

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՆԳՐԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԾՄԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով: Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությանը, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում: Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր շրջանցվելն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ քան զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չքաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է ալյալ աշխատանքը:

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R A ALEXANDRIAN
N. H ARAKELIAN
S N. MERGELIAN
A B NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĭ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika” are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaying of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika”,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

Б. В. ГРИГОРЯН

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ

В настоящей работе доказывается теорема единственности для гармонической функции в специальных областях вращения двух различных типов.

1 случай. Пусть $x = \psi(z)$ — непрерывная функция вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$, где она неотрицательна, и $\psi(a) = \psi(b) = 0$, причем в точке $z = a$ касательная к кривой $x = \psi(z)$ с осью oz образует острый угол $\pi/2\alpha$ ($\alpha > 1$).

Обозначим через Ω_α — область, получаемую вращением кривой $x = \psi(z)$ вокруг оси oz . Рассмотрим функцию $H(x, y, z) = H(\rho, z)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, гармоническую в Ω_α , непрерывную и ограниченную вместе с частными производными первого порядка по x, y и z в $\overline{\Omega}_\alpha$, где $\overline{\Omega}_\alpha$ — замыкание Ω_α (т. е. частные производные существуют и непрерывны внутри Ω_α и значения этих частных производных можно распространить на всю замкнутую область $\overline{\Omega}_\alpha$ с сохранением непрерывности).

Обозначим через $m_\alpha(\delta)$ функцию

$$\sup_{|PP_0| < \delta} \{|H(P)|, |\text{grad } H(P)|\},$$

где $P = (x, y, z) \in \overline{\Omega}_\alpha$, $P_0 = (0, 0, a)$, $0 < \delta \leq \delta_0$.

Доказывается, что если значения функции $H(\rho, z)$ и ее градиента достаточно быстро стремятся к нулю при приближении к точке $P_0 = (0, 0, a)$, то функция тождественно равна нулю, а именно, справедлива

Теорема 1. Если

$$\int_0^{\delta_0} \log m_\alpha(\delta) \delta^{\alpha-1} d\delta = -\infty, \quad (A)$$

то $H(P) \equiv 0$.

II случай. Пусть на плоскости хоз дана кривая (с непрерывно меняющейся касательной), пересекающая ось oz в точках a и b . Предположим также, что в малой окрестности точки $z = a$, $0 < \rho = |z + ix - a| \leq \rho_0$ ее уравнение в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\theta = \Phi(\rho)$$

(предполагается, что в качестве полюса взята точка a). На функцию $\Phi(\rho)$ накладываем следующие условия:

а) $\Phi(\rho)$ непрерывна вместе со своей первой производной,

б) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{d\Phi}{d\rho} = 0,$

в) интеграл $\int_0^{\infty} \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)^2 \frac{d\rho}{\Phi(\rho)}$ сходится.

Область, получаемая вращением этой кривой вокруг оси oz обозначим через Ω_0 . Пусть функция $H(x, y, z) = H(\rho, z)$ ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) гармонична в Ω_0 как функция трех переменных, непрерывна и ограничена в Ω_0 со своими частными производными первого порядка.

Обозначим через $m_0(\delta)$ функцию

$$\sup_{|PP_0| < \delta} \{ |H(P)|, |\text{grad } H(P)| \},$$

где

$$P = (x, y, z) \in \Omega_0, P_0 = (0, 0, a), 0 < \delta \leq \delta_0.$$

Из определения $m_0(\delta)$ и $m_0(\delta)$ очевидным образом следует, что они являются возрастающими функциями. Справедлива следующая

Теорема 2. Если

$$\int_0^{\delta_0} \log m_0(\delta) \exp \left\{ -\pi \int_{\delta}^{\delta_0} \frac{dr}{2r\Phi(r)} \right\} \frac{d\delta}{\delta\Phi(\delta)} = -\infty, \quad (B)$$

то $H(P) \equiv 0$.

По существу условия (A) и (B) в определенном смысле являются точными, а именно, верна следующая теорема для I случая.

Теорема 3. Если $m(\delta)$ — положительная непрерывная монотонно возрастающая на $(0, \delta_0)$ функция такая, что

$$\int_0^{\delta_0} \log m(\delta) \delta^{\alpha-1} d\delta > -\infty,$$

то существует нетривиальная гармоническая функция H в Ω_α , которая в окрестности точки $P_0 = (0, 0, a)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{|PP_0| < \delta} \{ |H(P)|, |\text{grad } H(P)| \} \leq m(\delta),$$

где $P \in \partial\Omega_\alpha$, $0 < \delta \leq \delta_0$.

Аналогичную теорему можно доказать и для II случая.

Вопрос о единственности для гармонической функции исследовали: для случая шара — С. Н. Мергелян [1], а для полупространства — В. Рао [2].

Для доказательства вышеизложенных теорем заметим, что если функция $H(P) = H(x, y, z)$ — гармонична в открытом единичном шаре и непрерывна вместе со своими частными производными первого по-

рядка в замкнутом шаре, то для $H(P)$ справедливо разложение (см., например, [3]), которое в полярных координатах записывается следующим образом:

$$H(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k r^k (a_m^{(k)} \cos m\varphi + b_m^{(k)} \sin m\varphi) P_k^{(m)}(\cos \theta),$$

где коэффициенты $a_m^{(k)}$, $b_m^{(k)}$ определяются известным способом, а $P_k^{(m)}(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра. С другой стороны, известно представление [4]

$$H(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} F(\lambda, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1)$$

где

$$F(\lambda, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=-k}^k \frac{A_m^{(k)} (k+m)!}{k! i^{k-m}} \zeta^m \right) \lambda^k,$$

$$\zeta = e^{i\alpha}, \quad \lambda = \frac{x}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{y}{2i} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + iz,$$

$$A_m^{(k)} = \frac{a_m^{(k)} - i b_m^{(k)}}{2} \quad \text{и} \quad \bar{A}_m^{(k)} = A_{-m}^{(k)}.$$

Формула (1) известна под названием формулы Whittaker-Bergman-a. Легко видеть, что если $H(x, y, z) = H(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = H(\rho, z)$, то функция $F(\lambda, \zeta)$ зависит только от λ и имеет вид

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_0^{(k)}}{i^k} \lambda^k$$

или

$$F(i\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_0^{(k)} \lambda^k;$$

$F(i\lambda)$ будет аналитической функцией в единичном круге. В частности, $F(\bar{i}\lambda) = \overline{F(i\lambda)}$ и (1) можно переписать в виде

$$H(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(ip \cos \alpha - z) d\alpha.$$

Если обозначим $p = -z + ip$, то $\bar{p} = -z - ip$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} H(\rho, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{p-\bar{p}}{2} \cos \alpha + \frac{p+\bar{p}}{2}\right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F\left(\frac{p-\bar{p}}{2} \cos \alpha + \frac{p+\bar{p}}{2}\right) d\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} F\left(\frac{p-\bar{p}}{2} \cos \alpha + \frac{p+\bar{p}}{2}\right) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F\left(\frac{p-\bar{p}}{2} \cos \alpha + \frac{p+\bar{p}}{2}\right) d\alpha + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F\left(\frac{p-\bar{p}}{2} \cos \alpha + \frac{p+\bar{p}}{2}\right) d\alpha.
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\frac{i}{V(\omega-p)(\omega-\bar{p})}$. Она определена на плоскости ω и имеет две точки разветвления. Если образовать разрез L через точки p и $\bar{p}$ и выбрать значения корня так, чтобы в бесконечности она была бы эквивалентна функции $\frac{i}{\omega}$, то данная функция будет аналитической однозначной функцией вне разреза L . Учитывая это и производя замену переменных в последних интегралах, получим известную формулу

$$H(p, z) = \frac{i}{\pi} \int_{L \setminus \sqrt{}} \frac{F(t)' dt}{V(i-p)(t-\bar{p})} = \frac{i}{\pi} \int_{C \setminus \sqrt{}} \frac{F(t) dt}{V(t-p)(t-\bar{p})}, \quad (2)$$

где C — единичная окружность.

Из представления (2) видно, что C может быть любым контуром, охватывающим точки p и $\bar{p}$. И если обозначим через G часть плоскости ω , ограниченную контуром C , то G должна быть симметричной относительно оси oz .

Если функция гармонична не в шаре, а в области вращения Ω_a или Ω_0 , то соответствующая функция F получается аналитическим продолжением, а ее область аналитичности есть сечение Ω_a или Ω_0 плоскостью $y=0$. Обозначим эти области соответственно через G_a и G_0 . Обратно, если в качестве $F(t)$ взять произвольную аналитическую функцию в G_a или G_0 такую, что $F(\bar{t}) = \overline{F(t)}$ и по формуле (2) построить H , то она будет гармонической функцией от x, y, z в трехмерной области, которая получается вращением контура C вокруг оси oz .

Из формулы (2) получим

$$H(p, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^p \frac{u(t, z)}{\sqrt{p^2 - t^2}} dt, \quad (3)$$

где

$$u(t, z) = \operatorname{Re} \{F(it - z)\}.$$

Доказательство теоремы 1. Из (3) видно, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $u(t, z) \equiv 0$ при наличии условия (А).

Из формулы (3) без особого затруднения получим

$$u(t, z) = \frac{\pi}{2} t \int_0^t \frac{H'_\rho(\rho, z)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho + H(0, z). \quad (4)$$

Отсюда видно, что в окрестности точки $\omega = a$ $|u(t, z)| \leqslant c m_\alpha(\delta)$, где $\omega = -z + it$, $\delta = |\omega - a|$, c — абсолютная постоянная (в дальнейшем будем обозначать через c любую абсолютную постоянную величину).

Рассмотрим функцию

$$h(t, z) = \int_0^t \frac{\rho H(\rho, z)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho. \quad (5)$$

Учитывая выражение (3) для $H(\rho, z)$, из (5) получим

$$h(t, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^\rho \frac{u(x, z)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} dx \right\} \rho d\rho$$

или, если положить $x = \rho \sin \varphi$ (ρ и φ — полярные координаты) и обозначить через S_t четверть круга радиуса t с центром в начале координат, расположенного в первом координатном углу, получим

$$h(t, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{\pi/2} u(\rho \sin \varphi, z) d\varphi \right\} \rho d\rho = \frac{2}{\pi} \int_{S_t} \frac{u(\rho \sin \varphi, z)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi.$$

Перейдем к декартовым координатам $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$, имеем

$$\begin{aligned} h(t, z) &= \frac{2}{\pi} \int_{S_t} \frac{u(\eta, z)}{\sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^t u(\eta, z) d\eta \times \\ &\times \int_0^{\sqrt{t^2 - \eta^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{t^2 - \eta^2 - \xi^2}} = \int_0^t u(\eta, z) d\eta. \end{aligned}$$

Таким образом, получили формулу

$$h(t, z) = \int_0^t \frac{\rho H(\rho, z)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho = \int_0^t u(\eta, z) d\eta, \quad (6)$$

Так как $u(t, z)$ является четной функцией от t , то $h(t, z)$ является гармонической функцией двух переменных. Из формулы (6) также видно, что h , h_t , h_z — непрерывные функции в $\overline{G}_\alpha$, а в окрестности точки $\omega = a$ справедливы оценки

$$|h_t(t, z)| \leqslant c m_\alpha(\delta), \quad |h_z(t, z)| \leqslant c m_\alpha(\delta), \quad (7)$$

где $\delta = |\omega - a| \leqslant \delta_0$, $\omega = -z + it$.

Если теперь составить функцию $F_1 = h_z - i h_t$, то она будет аналитична в области G_α . Из неравенства (7) получим, что в окрестности точки $\omega = a$

$$|F_1| \leq c m_\alpha(\delta).$$

Обозначим через $\omega = \omega(\zeta)$ функцию, конформно отображающую круг $|\zeta| < 1$ на область G_α так, что $\omega(1) = a$. Тогда по известной теореме, в окрестности точки $\zeta = 1$ функция $\omega(\zeta)$ имеет асимптотическое представление

$$\omega(\zeta) = a + (\zeta - 1)^{1/\alpha} g(\zeta),$$

где $g(\zeta)$ — регулярная функция в $\zeta = 1$ и $g(1) \neq 0$. Если теперь обозначим функцию $F_1[\omega(\zeta)] = \tilde{F}_1(\zeta)$, то она будет аналитической функцией в $|\zeta| < 1$ и непрерывной в $|\zeta| \leq 1$. Учитывая еще оценку

$$|\tilde{F}_1(\zeta)| = |F_1[\omega(\zeta)]| \leq c m_\alpha(|\omega(\zeta) - a|) \leq c m_\alpha(|\zeta - 1|^{1/\alpha} \cdot c),$$

для таких $\zeta = e^{i\theta}$ и $|\zeta - 1| < \delta_1$ составим интеграл и произведем оценку

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=1} \log |\tilde{F}_1(\zeta)| |d\zeta| &\leq c + c \int_{|\zeta-1| < \delta_1} \log m_\alpha(c |\zeta - 1|^{1/\alpha}) |d(\zeta - 1)| \leq \\ &\leq c + c \int_0^{\delta_1} \log m_\alpha(t) \cdot t^{1/\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

И если учесть условие (A) получим

$$\int_{|\zeta|=1} \log |\tilde{F}_1(\zeta)| |d\zeta| = -\infty.$$

Согласно классической теореме единственности [5] из последнего равенства следует $\tilde{F}_1(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)] \equiv 0$, т. е. $h_z = h_t \equiv 0$, и так как $h_t = u(t, z)$, то $u(t, z) \equiv 0$.

Теорема доказана полностью.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы нам понадобится следующее вспомогательное предположение, которое мы сформулируем в более общем виде.

Пусть R — внутренность замкнутой жордановой кривой Γ в плоскости ω , и пусть точка $\omega = 0$ лежит на Γ . Предположим, что в окрестности точки $\omega = a$, скажем $|\omega| \leq \rho_0$, кривая Γ состоит из двух дуг: Γ_+ и Γ_- , имеющих в полярных координатах уравнения соответственно

$$\theta = \Phi_+(\rho), \quad \theta = \Phi_-(\rho), \quad \text{где } \Phi_-(\rho) < \Phi_+(\rho) \text{ и } 0 < \rho \leq \rho_0.$$

Предположим также, что

а) функции $\Phi_+(\rho)$ и $\Phi_-(\rho)$ в любой замкнутой части интервала $0 < \rho \leq \rho_0$ абсолютно непрерывны;

б) выражение $\rho \frac{d\Phi_\pm(\rho)}{d\rho}$, существующее почти всюду на интервале $0 < \rho \leq \rho_0$, стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$.

в) область $\Phi_-(\rho) < \theta < \Phi_+(\rho)$, $0 < \rho \leq \rho_0$ содержится в R .

Обозначим через $\zeta = \zeta(\omega)$ — функцию, конформно отображающую область R в круг $|\zeta| - 1 < 1$ так, что точке $\omega = 0$ соответствует $\zeta = 0$, и пусть $\omega = \omega(\zeta)$ — обратное отображение.

Лемма (С. Е. Варшавский [6]). Введем обозначение

$$\theta(\rho) = \Phi_+(\rho) - \Phi_-(\rho), \quad \Psi(\rho) = \frac{1}{2} [\Phi_+(\rho) + \Phi_-(\rho)],$$

S_β — область $|\theta - \Psi(\rho)| < \frac{\beta}{\pi} \theta(\rho)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \rho \leq \rho_0$.

Если еще предположить сходимость интеграла

$$\int_0^{\rho_0} \left[\left(\frac{d\Phi_+}{d\rho} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi_-}{d\rho} \right)^2 \right] \frac{\rho d\rho}{\theta(\rho)},$$

то имеет место следующее утверждение:

1. Равномерно в любой области S_β при $|\omega| = \rho \rightarrow 0$

$$\frac{\frac{|\zeta'(\omega)|}{|\zeta(\omega)|}}{\frac{|\omega|}{\omega}} \sim \frac{\pi}{\theta(\rho)};$$

2.

$$|\zeta(\omega)| = c \exp \left\{ -\pi \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{dr}{r\theta(r)} + o(1) \right\}$$

(c — постоянная) при $\omega = \rho e^{i\varphi} \rightarrow 0$ произвольным образом в R .

Перейдем к доказательству теоремы 2. Функция $H(r, z)$ имеет представление (3), где $u(t, z) = \operatorname{Re} [F(it - z)]$, а $F(\omega)$ есть функция, аналитическая в G_0 . Граница области G_0 симметрична относительно оси oz и в окрестности точки $\omega = a$ состоит из двух дуг, уравнения которых в полярных координатах есть: $\theta = \pm \Phi(\rho)$. Если теперь составить функцию $h(t, z)$ и соответственно этому функцию $F_1 = h_x - ih_t$, то она будет аналитична в G_0 и будет удовлетворять в окрестности точки $\omega = a$ неравенству $|F_1(\omega)| \leq m_0 (|\omega - a|)$, где $|\omega - a| \leq \delta_0$, $\omega = -z + it$, аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 1. Не нарушая общности, мы можем в качестве точки $\omega = a$ взять $\omega = 0$. Обозначим через $\zeta = \zeta(\omega)$ функцию, конформно отображающую область G_0 на круг $|\zeta| - 1 < 1$ так, что $\zeta(0) = 0$. Обратно отображающую функцию обозначим через $\omega = \omega(\zeta)$. Если теперь составим функцию $\tilde{F}_1(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$, то она будет аналитической в $|\zeta| - 1 < 1$, и $|\tilde{F}_1(\zeta)| \leq m_0 (|\omega(\zeta)|)$ в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$. Тогда в силу леммы получим

$$\int_{|\zeta| - 1 = 1} \log |\tilde{F}_1(\zeta)| |d\zeta| \leq c + c \int_{|\omega(\zeta)| < \delta_0} \log |F_1(\omega(\zeta))| |d\zeta| \leq c +$$

$$+c \int_{|\omega| < \delta_0} \log m_0(|\omega|) |\zeta'(\omega)| d|\omega| \leq c + c \int_0^{\delta_0} \log m_0(\delta) \exp \left\{ -\pi \int_{\delta}^{\delta_0} \frac{dt}{2t\Phi(t)} \right\} \frac{d\delta}{\delta\Phi(\delta)}.$$

И если учесть условие (Б), то

$$\int_{|\zeta-1|=1} \log |\bar{F}_1(\zeta)| |d\zeta| = -\infty,$$

и, следовательно, $\bar{F}_1(\zeta) = F_1(\omega(\zeta)) = 0$, т. е. $h_i = \bar{h}_i = 0$, и так как $h_i = u(t, z)$, то $u(t, z) \equiv 0$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В области G_a при помощи функции $m(\delta)$ можно определить функцию $f(\omega)$, которая будет аналитической в G_a , непрерывной в $\bar{G}_a$ и $f(\bar{\omega}) = \overline{f(\omega)}$, а в некоторой окрестности точки $\omega = a$ на границе области G_a она удовлетворяет неравенству

$$|f(\omega)| < c |\omega - a| m(|\omega - a|).$$

Составим функцию

$$\varphi(\omega) = \int_a^\omega f(t) dt,$$

которая будет аналитической в G_a , и так как $f(\bar{t}) = \overline{f(t)}$, то $\varphi(\bar{\omega}) = \overline{\varphi(\omega)}$.

Искомую гармоническую функцию H определим формулой (2).

$$H(x, y, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{\partial G_a} \frac{\varphi(t) dt}{V(t-p)(t-\bar{p})}, \quad (8)$$

где $p = -z + ir$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что $H(x, y, z) = H(r, z)$. Чтобы оценить модуль $H(r, z)$ на границе области $\bar{G}_a$ в окрестности точки $P_0 = (0, 0, a)$, возьмем точку $P = (x, y, z)$ так, что $p = -z + ir \in \partial G_a$, и такую, что $|p - a| \leq \delta_0$, и обозначим через $\Gamma_a(p) = \partial G_a \cap \{\omega, |\omega - a| \leq |p - a|\}$. Тогда (8) можно переписать в виде

$$H(r, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_a(p)} \frac{\varphi(t) dt}{V(t-p)(t-\bar{p})}. \quad (9)$$

С другой стороны, из (8) получим

$$H_z'(r, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{\partial G_a} \frac{\varphi'(t) dt}{V(t-p)(t-\bar{p})} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_a(p)} \frac{\varphi'(t) dt}{V(t-p)(t-\bar{p})}, \quad (10)$$

$$rH_r' - irH_z' = \frac{i}{2\pi} \int_{\partial G_a} \frac{t\varphi'(t) + \bar{p}\varphi'(t)}{V(t-p)(t-\bar{p})} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_a(p)} \frac{t\varphi'(t) + \bar{p}\varphi'(t)}{V(t-p)(t-\bar{p})} dt.$$

Следовательно, из определения функции $\varphi(t)$, из (9) и (10) получим

$$|H(r, z)| \leq cm(|p - a|), |\text{grad } H(r, z)| \leq cm(|p - a|),$$

где c — абсолютная постоянная.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теоремы 1 и 2 установлены для случая, когда функция H имеет специальный частный вид, именно, $H(x, y, z) = H(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$. Эти теоремы верны для любой гармонической функции в областях Ω_+ и Ω_- .

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему научному руководителю, член-корр. АН СССР С. Н. Мергеляну за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Институт математики

АН Арм.ССР

Ереванский государственный
университет

Поступило 24.XI.1971

Ք. Վ. ԳՐԻԳՈՐԻԱՆ. Պատման արույթներով երեք փոփոխականի հարմարիկ ֆունկցիաների համար միապայման բնորոշման (ամփոփում)

Աշխատանքում նշված է արույթների $\{\Omega\}$ դաս, որոնց համար ճիշտ է միապայման բնորոշման: Այն է, եթե $\Omega \in \{\Omega\}$ արույթում որոշված հարմարիկ ֆունկցիան իր գրադիենտի հետ միասին ձգտում է զերույի, երբ $P \rightarrow P_0$ ($P \in \overline{\Omega}$, $P_0 \in \partial\Omega$): (A), (B)-ում նշված արագությունը, ապա այդ ֆունկցիան ամենուրեք հավասար է զերույի:

Բացի դրանից, բնորոշման 3-ում ապացուցվում է, որ այդ պայմանները ((A) և (B)) արաշակի իմաստով համարվում են ճշգրիտ:

B. V. GRIGORIAN. *Uniqueness theorems for harmonic functions of three variables in domains of rotation (summary)*

Harmonic functions which together with their gradients tend to zero when the argument approaches the boundary are considered.

It is proved that under (A) and (B) the uniqueness holds and the conditions are shown to be necessary.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Н. Мергелян. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, УМН, 11 : 5 (71), 1956, 3—26.
2. В. Рао. Теорема единственности для гармонических функций, Матем. записки, 3 : 3, 1968, 247—252.
3. Д. С. Кузнецов. Специальные функции, изд. «Высшая школа», М., 1965, 227—235.
4. С. Бергман. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными, М., изд. «Мир», 1964.
5. М. А. Евграфов. Аналитические функции, изд. «Наука», М., 1968, гл. IV.
6. S. E. Warschawski. On conformal mapping of infinite strips, Trans. Amer. Math. Soc., 51, 1942, 280—335.

В. П. ГРОМОВ

К ТЕОРИИ КРАТНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ. II

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию кратных рядов Дирихле в p -мерном комплексном пространстве C^p , начатом автором в работах [1], [2], [3] и [4]. Особенно тесно эта работа примыкает к работе [4] и ее нужно считать продолжением работы [4].

Здесь рассматриваются ряды вида

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}, \quad (1.1)$$

где $d_{(n)} \in C$, $(z) = (z_1, \dots, z_p) \in C^p$, $(n) = (n_1, \dots, n_p)$,

$$n_i = 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, p; (\lambda_{(n)}) = (\lambda_{(n)}^{(1)}, \dots, \lambda_{(n)}^{(p)}),$$

$(\lambda_{(n)}, z) = \lambda_{(n)}^{(1)} z_1 + \dots + \lambda_{(n)}^{(p)} z_p$; $\{\lambda_n^{(i)}\}$ — последовательности, вообще говоря, комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n_1 + \dots + n_p \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_1 + \dots + n_p)}{|\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots + |\lambda_{(n)}^{(p)}|} = 0. \quad (1.2)$$

В работе [2] и [4] показано, что область абсолютной сходимости ряда (1.1) с положительными показателями, удовлетворяющими условию (1.2), представляет собой трубчатую область $T_B = B + iR^p$. Основание B которой — выпуклая октантаобразная область в R^p , введено понятие систем сопряженных абсцисс сходимости, понятие гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда (1.1) и установлено соотношение

$$\overline{\lim}_{n_1 + \dots + n_p \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + \overline{x}_1 \lambda_{(n)}^{(1)} + \dots + \overline{x}_p \lambda_{(n)}^{(p)}}{\lambda_{(n)}^{(1)} + \dots + \lambda_{(n)}^{(p)}} = 0, \quad (1.3)$$

определяющее гиперповерхность $S(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p)$ сопряженных абсцисс сходимости. (Здесь $(\overline{x}) = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_p)$ — система сопряженных абсцисс сходимости ряда (1.1). При этом множество точек (x) области B определяется соотношением

$$\overline{\lim}_{n_1 + \dots + n_p \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + x_1 \lambda_{(n)}^{(1)} + \dots + x_p \lambda_{(n)}^{(p)}}{\lambda_{(n)}^{(1)} + \dots + \lambda_{(n)}^{(p)}} < 0.$$

В работе [4] получена следующая геометрическая характеристика гиперповерхностей сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле (см. [4], теорема 3): чтобы поверхность $S \subset R^p$ могла представлять со-

бой гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда (1.1) с положительными показателями, удовлетворяющими условию (1.2), необходимо и достаточно, чтобы она являлась границей некоторой выпуклой октантаобразной области в R^p . В связи с этой теоремой естественно возникает вопрос: а будет ли подобное утверждение справедливо в классе рядов Дирихле (1.1) с фиксированными показателями $\{\lambda_n^{(i)}\}$, $(i=1, 2, \dots, p)$, удовлетворяющими условию (1.2)? Ответ на этот вопрос (в отличие от одномерного случая) оказывается отрицательным. (В одномерном случае ряд Дирихле с фиксированными положительными показателями $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющими условию (1.2), может иметь в качестве области сходимости любую наперед заданную полуплоскость).

Замечание. Трубочатую область $T_B = B + iR^p$ с выпуклым основанием $B \subset R^p$ мы называем октантаобразной, если из того, что $(z') \in T_B$, следует, что T_B принадлежат все точки (z) вида $\operatorname{Re} z_j < \operatorname{Re} z'_j$, $(j=1, 2, \dots, p)$.

В настоящей работе показывается, что имеются классы кратных рядов Дирихле с фиксированными положительными показателями, удовлетворяющими условию (1.2), которые не могут иметь в качестве области сходимости любую трубочатую выпуклую октантаобразную область. Здесь же указываются достаточные, а также необходимые и достаточные условия на показатели, обеспечивающие возможность того, чтобы ряды Дирихле с такими показателями могли иметь в качестве области сходимости любую трубочатую выпуклую октантаобразную область в C^p .

§ 3 данной работы посвящен кратным рядам Дирихле с комплексными показателями. Здесь указываются способы нахождения области абсолютной сходимости таких рядов. Установлены формулы, определяющие наибольшую полную выпуклую кратнокруговую область, а также и наибольший шар, в которых ряд абсолютно сходится.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие возможность ряду Дирихле с комплексными показателями иметь в качестве области сходимости любую выпуклую область.

Замечание. В настоящей работе рассматриваются абсолютно сходящиеся ряды Дирихле. Под областью сходимости здесь понимается открытое связное множество, состоящее из точек $(z) \in C^p$, в окрестности которых ряд сходится абсолютно.

§ 2. Ряды с положительными показателями

Рассмотрим кратный ряд Дирихле

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(\lambda_{(n)}, z)} \quad (2.1)$$

с положительными показателями $\{\lambda_n^{(i)}\}$, удовлетворяющими условию: $\lambda_{n+1}^{(i)} < \lambda_n^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, p$; $n=1, 2, \dots$;

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |n|}{|\lambda_{(n)}|} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$|n| = n_1 + \dots + n_p; |\lambda_{(n)}| = \lambda_{(n)}^{(1)} + \dots + \lambda_{(n)}^{(p)}.$$

Как уже отмечалось выше, основание B области T_B абсолютной сходимости ряда (2.1) представляет собой выпуклую октантаобразную область в R^p , граница которой определяется соотношением (см. [4]):

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$(\bar{x}, \lambda_{(n)}) = \bar{x}_1 \lambda_{(n)}^{(1)} + \dots + \bar{x}_p \lambda_{(n)}^{(p)}.$$

Покажем как из формулы (2.3) выделяются опорные плоскости выпуклой области B . Для этого обозначим через

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\alpha, \delta)} e^{(\lambda_{(n)}, z)} \quad (2.4)$$

часть ряда (2.1), показатели которой лежат в конусе $\bar{Q}(\alpha, \delta)$ с вершиной в начале, осью $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ и раствора $\delta > 0$. Положим

$$k(\alpha, \delta) = - \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}|}{\|\lambda_{(n)}\|}, \quad (2.5)$$

где $\|\lambda_{(n)}\| = \sqrt{(\lambda_{(n)}^{(1)})^2 + \dots + (\lambda_{(n)}^{(p)})^2}$.

Отметим, что $k(\alpha, \delta_1) \leq k(\alpha, \delta_2)$, если $\delta_2 < \delta_1$. В случае, если в конусе $\bar{Q}(\alpha, \delta)$ окажется лишь конечное множество показателей ряда (2.1), то будем полагать $k(\alpha, \delta) = +\infty$.

Лемма 1. Ряд (2.4) сходится абсолютно в области

$$D_1 = \cap_{(z) \in \bar{Q}(\alpha, \delta)} \{(z = x + iy): x_1 \cos \beta_1 + \dots + x_p \cos \beta_p - k(\alpha, \delta) < 0\}$$

и расходится в области

$$D_2 = \cap_{(z) \in \bar{Q}(\alpha, \delta)} \{(z = x + iy): x_1 \cos \beta_1 + \dots + x_p \cos \beta_p - k(\alpha, \delta) > 0\}.$$

Доказательство. Пусть $(z) \in D_1$, тогда из формулы (2.3) для ряда (2.4) имеем

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}| + (x, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln |d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}|}{\|\lambda_{(n)}\|} + (x, \cos \alpha^{(n)}) \right\} < 0,$$

где

$$(x, \cos \alpha^{(n)}) = [x_1 \cos \alpha_1^{(n)} + \dots + x_p \cos \alpha_p^{(n)}; \cos \alpha_i^{(n)} = \frac{\lambda_{(n)}^{(i)}}{\|\lambda_{(n)}\|}.$$

А это означает (см. [4]), что в точках $z(z) = (x + iy) \in D_1$ ряд (2.4) сходится абсолютно.

Пусть $(z) \in D_2$, тогда

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}| + (x, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} = \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln |d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}|}{|\lambda_{(n)}|} + (x, \cos \alpha^{(n)}) \right\} > 0.$$

Но это означает (см. [4]), что ряд (2.4) в этой точке расходится. Лемма доказана.

Теперь докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Основание В области T_B абсолютной сходимости ряда (2.1) может быть представлено как множество внутренних точек области*

$$\overline{D} = \cap \{ (x): (x, \cos \alpha) - k(\alpha) \leq 0 \}, \quad (2.6)$$

$$0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

$$\text{где } k(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} k(\alpha, \delta). \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $(x') \notin \overline{D}$, покажем тогда, что в точках $(z) = (x' + iy)$ ряд (2.3) расходится. Действительно, в этом случае существует направление (α') такое, что в точке (x') имеем

$$(x', \cos \alpha') - k(\alpha') > \mu > 0.$$

Согласно непрерывности левой части неравенства и определению $k(\alpha)$ найдется достаточно малое $\delta > 0$, такое что неравенство

$$(x', \cos \beta) - k(\alpha', \delta) \geq \frac{\mu}{2} > 0$$

будет справедливо для всех $(\beta) \in \overline{Q}(\alpha', \delta)$. А это означает по лемме 1, что ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\alpha', \delta)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}$$

в точках $(z = x' + iy)$ расходится.

Пусть теперь $(x) \in \overline{D}$. Покажем, что в точках $(z = x + iy)$ ряд (2.1) абсолютно сходится. Для этого зафиксируем некоторое направление $(\alpha^{(1)}) = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_p^{(1)})$. Тогда в рассматриваемой точке имеем:

$$(x, \cos \alpha^{(1)}) - k(\alpha^{(1)}) \leq -\mu_1 < 0.$$

В силу непрерывности левой части неравенства и определения $k(\alpha)$ отсюда получаем следующее неравенство:

$$(x, \cos \beta) - k(\alpha^{(1)}, \delta_1) \leq -\frac{\mu_1}{2} < 0,$$

справедливое для всех (x) из некоторой окрестности рассматриваемой точки и всех $(\beta) \in \overline{Q}_1(\alpha^{(1)}, \delta_1)$, где $\delta_1 > 0$ — достаточно мало и зависит от $(\alpha^{(1)})$.

Согласно лемме 1 заключаем, что в некоторой окрестности точки (z) сходится абсолютно ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\alpha^{(1)}, \delta_1)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}.$$

По лемме Гейне-Бореля найдется конечное множество точек $(\alpha^{(1)}), \dots, (\alpha^{(k)})$ и им соответствующих конусов $\bar{Q}_i(\alpha^{(i)}, \delta_i)$, $(i=1, 2, \dots, p)$, причем каждый ряд, соответствующий этим конусам в некоторой окрестности рассматриваемой точки абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{(n)} \left| d_{(n)} e^{(\lambda_{(n)}, z)} \right| \leq \sum_{i=1}^k \sum_{(n)} \left| d_{(n)}^{(\alpha^{(i)}, \delta_i)} e^{(\lambda_{(n)}, z)} \right| < \infty.$$

Следовательно, $(z) \in T_B$ и, тем самым, теорема доказана полностью.

Как уже отмечалось во введении, в классе рядов вида (2.1) с показателями, удовлетворяющими условию (2.2), в качестве области сходимости ряда может быть любая трубчатая область $T_B = B + iR^p$, с любым выпуклым октантообразным основанием B . Покажем, что в случае фиксированных показателей подобное утверждение вообще говоря неверно. Действительно, рассмотрим следующий простой пример.

Пусть $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) — последовательности положительных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\mu_n \leq \tau \lambda_n$, $n=1, 2, \dots$,
- 2) $\mu_{n+1} > (\tau + \delta) \lambda_n$, $n=1, 2, \dots$,

где $\tau > 0$, $\delta > 0$ — некоторые фиксированные числа.

Будем рассматривать двойные ряды Дирихле с этими показателями:

$$\sum_{n, k=1}^{\infty} d_{nk} e^{\lambda_n z} e^{\mu_k w}. \quad (2.8)$$

Наша задача показать, что такие ряды не могут иметь в качестве области сходимости любую трубчатую выпуклую октантообразную область. Для этого рассмотрим в плоскости (λ, μ) угол (α, β) с вершиной в начале, в котором находится лишь конечное число показателей $\{(\lambda_n, \mu_k)\}$. (В силу условий 1) и 2) такой угол существует).

Основание B области сходимости любого ряда вида (2.8), согласно теореме 1, представляет собой пересечение полупространств $x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 - k(\alpha) < 0$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, а $k(\alpha)$ определяется по формулам (2.5) и (2.7). Так как в угле (α, β) лежит лишь конечное число показателей ряда, то величины $k(\alpha)$, соответствующие направлениям (α) , близким к биссектрисе угла (α, β) , будут равны по определению $+\infty$. Следовательно, в качестве границы области B для рядов вида (2.8) не может быть, например, кривая, имеющая внутри угла (α, β) прямолинейный отрезок, перпендикулярный биссектрисе этого угла.

Итак, ряды с рассмотренными показателями $\{(\lambda_n, \mu_k)\}$ не могут иметь произвольную трубчатую выпуклую октантообразную область сходимости. Естественно возникает вопрос об условиях, обеспечивающих возможность произвольной трубчатой выпуклой октантообразной области сходимости ряда.

Определение. Систему положительных чисел $\{\lambda_n^{(i)}\}$ ($i=1, 2, \dots, p$; $n=1, 2, \dots$) назовем асимптотически всюду плотной в октанте $O \{x_i > 0 \ (i=1, 2, \dots, p)\}$, если любой луч этого октанта, исходящий из начала, может быть как угодно хорошо приближен посредством векторов $(\lambda_n) = (\lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(p)})$, компоненты которых принадлежат соответствующим последовательностям $\{\lambda_n^{(i)}\}$ рассматриваемой системы чисел.

Теорема 2. Для того чтобы ряд (2.1) с фиксированной системой показателей $\{\lambda_n^{(i)}\}$, удовлетворяющей условию (2.2), мог иметь в качестве области сходимости любую трубчатую выпуклую октантообразную область, необходимо и достаточно чтобы система этих показателей являлась асимптотически всюду плотной в октанте $O \{x_i > 0 \ (i=1, 2, \dots, p)\}$.

Доказательство. (Достаточность). Пусть B — произвольная выпуклая октантообразная область в R^p . Покажем, что существует кратный ряд Дирихле с показателями, удовлетворяющими условиям теоремы, область сходимости которого $T_B = B + iR^p$. Для этого рассмотрим опорную функцию области B :

$$H_B(\alpha) = H_B(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sup_{(x) \in B} (x_1 \cos \alpha_1 + \dots + x_p \cos \alpha_p).$$

Здесь $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ — углы, образованные выбранным лучом с осями координат. Не снижая общности рассуждений, предположим, что точка $(0) = (0, \dots, 0)$. Гиперповерхность $S = \partial B$ в этом случае вполне определяется значениями функции $H_B(\alpha)$ при $\alpha_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ($i=1, 2, \dots, p$).

Построим ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}, \quad (2.9)$$

где

$$d_{(n)} = \exp \{-H_B(\alpha^{(n)}) \|\lambda_{(n)}\|\}; \quad \alpha_i^{(n)} = \arccos \frac{\lambda_n^{(i)}}{\|\lambda_{(n)}\|} \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Из определения опорной функции области B вытекает, что для каждой точки $(\bar{x}) \in B$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} &= \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{(\bar{x}, \lambda_{(n)}) - H_B(\alpha^{(n)}) \|\lambda_{(n)}\|}{\|\lambda_{(n)}\|} = \\ &= \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_1 \cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \bar{x}_p \cos \alpha_p^{(n)} - H_B(\alpha^{(n)})}{\cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \cos \alpha_p^{(n)}} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В силу свойств опорной функции выпуклой области для каждой точки $(\bar{x}) \in S$ найдется направление $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ такое, что $\bar{x}_1 \cos \alpha_1 + \dots + \bar{x}_p \cos \alpha_p = H_B(\alpha)$.

Согласно условиям теоремы система показателей $\{\lambda_n^{(i)}\}$ ($i=1, 2, \dots, p$) является асимптотически всюду плотной в O . А это означает,

что для каждого направления (α) можно указать последовательность векторов $(\lambda_n) = (\lambda_n^{(1)}, \dots, \lambda_n^{(p)})$ таких, что $\alpha_i^{(n)} \rightarrow \alpha_i$, $i=1, 2, \dots, p$ при $|n| \rightarrow \infty$.

Так как опорная функция $H_B(\alpha)$ — непрерывна, то для указанной последовательности векторов будем иметь

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_1 \cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \bar{x}_p \cos \alpha_p^{(n)} - H_B(\alpha^{(n)})}{\cos \alpha_1^{(n)} + \dots + \cos \alpha_p^{(n)}} = 0.$$

Отсюда и из неравенства (2.10) следует, что для каждой точки $(\bar{x}) \in S = \partial B$ имеем

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} = 0.$$

А это, как известно (см. [4]), означает, что B — основание области сходимости ряда (2.9). Достаточность $\frac{1}{2}$ доказана.

Необходимость. Пусть система показателей $\{\lambda_n^{(i)}\}$ ($i=1, 2, \dots, p$) не образует асимптотически плотную систему всюду в октанте O . Именно, пусть конус $\bar{Q}(\alpha, \delta)$ с вершиной в точке $(0, \dots, 0)$, осью (α) и раствора $\delta > 0$ содержит лишь конечное число показателей системы $\{\lambda_n^{(i)}\}$. Тогда, согласно теореме 1, ряд Дирихле с рассматриваемой системой показателей не может иметь в качестве гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости, например, поверхность, имеющую в пересечении с конусом $\bar{Q}(\alpha, \delta)$ кусок плоскости, перпендикулярной оси (α) этого конуса. Тем самым доказана и необходимость.

Отметим следующий достаточный признак

Теорема 3. Если фиксированная система показателей $\{\lambda_n^{(i)}\}$, $i=1, 2, \dots, p$; $n=1, 2, \dots$, с условием (2.2), дополнительно удовлетворяет условию

$$\lambda_{n_j+1}^{(j)} - \lambda_{n_j}^{(j)} = o(\lambda_{n_k}^{(k)}), \quad n_j, n_k \rightarrow \infty \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (2.11)$$

(k — фиксированно), то ряд (2.1) с такими показателями может иметь в качестве области сходимости любую трубчатую выпуклую октантообразную область.

Это утверждение следует из теоремы 2, если учесть, что условие (2.11) обеспечивает асимптотическую плотность системы $\{\lambda_n^{(i)}\}$ ($i=1, 2, \dots, p$) всюду в октанте O .

§ 3. Кратные ряды с комплексными показателями

Пусть

$$\{\lambda_n^{(i)}\} \quad (i=1, 2, \dots, p; \quad n=1, 2, \dots)$$

—последовательности комплексных чисел, расположенных в порядке возрастания модулей и удовлетворяющих условию

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |n|}{|\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots + |\lambda_{(n)}^{(p)}|} = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим ряд с указанными комплексными показателями

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}, \quad (3.2)$$

где

$$d_{(n)} \in C, (\lambda_{(n)}, z) = \lambda_{(n)}^{(1)} z_1 + \dots + \lambda_{(n)}^{(p)} z_p.$$

Обозначим

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\psi, \gamma)} e^{(\lambda_{(n)}, z)} \quad (3.3)$$

часть ряда (3.2), состоящую из тех членов ряда (3.2), аргументы показателей которых удовлетворяют условию:

$$\psi_j - \gamma \leq \varphi_{(n)}^{(j)} \leq \psi_j + \gamma; \quad j=1, 2, \dots, p,$$

$$(\lambda_{(n)}) = (|\lambda_{(n)}^{(1)}| e^{i\varphi_{(n)}^{(1)}}, \dots, |\lambda_{(n)}^{(p)}| e^{i\varphi_{(n)}^{(p)}}),$$

$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ — фиксированный вектор, координаты которого удовлетворяют условию: $0 \leq \psi_j \leq 2\pi$ ($j=1, 2, \dots, p$), $\gamma > 0$ — достаточно мало.

Положим

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}^{(\psi, \gamma)}| + X_1 |\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots + X_p |\lambda_{(n)}^{(p)}|}{|\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots + |\lambda_{(n)}^{(p)}|} = 0. \quad (3.4)$$

Это соотношение (см. [4]) определяет границу $D(\psi, \gamma)$ некоторой выпуклой октантаобразной области $B(\psi, \gamma)$. Причем, как нетрудно заметить $B(\psi, \gamma_2) \subset B(\psi, \gamma_1)$ при $\gamma_2 < \gamma_1$. Если ряд (3.3) имеет лишь конечное множество членов, то будем полагать $X_j = +\infty$ ($j=1, 2, \dots, p$).

Лемма 2. Пусть (X) — некоторая система чисел, определяемая соотношением (3.4). Ряд (3.3) сходится абсолютно и равномерно в области

$$G_q = \cap \{(z): \operatorname{Re}(z_j e^{i\beta_j}) - X_j < -q < 0 \quad (j=1, 2, \dots, p)\}$$

$$(\psi_j - \gamma \leq \beta_j \leq \psi_j + \gamma) \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

и расходится в области

$$Q = \cap \{(z): \operatorname{Re}(z_j e^{i\beta_j}) - X_j > 0 \quad (j=1, 2, \dots, p)\}$$

$$(\psi_j - \gamma \leq \beta_j \leq \psi_j + \gamma) \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

Доказательство. Пусть $(z) \in G_q$, тогда, принимая во внимание соотношение (3.4), находим при $n_1 + \dots + n_p > N(\varepsilon)$:

$$|d_{(n)}^{(\psi, \tau)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}| < \exp \{(\varepsilon - X + \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_{(n)}}), |\lambda_{(n)}|)\} \leq \\ \leq \exp \{(\varepsilon - q) |\lambda_{(n)}|\} \leq \exp \left\{ -\frac{q}{2} |\lambda_{(n)}| \right\}; \quad \varepsilon < \frac{q}{2},$$

где

$$(\varepsilon - X + \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_{(n)}}), |\lambda_{(n)}|) = [\varepsilon - X_1 + \operatorname{Re}(z_1 e^{i\varphi_{(n)}^{(1)}})] |\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots \\ \dots + [\varepsilon - X_p + \operatorname{Re}(z_p e^{i\varphi_{(n)}^{(p)}})] |\lambda_{(n)}^{(p)}|.$$

Отсюда в силу (3.1) следует первое утверждение леммы.

Пусть теперь $(z) \in Q$. Согласно (3.1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $(\bar{n}) = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_p)$, такая, что

$$|d_{(n)}^{(\psi, \tau)}| > \exp \{(\varepsilon - X, |\lambda_{(n)}|)\}.$$

Поэтому

$$|d_{(n)}^{(\psi, \tau)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}| > \exp \{(-\varepsilon - X + \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_{(n)}}), |\lambda_{(n)}|)\} \geq \\ > \exp \{(-\varepsilon + \mu) |\lambda_{(n)}| \} > 1, \quad \text{при } \varepsilon < \mu.$$

Лемма доказана.

Введем область

$$B(\psi) = \bigcup_{\tau > 0} B(\psi, \tau).$$

$B(\psi)$ — как объединение вложенных друг в друга выпуклых октантообразных областей — также является выпуклой октантообразной областью. Границу области $B(\psi)$ обозначим через $D(\psi)$. Точки поверхности $D(\psi)$ будем обозначать $(\bar{X}) = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)$.

Далее положим

$$\bar{D}(\psi) = \bigcup \{(z): \operatorname{Re}(z_j e^{i\varphi_j}) - \bar{X}_j \leq 0 \ (j=1, 2, \dots, p)\},$$

$$(\bar{X}) \in D(\psi).$$

$$\bar{D} = \bigcap_{|\psi|} \bar{D}(\psi) = \bigcap \bar{D}(\psi_1, \dots, \psi_p),$$

$$0 \leq \psi_j \leq 2\pi \ (j=1, 2, \dots, p).$$

Заметим, что $\bar{D}(\psi)$ — выпуклые октантообразные области, каждая из которых делит пространство C^p на две части: $\bar{D}(\psi)$ и $C\bar{D}(\psi)$.

Обозначим через D множество внутренних точек области $\bar{D}$. D — как пересечение выпуклых областей $D(\psi)$ — сама является выпуклой областью.

Теорема 4. В выпуклой области D ряд (3.2) сходится абсолютно, причем на любом компакте области D он сходится равномерно. Вне области $\bar{D}$ ряд (3.2) расходится.

Доказательство. Пусть $(z) \in D$ и пусть $(\psi^{(1)})$ — некоторая фиксированная точка p -мерного куба $K[0, 2\pi]$. Следовательно, в точке (z) справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}(z_j e^{i\psi_j^{(1)}}) - X_j \leq -\gamma_1 < 0 \quad (j=1, 2, \dots, p); (\bar{X}) \in D(\psi^{(1)}).$$

В силу непрерывности левых частей этих неравенств, они справедливы для всех (z) из некоторой окрестности рассматриваемой точки. Согласно определению величин $(\bar{X})$ и непрерывности левых частей как функций ψ_j , найдется такое положительное число $\gamma_1 > 0$, что будут справедливы следующие неравенства:

$$\operatorname{Re}(z_j e^{i\beta_j}) - X_j \leq -\frac{\gamma_1}{2} < 0 \quad (j=1, 2, \dots, p); (X) \in D(\psi^{(1)}, \gamma),$$

для всех $\beta_j \in [\psi_j^{(1)} - \gamma_1; \psi_j^{(1)} + \gamma_1]$ ($j=1, \dots, p$).

А это означает по лемме 2, что ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\psi^{(1)}, \gamma_1)} e^{(\lambda_{(n)}, z)} \quad (3.5)$$

в некоторой окрестности рассматриваемой точки (z) сходится абсолютно и равномерно.

Таким образом, каждой точке (ψ) (p -мерного ограниченного замкнутого куба $K[0, 2\pi]$) мы можем поставить в соответствие некоторую γ -окрестность этой точки. А этой окрестности, в свою очередь, соответствует ряд вида (3.5), абсолютно сходящийся в некоторой окрестности рассматриваемой точки $(z) \in D$. По лемме Гейне-Бореля существует конечное множество точек $(\psi^{(1)}), \dots, (\psi^{(p)})$ куба $K[0, 2\pi]$ и им соответствующих γ -окрестностей, которые покрывают целиком весь куб $K[0, 2\pi]$.

Следовательно, в некоторой окрестности точки $(z) \in D$ имеем

$$\sum_{(n)} |d_{(n)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}| \leq \sum_{j=1}^k \sum_{(n)} |d_{(n)}^{(\psi^{(j)}, \gamma_j)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}| < \infty.$$

Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $(z) \notin \bar{D}$. Это означает, что существует такое (ψ^*) , что $(z) \notin \bar{D}(\psi^*)$. Следовательно, в данной точке имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}(z_j e^{i\psi_j^*}) - \bar{X}_j > \mu > 0 \quad (j=1, 2, \dots, p), (\bar{X}) \in D(\psi^*).$$

В силу непрерывности левых частей этих неравенств и по определению величин $(\bar{X})$ заключаем, что в рассматриваемой точке

$$\operatorname{Re}(z_j e^{i\beta_j}) - X_j > \frac{\mu}{2} > 0 \quad (j=1, 2, \dots, p); (X) \in D(\psi^*, \gamma),$$

для всех $\beta_i \in [\psi_i - \gamma, \psi_i + \gamma]$ ($i = 1, 2, \dots, p$) и достаточно малом $\gamma > 0$.

Из последних неравенств в силу леммы 2 следует, что ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\psi, \gamma)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}$$

в рассматриваемой точке расходится. А, следовательно, и ряд (3.2) расходится. Тем самым теорема доказана полностью.

Область D —как мы отмечали—выпукла, поэтому ее можно представить в виде пересечения полупространств

$$ax - b \leq 0,$$

где $ax - b = 0$ —опорные плоскости для области D . Покажем как определяются эти опорные плоскости для области D .

Введем следующие обозначения:

$$z_j = x_j + ix_{p+j} \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (x) = (x_1, \dots, x_{2p}) \in R^{2p}.$$

Через $\bar{A}(\alpha, \delta)$ обозначим замкнутый конус в $2p$ -мерном вещественном пространстве R^{2p} с вершиной в точке $(0) = (0, \dots, 0)$, осью $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2p})$; $\alpha_j \in [0, \pi]$ ($j=1, 2, \dots, 2p$) и раствора $\delta > 0$.

Здесь α_j —углы, которые составляет направление (α) с осями координат в R^{2p} .

Положим

$$b(\alpha, \delta) = - \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}|}{\| \lambda_{(n)} \|},$$

где $\| \lambda_{(n)} \| = \sqrt{|\lambda_{(n)}^{(1)}|^2 + \dots + |\lambda_{(n)}^{(p)}|^2}$, а $d_{(n)}^{(\alpha, \delta)}$ —коэффициенты членов ряда (3.2), показатели которых лежат в конусе $\bar{A}(\alpha, \delta)$.

Лемма 3. Ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)}^{(\alpha, \delta)} e^{(\lambda_{(n)}, z)}$$

сходится абсолютно в области

$$Q_1 = \cap \left\{ (z): \sum_{i=1}^p x_i \cos \beta_i - x_{p+i} \cos \beta_{p+i} - b(\alpha, \delta) < 0 \right\}$$

$$(\beta) \in \bar{A}(\alpha, \delta)$$

и расходится в области

$$Q_2 = \cap \left\{ (z): \sum_{i=1}^p x_i \cos \beta_i - x_{p+i} \cos \beta_{p+i} - b(\alpha, \delta) > 0 \right\}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 с заменой $|\lambda_{(n)}|$ на норму $\| \lambda_{(n)} \|$ и опирается на определение величины $b(\alpha, \delta)$.

Теорема 5. Область D абсолютной сходимости ряда (3.2) может быть представлена в виде

$$D = \cap \left\{ (z) : \sum_{l=1}^p x_l \cos \alpha_l - x_{p+l} \cos \alpha_{p+l} - b(\alpha) < 0 \right\},$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq \alpha_j \leq \pi \\ j = 1, 2, \dots, 2p \end{array} \right)$$

где

$$b(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} b(\alpha, \delta).$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1 с использованием леммы 3, поэтому мы его не приводим.

Здесь так же как и в случае рядов с положительными показателями возникает вопрос об условиях на систему показателей, которые обеспечивали бы возможность иметь в качестве области сходимости ряда любую выпуклую область в C^p .

Теорема 6. Для того чтобы ряд (3.2) с фиксированной системой комплексных показателей $\{\lambda_n^{(i)}\}$, удовлетворяющих условию (3.1) мог иметь в качестве области сходимости любую ограниченную выпуклую область в C^p , необходимо и достаточно чтобы система этих показателей являлась асимптотически всюду плотной в пространстве C^p .

Доказательство мы опускаем, так как оно проводится аналогично доказательству теоремы 2, если использовать утверждения теоремы 5.

В заключение остановимся на вопросах, связанных с нахождением наибольшей кратно-круговой области абсолютной сходимости ряда (3.2).

Не снижая общности рассуждений, будем предполагать, что область D содержит точку $(0) = (0, \dots, 0)$.

Определение. Положительные числа $r_1, \dots, r_p$ назовем системой сопряженных радиусов ряда (3.2), если ряд сходится в цилиндре $E_1 \{|z_j| < r_j \ (j = 1, 2, \dots, p)\}$, а в любом полицилиндре $E_2 \{|z_j| < R_j, R_j > r_j \ (j = 1, 2, \dots, p)\}$ имеется хотя бы одна точка, в которой ряд расходится.

Теорема 7. Системы сопряженных радиусов сходимости ряда (3.2) определяются соотношением

$$\varliminf_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d(n)| + r_1 |\lambda_n^{(1)}| + \dots + r_p |\lambda_n^{(p)}|}{|\lambda_n^{(1)}| + \dots + |\lambda_n^{(p)}|} = 0. \quad (3.6)$$

Доказательство. Пусть $(r) = (r_1, \dots, r_p)$ — некоторая система положительных чисел, определяемая соотношением (3.6). Покажем, что ряд (3.2) в полицилиндре $E_1 \{|z_j| < r_j \ (j = 1, \dots, p)\}$ сходится абсолютно, а в любом полицилиндре $E_2 \{|z_j| < R_j, R_j < r_j \ (j = 1, 2, \dots, p)\}$ имеется хотя бы одна точка, в которой ряд расходится.

Действительно, пусть $(z) \in E_1$, положим

$$\delta_j = r_j - |z_j| \ (j = 1, 2, \dots, p), \quad \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_p).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |d_{(n)}^{(\lambda_{(n)}, z)}| &\leq \exp \{(\varepsilon - r + |z|, |\lambda_{(n)}|)\} \leq \exp \{(\varepsilon - \delta) |\lambda_{(n)}|\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{\delta}{2} |\lambda_{(n)}| \right\}, \quad \text{при } \varepsilon < \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

где $n_1 + \dots + n_p > N(\varepsilon)$.

Отсюда, в силу условия (3.1), следует, что ряд (3.2) в полицилиндре E_1 сходится абсолютно.

Так как $(r_1, \dots, r_p)$ — система, определяемая соотношением (3.6), то можно указать хотя бы одно направление (ψ^*) и сколь угодно малое число $\gamma > 0$ такие, что для рассматриваемой системы $(r_1, \dots, r_p)$ будет справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}^{(\psi^*, \gamma)}| + r_1 |\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots + r_p |\lambda_{(n)}^{(p)}|}{|\lambda_{(n)}^{(1)}| + \dots + |\lambda_{(n)}^{(p)}|} = 0,$$

где $d_{(n)}^{(\psi^*, \gamma)}$ — коэффициенты тех членов ряда (3.2), аргументы показателей $(\lambda_{(n)}) = (|\lambda_{(n)}^{(1)}| e^{i\varphi_{(n)}^{(1)}}, \dots, |\lambda_{(n)}^{(p)}| e^{i\varphi_{(n)}^{(p)}})$ которых удовлетворяют условию

$$\psi_j^* - \gamma \leq \varphi_{(n)}^{(j)} \leq \psi_j^* + \gamma \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать последовательность векторов (n) , по которой

$$|d_{(n)}^{(\varphi^*, \gamma)}| > \exp \{(-\varepsilon - r, |\lambda_{(n)}|)\},$$

причем $\varphi_{(n)}^{(j)} \rightarrow \psi_j^* \quad (j=1, 2, \dots, p)$, $|n| \rightarrow \infty$. Теперь возьмем точку $(z) = (R_1^1 e^{-i\psi_1^*}, \dots, R_p^1 e^{-i\psi_p^*})$, где $R_j > R_j^1 > r_j \quad (j=1, 2, \dots, p)$.

Тогда будем иметь

$$|d_{(n)}^{(\varphi^*, \gamma)} e^{\frac{(\lambda_{(n)}, z)}{n}}| > \exp \{(-\varepsilon - r + R' \cos(\varphi_{(n)} - \psi^*), |\lambda_{(n)}|)\}.$$

При всех достаточно больших $|n|$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ фигурная скобка правой части последнего неравенства будет положительной. Поэтому в рассматриваемой точке (z)

$$|d_{(n)}^{(\varphi^*, \gamma)} e^{\frac{(\lambda_{(n)}, z)}{n}}| > 1.$$

А это означает, что ряд (3.2) в этой точке расходится. Теорема доказана полностью.

Замечание. Заметим, что соотношение (3.6) определяет границу наибольшей полной выпуклой кратно круговой области с центром в точке $(0) = (0, \dots, 0)$, в которой ряд (3.2) абсолютно сходится.

В некоторых случаях может быть полезно также и следующее утверждение.

Теорема 8. Радиус R наибольшего шара с центром в начале, внутри которого сходится абсолютно ряд (3.2), определяется по формуле

$$R = - \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ln |d_{(n)}|}{|p_{(n)}|}.$$

Доказательство этой теоремы мало отличается от доказательства предыдущей теоремы, поэтому мы его опускаем.

Московский энергетический
институт

Поступило 22.XII.1969

Վ. Պ. ԳՐՈՄՈՎ. Դիրիխլի բազմապատիկ շարքերի տեսության վերաբերյալ. II (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում շարունակվում է Դիրիխլի բազմապատիկ շարքերի ուսումնասիրությունը:

Բերվում են բավարար, ինչպես նաև անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ շարքի ցուցիչների վրա, որոնց բավարարման դեպքում սենսաժ ցուցիչներով Դիրիխլի շարքերի համար որպես զուգամիտության տիրույթ կարող է ծառայել կամայական խողովակաձև ուռուցիկ օկտանտաձև տիրույթ: Բերվում են կոմպլեքս ցուցիչներով շարքերի զուգամիտության տիրույթների կառուցման եղանակներ:

V. P. GROMOV. *On the theory of multiple Dirichlet series. II (summary)*

In the paper we continue our investigation of multiple 'Dirichlet series. Conditions are established for a Dirichlet series with given exponents to have any tubelike convex octantlike domain as convergence domain. A method of determining the domains of absolute convergence for series with complex exponents is indicated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. П. Громов. Ряды полиномов Дирихле многих комплексных переменных, ДАН СССР, 1967, 173, № 5, 999—1001.
2. В. П. Громов. О последовательностях полиномов Дирихле, Доклады научн. техн. конференции МЭИ, сер. матем., 1969, 18—25.
3. В. П. Громов. Кратные ряды Дирихле, Сиб. матем. журнал, X, № 3, 1969, 522—536.
4. В. П. Громов. К теории кратных рядов Дирихле. I, Изв. АН АрмССР, „Математика“, V, № 5, 1970, 449—458.

В. Х. МУСОЯН

О ЛАКУНАРНЫХ СИСТЕМАХ ДИРИХЛЕ

В в е д е н и е

Пусть E — измеримое множество действительных чисел с положительной мерой Лебега. Если f — комплекснозначная измеримая функция, определенная на E , то обозначим

$$\|f\|_E = \left\{ \int_E |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \quad (1 < p < \infty).$$

Через $L^p(E)$ обозначим множество всех f , для которых $\|f\|_E < \infty$. Число $\|f\|_E$ будем называть $L^p(E)$ -нормой функции f .

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots; \lambda_n \rightarrow \infty$. Рассмотрим систему Дирихле

$$\{e^{-2\pi\lambda_n x}\} \quad (1)$$

в пространстве $L^p(E)$.

Л. Шварц в работе [1] изучает систему (1) в пространствах

$$L^p(0, \infty) \text{ и } L^p(A, B), \quad -\infty < A < B < \infty.$$

Основной результат Шварца заключается в следующем.

Теорема I. Если ряд $\sum 1/\lambda_n$ сходится и если $\lambda_{n+1} - \lambda_n > q > 0$, то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^p(0, \infty)$ -норме конечными линейными комбинациями функций из системы (1), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в полуплоскости $x > 0$, которая совпадает почти всюду на $(0, \infty)$ с функцией $F(x)$;

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x \geq \varepsilon > 0$;

3°. Имеют место неравенства

$$e^{2\pi\lambda_1 x} |F(z)| \leq \sum_n |c_n| e^{2\pi(\lambda_1 - \lambda_n)x} \leq C(x) \|F\|_{(0, \infty)},$$

где $C(x)$ зависит только от x и остается ограниченной, когда $x \geq \varepsilon > 0$.

Далее Шварц доказывает следующую лемму (на самом деле Шварц доказывает более общую лемму, из которой эта лемма получается как частный случай).

Если $P(x) = \sum a_n e^{-2\lambda_n x}$ — полином по системе (1) и если ряд $\sum 1/\lambda_n$ сходится, то

$$\|P\|_{(A, \infty)} \leq C \|P\|_{(A, B)},$$

где постоянная C зависит только от последовательности $\{\lambda_n\}$ и от интервала (A, B) .

Из этой леммы и теоремы I следует

Теорема II. Если ряд $\sum 1/\lambda_n$ сходится и $\lambda_{n+1} - \lambda_n > q > 0$, то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^p(A, B)$ -норме конечными линейными комбинациями функций из системы (1), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в полуплоскости $x > A$, которая совпадает почти всюду на (A, B) с функцией $F(x)$;

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n e^{-2\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x > A$.

Оказывается, что если на систему (1) наложить более ограничительные условия, то результат Шварца можно распространить на более широкий класс множеств E . Мы ограничимся случаем $p=2$. Чтобы сформулировать полученный результат введем следующие определения.

Систему (1) будем называть лакунарной, если существует число $q > 1$, такое что выполняется условие

$$\lambda_{n+1}/\lambda_n > q. \quad (2)$$

Точку A будем называть точкой усиленной плотности справа для множества E , если существует число $\varepsilon > 0$, такое что

$$m\{CE \cap (A, A+h)\} = o(h^{1+\varepsilon}) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. Если точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E и система (1) лакунарная, то для полиномов $P(x)$ по системе (1) справедлива оценка

$$\|P\|_{(A, \infty)} \leq C \|P\|_E, \quad (3)$$

где постоянная C зависит только от последовательности $\{\lambda_n\}$ и от множества E .

Из этой теоремы, используя теорему I, получаем следующий результат.

Теорема 2. Если точка A является точкой усиленной плотности справа для множества E и система (1) лакунарная, то каждая функция $F(x)$, аппроксимируемая по $L^2(E)$ -норме конечными линейными комбинациями функций из системы (1), обладает следующими свойствами:

1°. Существует функция $F(z)$, $z = x + iy$, аналитическая в полуплоскости $x > A$, которая совпадает почти всюду на E с функцией $F(x)$;

2°. Функция $F(z)$ разлагается в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_n c_n e^{-2\pi\lambda_n z},$$

нормально сходящийся в полуплоскости $x > A + \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — любое).

§ 1. Оценка произведения Бляшке

Рассмотрим произведение Бляшке последовательности $\{\lambda_k\}$ для правой полуплоскости

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k + \lambda}. \quad (4)$$

Лемма 1. Если выполняется условие (2), то функция $1/W(\lambda)$ ограничена на луче $\arg \lambda = \varphi$ при $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\varphi \neq 0$.

Доказательство. Обозначим $\lambda = re^{i\varphi}$. Имеем

$$\begin{aligned} \ln |1/W(\lambda)| &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \sqrt{\frac{(\lambda_k + r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}{(\lambda_k - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{4r \lambda_k \cos \varphi}{\lambda_k^2 - 2r \lambda_k \cos \varphi + r^2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\ln(1+x) < x$, то имеем

$$\ln |1/W(\lambda)| \leq \cos \varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2r \lambda_k}{\lambda_k^2 - 2r \lambda_k \cos \varphi + r^2}. \quad (5)$$

Обозначим $\cos \varphi = a$, $\psi_{\pm} = (1+a) \pm \sqrt{(1+a)^2 - 1}$.

Если $\lambda_k \in (r\psi_-, r\psi_+)$, то

$$\lambda_k^2 - 2r \lambda_k a + r^2 > 2r \lambda_k. \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} \ln |1/W(\lambda)| &\leq \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \frac{2r \lambda_k + 2r \lambda_k a}{\lambda_k^2 + r^2} + \\ &+ 2 \sum_{r\psi_- < \lambda_k < r\psi_+} \frac{r \lambda_k}{(\lambda_k - r)^2 + 2r \lambda_k (1-a)} = \sum_{\lambda_k > r\psi_+} \frac{2r \lambda_k + 2r \lambda_k a}{\lambda_k^2 + r^2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\ln |1/W(\lambda)| \leq 2(1+a) \frac{1}{r} \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \lambda_k + \frac{1}{1-a} [n(r\psi_+) - n(r\psi_-)] +$$

$$+ 2(1+\alpha) r \sum_{\lambda_k > r\psi_+} \frac{1}{\lambda_k} = S_1(r) + S_2(r) + S_3(r), \quad (7)$$

где $n(t)$ — число точек последовательности $\{\lambda_k\}$, не превосходящих t . Доказательство леммы закончится, если мы покажем, что S_1 , S_2 и S_3 ограничены. Имеем

$$S_1(r) = 2(1+\alpha) \psi_- \cdot \frac{1}{r\psi_-} \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \lambda_k.$$

Чтобы доказать ограниченность $S_1(r)$ число n выберем так, чтобы выполнялось условие $r\psi_- \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$, тогда

$$\frac{1}{r\psi_-} \cdot \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \lambda_k \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} + 1.$$

Так как из условия (2) следует, что $\lambda_n > q^i \lambda_{n-i}$, $1 \leq i \leq n-1$, то

$$\frac{1}{r\psi_-} \sum_{\lambda_k < r\psi_-} \lambda_k \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}.$$

и ограниченность $S_1(r)$ установлена.

Чтобы доказать ограниченность $S_2(r)$, выберем целые числа m и n так, чтобы выполнялись условия $r\psi_+ \in [\lambda_m, \lambda_{m+1})$ и $r\psi_- \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$.

Тогда

$$n(r\psi_+) = m, n(r\psi_-) = n \text{ и } S_2(r) = \frac{1}{1-\alpha} (m-n). \quad (8)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{n+1}} \leq \frac{r\psi_+}{r\psi_-} = \frac{\psi_+}{\psi_-} \text{ или } \lambda_m \leq \frac{\psi_+}{\psi_-} \lambda_{n+1}. \quad (9)$$

Теперь если целое число j выбирать так, чтобы выполнялось условие $qj > \psi_+/\psi_-$, то будем иметь

$$\lambda_{n+j+1} > q^j \lambda_{n+1} > \lambda_{n+1} \cdot \psi_+/\psi_-.$$

Сравнивая это неравенство с (9), получим

$$\lambda_{n+j+1} > \lambda_m.$$

Так как $\{\lambda_k\}$ — возрастающая последовательность, то отсюда следует, что $n+j+1 > m$, или, что то же самое, $m-n < j+1$. Из этого неравенства и из (8) следует ограниченность $S_2(r)$.

Чтобы доказать ограниченность $S_3(r)$ число n выберем так, чтобы выполнялось условие $r\psi_+ \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} S_3(r) &= \frac{2(1+\alpha)}{\psi_+} r\psi_+ \cdot \sum_{\lambda_k > r\psi_+} \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{2(1+\alpha)}{\psi_+} \cdot \lambda_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \\ &= \frac{2(1+\alpha)}{\psi_+} \cdot \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Так как $\lambda_{n+1}/\lambda_{n+1+i} < \left(\frac{1}{q}\right)^i$, то отсюда следует ограниченность $S_3(r)$.

Лемма доказана.

Обозначим $r_k = \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}$.

Лемма 2. Если выполняется условие (2), то функция $1/W(\lambda)$ остается ограниченной, когда λ стремится к бесконечности, оставаясь на дугах $\lambda = r_k e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Эта лемма доказывается аналогично лемме 1.

§ 2. Оценка полиномов Дирихле

Следуя рассуждениям Л. Шварца, построим систему, биортонормальную к системе (1), следующим образом: обозначим

$$J_k(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{W'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Так как функции $J_k(\lambda)$ принадлежат пространству H^2 (в плоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$), то их можно представить в виде

$$J_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\pi\lambda x} \varphi_k(x) dx,$$

где $\varphi_k(x) \in L^2(0, \infty)$. Таким образом, полученная система $\{\varphi_k(x)\}$ будет биортонормированной с системой $\{e^{-2\pi\lambda_k x}\}$.

Пусть теперь $P(x)$ есть произвольный полином Дирихле по системе (1), то есть $P(x)$ представляет собой конечную линейную комбинацию функций из системы (1)

$$P(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-2\pi\lambda_k x}.$$

Коэффициенты c_k можно вычислять по формулам

$$c_k = \int_0^\infty P(x) \varphi_k(x) dx.$$

Тогда полином $P(x)$ можно представить в следующем виде:

$$P(x) = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^m \varphi_k(t) e^{-2\pi\lambda_k x} \right) P(t) dt, \quad (10)$$

где $m > n$.

Из этого представления, на основании неравенства Буняковского, для полинома $P(x)$ получаем следующую оценку:

$$|P(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) e^{-2\pi\lambda_k x} \right|_{(0, \infty)}; \quad |P|_{(0, \infty)} \quad (11)$$

для любого $x > 0$ и любого $m \geq n$.

С другой стороны, так как для любого фиксированного x функция $\sum_{k=1}^m J_k(\lambda) e^{-2\pi i \lambda x}$, как функция от λ , является преобразованием Лап-

ласа функции $\sum_{k=1}^m \varphi_k(t) e^{-2\pi i k x}$, как функции от t , то

$$\left\| \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) e^{-2\pi i k x} \right\|_{(0, -)} = \left\| \sum_{k=1}^m J_k(i\tau) e^{-2\pi i \lambda_k x} \right\|_{(-, -)} \quad (\lambda = \sigma + i\tau).$$

Следовательно, неравенство (11) можно написать в следующем виде:

$$|P(x)| \leq \left\| \sum_{k=1}^m J_k(i\tau) e^{-2\pi i \lambda_k x} \right\|_{(-, -)} \cdot \|P\|_{(0, -)} \quad (12)$$

для любого $x > 0$ и любого $m > n$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 3. Если выполняется условие (2), то для любого числа α , удовлетворяющего условию $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, существует постоянная $C(\alpha)$ (зависящая только от выбора α и не зависящая от x и от P), такая что

$$|P(x)| < \frac{C(x)}{x^{1-\alpha}} \|P\|_{(0, -)} \quad (0 < x < 1).$$

Для доказательства леммы функцию $\sum_{k=1}^m J_k(i\tau) e^{-2\pi i \lambda_k x}$ представим в виде контурного интеграла следующим образом. Прежде всего имеем

$$J_k(i\tau) e^{-2\pi i \lambda_k x} = W(i\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{-2\pi i \zeta x}}{W(\zeta) (i\tau - \zeta)} d\zeta \quad (-\infty < \tau < \infty), \quad (13)$$

где Γ_k — окружность с центром в точке λ_k , не содержащая нулей функции $W(\lambda)$, отличных от λ_k .

Далее, возьмем число φ , удовлетворяющее условию $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

и обозначим через L_m^- контур, состоящий из двух отрезков

$$\left(\arg \zeta = \varphi, \frac{\lambda_1}{2} \leq |\zeta| \leq \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2} \right) \text{ и } \left(\arg \zeta = -\varphi, \frac{\lambda_1}{2} \leq |\zeta| \leq \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2} \right)$$

и из двух дуг

$$\left(|\zeta| = \frac{\lambda_1}{2}, -\varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi \right) \text{ и } \left(|\zeta| = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}, -\varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi \right).$$

Тогда согласно (13) будем иметь следующее представление:

$$\sum_{k=1}^m J_k(i\tau) e^{-2\pi\lambda_k x} = W(i\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{L_m} \frac{e^{-2\pi\zeta x}}{W(\zeta)(i\tau - \zeta)} d\zeta \quad (-\infty < \tau < \infty). \quad (14)$$

Так как $|W(i\tau)| \leq 1$ и функция $1/W(\zeta)$ остается ограниченной на контурах L_m (в силу лемм 1 и 2), то из представления (14) получаем следующую оценку:

$$\left| \sum_{k=1}^m J_k(i\tau) e^{-2\pi\lambda_k x} \right| \leq M \int_{L_m} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|i\tau - \zeta|} |d\zeta|, \quad (15)$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от m .

Возьмем число α , удовлетворяющее условию $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда из (15) получим следующее неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^m J_k(i\tau) e^{-2\pi\lambda_k x} \right| \leq \frac{M_1}{|\tau|^{1-\alpha} + 1} \int_{L_m} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|\zeta|^\alpha} |d\zeta|, \quad (16)$$

где M_1 — некоторая постоянная, не зависящая от m .

Сравнивая (16) и (12), так как функция $1/|\tau|^{1-\alpha} + 1$ принадлежит классу $L^2(-\infty, \infty)$, для многочлена $P(x)$ получим следующую оценку:

$$|P(x)| \leq M(\alpha) \|P\|_{(0, \infty)} \int_{L_m} \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|\zeta|^\alpha} |d\zeta|,$$

где $x > 0$, $m \geq n$, а $M(\alpha)$ — некоторая постоянная, зависящая только от α . В этом неравенстве устремим m к бесконечности. Так как интеграл по дуге $\left(|\zeta| = \frac{\lambda_m + \lambda_{m+1}}{2}, -\varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi\right)$ стремится к нулю, то в пределе получим следующую оценку:

$$|P(x)| \leq M(\alpha) \|P\|_{(0, \infty)} \int_L \frac{|e^{-2\pi\zeta x}|}{|\zeta|^\alpha} |d\zeta|,$$

где L — контур, состоящий из двух лучей $\left(\arg \zeta = \varphi, |\zeta| \geq \frac{\lambda_1}{2}\right)$ и $\left(\arg \zeta = -\varphi, |\zeta| \geq \frac{\lambda_1}{2}\right)$ и из дуги $\left(|\zeta| = \frac{\lambda_1}{2}, -\varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi\right)$.

Из этой оценки уже следует утверждение леммы, потому что интеграл по дуге $\left(|\zeta| = \frac{\lambda_1}{2}, -\varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi\right)$ ограничен, а интегралы по лучам не превосходят следующего выражения:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2\pi x r \cos \varphi}}{r^2} dr = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{2\pi x \cos \varphi}{u} \right)^\alpha \frac{du}{2\pi x \cos \varphi} =$$

$$= \frac{1}{x^{1-a}} \cdot \frac{1}{(2\pi \cos \frac{\pi}{2})^{1-a}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^a} du.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

При доказательстве теоремы можно считать $A=0$, так как общий случай сводится к этому случаю заменой x на $x-A$.

Доказательство проведем, предположив противное, что существует последовательность $\{P_n(x)\}$, такая что $\|P_n\|_{(0, \infty)}=1$, но $\|P_n\|_E \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из заключения 3° теоремы 1 следует

$$|P_n(z)| \leq C(x) \|P_n\|_{(0, \infty)} e^{-2\pi \lambda_1 x} \quad (z = x + iy).$$

Следовательно, имеем

$$|P_n(z)| \leq C(x) e^{-2\pi \lambda_1 x}, \quad (17)$$

где $C(x)$ зависит только от x и остается ограниченной, когда $x > \varepsilon > 0$.

Из оценки (17) следует, что семейство $\{P_n(z)\}$ нормально в полуплоскости $x > \varepsilon$. Чтобы не вводить новых обозначений, предположим, что уже эта последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости $x > \varepsilon$.

Если ε достаточно мало, то $m\{E \cap (\varepsilon, \infty)\} > 0$, и так как $\|P_n\|_E \rightarrow 0$, то последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится к нулю в полуплоскости $x > \varepsilon$. Согласно оценке (17), отсюда следует, что последовательность $\{P_n(z)\}$ и по $L^2(\varepsilon, \infty)$ -норме будет сходиться к нулю. Таким образом, имеем $\|P_n\|_{(\varepsilon, \infty)} \rightarrow 0$, но $\|P_n\|_{(0, \infty)} = 1$, отсюда следует, что

$$\|P_n\|_{(0, \varepsilon)}^2 \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

С другой стороны, имеем

$$\|P_n\|_{(0, \varepsilon)}^2 = \int_0^{\varepsilon} |P_n(x)|^2 dx = \int_{(0, \varepsilon) \cap E} |P_n(x)|^2 dx + \int_{(0, \varepsilon) \cap CE} |P_n(x)|^2 dx. \quad (19)$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, второе слагаемое оценим следующим образом: согласно лемме 3 имеем

$$\int_{(0, \varepsilon) \cap CE} |P_n(x)|^2 dx \leq C^2(a) \int_{(0, \varepsilon) \cap CE} \frac{dx}{x^{2-2a}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{2}\right). \quad (20)$$

Так как точка нуль является точкой усиленной плотности справа для множества E , то, по определению, существует положительное число ε_1 , такое что

$$m\{CE \cap (0, x)\} = o(x^{1+a}). \quad (21)$$

Теперь если обозначим $\sigma(x) = m\{CE \cap (0, x)\}$, то будем иметь

$$\sigma(x) = \int_0^x x_{CE}(x) dx,$$

где x_{CE} — характеристическая функция множества CE .

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{(0, \varepsilon) \cap CE} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon_1/2}} &= \int_0^\varepsilon \frac{x_{CE}(x) dx}{x^{1+\varepsilon_1/2}} = \int_0^\varepsilon \frac{d\sigma(x)}{x^{1+\varepsilon_1/2}} = \\ &= \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon^{1+\varepsilon_1/2}} + (1+\varepsilon_1/2) \int_0^\varepsilon \frac{\sigma(x) dx}{x^{2+\varepsilon_1/2}}. \end{aligned}$$

Из (21) вытекает, что последний интеграл сходится. Следовательно, если в неравенстве (20) число α выбрать так, чтобы выполнялось условие $2-2\alpha < 1+\varepsilon_1/2$, то интеграл справа в неравенстве (20) будет сходиться. Значит, если число ε достаточно мало, то

$$\int_{(0, \varepsilon) \cap CE} |P_n(x)|^2 dx < \frac{1}{2}, \quad n=1, 2, \dots \quad (22)$$

Сравнивая (18), (19) и (22), получаем противоречие. Таким образом, теорема 1 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 20.VI.1971

Վ. Խ. ՄՈՍՈՅԱՆ. Դիրիսլեի լակունար սխեմների մասին (ամփոփում)

Գրառվում է (1) բազմադր սխեմներ $L^2(E)$ տարածությունում, որտեղ E -ն իրական թվերի լեքեզգի չափանիզով չափելի դրական չափի բազմություն է: Ուսումնասիրվում են գրառվող սխեմների ֆունկցիաների զերիզավոր գծային կոմբինացիաներով մոտարկվող ֆունկցիաները:

V. Kch. MUSOIAN. On lacunary Dirichlet systems (summary)

The lacunary system (1) is considered in the $L^2(E)$ space, where E is a measurable set of real numbers with positive Lebesgue measure. The functions, which admit approximation by the finite linear combinations of functions from this system are considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles, Actualites Scientifiques et Industrielles, 1959.

С. Г. РУБАНОВИЧ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. I

В в е д е н и е

Пусть задан замкнутый ориентированный гладкий контур l без самопересечений в комплексной плоскости C . Под словом „гладкий“ мы будем подразумевать „бесконечно дифференцируемый“. Рассмотрим уравнение на контуре l

$$\begin{aligned} (a(t_0)u(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_l \left(\frac{u(t)dt}{t-t_0} \right)' + c(t_0)u(t_0) + \frac{d(t_0)}{\pi i} \int_l \frac{u(t)dt}{t-t_0} + \\ + \int_l K(t, t_0)u(t)dt = f(t_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u \in L_2(l)$ есть искомая функция, функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ кусочно непрерывны, и на каждом замкнутом интервале непрерывности являются гладкими функциями, последний интеграл определяет вполне непрерывный оператор в $L_2(l)$, а производная понимается, как производная в смысле обобщенных функций на каждом интервале, на котором одновременно непрерывны функции $a(t_0)$ и $b(t_0)$; правая часть $f \in L_2(l)$. В случае выполнения условия

$$\inf_{t \in l} |a(t) - b(t)| > 0, \quad \inf_{t \in l} |a(t) + b(t)| > 0, \quad (2)$$

взяв интегралы от левой и правой части уравнения (1), мы приходим к хорошо изученному сингулярному интегральному уравнению нормального типа.

Разобьем контур l на два взаимно дополнительных интервала l_1 и l_2 . Будем считать, что интервалы l_1 и l_2 не содержат концов. Мы заменим условие (2) на условие

$$\begin{aligned} a(t) - b(t) = 0, \quad t \in l_1, \quad \inf_{t \in l_1} |a(t)| + b(t) > 0, \quad \inf_{t \in l_1} |c(t) - d(t)| > 0, \quad (3) \\ a(t) + b(t) = 0, \quad t \in l_2, \quad \inf_{t \in l_2} |a(t) - b(t)| > 0, \quad \inf_{t \in l_2} |c(t) + d(t)| > 0. \end{aligned}$$

Случай, когда замыкание контура $l_1(l_2)$ совпадает со всем контуром l также хорошо изучен. Легко видеть (см. Н. Е. Товмасын, [3]), что в этом случае подстановка

$$u(t_0) = \left(v(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{v(t)dt}{t-t_0} \right)' + v(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{v(t)dt}{t-t_0}$$

$$\left(u(t_0) = \left(v(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int \frac{v(t) dt}{t - t_0} \right)' + v(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int \frac{v(t) dt}{t - t_0} \right)$$

приводит уравнение (1) к уравнению, для которого выполнено условие (2). Мы будем предполагать, что интервалы l_1 и l_2 не пусты. Кроме того, мы будем предполагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ продолжают с интервала l_1 до гладких функций на замыкание интервала l_1 и с интервала l_2 до гладких функций на замыкании интервала l_2 . Класс таких функций обозначим через $C^-(l_1, l_2)$. При этих предположениях в настоящей статье будет доказана нетеровость уравнения (1) (то есть, что оператор, стоящий в левой части уравнения (1), нормально разрешим в $L_2(l)$, его ядро и коядро в $L_2(l)$ конечномерны) и вычислен индекс этого уравнения.

1°. Определим операторы с помощью следующих равенств:

$$\begin{aligned} (Pu)(t_0) &= \frac{1}{2} u(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u(t) dt}{t - t_0}, \\ (Qu)(t_0) &= -\frac{1}{2} u(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u(t) dt}{t - t_0}, \\ (\chi_1 u)(t) &= \begin{cases} u(t), & t \in l_1 \\ 0, & t \notin l_1, \end{cases} \\ (\chi_2 u)(t) &= \begin{cases} 0, & t \notin l_2 \\ u(t), & t \in l_2. \end{cases} \end{aligned}$$

При доказательстве нетеровости уравнения (1) существенную роль играют следующие пространства.

Определение. Пространство $M(l_1, l_2)$ определяется как множество всех функций $u \in L_2(l)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{M(l_1, l_2)}^2 = \|u\|_{L_2(l)}^2 + \|\chi_1 DPu\|_{L_2(l)}^2 + \|\chi_2 DQu\|_{L_2(l)}^2,$$

где D есть оператор дифференцирования обобщенных функций на контуре l . (То есть для всех функций $\varphi \in C^-(l)$ имеет место равенство

$$\int_l \varphi(t) (Df)(t) dt = - \int_l \varphi'(t) f(t) dt.$$

Нетрудно видеть, что всякое решение $u \in L_2(l)$ уравнения (1) принадлежит $M(l_1, l_2)$. Поэтому нам достаточно доказать, что оператор L , определяемый левой частью уравнения (1), который мы будем рассматривать как оператор, действующий из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$ есть Ф-оператор (см. И. Ц. Гохберг, [1]) и вычислим его индекс.

Для удобства ссылок мы сформулируем в виде лемм следующие простые предложения.

Лемма 1. Пространство $M(l_1, l_2)$ — полное.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi \in C^{\infty}(l)$, тогда операторы $D^j(\varphi P - P\varphi)$, $D^j(\varphi Q - Q\varphi)$, $j = 0, 1, \dots$ вполне непрерывны из $L_2(l)$ в $L_2(l)$.

Лемма 3. Операторы $\gamma_1 P$ и $\gamma_2 Q$ вполне непрерывны из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$.

Лемма 4. Пусть функция $g \in C^{\infty}(s)$, где s есть гладкий замкнутый контур без самопересечений, взаимно однозначно отображает контур s на контур l , не меняя направления обхода, причем $g'(t) \neq 0$ нигде на контуре s ; интервал s_1 отображается на l_1 , а s_2 — на l_2 . Тогда оператор T , определяемый равенством $(Tu)(t) = u(g(t))$, взаимно однозначен и непрерывен из $M(l_1, l_2)$ в $M(s_1, s_2)$, а операторы $D^j(TP - PT)$, $D^j(TQ - QT)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, вполне непрерывны из $L_2(l)$ в $L_2(s)$.

Лемма 5. Пусть функция $\varphi \in C^{\infty}(l)$ не обращается в нуль нигде на контуре l . Тогда оператор $T = P - \varphi Q$ непрерывен из $M(l_1, l_2)$ в $M(l_1, l_2)$. Более того, операторы $D^j(PT - P)$, $D^j(QT - \varphi Q)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, вполне непрерывны из $L_2(l)$ в $L_2(l)$.

Нам еще понадобится следующая лемма.

Лемма 6. Пусть выполнены условия

$$0 < \arg(-c_1 c_2) < 2\pi, \quad (4)$$

$$\arg(-id_1) + \arg id_2 = \arg(-c_1 c_2), \quad -\pi < \arg id_1, \arg(-id_2) < \pi.$$

Тогда для $v \in L_2(-\infty, \infty)$ из равенства

$$\chi_+(DPv + d_1 Pv - c_1 Qv) + \chi_-(DQv + d_2 Qv + c_2 Pv) = f,$$

где операторы χ_+ и χ_- определяются из равенств

$$(\chi_+ u)(x) = \begin{cases} u(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\chi_- u)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ u(x), & x < 0, \end{cases}$$

следует оценка

$$\|u\|_{L_2(-\infty, -)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(-\infty, -)}. \quad (5)$$

Доказательство. Имеют место тождества

$$DPv + d_1 Pv - c_1 Qv = \chi_+ f + g_1,$$

$$DQv + d_2 Qv + c_2 Pv = \chi_- f + g_2, \quad (6)$$

где

$$g_1 = DPv + d_1 Pv - c_1 Qv - \chi_+ f,$$

$$g_2 = DQv + d_2 Qv + c_2 Pv - \chi_- f.$$

Легко видеть, что $\text{supp } g_1 \subset (-\infty, 0]$, $\text{supp } g_2 \subset [0, \infty)$. Так как обобщенные функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ представляются в виде суммы производных до первого порядка от функций из $L_2(-\infty, \infty)$, то (см.

Г. Е. Шилов, [5]) преобразования Фурье $\bar{g}_1(\xi)$ и $\bar{g}_2(\xi)$ есть обычные функции, и существует аналитическая вне действительной оси функция $\Phi(z)$, которая почти всюду на оси $(-\infty, \infty)$ имеет пределы $\Phi^+(\xi)$

и $\Phi^-(\xi)$ при z , стремящемся по некасательному к действительной оси пути соответственно из верхней полуплоскости и из нижней полуплоскости. Причем $\Phi^+(\xi) = \bar{g}_2(\xi)$, $\Phi^-(\xi) = \bar{g}_1(\xi)$, и имеет место оценка

$$|\Phi(z)| \leq \text{const} \frac{(|z|+1)}{\sqrt{|\text{Im } z|}}.$$

Применяя к обеим частям тождеств (6) преобразование Фурье, получим

$$-i\tilde{\kappa} \bar{P}_v(\xi) + d_1 \bar{P}_v(\xi) - c_1 \bar{Q}_v(\xi) = \chi_+ f(\xi) + \Phi^-(\xi),$$

$$-i\tilde{\kappa} \bar{Q}_v(\xi) + d_2 \bar{Q}_v(\xi) + c_2 \bar{P}_v(\xi) = \chi_- f(\xi) + \Phi^+(\xi).$$

Имеем (см. Г. Е. Шилов, [5])

$$\bar{P}_v(\xi) = (\chi_- \bar{v})(\xi), \quad \bar{Q}_v(\xi) = -\chi_+ \bar{v}(\xi).$$

Таким образом, можно записать

$$(-i\tilde{\kappa} + d_1)(\chi_- \bar{v})(\xi) + c_1 (\chi_+ \bar{v})(\xi) = \chi_+ f(\xi) + \Phi^-(\xi) \quad (7)$$

$$c_2 (\chi_- \bar{v})(\xi) + (i\tilde{\kappa} - d_2) (\chi_+ \bar{v})(\xi) = \chi_- f(\xi) + \Phi^-(\xi).$$

Очевидно, нужно потребовать, чтобы $\bar{v}(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)$, что эквивалентно условию

$$\frac{1}{\zeta+1} \chi_+ \Phi^+ + \chi_- \Phi^+ \in L_2(-\infty, \infty).$$

При этом, в силу равенства Парсеваля

$$\|v\|_{L_2(-\infty, \infty)} \leq \text{const} \left(\|\chi_- f\|_{L_2(-\infty, \infty)} + \left\| \frac{1}{\zeta+1} \chi_+ \Phi^+ + \chi_- \Phi^+ \right\|_{L_2} \right). \quad (8)$$

Введем функцию $\Psi(z)$, аналитическую всюду, кроме действительной оси

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \text{Im } z > 0, \\ -ic_2 \Phi(z), & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Исключая из (7) $\bar{v}(\xi)$, получим

$$\begin{aligned} (-\zeta + id_1) \chi_- \Psi^+ - \frac{c_1 c_2}{\zeta + id_2} \chi_+ \Psi^+ &= \Psi^- - \\ -ic_2 \chi_+ f + (\zeta - id_1) \chi_- \bar{\chi}_- f + \frac{c_1 c_2}{\zeta + id_2} \chi_+ \bar{\chi}_- f. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, можно потребовать, чтобы

$$\frac{1}{\zeta+1} \chi_+ \Psi^+ + \chi_- \Psi^+ \in L_2(\infty, \infty), \quad |\Psi(z)| \leq \text{const} \frac{(|z|+1)^2}{\sqrt{|\text{Im } z|}}. \quad (9a)$$

Одним из решений однородного уравнения (9) будет

$$\Psi_0(z) = \exp \left(-\frac{z+i}{2\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\ln(-\zeta + id_1) d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} + \int_0^{\infty} \frac{\ln(-c_1 c_2) d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^{\infty} \frac{\ln(z + id_2) d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} \right) \right),$$

где $\ln(-c_1 c_2) = \ln |c_1 c_2| + i \arg(-c_1 c_2)$, $0 < \arg(-c_1 c_2) < \pi$, а у остальных логарифмов аргумент берется от $-\pi$ до π . (И в дальнейшем, если не оговорено, аргумент у логарифма будет браться от $-\pi$ до π). Это проверяется с помощью формул Племеля-Сохотского (см. Н. Н. Мусхелишвили, [2]). Имеем

$$(z+i) \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} = \int_0^{\infty} d\zeta \left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta+i} \right) = \ln i - \ln(-z). \quad (10)$$

Точно так же

$$(z+i) \int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} = \ln z - \ln(-i). \quad (11)$$

Вычислим второй интеграл в выражении для $\Psi_0(z)$

$$(z+i) \int_0^{\infty} \frac{\ln(\zeta + id_2)}{(\zeta+i)(\zeta-z)} d\zeta = \int_0^{\infty} \ln(\zeta + id_2) \left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta+i} \right) d\zeta = \\ = (\ln(\zeta + id_2)(\ln(\zeta-z) - \ln(\zeta+i))) \Big|_{\zeta=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\ln(\zeta-z) - \ln(\zeta+i)}{\zeta + id_2} d\zeta = \\ = \ln(id_2)(\ln(-z) - \ln i) - \int_0^{\infty} \frac{\ln(\zeta-z) - \ln(\zeta+i)}{\zeta + id_2} d\zeta.$$

Последний интеграл аналитичен по z вне оси $[0, \infty)$. Продифференцируем его, а затем проинтегрируем по z . Получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(\zeta-z) - \ln(\zeta+i)}{\zeta + id_2} d\zeta = - \int_{z_0}^z \left(\int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta+id_2)} \right) dz_1 + \text{const} = \\ = \int_{z_0}^z \frac{\ln(-z_1) - \ln id_2}{z_1 + id_2} dz_1 + \text{const}.$$

Этот интеграл ограничен в ограниченной области, однозначно определен для всех z , кроме положительных (область $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ односвязна), и для больших $|z|$ имеем

$$\int_{z_1}^z \frac{\ln(-z_1) - \ln id_2}{z_1 + id_2} = \frac{(\ln(-z))^2}{2} + \ln id_2 \ln(z + id_2) -$$

$$- id_2 \int_{z_1}^z \frac{\ln(-z_1) dz_1}{z_1(z_1 + id_2)} + \text{const.}$$

Последний интеграл ограничен на бесконечности.

Пусть

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1, & |z| > 1 \\ 0, & |z| < 1, \end{cases}$$

тогда

$$(z+i) \int_0^{\infty} \frac{\ln(\zeta + id_2) d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} = \ln(-id_2) (1 - \varphi(z)) \ln|z| + \varphi(z) \frac{(\ln(-z))^2}{2} +$$

$$+ g_1(z), \quad (12)$$

где функция $g_1(z)$ ограничена.

Точно таким же способом получаем

$$(z+i) \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(-\zeta + id_1) d\zeta}{(\zeta+i)(\zeta-z)} = \ln id_1 (1 - \varphi(z)) \ln|z| + \varphi(z) \frac{(\ln z)^2}{2} + g_2(z),$$

$$(13)$$

где функция $g_2(z)$ ограничена.

Заметим, что

$$\operatorname{Im} (\ln(-z))^2 = 2 \arg(-z) \ln|z|, \quad \operatorname{Im} (\ln z)^2 = 2 \arg z \ln|z|.$$

Повтому из формул (4), (10), (12) и (13) получим

$$|\Psi_0(z)| = |z|^{\varphi(z) \left(\frac{\arg(-ic_2)}{2\pi} - \frac{\arg z + \arg(-z)}{2\pi} \right)} e^{g(z)}, \quad (14)$$

где функция $g(z)$ ограничена.

Пусть $\Psi(z)$ — любое решение однородной задачи (9), удовлетворяющее условию (9a). Тогда

$$\frac{\Psi^+(\zeta)}{\Psi_0^+(\zeta)} = \frac{\Psi^-(\zeta)}{\Psi_0^-(\zeta)}.$$

Из (14) и (9a) имеем

$$\frac{\Psi^+(\zeta)}{\Psi_0^+(\zeta)} \Big/_{(|\zeta|+1)} \in L_2(-\infty, \infty), \quad \frac{\Psi^-(\zeta)}{\Psi_0^-(\zeta)} \Big/_{(|\zeta|+1)} \in L_2(-\infty, \infty),$$

$$\left| \frac{\Psi(z)}{\Psi_0(z)} \right| \leq \frac{(|z|+1)^2}{\sqrt{|\operatorname{Im} z|}} \text{const.}$$

Таким образом, к функции $\frac{\Psi(z)}{\Psi_0(z)}$ применима теорема Пэли-Винера (см. Л. Хёрмандер, [6]), повтому

$$\text{supp} \left(\frac{\tilde{\Psi}^+}{\Psi_0^+} \right) = 0.$$

Здесь волна сверху обозначает преобразование Фурье.

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\tilde{\Psi}^+}{\Psi_0^+} \right) (x) = P_3(iD) \delta(x), \quad \frac{\Psi^+(\zeta)}{\Psi_0^+(\zeta)} = P_3(\zeta)$$

или $\Psi^+(\zeta) = \Psi_0^+(\zeta) P_3(\zeta)$, где $P_3(\zeta)$ есть полином степени не выше 3. Но из (14) видно, что ни одна ненулевая функция $\Psi^+(z)$ такого вида не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Значит ненулевых решений однородного уравнения (9), удовлетворяющих условию (9а), не существует.

Пусть $B(\zeta)$ обозначает свободный член в уравнении (9). Можно записать

$$B = (|\zeta|+1) \chi_- B_0 + \chi_+ B_0, \quad (15)$$

где

$$\|B_0\|_{L_2(-\infty, \infty)} \leq \text{const} \|f\|. \quad (16)$$

Решение неоднородной задачи (9) дается формулой

$$\Psi(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z) \Psi_0^-(\zeta)}.$$

Из (14) и (15) следует, что можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\zeta) d\zeta}{\Psi_0^-(\zeta)(\zeta-z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\zeta) B_0(\zeta) (|\zeta|+1)^{\frac{1}{2}-\beta}}{\zeta-z} d\zeta,$$

где $\beta = \frac{\arg(-c_1 c_2)}{2\pi}$, $0 < \beta < 1$, а функция $\rho(\zeta)$ ограничена. Из этой формулы и (16) следует выполнение неравенства в условии (9а) и существование почти всюду функции $\Psi^+(\zeta)$,

$$\Psi^+(\zeta_0) = \frac{\Psi_0^+(\zeta_0)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\zeta) B_0(\zeta) (|\zeta|+1)^{\frac{1}{2}-\beta}}{\zeta-\zeta_0} d\zeta + \frac{\Psi_0^+(\zeta_0)}{\Psi_0^-(\zeta_0)} \frac{B(\zeta_0)}{2}$$

(см. Б. В. Хведелидзе, [4]).

Из (14) и (15) видно, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\zeta|+1} (\chi_+ \Psi^+)(\zeta) + (\chi_- \Psi^+)(\zeta) = \rho_1(\zeta) (|\zeta|+1)^{-\frac{1}{2}+\beta} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\zeta_0) B_0(\zeta_0) (|\zeta_0|+1)^{\frac{1}{2}-\beta}}{\zeta_0-\zeta} d\zeta_0 + \rho_2(\zeta) B_0(\zeta), \end{aligned}$$

где $\rho_1(\zeta)$ и $\rho_2(\zeta)$ — ограниченные функции.

Отсюда следует оценка (см. Б. В. Хведелидзе, [4])

$$\left\| \chi_- \psi^+ + \frac{1}{|\zeta|+1} \chi_+ \psi^+ \right\|_{L_2(-\infty, \infty)} \leq \text{const } \|B_d\|_{L_2(-\infty, \infty)}.$$

Учитывая (16) и (8), получаем оценку (5). Лемма 6 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 7. Если выполнены условия (4), то для $v \in L_2(-\infty, \infty)$ из равенства

$$\chi_- (DPv + d_1 Pv - c_1 Qv) + \chi_+ (DQv + d_2 Qv + c_2 Pv) = f$$

следует оценка

$$\|v\|_{L_2(-\infty, \infty)} \leq c \|f\|_{L_2(-\infty, \infty)},$$

где константа c зависит только от c_1, c_2, d_1, d_2 .

2°. Теперь перейдем к доказательству нетеровости уравнения (1).

Без ограничения общности можно считать, что $a(t) = b(t) = \frac{1}{2}$ при

$t \in I_1$, а при $t \in I_2$, $-a(t) = b(t) = \frac{1}{2}$. Тогда согласно лемме 3, опе-

ратор L , определяемый левой частью уравнения (1), можно записать в виде

$$L = \chi_- DP + \chi_+ DQ + \alpha E + K, \quad (17)$$

где E — тождественный оператор, оператор K вполне непрерывен из $M(I_1, I_2)$ в $L_2(I)$, а функция

$$\alpha \in C^\infty(I_1, I_2), \quad \inf_{t \in I} |\alpha(t)| > 0.$$

Обозначим через t_1 начало интервала I_1 по отношению к положительному направлению обхода контура l , а через t_2 — конец интервала I_1 .

Теорема 1. Пусть для всех пар целых чисел k_1, k_2 выполнено условие

$$\begin{aligned} \arg \alpha(t_1 + 0) + \arg \alpha(t_1 - 0) + 2\psi_1 &\neq (2k_1 + 1)\pi, \\ \arg \alpha(t_2 + 0) + \arg \alpha(t_2 - 0) + 2\psi_2 &\neq (2k_2 + 1)\pi, \end{aligned} \quad (A)$$

где ψ_i есть угол между положительным направлением касательной к контуру l в точке t_i и осью OX , $i=1, 2$. Тогда оператор L есть Ф-оператор, то есть он нормально разрешим и имеет конечномерные ядро и коядро.

Для доказательства этой теоремы установим следующие леммы.

Лемма 8. Пусть дано разбиение единицы

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i(t) = 1; \quad 0 \leq \varphi_i, \quad \varphi_i \in C^\infty(I), \quad i=1, 2, 3, 4,$$

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \text{когда } |t_1 - t| > \varepsilon, \quad \varphi_2(t) = 0, \quad \text{когда } |t_2 - t| > \varepsilon,$$

$$\text{supp } \varphi_3 \subset I_1, \quad \text{supp } \varphi_4 \subset I_2.$$

Тогда существует такое малое число $\varepsilon > 0$ и операторы $K_1, \dots, K_4$, вполне непрерывные из $M(l_1, l_2)$ в $L_2(l)$, что при выполнении условия (A) для $u \in M(l_1, l_2)$ имеют место оценки

$$\| \varphi_i u \|_{L_2(l)} \leq \text{const} \| \varphi_i L u \|_{L_2(l)} + \| K_i u \|_{L_2(l)} + \frac{1}{4} \| u \|_{L_2}, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$\| \varphi_i u \|_{L_2(l)} \leq \text{const} \| \varphi_i L u \|_{L_2(l)} + \| K_i u \|_{L_2(l)}, \quad i = 3, 4.$$

Доказательство. Докажем оценку (18) для $i = 1$. Пусть s есть гладкий замкнутый контур, содержащий отрезок $[-1, 1]$, причем направление от -1 к 1 совпадает с положительным направлением на контуре s . Пусть $g(t)$ есть функция из леммы 4, причем $g(0) = t_1$, $g(s_1) = l_1$, $g(s_2) = l_2$. Оператор T определим с помощью равенства $(Tu)(t) = u(g(t))$. Пусть знак $\simeq$ означает равенство с точностью до вполне непрерывного оператора.

Из леммы 4 получаем

$$TL \simeq \frac{1}{g'} L_0 T,$$

где g' есть производная от функции g , а

$$L_0 = \chi_1 DP + \chi_2 DQ + g' \alpha(g) E.$$

Очевидно, достаточно доказать оценку (18) для оператора L_0 , только вместо $\frac{1}{4}$ поставить достаточно малый коэффициент, то есть мы будем считать, что оператор L совпадает с L_0 .

Из леммы 2 и леммы 3 легко видеть, что

$$L\varphi_1 \simeq \varphi_1 L,$$

$$L\varphi_1 \simeq \chi_1 (DP\varphi_1 + d_1 P\varphi_1 - c_1 Q\varphi_1) + \chi_2 (DQ\varphi_1 + d_2 Q\varphi_1 + c_2 P\varphi_1) + S,$$

где $c_1 = g'(0) \alpha(g(0-0))$, $c_2 = g'(0) \alpha(g(0+0))$, d_1 и d_2 — некоторые константы, которые мы потом подберем, а

$$S = \chi_1 (g' \alpha(g) - c_1) \varphi_1 E + \chi_2 (g' \alpha(g) - c_2) \varphi_1 E.$$

Очевидно, что когда число ε достаточно мало, то норма оператора $S: L_2(s) \rightarrow L_2(s)$ может стать сколь угодно малой. Таким образом, на интервале $(-\infty, \infty)$ получаем парное уравнение для $v = \varphi_1 u$:

$$\chi_- (DPv + d_1 Pv - c_1 Qv) + \chi_+ (DQv + d_2 Qv + c_2 Pv) = f,$$

где

$$f(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^2} + \frac{d_2 + c_2}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{x-x_0}, & x_0 < -1 \\ \varphi_1(x_0) (Lu)(x_0) - (Su)(x_0) + Ku(x_0), & -1 < x_0 < 1, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^2} + \frac{d_1 - c_1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{x-x_0}, & x_0 > 1, \end{cases}$$

где K есть вполне непрерывный оператор из $L_2(s)$ в $L_2(s)$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^2} &= \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{(1-x_0)^2} - 2 \int_{-1}^1 \frac{\int_{-1}^x \varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^3} dx, \quad x_0 < -1, \\ \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^2} &= \frac{\int_{-1}^1 \varphi_1(x) u(x) dx}{(1+x_0)^2} + 2 \int_{-1}^1 \frac{\int_x^1 \varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^3} dx, \quad x_0 > 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{x-x_0} &= \frac{\int_{-1}^1 \varphi_1(x) u(x) dx}{1-x_0} + \int_{-1}^1 \frac{\int_{-1}^{-1} \varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^2} dx, \quad x_0 < -1, \\ \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x) u(x) dx}{x-x_0} &= \frac{\int_{-1}^1 \varphi_1(x) u(x) dx}{1+x_0} + \int_{-1}^1 \frac{\int_x^1 \varphi_1(x) u(x) dx}{(x-x_0)^2} dx, \quad x_0 > 1. \end{aligned}$$

Так как в окрестности точек -1 и 1 $\varphi_1(x) = 0$, то можно записать

$$f(x) = \begin{cases} \left(A_1 \left(\int_{-1}^x \varphi_1(x) u(x) dx \right) \right) (x), & x < -1, \\ \varphi_1(x) (Lu)(x) - (Su)(x) + (Ku)(x), & -1 < x < 1, \\ \left(A_2 \left(\int_x^1 \varphi_1(x) u(x) dx \right) \right) (x), & x > 1, \end{cases}$$

где A_1 и A_2 — некоторые непрерывные операторы из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-\infty, \infty)$.

Замечая, что $\arg g'(0) = \psi_1$ легко видеть, что из условия (A) следует условие (4) (если только подобрать соответствующим образом числа d_1 и d_2). Поэтому, из леммы 6 вытекает оценка (18) для $i = 1$. Для $i = 2$ доказательство аналогичное.

Докажем оценку (18) для $i=3$. Пусть $\alpha_0(t)$ есть гладкое продолжение функции $\alpha(t)$ с носителя $\text{supp } \varphi_3$ на весь контур l . Имеем

$$\varphi_3 L = \varphi_3 (DP + \alpha_0 E) \simeq DP\varphi_3 + \alpha_0 \varphi_3 E. \quad (19)$$

Имеют место формулы

$$P^2 = E, \quad Q^2 = -E, \quad PQ = -QP = 0.$$

Если $u \in L_2(l)$, $Du \in L_2(l)$, то $PDu = DPu$, $QDu = DQu$.

Применяя к первой и третьей частям равенства (19) оператор P , а потом Q и используя последние формулы, получим

$$DP\varphi_3 u + \alpha_0 P\varphi_3 u \simeq P\varphi_3 Lu,$$

$$\alpha_0 Q\varphi_3 u \simeq Q\varphi_3 Lu.$$

Отсюда сразу следует оценка (18). Для $i=4$ доказательство аналогичное. Лемма 8 доказана.

Из (18) для $u \in M(l_1, l_2)$ следует оценка

$$\|u\|_{L_2(l)} \leq \text{const } \|Lu\|_{L_2(l)} + \|K_0 u\|_{L_2(l)},$$

где $K_0: M(l_1, l_2) \rightarrow L_2(l)$ есть вполне непрерывный оператор. Так как

$$\|u\|_{M(l_1, l_2)} \leq \text{const } (\|u\|_{L_2(l)} + \|Lu\|_{L_2(l)}),$$

то

$$\|u\|_{M(l_1, l_2)} \leq \text{const } \|Lu\|_{L_2(l)} + \|Ku\|_{L_2(l)}, \quad (20)$$

где $K: M(l_1, l_2) \rightarrow L_2(l)$ есть вполне непрерывный оператор.

Лемма 9. Пусть для оператора L , действующего из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 , имеет место оценка

$$\|u\| \leq \text{const } \|Lu\| + \|Ku\|, \quad (21)$$

где $K: B_1 \rightarrow B_2$ — вполне непрерывный оператор.

Тогда ядро оператора L конечномерно, а область значений замкнута.

Доказательство. Пусть имеется последовательность

$$u_n \in B_1, \quad Lu_n = 0, \quad \|u_n\| = 1, \quad n=1, 2, \dots$$

Из последовательности Ku_n , $n=1, 2, \dots$, можно выделить сходящуюся в B_2 подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность Ku_n , $n=1, 2, \dots$ сходится. Так как $L(u_n - u_m) = 0$, то из (21) следует, что $\|u_n - u_m\| \leq \|Ku_n - Ku_m\|$. Значит, последовательность u_n , $n=1, 2, \dots$, фундаментальна и имеет предел в B_1 .

Таким образом, сфера $\{u \in B_1 : \|u\| = 1, Lu = 0\}$ компактна, а значит, ядро оператора L конечномерно.

Пусть теперь $f_n \in \text{Im } L$, $n=1, 2, \dots$ — сходящаяся в B_2 последовательность, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Для каждого $n=1, 2, \dots$ найдем такое решение уравнения $Lu = f_n$, что норма $\|u_n\|$ минимальна. (Существование такого u_n обеспечивается конечномерностью ядра оператора L).

Покажем, что последовательность u_n , $n=1, 2, \dots$, ограничена в B_1 . Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} K \frac{u_n}{\|u_n\|} = p$. Из (21) имеем

$$\left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} - \frac{u_m}{\|u_m\|} \right\| \leq \text{const} \left\| \frac{f_n}{\|u_n\|} - \frac{f_m}{\|u_m\|} \right\| + \left\| K \frac{u_n}{\|u_n\|} - K \frac{u_m}{\|u_m\|} \right\|,$$

так что последовательность $\frac{u_n}{\|u_n\|}$, $n=1, 2, \dots$, фундаментальна в B_1 и имеет предел v . Очевидно, $Lv = 0$, $\|v\| = 1$. Значит существует такое число N , что

$$\|u_n - v \|u_n\|\| \leq \frac{1}{2} \|u_n\|, \quad n > N.$$

Но $L(u_n - \|u_n\|v) = f_n$, а это противоречит минимальности $\|u_n\|$.

Теперь, выделяя подпоследовательность u_{n_m} , такую что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} Ku_{n_m}$, из (21) получаем, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{n_m} = u$ и $Lu = f$.

Лемма 9 доказана.

Из (20) и леммы 9 следует, что уравнение (1) нормально разрешимо, а его ядро конечномерно.

Лемма 10. *Коядро оператора L конечномерно.*

Доказательство. Пусть функция $\varphi \in C^-(l)$ обращается в нуль в окрестности точек t_1 и t_2 , и пусть функция $v \in L_2(l)$ удовлетворяет для каждой такой функции $\varphi(t)$ условию

$$\int_l v(t)(L\varphi)(t) dt = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_l v(t)(L\varphi)(t) dt = \int_{t_1} (- (Qv)(t) \varphi'(t) + \alpha(t) v(t) \varphi(t)) dt + \\ &+ \int_{t_2} (- (pv)(t) \varphi'(t) + \alpha(t) v(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует (см. Г. Е. Шилов, [5]), что $v \in M(l_1, l_1)$ и

$$\chi_2 DPv + \chi_1 DQv + \alpha v = 0.$$

Для этого уравнения условие (A) то же, что и для оператора L , поэтому пространство таких функций $v \in L_2(l)$ конечномерно. Лемма 10 доказана.

Из лемм 9 и 10 следует теорема 1.

11. Գ. ՌՈՒՐԱՆՈՎԻՉ. Որոշ սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ օպերատորների լուծելիության լեմման (ամփոփում)

Ողորդ փակ l կոնտուրի վրա դիտարկենք առաջին կարգի սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ օպերատորը, որի առաջին կարգի անդամները չեն բավարարում Նորմալության պայմաններին և անեն խզվող գործակիցներ, եթե ցածր կարգի անդամները բավարարում են որոշ պահանջներին, ապացուցված է, որ այդ օպերատորում լինի վերջավոր չափանի կորիզ և կոկորիզ և նրա պատկերը $L_2(l)$ տարածությունում փակ է:

S. G. RUBANOVICH. *On the solvability of some singular integro-differential equations (summary)*

On smooth simple contour l singular integro-differential operator, of the first order, acting from $L_1(l)$ into $L_2(l)$ is considered. The first order terms may not satisfy the normality conditions and may have discontinuous coefficients. Under certain restrictions on low order terms it is proved, that this operator has a finite dimensional kernel and cokernel and that its image is closed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные предложения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, 12, вып. 2, 1957, 44—118.
2. Н. Н. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, изд. „Наука“, 1968.
3. Н. Е. Товмасын. К теории сингулярных интегральных уравнений, Дифференциальные уравнения, III, № 1, 1967, 69—80.]
4. Б. В. Хведелидзе. Линейные разрывные граничные задачи теории функций. Сингулярные интегральные уравнения и некоторые приложения, Тр. Тбилисс. матем. ин-та АН Груз.ССР, XXII, 1957, 3—158.
5. Г. Е. Шилов. Математический анализ, Второй спецкурс, ФМ, 1965.
6. А. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, изд. „Мир“, 1965.

Н. Е. ТОВМАСЯН

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (1)$$

являются разложениями в ряд Тейлора n -мерных аналитических вектор-функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в круге $|z| \leq 1$; a_k и b_k — n -мерные постоянные векторы.

Обозначим через M класс n -мерных аналитических векторов $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty. \quad (2)$$

Определим скалярное произведение вектор-функций φ и ψ класса M следующим образом:

$$(\varphi(z), \psi(z)) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (3)$$

где черта над вектором b_k означает переход к комплексно сопряженному вектору. Произведение двух векторов $a_k, \bar{b}_k$ (или вектор-функций) равно сумме произведений соответствующих компонент.

Аналитическая вектор-функция $\varphi(z)$ в круге $|z| < 1$ принадлежит классу M тогда и только тогда, когда при $r \rightarrow 1$ ($r < 1$) функция $\varphi(rz)$ сходится на окружности $|z|=1$ по метрике L_2 . Назовем этот предел граничным значением функции $\varphi(z)$ на Γ .

Легко установить, что если $\varphi \in M, \psi \in M$, то ряды (1) сходятся на Γ в метрике $L_2(\Gamma)$, их суммы совпадают с граничными значениями функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ соответственно, и имеет место равенство

$$(\varphi, \psi) = \lim_{r \rightarrow 1} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \varphi(z) \bar{\psi}(z) ds = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \varphi(z) \overline{\psi(z)} ds. \quad (4)$$

Рассмотрим следующее уравнение

$$T(\varphi) \equiv A(z) \varphi(z) - K(\varphi) = f(z), \quad (5)$$

где $A(z)$ — заданная n -мерная квадратная матрица, элементы которой — аналитические функции в круге $|z| < 1$, непрерывные в замкнутом круге $|z| \leq 1$,

$$\det A(z) \neq 0 \text{ при } |z| = 1,$$

$K(\varphi)$ — вполне непрерывный линейный (в поле действительных чисел) оператор, определенный в классе M , который каждому вектору $\varphi \in M$ ставит в соответствие вектор из класса M , $f(z)$ — заданный вектор из класса M . Решение ищется в классе M .

Из (4) следует, что если $\varphi \in M$, то $A(z)\varphi$ также принадлежит классу M .

Уравнение (5) при $f=0$ будем называть однородным уравнением. Так как M является гильбертовым пространством, а $T(\varphi)$ — ограниченным оператором в M , то для любого вектора $\psi \in M$ существует, и притом единственный, вектор $T^*(\psi) \in M$, удовлетворяющий условию

$$(T(\varphi), \psi) = (\varphi, T^*(\psi)), \quad \varphi \in M. \quad (6)$$

Оператор $T^*(\psi)$ является линейным (в поле действительных чисел) ограниченным оператором, $\|T^*\| = \|T\|$. Оператор T^* называется сопряженным оператором к оператору T .

Пусть

$$T^*(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + id_k) z^k \quad (7)$$

— разложение в ряд Тейлора вектора $T^*(\psi)$ в круге $|z| < 1$, где c_k и d_k — действительные векторы.

Из определения скалярного произведения следует, что

$$c_k = ((T^*(\psi), e_1 z^k), \dots, (T^*(\psi), e_n z^k)), \\ d_k = ((T^*(\psi), e_1 i z^k), \dots, (T^*(\psi), e_n i z^k)),$$

где $e_k = \overbrace{(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^n$. Отсюда и из (6) следует

$$c_k = ((\psi, T(e_1 z^k)), \dots, (\psi, T(e_n z^k))), \quad (8)$$

$$d_k = ((\psi, T(i e_1 z^k)), \dots, (\psi, T(i e_n z^k))). \quad (9)$$

Как показал автор (см. [1], [2]), многие краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений приводятся к решению уравнения (5).

В работе строится полная теория для уравнения (5).

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 приводятся основные результаты. В § 2 доказываются сформулированные в § 1 результаты и дается метод решения уравнения (5). В § 3 при некоторых дополнительных ограничениях на оператор $K(\varphi)$, дается эффективный метод решения уравнения (5).

§ 1. Основные результаты

Для уравнения (5) имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Числа k_0 и k_1 линейно независимых решений однородных уравнений $T(\varphi) = 0$ и $T^*(\varphi) = 0$ конечны,

$$k_0' - k_0 = 2\pi,$$

где 2π равно приращению аргумента детерминанта $A(z)$, когда z пробегает окружность $|z|=1$ один раз в положительном направлении.

Так как $\det A(z)$ — аналитическая функция в $|z|<1$ и $\det A(z) \neq 0$ при $|z|=1$, то, согласно принципу аргумента, число χ равно числу нулей $\det A(z)$ внутри круга $|z|<1$.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(f, \psi_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k_0), \quad (10)$$

где $\psi_1, \dots, \psi_{k_0}$ — полная система линейно независимых решений уравнения $T^*(\varphi) = 0$.

Если $\varphi(z) \in M$, то существует целое число $m \geq 0$, такое что $\varphi(z) = z^m \psi(z)$, где $\psi(z) \in M$ и $\psi(0) \neq 0$. Число m назовем порядком нуля вектора $\varphi(z)$ в точке $z=0$ и обозначим через $N(\varphi)$.

Теорема 3. Если $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при всех $\varphi \in M$ и $\det A(0) \neq 0$, то однородное уравнение (1) не имеет нетривиальных решений, а сопряженное однородное уравнение имеет 2χ линейно независимых решений.

Пусть $e_k = (e_{k1}, \dots, e_{kn})$, где $e_{kk} = 1$ и $e_{kj} = 0$ при $k \neq j$.

Обозначим через β_{pj} и γ_{pj} векторы

$$\beta_{pj} = \frac{1}{p!} \frac{d^p K(e_j z^p)}{dz^p} \Big|_{z=0}, \quad \gamma_{pj} = \frac{1}{p!} \frac{d^p K(i e_j z^p)}{dz^p} \Big|_{z=0}, \quad (11)$$

а через β_p и γ_p — квадратные матрицы, столбцами которых являются векторы $\beta_{p1}, \dots, \beta_{pn}$ и $\gamma_{p1}, \dots, \gamma_{pn}$ соответственно.

Ясно, что пространство M является пространством Гильберта с базисом $e_k z^j, i e_k z^j$ ($k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots$). Известно (см. [3]), что M' является компактным множеством в M тогда и только тогда, когда для любого ε можно указать число l , такое что

$$\sum_{m=l}^{\infty} \left[\frac{1}{m!} |\varphi^{(m)}(0)| \right]^2 < \varepsilon, \quad \varphi \in M', \quad (12)$$

где $\varphi^{(m)}(0)$ — m -тая производная функции φ в точке $z=0$.

Так как множество векторов $\{K(e_j z^p), K(i e_j z^p)\}$, $j=1, 2, \dots, n$, $p=1, 2, \dots$ компактно в M , то согласно (12)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\beta_{pj}| = \lim_{p \rightarrow \infty} |\gamma_{pj}| = 0. \quad (13)$$

Обозначим

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \operatorname{Re}(\beta_p - A(0)), & \operatorname{Re}(\gamma_p - iA(0)) \\ \operatorname{Im}(\beta_p - A(0)), & \operatorname{Im}(\gamma_p - iA(0)) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Согласно (13)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \det \Delta_p = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} A(0), \operatorname{Re} (i A(0)) \\ \operatorname{Im} A(0), \operatorname{Im} (i A(0)) \end{vmatrix} = |\det A(0)|^2.$$

Теорема 4. Пусть $x=0$ и $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при всех $\varphi \in M$. Уравнение (5) имеет (и притом единственное) решение при любой правой части $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\det \Delta_p \neq 0, \quad p=0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Теорема 5. Если $x \neq 0$, $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при всех $\varphi \in M$ и выполнено условие (15), то однородное уравнение (5) имеет только нулевое решение, а сопряженное однородное уравнение имеет $2n$ линейно независимых решений.

Рассмотрим уравнения

$$\varphi = K(\varphi) + L(\varphi) + f(z), \quad (16)$$

$$\bar{\varphi} = \bar{K}(\varphi) + \bar{f}(z), \quad (17)$$

где $K(\varphi)$ и $L(\varphi)$ — вполне непрерывные операторы в M .

Теорема 6. Если $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$, $N(L(\varphi)) > N(\varphi)$ при всех $\varphi \in M$, то однородные уравнения (16) и (17) одновременно имеют или не имеют нетривиальные решения.

В случае, когда $x=0$ и $N(K(\varphi)) \geq N(\varphi)$, число k_0 линейно независимых решений однородного уравнения (5) явно выражается через матрицу $A(z)$ и векторы $K(e_j z^p)$, $K(i e_j z^p)$ ($p=0, 1, \dots, n_0$), при этом k_0 удовлетворяет неравенствам

$$\max_{0 \leq p < n_0} (2n - r_p) \leq k_0 \leq \sum_{p=0}^{n_0} 2n - r_p, \quad (18)$$

где r_p — ранг матрицы Δ_p , а n_0 — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $\det \Delta_{n_0} = 0$.

§ 2. Исследование уравнения (5)

Так как в уравнении (5) оператор $K(\varphi)$ является вполне непрерывным оператором из M в M , то теоремы 1 и 2 достаточно доказать для уравнения

$$T_0(\varphi) \equiv A(z) \varphi(z) = f(z). \quad (19)$$

Из (7) и (9) следует, что уравнение

$$T_0^*(\varphi) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) \overline{A(t)} dt}{t - z} = 0 \quad (20)$$

является сопряженным однородным уравнением к уравнению (19).

Докажем теоремы 1 и 2 для уравнения (19). Ясно, что однородное уравнение (19) имеет только нулевое решение.

Необходимость условия (10) для разрешимости уравнения (19) тривиальна. Действительно, если для $f(z)$ уравнение (19) имеет решение $\varphi(z)$ и $T_0^*(\psi) = 0$, то

$$((f(z), \psi(z)) = (T_0(\varphi), \psi) = (\varphi, T_0^*(\psi)) = 0. \quad (21)$$

Пусть $x=0$. Тогда $\det A(z) \neq 0$ при $|z| \leq 1$. Поэтому уравнение (19) всегда разрешимо. Отсюда и из (21) следует, что уравнение (20) имеет только нулевое решение. Следовательно, теоремы 1 и 2 для уравнения (19) при $x=0$ доказаны.

Докажем теоремы 1 и 2 для уравнения (19) при $x > 0$ методом индукции. Пусть эти теоремы для уравнения (19) верны при $x = m$. Докажем справедливость этих теорем для уравнения (19), когда $x = m+1$.

Пусть $x = m+1$. Тогда существует точка z_0 внутри круга $|z| < 1$, такая что

$$\det A(z_0) = 0. \quad (22)$$

Пусть $c^{(1)} = (c_1^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})$ — нулевое решение однородной алгебраической системы

$$c^{(1)} A(z_0) = 0, \quad (23)$$

и пусть $c^{(2)}, \dots, c^{(n)}$ — постоянные n -мерные векторы, выбранные так, чтобы детерминант матрицы a , строками которой являются векторы $c^{(1)}, \dots, c^{(n)}$, был отличен от нуля.

Умножим обе части равенства (19) на матрицу a , получим

$$aA(z) \varphi(z) = af(z). \quad (24)$$

Пусть $b^{(1)}(z), \dots, b^{(n)}(z)$ — строки матрицы $aA(z)$, а $af(z) = (g_1(z), \dots, g_n(z))$.

Согласно (23)

$$b^{(1)}(z_0) = 0, \quad (26)$$

и для разрешимости уравнения (24) необходимо выполнение условия

$$g_1(z_0) = 0. \quad (27)$$

Легко проверить, что условие (27) можно переписать в виде

$$(g, \varphi_1) = 0, \quad (g, \varphi_2) = 0, \quad (28)$$

где

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{1}{1-zz_0}, 0, \dots, 0 \right), \quad \varphi_2(z) = \left(\frac{i}{1-zz_0}, 0, \dots, 0 \right). \quad (29)$$

Пусть выполнено условие (27). Тогда уравнение (24) эквивалентно уравнению

$$\hat{A}(z) \varphi(z) = F(z), \quad (30)$$

где $\hat{A}(z)$ — матрица, строками которой являются векторы $(z - z_0)^{-1} \times b^{(1)}(z), b^{(2)}(z), \dots, b^{(n)}(z)$,

$$F(z) = \left(\frac{g_1(z)}{z-z_0}, g_2(z), \dots, g_n(z) \right). \quad (31)$$

Ясно, что элементы матрицы $\hat{A}(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$, непрерывны в замкнутом круге $|z| \leq 1$, $\det \hat{A}(z) \neq 0$ при $|z|=1$ и приращение аргумента $\det \hat{A}(z)$, когда точка z обходит окружность $|z|=1$ один раз в положительном направлении, равно $2m\pi$, а $F(z) \in M$.

Так как, по предположению, теоремы 1 и 2 для уравнения вида (19) верны при $x = m$, то уравнение (30) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(F(z), \chi_j(z)) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, 2m+2, \quad (32)$$

где $\chi_3(z), \dots, \chi_{2m+2}(z)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, сопряженного к уравнению (30).

Подставляя $F(z)$ из (31) в (32), получим

$$(g, \varphi_j(z)) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, 2m+2, \quad (33)$$

где

$$\varphi_j(z) = \left(\chi_{j1}(z) \cdot \frac{z}{1-zz_0}, \chi_{j2}(z), \dots, \chi_{jn}(z) \right), \quad (34)$$

$$\chi_j(z) = (\chi_{j1}(z), \dots, \chi_{jn}(z)).$$

Докажем, что векторы $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{2m+2}(z)$, входящие в условия (28) и (33), линейно независимы.

Пусть

$$c_1 \varphi_1(z) + \dots + c_{2m+2} \varphi_{2m+2}(z) = 0, \quad (35)$$

где $c_1, \dots, c_{2m+2}$ — действительные постоянные. Из (29) и (34) следует, что равенство (35) можно переписать в виде

$$\frac{c_1 + ic_2}{1-zz_0} + \frac{z}{1-zz_0} \sum_{j=3}^{2m+2} c_j \chi_{j1}(z) = 0, \quad (36)$$

$$c_3 \chi_{3k}(z) + c_4 \chi_{4k}(z) + \dots + c_{2m+2} \chi_{2m+2,k}(z) = 0. \quad (37)$$

$$(k = 2, 3, \dots, n)$$

Подставляя в (36) $z=0$, получим $c_1 = c_2 = 0$.

Следовательно, равенства (36) и (37) будут иметь вид

$$\sum_{j=3}^{2n} c_j \chi_{jk}(z) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n; \quad x = m+1. \quad (38)$$

Так как векторы $\chi_3(z), \dots, \chi_{2m+2}(z)$ линейно независимы, то отсюда следует, что

$$c_3 = c_4 = \dots = c_{2m+2} = 0.$$

Следовательно, векторы $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{2m+2}(z)$ линейно независимы. Из (28), (33) и (25) следует, что уравнение (19) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(f, \psi_j) = 0, \quad j=1, 2, \dots, 2m+2, \quad (39)$$

где

$$\psi_j = \varphi_j \text{ а } (j=1, \dots, 2m+2).$$

Так как $\det a \neq 0$, то из линейной независимости векторов $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{2m+2}(z)$ следует линейная независимость векторов $\psi_1(z), \dots, \psi_{2m+2}(z)$.

Докажем, что векторы $\psi_1(z), \dots, \psi_{2m+2}(z)$ являются решением уравнения (20). Так как уравнение (19) для вектора $f = A(z)T_0^*(\psi_j)$ разрешимо, то согласно условиям (39)

$$(A(z)T_0^*(\psi_j), \psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2m+2, \quad (40)$$

а отсюда легко следует равенство $T_0^*(\psi_j) = 0$.

Таким образом, мы доказали, что если теоремы (1) и (2) для уравнения (19) верны при $x = m$, то они верны и для $x = m+1$. Так как справедливость этого утверждения доказана для $x=0$, то отсюда следует справедливость этих теорем для уравнения (19) при любом натуральном x .

Рассмотрим теперь оператор

$$L(\varphi) \equiv A^{-1}(z) \left(\varphi(z) - \sum_{k=1}^{2x} (\varphi, \psi_k) \psi_k(z) \right) \quad (41)$$

в пространстве M , где $A^{-1}(z)$ — матрица, обратная к матрице $A(z)$, а $\psi_1(z), \dots, \psi_{2x}(z)$ — полная ортонормальная система решений уравнения (20).

Имеет место следующая

Лемма 1. *Оператор $L(\varphi)$ является ограниченным оператором из M в M .*

Доказательство. Так как вектор

$$f(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^{2x} (\varphi, \psi_k) \psi_k(z) \quad (42)$$

удовлетворяет условиям $(f, \psi_k) = 0$, $k = 1, \dots, 2x$ и теорема 2 верна для уравнения (19), то уравнение (19) для вектора $f(z)$ имеет решение из класса M . Очевидно, что это решение единственно и равно $L(\varphi)$.

Из (4) и (41) следует, что

$$\|L(\varphi)\| \leq c \|\varphi\|, \quad \varphi \in M, \quad (43)$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Легко убедиться, что $\varphi = L(A(\varphi))$ при $\varphi \in M$. Следовательно, решение уравнения (5) можно искать в виде $\varphi = L(\psi)$, где $\psi \in M$. Подставляя в (5) $\varphi = L(\psi)$, получим

$$\psi = K_1(\psi) + f(z), \quad (44)$$

где

$$K_1(\psi) = \sum_{k=1}^{2x} (\psi, \psi_k) \psi_k(z) + K(L(\psi)). \quad (45)$$

Ясно, что оператор $K_1(\psi)$ является вполне непрерывным оператором из M в M . Уравнение (44) можно решить известными мето-

дами функционального анализа, [3].

Доказательство теоремы 3. Пусть однородное уравнение

$$A(z)\varphi(z) = K(\varphi) \quad (46)$$

имеет отличное от нуля решение $\varphi_0(z)$, и пусть порядок нуля вектора $\varphi_0(z)$ в точке $z=0$ равен p , то есть

$$\varphi_0(z) = z^p \psi_0(z), \quad \psi_0(0) \neq 0. \quad (47)$$

Так как в предположении теоремы 3 $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$, $\varphi \in M$, то

$$K(\varphi_0) = z^{p+1} \psi(z), \quad (48)$$

где $\psi(z)$ — аналитический вектор в круге $|z| < 1$.

Из (46), (47) и (48) следует

$$A(0)\psi_0(0) = 0.$$

Так как $\det A(0) \neq 0$, то $\psi_0(0) = 0$, что противоречит условию (47). Следовательно, уравнение (46) имеет только тривиальное решение. Отсюда и из теоремы 1 следует, что сопряженное однородное уравнение имеет 2π линейно независимых решений.

Теорема 7. Если $x=0$ и $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при $\varphi \in M$, то для того чтобы однородное уравнение (5) имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовало неотрицательное целое число p , такое что

$$\det \Delta_p = 0, \quad (49)$$

где Δ_p — матрица (14).

Необходимость. Пусть уравнение (46) имеет нетривиальное решение $\varphi_0(z)$, и пусть p — порядок нуля вектора $\varphi_0(z)$ в точке $z=0$.

Ясно, что

$$\varphi_0(z) = az^p + z^{p+1}\psi(z), \quad (50)$$

где a — постоянный вектор, $a \neq 0$, $\psi \in M$.

Пусть $a = c + id$, где c и d — действительные векторы,

$$c = (c_1, \dots, c_n), \quad d = (d_1, \dots, d_n).$$

Ясно, что вектор a можно записать в виде

$$a = (c_1 + id_1)e_1 + \dots + (c_n + id_n)e_n. \quad (51)$$

Из (46), (50) и (51) получим

$$A(z)[az^p + z^{p+1}\psi(z)] = \sum_{j=1}^n [c_j K(e_j z^p) + d_j K(i e_j z^p)] + K(z^{p+1}\psi(z)). \quad (52)$$

Так как

$$N(K(\varphi)) > N(\varphi) \text{ при } \varphi \in M,$$

то

$$K(z^{p+1}\psi(z)) = z^{p+1}\Phi(z), \quad (53)$$

$$K(e_j z^p) = \beta_{pj} z^p + \varphi_{pj}(z) z^{p+1}, \quad (54)$$

$$K(ie_j z^p) = \gamma_{pj} z^p + \psi_{pj}(z) z^{p+1}, \quad (55)$$

где $\Phi(z)$, $\varphi_{pj}(z)$ и $\psi_{pj}(z)$ принадлежат классу M , а β_{pj} и γ_{pj} — постоянные векторы, определенные формулой (11). Из (52)–(55) получим

$$A(0) a = \sum_{j=1}^n [\beta_{pj} c_j + \gamma_{pj} d_j]. \quad (56)$$

Приравнивая в обеих частях равенства (56) реальные и мнимые части соответственно, получим

$$\Delta_p X = 0, \quad (57)$$

где Δ_p — матрица (14), а $X = (c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n)$.

Так как $X \neq 0$, то отсюда следует, что

$$\det \Delta_p = 0.$$

Достаточность. Пусть для некоторого m , $\det \Delta_m = 0$. Так как $\lim_{p \rightarrow \infty} \det \Delta_p \neq 0$, то существует число p , при котором

$$\det \Delta_p = 0, \det \Delta_j \neq 0, \quad j = p+1, p+2, \dots \quad (58)$$

Ищем решение однородного уравнения (46) в виде

$$\varphi(z) = az^p + z^{p+1} \psi(z), \quad (59)$$

где

$$a = c + id; \quad c = (c_1, \dots, c_n), \quad d = (d_1, \dots, d_n); \quad (60)$$

$X = (c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n)$ является нетривиальным действительным решением алгебраических уравнений (57), а $\psi \in M$.

Подставляя (59) в (46), для определения вектора $\psi(z)$ получим уравнение

$$A(z) \cdot \psi(z) = L(\psi(z)) + g(z), \quad (61)$$

где

$$L(\psi) = z^{-(p+1)} K(z^{p+1} \psi(z)), \quad (62)$$

$$g(z) = z^{-1} (a - z^{-p} K(az^p)).$$

Так как $K(\varphi)$ — вполне непрерывный оператор и $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$, то оператор $L(\varphi)$ также вполне непрерывен в классе M и

$$N(L(\varphi)) \geq N(\varphi) \quad \text{при } \varphi \in M.$$

Из (54), (55) и (60) следует, что вектор $g(z)$, определенный формулой (62), принадлежит классу M .

Как мы показывали выше, для того чтобы однородное уравнение (5) при $x=0$ и $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ имело нетривиальное решение, необходимо чтобы для некоторого натурального числа p

$$\det \Delta_p = 0, \quad (63)$$

где Δ_p — матрица (14).

Согласно (58), это условие для уравнения (61) не выполняется, так как оно для этого уравнения имеет вид $\det \Delta_k = 0$ для некоторого натурального числа $k > p$. Следовательно, однородное уравнение (61)

имеет только нулевое решение. Отсюда и из теорем 1 и 2 следует, что уравнение (61) имеет решение ψ_0 из класса M . Ясно, что $\varphi = az^p + z^{p+1}\psi_0(z)$ является нетривиальным решением уравнения (66).

Из теорем 1, 2 и 7 следует теорема 4. Если $x \neq 0$, $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при $\varphi \in M$ и $\det A(0) \neq 0$, то условие (63) и в этом случае является необходимым для существования нетривиального решения однородного уравнения (5) и доказывается аналогично. Отсюда следует справедливость теоремы 5.

Легко установить, что условие (15) для уравнений (16) и (17) совпадает. Отсюда и из теоремы 4 следует справедливость теоремы 6.

§ 3. Об одном эффективном методе решения уравнения (5), когда $x = 0$ и $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при всех $\varphi \in M$

Напомним, что $2\pi x$ является приращением аргумента функции $\det A(z)$, когда z один раз обходит контур $|z|=1$ в положительном направлении, а $N(\varphi)$ означает порядок нуля вектора φ в точке $z=0$. К этому случаю приводится, например, задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом (см. [1]).

Из условия $x=0$ следует, что $\det A(z) \neq 0$, $|z| \leq 1$. Поэтому без ограничения общности, мы будем предполагать, что $A \equiv 1$.

Обозначим через M_k подпространство пространства M , элементы которого удовлетворяют условию

$$\varphi^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Обозначим через $\|K\|_p$ норму оператора $K(\varphi)$ в пространстве M_p . Ясно, что $\|K\| > \|K\|_0 > \|K\|_1 \geq \|K\|_2 > \dots$.

Имеет место следующая

Лемма 2. Если $K(\varphi)$ — вполне непрерывный оператор в пространстве M , $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|K\|_p = 0. \quad (64)$$

Так как множество функций $\{\psi = K(\varphi), \text{ где } \varphi \in M \text{ и } \|\varphi\|=1\}$ компактно, то согласно необходимому и достаточному условию компактности (12), для любого ε существует число m , такое что

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left| \frac{d^k K(\varphi)}{dz^k} \right|_{z=0} \right]^2 \leq \varepsilon^2 \text{ при } \|\varphi\|=1. \quad (65)$$

Из (65) и условия $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ получим, что если $\varphi \in M_m$ и $\|\varphi\|=1$, то

$$\|K(\varphi)\|^2 \equiv \sum_{k=m}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left| \frac{d^k K(\varphi)}{dz^k} \right|_{z=0} \right]^2 \leq \varepsilon^2. \quad (66)$$

Из (65) и (66) получим

$$\|K\|_p \leq \varepsilon \text{ при } p \geq m.$$

Отсюда и следует равенство (64).

Решение уравнения (5) всегда можем искать в виде

$$\varphi(z) = P(z) + z^{m+1} \psi(z), \quad (67)$$

где $P(z)$ — n -мерная вектор-функция, элементы которой — полиномы степени, не выше m , а $\psi(z) \in M$.

Подставляя (67) в (5), получим

$$P(z) + z^{m+1} \psi(z) = K(P(z)) + K(z^{m+1} \psi(z)) + f(z). \quad (68)$$

Ясно, что вектор $f(z)$ всегда можно представить в виде

$$f(z) = f_1(z) + z^{n+1} f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad f_2(z) = \frac{f(z) - f_1(z)}{z^{m+1}}.$$

Обозначим через $K_1(f(z))$ оператор

$$K_1(P(z)) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j K(P(z))}{dz^j} \right|_{z=0} z^j. \quad (69)$$

Так как обе части (68) — аналитические векторы в круге $|z| < 1$, и порядок нуля вектора $K(z^{m+1} \psi(z))$ в точке $z = 0$ больше m , то из единственности разложения ряда Тейлора аналитических векторов следует, что это уравнение эквивалентно равенствам

$$P(z) = K_1(P(z)) + f_1(z), \quad (70)$$

$$\psi(z) = K_2(P(z)) + f_2(z); \quad K_m(\psi), \quad (71)$$

где

$$K_m(\psi) = z^{-m-1} K(z^{m+1} \psi(z)),$$

$$K_2(P) = z^{-m-1} (K(P) - K_1(P)).$$

Отметим, что векторы $K_2(P)$ и $K_m(\psi)$ также принадлежат классу M . Пусть

$$P(z) = \sum_{k=0}^m (c_k + id_k) z^k, \quad (71')$$

где

$$c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kn}), \quad d_k = (d_{k1}, \dots, d_{kn}) \quad (72)$$

— действительные векторы.

Ясно, что $P(z)$ можно также записать в виде

$$P(z) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^n (c_{kj} + id_{kj}) e_j z^k. \quad (73)$$

Подставляя из (73) значение $P(z)$ в (70), получим

$$\sum_{k=0}^m (c_k + id_k) z^k = \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^n [c_{kj} K_1(e_j z^k) + d_{kj} K_1(ie_j z^k)] + f_1(z). \quad (74)$$

Так как $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при $\varphi \in M$, то

$$N(K(e_j z^k)) > k, N(K(ie_j z^k)) > k. \quad (75)$$

Из (69) и (75) получим

$$K_1(e_j z^k) = \sum_{l=k}^m \alpha_{jkl} z^l, \quad K_1(e_j iz^k) = \sum_{l=k}^m \beta_{jkl} z^l, \quad (76)$$

где

$$\alpha_{jkl} = \frac{1}{l!} \frac{d^l K(e_j z^k)}{dz^l} \Big|_{z=0}, \quad \beta_{jkl} = \frac{1}{l!} \frac{d^l K(ie_j z^k)}{dz^l} \Big|_{z=0}. \quad (77)$$

Подставляя (76) в (74) и приравнявая соответствующие коэффициенты при $z^k (k=1, \dots, m)$ левой и правой части равенства (74), получим

$$c_l + id_l = \sum_{k=0}^l \sum_{j=1}^n (c_{kj} \alpha_{jkl} + d_{kj} \beta_{jkl}) + \frac{1}{l!} f^{(l)}(0), \quad (78)$$

где $f^{(l)}(0)$ l -тая производная функции $f(z)$ в точке 0.

Уравнение (78) можно переписать в виде

$$c_l = \sum_{k=0}^l \sum_{j=1}^n (c_{kj} \operatorname{Re} \alpha_{jkl} + d_{kj} \operatorname{Re} \beta_{jkl}) + \frac{1}{l!} \operatorname{Re} f^{(l)}(0), \quad (79)$$

$$d_l = \sum_{k=0}^l \sum_{j=1}^n (c_{kj} \operatorname{Im} \alpha_{jkl} + d_{kj} \operatorname{Im} \beta_{jkl}) + \frac{1}{l!} \operatorname{Im} f^{(l)}(0) \quad (80)$$

$$(l = 0, \dots, m).$$

Так как $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при $\varphi \in M$ и оператор $K(\varphi)$ является вполне непрерывным оператором, то согласно лемме 2, норма оператора $K(z^m \psi)$ стремится к нулю, когда $m \rightarrow \infty$. Ясно, что норма оператора $K_m(\psi) \equiv z^{-m-1} K(z^{m+1} \psi(z))$ совпадает с нормой оператора $K(z^{m+1} \psi)$. Следовательно, существует целое неотрицательное число m , такое что

$$\|K_m\| < 1. \quad (81)$$

Пусть число m удовлетворяет условию (81). Тогда уравнение (71) относительно $\psi(z)$ всегда имеет (и притом единственное) решение, которое дается формулой

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} K_m^j (K_2(P(z)) + f_2(z)), \quad (82)$$

где

$$K_m^0(\varphi) = \varphi, \quad K_m^1(\varphi) = K_m(\varphi), \quad K_m^j(\varphi) = K(K_m^{j-1}(\varphi)) \quad (j=2, 3, \dots). \quad (83)$$

Следовательно, имеет место следующая

Теорема 8. Если $A=1$, $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$, то уравнение (5) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система алгебраических уравнений (79), (80). Число линейно независимых решений однородного уравнения (5) равно числу линейно независимых решений однородной алгебраической системы (79), (80). Все решения уравнения (5) определяются формулой (67), где $P(z)$ и $\psi(z)$ определяются формулами (73), (82), а c_{kj} и d_{kj} ($k=0, \dots, m$; $j=1, \dots, n$) — произвольное решение системы алгебраических уравнений (79), (80).

Теорема 9. Если $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при $\varphi \in M$ и $A=1$, то решение уравнения (5) определяется по формуле

$$\varphi(z) = f(z) + K(f) + K^2(f) + \dots + K^n(f) + \dots \quad (84)$$

Доказательство. Докажем, что ряд (84) сходится по норме (2).

Так как $N(K(\varphi)) > N(\varphi)$ при $\varphi \in M$, то

$$N(K^p(f)) \geq p + N(f).$$

Следовательно,

$$K^p(f) \in M_p \text{ при } f \in M, p=1, 2, 3, \dots$$

Повтому

$$\begin{aligned} \|K^p(\varphi)\| &= \|K(K^{p-1}(\varphi))\| \leq \|K\|_{p-1} \|K^{p-1}(\varphi)\| \leq \\ &\leq \|K\|_{p-1} \|K\|_{p-2} \|K^{p-2}(\varphi)\| \leq \dots \leq \|K\|_{p-1} \|K\|_{p-2} \dots \|K\|_1 \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и из леммы 2 следует, что ряд сходится по норме (2).

Из (84) получим, что

$$K(\varphi) \equiv K(f + K(f) + \dots + K^n(f) + \dots) = K(f) + K^2(f) + \dots = \varphi - f,$$

то есть вектор-функция $\varphi(z)$, заданная формулой (84), является решением уравнения (5) при $A=1$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 5.II.1971

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Մի Բանի Ֆունկցիոնալ Տավասարումներ Գծադրելի Ֆունկցիաների դասում (ամփոփում)

Ենթադրենք $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$ -ը անալիտիկ վեկտոր-ֆունկցիա է միավոր շրջանում և

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{jk} z^k$$

շարքը հանդիսանում է $\varphi_j(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը, Սահմաններ անալիտիկ վեկտոր-ֆունկցիաների M դասը հետևյալ կերպ,

Մենք կասենք, որ $\varphi(z) \in M$, եթե

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty:$$

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը

$$A(z) \varphi(z) = K(\varphi) + f(z), \quad (1)$$

որտեղ $A(z)$ -ը n -շախանի քառակուսային մատրիցա է, որի էլեմենտները անալիտիկ ֆունկցիաներ են միավոր շրջանում և անընդհատ են փակ շրջանում, $f(z)$ -ը տված վեկտոր ֆունկցիա է M դասից, իսկ $K(\varphi)$ -ն M դասի վրա տրված լրիվ անընդհատ (իրական թվերի դաշտում) գծային օպերատոր է, որի արժեքների բազմությունը պատկանում է M -ին, $\varphi(z)$ -ը որոնելի անալիտիկ վեկտոր-ֆունկցիա է M դասից:

ենթադրվում է, որ

$$\det A(z) \neq 0, \text{ երբ } |z|=1:$$

Աշխատանքում արվում է (1) հավասարման լուծման մեթոդ, $K(\varphi)$ օպերատորի նկատմամբ արված որոշ ենթադրությունների դեպքում արվում է (1) հավասարման լուծման էքսպլիցիտ մեթոդներ, Դուրս է բերվում (1) հավասարման լուծելիության պայմանները համալուծ հավասարման տերմիններով և արվում է այդ հավասարման ինդեքսի համար բանաձև, Հեղինակի [1] և [2] աշխատանքներում որոշ տիպի եզրային խնդիրները էլիպտիկ հավասարումների համար բերված են (1) հավասարման լուծմանը:

N. E. TOVMASSIAN. *Functional equations in the set of analytic functions*
(summary)

Let $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$ be an analytic vector function in the unit circle and

$\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k$ be Taylor series of $\varphi_j(z)$, $\varphi(z)$ is said to belong to M if

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty. \quad (1)$$

The equation

$$A(z) \varphi(z) = K(\varphi) + f(z)$$

is considered in the paper. Herein $A(z)$ is a square n -matrix with elements analytical in the unit circle and continuous in its closure, $K(\varphi)$ is a linear operator which maps M into M , $\varphi \in M$ is to be determined.

Under some additional assumptions a method of solution for equation (1) is proposed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Е. Товмассян. Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом, Дифференциальные уравнения, V, № 1, 1969, 60—71.
2. Н. Е. Товмассян. Новые методы решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений, Мат. сб. (в печати).
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, М., Гостехиздат, 1951.

Р. И. ПОДЛОВЧЕНКО, Г. Н. ПЕТРОСЯН, В. Е. ХАЧАТРЯН

ИНТЕРПРЕТАЦИИ СХЕМ АЛГОРИТМОВ И РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕЖДУ СХЕМАМИ

Схемы алгоритмов, рассматриваемые нами, определены в работе [1] и многократно служили объектом исследований в теории программирования. Мы пользуемся описанием схемы алгоритма посредством конечного ориентированного графа, в вершинах которого находятся или операторы, или функции алгебры логики от логических переменных; операторами называются символы некоторого алфавита; и этот алфавит, и список логических переменных являются конечными (такое описание схемы алгоритма дано в работе [2]).

Каждая схема алгоритма порождает свое множество слов, которые называются конфигурациями. Отдельной конфигурации соответствует единственный путь в схеме, берущий начало в ее входе; множеством конфигураций, порождаемых схемой, охватываются все пути в ней, по которым может передвигаться в схеме перерабатываемая ею информация.

Если задаться некоторым множеством M , с каждым оператором связать свое преобразование множества M в себя, а с каждой логической переменной—свое подмножество множества M , принимаемое за область истинности этой переменной, то схема алгоритма, как говорят, получит определенную интерпретацию. Для интерпретированной схемы естественным образом (см. [3]) определяется процесс ее выполнения на произвольном элементе множества M , превращающий интерпретированную схему в алгоритм по переработке элементов множества M в элементы того же множества. Если мы будем фиксировать историю переработки элемента $m \in M$, поступившего на вход схемы, то придем к понятию i -конфигурации, порождаемой интерпретированной схемой; можно фиксировать окончательный результат переработки элемента m , и тогда с интерпретированной схемой будет ассоциироваться реализуемая ею функция, которая отображает множество M в себя.

Одна и та же схема алгоритма может быть интерпретирована многими способами, и при каждой ее интерпретации возникают порождаемое схемой множество i -конфигураций и реализуемая схемой функция.

Нами рассмотрены три типа отношений эквивалентности между схемами алгоритмов. В основу первого положено сравнение подмножеств множеств конфигураций, порождаемых схемами. Отношения вто-

рого типа строятся путем сравнения порождаемых схемами множеств i -конфигураций; при этом множество рассматриваемых интерпретаций схем выбирается произвольно. Наконец, третий тип отношений основан на сравнении реализуемых схемами функций; множество интерпретаций схем и здесь берется произвольным.

Примером отношений эквивалентности первого типа являются отношения равносильности схем и их частичной равносильности, введенные в работе [1]; примером отношений третьего типа — отношение сильной эквивалентности граф — схем, определенное в [3], и отношение функциональной эквивалентности дискретных преобразователей, определенное в [4].

Рассматриваемые нами отношения эквивалентности оказались тесно связанными между собой; выявлению этих связей и посвящена данная работа.

Все понятия, используемые в работе, даны в ней самой. При этом конфигурации, интерпретации, i -конфигурации определены как самостоятельные объекты, вне связи их со схемами алгоритмов. Это избавило от необходимости описания и процесса порождения схемой конфигураций, и процесса выполнения интерпретированной схемы, известных из работ [2] и [3].

§ 1. Конфигурации, интерпретации и i -конфигурации

1.1. Зададимся алфавитами

$$A = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}, n > 1,$$

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}, k > 1;$$

порядок пересчета элементов в каждом из этих алфавитов полагаем фиксированным. Буквы алфавита A назовем *операторами*, буквы алфавита P — *предикатами*.

1.2. Предикат p_j , $j = 1, 2, \dots, k$, будем рассматривать как переменную, принимающую два значения: 0 и 1; тогда алфавитом P индуцируется множество χ , элементами которого являются наборы длины k , состоящие из нулей и единиц: если $x = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ — такой набор, то в нем y_j — значение переменной p_j , $j = 1, 2, \dots, k$.

1.3. Отображение множества χ в множество $B(\chi)_{\{\emptyset\}}$, где $B(\chi)$ — множество подмножеств множества χ , будем обозначать через $s(x)$.

Соответствие, при котором каждому оператору $A_i \in A$, отличному от A_0 , сопоставлено свое отображение $s_i(x)$, назовем *распределением сдвигов на A* и будем записывать в виде кортежа

$$S = \langle s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x) \rangle.$$

1.4. Конечную сдвоенную последовательность

$$q = \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_t \\ A_{j_1} & A_{j_2} & \dots & A_{j_t} \end{matrix}, t \geq 1,$$

верхняя строка которой составлена из элементов множества χ , а нижняя из операторов множества A , назовем *конфигурацией, допустимой для распределения сдвигов S* (или просто конфигурацией, так как S не меняется в процессе наших рассуждений), если

- 1) $A_1 = A_0$, и это единственное вхождение A_0 в q ;
- 2) для каждого $l=2, 3, \dots, t$,

$$x_l \in s_l (x_{l-1}).$$

Обозначим через K множество всех конфигураций, допустимых для S .

1.5. Будем говорить, что на множествах A и P задана *интерпретация J , допустимая для распределения сдвигов S* , если

- 1) дано некоторое множество $M = \{m\}$;
- 2) каждому предикату $p_l \in P$ сопоставлено свое подмножество $M_l \subseteq M$; это соответствие будем записывать как $\mu(P)$; оно индуцирует отображение δ множества M в множество χ , определяемое следующим образом: элементу $m \in M$ сопоставляется набор $\delta(m) = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, в котором

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если } m \in M_j, \\ 0, & \text{если } m \notin M_j, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, k;$$

- 3) каждому оператору $A_l \in A$, отличному от A_0 , сопоставлено свое отображение φ_l множества M в себя, и φ_l удовлетворяет требованию:

$$\forall_{m \in M} [\delta(\varphi_l(m)) \in s_l(\delta(m))];$$

это соответствие будем записывать как $\varphi(A)$.

Заметим, что заданием множеств M_j , $j=1, 2, \dots, k$, индуцируется отображение χ в $B(M)$: набору $x = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ в этом отображении соответствует множество

$$M_x = \bigcap_{j=1}^k M_j^{y_j},$$

где

$$M_j^{y_j} = \begin{cases} M_j, & \text{если } y_j = 1 \\ M/M_j, & \text{если } y_j = 0 \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, k;$$

это соответствие фиксируем записью: $\bar{\mu}(\chi)$.

Верно и обратное: заданием множеств $M_x \subseteq M$, $x \in \chi$, удовлетворяющих требованиям: $\forall_{x, x' \in \chi} (x \neq x') \rightarrow M_x \cap M_{x'} = \emptyset$ и $\bigcup_{x \in \chi} M_x = M$, определяются множества M_j , $j=1, 2, \dots, k$; $M_j = \bigcup M_x$, где суммирование ведется по всем таким наборам $x = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, для которых $y_j = 1$.

Таким образом, при задании интерпретации J можно пользоваться как отображением $\mu(P)$, так и отображением $\bar{\mu}(\chi)$; отсюда — две формы записи интерпретации J :

$$J = \langle M, \mu(P), \varphi(A) \rangle = \langle M, \bar{\mu}(\chi), \varphi(A) \rangle.$$

Мощностью интерпретации J мы будем называть мощность множества M . Множество всех интерпретаций, допустимых для распределения сдвигов S , обозначим через I .

1.6. Пусть задана интерпретация $J = \langle M, \mu(P), \varphi(A) \rangle \in I$. Сдвоенную последовательность

$$r = A_{j_1} \begin{matrix} m_1 \\ A_{j_1} \end{matrix} A_{j_2} \begin{matrix} m_2 \\ A_{j_2} \end{matrix} \cdots A_{j_t} \begin{matrix} m_t \\ A_{j_t} \end{matrix}, \quad t \geq 1,$$

верхняя строка которой состоит из элементов множества M , а нижняя — из операторов алфавита A , назовем i -конфигурацией, индуцируемой интерпретацией J , если

- 1) $A_{j_1} = A_0$ и нет других вхождений оператора A_0 в r ;
- 2) для всех $l=2, 3, \dots, t$

$$m_l = \varphi_{j_l}(m_{l-1}).$$

Пусть r — i -конфигурация; будем говорить, что элемент m_1 начинает i -конфигурацию r , а элемент m_t — завершает ее.

Множество всех i -конфигураций, индуцируемых интерпретацией J , обозначим через $R(J)$.

1.7. Из определения i -конфигурации и свойств отображений φ_i , $i=1, 2, \dots, n$, принадлежащих интерпретации J , следует

Утверждение 1. Какой бы ни была i -конфигурация

$$r = A_{j_1} \begin{matrix} m_1 \\ A_{j_1} \end{matrix} A_{j_2} \begin{matrix} m_2 \\ A_{j_2} \end{matrix} \cdots A_{j_t} \begin{matrix} m_t \\ A_{j_t} \end{matrix},$$

индуцируемая интерпретацией $J \in I$, последовательность

$$\hat{r} = A_{j_1} \begin{matrix} \delta(m_1) \\ A_{j_1} \end{matrix} A_{j_2} \begin{matrix} \delta(m_2) \\ A_{j_2} \end{matrix} \cdots A_{j_t} \begin{matrix} \delta(m_t) \\ A_{j_t} \end{matrix}$$

представляет собой конфигурацию, допустимую для распределения сдвигов S (т. е. $\hat{r} \in K$).

Доказательство этого утверждения опускаем.

1.8. Пусть

$$\hat{R}(J) = \{\hat{r} | r \in R(J)\}.$$

По определению

а) множество $I' \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K' \subseteq K$ конфигураций, если

$$K' \subseteq \bigcup_{J \in I'} \hat{R}(J);$$

в частности, если множество I' состоит из одной интерпретации J , а множество K' — из одной конфигурации q , то будем говорить, что интерпретация J покрывает конфигурацию q ;

б) множество $I' \subseteq I$ интерпретаций не выводит из множества $K' \subseteq K$ конфигураций, если

$$K' \supseteq \bigcup_{j \in I'} R^*(j).$$

Имеет место

Утверждение 2. Какой бы ни была конфигурация $q \in K$, существует такая конечная интерпретация J^q , которая покрывает конфигурацию q .

Доказательство этого утверждения состоит в построении требуемой интерпретации

$$J^q = \langle M^q, \mu^q(\chi), \varphi^q(A) \rangle.$$

Множество M^q слогам из двух множеств: $\bar{M}^q$ и $\bar{M}$, не имеющих общих элементов. Множество $\bar{M}$ возьмем состоящим из 2^k элементов и установим взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств $\bar{M}$ и χ ; пусть $\bar{m}(x)$ — элемент из $\bar{M}$, соответствующий элементу $x \in \chi$, а $\Delta(\bar{m})$ — набор из χ , соответствующий элементу $\bar{m} \in \bar{M}$.

В каждом из множеств $s_i(x) \subseteq \chi$, $x \in \chi$, $i = 1, 2, \dots, n$, выберем своего представителя; обозначим его через $\psi_i(x)$. Пусть

$$q = A_{j_1}^{x_1} A_{j_2}^{x_2} \dots A_{j_t}^{x_t};$$

множество $\bar{M}^q$ возьмем состоящим из элементов $m_1, \dots, m_t$; элементу m_l сопоставим набор x_l , $l = 1, 2, \dots, t$, и через $\bar{M}_x^q$ обозначим прообраз элемента $x \in \chi$ в этом отображении $\bar{M}^q$ в χ .

Множество M^q построено. Отметим, что любому элементу $m \in M^q$ соответствует единственный элемент $\delta(m) \in \chi$:

$$\delta(m) = \begin{cases} \Delta(m), & \text{если } m \in \bar{M}; \\ x_l, & \text{если } m \in \bar{M}^q \text{ и } m = m_l. \end{cases}$$

Множество M_x^q , сопоставляемое набору $x \in \chi$ в отображении $\mu^q(\chi)$, определим равенством

$$M_x^q = \bar{M}_x^q \cup \{\bar{m}(x)\}.$$

Отображение φ_l^q , сопоставляемое оператору A_l в соответствии $\varphi^q(A)$, определим с помощью последовательности

$$r = A_{j_1}^{m_1} A_{j_2}^{m_2} \dots A_{j_t}^{m_t};$$

если $m = m_i \in \bar{M}^q$ и $A_{j_{l+1}} = A_l$, то полагаем $\varphi_l^q(m) = m_{l+1}$, во всех остальных случаях $\varphi_l^q(m) = \bar{m}(\psi_l(\delta(m)))$.

Интерпретация J^q построена. Легко проверить, что J^q — допустима для распределения сдвигов S , а последовательность r есть i -конфигурация, индуцируемая интерпретацией J^q и такая, что $\hat{r} = q$. Утверждение 2 доказано.

§ 2. Схема алгоритма; порождаемые ею множества конфигураций и i -конфигураций; отображение, осуществляемое интерпретированной схемой

2.1. Будем обозначать через $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_k)$ (или просто через α) функцию алгебры логики от переменных $p_1, p_2, \dots, p_k$; пусть D — множество таких функций.

2.2. Схемой алгоритма, построенной над алфавитами A и P , будем называть конечный ориентированный граф, в котором

1) выделены две вершины: вход — вершина, из которой исходит одна дуга и в которую не приходит ни одной дуги графа; выход — вершина, из которой не исходит ни одной дуги; остальные вершины (их может быть пустое множество) делятся на операторные — из каждой такой вершины исходит одна дуга — и предикатные — из каждой вершины этого типа исходят две дуги, одна из них некоторым образом отмечена;

2) входу сопоставлен символ $A_0 \in A$, каждой операторной вершине сопоставлен свой оператор $A_i \in A$; отличный от A_0 , каждой предикатной вершине — своя функция α из множества D .

2.3. Схеме алгоритма A , рассматриваемой при распределении сдвигов S , сопоставим множество $K(A) \subseteq K$, подтверждаемых схемой конфигураций.

В этих целях определим функцию $\lambda(v, x)$, сопоставляющую каждой операторной вершине (или входу) v схемы A и каждому набору $x \in X$ некоторую вершину w схемы A . Вершина w находится следующим образом: с набором x путешествуем по схеме A , начиная двигаться в ней по дуге (единственной), исходящей из вершины v ; при этом переход через каждую встречающуюся по пути движения предикатную вершину не меняет набора x , выбор дуги — одной из двух, исходящих из предикатной вершины — проводится по правилу: если функция, сопоставленная предикатной вершине, равна 1 на данном наборе x , то дальше идем по отмеченной дуге, в противном случае — по не отмеченной; путешествие по схеме A заканчивается или в первой встретившейся по пути операторной вершине (или в выходе схемы), или во вторично встретившейся в процессе путешествия предикатной вершине; это и будет вершина w .

По определению, конфигурация

$$q = A_{j_1} x_1 A_{j_2} x_2 \dots A_{j_l} x_l; \quad q \in K,$$

принадлежит множеству $K(A)$ в том и только том случае, если вершина $v_2 = \lambda(v_1, x_1)$, где v_1 — вход схемы A , v_2 — операторная и такая, что ей сопоставлен оператор A_{j_1} ; вершина $v_3 = \lambda(v_2, x_2)$ — операторная и ей сопоставлен оператор A_{j_2} ; ...; вершина $v_l = \lambda(v_{l-1}, x_{l-1})$, где v_{l-1} — операторная вершина, полученная на предыдущем шаге, v_l — тоже операторная и ей сопоставлен оператор A_{j_l} .

Пусть $q \in K(A)$; будем говорить, что конфигурация q приводит в вершину $\omega(q) = \lambda(v_i, x_i)$ схемы A .

Множество конфигураций из $K(A)$, приводящих в выход схемы A , обозначим через $K^*(A)$.

Справедливо

Утверждение 3. Какой бы ни была конфигурация $q \in K$, существует схема A такая, что $q \in K^*(A) \subseteq K(A)$.

Оно доказывается построением требуемой схемы A ; последнее нами опускается.

2.4. Схему A , рассматриваемую при интерпретации $J \in I$ будем называть *интерпретированной* и обозначать через JA .

Определим множество $R(JA) \subseteq R(J)$ i -конфигураций, порождаемых схемой JA : i -конфигурация $r \in R(J)$ принадлежит множеству $R(JA)$ в том и только том случае, если конфигурация r принадлежит множеству $K(A)$.

Множество i -конфигураций r из $R(JA)$, для которых $r \in K^*(A)$, обозначим через $R^*(JA)$.

Из определения i -конфигурации следует

Утверждение 4. Если $r \in R^*(JA)$, то в множестве $R^*(JA)$ нет другой i -конфигурации, которая начиналась бы тем же элементом, что и r .

Таким образом, интерпретированная схема JA осуществляет частичное отображение множества M в себя: каждому элементу m , начинающему какую-либо i -конфигурацию $r \in R^*(JA)$, в этом отображении сопоставляется элемент (обозначим его через $JA(m)$), завершающий эту i -конфигурацию.

В заключение отметим, что из утверждения 3 следует

Утверждение 5. Для всякой i -конфигурации $r \in R(J)$ можно построить такую схему A , что $r \in R^*(JA) \subseteq R(JA)$.

§ 3. Различные отношения эквивалентности между схемами; связь между отношениями эквивалентности

3.1. Рассмотрим три типа отношений эквивалентности между схемами.

I. Пусть задан некоторый эффективный способ γ , посредством которого из множества $K(A)$, где A — произвольная схема, выделяется его подмножество $K^1(A)$.

Схемы A_1 и A_2 назовем γ -эквивалентными, если

$$K^1(A_1) = K^1(A_2);$$

это отношение между схемами записываем в виде $A_1 \sim A_2$; оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

В частности, если способ γ таков, что для всех схем A $K^1_-(A) = K(A)$, мы получим отношение равносильности схем, определенное в работе [1]; обозначим его через $A_1 \sim A_2$. Легко видеть, что при любом γ

$$A_1 \sim A_2 \rightarrow A_1 \sim^* A_2.$$

Другой частный случай: пусть для каждой схемы A множество $K^*(A)$ совпадает с множеством $K^*(A)$; тогда отношение $\sim$ -эквивалентности превратится в отношение частичной равносильности схем, данной в той же работе [1]*; [это отношение между схемами будем записывать в виде $A_1 \sim^* A_2$].

Наконец, можно указать целую серию способов $\sim$: задается натуральное число n_0 ; из множества $K(A)$ выделяется подмножество $K_{n_0}(A)$, состоящее из всех таких конфигураций $q \in K(A)$, длина которых не превышает числа n_0 ; и так для всех схем A .

II. Пусть $I' \subseteq I$. Схемы A_1 и A_2 назовем эквивалентными на множестве I' интерпретаций (и будем записывать это отношение в виде $A_1 \simeq A_2(I')$), если

$$\forall_{J \in I'} [R(JA_1) = R(JA_2)];$$

частично эквивалентными на множестве I интерпретаций (это отношение записываем как $A_1 \simeq^* A_2(I')$), если

$$\forall_{J \in I'} [R^*(JA_1) = R^*(JA_2)].$$

Каждое из введенных отношений между схемами является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

III. Пусть $I' \subseteq I$. По определению, схемы A_1 и A_2 функционально эквивалентны на множестве I' интерпретаций (фиксируем это в виде $A_1 \simeq^f A_2(I')$), если

$$\forall_{J \in I'} [JA_1(m) = JA_2(m)];$$

здесь равенство $JA_1(m) = JA_2(m)$ понимается как равенство отображений. Отношение $A_1 \simeq^f A_2(I')$ обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

В том частном случае, когда множество I' берется равным множеству I , а распределение сдвигов на A таково, что при всех $i = 1, 2, \dots, n$ и при всех $x \in \chi$ $s_i(x) = \chi$, отношение функциональной эквивалентности схем совпадает с отношением сильной эквивалентности схем, введенным в работе [2].

3.2. Пусть A_1 и A_2 — произвольные схемы, $\sim$ — некоторый способ выделения из множества $K(A)$ подмножества $K^*(A)$.

Введем обозначение: $\bar{K}(A) = K/K(A)$.

Лемма 1. Если множество $I' \subseteq I$ интерпретаций не выводит из множества $\{\bar{K}(A_1) \cap \bar{K}(A_2)\} \cup K^*(A_1)$ конфигураций, то

* В обоих случаях мы пренебрегли тем, что используемое нами понятие распределения сдвигов на алфавите A является более широким по сравнению с одноименным понятием, используемым в [1].

$$A_1 \sim A_2 \rightarrow A_1 \simeq A_2 (I').$$

Доказательство. Пусть $r \in R(JA_1)$, где $J \in I'$; покажем, что $r \in R(JA_2)$. Этого будет достаточно для доказательства леммы, так как симметричность всех рассматриваемых нами отношений эквивалентности позволяет поменять ролями схемы A_1 и A_2 и из установленного получить утверждение

$$r \in R(JA_2) \rightarrow r \in R(JA_1)^*.$$

Итак, $r \in R(JA_1)$, следовательно, $r \in K(A_1)$; с другой стороны, $r \in \hat{R}(J)$, а по условию леммы $\hat{R}(J) \subseteq K^*(A_1) \cup \{\bar{K}(A_1) \cap \bar{K}(A_2)\}$; сопоставляя утверждения $r \in K(A_1)$ и $r \in K^*(A_1) \cup \{\bar{K}(A_1) \cap \bar{K}(A_2)\}$, получим, что $r \in K^*(A_1)$. Воспользуемся теперь тем, что $K^*(A_1) = K^*(A_2)$, получим $r \in K^*(A_2)$; следовательно, $r \in K(A_2)$, а отсюда $r \in R(JA_2)$.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует

Утверждение 6. Если схемы A_1 и A_2 равносильны, то они эквивалентны на любом множестве $I' \subseteq I$ интерпретаций, т. е.

$$A_1 \sim A_2 \rightarrow \bigvee_{I' \subseteq I} [A_1 \simeq A_2 (I')].$$

Действительно, в рассматриваемом случае $K^*(A_1) = K(A_1)$, $K^*(A_2) = K(A_2)$ и $K(A_1) = K(A_2)$; следовательно, $K^*(A_1) \cup \{\bar{K}(A_1) \cap \bar{K}(A_2)\} = K$, и так как любое множество интерпретаций не выводит из множества K конфигураций (см. утверждение 1), то будет справедливым наше утверждение.

Убедимся в верности и

Утверждения 7. Если схемы A_1 и A_2 частично равносильны, то они частично эквивалентны на любом множестве $I' \subseteq I$ интерпретаций, т. е.

$$A_1^* \sim A_2^* \rightarrow \bigvee_{I' \subseteq I} [A_1^* \simeq A_2^* (I')].$$

Действительно, какой бы ни была i -конфигурация $r \in R^*(JA_1)$, где $J \in I'$, конфигурация r принадлежит множеству $K^*(A_1)$; так как по условию $K^*(A_1) = K^*(A_2)$, то $r \in K^*(A_2)$, а отсюда $r \in R^*(JA_2)$.

3.3. Предположим, что выделение подмножества $K^*(A)$ из множества $K(A)$ сопровождается пометкой всех конфигураций, попадающих в $K^*(A)$. Считаем при этом, что если интерпретация J покрывает некоторую (непомеченную) конфигурацию q , то она покрывает и

* При доказательстве всех последующих лемм и утверждений мы будем руководствоваться высказанными соображениями.

помеченную конфигурацию q . Тогда, какими бы ни были схема A и помеченная конфигурация q , справедливо утверждение

$$q \in K(A) \rightarrow q \in K^*(A). \quad (1)$$

Опираясь на него, докажем лемму.

Лемма 2. Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K^*(A_1) \cup K^*(A_2)$ конфигураций, то

$$A_1 \simeq A_2(I_0) \rightarrow A_1 \sim A_2.$$

Доказательство. Пусть $q \in K^*(A_1)$, покажем, что $q \in K^*(A_2)$.

По условию леммы, $K^*(A_1) \subseteq \bigcup_{j \in I_0} \hat{R}(j)$; следовательно, найдется такая

интерпретация $j_0 \in I_0$, что $q \in \hat{R}(j_0)$; предположим, что i -конфигурация $r_0 \in R(j_0)$ обладает свойством: $\hat{r}_0 = q$. Легко видеть, что $r_0 \in R(j_0 A_1)$; но $R(j_0 A_1) = R(j_0 A_2)$, поэтому $r_0 \in R(j_0 A_2)$; последнее возможно лишь при условии: $\hat{r}_0 = q \in K(A_2)$; отсюда и из (1) следует $q \in K^*(A_2)$.

Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Утверждение 8. Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K(A_1) \cup K(A_2)$ конфигураций, то

$$A_1 \simeq A_2(I_0) \rightarrow A_1 \sim A_2.$$

Утверждение 9. Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество $K^*(A_1) \cup K^*(A_2)$ конфигураций, то

$$A_1^* \simeq A_2^*(I_0) \rightarrow A_1^* \sim A_2^*;$$

доказывается так же, как и лемма 2.

3.4. Используем обозначение

$$K^* = \bigcup_A K^*(A)$$

и выведем из леммы 2

Утверждение 10. Если множество $I_0 \subseteq I$ интерпретаций покрывает множество K^* конфигураций, то для любых схем A_1 и A_2

$$A_1 \simeq A_2(I_0) \rightarrow A_1 \sim A_2; \quad (2)$$

если же еще $K^* = K$, то для любых схем A_1 и A_2 ,

$$A_1 \simeq A_2(I_0) \rightarrow A_1 \sim A_2. \quad (3)$$

Справедливость импликации (2) очевидна; чтобы установить истинность импликации (3), достаточно заметить, что выполнены посыпки утверждения 8.

Множество I_0 интерпретаций, покрывающее множество K конфигураций, можно составить, беря для всех $q \in K$ интерпретации j^q , построенные при доказательстве утверждения 2. И тогда становится очевидным

Утверждение 11. Если схемы A_1 и A_2 эквивалентны на множестве, состоящем из всех конечных интерпретаций, то они равносильны.

3.5. Легко видеть, что для любого множества $I' \subseteq I$ интерпретаций справедливо утверждение

$$A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I') \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I').$$

Мы установим существование такого множества $I_0 \subseteq I$, для которого будет верным утверждение

$$A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I_0) \rightarrow \forall_{I' \subseteq I} [A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I')]. \quad (4)$$

Лемма 3. Пусть множество I_0 состоит из всех таких интерпретаций J^q , для которых $q \in K^*(A_1) \cup K^*(A_2)$; тогда

$$A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I_0) \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2.$$

Доказательство. Возьмем $q \in K^*(A_1)$ и покажем, что $q \in K^*(A_2)$.

По условию леммы $J^q \in I_0$. Обозначим через m —первый элемент, а через m^* —последний элемент упорядоченного множества $\bar{M}^q$. Из построения интерпретации J^q видно, что множеству $R(J^q)$ принадлежит единственная i -конфигурация, которая начинается элементом m и завершается элементом m^* , и если это — r , то $\hat{r} = q$.

Так как $q \in K^*(A_1)$, то $r \in R^*(J^q A_1)$ и $J^q A_1(m) = m^*$. По условию леммы $J^q A_1(m) = J^q A_2(m)$; но равенство $J^q A_2(m) = m^*$ означает, что $r \in R^*(J^q A_2)$, а отсюда $\hat{r} = q \in K^*(A_2)$.

Лемма доказана.

Из леммы 3 и утверждения 7 и следует (4).

Утверждение 12. Пусть

$$I^* = \{J^q, q \in K\},$$

тогда для любых схем A_1 и A_2

$$A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I^*) \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2;$$

очевидным образом вытекает из леммы 3.

В заключение отметим, что отношение сильной эквивалентности, введенное в работе [2], совпадает с отношением частичной равносильности, взятым из работы [1]. Действительно

$$A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I) \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I^*) \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2,$$

вместе с тем

$$A_1 \sim A_2 \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I) \rightarrow A_1 \stackrel{f}{\sim} A_2 (I).$$

Ռ. Ի. ՊՈԴԼՈՎՉԵՆԿՈ, Գ. Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Վ. Ե. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Հաշվեկառուների սխեմա-
ների մեկնարկների և սխեմաների միջև համարժեքության հարաբերության ամփոփում)

Հաշվեկառուների (ալգորիթմների) սխեման մի առարկա է, որը, նրա տարրերը մեկնարկ-
կելիս, վեր է ածվում հաշվեկառուի, Միևնույն սխեման կարող է մեկնաբանվել տարբեր ձևերով
և, հետևաբար, կրում է իր մեջ հաշվեկառուների ամբողջ մի դաս: Սխեմաների միջև հնարա-
վոր են համարժեքության տարրեր հարաբերությունների՝ թե սխեմաների մեկնարկման վրա
հիմնված և թե բուն սխեմաների լուկ կառուցվածքային հատկությունները օգտագործող: Երկ-
րորդ տիպի հարաբերություններով որոշվող համարժեքությունները, առավելապես, ձևական բը-
նայթի են, հաճախ սակայն, դրան ի փոխ, կանոնահաշվելի (հաշվեկառուային լուծում ունեցող):
Համարժեքության այս հարաբերությունների բովանդակային իմաստը վեր է հանվում վերջին-
ներս առաջին տիպի հարաբերությունների հետ բաղադրելիս:

Հոդվածը նվիրված է հաշվեկառուների սխեմաների վրա սահմանափակ համարժեքության այդ
հարաբերությունների միջև եղած կապերի ուսումնասիրությանը:

R. I. PODLOVCHENKO, G. N. PETROSSIAN, V. E. KHACHATRIAN.

*The interpretation of algorithmic schemes and different relations of equivalence
between the schemes (summary)*

An algorithmic scheme becomes an algorithm when an interpretation is given
to its elements. The same scheme may be interpreted in different ways and thus
a class of algorithms is associated. The schemes admit different equivalence relations
based either on the interpretation or on the structure of the scheme. Interconnections
between equivalence relations defined for algorithmic schemes are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. И. Янов. О логических схемах алгоритмов, сб. Проблемы кибернетики, вып. 1, М., Физматгиз, 1958, 57—127.
2. А. П. Ершов. Операторные алгоритмы. III (Об операторных схемах Янова), сб. Проблемы кибернетики, вып. 20, изд. „Наука“, М., 1968, 181—200.
3. Л. А. Калужник. Об алгоритмизации математических задач, сб. Проблемы кибернетики, вып. 2, М., Физматгиз, 1959, 51—67.
4. А. А. Лещиневский. Функциональная эквивалентность дискретных преобразова-
телей, журн. „Кибернетика“, № 2, Киев, 1969, 5—16.

ՔԱՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ք. Վ. Գրիգորյան. Պատման տիրույթներում երեք ժամադրանքների հարմարեցված ֆունկցիաների համար միակության թեորեմներ	81
Վ. Պ. Գրոմով. Դիրիխլեի բազմազանի շարքերի տեսության վերաբերյալ. II	90
Վ. Խ. Մուսոլյան. Դիրիխլեի լակունար սխեմաների մասին	104
Ս. Դ. Ռաֆայելիչ. Որոշ տիպային ինտեգրա-դիֆերենցիալ օպերատորների լուծելիության մասին. I	113
Ն. Ն. Քովալյան. Մի քանի ֆունկցիոնալ հավասարումներ անալիտիկ ֆունկցիաների դասում. I	126
Ռ. Ի. Պոդլովչենկո. Գ. Ն. Պետրոսյան, Վ. Ե. Խաչատրյան. Հաշվեկաշիների սխեմաների մեկնարկներ և տիպաների միջև համարժեցության հարաբերության տարբեր տիպեր	140
Նամակ խմբագրությանը	152

СОДЕРЖАНИЕ

В. В. Григорян. Теоремы единственности для гармонических функций трех переменных в области вращения	81
В. П. Громов. К теории кратных рядов Дирихле. II	90
В. Х. Мусолян. О лакунарных системах Дирихле	104
С. Г. Рубанович. О разрешимости некоторых сингулярных интегродифференциальных уравнений. I	113
Н. Е. Товмасян. Некоторые функциональные уравнения для аналитических функций	126
Р. И. Подловченко, Г. Н. Петросян, В. Е. Хачатрян. Интерпретации схем алгоритмов и различные типы отношений эквивалентности между схемами	140
Письмо в редакцию	152

CONTENTS

B. V. Grigorian. Uniqueness theorems for harmonic functions of three variables in domains of rotation	81
V. P. Gromov. On the theory of multiple Dirichlet series. II	90
V. Kh. Musolian. On lacunary Dirichlet systems	104
S. G. Rubanovitch. On the solvability of some singular integro-differential equations. I	113
N. E. Tovmassian. Functional equations in the set of analytic functions	126
R. I. Podlovchenko, G. N. Petrossian, V. E. Kchachatrian. The interpretation of algorithmic schemes and different relations of equivalence between the schemes	140
Letter to the editorial board	152

