ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

А. М. БАДАЛЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Введение

1°. В исследованиях М. М. Джрбашяна [1, 2] был введен оператор $L^{(\omega)}$, являющийся существенным обобщением оператора Римана-Лиувилля, с помощью которого была построена полная теория факторизации функций, мероморфных в круге $|z|<1$. Приведем сначала некоторые определения и результаты из работы [1].

Рассматривается класс Ω функций $\omega(x)$, положительных и непрерывных на $[0,1)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\omega(0)=1,\ \int_0^1 \omega(x)\,dx<+\infty, \tag{1}$$

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}} \{|\omega(x)-1|\, x^{-1}\}<+\infty. \tag{2}$$

Каждой функции $\omega(x)\in\Omega$ ставится в соответствие функция $p(\tau)\in P_\omega$ следующим образом:

$$p(0)=1,\ p(\tau)=\tau\int_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\ \tau\in[0,1]. \tag{3}$$

С помощью этой функции строится последовательность положительных чисел

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=-(k+1)\int_0^1 \tau^k\,dp(\tau)=k\int_0^1 \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \tag{4}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots)$$

и образуются следующие степенные ряды

$$C(z;\ \omega)=\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{-1} z^k,\ S(z;\ \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k^{-1} z^k, \tag{5}$$

которые являются аналитическими функциями в единичном круге. При специальном значении $\omega(x)\equiv 1$, $x\in[0,1)$ эти функции соответственно совпадают с ядрами Коши и Шварца

$$C(z;\ 1)=C(z)=\frac{1}{1-z};\ S(z;\ 1)=S(z)=\frac{1+z}{1-z}. \tag{6}$$

Наконец, с каждой функцией $p(\tau)\in P_\omega$ ассоциируется оператор $L^{(\omega)}$

$$L^{(\omega)}[\varphi(x)]\equiv-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1\varphi(x\tau)\,dp(\tau)\right\} \tag{7}$$

на соответствующих классах допустимых функций.

Оператор $L^{(\omega)}$ дает возможность установить широкое обобщение интегральных формул Коши и Шварца для круга.

А именно, справедлива теорема [3].

Теорема А. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, и пусть $\omega(x)\in\Omega$, $p(\tau)\in P_\omega$ и $\{\Delta_k\}_1^\infty\in\Delta_\omega$, тогда функция

$$L^{(\omega)}[f(re^{i\varphi})]=f_\omega(re^{i\varphi})=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k a_k(re^{i\varphi})^k$$

тоже будет голоморфной в круге $|z|<1$, и для любого ρ $(0<\rho<1)$ имеют место следующие интегральные формулы:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta};\ \omega\right)f_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad\left(|z|<\rho<1\right), \tag{8}$$

$$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta};\ \omega\right)\mathrm{Re}\,f_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad(|z|<\rho<1). \tag{9}$$

Из этой теоремы непосредственно следует обобщение интегральной формулы Пуассона для функций, гармонических в круге $|z|<1$.

Теорема Б. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в круге $|z|<1$. Тогда функция

$$u_\omega(re^{i\varphi})=L^{(\omega)}[u(re^{i\varphi})]\quad(0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$$

будет гармонической в том же круге $|z|<1$, причем для любого ρ $(0<\rho<1)$ справедлива интегральная формула

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)u_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{10}$$

$$(0\leqslant r<\rho<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi),$$

где

$$P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)=\mathrm{Re}\,S\left(\frac{r}{\rho}e^{i(\varphi-\theta)};\ \omega\right)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k^{-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k\cos k(\varphi-\theta). \tag{11}$$

В простейшем случае, когда $\omega(x)\equiv1$, $x\in[0,1)$, согласно (6) имеем

$$S(z;1)=\frac{1+z}{1-z}\quad\text{и}\quad P(\varphi-\theta,\ r;\ 1)=P(\varphi-\theta,r)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

и формула (10) переходит в интегральную формулу Пуассона

$$u\,(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P\,(\varphi-\theta,\ r)\,u\,(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad (0<r<\rho,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

В работе [2], полагая, что $\omega(x)\in\Omega$, с каждой функцией $F(z)$, мероморфной в круге $|z|<1$, ассоциируется ее ω-характеристика

$$T_\omega(\rho;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}L_{(+)}^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\}\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{\rho}\frac{n(t;\ \infty)-n(0;\ \infty)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)dt+n(0;\ \infty)\{\log\rho-k_\omega\},$$

где

$$L_{(+)}^{(\omega)}\{\varphi(\rho)\}=\max\{0;\ \varphi(\rho)\},\qquad k_\omega=\int\limits_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx.$$

Посредством функции $T_\omega(\rho;\ F)$ вводится класс $N\{\omega\}$, как множество мероморфных в $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<\rho<1}\{T_\omega(\rho;\ F)\}<+\infty.$$

Устанавливается, что класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\omega}\,z^\lambda\,\frac{B_\omega(z;\ a_\mu)}{B_\omega(z;\ b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S(ze^{-i\theta};\ \omega)\,d\psi(\theta)\right\},$$

где

$$S(z;\ \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx},$$

$$B_\omega(z;\ z_k)=\prod_{(k)}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z;\ z_k)}$$

— сходящиеся произведения, $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[0,2\pi]$ с конечным полным изменением, $\lambda\geqslant 0$ — любое целое, γ — любое вещественное число.

Цель настоящей работы — распространить этот основной результат М. М. Джрбашяна на субгармонические функции.

2°. В данной работе, на основании теоремы Б, устанавливается обобщение известной формулы Рисса [4] для функций, субгармонических в круге $|z|<1$. Эта формула одновременно является распространением на субгармонические функции формулы Неванлинны — Джрбашяна для мероморфных функций.

Доказывается следующая

Теорема. *Каждой субгармонической в круге $|z|<1$ функции $U(z)$* однозначно соответствует некоторое положительное распределение масс $\mu(\zeta)$ так, что для каждой функции $\omega(x)\in\Omega$ имеет место формула*

$$U(z)=\mu(0)\ln\frac{1}{|z|}+\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log|A_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)U_{\omega}(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad(|z|<\rho<1), \tag{12}$$

где

$$A_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-w_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)\},$$

$$w_{\omega}^{(\rho)}(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta};\ \omega\right)L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right\}d\theta,$$

$$U_{\omega}(\rho e^{i\theta})=L^{(\omega)}[U(\rho e^{i\theta})].$$

Отметим, что в специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$, формула (12) впервые была установлена М. М. Джрбашяном [5].

Обозначим через $n(r;U)$ массу функции $U(z)$, сосредоточенную в круге $|z|\leqslant r$, т. е.

$$n(r;\ U)=\iint\limits_{|\zeta|<r}d\mu(\zeta),$$

и введем в рассмотрение функцию

$$N_{\omega}(\rho;\ U)=\int_0^{\rho}\frac{\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)}{t}[n(t;\ U)-n(0;\ U)]\,dt+\mu(0)\{\log\rho-k_{\omega}\},$$

где

$$k_{\omega}=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}dx.$$

В работе устанавливается формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{\omega}(\rho e^{i\theta})\,d\theta=N_{\omega}(\rho;\ U)+c_0, \tag{13}$$

* Здесь и в дальнейшем всюду предполагается, что в точке 0 $U(z)$ имеет изолированную массу, равную $\mu(0)$.

являющаяся обобщением формулы Иенсена—Неванлинны—Джрбашяна для субгармонических функций (см. [2], формулу (13.33′)).

Наконец, вводится класс E_ω — множество субгармонических в круге $|z|<1$ функций $U(z)$, для которых конечна величина

$$\sup_{0<\rho<1}\left\{\int_0^{2\pi} U_\omega^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right\}<+\infty, \tag{14}$$

где

$$U_\omega^+(\rho e^{i\theta})=\max\{U_\omega(\rho e^{i\theta});\ 0\}.$$

Справедлива следующая основная

Теорема. *Класс E_ω совпадает с множеством функций, которые в единичном круге допускают следующее представление*

$$U(z)=\mu(0)\log\frac{1}{|z|}+\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)\,d\psi(\theta)\quad(z=re^{i\varphi}), \tag{15}$$

где $\mu(\zeta)$ — произвольное положительное распределение масс в круге $|\zeta|<1$, подчиненное лишь условию

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty, \tag{16}$$

а $\psi(\theta)$ — произвольная действительная функция с конечным полным изменением на $[0,\ 2\pi]$.

3°. Прежде чем перейти к изложению этих результатов, приведем несколько предварительных лемм, установленных в работах [1, 2], посвященных проблеме представления гармонических и мероморфных функций в круге.

Лемма А. Если $\omega(x)\in\Omega$, то в классе функций $\varphi(x)$, непрерывных на $[0,1]$ и обладающих на $[0,1]$ непрерывной производной $\varphi'(x)$

$$L^{(\omega)}[\varphi(x)]=\varphi(0)+x\int_0^1\varphi'(x\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Лемма Б. Если $\omega(x)\in\Omega$, то

$$L^{(\omega)}[\log r]=-k_\omega+\log r,$$

где

$$k_\omega=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx.$$

Далее, обозначим

$$w_\omega(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta}z;\omega)\, v_\omega(e^{i\theta};\zeta)\,d\theta \tag{18}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

где

$$v_\omega(e^{i\theta};\zeta)=\left\{L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right]\right\}_{\rho=1}. \tag{19}$$

Лемма В. Справедливо разложение

$$w_\omega(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\overline{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{\Delta_k} \tag{20}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

где

$$\Delta_0=1,\ \Delta_k=k\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,\,2,\cdots).$$

Наконец, введем в рассмотрение функцию

$$A_\omega(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega(z;\zeta)}\ (|z|<1,\ |\zeta|\leqslant 1). \tag{21}$$

Тогда справедливы следующие важные утверждения.

Лемма Г. 1°. Если $0\leqslant|z|<|\zeta|\leqslant 1$, то функция $A_\omega(z;\zeta)$ допускает представление вида

$$A_\omega(z;\zeta)=\exp\{-\Omega(z;\zeta)\}, \tag{22}$$

где

$$\Omega(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\left\{C\left(\frac{z\overline{\zeta}}{x};\omega\right)+C\left(\frac{zx}{\zeta};\omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx. \tag{23}$$

2°. Если $|z|<r<|\zeta|<1$, то при $\zeta\to e^{i\theta}$ равномерно относительно z и θ справедлива асимптотическая формула

$$\Omega(z;\zeta)=S(ze^{-i\theta};\omega)\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+O\left((1-|\zeta|)\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right). \tag{24}$$

Лемма Д. Для любого $\zeta\ (0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$ и $r\ (0<r<1)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|L^{(\omega)}[\log|A_\omega(re^{i\varphi};\zeta)|]\right|\,d\varphi\leqslant c(r_0)\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx, \tag{25}$$

где $c(r_0)$—некоторая постоянная.

Лемма E. Для любого r $(0 < r < 1)$ справедливо тождество

$$L^{(\omega)}[P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)] = p(\varphi-\theta,\ r) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}. \qquad (26)$$

§ 1. Обобщение формулы Рисса

1.1 (а). Пусть $U(z)$—субгармоническая функция в круге $|z| < R \leqslant +\infty$. Тогда известна следующая теорема Рисса [4]: каждой функции $U(z)$, субгармонической в круге $|z| < R \leqslant +\infty$, однозначно соответствует некоторое положительное распределение масс $\mu(\zeta)$ такое, что для любого ρ $(0 < \rho < R)$ функция $U(z)$ может быть представлена в виде

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta| < \rho} \ln\left|\frac{\rho(\zeta - z)}{\rho^2 - z\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta) + h_\rho(z) \quad (|z| < \rho), \qquad (1.1)$$

где $h_\rho(z)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $U(z)$ в круге $|z| \leqslant \rho$, т. е.

$$h_\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi-\theta) + r^2} \quad (z = re^{i\varphi}). \qquad (1.2)$$

Итак, справедлива формула

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi-\theta) + r^2}\, d\theta +$$

$$+ \iint\limits_{|\zeta| < \rho} \ln\left|\frac{\rho(\zeta - z)}{\rho^2 - z\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta) \quad (|z| < \rho < R,\ z = re^{i\varphi}). \qquad (1.3)$$

(б). Ниже мы установим обобщение этой теоремы. С этой целью отметим, что если образовать функцию

$$u(z;\rho) \equiv U(z) - \iint\limits_{|\zeta| < \rho} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta) \quad (0 \leqslant \rho < R,\quad |z| < \rho),$$

то она будет гармонической в круге $|z| < \rho$ и непрерывной на окружности $|z| = \rho$. Тогда согласно теореме A функция $u(z;\rho)$ допускает представление

$$u(z;\rho) \equiv U(z) - \iint\limits_{|\zeta| < \rho} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(\varphi - \theta,\ \frac{r}{\rho};\ \omega\right) u_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\theta, \qquad (1.4)$$

где

$$u_\omega(re^{i\theta}) = L^{(\omega)}[u(re^{i\theta})] =$$

$$= U_\omega(re^{i\theta}) - \iint\limits_{|\zeta|<\rho} L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|\right] d\mu(\zeta). \qquad (1.5)$$

Подставляя в (1.4) значение $u_\omega(r\,e^{i\varphi})$ из (1.5), получим

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left((\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) U_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\theta -$$

$$-\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\zeta}\right|\right]_{r=\rho} d\theta\right\} d\mu(\zeta),$$

или, что то же самое

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) e^{-w_\omega^{(\rho)}(z;\,\zeta)}\right| d\mu(\zeta) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) U_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\theta, \qquad (1.6)$$

где

$$w_\omega^{(\rho)}(z;\,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta}; \omega\right) L^{(\omega)}\left[\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right] d\theta =$$

$$= \int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k^{-1}\left\{\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^k \int\limits_0^{\frac{|\zeta|}{\rho}} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{\bar\zeta}{\rho}\right)^k \int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \omega(x)\, x^{-k-1}\, dx\right\}\left(\frac{z}{\rho}\right)^k \equiv w_\omega\left(\frac{z}{\rho}; \frac{\zeta}{\rho}\right) \left(\begin{matrix} z = re^{i\varphi} \\ |z| < \rho \end{matrix}\right) \qquad (1.7)$$

(см. [2], формулу (1.57)).

Обозначив

$$A_\omega(z;\,\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right) e^{-w_\omega(z;\,\zeta)}, \qquad (1.8)$$

формулу (1.6) можно записать и в виде

$$U(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho}; \frac{\zeta}{\rho}\right)\right| d\mu(\zeta) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(\varphi-\theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right) U_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\theta. \qquad (1.9)$$

Естественно формулу (1.9) называть обобщением формулы Рисса. Итак, мы получим следующую теорему.

Теорема 1. *Каждой функции $U(z)$, субгармонической в круге $|z|<R$, однозначно соответствует определенное положительное распределение масс $\mu(\zeta)$ такое, что для любой функции $\omega(x)\in\Omega$ функция $U(z)$ допускает представление* (1.9).

(в). Введем в рассмотрение интеграл

$$M_\omega(z;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega(z,\zeta)}\right|d\mu(\zeta), \tag{1.10}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\mu(\zeta)$ — некоторое положительное распределение масс в круге $|\zeta|<1$, подчиненное условию*

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\mu)-n(0;\mu)]\,dt<+\infty, \tag{1.11}$$

где

$$n(t;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<t}d\mu(\zeta),\quad n(0;\mu)=\mu(0). \tag{1.12}$$

Тогда функция $M_\omega(z)$ субгармонична в круге $|z|<1$, и распределение ее масс совпадает с $\mu(\zeta)$.

Доказательство. Убедимся сначала, что при любом ζ ($|\zeta|<1$) функция $\log|A_\omega(z;\zeta)|$ субгармонична в круге $|z|<1$.

В самом деле, если $\zeta=0$, то, как известно (см. [2], формулу (3.22)), имеем

$$\{\log|A_\omega(z;\zeta)|\}_{\zeta=0}=k_\omega+\log|z|,$$

и функция $\log|A_\omega(z;0)|$ субгармонична в круге $|z|<1$. Если же $0<|\zeta|<1$, то это очевидно, поскольку тогда функция $A_\omega(z;\zeta)$ аналитична в круге $|z|<1$.

Полагая теперь, что $|z|\leqslant r<\rho<1$, рассмотрим интеграл

$$M_\omega(z;\mu;\rho)=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log|A_\omega(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)=$$

$$=\mu(0)\,\{k_\omega+\log|z|\}+\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\mu(\zeta)-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\operatorname{Re}w_\omega(z;\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Из данного представления легко заключаем, что функция $M_\omega(z;\mu;\rho)$ субгармонична в круге $|z|\leqslant r$, и распределение ее масс совпадает с функцией $\mu(\zeta)$. Рассмотрим далее интеграл

$$M_\infty^*(z;\ \mu;\ \rho)=\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1}\log|A_\infty(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta), \tag{1.13}$$

и убедимся, что функция $M_\infty^*(z;\ \mu;\ \rho)$ гармонична в круге $|z|\leqslant r$.

С этой целью отметим сперва, что, согласно лемме Г введения, при $|z|<|\zeta|$ функция $A_\infty(z;\ \zeta)$ допускает представление вида

$$A_\infty(z;\ \zeta)=\exp\{-\Omega(z;\ \zeta)\},$$

где

$$\Omega(z;\ \zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left\{S\left(\frac{z\bar\zeta}{x};\ \omega\right)+S\left(\frac{zx}{\zeta};\ \omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx$$

—функция, аналитичная в круге $|z|\leqslant r$.

Следовательно, для рассматриваемых значений z и ζ

$$\log|A_\infty(z;\ \zeta)|=-\operatorname{Re}\Omega(z,\ \zeta) \tag{1.14}$$

будет гармонической функцией от z в круге $|z|\leqslant r$.

Таким образом, наше утверждение относительно $M_\infty^*(z;\ \rho)$ будет доказано, если мы покажем, что интеграл (1.13) абсолютно и равномерно сходится в круге $|z|\leqslant r$.

Но, согласно второму утверждению той же леммы Г, при $|z|\leqslant r<\rho\leqslant|\zeta|<1$ и $\zeta\to e^{i\theta}$ имеет место асимптотическая формула

$$\Omega(z;\ \zeta)=S(ze^{-i\theta};\ \omega)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+O((1-|\zeta|)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

и притом равномерно относительно z и $\theta\in[0,2\pi]$. Поэтому имеет место оценка вида

$$|\Omega(z;\ \zeta)|\leqslant B(r;\ \rho)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\quad(|z|\leqslant r<\rho\leqslant|\zeta|<1), \tag{1.15}$$

где $B(r;\ \rho)$ зависит лишь от своих аргументов.

Отсюда следует, что нам достаточно лишь убедиться в том, что

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d\mu(\zeta)<+\infty.$$

Согласно обозначению (1.12)

$$n(t;\ \mu)=\iint\limits_{0<|\zeta|<t}d\mu(\zeta)=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{2\pi}d\mu(re^{i\varphi})$$

и, таким образом

$$dn(t;\ \mu)=\int\limits_{0}^{2\pi}d\mu(te^{i\varphi}).$$

Полагая, что $\rho<\rho'<1$, вычислим интеграл

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<\rho'}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d\mu(\zeta)=$$

$$=\int\limits_{\rho}^{\rho'}\int\limits_{0}^{2\pi}\left\{\int\limits_{t}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d\mu(te^{i\varphi})=$$

$$=\int\limits_{\rho}^{\rho'}\left\{\int\limits_{t}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}dn(t;\mu)=\int\limits_{t}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\cdot n(t;\mu)\Big|_{t=\rho}^{\rho'}+$$

$$+\int\limits_{\rho}^{\rho'}n(t;\mu)\frac{\omega(t)}{t}dt=n(\rho';\mu)\int\limits_{\rho'}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx-$$

$$-n(\rho;\mu)\int\limits_{\rho}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx+\int\limits_{\rho}^{\rho'}\frac{n(t;\mu)}{t}\omega(t)\,dt. \tag{1.16}$$

Но очевидно, что

$$n(\rho';\mu)\int\limits_{\rho'}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\leqslant\int\limits_{\rho'}^{1}\frac{n(t;\mu)}{t}\omega(t)\,dt<+\infty,$$

ввиду условия (1.11), и поэтому

$$\lim_{\rho'\to1-0}n(\rho';\mu)\int\limits_{\rho'}^{1}\frac{\omega(t)}{t}dt=0.$$

Переходя в (1.16) к пределу при $\rho'\to1-0$, получим

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d\mu(\zeta)\leqslant\int\limits_{\rho}^{1}\frac{\omega(t)}{t}n(t;\mu)\,dt<+\infty.$$

Наконец, поскольку очевидно

$$M_\omega(z;\mu)=M_\omega(z;\mu;\rho)+M_\omega^*(z;\mu;\rho)\quad(|z|\leqslant r<\rho<1),$$

то ввиду произвольности r и ρ теорема доказана.

Отметим, что условие (1.11) не только достаточно, но и необходимо для существования субгармонической функции $M_\omega(z)$.

Действительно, если $M_\omega(z)$ субгармонична в круге $|z|<1$, то, взяв $z=0$, согласно формуле (3.22) работы [2], имеем

$$\{M_\omega(z)-\mu(0)[k_\omega+\log|z|]\}_{z=0}=$$

$$=\iint\limits_{0<|\zeta|<1}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)>-\infty, \tag{1.17}$$

где

$$A_\omega(0;\zeta)=\exp\left\{-\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}.$$

Следовательно, полагая $0<\rho^*<1$, получим

$$-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho^*}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d[\mu(\zeta)-\mu(0)]=$$

$$=\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho^*}\left\{\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[\mu(\zeta)-\mu(0)]=$$

$$=\int_0^{\rho^*}\left\{\int_{\rho}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]<+\infty, \tag{1.18}$$

ввиду условия (1.17).

Интегрируя правую часть по частям, получим

$$[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\int_{\rho}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\Bigg|_{\rho=0}^{\rho^*}+$$

$$+\int_0^{\rho^*}[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho^*}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)=$$

$$=[n(\rho^*;\mu)-n(0;\mu)]\int_{\rho^*}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+$$

$$+\int_0^{\rho^*}[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho \tag{1.19}$$

для любого $\rho^*\in(0,1)$, причем оба члена, стоящие в правой части формулы (1.19), положительны . С другой стороны, очевидно

$$\int_0^{\rho^*}[n(\rho;\mu)-n(0;\mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho\leqslant$$

$$\leqslant-\iint\limits_{|\zeta|<\rho^*}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)\leqslant-\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(0;\zeta)|\,d\mu(\zeta)<+\infty, \tag{1.20}$$

и так как правая часть неравенства (1.20) не зависит от ρ^*, то теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть* $\mu(\zeta)$— *положительное распределение масс в круге* $|\zeta|<1$ *с конечным интегралом*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\left[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)\right]dt<+\infty, \tag{1.21}$$

и $M_\omega(z;\ \mu)$—*ассоциированная с распределением* $\mu(\zeta)$ *субгармоническая функция. Если*

$$M_\omega^{(\rho)}(z;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)}\right|d\mu(\zeta)\quad(0<\rho<1), \tag{1.22}$$

где функция $w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)$ *определяется из* (1.7), *то справедливо следующее предельное соотношение*

$$\lim_{\rho\to1-0} M_\omega^{(\rho)}(z;\ \mu)=M_\omega(z;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta) \tag{1.23}$$

$$(|z|<1).$$

Доказательство. Вспомним, что согласно теореме 2, функция $M_\omega(z;\ \mu)$ является субгармонической всюду в круге $|z|<1$. Предположим

$$|z|\leqslant r<r_0<\rho<1 \tag{1.24}$$

и, обозначая

$$M_\omega^{(r_0,\rho)}(z;\ \mu)=\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta),$$

$$M_\omega^{(\rho)}(z;\mu)=\iint\limits_{|\zeta|<\rho<1}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta), \tag{1.25}$$

будем иметь

$$M_\omega^{(\rho)}(z;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)+M_\omega^{(r_0,\rho)}(z;\ \mu). \tag{1.26}$$

Как известно (см. [2], (4.17))

$$\lim_{\rho\to1-0} w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)=w_\omega(z;\ \zeta)\quad(|z|<1),$$

поэтому

$$\lim_{\rho\to 1-0}\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\log\left|A_\infty\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{|\zeta|<r_0}\log|A_\infty(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)\quad(|z|<1). \tag{1.27}$$

Далее, согласно лемме Г, мы имеем формулу

$$A_\infty(z;\zeta)=\exp\{-\Omega(z;\zeta)\}\quad(|z|<|\zeta|<1), \tag{1.28}$$

где

$$\Omega(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left\{C\left(\frac{z\bar\zeta}{x};\omega\right)+C\left(\frac{zx}{\zeta};\omega\right)-1\right\}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

причем

$$|\Omega(z;\zeta)|\leqslant Q(z;\zeta)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\quad(|z|<|\zeta|<1), \tag{1.28'}$$

где $Q(z;\zeta)$ имеет вид

$$Q(z;\zeta)=C(|z|;\omega)+C\left(\left|\frac{z}{\zeta}\right|;\omega\right)+1.$$

Отметим теперь, что при условии (1.24) имеем $\frac{|z|}{\rho}<\frac{|\zeta|}{\rho}<1$, если $r_0<|\zeta|<\rho$, и $|z|<|\zeta|$, если $r_0<|\zeta|<1$.

Поэтому из представления (1.28) функции $A_\infty(z;\zeta)$ для $M_\infty^{(r_0,\rho)}(z;\mu)$ будем иметь

$$M_\infty^{(r_0,\rho)}(z;\mu)=\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\log\left|A_\infty\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)=$$

$$=\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\log\left|e^{-\Omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)}\right|d\mu(\zeta)=$$

$$=-\operatorname{Re}\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho}\Omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)d\mu(\zeta)\quad(|z|\leqslant r) \tag{1.29}$$

и

$$M_\infty^{(r_0,1)}(z;\mu)=-\operatorname{Re}\iint\limits_{r_0<|\zeta|<1}\Omega(z;\zeta)\,d\mu(\zeta)\quad(|z|\leqslant r).$$

Но из (1.28′) и (1.29) легко вытекает, что в случае $|z|\leqslant r<r_0<$ $<|\zeta|<\rho<1$

$$\left|\Omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)\right|\leqslant Q(r;r_0)\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx, \tag{1.30}$$

и так как правая сторона не зависит от ρ, то

$$\lim_{\rho\to 1-0} \Omega\left(\frac{z}{\rho}; \frac{\zeta}{\rho}\right) = \Omega(z; \zeta).$$

Но тот факт, что интегралы

$$\iint\limits_{r_0<|\zeta|<\rho} \left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx\right\} d\mu(\zeta)$$

при условии (1.21) ограничены сверху при $\rho\to 1-0$, нами уже был доказан в предыдущей лемме. Поэтому из оценки (1.30) следует

$$\lim_{\rho\to 1-0} M_\omega^{(r_0, \rho)}(z; \mu) = M_\omega^{(r_0, 1)}(z; \mu) \quad (|z|\leqslant r).$$

Следовательно, для завершения доказательства леммы нам остается перейти к пределу в тождестве (1.26) при $\rho\to 1-0$, поскольку число $r<1$ было произвольным.

Теорема 3. *Пусть $\mu(\zeta)$ — положительное раеспределение масс в круге $|z|<1$, подчиненное условию*

$$\int\limits_0^1 [n(\rho; \mu) - n(0; \mu)] \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho < +\infty. \tag{1.31}$$

Тогда для функции $M_\omega(z; \mu)$ имеет место оценка

$$\sup_{0<r<1} \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi}; \mu)\}| d\varphi\right\} < +\infty. \tag{1.32}$$

Доказательство. По определению

$$M_\omega(z; \mu) = \iint\limits_{|\zeta|<1} \log|A_\omega(z; \zeta)| d\mu(\zeta) \quad (|z|<1), \tag{1.33}$$

причем, согласно лемме Д, при каждом ζ $(0<r_0\leqslant|\zeta|<1)$, r $(0<r<1)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(re^{i\varphi}; \zeta)|\}| d\varphi \leqslant c(r_0)\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x} dx, \tag{1.34}$$

где $c(r_0)$ — некоторая постоянная.

Теперь предположим, что к обеим частям (1.33) можно применить оператор $L^{(\omega)}$ и ввести его под знак двойного интеграла. В результате получим формулу

$$L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi}; \mu)\} = \iint\limits_{|\zeta|<1} L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(re^{i\varphi}; \zeta)|\} d\mu(\zeta) \tag{1.35}$$

и оценку

$$|L^{(\omega)}[M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)]| \leqslant \iint\limits_{|\zeta|<1} |L^{(\omega)}\log|A_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)||\ d\mu(\zeta). \tag{1.35'}$$

Интегрируя неравенство (1.35′) по φ вдоль промежутка $[0,2\pi]$, мы получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)\}|\ d\varphi \leqslant \iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}\log|A_\omega(re^{i\varphi};\ \zeta)||\ d\varphi\right] d\mu(\zeta). \tag{1.36}$$

Наконец, ввиду оценок (1.34) из (1.36) заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|L^{(\omega)}[M_\omega(re^{i\varphi};\ \mu)]|\ d\varphi \leqslant c(r_0)\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d\mu(\zeta)=$$

$$=c(r_0)\int\limits_0^1\left\{\int\limits_\rho^1\frac{\omega(x)}{x}dx\right\}d[n(\rho;\ \mu)-n(0;\ \mu)]=$$

$$=c(r_0)\int\limits_0^1[n(\rho;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\frac{\omega(\rho)}{\rho}\,d\rho<+\infty$$

согласно условию (1.31) теоремы.

Следовательно, для завершения доказательства утверждения (1.32) теоремы остается обосновать применение оператора $L^{(\omega)}$ под знаком двойного интеграла (1.33). Это можно сделать так же, как и в случае дискретного распределения масс (см. [2], теорему 2.2).

С этой целью предположим, что $|z|\leqslant\rho<\rho_1<|\zeta|<1$, и, пользуясь представлением функции $A_\omega(z;\ \zeta)$ (лемма Г), запишем $M_\omega(z;\ \mu)$ в следующем виде:

$$M_\omega(z;\ \mu)-\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\ d\mu(\zeta)=$$

$$=-\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1}\mathrm{Re}\,\Omega(z;\ \zeta)\,d\mu(\zeta)\equiv\Psi_\rho(z), \tag{1.37}$$

где $\psi_\rho(z)$ будет гармонической функцией в круге $|z|<\rho$, и значит $\psi_\rho(\rho xe^{i\varphi})$ как функция от x будет непрерывно дифференцируемой н отрезке $[0,1)$. Следовательно, по лемме А

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(\rho xe^{i\varphi})\}=\psi_\rho(0)+\rho xe^{i\varphi}\int\limits_0^1\psi_\rho'(\rho x\tau e^{i\varphi})\,\omega(\tau)\,d\tau,$$

откуда, если заменить ρx на r, получим

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(re^{i\varphi})\}=\psi_\rho(0)+re^{i\varphi}\int\limits_0^1\psi_\rho'(r\tau e^{i\varphi})\,\omega(\tau)\,d\tau. \tag{1.38}$$

Так как интеграл (1.38) равномерно сходится относительно z, то под знаком интеграла можно продифференцировать, и полученный интеграл

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re} \Omega'(z; \zeta)\, d\mu(\zeta) = \psi'_\rho(z)$$

будет равномерно сходиться в круге $|z| \leqslant \rho$.

Поэтому интеграл

$$\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re} \Omega'(\tau re^{i\varphi}; \zeta)\, d\mu(\zeta) = \psi'_\rho(\tau re^{i\varphi}) \tag{1.39}$$

будет абсолютно-равномерно сходиться относительно $r \in [0, \rho)$,

$$\tau \in [0, 1) \text{ и } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Из (1.38) и (1.39) приходим к формуле

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(re^{i\varphi})\} = -\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re}\left[\Omega(0; \zeta) + re^{i\varphi}\int\limits_0^1 \Omega'(\tau re^{i\varphi}; \zeta)\,\omega(\tau)\,d\tau\right] d\mu, \tag{1.40}$$

причем интеграл справа сходится абсолютно-равномерно относительно $r \in [0, \rho)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

С другой стороны, исходя из аналитичности функции $\Omega(z; \zeta)$ в круге $|z| \leqslant \rho$, при $\rho < |\zeta| < 1$, по лемме А будем иметь

$$L^{(\omega)}\{\Omega(re^{i\varphi}; \zeta)\} = \Omega(0; \zeta) + re^{i\varphi}\int\limits_0^1 \Omega'(\tau re^{i\varphi}; \zeta)\,\omega(\tau)\,d\tau,$$

$$r \in [0, \rho),\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Отсюда и из (1.40) получим

$$L^{(\omega)}\{\psi_\rho(re^{i\varphi})\} = -\iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} \operatorname{Re} L^{(\omega)}\{\Omega(re^{i\varphi}; \zeta)\}\, d\mu(\zeta) =$$

$$= \iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(z; \zeta)|\}\, d\mu(\zeta), \tag{1.41}$$

причем интеграл справа также абсолютно-равномерно сходится для всех $r \in [0, \rho)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Значит, если к обеим частям равенства (1.37) применить оператор $L^{(\omega)}$, то в силу (1.41) получим

$$L^{(\omega)}\{M_\omega(re^{i\varphi}; \mu)\} - L^{(\omega)}\left\{\iint\limits_{|\zeta|<\rho} \log|A_\omega(re^{i\varphi}; \zeta)|\, d\mu(\zeta)\right\} =$$

$$= \iint\limits_{\rho<|\zeta|<1} L^{(\omega)}\{\log|A_\omega(re^{i\varphi}; \zeta)|\}\, d\mu(\zeta).$$

Отсюда приходим к требуемой формуле (1.35).

§ 2. Определение ω-характеристической функции. Класс E_ω и его параметрическое представление

2.1. Пусть $U(z)$—субгармоническая функция в круге $|z|<1$, и пусть $\omega(x)\in\Omega$.

Согласно формуле (1.6) для любого ρ $(0<\rho<1)$

$$U(z)=\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)}\right|d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\ \frac{r}{\rho};\omega\right)U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta,\quad z=re^{i\varphi}. \tag{2.1}$$

Сначала предположим, что $U(0)$ конечно. Тогда из (2.1) при $z=0$ будем иметь

$$U(0)=\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\left|e^{-w_\omega\left(0;\frac{\zeta}{\rho}\right)}\right|d\mu(\zeta)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(\theta,\ 0;\ \omega)\,U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta. \tag{2.2}$$

Имея в виду, что

$$w_\omega\left(0;\frac{\zeta}{\rho}\right)=\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\quad\text{и}\quad p(\theta,\ 0;\ \omega)\equiv 1,$$

запишем (2.2) в виде

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\left\{\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\right\}d\mu(\zeta). \tag{2.3}$$

Отсюда в специальном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, мы получаем формулу Пуассона-Иенсена для субгармонических функций [4].

Действительно, при $\omega(x)\equiv 1$

$$\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx=\log\frac{\rho}{|\zeta|}\quad\text{и}\quad U_\omega(\rho e^{i\theta})=U(\rho e^{i\theta}),$$

и формула (2.3) принимает вид

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U(\rho e^{i\theta})\,d\theta-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho}\log\frac{\rho}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta). \tag{2.3'}$$

Предположим теперь, что $U(0)$ не конечно, т. е. $U(0) = -\infty$. Тогда образуем функцию

$$U^*(z) = U(z) - \mu(0) \ln |z|,$$

также субгармоническую в круге $|z|<1$, для которой уже

$$\lim_{z\to 0} U^*(z) = U^*(0) = c_0 > -\infty.$$

Следовательно, к функции $U^*(z)$ можно применить формулу (2.3)

$$U^*(0) = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^*_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\vartheta -$$

$$-\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho} \left\{ \int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx \right\} d[\mu(\zeta) - \mu(0)], \tag{2.4}$$

где

$$U^*_\omega(\rho e^{i\theta}) = L^{(\omega)}[U^*_\omega(\rho e^{i\theta})] = L^{(\omega)}[U(\rho e^{i\theta}) - \mu(0)\ln \rho] =$$
$$= U_\omega(\rho e^{i\theta}) - \mu(0)\, L^{(\omega)}[\log \rho]. \tag{2.5}$$

Согласно лемме Б, если $\omega(x) \in \Omega$, то

$$L^{(\omega)}[\log \rho] = -k_\omega + \log \rho.$$

Поэтому из (2.5) получим

$$U^*_\omega(\rho e^{i\theta}) = U_\omega(\rho e^{i\theta}) - \mu(0)[\log \rho - k_\omega]. \tag{2.6}$$

Теперь преобразуем двойной интеграл, стоящий в правой части формулы (2.4), принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} d\mu(te^{i\varphi}) = dn(t;\, \mu),$$

где $n(t;\, \mu)$—масса функции $U(z)$, сосредоточенная в круге $|z| \leqslant t$:

$$\iint\limits_{0<|\zeta|<\rho} \left\{ \int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx \right\} d[\mu(\zeta) - \mu(0)] =$$

$$= \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_{\frac{r}{\rho}}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx \right\} d[\mu(re^{i\varphi}) - \mu(0)] =$$

$$= \int_0^\rho \left\{ \int\limits_{\frac{r}{\rho}}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx \right\} d[n(r;\, \mu) - n(0;\, \mu)] =$$

$$=[n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\int\limits_{\frac{r}{\rho}}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\Big|_{r=0}^{\rho}+$$

$$+\int\limits_{0}^{\rho}[n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,\frac{\omega\left(\frac{r}{\rho}\right)}{r}\,dr=$$

$$=\int\limits_{0}^{\rho}[n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,\frac{\omega\left(\frac{r}{\rho}\right)}{r}\,dr=\int\limits_{0}^{1}[n(\rho t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,\frac{\omega(t)}{t}\,dt. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что интеграл, находящийся в левой части (2.7), как функция параметра ρ $(0<\rho<1)$ монотонно возрастает.

Ввиду (2.6) и (2.7) формула (2.4) запишется в следующем виде:

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}U_\infty(\rho e^{i\theta})\,d\theta-\int\limits_{0}^{\rho}[n(r;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,\frac{\omega\left(\frac{r}{\rho}\right)}{r}\,dr-\mu(0)\,\{\log\rho-k_\infty\}. \tag{2.8}$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$m_\infty^+(\rho;\ U)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}U_\infty^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta,$$

$$m_\infty^-(\rho;\ U)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}U_\infty^-(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{2.9}$$

$$N_\infty(\rho;\ U)=\int\limits_{0}^{\rho}\frac{\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)}{t}[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt+n(0;\ U)[\log\rho-k_\infty], \tag{2.10}$$

где

$$U_\infty^+(\rho e^{i\theta})=\max\{U_\infty(\rho e^{i\theta});\ 0\},$$

$$U_\infty^-(\rho e^{i\theta})=\max\{-U_\infty(\rho e^{i\theta});\ 0\},$$

и, таким образом

$$U_\infty(\rho e^{i\theta})=U_\infty^+(\rho e^{i\theta})-U_\infty^-(\rho e^{i\theta}). \tag{2.11}$$

Пользуясь обозначениями (2.9), (2.10) и равенством (2.11), формулу (2.8) можно записать в следующем виде:

$$c_0=m_\infty^+(\rho;\ U)-m_\infty^-(\rho;\ U)-N_\infty(\rho;\ U),$$

или, что то же самое, в виде

$$m_\omega^+(\rho;\ U) = m_\omega^-(\rho;\ U) + N_\omega(\rho;\ U) + c_0. \tag{2.12}$$

Таким образом, функция $m_\omega^+(\rho;\ U)$ — среднее положительных значений функции $U_\omega(z)$ на окружности $|z|=\rho$, с точностью до постоянной совпадает с суммой $m_\omega^-(\rho;\ U) + N_\omega(\rho;\ U)$, где первое слагаемое — это среднее отрицательных значений $U_\omega(z)$ на окружности $|z|=\rho$, взятых с положительным знаком, а второе слагаемое— $N_\omega(\rho;\ U)$ зависит лишь от распределения масс функции $U_\omega(z)$ в круге $|z|\leqslant\rho$.

Но для функций вида

$$u(z) = U(z) - V(z),$$

где $U(z)$ и $V(z)$ — субгармонические в круге $|z|<1$ функции, можно установить формулу симметрического характера.

С этой целью запишем формулу (2.12) для функции $V(z)$

$$m_\omega^+(\rho;\ V) = N_\omega(\rho;\ V) + m_\omega^-(\rho;\ V) + c_1. \tag{2,12'}$$

Вычитанием формул (2.12) и (2.12′) мы приходим к тождеству

$$m_\omega^+(\rho;\ u) + N_\omega(\rho;\ V) = m_\omega^-(\rho;\ u) + N_\omega(\rho;\ U) + c. \tag{2.13}$$

Соотношение (2.13) в специальном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$, переходит в обобщенную формулу Иенсена-Неванлинны, для разности двух субгармонических функций, установленную И. И. Приваловым [4].

И если теперь возьмем $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ есть мероморфная функция, тогда $n(r;\ U)$ будет означать число нулей функции $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$, а $n(r;\ V)$ — число ее полюсов в том же круге, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность. В этом случае мы приходим к классам формул типа Иенсена-Неванлинны, ассоциированных с произвольной функцией $\omega(x)\in\Omega$. Эти формулы впервые были установлены М. М. Джрбашяном [2], в связи с построенной им общей теорией факторизации мероморфных в круге функций.

Следовательно, естественно, следуя М. М. Джрбашяну, ввести в рассмотрение функцию

$$T_\omega(\rho) \equiv T_\omega(\rho;\ u) \equiv m_\omega^+(\rho;\ u) + N_\omega(\rho;\ V) \geqslant 0 \tag{2.14}$$

и называть ее ω-характеристической для функции $u = U - V$.

Ясно, что $T_\omega(\rho)$ одновременно зависит как от роста функции $u(z)$, так и от распределения масс субгармонической функции $V(z)$. Формула (2.13) выражает определенное равновесие между членами $N_\omega(\rho;\ V)$ и $m_\omega(\rho;\ u)$, так как, заменив функцию $u(z)$ функцией $[-u(z)]$, т. е. изменив знаки U и V, функция $T_\omega(\rho)$ не изменится, или, более точно, разность $T_\omega(\rho;\ u) - T_\omega(\rho;\ -u)$ будет постоянной. Поэтому (2.13) можно назвать соотношением ω-равновесия.

Полагая, что $\omega(x)\in\Omega$, обозначим через E_ω — множество субгармонических в круге $|z|<1$ функций $U(z)$, для которых

$$T_\infty(U) = \sup_{0<\rho<1}\left\{\int_0^1 U_\infty^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta\right\} < +\infty. \tag{2.15}$$

Из этого определения непосредственно следует, что если $U_j(z) \in E_\infty$ $(j=1, 2)$, то имеем также

$$U_1(z) + U_2(z) \in E_\infty.$$

Из теоремы 3 непосредственно вытекает, что $M_\infty(z) \in E_\infty$.

Приведем еще один важный пример функции из класса E_∞.

Лемма 2. *Пусть $\psi(\theta)$ — функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, тогда функция*

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi-\theta, r; \omega)\, d\psi(\theta) \tag{2.16}$$

принадлежит классу E_∞.

Доказательство. Нужно показать, что

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi} F_\infty^+(re^{i\varphi})\, d\varphi\right\} < +\infty.$$

По лемме E имеем

$$L^{(\infty)}[P(\varphi-\theta, r; \omega)] = P_0(\varphi-\theta, r) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

и поэтому

$$L^{(\infty)}[F(re^{i\varphi})] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(\infty)}[P(\varphi-\theta, r; \omega)]\, d\psi(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0(\varphi-\theta, r)\, d\psi(\theta). \tag{2.17}$$

Поскольку $\psi(\theta)$—функция ограниченной вариации, то ее можно представить в виде разности

$$\psi(\theta) = \psi_1(\theta) - \psi_2(\theta), \tag{2.18}$$

где $\psi_i(\theta)$ $(i=1, 2)$—неубывающие ограниченные функции на $[0, 2\pi]$. Следовательно, ввиду (2.17) и (2.18), будем иметь

$$m_\infty^+(F) = \sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi} [L^{(\infty)}(F(re^{i\varphi}))]^+\, d\varphi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0(\varphi-\theta, r)\, d\psi_1(\theta)\right] d\varphi\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<r<1} \left\{ \int_0^{2\pi} d\psi_1(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_0(\varphi - \theta, r)\, d\varphi \right\} = \int_0^{2\pi} d\psi_1(\theta) < +\infty,$$

т. е. $F(z) \in E_\omega$.

Лемма 3. *Если* $U(z) \in E_\omega$ *и* $\mu(\zeta)$ — *ассоциированное с* $U(z)$ *положительное распределение масс в круге* $|\zeta| < 1$, *то*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt < +\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство. Действительно, согласно определению функции $N_\omega(\rho; U)$,

$$N_\omega(\rho; U) = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt + n(0; U) [\log \rho - k_\omega],$$

причем очевидно, что она монотонно возрастающая, $0 < \rho < 1$.

С другой стороны, по формуле (2.13) имеем

$$m_\omega^+(\rho; U) = m_\omega^-(\rho; U) + N_\omega(\rho; U) + c_0.$$

Но поскольку $U(z) \in E_\omega$,

$$\sup_{0<\rho<1} \{m_\omega^+(\rho; U)\} = \sup_{0<\rho<1} \{m_\omega^-(\rho; U) + N_\omega(\rho; U) + c_0\} = T_\omega(U) < +\infty.$$

И так как $m_\omega^-(\rho; U) \geqslant 0$, то это означает, что существует конечный предел

$$\lim_{\rho \to 1-0} \left\{ \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt \right\} < +\infty.$$

Теперь для произвольного фиксированного $\rho_0 \in (0, 1)$ напишем цепь неравенств

$$\int_0^{\rho_0} \frac{\omega(t)}{t} [n(t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt =$$

$$= \lim_{\rho \to 1-0} \int_0^{\rho_0} \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\rho \to 1-0} \left\{ \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} [n(\rho t; \mu) - n(0; \mu)]\, dt \right\} < +\infty.$$

Отсюда, ввиду произвольности $\rho \in (0, 1)$, вытекает (2.19).

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 4. 1°. *Класс E_ω совпадает с множеством субгармонических в круге $|z|<1$ функций, представимых в виде*

$$U(z)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\zeta)|\,d\mu(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l}^{\pi}P(\varphi-\theta,\ r;\ \omega)\,d\psi(\theta)$$
$$(|z|<1), \tag{2.20}$$

где $\mu(\zeta)$—произвольное положительное распределение масс в круге $|z|<1$, подчиненное условию

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty,$$

а $\psi(\theta)$ — любая вещественная функция на $[0,\ 2\pi]$ с конечным полным изменением.

2°. *Существует такая последовательность $\rho_n\uparrow 1$, что*

$$\psi(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\theta L^{(\omega)}[U(\rho_n e^{i\theta})]\,d\theta. \tag{2.21}$$

Доказательство. Что любая функция $U(z)$ вида (2.20) входит в класс E_ω, непосредственно следует из теоремы 3 и леммы 2, ввиду отмеченного выше свойства класса E_ω.

Предположим теперь, что $U(z)\in E_\omega$, и докажем, что тогда справедливо представление вида (2.20).

Отметим сначала, что для распределения $\mu(\zeta)$ и функции

$$n(t;\ \mu)=\iint\limits_{0<|\zeta|<t}d\mu(\zeta),$$

ассоциированных с $U(z)$, согласно лемме 3 имеем

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}\,[n(t;\ \mu)-n(0;\ \mu)]\,dt<+\infty.$$

Но тогда, по теореме 1, интеграл

$$M_\omega(z;\ \mu)=\iint\limits_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z;\ \zeta)|\,d\mu(\zeta)$$

определяет функцию, субгармоническую в круге $|z|<1$. Для функции $U(z)$ запишем формулу (1.9)

$$U(re^{i\varphi})=\iint\limits_{|\zeta|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{re^{i\varphi}}{\rho};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|d\mu(\zeta)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho};\ \omega\right)U_\omega(\rho e^{i\theta})\,d\theta\quad(r<\rho<1). \tag{2.22}$$

Поскольку $U(z)\in E_\omega$, для каждого $\rho\ (0<\rho<1)$

$$\int_0^{2\pi} |U_\omega(\rho e^{i\theta})|\, d\theta = m_\omega^+(\rho;\, U) + m_\omega^-(\rho;\, U) < 2T_\omega(U) < +\infty.$$

Обозначая

$$\psi_\rho(\theta) = \int_0^\theta L^{(\omega)}[U(\rho e^{i\theta})]\, d\theta = \int_0^\theta U_\omega(\rho e^{i\theta})\, d\theta \quad (0<\rho<1),$$

получим семейство функций $\{\psi_\rho(\theta)\}$, $(0<\rho<1)$, для которого

$$\sup_{\theta\in[0,\, 2\pi]} |\psi_\rho(\theta)| \leqslant \int_0^{2\pi} |U_\omega(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < 2T_\omega(U) < +\infty,$$

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(\psi_\rho) \leqslant 2T_\omega(U) < +\infty.$$

Поэтому, согласно первой теореме Хелли, существует функция $\psi(\theta)$ с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$ и такая, что

$$\psi(\theta) = \lim_{n\to\infty} \psi_{\rho_n}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\theta U_\omega(\rho_n e^{i\theta})\, d\theta,\ \theta\in[0,\, 2\pi],$$

где $\{\rho_n\}$ — некоторая последовательность, $\rho_n \uparrow 1$ при $n\to+\infty$.

Отсюда в силу второй теоремы Хелли вытекает

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\varphi-\theta,\, \frac{r}{\rho_n};\, \omega\right) d\psi_{\rho_n}(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi-\theta,\, r;\, \omega)\, d\psi(\theta). \tag{2.23}$$

Фиксируя z в формуле (2.22) и положив $\rho=\rho_n$, перейдем в ней к пределу при $n\to+\infty$. Имея в виду (2.23) и лемму 1, получим утверждение теоремы.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и помощь при ее решении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 3.XII.1971

Ա. Մ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ. Միավոր շրջանում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի ներկայացում *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի ուսումնասիրություններում [1,2] ներմուծված է Ռիման-Լիուվիլի օպերատորի էական ընդհանրացումը հանդիսացող $L^{(\omega)}$ օպերատոր, որի միջոցով կառուցված է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացման լրիվ տեսություն։

Ներկա աշխատանքում բերվում է այդ տեսության հիմնական արդյունքի ընդհանրացումը սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար.

Ենթադրելով, որ $\omega(x)\in\Omega$ յուրաքանչյուր $U(z)$ սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի $|z|<1$ շրջանում ստացվում է

$$U_\infty(z) = L^{(\infty)}\{U(z)\}$$

ֆունկցիա և E_∞ դաս, որը հանդիսանում է շրջանում սուբհարմոնիկ այն $U(z)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար

$$\sup_{0<\rho<1}\left\{\int_0^{2\pi} U_\infty^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right\} < +\infty,\quad U_\infty^+(\rho e^{i\theta}) = \max\{0, U_\infty(\rho e^{i\theta})\}։$$

Ստացված է E_∞ դասի պարամետրական ներկայացումը։

A. M. BADALIAN. *The representation of certain subharmonic functions in unite circle* (summary)

In his earlier papers [1, 2] M. M. Džrbašian has introduced the operator $L^{(\infty)}$, which is an essential generalization of the Rieman-Liuvill operator. With use of $L^{(\infty)}$, full theory of factorization of meromorphic function in the circle $|z| < 1$, was constructed.

The present paper expands this theory on subharmonic functions. Parametric representation of the corresponding class is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, ДАН СССР, 32, 1968, 1075—1111.
2. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 79, № 4, (8), 1969.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", М., 1966.
4. *И. И. Привалов.* Субгармонические функции, ОНТИ, НКТП, СССР, М.—Л., 1937.
5. *М. М. Джрбашян.* Классы функций и их параметрическое представление, Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965, Изд. „Наука", М., 1966, 118—137.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

Е. Я. МЕЛАМУД

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ДАРЛИНГТОНА

В теории цепей широко известна теорема Дарлингтона [1] о реализации произвольной рациональной позитивной вещественной функции $z(\lambda)$ как полного сопротивления двухполюсника, представляющего собою четырехполюсник без потерь, нагруженный со стороны выходных зажимов на одно активное сопротивление R. Эта теорема допускает следующую эквивалентную формулировку: любая рациональная позитивная вещественная функция $z(\lambda)$ представима в виде дробно линейного преобразования

$$z(\lambda) = \frac{a(\lambda) R + b(\lambda)}{c(\lambda) R + d(\lambda)},$$

где $R > 0$, а матрица $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ рациональна и обладает следующими свойствами:

1. $A^*(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A(\lambda) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$;

2. $A^*(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A(\lambda) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$;

3. $\overline{A(\bar{\lambda})} \equiv A(\lambda)$;

4. $\det A(\lambda) \equiv 1$.

В настоящей работе получены аналогичные теоремы для позитивных матриц-функций.

Определение. Аналитическая матрица-функция $Z(\lambda)$ называется **позитивной**, если

$$Z(\lambda) + Z^*(\lambda) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Теорема 1. *Произвольная рациональная позитивная матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно линейного преобразования*

$$Z(\lambda) = [a(\lambda) R + b(\lambda)][c(\lambda) R + d(\lambda)]^{-1}, \tag{1}$$

где R — постоянная позитивная матрица порядка n, а матрица-функция порядка $2n$ $\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A(\lambda)$ рациональна и обладает свойствами:

$$\text{I.}\quad A^*(\lambda)\mathrm{J}A(\lambda)-\mathrm{J}>0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda>0,\ \mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

(J — *несжимаемость в правой полуплоскости*);

$$\text{II.}\quad A^*(\lambda)\,\mathrm{J}\,A(\lambda)-\mathrm{J}=0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda=0$$

(J — *унитарность на мнимой оси*).

Теорема 2. *Произвольная рациональная позитивная матрица-функция* $Z(\lambda)$, *вещественная на вещественной оси* $(\overline{Z(\overline{\lambda})}\equiv Z(\lambda))$, *представима в виде дробно линейного преобразования* (1), *где* R — *постоянная позитивная вещественная матрица, а* $A(\lambda)$ *обладает свойствами* I, II *и свойством*

$$\text{III.}\quad \overline{A(\overline{\lambda})}\equiv A(\lambda).$$

Теорема 3. *Произвольная рациональная позитивная симметрическая матрица-функция* $Z(\lambda)$ *представима в виде дробно линейного преобразования* (1), *где* R — *постоянная позитивная симметрическая матрица, а* $A(\lambda)$ *обладает свойствами* I, II *и свойством симплектичности:*

$$\text{IV.}\quad A'(\lambda)\,j\,\mathrm{J}A(\lambda)\equiv j\mathrm{J},\quad j=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}.$$

Теорема 4. *Произвольная рациональная матрица-функция* $Z(\lambda)$, *удовлетворяющая условиям:*

$$1^\circ.\ Z(\lambda)+Z^*(\lambda)>0,\ \operatorname{Re}\lambda>0;$$

$$2^\circ.\ \overline{Z(\overline{\lambda})}=Z(\lambda);$$

$$3^\circ.\ Z'(\lambda)=Z(\lambda)$$

представима в виде дробно линейного преобразования (1), *где* R — *постоянная вещественная симметрическая неотрицательная матрица, а* $A(\lambda)$ *обладает свойствами* I, II, III, IV.

В работах В. П. Потапова и И. В. Ковалишиной [2, 3] впервые была детально изучена мультипликативная структура матриц-функций, обладающих свойствами I — IV (реактивных матриц-функций) и доказано, что произвольная рациональная реактивная матрица-функция представима в виде произведения конечного числа примарных реактивных множителей. Этот результат, имеющий принципиальное значение для теории синтеза электрических цепей, позволил А. В. Ефимову [5] доказать, что каждая рациональная реактивная матрица-функция $A(\lambda)$ порядка $2n$ есть A-матрица некоторого линейного пассивного $4n$-полюсника без потерь. Поэтому теорема 4 есть обобщение теоремы Дарлингтона и означает, что произвольная рациональная позитивная вещественная симметрическая матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n есть матрица импеданса $2n$-полюсника, представляющего собою $4n$-полюсник без потерь, n пар выходных зажимов которого замкнуты на активные сопротивления (из которых некоторые могут равняться нулю). Теорема 2 имеет, по-видимому, аналогичный смысл для цепи, содержащей также гираторы.

Мы приведем здесь подробное доказательство теорем 2 и 4 (доказательство теорем 1 и 3 не содержит новых принципиальных трудностей). При этом основную роль будет играть теорема о факторизации рациональной неотрицательной матрицы-функции.

Теорема о факторизации

Пусть $f(i\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$—неотрицательная матрица-функция

Определение. Если существует голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ матрица-функция $X(\lambda)$, граничные значения которой $X(i\tau)$ почти всюду удовлетворяют условию

$$f(i\tau) = X(i\tau)\, X^*(i\tau),$$

то $X(\lambda)$ называется решением левой факторизационной задачи для $f(i\tau)$.

Если существует голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ матрица-функция $Y(\lambda)$, граничные значения которой $Y(i\tau)$ почти всюду удовлетворяют условию

$$f(i\tau) = Y^*(i\tau)\, Y(i\tau),$$

то $Y(\lambda)$ называется решением правой факторизационной задачи для $f(i\tau)$.

Пусть $f(i\tau)$ рациональна относительно $i\tau$. Известно, что рациональная матрица-функция имеет постоянный ранг m всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Будем называть m рангом матрицы $f(i\tau)$.

Теорема о факторизации. (Доказательство см., например, в [6]). Если $f(i\tau)$—рациональная относительно $i\tau$ неотрицательная матрица-функция порядка n, ранга m, то существуют рациональные решения левой и правой факторизационных задач

$$X(\lambda) = \left\| x_{kj}(\lambda) \right\|_{k=\overline{1,\,n}}^{j=\overline{1,\,m}} \quad \text{и} \quad Y(\lambda) = \left\| y_{kj}(\lambda) \right\|_{k=\overline{1,\,m}}^{j=\overline{1,\,n}}$$

полного ранга. Если, кроме того, $\overline{f}(-i\tau) = f(i\tau)$, то эти решения могут быть выбраны вещественными на вещественной оси $(\overline{X(\lambda)} = X(\lambda)$, $\overline{Y(\lambda)} = Y(\lambda))$.

Некоторые свойства рациональных позитивных вещественных матриц-функций

Определение. Аналитическую матрицу-функцию $Z(\lambda)$ будем называть *позитивной вещественной*, если она удовлетворяет условиям:

1°. $Z(\lambda) + Z^*(\lambda) \geqslant 0$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, 2°. $\overline{Z(\bar{\lambda})} \equiv Z(\lambda)$.

Впредь будут рассматриваться лишь рациональные позитивные вещественные матрицы-функции. Перечислим некоторые их свойства. (Для скалярных позитивных вещественных функций эти свойства широко известны. Перенесение их на матрицы-функции не вызывает каких-либо принципиальных трудностей).

a) Рациональная позитивная матрица-функция $Z(\lambda)$ не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

b) На мнимой оси рациональная позитивная матрица-функция $Z(\lambda)$ может иметь лишь простые полюсы; соответствующие вычеты суть эрмитовы неотрицательные матрицы.

c) Если $Z(\lambda)$ — позитивная вещественная матрица-функция, $i\tau_0$ — ее полюс, A — соответствующий вычет, то точка $-i\tau_0$ также является полюсом, а соответствующий вычет есть $\bar{A}$.

d) Позитивная вещественная рациональная матрица-функция представима в виде

$$Z(\lambda) = Z_0(\lambda) + Z_1(\lambda), \tag{2}$$

где $Z_0(\lambda) = A_\infty \lambda + \dfrac{A_0}{\lambda} + \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\dfrac{A_k}{\lambda - i\tau_k} + \dfrac{\bar{A}_k}{\lambda + i\tau_k}\right)$ — позитивная вещественная матрица-функция, удовлетворяющая условию

$$Z_0(\lambda) + Z_0^{*}(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda = 0$$

(реактансная матрица-функция), а $Z_1(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная матрица-функция, не имеющая полюсов на мнимой оси.

e) Позитивная вещественная симметрическая матрица-функция $Z(\lambda)$ представима в виде (2), где $Z_0(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная симметрическая реактансная матрица-функция, а $Z_1(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная симметрическая матрица-функция, не имеющая полюсов на мнимой оси.

Представление рациональной позитивной вещественной матрицы-функции в виде дробно линейного преобразования

Теорема. *Произвольная рациональная позитивная вещественная матрица-функция* $Z(\lambda)$ *порядка* n *представима в виде дробно линейного преобразования*

$$Z(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)][c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, $m = \operatorname{rang}[Z(\lambda) + Z'(-\lambda)]$, *а матрица-функция* *порядка* $2n \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A(\lambda)$ *рациональна и удовлетворяет условиям**

$$\text{I.}\quad A^*(\lambda)\,JA(\lambda) - J > 0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0;$$

$$\text{II.}\quad A^*(\lambda)\,JA(\lambda) - J = 0 \quad \textit{при} \quad \operatorname{Re}\lambda = 0;$$

$$\text{III.}\quad \overline{A(\bar{\lambda})} \equiv A(\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим рациональную матрицу-функцию

$$f(\lambda) = \frac{Z(\lambda) + Z'(-\lambda)}{2},$$

и пусть $\operatorname{rang} f(\lambda) = m$. Очевидно, $0 \leqslant m \leqslant n$. Пусть сначала $m = 0$. В этом случае $Z(\lambda) + Z'(-\lambda) \equiv 0$, откуда, в силу 2°, следует

$$Z(i\tau) + Z^*(i\tau) \equiv 0, \tag{3}$$

то есть $Z(\lambda)$ — реактансная позитивная вещественная матрица-функция. Полагая $R = 0$, имеем

$$Z(\lambda) = [I \cdot R + Z(\lambda)][0 \cdot R + I]^{-1}.$$

Матрица этого дробно линейного преобразования

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} I & Z(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям I—III. Действительно, из 2° следует III, а из 1°, (3) и равенства

$$A^*(\lambda)\,JA(\lambda) - J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z(\lambda) + Z^*(\lambda) \end{pmatrix}$$

следуют I и II. Таким образом, при $m = 0$ теорема тривиальна. Это дает основание в дальнейшем считать $0 < m \leqslant n$.

Представим $Z(\lambda)$ в виде (2). Очевидно

$$Z(\lambda) = [I \cdot Z_1(\lambda) + Z_0(\lambda)][0 \cdot Z_1(\lambda) + I]^{-1}. \tag{4}$$

Так как $Z_0(\lambda)$ — рациональная позитивная вещественная реактансная матрица-функция, то, как и выше, матрица этого дробно линейного преобразования

$$A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} I & Z_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям I—III.

Теперь вопрос сводится к тому, чтобы показать, что $Z_1(\lambda)$ представима в виде

---

* Мультипликативная структура матриц-функций, удовлетворяющих условиям I—III, изучена в работах И. В. Ковалишиной и В. П. Потапова [4] и Т. А. Товмасяна [7].

$$Z_1(\lambda) = [\alpha(\lambda) R + \beta(\lambda)][\gamma(\lambda) R + \delta(\lambda)]^{-1}, \tag{4'}$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, а $A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix}$ — рациональная матрица-функция, удовлетворяющая условиям I—III, и к суперпозиции дробно линейных преобразований (4) и (4′). Мы покажем как может быть построена матрица $A_1(\lambda)$.

Так как $Z_0(\lambda) + Z_0^*(\lambda) = 0$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то, полагая $\lambda = i\tau$ и используя вещественность $Z_0(\lambda)$, получим $Z_0(i\tau) + Z_0'(-i\tau) = 0$ откуда, в силу аналитичности, вытекает тождество $Z_0(\lambda) + Z_0'(-\lambda) \equiv 0$, и, следовательно

$$f(\lambda) = \frac{Z_1(\lambda) + Z_1(-\lambda)}{2}.$$

Из вещественности $Z_1(\lambda)$ следует

$$f(i\tau) = \frac{Z_1(i\tau) + Z_1^*(i\tau)}{2}.$$

Таким образом, $f(i\tau)$—рациональная относительно $i\tau$ неотрицательная матрица-функция ранга m, при этом $\overline{f}(-i\tau) = f(i\tau)$.

Матрица-функция $f(\lambda)$ имеет главный минор $M_m(\lambda)$ порядка m, отличный от тождественного нуля. (Действительно, пусть $\operatorname{rang} f(i\tau_0) = m$; так как $f(i\tau_0)$ — эрмитова, то существует главный минор $M_m(i\tau_0) \neq 0$. Соответствующий главный минор $M_m(\lambda)$ матрицы-функции $f(\lambda)$, будучи рациональной функцией отличен от нуля всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек). Не ограничивая общности, будем считать, что $M_m(\lambda)$ находится в левом верхнем углу матрицы $f(\lambda)$.

Пусть $X(\lambda) = \|x_{kj}(\lambda)\|_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ и $Y(\lambda) = \|y_{kj}(\lambda)\|_{k=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ — рациональные вещественные решения полного ранга соответственно левой и правой факторизационных задач для $f(i\tau)$. Представим их в виде

$$X(\lambda) = \begin{bmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda), \; Y_{12}(\lambda)],$$

где $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ — квадратные матрицы. Так как

$$\det[X_{11}(i\tau) X_{11}^*(i\tau)] = \det[Y_{11}^*(i\tau) Y_{11}(i\tau)] = M_m(i\tau) \not\equiv 0,$$

то $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ — неособенные всюду, за исключением, возможно конечного числа точек.

Выбирая решение $X(\lambda)$ левой факторизационной задачи для $f(i\tau)$, наложим на него следующее важное ограничение:

$X_{11}^{-1}(-\lambda)$ *голоморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > 0$. (*)

(Такой выбор $X(\lambda)$ всегда возможен. Действительно, пусть $\widetilde{X}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{11}(\lambda) \\ \widetilde{X}_{21}(\lambda) \end{bmatrix}$ — рациональное вещественное решение левой

вой факторизационной задачи, причем $\widetilde{X}_{11}^{-1}(-\lambda)$ имеет полюсы в точках $\alpha_1=\bar{\alpha}_1, \cdots, \alpha_l=\bar{\alpha}_l, \alpha_{l+1}, \bar{\alpha}_{l+1}, \cdots, \alpha_N, \bar{\alpha}_N$ правой полуплоскости. Тогда

$$\widetilde{X}_{11}^{-1}(-\lambda)=\frac{Q(\lambda)}{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda-\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[(\lambda-\alpha_l)(\lambda-\bar{\alpha}_l)]^{s_l}},$$

где $Q(\lambda)$ голоморфна при $\mathrm{Re}\,\lambda>0$. Положим $X(\lambda)=\widetilde{X}(\lambda)\,b(\lambda)$, где

$$b(\lambda)=\frac{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda-\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[\lambda-\alpha_l)(\lambda-\bar{\alpha}_l)]^{s_l}}{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda+\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[\lambda-\alpha_l)(\lambda+\bar{\alpha}_l)]^{s_l}}.$$

Так как $b(\lambda)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости, вещественна на вещественной оси, а на мнимой оси $b(i\tau)\,\overline{b(i\tau)}=1$, то $X(\lambda)$ есть также решение левой факторизационной задачи для $f(i\tau)$, при этом $X_{11}^{-1}(-\lambda)=\dfrac{Q(\lambda)}{\prod\limits_{l=1}^{l}(\lambda+\alpha_l)^{s_l}\prod\limits_{l=l+1}^{N}[(\lambda+\alpha_l)(\lambda+\bar{\alpha}_l)]^{s_l}}$ голоморфна в правой полуплоскости).

Введем теперь в рассмотрение матрицы-функции n-го порядка

$$q_X(\lambda)=\begin{pmatrix} X_{11}^{-1}(\lambda) & 0\\ -X_{21}(\lambda)\,X_{11}^{-1}(\lambda) & I\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$p_X(\lambda)=q_X(\lambda)\,Z_1(\lambda), \tag{6}$$

$$q_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}^{-1}(\lambda) & -Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda)\\ 0 & I\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$p_Y(\lambda)=Z_1(\lambda)\,q_Y(\lambda). \tag{8}$$

Имеют место легко проверяемые тождества:

$$q_X(\lambda)\,X(\lambda)=\begin{bmatrix} I_m\\ 0\end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$Y(\lambda)\,q_Y(\lambda)=[I_m,\ 0]. \tag{10}$$

Положим

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda)\\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda)\end{pmatrix},$$

где рациональные матрицы-функции n-го порядка $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$, $\delta(\lambda)$ определим формулами:

$$\alpha(\lambda)=\frac{p_Y(\lambda)+p_X'(-\lambda)}{2}+I-R,\quad R=\begin{pmatrix} I_m & 0\\ 0 & 0_{n-m}\end{pmatrix},$$

$$\beta(\lambda) = \frac{p_Y(\lambda) - p'_X(-\lambda)}{2},$$

$$\gamma(\lambda) = \frac{q_Y(\lambda) - q'_Y(-\lambda)}{2},$$

$$\delta(\lambda) = \frac{q_Y(\lambda) + q'_X(-\lambda)}{2}.$$

Убедимся, что матрица-функция $Z_1(\lambda)$ представима в виде дробно линейного преобразования (4′). Так как $Z_1(\lambda)$, $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ вещественны на вещественной оси, тождества

$$\frac{Z_1(i\tau) + Z_1^*(i\tau)}{2} \equiv X(i\tau)\, X^*(i\tau) \equiv Y^*(i\tau)\, Y(i\tau) \tag{11}$$

можно переписать так:

$$\frac{Z_1(i\tau) + Z'_1(-i\tau)}{2} \equiv X(i\tau)\, X'(-i\tau) \equiv Y'(-i\tau)\, Y(i\tau),$$

а отсюда, в силу аналитичности, следует

$$\frac{Z_1(\lambda) + Z_1(-\lambda)}{2} \equiv X(\lambda)\, X'(-\lambda) \equiv Y'(-\lambda)\, Y(\lambda). \tag{12}$$

Из (12), в частности, получаем

$$X_{11}(\lambda)\, X'_{11}(-\lambda) \equiv Y'_{11}(-\lambda)\, Y_{11}(\lambda), \quad X_{11}(\lambda)\, X'_{21}(-\lambda) \equiv Y'_{11}(-\lambda)\, Y_{12}(\lambda), \tag{13}$$

откуда вытекает

$$X_{11}^{-1\prime}(-\lambda)\, X'_{21}(-\lambda) \equiv Y_{11}^{-1}(\lambda)\, Y_{12}(\lambda),$$

поэтому

$$\gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{Y_{11}^{-1}(\lambda) - X_{11}^{-1\prime}(-\lambda)}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(\lambda)\, R = \gamma(\lambda)$$

и, следовательно

$$\gamma(\lambda)\, R + \delta(\lambda) = q_Y(\lambda). \tag{14}$$

Далее, используя (6), (8), (12) и (9), получаем

$$\frac{p_Y(\lambda) + p'_X(-\lambda)}{2} = Z_1(\lambda)\, \frac{q_Y(\lambda) - q'_X(-\lambda)}{2} + \frac{Z_1(\lambda) + Z'_1(-\lambda)}{2}\, q'_X(-\lambda) =$$

$$= Z_1(\lambda)\, \gamma(\lambda) + X(\lambda)\, X'(-\lambda)\, q'_X(-\lambda) = Z_1(\lambda)\, \gamma(\lambda) + X(\lambda)[I_m,\ 0],$$

откуда

$$\alpha(\lambda)\, R = Z_1(\lambda)\, \gamma(\lambda)\, R + X(\lambda)[I_m,\ 0]\, R + (I - R)\, R =$$

$$= Z_1(\lambda)\, \gamma(\lambda) + X(\lambda)\, [I_m, 0] = \frac{p_Y(\lambda) + p'_X(-\lambda)}{2}$$

и, следовательно

$$\alpha(\lambda) R + \beta(\lambda) = p_Y(\lambda). \tag{15}$$

Из (8), (14) и (15) следует

$$[\alpha(\lambda) R + \beta(\lambda)][\gamma(\lambda) R + \delta(\lambda)]^{-1} = p_Y(\lambda) q_Y^{-1}(\lambda) = Z_1(\lambda),$$

что и требовалось.

Покажем теперь, что построенная нами матрица $A_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям I — III.

Условие III выполнено, так как $Z_1(\lambda)$, $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, а значит и $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$, $p_X(\lambda)$, $p_Y(\lambda)$ вещественны на вещественной оси.

Убедимся в том, что $A_1(\lambda)$ является J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси. Для этого вычислим J-форму $A_1^*(\lambda) J A_1(\lambda) - J$. С целью сделать выкладки более прозрачными, перейдем к j-метрике. Положим

$$B(\lambda) = U A_1(\lambda) U^*,$$

где $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}$. Так как $U^* = U^{-1}$ и $U^* j U = J$, то

$$A_1^*(\lambda) J A_1(\lambda) - J = U^* [B^*(\lambda) j B(\lambda) - j] U.$$

Таким образом, достаточно показать, что j-форма $B^*(\lambda) j B(\lambda) - j$ неотрицательна в правой полуплоскости и равняется нулю на мнимой оси.

Легко видеть, что

$$B(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_Y(\lambda) + p_Y(\lambda) + I - R & q_X^*(-\lambda) - p_X^*(-\lambda) - I + R \\ q_Y(\lambda) - p_Y(\lambda) - I + R & q_X^*(-\lambda) + p_X^*(-\lambda) + I - R \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $(I - R) q_Y(\lambda) = I - R$ и $q_X(\lambda)(I - R) = I - R$, получим

$$B^*(\lambda) j B(\lambda) - j = \begin{pmatrix} \frac{q_Y^*(\lambda) p_Y(\lambda) + p_Y^*(\lambda) q_Y(\lambda)}{2} - R & \frac{p_Y^*(\lambda) q_X^*(-\lambda) - q_Y^*(\lambda) p_X^*(-\lambda)}{2} \\ \frac{q_X^{**}(-\lambda) p_Y(\lambda) - p_X^{**}(-\lambda) q_Y(\lambda)}{2} & R - \frac{q_X^{**}(-\lambda) p_X^*(-\lambda) + p_X^{**}(-\lambda) q_X^*(-\lambda)}{2} \end{pmatrix}.$$

Желая сделать это выражение более обозримым, умножим его справа на

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} q_Y^{-1}(\lambda) & -q_Y^{-1}(\lambda) q_X^*(-\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

слева на $L^*(\lambda)$. Используя (9), (10) и (12), получим

$$L^*(\lambda)[B^*(\lambda) j B(\lambda) - j] L(\lambda) =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}-q_Y^{-1*}(\lambda)\,R\,q_Y^{-1}(\lambda) & q_Y^{-1*}(\lambda)\,Rq_Y^{-1}(\lambda)\,q_X'(-\lambda)- \\ q_X^{1*}(-\lambda)\,q_Y^{-1*}(\lambda)\,R\,q_Y^{-1}(\lambda)-q_X^{\prime *}(-\lambda) & \frac{Z_1^*(\lambda)+Z_1^*(-\lambda)}{2} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} -\frac{Z_1(\lambda)+Z_1(-\lambda)}{2}\,q_k'(-\lambda) \\ R-q_X^{\prime *}(-\lambda)\,q_Y^{-1*}(\lambda)\,R\,q_Y^{-1}(\lambda)\,q_X'(-\lambda) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}-Y^*(\lambda)\,Y(\lambda) & Y^*(\lambda)\,Y(\lambda)\,q_X'(-\lambda)-X(\lambda)\,[I_m,0] \\ q_X^{\prime *}(-\lambda)\,Y^*(\lambda)\,Y(\lambda)-\begin{vmatrix} I_m \\ 0\end{vmatrix}X^*(\lambda) & R-q_X^{\prime *}(-\lambda)\,Y^*(\lambda)\,Y(\lambda)\,q_X'(-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, что полученная матрица-функция есть разность гармонической и субгармонической матриц-функций, граничные значения которых совпадают; после этого останется воспользоваться принципом максимума для субгармонических матриц-функций.

Введем обозначение

$$r(\lambda)=Y(\lambda)\,q_X'(-\lambda).$$

Используя тождества (13), найдем, что $r(\lambda)=[r_0(\lambda),0]$, где $r_0(\lambda)=$ $=Y_{11}(\lambda)\,X_{11}^{*-1}(-\lambda)$. Таким образом

$$L^*(\lambda)\,[B^*(\lambda)\,jB(\lambda)-j]\,L(\lambda)=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}-Y^*(\lambda)\,Y(\lambda) & Y^*(\lambda)\,r(\lambda)-X(\lambda)\,[I_m,0] \\ r^*(\lambda)\,Y(\lambda)-\begin{vmatrix} I_m \\ 0\end{vmatrix}X^*(\lambda) & R-r^*(\lambda)\,r(\lambda) \end{pmatrix}=$$

$$=G(\lambda)-\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda),$$

где

$$G(\lambda)=\begin{pmatrix} \frac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2} & -X(\lambda)\,[I_m,0] \\ -\begin{bmatrix} I_m \\ 0\end{bmatrix}X^*(\lambda) & R \end{pmatrix},\quad \Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Y(\lambda) & -r(\lambda) \\ -Y(\lambda) & r(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Так как $Z_1(\lambda)$, $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ и $r(\lambda)$ голоморфны в D, где D—открытая правая полуплоскость (голоморфность $r(\lambda)$ следует из ограничения (*) при построении $X(\lambda)$), то $G(\lambda)$ — гармоническая, а $\Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda)$—субгармоническая в D матрица-функция.

Эти матрицы-функции непрерывны в $\overline{D}$. Действительно, так как $Z_1(\lambda)$ позитивна и не имеет полюсов на мнимой оси, то $\frac{Z_1(\lambda)+Z_1^*(\lambda)}{2}$ непрерывна в $\overline{D}$; из тождества (11) следует, что $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ также не имеют полюсов на мнимой оси и, следовательно, непрерывны в $\overline{D}$; отсутствие полюсов на мнимой оси у матрицы-функции $r(\lambda)$ вытекает из легко проверяемого тождества

$$r^*(i\tau)\, r(i\tau) \equiv R.$$

Покажем, что на мнимой оси значения $G(\lambda)$ и $\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ совпадают. Для этого вычислим блоки матрицы $G(i\tau) - \Phi^*(i\tau)\,\Phi(i\tau)$. Правый нижний блок равен нулю в силу предыдущего тождества, а левый верхний—в силу тождества (11). Вычислим правый верхний блок, используя тождества (13):

$$Y^*(i\tau)\, r(i\tau) - X(i\tau)\,[I_m,\, 0] =$$
$$= \begin{pmatrix} Y_{11}^*(i\tau)\; Y_{11}(i\tau)\, X_{11}^{*-1}(i\tau) - X_{11}(i\tau) & 0 \\ Y_{12}^*(i\tau)\; Y_{11}(i\tau)\, X_{11}^{*-1}(i\tau) - X_{21}(i\tau) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом

$$G(i\tau) - \Phi^*(i\tau)\,\Phi(i\tau) \equiv 0. \tag{16}$$

Так как субгармоническая матрица-функция $\Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda)$ на границе области $\overline{D}$ совпадает с гармонической матрицей-функцией $G(\lambda)$, то, согласно принципу максимума, внутри D справедливо неравенство

$$G(\lambda) \geqslant \Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda).$$

Из этого неравенства и равенства (16) вытекает, что $B^*(\lambda) j B(\lambda) - j$, а значит и J-форма $A_1^*(\lambda)\, J\, A_1(\lambda) - J$ неотрицательна в правой полуплоскости (условие I) и равняется нулю на мнимой оси (условие II), что и требовалось.

Остается заметить, что данная позитивная вещественная матрица-функция $Z(\lambda)$ представлена в виде

$$Z(\lambda) = [a(\lambda)\, R + b(\lambda)][c(\lambda)\, R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A_0(\lambda)\, A_1(\lambda) = A(\lambda)$ удовлетворяет условиям I—III. Теорема доказана.

Обобщенная теорема Дарлингтона

Теорема. *Произвольная рациональная позитивная вещественная симметрическая матрица-функция $Z(\lambda)$ порядка n представима в виде дробно линейного преобразования*

$$Z(\lambda) = [a(\lambda)\, R + b(\lambda)][c(\lambda)\, R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, $m = \operatorname{rang}\,[Z(\lambda) + Z(-\lambda)]$, *а* $\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} = A(\lambda)$ — *рациональная реактивная матрица-функция* $2n$-го *порядка.*

Доказательство этой теоремы повторяет предыдущее и лишь содержит некоторые дополнения.

Из симметричности $Z(\lambda)$ следует, что $f(\lambda) = \dfrac{Z(\lambda) + Z(-\lambda)}{2}$. При

$m=0,\ R=0,\ Z(\lambda)=[I\cdot R+Z(\lambda)][0\cdot R+I]^{-1}$, где $A(\lambda)=\begin{pmatrix} I & Z(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$,

помимо условий I—III, удовлетворяет и условию симплектичности IV

$$A'(\lambda)\, j\mathrm{J}A(\lambda)-j\mathrm{J}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z'(\lambda)-Z(\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, является реактивной.

Пусть $0<m\leqslant n$. Представим $Z(\lambda)$ в виде (2), где $Z_0(\lambda)$ и $Z_1(\lambda)$ — рациональные позитивные вещественные симметрические матрицы-функции, причем $Z_0(\lambda)$ — реактансная, а $Z_1(\lambda)$ лишена полюсов на мнимой оси. Как и выше, матрица $A_0(\lambda)=\begin{pmatrix} I & Z_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$ в представлении (4) является реактивной. Перейдем к построению $A_1(\lambda)$.

Пусть $X(\lambda)=\begin{bmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{bmatrix}$ — рациональное вещественное решение левой факторизационной задачи для $f(i\tau)=\dfrac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}$, подчиненное ограничению (*). Так как

$$\frac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}=\left[\frac{Z_1(i\tau)+Z_1^*(i\tau)}{2}\right]'=X'^*(i\tau)\,X'(i\tau),$$

то в качестве $Y(\lambda)$ возьмем $X'(\lambda)$. Очевидно, $q_X'(\lambda)=q_Y(\lambda)$, $p_X'(\lambda)=$ $=p_Y(\lambda)$, поэтому

$$A_1(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{p_Y(\lambda)+p_Y(-\lambda)}{2}+I-R & \dfrac{p_Y(\lambda)-p_Y(-\lambda)}{2} \\ \dfrac{q_Y(\lambda)-q_Y(-\lambda)}{2}, & \dfrac{q_Y(\lambda)+q_Y(-\lambda)}{2} \end{pmatrix}.$$

Как и выше, $A_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям I—III. Убедимся, что она удовлетворяет и условию симплектичности. Очевидно

$$A_1(-\lambda)=jA_1(\lambda)\,j.$$

Из (II) и (III) следует

$$A_1'(-i\tau)\,\mathrm{J}A_1(i\tau)=\mathrm{J},$$

и в силу аналитичности

$$A_1'(-\lambda)\,\mathrm{J}A_1(\lambda)=\mathrm{J},$$

откуда

$$A_1'(\lambda)\,j\mathrm{J}A_1(\lambda)=j\mathrm{J}$$

и, следовательно, условие симплектичности IV выполнено.

Полагая $A_0(\lambda)\,A_1(\lambda)=A(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$, получим представление

$$Z(\lambda) = [a(\lambda) R + b(\lambda)][c(\lambda) R + d(\lambda)]^{-1},$$

где $A(\lambda)$ — реактивная матрица-функция. Теорема доказана.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступило 9.IX.1971

Ե. ՅԱ. ՄԵԼԱՄՈՒԴ. Դարլինգտոնի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է Դարլինգտոնի ընդհանրացված թեորեմը կամայական գծային պասսիվ 2n-բևեռի համար։

E. Ya. MELAMUD. *A generalization of Darlington's theorem* (summary)

The Darlington theorem for arbitrary linear passive $2n$-Pole is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Darlington*. Synthesis of Reactance 4-Poles, J. Math. and Phys., v. 18, 1939.
2. *В. П. Потапов*. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН Арм.ССР, XLVIII, № 5, 1969, 257—262.
3. *И. В. Ковалишина*. Мультипликативная структура аналитических реактивных матриц-функций, Известия АН Арм.ССР, сер. „Математика", I, № 2, 1966, 138—146.
4. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*. Мультипликативная структура аналитических вещественных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, XVIII, № 6, 1965, 3—10.
5. *А. В. Ефимов*. Реализация реактивных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН Арм.ССР сер. „Математика", V, № 1, 1970, 54—63.
6. *Ю. А. Розанов*. Стационарные случайные процессы, Ф.—М., 1963.
7. *Т. А. Товмасян*. Об элементарных и примарных множителях J-несжимающих вещественных матриц-функций, Уч. зап. Ереванского Госуниверситета, № 1, 1971, 11—25.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

Г. Н. ПЕТРОСЯН

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СХЕМ АЛГОРИТМОВ

В работе рассматриваются схемы алгоритмов, представляющие собой обобщение операторных схем Янова (см. [1]). Это обобщение проведено по двум направлениям:

1) заменой однократного использования операторов в схеме на многократное;

2) расширением понятия „сдвиг, приписываемый оператору".

Используемое здесь понятие интерпретации почерпнуто из работы [2]; интерпретация определяется независимо от схемы и основу ее составляет множество, которое мы условно назовем интерпретационным; его мощность принимается за мощность интерпретации.

Задание интерпретации превращает каждую схему в алгоритм, перерабатывающий элементы интерпретационного множества в элементы этого же множества; так появляется функция, реализуемая схемой при данной интерпретации.

Универсальной называется интерпретация, обладающая свойством: совпадение функций, реализуемых двумя схемами при универсальной интерпретации, влечет за собой совпадение функций, реализуемых этими схемами при любой другой интерпретации; и так для всех пар схем из выбранного класса схем. Таким образом, универсальность интерпретации—свойство, зависящее от рассматриваемого класса схем.

В работе даются способы построения

а) счетной интерпретации, универсальной для всех схем алгоритмов (теорема 2);

б) конечной интерпретации, универсальной для схем, в каждой из которых общее число используемых операторов не превышает некоторого заданного числа (теорема 4);

и доказывается, что не существует конечной интерпретации, универсальной для всех схем алгоритмов (теорема 3).

Доказательству перечисленных теорем предшествуют введение используемых в статье понятий и рассмотрение проблемы эквивалентности схем алгоритмов.

§ 1. Основные понятия

1.1. Зададимся двумя конечными множествами:

$$\Gamma = \{\Delta\};\ A = \{A_0, A_1, \cdots, A_n, A_{n+1}\},\ n \geqslant 1;$$

элементы множества A будем называть операторами.

1.2. **Распределением сдвигов** назовем соответствие, при котором каждому оператору A_i, $i=1, 2, \cdots, n$ сопоставлено отображение

$$s_i: \Gamma \to B(\Gamma)/\{\varnothing\},$$

где $B(\Gamma)$ — множество подмножеств множества Γ.

Полагаем впредь фиксированным некоторое распределение сдвигов

$$s = \langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle.$$

1.3. Сдвоенную последовательность

$$x = \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 \cdots, & \Delta_{l-1} & \Delta_l \\ A_{i_1} & A_{i_2} \cdots & A_{i_{l-1}} & A_{i_l} \end{matrix}, \ l > 0,$$

в которой $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_l$ — элементы множества Γ, а $A_{i_1}, \cdots, A_{i_l}$ — операторы, отличные от оператора A_{n+1}, назовем **конфигурацией**, если для всех $k=1, 2, \cdots, l-1$, $\Delta_{k+1} \in s_{i_{k+1}}(\Delta_k)$.

Пустую конфигурацию (случай $l=0$) будем обозначать через Λ, длиной конфигурации x (обозначаем длину x через $d[x]$) будем называть число l. Отметим, что оператор A_0 может занимать в конфигурации только первое место.

1.4. Последовательность пар элементов из Γ

$$(\Delta_1, \Delta_1'), (\Delta_2, \Delta_2'), \cdots, (\Delta_m, \Delta_m')$$

называем независимой относительно отображения s_i, если при всех $t=1, 2, \cdots, m$

$$\Delta_t' \in s_i(\Delta_t),$$

$$\Delta_t' \overline{\in} s_i(\Delta_k), \ k=1, 2, \cdots, t-1.$$

Максимум длины всех независимых относительно s_i последовательностей обозначим через ε_i; наибольшее из чисел ε_i, $i=1, 2, \cdots, n$, назовем **рангом** распределения сдвигов $S = \langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle$. Ясно, что ранг распределения сдвигов всегда не превышает числа элементов множества Γ.

1.5. **Схемой алгоритмов** будем называть конечный ориентированный граф, в котором

а) все вершины подразделяются на вход, выход, операторные вершины и предикатные вершины; вход—это вершина, из которой исходит одна дуга и в которую не приходит ни одной дуги; из каждой операторной вершины исходит в точности одна дуга; из каждой предикатной—две дуги, одна из них некоторым образом отмеченная;

б) входу сопоставлен операторный символ A_0, выходу — операторный символ A_{n+1}; каждой операторной вершине — свой операторный символ A_i, $i=1, 2, \cdots, n$ (возможен случай, когда двум различным вершинам сопоставлен один и тот же оператор); каждой предикатной вершине—свое подмножество множества Γ.

Схему алгоритма будем обозначать через $\mathfrak{M}$ и для краткости называть просто схемой.

1.6. Пусть V—множество всех вершин схемы $\mathfrak{M}$, V_0—множество ее операторных вершин, пополненное входом.

Построим отображение

$$p: V_0 \times \Gamma \to V,$$

сопоставляющее паре (v, Δ), где $v \in V_0$, $\Delta \in \Gamma$, вершину v' множества V.

Для этого в схеме $\mathfrak{M}$ из вершины v проложим маршрут

$$v = v_1, v_2, \cdots, v_l, \tag{1}$$

конец которого—вершина v_l и определит искомую вершину v'. Построение маршрута (1) подчиним требованиям; v_2—это вершина, к которой ведет единственная дуга, исходящая из вершины $v=v_1$; если v_2—операторная вершина или выход, то маршрут (1) построен и $v'=v_2$; если v_2—предикатная вершина, и ей сопоставлено множество α_{v_2}, то из v_2 идем дальше по отмеченной дуге в случае $\Delta \in \alpha_{v_2}$ и по неотмеченной—в противном случае; точно так же поступаем при переходе через любую предикатную вершину маршрут (1) считаем построенным, как только придем в операторную вершину (или выход) или такую предикатную вершину, которая совпадает с одной из уже пройденных вершин.

1.7. Схеме $\mathfrak{M}$ и ее операторной вершине v сопоставим множество конфигураций $K(\mathfrak{M}, v)$; по определению, конфигурация

$$x = \begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 \cdots \Delta_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} \cdots A_{j_t} \end{matrix} \quad ; \ t > 0$$

принадлежит множеству $K(\mathfrak{M}, v)$ в том и только том случае, если по формулам

$$v_1 = v,$$

$$v_i = p(v_{i-1}, \Delta_{i-1}),\ i = 2, 3, \cdots, t \tag{1'}$$

может быть построена последовательность операторных вершин (вход схемы допускается только в качестве вершины v_1) $v_1, v_2, \cdots, v_t$, и при этом каждой вершине v_i будет соответствовать именно оператор A_{j_i}. Заметим, что любому множеству $K(\mathfrak{M}, v)$ принадлежит пустая конфигурация Λ.

Пусть $x \in K(\mathfrak{M}, v)$; сопоставим x последовательность вершины $l(\mathfrak{M}, v, x) = v_1, v_2, \cdots, v_t$, построенную по формулам (1′), и вершину $v_{t+1} = (p(v_t, \Delta_t)$; о ней будем говорить, как о вершине, в которую приводит конфигурация. Если $x = \Lambda$, то $l(\mathfrak{M}, v, x) = v$ и $v_{t+1} = v$.

1.8. Пусть v_0 — вход схемы $\mathfrak{M}$, v^* — ее выход; обозначим через $K^*(\mathfrak{M})$ подмножество всех таких конфигураций множества $K(\mathfrak{M}, v_0)$, которые приводят в выход v^* схемы $\mathfrak{M}$.

Схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ назовем **эквивалентными**, если

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2);$$

отношение эквивалентности между схемами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будем записывать в виде $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_2$.

§ 2. Проблема эквивалентности схем алгоритмов

2.1. Каждая конфигурация x представляет собой слово в алфавите $A \times \Gamma$, если x представить в виде конкатенации слов y и z: $x=yz$, то y и z тоже будут конфигурациями. Пусть $x \in K(\mathfrak{M}, v)$ и $x=yz$; тогда

$$y \in K(\mathfrak{M}, v),$$
$$z \in K(\mathfrak{M}, v'),$$

где v' — вершина, в которую приводит конфигурация y. При этом конфигурации z и x приводят в одну и ту же вершину.

2.2. Полагаем, что фиксированное нами распределение сдвигов имеет ранг ε.

Лемма 1. *Пусть $x \in K(\mathfrak{M}, v)$, последовательность $l(\mathfrak{M}, v, x)$ содержит ξ попарно различных операторных вершин и $d[x] > \xi\varepsilon+1$; тогда конфигурация x представима в виде yzw с непустым z и такими y и w, что $yw \in K(\mathfrak{M}, v)$ и конфигурация yw приводит в ту же вершину и с тем же элементом Δ, что и конфигурация x.*

Доказательство. Так как длина $l(\mathfrak{M}, v, x)$ больше числа $\xi\varepsilon+1$ и $l(\mathfrak{M}, v, x)$ содержит ξ попарно различных операторных вершин, то найдется операторная вершина v', которая встречается в $l(\mathfrak{M}, v, x)$ больше, чем ε раз. Пусть последовательность индексов

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k \quad (k > \varepsilon) \tag{2}$$

фиксирует места всех вхождений вершины v' в $l(\mathfrak{M}, v, x)$. Если x имеет вид

$$\begin{matrix} \Delta_1 & \Delta_2 \cdots & \Delta_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} & A_{j_t} \end{matrix},$$

то последовательностью (2) определяется последовательность пар

$$(\Delta_{i_1-1}, \Delta_{i_1}), \ (\Delta_{i_2-1}, \Delta_{i_2}), \cdots (\Delta_{i_k-1}, \Delta_k); \tag{3}$$

в каждой паре, принадлежащей (3), первая компонента есть элемент, с которым мы вошли в вершину v', а вторая компонента есть элемент, с которым мы вышли из вершины v'. Каким бы ни был оператор A_m, сопоставленный вершине v', так как $\varepsilon_m \leqslant \varepsilon$, а $k > \varepsilon$, то в (2) найдутся такие пары ν и ν', где $1 \leqslant \nu < \nu' \leqslant k$, что

$$\Delta_{i_{\nu'}} \in s_m(\Delta_{i_\nu - 1}).$$

Легко проверить, что требования леммы будут удовлетворены, если слово z выбрать следующим образом:

$$z = \begin{matrix} \Delta_{i_\nu} & \Delta_{i_\nu+1} \cdots & \Delta_{i_{\nu'}-1} \\ A_{j_\nu} & A_{j_{i_\nu+1}} \cdots & A_{j_{\nu'-1}} \end{matrix}.$$

Лемма доказана.

2.3. Рассмотрим схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

Лемма 2. *Пусть $x \in K(\mathfrak{M}_1, v_1) \cap K(\mathfrak{M}_2, v_2)$, последовательности $l(\mathfrak{M}_1, v_1, x)$ и $l(\mathfrak{M}_2, v_1, x)$ содержат ξ_1 и соответственно ξ_2 попарно различных операторных вершин, и длина конфигурации x превосходит число $\xi_1\xi_2\varepsilon + 1$; тогда конфигурация x может быть представлена в виде yzw с непустым z и такими y и w, что $yw \in K(\mathfrak{M}_1, v_1) \cap K(\mathfrak{M}_2, v_2)$ и конфигурация yw в каждой из схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ приводит в ту же вершину и с тем же элементом Δ, что и конфигурация x.*

Доказательство леммы 2 в идейном отношении повторяет доказательство леммы 1; роль вершины v' здесь будет играть пара вершин (v_1', v_2'), где v_1' принадлежит схеме $\mathfrak{M}_1$, а v_2' — схеме $\mathfrak{M}_2$.

2.4. Введем обозначение

$$K_t^*(\mathfrak{M}) = \{x \in K^*(\mathfrak{M}) / d[x] \leqslant t\}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Если ранг распределения сдвигов есть ε, а схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеют соответственно ν_1 и ν_2 операторных вершин, то*

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \rightleftarrows K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2),$$

где $\tau = \nu_1\nu_2\varepsilon + \varepsilon \cdot \max(\nu_1, \nu_2) + 2$.

Доказательство. Импликация

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \to K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2)$$

очевидна.

Предположим, что утверждение

$$K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2) \to K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2)$$

неверно. Пусть имеются конфигурации, принадлежащие множеству $K^*(\mathfrak{M}_1)$ и не принадлежащие множеству $K^*(\mathfrak{M}_2)$. Найдем среди них конфигурацию с наименьшей длиной; пусть это будет x; ясно, что $d[x] > \tau$. В конфигурации x выделим максимальное по длине начало y, которое представляет собой конфигурацию, одновременно принадлежащую множествам $K(\mathfrak{M}_1, v_0')$ и $K(\mathfrak{M}_2, v_0'')$ (здесь v_0' и v_0'' — входы схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$), и запишем x в виде

$$x = yzw,$$

где $d[z] = 1$. Заметим, что если конфигурация y в схеме $\mathfrak{M}_2$ приводит в операторную вершину v'', то множеству $K(\mathfrak{M}_2, v'')$ не принадлежат ни конфигурация z, ни любое ее допустимое продолжение.

Убедимся в том, что $d[y] \leqslant \nu_1\nu_2\varepsilon + 1$. Действительно, в противном случае, применяя лемму 2, мы получим из конфигурации y конфигурацию y'; $x' = y'zw$ будет принадлежать множеству $K^*(\mathfrak{M}_1)$ и $d[x'] < d[x]$; но неравенство $d[x'] < \tau + 1$ невозможно, так как x' не может принадлежать множеству $K^*(\mathfrak{M}_2)$; вместе с тем, неравенство

$d[x'] > \tau + 1$ тоже невозможно, так как тогда мы войдем в противоречие с предположением о минимальности (по длине) конфигурации x.

Итак, $d[y] \leqslant \nu_1\nu_2\varepsilon + 1$; отсюда

$$d[w] = d[x] - d[y] - 1 > (\nu_1\nu_2\varepsilon + \varepsilon \max(\nu_1, \nu_2) + 2 - (\nu_1\nu_2\varepsilon + 1) - 1 =$$
$$= \varepsilon \max(\nu_1\nu_2) \geqslant \varepsilon\nu_1.$$

Следовательно, применима лемма 1 (недостающая единица компенсируется тем, что конфигурация w наверняка не содержит оператора A_0; согласно лемме, заменим конфигурацию w на w'; $x'' = yzw'$ принадлежит множеству $K^*(\mathfrak{M}_1)$ и $d[x''] < d[x]$; существование конфигурации x'' приводит к противоречию так же, как и существование конфигурации x'.

Теорема доказана.

§ 3. Схемы алгоритмов над интерпретацией

3.1. Будем говорить, что на множествах Γ и A задана интерпретация

$$J = (M, \{\varphi_i\}, \{M_\Delta\}),$$

если

1) дано множество M элементов произвольной природы;

2) каждому оператору A_i, $i=1, 2, \cdots, n$, сопоставлено отображение φ_i множества M в себя;

3) каждому элементу $\Delta \in \Gamma$ сопоставлено подмножество $M_\Delta \subseteq M$, и эти подмножества в совокупности удовлетворяют двум требованиям

$$\forall_{\Delta, \Delta' \in \Gamma} [\Delta \neq \Delta' \rightarrow M_\Delta \cap M_{\Delta'} = \varnothing],$$

$$\bigcup_{\Delta \in \Gamma} M_\Delta = M.$$

Задание интерпретации J индуцирует отображение δ множества M в множество Γ, элементу $m \in M$ соответствует в Γ тот единственный элемент Δ, который определяется отношением $m \in M_\Delta$.

Интерпретацию J назовем допустимой для распределения сдвигов $S = \langle s_1, s_2, \cdots, s_n \rangle$, если отображения φ_i, $i=1, 2, \cdots, n$, обладают свойством

$$\forall_{m \in M} [m \in M_\Delta \rightarrow \varphi_i(m) \in \bigcup_{\Delta' \in s_i(\Delta)} M_{\Delta'}].$$

Множество всех интерпретаций, допустимых для распределения сдвигов S, обозначим через $I(S)$.

3.2. Пусть $\mathfrak{M}$—схема алгоритма над алфавитами A и Γ; схему $\mathfrak{M}$, рассматриваемую при распределении сдвигов S и интерпретации $J \in I(S)$, назовем интерпретированной и будем обозначать через $J\mathfrak{M}$.

Опишем алгоритм выполнения интерпретированной схемы $J\mathfrak{M}$ для $m \in M$. Он состоит в путешествии по схеме $\mathfrak{M}$, которое начинается с того, что с элементом m мы движемся в схеме $\mathfrak{M}$ по дуге, исходящей из ее входа. Пусть в процессе путешествия по схеме $\mathfrak{M}$

мы с элементом m' попали на дугу, ведущую в вершину v'. Если v'—выход схемы, то процесс путешествия по $\mathfrak{M}$ закончен; если v' — операторная вершина и ей сопоставлен оператор A_i, то выйдем из вершины v' по единственной исходящей из нее дуге и отправимся дальше с элементом $\varphi_i(m')$; если же v'—предикатная вершина, то из вершины v' мы выйдем с тем же элементом m', выбирая из двух исходящих из v' дуг одну по правилу: пусть $\alpha \subseteq \Gamma$ — сопоставленное вершине v' множество; если $\delta(m') \in \alpha$, то выберем отмеченную дугу, в противном случае—неотмеченную.

Маршрут путешествия по схеме $J\mathfrak{M}$ однозначно определяется выбором исходного элемента m и может быть зафиксирован последовательностью пройденных операторных вершин, включающей в себя вход и, может быть, выход

$$v_1, v_2, \cdots, v_l, \cdots. \tag{4}$$

Каждому началу $v_1, \cdots, v_l$ маршрута (4), где v_l — вершина, отличная от выхода схемы $\mathfrak{M}$, сопоставим так называемую *i*-конфигурацию

$$\begin{matrix} m=m_1 & m_2 & \cdots & m_{l-1} & m_l \\ A_0 & A_{j_2} & \cdots & A_{j_l} & \end{matrix}, \tag{5}$$

выписывая в нижней строке операторы, сопоставленные вершинам v_1, $v_2, \cdots, v_l$, а в верхней строке— элементы множества M, с которыми мы выходим из вершин $v_1, \cdots, v_l$. Если вершина v_{l+1} представляет собой выход схемы $\mathfrak{M}$, то *i*-конфигурацию (5) будем называть конечной, обозначать через $(J\mathfrak{M}, m)$, а элемент m_l будем рассматривать как результат применения схемы $\mathfrak{M}$ к m и записывать в виде $J\mathfrak{M}(m)$.

Сдвоенную последовательность

$$\begin{matrix} \delta(m_1) & \delta(m_2) \cdots \delta(m_l) \\ A_0 & A_{j_2} \cdots A_{j_l} \end{matrix},$$

полученную из конечной *i*-конфигурации (5), условимся обозначать через $\delta(J\mathfrak{M}, m)$. Легко видеть, что $\delta(J\mathfrak{M}, m)$ есть *i*-конфигурация, принадлежащая множеству $K^*(\mathfrak{M})$.

3.3. Интерпретированные схемы $J\mathfrak{M}_1$ и $J\mathfrak{M}_2$ назовем эквивалентными ($J\mathfrak{M}_1 \sim J\mathfrak{M}_2$), если

$$\underset{m \in M}{\forall} [J\mathfrak{M}_1(m) = J\mathfrak{M}_2(m)].$$

Легко видеть, что

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \rightarrow \underset{J \in I(S)}{\forall} [J\mathfrak{M}_1 \sim J\mathfrak{M}_2].$$

Пусть R — некоторый класс схем алгоритмов. Интерпретацию $J^* \in I(S)$ назовем универсальной для класса R, если для любых схем $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in R$ справедливо утверждение

$$J^*\mathfrak{M}_1 \sim J^*\mathfrak{M}_2 \rightarrow K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2).$$

3.4. Условимся называть мощностью интерпретации $J=(M, \{\varphi_i\}, \{M_\Delta\})$ мощность множества M.

Теорема 2. *Существует счетная интерпретация, универсальная для всех схем, построенных в алфавитах A и Γ и рассматриваемых при распределении сдвигов S.*

Доказательство. Рассмотрим множество K^* всех конфигураций, начинающихся оператором A_0 (распределение сдвигов S предполагается фиксированным). Легко видеть, что для всякой схемы

$$K^*(\mathfrak{M}) \subseteq K^*.$$

По каждой конфигурации $x \in K^*$ построим конечную интерпретацию $J^x=(M^x, \{\varphi_i^x\}, \{M_\Delta^x\})$, обладающую свойством: множеству M^x принадлежит элемент m_x, такой что для всякой схемы $\mathfrak{M}$

$$x \in K^*(\mathfrak{M}) \rightarrow \delta(J^x \mathfrak{M}, m_x) = x.$$

Отобразим множество Γ взаимно однозначным образом на некоторое множество $\overline{M}$; элемент $\overline{m} \in \overline{M}$, сопоставленный в этом отображении элементу $\Delta \in \Gamma$, будем обозначать через $\overline{m}(\Delta)$, а Δ, соответствующий элементу $\overline{m}$, через $\Delta(\overline{m})$.

В каждом из множеств $s_i(\Delta)$, $\Delta \in \Gamma$ $i=1, 2, \cdots, n$, выберем по одному представителю и обозначим его через $\psi_i(\Delta)$.

Пусть рассматриваемая нами конфигурация x имеет вид:

$$x = \begin{matrix} & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdots & \Delta_{t-1} & \Delta_t \\ A_0 & A_{l_1} & \cdots & A_{l_{t-1}} & A_{l_t} & \end{matrix}; \quad t > 0,$$

возьмем t-элементное упорядоченное множество

$$\overline{M}^x = \{m_1, m_2, \cdots, m_t\},$$

такое, что $\overline{M}^x \cap \overline{M} = \varnothing$; i-ому элементу $m_i \in \overline{M}^x$ сопоставим i-ый элемент Δ_i верхней строки конфигурации x $(i=1, \cdots, t)$; в полученном отображении множества $\overline{M}^x$ в множество Γ (обозначим его через δ^x) найдем прообраз элемента $\Delta \in \Gamma$; пусть это будет $\overline{M}_\Delta^x$.

Положим

$$M^x = \overline{M}^x \cup \overline{M},$$

$$M_\Delta^x = \overline{M}_\Delta^x \cup \{\overline{m}(\Delta)\}, \ \Delta \in \Gamma.$$

Легко видеть, что

$$\forall_{\Delta_1 \Delta_2 \in \Gamma} [\Delta_1 \neq \Delta_2 \rightarrow M_{\Delta_1}^x \cap M_{\Delta_2}^x = \varnothing],$$

$$\bigcup_{\Delta \in \Gamma} M_\Delta^x = M^x.$$

Для построения отображения $\varphi_i^x\ M^x \rightarrow M^x$ $(i=1, \cdots, n)$ рассмотрим последовательность

$$a_x = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & \cdots & m_{t-1} & m_t \\ A_0 & A_{l_1} & \cdots & A_{l_{t-1}} & A_{l_t} & \end{matrix},$$

полученную из конфигурации x заменой Δ_k на m_k, $k=1,\cdots,t$. Выберем из α_x все фрагменты вида

$$\begin{matrix} m_l & m_{l+1} \\ & A_l \end{matrix};$$

для элементов m_l, входящих в такие фрагменты, полагаем

$$\varphi_i^x(m_l) = m_{l+1},$$

если же $m \in M^*$ не совпадает ни с одним из перечисленных элементов m_l, то полагаем

$$\varphi_i^x(m) = \begin{cases} \overline{m}(\psi_i(\delta^x(m))), & m \in \overline{M}^x \\ \overline{m}(\psi_i(\Delta(m))), & m \in \overline{M} \end{cases}.$$

Допустимость интерпретации J^x для распределения сдвигов S следует из ее построения. Остановимся на свойствах этой интерпретации.

Пусть $\mathfrak{M}$—произвольная схема и при выполнении $J^x\mathfrak{M}$ для элемента $m \in \overline{M}^x$ получена конечная i-конфигурация $(J^x\mathfrak{M}, m)$. Тогда, если последний элемент верхней строки в $(J^x\mathfrak{M}, m)$ принадлежит множеству $\overline{M}^x$, то и все элементы верхней строки $(J^x\mathfrak{M}, m)$ принадлежат множеству $\overline{M}^x$ и их индексы составляют строго возрастающую последовательность.

Если же схема $\mathfrak{M}$ такова, что $x \in K^*(\mathfrak{M})$, то

$$(J^x\mathfrak{M}, m_1) = \alpha_x,$$

$$J^x\mathfrak{M}(m_1) = m_t,$$

$$\delta(J^x\mathfrak{M}, m_1) = x,$$

т. е. элемент m_1 можно взять как m_x.

Итак, каждой конфигурации $x \in K^*$ мы сопоставили интерпретацию J^x. Будем предполагать, что выбор множеств $\overline{M}^x$ был проведен следующим образом:

$$\forall_{x,\,x' \in K^*}\ [x \neq x' \to \overline{M}^x \cap \overline{M}^{x'} = \varnothing];$$

и из интерпретаций J^x, $x \in K^*$ синтезируем искомую интерпретацию J^*,

$$M^* = \bigcup_{x \in K^*} M^x,$$

$$M_\Delta^* = \bigcup_{x \in K^*} M_\Delta^x;\ \Delta \in \Gamma,$$

$$\varphi_i^* = \bigcup_{x \in K^*} \varphi_i^x,$$

здесь φ_i^* и φ_i^x отождествляются со своими графиками.

Интерпретация J^* является допустимой для распределения сдвигов S и обладает свойством: какими бы ни были схема $\mathfrak{M}$ и элемент $m \in M^x$,

$$(J^* \mathfrak{M}, m) = (J^x \mathfrak{M}, m).$$

Счетность интерпретации J^* не вызывает сомнений. Покажем, что для любых схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$

$$J^*\mathfrak{M}_1 \sim J^*\mathfrak{M}_2 \to K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2).$$

Пусть $x \in K^*(\mathfrak{M}_1)$; тогда $x \in K^*(\mathfrak{M}_2)$. Действительно

$$J^* \mathfrak{M}_1(m_x) = J^* \mathfrak{M}_2(m_x), \tag{6}$$

так как i-конфигурация $(J^*\mathfrak{M}_1, m_x)$ заканчивается элементом множества $\overline{M}^x$, то равенство (6) влечет за собой равенство

$$(J^* \mathfrak{M}_1, m_x) = (J^* \mathfrak{M}_2, m\ );$$

последнее означает, что

$$x = \partial(J^*\mathfrak{M}_1, m_x) = \partial(J^* \mathfrak{M}_2, m_x) \in K^*(\mathfrak{M}_2).$$

Теорема доказана.

3.5. Теорема 3. *Каким бы ни было распределение сдвигов S, не существует конечной интерпретации J, которая была бы универсальной для всех схем над A и Γ при этом распределении сдвигов.*

Доказательство. Предположим, что J—некоторая конечная интерпретация, и построим такие схемы $\mathfrak{M}_1^0$ и $\mathfrak{M}_2^0$, что

$$(J\mathfrak{M}_1^0 \sim J\mathfrak{M}_2^0) \wedge (K^*(\mathfrak{M}_1^0) \neq K^*(\mathfrak{M}_2^0)).$$

Пусть $J = (M, \{\varphi_i\}, \{M_\Delta\})$; рассмотрим отображение $\varphi_1 \colon M \to M$, для каждого элемента $m \in M$ построим последовательность

$$m = \varphi_1^0(m),\ \varphi_1^1(m),\ \varphi_1^2(m), \cdots, \varphi_L^k(m), \cdots, \tag{7}$$

здесь $\varphi_1^k(m) = \underbrace{\varphi_1\varphi_1 \cdots \varphi_1}_{k\ \text{раз}}(m)$, $k > 0$. В силу конечности множества M последовательность (7) будет периодической с некоторым предпериодом; пусть $j(m) > 0$ и $l(m) > 1$—наименьшие из чисел, для которых

$$\varphi_1^{j(m)}(m) = \varphi_1^{j(m)+l(m)}(m).$$

Тогда число $n_1 = \max\limits_{m \in M} j(m)$ обладает свойством

$$\mathop{\forall}_{m \in M} [\varphi_1^{n_1}(m) = \varphi_1^{n_1 + l(m)}(m)],$$

а число n_2, равное наименьшему общему кратному всех чисел множества $\{l(m),\ m \in M\}$—свойством

$$\mathop{\forall}_{m \in M} [\varphi_1^{n_1}(m) = \varphi_1^{n_1 + kn_2}(m)],\ k = 1, 2, \cdots. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь схемы

$$\mathfrak{M}_i^\circ\ \circ \to \underbrace{\boxed{A_1} \to \boxed{A_1} \to \cdots \to \boxed{A_1}}_{} \to \circ\ ,\ i = 1, 2,$$

N_i — операторных вершин,

где $N_1 = n_1 + n_2$, $N_2 = n_1 + 2n_2$. Легко видеть, что

$$K^*(\mathfrak{M}_1^0) \cap K^*(\mathfrak{M}_2^0) = \varnothing;$$

вместе с тем, на основании (8)

$$\underset{m \in M}{\forall} [J\mathfrak{M}_1^0(m) = J\mathfrak{M}_2^0(m)].$$

Теорема доказана.

3.6. Обозначим через $R^{(\nu)}$ множество схем, содержащих не более чем ν операторных вершин каждая.

Теорема 4. *Каким бы ни было натуральное ν и распределение сдвигов S, существует конечная интерпретация J_ν^*, универсальная для схем класса $R^{(\nu)}$ при распределении сдвигов S.*

Доказательство. Обозначим через ε ранг распределения сдвигов S; и пусть $\tau = \nu^2\varepsilon + \nu\varepsilon + 2$; тогда по теореме 1 для любых схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ из R^ν

$$K^*(\mathfrak{M}_1) = K^*(\mathfrak{M}_2) \leftrightarrows K_\tau^*(\mathfrak{M}_1) = K_\tau^*(\mathfrak{M}_2).$$

Рассмотрим множество

$$K_\tau^* = \{x \in K^* / d[x] \leqslant \tau\}.$$

Интерпретация J_τ^* строится совершенно так же как интерпретация J^* в доказательстве теоремы 2, только в нашем случае учитываются не все конфигурации x, а лишь принадлежащие множеству K_τ^*, иными словами:

$$M_\tau^* = \bigcup_{x \in K_\tau^*} M^x,$$

$$M_{\tau,\Delta}^* = \bigcup_{x \in K_\tau^*} M_\Delta^x, \quad \Delta \in \Gamma,$$

$$\varphi_{\tau, i}^* = \bigcup_{x \in K_\tau^*} \varphi_i^x, \quad i = 1, 2, \cdots n;$$

число элементов множества K_τ^* конечно, отсюда и универсальная интерпретация J_τ^* будет конечной.

Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 12.VII. 1971

Գ. Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Հաշվեկանոնների սխեմաների ունիվերսալ մեկնարկներ *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են Յանովի օպերատոր սխեմաների ընդհանրացումը հանդիսացող՝ հաշվեկանոնների (ալգորիթմների) սխեմաներ։ Սխեմայի տարրերի մեկնարկումը (ինտերպրետացիան) այն վեր է ածում հաշվեկանոնի, վերջինս բնորոշվում է իրենով իրագործվող ֆունկցիայով։ Հնարավոր են սխեմայի տարբեր մեկնարկումներ։ Դրանցից ունիվերսալ է կոչվում հետևյալ հատկությամբ օժտվածը՝ երկու սխեմաներով իրագործվող ֆունկցիաների՝ սրանց ունիվերսալ մեկնարկման դեպքում համընկնելը բխեցնում է այդ նույն սխեմաներով իրագործվող ֆունկցիաների համընկնումը նաև կամայական այլ մեկնարկման դեպքում։ Տրված մեկնարկի ունիվերսալ լինելու հատկությունը կախված է նրանից, թե սխեմաների ինչ դաս է դիտարկվում։ Աշխատության մեջ տրվում են հաշվեկանոնների բոլոր սխեմաների համար ունիվերսալ՝ թվարկելի մեկնարկի և յուրաքանչյուրը կանխադիր թվից ոչ ավել օպերատորներ օգտագործող սխեմաների համար ունիվերսալ՝ վերջավոր մեկնարկների կառուցման եղանակներ. ինչպես նաև ապացուցվում է բոլոր սխեմաների համար ունիվերսալ՝ վերջավոր մեկնարկի չգոյությունը։

G. N. PETROSSIAN. *The universal interpretation of algorithmic schemes*
(summary)

The article is on the algorithmic schemes representing a generalization of Yanov's operator schemes. The interpretation of the elements of the scheme converts the latter into an algorithm characterized by the selfrealisable function. The interpretation is called universal if coincidence of functions for two schemes under universal interpretation induces coincidence under any other interpretation. Some ways of constructing countable interpretations for general schemes and finite interpretations for schemes with restrictions are proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. И. Янов.* О логических схемах алгоритмов, сб. „Проблемы кибернетики", вып. 1, 1958, 57—127.
2. *Р. И. Подловченко, Г. Н. Петросян, В. Е. Хачатрян.* Интерпретации схем алгоритмов и различные типы отношений эквивалентности между схемами, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", VII, № 2, 1972, 140—151.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 3, 1972 Математика

С. Г. РУБАНОВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. II

3°. Теперь мы можем приступить к вычислению индекса оператора L. Для этого нам понадобится еще одно функциональное пространство.

Определение 2. Пространство $B(l_1)$ *определяется, как множество всех функций* $u \in L_2(l_1)$, *для которых конечна норма*

$$\|u\|^2_{B(l_1)} = \|u\|^2_{L_2(l_1)} + \|D^2 Pu\|^2_{L_2(l_1)}.$$

Легко показывается, что это пространство полное. Следующая лемма играет основную роль при вычислении индекса оператора L.

Лемма 11. *Пусть даны операторы*

$$L = \gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha E,$$
$$L_1 = \gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha_1 E,$$

где $\alpha_1 \in C^\infty(l_1, l_2)$, *функция* $\alpha(t)$ *ограничена*, $\inf_{t \in l} |\alpha_1(t)| > 0$, *а разность* $\alpha(t) - \alpha_1(t)$ *непрерывна в точках* t_1 *и* t_2 *и равна в них нулю. Тогда, если для оператора* L_1 *выполнены условия* (A), *то*

$$LR = \gamma_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1}Q\right) + \gamma_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1}P\right) + K,$$

где R: $L_2(l) \to M(l_1, l_2)$ *есть регуляризующий оператор для* L_1, *а оператор* K: $L_2(l) \to L_2(l)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть дано разбиение единицы

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i(t) \equiv 1,\ 0 \leqslant \varphi_i,\ \varphi_i \in C^\infty(l),\ i = 1, 2, 3,$$

$\operatorname{supp} \varphi_1 \subset l_1$, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset l_2$, а функция $\varphi_3(t)$ отлична от нуля лишь на множестве $\{t\colon t \in l, |t - t_1| < \varepsilon$ или $|t - t_2| < \varepsilon\}$.

Рассмотрим оператор R_1, определяемый формулой

$$(R_1 v)(t) = \int_{t_1}^{t} (Fv)(t_0)\, dt_0 - \frac{1}{\alpha_1(t)} (Qv)(t),$$

где интеграл берется в положительном направлении по контуру l. Используя формулы:

$$P^2 = P,\ Q^2 = -Q,\ PQ = QP = 0,\ DP = PD,\ DQ = QD$$

и леммы 2 и 3, получим

$$L_1\varphi_1 R_1 \simeq \varphi_1 E.$$

(Напомним, что знак „$\simeq$" понимается как равенство с точностью до вполне непрерывного оператора).

Из лемм 2 и 3 следует $L_1\,\varphi_1 R \simeq \varphi_1\,L_1\,R$. Но $L_1\,R \simeq E$, поэтому $L_1\varphi_1 R \simeq \varphi_1 E$. Таким образом

$$L_1\varphi_1 R_1 \simeq L_1\varphi_1 R.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор R, получим

$$\varphi_1 R \simeq \varphi_1 R_1,\ L\varphi_1 R \simeq L\varphi_1 R_1 \simeq \varphi_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1}Q\right).$$

Аналогично получаем

$$L\varphi_2 R \simeq \varphi_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1}P\right),$$

согласно леммам 2 и 3 имеем

$$L\varphi_3 R = L_1\varphi_3 R + (L - L_1)\,\varphi_3 R \simeq \varphi_3 E + (\alpha - \alpha_1)\,\varphi_3 R.$$

Таким образом

$$LR = \sum_{i=1}^{3} L\varphi_i R \simeq \varphi_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1}Q\right) + \varphi_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1}P\right) + \varphi_3 E + (\alpha - \alpha_1)\,\varphi_3 R.$$

Замечая, что $E = P - Q$, $\chi_1 - \varphi_1 E = \varphi_3\chi_1$, $\chi_2 - \varphi_2 E = \varphi_3\chi_2$, получим

$$LR \simeq \chi_1\left(P - \frac{\alpha}{\alpha_1}Q\right) + \chi_2\left(-Q + \frac{\alpha}{\alpha_1}P\right) \simeq \chi_1\left(\frac{\alpha}{\alpha_1} - 1\right)\varphi_3 Q +$$
$$+ \chi_2\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right)\varphi_3\,P + (\alpha - \alpha_1)\,\varphi_3 R.$$

Так как оператор в правой части последнего равенства по норме стремится к нулю, когда носитель $\operatorname{supp}\varphi_3$ неограниченно уменьшается, то левая часть есть вполне непрерывный оператор (аппроксимируется с любой точностью вполне непрерывными операторами). Лемма 11 доказана.

Нам понадобится также следующая

Лемма 12. *Пусть функция* $\omega \in L_2(-\infty, \infty)$, $\operatorname{supp}\omega \subset [0, \infty)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\chi_+\,(D^2 P\omega - c^2\omega) = f_+,$$

где $f_+ \in L_2(-\infty, \infty)$, *а константа* $c^2 \overline{\in} (-\infty, 0]$. *Тогда*

$$\|\omega\|_{L_2(-\infty,\infty)} \leqslant \text{const}\,\|f_+\|_{L_2(-\infty,\infty)},$$

кроме того $DP\omega \in L_2(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Имеет место тождество

$$D^2 P\omega - c^2\omega = f_+ + f_-,$$

где $f_- = D^2 P\omega - c^2\omega - f_+$; очевидно $\operatorname{supp} f_- \subset (-\infty, 0]$.

Пусть волна сверху означает преобразование Фурье. Имеем

$$-\xi^2 \widetilde{P\omega}(\xi) - c^2\tilde{\omega}(\xi) = \tilde{f}_+(\xi) + \tilde{f}_-(\xi).$$

Существует (см. Г. Е. Шилов, [6]) аналитическая вне действительной оси функция $\Phi(z)$ такая, что существуют почти всюду на действительной оси пределы $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$, когда $z \to \xi$ по некасательному к действительной оси контуру соответственно из верхней и нижней полуплоскости. Причем

$$\Phi^+(\xi) = -\tilde{\omega}(\xi), \quad \Phi^-(\xi) = \tilde{f}_-(\xi)$$

и

$$|\Phi(z)| \leqslant \text{const}\, \frac{(|z|+1)^2}{\sqrt{|\text{Im}\, z|}}.$$

Учитывая формулу

$$\widetilde{P\omega} = \chi_- \tilde{\omega},$$

получаем краевую задачу

$$(\xi^2+c^2)(\chi_- \Phi^+)(\xi) + c^2(\chi_+ \Phi^+)(\xi) = \tilde{f}_+(\xi) + \Phi^-(\xi). \tag{22}$$

Очевидно, можно потребовать, чтобы

$$\Phi^+ \in L_2(-\infty, \infty), \quad |\Phi(z)| \leqslant \text{const}\, \frac{(1+|z|)^3}{\sqrt{|\text{Im}\, z|}}. \tag{22a}$$

Одним из решений однородной задачи (22) будет

$$\Phi_0(z) = \exp\left(\frac{z+i}{2\pi i}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-\xi+ic)}{(\xi+i)(\xi-z)} d\xi + \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-\xi-ic)}{(\xi+i)(\xi-z)} d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{\infty} \frac{\ln c_2\, d\xi}{(\xi+i)(\xi-z)}\right)\right).$$

В этом можно убедиться с помощью формул Сохотского-Племеля. Из формул (10), (12), (13) § 1 получаем

$$|\Phi_0(z)| = |z|^{\varphi(z)\left(-\frac{\arg z}{\pi} - \frac{\arg c^2}{2\pi}\right)} \exp(g(z)), \tag{23}$$

где функция $g(z)$ ограничена, а

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & |z| < 1 \\ 1, & |z| > 1 \end{cases}.$$

Если $\Phi(z)$ есть решение однородного уравнения (22), удовлетворяющее условиям (22a), то

$$\frac{\Phi^+}{\Phi_0^+} = \frac{\Phi^-}{\Phi_0^-}.$$

Из (22а) и (23) имеем

$$\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}\Big/(|\xi|+1)\in L_2(-\infty,\infty),\ \left|\frac{\Phi(z)}{\Phi_0(z)}\right|\leqslant \text{const}\,\frac{(1+|z|)^4}{\sqrt{|\operatorname{Im} z|}},$$

так что к функции $\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}$ можно применить теорему Винера-Пэли (см. Л. Хермандер, [7]). Отсюда сразу следует, что

$$\Phi^+(\xi)=P_4(\xi)\,\Phi_0^+(\xi),$$

где P_4 есть полином, степени не выше четырех. Но ни одна функция такого вида не принадлежит $L_2(-\infty,\infty)$. Таким образом, ненулевых решений задачи (22), удовлетворяющих условиям (22а) не существует.

Решением неоднородной задачи (22) будет

$$\Phi(z)=\frac{\Phi_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f_+}(\xi)\,d\xi}{\Phi_0^-(\xi)(\xi-z)}.$$

Действительно, имеем

$$\frac{1}{\Phi_0^-(\xi)}=g_1(\xi)(|\xi|+1)^\beta,$$

где функция $g_1(\xi)$ ограничена, а $\beta=\frac{\arg c^2}{2\pi}$. Поэтому (см. Б. В. Хведелидзе, [5]) существуют почти всюду на действительной оси $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-+(\xi)$, и

$$\Phi^+(\xi_0)=\frac{\Phi_0^+(\xi_0)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f_+}(\xi)\,g_1(\xi)\,(|\xi|+1)^\beta\,d\xi}{\xi-\xi_0}+\frac{\Phi^+(\xi_0)}{\Phi_0^-(\xi_0)}\,\frac{\overline{f_+}(\xi)}{2}.$$

Так как $|\Phi_0^+(\xi_0)(|\xi|+1)^\beta|\leqslant\text{const}$, то

$$\|\omega\|_{L_2(-\infty,\infty)}=\|\Phi^+\|_{L_2(-\infty,\infty)}\leqslant\text{const}\,\|f_+\|_{L_2(-\infty,\infty)}$$

(см. Б. В. Хведелидзе, [5]) и

$$\overline{\overline{DP\omega}}(\xi)=i\xi\,(\chi_-\Phi^+)(\xi)\in L_2(-\infty,\infty).$$

Лемма 12 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 13. *Пусть функция* $\omega\in L_2(-\infty,\infty)$, $\operatorname{supp}\omega\subset[0,\infty)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\chi_+(D^2Q\omega+c^2\omega)=f_+,$$

где $f_+\in L_2(-\infty,\infty)$, *а константа* $c^2\overline{\in}(-\infty,0)$. *Тогда*

$$\|\omega\|_{L_2(-\infty,\infty)}\leqslant\text{const}\,\|f_+\|_{L_2(-\infty,\infty)}$$

и

$$DQ\omega\in L_2(-\infty,\infty).$$

Пусть теперь контур l есть окружность радиуса R, начало отрезка l_1 $t_1=-Ri$, конец—$t_2=Re^{i\psi_2}$, где $-\frac{\pi}{2}<\psi_2\leqslant\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим на окружности l оператор

$$L_R = \chi_1 (DP + cP - c^2 Q) + \chi_2 (DQ - cQ + P),$$

а на дуге l_1 оператор $M_R = D^2 P - c^2 E$, который отображает пространство $B(l_1)$ (см. определение 2) в $L_2(l_1)$. Будем предполагать, что для оператора L_R выполнены условия (A).

Теорема 2. *Размерности ядра и коядра операторов M_R и L_R совпадают.*

Для доказательства этой теоремы докажем следующие леммы.

Лемма 14. *Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ есть базис коядра оператора L_R. Тогда функции $\chi_1\varphi_1, \chi_1\varphi_2, \cdots, \chi_1\varphi_n$ линейно независимы.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существуют константы $a_1, a_2, \cdots, a_n$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_1 \varphi_i = 0.$$

Положим $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t)$. Пусть $\varphi \in C^\infty(l)$—произвольная функция, равная нулю на отрезке l_1.

Подберем функцию $\psi \in C^\infty(l)$, равную нулю на отрезке l_2, так чтобы

$$\int_l (\varphi(t) + \psi(t))\, e^{-ct}\, dt = 0.$$

Положим

$$u_0(t) = (P(\varphi + \psi))(t) + Q\left(e^{ct} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-c\tau} \quad (\varphi(\tau) + \psi(\tau))\, d\tau\right).$$

Из формул

$$P^2 = P,\ Q^2 = -Q,\ PQ = QP = 0,\ DP = PD,\ DQ = QD$$

следует, что $\chi_2 L_R u_0 = \varphi$.

Так как уравнение $L_R u = L_R u_0$ разрешимо, то

$$\int_l \xi(t)\, (\overline{L_R u_0)(t)}\, |dt| = 0.$$

Но

$$\int_l \overline{(L_R u_0)(t)}\ \xi(t)\, |dt| = \int_l \xi(t)\ \overline{\varphi(t)}\, |dt|.$$

Функция $\varphi(t)$ произвольна, поэтому $\xi(t) \equiv 0$, что невозможно, так как функции $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ линейно независимы па контуре l.

Лемма 15. *Пусть $f \in L_2(l)$ и $\operatorname{supp} f \subset l_1$. Уравнение*

$$L_R u = f \tag{24}$$

тогда и только тогда разрешимо, когда разрешимо уравнение

$$M_R v = f. \tag{25}$$

Размерности ядер операторов L_R и M_R совпадают.

Доказательство. Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция всюду, кроме контура l, исчезающая на бесконечности. И пусть почти всюду на контуре l существуют пределы $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ функции $\Phi(z)$, когда z стремится к $t \in l$ соответственно из области $\{z: |z| < R\}$ и из области $\{z: |z| > R\}$. Кроме того, на дуге l_1 существует почти всюду $(\Phi')^+(t)$, а на дуге l_2 — $(\Phi')^-(t)$, и на $\Phi(z)$ наложено граничное условие на контуре l

$$\begin{cases} (\Phi' + c\Phi)^+(t) - c^2\Phi^-(t) = f(t), & t \in l_1, \\ (\Phi' - c\Phi)^-(t) + \Phi^+(t) = 0, & t \in l_2, \\ \Phi^+ \in L_2(l), \ \Phi^- \in L_2(l), \ \Phi(\infty) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Тогда задачи (24) и (26) эквивалентны, и соотношения

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{u(t)\,dt}{t - z}, \quad u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$$

устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями задач (24) и (26) (см. И. И. Привалов, [4]). Точно так же уравнение (25) эквивалентно граничной задаче на дуге l_1

$$\begin{cases} (\Psi'' - c^2\Psi)^+(t) + c^2\Psi^-(t) = f(t) \\ \Psi^+ \in L_2(l_1), \ \Psi^- \in L_2(l_1), \ \Psi(\infty) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $\Psi(z)$ есть аналитическая в области $C \setminus l_1$ функция, исчезающая на бесконечности, а $\Psi^+(t)$ и $\Psi^-(t)$ — пределы функции $\Psi(z)$ на дуге l_1 соответственно из области $\{z: |z| < R\}$ и $\{z: |z| > R\}$,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1} \frac{v(t)\,dt}{t - z}, \ dt = \Psi^+(t) - \Psi^-(t).$$

Пусть $\Phi(z)$ есть решение задачи (26). Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} -\Phi(z), & |z| < R \\ \Phi'(z) - c\Phi(z), & |z| > R. \end{cases}$$

Из (26) видно, что эту функцию можно аналитически продолжить на дугу l_1. В области $|z| > R$

$$\Phi_1(z) = \Phi'(z) - c\Phi(z).$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(z) = e^{cz}\left(\int_{z_0}^{z} e^{-ct}\,\Phi_1(t)\,dt + \text{const}\right).$$

По этой формуле функцию $-\Phi(z)$ можно продолжить на всю область аналитичности функции $\Phi_1(z)$ (область $C \setminus l_1$). Обозначим это продолжение через $\Psi(z)$. Имеем

$$\Psi'(z) - c\Psi(z) = \Phi(z), \ |z| < R,$$

$$\Psi(z) = -\Phi(z), \ |z| > R.$$

Так что функция $\Psi(z)$ исчезает на бесконечности, и, подставляя эти формулы в (26), легко убеждаемся, что $\Psi(z)$ удовлетворяет краевому условию (27). Построенное соответствие однозначное, так как, если $\Psi(z)=0$, то и $\Phi(z)=0$. Обратно, если $\Psi(z)$ удовлетворяет условию (27), то, полагая

$$\Phi(z) = \begin{cases} c\Psi(z) - \Psi'(z), & |z| < R \\ -\Psi(z), & (z) > R, \end{cases}$$

получаем решение задачи (22). Нужно лишь проверить, что

$$\Phi^+ = (c\Psi - \Psi')^+ \in L_2(l), \text{ или, что } (\Psi')^+ \in L_2(l).$$

Представим $\Psi(z)$ в виде $\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} \frac{v(t)\,dt}{t-z}$, где функция $v(t)$ есть решение уравнения (25). Тогда $(\Psi')^+ = (\Psi^+)' = DPv$ (см. И. И. Привалов, [4]). Так как

$$\chi_1 D^2 v \in L_2(l) \text{ и } \operatorname{supp} v \subset l \setminus l_2,$$

то достаточно проверить, что $DPv \in L_2$ в окрестности точек t_1 и t_2. Пусть функция $\varphi \in C^\infty(l)$ отлична от нуля лишь на интервале

$$|t_1 - t| < \varepsilon \text{ и } \varphi(t) = 1 \text{ при } |t_1 - t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для некоторого малого числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$(Pv)(t_0) - (P\varphi v)(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1} \frac{(1-\varphi(t))\,v(t)\,dt}{t-t_0}, \ |t_1 - t_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда сразу видно, что если $DP\varphi v \in L_2$ в окрестности точки t_1, то и $DPv \in L_2$ в окрестности точки t_1.

Возьмем функцию $g \in C^\infty[-1, 1]$ взаимно однозначно, без изменения направления обхода отображающую отрезок $[-1, 1]$ на некоторую окрестность на контуре l точки t_1. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало то носитель $\operatorname{supp}\varphi$ будет содержаться внутри образа $\operatorname{Im} g$. Полагаем

$$g(0) = t_1, \ g'(x) \neq 0, \ x \in [-1, 1].$$

В силу леммы 4 нам достаточно доказать, что $DP(\varphi(g)\,v(g)) \in L_2(-1, 1)$. Пусть функция $w(x)$ есть продолжение функции $\varphi(g(x))\,v(g(x))$ нулем на интервал $(-\infty, \infty)$. Тогда, так как $\varphi(g(x))=0$ в окрестности точки 1, в силу леммы 4 будем иметь

$$w \in L_2(-\infty, \infty), \ \chi_+ D^2 P w \in L_2(-\infty, \infty), \ \operatorname{supp} w \subset [0, \infty).$$

В частности

$$\chi_+ (D^2 P - E)\, w = \tau \in L_2(-\infty, \infty).$$

Из леммы 12 следует, что

$$DPw \in L_2(-\infty, \infty).$$

Для окрестности точки t_2 доказательство аналогичное.

Лемма 15 доказана.

Из лемм 15 и 14 легко следует теорема 2.

Лемма 16. *Если радиус R достаточно велик, то размерность ядра оператора M_R не больше единицы. (Очевидно, при увеличении R c^2 и ψ_2 полагаются неизменными).*

Доказательство. Проведем из точек t_1 и t_2 лучи s_1 и s_2 параллельно действительной оси в сторону возрастания реальной части. Обозначим через W множество, ограниченное сверху лучем s_2, снизу лучем s_1, слева дугой l_1.

Пусть $\Psi(z)$ есть решение однородной задачи (27)

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_1}\frac{v(t)\,dt}{t-z},\quad v\in \operatorname{Ker} M_R.$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi_1(z)=\begin{cases}-c^2\,\Psi(z), & z\in W\\ \Psi''(z)-c^2\,\Psi(z), & z\in C\setminus W,\end{cases}$$

В силу (27) функцию $\Psi_1(z)$ можно аналитически продолжать на дугу l_1, а потому она аналитична всюду в плоскости C кроме лучей s_1 и s_2.

Не ограничивая общности можно считать, что $\operatorname{Re} c>0$ (c^2 — неотрицательно). Обозначим

$$\Phi(z)=\Psi'(z)+c\Psi(z),\quad z\in C\setminus W, \tag{28}$$

Тогда

$$\Phi'(z)-c\Phi(z)=\Psi_1(z),\quad z\in C\setminus W.$$

Отсюда

$$\Phi(z)=e^{cz}\left(\int\limits_{z_0}^{z}e^{-ct}\,\Psi_1(t)\,dt+\text{const}\right);\quad z,\ z_0\in C\setminus W.$$

По этой формуле функцию $\Phi(z)$ можно продолжить на всю область аналитичности функции $\Psi_1(z)$, на область $C\setminus(s_1\cup s_2)$.

Мы поставим условие на функцию $v(t)$. Пусть $t_0\in l_1$ — произвольная (но фиксированная) точка. Потребуем, чтобы

$$e^{ct_0}\int\limits_{\infty}^{\operatorname{Re} t_0}e^{-c(x+i\operatorname{Im} t_0)}\,\Psi(x+i\operatorname{Im} t_0)\,dx+\frac{(\Psi'+c\Psi)^{+}(t_0)}{c^2}=0, \tag{29}$$

где $\Psi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{l_1}\frac{v(t)\,dt}{t-z}$, $(\Psi'+c\Psi)^{+}=DPv+cPv.$

Это условие имеет смысл, так как $\operatorname{Re} c>0$, а $v\in B(l_1)$. При выполнении (29) (а мы будем считать его выполненым)

$$\Phi(z)=-c^2\,e^{c\operatorname{Re} z}\int\limits_{\infty}^{\operatorname{Re} z}e^{-cx}\,\Psi(x+i\operatorname{Im} z)\,dx,\quad z\in W.$$

Тогда при $z \in W$ имеем

$$|z\,\Phi(z)| \leqslant \frac{|c^2| \int\limits_{\infty}^{\operatorname{Re} z} e^{-\operatorname{Re}(cx)} |\Psi(x + i \operatorname{Im} z)|\, dx}{e^{-\operatorname{Re} c \operatorname{Re} z}} \xrightarrow[z \in W]{\operatorname{Re} z \to \infty} \text{const}.$$

Отсюда получаем для больших $|z|$

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|}. \tag{30}$$

Из (29) имеем

$$\Psi(z) = e^{-cz}\left(\int\limits_{z_0}^{z} e^{ct}\,\Phi(t)\,dt + \text{const}\right).$$

По этой формуле функцию $\Psi(z)$ можно продолжать на область аналитичности функции $\Phi(z)$, область $C \setminus (s_1 \cup s_2)$. Обозначим это продолжение через $\Phi_1(z)$.

$$\Phi_1(z) = \text{const}\; e^{-cz} + e^{-cz} \int\limits_{z_0}^{z} e^{ct}\,\Phi(t)\,dt, \; z_0 \in W, \; z \in W.$$

Так как $\operatorname{Re} c > 0$, то легко получаем из (30), что для больших $|z|$

$$|\Phi_1(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|}. \tag{31}$$

По построению функции $\Phi_1(z)$ имеем

$$\Phi_1'(z) - c^2\Phi_1(z) = -c^2\Psi(z), \; z \in W,$$

$$\Phi_1(z) = \Psi(z), \; z \overline{\in} W.$$

Так как на лучах s_1 и s_2 функция $\Psi(z)$ аналитична, то, обозначая через $\Phi_1^+(t)$ и $\Phi_1^-(t)$ пределы функции $\Phi_1(z)$ при z стремящемся к $t \in s_1$ $(t \in s_2)$ из верхней и нижней полуплоскости соответственно, получим

$$(\Phi_1' - c^2\Phi_1)^+(t) + c^2\,\Phi_1^-(t) = 0, \; t \in s_1,$$

$$(\Phi_1' - c^2\Phi_1)^-(t) + c^2\Phi_1^+(t) = 0, \; t \in s_2.$$

Пусть теперь

$$u_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t), \; t \in s_1,$$

$$u_2(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t), \; t \in s_2.$$

Легко видеть (см. И. И. Привалов, [4]), что функция $u_1(t)$ (функция $u_2(t)$) принадлежит пространству L_2 в окрестности точки t_1 (точки t_2). Из (31) следует, что

$$u_1 \in L_2(s_1), \; u_2 \in L_2(s_2).$$

Обозначим

$$P_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}\frac{u_1(t)\,dt}{t-z},\quad P_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_2}\frac{u_2(t)\,dt}{t-z}.$$

Обычным способом показывается, что

$$\Phi_1(z)=P_1(z)+P_2(z).$$

И тогда получим

$$(P_1^{\cdot}-c^2P_1)^+(t)+c^2P_1^-(t)=-P_2^{\cdot}(t),\ t\in s_1,$$

$$(P_2^{\cdot}-c^2P_2)^-(t)+c^2P_2^+(t)=-P_1^{\cdot}(t),\ t\in s_2,$$

что эквивалентно на s_1

$$D^2Pu_1-c^2u_1=-P_2^{\cdot}(t),$$

а на s_2

$$D^2Qu_2+c^2u_2=-P_1^{\cdot}(t).$$

Согласно леммам 12 и 13 имеют место оценки

$$\|u_1\|_{L_2(s_1)}\leqslant\mathrm{const}\,\|P_2^{\cdot}\|_{L_2(s_1)},$$

$$\|u_2\|_{L_2(s_2)}\leqslant\mathrm{const}\,\|P_1^{\cdot}\|_{L_2(s_2)}.$$

Так как луч s_2 находится выше линии s_1, то, обозначая

$$\omega(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ u_1(x+t_1), & x>0,\end{cases}$$

получим

$$P_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-i\xi(t-t_1)}\,\bar{\omega}(\xi)\,d\xi,\ t\in s_2,$$

где $\bar{\omega}(\xi)$ есть преобразование Фурье функции $\omega(x)$. Замечая, что $\operatorname{Im}(t-t_1)=y=\mathrm{const}$ при $t\in s_2$, получаем, в силу равенства Парсеваля

$$\|P_1^{\cdot}\|^2_{L_2(s_2)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}|\xi^2e^{\xi y}\,\bar{\omega}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Так как $\xi^2e^{\xi y}\to 0$ при $y\to\infty$ равномерно по $\xi\in(-\infty,0]$, то

$$\frac{\|P_1^{\cdot}\|_{L_2(s_2)}}{\|u_1\|_{L_2(s_1)}}\to 0\ \text{при}\ y\to\infty,$$

что эквивалентно условию $R\to\infty$. Точно так же

$$\frac{\|P_2^{\cdot}\|_{L_2(s_1)}}{\|u_2\|_{L_2(s_2)}}\to 0\ \text{при}\ R\to\infty.$$

Значит, при R достаточно большом

$$\|u_1\|_{L_2(s_1)}<\frac{1}{2}\|u_2\|_{L_2(s_2)},\quad \|u_2\|_{L_2(s_2)}<\frac{1}{2}\|u_1\|_{L_2(s_1)}.$$

Или $u_1=0$, $u_2=0$. Из линейности условия (29) следует лемма 16.

Лемма 17. *Если радиус R достаточно велик, то*

$$0 \leqslant \operatorname{ind} M_R \leqslant 1.$$

Доказательство. Неравенство $\operatorname{ind} M_R \leqslant 1$ следует из леммы 16. Докажем, что $0 \leqslant \operatorname{ind} M_R$.

Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(l_1)$(то есть $\operatorname{supp} \varphi \subset l_1$). Тогда, если $v \in L_2(l_1)$ то легко проверить, что

$$\int\limits_{l_1} (M_R\varphi)(t)\, v(t)\, dt = -\int\limits_{l_1} [(Qv)(t)\, \varphi''(t) + c^2 v(t)\, \varphi(t)]\, dt.$$

Если $v \frac{dt}{d|t|} \in \operatorname{coker} M_R$, то (см. Г. Е. Шилов, [6])

$$D^2Qv + c^2v = 0,\ D^3Qv \in L_2(l_1).$$

Проведем дугу $\overline{l}_1$ симметрично дуге l_1 относительно хорды $\overline{t_1t_2}$.

Обозначим через W лунку, ограниченную дугами l_1 и $\overline{l}_1$.

Пусть

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_1} \frac{v(t)\, dt}{t-z},$$

обозначим через $\Phi^+(t)$ предел функции $\Phi(z)$, когда z стремится к $t \in l_1$ (или к $t \in \overline{l}_1$) по некасательному пути, проходящему слева от дуги, через $\Phi^-(t)$ обозначим предел справа.

На дуге l_1 имеем $(\Phi'' - c^2\Phi)^-(t) = -c^2\Phi^+(t)$. Как и в предыдущих леммах, строим аналитическую в $C \setminus \overline{l}_1$ функцию $\Psi(z)$, удовлетворяющую условиям

$$\Psi(z) = \Phi(z),\ z \in C \setminus W,$$

$$\Psi''(z) - c^2\Psi(z) = -c^2\Phi(z),\ z \in W.$$

Тогда на дуге $\overline{l}_1$

$$(\Psi'' - c^2\Psi)^-(t) = -c^2\Psi^+(t).$$

Пусть X есть центр дуги $\overline{l}_1$. Сделаем преобразование $X - z = z_1$. При этом дуга l_1 перейдет в $\overline{l}_1$.

Положим $\Phi_1(z) = \Psi(X - z)$. На дуге l_1 получим

$$(\Phi_1'' - c^2\Phi_1)^+(t) + c^2\Phi_1^-(t) = 0.$$

Полагая $u(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$, убедимся, что $M_R u = 0$. Значит $\dim \operatorname{coker} M_R \leqslant \dim \ker M_R$. Лемма 17 доказана.

Согласно лемме 3

$$L_R \simeq \gamma_1(DP + c^2E) + \gamma_2(DQ + E).$$

Мы будем под символом L_R понимать выражение в правой части этого равенства,

Лемма 18. *Для любого радиуса* $R > 0$ $0 \leqslant \operatorname{ind} L_R \leqslant 1$.

Доказательство. Зафиксируем константы γ_2 и c^2.

Тогда, в силу теоремы 2 и леммы 17, найдется такой радиус R_0, что для $R \geqslant R_0$ $0 \leqslant \operatorname{ind} L_R \leqslant 1$.

Возьмем теперь произвольный радиус $R>0$. На интервале $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ определим функцию $\psi(\varphi)\in C^\infty\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)$ таким образом, чтобы $\psi^{(n)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi^{(n)}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $n=1, 2, \cdots$,

$$\psi(\psi_2)=\psi_2, \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}, \psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}, \quad \psi'(\varphi)>0,$$

$$\psi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi'(\psi_2)=\psi'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{R}{R_0}.$$

Функция $g(t)$, отображающая окружность радиуса R на окружность радиуса R_0, определяется из равенства

$$g(Re^{i\varphi})=R_0e^{i\psi(\varphi)}.$$

Очевидно эта функция удовлетворяет условиям леммы 4. Пусть

$$(Tu)(t)=u(g(t)),$$

тогда $\operatorname{ind} T=0$. Согласно лемме 4 имеем $TL_{R_0}\simeq L_R^1T$, где

$$L_R^1=\frac{1}{g'}[\chi_1(DP+c^2g'E)+\chi_2(DQ+g'E)].$$

Используя формулы $\operatorname{ind} AB=\operatorname{ind} A+\operatorname{ind} B$, $\operatorname{ind} A=\operatorname{ind} B$, если $A\simeq B$ (см. С. Г. Михлин, [1]), получим $\operatorname{ind} L_{R_0}=\operatorname{ind} L_R^1$.

Но к операторам L_R и L_R^1 применима лемма 11, и, согласно лемме 11

$$\operatorname{ind} L_R^1=\operatorname{ind} L_R+\operatorname{ind} B,$$

где

$$B=\chi_1(P-g'Q)+\chi_2\left(P-\frac{1}{g'}Q\right).$$

Так как $g'(t_1)=g'(t_1)=1$, то коэффициент у оператора B непрерывен по Гёльдеру

$$\operatorname{ind} B=\left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{l_1}-\left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{l_2}=\left.\frac{\psi(\varphi)-\varphi}{2\pi}\right|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi_2}-\left.\frac{\psi(\varphi)-\varphi}{2\pi}\right|_{\varphi=-\psi_2}^{\frac{3\pi}{2}}.$$

Этим лемма 18 доказана.

Теорема 3. *Имеет место формула*

$$\operatorname{ind} L_K=\begin{cases}0, & \text{если } \arg c^2+2\psi_2<0\\ 1, & \text{если } \arg c^2+2\psi_2>0.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале следующую ситуацию. Пусть задано однопараметрическое семейство (гомотопия) операторов на окружности l

$$Z_p=\chi_1DP+\chi_2DQ+a_pE,$$

где функция $\alpha_p \in C^\infty(l_1, l_2)$ удовлетворяет условию (A) при каждом $p \in [0, 1]$ и равномерно непрерывна по параметру p. Тогда при каждом $p \in [0, 1]$ оператор Z_p есть Ф-оператор, и его индекс локально постоянен на отрезке $[0, 1]$. Действительно, пусть R_p есть регуляризующий оператор для оператора Z_p. Имеем

$$Z_q R_p = Z_p R_p + (Z_q - Z_p) R_p \simeq E + (\alpha_q - \alpha_p) R_p.$$

Отсюда $\operatorname{ind} Z_q - \operatorname{ind} Z_p = \operatorname{ind}(E + (\alpha_q - \alpha_p) R_p)$. Когда параметр q настолько близок к p, что $\|(\alpha_q - \alpha_p) R_p\| < 1$, $\operatorname{ind}(E + (\alpha_q - \alpha_p) R_p) = 0$. После этого легко убедиться, что $\operatorname{ind} Z_0 = \operatorname{ind} Z_1$.

Пусть теперь заданы два оператора

$$L_R^0 = \chi_1 (DP + c_0 E) + \chi_2 (DQ + E),$$

$$L_R^1 = \chi_1 (DP + c_1 E) + \chi_2 (DQ + E),$$

и пусть

$$\arg c_0 + 2\psi_2 < 0, \quad \arg c_1 + 2\psi_2 > 0.$$

Положим

$$c_0 = r_0 e^{i\lambda_0}, \quad c_1 = r_1 e^{i\lambda_1}, \quad -\pi < \lambda_0, \ \lambda_1 < \pi.$$

Тогда

$$\lambda_0 + 2\psi_2 < 0, \quad \lambda_1 + 2\psi_2 > 0.$$

Рассмотрим гомотопию

$$\alpha_p(t) = \begin{cases} (r_0(1-p) + r_1 p) \exp\left[i \left(\lambda_0 (1-p) + \lambda_1 p - 2\pi p \dfrac{\psi + \frac{\pi}{2}}{\psi_2 + \frac{\pi}{2}} \right) \right], & Re^{i\psi} = t \in l_1, \\ 1, & t \in l_2. \end{cases}$$

Тогда, если $Z_p = \chi_1 DP + \chi_2 DQ + \alpha_p E$, то $Z_0 = L_R^0$, а к операторам Z_1 и L_R^1 можно применить лемму 11. Легко проверить справедливость для Z_p условий (A) при любом $p \in [0, 1]$. Значит

$$\operatorname{ind} L_R = \operatorname{ind} Z_0 = \operatorname{ind} Z_1 = \operatorname{ind} Z_1 F_1 + \operatorname{ind} L_R^1,$$

где F_1 есть регуляризующий оператор для оператора L_R^1.

Согласно лемме 11 имеем $\operatorname{ind} Z_1 F_1 = \operatorname{ind} T$, где $T = \chi_1 \left(P - \dfrac{\alpha_1}{c_1} Q \right) + \chi_2 \left(P - \dfrac{1}{\alpha_1} Q \right)$,

$$\operatorname{ind} T = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi} + \frac{\psi + \frac{\pi}{2}}{\psi_2 + \frac{\pi}{2}} \right) \Bigg|_{\psi = -\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -1.$$

Отсюда следует теорема 3.

Теперь можно приступить к вычислению индекса оператора L, заданного на произвольном гладком замкнутом контуре l без самопересечений.

Пусть φ_i есть угол между положительным направлением касательной в точке t_i, $i=1, 2$, и действительной осью, причем, φ_1 и φ_2 выбраны так, что если точку касания непрерывно перемещать из точки t_1 в t_2, то угол наклона касательной непрерывно перейдет из φ_1 в φ_2. Целые числа k_1 и k_2 определим из неравенств

$$-\pi < \arg\alpha(t_j+0)+\arg\alpha(t_j-0)+2\varphi_j+2\pi k_j<\pi,\quad j=1,\ 2. \tag{32}$$

Теорема 4. *Если выполнены условия* (A), *то индекс оператора* L *вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind} L=\frac{1}{2\pi}\left(\arg\alpha(t_1+0)+\arg\alpha(t_1-0)-\arg\alpha(t_2+0)-\arg\alpha(t_2-0)\right)+$$

$$+k_1-k_2+\left[\frac{\ln\alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_1}-\left[\frac{\ln\alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_2}. \tag{33}$$

Доказательство. Докажем вначале формулу (33) в случае, когда l есть единичная окружность. В этом случае можно записать

$$t_1=e^{i\psi_1},\ t_2=e^{i\psi_2},\ 0<\psi_2-\psi_1<2\pi.$$

Тогда $\varphi_1=\psi_1+\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\psi_2+\dfrac{\pi}{2}$. Положим

$$\alpha(t_j+0)=r_j^+e^{i\beta_j^+},\ j=1,\ 2,\ \alpha(t_j-0)=r_j^-e^{i\beta_j^-},\ j=1,\ 2.$$

Тогда неравенства (32) можно переписать в виде

$$0<\beta_j^++\beta_j^-+2\psi_j+2\pi(k_j+1)<2\pi,\ j=1,\ 2. \tag{34}$$

Целое число k определим из неравенства

$$-\frac{\pi}{2}<\theta_2\equiv\frac{1}{2}\left(\beta_2^++\beta_2^-+2\psi_2+2\pi k_2-(\beta_1^++\beta_1^-+2\psi_1+2\pi k_1)\right)+$$

$$+\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Из (34) следует, что

$$k=\begin{cases}1, \text{ если } \beta_2^++\beta_2^-+2\psi_2+2\pi k_2+2\pi k>0\\ 0, \text{ если } \beta_2^++\beta_2^-+2\psi_2+2\pi k_2+2\pi k<0.\end{cases} \tag{35}$$

Определим на интервале $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ функцию $\psi(\theta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\psi\in C^\infty\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right),\ \psi'>0,\quad \psi^{(n)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi^{(n)}\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$n=1,\ 2,\cdots,\ \psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi_1,\ \psi(\theta_2)=\psi_2,\ \psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\psi_1+2\pi, \tag{36}$$

$$\psi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{r_1^+ r_1^-}},\ \psi'(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{r_2^+ r_2^-}}.$$

Определим функцию $g(t)$, отображающую единичную окружность на себя, по формуле $g(e^{i\theta})=e^{i\psi(\theta)}$.

Эта функция удовлетворяет условиям леммы 4. Поэтому, полагая $(Tu)(t)=u(g(t))$, получаем

$$\operatorname{ind} L=\operatorname{ind} TL,\quad TL\simeq\frac{1}{g'}L_1T,$$

или $\operatorname{ind} L=\operatorname{ind} L_1$, где оператор L_1 определен на единичной окружности s с обычной ориентацией.

Начало дуги $s_1=g^{-1}(l_1)$ есть $\tau_1=-i$, конец $\tau_2=e^{i\theta_2}$,

$$L_1=\chi_1DP+\chi_2DQ+\alpha(g)g'E.$$

Обозначив $\alpha(g)g'=\alpha_1$ можно записать

$$\alpha_1(\tau_1+0)=\sqrt{\frac{r_1^+}{r_1^-}}e^{i\left(\beta_1^++\psi_1+\frac{\pi}{2}\right)},\ \alpha_1(\tau_1-0)=\sqrt{\frac{r_1^-}{r_1}}e^{i\left(\beta_1^-+\psi_1+\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\alpha_1(\tau_2-0)=\sqrt{\frac{r_2^-}{r_2^+}}\exp\left[i\left(\frac{\beta_1^++\beta_1^-}{2}-\frac{\beta_2^+-\beta_2^-}{2}+\psi_1+\pi\left(k_1-k_2-k+\frac{1}{2}\right)\right)\right],$$

$$\alpha_1(\tau_2+0)=\sqrt{\frac{r_2^+}{r_2^-}}\exp\left[i\left(\frac{\beta_1^++\beta_1^-}{2}+\frac{\beta_2^+-\beta_2^-}{2}+\psi_1+\pi\left(k_1-k_2-k+\frac{1}{2}\right)\right)\right].$$

Пусть теперь $\gamma\in C^\infty(s)$, причем $\gamma(\tau)\neq 0$ нигде на контуре s

$$\left[\frac{\ln\gamma(\tau)}{2\pi i}\right]_s=0,\ \gamma(-i)=\alpha_1(\tau_1-0),\ \gamma(e^{i\theta_2})=\alpha_1(\tau_2+0).$$

Тогда, согласно лемме 5, оператор $S=P-\gamma Q$ непрерывен из $M(s_1,\ s_2)$ в $M(s_1,\ s_2)$, и, легко проверить, что $\operatorname{ind} S=0$. Имеем, согласно лемме 5

$$\operatorname{ind} L_1=\operatorname{ind} L_1S,\ L_1S\simeq\chi_1DP+\chi_2DQ+\alpha_2E,$$

где $\alpha_2=\chi_1g'\alpha(g)\gamma+\chi_2\dfrac{g'\alpha(g)}{\gamma}$.

Таким образом

$$\operatorname{ind} L=\operatorname{ind}(\chi_1DP+\chi_2DQ+\alpha_2E).$$

К операторам

$$\chi_1DP+\chi_2DQ+\alpha_2E$$

и

$$L_0=\chi_1(DP-e^{i(\beta_1^++\beta_1^-+2\psi_1)}E)+\chi_2(DQ+E)$$

можно применить лемму 11, и, согласно этой лемме

$$\operatorname{ind}(\chi_1DP+\chi_2DQ+\alpha_2E)=\operatorname{ind} L_0+$$

$$+\operatorname{ind}\left(\chi_1\left(P-\frac{g'\alpha(g)\gamma}{\exp[i(\beta_1^++\beta_1^-+2\psi_1)]}Q\right)+\chi_2\left(P-\frac{g'\alpha(g)}{\gamma}Q\right)\right).$$

Поэтому (см. Н. И. Мусхелишвили, [3]),

$$\operatorname{ind} L = \left[\frac{\ln g'(\tau)}{2\pi i}\right]_{s_1} - \left[\frac{\ln g'(\tau)}{2\pi i}\right]_{s_2} + \left[\frac{\ln \alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_1} - \\ - \left[\frac{\ln \alpha(t)}{2\pi i}\right]_{l_2} + \operatorname{ind} L_0.$$

Согласно (36) имеем

$$\left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{s_1} - \left[\frac{\ln g'(t)}{2\pi i}\right]_{s_2} = \frac{\beta_1^+ + \beta_1^- - \beta_2^+ - \beta_2^-}{2\pi} + k_1 - k_2 - k.$$

Из теоремы 3 следует

$$\operatorname{ind} L_0 = \begin{cases} 1, \text{ если } 2\theta_2 + \beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi\left(k_1 + \dfrac{1}{2}\right) > 0, \\ 0, \text{ если } 2\theta_2 + \beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi\left(k_1 + \dfrac{1}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Но

$$2\theta_2 + \beta_1^+ + \beta_1^- + 2\psi_1 + 2\pi\left(k_1 + \frac{1}{2}\right) = \beta_2^+ + \beta_2^- + 2\psi_2 + 2\pi(k_2 + k).$$

Таким образом, из (35) следует, что $\operatorname{ind} L_0 = k$, что доказывает формулу (33) в случае единичной окружности.

Докажем формулу (33) в общем случае.

Пусть $g(t)$ есть гладкая функция, взаимнооднозначно отображающая единичную окружность s на контур l, причем $g'(\tau) \neq 0$ нигде на окружности s

$$g(e^{i\psi_1}) = t_1, \ g(e^{i\psi_2}) = t_2, \ 0 < \psi_2 - \psi_1 < 2\pi.$$

Нетрудно видеть, что угол наклона касательной к контуру l в точке $g(e^{i\psi})$ с действительной осью будет

$$\varphi(\psi) = \arg \frac{dg(e^{i\psi})}{d\psi}.$$

Мы выберем ту ветвь функции $\varphi(\psi)$, которая удовлетворяет условиям $\varphi(\psi_1) = \varphi_1$, $\varphi(\psi_2) = \varphi_2$.

Определим оператор

$$(Tu)(\tau) = u(g(\tau)).$$

Имеем, $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} TL$, $TL \simeq \dfrac{1}{g'} L_1 T$, значит $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_1$, где $L_1 = \lambda_1 DP + \lambda_2 DQ + g\lambda'(g) E$.

Заметим, что

$$\arg g'(e^{i\psi}) = \arg\left(\frac{\dfrac{dg(e^{i\psi})}{d\psi}}{ie^{i\psi}}\right) = \varphi(\psi) - \psi - \frac{\pi}{2}.$$

Из формулы (33) для окружности теперь легко следует формула (33) в общем случае.

Замечание 1. Применяя лемму 11 легко убедиться, что формула (33) имеет место и тогда, когда коэффициент $\alpha(t)$ непрерывен всюду на контуре l, кроме точек t_1 и t_2, где он терпит разрыв первого рода, и нигде не обращается в нуль.

Замечание 2. Из (32) и (33) следует, что если для функции $\alpha \in C^{\infty}(l_1, l_2)$ не выполнены условия (A), то для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие функции $\alpha_1 \in C^{\infty}(l_1, l_2)$ и $\alpha_2 \in C^{\infty}(l_1, l_2)$, которые удовлетворяют условиям (A),

$$\sup_{t \in l} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{t \in l} |\alpha_2(t) - \alpha_1(t)| < \varepsilon \text{ и } \operatorname{ind}(\gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha_1 E) \neq$$

$$\neq \operatorname{ind}(\gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha_2 E).$$

Таким образом, оператор $L = \gamma_1 DP + \gamma_2 DQ + \alpha E$ не может быть Ф-оператором, то есть условия (A) также необходимы.

В заключение, автор выражает благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 10.IX 1971

Ս. Գ. ՌՈՒԲԱՆՈՎԻՉ. Որոշ սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների լուծելիության մասին. II *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածը հեղինակի սույն հրատարակչության նախորդ համարում տպագրված հոդվածի շարունակությունն է։

Հոդվածում հաշված է այն սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարման ինդեքսը, որի ավագ անդամը չի բավարարում նորմալության պայմաններին և ունի խզվող գործակիցներ։

S. G. RUBANOVICH. *On the solvability of some singular integro-differential equations.* II (summary)

The article is continuation of № 2, 1972. For a singular integro-differential equation with high order term failing to satisfy normality conditions and posessing discontinious coefficients, the index is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Михлин.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Ф.-М., 1962.
2. *С. Г. Михлин.* Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами. ДАН СССР. 52, № 3, 1948, 435—438.
3. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. „Наука", 1968.
4. *И. И. Привалов.* Граничные свойства однозначных аналитических функций.
5. *Б. В. Хведелидзе.* Линейные разрывные задачи теории функций. Сингулярные интегральные уравнения и некоторые приложения, Тр. Тб. мат. ин-та АН Груз.ССР, XXIII, № 2, 3—158.
6. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ, Второй спецкурс, Ф.-М., 1965.
7. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Изд. „Мир", 1965.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS