, что L^* — Q-разложимая подгруппа группы G, содержащая L. Тогда группа $\overline{L}^*=L^*H/H$ также Q-разложима, и ввиду

$\overline{L^*} \supseteq \overline{B}$ и максимальности $\overline{B}$ и $\overline{G}$ получаем $\overline{L^*}=\overline{B}$ или $B=LH=L^*H$. Но L—максимальная Q-разложимая подгруппа в B и $L\subseteq L^*\subseteq B$. Следовательно, $L=L^*$ и теорема доказана.

Здесь можно было доказать и такую теорему.

Теорема 3*. *Пусть в каждом конечном факторе локально конечной группы G справедлива CQ-теорема. Тогда, если в G существует Q-разложимая нормальная подгруппа H конечного индекса, то из существования в группе G/H Q-картеровских подгрупп следует существование таких подгрупп в группе G.*

В работе Б. И. Плоткина [4] через $R(G)$ обозначен локально нильпотентный радикал группы G. Там же показано, что локально конечная и локально нильпотентная группа разлагается в прямое произведение своих силовских p-подгрупп. Имея в виду это, приходим к такому следствию.

Следствие 2. Пусть G—локально конечная, а $\overline{G}=G/R(G)$—конечная группы. Тогда из существования в $\overline{G}$ максимальных, совпадающих со своими нормализаторами, локально нильпотентных подгрупп следует существование таких подгрупп в G.

В теореме 2.1 работы [2] аналогичный результат получен при наличии еще и требования локальной разрешимости на G. Но так как существуют простые картеровы (т. е. максимальные совпадающие со своими нормализаторами нильпотентные) подгруппы, то следствие 2 сильнее соответствующего утверждения указанной теоремы.

5°. По-прежнему $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$—расщепляемая система силовских классов. Назовем группу G QN-группой, если для всякого $\alpha\in M$ каждая Σ_α-подгруппа группы G удовлетворяет нормализаторному условию. QN-группой будет каждая N-группа (см. [1]). Если вместо каждого Σ_α взять некоторый класс p_α-групп, где p_α—простое число, то каждая конечная группа также будет QN-группой.

Теорема 4. *Пусть в каждой конечной K-группе справедлива CQ-теорема, а локально конечная K-группа G обладает такой Q-разложимой нормальной подгруппой H, что $\overline{G}=G/H$ — конечная QN-группа. Тогда из сопряженности в $\overline{G}$ Q-картеровских подгрупп следует сопряженность таких подгрупп в группе G.*

Доказательство. Сначала индукцией по тем $\alpha\in M$, для которых силовская Σ_α-подгруппа не нормальна в G, докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть в каждой конечной K-группе выполняется CQ-теорема. Тогда, если локально конечная K-группа G обладает Q-разложимой нормальной подгруппой H конечного индекса, то Q-картеровские подгруппы группы G, представимые в виде $G=LH$, сопряжены.*

Доказательство. Ясно, что группа G/H Q-разложима и, как следует из доказательства теоремы 1, Q-картеровские подгруппы

L и L^*, удовлетворяющие условию леммы, можно представить в таком виде

$$L = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha), \quad L^* = \bigcap_{\alpha \in M} N_G(G_\alpha^*),$$

где G_α и G_α^*—силовские Σ_α-подгруппы группы G. Так как, по лемме 3, в G имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп, то можно считать, что L^* (точнее, некоторая ее сопряженная), содержится в $N_G(G_\alpha)$. Но тогда

$$N_G(G_\alpha) = L(H \cap N_G(G_\alpha)) = L^*(H \cap N_G(G_\alpha)).$$

Группа $N_G(G_\alpha)/H \cap N_G(G_\alpha)$ конечна и Q-разложима. Далее, в группе $N_G(G_\alpha)$ меньше α, для которых силовская Σ_α-подгруппа не нормальна в ней. По индукции, в $N_G(G_\alpha)$ имеет место сопряженность подгрупп L и L^*, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть L— произвольная Q-картеровская подгруппа группы G. Ясно, что группа $\overline{L}=LH/H$ Q-разложима. Пусть $x \in N_G(LH)$, тогда $x^{-1}Lx$ будет Q-картеровской подгруппой группы LH и $x^{-1}Lx = LH$. По лемме 5, отсюда следует сопряженность подгрупп L и $x^{-1}Lx$ в LH, т. е. существует такой элемент $y \in LH$, что

$$y^{-1}Ly = x^{-1}Lx$$

или $xy^{-1} \in N_G(L)$. Следовательно, $xy^{-1} \in L$ и $x \in LH$. Таким образом, подгруппа LH совпадает со своим нормализатором в G. Такой будет и, следовательно, подгруппа $\overline{L}$ в $\overline{G}$. Если теперь $\overline{L}$ строго содержится в некоторой Q-разложимой подгруппе $\overline{L}_1$ группы $\overline{G}$, то ввиду того, что $\overline{G}$ QN-группа, $\overline{L}_1$ будет N-группой и, следовательно, $\overline{L}$ строго будет содержаться в своем нормализаторе, в группе $\overline{L}_1$, и так как $N_{\overline{L}_1}(\overline{L}) \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{L})$, то получается противоречие, что и доказывает максимальность подгруппы $\overline{L}$ в $\overline{G}$ как Q-разложимой подгруппы.

Таким образом, если L и L^* Q—картеровские подгруппы в G, то $\overline{L}$ и $\overline{L}^*$ будут такими в группе $\overline{G}$. Но, по предположению, в $\overline{G}$ имеет место сопряженность указанных подгрупп, т. е.

$$x^{-1}LxH = L^*H,$$

где $x \in G$. Теперь, по лемме 5, подгруппы $x^{-1}Lx$ и L^* сопряжены. Сопряжены, следовательно, и подгруппы L и L^*. Теорема доказана.

И здесь можно было сформулировать теорему 4*, как это делалось в предыдущих случаях.

Следствие 3. Пусть G—локально конечная, а $G/R(G)$—конечная группы. Тогда из сопряженности в $G/R(G)$ максимальных совпадающих со своими нормализаторами нильпотентных подгрупп следует сопряженность в G максимальных совпадающих со своими нормализаторами локально нильпотентных подгрупп.

В упомянутой теореме 2.1 из [2] этот же результат получен при наличии локально разрешимости группы G.

Следовательно, и здесь можно было бы сделать замечание, которое делалось по поводу следствия 2.

В заключение, с чувством глубокой благодарности хотелось бы отметить, что настоящая работа выполнена под руководством покойного профессора А. Г. Куроша.

Ереванский государственный
университет
Поступило 15.III.1972

Հ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Վերջավոր ինդեքսով Q-ռադիկալ ունեցող լոկալ վերջավոր խմբերի Q-կարտերյան ենթախմբերի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում մտցվում է Q-կարտերյան ենթախմբի գաղափարը։ Ստացվում են թեորեմներ վերջավոր ինդեքսով Q-ռադիկալ ունեցող լոկալ վերջավոր խմբերում Q-կարտերյան ենթախմբերի գոյության և համալուծության վերաբերյալ։ Այդ թեորեմներից մասնավոր դեպքերում ստացված հետևանքները ուժեղացնում են Ստոնեհեվերի [2] աշխատանքի հիմնական արդյունքը։

H. S. MIKAELIAN. *On Q-carter subgroups of locally finite groups with finite index Q-radical* (summary)

The notion of Q-carter subgroup generalises the concepts, introduced in [2]. Some theorems of existence and conjugateness of Q-carter subgroups are proved for locally finite groups. These theorems actually improve the conditions, under which the main result of Stonehevers [2] is valid.

The Sylov LQ-base is defined and a criterium of existence of complete Sylov Q-base is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош.* Теория групп, Изд. 3, М., 1967.
2. *S. E. Stonehewer.* Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14, 1964, 520—536.
3. *Б. И. Плоткин.* Абстрактные силовские свойства, Тр. Уральск. электромех. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 2, 1959, 7—14.
4. *Б. И. Плоткин.* Радикальные группы, Мат. сб., 37, 1955, 507—526.
5. *W. Specht.* Gruppentheorie, Berlin—Gӧtingen—Heidelberg, 1956.
6. *Г. С. Микаелян.* О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Известия АН Арм.ССР, „Математика", V, № 2, 1970, 154—161.
7. *Г. С. Микаелян.* О силовских LQ-базах групп, Известия АН Арм.ССР, „Математика", VI, № 5, 1971, 393—405.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

С. Г. СЕДРАКЯН

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА СВЕРТКИ ПО КРИВЫМ

Обращение преобразования типа свертки

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sx}}{E(s)}\,ds,$$

$$E(s) = e^{cs^2+bs}\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{s}{a_k}\right)e^{-\frac{s}{a_k}}$$

a_k — действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots \text{ и } \sum_1^{\infty} a_k^{-2}<\infty,$$

для действительной переменной хорошо изучены (см. [1]).

В работе изучено обращение интегрального преобразования вида

$$f(z) = \int_L G(z-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где L, вообще говоря, кривая, а z—комплексная переменная.

Выясняется, что при обращении преобразования (1.1) вид кривой зависит от скорости возрастания нулей целой функции $E(s)$, где

$$E(s) = \prod_1^{\infty}\left(1+\frac{s}{a_k}\right)e^{-\frac{s}{a_k}} \tag{1.2}$$

и удовлетворяются следующие условия:

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots, \tag{1.3}$$

$$\sum_1^{\infty} a_k^{-2}<\infty,\quad \sum_1^{\infty} a_k^{-1}=\infty, \tag{1.4}$$

$$1<\rho<2, \tag{1.5}$$

$$\rho = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln n(t)}{\ln t}, \tag{1.6}$$

$n(t)$ — числовая функция последовательности $\{a_k\}$.

Если $y = y(x)$ есть уравнение кривой, по которой берется интеграл (1.1), то обращение получается при

$$|y'(x)| \leqslant \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho} + \eta\right),\quad 0 < \eta < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right).$$

Длина кривой может быть и конечной.

Метод получения обращения интегрального преобразования вдоль кривых отличается от метода получения обращения преобразования вдоль действительной оси.

Для формулировки теоремы обращения введем несколько определений и обозначений.

Определения

1. Функция $n(t) > 0$, определенная для положительных значений t, принадлежит классу n_p $(n(t) \in n_p)$, если для любого постоянного $c \in (0, \infty)$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h_p(ct)}{h_p(t)},$$

где

$$h_p(t) = \int_a^t dt_{p-1} \int_a^{t_{p-1}} dt_{p-2} \cdots \int_a^{t_1} n(t_0)\, dt_0. \tag{1.7}$$

2. Условимся говорить, что $E(s)$ принадлежит классу E_p, если числовая функция $n(t)$ корней $E(s)$ принадлежит классу n_p и удовлетворяются условия (1.3), (1.4), (1.5). Введем обозначения

$$S_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_k^{-2}, \tag{1.8}$$

$$P_n(s) = \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{a_k}\right) e^{-\frac{s}{a_k}}, \tag{1.9}$$

$$P_n(D) = \prod_1^n \left(1 + \frac{D}{a_k}\right) e^{-\frac{D}{a_k}},$$

D — оператор дифференцирования, а под $e^{\alpha D}$ понимается

$$e^{\alpha D} f(z) = f(z + \alpha), \tag{1.10}$$

$$E_n(s) = \frac{E(s)}{P_n(s)} = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{a_k}\right) e^{-\frac{s}{a_k}}. \tag{1.11}$$

Теперь сформулируем теорему обращения.

Теорема 1. *Если*

$$f(z)=\int_L C(z-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

1) $$C(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sz}}{E(s)}\,ds,\quad E(s)\in E_\rho,$$

2) $$|y'(x)|\leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\rho}-\eta\right),\ 0<\eta<\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),$$

ρ *определено* (1.6) *и удовлетворяется условие* (1.5), *а* $y=y(x)$ — *уравнение кривой* L,

3) $$|\varphi(z)-\varphi(z-t)|<\exp\left(cS_1^{-\frac{1}{2}}|t|\right),$$

для любого $z\in L$ *и для таких* t, *что* $z-t\in L$, $c<\inf a_n S_n^{-\frac{1}{2}}$, S_n—*определено* (1.8),

4) $\varphi(t)$ *непрерывна для* $t\in L$,

то

$$\lim_{n\to\infty}P_n(D)\,f(z)=T_L(z)\,\varphi(z),$$

где $P_n(D)$ *определено* (1.10) *и*

$$T_L(z)=\begin{cases}1, & \text{при } z\in L\setminus\partial L\\ 0 & \text{при } z\,\overline{\in}\,L\end{cases}$$

($L\setminus\partial L$ — *множество внутренних точек* L).

Для доказательства теоремы 1 убедимся в справедливости следующей теоремы и нескольких лемм.

Теорема 2. *Если*

1. $$Y(z)=(-1)^k z^{k+1}\int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{|k+1|}(t+z)}\,dt \text{ сходится},$$

2. $n(t)\in n_\rho$,

3. $0<k<\rho<k+1$, *где* ρ *определено* (1.6),

4. $|\theta|<\pi-\eta$, $0<\eta<\pi$ $(z=re^{i\theta})$,

то

$$Y(z)=\frac{\pi h^*_{\rho\rho}(r)}{\sin\rho\pi}z^\rho+o\left(h^*_{\rho\rho}(r)\,r^\rho\right)$$

при $r \to \infty$, *где*

$$\overset{*}{h}_{p\rho}(r) = \prod_{k=1}^{p} (\rho + k)\, r^{-(p+\rho)} h_p^{(r)},$$

$h_p(r)$ *определено* (1.7).

Предварительно докажем леммы.

Определение. Функция $l(r)$, определенная в $(0, \infty)$, называется медленно растущей функцией, если существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{l(cr)}{l(r)} = 1$$

для любого постоянного $c > 0$, или, если существует производная $l'(r)$, то

$$\lim_{r \to \infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0.$$

Лемма 2.1. *Если функция* $l(r)$ *вместе со своей производной* $l'(r)$ *непрерывна при* $r > c > 0$, *и* $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{l(c_0 r)}{l(r)} = 1$ *для некоторого* c_0 $(0 < c_0 \neq 1)$, *то для произвольного* $c > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{l(cr)}{l(r)} = 1.$$

Доказательство. По условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{l(c_0 r)}{l(r)} = 1,$$

или, что то же

$$\lim_{r \to \infty} \ln \frac{l(c_0 r)}{l(r)} = \lim_{r \to \infty} \int_r^{c_0 r} \frac{l'(x)}{l(x)}\, dx =$$

$$= \lim_{r \to \infty} \frac{l'(\theta r)}{l(\theta r)}\, r\, (c_0 - 1), \quad \begin{matrix} 1 \leqslant \theta \leqslant c_0 \ (c_0 > 1) \\ c_0 \leqslant \theta \leqslant 1 \ (c_0 < 1). \end{matrix}$$

Обозначим $\theta r = r'$, имеем

$$\lim_{r' \to \infty} \frac{r' l'(r')}{l(r')} \cdot \frac{c_0 - 1}{\theta} = 0, \text{ где } \frac{c_0 - 1}{\theta} > c_1 > 0,$$

значит

$$\lim_{r \to \infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0,$$

и лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если функция* $l(r)$ *определена для положительных значений* r, *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln l(r)}{\ln r} = 0 \qquad (1)$$

и для любого числа $c \in (0, \infty)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{l(cr)}{l(r)}, \tag{2}$$

то $l(r)$*—медленно растущая функция.*

Доказательство. Из условия (1) следует существование такой медленно растущей функции $L(r)$ и последовательности $\{r_n\}$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, что

$$l(r) \leqslant L(r),\ r > 0 \text{ и } l(r_n) = L(r_n)$$

(см. [4], стр. 48, ч. 1, § 12 и теорему 16, гл. 1, § 12, стр. 52). По условию (2) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{l(cr)}{l(r)}, \text{ и так как } l(r) \leqslant L(r),$$

то $\dfrac{l(cr_n)}{l(r_n)} \leqslant \dfrac{L(cr_n)}{L(r_n)}$, отсюда следует, что $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{l(cr)}{l(r)} \leqslant 1$, с другой стороны, можно взять последовательность $\{r'_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = \infty$ и $l(cr'_n) = L(cr'_n)$ (например, можно взять $r'_n = \dfrac{r_n}{c}$), получим $\dfrac{l(cr'_n)}{l(r'_n)} \geqslant$ $\geqslant \dfrac{L(cr'_n)}{L(r'_n)}$, откуда вытекает, что $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{l(cr)}{l(r)} \geqslant 1$.

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Если* $l(r)$*—медленно растущая функция, а* $\psi(u)$ *абсолютно интегрируема на интервале* $(0, \infty)$ *и удовлетворяет условиям*

$$|\psi(u)| = o\ (u^{\gamma-1}) \qquad (u \to 0,\ \gamma > 0),$$

$$|\psi(u)| = o\ (u^{-\gamma-1}) \quad (u \to \infty,\ \gamma > 0),$$

где u и r вещественны, то

$$\int_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} \frac{l(ru)}{l(r)}\, \psi(u)\, du = \int_0^{\infty} \psi(u)\, du + o(1)$$

при $r \to \infty$, $\alpha > 0$.

Доказательство леммы получается из леммы 2 работы [3].

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$Y(z) = (-1)^k z^{k+1} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{k+1}\,(t+z)}\, dt.$$

Интегрируя по частям p раз, получим

$$Y(z) = (-1)^{p+k} z^{k+1} \int_{\alpha}^{\infty} h_p(t) \left(\frac{t^{-k-1}}{t+z}\right)^{(p)} dt,$$

$$\operatorname{Re} Y(z)=(-1)^{p+k}\int_{\alpha}^{\infty} h_p(t)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{z^{k+1}t^{-k-1}}{t+z}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=(-1)^{p+k}\int_{\alpha}^{\infty} h_p(t)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{r^{k+1}e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+re^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt,$$

где $h_p(t)$ определена (1.7), $z=re^{i\theta}$.

Положим $t=t'r$, тогда легко заметить, что

$$\operatorname{Re} Y(z)=(-1)^{p+k}r^{-p}\int_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} h_p(rt)\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=(-1)^{p+k}r^{-p+l_p}\int_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty}\frac{h_p(rt)}{(rt)^{l_p}}\cdot t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=(-1)^{p+k}r^{\rho}\int_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} h_{p\rho}(rt)\,t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt,$$

где $h_{p\rho}(t)=\dfrac{h_p(t)}{t^{l_p}}$, $l_p=p+\rho$.

В силу условия 2 теоремы и леммы 2.1 имеем, что $h_{p\rho}(t)$— медленно растущая функция.

Применяя лемму 2.3, получим

$$\int_{\frac{\alpha}{r}}^{\infty} h_{p\rho}(rt)\,t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt=$$

$$=h_{p\rho}(r)\int_{0}^{\infty} t^{l_p}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}\right]dt+o\left(h_{p\rho}(r)\right)=$$

$$=h_{p\rho}(r)\operatorname{Re}\int_{0}^{\infty} t^{l_p}\left(\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{-k-1}}{t+e^{i\theta}}\right)^{(p)}dt+o\left(h_{p\rho}(r)\right)$$

при $r\to\infty$.

Интегрируя последний интеграл по частям p раз, получим

$$\operatorname{Re} Y(z)=(-1)^{k}h_{p\rho}(r)\,r^{\rho}\prod_{k=1}^{p-1}(l_p-k)\operatorname{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i(k+1)\theta}t^{\rho-k-1}}{t+e^{i\theta}}dt+$$

$$+o\,(r^\rho h_{\rho\rho}(r))=\frac{\pi h^*_{\rho\rho}(r)\,r^\rho}{\sin\rho\pi}\,\mathrm{Re}\,e^{i\rho\theta}+o\,(r^\rho h_{\rho\rho}(r))$$

при $r\to\infty$. Вычисляя таким же образом $\mathrm{Im}\,Y(z)$, убедимся в справедливости теоремы, т. е.

$$Y(z)=\frac{\pi h^*_{\rho\rho}(r)}{\sin\rho\pi}z^\rho+o\,(r^\rho h^*_{\rho\rho}(r))$$

при $r\to\infty$.

При помощи этой теоремы получается асимптотическая оценка для канонического произведения

$$\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\sum_{m=1}^{p}\frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{z}{a_k}\right)^m\right],\ \text{когда}\ n(t)\in n_p$$

и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\arg a_k$ и, следовательно, для целой функции конечного порядка, имеющей корнями a_k, для которых существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\arg a_k$.

Приведем примеры функции $n(t)$, для которых с помощью теоремы 2 получается асимптотическая оценка, которая, однако из результатов не вытекает.

Пример 1.

$$n(t)=t^\rho(2+\sin t),\ \rho>0.$$

Для этой функции предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(ct)}{n(t)}$$

не существует ни для какого c, кроме $c=1$, значит нельзя ее представить в виде $t^\rho l(t)$, где $l(t)$—медленно растущая функция, но если взять

$$h_1(t)=\int_a^t n(x)\,dx=\int_a^t x^\rho(2+\sin x)\,dx=$$

$$=\frac{t^{\rho+1}-a^{\rho+1}}{\rho+1}+\int_a^t x^\rho\sin x\,dx,$$

то $h_1(t)\sim\dfrac{t^{\rho+1}}{\rho+1}$, отсюда следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h_1(ct)}{h_1(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{c^{\rho+1}t^{\rho+1}}{t^{\rho+1}}=c^{\rho+1}$$

для любого $c>0$.

Пример 2.

$$n(t)=e^{\rho\,[\ln t]}$$

($[x]$ — целая часть x). Можно убедиться, что существуют такие c, для которых предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(ct)}{n(t)}$$

не существует. Например, если взять $c<e$ $(c\neq 1)$, то можно найти последовательность $\{t_k\}$ такую, что $t_k\to\infty$, $k\to\infty$ и $[\ln ct_k]=[\ln t_k]$, то есть

$$\frac{n(ct_k)}{n(t_k)}=1,$$

и для того же c можно выбрать последовательность $\{t_k'\}$ такую, что $t_k\to\infty$, $k\to\infty$ и

$$[\ln ct_k']=[\ln t_k']+1 \quad (1<c<e).$$

В этом случае $\dfrac{n(ct_k')}{n(t_k')}=e^{\rho}$. Отсюда следует, что предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(ct)}{n(t)}$$

не существует ни для одного такого c.

Теперь покажем, что если взять

$$n_2(t)=\int_{\alpha}^{t}dt_1\int_{\alpha}^{t_1}n(t_0)\,dt_0,$$

то для функции $h_2(t)$ предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{h_2(ct)}{h_2(t)}$$

существует для любого $c>0$. В самом деле

$$\frac{h_2(ct)}{h_2(t)}=\frac{\int_{\alpha}^{ct}dt_1\int_{\alpha}^{t_1}n(t_0)\,dt_0}{\int_{\alpha}^{t}dt_1\int_{\alpha}^{t_1}n(t_0)\,dt_0}=$$

положим $t_1=cz$

$$=\frac{c\int_{\alpha/c}^{t}dz\int_{\alpha}^{z}e^{\rho[\ln t_0]}\,dt_0}{\int_{\alpha}^{t}dt_1\int_{\alpha}^{t_1}e^{\rho[\ln t_0]}\,dt_0}=$$

положим $t_0=ct'$

$$= \frac{c^2 \int\limits_a^t dz \int\limits_a^z e^{\rho\,[\ln ct']}\, dt' + c_1}{\int\limits_a^t dt_1 \int\limits_a^{t_1} e^{\rho\,[\ln t_0]}\, dt_0}.$$

Если взять $c = e^k$ (k—целое число), то предел для таких c существует и равен $c^{\rho+2}$, а для функции

$$\bar{h}_2(t) = \frac{h_2(t)}{t^{\rho+1}} \quad \text{для таких } c$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\bar{h}_2(ct)}{\bar{h}_2(t)} = 1.$$

Согласно лемме 2.1 этот предел существует и равен 1 для любого $c>0$, следовательно

$$\lim_{t \to \infty} \frac{h_2(ct)}{h_2(t)} = c^{\rho+2}.$$

Лемма 1.1. *Если* $E_n(s) \in E_\rho$ $(s = re^{i\theta})$,

а $|r\cos\theta| < c\, S_n^{-1/2}$ $\quad (0 < c < \inf a_n s_n^{1/2})$, $n = 1, 2, \cdots$,

то

а) *при* $\cos\theta \leqslant 0$

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left[-\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right] \quad (0 < c_1 < 1),$$

в) *при* $\cos\theta > 0$

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left[-\frac{c^2}{2}\right].$$

Доказательство. а) Имеем $\cos\theta \leqslant 0$

$$|E_n(s)| = \prod_{n+1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^2 + \frac{r^2\sin^2\theta}{a_k^2}\right]^{1/2} e^{-\frac{r\cos\theta}{a_k}} \geqslant$$

$$> \prod_{n+1}^{\infty}\left(1+\frac{r\cos\theta}{a_k}\right) e^{-\frac{r\cos\theta}{a_k}} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n+1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{r\cos\theta}{a_k}\right) - \frac{r\cos\theta}{a_k}\right]\right\},$$

из условия $\left|\frac{r\cos\theta}{a_k}\right| < 1$ можем написать

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left\{\sum_{n+1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^m - \frac{r\cos\theta}{a_k}\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^m\right] \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left[-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\frac{r^2\cos^2\theta}{a_k^2}}{1-\frac{r\cos\theta}{a_k}}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(-\frac{S_n}{2}\frac{r^2\cos^2\theta}{1-c_1}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right).$$

б) При $\cos\theta > 0$, и том же условии

$$|E_n(s)| = \exp\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{r\cos\theta}{a_k}\right)^m - \frac{r\cos\theta}{a_k}\right]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{r^2\cos^2\theta}{a_k^2}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$

Лемма 1.1 доказана.

Замечание. Лемма остается в силе при $\rho = 1$ или $\rho = 2$.

Лемма 1.2. *Если* $E_n(s) \in E_\rho$, $|\theta| \leqslant \pi - \eta$, $0 < \eta < \pi$ $(s = re^{i\theta})$, *то*

$$|E_n(s)| = \exp\left[-n(a_{n+1})\left(\ln\left|1+\frac{s}{a_k}\right| - \frac{x}{a_{n+1}}\right)\right] +$$
$$+ h(\theta, r)\, r^\rho + o(h(\theta, r)\, r^\rho)$$

при $r \to \infty$, *где* $h(\theta, r) = \dfrac{\pi \overset{*}{h}_{\rho\rho}(r)}{\sin\rho\pi}\cos\rho\theta$.

Доказательство.

$$\ln E_n(s) = -n(a_{n+1})\left[\ln\left(1+\frac{s}{a_{n+1}}\right) - \frac{s}{a_{n+1}}\right] - s^2\int_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)}{t^2(t+s)}\,dt,$$

применяя теорему 2 при $k=1$ и $\alpha = a_{n+1}$, убедимся в справедливости леммы.

Лемма 1.3. *Если*

1. $E_n(s) \in E_\rho$ $(s = re^{i\theta})$,

2. $|\operatorname{tg}\theta| \geqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\rho} + \frac{\eta}{2}\right)$, $\eta > 0$,

то

а) *при* $\cos\theta > 0$ *существует действительное число* λ, *зависящее только от* θ *такое, что имеет место оценка*

$$|E_n(s)| \geqslant \exp\left[-n(a_{n+1})\left(\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{r\cos\theta}{a_{n+1}}\right)+\lambda\right]$$

$$(n=1, 2, 3, \cdots),$$

б) *при* $\cos\theta < 0$ *имеет место оценка*

$$|E_n(s)| > 1 + pS_n r^2 \cos^2\theta,$$

где p—некоторая постоянная.

Доказательство. а). Имеем

$$\ln|E_n(s)| = -n(a_{n+1})\left[\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]+$$

$$+\operatorname{Re}\left[-s^2\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^2(t+s)}\right],$$

$$J_n(z)=\operatorname{Re}\left[-s^2\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)\,dt}{t^2(t+s)}\right]=-r^2\cos^{-2}\theta\times$$

$$\times\int\limits_{a_{n+1}}^{\infty}\frac{n(t)(t\cos 2\theta+r\cos\theta)\,dt}{t^2(t^2+r^2+2rt\cos\theta)}.$$

Отсюда видно, что

$$J_n(z)\geqslant 0, \text{ если } r<-\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}a_{n+1},$$

$$-J_n(z)\geqslant 0, \text{ если } r\geqslant-\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}a_{n+1},$$

$$J_n(z)\to\infty, \text{ если } |s|=r\to\infty$$

и ограничена для конечного $r>0$.

Следовательно, существует число λ, зависящее только от θ такое, что $J_n(z)>\lambda$. Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). Если $\cos\theta\leqslant 0$, $s=x(1+im)$, $|m|>1$, то

$$|E_n(s)|=\prod_{n+1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2x}{a_k}\right)^2+\frac{(m^2+1)x^2}{a_k^2}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{a_k}}\geqslant$$

$$\geqslant\prod_{n+1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{2|x|}{a_k}+\frac{(m^2+1)x^2}{a_k^2}\right)\left(1+\frac{2|x|}{a_k}+\frac{2x^2}{a_k^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{n+1}^{\infty}\left[1+\frac{(m^2-1)x^2}{a_k^2}+\frac{2(m^2+1)x^4}{a_k^4}+\frac{2(m^2-1)|x|^3}{a_k^3}\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant \prod_{n+1}^{\infty}\left[1+\frac{(m^2-1)x^2}{a_k^2}+\frac{2(m^2+1)x^4}{a_k^4}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \prod_{n+1}^{\infty}\left(1+p\frac{x^2}{a_k^2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1+\sum_{n+1}^{\infty} p\frac{x^2}{a_k^2} = 1+pS_n r^2\cdot\cos^2\theta.$$

Лемма 1.3 доказана.

Докажем две леммы относительно функции $G(z)$.

Известно, что если $E_n(s) \in E_p$, то

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{sz}}{E(s)}\,ds \text{ — целая функция}$$

(см. [1], теорему 4. 1, стр. 295).

Лемма 1.4. *Если* 1. $E_n(s) \in E_p$,

2. $$|\sigma| \geqslant |\tau|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\eta}{2}\right),$$

где ρ *определено* (1.6), $0<\eta<\pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$, *то существуют числа* $M>0$ *и* $c>0$ *такие, что*

$$|G_n(z)| \leqslant MS_n^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-cS_n^{-\frac{1}{2}}(|\sigma|-k\tau)\right],$$

$$k \leqslant \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\eta}{2}\right)\ (z=\sigma+i\tau).$$

Доказательство. Имеем

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds,\ |\alpha|<a_{n+1},$$

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-ik|\alpha|}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha-ik|\alpha|}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+ik|\alpha|}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}\,ds.$$

Обозначая

$$L_\alpha = \{s: [x=\alpha,\ y \geqslant |k\alpha|]\},$$
$$L_{-\alpha} = \{s: [x=\alpha,\ y \leqslant -|k\alpha|]\},$$
$$M_\alpha = \{s: [x=\alpha,\ -|k\alpha| \leqslant y \leqslant |k\alpha|]\},$$
$$N_{\pm k\alpha} = \{s: [|x| > \alpha,\ y = \pm k\alpha x]\},$$

получим

$$C_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_n}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_a}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{-a}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds.$$

Используя лемму 1.2 при $|\operatorname{tg}\theta|>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\eta}{2}\right)$, легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{\pm a}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N_{\pm ka}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds,$$

следовательно

$$G_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M_a}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N_{+ka}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N_{-ka}}\frac{e^{sz}}{E_n(s)}ds,$$

откуда

$$|G_n(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{M_a}\frac{e^{\sigma x-\tau y}}{|E_n(s)|}|ds|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{N_{-ka}}\frac{e^{\sigma x-\tau y}}{|E_n(s)|}|ds|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{N_{+ka}}\frac{e^{\sigma x-\tau y}}{|E_n(s)|}|ds|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{|ka|}\frac{e^{\sigma x+|\tau|y}}{|E_n(s)|}dy+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|a|}^{\infty}\frac{e^{\sigma x+|\tau|kx}}{|E_n(s)|}dx.$$

Если $x>0$, возьмем $a<0$, $\sigma<0$, и применяя пункт а) леммы 1.3 и пункт б) леммы (1.1), получим

$$|G_n(z)|<\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{kcS_n^{-1/2}}\exp\left[\sigma x+\tau y+\frac{c^2}{2}\right]dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\frac{e^{x(\sigma+k\tau)}\,(1+k)\,dx}{\exp\left[-n\,(a_{n+1})\left(\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]\right.}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{kcS_n^{-1/2}\,e^{c^2/2}}{\pi}\exp\left[c\,s_n^{-1/2}(\sigma+k\tau)\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\exp\left[c\,S_n^{-1/2}(\sigma+k\tau)\right]e^{-\lambda}\int\limits_{cs_n^{-1/2}}^{\infty}\exp\left[n\,(a_{n+1})\,\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]dx\leqslant$$

$$<\frac{1}{\pi}\left(e^{c^2/2}kc\,S_n^{-1/2}+c_n\right)\exp\left[c\,S_n^{-1/2}(\sigma+k\tau)\right],$$

где

$$c_n=e^{-\lambda}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\exp\left[n\,(a_{n+1})\ln\left|1+\frac{s}{a_{n+1}}\right|-\frac{x}{a_{n+1}}\right]dx.$$

Легко заметить, что $c_n\to 0$ при $n\to\infty$.

При $x<0$ возьмем $\alpha>0$, $\sigma>0$ и, и применяя пункт б) леммы 1.3 и пункт а) леммы (1.1), получим

$$|G_n(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{kcS_n^{-1/2}}\frac{e^{\sigma x+|\tau|y}}{\exp\left[-\dfrac{c^2}{2(1-c_1)}\right]}dy+\frac{1}{\pi}\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\frac{e^{-x(\sigma+k\tau)}}{1+px^2S_n}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\ kcS_n^{-1/2}\exp\left[\frac{c^2}{2(1-c_1)}+(k+1)\int\limits_{cS_n^{-1/2}}^{\infty}\frac{dx}{1+px^2S_n}\right]\times$$

$$\times\exp\left[cS_n^{-1/2}(-\sigma+\tau k)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left[kcS_n^{-1/2}\exp\left(\frac{c^2}{2(1-c_1)}\right)+\frac{S_n^{-1/2}}{\sqrt{p}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{pS_n}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[cS_n^{-1/2}(-\sigma+k\tau)\right]=M\cdot S_n^{-1/2}\exp\left[cS_n^{-1/2}(-\sigma+k\tau)\right].$$

Лемма 1.4 доказана.

Эти результаты будут использованы при доказательстве теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Из условия 4 теоремы 1 и леммы 1.4 следует аналитичность функции

$$f(z)=\int\limits_L G(z-t)\,\varphi(t)\,dt$$

на кривой L, значит

$$P_n(D)\,f(z)=\int\limits_L G_n(z-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad P_n(D)\ \text{определено (1.10)},$$

$$P_n(D)\,f(z)-T_{nL}(z)\,\varphi(z)=\int\limits_L G(z-t)\,[\varphi(t)-\varphi(z)]\,dt.$$

Полагая $t=t'+z$, получим

$$P_n(D)\,f(z)-T_{nL}(z)\,\varphi(z)=\int\limits_{L(z)} G_n(t)\,[\varphi(z+t)-\varphi(z)]\,dt=$$

$$=\int\limits_{L_\delta(z)}G_n(t)\,[\varphi(z+t)-\varphi(z)]\,dt+\int\limits_{L(z)\setminus L_\delta(z)}G_n(t)\,[\varphi(z+t)-\varphi(z)]\,dt,$$

где $L_\delta(z)$ часть кривой $L(z)$ для $|t|\leqslant\delta$, а

$$T_{nL}(z)=\int\limits_L G_n(z-t)\,dt.$$

Из тех же условий теоремы 1 и леммы 1.4 получаем

$$|P_n(D)f(z)-T_{nL}(z)\varphi(z)|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{L_\delta(z)}|G_n(t)|\,|\varphi(z+t)-\varphi(z)|\,|dt|+\int\limits_{L(z)\setminus L_\delta(z)}|G_n(t)|\,|\varphi(z+t)-\varphi(z)|\,|dt|\leqslant$$

$$\leqslant \max|\varphi(z+t)-\varphi(z)|\cdot\int\limits_{L_\delta(z)}|G_n(t)|\,|dt|+$$

$$+2\int\limits_{\delta}^{\infty}MS_n^{-1/2}\exp\left[-cS_n^{-1/2}\sigma(1-k)+c'S_1^{-1/2}(1-k)\sigma\right]d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\cdot 2MS_n^{-1/2}\int\limits_0^{\infty}\exp\left[-cS_n^{-1/2}(1-k)\sigma\right]d\sigma+$$

$$+2MS_n^{-1/2}\int\limits_{\delta}^{\infty}\exp\left[-c''(1-k)S_n^{-1/2}\sigma\right]d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\cdot 2Mc'''+\frac{2M}{c''(1-k)}\exp\left[-\delta S_n^{-1/2}(1-k)c''\right]$$

$$(c'<c,\ c''>0,\ c'''>0,\ k<1).$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}|P_n(D)f(z)-T_{nL}(z)\varphi(z)|<\varepsilon M'.$$

В силу произвольности ε

$$\lim_{n\to\infty}P_n(D)f(z)=T_L(z)\varphi(z).$$

Если множество $\{\operatorname{Re}t\}$, $t\in L$ совпадает со всей числовой осью, то

$$T_{nL}(z)=\int\limits_L G_n(z-t)\,dt=\int\limits_{L(z)}G_n(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_n(t)\,dt=1,$$

это следует из того, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{L_{\pm R}(z)}G_n(t)\,dt=0,$$

где $L_{\pm R}(z)$ — отрезки перпендикуляров, находящиеся между действительной осью и кривой $L(z)$, восстановленных в точках $x=\pm R$, а это следует из условия пункта 3 теоремы 1 и леммы 1.4.

Для любой кривой L, удовлетворяющей условиям теоремы

$$T_L(z)=\lim T_{nL}(z)=\begin{cases}1, & \text{при } z\in L\setminus\partial L\\ 0, & \text{при } s\notin L,\end{cases}$$

это следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{L(z)\setminus L_\delta(z)} G_n(t)\,dt=0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

С помощью этой теоремы для частных случаев ядра получаются обращения преобразований вида

$$F(x)=\int_a^b e^{-xt}\,\varphi(t)\,dt \text{ (обобщенное преобразование Лапласа)},$$

$$F(x)=\int_a^b \frac{\varphi(t)}{x+t}\,dt \text{ (обобщенное преобразование Стильтьеса)},$$

$$(0\leqslant a<b\leqslant\infty).$$

Для этих частных случаев обращение получается и в том случае, когда интегралы взяты вдоль кривых (см. [1], стр. 9).

Ս. Գ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ. Կորերով տարածված ծալքի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջման մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրված է և ստացված է կորերով տարածված ծալքի տիպի ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջումը, որը հանդիսանում է Ուիդերի և Խիրշմանի կողմից ստացված ինտեգրալ ձևափոխության շրջման ընդհանրացումը։ Աշխատանքում ստացված են ասիմպտոտիկ գնահատականներ ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերի համար։

S. G. SEDRAKIAN. *On the inversion of convolution type integral transformations along curves* (summary)

Convolution type integral transformations along curves which generalise those considered by Widder and Hirschman are studied and their inversion is obtained. For some classes of entire functions a number of asymptotic estimates is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Хиршман, Д. В. Уиддер.* Преобразование типа свертки, М., 1958.
2. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., 1958.
3. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962.
4. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
6. *А. Кратцер, В. Франц.* Трансцендентные функции, М., 1963.
7. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 6, 1972 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, И СТРУКТУРА ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ В НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть U—открытый единичный круг, Γ—его граница, A—множество функций, аналитических в U и непрерывных в $U \cup \Gamma$. Предположим, что E—замкнутое множество на Γ, n—натуральное число.

Работа посвящена построению последовательности $\{\varphi_s\}$ со следующими свойствами:

1°. $\varphi_s^{(n)} \in A$, $s=1, 2, 3, \cdots$

2°. $\varphi_s^{(k)}(\zeta)=0$ при $\zeta \in E$, $k=0, 1, \cdots, n$, $s=1, 2, \cdots$,

3°. $|\varphi_s^{(k)}(\zeta)| \leqslant \dfrac{C^*}{[\rho(\zeta, E)]^k}$, $k=0, 1, \cdots, n$, $s=1, 2, \cdots$, $\zeta \in U \cup \Gamma$.

4°. $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_s(\zeta)=1$, $\lim\limits_{s\to\infty} \varphi_s^{(j)}(\zeta)=0$, $j=1, 2, \cdots, n$

равномерно относительно ζ из любого компактного множества

$$K \subset U \cup \Gamma, \ K \cap E = \varnothing.$$

Последовательность $\{\varphi_s\}$ строится при некотором ограничении на скорости убывания дополнительных интервалов множества E (см. теорему 1). Потребность в построении последовательности $\{\varphi_s\}$ со свойствами (1)—(4) возникает при изучении мультипликативных свойств некоторых классов аналитических функций (см. [6], [9]) и при описании замкнутых идеалов в алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до единичной окружности. Так в работах [5], [7], [8] существенную роль играют свойства (1)—(4) последовательности

$$\varphi_s(z) = \left(\frac{z-1}{z-1-\frac{1}{s}}\right)^{2n}, \ s=1, 2, \cdots.$$

В этом случае множество E состоит из единственной точки 1.

Отметим также работу [18], где поставлен вопрос о существовании последовательности $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ со свойствами (1)—(4) при условии, что множество E удовлетворяет условию Бёрлинга-Карлесона (см. формулу (1)).

---

* C—положительное число, не зависящее от ζ, s, $\rho(\zeta, E)$—расстояние от ζ до множества E.

В § 2 последовательность $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ применяется к описанию замкнутых идеалов в следующих алгебрах аналитических функций:

а) $$A^{(n)} = \left\{ f^{(n)} \in A,\ \|f\|_{A^{(n)}} = \sum_{k=0}^{n} \max_{\zeta\in\Gamma} \frac{|f^{(k)}(\zeta)|}{k!} \right\},$$

б) $$H^p_{n+1} = \left\{ f \in A : f^{(n+1)} \in H^p,\ \|f\|_{H^p_{n+1}} = \max_{0<k<n+1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(e^{i\theta})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

$1 \leqslant p < +\infty$,

в) $$\lambda_\alpha^{(n)} = \left\{ f^{(n)} \in A : f^{(n)} \in \operatorname{lip}(\alpha,\ \Gamma),\ \|f\|_{\lambda_\alpha^{(n)}} = \right.$$

$$= \|f\|_\infty + \sup_{\theta,\ t} \frac{|f^{(n)}(e^{i(t+\theta)}) - f^{(n)}(e^{i\theta})|}{t^\alpha} \Big\},\ 0<\alpha<1,$$

г) $$\lambda_*^{(n)} = \{ f^{(n)} \in A : |f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})| = o(|t|)$$

равномерно по $\theta \in [-\pi,\ \pi)$,

$$\|f\|_{\lambda_*^{(n)}} = \|f\|_\infty + \sup_{\theta,\ t} \frac{|f^{(n)}(e^{i(\theta+t)}) - 2f^{(n)}(e^{i\theta}) + f^{(n)}(e^{i(\theta-t)})|}{t}.$$

В дальнейшем через X будем обозначать одну из вышеуказанных алгебр. Для $f \in X$ обозначим $E_m(f)$ $(m=0, 1, \cdots, n)$ множество нулей f на Γ кратности выше $\bar{m}$:

$$E_m(f) = \{\zeta \in \Gamma : f^{(k)}(\zeta) = 0,\ k=0,\ 1, \cdots, m\}.$$

Предположим, что I — замкнутый идеал в X, обозначим $E_m(I)$:

$$E_m(I) = \bigcap_{f\in I} E_m(f)\ \ (m=0, 1, \cdots, n).$$

В теореме 2 описываются замкнутые идеалы, для которых дополнительные интервалы множества $E_n(I)$ удовлетворяют некоторым ограничениям (см. формулы (16), (17)).

В последнее время появился ряд работ, посвященных описанию замкнутых идеалов в алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы.

Так в [5] Б. И. Коренблюмом получено полное описание замкнутых идеалов в алгебре функций $f : f^{(1)} \in H^2$, где H^2—известное пространство Харди. Б. А. Тейлор и Д. Л. Вильямс получили полное описание замкнутых идеалов в алгебре функций, аналитических в единичном круге и бесконечно дифференцируемых вплоть до единичной окружности. В этих работах существенную роль играют теоремы деления о том, что если $f^{(1)} \in H^2$ или же $f \in A^\infty$ (A^∞ — алгебра функций, аналитических в круге и бесконечно дифференцируемых вплоть до окружности) и если J—внутренняя функция (см. [1]), которая делит внутреннюю часть функций f, то $\left(\frac{f}{J}\right)' \in H^2$ соответственно $\frac{f}{J} \in A^\infty$.

В § 2 при описании замкнутых идеалов алгебры X не используется теорема деления в X^* (так для двух из рассматриваемых алгебр, как нам известно, теоремы такого типа до сих пор не доказаны).

Основные результаты данной статьи, в несколько менее общем виде, были анонсированы в заметке [10].

§ 1. Построение последовательности $\{\varphi_s\}$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. *Пусть E— замкнутое множество на Γ, и пусть $\{l_k\}$—последовательность длин дополнительных интервалов множества E. Предположим, что*

$$\sigma(E)=0,$$

$$mq^k\leqslant l_k\leqslant Mq^k,\ k=1,2,\cdots,$$

где E — линейная мера Лебега на Γ, m, M, q — положительные числа, причем $0<q<1$, тогда существует последовательность $\{\varphi_s\}$ со свойствами (1)—(4).

Замечание. Отметим, что из теоремы Бёрлинга-Карлесона (см. [16]) следует, что для существования нетривиальной функции, нули которой содержат множества E и которая удовлетворяет условию Липшица порядка α в $U\cup\Gamma$ при некотором $\alpha>0$, необходимы следующие условия:

$$\sigma(E)=0,\ \sum_{k=1}^{\infty} l_k|\log l_k|<+\infty. \tag{1}$$

Нам не известно, являются ли эти условия достаточными для существования последовательности $\{\varphi_s\}$ со свойствами (1°)—(4°)?

Лемма 1. *Пусть E — замкнутое множество на Γ, удовлетворяющее условию* (1). *Пусть $\{(e^{i\alpha_k},\ e^{i\beta_k})\}_{k=1}^{\infty}$ —последовательность дуг окружности Γ, дополнительных к E $(-\pi\leqslant\alpha_k<\beta_k\leqslant\pi)$. Предположим*

$$h_\delta(t)=\begin{cases}\log\left(1+\dfrac{\delta}{t-\alpha_k}\right)+\log\left(1+\dfrac{\delta}{\beta_k-t}\right) & \text{при } \alpha_k<t<\beta_k\\[2ex] +\infty, & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

Пусть n—натуральное число, тогда

1°. $h_\delta\in L^1(-\pi,\pi)$ при любом $\delta>0$.

2°. *Пусть* $f_\delta(z)=\exp\left[-\dfrac{n+1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}h_\delta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right]$,

---

* После того как работа была сдана в печать, как сообщил автору рецензент, вышла из печати работа Б. И. Коренблюма (журн. „Функциональный анализ и его приложения", 6: 3, 1972), где другим методом описаны замкнутые идеалы алгебры $A^{(n)}$.

тогда

$$f_\delta^{(n)}\in A,\ f_\delta^{(k)}(\zeta)=0,\ \zeta\in E \text{ и, кроме того}$$

3°. $$|f_\delta^{(k)}(z)|\leqslant C_\delta\,[\rho(z,E)]^{2(n+1-k)},\quad z\in U\cup\Gamma,$$

$k=0, 1, 2,\cdots, n$, *где* C_δ — *положительное число, зависящее только от* δ.

4°. $|f_\delta(z)|<1$ *при всех* $\delta>0$ *и* $z\in U\cup\Gamma$,

$$f_\delta(z)\to 1 \text{ при } \delta\to 0$$

равномерно относительно ζ *из любого компактного множества*

$$K\subset U\cup\Gamma,\ K\cap E=\varnothing.$$

Доказательство.

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h_\delta(t)|\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}h_\delta(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\left[\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-t}\right)\right]dt=2\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\delta\log\left(1+\frac{\beta_k-\alpha_k}{\delta}\right)<+\infty. \qquad (2)$$

Итак, утверждение 1° доказано.

Обозначим через $m_k(z)$ следующую функцию:

$$m_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}h_\delta\left(\frac{\log\zeta}{i}\right)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (3)$$

Здесь L_k — дуга единичной окружности $(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})$. Ветвь функций $\log\zeta$ следует выбирать из условия $\log e^{i\alpha}=i\alpha$. Пусть

$$\tilde h_\delta(\zeta)=\frac{1}{\zeta}\,h_\delta\left(\frac{\log\zeta}{i}\right)\quad(\zeta\in L_k).$$

Заметим, что после проведения разрезов $\arg\zeta=\alpha_k$, $\arg\zeta=\beta_k$ функция $\tilde h(\zeta)$ может быть продолжена с дуги L_k как однозначная аналитическая функция на множестве, определяемом неравенствами

$$|\zeta|\geqslant 1,\ \alpha_k\leqslant\arg\zeta\leqslant\beta_k,\ \zeta\neq e^{i\alpha_k},\quad \zeta\neq e^{i\beta_k}.$$

Мы покажем, что $\tilde h_\delta(\zeta)$ суммируема на отрезках L_k^1, L_k^3 лучей $\arg\zeta=\alpha_k$, $\arg\zeta=\beta_k$, определяемых неравенством

$$1\leqslant|\zeta|\leqslant e^{\beta_k-\alpha_k},$$

и по дуге окружности

$$|\zeta|=e^{\beta_k-\alpha_k},\ \alpha_k<\arg\zeta<\beta_k.$$

(Идея деформации дуг L_k была предложена Б. С. Павловым, см. [12]).

Оценим интеграл по L_k^1

$$\int\limits_{L_k^1} |\tilde{h}_\delta(\varsigma)|\,|d\varsigma| = \int\limits_1^{e^{\beta_k-\alpha_k}} \frac{1}{x}\left|\log\left(1+\frac{i\delta}{\log x}\right)+\right.$$

$$\left.+\log\left(1+\frac{\delta}{\frac{\log x}{i}+\beta_k-\alpha_k}\right)\right| dx \leqslant 2\int\limits_1^{e^{\beta_k-\alpha_k}} \log\left(1+\frac{\delta}{\log t}\right)dt+$$

$$+\int\limits_1^{e^{\beta_k-\alpha_k}}\left|\arg\left(1+\frac{i\delta}{\log t}\right)\right|dt+\int\limits_1^{e^{\beta_k-\alpha_k}}\left|\arg\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k+\frac{\log t}{i}}\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant 2(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)+2\delta\log\left(1+\frac{\beta_k-\alpha_k}{\delta}\right)+$$

$$+4\pi\left(e^{\beta_k-\alpha_k}-1\right). \tag{4}$$

Оценка для $\int\limits_{L_k^3}|\tilde{h}_\delta(\varsigma)|\,|d\varsigma|$ получается аналогичным образом. Оценим интеграл по L_k^2:

$$\int\limits_{L_k^2}|\tilde{h}_\delta(\varsigma)|\,|d\varsigma| = \int\limits_{L_k^2}\frac{1}{|\varsigma|}\left|\log\left(1+\frac{i\delta}{\log\varsigma-i\alpha_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\frac{\log\varsigma}{i}}\right)\right|\,|d\varsigma| = \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\left|\log\left(1+\frac{\delta i}{\beta_k-\alpha_k+(t-\alpha_k)i}\right)\right|dt+$$

$$+\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\left|\log\left(1+\frac{\delta i}{(\beta_k-t)i+\log e^{\beta_k-\alpha_k}}\right)\right|dt\leqslant\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)dt+$$

$$+\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k}\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-t}\right)dt+4\pi(\beta_k-\alpha_k),$$

т. е.

$$\int\limits_{L_k^2}|\tilde{h}_\delta(\varsigma)|\,|d\varsigma|\leqslant 2(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)+$$

$$+2\delta\log\left(1+\frac{\beta_k-\alpha_k}{\delta}\right)+4\pi(\beta_k-\alpha_k). \tag{5}$$

Интеграл (3) можно заменить интегралом по контуру

$$l_k = L_k^1+L_k^2+L_k^3.$$

Дифференцируя соответствующий интеграл, взятый по l_k, и учитывая оценки (4), (5), получим

$$|m_k^{(r)}(z)| \leqslant \frac{C_0}{[\rho(z, l_k)]^{r+1}} \{(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)+$$

$$+\beta_k-\alpha_k\}, \; z \in U \cup \Gamma, \; z \neq e^{i\alpha_k}, \; e^{i\beta_k}. \qquad (6)$$

Чтобы убедиться в 4°, заметим, что если $x \in (\alpha_j, \beta_j)$ при некотором j, то

$$\lim_{z\to e^{ix}} |f_\delta(z)| = \left|\frac{(x-\alpha_j)(\beta_j-x)}{(x-\alpha_j+\delta)(\beta_j-x+\delta)}\right|^{2(n+1)} \leqslant 1,$$

и потому $|f_\delta(z)| \leqslant 1$ при любом $z \in U \cup \Gamma$, $\delta > 0$.

Рассмотрим область O_k, ограниченную контуром, составленным из дуги l_k и $\Gamma \setminus L_k$ ($0 \in O_k$). В выражении для функции f_δ заменим интеграл по Γ интегралом по ∂O_k. Из оценок (2) следует, что $|f_\delta(z)| \to 1$ при $\delta \to 0$ для любого $z \in U$, но так как $f_\delta(0) \to 1$ при $\delta \to 0$, то получаем, что $f_\delta(z) \to 1$ при $\delta \to 0$, $z \in U$. Из оценок для m_j, $j=1, 2, \cdots$ следует, что семейство функций f_δ нормально в O_k. А так как $f_\delta \to 1$ при $\delta \to 0$ в U, то $f_\delta(z) \to 1$ равномерно внутри O_k ($k=1, 2, \cdots$). Отсюда следует утверждение 4°.

Легко заметить, что из 3° следует 2°. Действительно, предыдущие утверждения с деформацией окружности Γ показывают, что функция f_δ аналитична на дугах L_k, а из оценок 3° будет следовать, что

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in \overline{U}}} f_\delta^{(s)}(z) = 0, \; t \in E, \; s=0, 1, \cdots, n.$$

Поэтому будем доказывать 3°. Сначала докажем, что существует положительное число C_δ, зависящее только от δ такое, что если $z \in U$, то

$$|f_\delta(z)| \leqslant C_\delta [\rho(z, E)]^{2(n+1)}. \qquad (7)$$

Пусть $z \in U$ фиксировано и пусть

$$\rho(z, E) = \rho(z, e^{i\alpha_p}). \qquad (8)$$

Положим

$$\Psi_k(\zeta) = \frac{f_\delta(\zeta)}{(\zeta - e^{i\alpha_k})^{2(n+1)}}.$$

Очевидно, что при любом $\zeta_0 \neq e^{i\alpha_k}$ ($\zeta_0 = e^{i\theta_0}$)

$$\lim_{\zeta\to e^{i\theta_0}} |\Psi_k(\zeta)| = \lim_{\zeta\to e^{i\theta_0}} \frac{|f_\delta(\zeta)|}{|\zeta - e^{i\alpha_k}|^{2(n+1)}} =$$

$$= \left[\frac{(\theta_0-\alpha_j)(\beta_j-\theta_0)}{(\theta_0-\alpha_j+\delta)(\beta_j-\theta_0+\delta)}\right]^{2(n+1)} \frac{1}{|e^{i\theta_0}-e^{i\alpha_k}|^{2(n+1)}}.$$

При условии $\theta_0 \in (\alpha_j, \beta_j)$, если $j=k$, получаем

$$|\Psi_k(e^{i\theta_0})| \leqslant \frac{1}{\delta^{2(n+1)}} \left| \frac{\theta_0 - \alpha_k}{|e^{i\theta_0} e^{i\alpha_k}|} - \right|^{2(n+1)} \leqslant \frac{C}{\delta^{2(n+1)}}.$$

Если же $j \neq k$, очевидно имеет место одно из неравенств

$$|e^{i\theta_0} - e^{i\beta_j}| \leqslant |e^{i\theta_0} - e^{i\alpha_k}|$$

или же

$$|e^{i\theta_0} - e^{i\alpha_j}| \leqslant |e^{i\theta_0} - e^{i\alpha_k}|.$$

Поэтому получаем снова

$$|\Psi_k(e^{i\theta_0})| \leqslant C_\delta,$$

C_δ не зависит от k и θ. Функции f_δ и $\dfrac{1}{(\zeta - e^{i\alpha_k})^{2(n+1)}}$ принадлежат классу D В. И. Смирнова (см. [13], стр. 116). Поэтому $\Psi_k \in D$ по теореме В. И. Смирнова

$$\sup_{z \in U} |\Psi_k(\zeta)| \leqslant \underset{\theta \in (-\pi, \pi)}{v\,\mathrm{rai}} \sup |\psi_k(e^{i\theta})|.$$

Следовательно, имеем

$$|\Psi_k(\zeta)| \leqslant \frac{C}{\delta^{2(n+1)}},$$

в частности, при $\zeta = z$. Точки $z \in U$, удовлетворяющие условию (8) или такие, что $\rho(z, e^{i\beta_k}) = \rho(z, E)$ (для них, очевидно, рассуждения сохраняются с очевидными изменениями), образуют множество, всюду плотное в $U \cup \Gamma$, и поэтому оценка (7) доказана для всех $z \in U \cup \Gamma$. Чтобы получить доказательство утверждения 3°, достаточно воспользоваться оценками (6) и (7). Действительно

$$|f_\delta^{(k)}(z)| \leqslant C |f_\delta(z)| \frac{1}{\inf_j [\rho(z, l_j)]^{2k}} \sum_{k=1}^{\infty} \Big((\beta_k - \alpha_k) +$$

$$+ (\beta_k - \alpha_k) \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k}\right) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\delta [\rho(z, E)]^{2(n+1)}}{[\rho(z, E)]^{2k}} = C_\delta [\rho(z, E)]^{2(n+1-k)}.$$

Мы воспользовались тем, что

$$\rho(z, l_j) \geqslant \rho(z, E), \quad z \in U \cup \Gamma.$$

Лемма доказана.

---

* Мы пользуемся тем, что (не умаляя общности) $\sin^2 \dfrac{x - \alpha_k}{2} \geqslant C(x - \alpha_k)^2$ (то же для β_k), ибо интервалы (α_k, β_k) можно считать расположенными на полукруге.

Лемма 2. *Предположим, что существуют такие положительные числа m, M, q, причем $0<q<1$, так что*

$$mq^k \leqslant \beta_k-\alpha_k \leqslant Mq^k, \tag{9}$$

$k=1, 2, \cdots$, *тогда, если f_δ — построенная в лемме 1 функция, то существует такое положительное число C_0, что*

$$|f_\delta((1-\delta) z)| \geqslant C_0,\ \delta>0,\ z\in U\cup\Gamma, \tag{10}$$

кроме того

$$\lim_{\delta\to 0} f_\delta((1-\delta) z)=1$$

равномерно на каждом компакте

$$K: K\subset CU\cup\Gamma,\ K\cap E=\varnothing.$$

Доказательство. Достаточно доказать (10) при $z\in\Gamma$. Легко видеть, что

$$|f_\delta((1-\delta) e^{ix})|^{-1}=\exp\left(\frac{n+1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_\delta(t)\,\frac{1-(1-\delta)^2\,dt}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\dfrac{x-t}{2}}\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{n+1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_\delta(t)\,\frac{2\delta-\delta^2}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\dfrac{x-t}{2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left(\frac{2(n+1)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\left(\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-t}\right)\right)\frac{\delta\,dt}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\dfrac{x-t}{2}}\right).$$

Докажем, что в силу условий леммы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)\frac{\delta\,dt}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\dfrac{x-t}{2}}\leqslant\text{const}.$$

Аналогичное неравенство доказывается для другого слагаемого

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)\frac{\delta\,dt}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\dfrac{x-t}{2}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\dfrac{x-\beta_k}{2}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\delta^2\,dt}{(\delta+t-\alpha_k)\left(\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}(t-\alpha_k)\log\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)\frac{2\delta(1-\delta)\sin(x-t)}{\left[\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}\right]^2}=I_1+I_2+I_3.$$

Легко заметить, что

$$I_2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{\delta\,dt}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}P_{((1-\delta)e^{ix})}(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}P_{((1-\delta)e^{ix})}(t)\,dt=2\pi,$$

где $P_z(t)$ ядро Пуассона в точке ze^{-it}.

Оценим I_3. Заметим, что

$$(t-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)\leqslant\delta,\ t\in(\alpha_k,\beta_k),$$

и потому подынтегральное выражение в k-ом слагаемом суммы не больше, чем

$$\frac{\delta\sqrt{1-\delta}\,|\sin(x-t)|}{\left(\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}\right)}\,\frac{\delta\sqrt{1-\delta}}{\left(\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta\sqrt{1-\delta}}{4\left(\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}\right)}\leqslant\frac{2\delta-\delta^2}{\delta^2+4(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}}=P_{((1-\delta)e^{ix})}(t),$$

и оценка для I_3 такая же, как для I_2.

Следовательно, остается доказать, что в силу условий леммы, I_1 ограничена равномерно относительно δ.

Пусть n_0 такое натуральное число, что

$$mq^{n_0+1}\leqslant\delta<mq^{n_0}. \tag{11}$$

Тогда

$$I_1\leqslant c_1\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}=$$

$$=c_1I_1^*,\ I_1^*=\sum_{k=1}^{n_0-1}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\times$$

$$\times\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}+(\beta_{n_0}-\alpha_{n_0})\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_{n_0}-\alpha_{n_0}}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_{n_0})^2}+$$

$$+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}.$$

Ясно, что

$$\frac{\beta_{n_0}-\alpha_{n_0}}{\delta}\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_{n_0}-\alpha_{n_0}}\right)\leqslant 1.$$

Оценим последнюю сумму

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}.$$

По условию (9) имеем, что эта сумма не превосходит

$$M\sum_{k=n_0+1}^{\infty}q^k\log\left(1+\frac{\delta}{mq^k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}.$$

Ввиду (11) получаем

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}q^k\log\left(1+\frac{\delta}{mq^k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}q^k\log\left(1+\frac{1}{q^{k+1}}\right)\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{n_0+1+k})^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\log\left(1+\frac{1}{q}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\,q^k.$$

Остается оценить выражение

$$\sum_{k=1}^{n_0-1}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n_0-1}q^k\log\left(1+\frac{\delta}{mq^k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_k)^2}.$$

По условию (11) имеем

$$\frac{\delta}{mq^k}\leqslant q \quad \text{при} \quad 1\leqslant k\leqslant n_0-1.$$

Поэтому

$$\log\left(1+\frac{\delta}{mq^k}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}\delta^l}{l\,(mq^k)^l}.$$

Следовательно

$$\sum_{l=1}^{n_0-1}q^l\log\left(1+\frac{\delta}{mq^l}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_l)^2}=$$

$$=\sum_{l=1}^{n_0-1}q^l\,\frac{\delta}{\delta^2+(x-\beta_l)^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\frac{\delta^k}{(mq^l)^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\frac{\delta^{k-1}}{m^{k-1}}\left(\sum_{l=1}^{n_0-1}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_l)^2}\frac{1}{(q^l)^{k-1}}\right)<$$

$$<\frac{1}{m}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\delta^{k-1}}{km^{k-1}}\left(\sum_{l=1}^{n_0-1}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_l)^2}\frac{1}{(q^l)^{k-1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{n_0-1}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_l)^2}=J_1+J_2,$$

$$J_1\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\delta}{m}\right)^{k-1}\sum_{l=1}^{n_0-1}\frac{1}{q^{(k-1)l}}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{l=1}^{n_0-1}\frac{1}{(q^{k-1})^l}<\left(\frac{1}{q^{k-1}}\right)^{n_0-1}\frac{1}{1-q},\quad k\geqslant 2.$$

Следовательно получаем

$$J_1\leqslant\frac{1}{m(1-q)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\delta}{mq^{n_0-1}}\right)^{k-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{m(1-q)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{q^{k-1}}{k}<\frac{1}{m}\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Остается оценить J_2.

Пусть $\alpha_k<x<\beta_k$ и предположим, что интервалы $(\alpha_{r_1},\beta_{r_1}),\cdots,(\alpha_{r_p},\beta_{r_p})$ находятся левее интервала (α_k,β_k) (где $1\leqslant r_l\leqslant n_0-1$, $l=1,2,\cdots,p$), а интервалы $(\alpha_{k_1},\beta_{k_1}),\cdots,(\alpha_{k_p},\beta_{k_p})$—правее интервала (α_k,β_k). Кроме того, предположим, что интервалы пронумерованы так, что расстояние между (α_k,β_k), $(\alpha_{k_l},\beta_{k_l})$ (соответственно от $(\alpha_{r_l},\beta_{r_l})$) растет с возрастанием l. Тогда имеем

$$J_2=\sum_{l=2}^{p}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{r_l})^2}+\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{r_1})^2}+$$

$$+\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{k_1})^2}+\sum_{l=2}^{p}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{k_l})^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2+\sum_{l=2}^{p}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{r_l})^2}+\sum_{l=2}^{p}\frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{k_l})^2}.$$

Легко убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$x-\beta^{r_1}\geqslant mq^{r_1},$$

$$x-\beta_{r_2}\geqslant mq^{r_1}+mq^{r_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x-\beta_{r_p}\geqslant mq^{r_1}+\cdots+mq^{r_{p-1}},$$

и, соответственно

$$\beta_{k_1} - x \geqslant mq^{k_2} + mq^{k_1},$$
$$\beta_{k_2} - x \geqslant mq^{k_2} + mq^{k_3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_{k_p} - x \geqslant mq^{k_2} + mq^{k_3} + \dots + mq^{k_p}.$$

Из этих рассуждений следует, что

$$\sum_{l=2}^{p} \frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{r_l})^2} \leqslant \frac{\delta^2}{m^2} \sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{1}{q^{2l}},$$
$$\sum_{l=2}^{p} \frac{\delta^2}{\delta^2+(x-\beta_{k_l})^2} \leqslant \frac{\delta^2}{m^2} \sum_{l=1}^{n_0-1} \frac{1}{q^{2l}}.$$

Следовательно, имеем

$$J_1 \leqslant 2 + \frac{2\delta^2}{m^2}\left(\frac{1-q^{2(n_0-1)}}{1-q^2}\right)\frac{1}{q^{2(n_0-1)}} \leqslant 2 + \frac{2q^2}{1-q^2}.$$

И, тем самым, доказана первая часть леммы.

Пусть K—компакт такой, что $K \subset U \cup \Gamma$ и $K \cap E = \varnothing$, и пусть $z \in K$, $z = re^{ix}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $-\pi \leqslant x < \pi$. Предположим, что $\alpha_k < x < \beta_k$. Тогда

$$\rho(K, E) = \varepsilon_0 > 0, \tag{12}$$

$$0 \leqslant -\log|f_\delta((1-\delta)^n e^{ix})| = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{n+1}{\pi} \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \left\{ \log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_l}\right) + \right.$$
$$\left. + \log\left(1+\frac{\delta}{\beta_l - t}\right)\right\} \frac{1-(1-\delta) r^2 \quad dt}{((1-(1-\delta) r)^2 + 4(1-\delta) r \sin^2 \dfrac{x-t}{2}}.$$

Ввиду (12) имеет место одно из следующих неравенств: или $1-r \geqslant \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$ или же

$$\rho(e^{ix}, E) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Если $1-r \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$, то имеем

$$0 \leqslant -\log|f_\delta((1-\delta) z)| \leqslant \frac{2(n+1)}{\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t)\, dt.$$

Если же $\rho(e^{ix}, E) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда очевидно $x - \alpha_k \geqslant c_0\varepsilon_0$, $\beta_k - x \geqslant c_0\varepsilon_0$ при некотором положительном c_0; c_0 не зависит от x и k. Имеем

$$\sum_{l=1}^{-}\int_{\alpha_l}^{\beta_l} h_\delta(t)\frac{1-(1-\delta)^2 r^2 \quad dt}{(1-(1-\delta)\,r)^2+4\,(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}} < \frac{\mathrm{const}}{\varepsilon_0^2}\int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t)\,dt +$$

$$+\int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_\delta(t)\frac{1-(1-\delta)^2 r^2 \quad dt}{(1-(1-\delta)\,r)^2+4\,r\,(1-\delta)\sin^2\frac{x-t}{2}}\,.$$

Легко видеть, что последнее слагаемое не превосходит

$$\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon_0^2}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} h_\delta(t)\,dt + 4\pi\log\left(1+\frac{2\delta}{c_0\,\varepsilon_0}\right).$$

Таким образом, для любого $z\in K$ имеем

$$0\leqslant -\log|f_\delta((1-\delta)\,z)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon_0^2}\int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t)\,dt + 4\pi\log\left(1+\frac{2\delta}{c_0\varepsilon_0}\right).$$

Но из (2) видно, что при $\delta\to 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t)\,dt\to 0$. Следовательно, на K равномерно

$$|f_\delta((1-\delta)\,z)|\to 1 \text{ при } \delta\to 0.$$

Теперь, чтобы получить утверждение леммы, достаточно рассмотреть последовательность аналитических функций $\log f_\delta((1-\delta)z)$.

Это семейство нормально в области $\bigcup_{k=1}^{-} O_k$ (при проверке этого факта нужно рассуждать так же, как при доказательстве леммы 1 и учесть звездность этой области относительно начала).

В единичном круге

$$\lim_{\delta\to 0}\operatorname{Re}\log f_\delta\,((1-\delta)\,z)=0.$$

Кроме того, $f_\delta(0)\to 1$ при $\delta\to 0$. Поэтому равномерно внутри $\bigcup_{k=1}^{-} O_k$

$$\lim_{\delta\to 0} f_\delta\,((1-\delta)\,z)=1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть f_δ — построенная выше функция, и пусть

$$G_\delta(z)=\frac{f_\delta(z)}{f_\delta((1-\delta)\,z)},$$

$$G_\delta(z)=\exp\left(-\frac{n+1}{\pi}W_\delta(z)\right).$$

Сначала оценим производную от $W_\delta(z)$. Легко видеть, что

$$W_\delta(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t)\,\frac{2\delta z e^{it}\,dt}{(e^{it}-z)(e^{it}-z+\delta z)}.$$

Пусть

$$m_k(z)=\int_{L_k} h_\delta\left(\frac{\log\zeta}{i}\right)\frac{2\delta\,d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-(1-\delta)\,z)}.$$

Как в лемме 1, контурный интеграл по L_k выразим через интегралы по $l_k=L_k^1+L_k^2+L_k^3$,

$$m_k(z)=m_{k,1}(z)+m_{k,2}(z)+m_{k,3}(z),$$

где

$$m_{k,j}(z)=\int_{L_k^j}\bar{h}_\delta(\zeta)\,\frac{2\delta\,d\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z+\delta z)},\quad j=1,\ 2,\ 3.$$

Вычислим производные этих функций. Используя формулу Лейбница, получим

$$m_{k,1}^{(l)}(z)=2\delta\sum_{j=0}^{l}\int_{L_k^1}\bar{h}_\delta(\zeta)\,\frac{C_l^j\cdot j!\,(l-j)!\,(1-\delta)^{l-j}}{(\zeta-z)^{j+1}\,(\zeta-(1-\delta)\,z)^{l-j+1}}.$$

Предположим сначала, что $|\zeta-z|\leqslant 2\delta$, тогда

$$\frac{1}{|\zeta-z|^{j+1}|\zeta-(1-\delta)\,z|^{l-j+1}}\leqslant\frac{\text{const}}{|\zeta-z|^{l+1}}\,\frac{\delta}{|\zeta-(1-\delta)z|^2}.$$

Если $|\zeta-z|\geqslant 2\delta$, то

$$\frac{1}{|\zeta-z|^{j+1}|\zeta-(1-\delta)z|^{l-j+1}}\leqslant\frac{\text{const}}{|\zeta-z|^{l}}\,\frac{1}{|\zeta-(1-\delta)z|^2}.$$

Учитывая эти неравенства, легко получить

$$|m_{k,1}^{(l)}(z)|\leqslant C_0\left(\frac{\delta}{|e^{i\alpha_k}-z|^{l+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|e^{i\alpha_k}-z|^{l}}\right)\int_{L_k^1}|\bar{h}(\zeta)|\,\frac{\delta}{|\zeta-(1-\delta)\,z|^2}\,|d\zeta|,$$

где C_0 не зависит ни от δ, ни от k. Следовательно, имеем

$$|m_{k,1}^{(l)}(z)|\leqslant C_0\left(\frac{\delta}{|z-e^{i\alpha_k}|^{l+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{|z-e^{i\alpha_k}|^{l}}\right)\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\left(\log\left(1+\frac{\delta}{t}\right)+1\right)\frac{\delta\,dt}{|e^{t+i\alpha_k}-(1-\delta)\,z|^2}.$$

Теперь покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\left(\log\left(1+\frac{\delta}{t}\right)+1\right)\frac{\delta\,dt}{|e^{t+i\alpha_k}-(1-\delta)\,z|^2}\leqslant C_1,$$

где C_1 — положительное число, не зависящее от z и δ. Легко заметить, что

$$|e^{t+i\alpha_k}-(1-\delta)\,z|^2\geqslant C_2\,((t+\delta)^2+\delta^2),$$

C_2 не зависит от z, t и k.

Поэтому достаточно доказать ограниченность суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\left(\log\left(1+\frac{\delta}{t}\right)+1\right)\frac{\delta\,dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}.$$

Сначала докажем, что существует положительное число C_1 такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\frac{\delta\,dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}\leqslant C_1.$$

Предположим $mq^{n_0+1}\leqslant\delta\leqslant mqn_0$. Тогда

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\frac{\delta\,dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M\,q^{n_0+1}}{\delta\,(1-q)}\leqslant\frac{M}{m(1-q)},$$

$$\sum_{k=1}^{n_0}\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\frac{\delta\,dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}=\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|}\left[\operatorname{arctg}\frac{\delta+\beta_k-\alpha_k}{|x-\alpha_k|}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|}\right]\leqslant\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta+\beta_k-\alpha_k}{|x-\alpha_k|}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|}\right].$$

Учитывая элементарное неравенство

$$0<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}v<\frac{H}{1+v}\quad\text{при }v\geqslant 0,$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{n_0}\int_0^{\beta_k-\alpha_k}\frac{\delta\,dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|}\left[\frac{H}{1+\dfrac{\delta+\beta_k-\alpha_k}{\delta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{H}{1+\dfrac{\delta}{|x-\alpha_k|}}\right]\leqslant 2H\sum_{k=1}^{n_0}\frac{\delta}{|x-\alpha_k|+\delta}.$$

Совершенно аналогично рассуждениям леммы 2 получим ограниченность последней суммы. Остается оценить сумму

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\beta_k-\alpha_k}\log\left(1+\frac{\delta}{t}\right)\frac{\delta\,dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}\,.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{(x-\alpha_k)^2+(\delta+\beta_k-\alpha_k)^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\beta_k-\alpha_k}\frac{\delta^2\quad dt}{((t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2)(\delta+t)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\beta_k-\alpha_k}t\log\left(1+\frac{\delta}{t}\right)\frac{2\delta\,(t+\delta)\quad dt}{((t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\alpha_k}\right)\frac{\delta}{\delta^2+(x-\alpha_k)^2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{\beta_k-\alpha_k}\frac{\delta\ dt}{(t+\delta)^2+(x-\alpha_k)^2}\,.$$

Ограниченность последних сумм уже доказана.

В итоге получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|m_{k,1}^{(l)}(z)|\leqslant C_2\inf_{j}\left\{\frac{1}{|e^{i\alpha_j}-z|^l}+\frac{\delta}{|e^{i\alpha_j}-z|^{l+1}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left[\frac{1}{\rho(z,E)^l}+\frac{\delta}{\rho(z,E)^{l+1}}\right]. \tag{13}$$

Аналогично имеем такую же оценку для

$$\sum_{k=1}^{\infty}|m_{k,3}^{(l)}(z)|.$$

Как и выше, докажем следующее неравенство:

$$|m_{k,2}^{(l)}(z)|\leqslant C_3\left[\frac{1}{|e^{i\alpha_k}-z|^l}+\frac{1}{|e^{i\beta_k}-z|^l}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{|e^{i\alpha_k}-z|^{l+1}}+\frac{\delta}{|e^{i\beta_k}-z|^{l+1}}\right]\int_{L_k^2}\left|\log\left(1+\frac{\delta}{\frac{\log\zeta}{i}-\alpha_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-\frac{\log\zeta}{i}}\right)\right|\frac{\delta\,|d\arg\zeta|}{|\zeta-(1-\delta)z|^2}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\left(\frac{1}{\rho(z,E)^l}+\frac{\delta}{\rho(z,E)^{l+1}}\right)\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\left(\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)+\right.$$

5—822

$$+\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-t}\right)+1\Bigg)\frac{\delta\,dt}{\delta^2+(x-t)^2},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|m_{k,2}^{(l)}(z)|\leqslant C_4\left(\frac{1}{\rho(z,E)^l}+\frac{\delta}{\rho(z,E)^{l+1}}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\left(\log\left(1+\frac{\delta}{t-\alpha_k}\right)+\log\left(1+\frac{\delta}{\beta_k-t}\right)\right)\frac{\delta\,dt}{\delta^2+(x-t)^2}.$$

Как уже было доказано (см. лемму 2), последняя сумма равномерно ограничена. Следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}|m_{k,2}^{(l)}(z)|\leqslant C_5\left(\frac{1}{\rho(z,E)^l}+\frac{\delta}{\rho(z,E)^{l+1}}\right). \tag{14}$$

Объединяя (13) и (14), получим

$$|W_\delta^{(l)}(z)|\leqslant\text{const}\left(\frac{1}{\rho(z,E)^l}+\frac{\delta}{\rho(z,E)^{l+1}}\right).$$

Для оценки $G_\delta^{(l)}(z)$ при $1\leqslant l\leqslant n$ отметим сначала, что при помощи рассуждений, приведенных при доказательстве неравенства (7), легко установить справедливость неравенства

$$|G_\delta(z)|\frac{\delta^k}{\rho(z,E)^k}\leqslant C_0|f_\delta(z)|\frac{\delta^k}{\rho(z,E)^k}\leqslant C_6,\ 1\leqslant k\leqslant 2n, \tag{15}$$

равномерно по δ и $z\in U\cup\Gamma$, $z\overline{\in}E$.

Сначала предположим, что $0<\delta<\rho(z,E)$, тогда

$$|W^{(l)}(z)|\leqslant\frac{C}{(\rho(z,E))^l}.$$

Учитывая это, получим оценку 3° для $G_\delta^{(l)}(z)$. Если же $\rho(z,E)<\delta$, то

$$|W^{(l)}(z)|\leqslant\frac{C\delta}{\rho(z,E)^{l+1}};$$

отсюда и из (15) легко следует оценка 3°.

Теперь, чтобы получить доказательство теоремы, достаточно положить

$$\varphi_s(z)=G_{\frac{1}{s}}(z),\ z\in U,\ s=1,2,\cdots.$$

Доказательство закончено.

Следствие. Пусть E—замкнутое множество на Γ, предположим, что

$$E=\bigcup_{k=1}^{m_0}E_k, \tag{16}$$

где E_k — замкнутое множество на Γ, $k=1, 2, \cdots, m_0$, и пусть, далее, $\{l_p^{(k)}\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность длин дополнительных интервалов множества E_k, $k=1, \cdots, m_0$.

Предположим, что

$$\sigma(E_k)=0,$$

$$m_k\, q_k^p \leqslant l_p^{(k)} \leqslant M_k\, q_k^p, \quad \begin{matrix} k=1, \cdots, m_0 \\ p=1, 2, \cdots, \end{matrix} \tag{17}$$

где m_k, q_k, M_k—положительные числа, причем $0<q_k<1$, $k=1, 2, \cdots, m_0$. Тогда существует последовательность $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$ со свойствами (1)—(4).

§ 2. Применение результатов предыдущего параграфа

Пусть X означает одну из вышеуказанных алгебр.

Пусть, далее, $f \in X$. Обозначим через G_f внутреннюю часть функции f и

$$E_m(f)=\{\zeta \in \Gamma : f^{(k)}(\zeta)=0, \ k=0, 1, \cdots, m\},$$

$0 \leqslant m \leqslant n$. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2. *Пусть I—замкнутый идеал в X, и пусть*

$$E_m(I)=\bigcap_{f \in I} E_m(f),$$

G_I — наибольший общий делитель внутренних частей функций из I. Предположим, что $E_n(I)$ удовлетворяет условиям (16), (17), *тогда*

$$I=\{f \in X : E_m(f) \supset E_m(I),$$
$$m=0, 1, \cdots, n, \ G_I \text{ делит } G_f\}.$$

Предположим, что $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$—некоторая последовательность точек единичного круга, $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) < +\infty.$$

Через $B(z)$ обозначим произведение Бляшке с нулями $\{z_k\}$. Пусть, далее, S—сингулярная внутренняя функция

$$S(z)=\exp\left(-\int \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu(\theta)\right).$$

В работе [4] (см. также [19]) доказана следующая

Теорема 3. Пусть $G=B \cdot S$ и пусть $G_f=G$, где функция $f \in A$, $f \in Lip(\alpha, \Gamma)$ при некотором $\alpha>0$ и $f \not\equiv 0$, тогда

$$\int_{\Gamma} \log \rho(\zeta)\, |d\zeta| > -\infty, \tag{18}$$

где $\rho(\zeta)=\inf_{z \in E} |\zeta-z|$, $E=\{z_k\} \cup \sigma(\mu)$,

$\sigma(\mu)$ — носитель меры μ.

И обратно, если E—замкнутое множество $E \subset U \cup \Gamma$, удовлетворяющее условию (18), $G = B \cdot S$—внутренняя функция, для которой

$$\{z_k\} \cup \sigma(\mu) \subset E,$$

то существует внешняя функция $\Phi \in A^\infty$ такая, что

$$E_n(\Phi) = E \cap \Gamma, \; n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\Phi \not\equiv 0, \; \Phi G \in A^\infty.$$

Замечание. Из построения Φ следует, что Φ^γ тоже удовлетворяет условиям теоремы при любом $\gamma > 0$ и, кроме того

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant C_N \rho^N(\zeta), \; \zeta \in \Gamma$$

для любого $N > 0$.

Следующая теорема является развитием идеи Карлемана (см. [20]).

Теорема 4. *Пусть функция $f = G_f Q_f \in X$ и $E = E_0(f)$, пусть, далее, Φ построенная в теореме 3 внешняя функция по множеству E и по внутренней функции G_f, тогда существует последовательность $\{\varphi_s\}$, $\varphi_s \in X$ $s = 1, 2, \cdots$ такая, что*

$$\|\varphi_s f - \Phi G_f\|_X \to 0 \text{ при } s \to \infty.$$

Положим $\Psi = \Phi^{1/3}$, при $\delta > 0$ обозначим

$$\Psi_1(z) = \Psi(e^{i\delta} z), \; \Psi_2(z) = \Psi(e^{-i\delta} z),$$

$E \subset (-\pi, \pi)$ и $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^\infty$— дополнительные интервалы множества E. Далее обозначим $l_k = \beta_k - \alpha_k \geqslant l_{k+1} = (\beta_{k+1} - \alpha_{k+1})$, $k = 1, 2, \cdots$.

Предположим, что $0 < \delta < \frac{l_k}{2}$ при $k = 1, 2, \cdots, N$. Обозначим

$$E_\delta = \bigcup_{k=1}^N (\alpha_k + \delta, \beta_k - \delta), \; F_\delta = \{\alpha_k + \delta, \beta_k - \delta\}_{k=1}^N.$$

Пусть

$$H_\delta(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{\alpha_k+\delta}^{\beta_k-\delta} \log|f(e^{it})| \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt\right).$$

Лемма 3. *Пусть $f \in X$, тогда*

$$\varphi_\delta = \Psi_1 \Psi_2 H_\delta \in X$$

при любом положительном $\delta > 0$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно получить оценки производных от H_δ вблизи множества F_δ. В самом деле, Ψ_1, $\Psi_2 \in A^\infty$ и обращаются в нуль вместе со всеми своими производными на F_δ.

H_δ аналитична внутри CE_δ, $(CE_\delta = (-\pi, \pi] \setminus E_\delta)$, а внутри E_δ H_δ равняется функции f^{-1}, умноженной на некоторую функцию, которая аналитична в U вплоть до множества E_δ.

Пусть η — положительное число и δ фиксировано, обозначим

$$\mathfrak{M}_\eta = \{z \in U \cup \Gamma : z = re^{i\varphi},\ \varphi \in E_\delta,\ 1 - r < \eta\},$$

η настолько мало, что в $\mathfrak{M}_\eta$ нет нулей функции f.

Пусть

$$C(f, \delta, \eta) = \min_{z \in \mathfrak{M}_\eta} |f(z)|.$$

Если

$$f = B_f \cdot S_f Q_f,$$

то функция $G_f = B_f S_f$ аналитична вплоть до E_δ. Имеем

$$H_\delta(z) = \frac{G_f(z)\, \Phi_\delta(z)}{f(z)}, \tag{19}$$

где

$$\Phi_\delta(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{CE_\delta} \log |f(e^{it})| \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt\right).$$

Легко заметить, что если $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in E_\delta$, то

$$|\Phi_\delta^{(l)}(z)| \leqslant \frac{C(l)}{\rho(z, F_\delta)^{2l}},\ l = 0, 1, \cdots \tag{20}$$

и если

$$S(z) = \exp\left(-\int \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right),$$

то

$$|S^{(l)}(z)| \leqslant \frac{C'(l)}{\rho^{2l}(z, \sigma(\mu))} \leqslant \frac{C'(l)}{\rho(z, F_\delta)^{2l}} \tag{21}$$

($\sigma(\mu)$ — носитель меры μ). Так как f обращается в нуль на $\sigma(\mu)$, то $\sigma(\mu) \subset E_0(f) = E$ и при условии $\arg z \in E_\delta$

$$\rho(z, \sigma(\mu)) \geqslant \rho(z, F_\delta).$$

Оценим $B_f^{(l)}(z)$ при условии, что $\arg z \in E_\delta$. Так как предельные точки множества $\{z_k\}$ принадлежат E, то для η и δ существует n_0 такое, что

$$\rho(z_n E) \leqslant \eta_1 = \min\left(\frac{\eta}{4}, \frac{\delta}{4}\right),\ n \geqslant n_0.$$

Пусть $B_{n_0}(z) = \prod\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}$. Тогда очевидно

$$(\log B_{n_0}(z))^{(l)} = (l-1)!\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\left(\frac{(\bar{z}_k)^l}{(1-\bar{z}_k z)^l} - \frac{1}{(z_k-z)^l}\right)\right).$$

Следовательно

$$|(\log B_{n_0}(z))^{(l)}| \leqslant C''(l) \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1-|z_k|}{|z-z_k|^l\,|1-\bar{z}_k z|^l} \leqslant \frac{C'''(l)}{\inf\limits_{k>n_0+1} |z-z_k|^{2l}}.$$

Поэтому

$$|B_{n_0}^{(l)}(z)| = |(e^{\log B_{n_0}(z)})^{(l)}| \leqslant \frac{C_0(l)}{\inf\limits_{k>n_0+1} |z-z_k|^{4l}}.$$

Оценим снизу $\rho(z, z_k)$, $k \geqslant n_0+1$

$$\rho(z, z_k) \geqslant \rho(z, E) - \rho(z_k, E) \geqslant$$

$$\geqslant \rho(z, E) - \frac{\delta}{4} > \rho(F_\delta, E) - \frac{\delta}{4} > \frac{3}{4}\delta,$$

т. е.

$$|B_{n_0}^{(l)}(z)| < C(l, \delta),\ z \in \mathfrak{M}_\eta,\ l=1, 2, \cdots. \tag{22}$$

Объединяя (19)—(22), получим, что при $z \in \mathfrak{M}_\eta$

$$|H_\delta^{(l)}(z)| \leqslant \frac{C(f, \delta)}{\rho(z, F_\delta)^{2l}} \left[\sum_{j=0}^{l} |f^{(j)}(z)|\right],\ 1 \leqslant l \leqslant n.$$

Если же $\varphi \bar{\in} E_\delta$, то легко заметить, что

$$|H_\delta^{(l)}(z)| \leqslant \frac{C(\delta)}{\rho(z, F_\delta)^{2l}},\ 0 \leqslant l \leqslant n.$$

Таким образом, имеем

$$|H_\delta^{(l)}(z)| \leqslant \frac{C(\delta, f)}{\rho(z, F_\delta)^{2l}} \left[\sum_{j=1}^{l} |f^{(j)}(z)|\right] \quad (z \in U \cup \Gamma).$$

Отсюда следует лемма в случае $X = H_{n+1}^p$, $A^{(n)}$, а при $X = \lambda_\alpha^{(n)}$, $\lambda_*^{(n)}$ достаточно воспользоваться последней оценкой и теоремой Харди-Литтльвуда (см. [14]).

Доказательство теоремы 4.

Сначала предположим, что $X = A^{(n)}$ или равен H_{n+1}^p, пусть

$$\omega_\delta(z) = \Psi(z)\,\Psi_1(z)\,\Psi_2(z)\,H_\delta(z).$$

Докажем, что

$$\|\omega_\delta f - \Psi^3 G_f\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in E_\delta$, тогда

$$\omega_\delta(e^{i\varphi}) = \Psi(e^{i\varphi})\,G_f(e^{i\varphi})\,\Psi_1(e^{i\varphi})\,\Psi_2(e^{i\varphi})\,\Phi_\delta(e^{i\varphi}),$$

поэтому, ввиду (20), имеем

$$|\omega_\delta^{(l)}(e^{i\varphi})| \leqslant C(l, f) \sum_{j=0}^{l} |(\Psi G_f(e^{i\varphi}))^{(j)}|, \quad l=0, 1, \cdots, n.$$

Если $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in CE_\delta$, то тогда

$$|H_\delta^{(l)}(e^{i\varphi})| \leqslant \frac{C(l)}{\rho(\varphi, F_\delta)^{2l}}, \quad l=0, 1, \cdots.$$

Следовательно, в этом случае имеем

$$|(\omega_\delta(e^{i\varphi}))^{(l)}| \leqslant C_1(f, l)\left(\sum_{k=0}^{l} |\Psi^{(l-k)}(e^{i\varphi}) f^{(k)}(e^{i\varphi})|\right),$$

$$l = 0, 1, \cdots, n \text{ (при } X = H^p_{n+1}, \ l = 0, 1, \cdots, n+1).$$

Из этих оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует η_0 такое, что

$$|(\omega_\delta(e^{i\varphi}))^{(l)}| < \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{l} |f^{(k)}(e^{i\varphi})|\right) \tag{23}$$

при $\rho(\varphi, E) < \eta_0$.

Докажем, что

$$\omega_\delta^{(l)}(e^{i\varphi}) \to (\Psi^2(e^{i\varphi})\, G_f(e^{i\varphi}))^{(l)}, \quad l=0, 1, \cdots, n+1$$

равномерно при $\rho(\varphi, E) \geqslant \eta_0$ и при $\delta \to 0$, $N \to \infty$, $N\delta \to 0$. Достаточно доказать, что

$$\Phi_\delta(e^{i\varphi}) \to 1$$

$$\Phi_\delta^{(l)}(e^{i\varphi}) \to 0, \quad l=1, \cdots, n+1$$

равномерно при $\rho(E, \varphi) \geqslant \eta_0$.

Если $\rho(E, \varphi) \geqslant \eta_0$, то можно δ и N так подобрать, что

$$\rho(CE_\delta, \varphi) > \frac{\eta_0}{4} \text{ и } \rho(F_\delta, \varphi) > \frac{\eta_0}{4}. \tag{24}$$

Заметим, что при этих условиях

$$|\Phi_\delta^{(j)}(e^{i\varphi})| \leqslant \frac{C(j)}{\eta_0^{2j}} \int_{CE_\delta} |\log|f(e^{it})||\, dt, \tag{25}$$

и что при $\delta \to 0$, $N \to \infty$, $N\delta \to 0$, $\operatorname{mes} CE_\delta \to 0$. В самом деле

$$\operatorname{mes} CE_\delta = 2\pi - \operatorname{mes} E_\delta,$$

$$\operatorname{mes} E_\delta = \sum_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) - 2N\delta,$$

а

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) = 2\pi,$$

поэтому

$$\int\limits_{CE_\delta} |\log|f(e^{it})||\,dt \to 0 \qquad \text{при } \delta\to 0,\ N\to\infty,\ N\delta\to 0.$$

И, следовательно, из оценок (23), (25) получим теорему в случае $X = H^p_{n+1}, A^{(n)}$.

Проверим справедливость теоремы в случае $X = \lambda^{(n)}_\alpha$. В случае $X = \lambda^{(n)}_*$ — проверяется аналогичным образом.

По теореме Харди-Литтльвуда (см. [14])

$$\|f\|_{\lambda^{(n)}_\alpha} \sim \|f\|_\infty + \sup_{0<r<1} (1-r)^{1-\alpha} M(f^{(n+1)}, r).$$

Из леммы 3 следует, что $\omega_\delta \in \lambda^{(n)}_\alpha$. Оценим норму

$$\|\omega_\delta\|_{\lambda^{(n)}_\alpha}, \qquad \omega_\delta = \Psi G_f \Psi_1 \Psi_2 H_\delta Q_f,$$

Q_f — внешняя часть функции f, $H_\delta Q_f = \Phi_\delta$.

Докажем, что

$$|\Phi^{(n+1)}_\delta(z)| = O\left(\frac{1}{\rho(z, F_\delta)^{2(n+1)}}\right) + o\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right). \tag{26}$$

Из [11] (мы могли бы обойтись и без результатов работы [11], но для краткого изложения мы их используем) следует, что если $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in E_\delta$, то, как уже доказано

$$|\Phi^{(n+1)}_\delta(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{C(f)}{\rho(z, F_\delta)^{2(n+1)}},$$

если же $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in CE_\delta$, то

$$\Phi^{(n+1)}_\delta(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\Phi_\delta(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{Q_f(\zeta)\overline{H_\delta^{-1}}(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}} -$$

$$- \frac{(n+1)!}{2\pi} \int\limits_{E_\delta} \frac{\Phi_\delta(e^{it})(|Q_f(e^{it})|^2 - 1)}{(e^{it} - z)^2}\, e^{it}\, dt.$$

Из результатов работы [11] вытекает, что

$$\left| \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{Q_f(\zeta)\overline{H_\delta^{-1}(\zeta)}}{(\zeta - z)^{n+2}}\, d\zeta \right| = o\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right),$$

$$\left| \int\limits_{E_\delta} \frac{e^{it}\Phi_\delta(e^{it})(|Q_f(e^{it})|^2 - 1)}{(e^{it} - z)^{n+2}}\, dt \right| \leqslant$$

$$< \frac{\text{const}}{\rho(z, F_\delta)^{n+2}} \int\limits_{|\zeta|=1} |Q_f(\zeta)|^2 \, |d\zeta|.$$

Следовательно, оценка (26) доказана. Остается заметить, что из оценки (26) следует

$$(1-r)^{1-\alpha} M((\omega_\delta - \Psi^3 G_f)^{n+1}, r) = o(1).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0(\varepsilon)$ такое, что

$$(1-r)^{1-\alpha} M((\omega_\delta - \Psi^3 G_f)^{(n+1)}, r) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

$$\sup_{0<r<1} (1-r)^{1-\alpha} M((\omega_\delta - \Psi^3 G_f)^{(n+1)}, r) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{0<r<r_0} (1-r)^{1-\alpha} M((\omega_\delta - \Psi^3 G_f)^{(n+1)}, r);$$

но так как при $\delta \to 0$ $N \to \infty$, $N\delta \to 0$, $\omega_\delta \to \Psi^3 G_f$ равномерно внутри U, то первое слагаемое тоже будет стремиться к нулю при $\delta \to 0$, $N \to \infty$: $N\delta \to 0$. То, что

$$\|\omega_\delta - \Psi^3 G_f\|_\infty \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \; N \to \infty$$

$N\delta \to 0$, следует из первой части доказательства. Доказательство закончено.

Лемма 4. *Пусть T — линейный функционал на X. Тогда существует функция $T_0(z)$, аналитическая в $|z| > 1$ и такая, что*

$$|T_0(z)| \leqslant \text{const} \left[\frac{1}{(|z|-1)^m} + 1 \right], \quad |z| > 1 \tag{27}$$

при некотором $m > 0$, при этом

$$T(g) = \lim_{r \to 1+0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \, T_0(re^{i\theta}) \, d\theta$$

для любого $g \in X$.

Доказательство. Пусть $\Psi_\zeta(z) = \frac{\zeta}{\zeta - z}$. Очевидно при фиксированном $|\zeta| > 1$ $\Psi_\zeta(z) \in X$.

Пусть

$$T_0(\zeta) = T\left(\frac{\zeta}{\zeta - z}\right).$$

Легко видеть, что $T_0(\zeta)$ аналитична в $|\zeta| > 1$ и

$$T_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T(z^k)}{\zeta^k}.$$

Оценка (27) следует из неравенства

$$|T(z^k)| \leqslant \text{const} \, k^{n+2}, \quad k \geqslant 1.$$

Если $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то легко заметить, что

$$T(g)=\lim_{\rho\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k T(z^k)\rho^k.$$

Из представления T_0 следует, что

$$\lim_{\rho\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_0(z^k)\rho^k=\lim_{r\to 1+0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta})\,T_0(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Лемма доказана.

Обозначим через A^∞ алгебру функций, аналитических в U и бесконечно дифференцируемых вплоть до Г. Следующая лемма вытекает из результатов работы [18].

Лемма 5. *Пусть $T_0(z)$—функция, аналитическая в области $|z|>1$, и*

$$|T_0(z)|\leqslant \text{const}\left[\frac{1}{(|z|-1)^m}+1\right]$$

при некотором $m>0$, $|z|>1$. Предположим

$$\lim_{r\to 1+0}\int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\,T_0(r\zeta)\,|d\zeta|=0$$

для любого g из замкнутого идеала $I\subset A^\infty$, тогда функция $T_0(z)$ аналитически продолжима во множество $U\cup\Gamma\setminus L_0(I)$ через каждую дугу $[e^{i\alpha}, e^{i\beta}]$, где нет точек из $L_0(I)$,

$$L_0(I)=\bigcap_{f\in I} L_0(f),\ L_0(f)=\{\zeta\in\bar U: f(\zeta)=0\},$$

и, кроме того

$$|T_0(z)|\leqslant\frac{C}{(\rho(z, L_0(I)))^{2(m+1)}}+C\quad \text{при } |z|>1. \tag{28}$$

Из доказательства этого факта следует, что если I порожден одним элементом Ф, то внутри U

$$T_0(z)=\frac{\Psi(z)}{\Phi(z)},\ \text{где } \Psi\in A^\infty 0,\ \Psi(0)=0. \tag{29}$$

Лемма 6. *Пусть $h\in X$, и пусть E — замкнутое множество на Г; предположим, что существует последовательность $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (1)—(4) теоремы 1, $E_l(\varphi_s)=E$, $s=1, 2,\cdots$, $l=0, 1,\cdots, n$, и пусть $E_n(h)\supset E$, тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\|\varphi_k h-h\|_{X_p}=0. \tag{30}$$

Доказательство. Докажем лемму при $X = H^p_{n+1}$; $\lambda_2^{(n)}$, в остальных случаях рассуждения проходят с очевидными изменениями. Пусть $h \in H^p_{n+1}$ и $E_n(h) \supset E$. Очевидно, чтобы доказать лемму, достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})\, h^{(l)}(e^{ix})|^p\, dx = 0$$

при $l=0, 1, \cdots, n$. Пусть $\alpha \in E$. (Для удобства будем предполагать, что $E_n, E \subset (-\pi, \pi]$). Тогда

$$h(e^{ix}) = \frac{1}{n!}\int_{\alpha}^{x} (e^{ix} - e^{it})^n\, h^{(n+1)}(e^{it})\, dt$$

и

$$|h^{(l)}(e^{ix})| \leqslant C_0\, |x-\alpha|^{n-l} \int_{\alpha}^{x} |h^{(n+1)}(e^{it})|\, dt;$$

по условию

$$|\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})| \leqslant \frac{\text{const}}{|x-\alpha|^{n+1-l}}$$

при достаточно малом $|x-\alpha|$.

Пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность дополнительных интервалов множества E, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})|^p\, |h^{(l)}(e^{ix})|^p\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} |\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})\, h^{(l)}(e^{ix})|^p\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^p\cdot C_0\cdot \sum_{j=0}^{\infty}\left[\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left(\frac{1}{x-\alpha_j}\int_{\alpha_j}^{x} |h^{(n+1)}(e^{it})|\, dt\right)^p dx\right] +$$

$$+ 2^p\cdot C_0 \sum_{j=0}^{\infty}\left[\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left(\frac{1}{\beta_j - x}\int_{x}^{\beta_j} |h^{(n+1)}(e^{it})|\, dt\right)^p dx\right].$$

Пусть $1 < p < +\infty$, по неравенству Харди (см. [3]) имеем

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left(\frac{1}{x-\alpha_j}\int_{\alpha_j}^{x} |h^{(n+1)}(e^{it})|\, dt\right)^p dx \leqslant C(p)\int_{\alpha_j}^{\beta_j} |h^{(n+1)}(e^{ix})|^p\, dx,$$

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j}\left(\frac{1}{\beta_j-x}\int_x^{\beta_j}|h^{(n+1)}(e^{it})|dt\right)^p dx\leqslant C(p)\int_{\alpha_j}^{\beta_j}|h^{(n+1)}(e^{ix})|^p dx.$$

Следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_k^{(n+1-l)}(e^{ix})\,h^{(l)}(e^{ix})|^p\,dx\leqslant C_1(p)\int_{-\pi}^{\pi}|h^{(n+1)}(e^{ix})|^p\,dx,$$

а при $p=1$ нужно использовать лемму 2 § 1.

Остальное следует из теоремы 1 из известной теоремы (см. [15]).

В случае $X=\lambda_*^{(n)}$ нужно учесть, что

$$|\varphi_k^{(n+1-l)}(z)=o\,(\rho^{-n-1+l}(z)),\ l=0,1,\cdots,n+1$$

равномерно по $k=1,2,\cdots,$ и

$$h^{(l)}(z)=o\,(\rho^{n+\alpha-l}(z)),\ \text{при}\ l=0,1,\cdots,n.$$

Аналогично, как и при доказательстве последней части теоремы 2, получим доказательство леммы в этом случае. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы мы проведем, используя теоремы 1, 4, леммы 4, 5 и 6, методом, близким методу, применяемому в работе [18].

Пусть

$$I_0=\{f\in X: E_k(f)\supset E_k(I),\ G_I\ \text{делит}\ G_f\}.$$

Очевидно, I_0—замкнутый идеал в X и $I\subset I_0$. Чтобы доказать теорему нужно установить включение $I_0\subset I$. Пусть

$$I_1=\{f\in X: fI_0\subset I\}.$$

Легко видеть, что I_1 является замкнутым идеалом в X.

Докажем включение

$$E_0(I_1)\subset E_n(I).$$

Пусть $$z_0\in E_{k-1}(I)\setminus E_k(I),\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

Тогда, очевидно, z_0 не является предельной точкой для $E_0(I)$, поэтому $E_0(I)\setminus\{z_0\}$—замкнутое множество. Пусть Φ — внешняя функция, построенная как в теореме 3 по внутренней функции G_I и по множеству $E_0(I)\setminus\{z_0\}$, $\Phi(z_0)\neq 0$. Пусть $h\in I$ такая, что $h^{(k)}(z_0)\neq 0$. Пусть далее

$$\Psi(z)=h(z)-\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k-$$

$$-\frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}-\cdots-\frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Докажем, что $\Phi G_I\Psi\in I$.

Пусть T—любой функционал, ортогональный идеалу I, докажем, что

$$T\,(\Phi\, G_I \Psi) = 0,$$

остальное будет следовать из теоремы Хана-Банаха. Из теоремы 4 и из лемм 4, 5 следует, что если $T_0(z)$—функция, соответствующая функционалу T по лемме 4, то $T_0(z)$ аналитически продолжима во множество $U \cup \Gamma \setminus L_0(I)$ и, кроме того

$$|T_0(z)| \leqslant \text{const} \left[\frac{1}{\rho\,(z,\ L_0(I))^{2(m+1)}} + 1\right],\ (|z|>1). \tag{31}$$

Пусть $\{\varphi_s\}$—последовательность, построенная как в теореме 1, где $E = \{z_0\}$. Сначала докажем, что $\varphi_s \Phi G_I \Psi \in I$, $s=1, 2, \cdots$, отсюда и из леммы 6 будет следовать, что $\Phi G_I \Psi \in I$,

$$T(\varphi_s \Phi G_I \Psi) = \lim_{r\to 1+0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(e^{i\theta})\, \Phi\,(e^{i\theta})\ G_I(e^{i\theta})\ \Psi\,(e^{i\theta})\ T_0\,(re^{i\theta})\, d\theta,$$

так как можно так подобрать φ_s, $s=1, 2, \cdots$, что

$$|(\varphi_s\,(e^{i\theta})\ \Phi\,(e^{i\theta})\, G_I\,(e^{i\theta})\ \Psi\,(e^{i\theta})| = O\,(\rho^{2(m+1)}\,(e^{i\theta},\ L_0\,(I))).$$

Из (31) будет следовать, что

$$T\,(\varphi_s \Phi G_I \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_s\,(e^{i\theta})\ G_I\,(e^{i\theta})\ \Phi\,(e^{i\theta})\ \Psi\,(e^{i\theta}) \cdot T\,(e^{i\theta})\ d\theta.$$

Так как G_I— наибольший общий делитель внутренних частей функций из I, то по теореме Бёрлинга (см. [1]) существуют $f_p \in I$, $p = 1, 2, \cdots$ такие, что

$$f_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} G_I \text{ в } L^2\,(-\pi,\ \pi).$$

Поэтому

$$0 = \lim_{p\to\infty}\ T\,(\varphi_s\, f_p \Phi\, \Psi) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_s\,(e^{i\theta})\, f_p\,(e^{i\theta})\ \Phi\,(e^{i\theta})\ T\,(e^{i\theta})\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(e^{i\theta})\ \Phi\,(e^{i\theta})\ G_I\,(e^{i\theta})\ T\,(e^{i\theta})\ d\theta,$$

т. е.

$$T\,(\varphi_s\, G_I \Phi\, \Psi) = 0.$$

Следовательно, $\Phi\,(z)\ G_I(z)\ (z - z_0)^k\ P_{n-k} \in I$, где P_{n-k} — многочлен степени $n-k$ и $P_{n-k}\,(z_0) \neq 0$.

Теперь докажем, что $\Phi\, P_{n-k} \in I_1$. Опять предположим, что T ортогонален I, тогда T будет ортогонален идеалу, порожденному функцией $\Phi G_I (z - z_0)^k\, P_{n-k}$ и, тем самым, аналитическое продолжение $T_0\,(z)$ внутри круга будет иметь вид

$$T_0(z) = \frac{\Psi(z)}{\Phi(z)\, G_I(z)\,(z-z_0)^k\, P_{n-k}(z)}, \quad \Psi \in A^\infty, \ \Psi(0) = 0.$$

Очевидно $z = z_0$ является полюсом порядка k для $T_0(z)$. В таком случае, если $h \in I_0$, то

$$T(\Phi h P_{n-k}) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1+0} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{i\theta})\, h(e^{i\theta})\, P_{n-k}(e^{i\theta})\, T_0(re^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(e^{i\theta})\, \Psi(e^{i\theta})\, d\theta}{(e^{i\theta} - e^{i\theta_0})^k\, G_I(e^{i\theta})},$$

очевидно

$$\frac{h(z)}{(z-z_0)^k\, G_I(z)} \in H^\infty,$$

поэтому

$$T(P_{n-k} \Phi h) = \frac{\Psi(0)\, h(0)}{(-z_0)^k\, G_I(0)} = 0,$$

т. е.

$$\Phi P_{n-k} \in I_1,$$

и

$$G_{I_1} \equiv 1, \quad z_0 \overline{\in} E_0(I_1).$$

Аналогично, как и выше, можем установить, что $\varphi_s \in I_1$ $s > 1$. Из леммы 6 получаем, что $I_0 \subset I$.

Теорема доказана.

Замечание. При $X = A^{(n)}$ теорема обобщает теорему 6.2 работы [18] и результаты, полученные в [8].

Следующее следствие при $X = A^{(n)}$ уточняет теорему 3 работы [8].

Следствие. Каждый замкнутый примарный идеал в X — главный и порождается одной из следующих функций:

$$(z-z_0)^k \ \text{и} \ (\zeta - \zeta_0)^{2(n+1)} \exp\left(-a \frac{\zeta_0 + \zeta}{\zeta_0 - \zeta}\right), \quad |\zeta_0| = 1.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 10.VII.1972

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Մի հատուկ հաջորդականության կառուցումը, և անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ հանրահաշիվներում փակ իդեալների ստրուկտուրան *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրվում է [18] աշխատանքում դրված հարցի մասնակի պատասխանը։ Ստացված արդյունքը կիրառվում է անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի հանրահաշիվներում փակ իդեալների ներկայացման հարցում։

F. A. SHAMOIAN. *Construction of a special sequence, and the structure of closed ideals in certain algebras of analytic functions* (summary)

The paper gives partial solution to the problem stated in [18]. The result is applied to description of closed ideals in certain algebras of analytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., изд. „Мир", 1963.
2. *Л. В. Канторович* и *Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
3. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. 1, М., изд. „Мир", 1965.
4. *Б. И. Коренблюм.* О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до его границы, ДАН СССР, 200, № 1, 1971, 24—27.
5. *В. И. Коренблюм.* Инвариантные подпространства оператора сдвига во взвешенном гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 202, № 6, 1972.
6. *Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич.* Об аналитических функциях, регулярных в круге и гладких на границе, Матем. заметки, 7, вып. 2, 1970.
7. *В. С. Королевич.* Некоторые банаховы алгебры аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", V, № 4, 1970.
8. *Л. В. Шамраева.* Главные примарные идеалы кольца функций, регулярных в круге и дифференцируемых на его границе, УМЖ, 21, № 2, 1969.
9. *Ф. А. Шамоян.* Некоторые проблемы деления в пространствах аналитических функций, Диссертация, ЛГУ, 1971.
10. *Ф. А. Шамоян.* Построение одной специальной последовательности, и структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах аналитических функций, ДАН Арм.ССР, т. 55, 1972.
11. *Ф, А. Шамоян.* Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге, Записки научных семинаров, ЛОМИ АН СССР, т. 22, 1971.
12. *Б. С. Павлов.* О несамосопряженном операторе Шредингера, Проблемы математической физики, вып. 3, изд. ЛГУ, 1968.
13. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
14. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., изд. „Наука", 1966.
15. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., 1967.
16. *L. Carleson.* Sets uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta. Math., 87, 3—4.
17. *H. Alexander, B. A. Taylor* and *D. L. Williams.* The interpolating sets for A^∞, Journ. of Math. anal. and apl., 36, 1971.
18. *B. A. Taylor* and *D. L. Williams.* Jdeals in rings of analytic functions with smooth boundary volues, Canad. J. Math., 22, 1970.
19. *B. A. Taylor* and *D. L. Williams.* Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc., Mich. Math. J., 18, 1971.
20. *T. Carleman.* Les functions quasianalytiqes, Paris, 1926.

ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Методы, примененные в работе, позволют получить полное описание замкнутых идеалов в алгебрах, рассмотренных в статье.

Именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть X совпадает с одной из следующих алгебр*

$$H^p_{n+1},\ \lambda^{(n)}_\alpha,\ \lambda^{(n)}_*\ (1 < p < +\infty,\ 0 < \alpha < 1,\ n \geqslant 0).$$

Пусть далее I — замкнутый идеал в X. Тогда

$$I = \left\{ \begin{array}{c} f \in X,\ f\colon\ E_k(f) \supset E_k(I);\ k = 0, 1, \cdots, n \\ G_I \ \text{делит}\ G_f \end{array} \right\}.$$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1972 թ., VII, № № 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика" за 1972 г., VII, №№ 1—6

CONTENTS

Of the Isvestia of the Academy of Scieness of the Armenian SSR, seria "Matematika", 1972, vol. VII, №№ 1—6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS