ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в с оответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

М. Б. БАЛК, М. Ф. ЗУЕВ

О ЧИСЛЕ ЗНАЧЕНИЙ, ПРИНИМАЕМЫХ ЦЕЛОЙ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕИЗОЛИРОВАННО

1°. Говорят, что функция $f(z)$, заданная в некоторой области D, принимает значение a неизолированно, если множество корней функции $f(z)-a$ имеет в D точку сгущения. Нетрудно привести пример полианалитического* *полинома* любого порядка $n>1$, который принимает неизолированно** бесконечно много значений (и даже каждое принимаемое им значение). Такова, например, функция

$$(z+\bar{z})^{n-1}.$$

Нетрудно привести пример целой *трансцендентной* п. а. функции порядка n, которая принимает $n-1$ значений неизолированно. Такова, например, функция

$$z+\bar{z}+\cos z\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(z+\bar{z}-k),$$

которая принимает неизолированно каждое значение k ($k=1, 2, \cdots, n-1$), а именно, на всей прямой $2x=k$.

Однако, оказывается, что верен такой результат: *принимать неизолированно n различных значений целая трансцендентная n-аналитическая функция не может.*

В данной статье мы намерены установить это предложение (на самом деле мы докажем более общее утверждение—см. ниже, теорему 2).

2°. В ходе доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если п. а. функция порядка n имеет неизолированный корень, то существует аналитическая дуга, заполненная корнями этой функции.*

Доказательство. В случае бианалитических функций лемма была ранее доказана в [2]. Опираясь на это и на „подготовительную теорему" Вейерштрасса, рассмотрим общий случай.

Пусть функция

---

* В дальнейшем пишем „п. а." вместо слов „полианалитический" или „полианалитическая".

** Ниже выражение „аналитический полином" обозначает, естественно, полином $P(z)$, зависящий явно только от z, но не от $\bar{z}$. Для справок относительно терминологии, принятой в данной заметке, см. нашу статью [1].

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k A_k(z)$$

n-аналитична в некоторой окрестности точки a, причем эта точка является для $f(z)$ неизолированным корнем. Без потери общности можно считать, что $a=0$. В силу „подготовительной теоремы" Вейерштрасса (см., например, [3]) возможно функцию

$$g(z, w) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} w^k A_k(z)$$

представить в виде такого произведения:

$$g(z, w) = z^{\mu}\, \Omega(z, w) \cdot P_1(z, w) \cdots P_s(z, w),$$

где μ — целое число, $\mu \geqslant 0$, $\Omega(z, w)$ — функция, голоморфная и отличная от нуля в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, а $P_k(z, w)$ $(k=1, \cdots, s)$ — неприводимые отмеченные псевдополиномы. Если $f(z)$ имеет неизолированный корень, то хотя бы одна из функций $P_k(z, \bar{z})$ должна иметь неизолированный корень. Таким образом, нам достаточно доказать справедливость леммы 1 лишь для п. а. функции, являющейся сужением на плоскость $w=\bar{z}$ некоторого неприводимого отмеченного псевдополинома вида

$$P(z, w) = \sum_{k=0}^{m-1} w^k a_k(z) + w^m$$

(все $a_k(z)$ аналитичны в точке $z=0$).

В силу „теоремы о явном задании аналитической поверхности" (см. [3], стр. 98) уравнение

$$P(z, w) = 0$$

в некоторой окрестности Δ точки $(0, 0)$ равносильно совокупности m уравнений вида

$$w - A(\sqrt[m]{z}) = 0,$$

где $A(\zeta)$ — голоморфная функция в точке $\zeta=0$. Для каждой точки (z, w) из Δ, лежащей в плоскости $w=\bar{z}$ и обращающей в нуль функцию $P(z, w)$, имеем, что

$$\bar{z} - A(\sqrt[m]{z}) = 0$$

хотя бы при одном значении корня $\sqrt[m]{z}$. Перейдем к новому переменному ζ путем замены: $z=\zeta^m$. Тогда хотя бы для одного ζ, удовлетворяющего последнему условию, имеем $\bar{\zeta}^m - A(\zeta) = 0$. Так как (по условию) точка $z=0$ — предел последовательности $\{z_\nu\}$ корней функции $P(z, \bar{z})$, то должна найтись такая последовательность $\{\zeta_\nu\}$, что при $\nu \to \infty$

$$\zeta_\nu \to 0 \text{ и } \bar{\zeta}_\nu^m - A(\zeta_\nu) = 0.$$

Отсюда (рассуждая, как в [2]) легко убедиться, что $A(\zeta) \equiv \zeta^m a(\zeta)$, где $a(\zeta)$ — аналитическая функция в точке $\zeta=0$ и $a(0)\neq 0$. Поэтому можно $\bar{\zeta}^m - A(\zeta)$ записать так:

$$\bar{\zeta}^m - A(\zeta) \equiv \prod_{k=1}^{m} [\bar{\zeta} - \lambda_k \theta(\zeta)], \tag{1}$$

где λ_k $(k=1,\cdots, m)$ — корни из единицы, а $\theta(\zeta)$—одна из ветвей функции $\sqrt[m]{a(\zeta)}$. Так как точка $\zeta=0$ является неизолированным корнем для функции (1), то эта точка—неизолированный корень хотя бы одной из бианалитических функций $\bar{\zeta} - \lambda_k \theta(\zeta)$. Следовательно (в силу того, что доказываемая лемма справедлива для бианалитических функций), наверняка найдется такая аналитическая дуга γ $\{\zeta = \lambda(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, каждая точка которой является корнем функции (1); можно считать, что $\lambda(\alpha)=0$ (т. е. одним концом „дуги корней" служит предельная точка для корней). При отображении $z=\zeta^m$ дуга γ перейдет в некоторую аналитическую дугу Γ (имеющую своим концом точку $z=0$). Тем самым лемма доказана.

3°. В статье [2] было установлено, что мероморфная бианалитическая функция $B(z)$, имеющая неизолированный корень, представима в виде

$$B(z) \equiv M(z) \cdot V(z), \tag{2}$$

где $M(z)$ — мероморфная аналитическая функция, а $V(z)$— вырожденная п. а. функция (т. е. осуществляющая вырожденное отображение). Учитывая приведенное в [4] явное выражение для вырожденных мероморфных бианалитических функций, можно в этом утверждении считать $V(z)$ вещественнозначным полиномом. Очевидно, что приведенная выше формула (2) остается в силе и для функции, являющейся произведением нескольких мероморфных бианалитических функций, каждая из которых имеет неизолированный корень. Если же функция $B(z)$ является произведением мероморфных бианалитических функций, среди которых некоторые имеют неизолированные корни, а другие имеют лишь изолированные корни, то для нее, очевидно, представление (2) тоже останется в силе, если под $M(z)$ понимать мероморфную п. а. функцию, имеющую лишь изолированные корни.

Мы намерены доказать, что такое же представление возможно и для каждой мероморфной п. а. функции; а именно, верна следующая

Теорема 1. *Всякая мероморфная п. а. функция представима в виде произведения мероморфной п. а. функции, имеющей лишь изолированные корни, на вещественнозначный п. а. полином.*

Доказательство. Сначала рассмотрим целую п. а. функцию $\Pi(z)$ точного порядка $n \geqslant 2$, которую будем предполагать неприводимой в классе всех таких функций*:

* Иначе говоря, $\Pi(z)$ не может быть представлена в виде произведения двух целых полианалитических, но не аналитических функций.

$$\Pi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k e_k(z),$$

где все $e_k(z)$ — целые аналитические функции. Будем еще предполагать, что $\Pi(z)$ имеет неизолированный корень. Понятно, что $\Pi(z)$ всегда можно записать в виде

$$\Pi(z)\equiv e(z)\cdot\pi(z), \tag{3}$$

где $e(z)$—целая аналитическая функция, а функция

$$\pi(z)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k a_k(z) \tag{3'}$$

—целая п. а. функция, у которой все аналитические компоненты $a_k(z)$ $(k=0, 1,\cdots, n-1)$ не имеют общего корня, причем $\pi(z)$ тоже неприводима (в вышеуказанном смысле).

Построим две вспомогательные целые функции (целые псевдополиномы) двух независимых комплексных переменных:

$$A(z, w)=\sum_{k=0}^{n-1}w^k a_k(z), \tag{4}$$

$$B(z, w)=\overline{A(\bar{w}, \bar{z})}=\sum_{k=0}^{n-1}z^k b_k(w), \tag{5}$$

где

$$b_k(w)=\overline{a_k(\bar{w})}.$$

Докажем, что найдется такая целая аналитическая функция $h(z, w)$, что

$$A(z, w)\equiv B(z, w)\exp h(z, w). \tag{6}$$

Воспользуемся тем, что каждый целый делитель целого псевдополинома* также является, с точностью до сомножителя, являющегося целой функцией без корней, целым псевдополиномом ([5]). Из теоремы Пуанкаре ([6], стр. 219) следует, что должны найтись такие целые функции $a(z, w)$, $b(z, w)$ и $D(z, w)$, что

1) $$A(z, w)\equiv D(z, w)\cdot a(z, w),\ B(z, w)\equiv D(z, w)\cdot b(z, w), \tag{7}$$

2) в каждой точке (z_0, w_0), где $a(z, w)$ и $b(z, w)$ одновременно обращаются в нуль, ростки функций $a(z, w)$ и $b(z, w)$ взаимно просты в кольце ростков голоморфных в этой точке функций.

Если бы функция $D(z, w)$ не обращалась нигде в нуль, то при любом выборе корня z_0 функции $\pi(z)$ точка $(z_0, \bar{z}_0)$ оказалась бы общим корнем функций $a(z, w)$ и $b(z, w)$. Следовательно, эта точка

---

* Функция $D(z, w)$ называется целым делителем целой функции $G(z, w)$, если $D(z, w)$—целая функция и существует такая целая функция $H(z, w)$, что

$$G(z, w)\equiv D(z, w)\cdot H(z, w).$$

оказалась бы точкой неопределенности для мероморфной функции $A(z, w)/B(z, w)$. Так как множество всех корней функции $\pi(z)$ имеет по условию (конечную) точку сгущения, то оно содержит аналитическую дугу (см. лемму 1); поэтому множество всех точек $(z_0, \bar{z}_0)$, являющихся в C^2 точками неопределенности мероморфной функции $A(z, w)/B(z, w)$, не является дискретным. А это невозможно для мероморфной функции двух комплексных переменных (см. [3], стр. 157).

Итак, существуют точки (z, w), в которых $D(z, w)$ обращается в нуль. Следовательно, $D(z, w)$ представима в виде

$$D(z, w) \equiv H(z, w) \cdot d(z, w),$$

где $d(z, w)$—псевдополином (по w), а $H(z, w)$—целая функция, которая вовсе не имеет корней. Известно, что в таком случае найдется такая целая функция $\gamma(z, w)$, что $H(z, w) \equiv \exp \gamma(z, w)$, так что

$$D(z, w) \equiv d(z, w) \exp \gamma(z, w). \tag{8}$$

Покажем, что $a(z, w)$ нигде в C^2 не обращается в нуль. Действительно, допустим противное; тогда $a(z, w)$ представима в виде

$$a(z, w) \equiv \alpha(z, w) \cdot \exp \delta(z, w),$$

где $\delta(z, w)$—целая аналитическая функция от z и w, а $\alpha(z, w)$—псевдополином по w, обращающийся в нуль хотя бы в одной точке. Но тогда

$$A(z, w) \equiv d(z, w) \cdot \alpha(z, w) \exp E(z, w), \tag{9}$$

где $E(z, w) = \gamma(z, w) + \delta(z, w)$. Так как при каждом z хотя бы одна из аналитических компонент $a_k(z)$ псевдополинома $A(z, w)$ (согласно оговорке, сделанной в начале доказательства) не обращается в нуль, то тем же свойством обладают псевдополиномы $d(z, w)$ и $\alpha(z, w)$ (и, следовательно, их точная степень по w выше нулевой). Функцию $E(z, w)$ можно разложить в ряд Хартогса:

$$E(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(z) w^k,$$

где все $E_k(z)$ — целые аналитические функции. Невозможно, чтобы хотя бы при одном $k \geqslant 1$ было $E_k(z) \not\equiv 0$, ибо, выбрав z_0 так, чтобы хоть одно из чисел $E_k(z_0)$ $(k \geqslant 1)$ было отлично от нуля, мы получили бы из (9), что

$$\exp E(z_0, w) \equiv \frac{A(z_0, w)}{d(z_0, w) \cdot \alpha(z_0, w)},$$

а это явно невозможно (трансцендентная функция не может оказаться равной рациональной); следовательно

$$E(z, w) \equiv E_0(z),$$

$$A(z, w) = d(z, w) \cdot \alpha(z, w) \cdot \exp E_0(z). \tag{10}$$

Отсюда видно, что псевдополином $A(z, w)$ приводим в кольце целых псевдополиномов; поэтому п. а. функция $\Pi(z)$ приводима в классе целых п. а. функций, что противоречит ограничению, наложенному на $\Pi(z)$ в начале доказательства.

Итак, $a(z, w)$ действительно не имеет корней, т. е.

$$a(z, w) = \exp h_1(z, w),$$

где $h_1(z, w)$— целая аналитическая функция.

Аналогичные рассуждения применимы и к функции $b(z, w)$, если воспользоваться тем, что $B(z, w)$—псевдополином (по z); получим, что $b(z, w) = \exp h_2(z, w)$, где $h_2(z, w)$ — целая аналитическая функция. Из (7) следует равенство (6):

$$A(z, w) \equiv B(z, w) \cdot \exp h(z, w), \tag{6}$$

где $h \equiv h_1 - h_2$— целая аналитическая функция. Мы ниже убедимся, что $h(z, w)$ не зависит от w. Сначала докажем более слабый факт: *возможно подобрать n различных чисел $w_1, w_2, \cdots, w_n$ так, чтобы каждая разность*

$$h(z, w_k) - h(z, w_1) \quad (k = 2, 3, \cdots)$$

была постоянной (не зависела от z).

Допустим противное, тогда замечаем, что при любом выборе числа w_{2n} должны существовать еще такие $2n-1$ чисел w_k $(k=1, 2, \cdots, 2n-1)$, что каждая из разностей

$$h(z, w_k) - h(z, w_l) \not\equiv \text{const}$$
$$(k, l = 1, 2, \cdots, 2n;\ k \neq l).$$

Из (4) и (6) получаем

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(z)\, w_k^\nu = B(z, w_k) \exp h(z, w_k) \tag{11}$$
$$(k=1, 2, \cdots, n),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu(z)\, w_k^\nu = B(z, w_k) \exp h(z, w_k) \tag{12}$$
$$(k = n+1, n+2, \cdots, 2n).$$

Из каждой системы (11) и (12) найдем $a_{n-1}(z)$. Получим

$$a_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B(z, w_k) \exp h(z, w_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} B(z, w_{n+k}) \exp h(z, w_{n+k}), \tag{13}$$

где λ_k $(k=1, \cdots, 2n)$—константы, $B(z, w_k)$—полиномы от z. Воспользуемся следующим фактом, который представляет собой частный случай более общего результата, полученного Э. Борелем в [7]: если $H_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, m)$ — такие целые функции, что

$$H_\nu(z) - H_\mu(z) \not\equiv \text{const при } \nu \neq \mu,$$

а $p_\nu(z)$ — полиномы, то тождество

$$\sum_{\nu=1}^{m} p_\nu(z) \exp H_\nu(z) \equiv 0$$

возможно лишь тогда, когда $p_\nu(z) \equiv 0$ при $\nu=1, \cdots, m$. Применяя это предложение к тождеству (13), получаем, в частности, что

$$\lambda_{2n} B(z, w_{2n}) \equiv 0.$$

Но из (12)—(13) ясно, что $\lambda_{2n} \neq 0$, ибо

$$\lambda_{2n} = \frac{V(w_{n+1}, w_{n+2}, \cdots, w_{2n-1})}{V(w_{n+1}, w_{n+2}, \cdots, w_{2n})}$$

(числитель и знаменатель — определители Вандермонда). Поэтому $B(z, w_{2n}) \equiv 0$. Так как это верно при любом w_{2n} и при любом z, то, в частности, $B(\bar{z}, z) \equiv 0$, т. е. $\pi(z) \equiv 0$, вопреки сделанному в начале доказательства ограничению, согласно которому $\pi(z)$—п. а. функция точного порядка $n \geqslant 2$. Итак, действительно, всегда должны существовать такие числа $w_1, w_2, \cdots, w_n$ и такие константы $c_1, c_2, \cdots, c_n$, что

$$h(z, w_k) - h(z, w_1) \equiv c_k.$$

Но тогда из системы (11) легко найдем, что при $k=0, 1, \cdots, n-1$

$$a_k(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(k)} B(z, w_k) \exp h(z, w_k) = q_k(z) \exp \theta(z),$$

где $\lambda_\nu^{(k)}$ — константы, $\theta(z) \equiv h(z, w_1)$, $q_k(z)$—некоторый полином от z. В силу (3) и (3′) получаем, что

$$\Pi(z) \equiv E(z) \cdot q(z, \bar{z}), \tag{14}$$

где

$$E(z) \equiv e(z) \cdot \exp \theta(z)$$

—целая аналитическая функция, а

$$q(z, \bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k q_k(z)$$

— п. а. полином.

Полином $q(z, \bar{z})$ можно представить в виде

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$—вещественнозначные полиномы. Так как $\Pi(z)$ имеет по условию неизолированный корень, то кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ имеют бесконечно много общих точек. Известно (см. [8], гл. XVI, п. 75), что это невозможно, если полиномы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ взаимно простые. Следовательно, существуют такие вещественнозначные полиномы (от двух переменных x, y) $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ и $s(x, y) \equiv V(z, \bar{z})$, что $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ взаимно простые и

$$\varphi(x, y) \equiv s(x, y) \cdot \Phi(x, y), \Psi(x, y) = s(x, y) \Psi(x, y).$$

Но тогда

$$q(z, \bar{z}) \equiv [\Phi(x, y) + i \Psi(x, y)] \; V(z, \bar{z}). \tag{15}$$

Из формулы (14) следует, что

$$\Pi(z) \equiv G(z) \cdot V(z, \bar{z}),$$

где

$$G(z) \equiv E(z) \cdot [\Phi(x, y) + i \Psi(x, y)]$$

— целая п. а. функция, имеющая лишь изолированные корни, а $V(z, \bar{z})$ — полином, принимающий на всей z-плоскости лишь вещественные значения. Так как $\Pi(z)$—*неприводимая* п. а. функция, имеющая неизолированный корень, то $G(z)$—целая *аналитическая* функция.

Итак, для целой неприводимой п. а. функции, имеющей неизолированный корень, теорема верна. Но отсюда, очевидно, следует справедливость теоремы для произвольной целой п. а. функции. Если еще учтем, что мероморфная п. а. функция представима в виде отношения целой п. а. функции к целой аналитической функции, то убедимся в справедливости теоремы 1 в общем случае.

Отметим еще, что из хода доказательства ясна справедливость следующего факта: всякая целая п. а. функция $f(z)$, являющаяся *произведением неприводимых* целых п. а. функций, каждая из которых имеет неизолированные корни, представима в виде произведения целой аналитической функции $G(z)$ на вещественнозначный п. а. полином $V(z, \bar{z})$;

$$f(z) \equiv G(z) \; V(z, \bar{z}).$$

4°. Теперь обратимся к основной теореме данной статьи.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k a_k(z)$$

— целая n-аналитическая функция;

$$p_\nu(z) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

— аналитические полиномы от z, попарно различные между собой ($p_\nu(z) \not\equiv p_\mu(z)$ при $\nu \neq \mu$); E_ν — множество всех точек z-плоскости, в которых $f(z)$ и $p_\nu(z)$ принимают равные значения. Если каждое из n множеств E_ν ($\nu = 1, \cdots, n$) имеет хотя бы одну конечную точку сгущения, то $f(z)$—п. а. полином.

Доказательство. Рассмотрим целую п. а. функцию

$$\varphi_\nu(z) = f(z) - p_\nu(z) \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

Ее можно представить в виде произведения конечного числа неприводимых целых п. а. функций; хотя бы одна из них (обозначим ее через

$\theta_\nu(z)$) должна иметь неизолированный корень (ибо $\varphi_\nu(z)$ имеет неизолированный корень). Поэтому (см. конец п. 3) возможно $\theta_\nu(z)$ представить в виде

$$\theta_\nu(z) \equiv G_\nu(z)\ V_\nu(z, \bar{z}),$$

где $G_\nu(z)$ — целая аналитическая функция, а $V_\nu(z, \bar{z})$ — вещественнозначный полином. Ясно, что $V_\nu(z, \bar{z})$ имеет неизолированный корень. Множество всех корней полинома $V_\nu(z, \bar{z})$ обозначим через e_ν; понятно, что $e_\nu \subset E_\nu$.

Можно $V_\nu(z, \bar{z})$ записать так:

$$V_\nu(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{m} q_k(z)\ \bar{z}^k,$$

где все $q_k(z)$ — полиномы. В силу леммы 1 множество e_ν должно содержать аналитическую дугу $\gamma_\nu\ \{\bar{z} = A_\nu(z)\}$, где $A_\nu(z)$—некоторая аналитическая (в какой-то области Δ_ν, содержащей дугу γ_ν) функция. Ясно, что на γ_ν и, следовательно, в Δ_ν, имеем

$$V_\nu[z, A_\nu(z)] \equiv 0.$$

Отсюда видно, что $A_\nu(z)$ — элемент некоторой алгебраической функции; его можно аналитически продолжить в каждую точку z-плоскости, за исключением конечного множества точек δ_ν (состоящего из корней полинома $q_m(z)$ и точек дискриминантного множества); это продолжение, для которого сохраним обозначение $w = A_\nu(z)$, также удовлетворяет уравнению

$$V_\nu(z, w) = 0. \tag{16}$$

Убедимся, что все функции

$$A_\nu(z) \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

различны. В самом деле, рассмотрим вспомогательную функцию двух независимых комплексных переменных z и w:

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\ w^k.$$

Тогда на γ_ν

$$F[z, A_\nu(z)] = F(z, \bar{z}) = f(z) = p_\nu(z),$$

а, следовательно

$$F[z, A_\nu(z)] \equiv p_\nu(z) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n). \tag{17}$$

Если бы оказалось, что $A_\nu(z) \equiv A_\mu(z)$ при $\nu \neq \mu$, то из (17) следовало бы, что $p_\nu(z) \equiv p_\mu(z)$, что противоречит условию теоремы.

Пусть D—какая-либо односвязная область в

$$C - \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu$$

(C — комплексная плоскость). Выберем для каждой функции $A_\nu(z)$ по одной однозначной в D ветви $A_\nu^0(z)$. Из системы уравнений (ср. (17))

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)\,[A_\nu^0(z)]^k = p_\nu(z) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

видно, что все $a_k(z)$ выражаются через функции $A_\nu^0(z)\ p_\nu(z)$ рационально. Так как алгебраические функции образуют поле, то все $a_k(z)$ ($k=0, 1, \cdots, n-1$) — алгебраические функции. Но по условию они — целые. Следовательно, они — полиномы. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Отметим, что теорема, аналогичная теореме 2, может быть получена и для мероморфных п. а. функций.

5°. Некоторые любопытные свойства целых п. а. функций можно получить, если помимо теоремы 1 воспользоваться еще теоремой о факторизации целой п. а. функции с ограниченным множеством нулей [9]. Сначала установим следующее предложение.

Лемма 2. *Если целая трансцендентная п. а. функция $F(z)$ делится (в смысле делимости в классе целых п. а. функций) на п. а. полином точного порядка $m>1$, то множество всех точек, в которых $F(z)$ совпадает с отличным от тождественного нуля п. а. полиномом меньшего порядка, чем m, является неограниченным.*

Действительно, пусть

$$F(z) \equiv p(z, \bar z)\cdot\varphi(z, \bar z), \tag{18}$$

где $p(z, \bar z)$ — п. а. полином точного порядка $m>1$, $\varphi(z, \bar z)$ — целая п. а. функция; пусть $q(z, \bar z)$ — какой-либо п. а. полином точного порядка $s<m$. Допустим, что множество общих точек у $F(z)$ и $q(z, \bar z)$ ограниченно. Тогда из упомянутой выше теоремы о факторизации имеем

$$F(z) - q(z, \bar z) \equiv h(z, \bar z)\cdot\exp A(z), \tag{19}$$

где $A(z)$ — целая аналитическая функция, $A(z) \not\equiv \mathrm{const}$, а $h(z, \bar z)$ — п. а. полином. Из (18) и (19) следует, что

$$p(z, \bar z)\,\varphi(z, \bar z) - h(z, \bar z)\exp A(z) - q(z, \bar z) \equiv 0. \tag{20}$$

Приравнивая нулю аналитические компоненты левой части этого тождества, легко убедиться, что

$$\varphi(z, \bar z) \equiv R(z, \bar z)\exp A(z),$$

где $R(z, \bar z)$ — некоторый п. а. полином. Но тогда из (20) следует, что $q(z, \bar z)$ — трансцендентная п. а. функция, что противоречит условию.

Пользуясь леммой 2, нетрудно установить следующие факты.

Теорема 3. *Если множество всех точек совпадения целой п. а. функции $f(z)$ и некоторого аналитического полинома $P(z)$*

ограничено, а множество точек совпадения той же функции с другим аналитическим полиномом $Q(z)$ имеет конечную точку сгущения, то $f(z)$—п. а. полином.

Для доказательства достаточно применить лемму 2 к функции $F(z)=f(z)-Q(z)$, которая в силу теоремы 1 должна делиться на п. а. полином порядка $m>1$.

В частности, при $P(z)\equiv a=\text{const}$ и $Q(z)\equiv b=\text{const}$ получим такое следствие.

Целая п. а. функция, которая одно значение a принимает лишь на ограниченном множестве, а другое значение b $(b\neq a)$—неизолированно, является п. а. полиномом.

Заметим, что теорема 3 не остается в силе, если заменить требование аналитичности полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ требованием их полианалитичности. Мы получим контрпример, если положим

$$f(z)=(e^z+1)(\bar z\cdot z-1),\quad P(z)=\bar z\cdot z-1,\ Q(z)=z\,P(z).$$

Теорема 4. *Пусть $f(z)$—целая трансцендентная аналитическая функция, а $H(z,\bar z)$—произвольный полианалитический, но не аналитический полином. Множество всех точек комплексной плоскости, в которых $f(z)$ совпадает с $H(z,\bar z)$, является неограниченным и состоит лишь из изолированных точек.*

Действительно, из допущения, что $f(z)-H(z,\bar z)$ имеет ограниченное множество корней или хотя бы один неизолированный корень, следует, что справедливо хотя бы одно из тождеств:

$$f(z)-H(z,\bar z)\equiv P(z,\bar z)\exp g(z),\tag{21}$$

$$f(z)-H(z,\bar z)\equiv Q(z,\bar z)\ \ \psi(z,\bar z),\tag{22}$$

где $g(z)$—целая аналитическая функция, $P(z,\bar z)$ и $Q(z,\bar z)$—п. а. полиномы, причем точный порядок полинома $Q(z,\bar z)$ больше, чем 1; $\psi(z,\bar z)$—целая п. а. функция. Пользуясь тем, что из совпадения двух п. а. функций в некоторой области следует совпадение их одноименных компонент, легко заключить (рассуждая как при доказательстве леммы 2), что каждое из тождеств (21) и (22) возможно лишь тогда, когда $f(z)$—п. а. полином.

Смоленский педагогический институт Поступило 8.XII.1971

Մ. Բ. ԲԱԼԿ, Մ. Ֆ. ԶՈՒԵՎ. Ամբողջ բազմաանալիտիկ ֆունկցիայի կողմից ոչ մեկուսացված կետերով ընդունած արժեքների թվի մասին (*ամփոփում*)

Ապացուցվում է, որ n կարգի ամբողջ տրանսցենդենտ բազմաանալիտիկ ֆունկցիան կարող է չմեկուսացված կետերով ընդունել ոչ ավելի, քան $n-1$ տարբեր արժեքներ։

Այդ պնդումը արտածվում է հոդվածում ապացուցված այն փաստից, որ չմեկուսացված զրո ունեցող յուրաքանչյուր ամբողջ բազմաանալիտիկ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել որպես բազմաանալիտիկ բազմանդամի և միայն մեկուսացված զրոներ ունեցող ամբողջ բազմաանալիտիկ ֆունկցիայի արտադրյալ։

Բերված են նաև պիկարյան տիպի որոշ նոր թեորեմներ։

M. B. BALK, M. F. ZUYEV. *On the number of values which may be accepted by an entire polyanalytic function nonisolatedly* (summary)

It is proved in this article that an entire transcendental polyanalytic function of the order n cannot accept more than $n-1$ values nonisolatedly. This is derived from the possibility of decomposition of every entire polyanalytic function is a product of two factors: a polyanalytic polynomial and an entire polyanalytic function which has only isolated zeros. Some theorems of the Picard type are also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Б. Балк, М. Ф. Зуев.* О полианалитических функциях, УМН, 25, вып. 5 (155), 1970, 203—226.
2. *М. Б. Балк.* Бианалитические функции с неизолированными a-точками, Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964, 7—19.
3. *Б. А. Фукс.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.
4. *М. Б. Балк.* Вырожденные бианалитические отображения, Изв. АН Армянской ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964, 9—15.
5. *М. Ф. Зуев.* О делителях целых псевдополиномов, Смоленский матем. сб., 3, 1970, 20—32.
6. *W. F. Osgood.* Lehrbuch der Funktionentheorie, B. 2, 1929.
7. *E. Borel.* Sur les zéros des fonctions entières, Acta mathematica, v. 20, 1897.
8. *М. Бохер.* Введение в высшую алгебру, ГТТИ, М., 1934.
9. *М. Б. Балк.* Целые полианалитические функции с ограниченным множеством нулей, Изв. АН Армянской ССР, „Математика", 1, № 5, 1966, 340—357.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МНОЖЕСТВ

В этой заметке доказывается теорема, которую удобно использовать в виде аппарата для получения необходимых условий экстремума в математическом программировании, теории оптимального управления (как в непрерывном, так и дискретном вариантах) и т. п. Основой для получения этой теоремы служат, с одной стороны, условия отделимости системы выпуклых конусов [4], а с другой стороны, топологическая теория пересечений [1], [2]. Понятие шатра, вводимое ниже, известно (см., например, [3]).

Пусть Ω — некоторое множество, расположенное в n-мерном евклидовом пространстве E^n, и $a \in \Omega$. Выпуклый конус $M \subset E^n$ с вершиной a будем называть *шатром* множества Ω в точке a, если можно найти такое непрерывное отображение ψ, определенное для всех достаточно близких к a точек конуса M и принимающее значения в E^n, что выполнены следующие условия:

1°. $\psi(a) = a$;

2°. тождественное отображение пространства E^n является касательным для отображения ψ в точке a, т. е. $\psi(x) = x + o(x - a)$;

3°. для всех точек $x \in M$, для которых отображение ψ определено, выполнено соотношение $\psi(x) \in \Omega$.

Заметим, что если M — шатер множества Ω в точке a, то и любой меньший выпуклый конус с вершиной a также является шатром множества Ω в точке a. *Максимальный* шатер существует не всегда. Если, например, Ω—часть плоскости, представляющая собой угол, больший π (с вершиной a), то всякий угол с вершиной a, не превосходящий π и содержащийся в Ω, будет шатром множества Ω в точке a, но максимального шатра не существует.

Нижеследующие две теоремы дают описание шатра множества в двух наиболее важных случаях. (Нетрудно доказать, что в обоих случаях построенный шатер является максимальным).

Теорема 1. *Опорный конус M замкнутого выпуклого множества $\Omega \subset E^n$ в произвольной точке $a \in \Omega$ является шатром множества Ω в точке a.* (Напомним, что точка $x \in E^n$ принадлежит опорному конусу множества Ω, если как угодно близко к ней найдется такая точка y, что интервал (a, y) пересекается с множеством Ω).

Доказательство. Обозначим через E несущую плоскость выпуклого множества Ω. Конус M также лежит в этой плоскости. Для любой точки $x \in E$ обозначим через $\psi(x)$ ближайшую к x точку множества Ω (если $x \in \Omega$, то $\psi(x) = x$). Отображение ψ определено и непрерывно на всей плоскости E, но мы будем рассматривать его только в точках конуса M.

Так как $a \in \Omega$, то $\psi(a)=a$, т. е. условие 1° в определении шатра выполняется. Далее, для любой точки $x \in M$ мы имеем $\psi(x) \in \Omega$, т. е. условие 3° также выполняется.

Остается проверить выполнение условия 2°. Выберем произвольное положительное число $\varepsilon \leqslant 1$, которое в процессе рассуждений менять не будем. Луч, исходящий из точки a и проходящий через точку $x \neq a$, будем обозначать через l_x. Далее, обозначим через Σ множество всех точек $x \in M$, для которых $|x-a|=1$. Пусть $b \in \Sigma$. Рассмотрим все исходящие из точки a лучи, которые образуют с l_b углы, не превосходящие ε. Эти лучи заполняют в пространстве E замкнутый выпуклый конус $K(b)$. Так как $b \in M$ и $b \neq a$, то пересечение $K(b) \cap \Omega$ содержит отличные от a точки. Если множество $K(b) \cap \Omega$ имеет точки, лежащие вне шара радиуса 1 с центром в точке a, то мы положим $d(b)=1$. Если же множество $K(b) \cap \Omega$ целиком расположено в этом шаре, то через $d(b)$ обозначим наибольшее расстояние от a до точек множества $K(b) \cap \Omega$.

Несложно доказывается, что положительная функция $d(b)$, определенная на замкнутом ограниченном множестве Σ, *непрерывна*. Следовательно, существует такое $h>0$, что $d(b) \geqslant h$ для любой точки $b \in \Sigma$.

Пусть теперь $x \in M$, причем $0<|x-a|<h$. Обозначим через b точку, в которой луч l_x пересекается с множеством Σ. Так как $d(b) \geqslant h$, то в множестве $K(b) \cap \Omega$ найдется точка y, отстоящая от a не менее чем на h. Тогда $y \in \Omega$ и угол между лучами l_x и l_y не превосходит ε. Точка x', являющаяся проекцией точки x на луч l_y, принадлежит отрезку $[a, y]$ и, значит, принадлежит множеству Ω. Так как $|x-x'| \leqslant |x-a| \sin \varepsilon < \varepsilon |x-a|$, то ближайшая к x точка $\psi(x)$ множества Ω подавно отстоит от x менее чем на $\varepsilon |x-a|$, т. е.

$$|\psi(x)-x|<\varepsilon|x-a| \text{ при } |x-a|<h, \; x \in M.$$

Поскольку в этом рассуждении число $\varepsilon>0$ было произвольным, то $\psi(x)=x+o(x-a)$, т. е. условие 2° выполнено.

Теорема 2. *Пусть Ω — множество, заданное в пространстве E^n ограничением $g(x) \leqslant 0$, где $g(x)$ — функция, имеющая вблизи точки $a \in \Omega$ непрерывные первые производные, причем $g(a)=0$ и* grad $g(a) \neq 0$. *Обозначим через M полупространство, состоящее из всех точек $x \in E^n$, для которых $(x-a)$* grad $g(a) \leqslant 0$. *Тогда M есть шатер множества Ω в точке a.*

Доказательство. Рассмотрим гиперповерхность $g(x)=0$ и обозначим через F настолько малый кусок этой гиперповерхности вблизи точки a, что прямые, параллельные вектору grad $g(x)$ и проходящие вблизи a, пересекают F ровно в одной точке. Граничная гиперплоскость Γ полупространства M касается гиперповерхности F в точке a.

Пусть $x \in E^n$. Прямая m_x, параллельная вектору $\operatorname{grad} g(a)$ и проходящая через точку x, пересекает гиперплоскость Γ в некоторой точке $\gamma(x)$ и, если точка x достаточно близка к a, пересекает гиперповерхность F в некоторой точке $f(x)$. Мы имеем

$$f(x)-\gamma(x)=o(x-a),$$

поскольку $\gamma(x)$ есть ортогональная проекция точки x (и точки $f(x)$) на касательную к F гиперплоскость Γ. Положим

$$\psi(x)=x+(f(x)-\gamma(x)).$$

Отображение ψ определено вблизи точки a; мы его будем рассматривать только в близких к a точках конуса M.

Так как $a \in F$, $a \in \Gamma$, то $f(a)=\gamma(a)=a$, и потому $\psi(a)=a$, т. е. условие 1° в определении шатра выполнено. Далее, так как $\psi(x)-x=f(x)-\gamma(x)=o(x-a)$, то выполнено и условие 2°. Остается проверить условие 3°. Так как $f(x) \in F$, то $g(f(x))=0$. Следовательно

$$g(\psi(x))=g(\psi(x))-g(f(x))=(\psi(x)-f(x))\operatorname{grad} g(\xi)=$$
$$=(x-\gamma(x))\operatorname{grad} g(\xi),$$

где ξ — некоторая точка отрезка, соединяющего точки $\psi(x)$ и $f(x)$. Но при $x \in M$ мы имеем $x-\gamma(x)=\lambda(x)\operatorname{grad} g(a)$, где $\lambda(x) \leqslant 0$. Далее, если точка x (а потому и ξ) достаточно близка к a, то

$$\operatorname{grad} g(a) \cdot \operatorname{grad} g(\xi)>0.$$

Следовательно

$$g(\psi(x))=(x-\gamma(x))\operatorname{grad} g(\xi)=\lambda(x)\operatorname{grad} g(a) \cdot \operatorname{grad} g(\xi) \leqslant 0,$$

и потому $\psi(x) \in \Omega$. Таким образом, условие 3° также выполнено.

Замечание 1. Обозначим через Ω^* множество, содержащее точку a и все точки $x \in E^n$, для которых $g(x)<0$. Таким образом, $\Omega^* \subset \Omega$. Тогда при условиях теоремы 2 можно сформулировать более сильное утверждение: *M есть шатер множества Ω^* в точке a.*

В самом деле, положим

$$\psi^*(x)=\psi(x)-|\gamma(x)-a|^2 \operatorname{grad} g(a).$$

Тогда $\psi^*(x)=\psi(x)+o(x-a)$, и потому отображение ψ^*, так же как и ψ, удовлетворяет условиям 1° и 2° в определении шатра.

Далее, если $\gamma(x) \neq a$, то

$$g(\psi^*(x))-g(\psi(x))=(\psi^*(x)-\psi(x))\operatorname{grad} g(\xi^*)=$$
$$=-|\gamma(x)-a|^2 \operatorname{grad} g(a) \cdot \operatorname{grad} g(\xi^*)<0$$

(здесь ξ^* — некоторая точка отрезка, соединяющего точки $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$). Следовательно, $g(\psi^*(x))<g(\psi(x)) \leqslant 0$, и потому $\psi^*(x) \in \Omega^*$.

Если же $\gamma(x)=a$, т. е. $x=a+\lambda \operatorname{grad} g(a)$, где $\lambda \leqslant 0$, то $\psi^*(x)=\psi(x)=x$, и потому также $\psi^*(x) \in \Omega^*$. Таким образом, в любом случае $\psi^*(x) \in \Omega^*$ (для точек $x \in M$, достаточно близких к a), т. е. условие 3° также выполнено.

Замечание 2. Отображение ψ, построенное в теореме 2, является гладким (имеет вблизи точки a непрерывные первые производные). В теореме 1 отображение ψ, вообще говоря, этим свойством не обладает, хотя его можно было бы „подправить“, сделав гладким. Легко привести и такой пример, где отображение ψ, участвующее в определении шатра, невозможно сделать гладким. Именно, рассмотрим на плоскости (x, y) бесконечнозвенную ломаную $a_0a_1a_2a_3\cdots$ с вершинами

$$x_i=(2^{-i},\ 3^{-i}),\quad i=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Добавив к этой ломаной точку $x=(0,\ 0)$, мы получим замкнутое множество на плоскости, которое обозначим через Ω. Далее, через M обозначим положительную полуось абсцисс. Наконец, за ψ примем проектирование отрезка $[0,\ 1]$ оси абсцисс на множество Ω параллельно оси Oy. Это отображение ψ удовлетворяет условиям 1°—3°, так что M есть шатер множества Ω в точке a. Легко видеть, что гладкого отображения ψ, обладающего требуемыми свойствами, не существует.

Перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\Omega_1,\ \Omega_2,\cdots,\ \Omega_s$ — некоторые множества, расположенные в E^n и имеющие общую точку a, и пусть $M_1,\ M_2,\cdots,\ M_s$ — шатры множеств $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \cdots,\ \Omega_s$ в точке a. Если система выпуклых конусов $M_1,\ M_2,\cdots,\ M_s$ не обладает свойством отделимости* [4] *и хотя бы один из этих конусов не является плоскостью, то найдется отличная от a точка $x\in\Omega_1\cap\Omega_2\cap\cdots\cap\Omega_s$.*

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы в общем случае, приведем рассуждение, проясняющее геометрический смысл этой теоремы и дающее ее доказательство в случае, когда для каждого $i=1,\cdots,\ s$ существует, гладкое отображение ψ_i, определенное в близких к a точках несущей плоскости, конуса M_i и удовлетворяющее условиям 1°—3°. Согласно теореме 8 работы [4], существует точка

$$b\in(\mathrm{int}_{rel}\,M_1)\cap(\mathrm{int}_{rel}\,M_2)\cap\cdots\cap(\mathrm{int}_{rel}\,M_s)$$

и, кроме того, существуют такие подпространства $L_1,\ L_2,\cdots,\ L_s$, в прямую сумму которых распадается пространство E^n, что при любых $i\neq j$ $(i,\ j=1,\cdots,\ s)$ плоскость L_i', параллельная подпространству L_i и проходящая через точку b, содержится в несущей плоскости конуса M_j.

Выберем для каждого $i=1,\ 2,\cdots,\ s$ в несущей плоскости N_i конуса M_i такой открытый шар E_i с центром a, что E_i содержится в области определения отображения ψ_i. Тогда $\psi_i\,(E_i)$ есть гладкое многообразие (размерности $\dim N_i$) в пространстве E^n, проходящее через точку a и имеющее в точке a касательную плоскость $N_i\,(i=1,2,\cdots,\ s)$.

Докажем, что при любом $j=1,\ 2,\cdots,\ s$ пересечение $\psi_1\,(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j\,(E_j)$ представляет собой вблизи точки a гладкое многообразие, имеющее в точке a касательную плоскость $N_1\cap\cdots\cap N_j$. При

$j=1$ это утверждение справедливо. Допустим, что оно справедливо для некоторого $j<s$, и докажем его справедливость для числа $j+1$, т. е. докажем, что $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)\cap\psi_{j+1}(E_{j+1})$ есть гладкое многообразие, имеющее в точке a касательную плоскость $N_1\cap\cdots\cap N_j\cap N_{j+1}$. Так как

$$\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)\cap\psi_{j+1}(E_{j+1})=(\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j))\cap\psi_{j+1}(E_{j+1}),$$

причем $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_j(E_j)$ и $\psi_{j+1}(E_{j+1})$ являются вблизи a гладкими многообразиями, имеющими в точке a касательные плоскости $N_1\cap\cdots\cap N_j$ и N_{j+1}, то достаточно установить, что $N_1\cap\cdots\cap N_j$ и N_{j+1} не лежат в одной гиперплоскости. Но это непосредственно вытекает из того, что $L_i'\subset N_1\cap\cdots\cap N_j$ при $i=j+1,\cdots,s$ и $L_i'\subset N_{j+1}$ при $i=1,\cdots,j$. Таким образом, наше утверждение доказано для всех $j=1,\cdots,s$. В частности, при $j=s$ мы находим, что $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_s(E_s)$ представляет собой вблизи точки a гладкое многообразие, имеющее в точке a касательную плоскость $N_1\cap\cdots\cap N_s$.

Заметим, что точка b не совпадает с a, так как, по предположению, хотя бы один из конусов $M_1,\cdots,M_s$ не является плоскостью и для этого конуса a является граничной точкой относительно его несущей плоскости. Так как $b\in N_1\cap\cdots\cap N_s$, то на многообразии $\psi_1(E_1)\cap\cdots\cap\psi_s(E_s)$ существует кривая Λ, исходящая из точки a и касающаяся луча l_b с началом a, проходящего через точку b.

Отображение $\psi_j\colon E_j\to\psi_j(E_j)$ является (если шар E_j достаточно мал) взаимно однозначным, т. е. существует отображение $\varphi_j:\psi_j(E_j)\to E_j$, обратное к ψ_j. Это означает, в частности, что $\psi_j(\varphi_j(x))=x$ для любой точки $x\in\psi_j(E_j)$, причем отображение φ_j, как и ψ_j, имеет тождественное отображение своим касательным отображением в точке a. Следовательно, кривая $\varphi_j(\Lambda)$, расположенная в шаре E_j, также касается луча l_b в точке a. А так как точка $b\in l_b$ является внутренней точкой конуса M_j относительно его несущей плоскости, то найдется на кривой $\varphi_j(\Lambda)$ такая точка c_j, что вся дуга этой кривой от точки a до c_j принадлежит конусу M_j. Следовательно, вся дуга кривой $\psi_j(\varphi_j(\Lambda))=\Lambda$ от точки a до точки $c_j'=\psi_j(c_j)$ принадлежит множеству $\psi_j(M_j\cap E_j)\subset\Omega_j$. При этом $c_j'\neq a$, так как отображение ψ_j взаимно однозначно.

Указанное положение вещей имеет место для любого $j=1,\cdots,s$. Таким образом, вся дуга кривой Λ от точки a до некоторой отличной от a точки c содержится в множестве $\Omega_1\cap\cdots\cap\Omega_s$, откуда и вытекает справедливость теоремы 3.

Если ограничиться этой версией доказательства (т. е. дополнительно потребовать в теореме 3, что $\psi_1,\cdots,\psi_s$ — гладкие отображения), то придется ограничиваться такими множествами Ω_i и такими их шатрами M_i, для которых существует гладкое отображение ψ_i, удовлетворяющее условиям 1°—3°. Пример, указанный в замечании 2, показывает, что гладкое отображение ψ_i требуемого вида существует не всегда, т. е. намеченное выше доказательство позволяет получить лишь более слабый результат, чем сформулированный в теореме 3.

Доказательство теоремы 3. Как и выше, мы выберем отличную от a точку

$$b \in (\mathrm{int}_{rel} M_1) \cap (\mathrm{int}_{rel} M_2) \cap \cdots \cap (\mathrm{int}_{rel} M_s)$$

и подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_s$. Положим $r_i = n - \dim L_i$, $i=1,\cdots, s$. Тогда

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_s - (s-1)\, n = n - (\dim L_1 + \cdots + \dim L_s) = 0.$$

Через G_j обозначим плоскость наименьшей размерности, проходящую через точку b и содержащую все плоскости $L'_1, \cdots, L'_s$, кроме L'_j (где, напомним, L'_j - плоскость, проходящая через точку b и параллельная подпространству L_j). Из этого следует, что C_j содержится в несущей плоскости конуса M_j. Плоскость G_j имеет размерность $n - \dim L_j = r_j$, т. е. плоскости L'_j и G_j пересекаются в одной точке и имеют дополнительные размерности. При $i \neq j$ справедливо включение $L'_i \subset G_j$.

Выберем для каждого $j=1, 2,\cdots, s$ выпуклый многогранник P_j, имеющий G_j своей несущей плоскостью и содержащий точку b внутри себя. Мы будем при этом предполагать, что многогранник P_j замкнут, содержится целиком в конусе M_j, и точка a ему не принадлежит. Так как пересечение $G_1 \cap \cdots \cap G_s$ состоит только из одной точки b, то и пересечение $P_1 \cap \cdots \cap P_s$ содержит только одну точку b, которая является внутренней точкой каждого из многогранников P_j относительно его несущей плоскости. Из этого вытекает, что

$$(\mathrm{bd}\, P_j) \cap \Big(\bigcap_{i \neq j} P_i\Big) = \varnothing$$

для любого $j=1,\cdots, s$, где $\mathrm{bd}\, P_j$ означает границу многогранника P_j. Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что

$$(U_{2\delta}(\mathrm{bd}\, P_j)) \cap \Big(\bigcap_{i \neq j} U_{2\delta}(P_i)\Big) = \varnothing$$

для любого $j=1,\cdots, s$, где $U_r(Q)$ означает r-окрестность множества $Q \subset E^n$. Мы будем, кроме того, предполагать число δ настолько малым, что $a \bar{\in} U_\delta(P_j)$, $j = 1,\cdots, s$.

Так как M_j является шатром множества Ω_j в точке a, то существует отображение ψ_j (не предполагаемое гладким), определенное вблизи вершины a конуса M_j и удовлетворяющее условиям 1°—3°. Область определения отображения ψ_j обозначим через M^*_j (таким образом, все достаточно близкие к a точки конуса M_j принадлежат множеству M^*_j).

Обозначим теперь через g_ε гомотетию с центром a и коэффициентом $\varepsilon > 0$, т. е. $g_\varepsilon(x) = a + \varepsilon\,(x-a)$. Легко видеть, что

$$g_\varepsilon(U_\gamma(Q)) = U_{\gamma\varepsilon}(g_\varepsilon(Q)).$$

Из этого вытекает, что для любого $j=1,\cdots, s$ справедливы соотношения:

$$U_{2\delta\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_j)) \cap \Big(\bigcap_{i \neq j} U_{2\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_i))\Big) = \varnothing, \qquad (1)$$

$$a \in U_{\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j)).$$

Так как отображения ψ_j $(j=1,\cdots, s)$ удовлетворяют условию 2° в определении шатра, то найдется такое $\varepsilon>0$, что для всех $j=1,\cdots,s$ выполнено при $x\in g_\varepsilon(P_j)$ неравенство

$$\rho(x, \psi_j(x)) < \delta\varepsilon. \tag{2}$$

Мы выберем такое число ε и более менять его не будем.

Докажем теперь, что пересечение

$$\psi_1(g_\varepsilon(P_1)) \cap \cdots \cap \psi_s(g_\varepsilon(P_s)) \tag{3}$$

непусто. Допустим, напротив, что это пересечение пусто; тогда существует такое число $\gamma>0$, что пустым будет и пересечение

$$U_\gamma(\psi_1(g_\varepsilon(P_1))) \cap \cdots \cap U_\gamma(\psi_s(g_\varepsilon(P_s))). \tag{4}$$

При этом мы можем дополнительно считать, что $\gamma<\delta\varepsilon$.

Теперь мы используем некоторые понятия и факты из **алгебраической топологии** (а именно, из теории пересечений [1], [2]). Разобьем многогранник $g_\varepsilon(P_j)$ на симплексы (размерности r_j) и формальную сумму всех этих симплексов будем рассматривать как r_j-мерную цепь (по модулю 2), которую обозначим через ξ_j. Границу (по модулю 2) цепи ξ_j обозначим через $d\xi_j$. Далее, для любой точки $x\in g_\varepsilon(P_j)$ обозначим через $\Phi_t(x)$ точку $tx+(1-t)\psi_j(x)$. Тогда Φ_t, $0\leqslant t\leqslant 1$, представляет собой *непрерывную деформацию* множества $g_\varepsilon(P_j)$, причем в результате этой деформации точка x смещается на расстояние $|x-\psi_j(x)|<\delta\varepsilon$. При этой деформации из цепи ξ_j возникнет (r_j+1)-мерная *непрерывная* цепь $D(\xi_j)$ (называемая также „деформационной“ цепью), а из цепи $d\xi_j$ возникнет непрерывная r_j-мерная цепь $D(d\xi_j)$, причем

$$d(D(\xi_j)) = \xi_j + \psi_j(\xi_j) + D(d\xi_j),$$

где $\psi_j(\xi_j)$ — непрерывная r_j-мерная цепь, являющаяся образом цепи ξ_j при отображении ψ_j. В силу (2), цепи $D(\xi_j)$ и $\psi_j(\xi_j)$ расположены в $U_{\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j))$, а цепь $D(d\xi_j)$ расположена в $U_{\delta\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_j))$.

Разобьем теперь пространство E^n на симплексы, каждый из которых имеет диаметр, меньший γ. Применив теперь к цепям $D(\xi_j)$, $\psi_j(\xi_j)$, $D(d\xi_j)$ „симплициальную аппроксимацию“, мы получим из них симплициальные цепи ζ_j^*, ζ_j, η_j, удовлетворяющие соотношениям

$$d\zeta_j^* = \xi_j + \zeta_j + \eta_j, \quad d\zeta_j = d\xi_j + d\eta_j.$$

При этом цепи ζ_j^*, ζ_j, η_j расположены в γ-окрестностях (и, подавно, в $\delta\varepsilon$-окрестностях), соответственно, цепей $D(\xi_j)$, $\psi_j(\xi_j)$, $D(d\xi_j)$. Следовательно, цепи ζ_j^* и ζ_j расположены в $U_{2\delta\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j))$, а цепь η_j расположена в $U_{2\delta\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_j))$.

Мы можем при этом предполагать, что в необходимых случаях выполнено условие общности положения, так что можно рассматривать **пересечения** построенных цепей (операция пересечения отмечается знаком $\times$). Напомним (ср. [2], стр. 112), что граница пересечения цепей вычисляется, для случая цепей по модулю 2, по формуле

$$d(\delta_1 \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_s) = (d\delta_1) \times \delta_2 \times \cdots \times \delta_s +$$
$$+ \delta_1 \times (d\delta_2) \times \delta_3 \times \cdots \times \delta_s + \cdots + \delta_1 \times \cdots \times \delta_{s-1} \times (d\delta_s). \tag{5}$$

Рассмотрим цепь

$$\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \zeta_l^* \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s, \quad l = 1, \cdots, s.$$

Размерность этой цепи равна

$$\dim \lambda_l = r_1 + \cdots + r_{l-1} + (r_l + 1) + r_{l+1} + \cdots + r_s - (s-1)\, n = 1.$$

Согласно формуле (5), граница цепи λ_l имеет следующий вид:

$$d\lambda_l = \sum_{j=1}^{l-1} (\cdots \times d\zeta_j \times \cdots \times \zeta_l^* \times \cdots) +$$
$$+ (\cdots \times d\zeta_l^* \times \cdots) + \sum_{j=l+1}^{s} (\cdots \times \zeta_l^* \times \cdots \times d\xi_j \times \cdots), \tag{6}$$

где многоточия означают невыписанные члены (которые перед ζ_l^* имеют вид ζ_i, а после ζ_l^* имеют вид ξ_i). Рассмотрим слагаемое $\cdots \times d\zeta_j \times \cdots \cdots \times \zeta_l^* \times \cdots$, или, более подробно

$$\zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{j-1} \times d\zeta_j \times \zeta_{j+1} \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \zeta_l^* \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s. \tag{7}$$

Так как каждая из цепей ζ_l, ζ_l^*, ξ_l расположена в $U_{2\delta_\varepsilon}(g_\varepsilon(P_l))$, а цепь $d\zeta_j = d\xi_j + d\eta_j$ расположена в $U_{2\delta_\varepsilon}(\mathrm{bd}\, g_\varepsilon(P_j))$, то пересечение (7) расположено в множестве (1). Так как это множество пусто, то пересечение (7) равно нулю. По тем же соображениям равно нулю и каждое слагаемое второй суммы, стоящей в правой части соотношения (6). Следовательно, формула (6) принимает вид

$$d\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times d\zeta_l^* \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s.$$

Вспоминая соотношение $d\zeta_l^* = \xi_l + \zeta_l + \eta_l$, мы получаем отсюда

$$d\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \xi_l \times \cdots \times \xi_s +$$
$$+ \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_l \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s + \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \eta_l \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s.$$

Последнее слагаемое в правой части здесь равно нулю (по тем же соображениям, что и прежде), и потому

$$d\lambda_l = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_{l-1} \times \xi_l \times \cdots \times \xi_s + \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_l \times \xi_{l+1} \times \cdots \times \xi_s.$$

Напишем эти соотношения для $l = 1, \cdots, s$ и сложим все получившиеся таким образом равенства. Мы получим (учитывая, что дважды встречающиеся слагаемые можно в сумме цепей вычеркивать):

$$d(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) = \xi_1 \times \cdots \times \xi_s + \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_s.$$

Вспомним теперь, что цепь ζ_j расположена в γ-окрестности цепи $\psi_j(\xi_j)$ и, следовательно, в множестве $U_\gamma(\psi_j(g_\varepsilon(P_j)))$, а в силу сделанного предположения, множества (3) и (4) пусты. Следовательно, $\zeta_1 \times \cdots \times \zeta_s = 0$, и потому

$$d(\lambda_1 + \cdots + \lambda_s) = \xi_1 \times \cdots \times \xi_s.$$

Но цепь $\xi_1 \times \cdots \times \xi_s$ представляет собой одну точку (с коэффициентом 1), так как пересечение $P_1 \cap \cdots \cap P_s$ есть точка b. Мы получили, что граница одномерной цепи $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ есть одна точка, между тем как граница любой одномерной цепи должна состоять из четного числа точек. Полученное противоречие показывает, что пересечение (3) непусто.

Пусть x_0 — произвольная точка множества (3). Так как

$$x_0 \in \psi_j(g_\varepsilon P_j)) \subset U_{\varepsilon\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j)) \text{ и } a \overline{\in} U_{\varepsilon\varepsilon}(g_\varepsilon(P_j)),$$

то $x_0 \neq a$. Далее, для любого $j = 1, \cdots, s$ мы имеем

$$x_0 \in \psi_j(g_\varepsilon(P_j)) \subset \psi_j(M_j^*) \subset \Omega_j,$$

и потому $x_0 \in \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s$. Таким образом, точка $x = x_0$ — искомая.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 7.III.1972

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ. Թեորեմ բազմությունների հատման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է թեորեմ բազմությունների հատման մասին, որը հարմար է օգտագործել որպես ապարատ մաթեմատիկական ծրագրավորման, օպտիմալ կառավարման (ինչպես անընդհատ, այնպես էլ դիսկրետ վարիանտներում) և նման ուրիշ տեսություններում էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններ ստանալու համար։

Այդ թեորեմայի ստացման համար հիմք են ծառայում, մի կողմից, ավելի վաղ հեղինակի կողմից գտնված ուռուցիկ կոների սիստեմի բաժանելիության պայմանները, իսկ մյուս կողմից, հատումների տոպոլոգիական տեսությունը։

V. G. BOLTJANSKIJ. *An intersection theorem* (summary)

In this article a theorem on intersection of sets is proved. The theorem asserts, that if convex cones $K_1, \cdots, K_s$, which are in sense „tangent" to the sets $\Omega_1, \cdots, \Omega_s$ in a point $x_0 \in \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s$, do not satisfy the separation condition, then there exists a point $b \neq a$, contained in $\Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_s$. This theorem is a convenient tool, in different extremal problems of mathematical programming, optimal controls etc. The proof of the theorem is founded on separation conditions of convex cones, obtained earlier by the author, and on the Lefschetz's topological intersection theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Лефшец*. Алгебраическая топология, ИЛ, М., 1949.
2. *М. Глезерман* и *Л. Понтрягин*. Пересечения в многообразиях, УМН, II, вып. 1, 1947, 58—155.
3. *M. Canon, C. Cullum* and *E. Polak*. Constrained minimization problems in finite-dimensional spaces, J. SIAM Control, 4, № 3, 1966, 528—547.
4. *В. Г. Болтянский*. Свойство отделимости системы выпуклых конусов, Известия АН Арм.ССР, „Математика", VII, № 4, 1972, 250—257.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

Р. С. ГАЛОЯН

О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КЛАССА $N\{\omega\}$

Введение

1°. В недавнем исследовании М. М. Джрбашяна [1], завершающим построение теории факторизации мероморфных в круге функций, были введены новые классы $N\{\omega\}$ мероморфных в круге $|z|<1$ функций и установлено их параметрическое представление. Характерной особенностью этой теории является применение обобщенных операторов типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$. Оператор $L^{(\omega)}$ ассоциируется с произвольной функцией $\omega(x)$ класса Ω, определяемой условиями:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0, 1)$;

$$2)\qquad \omega(0)=1, \int_0^1 \omega(x)\,dx<+\infty.$$

При этом, если $\omega(x)\in\Omega$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x=0$, то скажем, что $\omega(x)\in\Omega^*$, а если $\omega(x)\in\Omega$ удовлетворяет условию Липшица на каждом отрезке $[0, \Delta]$ $(0<\Delta<1)$ и не возрастает на $[0, 1)$, то отнесем ее к классу $\tilde{\Omega}_*$. Очевидно, что $\Omega\supset\Omega^*\supset\tilde{\Omega}_*$.

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$, $r\in(0,1)$, оператор $L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ определяется таким образом [2]:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}\equiv-\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1\varphi(\tau r)\,dp(\tau)\right\},\ r\in(0, 1),$$

где непрерывная на $[0, 1]$ функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0)=1,\ p(\tau)=\tau\int_\tau^1\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\ \tau\in(0, 1].$$

Как известно, оператор Римана-Лиувилля $D^{-\alpha}\varphi(x)$ $(-1<\alpha<+\infty)$ определяется следующим образом (см., например, [3]): в случае $0<\alpha<+\infty$

$$D^{-\alpha}\varphi(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ x\in(0, 1),$$

причем для $\varphi(x) \in L(0, 1)$ правая часть существует почти всюду и вновь принадлежит $L(0, 1)$; в случае $-1 < \alpha < 0$

$$D^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D^{-(1+\alpha)} \varphi(x), \quad x \in (0, 1),$$

в предположении, что правая часть существует почти всюду; наконец, полагают, что

$$D^0 \varphi(x) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1).$$

Оператор $L^{(\omega)}\{\varphi(x)\}$ представляет собой существенное обобщение оператора Римана-Лиувилля, поскольку имеет место [2]

Теорема А. *В случае, когда*

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha} \quad (-1 < \alpha < +\infty)$$

почти всюду на (0, 1) *справедлива формула*

$$L^{(\omega)}\{\varphi(x)\} \equiv \Gamma(1+\alpha)\, x^{-\alpha} D^{-\alpha} \varphi(x).$$

Класс $N\{\omega\}$ (или $N^*\{\omega\}$, если $\omega(x) \in \Omega^*$) определяется посредством ω-характеристики

$$T_{\omega}(r; F) \equiv m_{\omega}(r; F) + N_{\omega}(r; F)$$

как множество тех мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} T_{\omega}(r; F) < +\infty.$$

Здесь для каждого $\omega(x) \in \Omega^*$

$$m_{\omega}(r; F) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L^{(\omega)}_{(+)} \{\log |F(re^{i\vartheta})|\}\, d\vartheta,$$

$$N_{\omega}(r; F) \equiv \int_0^r \frac{n(t; \infty) - n(0; \infty)}{t}\, \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt + n(0; \infty)(\log r - k_{\omega}),$$

где $n(0; \infty)$ означает кратность возможного полюса функции $F(z)$ в точке $z = 0$, $n(t; \infty)$ — число ее полюсов, лежащих в круге $|z| \leqslant t$ $(0 < t < 1)$ и отличных от $z = 0$, в предположении, что каждый полюс считается столько раз, какова его кратность и, наконец

$$k_{\omega} = \int_0^1 \frac{1 - \omega(x)}{x}\, dx.$$

Отметим, что в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, функции $m_{\omega}(r; F)$, $N_{\omega}(r; F)$ и $T_{\omega}(r; F)$ переходят в известные функции $m(r; F)$, $N(r; F)$ и $T(r; F)$, введенные впервые Р. Неванлинной.

В исследованиях [1, 2] важную роль играют функции

$$C(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k},\ S(z;\ \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=k\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,\ 2,\cdots),$$

аналитичные в круге $|z|<1$, являющиеся аналогами ядер Коши и Шварца для круга. При этом известно [2], что если $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $[0,1)$, то

$$\operatorname{Re}C(z;\ \omega)\geqslant 0,\ \operatorname{Re}S(z;\ \omega)\geqslant 0,\ |z|<1. \tag{2}$$

Известно [1], что если $F(z)\in N\{\omega\}$, а $\{a_\mu\}_1^\infty$ $(0<|a_\mu|\leqslant|a_{\mu+1}|<<1)$ и $\{b_\nu\}_1^\infty$ $(0<|b_\nu|\leqslant|b_{\nu+1}|<1)$ соответственно последовательности ее нулей и полюсов, то

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{|a_\mu|}^1\omega(x)\,dx<+\infty,\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{|b_\nu|}^1\omega(x)\,dx<+\infty. \tag{3}$$

С другой стороны, известно также [1], что для любой последовательности комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной лишь условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^1\omega(x)\,dx<+\infty,$$

существует функция из класса $N\{\omega\}$ с нулями лишь в точках $\{z_k\}_1^\infty$. Важным примером такой функции служит бесконечное произведение

$$B_\omega(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_\omega(z;\ z_k),$$

где

$$A_\omega(z;\ \zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\omega(z;\ \zeta)}, \tag{4}$$

причем

$$W_\omega(z;\ \zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(e^{-i\vartheta}z;\ \omega)\left\{L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{re^{i\vartheta}}{\zeta}\right|\right]\right\}_{r=1}d\vartheta.$$

Основная теорема о параметрическом представлении класса $N^*\{\omega\}$, которая содержит в себе в качестве специальных случаев как теорему Р. Неванлинны относительно класса N, так и теорему относительно N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ [3], гласит [1]:

Класс $N^*\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, допускающих представления вида

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda\varkappa_\omega} z^\lambda \frac{B_\omega(z;\ a_\mu)}{B_\omega(z;\ b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\Psi(\theta)\right\}, \qquad (5)$$

где $B_\omega(z;\ a_\mu)$ *и* $B_\omega(z;\ b_\nu)$ — *произвольные сходящиеся произведения вида* (4), *нули которых подчинены условиям* (3), $\Psi(\theta)$ — *вещественная функция на* $[0, 2\pi]$ *с конечным полным изменением,* $\lambda \gtrless 0$ — *любое целое число,* γ — *любое вещественное число.*

Отметим, что предварительно в монографии [3] были исследованы классы $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$, которые являются специальными случаями классов $N\{\omega\}$, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$.

Определив класс C_ω как множество аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{f(re^{i\theta})\}\geqslant 0,$$

в [1] доказывается также следующая теорема о представлении функций этого класса.

Теорема Б. 1°. *Класс* C_ω *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z)=i\operatorname{Im} f(0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\Psi(\theta) \quad (|z|<1),$$

где $\Psi(\theta)$ — *произвольная неубывающая ограниченная функция на* $[0, 2\pi]$.

2°. *Для заданной функции* $f(z)\in C_\omega$ *соответствующая функция* $\Psi(\theta)$ *может быть определена в виде предела*

$$\Psi(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\theta \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{f(r_n e^{i\varphi})\}\, d\varphi, \quad \theta\in[0, 2\pi],$$

где $\{r_n\}_1^\infty$, $r_n\uparrow 1$ — *некоторая последовательность чисел.*

Приведем для дальнейшего следующую формулу:

$$L^{(\omega)}\{x^k\}=\Delta_k x^k, \quad x\in[0, 1],\ k=0,\ 1,\cdots, \qquad (6)$$

которая справедлива при любом $\omega(x)\in\Omega$ [1].

б) Как известно [4], для функций $F(x)$ класса N, введенного Р. Неванлинной, предел

$$\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})=F(e^{i\theta})$$

существует всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0, 2\pi]$ линейной меры нуль.

Граничные свойства более общих классов $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ исследованы в монографии [3] и в статье [5].

В исследовании [1], содержащем результаты исчерпывающего характера для теории факторизации мероморфных функций в круге, приведены также и граничные теоремы для классов $N\{\omega\}$.

Далее, в работах [6, 7] были получены результаты в терминах ω-емкости о граничных свойствах подклассов мероморфных функций ограниченного вида, а именно, классов $N\{\omega\} \subset N$, где функция $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0, 1)$, причем $\lim\limits_{x \to 1-0} \omega(x) = +\infty$.

В § 1 настоящей статьи приводится усиление некоторых граничных теорем для классов $N^*\{\omega\}$, доказанных в [1]. Во-первых, после вспомогательной леммы доказывается (теорема 1), что предел

$$\lim_{r \to 1-0} L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\theta}; z_k)\}$$

существует почти везде на $[0, 2\pi]$. Этот факт приводит к более общему утверждению (теорема 2):

Если $F(z) \in N\{\omega\}$, *где* $\omega(x) \in \overline{\Omega}_*$, *то почти для всех* $\theta \in [0,2\pi]$ *существует конечный предел*

$$\lim_{r \to 1-0} L^{(\omega)}\{F(re^{i\theta})\}.$$

В заключении параграфа приводится приложение основной теоремы 2 к мероморфным в круге $|z|<1$ функциям конечного порядка.

В § 2 приводится построение произведения $\pi_\omega(z; z_k)$, ассоциированного с произвольной функцией $\omega(x) \in \Omega$ и с произвольной последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k| \leqslant |z_{k+1}|<1)$, подчиненной условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty.$$

Произведение $\pi_\omega(z; z_k)$ является обобщением произведения М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z; z_k)$ $(0<\alpha<+\infty)$, введенного в его давней работе [8]. Доказывается, что при любом $\omega(x) \in \Omega$ $\pi_\omega(z; z_k) \in N\{\omega\}$ (теорема 5).

В конце параграфа приводится ряд следствий, касающихся как самой функции $\pi_\omega(z; z_k)$, так и первоначальной функции $\pi_\alpha(z; z_k)$.

В § 3, аналогично факторизации функции $B_\omega(z; z_k)$ [1], с помощью основной леммы доказывается факторизационная теорема для функции $\pi_\omega(z; z_k)$ и одно следствие о сравнении $|\pi_\omega(z; z_k)|$ и $|B(z; z_k)|$, где $B(z; z_k)$—функция Бляшке.

§ 1. Граничные свойства мероморфных функций класса $N\{\omega\} \supset N$

Известно следующее граничное свойство функций класса $N^*\{\omega\}$ (см. [1], теоремы 5.9 и 5.10), которое является существенным обобщением свойств класса N мероморфных функций ограниченного вида.

Теорема. *Пусть* $\omega(x) \in \overline{\Omega}_*$. *Тогда*

1°. *Для любой функции* $F(z) \in N\{\omega\}$ *почти для всех* $\vartheta \in [0, 2\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r \to 1-0} L^{(\omega)} \{\log |F(re^{i\vartheta})|\} = \mu(\vartheta),$$

где $\mu(\vartheta)$*—производная некоторой функции ограниченного изменения на* $[0, 2\pi]$.

2°. *Почти для всех* $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{r \to 1-0} L^{(\omega)} \{\log |B_\omega(re^{i\vartheta};\ z_k)|\} = 0.$$

В настоящем параграфе мы приводим усиление утверждений этой теоремы.

а). Сначала введем одно определение и, следуя схеме Ч. Танака [9], рассмотревшем лишь специальный случай, докажем одну лемму.

Для данной последовательности комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$, $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ единичный круг $D = D\{z;\ |z| < 1\}$, разрезанный вдоль отрезков

$$l_k:\ l_k = \{z;\ \arg z = \arg z_k,\ |z_k| \leqslant |z| \leqslant 1\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

обозначим через $D\{z_k\}$, т. е.

$$D\{z_k\} = D - \bigcup_{k=1}^{\infty} l_k.$$

При этом точки этих разрезов, как обычно, будут рассматриваться как две различные достижимые точки границы области $D\{z_k\}$.

Лемма 1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty,$$

где $\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_\omega$. *Пусть, далее,* $z = f(w)$ $(f(0) = 0)$ *— аналитическая функция, конформно отображающая единичный круг* $|w| < 1$ *на* $D\{z_k\}$.

Обозначим через E_k *замкнутую дугу на* $|w| = 1$, *соответствующую радиальному разрезу* l_k, *а через* $e = \bigcup_k e_k$ *— дополнительное множество для* $\bigcup_k E_k$ *относительно окружности* $|w| = 1$.

Справедливы следующие утверждения:

1°. $\operatorname{mes} e > 0$;

2°. *Каждому множеству меры нуль на* e *соответствует множество меры нуль на* $|z| = 1$ *и наоборот;*

3°. *Почти везде на* e *для любого сектора*

$$A = \left\{w;\ |\arg(w - w_0) - \vartheta| \leqslant \theta,\quad \left(\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}\right),\ |w - w_0| < \delta\right\}$$

с вершиной $w_0 = e^{i\theta} \in e$, *можно выбрать сектор*

$$B = \left\{ z;\ |\arg(z - z_0) - \varphi| < \theta' < \frac{\pi}{2},\ |z - z_0| < \delta' \right\}$$

с вершиной $f(w_0) = z_0 = e^{i\varphi}$, *прообраз которого содержится в* A.

Доказательство. Очевидно, что граница $\partial D\{z_k\}$ области $D\{z_k\}$ имеет меру

$$\operatorname{mes} \partial D\{z_k\} = 2\pi + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|).$$

Отдельно рассмотрим два случая: когда эта мера бесконечна и когда она конечна. Сперва рассмотрим случай, когда граница $D\{z_k\}$ бесконечна, т. е. когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) = +\infty.$$

Определим последовательность $\{z_k^*\}_1^{\infty}$ следующим образом:

$$z_k^* = r_k e^{i \arg z_k}, \text{ где } r_k = 1 - \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Граница $\partial D\{z_k^*\}$ области $D\{z_k^*\}$ уже имеет конечную меру

$$\operatorname{mes} \partial D\{z_k^*\} = 2\pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Пусть $E_k^* \subset E_k$ — замкнутая дуга на $|w| = 1$, соответствующая отрезку

$$m_k = \{z;\ \arg z = \arg z_k,\ |z_k| \leqslant |z| \leqslant r_k\}$$

при обратном отображении $w = f^{-1}(z)$, а e^* — дополнительное множество для $\bigcup_k E_k^*$ относительно $|w| = 1$, т. е. e^* есть прообраз для $\partial D\{z_k^*\}$, причем e^*, как и e, будучи открытым множеством, может быть представлено в виде счетной суммы интервалов, т. е. $e^* = \bigcup_k e_k^*$, где $e_k^* \supset e_k$.

Введем далее в рассмотрение множество

$$e^*(r) = \{w,\ e^{i \arg w} \in e^*,\ |w| = r\},$$

образом которого при отображении $z = f(w)$ пусть будет множество

$$E(r) = \{z;\ z = f(re^{i\theta}),\ e^{i\theta} \in e^*,\ r = \text{const}\},$$

при этом, ввиду определения самого множества e^*,

$$\lim_{r \to 1-0} E(r) = \partial D\{z_k\} - \bigcup_k m_k = \partial D\{z_k^*\}. \tag{1.2}$$

Интеграл

$$J(r) = \int\limits_{re^{i\vartheta} \in e^*(r)} |f'(re^{i\vartheta})|\, r d\vartheta$$

дает нам конечную меру множества $E(r)$, т. е. $J(r) = \mathrm{mes}\, E(r)$ (см., например, [10], стр. 174—175), причем по (1.2)

$$\lim_{r \to 1-0} J(r) = \mathrm{mes}\, \partial D\, \{z_k^*\}.$$

Отсюда и из (1.1) следует, что

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{w \in e^*(r)} |f'(w)|\,|dw| \leqslant M_f < +\infty, \tag{1.3}$$

где M_f — некоторая постоянная.

Пусть далее

$$\begin{aligned} e_k &= \{e^{i\vartheta};\ \alpha_k < \vartheta < \beta_k\} \\ e_k^* &= \{e^{i\vartheta};\ \alpha_k^* < \vartheta < \beta_k^*\} \end{aligned} \quad (\alpha_k^* < \alpha_k < \vartheta < \beta_k < \beta_k^*).$$

Покажем, что можно выбрать $\widetilde{\alpha}_k$ $(\alpha_k^* < \widetilde{\alpha}_k < \alpha_k)$, $\widetilde{\beta}_k$ $(\beta_k < \widetilde{\beta}_k < \beta_k^*)$ такие, что

$$\int\limits_0^1 |f'(re^{i\widetilde{\alpha}_k})|\, dr < +\infty, \int\limits_0^1 |f'(re^{i\widetilde{\beta}_k})|\, dr < +\infty. \tag{1.4}$$

В самом деле, в силу (1.3)

$$r \int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} |f'(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant M_f \ (0 \leqslant r < 1), \tag{1.5}$$

и поэтому конечен интеграл

$$\int\limits_0^1 r dr \int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} |f'(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta.$$

Но тогда, по теореме Фубини, конечен также интеграл

$$\int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} d\vartheta \int\limits_0^1 |f'(re^{i\vartheta})|\, r dr = \int\limits_0^1 r dr \int\limits_{e^{i\vartheta} \in e_k^*} |f'(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant M_f,$$

и следовательно интеграл

$$\int\limits_0^1 |f'(re^{i\vartheta})|\, r dr$$

конечен почти везде на e_k^*. Отсюда и вытекает существование таких $\widetilde{\alpha}_k$ $(\alpha_k^* < \widetilde{\alpha}_k < \alpha_k)$ и $\widetilde{\beta}_k$ $(\beta_k < \widetilde{\beta}_k < \beta_k^*)$, для которых интегралы (1.4) конечны.

Определив сектор D_k следующим образом:

$$D_k=\{w;\ \tilde{\alpha}_k\leqslant\arg w\leqslant\tilde{\beta}_k,\ |w|\leqslant 1\},$$

из (1.4) и (1.5) получим, что

$$\int_0^{\rho}|f'(re^{i\tilde{\alpha}_k})|\,dr+\int_{\tilde{\alpha}_k<\theta<\tilde{\beta}_k}|f'(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\theta+\int_0^{\rho}|f'(re^{i\tilde{\beta}_k})|\,dr<+\infty$$

для любого ρ $(0<\rho<1)$. Эта оценка означает, что $f'(w)$ принадлежит известному классу E_1 в D_k (см. [10], стр. 205). Следовательно, по обобщенной теореме Ф. и М. Рисса [10], $f'(w)$, вместе с ней и $f(w)$, будут абсолютно непрерывными функциями на границе сектора D_k, и, в частности, на e_k. Отсюда и следует, что любому множеству $\varepsilon_k\subset e_k$, $\operatorname{mes}\varepsilon_k=0$, соответствует некоторое множество меры нуль на $|z|=1$.

Обратно, по обобщенной теореме Левнера [11], e есть борелево множество, следовательно измеримо, и каждому множеству меры нуль на $|z|=1$ соответствует множество меры нуль на e, так что утверждения 1° и 2° установлены.

Далее, заметив, что для любой точки $w_0\in e$, $\arg(f(w)-f(w_0))$ равномерно ограничен в $|w|<1$, по теореме Макмиллана [12] заключаем, что существует множество $e_0\in e$, $\operatorname{mes} e_0=0$ такое, что если $w_0\in e-e_0$, то отношение

$$\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0}$$

имеет ненулевой угловой предел в точке w_0.

Таким образом, при отображении $z=f(w)$ в точках $w_0\in e-e_0$ имеется консерватизм углов, и так как сектор A имеет раствор $2\theta>\dfrac{2\pi}{3}$, то ее образ заведомо содержит некоторый сектор A^* с вершиной в точке $z_0=f(w_0)$ и раствор больше, чем $\dfrac{\pi}{2}$. Отсюда и следует утверждение 3°.

Наконец, если

$$\operatorname{mes}\partial D\{z_k\}<+\infty,$$

т. е. $\partial D\{z_k\}$ имеет конечную меру, то все наши построения и заключения останутся в силе просто для самой области $D\{z_k\}$.

б). Докажем теперь теорему.

Теорема 1. *Если $\omega(x)\in\Omega_*$, то для любого сходящегося произведения $B_\omega(z;z_k)$ почти для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to 1-0}L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\theta};z_k)\},\quad re^{i\theta}\in D\{z_k\}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Известно, что функция

$$u_\omega(re^{i\theta},\zeta)\equiv L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(re^{i\theta};\zeta)|\}$$

при любом ζ $(0<|\zeta|<1)$ допускает представление

$$u_\omega(re^{i\vartheta};\ \zeta) = L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\vartheta}}{\zeta}\right|\right\} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\vartheta-\varphi;\ r)\ \times$$

$$\times\ L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\}_{r=1} d\varphi, \tag{1.7}$$

$$\vartheta\in[0,\ 2\pi],\ 0\leqslant r<1,$$

где $P(\vartheta-\varphi;\ r)$—ядро Пуассона, причем если $\omega(x)\in\widetilde{\Omega}_*$, то $u_\omega(z;\zeta)\leqslant 0$ $(|z|<1,\ |\zeta|\leqslant 1)$(см. [1], лемму 3.2).

Известно также, что функция

$$L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{r\,e^{i\vartheta}}{z_k}\right|\right\}$$

при $\omega(x)\in\widetilde{\Omega}_*$ гармонична в области $D-l_k$ (см. [1], лемму 1.7).

Таким образом, на основании представления (1.7) заключаем, что функция $u_\omega(z;\ z_k)$ гармонична в области $D-l_k$.

Далее, известно (см. [1], теорему 2.2), что

$$L^{(\omega)}\{\log|B_\omega(re^{i\vartheta};\ z_k)|\} = \sum_{k=1}^{\infty} u_\omega(z;\ z_k)\quad (|z|<1), \tag{1.8}$$

причем это разложение равномерно сходится при $|z|\leqslant\rho$ $(0<\rho<1)$, если отделить лишь конечное число его начальных членов.

Из сказанного выше, пользуясь разложением (1.8), заключаем, что функция

$$U_\omega(re^{i\varphi})\equiv L^{(\omega)}\{\log|B_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}$$

также гармонична в области $D\{z_k\}$, при этом

$$U_\omega(re^{i\varphi})\leqslant 0,\ re^{i\varphi}\in D\{z_k\}.$$

Поэтому функция

$$\varphi(z) = \exp\{L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)\}\}$$

будет аналитичной в области $D\{z_k\}$, причем

$$|\varphi(z)|\leqslant 1,\ z\in D\{z_k\}.$$

Пусть далее $z=f(w)$ $(f(0)=0)$ функция, конформно отображающая единичный круг $|w|<1$ на $D\{z_k\}$. Тогда функция $\varphi^*(w)\equiv\varphi(f(w))$ также будет аналитичной в круге $|w|<1$ и

$$|\varphi^*(w)|\leqslant 1\quad(|w|<1).$$

Отсюда, по теореме Фату, конечный предел

$$\lim_{\rho\to 1-0}\varphi^*(\rho e^{i\vartheta})$$

существует почти для всех $\vartheta\in[0,\ 2\pi]$. Поэтому, пользуясь леммой 1, заключаем, что почти для всех $\vartheta\in[0,\ 2\pi]$ предел

$$\lim_{r\to 1-0} \varphi(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} \exp\{L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\theta}; z_k)\}\} \quad (re^{i\theta} \in D\{z_k\})$$

существует. Отсюда и вытекает утверждение (1.6) теоремы.

в). Теперь установим общую теорему.

Теорема 2. *Если $F(z) \in N\{\omega\}$, где $\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_*$, то почти для всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$ существует конечный предел*

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{\log F(re^{i\theta})\}, \quad re^{i\theta} \in D\{a_\mu; b_\nu\},$$

где $D\{a_\mu; b_\nu\} = D\{a_\mu\} \cap D\{b_\nu\}$, а $\{a_\mu\}_1^\infty$ и $\{b_\nu\}_1^\infty$ — соответственно последовательности нулей и полюсов функции $F(z)$ в круге $|z| < 1$.

Доказательство. Известно (см. [1], леммы 1.1 и 3.2), что

$$L^{(\omega)}\{\log |e^{i\gamma + \lambda k_\omega}(re^{i\varphi})^\lambda|\} = \lambda \log r, \tag{1.9}$$

$$L^{(\omega)}\{S(re^{i\theta}; \omega)\} = S(re^{i\theta}; 1) = \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}. \tag{1.10}$$

Пользуясь представлением (5), в силу (1.9) и (1.10), для функции $F(z) \in N\{\omega\}$ $(\omega(x) \in \widetilde{\Omega}_*)$ получим следующую формулу:

$$L^{(\omega)}\{\log F(re^{i\varphi})\} = \lambda \log r + L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi}; a_\mu)\} -$$

$$- L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi}; b_\nu)\} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}\, d\Psi(\vartheta), \quad re^{i\varphi} \in D\{a_\mu; b_\nu\}, \tag{1.11}$$

где $\lambda \gtrless 0$ — некоторое целое число, а $\Psi(\vartheta)$ — произвольная функция на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением.

Но согласно теореме 1, почти для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ существуют пределы

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi}; a_\mu)\} \quad \text{и} \quad \lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{\log B_\omega(re^{i\varphi}; b_\nu)\}$$

в соответствующих областях $D\{a_\mu\}$ и $D\{b_\nu\}$. Последнее слагаемое в (1.11) также имеет конечный предел почти для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}\, d\Psi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Psi(\vartheta) + \frac{re^{i\varphi}}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Psi(\vartheta)}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}},$$

а для интеграла типа Коши-Стильтьеса этот факт известен [10].

г). В теореме 4.3 работы [1], в частности, содержится следующее утверждение.

Теорема (М. М. Джрбашян). 1°. *Если для функции $F(z)$*

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, T(r; F)\, dr < +\infty \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

где $T(r;\ F)$ — *характеристика Неванлинны, то* $F(z) \in N_\alpha$.

2°. *Если мероморфная функция* $F(z)$ *имеет порядок* $\rho \geqslant 0$, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}} \frac{\log T(r;\ F)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \rho,$$

то $F(z) \in N_\alpha$ *при любом* $\alpha > \rho$.

Из утверждения 2° этой теоремы и из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. *Если мероморфная функция* $F(z)$ *имеет порядок* $\rho \geqslant 0$, *то при любом* $\alpha > \rho$ *предел*

$$\lim_{r\to 1-0} D^{-\alpha}\{\log F(re^{i\vartheta})\},\ re^{i\vartheta} \in D\{a_\mu;\ b_\nu\} \qquad (1.12)$$

существует почти для всех $\vartheta \in [0,\ 2\pi]$.

Теорема 3 существенно улучшает теорему Ч. Танака [9], в которой утверждается существование почти всюду предела (1.12) лишь при $\alpha = [\rho] + 2$.

§ 2. Построение и свойства функции $\pi_\omega(z;\ z_k)$

а). В работах [8, 13] впервые, путем существенного обобщения формулы Иенсена-Неванлинны, была установлена факторизационная теорема для мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, T(r;\ F)\, dr < +\infty \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

где $T(r;\ F)$ — характеристика Неванлинны. На этом пути был открыт новый класс функций $\pi_\alpha(z;\ z_k)$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$, аналитических в круге $|z| < 1$, с нулями в точках произвольной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \ \ (0 < \alpha < +\infty). \qquad (2.1)$$

Функции эти при условии (2.1) определялись таким образом:

$$\pi_\alpha(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right) e^{-U_\alpha(z;\ z_k)},$$

где

$$U_\alpha(z;\ \zeta) = \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\, dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+n)}{\Gamma(2+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \int_0^{|\zeta|^2} (1-t)^{\alpha+1}\, t^{n-1}\, dt,$$

причем условие $0 < \alpha < +\infty$ без каких-либо изменений можно заменить условием $-1 < \alpha < +\infty$.

При этом было установлено, что

$$\pi_0(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - z\bar{z}_k} \frac{|z_k|^2}{z_k} = C \cdot B(z; z_k),$$

где

$$C = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|,$$

а $B(z; z_k)$—функция Бляшке, и что при любом целом $\alpha = p \geqslant 1$

$$\pi_p(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1 - |z_k|^2}{1 - z\bar{z}_k}\right) \exp\left\{\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - z\bar{z}_k}\right)^n\right\}.$$

Таким образом, произведение $\pi_p(z; z_k)$ имеет такую же структуру, что и бесконечное произведение Вейерштрасса.

Следуя идее и методу М. М. Джрбашяна, развитыми как в работах [8, 13], так и в новых исследованиях [3, 1], в настоящем параграфе мы строим обобщение произведения типа $\pi_\alpha(z; z_k)$—произведение $\pi_\omega(z; z_k)$. Эти произведения ассоциируются с произвольной функцией $\omega(x) \in \Omega$ и имеют нули лишь в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Основная цель параграфа—исследование свойств, в том числе и граничных свойств, функций $\pi_\omega(z; z_k)$, и, в частности, функций $\pi_\alpha(z; z_k)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$.

б). Определим функцию

$$\tilde{A}_\omega(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{-\tilde{U}_\omega(z; \zeta)} \quad (|z| < 1,\ 0 < |\zeta| < 1), \tag{2.2}$$

где

$$\tilde{U}_\omega(z; \zeta) = \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \frac{1}{\Delta_k} \int_0^{|\zeta|^2} \omega(x)\, x^{k-1}\,dx, \tag{2.3}$$

$\omega(x) \in \Omega$ и

$$\Delta_k = k \int_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\,dx \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.4}$$

Теорема 4. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\,dx < +\infty, \tag{2.5}$$

где $\omega(x)$ — *некоторая функция из класса* Ω. *Тогда бесконечное произведение*

$$\pi_\omega(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_\omega(z; z_k) \tag{2.6}$$

абсолютно и равномерно сходится в каждой замкнутой части единичного круга, представляя аналитическую функцию, обращающуюся в нуль лишь на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Замечая, что по (2.4)

$$\int_0^{|\zeta|^2} \omega(t)\, t^{k-1}\, dt = \frac{\Delta_k}{k} - \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(t)\, t^{k-1}\, dt,$$

из (2.3) при условии $0<|z|<|\zeta|<1$ получим

$$\widetilde{U}_\infty(z;\zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt - \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{z}{\Delta_k}\right)^k \frac{1}{\Delta_k}\left(\frac{\Delta_k}{k} - \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(t)\, t^{k-1}\, dt\right) =$$

$$= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \frac{1}{\Delta_k} \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(t)\, t^{k-1}\, dt. \tag{2.7}$$

Ввиду разложения (1) и того обстоятельства, что

$$\left|\frac{zt}{\zeta}\right| < \left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1 \text{ при } |t|<1,\ |z|<|\zeta|,$$

из (2.7) следует, что

$$\widetilde{U}_\infty(z;\zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \int_{|\zeta|^2}^1 \left[C\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right) - 1\right] \frac{\omega(t)}{t}\, dt =$$

$$= \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) + \Omega(z;\zeta), \tag{2.8}$$

где

$$\Omega(z;\zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 C\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right) \frac{\omega(t)}{t}\, dt, \tag{2.9}$$

причем очевидно, что

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0} \Omega(z;\zeta) = 0. \tag{2.10}$$

Найдем асимптотическую формулу для функции $\Omega(z;\zeta)$ при $|\zeta|\to 1-0$. Заметим, что из (2.9) интегрированием по частям следует:

$$\Omega(z;\zeta) = C(z\overline{\zeta};\ \omega) \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \frac{z}{\zeta} \int_{|\zeta|^2}^1 C'\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right)\left(\int_t^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx\right) dt. \tag{2.11}$$

Но из (1) имеем, что

$$C'(z;\omega) = \sum_{k=1}^\infty k\frac{z^{k-1}}{\Delta_k},$$

и, следовательно

$$\max_{|z|<r} |C'(z;\ \omega)| = C'(r;\ \omega). \tag{2.12}$$

Поэтому, при $|z| \leqslant r < |\zeta| < 1$ и $|\zeta|^2 \leqslant t \leqslant 1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{z}{\zeta} C'\left(\frac{zt}{\zeta};\ \omega\right)\right| \leqslant \frac{r}{|\zeta|} C'\left(\frac{r}{|\zeta|};\ \omega\right). \tag{2.13}$$

Далее, легко видеть, что

$$\int_{|\zeta|^2}^{1}\left(\int_{t}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right)dt \leqslant (1-|\zeta|^2)\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx. \tag{2.14}$$

Теперь из (2.11), (2.13) и (2.14) вытекает следующая асимптотическая формула для функции $\Omega(z;\ \zeta)$:

$$\Omega(z;\ \zeta) = C(z\bar{\zeta};\ \omega)\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt + O\left\{(1-|\zeta|^2)\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right\}\ (|\zeta|\to 1-0).$$

Из этой формулы следует предельное соотношение ($\zeta = |\zeta|\,e^{i\vartheta}$)

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0} \Omega(z;\ \zeta)\left(\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt\right)^{-1} = C(ze^{-i\vartheta};\ \omega).$$

Отсюда, ввиду (2.10), имеем также

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0}(1-e^{-\Omega(z;\ \zeta)})\left(\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt\right)^{-1} = C(ze^{-i\vartheta};\ \omega). \tag{2.15}$$

Заметим теперь, что согласно (2.8)

$$\widetilde{A}_\omega(z;\ \zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-\widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)} = e^{-\Omega(z;\ \zeta)}\ (|z| < |\zeta| < 1). \tag{2.16}$$

Далее, как и в (2.12), ввиду положительности коэффициентов в разложении (1), получим, что

$$\max_{|z|<r} |C(z;\ \omega)| = C(r;\ \omega). \tag{2.17}$$

Теперь из формул (2.15), (2.16) и (2.17) следует, что можно выбрать число $0 < r_1 < 1$ так, чтобы

$$|1-\widetilde{A}_\omega(z;\ \zeta)| < 2C(r;\ \omega)\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt \quad (|z| \leqslant r < r_1 < |\zeta| < 1).$$

Отсюда вытекает, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}|1-|\widetilde{A}_\omega(z;\ z_k)|| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|1-\widetilde{A}_\omega(z;\ z_k)| \quad (|z| \leqslant r) \tag{2.18}$$

сходятся, если сходится ряд (2.5). Убедимся, что условие (2.5) также необходимо. В самом деле, из (2.15) в частности получим, что при $z=0$

$$\lim_{|\zeta|\to 1-0} [1-\tilde{A}_\omega(0;\ \zeta)] \left(\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\, dx\right)^{-1} = C(0;\ \omega)=1,$$

и поэтому можно выбрать $r_2<|\zeta|<1$ так, чтобы

$$|1-\tilde{A}_\omega(0;\ \zeta)| > \frac{1}{2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Таким образом, условие (2.5) необходимо и достаточно для сходимости обоих рядов (2.18), причем сходимость этих рядов будет равномерной в любом круге $|z|\leqslant r<1$. Наконец, применяя известный признак о сходимости бесконечных произведений, приходим к утверждению теоремы относительно произведения $\pi_\omega(z;\ z_k)$.

в). Во введении статьи мы привели определение класса $N\{\omega\}$ мероморфных в круге $|z|<1$ функций.

Докажем теорему.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\omega(x)\in\Omega$ *и* $\pi_\omega(z;\ z_k)$*—любое сходящееся произведение. Тогда имеет место включение*

$$\pi_\omega(z;\ z_k)\in N\{\omega\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $\pi_\omega(z;\ z_k)$ аналитична в единичном круге, то согласно определению функции $T_\omega(r;\ F)$ будем иметь

$$T_\omega(r;\ F)\equiv m_\omega(r;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} L^{(\omega)}_{(+)}\{\log|\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\}\, d\varphi. \tag{2.19}$$

По формуле (2.6)

$$\pi_\omega(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\tilde{A}_\omega(z;\ z_k),$$

поэтому справедливо разложение

$$\log|\pi_\omega(z;\ z_k)|=\sum_{k=1}^{\infty}\log|\tilde{A}_\omega(z;\ z_k)|, \tag{2.20}$$

причем из сходимости рядов (2.18) и из того, что при $|\zeta|\to 1-0$

$$\log|\tilde{A}_\omega(z;\ \zeta)|\sim|\tilde{A}_\omega(z;\ \zeta)|-1,$$

следует, что разложение (2.20) равномерно сходится в каждом круге $|z|\leqslant r<1$, если не учесть конечного числа его начальных членов.

К обеим частям разложения (2.20) можно применить оператор $L^{(\omega)}$, и полученное таким образом разложение

$$L^{(\omega)}\{\log|\pi_\omega(re^{i\varphi};\ z_k)|\} = \sum_{k=1}^{\infty} L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(z;\ z_k)|\} \tag{2.21}$$

также абсолютно и равномерно сходится при $|re^{i\varphi}|\leqslant\rho<1$, если отделить лишь конечное число его начальных членов. Отметим, что в ходе доказательства теоремы 1 была отмечена справедливость аналогичного утверждения для функции $Б_\omega(z;\ z_k)$. При этом, доказательство этого утверждения можно полностью перенести на наш случай, и поэтому его доказательство мы опускаем.

Далее, по формуле (2.2)

$$L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\} = L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{|\zeta|}\right|\right\} - \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\}. \tag{2.22}$$

Известно, что (см. [1], лемму 1.2)

$$L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\} = -\operatorname{Re}\int_0^1 \frac{re^{i\varphi}\,\omega(x)}{\zeta - xre^{i\varphi}}\,dx \quad (0<|\zeta|<1,\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ \varphi\in[0,2\pi]) \tag{2.23}$$

в предположении, что $\varphi\neq\arg\zeta$ при $|\zeta|\leqslant r\leqslant 1$.

Далее, ввиду (6), из (2.3) получим

$$L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|^2} \omega(t)\,t^{k-1}\,dt =$$

$$= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \int_0^{|\zeta|^2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right)^k\right\}\frac{\omega(t)}{t}\,dt. \tag{2.24}$$

Так как

$$\left|\frac{tr\,e^{i\varphi}}{\zeta}\right|<1 \text{ при } t<|\zeta|^2<|\zeta|<1,$$

то (2.24) можно записать в следующем виде:

$$L^{(\omega)}\{\widetilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \int_0^{|\zeta|^2}\frac{re^{i\varphi}\,\omega(t)}{\zeta - tre^{i\varphi}}\,dt. \tag{2.25}$$

Теперь, с учетом формул (2.23) и (2.25), из (2.22) приходим к представлению

$$L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)|\} = -\operatorname{Re}\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\zeta}{\zeta - t\,re^{i\varphi}}\cdot\frac{\omega(t)}{t}\,dt.$$

Обозначая

$$V_\omega^{(1)}(re^{i\varphi};\ \zeta) \equiv -\int_{|\zeta|^2}\left(1-\frac{tr}{|\zeta|}\right)\left|1-\frac{t\,re^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\frac{\omega(t)}{t}\,dt, \tag{2.26}$$

$$V_{\infty}^{(2)}(re^{i\varphi};\ \zeta)\equiv 2\,\frac{r}{|\zeta|}\,\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\left|1-\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\omega(t)\,dt, \tag{2.27}$$

очевидно имеем

$$L^{(\omega)}\,[\log|\tilde{A}_{\infty}(re^{i\varphi};\ \zeta)|]\equiv V_{\infty}^{(1)}(re^{i\varphi};\ \zeta)+V_{\infty}^{(2)}(re^{i\varphi};\ \zeta). \tag{2.28}$$

Из (2.26) для любого r $(0<r<1)$, ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$ получим оценку

$$|V_{\infty}^{(1)}(re^{i\varphi};\ \zeta)|\leqslant\frac{1}{r_0}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\left|1-\frac{tr}{|\zeta|}\right|\cdot\left|1-\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\omega(t)\,dt. \tag{2.29}$$

Интегрируя (2.29) по φ и пользуясь значением интеграла Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|1-\frac{tre^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}d\varphi=\left|1-\frac{t^2r^2}{|\zeta|^2}\right|^{-1},$$

приходим к неравенству

$$\int\limits_{0}^{2\pi}|V_{\infty}^{(1)}(re^{i\varphi};\ \zeta)|\,d\varphi\leqslant\frac{2\pi}{r_0}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\left|1-\frac{tr}{|\zeta|}\right|\cdot\left|1-\frac{t^2r^2}{|\zeta|^2}\right|^{-1}\omega(t)\,dt<\frac{2\pi}{r_0}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt. \tag{2.30}$$

Заметим далее, что имеют место оценки (см. [1], формулы 2.18 и 2.19)

$$\min_{|\zeta|^2<t<1}\left|\frac{\zeta}{r}-te^{i\varphi}\right|\geqslant\begin{cases}\dfrac{2|\zeta|}{\pi r}\,|\varphi-\arg\zeta|, & \text{при } |\varphi-\arg\zeta|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] \dfrac{|\zeta|}{r}, & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\leqslant|\varphi-\arg\zeta|\leqslant\pi,\end{cases}$$

$$\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}\leqslant\begin{cases}\dfrac{(\varphi-\arg\zeta)^2}{4}, & \text{при } |\varphi-\arg\zeta|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] 1, & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\leqslant|\varphi-\arg\zeta|\leqslant\pi,\end{cases}$$

в справедливости которых нетрудно убедиться.

Отсюда легко получим, что при любом r $(0<r<1)$, ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$, t $(|\zeta|^2\leqslant t\leqslant 1)$ и $\varphi\in[0,\ 2\pi]$

$$\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}\left|1-\frac{t\,re^{i\varphi}}{\zeta}\right|^{-2}\leqslant\frac{\pi}{r_0}.$$

Из (2.27), ввиду этой оценки, следует

$$|V_{\infty}^{(2)}(re^{i\varphi};\ \zeta)|\leqslant\frac{2\pi}{r_0^2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,dt \tag{2.31}$$

при любом r $(0<r<1)$ и ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$. Интегрируя (2.31) по φ, приходим к неравенству

$$\int_0^{2\pi}|V_\infty^{(2)}(re^{i\varphi};\ \zeta)|\,d\varphi\leqslant\frac{4\pi}{r_0^2}\int_{|\zeta|^2}^1\omega(t)\,dt. \tag{2.32}$$

На основании (2.30) и (2.32), из тождества (2.28) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\infty(re^{i\varphi};\ \zeta)|\}|\,d\varphi\leqslant C(r_0)\int_{|\zeta|^2}^1\omega(t)\,dt\quad(0<r<1), \tag{2.33}$$

где $C(r_0)$ — некоторая постоянная, не зависящая от r.

Теперь, с учетом разложения (2.21) и оценки (2.33), из (2.19) получим

$$T_\infty(r;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\{\log|\pi_\infty(re^{i\varphi};\ z_k)|\}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{\log|\pi_\infty(re^{i\varphi};\ z_k)|\}|\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{\log|\widetilde{A}_\infty(re^{i\varphi};\ z_k)|\}|\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant C(r_0)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|^2}^1\omega(t)\,dt<+\infty$$

при любом r $(0<r<1)$.

Таким образом

$$\sup_{0<r<1}T_\omega(r;\ F)<+\infty,$$

и тем самым теорема доказана.

Приведем некоторые следствия из этой теоремы и теоремы 2.

Следствие 1. *Предел*

$$\lim_{r\to1-0}L^{(\omega)}\{\log\pi_\infty(re^{i\varphi};\ z_k)\},\quad re^{i\varphi}\in D\{z_k\},$$

где $\omega(x)\in\widetilde{\Omega}_*$, *существует почти для всех* $\varphi\in[0,2\pi]$.

Следствие 2. *Для любого* α $(0\leqslant\alpha<+\infty)$ *предел*

$$\lim_{r\to1-0}D^{-\alpha}\{\log\pi_\alpha(re^{i\varphi};\ z_k)\},\quad re^{i\varphi}\in D\{z_k\},$$

существует почти для всех $\varphi\in[0,\ 2\pi]$.

Результат этого следствия является усилением теоремы Ч. Танака [9], где при $\alpha=p\geqslant1$ целом утверждалось лишь существование почти для всех $\varphi\in[0,\ 2\pi]$ предела

$$\lim_{r\to1-0}D^{-(p+1)}\{\log\pi_p(re^{i\varphi};\ z_k)\}.$$

В заключение отметим следующее.

1°. При $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ в представлении (5) функцию $B_{\omega}(z; z_k)$ можно заменить функцией $\pi_{\omega}(z; z_k)$.

2°. Если $\omega(x) \in \Omega$, причем $\omega(x)$ не убывает на $[0, 1)$, то аналогичную замену функции $B_{\omega}(z; z_k)$ на $\pi_{\omega}(z; z_k)$ можно также совершить.

3°. В общем случае, когда $\omega(x)$—произвольная функция из класса Ω, эту замену можно осуществить лишь в случае, когда последовательности $\{a_{\mu}\}_1^{\infty}$ и $\{b_{\nu}\}_1^{\infty}$ нулей и полюсов функции $F(z) \in N^*\{\omega\}$ удовлетворяют дополнительному условию

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{|a_{\mu}|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty, \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{|b_{\nu}|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty.$$

§ 3. Факторизация функции $\pi_{\omega}(z; z_k)$

a). Известна следующая теорема о факторизации функции $B_{\omega}(z; z_k)$ (см. [1], теорему 2.3).

Теорема. *Пусть* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ — *некоторая последовательность комплексных чисел, лежащих в круге* $|z| < 1$.

1°. *Если функция* $\omega(x) \in \Omega$ *не убывает на* $[0, 1)$ *и последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty,$$

то имеет место представление

$$B_{\omega}(z; z_k) = B(z; z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta}\cdot z; \omega)\, d\mu(\vartheta)\right\} \quad (|z| < 1), \quad (3.1)$$

где $\mu(\vartheta)$ — *некоторая невозрастающая ограниченная функция на* $[0, 2\pi]$.

2°. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) < +\infty,$$

а функция $\omega(x) \in \Omega$ *не возрастает на* $[0, 1)$, *то вновь имеет место представление* (3.1), *где* $\mu(\vartheta)$—*неубывающая ограниченная функция на* $[0,2\pi]$.

Наконец, в обоих случаях

$$\mu(\vartheta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\vartheta} L^{(\omega)}\left\{\log\left|\frac{B_{\omega}(r_n e^{i\varphi}; z_k)}{B(r_n e^{i\varphi}; z_k)}\right|\right\} d\varphi, \ \vartheta \in [0, 2\pi],$$

где $\{r_n\}_1^\infty$ $(0<r_n<1)$ — *некоторая последовательность* $r_n\uparrow 1$, *а* $B(z;\ z_k)$ — *функция Бляшке**.

Следуя идее доказательства этой теоремы, мы в этом параграфе установим теорему о факторизации функции $\pi_\omega(z;\ z_k)$, причем в нашем случае это доказательство значительно упрощается.

б). Пусть $\pi_\omega(z;\ z_k)$—сходящееся произведение.

Обозначая

$$A_\omega^*(z;\zeta)\equiv\frac{\widetilde{A}_\omega(z;\ \zeta)}{\sqrt{\widetilde{A}_\omega(0;\zeta)}}=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-\widetilde{U}_\omega(z;\zeta)+\frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\zeta)\right\},\quad(3.2)$$

рассмотрим функцию

$$\pi_\omega^*(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty A_\omega^*(z;\ z_k)=\frac{\pi_\omega(z;\ z_k)}{\sqrt{\pi_\omega(0;\ z_k)}}.\quad(3.3)$$

Легко видеть, что $\pi_\omega^*(z;\ z_k)$ при $\omega(x)\equiv 1$ совпадает с функцией Бляшке

$$B(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty\frac{z_k-z}{1-z\bar{z}_k}\cdot\frac{|z_k|}{z_k}.$$

В самом деле, согласно (2.3), при $\omega(x)\equiv 1$

$$\widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)=\log\frac{1-z\bar{\zeta}}{|\zeta|^2},\quad \widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta)=\log\frac{1}{|\zeta|^2},$$

и поэтому из (3.2) и отсюда, при $\omega(x)\equiv 1$, имеем

$$A_\omega^*(z;\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-z\bar{\zeta}}\,\frac{|\zeta|}{\zeta},$$

т. е. $\pi_\omega^*(z;\ z_k)=B(z;\ z_k)$.

Обозначим

$$A(z;\ \zeta)=\frac{\zeta-z}{1-z\bar{\zeta}}\cdot\frac{|\zeta|}{\zeta}$$

и введем в рассмотрение функцию

$$F(z)=\log\frac{\pi_\omega^*(z;z_k)}{B(z;z_k)}=\log\left\{\prod_{k=1}^\infty\frac{A_\omega^*(z;\ z_k)}{A(z;\ z_k)}\right\}=\sum_{k=1}^\infty F(z;\ z_k),$$

где

$$F(z;\ z_k)=\log\frac{A_\omega^*(z;z_k)}{A(z;\ z_k)}.\quad(3.4)$$

Очевидно, что как сама функция $F(z)$, так и функция

---

* В специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$, существенно иным методом утверждения этой теоремы впервые были установлены в заметке [14].

$$F_\omega(z) \equiv L^{(\omega)}\{F(re^{i\varphi})\} = \sum_{k=1}^{\infty} L^{(\omega)}\{F(re^{i\varphi};\ z_k)\} \tag{3.5}$$

аналитична в круге $|z|<1$, так как отношение $\pi_\omega^*(z;\ z_k)/B(z;\ z_k)$ аналитично и отлично от нуля в круге $|z|<1$, причем разложение (3.5) равномерно сходится в круге $|z|<1$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Если* $\omega(x) \in \Omega$ *не убывает на* $[0, 1)$, *то*

$$\operatorname{Re} F_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta) \equiv \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{F(re^{i\varphi};\ \zeta)\} \leqslant 0 \quad (|z|<1,\ |\zeta|<1).$$

Доказательство. Из (3.4) и (3.2) следует, что

$$\operatorname{Re} F(z;\ \zeta) = \operatorname{Re}\{\tilde{U}_0(z;\ \zeta) - \tilde{U}_\omega(z;\ \zeta)\} + \frac{1}{2}\tilde{U}_\omega(0;\ \zeta) - \frac{1}{2}\tilde{U}_0(z;\ \zeta), \tag{3.6}$$

где

$$\tilde{U}_0(z;\ \zeta) = [\tilde{U}_\omega(z;\ \zeta)]_{\omega=1}.$$

Применяя оператор $L^{(\omega)}$ к обеим частям тождества (3.6), получим

$$\operatorname{Re} F_\omega(z;\ \zeta) = \operatorname{Re}\{L^{(\omega)}\{\tilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta) - \tilde{U}_0(re^{i\varphi};\ \zeta)\}\} + \frac{1}{2}\int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(t)}{t}\,dt + \log|\zeta|. \tag{3.7}$$

Из (3.3) имеем, что

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\tilde{U}_0(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = -2\log|\zeta| + \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\log(1-\bar{\zeta}re^{i\varphi})\}.$$

Но (см. [1], лемму 2.3)

$$L^{(\omega)}\{\log|1-\bar{\zeta}re^{i\varphi}|\} = -\operatorname{Re}\int_0^1 \frac{\bar{\zeta}re^{i\varphi}}{1-t\bar{\zeta}re^{i\varphi}}\,\omega(t)\,dt,$$

и поэтому

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\tilde{U}_0(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = -2\log|\zeta| - \operatorname{Re}\int_0^1 \frac{\bar{\zeta}re^{i\varphi}}{1-t\bar{\zeta}re^{i\varphi}}\,\omega(t)\,dt. \tag{3.8}$$

Далее, согласно (2.25)

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\tilde{U}_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)\} = \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(t)}{t}\,dt - \operatorname{Re}\int_0^{|\zeta|^2} \frac{re^{i\varphi}\omega(t)}{\zeta - tre^{i\varphi}}\,dt. \tag{3.9}$$

Теперь из (3.7), (3.8) и (3.9) приходим к следующему представлению для функции $F_\omega(z;\ \zeta)$:

$$F_\omega(z;\ \zeta) = \log\frac{1}{|\zeta|} - \int_0^1 \frac{z\bar{\zeta}\omega(t)}{1-tz\bar{\zeta}}\,dt - \int_0^{|\zeta|^2} \frac{\omega(t)\,dt}{t-\dfrac{\zeta}{z}} - \frac{1}{2}\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt \tag{3.10}$$

$$(|z|\leqslant 1,\ |\zeta|<1).$$

Отсюда непосредственно видно, что функция $F_\omega(z;\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Далее, обозначая

$$J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)\equiv-\mathrm{Re}\int_0^{|\zeta|^2}\left\{\frac{\overline{\zeta}e^{i\varphi}}{1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}}+\frac{1}{t-\overline{\zeta}e^{i\varphi}}\right\}\omega(t)\,dt, \tag{3.11}$$

$$J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)\equiv-\mathrm{Re}\int_{|\zeta|^2}^{1}\left\{\frac{\zeta e^{i\varphi}}{1-\overline{\zeta}te^{i\varphi}}+\frac{1}{2t}\right\}\omega(t)\,dt, \tag{3.12}$$

из (3.10) при $|z|=1$ получим тождество

$$\mathrm{Re}\,F_\omega(e^{i\varphi};\zeta)\equiv J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)+J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)+\log\frac{1}{|\zeta|}. \tag{3.13}$$

Заметим теперь, что интегралы (3.11) и (3.12) можно записать в следующем виде:

$$J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)=-\int_0^{|\zeta|^2}\omega(t)\,d\log\left|\frac{t-\overline{\zeta}e^{i\varphi}}{1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}}\right|, \tag{3.14}$$

$$J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)=-\int_{|\zeta|^2}^{1}\omega(t)\,d\log\frac{\sqrt{t}}{|1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}|}. \tag{3.15}$$

Но интегрированием по частям из (3.14) получим

$$J_\omega^{(1)}(e^{i\varphi};\zeta)=-\omega(|\zeta|^2)\log\left|\frac{|\zeta|^2-\zeta e^{-i\varphi}}{1-\overline{\zeta}|\zeta|^2e^{i\varphi}}\right|+\int_0^{|\zeta|^2}\log\left|\frac{t-\overline{\zeta}e^{-i\varphi}}{1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}}\right|d\omega(t)-\log\frac{1}{|\zeta|}. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание значение интеграла

$$\int_{|\zeta|^2}^{1}d\log\frac{\sqrt{t}}{|1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}|}=\log\left|\frac{1-\overline{\zeta}|\zeta|^2e^{i\varphi}}{\zeta-|\zeta|^2e^{i\varphi}}\right|$$

и очевидное неравенство

$$d\log\frac{\sqrt{t}}{|1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}|}=\frac{1}{2t}\mathrm{Re}\frac{1+t\overline{\zeta}e^{i\varphi}}{1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}}\geqslant 0\quad(|\zeta|<1,\ 0<t<1),$$

из (3.15), в случае неубывающих на $[0,1)$ $\omega(x)$, получим оценку

$$J_\omega^{(2)}(e^{i\varphi};\zeta)\leqslant\omega(|\zeta|^2)\log\left|\frac{\zeta-|\zeta|^2e^{i\varphi}}{1-\overline{\zeta}|\zeta|^2e^{i\varphi}}\right|. \tag{3.17}$$

Теперь, с учетом (3.16) и (3.17), из (3.13) приходим к неравенству

$$\mathrm{Re}\,F_\omega(e^{i\varphi};\zeta)\leqslant\int_0^{|\zeta|^2}\log\left|\frac{t-\zeta e^{-i\varphi}}{1-t\overline{\zeta}e^{i\varphi}}\right|d\omega(t)+\omega(|\zeta|^2)\log\left|\frac{\zeta-|\zeta|^2e^{i\varphi}}{|\zeta|^2-\zeta e^{-i\varphi}}\right|. \tag{3.18}$$

Но $d\omega(t) \geqslant 0$, поскольку $\omega(t)$ не убывает на $[0, 1)$, и

$$\log\left|\frac{t-\zeta e^{-i\varphi}}{1-\bar{\zeta} t e^{i\varphi}}\right| \leqslant 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad \log\left|\frac{\zeta-|\zeta|^2 e^{i\varphi}}{|\zeta|^2-\zeta e^{-i\varphi}}\right| = 0,$$

поэтому из (3.18) следует, что $\operatorname{Re} F_\omega(e^{i\varphi}; \zeta) < 0$. Далее, как уже было отмечено выше, функция $F_\omega(z; \zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, и поэтому при отображении $w = F_\omega(z; \zeta)$ образ круга $|z| \leqslant 1$ будет ограниченной областью. Ограниченной и замкнутой будет и граница этого образа. Так как $\operatorname{Re} F_\omega(e^{i\varphi}; \zeta) \leqslant 0$, то эта граница лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} w \leqslant 0$, следовательно, образ круга $|z| \leqslant 1$ целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} w \leqslant 0$, то есть $\operatorname{Re} F_\omega(z; \zeta) \leqslant 0$.

в). Докажем теперь основную теорему этого параграфа о факторизации функции $\pi_\omega(z; z_k)$.

Теорема. *Пусть $\pi_\omega(z; z_k)$ — некоторое сходящееся произведение. Если $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0, 1)$, то имеет место представление*

$$\pi_\omega(z; z_k) = C_0 B(z; z_k) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta}z; \omega)\, d\Psi(\vartheta)\right\} (|z| < 1), \quad (3.19)$$

где

$$C_0 = \sqrt{\pi_\omega(0; z_k)},$$

$B(z; z_k)$ — функция Бляшке, а $\Psi(\vartheta)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0, 2\pi]$, определяемая следующим образом:

$$\Psi(\vartheta) = \lim_{n \to \infty} \int_0^{\vartheta} L^{(\omega)}\left\{\log\left|\frac{C_0 B(r_n e^{i\varphi}; z_k)}{\pi_\omega(r_n e^{i\varphi}; z_k)}\right|\right\} d\varphi, \ \vartheta \in [0, 2\pi],$$

где $\{r_n\}_1^\infty$ $(0 < r_n < 1)$ — некоторая последовательность чисел, причем $r_n \uparrow 1$ при $n \to +\infty$.

Доказательство. Во-первых, если $\omega(x)$ не убывает на $[0, 1)$, то $\omega(x) \geqslant \omega(0) = 1$ $(x \in (0, 1))$, и следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае произведение $B(z; z_k)$ сходится вместе с $\pi_\omega(z; z_k)$. Далее, согласно (3.5) и лемме 2

$$\operatorname{Re} L^{(\omega)}\{-F(re^{i\varphi})\} = -\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} F_\omega(re^{i\varphi}; z_k) \geqslant 0.$$

Следовательно, по определению класса C_ω, функция

$$-F(z) = -\log\frac{\pi_\omega^*(z; z_k)}{B(z; z_k)} = -\log\frac{\pi_\omega(z; z_k)}{C_0 B(z; z_k)}$$

принадлежит классу C_∞.

Заметив, что ввиду (3.4), (3.2) и (3.3)

$$\operatorname{Im}\{F(0;\zeta)\} = \operatorname{Im}\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx - \log|\zeta|\right\} = 0,$$

по теореме Б для функции $-F(z)$ получим представление

$$-F(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta}z;\ \omega)\,d\Psi(\vartheta), \tag{3.20}$$

где

$$\Psi(\vartheta) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\vartheta}\{-\operatorname{Re} F_\infty(r_n e^{i\varphi})\}\,d\varphi,\ \ \vartheta\in[0,\,2\pi], \tag{3.21}$$

причем, согласно теореме Б, $\{r_n\}_1^\infty$ $(0<r_n<1)$ — это некоторая последовательность $r_n\uparrow 1$ при $n\to+\infty$. Теперь из (3.20), (3.21), принимая во внимание определение функции $F(z)$, приходим к утверждениям теоремы относительно представления (3.19) и природы функции $\Psi(\vartheta)$.

Следствие. *Если $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $[0,1)$, то справедливо неравенство*

$$|\pi_\infty(z;\ z_k)|\leqslant C_0\,|B(z;\ z_k)|\ \ (|z|<1), \tag{3.22}$$

где

$$C_0=\sqrt{\pi_\infty(0;\ z_k)} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|z_k|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{2t}\,dt\right\}<1.$$

Оценка (3.22) следует из представления (3.19), если учесть, что в рассматриваемом случае $d\Psi(\vartheta)\geqslant 0$, и, согласно (2), $\operatorname{Re} S(z;\ \omega)\geqslant 0$, причем, по (2.6), (2.2) и (2.3)

$$\pi_\infty(0;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{-U_\infty(0;\ z_k)} = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{|z_k|^2}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\right\}.$$

Отметим, что если $\omega(x)\in\Omega$ не возрастает на $[0,1)$, а последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty,$$

то опять имеет место представление (3.19), с той лишь разницей, что в этом случае $\Psi(\vartheta)$—невозрастающая ограниченная функция на $[0,2\pi]$, причем доказательство совершенно аналогично приведенному в теореме. Поэтому мы ограничимся только констатацией этого факта.

В заключение, выражаю глубокую благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при ее решении.

Ереванский государственный
университет

Поступило 21.VII.1972

Ռ. Ս. ԳԱԼՈՅԱՆ. $N\{\omega\}$ դասի մերոմորֆ ֆունկցիաների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի հետազոտության մեջ [1] ներմուծված մերոմորֆ ֆունկցիաների $N\{\omega\}$ դասերի տեսության հետ կապված մի քանի հարցեր։

$N\{\omega\}$ դասերի եզրային հատկությունների կապակցությամբ հիմնական թեորեմը (§ 1) պնդում է, որ եթե $\omega(x)$ ֆունկցիան բավարարում է որոշակի պայմանների ($\omega(x) \in \bar{\Omega}_*$), ապա ցանկացած $F(z) \in N\{\omega\}$ ֆունկցիայի համար համարյա ամենուրեք գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր սահմանը

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{F(re^{i\theta})\},$$

որտեղ $L^{(\omega)}$-ն Ռիման-Լիուվիլի տիպի օպերատոր է [2]։

Այնուհետև (§§ 2, 3) կառուցված է նաև մի արտադրյալ—$\pi_\omega(z; z_k)$, որը հանդիսանում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի $\pi_\alpha(z; z_k)$ արտադրյալի [8] ընդհանրացումը։

Ցույց է տրված, որ ցանկացած $\omega(x) \in \Omega$ ֆունկցիայի համար $\pi_\omega(z; z_k) \in N\{\omega\}$: Ապացուցված են թեորեմներ $\pi_\omega(z; z_k)$ ֆունկցիայի եզրային հատկությունների և ֆակտորիզացման վերաբերյալ։

R. S. GALOIAN. *On mehromorphic function from class* $N\{\omega\}$ (summary)

The paper deals with some questions connected with the theory of $N\{\omega\}$ classes, which have been introduced by M. M. Džrbaşian.

The main result refers to the boundary properties of $N\{\omega\}$. It states the conditions, under which the limit

$$\lim_{r\to 1-0} L^{(\omega)}\{F(re^{i\theta})\},$$

($L^{(\omega)}$ is a Rieman-Liuvill type operators) exists for arbitrary $F(z) \in N(\omega)$ almost every where.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., 79 (121), 1969, 517—615.
2. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
5. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, „Математика", 2, № 5, 1967, 275—294.
6. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
7. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, „Математика", VI, № 2—3, 1971, 182—194.
8. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945.

9. *Ch. Tanaka.* On the boundary behaviour of the canonical product and the meromorphic function of finite order in the unit disk, Memoirs of the school of Science & Engineering Waseda Univ., 34, 1970, 137—155.
10. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
11. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Tokyo, Maruzen, 1959.
12. *J. E. McMillan.* Boundary behavior of a conformal mapping, Acta math., 123, 1—2, 1969, 43—67.
13. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН АрмССР, 2, 1948, 3—40.
14. *М. М. Джрбашян и В. С. Захарян.* О факторизации функции B_α, Матем. заметки 4, № 1, 1968, 3—10.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

А. В. ЕФИМОВ, Т. А. ТОВМАСЯН

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОХОДНОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ КЛАССА *LR*

В статье [1] показано, что A-матрица двухэлементного $4n$-полюсника, содержащего только индуктивности, сопротивления и идеальные трансформаторы, необходимо является рациональной функцией от λ и обладает свойствами

(I) $\overline{w(\bar{\lambda})} \equiv w(\lambda)$,

(II) $w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1 \geqslant 0$, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$,

(III) $w'(\lambda) J_2 w(\lambda) \equiv J_2$,

(IV) $w^*(\lambda) J_2 w(\lambda) - J_2 \begin{cases} \geqslant 0, & \operatorname{Im}\lambda > 0 \\ \leqslant 0, & \operatorname{Im}\lambda < 0, \end{cases}$

где

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{bmatrix}.$$

Целью настоящей статьи является доказательство обратного утверждения, именно: каждая рациональная матрица-функция $w(\lambda)$, обладающая свойствами (I)—(IV) (условимся называть ее проходной матрицей класса LR) является A-матрицей некоторого $4n$-полюсника указанного класса. Попутно выясняется цепная структура LR-цепи.

Доказательство состоит в следующем:

1. Разложение заданной проходной матрицы класса LR в произведение примарных матриц того же класса; возможность такого разложения и структура примарных матриц см. [2; 3].

2. Реализация каждой примарной матрицы в виде двухэлементного LR $4n$-полюсника.

Поскольку при каскадном соединении многополюсников их A-матрицы перемножаются, тем самым достигается реализация заданной проходной матрицы класса LR. При этом многополюсники, реализующие примарные матрицы, являются элементарными ячейками цепной структуры LR-цепи.

Таким образом, справедлива следующая основная

Теорема. *Для реализуемости матрицы-функции* $w(\lambda)$ (*порядка* $2n$) *в виде линейного пассивного* $4n$-*полюсника класса* LR *необходимо и достаточно, чтобы* $w(\lambda)$ *являлась рациональной матрицей-функцией и удовлетворяла условиям* (I)—(IV).

Приведем, вкратце, процесс, приводящий к реализации примарных матриц.

В соответствии с [3], в зависимости от расположения полюсов, имеются следующие типы примарных матриц класса LR:

Тип I.

$$w(\lambda)=C_0+\frac{C}{\lambda-\lambda_0}+\frac{\overline{C}}{\lambda-\overline{\lambda}_0},$$

где

$$C_0=\begin{bmatrix} I & 2\mathrm{Re}\,\dfrac{f_1^* g_2}{\lambda_0} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$C=f^* g\neq 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_0>0$, $f=(f_1, f_2)$, $g=(g_1, g_2)$, f_k, g_k — n-мерные векторы-строки, причем вектор f обеспечивает совместность неравенств

$$\begin{bmatrix} \alpha & \vartheta \\ \overline{\vartheta} & \alpha \end{bmatrix}>0, \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\vartheta} \\ \overline{\overline{\vartheta}} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}>0,$$

$\alpha=\dfrac{fJ_2f^*}{i(\overline{\lambda}_0-\lambda_0)}$, $\overline{\alpha}=\dfrac{\overline{f}J_2\overline{f}^*}{i(\lambda_0-\overline{\lambda}_0)}$, $\overline{f}=fP(\overline{\lambda}_0)$, ϑ — комплексный параметр, $\overline{\vartheta}=f_2\overline{f}_1^*-\overline{\lambda}_0\vartheta$, а вектор g определяется соотношениями

$$f_1=\overline{\alpha}\,\overline{g}_2+\tilde{\overline{\vartheta}}\,\overline{\overline{g}}_2,$$

$$f_2=\alpha g_1+\vartheta\overline{g}_1,$$

$$\overline{g}=(\overline{g}_1, \overline{g}_2)=gP^{-1}(\lambda_0),\ P(\lambda)=\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{vmatrix}.$$

Тип II:

$$w(\lambda)=\begin{vmatrix} I & \dfrac{1}{\sigma_0}f_1^* g_2 \\ 0 & I \end{vmatrix}+\frac{f^* g}{\lambda-\sigma_0}\ (\sigma_0=\overline{\sigma}_0\neq 0),$$

где

1. $f=(f_1, f_2)$ — вещественный вектор,
2. $\vartheta>0$, $\overline{\vartheta}=f_2f_1^*-\sigma_0\vartheta>0$,
3. $f_2=\vartheta g_1$, $f_1=\dfrac{1}{\sigma_0}\overline{\vartheta}\,g_2$.

Тип III:

$$w(\lambda)=\begin{vmatrix} I & f^* g \\ 0 & I \end{vmatrix},$$

где f — вещественный n-мерный вектор, $f=\vartheta g$, $\vartheta>0$.

Тип IV:

$$w(\lambda)=\begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{\lambda}f^*g & I \end{bmatrix},$$

где f — вещественный вектор, $f=\vartheta g$, $\vartheta>0$.

Тип V:

$$w(\lambda)=\begin{bmatrix} I & \lambda f^*g \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

f — вещественный n-мерный вектор, $f=\frac{1}{\vartheta}g$, $\vartheta>0$.

Тип VI:

$$w(\lambda)=\begin{vmatrix} I & 0 \\ f^*g & I \end{vmatrix},$$

f — вещественный n-мерный вектор, $f=\vartheta g$, $\vartheta>0$.

Непосредственная реализация примарных матриц затруднительна. В целях реализации примарную матрицу $w(\lambda)$ представляем в виде

$$w(\lambda)=TT^{-1}\,w(\lambda)\,TT^{-1},$$

где $T=\begin{vmatrix} t' & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{vmatrix}$ — постоянная вещественная матрица, реализуемая в виде идеального трансформатора (см. [4, 5]). Далее, подобрав соответствующим образом T, добиваемся выделения из матрицы $T^{-1}w(\lambda)\,T$ некоторой субматрицы-ядра, содержащего основную информацию о ней. Это ядро имеет порядок 2, 4 или 6 и, реализуя его в виде многополюсника (4, 8, соответственно, 12-полюсника), получаем реализацию $w(\lambda)$ в виде цепного соединения этого многополюсника и двух идеальных трансформаторов (более подробно, см. [6]).

В дальнейшем ядро примарной матрицы $w(\lambda)$ обозначим через $\tilde{w}(\lambda)$.

Анализ каждого из типов примарных матриц, заключающийся в выделении ядра, показывает, что существует пять видов ядер типа I, четыре вида ядер типа II и по одному виду каждого из остальных типов.

Ниже дается характеристика ядер и соответствующая каждому ядру схема замещения (в виде 12-полюсника).

Реализация ядер типа I.

Возможные случаи:

1. Векторы f_1, f_2 — вырожденные, т. е. $\bar{f}_1=e^{i\vartheta_1}f_1$, $\bar{f}_2=e^{i\vartheta_2}f_2$. В этом случае можно считать

$$f_1=(z_1,\ 0,\ 0),\ f_2=(z_2,\ 0,\ 0)\ (\operatorname{Re} z_1\neq 0,\ \operatorname{Im} z_2\neq 0).$$

$\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи, приведенной на рис. 1.

Значения физических параметров:

$$l = -\frac{|\lambda_0|^2 \Delta_2 \tilde{w}_{22}(0)}{2a \operatorname{Re}(\tilde{\alpha}|z_1|^2 - \tilde{\vartheta}\bar{z}_1^2)} > 0,$$

$$\tilde{l} = \frac{\Delta_2 |a - \lambda_0|^2 \tilde{w}_{22}(a)}{2a \operatorname{Re}(\tilde{\alpha}|z_1|^2 - \tilde{\vartheta}\bar{z}_1^2)} > 0,$$

$$R = \frac{\Delta_2}{2\operatorname{Re}(\tilde{\alpha}|z_1|^2 - \tilde{\vartheta}\bar{z}_1^2)} > 0, \quad a = \frac{2\operatorname{Re}\bar{\lambda}_0(\tilde{\alpha}|z_1|^2 - \tilde{\vartheta}\bar{z}_1^2)}{2\operatorname{Re}(\tilde{\alpha}|z_1|^2 - \tilde{\vartheta}\bar{z}_1^2)} < 0,$$

$$u_1 = \tilde{w}_{22}(0) > 0, \quad u_2 = \tilde{w}_{22}(a) < 0,$$

$$\Delta_2 = \tilde{\alpha}^2 - |\tilde{\vartheta}|^2 > 0,$$

$\tilde{w}_{22}(\lambda)$—правый нижний элемент $\tilde{w}(\lambda)$.

Реализация осуществлена путем перехода к матрице проводимости;

2. Вектор f_1— вырожденный, вектор f_2 — невырожденный. Можно считать

$$f_1 = (z_1, 0, 0), \ f_2 = (z_2, x_2, 0) \ (\operatorname{Re} z_1 \neq 0, \ \operatorname{Im} z_2 \neq 0, \ x_2 = \bar{x}_2 \neq 0).$$

$\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи, приведенной на рис. 2.

Значения физических параметров таковы:

$$L_1 = l_1 = -\frac{2\operatorname{Re}(\alpha x_2^2 - \vartheta x_2^2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} > 0, \quad l_2 = -\frac{2\operatorname{Re}(\alpha|z_2|^2 - \vartheta \bar{z}_2^2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} > 0,$$

$$l = \frac{2\operatorname{Re}(\alpha\bar{z}_2 x_2 - \vartheta z_2 x_2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} = \frac{2\operatorname{Re}(\alpha z_2 x_2 - \vartheta \bar{z}_2 x_2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2},$$

$$L_2 = \frac{l_1 l_2 - l^2}{l_1} > 0,$$

$$R_1 = r_1 = \frac{2\operatorname{Re}\bar{\lambda}_0(\alpha x_2^2 - \vartheta x_2^2) - x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)(z_1 - \bar{z}_1)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} > 0,$$

$$r = -\frac{2\operatorname{Re}\bar{\lambda}_0(\alpha\bar{z}_2 x_2 - \vartheta\bar{z}_2 x_2) + x_2(\bar{z}_2 - z_2)(\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} =$$

$$= -\frac{2\operatorname{Re}\bar{\lambda}_0(\alpha z_2 x_2 - \vartheta\bar{z}_2 x_2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2},$$

$$r_2 = \frac{2\operatorname{Re}\bar{\lambda}_0(\alpha|z_2|^2 - \vartheta\bar{z}_2^2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} > 0, \quad R_2 = \frac{r_1 r_2 - r^2}{r_1} > 0,$$

$$\tilde{w}_{11}(0) = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$\bar{w}_{11}(\lambda)$ — левый верхний блок матрицы $\bar{w}(\lambda)$.

Реализация осуществлена путем перехода к матрице сопротивления;

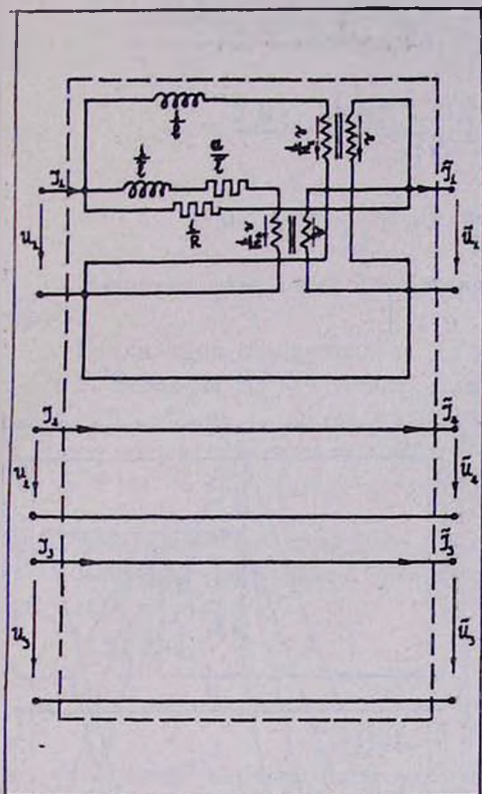

Рис. 1.

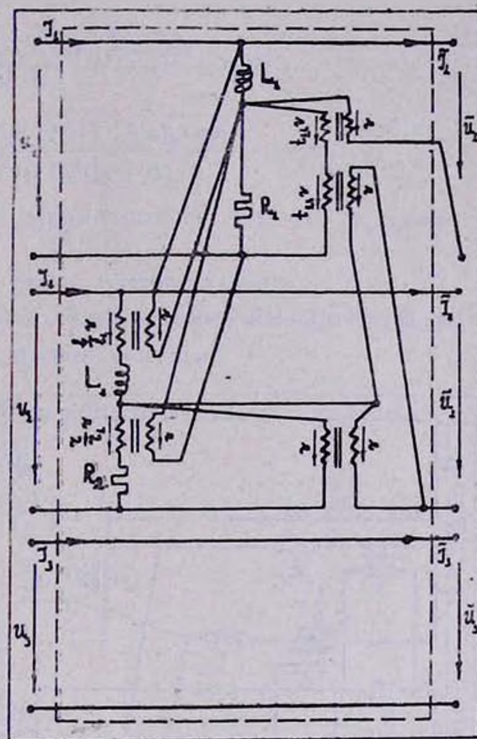

Рис. 2.

3. Вектор f_1 — невырожденный, вектор f_2 — вырожденный. Здесь можно считать

$$f_1 = (z_1,\ x_1,\ 0),\quad f_2 = (z_2,\ 0,\ 0)\quad (\operatorname{Im} z_1 \neq 0,\ \operatorname{Re} z_2 \neq 0,\ x_1 = \bar{x}_1 \neq 0).$$

$\bar{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи, приведенной на рис. 3.

Значения физических параметров:

$$R_1 = \frac{1}{r_1},\quad r_1 = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}\,x_1^2 - \tilde{\vartheta}\,x_1^2)}{x_1^2\,(\bar{z}_1 - z_1)^2} > 0,$$

$$r = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}\,x_1 z_1 - \bar{\vartheta}\,x_1\,\bar{z}_1)}{x_1^2\,(\bar{z}_1 - z_1)^2} = \frac{2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha} x_1\,\bar{z}_1 - \bar{\vartheta} x_1 \bar{z}_1)}{x_1^2\,(\bar{z}_1 - z_1)^2},$$

$$r_2 = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}\,|z_1|^2 - \bar{\vartheta}\,\bar{z}_1^2)}{x_1^2\,(\bar{z}_1 - z_1)^2} > 0,\quad R_2 = \frac{r_1}{r_1 r_2 - r^2} > 0,$$

$$L_1 = \frac{1}{l_1},\ l_1 = -\frac{x_1^2\, 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0 z_2 (\bar{z}_1 - z_1)\, 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0 (\alpha x_1^2 - \tilde{\vartheta}\ x_1^2)}{x_1^2\, (\bar{z}_1 - z_1)^2} > 0,$$

$$l = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0 (\alpha \bar{z}_1 x_1 - \tilde{\vartheta} \bar{z}_1 x_1) + x_1\, 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0\, z_2 \bar{z}_1 (z_1 - \bar{z}_1)}{x_1^2\, (\bar{z}_1 - z_1)^2} =$$

$$= -\frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0 (\tilde{\alpha} x_1 z_1 - \tilde{\vartheta}\ x_1 z_1)}{x_1^2\, (\bar{z}_1 - z_1)^2},$$

$$l_2 = \frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0 (\alpha |z_1|^2 - \tilde{\vartheta}\, \bar{z}_1^2)}{x_1^2\, (\bar{z}_1 - z_1)^2} > 0,\ L_2 = \frac{l_1}{l_1 l_2 - l^2} > 0.$$

$$\tilde{w}_{22}(0) = \begin{vmatrix} t_{33} & t_{34} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$\tilde{w}_{22}(\lambda)$ — правый нижний блок $\tilde{w}(\lambda)$.

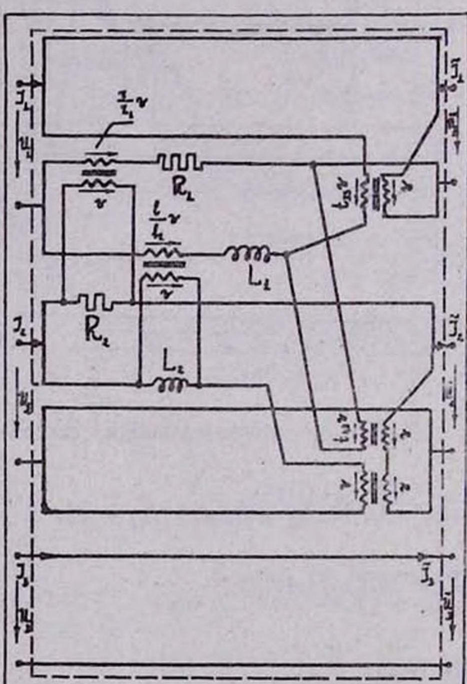

Рис. 3.

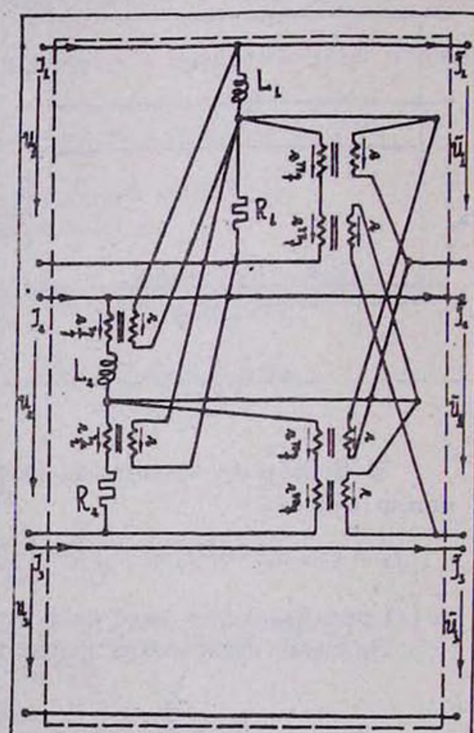

Рис. 4.

Реализация осуществлена по матрице проводимости;

4. Векторы f_1, f_2 — невырожденные, причем $(\mathrm{Re}\, f_2 \cdot \mathrm{Re}\, f_1^*)(\mathrm{Im}\, f_2 \times \times \mathrm{Im}\, f_1^*) \neq (\mathrm{Re}\, f_2 \cdot \mathrm{Im}\, f_1^*)(\mathrm{Im}\, f_2 \cdot \mathrm{Re}\, f_1^*)$. Здесь можно считать

$$f_1 = (z_1,\ i x_1,\ 0),\ f_2 = (z_2,\ x_2,\ 0)\ (\mathrm{Re}\ z_1 \neq 0,\ \mathrm{Im}\ z_2 \neq 0,\ x_i = \bar{x}_i \neq 0).$$

$\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи, изображенной на рис. 4.

Значения физических параметров таковы:

$$r = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0(\alpha z_2 x_2 - \vartheta \bar{z}_2 x_2) - 2 i x_1 x_2^2 (z_2 - \bar{z}_2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} =$$

$$= -\frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0(\alpha \bar{z}_2 x_2 - \vartheta \bar{z}_2 x_2) + x_2(\bar{z}_2 - z_2)(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2},$$

$$r_2 = \frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0(\alpha |z_2|^2 - \vartheta \bar{z}_2^2) - x_1 x_2 i (z_2^2 - \bar{z}_2^2)}{x_2^2(\bar{z}_2 - z_2)^2} > 0.$$

$$\tilde{w}_{11}(0) = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}.$$

Значения остальных физических параметров те же, что и в случае 2.

Реализация осуществлена по матрице сопротивления:

5. Векторы f_1, f_2 — невырожденные, причем $(\mathrm{Re}\,f_2 \cdot \mathrm{Re}\,f_1^*)(\mathrm{Im}\,f_2 \times \times \mathrm{Im}\,f_1^*) = (\mathrm{Re}\,f_2 \cdot \mathrm{Im}\,f_1^*)(\mathrm{Im}\,f_2 \cdot \mathrm{Re}\,f_1^*)$. Можно считать

$$f_1 = (z_1, 0, ix_1),\ f_2 = (z_2, x_2, 0)\ (\mathrm{Re}\,z_1 \neq 0,\ \mathrm{Im}\,z_2 \neq 0,\ x_l = \bar{x}_l \neq 0).$$

$\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи (рис. 5).

Значения физических параметров l_1, l_2, l, r_1, r_2, r, L_2, R_2 такие же, как в случае 2.

$$\tilde{w}_{11}(0) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix},$$

$\tilde{w}_{11}(\lambda)$ — левый верхний блок ядра $\tilde{w}(\lambda)$.

Цепь, изображенная на рис. 5, не имеет ни матрицы сопротивления, ни матрицы проводимости. Синтез цепи осуществлен на основе анализа цепей (рис. 2, 4).

Реализация ядер типа II.

Возможны следующие случаи:

1. $\sigma_0 < 0$, $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$. Здесь можно считать $f_2 = (1, 0, 0)$.

Ядро $\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи (рис. 6).

Значения физических параметров таковы:

$$R = -\sigma_0 \vartheta > 0,\ L = \vartheta > 0.$$

Реализация осуществлена по матрице сопротивления.

2. $\sigma_0 < 0$, $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$. В этом случае можно считать $f_1 = (1, 0, 0)$.

$\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи (рис. 7), где

$$R = \frac{1}{\vartheta} > 0,\ L = -\frac{1}{\sigma_0 \vartheta} > 0,\ \alpha = 1.$$

Реализация осуществлена по матрице проводимости.

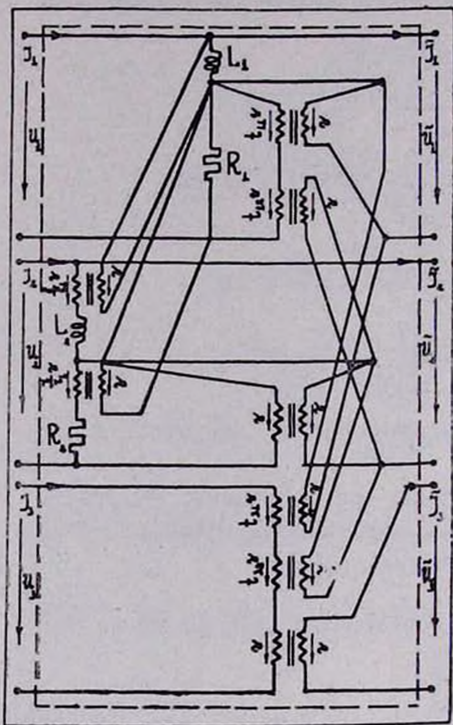

Рис. 5.

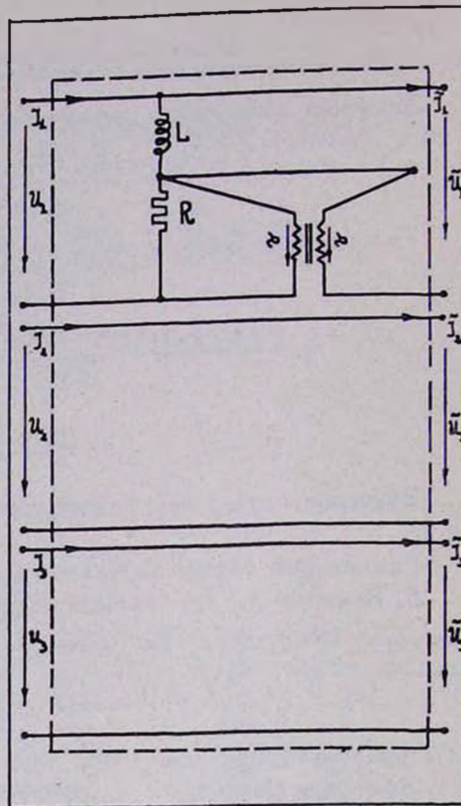

Рис. 6.

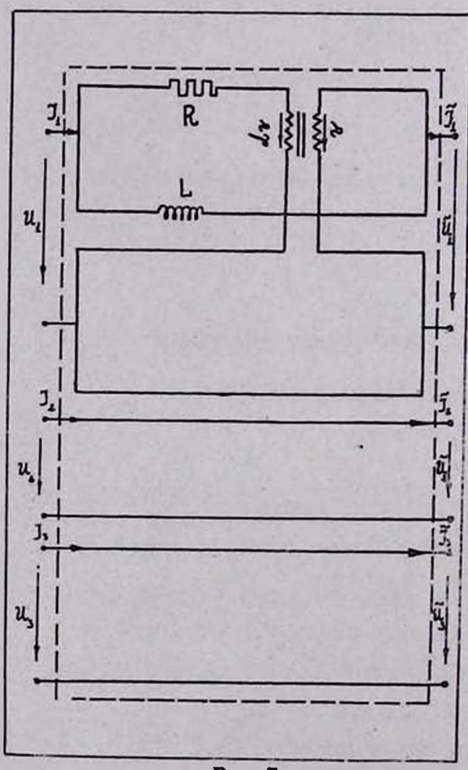

Рис. 7.

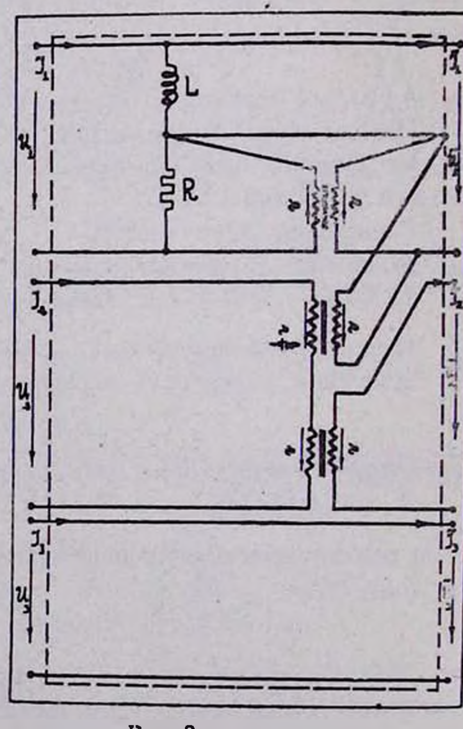

Рис. 8.

3. $\sigma_0 < 0, f_1 \neq 0, f_2 \neq 0, f_2 f_1^* = 0$. Здесь можно считать

$$f_1 = (1, 0, 0), \ f_2 = (0, 1, 0).$$

$\bar{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи, изображенной на рис. 8.

Значения физических параметров такие же, как в случае 1 типа II.

Отметим, что в этом случае, как и в случае 5 типа I, невозможно осуществить реализацию ни по матрице сопротивления, ни по матрице проводимости. Синтез цепи осуществлен на основе анализа цепи (рис. 6).

4. $\sigma_0 \neq 0, f_2 f_1^* \neq 0$. В этом случае можно считать

$$f_1 = (1, 0, 0), \ f_2 = (x, 0, 0),$$

причем $x = f_2 f_1^* \neq 0$.

$\bar{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи (рис. 7).

Значения физических параметров таковы:

$$R = \frac{1}{\vartheta} > 0, \quad L = \frac{1}{\sigma_0^2 \vartheta} > 0, \quad a = -\frac{\bar{\vartheta}}{\sigma_0 \vartheta}.$$

Реализация осуществлена по матрице проводимости.

Реализация ядер типа III.

$\bar{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи, рис. 9. Значение параметра

$$R = \frac{1}{\vartheta} > 0.$$

Реализация ядра типа VI.

Матрица $\bar{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи (рис. 10), при этом

$$R = \vartheta > 0.$$

Реализация ядер типа IV и V.

$\tilde{w}(\lambda)$ реализуется в виде цепи (рис. 10), соответственно рис. 9, заменяя сопротивление R индуктивностью L, причем

$$L = \vartheta > 0.$$

Отметим, что соответствие проходных матриц цепям проверено во всех случаях расчетом.

Попутно исчерпывающим образом описана *цепная структура линейной пассивной LR-цепи: любую такую цепь можно представить в виде каскадного соединения указанных многополюсников и идеальных трансформаторов.*

В заключение сделаем следующее

Замечание. В статье [3] установлена связь

$$w(\lambda^2) = P^{-1}(\lambda)\, r(\lambda)\, P(\lambda), \tag{*}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{vmatrix},$$

между проходными матрицами $r(\lambda)$ класса CL и $w(\mu)$ класса LR. Там же отмечено, что такое преобразование является аналогом преобразования

$$Z(\lambda^2) = \lambda z(\lambda) \qquad (**)$$

для позитивных матриц $z(\lambda)$ класса CL и $Z(\mu)$ класса LR.

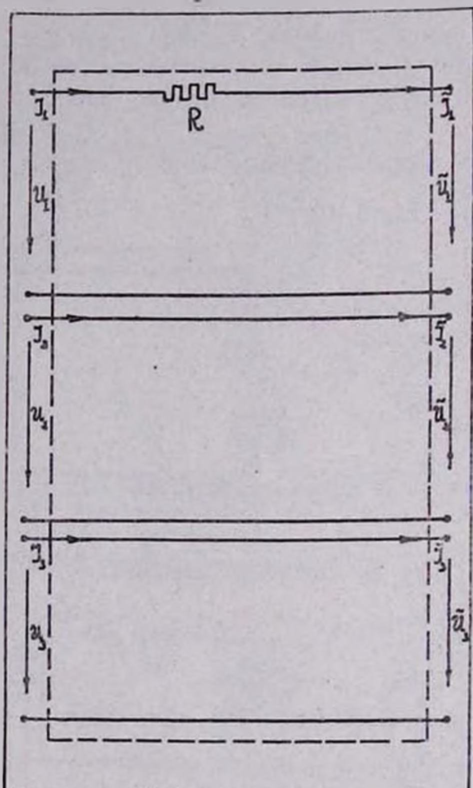

Рис. 9.

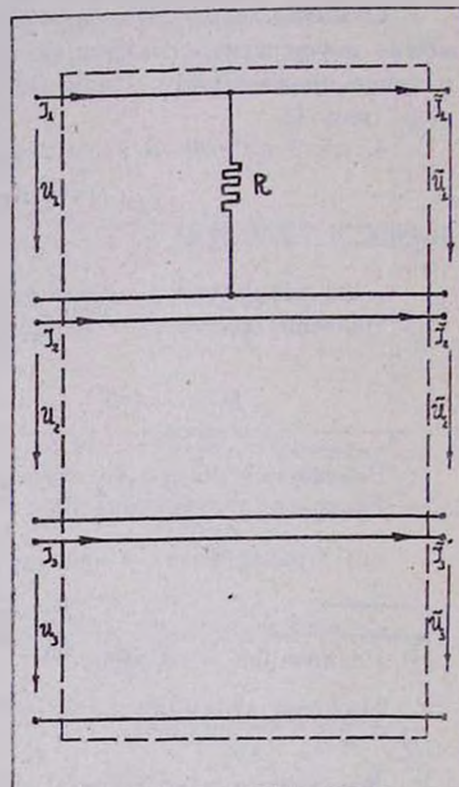

Рис. 10.

Сравнение схем замещения для проходных матриц $w(\mu)$ (см. рис. 1—10) и $r(\lambda)$ (см. [6]), связанных соотношением (*), позволяет установить физический смысл преобразования (*); он состоит (по крайней мере для рассматриваемых специального вида схем замещения) *в замене каждого из емкостей C реактивной цепи на сопротивление $R=C$ в цепи LR при неизменных индуктивностях и идеальных трансформаторах*.

Физический смысл преобразования (*), таким образом, тот же, что и физический смысл его аналога (**) для позитивных матриц (по крайней мере для специальных схем замещения, указанных Кауэром [4]).

Все изложенное в настоящей статье без затруднений может быть перенесено на случай CR-цепей и проходных матриц класса CR.

Одесский педагогический институт,
Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступило 15.II.1971

Ա. Վ. ԵՖԻՄՈՎ, Թ. Ա. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. *LR* դասի անցումային մատրիցա-ֆունկցիայի իրացումը *(ամփոփում)*

Հայտնի է, որ LR *դասի 4n-բևեռի անցումային մատրիցա-ֆունկցիան ռացիոնալ է և օժտված է հետևյալ հատկություններով.*

$$\text{(I)}\quad \overline{w(\bar{\lambda})} \equiv w(\lambda),$$

$$\text{(II)}\quad w^*(\lambda)\,J_1\,w(\lambda) - J_1 \geqslant 0,\quad \textit{երբ}\quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

$$\text{(III)}\quad w'(\lambda)\,J_2\,w(\lambda) \equiv J_2,$$

$$\text{(IV)}\quad w^*(\lambda)\,J_2 w(\lambda) - J_2 \begin{cases} \geqslant 0, & \mathrm{Im}\,\lambda > 0, \\ \leqslant 0, & \mathrm{Im}\,\lambda < 0, \end{cases}$$

որտեղ

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}:$$

Հոդվածում ապացուցվում է հակառակ փաստը, այսինքն՝ (I)—(IV) հատկություններով օժտված ցանկացած 2n կարգի ռացիոնալ մատրիցա-ֆունկցիա հանդիսանում է LR *դասի մի որոշ գծային պասիվ բևեռի* A*-մատրիցա։*

Ապացույցը հիմնվում է Ա. Վ. Եֆիմովի պրիմար մատրիցաների ստրուկտուրայի վերաբերյալ արդյունքների վրա և կայանում է այնպիսի պարզագույն 4n-բևեռների կառուցման մեջ, որոնց համար պրիմար մատրիցաները հանդիսանում են A*-մատրիցաներ։*

Միաժամանակ լիովին բացահայտվում է LR *շղթայի շղթայական ստրուկտուրան։*

A. V. EFIMOV, T. A. TOVMASSIAN. ***Realisation of transition matrix-function of LR class*** **(summary)**

It is known that transition matrix of $2n$ terminal pair network of *LR* class is rational and possesses the properties:

$$\text{(I)}\quad \overline{w(\bar{\lambda})} \equiv w(\lambda),$$

$$\text{(II)}\quad w^*(\lambda)\,J_1\,w(\lambda) - J_1 \geqslant 0,\quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0,$$

$$\text{(III)}\quad w'(\lambda)\,J_2\,w(\lambda) \equiv J_2,$$

$$\text{(IV)}\quad w^*(\lambda)\,J_2 w(\lambda) - J_2 \begin{cases} \geqslant 0, & \mathrm{Im}\,\lambda > 0, \\ \leqslant 0, & \mathrm{Im}\,\lambda < 0, \end{cases}$$

where

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}.$$

In this article the opposite condition is proved, i. e. any rational matrix-function of $w(\lambda)$ order $2n$, with the properties (I)—(IV) is A-matrix of some linear passive $2n$ terminal pair network of *LR* class.

The demonstration of this condition is based on the results obtained by A. V. Efimov concerning the structure of primary matrices and consits in constructing the simplest terminal pair networks for which primary matrices are actually A-matrices.

Concurrently the chain structure of *LR* circuit is cleared up.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Ефимов*. Об одном применении теоремы Ланжевена в теории цепей, ДАН АрмССР, XLIX, № 3, 1969, 118—123.
2. *В. П. Потапов*. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН АрмССР, XLVIII, № 5, 1969, 257—263.
3. *А. В. Ефимов*. Проходные матрицы класса LR, ДАН АрмССР, LIV, № 1, 1972, 28—32.
4. *W. Cauer*. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin, 1954.
5. *В. П. Потапов, Т. А. Товмасян*. Многомерный гиратор, ДАН АрмССР, LI, № 5, 1970, 266—272.
6. *А. В. Ефимов*. Реализация реактивных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН АрмССР, „Математика“, V, № 1, 1970, 54—63.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 5, 1972 Математика

Б. С. РУБИН

О ПРОСТРАНСТВАХ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ

Пусть $\Omega=(a, b)$ — конечный, бесконечный или полубесконечный интервал на вещественной оси. В настоящей работе будут рассматриваться пространства функций, заданных на Ω, представимых интегралами дробного порядка

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ x>a;\ (I^{\alpha}_{-b}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ x<b$$

с плотностями из пространств $L_p(\Omega)$ и $L_p(\Omega, \rho)$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<1$, $\rho(x)$ — весовая функция вида

$$\rho(x)=\begin{cases}(1+|x|)^{\gamma},\ \alpha p-1<\gamma<p-\max(\alpha p, 1),\ \Omega=(-\infty, \infty);\\ |x-a|^{\alpha_a}(1+|x|)^{\gamma},\ \alpha p-1<\alpha_a<p-1,\ \alpha p-1<\alpha_a+\gamma<p-\max(\alpha p, 1),\\ \qquad\qquad \Omega=(a, \infty)\ \text{или}\ \Omega=(-\infty, a);\\ (x-a)^{\alpha_a}(b-x)^{\alpha_b},\ -1<\alpha_a,\ \alpha_b<p-1,\ \Omega=(a, b).\end{cases}\qquad(1)$$

Необходимость изучения таких пространств связана с задачей о нетеровости оператора типа потенциала

$$(K\varphi)(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt,$$

действие которого из $L_p(\Omega)$ ($L_p(\Omega, \rho)$) естественно рассматривать в пространство дробных интегралов специальным образом нормированное.

Как известно, интегродифференциальные операторы дробного порядка в пространстве L_p были изучены Г. Харди и Дж. Литтльвудом [1]. Ряд свойств этих операторов в пространстве $L(a, b)$ изложен М. М. Джрбашяном в его монографии [2] в связи с исследованием мероморфных функций. С. Г. Самко в статье [3] были изучены необходимые и достаточные условия представимости функции интегралом дробного порядка с плотностью из $L_p(-\infty, \infty)$. В § 1 мы обобщаем этот результат для случая весовых пространств на конечном, бесконечном или полубесконечном интервале. Необходимость введения весовых пространств вызвана тем, что решения интегральных уравнений со степенными ядрами имеют на концах промежутка интегрирования особенности как правило более высокого порядка, чем во внутренних его точках. В § 2 исследуются ранее еще никем не изучавшиеся свойства типа „склеивания" дробных интегралов с плотностями из $L_p(\Omega)$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$. Применение результатов этого параграфа позволяет в § 3 дать новое описание пространства дробных интегралов на вещественной оси с плотностями из $L_p(-\infty, \infty)$, $1<p<\frac{1}{\alpha}$. В § 4 дается приложение некоторых результатов, полученных в §§ 1—3, для решения задачи о нетеровости оператора типа потенциала в весовом пространстве на конечном отрезке. Часть излагаемых в настоящей работе результатов докладывалась на III республиканской конференции математиков Белоруссии [9].

§ 1. Описание пространств дробных интегралов

Всюду в дальнейшем, если возникнет необходимость продолжить рассматриваемые функции за пределы промежутка Ω, будем считать $f(x)=0$, когда $x\overline{\in}\Omega$.

1°. Пусть $[a, b]$—конечный отрезок вещественной оси.

Теорема 1.1. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x)=(I^\alpha_{a+}\varphi)(x)$, $\varphi(x)\in L_p(a, b)$, $1<p<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала $L_p(a, b)$ и чтобы в $L_p(a, b)$ существовал предел*

$$G(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(a,b)}}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+G(x)$.

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго вытекает, в силу теоремы II [I], из легко устанавливаемого соотношения

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_0^{\frac{x-a}{\varepsilon}}l(s)\,[\varphi(x-\varepsilon s)-\varphi(x)]\,ds+$$

$$+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\varphi(x)\int\limits_0^{\frac{x-a}{\varepsilon}}l(s)\,ds-\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha},\tag{2}$$

где $l(s)=s^{\alpha-1}-\dfrac{(s-1)^\alpha}{2s}[1-\mathrm{sign}\,(1-s)]$.

Докажем достаточность. Учитывая, что $f(x)=0$ при $x<a$, нетрудно показать, что функции

$$\varphi_\varepsilon(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt$$

принадлежат пространству $L_p(a, b)$ и образуют в нем фундаментальную последовательность. Отсюда получаем $I^{\alpha}_{a+} \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(a,b)}} \varphi_\varepsilon = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(a,b)}} I^{\alpha}_{a+} \varphi_\varepsilon$.

Этот предел почти всюду совпадает с функцией f, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы 10 [1] как следствие вытекает

Теорема 1.2. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^{\alpha}_{a+} \varphi)(x)$, где $\varphi(x) \in L_p([a, b], \rho)$, $\rho(x) = (x-a)^{\alpha_a}_{} (b-x)^{\alpha_b}$; $-1 < \alpha_a, \alpha_b < p-1$; $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p([a, b], \rho)$;

2) *в $L_p([a, b], \rho)$ существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_{1+\delta}(a,b)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt,$$

где $\delta > 0$ сколь угодно мало.

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + G(x)$.

Утверждения теорем 1.1, 1.2 с очевидными изменениями имеют место для интеграла I^{α}_{-b}.

2°. Рассмотрим случай, когда $\Omega = (a, \infty)$, $-\infty < a < \infty$. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x) \in L_p([-\infty, \infty], \rho)$, $\rho(x) = (1+|x|)^{\gamma}$, $1<p<\infty$,

$$\alpha p - 1 < \gamma < p - \max(\alpha p, 1),\ l(s) = s^{\alpha-1} - \frac{(s-1)^{\alpha}}{2s}[1-\operatorname{sign}(1-s)].$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p([-\infty, \infty], \rho)}} \int\limits_0^{\infty} [\varphi(x-\varepsilon s) - \varphi(x)]\, l(s)\, ds = 0.$$

Получим теперь теоремы, дающие описание образов оператора I^{α}_{a+} в весовых пространствах на полуоси.

Теорема 1.3. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)$, где $\varphi(x) \in L_p(\Omega, \rho)$, $\rho(x) = (1+|x|)^{\gamma}$, $1 < p < \infty$, $\alpha p - 1 < \gamma < p - \max(\alpha p, 1)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $f(x) \in L_p(\Omega, (1+|x|)^{\gamma-\alpha p})$;

2) *в $L_p(\Omega, \rho)$ существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(\Omega,\rho)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}+G(x).$

Доказательство. Необходимость. Соотношение 1) легко выводится из теоремы 10 [1]. Выполнение условия 2) вытекает, на основании леммы 1, из равенства (2), так как в силу теоремы 10 [1] $f(x)(x-a)^{-\alpha}\in L_p(\Omega,\rho)$.

Достаточность. Пусть

$$\psi_\varepsilon(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt \text{ и } a<N<\infty.$$

Обозначим через $f_N(x)$ сужение на $[a, N]$ функции $f(x)$. Имеем

$$\psi_{\varepsilon N}(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f_N(x)-f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt\to G_N(x)\ (\in L_p(a,N)) \text{ в } L_p(a,N).$$

Следовательно, по теореме 1.1, $f_N(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi_N)(x)$, где

$$\varphi_N(x)=G_N(x)+\frac{f_N(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}\in L_p(a,N).$$

Далее пусть

$$\varphi(x)=G(x)+\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}};\ (P_N\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi_N(x), & x\leqslant N;\\ 0, & x>N.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi(x)\in L_p(\Omega,\rho)$. Действительно, $G(x)\in L_p(\Omega,\rho)$ по условию, а для второго слагаемого выполняются соотношения

$$\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}\in L_p(a,N);\quad \int\limits_N^{\infty}\frac{|f(x)|^p(1+|x|)^{\gamma}\,dx}{(x-a)^{\alpha p}}\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\int\limits_N^{\infty}|f(x)|^p(1+|x|)^{\gamma-\alpha p}\,dx<\infty.$$

Покажем, что $(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)=f(x)$. Имеем

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=I^{\alpha}_{a+}\lim_{\substack{N\to\infty\\ L_p(\Omega,\rho)}}P_N\varphi=\lim_{\substack{N\to\infty\\ L_p(\Omega,(1+|x|)^{\gamma-\alpha p})}}I^{\alpha}_{a+}P_N\varphi=f,$$

так как

$$\left\{\int\limits_a^{\infty}|f(x)-(I^{\alpha}_{a+}P_N\varphi)(x)|^p(1+|x|)^{\gamma-\alpha p}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left\{\int\limits_N^{\infty}|f(x)-(I^{\alpha}_{a+}P_N\varphi)(x)|^p(1+|x|)^{\gamma-\alpha p}\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\to 0,$$

когда $N\to\infty$. Теорема доказана.

Следующая теорема обобщает результат теоремы 1.3 для пространства $L_p(\Omega, (x-a)^{\alpha_a}(1+|x|)^{\gamma})$ с весом более общего вида. Заметим, что оно вложено в $L_r(\Omega, (1+|x|)^{\mu})$, где

$$1<r<\min\left(\frac{p}{1+\alpha_a}, p\right), \ -1<\mu<\frac{r(\alpha_a+\gamma+1)}{p}-1.$$

Теорема 1.4. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде*

$$f(x)=(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x), \ \ \varphi(x)\in L_p(\Omega, \rho), \ \ \rho(x)=(x-a)^{\alpha_a}(1+|x|)^{\gamma},$$

$$1<p<\infty, \ \alpha p-1<\alpha_a<p-1, \ \alpha p-1<\alpha_a+\gamma<p-\max(\alpha p, 1),$$

необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) $f(x)(x-a)^{-\alpha}\in L_p(\Omega, \rho)$;

2) в $L_p(\Omega, \rho)$ *существует предел*

$$G(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_r(\Omega,(1+|x|)^{\mu})}}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x)=G(x)+\dfrac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}$.

Эта теорема легко выводится из предыдущей, если учесть, что

$$L_p(\Omega, (x-a)^{\alpha_a-\alpha p}(1+|x|)^{\gamma})\subset L_r(\Omega, (1+|x|)^{\mu-\alpha r}).$$

Для случая $\Omega=(-\infty, a)$ условия представимости функции дробным интегралом I^{α}_{-a} формулируются аналогично.

3°. Пусть, наконец, Ω совпадает со всей вещественной осью. Следующее утверждение является непосредственным обобщением теоремы 2 из [3] об описании образов потенциалов, действующих из $L_p(-\infty, \infty)$, на случай, когда на бесконечности допускаются весовые особенности.

Теорема 1.5. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде*

$$f(x)=(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \ \varphi(x)\in L_p(\Omega, \rho),$$

$\rho(x)=(1+|x|)^{\gamma}$, $1<p<\infty$, $\alpha p-1<\delta-p-\max(\alpha p, 1)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) $f(x)\in L_q(\Omega, (1+|x|)^{\beta})$, *где* $q=\dfrac{p}{1-\alpha p}$, $\beta=\dfrac{\gamma}{1-\alpha p}$,

если $\alpha p<1$ *и* $q>\max\left(p, \dfrac{1}{1-\alpha}\right)$, $\beta>\max\left(\gamma-\alpha p, \dfrac{1+\gamma-p}{p(1-\alpha)}\right)$,

если $\alpha p\geqslant 1$;

2) $\|f(x+\delta)-f(x)\|_{L_p(\Omega,\rho)} = o(\delta^\alpha)$, *когда* $\delta \to 0$;

3) *в* $L_p(\Omega, \rho)$ *существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ L_p(\Omega,\rho)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt$$

(сходимость интеграла на бесконечности понимается в абсолютном смысле).

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.

Необходимость условия 1) легко получается из теоремы 7 [1]. Необходимость условий 2), 3) доказана в статье [4]. Доказательство достаточности проводится по той же схеме, что и в теореме 2 [3].

§ 2. О „склеивании" пространств дробных интегралов

Обозначим через $I^\alpha_{a+}(L_p)$, $I^\alpha_{-b}(L_p)$ области значений дробных интегралов с плотностями из $L_p(a, b)$. Известно (см., например, [3], 5]), что при $1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$ эти области совпадают:

$$I^\alpha_{a+}(L_p) = I^\alpha_{-b}(L_p) \stackrel{\text{def}}{=} I^\alpha(L_p(a, b))$$

и пространство $I^\alpha(L_p(a, b))$ является банаховым относительно эквивалентных между собой норм

$$\|f\|_1 = \|D^\alpha_{a+} f\|_{L_p}, \quad \|f\|_2 = \|D^\alpha_{-b} f\|_{L_p}.$$

Через D^α_{a+}, D^α_{-b} здесь обозначены операторы дробного дифференцирования, заданные на функциях из $I^\alpha(L_p(a, b))$. В случае, когда $a = -\infty$, $b = \infty$, будем писать просто $I^\alpha_+(L_p)$, $I^\alpha_-(L_p)$, $I^\alpha(L_p)$.

Теорема 2.1. *Пусть* Ω — *конечный или полубесконечный интервал на вещественной оси. Тогда пространство сужений на* Ω *функций из* $I^\alpha(L_p)$ $\left(1 < p < \dfrac{1}{\alpha}\right)$ *совпадает с* $I^\alpha(L_p(\Omega))$.

Доказательство. Пусть $\Omega = [a, b]$, где $-\infty < a < b \leqslant \infty$, и $f(x) = (I^\alpha_+ \varphi)(x)$, $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi(x-a)^\alpha} \int_{-\infty}^{a} \frac{(a-t)^\alpha \varphi(t)}{x-t}\, dt.$$

В силу инвариантности пространства L_p относительно сдвига и теоремы К. И. Бабенко [8], $\psi(x) \in L_p(\Omega)$. Кроме того, $(I^\alpha_{a+}\psi)(x) = f(x)$, когда $x \in \Omega$. Действительно

$$(I^\alpha_{a+}\psi)(x) = (I^\alpha_{a+}\varphi)(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{a} (a-\tau)^\alpha \varphi(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{-\alpha}}{t-\tau}\,dt = (I_+^\alpha \varphi)(x) = f(x).$$

Обратно, пусть $f(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p(\Omega)$. Тогда f можно рассматривать как сужение на Ω функции $\tilde{f}(x) = (I_+^\alpha \tilde{\varphi})(x)$, где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, если $x \in \Omega$ и $\tilde{\varphi}(x) = 0$, если $x \overline{\in} \Omega$. Для левой полуоси доказательство проводится аналогично, но уже с использованием операторов I_-^α, I_{-b}^α.

Теорема 2.2. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, была представима в виде $f(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $(P_{ab}f)(x) = \{f(x),\ x \in [a, b];\ 0,\ x \overline{\in} [a, b]\}$ имела вид: $(P_{ab}f)(x) = (I_+^\alpha \varphi_1)(x)$, $\varphi_1 \in L_p(-\infty, \infty)$. Если это условие выполняется, то при $x \in [a, b]$ $\varphi(x) = \varphi_1(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $\varphi_1(x)$, заданную на вещественной оси следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \varphi(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ -\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} g(x), & x > b, \end{cases}$$

$g(x) \in L_p(b, \infty)$. Действительно

$$g(x) = -\frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau)\,d\tau \int_\tau^b \frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi (x-b)^\alpha} \int_a^b \frac{(b-\tau)^\alpha \varphi(\tau)}{x-\tau}\,d\tau \in L_p(b, \infty).$$

Отсюда следует, что $\varphi_1(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ и утверждение теоремы вытекает из легко проверяемого соотношения

$$(I_{b+}^\alpha g)(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Достаточность. Пусть $(P_{ab}f)(x) = (I_+^\alpha \varphi_1)(x)$. Тогда на основании теоремы 2 из [3]

$$\varphi_1(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{(P_{ab}f)(x) - (P_{ab}f)(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt = 0 \quad \text{при } x < a.$$

Следовательно, для $x \in [a, b]$ имеем: $f(x) = (I^{\alpha}_{+} \varphi_1)(x) = (I^{\alpha}_{a+} \varphi_1)(x)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что из теорем 2.1, 2.2 и теоремы К. И. Бабенко [8] вытекает ограниченность оператора „урезания" $(P_{\Omega} f)(x) \overset{\text{def}}{=} \{f(x),\ x \in \Omega;\ 0,\ x \overline{\in} \Omega\}$ в пространстве $I^{\alpha}(L_p)$.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа о „склеивании" функций, представимых дробными интегралами.

Теорема 2.3. *Пусть* $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \bigcap\limits_{i \neq j} \Omega_j = \varnothing$, $f_i(x) \in I^{\alpha}(L_p(\Omega_i))$. *Тогда функция* $f(x)$, *заданная на* Ω *следующим образом*: $f(x) = f_i(x)$, $x \in \Omega_i$, *принадлежит* $I^{\alpha}(L_p(\Omega))$.

Справедливость этой теоремы легко устанавливается на основании теорем 2.1 и 2.2.

§ 3. К вопросу об описании пространства $I^{\alpha}(L_p)$

В настоящем параграфе мы коснемся проблемы описания пространства $I^{\alpha}(L_p)$. Известна [3] следующая

Теорема 3.1. Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^{\alpha}_{+} \varphi)(x)$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1) $f(x) \in L_p((1+|x|)^{-\alpha p})$; 2) $\omega_p(f, \delta) = \|f(x+\delta) - f(x)\|_{L_p} = o(\delta^{\alpha})$ при $\delta \to 0$;

3) $D^{\alpha}_{+} f \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt \in L_p$.

В этой теореме под производной $D^{\alpha}_{+} f$ подразумевается предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \tag{3}$$

причем сходимость на бесконечности понимается в абсолютном смысле. Как показано в § 1, в описании пространств дробных интегралов на отрезке и полуоси оценка интегрального модуля непрерывности функции f отсутствует. Возникает вопрос: нельзя ли избавиться от этого условия и в случае всей вещественной оси? Необходимость решения этого вопроса вытекает как из чисто теоретических соображений, так и из того факта, что в конкретных ситуациях оценка интегрального модуля непрерывности вызывает большие технические трудности. Вопрос о том, можно ли в выше приведенной теореме ограничиться условиями 1), 3), пока что остается открытым. Однако на основании результатов, полученных в §§ 1, 2, ясно, что оценки модуля непрерывности можно избежать, для чего необходимо убедиться в том, что сужения функции f на положительную и отрицательную полуоси принадлежат соответственно пространствам $I^{\alpha}_{0+}(L_p)$ и $I^{\alpha}_{-0}(L_p)$. Заметим еще, что в теореме 3.1 можно избавиться от второго условия, если под производной $D^{\alpha}_{+} f$ понимать предел

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ L_p}} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f_N(x)-f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \text{ где } f_N(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant -N, \\ 0, & x < -N. \end{cases} \tag{4}$$

Для доказательства этого факта получим сначала один вспомогательный результат.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Рассмотрим какую-нибудь числовую последовательность $\{a_n\}$, сходящуюся к a. Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)$, $\varphi \in L_p(a, b)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $$f(x) \in \begin{cases} L_p(a, b), & \text{если } [a, b] \text{ — конечный промежуток,} \\ L_p([a, b], \rho),\ \rho(x) = (1+|x|)^{-\alpha p}, & \text{если } [a, b] \text{ — бесконечный промежуток,} \end{cases}$$

2) *сужение $f_n(x)$ функции $f(x)$ на $[a_n, b]$ представимо в виде $f_n(x) = (I^{\alpha}_{a_n+}\varphi_n)(x)$, где $\varphi_n(x) \in L_p(a_n, b)$;*

3) *в $L_p(a, b)$ существует предел $G(x) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ L_p}} (P_{a_n b}\varphi_n)(x)$. Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.*

Доказательство. Необходимость условия 1) доказана в теоремах первого параграфа. Необходимость второго условия получается на основании теоремы 2.2, причем $\varphi_n(x)$ имеет вид

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi (x-a_n)^{\alpha}} \int_a^{a_n} \frac{(a_n-t)^{\alpha}\varphi(t)}{x-t}\, dt.$$

Легко видеть, что $(P_{a_n b}\varphi_n)(x) \to \varphi(x)$ в $L_p(a, b)$ при $n \to \infty$.

Действительно

$$\|P_{a_n b}\varphi_n - \varphi\| \leqslant \text{const} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{|x-a_n|^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_n-t|^{\alpha} (P_{aa_n}\varphi)(t)}{x-t}\, dt \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\, \|P_{aa_n}\varphi\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Достаточность условий 1)—3) вытекает из соотношений

$$f = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p(L_p(\rho))}} f_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p(L_p(\rho))}} (\overline{I^\alpha_{a_n+}\varphi_n}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p(L_p(\rho))}} I^\alpha_{a+}\overline{\varphi}_n = I^\alpha_{a+} \lim_{\substack{n\to\infty \\ L_p}} \overline{\varphi}_n = I^\alpha_{a+}\varphi,$$

где через $\overline{f}_n$ обозначена функция, определяемая равенствами:

$$\overline{f}_n(x) = f(x), \text{ если } x \in [a_n, b] \text{ и } \overline{f}_n(x) = 0, \text{ если } a \leqslant x < a_n.$$

Непосредственно из теоремы 3.2 вытекает основная в этом параграфе

Теорема 3.3. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на вещественной оси, была представима в виде $f = I^\alpha_+ \varphi$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, необходимо и достаточно выполнения условий*

1) $f(x) \in L_p((1+|x|)^{-\alpha p})$;

2) *в L_p существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ L_p}} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f_N(x) - f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt.$$

Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.

Доказательство очевидно.

§ 4. Операторы типа потенциала на отрезке вещественной оси

В качестве приложения некоторых результатов, полученных в предыдущих параграфах, приведем решение задачи о нетеровости оператора типа потенциала в весовом пространстве на отрезке вещественной оси.

Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^b \frac{c(x, y)}{|x-y|^{1-\alpha}} \varphi(y)\, dy, \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

где $0 < \alpha < 1$, функция $c(x, y)$ ограничена и на диагонали допускает разрыв первого рода: $c(x, y) = \{u(x, y),\ x > y;\ v(x, y),\ x < y\}$.

Аналогично тому, как это делалось в § 2, введем банахово пространство $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$ дробных интегралов порядка α с плотностями из $L_p([a, b], \rho)$.

Получим необходимые и достаточные условия нетеровости оператора (5) из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$. Вводя обозначения $u(x) = u(x, x-0)$, $v(x) = v(x, x+0)$, оператор K можно представить в виде суммы: $K = K_0 + T_1 + T_2$, где $(K_0\varphi)(x) = (I^\alpha_{a+} u\varphi)(x) + (I^\alpha_{-b} v\varphi)(x)$,

$$(T_1\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(x, y) - u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \varphi(y)\, dy;$$

$$(T_2\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{v(x, y) - v(y, y)}{(y-x)^{1-\alpha}} \varphi(y)\, dy. \tag{6}$$

Преобразуя оператор K_0 с помощью тождества (15) ([5], стр. 303), получаем

$$K_0\varphi = I^{\alpha}_{-b}\, r_b^{-1} N r_b\, \varphi, \tag{7}$$

где $r_b(x) = (b-x)^{\alpha}$, $N\psi = a_1\psi + Sa_2\psi$, $a_1(x) = u(x)\cos\alpha\pi + v(x)$,

$$a_2(x) = -u(x)\sin\alpha\pi,\ (S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(y)\,dy}{y-x}.$$

Так как I^{α}_{-b} есть гомеоморфизм пространства $L_p([a, b], \rho)$ на $I^{\alpha}(L_p([a, b], \rho))$, то, как видно из (7), нетеровость оператора K_0 из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^{\alpha}(L_p([a, b], \rho))$ эквивалентна нетеровости сингулярного оператора N в $L_p([a, b], \rho_1)$, где $\rho_1(x) = (x-a)^{\alpha_a}(b-x)^{\alpha_b - \alpha p}$ и индексы этих операторов равны.

Перейдем к исследованию операторов T_1, T_2. В целях удобства дальнейших рассуждений сформулируем результат теоремы 1.2 в других терминах. Справедлива следующая

Теорема 1.2′. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f(x) = (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)$, где $\varphi(x) \in L_p([a, b], \rho)$, $\rho(x) = (x-a)^{\alpha_a}(b-x)^{\alpha_b}$, $-1 < \alpha_a, \alpha_b < p-1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) *$f(x) \in L_{1+\delta}(a, b)$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало;*
2) *в $L_p([a, b], \rho)$ существует предел*

$$G(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_{1+\delta}(a, b)}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt$$

(при $x < a$ полагается $f(x) = 0$). Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) = G(x)$.

Утверждение теоремы 1.2′ с очевидными изменениями имеет место и для оператора I^{α}_{-b}.

Лемма 2. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ по переменной x удовлетворяют на $[a, b]$ условию Гельдера порядка $\Lambda > \alpha$ равномерно по y. Тогда операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^{\alpha}(L_p([a, b], \rho))$.*

Доказательство. Рассмотрим первый оператор. Нам достаточно установить справедливость следующих фактов:

1°. $(T_1\varphi)(x) \in I^\alpha_{a+}(L_p([a,\ b],\ \rho))$;

2°. Оператор $D^\alpha_{a+}\ T_1$ вполне непрерывен в $L_p\,[a,\ b],\ \rho)$. Для доказательства первого утверждения воспользуемся теоремой 1.2'. Выполнение первого ее условия очевидно.

Далее, пусть

$$f(x) = (T_1\varphi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{u(x,y)-u(y,y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,\varphi(y)\,dy$$

(при $x < a$ полагается $\varphi(x)=0$). Путем несложных выкладок можно убедиться в справедливости равенства

$$\psi_\varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{1+\alpha}}\,dy = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}\varphi(s)\,ds\,\times$$

$$\times\int\limits_{s}^{x-\varepsilon}\frac{u(x,s)-u(y,s)}{(y-s)^{1-\alpha}(x-y)^{1+\alpha}}\,dy +$$

$$+\int\limits_{-1}^{\infty}k(s)\,ds\int\limits_{\varepsilon(1+s)}^{\infty}[u(x,x-y)-u(x-y,x-y)]\,\varphi(x-y)\,\frac{dy}{y},$$

где $k(s) = (s+1)^{\alpha-1} - \dfrac{1}{2}\,s^{\alpha-1}(1+\operatorname{sign} s)$.

Так как

$$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(s)\,ds\int\limits_{s}^{x}\frac{u(x,s)-u(y,s)}{(y-s)^{1-\alpha}(x-y)^{1+\alpha}}\,dy \in L_p([a,\ b],\ \rho)$$

и $\|\psi-\psi_\varepsilon\|_{L_{1+\delta}(a,b)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (в этом легко убедиться, если учесть, что $\int\limits_{-1}^{\infty}k(s)\,ds = 0$), то в силу теоремы 1.2' $(T_1\varphi)(x) \in I^\alpha_{a+}(L_p([a,\ b],\ \rho))$ и $(D^\alpha_{a+}\ T_1\varphi)(x) = \psi(x)$. Справедливость пункта 2° вытекает из оценки $|\psi(x)| \leqslant \text{const}\int\limits_{a}^{x}\frac{|\varphi(s)|\,ds}{(x-s)^{1-\lambda}}$ на основании теоремы С. Г. Михлина ([6], стр. 38) о полной непрерывности оператора типа потенциала в весовом пространстве.

Аналогичными рассуждениями для оператора T_2 можно показать, что $(T_2\varphi)(x) \in I^\alpha_{-b}(L_p([a,\ b],\ \rho))$, и оператор $D^\alpha_{-b}\ T_2$ вполне непрерывен в $L_p([a,\ b],\ \rho)$. Лемма доказана.

Применяя теперь результаты И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника [7] получаем основную в этом параграфе теорему.

Теорема 4.1. *Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ по переменной x удовлетворяют на $[a, b]$ условию Гельдера порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по y, а функции $u(x) = u(x, x)$ и $v(x) = v(x, x)$ непрерывны на $[a, b]$. Для того чтобы оператор K был нетеровым из $L_p([a, b], \rho)$ в $I^\alpha(L_p([a, b], \rho))$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\inf |u(x) e^{i\alpha\pi} + v(x)| > 0$, $x \in [a, b]$;

2) *функция*

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x) e^{-i\alpha\pi} + v(x)}{u(x) e^{i\alpha\pi} + v(x)}, & x \in [a, b], \\ 1, & x \in [-\infty, \infty] \setminus [a, b], \end{cases}$$

является ω-неособенной, где $\omega = (p, \alpha_a, \alpha_b - \alpha p)$.

При выполнении этих условий индекс оператора K равен ω-индексу функции $Q(x)$ (определение ω-неособенной функции и ω-индекса см. в [7]).

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность С. Г. Самко за внимание к работе и Н. К. Карапетянцу за полезное обсуждение.

Ростовский государственный университет

Поступило 15.XI.1971

Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Ուղղագիծ կոնտուրի վրա կոտորակային ինտեգրալների տարածությունների մասին *(ամփոփում)*

Նկարագրվում են այն ֆունկցիաների տարածությունները, որոնք ներկայացվում են կոտորակային կարգի ինտեգրալներով՝ $L_p(\Omega, \rho)$ խտության ֆունկցիաների:

Ապացուցվում է տարբեր հատվածների վրա կոտորակային ինտեգրալներով տրված ֆունկցիաների համընկնման թեորեմ: Ստացված են և $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$-ից խտության ֆունկցիաներով կոտորակային ինտեգրալով ֆունկցիայի ներկայացման անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, ելնելով կոտորակային կարգի ածանցյալի հետևյալ սահմանումից՝

$$D_+^\alpha f = \lim_{\substack{N \to \infty \\ L_p}} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_p}} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f_N(x) - f_N(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt,$$

որտեղ $f_N(x) = f(x)$, եթե $x > -N$ և $f_N(x) = 0$, եթե $x < -N$:

Նշված արդյունքները կիրառվում են $L_p(\Omega, \rho)$-ում պոտենցյալի տիպի օպերատորների նետերյանության ուսումնասիրման համար:

B. S. ROUBIN. *Spaces of fractional integrals on a linear contour* (summary)

A description of spaces of functions hich may be represented by fractional order integrals with densities from $L_p(\Omega, \rho)$ is given. The necessary and sufficient conditions for representation of a function by fractional integral with density from $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ are obtained. The results are applied to the investigation of potential type operators in $L_p(\Omega, \rho)$ with respect of noetherity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Hardy, J. Littlewood.* Some properties of fractional integrals. I, Math. Z., 27, 1928, 565—606.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
3. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 196, № 2, 1971, 299—301.
4. *С. Г. Самко.* Об интегральном модуле непрерывности потенциалов с плотностями, суммируемыми на оси с весом, Математический анализ и его приложения, 1969, 175—184.
5. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференц. уравнения, 4, № 2, 1968, 298—314.
6. *С. Г. Михлин.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
7. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом, ДАН СССР, 185, № 4, 1969, 745—748.
8. *К. И. Бабенко.* О сопряженных функциях, ДАН СССР, 62, № 2, 1948, 157—160.
9. *Б. С. Рубин.* О нетеровости операторов типа потенциала на прямолинейном контуре, III республ. конф. математиков Белоруссии, Тезисы докладов, Минск, 1971, ч. I, стр. 108.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS