ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կորսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала). могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaying of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

Ф. Г. АРУТЮНЯН

О БАЗИСАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ИЗОМОРФНОЕ $L_1[0, 1]$ ПОДПРОСТРАНСТВО

§ 1. Введение

Определение. Система элементов $\{x_n\}_1^\infty$ банахова пространства X называется базисом в X, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, x_n, \tag{1}$$

который сходится к x. Базис называется нормированным, если $\|x_n\|=1$ для всех $n \geq 1$. Базис $\{x_n\}_1^\infty$ банахова пространства X называется безусловным, если ряд (1) сходится к x при любой перестановке его членов.

Существуют банаховы пространства, которые имеют базис и, вместе с тем, не имеют безусловного базиса. А именно, в работах [1] и [2] доказаны, соответственно, теоремы 1 и 2, которые формулируются следующим образом.

Теорема 1. В пространстве $L_1[0, 1]$ не существует безусловного базиса.

Теорема 2. В пространстве $C[0, 1]$ не существует безусловного базиса.

В работе [3] нами даны простые доказательства указанных теорем. Метод доказательства теоремы 1, предлагаемый в этой работе, позволяет доказать более общий результат, который, в частности, содержит теоремы 1 и 2. Установлению этого факта и посвящена настоящая работа.

Приведем следующее определение (см. [4], стр. 78): изоморфизм двух линейных нормированных пространств X и Y есть взаимнооднозначное взаимнонепрерывное линейное отображение $A: X \to Y$, при котором $A(X) = Y$. Если такой изоморфизм существует, то пространства X и Y называются изоморфными.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема (основная). *Если банахово пространство X содержит подпространство X^*, изоморфное пространству $L_1[0, 1]$, то в X не существует нормированного безусловного базиса.*

В случае $X = X^* = L_1[0, 1]$ получим теорему 1. Что же касается теоремы 2, то она следует из основной теоремы, в силу того, что пространство $C[0, 1]$ является универсальным банаховым пространством в классе всех сепарабельных банаховых пространств (см. [5], стр. 208).

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты.

1°. Коэффициенты $a_n(x)$, $n \geq 1$ в ряде (1) являются линейными непрерывными функционалами в X и, кроме того

$$a_n(x_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m;\ n \geq 1,\ m \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

2°. Любой линейный функционал Φ в пространстве $L_1[0, 1]$ имеет вид

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\psi(t)\,dt, \tag{3}$$

где $\psi(t)$ — ограниченная измеримая функция на $[0, 1]$.

§ 2. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Пусть* $\{x_n\}_1^\infty$ — *безусловный базис в банаховом пространстве* X, *тогда существует число* $M>0$ *такое, что если*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,x_n, \quad \|x\| < 1, \tag{4}$$

$$T = \sum_{k=1}^{s} a_{n_k}(x)\,x_{n_k} \tag{5}$$

— *произвольная конечная сумма из элементов ряда* (4), *то* $\|T\| \leq M$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда очевидно, для любого натурального числа $k \geq 1$ существуют полином T_k по системе элементов $\{x_n\}_1^\infty$ и некоторая его подсумма T_k', которые удовлетворяют соотношению

$$\|T_k\| \leq 1,\ \|T_k'\| \geq 2^k k,\ k \geq 1. \tag{6}$$

Мы можем предполагать, как в этом легко убедиться, что слагаемые полинома T_k предшествуют слагаемым T_{k+1}, $k \geq 1$ и, следовательно, полиномы T_k не имеют общих слагаемых.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} T_k \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^k} T_k' + \frac{1}{2^k}(T_k - T_k')\right]. \tag{8}$$

Очевидно, раскрытый ряд (8) является перестановкой раскрытого ряда (7). Из соотношения (6) следует, что ряд (7) сходится и, следовательно, раскрытый ряд (7) является разложением некоторого элемента $x \in X$.

Из соотношения (6) следует $\left\| \frac{1}{2^k} T'_k \right\| \geqslant k$, и поэтому раскрытый ряд (7) расходится. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\{x'_n\}_1^\infty$ — *нормированный базис в банаховом пространстве* X, X^* — *подпространство пространства* X, $A: L_1[0,1] \to X^*$ — изоморфизм $L_1[0,1]$ *на* X^*. *Тогда для любого множества* $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$, *натурального числа* p *и* $\varepsilon > 0$ *существуют множества* E' *и* E'', *число* q, *удовлетворяющие условиям*

$$E' \cap E'' = \varnothing, \quad E' \cup E'' = E, \quad \mu(E') = \mu(E'') = 1/2\, \mu(E), \tag{9}$$

$$\left\| \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i (A(T))\, x_i - A(T) \right\| < \varepsilon, \tag{10}$$

где $T(t)$ — *функция из* $L_1[0,1]$, *определяемая по формуле*

$$T(t) = \begin{cases} (\mu(E))^{-1}, & \text{при } t \in E' \\ -(\mu(E))^{-1}, & \text{при } t \in E'' \\ 0, & \text{в остальных точках } [0,1]. \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. В пространстве $L_1[0,1]$ определим линейные функционалы Φ_n, $n \geqslant 1$ следующим образом:

$$\Phi_n(f) = \alpha_n(A(f)), \quad f \in L_1[0,1], \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \alpha_n(A(c_1 f_1 + c_2 f_2)) = \\ &= c_1 \Phi_n(f_1) + c_2 \Phi_n(f_2), \quad n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{13}$$

$$|\Phi_n(f)| = |\alpha_n(A(f))| \leqslant \|\alpha_n\| \cdot \|A(f)\| \leqslant \|\alpha_n\| \cdot \|A\| \cdot \|f\|, \quad n \geqslant 1. \tag{14}$$

Таким образом, Φ_n, $n \geqslant 1$ — линейные непрерывные функционалы в $L_1[0,1]$. Следовательно, существуют ограниченные измеримые функции $\psi_n(t)$, $n \geqslant 1$, определенные на $[0,1]$ такие, что

$$\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t)\, \psi_n(t)\, dt \tag{15}$$

для любого $f \in L_1[0,1]$, $n \geqslant 1$.

Положим

$$Q(t) = \mu([0,t] \cap E), \quad t \in E \tag{16}$$

и рассмотрим

$$\rho_j(t) = \begin{cases} (\mu(E))^{-\frac{1}{2}} \cdot r_j\left(\dfrac{Q(t)}{\mu(E)}\right), & \text{при } t \in E \\ 0, & \text{в остальных точках } [0,1]; \ j \geqslant 1, \end{cases} \tag{17}$$

где $r_j(t)$ — функции Радемахера.

Система функций $\{\rho_j(t)\}_1^\infty$ образует ортонормированную систему в $L_2[0, 1]$. Следовательно, имеем

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_k(A(\rho_j)) = \lim_{j\to\infty} \Phi_k(\rho_j) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_0^1 \rho_j(t)\,\psi_k(t)\,dt = 0, \tag{18}$$

для любого $k \geqslant 1$.

Выберем j таким, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha_k(A(\rho_j))| = |\Phi_k(\rho_j)| = \left|\int_0^1 \rho_j(t)\,\psi_k(t)\,dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2p}(\mu(E))^{\frac{1}{2}},\ 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{19}$$

Положим

$$T(t) = (\mu(E))^{-\frac{1}{2}}\rho_j(t). \tag{20}$$

Если теперь $E' = \{t : T(t) > 0\}$ и $E'' = \{t : T(t) < 0\}$, то из определения системы Радемахера и из (17) получим (9) и (11).

Выберем число q таким, чтобы выполнялось

$$\left\|\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i(A(T))\,x_i - A(T)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{21}$$

Из (19)—(21) получим

$$\left\|\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i(A(T))\,x_i - A(T)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{p+q} \alpha_i(A(T))\,x_i - A(T)\right\| + \sum_{i=1}^{p}|\alpha_i(A(T)| < \varepsilon. \tag{22}$$

Тем самым лемма доказана.

Замечание. Функция $T(t)$, определенная по формуле (11), удовлетворяет условию $\|T\|_{L_1[0,1]} = 1$.

Доказательство теоремы. Пусть $M > 0$ — произвольное число, а $l > 1 + (2 + 4M)\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$, и пусть $\{x_n\}_1^\infty$ — нормированный базис в X. Положим

$$n_0 = 0,\ E_0 = [0, 1],\ T_0(t) = 1,\ \text{при } t \in E_0. \tag{23}$$

Существует число $n_1 > 1$, для которого выполняется

$$\left\|\sum_{i=n_0+1}^{n_1} \alpha_i(A(T_0))\,x_i - A(T_0)\right\| \leqslant \frac{\|A\|}{2}\cdot \tag{24}$$

Далее по лемме 2 можно указать множества $E'_k, E''_k, E_k, 1 \leqslant k \leqslant 4l$, числа $n_1 < n_2 < \cdots < n_{4l+1}$, которые удовлетворяют условиям

$$E'_k \cap E''_k = \varnothing, \; E'_k \cup E''_k = E_k = E'_{k-1}, \tag{25}$$

$$\mu(E'_k) = \mu(E''_k) = \frac{1}{2}\,\mu(E_k) = \frac{1}{2^k}, \; 1 \leqslant k \leqslant 4l, \; E'_0 = E_0,$$

$$\left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i(A(T_k))\, x_i - A(T_k) \right\| < \frac{\|A\|}{2^{k+1}}, \; 1 \leqslant k \leqslant 4l. \tag{26}$$

T_k, $1 \leqslant k \leqslant 4l$ в (26) определяются по формулам (11), а именно

$$T_k(t) = \begin{cases} (\mu(E_k))^{-1}, \text{ при } t \in E'_k \\ -(\mu(E_k))^{-1}, \text{ при } t \in E''_k \\ 0, \text{ в остальных точках } [0, 1]; \quad 1 \leqslant k \leqslant 4l. \end{cases} \tag{27}$$

Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{s} T_k(t) = \begin{cases} (\mu(E'_s))^{-1}, \text{ при } t \in E'_s \\ 0, \text{ в остальных точках } [0, 1]; \; 0 \leqslant s \leqslant 4l. \end{cases} \tag{28}$$

В случае $s = 0$ соотношение (28) очевидно.

Пусть соотношение (28) выполнено для некоторого s, $0 \leqslant s < 4l$. Если $t \in E'_{s+1}$, то в силу (25) и (27) будем иметь

$$\sum_{k=0}^{s+1} T_k(t) = \sum_{k=0}^{s} T_k(t) + T_{s+1}(t) =$$

$$= (\mu(E'_s))^{-1} + (\mu(E_{s+1}))^{-1} = 2^s + 2^s = 2^{s+1} = (\mu(E'_{s+1}))^{-1} \tag{29}$$

Пусть теперь $t \overline{\in} E'_{s+1}$. Если $t \overline{\in} E''_{s+1}$, то $T_{s+1}(t) = 0$ и, следовательно

$$\sum_{k=0}^{s+1} T_k(t) = 0. \tag{30}$$

Если же $t \in E''_{s+1}$, то

$$\sum_{k=0}^{s+1} T_k(t) = \sum_{k=0}^{s} T_k(t) + T_{s+1}(t) = \tag{31}$$

$$= (\mu(E'_s))^{-1} - (\mu(E_{s+1}))^{-1} = 2^s - 2^s = 0.$$

Соотношения (29)—(31) доказывают соотношения (28), откуда, в частности, получим

$$\left\| \sum_{k=0}^{4l} T_k \right\|_{L_1[0,1]} = 1. \tag{32}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{l} T_{4k}. \tag{33}$$

Для любого множества $E \subset [0, 1]$ положим

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in E \\ 0, & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases} \tag{34}$$

Из (25), (27), (34) и в силу замечания имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{l} T_{4k} \right\|_{L_1[0,1]} = \left\| \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot (\chi_{E_0 \setminus E_{4(k+1)}} + \chi_{E_{4(k+1)}}) + T_{4l} \right\|_{L_1[0,1]} =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k} \setminus E_{4(k+1)}} + \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} + T_{4l} \right\|_{L_1[0,1]} \geqslant$$

$$\geqslant \left\| \sum_{k=1}^{l-1} T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k} \setminus E_{4(k+1)}} + T_{4l} \right\|_{L_1[0,1]} - \sum_{k=1}^{l-1} \left\| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} \right\|_{L_1[0,1]} =$$

$$= \sum_{k=1}^{l-1} \left\| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k}} \right\|_{L_1[0,1]} - \sum_{k=1}^{l-1} \left\| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} \right\|_{L_1[0,1]} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{l-1} \| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4k}} \|_{L_1[0,1]} - 2 \sum_{k=1}^{l-1} \| T_{4k} \cdot \chi_{E_{4(k+1)}} \|_{L_1[0,1]} =$$

$$= l - 2 \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2^{4k-1}}{2^{4(k+1)-1}} = \frac{7(l-1)}{8} + 1 > \frac{l-1}{2}. \tag{35}$$

Из (26) и (32) получим

$$\left\| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i(A(T_k))\, x_i \right\| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i(A(T_k))\, x_i - A(T_k) \right\| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{4l} A(T_k) \Bigg\| \leqslant \frac{1}{2} \left\| A\left(\sum_{k=0}^{4l} T_k \right) \right\| + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i(A(T_k)) x_i - A(T_k) \right\| <$$

$$< \frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4l} \frac{\|A\|}{2^{k+1}} < \frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|}{2} = \|A\|. \tag{36}$$

Из (26) и (35) имеем

$$\left\| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} a_i(A(T_{4k}))\, x_i \right\| = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{l} \left[\sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} a_i(A(T_{4k}))\, x_i - \right. \right.$$

$$\left. \left. - A(T_{4k}) + \sum_{k=1}^{l} A(T_{4k}) \right\| \geqslant \frac{1}{2} \left\| A\left(\sum_{k=1}^{l} T_{4k} \right) \right\| - \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{l} \left[\sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} a_i(A(T_{4k})) x_i - \right. \right.$$

$$\left. \left. - A(T_{4k}) \right] \right\| \geqslant \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \left\| \sum_{k=1}^{l} T_{4k} \right\|_{L_1[0,1]} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} \frac{\|A\|}{2^{4k+1}} > \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \left[\frac{l-1}{2} - \frac{\|A\|}{2} \right] = \tag{37}$$

$$= \frac{l-1-2\,\|A\|\,\|A^{-1}\|}{4\,\|A^{-1}\|} > M\,\|A\|.$$

Из (36) и (37) получим

$$\left\| \frac{1}{2\,\|A\|} \sum_{k=0}^{4l} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_i (A\,(T_k))\, x_i \right\| \leqslant 1 \tag{38}$$

и

$$\left\| \frac{1}{2\,\|A\|} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=n_{4k}+1}^{n_{4k+1}} \alpha_i (A\,(T_{4k}))\, x_i \right\| > M. \tag{39}$$

Соотношения (38) и (39), в силу леммы 1, показывают, что базис $\{x_n\}_1^\infty$ не является безусловным. Тем самым теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 13.IV.1972

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. L_1 [0, 1]-ին իզոմորֆ մաս պարունակող Բանախի տարածությունների բազիսների մասին *(ամփոփում)*

Եթե X Բանախի տարածությունը պարունակում է L_1 [0,1]-ին իզոմորֆ X^* ենթատարածություն, ապա X-ում գոյություն չունի ոչ պայմանական բազիս։

F. G. ARUTUNIAN. *On the basis in Banach spaces containing a subspace isomorphic to* L_1 [0, 1] (summary)

If Banach space X containes a subspace X^*, which is isomorphic to L_1 [0, 1], the X does not possess unconditional basis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Pelczinski*. Projections in certain Banach Spaces, Studia math., 19, 1960, 209—228.
2. *S. Karlin*. Bases in Banach spaces, Duke Math. J., 15, 1948, 971—985.
3. *Ф. Г. Арутюнян*. О базисах пространств L_1 [0, 1] и C [0, 1], Мат. заметки, 11, № 3, 1972, 241—249.
4. *Н. Данфорд, Дж. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, ч. 1. Перевод с англ., М., ИИЛ, 1962. (РЖМат. 1963, 6Б336К).
5. *Л. А. Люстерник* и *В. И. Соболев*. Элементы функционального анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

А. Г. АСЛАНЯН, В. Б. ЛИДСКИЙ

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Краевая задача, к которой приводит отыскание частот оболочки вращения, защемленной по двум параллелям, имеет вид [1]

$$\sum_{j=1}^{3}(L_{ij}+h^2/12\, N_{ij})\, u_j=\lambda u_i, \quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{0.1}$$

$$u_1|_\Gamma=u_2|_\Gamma=u_3|_\Gamma=\partial u_3/\partial s|_\Gamma=0. \tag{0.2}$$

Здесь L_{ij} и N_{ij} — операторы, содержащие дифференцирование по длине дуги s меридиана срединной поверхности оболочки и полярному углу φ; u_i-компоненты вектора смещения точки срединной поверхности; Γ—граница оболочки; h—малый параметр—толщина оболочки. Задача (0.1—2) является самосопряженной и имеет положительный дискретный спектр. Пусть $n(\lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи (0.1—2), ($n(\lambda)$ равно числу собственных значений задачи, не превосходящих данного λ).

В настоящей статье мы находим асимптотическую формулу для ($n(\lambda)$ при $h\to 0$. Близкая по характеру задача возникает в квантовой механике (см. [2] и [3], там же библиография). Своеобразие задачи 0.1—2) состоит в том, что стоящий в левой части (0.1) оператор $L+h^2/_{12}N$ является эллиптическим, в то время как ни L, ни N этим свойством не обладают.

Для формулировки результата сделаем несколько замечаний. Отделив в (0.1) угловую координату, придем к системе уравнений (см. [4])*.

$$-u''-\frac{B'}{B}u'-\frac{(1+\sigma)\,m}{2B}v'-\left[\left(\frac{B'}{B}\right)'+(1-\sigma)\left(\frac{1}{R_1R_2}-\frac{m^2}{2B^2}\right)\right]u+$$
$$+\frac{(3-\sigma)\,m}{2}\frac{B'}{B^2}v+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)w'+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)'w=\lambda u,$$
$$-\frac{1-\sigma}{2}v''+\frac{(1+\sigma)\,m}{2B}u'-\frac{1-\sigma}{2}\frac{B'}{B}v'+\frac{(3-\sigma)\,m}{2}\frac{B'}{B^2}u-$$
$$-\left[\frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)'+\frac{1-\sigma}{R_1R_2}-\frac{m^2}{B^2}\right]v-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w=\lambda v, \tag{0.3}$$

* Следуя [4], мы полагаем сначала $u_1=u(s)\cos m\varphi$, $u_2=v(s)\sin m\varphi$, $u_3=w(s)\cos m\varphi$, а затем в этих формулах меняем местами косинус и синус, что приводит к замене в (0.3) m на $-m$.

$$\mu^4 \frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}\,B\frac{d}{ds}-\frac{m^2}{B}\right)\frac{1}{B}\left(\frac{d}{ds}\,B\frac{dw}{ds}-\frac{m^2}{B}w\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\sigma}{R_2}\right)\frac{du}{ds}-\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{B'}{B}u-$$

$$-\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v+\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)w=\lambda w.$$

Здесь $B(s)>0$ — расстояние от точки меридиана до оси симметрии; $a\leqslant s\leqslant b$; $R_1^{-1}(s)$ и $R_2^{-1}(s)$ — главные кривизны оболочки; m — целое число, равное числу волн по параллели: σ — коэффициент Пуассона, а μ — малый параметр:

$$\mu^4=\frac{1}{12}h^2.$$

Граничные условия (0.2) принимают вид

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=w(a)=w(b)=w'(a)=w'(b). \qquad (0.4)$$

Исследование спектров задач (0.3—4) при различных m приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Для функции распределения частот $n(\lambda)$ оболочки вращения с меридианом $B(s)$ $(a\leqslant s\leqslant b)$ справедлива при фиксированном $\lambda>0$ и $\mu\to 0$ асимптотическая формула*

$$n(\lambda)=\frac{1}{4\pi\mu^2}\left[\int_a^b B(s)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda-(1-\sigma^2)\left[\frac{\sin^2\theta}{R_1(s)}+\frac{\cos^2\theta}{R_2(s)}\right]^2}\,d\theta\right)ds+\right.$$

$$\left.+O(\mu^{1/3})\right] \qquad (0.5)$$

с константой в О-члене, не зависящей от λ при $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$.*

Вопросу распределения частот тонких оболочек посвящен ряд работ по механике [3—8]. В частности, в [5] приводится интеграл, аналогичный внутреннему интегралу в (0.5), в случае оболочки, главные кривизны которой близки к постоянным. К формуле, аналогичной (0.5) в случае оболочек вращения, пришел недавно П. Е. Товстик [8], при дополнительных предположениях относительно корней разрешающего уравнения, что оставляло открытым вопрос о применимости формулы во всем диапазоне частот.

Строгое доказательство формулы (0.5) при всех λ с оценкой остаточного члена получено в настоящей статье, по-видимому, впервые.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру и П. Е. Товстику за полезные обсуждения и советы.

* По поводу остаточного члена см. замечание 1 на стр. 248.

§ 1. Вспомогательные леммы

Систему уравнений (0.3) условимся сокращенно записывать в виде

$$L_\mu f = \lambda f, \tag{1.1}$$

где $f = (u, v, w)$. Пусть* $n(m, \lambda)$ — функция распределения задачи (0.3), (0.4) при фиксированном m и пусть $c \in (a, b)$. Рассмотрим на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ две краевые задачи для системы (1.1) с нулевыми граничными условиями вида (0.4) на концах отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, и пусть $n_1(m, \lambda)$ и $n_2(m, \lambda)$ — соответствующие функции распределения.

Лемма 1.1. *При всех λ справедливо неравенство*

$$n_1(m, \lambda) + n_2(m, \lambda) \leqslant n(m, \lambda) \leqslant n_1(m, \lambda) + n_2(m, \lambda) + 4. \tag{1.2}$$

По поводу левого неравенства см. [9], стр. 345. Правое неравенство легко следует из теоремы 13 монографии [10], стр. 31.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на конечное число частей $\Delta_i = [s_i, s_{i+1}]$ $(i=0, \cdots, p-1)$ длины Δ и пусть $n_i(m, \lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи (0.1) на i-ом отрезке с граничными условиями типа (0.3). Тогда из формулы (1.2) следует неравенство

$$\sum_{(i)} n_i(m, \lambda) \leqslant n(m, \lambda) \leqslant \sum_{(i)} n_i(m, \lambda) + \frac{4(b-a)}{\Delta}. \tag{1.3}$$

Нам понадобится далее следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Для любого λ найдется $C_0(\lambda)$ такое, что при всех m, удовлетворяющих условию*

$$|m| > \frac{C_0(\lambda)}{\mu}, \tag{1.4}$$

будет

$$n(m, \lambda) = 0. \tag{1.5}$$

Для доказательства оценим снизу квадратичную форму**

$$I = (L_\mu f, f) \tag{1.6}$$

оператора L_μ. Рассмотрим сначала то слагаемое I_1 формы (1.6), которое содержит множитель μ^4. После интегрирования по частям получаем

$$I_1 = \mu^4 \left[\int_a^b \frac{1}{B(s)} |(Bw')'|^2 ds + 2m^2 \int_a^b \frac{|w'|^2}{B(s)} ds + \right.$$

$$\left. + 2m^2 \int_a^b |w|^2 \left(\frac{B'}{B^2}\right)' ds + m^4 \int_a^b \frac{|w|^2}{B^3(s)} ds \right]. \tag{1.7}$$

---

* Ниже мы всюду опускаем аргумент μ под знаком функции распределения.

** Под скалярным произведением двух вектор-функций f_1 и f_2 понимается интеграл $(f_1, f_2) = \int_a^b B(s)(u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2 + w_1 \bar{w}_2)\, ds$. Легко проверить, что система (0.1) с граничными условиями (0.3) является самосопряженной.

Укажем еще следующие интегралы, входящие в (1.5), которые мы используем для оценки формы

$$I_2=\int_a^b B\,|u'|^2\,ds,\quad I_3=\frac{m^2}{2}\int_a^b\frac{|u|^2}{B}\,ds, \tag{1.8}$$

$$I_4=\frac{1-\sigma}{2}\int_a^b B\,|v'|^2\,ds,\qquad I_5=m^2\int_a^b\frac{|v|^2}{B}\,ds. \tag{1.9}$$

Наличие последнего интеграла в (1.7) с большим множителем $m^4\mu^4 > C_0^4(\lambda)$ и интегралов в (1.8) и (1.9) позволяет при оценке формы (1.6) снизу отбросить все интегралы, содержащие w и w' в первой степени. Оценим, например, слагаемое $I_6=\int_a^b (R_1^{-1}+\sigma R_2^{-1})\, w'\bar{u}\, ds$. После интегрирования по частям получаем

$$|I_6|\leqslant c\int_a^b |w|\,|u'|\,ds+c\int_a^b |w|\,|u|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{\delta}\int_a^b |w|^2\,ds+c\delta\int_a^b |u'|^2 ds+c\delta\int_a^b |u|^2\,ds, \tag{1.10}$$

где постоянная c определяется коэффициентами системы (0.1), а δ — произвольное положительное число. Выбрав δ достаточно малым, а затем C_0 в (1.4) достаточно большим, можно, ввиду (1.10) и наличия интегралов I_2 и I_3, без ущерба для оценки формы (1.6) снизу слагаемое I_6 отбросить. Наличие интегралов I_3 и I_5, содержащих множителем m^2, позволяет по очевидной причине отбросить интегралы с $u\bar{v}$ и $v\bar{u}$. Остается оценить два слагаемых

$$I_7=-\frac{1+\sigma}{2}m\int_a^b v'\bar{u}\,ds \quad\text{и}\quad I_8=\frac{1+\sigma}{2}m\int_a^b u'\,\bar{v}\,ds. \tag{1.11}$$

Эти интегралы комплексно сопряжены и, следовательно, $|I_7|=|I_8|$. Имеем

$$|I_8|\leqslant\frac{1}{2}(1+\sigma)/2\left(\int_a^b B\,|u'|^2\,ds+m^2\int_a^b\frac{|v|^2}{B(s)}\,ds\right)\cdot \tag{1.12}$$

Учитывая наличие интегралов I_2 и I_5 и неравенство $\frac{1}{2}(1+\sigma)<1$, можно отбросить также оба слагаемых (1.11). В результате мы приходим к оценке

$$(L_\mu f,\ f) > \left(c_0^4(\lambda)\,\varkappa \int\limits_a^b |w|^2\,ds + m^2 \varkappa \int\limits_a^b (|u|^2+|v|^2)\,ds \right) \geqslant c^*(f,\ f), \tag{1.13}$$

где через $\varkappa$ обозначена некоторая положительная постоянная, определяемая только коэффициентами системы (0.1) и не зависящая от m. Из неравенства (1.13) следует, что спектр задачи (0.1), (0.3) оказывается выше наперед заданного c^*, если $|m|$ достаточно велико. Лемма 1.2 доказана.

Просуммируем теперь неравенства (1.3) по всем m. В силу леммы 1.2 получаем

$$\sum_{(i)} n_i(\lambda) \leqslant n(\lambda) \leqslant \sum_{(i)} n_i(\lambda) + \frac{8(b-a)}{\Delta}\cdot\frac{C_0}{\mu}, \tag{1.14}$$

где через $n_i(\lambda)$ обозначена функция распределения частот части оболочки, соответствующей отрезку $\Delta_i = [s_i,\ s_{i+1}]$.

§ 2. Переход к системе с постоянными коэффициентами

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы заменить в неравенстве (1.14) функции $n_i(\lambda)$ функциями распределения, соответствующими задаче с постоянными коэффициентами по s. Для этого зафиксируем некоторое $\xi_i \in \Delta_i$ и рассмотрим наряду с (0.3) следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
-u'' - \frac{m(1+\sigma)}{2B_i}v' + \frac{1-\sigma}{2}\,\frac{m^2}{B_i^2}\,u + (R_{1,i}^{-1} + \sigma R_{2,i}^{-1})\,w' = \lambda u,\\
-\frac{1-\sigma}{2}v'' + \frac{m(1+\sigma)}{2B_i}\,u' + \frac{m^2}{B_i^2}\,v - \frac{m}{B_i}(\sigma R_{1,i}^{-1} + R_{2,i}^{-1})\,w = \lambda v, \qquad (2.1)\\
\mu^4\left(\frac{d^2}{ds^2} - \frac{m^2}{B_i^2}\right)^2 w - (R_{1,i}^{-1} + \sigma R_{2,i}^{-1})u' - \frac{m}{B_i}(\sigma R_{1,i}^{-1} + R_{2,i}^{-1})\,v +\\
+ (R_{1,i}^{-2} + 2\sigma R_{1,i}^{-1}R_{2,i}^{-1} + R_{2,i}^{-2})\,w = \lambda w.
\end{gathered}$$

Здесь индекс i внизу означает значение соответствующей функции при $s = \xi_i$. Рассмотрим задачу на собственные значения для системы (2.1) при $s \in \Delta_i$ и граничных условиях

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = w|_\Gamma = w'|_\Gamma = 0, \tag{2.2}$$

где через Γ обозначены концы отрезка Δ_i. Систему (2.1) условимся сокращенно писать в виде $L_\mu^0 f = \lambda f$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Существует постоянная C (не зависящая от m, i и μ) такая, что для достаточно малых Δ и всех гладких вектор-функций*

$$f(s) = (u(s),\ v(s),\ w(s)),\quad s \in \Delta_i,$$

удовлетворяющих граничным условиям (2.2), *справедливо неравенство*

$$(1 + C\Delta)(L^0_{\lambda} f, f)_l \geqslant (L_{\lambda} f, f)_l > (1 - C\Delta)(L^0_{\lambda} f, f)_l. \tag{2.3}$$

В формуле (2.3) через Δ обозначена общая длина отрезков Δ_l. Скалярное произведение то же, что и в сноске на стр. 238, с той лишь разницей, что интегралы берутся по отрезку Δ_l. Мы ограничимся оценкой той группы членов в форме $(L_{\lambda} f, f)_l$, которая стоит при множителе μ^4 (см. (1.7); a и b в (1.7) следует здесь заменить на s_l и s_{l+1}). Записав $B(s)$ в виде $B(s) = B_l + (s - \xi_l)\, b(s)$, где $b(s)$ — гладкая функция, подставим $B(s)$ в (1.7). В результате получим

$$I_1 = \mu^4 \Bigg[\int\limits_{\Delta_l} B_l |w''|^2\, ds + O(\Delta) \int\limits_{\Delta_l} |w''|^2\, ds + O(1) \int\limits_{\Delta_l} |w'|^2\, ds +$$

$$+ 2m^2 \int\limits_{\Delta_l} \frac{1}{B_l} |w'|^2\, ds + 2m^2\, O(\Delta) \int\limits_{\Delta_l} |w'|^2\, ds + 2m^2\, O(1) \int\limits_{\Delta_l} |w|^2 ds +$$

$$+ m^4 \int\limits_{\Delta_l} \frac{|w|^2}{B_l^3}\, ds + m^4 O(\Delta) \int\limits_{\Delta_l} |w|^2\, ds \Bigg] = \tag{2.4}$$

$$= \mu^4 [K_1 + K_1^{*} + K_1^{**} + m^2 (K_2 + K_2^{*} + K_2^{**}) + m^4 (K_3 + K_3^{*})],$$

где мы ввели понятные обозначения для возникших интегралов. Замечая, что в силу (2.2) выполняются хорошо известные неравенства

$$\int\limits_{\Delta_l} |w''|^2\, ds > \pi^2/\Delta^2 \int\limits_{\Delta_l} |w'|^2\, ds, \int\limits_{\Delta_l} |w'|^2\, ds \geqslant \pi^2/\Delta^2 \int\limits_{\Delta_l} |w|^2\, ds, \tag{2.5}$$

заключаем

$$I_1 = \mu^4 (K_1 + m^2 K_2 + m^4 K_3)(1 + O(\Delta)). \tag{2.6}$$

Аналогично оцениваются и все остальные слагаемые. Лемма 2.1 доказана.

Пусть теперь $n_l^0(m, \lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи (2.1), (2.2), а $n_l(m, \lambda)$ — по-прежнему функция распределения задачи (0.3), (2.2).

Из леммы 2.1 вытекает неравенство

$$n_l^0 (m, 1 - C\Delta)\, \lambda) \leqslant n_l (m, \lambda) \leqslant n_l^0 (m, (1 + C\Delta)\, \lambda).$$

Суммируя по m, получаем

$$n_l^0 [(1 - C\Delta)\, \lambda] \leqslant n_l (\lambda) \leqslant n_l^0 [(1 + C\Delta)\, \lambda]. \tag{2.7}$$

Функции $n_l^0(\lambda)$ оцениваются все еще достаточно сложно. Поэтому наряду с задачей (2.1), (2.2) рассмотрим задачу для системы (2.1) с периодическими граничными условиями на концах отрезка Δ_l:

$$u|_{s_l} = u|_{s_{l+1}},\ u'|_{s_l} = u'|_{s_{l+1}},\ v|_{s_l} = v|_{s_{l+1}},\ v'|_{s_l} = v'_{s_{l+1}}, \tag{2.8}$$

$$w|_{s_l} = w_s|_{l+1},\ w'|_{s_l} = w'|_{s_{l+1}},\ w''|_{s_l} = w''|_{s_{l+1}},\ w'''|_{s_l} = w'''|_{s_{l+1}}.$$

Легко проверить, что задача (2.1), (2.6) является самосопряженной. Пусть $n_l^*(m, \lambda)$ — соответствующая функция распределения. Аналогично лемме 1.1 устанавливается следующее предложение.

Лемма 2.2. *При всех* λ *и* m *справедливо неравенство*

$$n_l^0(m, \lambda) \leqslant n_l^*(m, \lambda) \leqslant n_l^0(m, \lambda) + 8. \tag{2.9}$$

Суммируя эти неравенства по m с учетом леммы 2.1, которая в случае системы с постоянными коэффициентами (2.1) справедлива и при периодических граничных условиях (2.6), получаем

$$n_l^0(\lambda) \leqslant n_l^*(\lambda) \leqslant n_l^0(\lambda) + \frac{8C_0(\lambda)}{\mu}. \tag{2.10}$$

§ 3. Оценка функции распределения при периодических граничных условиях

В этом параграфе мы найдем асимптотику функции распределения $n^*(\lambda)$. Заметим, что собственные функции задачи (2.1), (2.6) (m фиксировано) имеют вид

$$e^{i\frac{2k\pi}{\Delta}} f_k, \tag{3.1}$$

где f_k — постоянный вектор-столбец, а k — целое число, $-\infty < k < +\infty$. Подставив (3.1) в систему (2.1), найдем для определения собственных значений задачи (2.1), (2.6) при фиксированном m, уравнение

$$D(\lambda) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{1-\sigma}{2}\frac{m^2}{B^2} - \lambda & -i\frac{2k\pi}{\Delta}\frac{1+\sigma}{2B}m & i\frac{2k\pi}{\Delta}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) \\ i\frac{2k\pi}{\Delta}\frac{1+\sigma}{2B}m & \frac{1-\sigma}{2}\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2} - \lambda & -\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ -i\frac{2k\pi}{\Delta}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) & -\frac{m}{B}\left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^2 + \varphi_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $\varphi_2(s) = R_1^{-2}(s) + 2\sigma R_1^{-1}(s) R_2^{-1}(s) + R_2^{-2}(s)$.

В (3.2) все функции s берутся при $s = \xi_l$; индекс внизу опущен. Раскрывая определитель (3.2), получаем

$$D(\lambda) \equiv -\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{3.3}$$

где

$$a_1 = \mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^2 + \frac{3-\sigma}{2}\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right] + \varphi_2, \tag{3.4}$$

$$a_2 = \frac{3-\sigma}{2}\mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^3 + \frac{1-\sigma}{2}\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2 + \frac{m^2}{B^2}\right]^2 +$$

$$+\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2\left(\frac{1-\sigma}{2}\varphi_2+\varphi_1\right)+\frac{m^2}{B^2}\left(\frac{1-\sigma}{2}\varphi_2+\varphi_3\right), \tag{3.5}$$

$$a_3=\frac{1-\sigma}{2}\mu^4\left[\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2+\frac{m^2}{B^2}\right]^4+$$

$$+\frac{1-\sigma}{2}(1-\sigma^2)\left[\frac{m^2}{B^2}R_1^{-1}+\left(\frac{2k\pi}{\Delta}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

В формуле (3.5) $\varphi_1(s)=\dfrac{1-\sigma^2}{R_2^2(s)}$, $\varphi_3(s)=\dfrac{1-\sigma^2}{R_1^2(s)}$, а $\varphi_2(s)$ то же, что и в (3.2).

Значение $n_l^*(\lambda_0)$ равно числу всевозможных целых k и m, при которых уравнение (3.3) имеет корни, не превосходящие данного λ_0:

$$\lambda\leqslant\lambda_0. \tag{3.7}$$

Полагая

$$k=\frac{\Delta}{2\pi}r\cos\theta,\ m=Br\sin\theta, \tag{3.8}$$

найдем в соответствии с (3.4—6)

$$a_1=\mu^4r^4+\frac{3-\sigma}{2}r^2+\varphi_2,$$

$$a_2=\frac{3-\sigma}{2}\mu^4r^6+\frac{1-\sigma}{2}r^4+\left[\frac{1-\sigma}{2}\varphi_2+\varphi_1\cos^2\theta+\varphi_3\sin^2\theta\right]r^2,$$

$$a_3=\frac{1-\sigma}{2}\mu^4r^8+\frac{1-\sigma}{2}(1-\sigma^2)r^4\left(\frac{\sin^2\theta}{R_1}+\frac{\cos^2\theta}{R_2}\right)^2. \tag{3.9}$$

Здесь $r^2=\left(\dfrac{2k\pi}{\Delta}\right)^2+\dfrac{m^2}{B^2}$.

Подставив найденные значения в (3.3) и расположив уравнение по степеням r, получим

$$D(\lambda)\equiv\mu^4r^8+\mu^4r^6A_{0,0}(\lambda)-r^4A_1(\theta,\lambda)+\mu^4r^4A_{0,1}(\lambda)-$$

$$-r^2A_2(\theta,\lambda)+A_3(\theta,\lambda)=0, \tag{3.10}$$

где

$$A_{0,0}=-\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda,\quad A_{0,1}=\lambda^2\frac{2}{1-\sigma},$$

$$A_1=\lambda-(1-\sigma^2)(R_1^{-1}\sin^2\theta+R_2^{-1}\cos^2\theta)^2,$$

$$A_2=\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2-\left[\varphi_2+\frac{2}{1-\sigma}(\varphi_1\cos^2\theta+\varphi_3\sin^2\theta)\right]\lambda,$$

$$A_3=(\varphi_2\lambda^2-\lambda^3)\frac{2}{1-\sigma}.$$

Считая $\mu\neq0$, сделаем в (3.10) подстановку

$$r=\frac{\rho}{\mu}. \tag{3.11}$$

В результате получим

$$\rho^8 + \mu^2 A_{0,0}(\lambda)\rho^6 - \rho^4 A_1(\theta, \lambda) + \mu^2\rho^2 A_2(\theta, \lambda) + \mu^4\cdot\rho^4 A_{0,1}(\lambda) + \mu^4 A_3(\lambda) = 0. \tag{3.12}$$

Оценим положительные решения $\rho = \rho(\theta, \lambda, \mu)$ уравнения (3.12). Заметим, что

$$\rho = O(1), \tag{3.13}$$

где постоянная в O-члене не зависит от θ, μ и $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Поэтому (3.12) можно придать вид

$$\rho^8 - A_1(\theta, \lambda)\rho^4 + O(\mu^2) = 0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим три случая:

а) $A_1(\theta, \lambda) \leqslant 0$,

в) $0 \leqslant A_1(\theta, \lambda) \leqslant \mu$,

с) $\mu \leqslant A_1(\theta, \lambda)$.

В случае а), предполагая в (3.12) $\rho > \mu$, сразу найдем $\rho^6 = O(\mu^2)$. Следовательно, для всех положительных ρ имеем: $\rho = O(\mu^{1/3})$ и, следовательно, в силу (3.11)

$$r = O(\mu^{-2/3}). \tag{3.15}$$

Рассмотрим случай в). Решив квадратное уравнение (3.14), найдем

$$\rho^4 = \frac{1}{2}(A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + O(\mu^2)}). \tag{3.16}$$

Отсюда*

$$\rho^4 \leqslant A_1 + O(\mu), \quad \rho^2 \leqslant A_1^{1/2} + O(\mu^{1/2}). \tag{3.17}$$

Из второго неравенства при условии в) следует, что $\rho^2 = O(\mu^{1/2})$. Подставив эту оценку во все члены (3.12) кроме первого и последнего, придем к заключению, что O-член в (3.14) и (3.16) есть $O(\mu^{5/2})$. После чего из (3.16) получаем: $\rho^4 \leqslant A_1 + O(\mu^{5/4}) \leqslant \mu(1 + O(\mu^{1/4}))$ и, следовательно, при условии в)

$$r \leqslant \mu^{-3/4}(1 + O(\mu^{1/4})). \tag{3.18}$$

В случае с) рассмотрим две ветви, определяемые уравнением (3.14). Для первой (главной) легко находим, используя второе неравенство (3.17)

$$\rho_1^4 = \frac{1}{2}(A_1 + \sqrt{A_1^2 + O(\mu^2 A_1^{1/2}) + O(\mu^{5/2})}) =$$

$$= A_1(1 + O(\mu^2/A_1^{3/2}) + O(\mu^{5/2}/A_1^2). \tag{3.19}$$

Отсюда $\rho_1 = A_1^{1/4} + O(\mu^{3/4})$ и, следовательно

$$r_1(\theta, \lambda, \mu) = \frac{1}{\mu} A_1^{1/4}(\theta, \lambda, \mu) + O(\mu^{-1/4}). \tag{3.20}$$

---

* Пользуемся неравенством $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a| + |b|$.

Для второй ветви r_2 в случае с) имеем

$$r_2 = O\,(\mu^{-5/8}). \tag{3.21}$$

Будем, для определенности, считать* $R_{1,l} > R_{2,l}$ (во всех других случаях рассуждения сохраняют силу с несущественными дополнениями (см. рис. 2)). Фиксируем λ_0 из интервала

$$(1-\sigma^2)\,R_{2,l}^{-2} > \lambda_0 > (1-\sigma^2)\,R_{1,l}^{-2}. \tag{3.22}$$

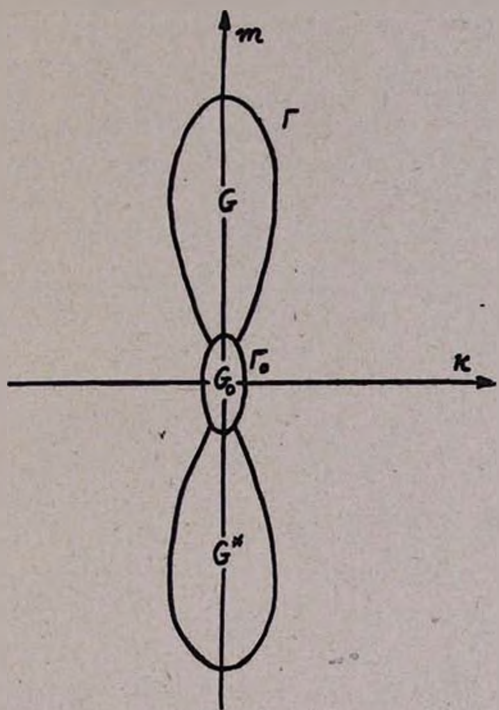

Рис. 1

$$R_{2,l} > 0, \quad R_{1,l}^{-2} < \lambda_0 (1-\sigma^2)^{-1} < R_{2,l}^{-2}$$

Рассмотрим на (k, m) плоскости кривую Γ (см. рис. 1), определяемую уравнениями (3.8), в которых $r = r_1(\theta, \lambda_0, \mu)$ взято в соответствии с (3.20), а $0 < \theta_0 < \theta \leqslant \pi - \theta_0$. Здесь θ_0 таково, что $A_1(\theta_0, \lambda_0) = 2\mu$ и, следовательно

$$A_1(\theta, \lambda_0) > 2\mu, \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0.$$

Пусть еще $r^* = r_1(\theta_0, \lambda_0, \mu)$. В силу (3.20)

$$r^* = 2^{1/4}\,\mu^{-3/4}\,(1 + O\,(\mu^{1/2})). \tag{3.23}$$

Обозначим через G_0 внутренность эллипса

---

* Отметим, что всюду выше в этом параграфе все функции s брались при $s = \xi_l$. Индекс l внизу мы опускаем.

$$k = \frac{\Delta}{2\pi} r^* \cos\theta,\ m = Br^* \sin\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Заметим, что при $\lambda \leqslant \lambda_0$ множества нулей уравнения (310) на (k, m)-плоскости, определяемые формулами (3.15), (3.18) и (3.21), в силу (3.23), содержатся внутри эллипса G_0. Обозначим теперь через G_1

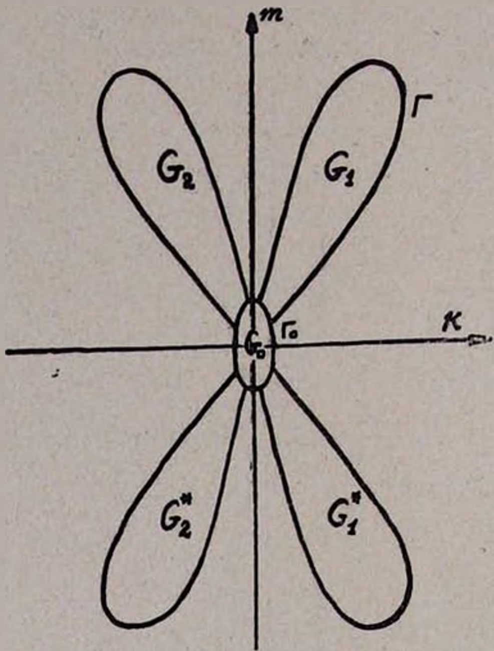

Рис. 2

$R_{1,i} < 0 \quad (1-\sigma^2)^{-1}\lambda_0 < |R_{1,i}|^{-2} < R_{2,i}^{-2}$

область, ограниченную дугой Г и дугой $Г_0$ эллипса G_0 (см. рис. 1), а через G_1^* — область, симметричную G относительно оси k.

Покажем, что каждой точке $(r, \theta) \in G_1$ отвечает один и только один корень* уравнения (3.10), удовлетворяющий условию (3.7). Действительно, согласно (3.10)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} D(\lambda) = -\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\mu^4 r^6 - r^4 + O(r^2) + O(1) =$$

$$= -\mu^4 \rho^2 [\rho^2 + O(\mu^2)] < 0, \tag{3.24}$$

поскольку выражение в квадратных скобках положительно на $Г_0$** и, следовательно, всюду в $\overline{G}_1$.

В силу (3.24) уравнение (3.10) определяет внутри и на границе G_1 однозначную функцию $\lambda = \lambda(r, \theta)$. Значение этой функции на Г

* μ всюду предполагается достаточно малым фиксированным.

** $\rho^2 + O(\mu^2) > 0$ всюду на границе эллипса G_0, если только $\Delta > \mu$. Этим фактом приходится пользоваться в том случае, когда (3.22) заменяется противоположным неравенством.

равно λ_0. Заметим, что в силу (3.10), (3.19) и неравенства $A_1(\theta, \lambda_0) \geqslant 2\mu$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0$,

$$\frac{\partial}{\partial r} D(\lambda)|_\Gamma = \mu^{-3}\rho^3 [8\rho^4 - 4A_1(\theta, \lambda_0) + O(\mu^{3/2})] \geqslant$$

$$\geqslant \mu^{-3}\rho^3 [8\mu + O(\mu^{3/2})]. \tag{3.25}$$

Поэтому $\lambda(r, \theta) < \lambda_0$ в G_1 по крайней мере в окрестности Г. Это неравенство сохраняется, очевидно, и всюду в G_1, поскольку значение λ_0, как мы показали, может достигаться лишь на кривой Г и, быть может, внутри эллипса G_0.

Заметим еще, что в дополнении к областям G_0, G_1 и G_1^* уравнение (3.10) не имеет корней, удовлетворяющих условию $\lambda < \lambda_0$. Допустив противное, легко придти к противоречию, устремив r к $+\infty$.

Таким образом, собственные значения, удовлетворяющие неравенству $\lambda \leqslant \lambda_0$, порождаются всеми парами (k, m), которые принадлежат областям G_1, G_1^* и, быть может, G_0, и только ими.

Пользуясь известным неравенством

$$|S - N| \leqslant P, \tag{3.26}$$

где S — площадь области, ограниченной некоторой спрямляемой кривой, N — число целых точек внутри нее, а P — периметр (см. [11], стр. 38), мы сейчас найдем асимптотику $n_l^*(\lambda_0)$. Имеем

$$n_l^*(\lambda_0) = 2\iint\limits_{G_1} dk\,dm + O(S_{G_0}) + O(P_\Gamma) + O(P_{\Gamma_0}). \tag{3.27}$$

Согласно (3.8), (3.20), (3.23)

$$2\iint\limits_{G_1} dk\,dm = \frac{1}{\pi}\Delta B_l \int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{1}{2} r_1^2\, d\theta - \frac{1}{\pi}\Delta B_l \int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \frac{1}{2} r^{*2}\, d\theta =$$

$$= \frac{\Delta B_l}{2\pi\mu^2} \int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} A_{1,l}^{1/2}(\theta, \lambda_0)\, d\theta + \Delta O(\mu^{-3/2}). \tag{3.28}$$

Легко видеть далее, что

$$P_{\Gamma_0} = O(r^*) = O(\mu^{-3/4}),$$

$$S_{G_0} = \frac{1}{2}\Delta B_l r^{*2} = \Delta O(\mu^{-3/2}). \tag{3.29}$$

Оценим далее P_Γ. Имеем $P_\Gamma \leqslant c\int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sqrt{r_\theta'^2 + r^2}\, d\theta \leqslant c\int\limits_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} (|r_\theta'| + r)\, d\theta$. Из уравнения (3.10) с учетом (3.20) нетрудно заключить, что

$$|r_\theta'| \leqslant \frac{c^*}{\mu}\left|\frac{\partial A_{1,l}}{\partial\theta}\right| \Big/ A_{1,l}^{3/4}(\lambda_0, \theta).$$

Поскольку далее $\frac{\partial A_1}{\partial\theta}$ меняет знак не более трех раз*, то, интегрируя, получаем

$$P_\Gamma = O\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{3.30}$$

В силу (3.27—30) имеем

$$n_l^*(\lambda) = \frac{\Delta B_l}{4\pi\mu^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\sqrt{A_{1,\,l}(\theta,\lambda)} +$$

$$+ \Delta\, O(\mu^{-3/2}) + O(\mu^{-1}). \tag{3.31}$$

Мы опустили индекс внизу у λ и распространили интеграл в (3.28) на все значения θ, при которых $A(\theta, \lambda) \geqslant 0$. Возникающая при этом погрешность (см. (3.21)) включена в (3.31) в первый O-член.

Используя теперь (1.14), (2.7) и (2.10), приходим к формуле

$$n(\lambda) = \frac{1}{4\pi\mu^2}\int_a^b B(s)\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\sqrt{A_1(s,\theta,\lambda)\pm c\Delta}\,d\theta\right)ds +$$

$$+ O(\mu^{-3/2}) + O(\mu^{-1}\Delta^{-1}). \tag{3.32}$$

Разность между интегралами в правых частях (3.32) и (0.5) есть $O(\Delta^{1/2})$. Полагая $\Delta = \mu^{2/3}$, получаем формулу (0.5). Теорема доказана.

Замечание 1. Если интеграл

$$J(\lambda) = \int_a^b B(s)\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}(A_1(s,\theta,\lambda))^{-1/2}\,d\theta\right)ds \tag{3.33}$$

сходится при данном λ, то разность между интегралами в (3.32) и (0.5) есть $O(\Delta)$. Это дает возможность при $\Delta = \mu^{1/2}$ получить остаточный член в (0.5) в виде $O(\mu^{1/2}J(\lambda))$.

Замечание 2. Интеграл (3.33) возникает в задаче о плотности частот оболочки (3.7). Нетрудно проверить, что он может расходиться лишь в следующих трех случаях.

а) Когда оболочка обладает параллелью $s = s_0$ такой, что

$$R_1^{-1}(s_0) = R_2^{-1}(s_0),\ R_1'(s_0) = 0 \text{ и } \lambda = (1-\sigma^2)\,R_2^{-2}(s_0).$$

б) Когда на некотором отрезке $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ будет $R_2^{-1}(s) \equiv \mathrm{const}$ и $\lambda = (1-\sigma^2)\,R_2^{-2}(s_1)$**.

в) Когда $R_1^{-1}(s) \equiv \mathrm{const}$, $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ и $\lambda = (1-\sigma^2)\,R_1^{-2}(s_1)$.

---

* Либо $\partial A_{1,l}/\partial\theta \equiv 0$.

** Предполагается, что изолированные точки, в которых производные всех порядков $R_1^{-1}(s)$ или $R_2^{-1}(s)$ обращаются в нуль, отсутствуют.

Замечание 3. Формула (0.5) сохраняет силу при любых граничных условиях, если квадратичный функционал задачи совпадает с квадратичным функционалом задачи (0.1), (0.2).

Институт проблем механики АН СССР
Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило 11.I.1972

Ա. Գ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Բ. ԼԻԴՍԿԻ. Պտտման թաղանթի սեփական հաճախականությունների բաշխման ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան *(ամփոփում)*

Ապացուցված է ասիմպտոտական բանաձև բարակ, առաձգական պտտման թաղանթի բաշխման ֆունկցիայի համար։
Ապացույցը ստացված է վարիացիոն և ասիմպտոտիկ մեթոդների համադրմամբ։

A. G. ASLANIAN, V. B. LIDSKIĬ, *The asymptotic formula for the eigenvalue distribution function* (summary)

The asymptotic for eigenvalue distribution function of a thin elastic shell of revolution is obtained and the remainger term is estimated. A combination of variational and asymptotical methods is applied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Гольденвейзер.* Некоторые математические проблемы теории упругих тонких оболочек, УМН, 15, вып. 5, 1960.
2. *М. Ш. Бирман.* О спектре сингулярных граничных задач, Матем. сб., 55, 1961, 125—174.
3. *М. Ш. Бирман, В. В. Борзов.* Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов, Проблемы математической физики, Изд. ЛГУ, вып. 5, 1971.
4. *П. Е. Товстик.* Интегралы системы уравнений неосесимметричных колебаний оболочек вращения, Сб. Исследования по упругости и пластичности, Изд. ЛГУ, № 5, 1966, 45—55.
5. *В. В. Болотин.* О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек, ПММ, 27, вып. 2, 1963.
6. *В. В. Болотин, В. Н. Москаленко.* Колебания оболочек. Прочность, устойчивость, колебания, т. 3 (справочник), М., Изд. „Машиностроение", 1968.
7. *А. Л. Гольденвейзер.* О плотности частот колебаний тонкой оболочки, ПММ, 34, вып. 5, 1970.
8. *П. Е. Товстик.* О плотности частот колебаний тонких оболочек вращения, ПММ, 36, вып. 2, 1972.
9. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
10. *И. М. Глазман.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., Физматгиз, 1963.
11. *Хуа Ло Ген.* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, Изд. „Мир", М., 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

СВОЙСТВО ОТДЕЛИМОСТИ СИСТЕМЫ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ

В работе [1] А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин предложили одну теорему об отделимости выпуклых конусов. Эта теорема представляет собой весьма удобный аппарат для получения необходимых условий в различных экстремальных задачах (относящихся к математическому программированию, теории оптимального управления и т. п.). Обзор применений этой теоремы можно найти в небольшой прекрасно написанной книге Б. Н. Пшеничного [2]. Характерным для теоремы Дубовицкого-Милютина является то, что в ней все рассматриваемые конусы, кроме одного, телесны. Настоящая статья посвящена обобщению этой теоремы на произвольную систему выпуклых конусов.

Через E в дальнейшем будет обозначаться конечномерное евклидово векторное пространство, рассматриваемое в обычной топологии. Символ $\operatorname{int} M$ будет означать совокупность всех внутренних точек множества $M \subset E$. Под термином „конус“ мы в дальнейшем всегда будем понимать *замкнутый выпуклый конус* пространства E с вершиной в нулевой точке 0. Конус $K \subset E$ называется *телесным*, если его несущая плоскость совпадает с E, т. е. если $\operatorname{int} K \neq \varnothing$. Внутренность произвольного выпуклого множества M относительно его несущей плоскости будет обозначаться через $\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} M$.

Ниже нам понадобятся несколько хорошо известных фактов теории выпуклых множеств (теоремы 1—4).

Теорема 1. *Если выпуклые множества $M_1, M_2, \cdots, M_s$ обладают тем свойством, что*

$$(\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} M_1) \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} M_2) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} M_s) \neq \varnothing,$$

то несущая плоскость множества $M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_s$ совпадает с пересечением несущих плоскостей множеств $M_1, \cdots, M_s$ и справедливо соотношение

$$\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} (M_1 \cap \cdots \cap M_s) = (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} M_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} M_s).$$

Теорема 2. *Пусть $K_1, K_2, \cdots, K_s$ — конусы в E и $[K_1, K_2, \cdots, K_s]$ — порожденный ими конус, т. е. выпуклая оболочка множества $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_s$. Вектор $a \in E$ в том и только в том случае принадлежит конусу $[K_1, \cdots, K_s]$, если его можно представить в виде $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$, где $a_i \in K_i$, $i = 1, \cdots, s$.*

Конусы K_1 и K_2 называются *отделимыми* в E, если существует такая гиперплоскость Γ пространства E (проходящая через точку 0), что конус K_1 содержится в одном замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью Γ, а конус K_2—в другом.

Теорема 3. *Конусы K_1, K_2 в том и только в том случае неотделимы в E, если выполнены следующие два условия:*

1°. $(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_1) \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_2) \neq \varnothing$;

2°. *не существует в E гиперплоскости, содержащей оба конуса K_1, K_2.*

Пусть K—произвольный конус в E. Через $D(K)$ обозначим множество всех таких векторов $a \in E$, что $ax \leqslant 0$ для любого вектора $x \in K$. Множество $D(K)$ также является конусом; этот конус называется *двойственным* к конусу K. Несложно доказывается, что $D(D(K)) = K$.

Теорема 4. *Для любых конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ справедливы соотношения*

$$D([K_1, K_2, \cdots, K_s]) = D(K_1) \cap D(K_2) \cap \cdots \cap D(K_s),$$

$$D(K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_s) = [D(K_1), D(K_2), \cdots, D(K_s)].$$

Будем говорить, что система конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ обладает в *E свойством отделимости*, если их можно так распределить в две подсистемы (каждая из которых содержит хотя бы один конус), что пересечение конусов первой подсистемы отделимо от пересечения конусов второй подсистемы.

Теорема 5. *Для того чтобы система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование таких векторов $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_s \in D(K_s)$, хотя бы один из которых отличен от нуля, что*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости. Без ограничения общности можно считать (изменив, если нужно, нумерацию конусов), что отделимы конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_l$ и $K_{l+1} \cap \cdots \cap K_s$, где l — некоторое натуральное число, меньшее s. Иначе говоря

$$K_1 \cap \cdots \cap K_l \subset P_1, \quad K_{l+1} \cap \cdots \cap K_s \subset P_2,$$

где P_1, P_2—два замкнутых полупространства, определяемых в E некоторой гиперплоскостью Γ (проходящей через точку 0). Пусть $n \neq 0$— такая нормаль к гиперплоскости Γ, что $nx \leqslant 0$ для любого вектора $x \in P_1$ (и, значит, $nx \geqslant 0$ для любого вектора $x \in P_2$). Тогда

$$n \in D(K_1 \cap \cdots \cap K_l) = [D(K_1), \cdots, D(K_l)],$$

$$-n \in D(K_{l+1} \cap \cdots \cap K_s) = [D(K_{l+1}), \cdots, D(K_s)],$$

и потому, в силу теоремы 2

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_l, \quad -n = a_{l+1} + \cdots + a_s,$$

где $a_i \in D(K_i)$, $i=1, \cdots, s$. Складывая эти соотношения, мы и получаем равенство (1). Заметим, что среди векторов $a_1, \cdots, a_s$ заведомо имеются отличные от нуля, так как $n \neq 0$.

Обратно, пусть существуют векторы $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_s \in D(K_s)$, удовлетворяющие соотношению (1) и не все равные нулю. Пусть, для определенности, $a_1 \neq 0$. Обозначим через Γ гиперплоскость, проходящую через точку 0 и ортогональную вектору a_1. Так как $a_1 \in D(K_1)$, то конус K_1 находится в полупространстве P_1, определяемом неравенством $a_1 x \leqslant 0$. Далее, так как, в силу теорем 2 и 4

$$-a_1 = a_2 + \cdots + a_s \in [D(K_2), \cdots, D(K_s)] = D(K_2 \cap \cdots \cap K_s),$$

то конус $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ находится в полупространстве P_2, определяемом неравенством $a_1 x \geqslant 0$. Таким образом, конусы K_1 и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ отделимы, и потому система конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости.

Теорема 6. *Если ни один из конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ не отделим от пересечения остальных, то система конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ не обладает свойством отделимости.*

В самом деле, если система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости, то по теореме 5, найдутся векторы $a_1 \in D(K_1), \cdots, a_s \in D(K_s)$, не все равные нулю и удовлетворяющие соотношению (1). Но тогда вторая часть доказательства теоремы 5 показывает, что найдется среди конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ такой, который отделим от пересечения остальных.

Теорема 7. *Для того чтобы система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно существование в E таких линейных функционалов $f_1, \cdots, f_s$, хотя бы один из которых не равен тождественно нулю, что $f_i(x) \leqslant 0$ при $x \in K_i$, $i = 1, \cdots, s$, и выполнено соотношение*

$$f_1 + \cdots + f_s \equiv 0.$$

Это непосредственно вытекает из теоремы 5: достаточно определить функционалы f_i равенствами

$$f_i(x) = a_i x \quad (i = 1, \cdots, s).$$

Теорема 8. *Для того чтобы система конусов $K_1, \cdots, K_s$ не обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1°. $(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_1) \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_2) \cap \cdots \cap (\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\, K_s) \neq \varnothing$;

2°. *существуют такие подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_s$, в прямую сумму которых распадается E (причем, возможно, $\dim L_i = 0$ для некоторых i), что при любых $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, s)$ подпространство L_i содержится в несущей плоскости конуса K_j.*

Доказательство. Допустим, что условия 1° и 2° выполнены, и предположим, вопреки утверждению, что система конусов $K_1, \cdots, K_s$ обладает свойством отделимости. Тогда, в силу теоремы 6, какой-нибудь из этих конусов (скажем, K_1) отделим от пересечения остальных, т. е. существует такая гиперплоскость Γ (проходящая через точку 0), что $K_1 \subset P_1$, $K_2 \cap \cdots \cap K_s \subset P_2$, где P_1, P_2 — замкнутые полупространства, определяемые гиперплоскостью Γ. Пусть a—какая-либо точка множества $\bigcap\limits_{i=1}^{s} \operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_i$ (такая точка существует в силу условия 1°). Тогда $a \in K_1 \subset P_1$, $a \in K_2 \cap \cdots \cap K_s \subset P_2$, и потому $a \in P_1 \cap P_2 = \Gamma$. При $i \neq 1$ плоскость M_i, параллельная L_i и проходящая через точку a, содержится в несущей плоскости конуса K_1, а так как a—внутренняя точка конуса K_1 относительно его несущей плоскости, то все достаточно близкие к a точки плоскости M_i принадлежат конусу K_1 и, значит, полупространству P_1. Из этого следует, что $M_i \subset \Gamma$ ($i=2, 3, \cdots, s$). Далее, плоскость M_1, параллельная L_1 и проходящая через a, содержится в несущей плоскости каждого из конусов $K_2, \cdots, K_s$, и все достаточно близкие к a точки плоскости M_1 принадлежат каждому из конусов $K_2, \cdots, K_s$, а потому и их пересечению $K_2 \cap \cdots \cap K_s$. Из этого следует, что $M_1 \subset \Gamma$. Итак, все плоскости $M_1, M_2, \cdots, M_s$ содержаться в Γ, и потому $E \subset \Gamma$, что противоречиво. Полученное противоречие показывает, что система конусов $K_1, \cdots, K_s$ свойством отделимости не обладает.

Обратно, пусть система конусов $K_1, \cdots, K_s$ не обладает свойством отделимости. Покажем, что выполнены условия 1° и 2°. Допустим, напротив, что условие 1° не выполнено и выберем такое натуральное $l < s$, что

$$(\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_l) \neq \varnothing, \quad (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_{l+1}) = \varnothing. \qquad (2)$$

Первое из соотношений (2) показывает (в силу теоремы 1), что

$$(\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_l) = \operatorname{int}_{\mathrm{rel}} (K_1 \cap \cdots \cap K_l),$$

и потому второе соотношение (2) переписывается в виде

$$(\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} (K_1 \cap \cdots \cap K_l)) \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_{l+1}) = \varnothing.$$

Из этого следует, в силу теоремы 3, что конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_l$ и K_{l+1} отделимы, а потому, подавно, отделимы конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_l$ и $K_{l+1} \cap \cap \cdots \cap K_s$. Но это противоречит предположению. Полученное противоречие показывает, что условие 1° выполнено.

Докажем, наконец, что выполнено условие 2°. Для этого проведем индукцию по числу s рассматриваемых конусов. При $s=2$ условие 2° теоремы 8 совпадает с условием 2° теоремы 3 и, следовательно, справедливо. Предположим, что справедливость условия 2° уже доказана для меньшего, чем s, числа конусов, и рассмотрим s конусов $K_1, K_2, \cdots, K_s$ (не обладающих свойством отделимости). Обозначим через Π_s несущую плоскость конуса K_s, а через Π^*—несущую плоскость конуса $K_1 \cap \cdots \cap K_{s-1}$. Так как конусы $K_1 \cap \cdots \cap K_{s-1}$ и K_s неотделимы, то, по теореме 3, Π_s и Π^* не лежат в одной гиперплоскости. Следовательно найдется такое подпространство $L_s \subset \Pi^*$, что E распадается в прямую сумму подпространств Π_s и L_s.

Рассмотрим теперь конусы

$$K_1 \cap K_s,\ K_2 \cap K_s, \cdots, K_{s-1} \cap K_s. \tag{3}$$

лежащие в подпространстве Π_s. Покажем, что эта система конусов не обладает в евклидовом векторном пространстве Π_s свойством отделимости. Допустим, напротив (см. теорему 6), что один из конусов (3) (скажем, первый) отделим в Π_s от пересечения остальных, т. е. конус $K_1 \cap K_s$ отделим в Π_s от конуса $K_2 \cap \cdots \cap K_{s-1} \cap K_s$. В силу уже доказанного условия 1°, мы имеем (по теореме 1)

$$\operatorname{int}_{\mathrm{rel}}(K_1 \cap K_s) = (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_1) \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_s),$$

$$\operatorname{int}_{\mathrm{rel}}(K_2 \cap \cdots \cap K_s) = (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_2) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_s),$$

так что (в силу условия 1°)

$$(\operatorname{int}_{\mathrm{rel}}(K_1 \cap K_s)) \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}}(K_2 \cap \cdots \cap K_s)) \neq \varnothing.$$

Следовательно, отделимость конусов $K_1 \cap K_s$ и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ в Π_s означает (по теореме 3), что несущие плоскости конусов $K_1 \cap K_s$ и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$ лежат в одной гиперплоскости Γ евклидова пространства Π_s. В силу теоремы 1, несущая плоскость конуса $K_1 \cap K_s$ совпадает с $\Pi_1 \cap \Pi_s$, где Π_1—несущая плоскость конуса K_1. Пусть B_1—прямое дополнение подпространства $\Pi_1 \cap \Pi_s$ в евклидовом пространстве Π_1. Обозначим через C линейную оболочку подпространств B_1 и Π_s, а через C' — линейную оболочку подпространств B_1 и Γ. Тогда C' есть гиперплоскость пространства C, причем $K_1 \subset \Pi_1 \subset C'$ и $K_2 \cap \cdots \cap K_s \subset \Gamma \subset \subset C'$. Так как C' не совпадает с C (и, подавно, не совпадает с E), то это означает отделимость конусов K_1 и $K_2 \cap \cdots \cap K_s$, что однако противоречит предположению.

Итак, система конусов (2) не обладает в Π_s свойством отделимости. Так как число этих конусов меньше s, то по предположению индукции, существуют такие подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_{s-1}$, в прямую сумму которых распадается Π_s, что при любых $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \cdots, s-1$) подпространство L_i содержится в несущей плоскости конуса $K_j \cap K_s$. Непосредственно проверяется, что эти подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_{s-1}$ вместе с построенным ранее подпространством L_s удовлетворяют условию 2°, т. е. являются искомыми (напомним, что пространство E распадается в прямую сумму подпространств L_s и Π_s).

Сопоставляя доказанную теорему с теоремой 7, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть в E заданы конусы $K_1, \cdots, K_s$, удовлетворяющие условию 2° теоремы 8. Для того чтобы пересечение*

$$(\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{int}_{\mathrm{rel}} K_s)$$

было пусто, необходимо и достаточно чтобы существовали на E такие линейные функционалы $f_1, \cdots, f_s$, хотя бы один из которых не равен тождественно нулю, что $f_i(x) \leqslant 0$ при $x \in K_i$, $i = 1, \cdots, s$, и выполнено соотношение

$$f_1+\cdots+f_s=0.$$

В этой теореме, как и в теореме 7, условие неположительности функционалов f_i на конусе K_i, $i=1,\cdots, s$, можно заменить условием неотрицательности: достаточно изменить знаки всех функционалов $f_1,\cdots, f_s$.

Теоремы 8 и 9 особенно упрощаются в случае, если все конусы $K_1, \cdots, K_s$, кроме, может быть, одного, являются телесными. В этом случае условие 2° теоремы 8, как легко видеть, выполняется автоматически. Действительно, пусть конусы $K_2,\cdots, K_s$ телесны, а K_1—произвольный конус. Чтобы убедиться, что выполнено условие 2°, достаточно за L_2 принять несущую плоскость конуса K_1, за L_1—ее прямое дополнение, а за $L_3,\cdots, L_s$ — тривиальные (нульмерные) подпространства. Заметим еще, что в силу телесности конусов $K_2,\cdots, K_s$ условие 1° теоремы 8 равносильно условию

$$K_1\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_2)\cap\cdots\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_s)\neq\varnothing. \tag{4}$$

Таким образом, мы получаем следующие две теоремы.

Теорема 10. *Пусть $K_2,\cdots, K_s$ — телесные конусы и K_1 — произвольный конус. Для того чтобы система конусов $K_1,\cdots, K_s$ не обладала свойством отделимости, необходимо и достаточно выполнение условия* (4).

Теорема 11. *Пусть $K_2, \cdots, K_s$ — телесные конусы и K_1 — произвольный конус. Для того чтобы пересечение*

$$K_1\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_2)\cap\cdots\cap(\mathrm{int}_{\mathrm{rel}}\ K_s)$$

было пусто, необходимо и достаточно чтобы существовали на E такие линейные функционалы $f_1, f_2,\cdots, f_s$, хотя бы один из которых не равен тождественно нулю, что $f_i(x)\leqslant 0$ при $x\in K_i$, $i=1,\cdots, s$, и выполнено соотношение

$$f_1+f_2+\cdots+f_s\equiv 0.$$

Теорема 12. *Пусть векторное пространство E распадается в прямую сумму своих подпространств $L_1,\cdots, L_k$. Через L_i^* $(i=1,\cdots, k)$ обозначим подпространство пространства E, порожденное объединением всех подпространств $L_1,\cdots, L_k$, кроме L_i. Таким образом, $E=L_i\oplus L_i^*$ и $L_i\subset L_j^*$ при $i\neq j$. Пусть, далее, для каждого $i=1,\cdots, k$ в пространстве L_i задана система конусов*

$$K_1^{(i)}, \cdots, K_{s_i}^{(i)}, \tag{5}$$

либо состоящая только из одного конуса (т. е. $s_i=1$), либо не обладающая в L_i свойством отделимости. Обозначим через $N_j^{(i)}$ (где $i=1,\cdots,k$; $j=1,\cdots, s_i$) выпуклую оболочку множества $K_j^{(i)}\cup L_i^*$. Тогда система конусов

$$N_j^{(i)}\ (i=1, \cdots, k;\ j=1,\cdots, s_i) \tag{6}$$

не обладает в E свойством отделимости.

Доказательство. Допустим, напротив, что система конусов (6) обладает в E свойством отделимости, т. е. найдется среди конусов (6) такой, который отделим от пересечения остальных. Без ограничения общности можно считать (изменив, если нужно, нумерацию подпространств L_i и конусов $K_j^{(i)}$), что конус $N_1^{(1)}$ отделим в E от пересечения остальных конусов (6). Таким образом, существует в E такая гиперплоскость Г, проходящая через 0, что $N_1^{(1)} \subset P_1$, где P_1— одно из замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью Г, а пересечение $\Pi_1^{(1)}$ всех остальных конусов (6) содержится в другом замкнутом полупространстве P_2, определяемом гиперплоскостью Г.

Предположим сначала, что $s_1>1$ и допустим, что подпространство L_1 не содержится целиком в гиперплоскости Г. Тогда $\Gamma \cap L_1$ есть гиперплоскость пространства L_1, а $P_1 \cap L_1$ и $P_2 \cap L_1$ представляют собой замкнутые полупространства, на которые эта гиперплоскость разбивает пространство L_1. Так как

$$K_1^{(1)} \subset N_1^{(1)} \cap L_1 \subset P_1 \cap L_1,$$

$$\bigcap_{j=2}^{s_1} K_j^{(1)} \subset \left(\bigcap_{j=2}^{s_1} N_j^{(1)}\right) \cap L_1 \subset \Pi_1^{(1)} \cap L_1 \subset P_2 \cap L_1$$

(поскольку $N_j^{(i)} \supset L_1$ при $i \neq 1$), то гиперплоскость $\Gamma \cap L_1$ отделяет в пространстве L_1 конус $K_1^{(1)}$ от пересечения $K_2^{(1)} \cap \cdots \cap K_{s_1}^{(1)}$, т. е. система конусов (5) обладает при $i=1$ свойством отделимости, что, однако, противоречит предположению. Полученное противоречие показывает, что при $s_1>1$ гиперплоскость Г должна содержать подпространство L_1.

Если же $s_1=1$, то пересечение $\Pi_1^{(1)}$ всех конусов (6), кроме $N_1^{(1)}$, содержит плоскость L_1 (поскольку при $i \neq 1$ мы имеем $N_j^{(i)} \supset L_i^* \subset L_1$), и потому $L_1 \subset \Pi_1^{(1)} \subset P_2$. Отсюда следует, что и в этом случае $L_1 \subset \Gamma$.

Итак, $L_1 \subset \Gamma$. Кроме того, для любого $i=2, 3, \cdots, k$ мы имеем:

$$L_i \subset L_1^* \subset N_1^{(1)} \subset P_1,$$

и потому $L_i \subset \Gamma$. Мы видим, что все подпространства $L_1, L_2, \cdots, L_k$ содержатся в Г, т. е. $E \subset \Gamma$, что невозможно. Таким образом, система конусов (6) не обладает в E свойством отделимости. Теорема доказана.

Заметим, что требование замкнутости рассматриваемых выпуклых конусов малосущественно: хотя некоторые факты (например, соотношение $D(D(K) = K)$ и не сохраняются в общем случае, теоремы 5—12 верны для произвольных выпуклых конусов с вершиной в точке 0 (так как переход к замыканиям не меняет смысла этих теорем).

Заметим также, что все эти теоремы справедливы не только в конечномерном случае, но и, при выполнении некоторых естественных ограничений, для конусов в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E. Например, предположим, что выполнены следующие условия. Существует линейное топологическое пространство E^* и скалярное произведение xy с действительными значениями ($x \in E$, $y \in E^*$), линейное и непрерывное по совокупности переменных x, y. Любой линейный непрерывный функционал на E (соответственно на E^*) однозначно записывается в виде bx, где $b \in E^*$ (соответственно в виде ay, где $a \in E$). Любое замкнутое подпространство пространства E обладает в E прямым дополнением, и то же справедливо для E^*. Далее, через $D(K)$, где K—множество в одном из пространств E, E^*, обозначим множество всех тех элементов пространства E^*, E, которые с любым элементом из K имеют неположительное скалярное произведение. Каждый из конусов K_i и $D(K_i)$ $(i=1, \cdots, s)$ имеет своей несущей плоскостью замкнутое подпространство и имеет относительно этого подпространства внутренние точки. Наконец, для любого $i=1, \cdots, s$ справедливо соотношение $D(D(K_i))=K_i$. *При выполнении указанных условий все сформулированные теоремы (и, с очевидными изменениями, все доказательства) остаются справедливыми.*

В том случае, когда K_1 есть подпространство, теорема 11 превращается в упомянутую в начале теорему Дубовицкого-Милютина.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 7.III.1972

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ. Ուռուցիկ կոների սիստեմի բաժանելիության հատկությունը *(ամփոփում)*

Ա. Յա. Դուբովիցկին և Ա. Ա. Միլյուտինը իրենց աշխատանքներում առաջարկել են ուռուցիկ կոների բաժանելիության մասին մի թեորեմ։ Այդ թեորեման իրենից ներկայացնում է շատ հարմար ապարատ տարբեր էքստրեմալ (մաթեմատիկական ծրագրավորման, օպտիմալ կառավարման տեսության և նման ուրիշ տեսությունների վերաբերող) խնդիրներում անհրաժեշտ պայմաններ ստանալու համար։

Դուբովիցկու-Միլյուտինի թեորեմայի համար բնորոշ է այն, որ նրանում դիտարկվող բոլոր կոները, բացառությամբ մեկի, մարմնական են։ Ներկա հոդվածը նվիրված է այդ թեորեմայի ընդհանրացմանը ուռուցիկ կոների կամայական սիստեմի վերաբերյալ։

V. G. BOLTJANSKIĬ. *The separation property of a system of convex cones*
(summary)

The theorem of A. Dubovitskiĭ and Miljutin on separation of convex cones is a convenient toll, which helps to obtein necessary conditions in different extremal extremal problems of mathematical programming, optimal controls etc. It is essential in Dubovitskiĭ-Miljutin's reasoning method, that each cone may by with exception of one of them, is a body, i. e. has interior points. In this article this restriction is omited and the theorem is proved (in a generalised form and by different method) for any system of convex cones.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Я. Дубовицкий* и *А. А. Милютин.* Задачи на экстремум при наличии ограничений, ДАН СССР, 149, № 4, 1963.
2. *Б. Н. Пшеничный.* Необходимые условия экстремума, Изд. „Наука“, М., 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика,

М. М. ДЖРБАШЯН

ПРИМЫКАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЯДОВ ТИПА ДИРИХЛЕ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Введение

1°. Понятие примыкания асимптотических рядов Дирихле

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j\, e^{-\lambda_j z} \quad (0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_j<\cdots) \tag{1}$$

впервые было введено в анализ С. Мандельбройтом, эффективно применившим его в различных тонких вопросах теории функций [1, 2].

В предположении, что для последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ верхняя усредненная плотность

$$\overline{D}^* = \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda},\ N(\lambda) = \sum_{\lambda_j<\lambda} 1 \tag{2}$$

положительна, понятие примыкания для рядов вида (1) представляет собой определенное соотношение между величиной $\overline{D}^*$ — шириной криволинейной бесконечной полосы Δ, содержащей некоторую горизонтальную полосу и порядком касания (логарифмической точностью) частичных сумм ряда (1) при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ к функции $F(z)$, аналитической и ограниченной в полосе Δ.

В случае, когда ряд (1) примыкает к функции $F(z)$ в полосе Δ, С. Мандельбройтом были получены оценки его коэффициентов $\{d_j\}_1^{\infty}$ с помощью величины $\overline{D}^*$, максимума $|F(z)|$ в достаточно большом круге $K(z_0)\subset\Delta$ с центром в точке z_0 и величины $\operatorname{Re} z_0$.

Именно эти оценки и позволили ему установить тонкий критерий единственности для коэффициентов ряда (1) и функции $F(z)$, когда эта функция допускает аналитическое продолжение из Δ вдоль некоторой криволинейной полосы, шириной $2\pi R$ $(R>\overline{D}^*)$, продолжающейся до $-\infty$.

2°. В критическом случае, когда полоса Δ вырождается в полуось $[\sigma_0, -\infty)$ и $\overline{D}^*=0$, речь может идти лишь о примыкании ряда (1) к функции $F(x)$, определенной только на этой полуоси. Но в этом случае просто теряют свою силу исходы и результаты теории примыкания для рядов вида (1), хорошо разработанные, как отмечалось выше, для случая полосы Δ ненулевой ширины и при $\overline{D}^*>0$.

В настоящей статье строится аппарат теории примыкания и единственности на вещественной оси для более общих рядов типа Дирихле

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j\, e^{-\lambda_j x}\, x^{s_j-1} \tag{3}$$

в метрике L_2.

При этом мы предполагаем, что показатели $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$—произвольные комплексные числа из полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, подчиненные условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < +\infty, \tag{4}$$

а целое число $s_j \geqslant 1$ означает кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_j\}$ нашей последовательности $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$.

Заметим, что условие (4) неооходимо и достаточно для неполноты в $L_2[0, +\infty)$ обобщенной системы Мюнтца-Сасса*

$$\{e^{-\lambda_j x}\, x^{s_j-1}\}_1^{\infty}. \tag{5}$$

В § 1 статьи строится система функций $\{\omega_n(x)\}_1^{\infty}$, биортогональная с системой (5) на полуоси $[0, +\infty)$ (теорема 1). Затем приводится вычисление интегралов вида

$$J_n(\lambda_j, r) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_j x}\, x^r\, \omega_n(x)\, dx$$

при любом $n \geqslant 1$, $j \geqslant 1$ и $0 \leqslant r \leqslant p_j - 1$.

Отметим, что теорема 1 впервые была анонсирована нами в заметке [5] без доказательства. Но сам метод построения такого рода биортогональных систем, порожденных функциями с кратными нулями (в данном случае функцией Бляшке $B(z)$ с нулями $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$), впервые был предложен в работе [6] в связи с построением биортогональных на конечном отрезке систем целых функций типа Миттаг-Леффлера.

Этот метод нашел затем важные применения в ряде других работ и, в частности, в недавней работе [7] автора**.

В § 2 статьи приводится определение понятия примыкания рядов типа Дирихле (3) к данной функции $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_0, +\infty)$.

Затем, в предположении, что в последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ кратные числа появляются лишь подряд, и что ряд (3) примыкает к данной функции $F(x)$ с логарифмической точностью $p_n(\sigma) \leqslant \infty$, удаётся установить оценки для специальных полиномов $P_n(\sigma, \nu)$ степени $\leqslant p_n - s_n$, коэффициенты которых линейно выражаются посредством чисел $\{d_j\}$ $n \leqslant j \leqslant n + p_n - s_n$ (лемма 3 и теорема 2).

Наконец, наложив нужные дополнительные ограничения на функцию $F(x) \in L_2(\sigma_0, +\infty)$ (где $\sigma_0 > -\infty$ уже любое число) и на показа-

---

* По этому поводу см. [3, 4], а также [5].

** Остальные работы, где указанный метод биортогональности нашел другие существенные применения, указываются в той же работе [7].

тели $\{\lambda_j\}_1^\infty$ ряда (3), устанавливается критерий единственности для коэффициентов $\{d_j\}_1^\infty$ и для функции $F(x)$, к которой этот ряд примыкает на вещественной оси с определенной логарифмической точностью (теоремы 3 и 4).

§ 1. Биортогонализация системы функций $\{e^{-\lambda_k x}\, x^{s_k - 1}\}_1^\infty$ на полуоси $[0, +\infty)$

(а). Ниже пока что будем предполагать, что $\{\lambda_k\}_1^\infty$ —произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в полуплоскости

$$G^{(+)} = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\},$$

подчиненная лишь условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < +\infty. \tag{1.1}$$

Ввиду условия (1.1) очевидно, что для любого натурального числа $n \geqslant 1$ появление числа λ_n во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ может иметь лишь конечную кратность p_n.

Обозначим далее через s_n кратность появления числа λ_n на отрезке $\{\lambda_1 \cdots, \lambda_n\}$ нашей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$; разумеется, всегда будем иметь

$$1 \leqslant s_n \leqslant p_n \quad (n \geqslant 1). \tag{1.2}$$

Известно (см., напр., [8], стр. 187), что при условии (1.1) произведение Бляшке

$$\mathrm{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_k}{z + \bar\lambda_k}\, \varkappa_k; \quad \varkappa_k = \frac{|1 + \lambda_k^2|}{1 + \lambda_k^2} \tag{1.3}$$

сходится в полуплоскости $G^{(+)}$ к функции $\mathrm{B}(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющей условиям:

1) $|\mathrm{B}(z)| \leqslant 1, \quad z \in G^{(+)}$;

2) $\mathrm{B}(\lambda_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

3) почти для всех $y \in (-\infty, +\infty)$ существует предел

$$\lim_{x \to +0} |\mathrm{B}(x + iy)| = |\mathrm{B}(iy)| = 1.$$

Но поскольку при каждом $n \geqslant 1$ число λ_n в последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ появляется с кратностью p_n, то на самом деле функция $\mathrm{B}(z)$ обладает более общим чем 2) свойством

2[1])

$$\begin{gathered} \mathrm{B}^{(k)}(\lambda_n) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant p_n - 1 \\ \mathrm{B}^{(p_n)}(\lambda_n) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \end{gathered} \tag{1.4}$$

(б). Из свойств (1.4) функции $B(z)$ следует, что в некоторой окрестности $|z-\lambda_n|<\delta$ $(\delta>0)$ точки $z=\lambda_n$ функция

$$\frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{B(z)}$$

регулярна и, следовательно, допускает разложение вида

$$\frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{B(z)}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(\lambda_n)(z-\lambda_n)^j;\quad |z-\lambda_n|<\delta, \tag{1.5}$$

где

$$A_j(\lambda_n)=\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\left[\frac{(z-\lambda_n)^{p_n}}{B(z)}\right]\right\}_{z=\lambda_n}\quad (j=0,1,2,\cdots). \tag{1.6}$$

Теперь для любого $n\geqslant1$ введем в рассмотрение функцию*

$$\Omega_n(z)=(-1)^{s_n-1}\frac{B(z)\,Q_n(z)}{(s_n-1)!\,(z-\lambda_n)^{p_n-s_n+1}}, \tag{1.7}$$

где

$$Q_n(z)=\sum_{j=0}^{p_n-s_n}A_j(\lambda_n)(z-\lambda_n)^j \tag{1.8}$$

и докажем лемму.

Лемма 1. 1°. *Для любого $n\geqslant1$ функция $\Omega_n(z)$ удовлетворяет условиям:*

$$\Omega_n^{(r)}(\lambda_\nu)=\begin{cases}0, \text{ при } \lambda_\nu\neq\lambda_n,\ 0\leqslant r\leqslant p_\nu-1\\ (-1)^{s_n-1}, \text{ при } \lambda_\nu=\lambda_n,\ r=s_n-1\\ 0, \text{ при } \lambda_\nu=\lambda_n,\ r\neq s_n-1,\ 0\leqslant r\leqslant p_n-1.\end{cases} \tag{1.9}$$

2°. *Функция $\Omega_n(z)$ регулярна в полуплоскости $G^{(+)}$ и допускает представление вида*

$$\Omega_n(z)=\int_0^{\infty}e^{-tz}\,\omega_n(t)\,dt,\quad z\in G^{(+)}, \tag{1.10}$$

где $\omega_n(t)\in L_2(0,+\infty)$.

Доказательство. 1°. Из разложения (1.5), ввиду (1.7) и (1.8), следует, что в окрестности $|z-\lambda_n|<\delta$ $(\delta>0)$ точки $z=\lambda_n$ функция $\Omega_n(z)$ допускает также представление вида

$$(-1)^{s_n-1}\Omega_n(z)=\frac{(z-\lambda_n)^{s_n-1}}{(s_n-1)!}-$$

$$-\frac{B(z)}{(s_n-1)!\,(z-\lambda_n)^{p_n-s_n+1}}\sum_{j=p_n-s_n+1}^{\infty}A_j(\lambda_n)(z-\lambda_n)^j.$$

---

* В заметке [5] автора в определении функции $\Omega_n(z)$ множитель $Q_n(z)$ был пропущен.

Отсюда непосредственно следуют, как второе, так и третье из свойств функции $\Omega_n(z)$, если учесть также свойство (1.4) функции $B(z)$. Что касается первого из свойств (1.9) функции $\Omega_n(z)$, то оно также следует из (1.4), поскольку в каждой точке $z=\lambda_\nu\neq\lambda_n$ наряду с $B(z)$ функция $\Omega_n(z)$ имеет нуль порядка p_ν.

2°. Из определения (1.3) функции $B(z)$ непосредственно следует, что при любом $n\geqslant 1$

$$|B(z)|\leqslant\left|\frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}\right|^{-p_n},\quad z\in G^{(+)}.$$

Поэтому, пользуясь формулами (1.7) и (1.8), получим следующую оценку:

$$|\Omega_n(z)|\leqslant\frac{|z+\bar{\lambda}_n|^{-p_n}}{(s_n-1)!}\sum_{j=0}^{p_n-s_n}|A_j(\lambda_n)|\cdot|z-\lambda_n|^{j+s_n-1},\quad z\in G^{(+)},$$

откуда следует, что

$$\sup_{G^{(+)}}\{|1+z|\cdot|\Omega_n(z)|\}\leqslant C_n<+\infty\quad(n=1,2,\cdots).\tag{1.11}$$

Из оценки (1.11) заключаем далее, что при $n\geqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Omega_n(x+iy)|^2\,dy\leqslant C_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+x)^2+y^2}\leqslant$$

$$\leqslant C_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\pi C_n^2\quad(0\leqslant x<\infty).\tag{1.12}$$

Но из (1.12), в частности, следует, что $\Omega_n(iy)\in L_2(-\infty,\infty)$ и, поэтому, ее преобразование Фурье-Планшереля

$$\omega_n(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ity}-1}{iy}\,\Omega_n(iy)\,dy\tag{1.13}$$

почти всюду на $(-\infty,+\infty)$ определяет функцию $\omega_n(t)\in L_2(-\infty,+\infty)$.

Как известно, тогда формула обращения

$$\Omega_n(iy)=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iyt}-1}{-it}\,\omega_n(t)\,dt\tag{1.14}$$

также справедлива почти для всех $y\in(-\infty,+\infty)$.

Вместе с тем неравенство (1.12), справедливое для всех $0\leqslant x<$ $<+\infty$, означает, что аналитическая в полуплоскости функция $\Omega_n(z)$ принадлежит там к известному классу $H_2(G^{(+)})$ Хилла-Тамаркина. Поэтому, согласно известной теореме Винера-Пэли (3), будем иметь почти всюду

$$\omega_n(t)=0,\quad -\infty<t<0.\tag{1.15}$$

Ввиду свойства (1.15) функции $\omega_n(t)$, формула (1.14) запишется в виде

$$\Omega_n(iy) = \frac{d}{dy}\int_0^{\infty} \frac{e^{-iyt}-1}{-it}\,\omega_n(t)\,dt,\ y\in(-\infty, +\infty). \tag{1.14'}$$

Из (1.14′) уже легко следует, что функция $\Omega_n(z)$ в полуплоско сти $G^{(+)}$ допускает представление (1.10) Винера-Пэли.

(в). В следующей лемме приводится явное выражение для нормы функций $\omega_n(x)$

$$\|\omega_n\| = \left\{\int_0^{\infty} |\omega_n(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

Лемма 2. 1°. *Для любого* $n \geqslant 1$

$$\|\omega_n\|^2 = \frac{1}{2\pi\Gamma^2(s_n)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q_n(iy)|^2}{|iy-\lambda_n|^{2(p_n-s_n+1)}}\,dy. \tag{1.17}$$

2°. *Имеем также*

$$\|\omega_n\| = \frac{1}{\Gamma(s_n)}\left\{\sum_{r,\,s=0}^{p_n-s_n} \Phi_n(r, s)\ a_r^{(n)}\,\overline{a_s^{(n)}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.18}$$

где

$$\Phi_n(r, s) = (-1)^{r-s}\frac{\Gamma(2p_n-2s_n-r-s+2)}{\Gamma(p_n-s_n-r+1)\,\Gamma(p_n-s_n-s+1)}$$

$$(r, s = 0, 1, \cdots, p_n-s_n), \tag{1.19'}$$

$$a_j^{(n)} = \frac{A_j(\lambda_n)}{(2\operatorname{Re}\lambda_n)^{p_n-s_n-j+1}}\quad (j = 0, 1, \cdots, p_n-s_n). \tag{1.19''}$$

Доказательство. 1°. Из (1.13) и (1.15), согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega_n(t)|^2\,dt = \|\omega_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Omega_n(iy)|^2\,dy.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.15), (1.16), а также определение (1.7)—(1.8) функции $\Omega_n(z)$, приходим к формуле (1.17), если учесть также свойство 3) функции B (z).

2°. Из (1.17), в силу определения (1.8) функции $Q_n(z)$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q_n(iy)|^2}{|iy-\lambda_n|^{2(p_n-s_n+1)}}\,dy = \sum_{r,\,s=0}^{p_n-s_n} A_r(\lambda_n)\,\overline{A_s(\lambda_n)}\,I_n(r, s), \tag{1.20}$$

где

$$I_n(r, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(iy-\lambda_n)^{p_n-s_n-r+1}(-iy-\bar{\lambda}_n)^{p_n-s_n-s+1}}.$$

Записав интеграл $I_n(r, s)$ в виде

$$I_n(r, s) = (-1)^{p_n-s_n-s+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{(z-\lambda_n)^{p_n-s_n-r+1}(z+\bar{\lambda}_n)^{p_n-s_n-s+1}}$$

и вычислив вычет подынтегральной функции в точке $z=\lambda_n$, мы получим

$$I_n(r, s) = \frac{\Phi_n(r, s)}{(2\operatorname{Re}\lambda_n)^{2(p_n-s_n)-r-s+2}}.$$

Наконец, подставляя это значение $I_n(r, s)$ в правую часть (1.20), приходим к формуле (1.18), в силу (1.17).

(г). Докажем основную теорему о биортогонализации системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^{\infty}$.

Теорема 1. *Системы функций*

$$\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^{\infty} \text{ и } \{\omega_k(x)\}_1^{\infty} \tag{1.21}$$

биортогональны на полуоси $[0, +\infty)$, *т. е.*

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\omega_n(x)\,dx =$$

$$= \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & \text{при } k=n \\ 0, & \text{при } k\neq n \end{cases} (k, n = 1, 2, \cdots). \tag{1.22}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 для любого $n\geqslant 1$ имеем представление

$$\Omega_n(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz}\omega_n(t)\,dt, \quad z\in G^{(+)}.$$

Отсюда, путем r-кратного дифференцирования по параметру z, получим

$$\Omega_n^{(r)}(z) = (-1)^r\int_0^{\infty} e^{-tz}t^r\omega_n(t)\,dt, \quad z\in G^{(+)} \quad (r=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.23}$$

Наконец, принимая во внимание свойства (1.9) функций $\Omega_n(z)$, $n\geqslant 1$, из (1.23) легко приходим к соотношениям биортогональности (1.22) теоремы.

(д). Назовем последовательность $\{\lambda_k\}_1^{\infty}\in G^{(+)}$ *упорядоченной*, если ее нумерация произведена так, что все кратные элементы в ней имеют подряд идущие индексы.

Ниже мы будем полагать, что наряду с условием (1.1) последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — также упорядоченная.

Тогда, принимая во внимание смысл чисел p_n $(n\geqslant 1)$ и обозначив

$$k_1=0,\ k_i=p_1+p_2+\cdots+p_{i-1}\quad (i\geqslant 2), \tag{1.24}$$

очевидно, будем иметь

$$\lambda_{k_i}\neq\lambda_{k_i+1}=\cdots=\lambda_{k_{i+1}}\neq\lambda_{k_{i+1}+1}\quad (i\geqslant 0), \tag{1.25}$$

если условиться полагать $\lambda_{k_0}=0$.

Поскольку последовательность $\{k_i\}_1^\infty$ монотонно возрастает к $+\infty$, то, таким образом, мы получаем разбиение множества всех натуральных чисел на непересекающиеся классы $\{(k_i,\ k_{i+1}]\}_0^\infty$, т. е.

$$\{n\}_1^\infty=\bigcup_{i=0}^{\infty}(k_i,\ k_{i+1}]. \tag{1.26}$$

Следовательно, любое натуральное число $n>1$ принадлежит лишь одному из наших классов $\{(k_i,\ k_{i+1}]\}_0^\infty$. Это значит, что каждому $n\geqslant 1$ можно ставить в соответствие лишь один индекс $i=i_n\geqslant 0$ так, что

$$n\in(k_{i_n},\ k_{i_n+1}]. \tag{1.27}$$

Но при данном $n\geqslant 1$ в нашей упорядоченной последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ число λ_n имеет кратность p_n, а на ее отрезке $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ оно обладает кратностью $s_n\leqslant p_n$. Из этого факта, ввиду (1.27), мы приходим к следующим утверждениям:

$$\begin{aligned}
&1)\ k_{i_n+1}-k_{i_n}=p_{i_n}=p_n,\ n=k_{i_n}+s_n;\\
&2)\ \lambda_j=\lambda_n,\ k_{i_n}+1\leqslant j\leqslant k_{i_n+1};\\
&3)\ \lambda_j\neq\lambda_n,\ 1\leqslant j\leqslant k_{i_n},\ j\geqslant k_{i_n+1}+1.
\end{aligned}\tag{1.28}$$

Заметим также, что, поскольку s_j есть кратность появления λ_j на отрезке $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_j\}$, то очевидно

$$s_j=j-k_{i_n},\ k_{i_n}+1\leqslant j\leqslant k_{i_n+1} \tag{1.29}$$

и, в частности

$$s_n=n-k_{i_n}. \tag{1.29'}$$

Из (1.29) следует, далее, что

$$s_j<s_n,\ \text{при}\ k_{i_n}+1\leqslant j<k_{i_n}+s_n\ ^*, \tag{1.30}$$

$$s_j\geqslant s_n,\ \text{при}\ k_{i_n}+s_n\leqslant j\leqslant k_{i_n}+1=k_{i_n}+p_n.$$

Введем, наконец, в рассмотрение интегралы

* Если при данном $n\in(k_{i_n},\ k_{i_n+1}]$ мы имеем $s_n=1$, то это утверждение вообще следует отбросить.

$$J_n(\lambda_j, r) = \int_0^\infty e^{-\lambda_j x} x^r \omega_n(x)\,dx \ (n, j=1, 2, \cdots; \ 0 \leqslant r \leqslant p_j - 1). \qquad (1.31)$$

Из свойств (1.28) и (1.30) введенных нами параметров, в силу теоремы 1 непосредственно следует справедливость следующих важных для дальнейшего утверждений.

Для любого $n \in (k_{l_n}, k_{l_{n+1}}]$, $j \geqslant 1$ и $0 < r \leqslant p_j - 1$

$$J_n(\lambda_j, r) = \begin{cases} 0, & \text{при } 1 \leqslant j \leqslant k_{l_n} \text{ и } j \geqslant k_{l_{n+1}} + 1 \\ 0, & \text{при } k_{l_n} + 1 \leqslant j < k_{l_n} + s_n \ ^* \\ 1, & \text{при } k_{l_n} + s_n < j \leqslant k_{l_{n+1}} = k_{l_n} + p_n. \end{cases} \qquad (1.32)$$

§ 2. Теоремы примыкания и единственности

(а). С самого начала предполагая лишь, что $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^{(+)}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, следуя идее С. Мандельбройта [1], введем некоторые обозначения и определения.

Рассмотрим формальный ряд типа Дирихле

$$\sum_{j=1}^\infty d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j - 1}, \qquad (2.1)$$

где $\{d_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а целые числа $s_j \geqslant 1$ имеют тот же смысл, что и в § 1, т. е. s_j означает кратность появления λ_j на отрезке $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$.

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ $(j \geqslant 1)$, то очевидно, что для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ и $m \geqslant 1$ суммы вида

$$S_m(x) \equiv \sum_{j=1}^m d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j - 1} \qquad (2.2)$$

принадлежат классу $L_2(\sigma, +\infty)$.

Предположим теперь, что функция $F(x)$ определена на полуоси $[\sigma_0, +\infty)$ и принадлежит классу $L_2(\sigma_0, +\infty)$ при некотором фиксированном $\sigma_0 > -\infty$.

Тогда величина

$$\|F(x) - S_m(x)\|_\sigma = \left\{ \int_\sigma^{+\infty} |F(x) - S_m(x)|^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3)$$

конечна при любом $\sigma \geqslant \sigma_0$ и $m \geqslant 1$.

Поэтому, когда $\sigma \in [\sigma_0, +\infty)$ и $k \geqslant 1$

$$\inf_{m \geqslant k} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \equiv \rho_k(\sigma, F) < +\infty. \qquad (2.4)$$

Из самого определения (2.4) видно, что $\rho_k(\sigma, F) \leqslant \rho_{k+1}(\sigma, F)$

* См. примечание на стр. 265.

($k \geqslant 1$), причем каждая из этих функций не возрастает на $[\sigma_0, +\infty)$ и стремится к нулю при $\sigma \to \infty$.

Условимся теперь последовательность функций $\{p_k(\sigma)\}_1^\infty$ относить к классу P_{σ_0}, если

1) $\inf\limits_{\sigma > \sigma_0} p_k(\sigma) > -\infty \quad (k = 1, 2, \cdots)$;

2) функция $p_k(\sigma)$ ($k \geqslant 1$) не убывает на $[\sigma_0 + \infty)$ и

$$\lim_{\sigma \to +\infty} p_k(\sigma) = +\infty \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Заметим, что если $\{p_k(\sigma)\}_1^\infty \in P_{\sigma_0}$, то, вообще говоря, не исключено, что каждая из функций $p_k(\sigma) = +\infty$ при достаточно большом $\sigma_k \subset \subset [\sigma_0, +\infty)$.

Условимся, наконец, обозначать $R_{\sigma_0}[\{\lambda_j, d_j\}; p_k(\sigma)]$ множество функций $F(x)$ из $L_2(\sigma_0, +\infty)$, для которых

$$\rho_k(\sigma, F) \leqslant \exp\{-p_k(\sigma)\} \quad (\sigma_0 \leqslant \sigma < +\infty, \ k \geqslant 1), \tag{2.5}$$

где $\{p_k(\sigma)\} \in P_{\sigma_0}$.

Таким образом, для каждой функции $F(x) \in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j; d_j\}; p_k(\sigma)]$ имеем

$$\inf_{m > k} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \leqslant \exp\{-p_k(\sigma)\} \quad (k \geqslant 1), \tag{2.6}$$

где $\{p_k(\sigma)\} \in P_{\sigma_0}$.

Если $F(x) \in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j, d_j\}; p_k(\sigma)]$, то будем говорить также, что суммы

$$S_m(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j - 1}$$

при $m > k$ представляют функцию $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_0, +\infty)$ с логарифмической точностью $p_k(\sigma)$.

Отметим, что если ряд $S_\infty(x)$ сходится к $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma, +\infty)$ при достаточно большом $\sigma_1 \geqslant \sigma_0$, то суммы $S_m(x) (m \geqslant k)$ представляют $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_1, +\infty)$ с логарифмической точностью, равной $+\infty$ при любом $k \geqslant 1$. Иначе говоря, тогда на всей полуоси $[\sigma_1, +\infty)$ $\rho_k(\sigma) = 0$ ($k \geqslant 1$) и, тем самым, можно положить, что $p_k(\sigma) = +\infty$, $\sigma \in [\sigma_1, +\infty)$ ($k > 1$).

Но вместе с тем отметим также, что если даже при всех $k \geqslant 1$ $p_k(\sigma) = +\infty$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$, то тогда мы все же не сможем утверждать о сходимости ряда $S_\infty(x)$ к $F(x)$ в метрике L_2, хотя бы на части полуоси $[\sigma_0 + \infty)$. Тогда, конечно, можно утверждать лишь, что для некоторой бесконечной последовательности $\{m_l\}$ все же

$$\lim_{l \to +\infty} \|F(x) - S_{m_l}(x)\|_{\sigma_0} = 0.$$

Иначе говоря, в этом случае (как и в случае, когда $p_k(\sigma) = +\infty$ $\sigma \in [\sigma_0, +\infty)$, даже при некотором $k \geqslant 1$) можно лишь утверждать сверхсходимость ряда $S_\infty(x)$ к функции $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma_0, +\infty)$.

(б). В этом пункте и всюду в дальнейшем, предполагая, что последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^+$ — **упорядоченная** и удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < \infty, \tag{2.7}$$

будем пользоваться обозначениями, введенными в § 1 (д).

Во-первых, для любого

$$n = k_{l_n} + s_n \in (k_{l_n}, k_{l_{n+1}}] \text{ и } \nu \in [s_n, p_n]$$

определим полиномы

$$P_n(\sigma, \nu) = \sum_{j=k_{l_n}+s_n}^{k_{l_n}+\nu} d_j C_{s_j-1}^{s_n-1} \sigma^{s_j-s_n} =$$

$$= \sum_{j=k_{l_n}+s_n}^{k_{l_n}+\nu} d_j \frac{\Gamma(s_j)}{\Gamma(1+s_j-s_n)\Gamma(s_n)} \sigma^{s_j-s_n}. \tag{2.8}$$

Заметим, во-вторых, что по (1.29)

$$s_j = j - k_{l_n}, \quad k_{l_n} + 1 \leqslant j < k_{l_{n+1}},$$

ввиду чего наши полиномы могут быть записаны также в виде

$$P_n(\sigma, \nu) = \sum_{j=n}^{n+\nu-s_n} d_j \frac{\Gamma(j-k_{l_n})}{\Gamma(1+j-n)\Gamma(n-k_{l_n})} \sigma^{j-n}, \quad s_n \leqslant \nu \leqslant p_n. \tag{2.9}$$

Из (2.9) видно, что $P_n(\sigma, \nu)$ — полином степени $\nu - s_n \leqslant p_n - s_n$, причем, в предельном случае, когда $\nu = p_n$, соответствующий полином

$$P_n(\sigma, p_n) \equiv P_n(\sigma) = \sum_{j=n}^{n+p_n-s_n} d_j \frac{\Gamma(j-k_{l_n})}{\Gamma(1+j-n)\Gamma(n-k_{l_n})} \sigma^{j-n} \tag{2.9'}$$

равен степени $p_n - s_n$.

Докажем теперь лемму.

Лемма 3. *Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^{(+)}$ — упорядоченная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию* (2.7). *Тогда для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ и $n \in (k_{l_n}, k_{l_{n+1}}]$ справедливо тождество*

$$Q_{n,m}(\sigma) \equiv e^{\sigma\lambda_n} \int_0^\infty S_m(x+\sigma)\, \omega_n(x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} P_n(\sigma, p_n) \equiv P_n(\sigma), & \text{если } m \geqslant k^{l}{}_{n+1} = k_{l_n} + p_n \\ P_n(\sigma, \nu), & \text{если } m = k_{l_n} + \nu \ (s_n \leqslant \nu \leqslant p_n). \end{cases} \tag{2.10}$$

Доказательство. Подставляя значение $S_m(x+\sigma)$ из (2.2) под знак интеграла $Q_{n,m}(\sigma)$ и пользуясь обозначением (1.31), мы получим

$$e^{-\sigma\lambda_n} Q_{n,m}(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} d_j e^{-\sigma\lambda_j} \sum_{r=0}^{s_j-1} C_{s_j-1}^{r} \sigma^{s_j-1-r} J_n(\lambda_j, r).$$

Пользуясь теперь первым из свойств (1.32) интегралов $J_n(\lambda_j, r)$ и утверждением 2) из (1.28), будем иметь

$$Q_{n,m}(\sigma) = \sum_{j=k_{l_n}+1}^{\varkappa(n,m)} d_j \sum_{r=0}^{s_j-1} C_{s_j-1}^{r} \sigma^{s_j-1-r} J_n(\lambda_n, r), \tag{2.11}$$

где

$$\varkappa(n, m) = \min\{k_{l_n}+1, m\} =$$

$$= \begin{cases} k_{l_n+1} = k_{l_n} + p_n, & \text{если } m \geqslant k_{l_n+1} \\ k_{l_n} + \nu, & \text{если } m = k_{l_n} + \nu,\ s_n \leqslant \nu \leqslant p_n. \end{cases} \tag{2.11'}$$

Наконец, из (2.11)—(2.11′), если учтем второе и третье из свойств (1.32) интегралов $J_n(\lambda_j, r)$, мы приходим к формуле

$$Q_{n,m}(\sigma) = \sum_{j=k_{l_n}+s_n}^{k_{l_n}+\nu} d_j C_{s_j-1}^{s_n-1} \sigma^{s_j-s_n} = P_n(\sigma, \nu), \quad s_n \leqslant \nu \leqslant p_n,$$

чем и завершим доказательство леммы.

(в). Докажем теперь следующую теорему об оценке полиномов $P_n(\sigma, \nu)$, когда соответствующие им ряды вида (2.1) примыкают к данной функции $F(x) \in L_2(\sigma, +\infty)$ с логарифмической точностью $p_t(\sigma)$.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty \in G^{(+)}$ — упорядоченная последовательность, удовлетворяющая условию* (2.7).

Если

$$F(x) \in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j, d_j\}; p_n(\sigma)], \tag{2.12}$$

то при любом $\sigma \geqslant \sigma_0$ *и* $n \geqslant 1$

$$|P_n(\sigma, \nu)| \leqslant \|\omega_n\| \{\|F_n\|_\sigma + e^{-p_n^2(\sigma)}\} e^{-\sigma \operatorname{Re}\lambda_n}, \quad s_n \leqslant \nu \leqslant p_n, \tag{2.13}$$

где $\|\omega_n\|$ *определяется из формул* (1.16)—(1.18) *леммы* 2 *и*

$$\|F\|_\sigma = \left\{ \int_\sigma^\infty |F(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Полагая, что $\sigma \in [\sigma_0, +\infty)$ и $n \geqslant 1$ — любое фиксированное целое число, рассмотрим интеграл

$$U_n(\sigma) = \int_0^\infty F(x+\sigma)\, \omega_n(x)\, dx.$$

Пользуясь неравенством Шварца-Буняковского, ввиду принятых нами обозначений, получим оценку

$$|U_n(\sigma)| < \|\omega_n\| \cdot \|F\|_\sigma \quad (n \geqslant 1,\ \sigma_0 \leqslant \sigma < \sigma < +\infty). \tag{2.14}$$

Полагая теперь, что $n \in (k_{l_n}, k_{l_n+1}]$, при любом $m \geqslant n$ представим интеграл $U_n(\sigma)$ в виде

$$U_n(\sigma) = \int_0^\infty \{F(x+\sigma) - S_m(x+\sigma)\}\, \omega_n(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^\infty S_m(x+\sigma)\, \omega_n(x)\, dx = U^{(1)}_{n,m}(\sigma) + U^{(2)}_{n,m}(\sigma), \tag{2.15}$$

но очевидно, что

$$|U^{(1)}_{n,m}(\sigma)| \leqslant \|\omega_n\| \cdot \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \quad (m \geqslant n),$$

и поэтому

$$\inf_{m > n} |U^{(1)}_{n,m}(\sigma)| \leqslant \|\omega_n\| \inf_{m > n} \|F(x) - S_m(x)\|_\sigma \leqslant$$

$$\leqslant e^{-p_n(\sigma)} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.16}$$

ввиду условия (2.12) теоремы.

С другой стороны, согласно лемме 3, при $m \geqslant n$

$$U^{(2)}_{n,m}(\sigma) \equiv e^{-\sigma\lambda_n}\, Q_{n,m}(\sigma) \equiv$$

$$\equiv e^{-\sigma\lambda_n} P_n(\sigma, \nu), \quad s_n \leqslant \nu \leqslant p_n, \tag{2.17}$$

где полиномы $P_n(\sigma, \nu)$ определяются из формул (2.8)—(2.9).

Таким образом, возвращаясь к тождеству (2.15), мы можем записать его в виде

$$e^{-\sigma\lambda_n} P_n(\sigma, \nu) = U_n(\sigma) - U^{(1)}_{n,m}(\sigma), \quad m \geqslant n. \tag{2.15'}$$

Наконец, отсюда мы получим оценку (2.13) теоремы, ввиду (2.14) и (2.16).

Замечания к теореме 2. 1°. *В случае, когда суммы $S_m(x)$ сходятся к $F(x)$ в метрике $L_2(\sigma, +\infty)$ хотя бы при достаточно большом $\sigma_1 \geqslant \sigma_0$, неравенство (2.13) можно заменить на следующее*

$$|P_n(\sigma, \nu)| \leqslant \|\omega_n\| \cdot \|F\|_\sigma\, e^{\sigma\lambda_n} \quad (\sigma \geqslant \sigma_1,\ n \geqslant 1,\ s_n < \nu \leqslant p_n). \tag{2.13'}$$

2°. *В случае, когда суммы $S_m(x)$ представляют функцию $F(x)$ с логарифмической точностью $p_n(\sigma)$, равной $+\infty$ при $\sigma \geqslant \sigma_n \geqslant \sigma_6$, неравенства (2.13') вновь останутся в силе, но лишь при $\sigma \geqslant \sigma_n$.*

(г). Из теоремы 2 приходим к следующим двум теоремам единственности.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty$ и функция $F(x)$ при любом $\sigma_0 > -\infty$ удовлетворяют условиям теоремы 2.*

Положим далее, что кроме условия (2.7) имеем также

$$\inf_{j \geqslant 1} \{\mathrm{Re}\, \lambda_j\} \geqslant \mu_0 > 0. \tag{2.18}$$

Тогда 1°. *Если*

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\{\|F\|_\sigma e^{\sigma\lambda_0}\}=0 \tag{2.19}$$

и

$$\lim_{\sigma\to-\infty}\inf\{\sigma\operatorname{Re}\lambda_n-p_n(\sigma)\}=-\infty\ (n=1,2,\cdots), \tag{2.20}$$

то

$$d_j=0\quad(j=1,2,\cdots). \tag{2.21}$$

2°. *В условиях* (2.19) *и* (2.20) *имеем также**

$$\|F\|_\sigma\leqslant e^{-p(\sigma)}\ (-\infty<\sigma<+\infty), \tag{2.22}$$

где

$$p(\sigma)=\sup_{k\geqslant1}\{p_k(\sigma)\}\leqslant+\infty. \tag{2.23}$$

Доказательство. 1°. Поскольку по условию у нас $\sigma_0>-\infty$ произвольно, то в данном случае мы можем воспользоваться неравенствами (2.13) теоремы 2, полагая, что $\sigma>-\infty$ — любое число.

Итак, в силу (2.13) и (2.18), мы для любого $n\geqslant1$ и $\sigma>-\infty$ имеем оценки

$$|P_n(\sigma,\nu)|=\left|\sum_{j=n}^{n+\nu-s_n}d_j\frac{\Gamma(j-k_{i,n})}{\Gamma(1+j-n)\,\Gamma(n-k_{i,n})}\sigma^{j-n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\omega_n\|\{\|F\|_\sigma e^{\sigma\lambda_0}+\exp[\sigma\operatorname{Re}\lambda_n-p_n(\sigma)]\}\ (s_n\leqslant\nu\leqslant p_n).$$

Отсюда, в силу условий (2.19) и (2.20), при $\sigma\to-\infty$ мы получим утверждение (2.21) теоремы.

2°. Так как $F(x)\in R_{\sigma_0}[\{\lambda_j,d_j\};p_n(\sigma)]$, то в силу (2.21) будем иметь

$$\inf_{m\geqslant k}\|F(x)-S_m(x)\|_\sigma\equiv\|F\|_\sigma\leqslant e^{-p_k(\sigma)}\ (k=1,2,\cdots) \tag{2.24}$$

при любом $\sigma>-\infty$. Поэтому неравенство (2.22) есть непосредственное следствие из (2.24) и (2.23).

К доказанной теореме добавим также, что если в условиях (2.19) и (2.20) мы имеем

$$p(\sigma)=\sup_{k\geqslant1}\{p_k(\sigma)\}=+\infty,\ \sigma\geqslant x_0,$$

то $F(x)=0$ почти всюду на полуоси $[x_0;+\infty)$.

Но при более жестких условиях можно утверждать большее.

Теорема 4. *Если для любого* $\sigma>-\infty$

$$\lim_{m\to\infty}\|F(x)-S_m(x)\|_\sigma=0, \tag{2.25}$$

---

* Отметим, что произвольно сильное убывание как $F(x)$, так и $\|F\|_\sigma$ при $\sigma\to+\infty$, здесь еще не обеспечивает единственности функции $F(x)$. В этом и заключается существенное качественное отличие природы примыкания на вещественной оси от случая примыкания в полосообразных областях Δ, когда аналитическая в ней функция $F(z)\neq0$ не может убывать произвольно быстро при $Re\,z\to+\infty$.

то при условиях (2.18) и (2.19), $F(x)=0$ *почти всюду на всей оси* $-\infty<x<+\infty$.

Доказательство. Из (2.25) следует, что для любого $\sigma>-\infty$

$$\inf_{m>n} \|F(x)-S_m(x)\|_\sigma=\rho_n(\sigma)=0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Поэтому в данном случае можно утверждать, что для любого $\sigma>-\infty$ суммы $S_m(x)$ в метрике $L_2(\sigma, +\infty)$ представляют функцию $F(x)$ с логарифмической точностью $p_n(\sigma)=+\infty$ $(\sigma>-\infty)$. Следовательно, условие (2.20) теоремы у нас выполняется автоматически и при любом $n\geqslant1$.

Вместе с тем имеем также

$$p(\sigma)=\sup_{\nu>1}\{p_\nu(\sigma)\}=+\infty$$

для любого $\sigma>-\infty$, и наше утверждение непосредственно следует из неравенства (2.22) теоремы 3.

(д). В связи с теоремой 4 заметим, что в случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ такова, что

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots, \ \sum_1^\infty \lambda_j^{-1}<+\infty$$

и, таким образом, $s_k=1$ $(k\geqslant1)$, то близкое к ней утверждение было установлено Л. Шварцем [9].

В предположении, что целая функция $F(z)$ разложима в ряд Дирихле

$$F(z)=\sum_{j=1}^\infty d_j\, e^{-\lambda_j z} \quad (|z|<\infty)$$

и

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |F(x)|<+\infty,$$

было доказано, что $F(z)\equiv\mathrm{const}$.

В случае же, когда $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — целые числа, Макинтайр [10] установил тот же результат, показав также, что при $\sum_1^\infty \lambda_j^{-1}=+\infty$ он перестает быть верным.

В связи с этим заметим, что вопрос о необходимости условия (2.7) в общем случае—для теоремы 4, остается открытым.

В заключение отметим, что результаты, аналогичные теоремам 2, 3 и 4 можно установить и в тех случаях, когда примыкание рядов вида (2.1) имеет место и в других метриках, в частности, в метрике равномерного приближения.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 10.VII.1972

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Դիրիխլեի տիպի շարքերի ճպումը և միակությունը իրական առանցքի վրա *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում կառուցվում է Դիրիխլեի տիպի

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j-1} \tag{1}$$

շարքերի հպման և միակության տեսության ապարատը իրական առանցքի վրա L_2 *մետրիկայում։*

Այդ արվում է ենթադրելով, որ (1) շարքի $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ *ցուցիչները կամայական կոմպլեքս թվեր են* $\mathrm{Re}\, z > 0$ *կիսահարթությունից, որոնք բավարարում են միայն*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < +\infty \tag{2}$$

պայմանին, իսկ $s_j \geqslant 1$ *թիվը* λ_j *թվի հանդես գալու կարգն է մեր հաջորդականության* $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$ *հատվածում։*

Նշենք, որ շերտաձև տիրույթներում Դիրիխլեի սովորական շարքերի հպման տեսության Ս. Մանդելբրոյտի զարգացրած հայտնի մեթոդը [1] հոդվածում դիտարկված իրական դեպքի համար կորցնում է իր ուժը։

M. M. DŽRBAŠIAN. *Adherence and uniqueness of Dirichlet type series on the real axis* (summary)

The present paper developes the apparatus of the theory of adherence and uniqueness of the Dirichlet type series

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j e^{-\lambda_j x} x^{s_j-1} \tag{1}$$

on the real axis in the L_2—metric.

This is done providing the powers $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ of the series (1) are arbitrary complex numbers from the halfplane $\mathrm{Re}\, z > 0$, which satisfy the condition

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < \infty. \tag{2}$$

The number $s_j \geqslant 1$ is the appearance-multiplisity of Δ_j in the segment $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_j\}$ of our sequence.

Remark, that the known method of the adhervence theory of usual Dirichlet series in stripe—type regions, developed by S. Mandelbrojt is not applicable in the case of real axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Мандельбройт.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИИЛ, М., 1955.
2. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИИЛ, М., 1962.
3. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, Изд. „Наука“, 1964.

4. *А. О. Гельфонд*. Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, Изв. АН СССР сер. мат., 14, 1956.
5. *М. М. Джрбашян*. О пополнении и замыкании неполной системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k - 1}\}_1^{\infty}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.
6. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. О построения некоторых биортогональных систем, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 12, № 5, 1959.
7. *М. М. Джрбашян*. Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка типа Штурма-Лиувилля, Изв. АН АрмССР, „Математика", 5, № 2, 1970.
8. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, Л., 1948.
9. *L. Schwartz*. Etude des sommes d'exponentielles, cap. II, Hermann, Paris, 1959.
10. *A. J. Macintyre*. Asymptotic paths of integral functions with gap power series, Proc. London Math. Soc., 2, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Различные классы интегральных уравнений Фредгольма второго рода с симметричными ядрами являлись предметом многочисленных исследований. Применение таких уравнений в математической физике, в частности в теории переноса излучения, привели к разработке различных эффективных методов их решения.

Особенно изученными являются уравнения с ядрами, зависящими от модуля разности аргументов. К таким уравнениям (скалярным или векторным) сводится большинство задач переноса излучения в плоскопараллельном слое (см., напр., [1—5]). Принцип инвариантности Амбарцумяна послужил основой для метода решения уравнений с ядрами вида

$$K(|x-t|) = \int_a^b A(s)\, e^{-|x-t|s}\, ds.$$

Применение этого метода, развитого В. А. Амбарцумяном, В. В. Соболевым и др. (см. [1—3]) позволяет свести решение уравнения к некоторым функциональным уравнениям относительно функций, фундаментальным образом связанных с $A(s)$. Эти уравнения легко решаются численно.

В работе автора [4] этот метод был обобщен к решению систем интегральных уравнений, элементы матриц ядер которых имеют такую же структуру и симметричны по индексам.

Отмеченные результаты примыкают к теории факторизации фредгольмовых операторов.

В книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [6], в которой, в частности, излагаются теория факторизации фредгольмовых операторов, приводится следующая факторизация оператора $(1-\mathrm{K})^{-1}$, где K— скалярный или векторный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$:

$$(1-\mathrm{K})^{-1} \equiv 1 + \Gamma = (1+\mathrm{V}_+)(1+\mathrm{V}_-), \tag{1}$$

где V_+ и V_- суть левый и правый вольтерровы операторы, ядра которых удовлетворяют уравнениям Фредгольма с ядром K и специальными правыми частями.

В работе В. С. Владимирова [7], в которой изучается самосопряженная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка, предлагается другой аспект факторизации: исходный оператор $D^2-q(x)$ представляется в виде произведения $(D-p)(D+p)$. Такой подход позволяет свести факторизацию к решению уравнения Рикатти, после чего краевая задача решается последовательным решением двух задач с начальными условиями.

Применение принципа инвариантности Амбарцумяна к некоторым задачам переноса излучения привело автора к методу факторизации широких классов симметрических интегральных операторов, составляющего предмет данной работы. Посредством решения некоторого функционального уравнения вольтерровского типа исходный интегральный оператор представляется в виде произведения двух вольтерровых операторов. Основой метода служит вариация верхнего предела интегрирования r, позволяющая найти связь между решениями уравнения при различных значениях r. Такой подход был применен в [6] в качестве одного из способов получения факторизации [1]. Этот подход имеет идейную общность как с методом сложения слоев (принципом инвариантности) Амбарцумяна, так и с принципом оптимальности и методом инвариантного вложения Р. Беллмана (см. [8]).

Результаты первого параграфа изложены в работе автора [9].

Автор выражает глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну и академику В. С. Владимирову за ценное обсуждение.

§ 1. Скалярное уравнение

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода с симметрическим ядром

$$f(x, r) - \int_{r_0}^{r} K(x, t) f(t, r)\, dt = g(x). \tag{2}$$

Для определенности ядро $K(x, t)$ предполагается непрерывным на $[r_0, r]\times[r_0, r]\setminus(x = t)$, а на линии $x = t$ может иметь слабую особенность.

Обозначим через $\lambda_1(r)$ первое собственное число ядра K на $[r_0, r]$. Функция $\lambda_1(r)$ обладает свойствами

а) $\lim\limits_{r\to\infty} |\lambda_1(r)| = \infty$; в) $|\lambda_1(r)| \downarrow$; с) $|\lambda_1(r)| \in C(0, \infty)$.

Введем также величину r_1 следующим образом:

$$r_1 = \begin{cases} \infty, & \text{если } \forall r > r_0\ |\lambda_1(r)| \neq 1 \\ r^*, & \text{если } |\lambda_1(r^*)| = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Мы ограничимся рассмотрением уравнения (2) при

$$r \in [r_0, r_1). \tag{4}$$

Условие (4) вместе с условиями, наложенными на ядро K, обеспечивает существование и единственность решения $f(x, r) \in C\Delta r_1$, где $\Delta r_1 = \{(x, r);\ r_0 \leqslant r < r_1,\ r_0 \leqslant x \leqslant r\}$, если $g(x) \in C[r_0, r_1]$. Функция $f(x, r)$ является также непрерывно дифференцируемой по r.

Предположим, что ядро $K(x, t)$ представлено в виде интеграла Стильтьеса

$$K(x, t) = \int_a^b U(x, s)\, V(t, s)\, d\sigma(s) \quad \text{при } x < t, \tag{5}$$

$$K(x, t) = K(t, x).$$

Хотя здесь и в дальнейшем не накладываются четкие ограничения на функции U и V, однако законность дальнейших преобразований обеспечена для широких классов представлений вида (5).

Наряду с уравнением (2) рассмотрим также уравнение со специальной правой частью $U(x, s)$, фигурирующей в представлении (5)

$$y(x, r, s) - \int_{r_0}^{r} K(x, t)\, y(t, r, s)\, dt = U(x, s). \tag{6}$$

Дифференцируя (6) по r, получаем

$$\frac{\partial y(x, r, s)}{\partial r} - \int_{r_0}^{r} K(x, t) \frac{\partial y(t, r, s)}{\partial r} dt = K(x, r)\, \varphi(r, s), \tag{7}$$

где обозначено

$$\varphi(r, s) = y(r, r, s). \tag{8}$$

Из (7) имеем

$$\frac{\partial y(x, r, s)}{\partial r} = \varphi(r, s)\, E(x, r), \tag{9}$$

где $E(x, r)$, являющаяся решением уравнения

$$E(x, r) - \int_{r_0}^{r} K(x, t)\, E(t, r)\, dt = K(x, r), \tag{10}$$

представляет собой частное значение резольвентного ядра $\Gamma(x, y, r)$:

$$E(x, r) = \Gamma(x, r, r) = \Gamma(r, x, r). \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что $E(x, r)$ следующим образом выражается через $y(x, r, s)$:

$$E(x, r) = \int_a^b y(x, r, s')\, V(r, s')\, d\sigma(s'), \tag{12}$$

что можно получить, если умножить (6) на $V(r, s)\, d\sigma(s)$ и проинтегрировать от a до b. Тогда относительно функции, фигурирующей в правой части (12), получается уравнение, идентичное с (10). Пользуясь единственностью решения уравнения (10), приходим к равенству (12).

При известном $\varphi(r, s)$ из уравнений (9) и (12) можно получить уравнение Вольтерра относительно $E(x, r)$. Из (9), с учетом (8), имеем

$$y(x, r, s) = \varphi(x, s) + \int_x^r E(x, r')\,\varphi(r', s)\,dr'. \tag{13}$$

Умножая (13) на $V(r, s)\,d\sigma(s)$ и интегрируя от a до b, получаем упомянутое уравнение Вольтерра

$$E(x, r) = \psi(x, r) + \int_x^r \psi(r', r)\,E(x, r')\,dr', \tag{14}$$

где введено обозначение

$$\psi(x, r) = \int_a^b \varphi(x, s)\,V(r, s)\,d\sigma(s). \tag{15}$$

Функция $\psi(x, r)$ играет фундаментальную роль в наших исследованиях. Из (14) видно, что $E(x, r)$ представляет собой резольвентное ядро вольтеррового оператора, порожденного ядром ψ.

Займемся теперь вопросом получения соотношений для определения функций ψ и φ.

Умножим (9) и (12) на $U(x, p)$ (p — новый параметр) и проинтегрируем по x от r_0 до r. Учитывая тождество

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\,dt = \frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^x f(x, t)\,dt\right] - f(x, x),$$

после небольших выкладок получаем

$$\frac{\partial W(p, s, r)}{\partial r} = \varphi(r, s)\left[U(r, p) + \int_a^b W(p, s', r)\,V(r, s')\,d\sigma(s')\right], \tag{16}$$

где введено обозначение

$$W(p, s, r) = \int_{r_0}^r y(x, r, s)\,U(x, p)\,dx. \tag{17}$$

Функцию $\varphi(r, s)$, в свою очередь, можно выразить через $W(p, s, r)$. Для этого подставим в (6) $x = r$. С учетом (5) получаем

$$\varphi(r, s) = U(r, s) + \int_a^b W(s', s, r)\,V(r, s')\,d\sigma(s'). \tag{18}$$

Нашей ближайшей целью является установление симметричности функции $W(p, s, r)$ по первым двум аргументам. Такая симметричность позволяет заменить выражение в квадратных скобках правой части уравнения (16) функцией $\varphi(r, p)$. Для установления такой симметрии подставим в (16) вместо $\varphi(r, s)$ его выражение из (17). Тогда относительно функции W получается следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial W(p, s, r)}{\partial r} = \left[U(r, s) + \int_a^b W(s', s, r)\, V(r, s')\, d\sigma(s') \right] \left[U(r, p) + \right.$$

$$\left. + \int_a^b W(p, s', r)\, V(r, s')\, d\sigma(s') \right] \tag{19}$$

с начальным условием, вытекающим из (17)

$$W(p, s, r_0) = 0. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что задача (19)—(20) обладает следующим свойством симметрии: наряду с функцией $W(p, s, r)$ решением задачи является также $W(s, p, r)$.

С другой стороны, для широких классов представлений (5) при $r \in [r_0, r_1)$ задача имеет единственное решение. В этом можно убедиться интегрированием (19) по r от r_0 до r с учетом условия (20) и применением к полученному уравнению принципа сжатых отображений. Итак, имеет место равенство

$$W(s, p, r) = W(p, s, r). \tag{21}$$

В силу (18) и (21), уравнение (19) можно переписать в виде

$$W(p, s, r) = \int_{r_0}^{r} \varphi(r', p)\, \varphi(r', s)\, dr'. \tag{22}$$

Подставляя в (18), учитывая (15), для функции $\varphi(r, s)$ получаем следующее уравнение Вольтерра:

$$\varphi(r, s) = U(r, s) + \int_{r_0}^{r} \psi(r', r)\, \varphi(r', s)\, dr'. \tag{23}$$

Функция же $\psi(r', r)$ является решением следующего функционального уравнения вольтеррового типа:

$$\psi(r, \rho) = K(r, \rho) + \int_{r_0}^{r} \psi(r', r)\, \psi(r', \rho)\, dr' \quad (\rho > r), \tag{24}$$

которое можно получить умножением (23) на $V(\rho, s)\, d\sigma(s)$ и интегрированием от a до b.

Уравнение (24) впервые было получено в работе автора [5] в одном частном случае.

Рассмотрим теперь уравнение (2) с произвольной правой частью. Дифференцируя (2) по r, после небольших выкладок получаем

$$\frac{\partial f(x, r)}{\partial r} = \varphi^*(r)\, E(x, r), \tag{24'}$$

где

$$\varphi^*(r) = f(r, r) \tag{25}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\varphi^*(x) = g(x) + \int_{r_0}^{x} \psi(t, r)\, \varphi^*(t)\, dt. \tag{26}$$

На выводе уравнения (26) мы не будем останавливаться. Интегрируя (24') по r от x до r, с учетом (25), получаем

$$f(x, r) = \varphi^*(x) + \int_{x}^{r} E(x, r')\, \varphi^*(r')\, dr'. \tag{27}$$

Объединяя формулы (26) и (27), имеем

$$f(x, r) = [1 + \mathbf{E}_+(x, r)][1 - \Psi_-(x)]^{-1} g(x), \tag{28}$$

где операторы $\mathbf{E}_+$ и Ψ_- суть

$$\mathbf{E}_+(x, r) f = \int_{x}^{r} E(x, r') f(r')\, dr', \tag{29}$$

$$\Psi_-(x) f = \int_{r_0}^{x} \psi(t, x) f(t)\, dt. \tag{30}$$

С другой стороны

$$f(x, r) = [1 - K(x, r)]^{-1} g, \tag{31}$$

откуда

$$[1 - K(x, r)]^{-1} = [1 + \mathbf{E}_+(x, r)][1 - \Psi_-(x)]^{-1}, \tag{32}$$

или

$$1 - K(x, r) = [1 - \Psi_-(x)][1 + \mathbf{E}_+(x, r)]^{-1}. \tag{33}$$

Из (14) следует, что

$$[1 + \mathbf{E}_+(x, r)]^{-1} = 1 - \Psi_+(x, r), \tag{34}$$

где оператор Ψ_+ определяется равенством

$$\Psi_+(x, r) f = \int_{x}^{r} \psi(t, r) f(t)\, dt. \tag{35}$$

Нами получена следующая

Теорема. *$\forall r \in [r_0, r_1)$ оператор $1 - K$ допускает факторизацию*

$$1 - K = [1 - \Psi_-][1 - \Psi_+], \tag{36}$$

где Ψ_+ *и* Ψ_- *соответственно правый и левый вольтерровые операторы, определяемые равенствами* (30) *и* (35), *а функция* ψ *определяется из уравнения* (24).

Итак, определение функции от двух переменных $\psi(r, \rho)$ из уравнения (24) позволяет факторизовать оператор $1 - K$ при любом $r \in [r_0, r_1)$.

Заменяя в (39) $[1 - \Psi_-]^{-1}$ на $1 + \mathbf{E}_-$, где

$$\mathbf{E}_-(x) f = \int_{r_0}^{x} \psi(t, x) f(t)\, dt,$$

с точностью до обозначений получаем факторизацию (1).

Отметим, что формулу (33) можно было нолучить из (1) и (14) с учетом уравнения (24), однако мы предпочли самостоятельный путь ее вывода, без использования результатов книги [6].

Формула (36) позволяет свести решение уравнения (2) к последовательному решению двух вольтерровых уравнений с ядром ψ.

Другим способом решения уравнения (2) является предварительное решение уравнения (14) относительно E и применение к функции g оператора $(1 + \mathbf{E}_+)(1 + \mathbf{E}_-)$. Второй подход является эффективным, если нужно одновременно решить семейство уравнений (2) при большом числе правых частей.

Так как представление (5) играет промежуточную роль и не фигурирует в окончательных результатах, то предложенный метод решения интегральных уравнений Фредгольма с симметрическими ядрами преобретает общий характер. Например, в случае непрерывных ядер представлением (5) может служить разложение ядра по своим собственным функциям на $[r_0, r_1]$.

§ 2. Один частный случай

При некоторых частных предположениях относительно конструкции ядра, из результатов § 1 можно получить результаты по факторизации дифференциальных операторов. В этих частных случаях отчетливо чувствуется связь уравнения (24) с уравнением Риккати.

Предположим, что ядро $K(x, t)$ уравнения (2) имеет вид

$$K(x, t) = \sum_{s=1}^{n} U_s(x)\, V_s(t) \text{ при } x < t. \qquad (37)$$

Тогда уравнение (2) принимает следующий вид:

$$f(x) = g(x) + \sum_{s=1}^{n} [V_s(x)\, \omega_s(x) + U_s(x) \Omega_s(x)], \qquad (38)$$

где введены обозначения

$$\omega_s(x) = \int_{r_0}^{x} U_s(t) f(t)\, dt, \tag{39}$$

$$\Omega_s(x) = \int_{x}^{r} V_s(t) f(t)\, dt. \tag{40}$$

Из (38)—(40) следует, что функции $\{\omega_s\}$ и $\{\Omega_s\}$ являются решениями следующей краевой задачи для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\omega_s}{dx} = U_s g + \sum_{m=1}^{n} [U_s V_m \omega_m + U_s U_m \Omega_m],$$

$$-\frac{d\Omega_s}{dx} = V_s g + \sum_{m=1}^{n} [V_s V_m \omega_m + V_s U_m \Omega_m], \tag{41}$$

$$\omega_s(r_0) = \Omega_s(r) = 0. \tag{42}$$

Уравнение же (24) обращается в следующее:

$$\frac{dW_{ps}(r)}{dr} = \left[U_s + \sum_{k=1}^{n} V_k W_{sk}\right]\left[U_p + \sum_{k=1}^{n} V_k W_{pk}\right] \tag{43}$$

с условиями

$$W_{ps}(r_0) = 0, \tag{44}$$

причем $W_{ps}(r) = W_{sp}(r)$.

Итак, решение задачи (41)—(42) с применением результатов § 1 сводится к решению задачи Коши (43)—(44) и последующему решению задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений. При $n = 1$ уравнение (43) обращается в уравнение Риккати, и полученный результат, по существу, совпадает с результатом работы В. С. Владимирова [7].

Нетрудно убедиться, что необходимым и достаточным условием вырожденности функции ψ, определяемой равенством (24), является вырожденность ядра $K(x, t)$ в треугольниках $x \gtrless t$.

§ 3. Системы интегральных уравнений

В настоящем параграфе результаты § 1 будут обобщены на широкие классы систем интегральных уравнений, матрицы-ядра которых обладают определенным свойством симметрии.

Изложение носит схематический характер.

Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:

$$f_i(x, r) - \sum_{j=1}^{n} \int_{r_0}^{r} K_{ij}(x, t) f_j(t, r)\, dt = g_i(x) \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{45}$$

элементы матрицы-ядра которой представлены в виде

$$K_{ij}(x, t)=\int_a^b U_i(x, s)\, V_j(t, s)\, d\sigma_{ij}(s) \text{ при } x<t, \tag{46}$$

$$K_{ij}(x, t) = K_{ji}(t, x). \tag{47}$$

Относительно функций K_{ij} делаются предположения, аналогичные предположениям относительно ядра K в § 1.

Введем вспомогательные функции $y_{lm}(x, r, s)$, удовлетворяющие следующим системам интегральных уравнений:

$$y_{lm}(x, r, s) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \int_{r_0}^{r} K_{lj}(x, t)\, y_{jm}(t, r, s)\, dt = U_l(x, s)\, \delta_{lm}\ (l, m=1, \cdots, n). \tag{48}$$

Будем рассматривать системы (45) и (48) в максимальном промежутке $r \in [r_0, r_1)$ в котором (45) имеет единственное решение.

Дифференцируя (48) по r, имеем

$$\frac{\partial y_{lm}}{\partial r} - \sum_{j=1}^{n} \int_{r_0}^{r} K_{lj}(x, t)\, \frac{\partial y_{jm}}{\partial r}\, dt = \sum_{k=1}^{n} K_{lk}(x, r)\, \varphi_{km}(r, s), \tag{49}$$

где

$$\varphi_{lm}(r, s) = y_{lm}(r, r, s). \tag{50}$$

Сравнивая (48) и (49), получаем

$$\frac{\partial y_{lm}(x, r, s)}{\partial r} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{km}(r, s)\, E_{lk}(x, r), \tag{51}$$

где

$$E_{lk}(x, r) = \sum_{q=1}^{n} \int_a^b y_{lq}(x, r, s')\, V_k(r, s')\, d\sigma_{qk}(s'). \tag{52}$$

Умножая (51) и (52) на $U_l(x, p)$ и интегрируя по x от r_0, до r, получаем

$$\frac{\partial W_{lm}(p, s, r)}{\partial r} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{km}(r, s) \Big[U_k(r, p)\, \delta_{lk} + \sum_{q=1}^{n} \int_a^b W_{lq}(p, s', r) \times \\ \times V_k(r, s')\, d\sigma_{qk}(s') \Big], \tag{52'}$$

где обозначено

$$W_{lm}(p, s, r) = \int_{r_0}^{r} y_{lm}(x, r, s)\, U_l(x, p)\, dx; \tag{53}$$

подставляя в (48) $x = r$, будем иметь

$$\varphi_{lm}(r, s) = U_l(r, s)\,\delta_{lm} + \sum_{q=1}^{n}\int_a^b W_{qm}(s', s, r)\, V_l(r, s')\, d\sigma_{ql}(s'). \tag{54}$$

Из (52) и (54) получается следующая система интегро-дифференциальных уравнений относительно $\{W_{lm}\}$:

$$\frac{\partial W_{lm}(p, s, r)}{\partial r} = \sum_{k=1}^{n}\Big[U_k(r, p)\,\delta_{lk} + \sum_{q=1}^{n}\int_a^b W_{lq}(p, s', r)\times$$

$$\times V_k(r, s')\, d\sigma_{qk}(s')\Big]\Big[U_k(r, s)\,\delta_{mk} + \sum_{q=1}^{n}\int_a^b W_{qm}(s', s, r)\times$$

$$\times V_k(r, s')\, d\sigma_{qk}(s')\Big] \tag{55}$$

с начальными условиями

$$W_{lm}(p, s, r_0) = 0. \tag{56}$$

Задача (55)—(56) обладает следующим свойством симметрии: наряду с $\{W_{lm}(p, s, r)\}$ ей удовлетворяет также $\{\overline{W}_{lm}(p, s, r)\}$, где

$$\overline{W}_{lm}(p, s, r) = W_{ml}(s, p, r).$$

Исходя из единственности решения задачи, что можно доказать при достаточно общих предположениях относительно функций $\{U_l\}$ и $\{V_l\}$, приходим к равенству

$$W_{lm}(p, s, r) = W_{ml}(s, p, r), \tag{57}$$

в силу которого из (54) и (55) получаем

$$W_{lm}(p, s, r) = \sum_{k=1}^{n}\int_{r_0}^{r}\varphi_{km}(r', s)\,\varphi_{kl}(r', p)\, dr'. \tag{58}$$

Подставляя (58) в (54), получаем систему Вольтерра относительно функций $\{\varphi_{km}\}$

$$\varphi_{lm}(r, s) = U_l(r, s)\,\delta_{lm} + \sum_{k=1}^{n}\int_{r_0}^{r}\psi_{kl}(r', r)\,\varphi_{km}(r', s)\, dr', \tag{59}$$

где обозначено

$$\psi_{kl}(r', r) = \sum_{q=1}^{n}\int_a^b \varphi_{kq}(r', s')\, V_l(r, s')\, d\sigma_{ql}(s'). \tag{60}$$

Функции $\{\psi_{kl}\}$ удовлетворяют следующей системе нелинейных функциональных уравнений вольтеррового типа

$$\psi_{ij}(r, \rho) = K_{ij}(r, \rho) + \sum_{k=1}^{n} \int_{r_0}^{r} \psi_{ki}(r', r) \psi_{kj}(r', \rho) dr' \quad (\rho > r). \tag{61}$$

Функции $\{E_{ik}\}$ определяются из следующей системы

$$E_{ik}(x, r) = \psi_{ik}(x, r) + \sum_{m=1}^{n} \int_{x}^{r} \psi_{mk}(r', r) E_{im}(x, r') dr'. \tag{62}$$

Рассмотрение системы (45) приводит к следующей формуле ее решения

$$f_i(x, r) = \varphi_i^*(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x}^{r} E_{ik}(x, r') \varphi_k^*(r') dr', \tag{63}$$

причем функции φ_i^* являются решением следующей системы Вольтерра

$$\varphi_i^*(x) = g_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{r_0}^{x} \psi_{ki}(t, x) \varphi_k^*(t) dt. \tag{64}$$

Итак, система (45) может быть решена последовательным решением системы (61) и систем (62), (64), после чего функции f_i даются формулой (63). Можно получить также векторные аналоги всех факторизаций, приведенных в § 1.

Как и в § 1, представление ядра (46) не фигурирует в окончательных результатах. Имеются некоторые основания предположить, что предложенный метод применим к решению системы с произвольным матрицей-ядром, обладающим лишь свойством симметрии (47).

Институт математики АН Армянской ССР Поступило 22.XII.1970

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ. Սիմետրիկ ինտեգրալ օպերատորների մի դասի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում առաջարկվում է սիմետրիկ կորիզներով Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների լուծման նոր մեթոդ։ Մեթոդի կիրառությունը թույլ է տալիս խնդիրը բերել մեկ ոչ գծային և երկու գծային Վոլտերրայի տիպի հավասարումների հաջորդական լուծման։

N. B. ENGIBARIAN. *On a class of symmetric integral operators* (summary)

New approach to the solution of Fredholm second type integral equations with symmetrical kernel is proposed. This reduces the problem to the solution of nonlinear Volterra equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян.* Научные труды, 1, Ереван, 1960.
2. *В. В. Соболев.* Перенос лучистой энергии, М., 1956.
3. *В. В. Соболев.* Курс теоретической астрофизики, М., 1967.

4. *Н. Б. Енгибарян.* Некогерентное рассеяние. 1, Астрофизика, 7, вып. 4, 1971, 573—586.
5. *Н. Б. Енгибарян.* Нестационарная диффузия излучения в плоско-параллельном слое, Астрофизика, 2, вып. 2, 1966, 197—204.
6. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, изд. „Наука", М., 1967.
7. *В. С. Владимиров.* Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка, Прикл. мат. и мех., 19, 1955, 315—324.
8. *Р. Беллман, Р. Калаба.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, Изд. „Мир", М., 1968.
9. *Н. Б. Енгибарян.* О факторизации симметрических интегральных операторов, ДАН СССР, 203, 1, 1972, 19—21.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

Р. А. ШАХБАГЯН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть A—псевдодифференциальный оператор вида

$$Au = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x,\xi)} a(x, \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi, \tag{1}$$

где $(x, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k \xi_k$, $\tilde{u}(\xi) = \underset{x\to\xi}{F} u(x)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$, R^{n+1} — $(n+1)$-мерное эвклидово пространство, $a(x, \xi)$ — некоторая функция, называемая символом оператора A.

В случае, когда $a(x, \xi)$ является полиномом относительно ξ порядка m с главной частью $a_0(x, \xi)$, оператор A является дифференциальным оператором порядка m; как известно, если $a_0(x, \xi)$ имеет вид

$$a_0(x, \xi) = c \prod_{k=1}^{m} (\xi_0 - \lambda_k(x, \xi')),$$

где при любом x и $\xi' \neq 0$ корни $\lambda_k(x, \xi')$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ действительны и различны, $\xi = (\xi_0, \xi')$, то соответствующий оператор A называется **гиперболическим**.

По аналогии введем следующее*

Определение 1. Мы скажем, что оператор A, задаваемый формулой (1), является **гиперболическим** псевдодифференциальным оператором, если его символ $a_0(x, \xi)$ имеет вид

$$a_0(x, \xi) = b(x, \xi) \prod_{k=1}^{m} (\xi_0 - \lambda_k(x, \xi')),$$

где $\lambda_k(x, \xi')$ $(k=1, 2, \cdots, m)$—действительны и различны при любых x и $\xi' \neq 0$, положительно однородны относительно ξ' порядка 1, а $b(x, \xi)$ — положительно однородная по ξ функция порядка α при всех x, аналитически продолжаемая по ξ_0 в полуплоскость $\mathrm{Im}\, \xi_0 > 0$, причем $b(x, \xi) \neq 0$ при $\mathrm{Im}\, \xi_0 \geqslant 0$, $|\xi_0| + |\xi'| \neq 0$.

В настоящей статье рассматривается случай $m=1$. Обозначим $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) = (x_0, x')$. Мы предполагаем, что оператор A является **вольтерровским** относительно x_0; это означает, что если

* См. [1].

$u(x_0, x')=0$ при $x_0<t$, то $Au=0$ при $x_0<t$ (t — любое), иными словами, оператор A переводит функции, равные нулю при $x_0<t$ в функции, также равные нулю при $x_0<t$.

Настоящая статья посвящена изучению задачи Коши для гиперболических псевдодифференциальных уравнений, порожденных операторами вида (1) с нулевыми начальными данными на гиперплоскости $x_0=0$.

Изучению задачи Коши для гиперболических уравнений, а также для гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными Коши на компактных многообразиях, посвящен ряд работ (см., например, [1], [3], [4]).

Как хорошо известно, гиперболические уравнения обладают свойством конечной зависимости решений от начальных данных. Однако, в отличие от гиперболических уравнений, гиперболические псевдодифференциальные уравнения, вообще говоря, этим свойством не обладают. Л. Гордингом получены условия существования конечной области зависимости в случае, когда символ соответствующего оператора не зависит от x и является целой функцией экспоненциального типа. Если же символ $a_0(x, \xi)$ является положительно однородной функцией относительно ξ, то, как известно, порожденное соответствующим этому символу оператором уравнение будет обладать свойством конечной зависимости решений от начальных данных в том и только в том случае, когда символ $a_0(x, \xi)$ является полиномом относительно ξ.

В силу сказанного, нам представляется естественным рассмотреть следующую задачу Коши:

Требуется найти решение $u_+(x_0, x')$ уравнения

$$P^+ Au_+(x)=f(x), \quad x\in R_T^{n+1}, \tag{2}$$

где $R_T^{n+1}=R^{n+1}\{x\colon 0<x_0<T,\ x'\in R^n\}$, P^+ — оператор сужения с R^{n+1} на R_T^{n+1}, удовлетворяющее однородным начальным условиям на гиперплоскости $x_0=0$. Предполагается, что $T>0$ достаточно мало.

Кратко о содержании работы. В § 1 описывается класс рассматриваемых символов, а также вводится ряд функциональных пространств, в которых решается поставленная задача. В параграфе 2 дается формулировка основного результата статьи (теорема 1), доказательство которого приводится в § 4. В третьем параграфе статьи решается вспомогательная задача Коши (2.9), (2.10).

§ 1. Функциональные пространства и класс символов

1°. Доказательство разрешимости задачи Коши будет основано на априорных оценках. С этой целью введем в рассмотрение функциональные пространства, естественным образом связанные с рассматриваемой задачей.

Пространства $H'_s(T)$. По определению $u(x)\in H'_s(T)$ (s — любое, $x_0\in[0, T]$, $x'\in R^n$), если конечна следующая норма:

$$[\|u\|]_s=\left(\int_0^T \|u\|_s'^2\,dx_0\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $\|u\|'_s$ — норма в $H_s(R^n)$ функции $u(x_0, x')$ по x':

$$\|u(x_0, x')\|'_s=\left(\int_{R^n}(1+|\xi'|^2)^s\,|\tilde{u}(x_0, \xi')|^2\,d\xi'\right)^{1/2}$$

($\tilde{u}(x_0, \xi')$ — преобразование Фурье $u(x_0, x')$ по x' в R^n:

$$\tilde{u}(x_0, \xi')=F_{x'\to\xi'}\,u(x_0, x')).$$

Пространства $B_s(T)$. По определению $u\in B_s(T)$ ($s>1$), если конечна норма

$$\|u\|_s=\left([\|u\|]_s^2+\left[\left\|\frac{\partial u}{\partial x_0}\right\|\right]_{s-1}^2\right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Пространства $H_s(T)$. Мы скажем, что $u(x_0, x')\in H_s(T)$ (s — произвольное вещественное число), если конечна следующая норма:

$$\|u\|_s^2=\inf_{lu}\int_{R^{n+1}}(1+|\xi_0|^2+|\xi'|^2)^s\,|\tilde{lu}(\xi_0, \xi')|^2\,d\xi<+\infty, \tag{1.3}$$

где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям функции

$$u(x_0, x') \text{ по } x_0\subset R_T^{n+1} \text{ на } R^{n+1}, \quad \tilde{lu}(\xi)=F_{x\to\xi}lu\,^*.$$

Обозначим через $H_s(T)$ (соответственно $B_s^0(T)$) подпространство $H_s(T)$ (соответственно $B_s(T)$), состоящее из функций $u(x_0, x')$, являющихся замыканием по норме (1.3) (соответственно (1.2)) функций класса $C^\infty(R_T^{n+1})$, обращающихся в нуль в окрестности гиперплоскости $x_0=0$.

2°. Опишем теперь класс символов изучаемых операторов.

Класс O_*^+. Мы скажем, что функция $a(x, \xi)$, определенная в $R_T^{n+1}\times(R_\xi^{n+1}\setminus\{0\})$ принадлежит классу O_*^+, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $a(x, \xi)$ является положительно однородной функцией относительно ξ порядка α, то есть $a(x, t\xi)=t^\alpha a(x, \xi)$ при всех $t>0$ и $x\in R_T^{n+1}$;

в) $a(x, \xi)\in C^\infty$ по совокупности переменных x, ξ для всех $x\in R_T^{n+1}$ и $\xi\in R^{n+1}\setminus\{0\}$, при этом для любых $x\in R_T^{n+1}$, ξ' и ξ_0 таких, что $|\xi_0|+|\xi'|\neq 0$, $D_x^l D_{\xi'}^m a(x, \xi)$ — непрерывны и удовлетворяют оценке

$$|D_x^l D_{\xi'}^m a(x, \xi)|\leqslant C_{l, m}(1+|\xi|)^{\alpha-m}, \tag{1.4}$$

* Элементы пространства $H_s(T)$ получаются как замыкания в норме (1.3) бесконечно дифференцируемых функций, определенных на R^{n+1}.

где l, m — произвольные целые неотрицательные числа, $C_{l, m}$ — постоянная;

c) Функция $a(x, \xi)$ допускает аналитическое продолжение по ξ_0 в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_0 > 0$ с сохранением свойств a), b) однородности и гладкости;

d) Существует следующий предел:

$$\lim_{|x| \to \infty} a(x_0, x', \xi) = a(x_0, \infty, \xi),$$

равномерный относительно x_0 и ξ, причем $a'(x, \xi) = a(x, \xi) - a(x_0, \infty, \xi)$ принадлежит по x' пространству $S(R^n_{x'})$ функций, убывающих при $|x'| \to \infty$ быстрее любой степени $|x'|$ вместе со всеми производными по x'* равномерно по x_0 и ξ.

Класс $U_{\alpha+1}$. Мы скажем, что функция $a(x, \xi) \in O^+_{\alpha+1}$ принадлежит классу $U_{\alpha+1}$, если для любых $x \in R^{n+1}_T$ и $\xi \in R^{n+1}_{\xi} \setminus \{0\}$ она представима в виде

$$a(x, \xi) = \lambda(x, \xi)\, b(x, \xi), \tag{1.5}$$

при этом выполняются следующие условия:

1. Функция $\lambda(x, \xi) \in O^+_1$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \xi_k} \in O^+_0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, и имеет место представление

$$\lambda(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_1(x, \xi'), \tag{1.6}$$

где $\lambda_1(x, \xi') \in C^\infty \{R^{n+1}_T \times (R^n_{\xi'} \setminus \{0\})\}$,

$$\operatorname{ord} \lambda_1 = 1, \ \operatorname{Im} \lambda_1 = 0.$$

2. Функция $b(x, \xi)$ удовлетворяет условию эллиптичности, то есть

$$b(x, \xi) \neq 0 \tag{1.7}$$

при всех $x \in R^{n+1}_T$ и ξ: $\operatorname{Im} \xi_0 \geqslant 0$,

$$|\xi'| + |\xi_0| > 0; \ b(x, \xi) \in O^+_\alpha, \ \frac{\partial b}{\partial \xi_k} \in O^+_{\alpha-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

§ 2. Постановка задачи

Пусть $a(x, \xi)$ — вообще говоря, неоднородная функция относительно ξ вида

---

* Более точно, пространство $S(R^n_{x'})$ состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $u(x')$, для которых при любых k и α

$$(1 + |x'|)^k |D^\alpha (u(x'))| \leqslant C_{k, \alpha},$$

где положено,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \ D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$C_{k, \alpha}$ — некоторые постоянные, зависящие от k и α.

$$a(x, \xi) = a_0(x, \xi) + v(x, \xi), \tag{2.1}$$

где $a_0(x, \xi) \in U_{\alpha+1}$, а оператор V, порожденный символом $v(x, \xi)$, является вольтерровским оператором порядка, не превосходящего $\alpha-1$. То есть для любого $\beta < \alpha - 1$ и $u \in C_0^\infty(R_T^{n+1})$ имеет место оценка

$$\|Vu\|_{s-\beta} \leqslant C_\beta \|u\|_s, \tag{2.2}$$

где C_β — некоторая константа.

Продолжим функцию $a(x_0, x', \xi)$ по переменной x_0 финитным образом вне интервала $(0, T)$.

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор вида

$$Au = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x, \xi)} \varphi(x_0)\, a_0(x, \xi)\, \tilde{u}(\xi)\, d\xi + Vu,^* \tag{2.3}$$

где $\varphi(x_0) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, $\varphi(x_0) \equiv 1$ на интервале $(0, T)$. Функцию $a_0(x, \xi)$ назовем символом оператора A, а $a(x, \xi)$ — полным символом оператора A (см. [1]).

Пусть, далее, P^+ — оператор сужения функций с пространства R^{n+1} на R_T^{n+1}.

Рассмотрим уравнение вида

$$P^+ A u_+ = f, \tag{2.4}$$

где A — вольтерровский псевдодифференциальный оператор порядка $\alpha + 1$ (α — некоторое вещественное число), символ которого $a_0(x, \xi) \in U_{\alpha+1}$; $u_+(x_0, x')$ — произвольное продолжение функции $u(x_0, x')$ по x_0 на всю ось $(-\infty, +\infty)$, принадлежащее пространству $B_s^0(T)$**.

Задача заключается в отыскании решения u_+ уравнения (2.4), принадлежащего пространству $B_s^0(T)$.

Обозначим через D_A множество функций $u_+ \in B_s^0(T)$, таких что $P^+ A u_+ \in \mathring{H}_{s-\alpha}(T)$. Из определения шкалы пространств $B_s(T)$ непосредственно следует, что множество D_A всюду плотно в пространстве $B_s^0(T)$ ($\overline{D}_A = B_s^0(T)$) в метрике последнего, ибо имеют место очевидные вложения

$$B_{s+1}^0(T) \subset D_A \subset B_s^0(T).$$

Основной результат статьи заключается в установлении однозначной разрешимости сформулированной задачи (точнее, в доказательстве существования и единственности решения $u_+ \in D_A$ задачи) для любой правой части $f \in \mathring{H}_{s-\alpha}(T)$ при достаточно малых $T > 0$, а именно, справедлива следующая

---

* В случае, если функция $a(x, \xi)$ имеет неинтегрируемую особенность при $\xi = 0$ в (2.3) берется некоторая регуляризация интеграла.

** В силу вольтерровости оператора A значения $P^+ A u_+$ не зависят от выбора продолжения функции $u(x_0, x')$ при $x_0 > T$.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение* (2.4), *и символ оператора* A $a_0(x, \xi)$ *принадлежит классу* $U_{\alpha+1}$. *Тогда для любого* $f \in H_{s-\alpha}(t_0)$ (*при достаточно малом* t_0) *уравнение* (2.4) *имеет единственное решение* $u_+(x)$, *принадлежащее пространству* $B_s^0(t_0)$, *причем справедлива априорная оценка*

$$\|u_+\|_s \leqslant C \|f\|_{s-\alpha}, \tag{2.5}$$

где C — *некоторая постоянная*, $s \geqslant 1$.

Поскольку символ оператора A $a_0(x, \xi) \in U_{\alpha+1}$, то имеет место представление

$$a_0(x, \xi) = \lambda(x, \xi)\, b(x, \xi), \tag{2.6}$$

где $\lambda(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 § 1.

Обозначим через B оператор, построенный по символу $b(x, \xi) \in O_\alpha^+$. В силу эллиптичности оператора B для него существует ограниченный обратный оператор (см., например, [2]), являющийся также эллиптическим псевдодифференциальным оператором.

Точнее, для оператора B существует оператор B^{-1} (символ которого $\frac{\varphi(x_0)}{b(x, \xi)}$, где $\frac{1}{b} \in O_{-\alpha}^+$) такой, что имеет место представление

$$BB^{-1} = B^{-1}B = E + V_1, \tag{2.7}$$

где E — тождественный оператор, а порядок оператора V_1 не превосходит —2, то есть

$$\|V_1 u\|_s \leqslant C \|u\|_{s-2} \tag{2.8}$$

для любого $u \in C^\infty(R^{n+1})$, C — некоторая постоянная.

Перепишем уравнение (2.4) в следующем виде:

$$P^+Au_+ = P^+ B\Lambda u_+ + V_2 u_+ = f, \tag{2.4$'$}$$

где Λ — оператор, построенный по символу $\lambda(x, \xi)$, а V_2—вольтерровский оператор, порядок которого не превосходит $\alpha - 1$.

Поскольку оператор B обратим, задача свелась, по существу, к нахождению обратного оператора к оператору Λ, а именно, требуется найти функцию $u_+(x_0, x')$, удовлетворяющую уравнению

$$P^+ \Lambda u_+(x) = f(x), \ x \in R_T^{n+1}, \tag{2.9}$$

а при $x_0 = 0$ краевому условию

$$u_+|_{x_0=0} = 0. \tag{2.10}$$

Обозначим через $\lambda(x, \xi)$ полный символ оператора Λ:

$$\hat{\lambda}(x, \xi) = \lambda(x, \xi) + c_0(x, \xi'), \tag{2.11}$$

при этом оператор, построенный по символу $c_0(x, \xi')$ является вольтерровским оператором, порядок которого не превосходит 0, и $c_0(x, \xi')$ удовлетворяет условию d). В силу (2.6) оператор Λ имеет следующий вид:

$$\Lambda u_+ = i\frac{\partial u_+}{\partial x_0} - \Lambda_1 u_+ + C_0 u_+, \tag{2.12}$$

где Λ_1 и C_0 — операторы, построенные по символам $\lambda_1(x, \xi')$ и $c_0(x, \xi')$ соответственно.

§ 3. Решение задачи (2.9), (2.10)

В этом n° будет рассмотрена задача Коши (2.9), (2.10) в предположении, что символ λ оператора Λ имеет вид:

$$\lambda(x, \xi) = \xi_0 - \lambda_1(x_0, \xi').$$

Предполагая, что решение поставленной задачи существует, произведем в (2.9), (2.10) преобразование Фурье по переменным x'; имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}_+(x_0, \xi')}{\partial x_0} + i\int_{R^n} \tilde{\lambda}_1(x_0, \xi'-\eta', \eta')\tilde{u}_+(x_0, \eta')\,d\eta' = -i\tilde{f}(x_0, \xi'), \tag{3.1}$$

$$\tilde{u}_+|_{x_0=0} = 0, \tag{3.2}$$

где через $\tilde{u}_+$, $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{f}$ обозначено, соответственно, преобразование Фурье по x' функций u_+, λ_1, f.

В силу условий, наложенных на полный символ оператора A, функцию $c_0(x, \xi')$ можно представить в виде

$$c_0(x, \xi') = c_0(x_0, \infty, \xi') + c_0'(x_0, x', \xi'),$$

где

$$c_0(x_0, \infty, \xi') = \lim_{|x'|\to\infty} c_0(x_0, x', \xi'),\quad c_0'(x_0, x', \xi') =$$
$$= c_0(x_0, x', \xi') - c_0(x_0, \infty, \xi').$$

Тогда задача (3.1), (3.2) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{u}_+(x_0, \xi')}{\partial x_0} + i[\lambda_1(x_0, \xi') - c_0(x_0, \infty, \xi')]\tilde{u}_+(x_0, \xi') -$$
$$-i\int_{R^n} \tilde{c}_0'(x_0, \xi'-\eta', \eta')\tilde{u}_+(x_0, \eta')\,d\eta' = \tilde{f}(x_0, \xi'), \tag{3.3}$$

$$\tilde{u}_+\Big|_{x_0=0} = 0. \tag{3.4}$$

(Здесь, для простоты, через $\tilde{f}$ мы обозначили $-i\tilde{f}$).

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial \tilde{v}(x_0, \xi')}{\partial x_0} + i[\lambda_1(x_0, \xi') - c_0(x_0, \infty, \xi')]\tilde{v}(x_0, \xi') = \tilde{g}(x_0, \xi'), \tag{3.5}$$

$$\tilde{v}\Big|_{x_0=0} = 0. \tag{3.6}$$

Лемма 1. *Пусть функция $\lambda(x_0, \xi)$ удовлетворяет условию 1 § 1. Тогда для любой правой части $g \in \overset{\circ}{H}_s(t_0)$ задача* (3.5), (3.6) *имеет одно и только одно решение $\tilde{v}$, принадлежащее пространству $B^0_s(t_0)$, причем при достаточно малом t_0 имеет место оценка*

$$\|v\|_s \leqslant \varepsilon \|g\|_s + C\|g\|_{s-1}, \tag{3.7}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а C — постоянная.

Доказательство. Легко видеть, что единственным решением задачи (3.5), (3.6) является функция

$$\tilde{v}(x_0, \xi') = \int_0^{x_0} \exp\left\{-i \int_y^{x_0} [\lambda_1(z, \xi') - c_0(z, \infty, \xi')]\,dz\right\} \tilde{g}(y, \xi')\,dy. \tag{3.8}$$

Получим оценку для решения $\tilde{v}$, задаваемого формулой (3.8). С этой целью рассмотрим

$$\|v\|_s'^2 = \int_{R^n} (1+|\xi'|^2)^s |\tilde{v}(x_0, \xi')|^2\,d\xi',$$

где $0 < x_0 < t_0$, $v(x_0, x') = F^{-1}_{\xi' \to x'} \tilde{v}(x_0, \xi')$. В силу (3.8) функцию v можно оценить следующим образом:

$$\|v\|_s'^2 \leqslant \int_{R^n} (1+|\xi'|^2)^s \left(\int_0^{x_0} |\tilde{g}(y, \xi')|\,dy\right)^2 d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant t_0 \int_0^{t_0} \|g\|_s'^2\,dy = t_0\,[\|g\|]_s^2.$$

Откуда

$$[\|v\|]_s \leqslant t_0\,[\|g\|]_s. \tag{3.9}$$

Поскольку $g \in \overset{\circ}{H}_s(t_0)$, из (3.9) получим

$$[\|v\|]_s \leqslant t_0 \|g\|_s. \tag{3.10}$$

Далее, в силу уравнения, имеем

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_0}\right\|_{s-1}' \leqslant C\,(\|v\|_s' + \|g\|_{s-1}'),$$

где C — постоянная, не зависящая от v и t_0. Отсюда, с учетом (3.10), получим

$$\left|\left[\frac{\partial v}{\partial x_0}\right]\right|_{s-1} \leqslant Ct_0 \|g\|_s + C\|g\|_{s-1}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) непосредственно вытекает окончательная оценка для v:

$$\|v\|_s \leqslant \varepsilon \|g\|_s + C_1 \|g\|_{s-1}$$

при достаточно малом t_0 ($\varepsilon > 0$ — произвольное число).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Оператор C'_0, построенный по символу $c'_0(x, \xi')$, действует ограниченным образом из пространства $B_s(t_0)$ в пространство $H'_s(t_0)$.*

Доказательство. Используя неравенство (1.4), оценим*

$$(1+|\xi'|^2)^s |\widetilde{C'_0 u_+}(x_0, \xi')|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{R^n} (1+|\xi'|^2)^{s/2} |\tilde{c}'_0(x_0, \xi'-\eta', \eta')| |\tilde{u}_+(x_0, \eta')| d\eta' \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_p \left(\int_{R^n} \frac{(1+|\xi'|^2)^{s/2}}{(1+|\eta'|^2)^{s/2}} \frac{(1+|\eta'|^2)^{s/2} |\tilde{u}_+(x_0, \eta')|}{(1+|\xi'-\eta'|^2)^p} d\eta' \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{p_1} \left(\int_{R^n} \frac{1}{(1+|\xi'-\eta'|^2)^{p_1}} (1+|\eta'|^2)^{s/2} |\tilde{u}_+(x_0, \eta')| d\eta' \right)^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по ξ', получим

$$\|C'_0 u_+\|'_s \leqslant K \|u_+\|'_s, \tag{3.12}$$

где K — постоянная, не зависящая от u_+.

Интегрируя, далее, (3.12) по x_0 в промежутке от 0 до t_0, имеем

$$[\|C'_0 u_+\|]_s \leqslant K_1 [\| u_+\|]_s, \tag{3.13}$$

откуда следует оценка

$$[\|C'_0 u_+\|]_s \leqslant K_2 \|u_+\|_s, \tag{3.13'}$$

где K_2 — постоянная, не зависящая от u_+. Лемма доказана.

Замечание. Легко видеть, что оператор C'_0 ограничен также в пространстве $H'_s(t_0)$.

Перейдем к доказательству основного результата настоящего параграфа, а именно, к установлению однозначной разрешимости задачи (2.9), (2.10).

Теорема 2. *Если оператор Λ удовлетворяет условию* 1 § 1, *то при любой правой части $f \in \mathring{H}_s(t_0)$ и достаточно малом t_0 задача* (2.9), (2.10) *имеет одно и только одно решение $u_+(x)$), принадлежащее пространству $B^0_s(t_0)$, при этом справедлива оценка*

$$\|u_+\|_s \leqslant C \|f\|_s, \tag{3.14}$$

где C—постоянная, не зависящая от u_+.

---

* Ср. [2], теорема 1.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 оператор $P^+\Lambda$ представим в виде суммы двух операторов:

$\Lambda_2 = i\frac{\partial}{\partial x_0} - \Lambda_1 + C_0$ и оператора C_0'', из которых первый обратим, а порядок второго не превосходит 0. Перепишем уравнение (2.9) в следующем виде:

$$P^+\Lambda u_+ \equiv \Lambda_2 u_+ + C_0'' u_+ = f. \qquad (3.15)$$

Произведем в последнем уравнении преобразование Фурье по x' и применим к обеим частям его оператор $\tilde{\Lambda}_2^{-1}$, обратный к оператору $F_{x'\to\xi'}\Lambda_2$. Имеем

$$\tilde{u}_+(x_0, \xi') + \tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{C}_0' u_+(x_0, \xi') = \tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{f}(x_0, \xi'). \qquad (3.16)$$

Оценим оператор $\Lambda_2^{-1} C_0'$, используя явный вид оператора Λ_2^{-1}. Обозначим $\tilde{g} = \tilde{C}_0' u_+$, тогда

$$|\tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{g}(x_0, \xi')|^2 \leqslant x_0 \int_0^{t_0} |\tilde{g}(y, \xi')|^2\, dy,$$

откуда

$$\int_{R^n} (1+|\xi'|^2)^s\, |\tilde{\Lambda}_2^{-1}\tilde{g}(x_0, \xi')|^2\, d\xi' \leqslant x_0 [\![g]\!]_s^2. \qquad (3.17)$$

Интегрируя далее (3.17) по x_0 в промежутке $[0, t_0]$, получим

$$[\![\Lambda_2^{-1} g]\!]_s^2 \leqslant \frac{t_0^2}{2}[\![g]\!]_s^2$$

или

$$[\![\Lambda_2^{-1}C_0' u_+]\!]_s \leqslant \frac{t_0}{\sqrt{2}}[\![C_0' u_+]\!]_s.$$

Из последнего неравенства при достаточно малом t_0 и в силу (3.13) имеем

$$[\![\Lambda_2^{-1} C_0']\!]_s < 1. \qquad (3.18)$$

Отсюда непосредственно следует непрерывная обратимость оператора $E + \Lambda_2^{-1} C_0'$ в пространстве $H_s'(t_0)$ при достаточно малом t_0, то есть существование оператора $(E + \Lambda_2^{-1} C_0')^{-1}$, действующего ограниченным образом в пространстве $H_s'(t_0)$.

Перейдем к доказательству оценки (3.14). Пусть u_+ — решение задачи (2.9), (2.10). В силу (1.2)

$$\|u_+\|_s \leqslant [\![u_+]\!]_s + \left[\!\left[\frac{\partial u_+}{\partial x_0}\right]\!\right]_{s-1}. \qquad (3.19)$$

Далее, поскольку ord $\lambda_1 = 1$, ord $C_0 = 0$, то в силу уравнения (2.9)

$$\left\| \left\| \frac{\partial u_+}{\partial x_0} \right\| \right\|_{s-1} \leqslant C_1 ([\![u_+]\!]_s + [\![u_+]\!]_{s-1} + [\![f]\!]_{s-1}). \qquad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) очевидным образом следует оценка

$$\|u_+\|_s \leqslant C_2 ([\![u_+]\!]_s + [\![f]\!]_{s-1}). \qquad (3.21)$$

Но в силу ограниченности операторов $(E + \Lambda_2^{-1} C_0')^{-1}$ и Λ_2^{-1} в пространстве $\dot{H}_s (t_0)$, имеем

$$[\![u_+]\!]_s \leqslant C_3 [\![\Lambda_2^{-1} f]\!]_s \leqslant C_4 [\![f]\!]_s. \qquad (3.22)$$

Объединяя (3.21) и (3.22), убеждаемся в справедливости оценки (3.14) и, стало быть, доказано, что решение $u_+ \in B_s^0 (t_0)$. Теорема полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы мы будем существенно опираться на результаты, полученные в предыдущих параграфах.

Утверждение теоремы заключается в установлении существования и единственности решения $u_+ (x_0, x')$ уравнения

$$P^+ A u_+ (x) = f (x), \quad x \in R_{t_0}^{n+1}, \qquad (4.1)$$

принадлежащего пространству $B_s^0 (t_0)$ при условии, что правая часть $f \in \dot{H}_{s-\alpha} (t_0)$ и t_0 достаточно мало; оператор A задан формулой (2.3), а оператор V, входящий в представление (2.3), предполагается вольтерровским и ord $V \leqslant \alpha - 1$.

В силу (2.6) уравнение (4.1) можно записать в следующем виде:

$$P^+ A u_+ \equiv P^+ B \Lambda u_+ + V_2 u_+ = f, \qquad (4.2)$$

где V_2 — вольтерровский псевдодифференциальный оператор и ord $V_2 \leqslant \alpha - 1$. Как было отмечено в § 2, в силу эллиптичности оператора B, существует ограниченный обратный оператор B^{-1} с символом $\frac{\varphi (x_0)}{b}$, где $\frac{1}{b} \in O_{-\alpha}^+$, точнее, для любого $g \in \dot{H}_{s-\alpha} (t_0)$ имеет место оценка

$$\|P^+ B^{-1} g\|_s \leqslant C \|g\|_{s-\alpha}, \qquad (4.3)$$

где C — постоянная, не зависящая от g.

Далее, в силу теоремы 2, оператор Λ непрерывно обратим, как оператор, действующий из пространства $B_s^0 (t_0)$ в пространство $\dot{H}_s (t_0)$ (при достаточно малом t_0), при этом имеет место оценка (3.14):

$$\|\Lambda^{-1} g\|_s \leqslant C \|g\|_s$$

для любого $g \in \dot{H}_s (t_0)$; C — постоянная, не зависящая от g.

Имеем

$$P^+ \Lambda \Lambda^{-1} g = g + V_3 g, \qquad (4.4)$$

где V_3 — вольтерровский оператор, порядок которого не превосходит—1.

Из (4.2) и (4.4) следует, что

$$P^+ A\Lambda^{-1} g = P^+ Bg + V_4 g, \tag{4.5}$$

где V_4 — оператор порядка $\leqslant \alpha - 1$.

Полагая $g = B^{-1} f$, из (4.5) получим

$$P^+ A\Lambda^{-1} B^{-1} f = f + V_5 f, \tag{4.6}$$

где V_5—вольтерровский оператор и $\operatorname{ord} V_5 \leqslant -1$.

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся одной леммой, приведенной в [5].

Лемма 3. Пусть V — вольтерровский псевдодифференциальный оператор, действующий непрерывным образом из пространства $\mathring{H}_s(t_0)$ в $\mathring{H}_{s+1}(t_0)$.

Тогда оператор $E + V$ непрерывно обратим в пространстве $\mathring{H}_s(t_0)$ (или $B^0_s(t_0)$).

Замечание. Приведенная здесь формулировка леммы несколько отличается от той, которая имеется в цитируемой работе. В справедливости утверждения леммы 3 легко убедиться, очевидным образом видоизменяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4.3 работы [5]*.

В силу леммы 3, оператор $E + V_5$ обладает ограниченным обратным оператором $(E + V_5)^{-1}$.

Следовательно, оператор

$$R = \Lambda^{-1} B^{-1} (E + V_5)^{-1}$$

является правым обратным к оператору A, то есть

$$P^+ ARf = f.$$

Далее, из оценок (3.14) и (4.3) непосредственно следует неравенство (2.5). Теорема полностью доказана.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 15.VII.1971

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Կոշու խնդիրը հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար (ամփոփում)

Հոդվածը նվիրված է Կոշու խնդրի ուսումնասիրմանը հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների մի որոշակի դասի համար։

Ապացուցված է, որ որոշակի պայմանների առկայության դեպքում, դրված համապատասխան օպերատորների սիմվոլների վրա, Կոշու խնդիրը ունի մեկ և միայն մեկ լուծում համապատասխան ֆունկցիոնալ տարածություններում։

---

* См. также [1].

R. L. SHAHBAGIAN. *The Cauchy problem for hyperbolic pseudodifferential equations* (summary)

The Cauchy problem for a certain class of hyperbolic pseudodifferential equations is considered.

It is proved that under some conditions imposed on the symbols of corresponding operators the Cauchy problem has a single solution in corresponding functional spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. И. Эскин.* Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках, Матем. сб., 74 (116): 2, 1967, 262—297.
2. *Дж. Кон, Л. Ниренберг.* Алгебра псевдодифференциальных операторов, „Псевдодифференциальные операторы" (сборник статей), Изд. „Мир", 1967, 5—62.
3. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИЛ, 1961.
4. *В. П. Маслов.* О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений, ДАН СССР, 177, № 6, 1967, 1277—1280.
5. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках, Матем. сб., 71 (113), 1966, 162—190.
6. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир", М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 4, 1972 Математика

А. А. МЕЛИКЯН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С НАРУШЕНИЯМИ ИНФОРМАЦИИ

Идеальными условиями информированности в дифференциальных играх являются условия, при которых игрокам в каждый момент времени известен полный фазовый вектор ([1]—[3]). В работах [4], [5] изучались дифференциальные игры с запаздыванием информации. В данной работе, как и в [6], рассматриваются игры, в которых одна из сторон получает информацию о фазовом векторе другой стороны не во все моменты времени, а лишь на части интервала движения. Подобные нарушения информации могут возникать, например, из-за ограниченных возможностей измерения, либо из-за помех, исключающих наблюдения.

1°. Движение двух управляемых объектов (игроков) X, Y описывается уравнениями

$$X\colon \dot{x} = f(t, x, u),\ Y\colon \dot{y} = g(t, y, v). \tag{1.1}$$

Здесь x, y — фазовые векторы объектов, $x \in E^n$, $y \in E^m$, u, v — векторы управлений, $u \in E^s$, $v \in E^r$, f, g — заданные вектор-функции. Движение рассматривается на фиксированном интервале времени $[t_0, T]$. В начальный момент t_0 фазовые векторы принимают значения

$$x(t_0) = x^0,\ x^0 \in E^n,\ y(t_0) = y^0,\ y^0 \in E^m. \tag{1.2}$$

Векторы управлений стеснены ограничениями

$$u(t) \in U \subset E^s,\ v(t) \in V \subset E^r,\ t \in [t_0, T], \tag{1.3}$$

где U, V — выпуклые компакты.

Опишем условия информированности игрока X. В каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ игроку X точно известен вектор собственных фазовых координат $x(t)$. Фазовый вектор стороны Y и вектор управления $v(t)$ точно известны игроку X лишь в моменты времени $t \in Q$, где Q — заданное множество, $Q \in [t_0, T]$. Множество Q будем считать состоящим из $N+1$ замкнутого интервала $[a_i, b_i]$ (интервалы наблюдения), причем

$$t_0 = a_0 \leqslant b_0 < a_1 < \cdots \leqslant b_{N-1} < a_N \leqslant b_N = T. \tag{1.4}$$

Выполнение равенства $a_i = b_i$ для некоторых (или всех) значений индекса i означает, что наблюдение проводится в изолированный момент времени $t = a_i$. Далее, в моменты времени $t \in (b_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \cdots, N-1$, игрок X не получает информации о фазовом векторе противника, но располагает информацией, полученной ранее. Таким образом, в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ игроку X известен набор величин $\{t, x(t), y(t'), v(t')\}$, где t' — последний момент наблюдения, равный

$$t'(t) = t, \quad t \in [a_i, b_i], \; i=0, \cdots, N,$$
$$t'(t) = b_i, \quad t \in (b_i, a_{i+1}), \; i=0, \cdots, N-1. \tag{1.5}$$

Игрок X формирует свое управление в момент t, располагая имеющейся информацией, т. е. применяет стратегии в виде функций $u = u(t, x(t), y(t'), v(t'))$. Целью игрока X является минимизация функционала

$$J = F(x(T), y(T)), \tag{1.6}$$

где $F(x, y)$ — заданная функция. Игрок Y противодействует игроку X и реализует свое управление в виде функций времени $v = v(t)$, принадлежащей некоторому классу функций, определенных на $[t_0, T]$ (например, кусочно-непрерывных или суммируемых). Будем предполагать, что условия задачи позволяют получить единственное решение системы (1.1) с учетом (1.2), (1.3). Тогда каждой стратегии u и управлению v соответствует значение $J(u, v)$ функционала (1.6).

Задача 1. Найти оптимальную гарантирующую стратегию u^* стороны X, т. е. стратегию, доставляющую минимакс

$$J^* = \min_u \sup_v J(u, v) = \sup_v J(u^*, v). \tag{1.7}$$

Здесь min берется по стратегиям u, sup — по управлениям v описанного выше типа, удовлетворяющим (1.3). Для решения задачи 1 условия информированности игрока Y оказываются несущественными.

2°. Покажем, что задача 1 сводится к некоторой дифференциально-многошаговой игре с полной информацией. Пусть игрок X применяет некоторую стратегию $u = u_0$, а игрок Y реализует некоторую функцию $v_0(t)$, $t \in [t_0, T]$. Из предположений п. 1 следует, что на интервалах (b_i, a_{i+1}) информация игрока X о фазовом векторе Y не увеличивается и сводится к знанию $y_0(b_i)$. Поэтому траектория $x_0(t)$ игрока X при $t \in (b_i, a_{i+1})$ и вектор $x_0(a_{i+1})$, соответствующие применяемой стратегии, известны в момент b_i. С точки зрения игрока X фазовый вектор $y_0(a_{i+1})$ игрока Y может принять некоторое значение из соответствующей области достижимости. Значение $J(u_0, v_0)$ функционала (1.6) не изменится, если на интервалах (b_i, a_{i+1}) заменить стратегию u_0 любой другой стратегией, переводящей фазовый вектор игрока X из $x_0(b_i)$ в $x_0(a_{i+1})$. Следовательно, движение игроков на интервалах (b_i, a_{i+1}), $i=0, \cdots, N-1$ можно не рассматривать, разрешая им совершать в моменты b_i импульсы соответствующей интенсивности.

Преобразуем уравнения движения (1.1), используя приведенные соображения. Введем переменную τ (уплотненное время):

$$\tau(t)=\sum_{j=0}^{i-1}(b_j-a_j)+t-a_i,\ t\in[a_i,\ b_i],\ i=0,\cdots,N,$$

$$\tau(t)=\sum_{j=0}^{i}(b_j-a_j),\ t\in(b_i,\ a_{i+1}),\ i=0,\cdots,N-1, \tag{2.1}$$

равную суммарной длительности наблюдений к моменту t. Записав уравнения движения во времени τ, получим

$$X:\ \frac{dx}{d\tau}=f(t(\tau),\ x,\ u)+\sum_{i=0}^{N-1}p_i\delta(\tau-\tau_i),$$

$$Y:\ \frac{dy}{d\tau}=g(t(\tau),\ y,\ v)+\sum_{i=0}^{N-1}q_i\delta(\tau-\tau_i), \tag{2.2}$$

$$\tau_i=\sum_{j=0}^{i}(b_j-a_j),\ i=0,\cdots,N,\ 0<\tau\leqslant\tau_N.$$

Здесь δ—дельта-функция, зависимость $t(\tau)$ есть обращение первого равенства в (2.1). Для определенности будем считать функции $t(\tau)$, $x(\tau)$, $y(\tau)$ непрерывными слева в точках τ_i, $i=0,\cdots,N-1$. Моменты τ_i соответствуют левым концам интервалов отсутствия наблюдений. В эти моменты игроки X и Y выбирают векторы импульсов p_i, q_i, которые подчинены ограничениям

$$p_i+x(\tau_i)\in D_i(x(\tau_i)),\ q_i+y(\tau_i)\in G_i(y(\tau_i)),\ i=0,\cdots,N-1. \tag{2.3}$$

Здесь $D_i(x)$, $G_i(y)$ — области достижимости объектов X, Y, описываемых соотношениями (1.1), (1.3), к моменту $t=a_{i+1}$ при условии, что их фазовые векторы в момент $t=b_i$ равны x и y соответственно. Будем считать, что сторона X в (2.2) применяет стратегии в виде функций

$$u=u(\tau,\ x(\tau),\ y(\tau),\ v(\tau)),\ \tau\in[\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ i=0,\ \cdots,\ N,$$

$$p_i=p_i(x(\tau_i),\ y(\tau_i)),\ i=0,\cdots,\ N-1. \tag{2.4}$$

Игрок Y на интервалах $[\tau_i,\tau_{i+1})$ реализует некоторые функции времени $v(\tau)$ и выбирает в моменты τ_i векторы скачков q_i, стесненные лишь (2.3). Начальные условия и функционал для объектов (2.2) запишем в виде

$$x=x^0,\ y=y^0,\ \tau=0;\ J=F(x(\tau_N),\ y(\tau_N)). \tag{2.5}$$

Соотношениями (2.2), (1.3), (2.3)—(2.5) описана дифференциально-многошаговая игра с полной информацией для игрока X.

Для решения таких игр можно применить, например, метод динамического программирования, введя в рассмотрение функцию Беллмана $S(x,\ y,\ \tau)$, равную минимальному значению, которое можно гарантировать функционалу (2.5) из позиции $(x,\ y,\ \tau)$. Функция $S(x,\ y,\ \tau)$ должна удовлетворять при $\tau\neq\tau_i$ дифференциальному уравнению Беллмана-Айзекса (см., например, [1]). В точках $\tau=\tau_i$ значения

$S(x, y, \tau_i - 0)$, $S(x, y, \tau_i + 0)$ связаны условиями скачка, аналогичными соотношениям для многошаговых игр. На правом конце $S(x, y, \tau_N) = F(x, y)$.

Задача 2. Найти стратегию вида (2.4) игрока X, доставляющую на траекториях системы (2.2) при начальных условиях (2.5) и ограничениях (1.3), (2.3) минимальное гарантированное значение функционала (2.5).

Найдя стратегию, разрешающую задачу 2, нетрудно осуществить переход к решению исходной задачи 1. Для этого следует перейти в найденной стратегии от уплотненного времени τ ко времени t по соотношениям (2.1). Это даст значение гарантирующей стратегии u^* задачи 1 на интервалах $[a_i, b_i)$. На „пропущенных“ же интервалах $[b_i, a_{i+1})$ игрок X может применять любую стратегию, которая переводит его фазовый вектор $x(b_i)$ в вектор $x(b_i) + \dot{p}_i(x(\tau_i), y(\tau_i))$, где $\dot{p}_i$—импульс, предписываемый оптимальной гарантирующей стратегией задачи 2.

Замечание. Пусть $a_i = b_i$, $i = k, k+1, \cdots, k+l$, $l > 0$, $k > 0$, $k + l \leqslant N$, т. е. $l+1$ изолированных моментов наблюдения следуют друг за другом. Из (2.2) видно, что $\tau_k = \tau_{k+1} = \cdots = \tau_{k+l}$. В этом случае будем считать, что игроки в момент $\tau = \tau_k$ уплотненного времени совершают $l+1$ последовательных импульсов. Символы $x(\tau_i)$, $y(\tau_i)$, $i = k, \cdots, k+l$ будут означать фазовые векторы игроков перед i-тым импульсом. Уравнения (2.2) перейдут при этом в уравнения многошагового процесса с $l+1$ шагом

$$x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) + p_i,$$

$$y(\tau_{i+1}) = y(\tau_i) + q_i, \quad i = k, \; k+1, \cdots, \; k+l,$$

где p_i, q_i подчинены условиям (2.3).

3°. Приведем некоторые обобщения задачи 1, которые допускают сведение к дифференциально-многошаговой игре.

а. Параметры, задающие множество Q, т. е. число $N+1$ интервалов наблюдения и их длительности $b_i - a_i$, $j=0, \cdots, N$ находятся в распоряжении игрока X. Фиксирована лишь суммарная длительность наблюдений. При этом помимо задачи 1 можно ставить задачу об оптимальном распределении времени наблюдения и оптимальном числе интервалов наблюдения.

б. Игрок Y задает в момент t_0 или в процессе движения число N и длительности $a_{i+1} - b_i$, $i = 0, \cdots, N-1$ интервалов отсутствия наблюдений при заданной суммарной их длительности, т. е. может включать помехи. В этом случае можно ставить задачу о наихудшем для игрока X распределении помех.

в. Момент окончания игры не фиксирован. Множество Q задано и может состоять из бесконечного числа интервалов $[a_i, b_i]$, $i=0, 1, \cdots$, распределенных на полуоси $t \geqslant t_0$. Игра считается законченной, когда пара векторов $x(t)$, $y(t)$ попадает впервые на заданное множество $M \subset E^n \times E^m$, причем момент T окончания игры $T \in [a_i, b_i]$, $i=0,1, \cdots$, т. е. игра может окончиться лишь в те моменты времени, когда игрок X

информирован о фазовом векторе Y. Последнее предположение позволяет и в этом случае свести задачу к игре с полной информацией. Как и в постановках а, б, можно считать, что параметры множества Q находятся в распоряжении одного из игроков. При этом можно ограничить суммарную длительность наблюдений, либо длительность отдельного сеанса наблюдений или помех. Функционал может иметь более общий вид, например, $J = F(x(T), y(T), T)$.

4°. Примеры. 1. Пусть уравнения (1.1), начальные условия (1.2), ограничения (1.3) и функционал (1.6) имеют вид

$$\dot{x} = u, \ \dot{y} = v, \ x(0) = x^0, \ y(0) = y^0, \ x, y, u, v \in E^n,$$
$$|u| \leqslant \mu, \ |v| \leqslant \nu, \ \mu > \nu > 0, \ J = |x(T) - y(T)|. \tag{4.1}$$

Множество Q состоит из $N+1$ точки наблюдения a_i, $i = 0, \cdots, N$, $a_0 = t_0 = 0$, $a_N = T$, т. е. в (1.4) положено $a_i = b_i$, $i = 0, \cdots, N$. Требуется выбрать точки наблюдения $a_i \in [0, T]$, $i = 1, \cdots, N-1$ и стратегию u^* стороны X так, чтобы обеспечить минимальное гарантированное значение функционала. При сделанных предположениях уравнения (2.2) будут уравнениями многошагового процесса:

$$x_{i+1} = x_i + (a_{i+1} - a_i) u_i,$$
$$y_{i+1} = y_i + (a_{i+1} - a_i) v_i, \ i = 0, \cdots, N-1, \tag{4.2}$$

где $x_i = x(a_i)$, $y_i = y(a_i)$, $i = 0, \cdots, N$, а векторы скачков имеют вид $p_i = (a_{i+1} - a_i) u_i$, $q_i = (a_{i+1} - a_i) v_i$, $|u_i| \leqslant \mu$, $|v_i| \leqslant \nu$. Из (2.1) видно, что $\tau_N = 0$ для рассматриваемой задачи, т. е. игроки совершают все N импульсов в момент $\tau = 0$ уплотненного времени. Уравнения (4.2) и задают связь между последовательными импульсами. Функционал J принимает вид

$$J = |x_N - y_N|. \tag{4.3}$$

Определим функцию Беллмана соотношением

$$S(x_n, y_n, a_n) = \min_{a_{n+1}} \min_{u_n} \max_{v_n} \cdots \min_{a_{N-1}} \min_{u_{N-2}} \max_{v_{N-2}} \min_{u_{N-1}} \max_{v_{N-1}} J,$$
$$n = 0, \cdots, N-2; \ S(x_{N-1}, y_{N-1}, a_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \max_{v_{N-1}} J, \tag{4.4}$$
$$|u_i| \leqslant \mu, \ |v_i| \leqslant \nu, \ i = n, \cdots, N-1; \ S(x_N, y_N, a_N) = |x_N - y_N|.$$

Функция $S(x_n, y_n, a_n)$ равна минимальному значению, которое можно гарантировать для функционала (4.3) на траекториях системы (4.2) при $i = n, \cdots, N-1$, соответствующим выбором моментов a_i, $i = n+1, \cdots, N-1$ и векторов управлений u_i, $i = n, \cdots, N-1$. Минимумы по a_i в (4.4) берутся по значениям $a_{i-1} \leqslant a_i \leqslant T$, $i = n+1, \cdots, N-1$. Из (4.4) следует, что функция Беллмана удовлетворяет уравнению и граничному условию

$$S(x_n, y_n, a_n) = \min_{a_{n+1}} \min_{u_n} \max_{v_n} S(x_{n+1}, y_{n+1}, a_{n+1}), \ n = 0, \cdots, N-2,$$

$$S(x_{N-1}, y_{N-1}, a_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \max_{v_{N-1}} S(x_N, y_N, T), \quad S(x_N, y_N, T) = |x_N - y_N|, \tag{4.5}$$

где x_{n+1}, y_{n+1} взяты в виде (4.2). Нетрудно теперь, разрешив (4.5), получить решение примера в форме задачи 2. Оптимальными моментами наблюдений будут

$$a_i = T[1 - (k^i - k^N)/(1 - k^N)], \quad k = \nu/\mu, \quad i = 0, \cdots, N. \tag{4.6}$$

Гарантированное значение функционала (4.1) равно

$$J^* = S(x^0, y^0, 0) = \max [|x^0 - y^0| - (\mu - \nu) T, \ \mu T k^N (1-k)/(1 - k^N)]. \tag{4.7}$$

Оптимальная стратегия игрока X в терминах задачи 1 будет иметь следующий вид:

$$u^* = \mu (y(t') - x(t)) |y(t') - x(t)|^{-1}, \quad x(t) \neq y(t'),$$
$$u^* = 0, \quad x(t) = y(t'), \quad t \in [0, T], \tag{4.8}$$

где t' определено в (1.5).

Перейдя к пределу при $N \to \infty$ в (4.6), (4.7) можно получить счетное множество оптимальных точек наблюдения и гарантированное значение функционала

$$a_i = T(1 - k^i), \quad i = 0, 1, \cdots,$$
$$J^* = \max [|x^0 - y^0| - (\mu - \nu) T, 0]. \tag{4.9}$$

При этом оптимальная стратегия игрока X будет иметь тот же вид ($\mu - \nu$).

2. Движение объектов при $t \in [0, T]$ описывается уравнениями, начальными условиями, ограничениями и функционалом

$$\ddot{x} = u, \quad \ddot{y} = v, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \xi^0, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \eta^0,$$
$$|u| \leqslant \mu, \quad |v| \leqslant \nu, \quad \mu > \nu > 0, \quad x, y, u, v, \xi, \eta \in E^n,$$
$$J = |x(T) - y(T)|.$$

Множество Q и цель игрока X те же, что и в примере 1. Применяя аналогичный подход, можно показать, что оптимальная гарантирующая стратегия игрока X имеет вид

$$u^* = \mu (\xi(t') - z(t)) |\xi(t') - z(t)|^{-1}, \quad z(t) \neq \xi(t'),$$
$$u^* = 0, \quad z(t) = \xi(t'), \quad t \in [0, T], \tag{4.10}$$
$$z(t) = x(t) + (T - t)\dot{x}(t), \quad \xi(t) = y(t) + (T - t)\dot{y}(t).$$

Оптимальные моменты наблюдений и соответствующее минимальное значение функционала оказываются равными

$$a_i = T(1 - [(k^i - k^N)/(1 - k^N)]^{1/2}), \quad k = \nu/\mu, \quad i = 0, \cdots, N,$$
$$J^* = \max [|z(0) - \xi(0)| - (\mu - \nu) T^2/2, \ \mu T^2 k^N (1 - k)/2(1 - k^N)]. \tag{4.11}$$

Перейдя в (4.11) к пределу при $N \to \infty$, получим счетное число оптимальных точек наблюдения и соответствующее значение функционала

$$a_i = T(1 - k^{i/2}),\ i = 0, 1, \cdots,$$

$$J^* = \max\,[|z(0) - \xi(0)| - (\mu - \nu)\,T^2/2,\ 0]. \tag{4.12}$$

Гарантирующая стратегия будет иметь вид (4.10).

Отметим, что оптимальные моменты наблюдений, задаваемые в (4.6), (4.9), (4.11), (4.12), при некоторых начальных значениях не являются единственными. Далее, в (4.9) и (4.12) гарантированное значение функционала такое же, как и в соответствующих задачах с полной информацией, т. е. наблюдения в счетном множестве точек $[0,\ T]$, $i=0,\ 1,\ \cdots$, обеспечивают тот же результат, что и непрерывное наблюдение на интервале $[0,\ T]$. Рассмотрим задачи преследования, соответствующие примерам 1, 2. Поимкой будем считать выполнение условия

$$|x(T) - y(T)| \leqslant l,\ l > 0,$$

причем в момент поимки T должно проводиться наблюдение. Из решений примеров 1, 2 следует, что как и в случае преследования с полной информацией, игрок X может осуществить поимку из некоторого начального состояния соответственно не позже моментов

$$T^* = (|x^0 - y^0| - l)/(\mu - \nu),\ \ T^* = t^*,$$

где t^* — минимальный положительный корень уравнения

$$(\mu - \nu)\,t^2/2 - |x^0 - y^0 + (\xi^0 - \eta^0)\,t| + l = 0.$$

При этом игрок X может ограничиться наблюдением в конечном числе точек. В [7] этот факт доказан для широкого класса игр.

Минимальное число моментов наблюдения N^0+1 зависит от начального состояния и задается соответственно для примеров 1, 2 формулами

$$N^0 = -[(\ln|x^0 - y^0(- \ln l)/\ln k],\ N^0 =$$

$$= -[(\ln|x^0 - y^0 + (\xi^0 - \eta^0)\,t^*| - \ln l)/\ln k]. \tag{4.13}$$

Здесь квадратные скобки означают функцию целой части: $[x] = n$, где n — максимальное целое число, не превосходящее x, $x \geqslant n$, $-\infty < x < +\infty$. Соотношения (4.13) можно получить, если при фиксированных начальных данных принять в (4.7) и (4.11) $T = T^*$ и отыскать такое N, чтобы вторые альтернативы в формулах для J^* не превосходили l. Сами моменты наблюдений задаются соотношениями (4.6), (4.11) при $N = N^0$.

Из (4.13) видно, что для примера 1 с увеличением начального расстояния между игроками $|x^0 - y^0|$ минимальное число точек наблюдения растет как его логарифм. В обоих случаях, как следует из (4.13), $N^0 \to \infty$ при $l \to 0$.

3. Пусть движение игроков при $t > 0$ задается уравнениями, начальными данными и ограничениями

$$\dot{x} = u,\ \ \dot{y} = v,\ x(0) = x^0,\ y(0) = y^0,\ x,\ y \in t^0,$$

$$|u| \leqslant \mu,\ |v| \leqslant \nu,\ \mu > \nu > 0.$$

Множество Q состоит из бесконечного числа интервалов $[a_i, b_i]$, $i=0, 1, \cdots$, $a_0=0$, $\lim a_i = \infty$ при $i \to \infty$. Игра закончена, когда впервые выполняется условие

$$|x(T)-y(T)| \leqslant l, \ l>0, \ T \in [a_i, b_i], \ i=0, 1, \cdots.$$

Требуется найти: распределение чисел a_i, b_i, $i=0, 1, \cdots$ на полуоси $t \geqslant 0$, $0=a_0 \leqslant b_0 < \cdots < a_i \leqslant b_i < \cdots$, при котором гарантировано окончание игры из любой начальной ситуации x^0, $y^0 \in E^n$, $|x^0-y^0|>l$; минимальное гарантированное время поимки; стратегию, гарантирующую поимку не позже этого времени.

Уравнения (2.2) запишутся для рассматриваемой задачи в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = u + \sum_i (a_{i+1}-b_i)\, u_i \delta(\tau-\tau_i), \ |u|, \ |u_i| \leqslant \mu,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = v + \sum_i (a_{i+1}-b_i)\, v_i \delta(\tau-\tau_i), \ |v|, \ |v_i| \leqslant \nu, \ \tau \geqslant 0. \qquad (4.14)$$

Условия окончания игры (4.14) запишутся в виде $|x(\tau^*)-y(\tau^*)| \leqslant l$, $\tau^* \geqslant 0$. Найдя минимальное гарантированное время поимки в игре (4.14), например, с помощью введения функции Беллмана, можно показать, что в исходной задаче поимка возможна для любых x^0, $y^0 \in E^n$, $|x^0-y^0|>l$ в том и только том случае, когда существуют сколь угодно большие значения N, такие что выполняется

$$k \leqslant (b_N - a_{i+1} + l/\mu)/(b_N - b_i), \ i=0, \cdots, N-1, \ k=\nu/\mu<1. \qquad (4.15)$$

Минимальное гарантированное время поимки $T(x^0, y^0)$ находится следующим образом. Пусть величины T_n, $n=0, 1, \cdots$, определяются соотношениями

$$T_n = \max_{0<i<n} \theta_i, \ \theta_0 = (|x^0-y^0|-l)/(\mu-\nu),$$

$$\theta_i = (\mu a_i - \nu b_{i-1} - l)/(\mu-\nu), \ i=1, \cdots, n,$$

и $n=N$ — минимальный индекс, при котором удовлетворяется неравенство $T_N \leqslant b_N$. Условия (4.15) обеспечивают существование такого индекса. Тогда $T(x^0, y^0) = T_N$.

Если предположить, что интервалы наблюдений имеют одинаковую длительность Δ, $b_i - a_i = \Delta$, а интервалы выключения информации—длительность θ, $a_{i+1}-b_i=\theta$, $i=0, 1, \cdots$, то условия (4.15) запишутся в виде

$$\mu \geqslant [\nu(\Delta+\theta)-l]/\Delta, \ \mu>\nu,$$

а минимальное гарантированное время поимки будет равным

$$T(x^0, y^0) = \max\ [(|x^0-y^0|-l)/(\mu-\nu), \ N(\theta+\Delta)-\theta+(\mu\theta-l)/(\mu-\nu)],$$

где N — минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$(N+1)(\theta+\Delta)-\theta-(|x^0-y^0|-l)/(\mu-\nu) \geqslant 0.$$

Гарантирующая стратегия будет иметь вид (4.8) с той лишь оговоркой, что при $x(t)=y(t')$ стратегию $u^*=0$ следует применять в моменты $t \in (b_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \cdots$; в моменты времени $t \in Q$ следует применять $u^* = v(t)$.

Автор приносит благодарность Ф. Л. Черноусько за помощь и руководство при выполнении изложенной выше работы.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступило 13.I.1972

Ա. Ա. ՄԵԼԻՔՅԱՆ. Ինֆորմացիայի խափանումներով դիֆերենցիալ խաղերի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտվում են դիֆերենցիալ խաղեր, որոնց խաղացողներից մեկը (հետևողը) գիտի հակառակորդի ֆազային վեկտորը ոչ թե շարժման ամբողջ ինտերվալի վրա, այլ նրա մի որոշ մասի վրա։ Խաղի ավարտման ժամանակը կարող է ընտրված լինել նախօրոք, կամ որոշվել ավարտման որևէ պայմաններից։

Ցույց է տրված, որ հետևող խաղացողի մինիմալ ապահովող ստրատեգիան գտնելու խնդիրը ինֆորմացիայի խափանումներով խաղում բերվում է նման խնդրի լրիվ ինֆորմացիայով դիֆերենցիալ-բազմաքայլ խաղի համար։ Բերվում են նման խնդրի հնարավոր ընդհանրացումներ։ Տեսական դիտումները լուսաբանվում են երեք օրինակների լուծումով։

A. A. MELIKIAN. *On differential games with information gaps* (summary)

Differential games in which the pursuer knows his partner's phase vector only at some part of the movement interval are considered. It is shown, that the problem of finding the pursuer's minimal guaranteeing strategy in a game with information gaps may be reduced to the same problem for some differential-manystep game with full information.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры, М., 1967.
2. *Л. С. Понтрягин.* К теории дифференциальных игр, УМН, 21, вып. 4, 1966.
3. *Н. Н. Красовский.* Игровые задачи о встрече движений, М., 1970.
4. *Ф. Л. Черноусько.* О дифференциальных играх с запаздыванием информации, ДАН СССР, 188, № 4, 1969.
5. *Б. Н. Соколов, Ф. Л. Черноусько.* Дифференциальные игры с запаздыванием информации, ПММ, 34, вып. 5, 1970.
6. *А. А. Меликян, Ф. Л. Черноусько.* О дифференциальных играх с переменными условиями информированности, ДАН СССР, 203, № 1, 1972.
7. *П. Б. Гусятников.* Необходимые условия оптимальности в линейной задаче преследования, ПММ, 35, вып. 5, 1971.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ֆ. Գ. Հարությունյան. *$L_1[0,1]$-ին իզոմորֆ մաս պարունակող Բանախի տարածությունների բազիսների մասին* 229
Ա. Գ. Ասլանյան, Վ. Բ. Լիդսկի. *Պտտման թաղանթի սեփական հաճախականությունների բաշխման ֆունկցիայի ասիմպտոտիկան* 236
Վ. Գ. Բոլտյանսկի. *Ուռուցիկ կոների սիստեմի բաժանելիության հատկությունը* . 250
Մ. Մ. Ջրբաշյան. *Դիրիխլեի տիպի շարքերի հպումը և միակությունը իրական առանցքի վրա* 258
Ն. Բ. Ենգիբարյան. *Սիմետրիկ ինտեգրալ օպերատորների մի դասի մասին* . . 275
Ռ. Լ. Շահբագյան. *Կոշու խնդիրը հիպերբոլական պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար* 287
Ա. Ա. Մելիքյան. *Ինֆորմացիայի խափանումներով դիֆերենցիալ խաղերի մասին* . 300

СОДЕРЖАНИЕ

Ф. Г. Арутюнян. О базисах банаховых пространств, содержащих изоморфное $L_1[0, 1]$ подпространство 229
А. Г. Асланян, В. Б. Лидский. Асимптотика функции распределения собственных частот оболочки вращения 236
В. Г. Болтянский. Свойство отделимости системы выпуклых конусов 250
М. М. Джрбашян. Примыкание и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси 258
Н. Б. Енгибарян. Об одном классе симметрических интегральных операторов 275
Р. Л. Шахбагян. Задача Коши для гиперболических псевдодифференциальных уравнений 287
А. А. Меликян. О дифференциальных играх с нарушениями информации . . . 300

CONTENTS

F. G. Arutunian. On the basis in Banach spaces containing a subspace isomorphic to $L_1[0, 1]$ 229
A. G. Aslanian, V. B. Lidskii. The asymptotic formula for the eigenvalue distribution function 236
V. G. Boltjanskii. The separation property of a system of convex cones 250
M. M. Džrbašian. Adherence and uniqueness of Dirichlet tupe series on the real axis 258
N. B. Engibarian. On a class of symmetric integral operators 275
R. L. Shahbagian. The Cauchy problem for hyperbolic pseudodifferential equations 287
A. A. Meliklan. On differential games with information gaps 300