ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կորսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գին 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaying of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

О ЯДРЕ СПЕКТРА ОБЩЕГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА, И О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ЛЕБЕГОВОСТИ ИЛИ СИНГУЛЯРНОСТИ ЕГО СПЕКТРА

п. 1. В работе [1] было дано усовершенствованное определение ядра спектра самосопряженного оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве H в том случае, когда спектр оператора A простой, а также были установлены некоторые свойства ядра спектра. Там же было указано, что одно из существенных преимуществ нового определения ядра спектра (обозначенного через $S_G(A)$) заключается в том, что оно не опирается на знание порождающего элемента, отыскание которого при исследовании конкретных операторов часто оказывается нелегкой задачей.

В этой заметке прежде всего будет указано некоторое видоизменение определения ядра спектра, которое оказывается пригодным уже для произвольных самосопряженных операторов, и будут установлены свойства такого ядра, аналогичные приведенным в [1].

Исходным пунктом наших рассмотрений служит участвующая в определении ядра спектра функция $\Phi_G(\lambda)$, описываемая в терминах резольвенты рассматриваемого оператора. Кроме того, оказывается, что в терминах этой функции, а иногда и в терминах лишь самого ядра, можно судить о характере спектра оператора A. В подтверждение этого в работе доказывается несколько предложений, которые представляют собой достаточные признаки полноты системы собственных элементов, отсутствия в данном интервале сингулярного спектра, а также лебеговости или чистой сингулярности спектра.

п. 2. Пусть R_H, как и в [1], является совокупностью неограниченных операторов G с плотной в H областью определения D_G, обратные к которым существуют и являются операторами Гильберта-Шмидта и поэтому допускают (см., например, [2]) представление $G^{-1} f = \sum_{(k)} \mu_k a_k \omega_k$, где a_k — коэффициенты Фурье элемента f по некоторой полной ортонормальной системе и $\sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty$.

В рассматриваемом общем случае, когда спектр может иметь произвольную кратность, вместо фигурирующей в определении ядра функции $\Phi_G(\lambda)$ работы [1] введем в рассмотрение другую функцию (мы продолжаем ее обозначать через $\Phi_G(\lambda)$), которая, в отличие от случая простого спектра, определяется как нижний предел того же выражения, а именно

$$\Phi_G(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda+i\tau} G^{-1} \|^2 .$$

Определение. Ядром спектра общего самосопряженного оператора A называется подмножество $S_G(A)$ точек λ вещественной оси, в которых $\Phi_G(\lambda) > 0$, т. е.

$$S_G(A) = \{\lambda \in R^1;\ \Phi_G(\lambda) > 0\}.$$

Предложение 1. *Ядро спектра $S_G(A)$ является частью классического спектра $S(A)$, но обладает полной спектральной мерой, т. е. $\rho(S_G(A)) = \rho(R^1)$.*

◀ Пусть пространство H представлено в виде ортогональной суммы инвариантных относительно A подпространств H_k $(k=1, 2, 3, \cdots)$, в каждом из которых спектр оператора A простой, и пусть g_k — соответствующие нормированные порождающие элементы.

Обозначим $\rho_k(t) = (E_t g_k, g_k)$, тогда $\rho(t) = \sum_{(k)} \varepsilon_k \rho_k(t)$, где $\varepsilon_k > 0$, причем $\sum_{(k)} \varepsilon_k = 1$. Нам надлежит доказать, что $S_G(A) \subset S(A)$ и что $\rho_k(S_G(A)) = \rho_k(R^1)$ для всех $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Пусть P_k — оператор ортогонального проектирования на подпространство H_k, тогда поскольку он, очевидно, коммутирует с резольвентой, то ясно, что

$$\| R_{\lambda+i\tau} G^{-1} f \|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \| R_{\lambda+i\tau} P_m G^{-1} f \|^2,$$

причем $P_m G^{-1} f = \sum_{(k)} \mu_k a_k \omega_k^{(m)}$, где положено $a_k = (f, \omega_k)$, $\omega_k^{(m)} = P_m \omega_k$.

Пусть далее $V^{(m)} \omega_k^{(m)} = \chi_k^{(m)}(t) \in L^2_{\rho_m}$, где оператор $V^{(m)}$ отображает изометрически подпространство H_m в $L^2_{\rho_m}$, переводя сужение $A|_{H_m} = A_m$ в оператор умножения на независимую переменную в $L^2_{\rho_m}$. Теперь уже легко видеть, что

$$\| R_{\lambda+i\tau} G^{-1} f \|^2 = \sum_{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} \mu_k a_k \chi_k^{(m)}(t) \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} \, d\rho_m(t), \tag{1}$$

причем совокупность функций $\chi_k^{m}(t)$ $(k=1, 2, \cdots)$ будучи, вообще говоря, не ортонормальной системой в $L^2_{\rho_m}$, все же, как нетрудно понять, образует в нем полную систему.

Из (1) непосредственно следует, что

$$\Phi_G(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \sum_{(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \sum_{(k)} \mu_k a_k \chi_k^{(m)}(t) \right|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} \, d\rho_m(t), \tag{2}$$

где верхняя грань распространена на всевозможные a_k такие, что $\sum_{(k)} |a_k|^2 = 1$. Отсюда ясно, что

$$\Phi_{\sigma}(\lambda)\leqslant\varliminf_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\sum_{(m)}\sup_{\{a_k\}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\sum\limits_{(k)}\mu_k a_k\chi_k^{(m)}(t)\right|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_m(t)\leqslant$$

$$\leqslant\varliminf_{\tau\to+0}\sum_{(m)}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sum\limits_{(k)}\mu_k^2|\chi_k^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_m(t).$$

Положив $\tilde{\rho}_m(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\sum\limits_{(k)}\mu_k^2|\chi_k^{(m)}(x)|^2\,d\rho_m(x)$, в силу теоремы Радона-Никодима, будем иметь

$$\Phi_{\sigma}(\lambda)\leqslant\varliminf_{\tau\to+0}\sum_{(m)}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь числовой ряд $\sum\limits_{(m)}\tilde{\rho}_m(+\infty)$ с неотрицательными членами, который сходится, поскольку, как нетрудно убедиться справедлива нижеследующая цепь соотношений:

$$\sum_{(m)}\tilde{\rho}_m(+\infty)=\sum_{(m)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{(k)}\mu_k^2|\chi_k^{(m)}|^2\,d\rho_m(t)=$$

$$=\sum_{(m)}\sum_{(k)}\mu_k^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\chi_k^{(m)}(t)|^2\,d\rho_m(t)=\sum_{(k)}\mu_k^2\sum_{(m)}\|\omega_k^{(m)}\|^2=\sum_{(k)}\mu_k^2<+\infty.$$

Но этот числовой ряд очевидно является мажорантным для ряда $\sum\limits_{(m)}\tilde{\rho}_m(t)$, который, тем самым, сходится равномерно на всей вещественной оси, а его сумма $\tilde{\rho}(t)$ представляет собой неотрицательную меру. Воспользовавшись, наконец, теоремой Хелли, получим соотношение

$$\sum_{(m)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{\rho}(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2},$$

с помощью которого неравенство (3) принимает вид

$$\Phi_{\sigma}(\lambda)\leqslant\varliminf_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{\rho}(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь следующей простой леммой, доказательство которой, чтобы не прерывать изложения, будет приведено ниже.

Лемма 1. *Если* $\lambda_0 \overline{\in} S(A)$, *то* $\exists\ \delta_0 > 0$ *такое, что* $\rho_m(\lambda_0+\delta_0) - \rho_m(\lambda_0-\delta_0) = 0$ *при всех* $m = 1, 2, 3, \cdots$.

Из этой леммы непосредственно заключаем, что если $\lambda_0 \overline{\in} S(A)$, то разность $\bar{\rho}_m(\lambda_0+\delta_0) - \bar{\rho}_m(\lambda_0-\delta_0)$ тоже равна нулю при всех $m=1, 2, 3, \cdots$ и, стало быть, в силу неравенства (4) $\Phi_0(\lambda_0) = 0$, т. е. $\lambda_0 \overline{\in} S_0(A)$, а это и означает, что $S_0(A) \subset S(A)$.

Переходя к доказательству того, что $S_0(A)$ обладает полной спектральной мерой, заметим, что из того же соотношения (2) следует, что при каждом m

$$\Phi_0(\lambda) \geqslant \varliminf_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\sum\limits_{(k)} \mu_k a_k \chi_k^{(m)}(t)\right|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\, d\rho_m(t).$$

На основании предложений 1 и 2 из [1] этот нижний предел равен просто пределу и больше нуля на множестве $S_0^{(m)}(A)$, обладающем полной ρ_m-мерой. Вместе с тем легко понять, что каждое из $S_0^{(m)}(A)$ содержится в $S_0(A)$, откуда заключаем, что $\bigcup\limits_{(m)} S_0^{(m)}(A) \subset S_0(A)$. Таким образом

$$\rho(S_0(A)) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(S_0(A)) > \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(S_0^{(m)}(A)) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m(R^1) = \rho(R^1). \blacktriangleright$$

Предложение 2. *Как спектральная, так и лебеговская меры ядра спектра* $S_0(A)$ *инвариантны относительно выбора оператора* $G \in R_H$.

◀ Нам следует доказать только инвариантность лебеговской меры ядра спектра $S_0(A)$, так как инвариантность спектральной меры легко следует из того, что для каждого $G \in R_H$ $\rho(S_0(A)) = \rho(R^1)$, на основании доказанного выше предложения 1.

Прежде всего заметим, что анализируя доказательство предложения 3 работы [1] нетрудно усмотреть, что оно пригодно и в том случае, когда $\{\chi_k(t)\}$—любая полная в L^2_ρ система, которая необязательно ортонормальна. Существенно лишь, чтобы фигурирующая в подынтегральном выражении функция $F^2(t)$ не обращалась в нуль на множестве положительной ρ-меры.

Стало быть, при замене оператора G каким-либо другим оператором из того же класса R_H каждое из $S_0^{(m)}(A)$ может измениться лишь на множестве меры нуль как по спектральной мере, так и по мере Лебега.

Таким образом, поскольку $\bigcup S_0^{(m)}(A) \subset S_0(A)$, то нам остается доказать, что лебеговская мера множества $M = S_0(A) \setminus \bigcup\limits_{(m)} S_0^{(m)}(A)$ равна нулю. Обозначим через E (соответственно через E_m) множество точек вещественной оси, в которых одно из производных чисел функции

$\tilde{\rho}(t)$ (соответственно $\tilde{\rho}_m(t)$) больше нуля. Из неравенства (4) легко следует, что $S_O(A) \subset E$. Кроме того, привлекая лемму 2 из [3], непосредственно заключаем, что

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} > 0 \tag{5}$$

для тех и только тех λ, которые принадлежат E_m. Ясно, что аналогичное утверждение будет иметь место, если заменить $\tilde{\rho}_m(t)$, E_m на $\tilde{\rho}(t)$, E.

Положим $F = E \setminus \bigcup_{(m)} E_m$ и докажем, что $\operatorname{mes} F = 0$. Для этого предположим, вопреки нашему утверждению, что $\operatorname{mes} F > 0$ и представим множество F в виде $F = \bigcup_{(n)} F_n$, где F_n—подмножество точек из F, в которых одно из производных чисел функции $\tilde{\rho}(t)$ больше $1/n$, тогда, очевидно, для некоторого $n = n_0$, $\operatorname{mes} F_{n_0} = d_0 > 0$. На основании известной леммы (см. [4], стр. 228), уточненной в [1], легко заключаем, что множество F_{n_0}, а следовательно, и множество F, имеет положительную $\tilde{\rho}$-меру, что невозможно, поскольку как E, так и $\bigcup_{(m)} E_m$, очевидно, имеют полную $\tilde{\rho}$-меру. Итак, $\operatorname{mes} F = 0$.

Ниже будет доказано, что лебеговская мера симметрической разности множеств E_m и $S_O^{(m)}$ равна нулю, поэтому мера симметрической разности множеств $\bigcup_{(m)} E_m$ и $\bigcup_{(m)} S_O^{(m)}$ также равна нулю, откуда в силу $\operatorname{mes} F = 0$ нетрудно заключить, что $\operatorname{mes}(E \setminus \bigcup S_O^{(m)}) = 0$. После этого, принимая во внимание доказанные выше включения: $\bigcup_{(m)} S_O^{(m)} \subset S_O(A) \subset \subset E$, убеждаемся в том, что $\operatorname{mes}(S_O(A) \setminus \bigcup_{(m)} S_O^{(m)}) = 0$, откуда инвариантность лебеговской меры $S_O(A)$ следует из установленной ранее инвариантности $\operatorname{mes} S_O^{(m)}(A)$ для каждого $m = 1, 2, 3, \cdots$ относительно выбора оператора $G \in R_h$.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 2 нам осталось показать, что лебеговская мера симметричной разности множеств E_m и $S_O^{(m)}$ равна нулю.

Для этого обозначим через E_m^* множество точек λ, в которых предел

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \tag{5*}$$

больше нуля, и заметим, что в силу леммы 1 из [3] этот предел существует для почти всех λ по мере Лебега. Кроме того, в силу предложения 1 из [1] множество точек λ, в которых предел

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\sup_{\{a_k\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\sum\limits_{(k)}a_k\mu_k\chi_k^{(m)}\right|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_m(t)$$

не существует, также имеет лебеговскую меру нуль.

Теперь уже, в силу очевидного неравенства

$$\sup_{\{a_k\}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\sum\limits_{(k)}a_k\mu_k\chi_k^{(m)}\right|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\,d\rho_m(t)\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{\rho}_m(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2},$$

легко заключаем, что если пренебречь множеством нулевой лебеговской меры, то $S_0^{(m)}\subset E_m^{*}$. Положим $F_m^{*}=E_m^{*}\setminus S_0^{(m)}$ и докажем, что $\operatorname{mes} F_m^{*}=0$. Пусть вопреки утверждению, $\operatorname{mes} F_m^{*}>0$. В силу леммы 2 из [3] нетрудно заключить, что в точках множества F_m^{*} одно из производных чисел функции $\tilde{\rho}_m(t)$ больше нуля, поэтому на основании упомянутой выше уточненной в [1]—леммы из [4] заключаем, что $\tilde{\rho}_m(F_m^{*})>0$. С другой стороны, поскольку мера $\tilde{\rho}_m$ эквивалентна мере ρ_m, получим $\rho_m(F_m^{*})>0$, что невозможно, так как $S_0^{(m)}$ имеет полную ρ_m-меру.

Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{mes} F_m^{*}=0$. Нам остается проверить, что симметрическая разность множеств E_m^{*} и E_m имеет нулевую лебеговскую меру.

В самом деле, пусть $\lambda_0\in E_m^{*}$, тогда в силу леммы 2 из [3] одно из производных чисел $\tilde{\rho}_m(t)$ должно быть больше нуля и, стало быть, $\lambda_0\in E_m$, т. е. $E_m^{*}\subset E_m$. Пусть теперь $\lambda_0\in E_m$, тогда в силу этой же леммы предел (5*) либо не существует, либо больше нуля и, стало быть, $\lambda_0\in E_m^{*}$. Следовательно, если пренебречь множеством нулевой лебеговской меры, то справедливо и обратное включение $E_m\subset E_m^{*}$.

Таким образом, доказано, что симметрическая разность множеств E_m и E_m^{*}, а, стало быть, и симметрическая разность E_m и $S_0^{(m)}$ действительно имеет нулевую лебеговскую меру.▶

Доказательство леммы 1.

◀Ясно, что из $\lambda_0\,\overline{\in}\,S(A)$ легко следует, что λ_0 содержится в некотором интервале, в котором $\rho_m(t)$ постоянна. Пусть $(\lambda_0-\delta_m, \lambda_0+\delta_m^{*})$—такой интервал постоянства $\rho_m(t)$, концы которого являются точками роста $\rho_m(t)$. Положим $\delta'=\inf\limits_{(m)}\delta_m$, $\delta''=\inf\limits_{(m)}\delta_m^{*}$, $2\delta_0=\min\{\delta', \delta''\}$ и докажем, что $\delta_0>0$. В самом деле, пусть $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ содержится в интервале постоянства функции $\rho(t)$ и пусть, вопреки утверждению, $\delta''=0$, тогда ясно, что $\exists m_0$ такое, что $2\delta_{m_0}^{*}<\delta$, поэтому в силу нижеследующих неравенств

$$\varepsilon_{m_0}[\rho_{m_0}(\lambda_0+2\delta^*_{m_0})-\rho_{m_0}(\lambda_0)]\leqslant\sum_{(m)}\varepsilon_m\,\rho_m(\lambda_0+2\delta^*_{m_0})-\rho_m(\lambda_0)]\leqslant\rho(\lambda_0+2\delta^*_{m_0})-\rho(\lambda_0)=0$$

приходим к противоречию с тем, что точка $\lambda_0+\delta^*_{m_0}$ является точкой роста функции $\rho_{m_0}(t)$. Случай $\delta'=0$ разбирается вполне аналогично.▶

Пусть теперь g—нормированный порождающий элемент оператора A, тогда, очевидно, $g_m=P_m\,g$ будут порождающими элементами для операторов A_m в H_m. Пусть далее $S^*(A)$—совокупность точек из R^1 таких, что

$$\Phi^*(\lambda)=\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}\,g\|^2>0.$$

Предложение 3. *Ядро спектра $S_G(A)$ отличается от множества $S^*(A)$ на множество меры нуль как по спектральной, так и по лебеговской мерам.*

Прежде всего, из соотношения

$$\|R_{\lambda+i\tau}\,g\|^2=\sum_{(m)}\|R_{\lambda+i\tau}\,g_m\|^2$$

непосредственно заключаем, что $S^*(A)\supset\bigcup_{(m)}S^*(A_m)$. Далее, опираясь на лемму 5 работы [3], нетрудно убедиться (аналогично тому, как это сделано при доказательстве предложения 2 из [1]), что $\rho_m(S^*(A_m))=$ $=\rho_m(R^1)$, поэтому $\rho_m(S^*(A))=\rho_m(R^1)$, откуда, по определению меры ρ, будем иметь

$$\rho(S^*(A))=\sum_{(m)}\varepsilon_m\,\rho_m(S^*(A))=\sum_{(m)}\varepsilon_m\,\rho_m(R^1)=\rho(R^1).$$

Но поскольку $S_G(A)$ тоже имеет полную ρ-меру, то оно отличается от $S^*(A)$ на множество нулевой ρ-меры. Докажем теперь, что если пренебречь множеством нулевой лебеговской меры, то $S^*(A)$ совпадает с $S_G(A)$.

Так как спектры операторов A_m простые, то из анализа доказательства предложения 1, 3 работы [1] легко следует, что $S_{G_m}(A_m)=$ $=S_G^{m}(A)$ и $S^*(A_m)$ отличаются на множество нулевой лебеговской меры.

Предположим, что $G\in R_H$ таково, что $g\in D_G$ и $\|Gg\|=1$, тогда, очевидно, будем иметь $\Phi^*(\lambda)\leqslant\Phi_G(\lambda)$, откуда будет следовать, что $S^*(A)\subset S_G(A)$. С другой стороны, выше, при доказательстве предложения 2, было установлено, что с точностью до множества лебеговской меры нуль $S_G(A)=\bigcup_{(m)}S_G^{(m)}(A)=\bigcup_{(m)}S^*(A_m)\subset S^*(A)$, т. е., пренебрегая множеством нулевой лебеговской меры, имеет место и обратное включение.

Ясно, что в тех случаях, когда порождающий элемент рассматриваемого оператора известен, вместо ядра спектра $S_G(A)$ можно (в силу предложения 3) строить множество $S^*(A)$, что во многих случаях оказывается существенно проще.

Предложение 4. *Для отсутствия непрерывной части спектра оператора A достаточно, чтобы ядро спектра $S_0(A)$ состояло из не более чем счетного множества точек.*

◀ Предположим, сначала, что спектр оператора A простой, тогда в силу предложения 1 работы [1]

$$\Phi_0(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^2(t)\, d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2},$$

откуда по условию получим

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^2(t)\, d\rho_a(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0^2(t)\, d\rho_s(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} = 0 \tag{7}$$

при всех $\lambda \in R^1$, кроме счетного множества точек (здесь, как всегда, $\rho_a(t)$ и $\rho_s(t)$ — абсолютно непрерывная и сингулярная части спектральной меры $\rho(t)$). Но из (6) следует, что $F_0^2(\lambda)\rho_a'(\lambda) = 0$ почти всюду по Лебегу, а поскольку $F_0^2(\lambda) \neq 0$ на множестве полной лебеговской меры, то $\rho_a'(\lambda) = 0$ почти всюду по Лебегу, откуда заключаем (в силу абсолютной непрерывности $\rho_a(t)$), что $\rho_a(t) \equiv 0$.

Пусть теперь, вопреки утверждению, $\rho_s(t) \not\equiv 0$, тогда в силу леммы 3 из [1] имели бы, что предел (7) равен $+\infty$ на множестве E, полной ρ_s-меры, которое, разумеется не может быть счетным, а это противоречит (7). Итак, $\rho_s(t) \equiv 0$.

Пусть теперь спектр оператора A имеет произвольную кратность, и пусть $\rho_m(t) = \rho_{md}(t) + \rho_{ma}(t) + \rho_{ms}(t)$ представляет собой каноническое разложение спектральной меры, соответствующее части оператора A в подпространстве H_m.

Из нижеследующего неравенства

$$\Phi_0(\lambda) \geqslant \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F_0^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}\, d(\rho_{ma} + \rho_{ms}),$$

где $|F_0^{(m)}(t)|^2 = \sum\limits_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k^{(m)}(t)|^2$ и отлично от нуля на множестве полной ρ_m-меры, в силу условия доказываемого предложения, совершенно также, как и выше, в случае простого спектра, убеждаемся, что $\rho_{ma}(t) \equiv 0$ и $\rho_{ms}(t) \equiv 0$, откуда получаем $\rho_m(t) = \rho_{md}(t)$.

Итак, остается доказать, что $\rho(t)$ тоже не содержит непрерывной составляющей. Для этой цели обозначим через E_m — множество точек разрыва функции $\rho_m(t)$, тогда, поскольку $\rho_m(E_m) = \rho_{md}(E_m) = \rho_{md}(R^1) = \rho_m(R^1)(m = 1, 2, 3, \cdots)$, то будем иметь

$$\rho\left(\bigcup_{(n)} E_n\right) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m \left(\bigcup_{(n)} E_n\right) \geqslant \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m (E_m) = \sum_{(m)} \varepsilon_m \rho_m (R^1) = \rho(R^1),$$

т. е. полная ρ-мера сосредоточена на счетном множестве $\bigcup_{(n)} E_n$, что и означает отсутствие непрерывной составляющей спектральной меры.▶

Предложение 5. *Для отсутствия лебеговской части спектра необходимо и достаточно, чтобы лебеговская мера ядра спектра $S_0(A)$ равнялась нулю.*

◀ Необходимость. Пусть mes $S_0(A)>0$, тогда поскольку, как мы видели выше при доказательстве предложения 2, mes $[S_0(A) \setminus \bigcup_{(m)} S_0^{(m)}(A)]$, то при некотором m должно быть mes $S_0^{(m)}(A)>0$, откуда следует, что мера $\rho_m(t)$, а стало быть и мера ρ, содержит абсолютно непрерывную (лебеговскую) часть.

В самом деле, если бы мера ρ_m не содержала лебеговской части, то, в силу леммы 1 и леммы 3 из [1], отсюда непосредственно вытекало бы, что mes $S_0^{(m)}(A)=0$.

Достаточность. Пусть mes $S_0(A)=0$, тогда как мера $\rho(t)$, вопреки утверждению, содержит абсолютно непрерывную часть, тогда нетрудно убедиться, что найдется хотя бы одна мера ρ_m, также содержащая абсолютно непрерывную часть. Теперь же, привлекая лемму 2 из [1] и принимая во внимание очевидное включение $S_0^{(m)}(A) \subset S_0(A)$, без труда заключаем, что mes $S_0(A)>0$. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего предложения.

Предложение 6. *Для отсутствия сингулярной части спектра достаточно, чтобы $\Phi_0(\lambda)$ было конечным для всех $\lambda \in S_0(A)$, за исключением, быть может, счетного их числа,*

◀ Пусть условие нашего предложения выполнено, и все же, вопреки утверждению, спектр оператора A содержит сингулярную часть, тогда нетрудно убедиться, что найдется такая мера $\rho_m(t)$, которая также содержит сингулярную часть $\rho_{ms}(t)$. Далее, поскольку $\chi_k^{(m)}(t)$ образуют полную систему в $L^2_{\rho_m}$, то хотя бы одна из них, скажем $\chi_{k_0}^{(m)}(t)$, отлична от нуля на множестве положительной ρ_{ms}-меры.

Из неравенства

$$\Phi_0(\lambda) \geqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \sup_{\{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\sum_{(k)} a_k \mu_k \chi_k^{(m)}\right|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2} d\rho_m,$$

полагая $a_{k_0}=1$, а остальные a_k равными нулю, получим

$$\Phi_0(\lambda) \geqslant \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mu_{k_0}^2|\chi_{k_0}^{(m)}(t)|^2}{(t-\lambda)^2+\tau^2} d\rho_{ms}(t),$$

откуда в силу теоремы Радона-Никодима, леммы 1 и леммы 4 из [3] непосредственно заключаем, что предел в правой части последнего неравенства, а стало быть и функция $\Phi_G(\lambda)$, равен $+\infty$ на множестве положительной ρ_{ms}-меры. Поскольку такое множество, очевидно, не может быть счетным, то полученное противоречие доказывает справедливость нашего предложения. ▶

Следствие. *Для лебеговости спектра самосопряженного оператора с непрерывным спектром достаточно, чтобы $\Phi_G(\lambda)$ было конечным для всех $\lambda \in S_G(A)$ кроме, быть может, счетного их числа.*

◀ Доказательство непосредственно следует из предыдущего предложения. ▶

Замечание. Поскольку существуют примеры неубывающих абсолютно непрерывных функций, производная которых обращается в $+\infty$ на несчетном множестве точек, то нетрудно убедиться в невозможности указания необходимых и достаточных условий лебеговости спектра, выраженных лишь в терминах ядра спектра или конечности функции $\Phi_G(\lambda)$, ибо как для сингулярной меры, так и для упомянутых абсолютно непрерывных мер $\Phi_G(\lambda)$ обращается в $+\infty$ на множестве точек мощности континуума.

Предложение 7. *Для лебеговости спектра самосопряженного оператора A с простым непрерывным спектром необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $G \in R_H$ имело место равенство**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_G(\lambda)\, d\lambda = \|G^{-1}\|^2.$$

◀ Прежде всего заметим, что при доказательстве предложения 1 из [1] было установлено, что почти всюду по мере Лебега имеет место равенство

$$\Phi_G(\lambda) = F^G(\lambda)\rho'(\lambda) = \sum_{(k)} \mu_k^2 |\chi_k(\lambda)|^2 \rho'(\lambda),$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_G(\lambda)\, d\lambda = \sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_k(\lambda)|^2 \rho'(\lambda)\, d\lambda \leqslant \sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi_k(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda) =$$

$$= \sum_{(k)} \mu_k^2 = \|G^{-1}\|^2. \tag{8}$$

Необходимость очевидна, поскольку при абсолютно непрерывном ρ неравенство (8) превращается в равенство.

Докажем теперь, что если в соотношении (8) имеет место знак равенства, то мера ρ абсолютно непрерывна. В самом деле, пусть мера ρ, вопреки нашему утверждению, содержит сингулярную часть и, стало быть, $\exists$ множество $M \subset R^1$ такое, что $\operatorname{mes} M = 0$, тогда как $\rho(M) > 0$. Далее, поскольку система функций $\chi_k(\lambda)$ полна в L_ρ^2, то

* Здесь $\|\cdots\|$ означает норму Гильберта-Шмидта.

найдется такое $\chi_{k_0}(\lambda)$, которое отлично от нуля на подмножестве $\bar{M} \subset M$ положительной ρ-меры, и поэтому будет иметь место строгое неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{k_0}(\lambda)|^2 \rho'(\lambda)\, d\lambda < \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi_{k_0}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 1,$$

которое повлечет за собой строгое неравенство и в соотношении (8).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 16.XI.1971

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Ընդհանուր ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրի կորիզի և սպեկտրի լեբեգյան կամ սինգուլյար լինելու խոչ հայտանիշների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում բերված է սպեկտրի կորիզի այնպիսի սահմանում, որը պիտանի է դառնում սեպարաբել Հիլբերտյան տարածության մեջ գործող կամայական ինքնահամալուծ օպերատորների համար և նշված են այդ կորիզի մի քանի հատկությունները։

Բացի այդ ապացուցված են սեփական էլեմենտների լրիվության, սինգուլյար սպեկտրի բացակայության, սպեկտրի լեբեգյան կամ զուտ սինգուլյար լինելու բավարար պայմաններ ձևակերպված $\Phi_G(\lambda)$ *ֆունկցիայի, իսկ երբեմն էլ միայն սպեկտրի կորիզի տերմիններով։*

R. A. ALEXANDRIAN, R. Z. MKRTCHIAN. *On the nucleus of general selfadjoined operator and criterions of singularity or lebesqueness of its spectrum* (summary)

The notion of nucleus of spectrum for arbitrary selfadjoined operator in H is introduced and some of its properties are proved. In terms of $\Phi_G(\lambda)$ (sometimes in terms of the nucleus itself) sufficient conditions for completness of the system of eigenelements, for absence of singular spectrum, for pure singularity or lebesqueness of the spectrum are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика“, V, № 2, 1970, 97—108.
2. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. „Наука“, 1965.
3. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика“, 1, № 1, 1966.
4. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

G. ADOMIAN

SIGNAL PROCESSING IN A RANDOMLY TIME VARYING SYSTEM

Abstract: Signal processing systems, which are deterministic with inexactly specified parameters, or, stochastic because system parameters vary randomly in time, are treated in terms of a stochastic transformation or operator theory which determines statistical measures of the system output in terms of statistical measures of the system input, and stochastic Green's functions, or system functions, involving statistics of the random parameters. The earliest application was the determination of the spectral density of a randomly sampled random process. Extensions permit the determination of two point correlation functions of the system output for systems involving any linear operations, e. g., for the solution process of an ordinary or partial differential equation with stochastic process coefficients, boundary values, or forcing functions without the usual averaging, perturbation, or special process assumptions. Optimal processing or control can be considered as applications of the theory.

Randomly time varying systems arise in a number of ways. Practically all radio transmission channels can be treated as randomly time varying linear filters. Adaptive systems may be viewed as stochastic systems as parameters adapt to a changing environment. A random signal process may be sampled at random intervals of time for various reasons, e. g., in a multiloop system, we may have random sampling because of varying time delays for control computations for a particular feedback loop. In early work of the author [1], and in still earlier classified work, expressions were found for the first time for the spectral density of a randomly sampled random radar signal process. It became clear that the processing which resulted in the random sampling could be viewed as a „stochastic filter" of a very general type [1]. It is unfortunate in this connection that terminology such as stochastic filter, stochastic system, stochastic control system, stochastic matrix, and stochastic differential equation have been widely used in much less general and appropriate connections). The expression for the spectral density of the randomly sampled random process reduced to known results for sampled processes when the sampling became regular, i. e., where the system became deterministic. This same investigation determined the correlation of the solution process of a first order differential equation of the form $\dot{y} + \xi y = \eta$ where $\xi(t)$ and $\eta(t)$ were Gaussian stochastic processes and compared the result with Tikhonov's earlier solution when it became available in translation. Basically, the investigation [1, 2, 3, 4] was an attempt to combine linear system theory or linear operator theory and the theory of probability and stochastic processes to consider systems involving stochastic behavior—i. e., a theory of „stochastic systems" or „stochastic operators". Thus, the random sampling operator could be viewed as a stochastic operator which randomly transformed (sampled) the original random process. The concept of a „stochastic Green's function" was introduced [1, 2, 3, 4] for desired statistical measures of the output process; References 4 or 7 suggest and develop an iterative procedure for systems modelled by stochastic differential equations involving stochastic process coefficients $a_\nu(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in (\Omega, F, \mu)$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$. Such a case is more interesting than cases where randomness appears only in the forcing function or the boundary conditions since we have a stochastic (differential) operator. More recent work [5, 8, 9, 10] deals with stochastic partial differential operators as well and consequently a great number of physical applications. Physically the operator may represent a filter, a communication channel, a measurement, or a scattering medium. We write $y = \mathrm{H}[x]$ where H is the stochastic operator, x is the input process and y the output process. Thus the response $y(\xi) = \mathrm{H}x(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta)\, x(\eta)\, dy$ where h is a random Green's function and y and x are random functions i. e., the output and input of a stochastic filter. Then, if the input and the parameters of H are statistically independent, the two point correlation $R_y(t_1, t_2)$ for the stochastic process y can be given in terms of the correlation R_x of the stochastic process input x if an appropriate quantity called a stochastic Green's function (for correlations) can be defined. The result holds also for the random function solution y of the differential equation $\mathrm{L}y = x$ where L is given by $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$. Supposing $\mathrm{L} = L + \mathrm{R}$ where L is the deterministic part of the operator and R the random part, i. e., each coefficient process $a_\nu = \langle a_\nu \rangle + \alpha_\nu$ where α_ν is a zero mean random process, then $L = \sum_{\nu=0}^{n} \langle a_\nu(t) \rangle d^\nu/dt^\nu$ and

$$\mathrm{R} = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu(t)\, d^\nu/dt^\nu, \text{ (or } \sum \alpha_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu).$$

Adomian has defined the „stochastic Green's function", when the the chosen „statistical measure" is the two-point correlation, as the kernel G_H of the integral

$$R_y(t_1, t_2) = \iint G_H(t_1, t_2, \sigma_1, \sigma_2)\, R_x(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2.$$

In earlier work, the quantity G_H was given in terms of a random Green's function $h(t, \tau)$ by the relation

$$G_H(t_1, t_2, \sigma_1, \sigma_2) = \langle h(t_1, \sigma_1)\, \dot{h}(t_2, \sigma_2)\rangle.$$

Later work [8] has further defined the random Green's function above by

$$h(t, \sigma) = G(t, \sigma) - \int \Gamma(t, \tau)\, G(\tau, \sigma)\, d\tau$$

with Γ a resolvent kernel, introduced by Sibul [5], which allows a convenient reformulation of the iterative approach. It is defined by

$$\Gamma(t, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m K_{m+1}(t, \tau),$$

where

$$K_m(t, \tau) = \int K(t, \tau_1)\, K_{m-1}(\tau_1, \tau)\, d\tau_1$$

with $K_1 = K$. Supposing G and K are known, Γ and h can be determined, and G_H can then be calculated as

$$G_H = G(t_1, \sigma_1)\, \dot{G}(t_2, \sigma_2) - \int \langle\Gamma(t_1, \tau_1)\rangle\, G(\tau_1, \sigma_1)\, \dot{G}(t_2, \sigma_2)\, d\tau_1 -$$

$$- \int \langle\dot{\Gamma}(t_2, \tau_2)\rangle\, G(t_1, \sigma_1)\, \dot{G}(\tau_2, \sigma_2)\, d\tau_2 +$$

$$+ \iint \langle\Gamma(t_1, \tau_1)\, \dot{\Gamma}(t_2, \tau_2)\rangle\, G(\tau_1, \sigma_1)\, \dot{G}(\tau_2, \sigma_2)\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

The quantity $G(t, \tau)$ is the ordinary or deterministic Green's function for the operator L obtained by separating a stochastic operator L into a deterministic part L and a random part R. The quantity K is the Green's function corresponding to $L^{-1}\mathrm{R} = G(t, \tau) \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$ and can be obtained by repeated integrations by parts or by use of Green's formula in terms of the adjoint operator as

$$K(t, \tau) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu d^\nu/dt^\nu\, [\alpha_\nu(\tau)\, G(t, \tau)]$$

where α_ν is the random fluctuation in each coefficient process. If R involves no derivatives, i. e., if $\mathrm{L} = L + \alpha(t)$, then $K = G(t, \tau)\, \alpha(\tau)$.

Thus the stochastic Green's functions for any desired statistical measure can be computed, e. g., the two point correlation $R(t_1, t_2)$ above for the general nonstationary cases, or $R(\tau)$ for the very special case of stationary transformation of a stationary process, or $\Phi(f)$, the spectral density. In the random sampling example of the author's dissertation, $\Phi_y(f) = \int K(s, f)\, \Phi_x(s)\, ds$ gave the spectral density of a randomly sampled random process whose spectral density before sampling was Φ_x. The stochastic Green's function $K(s, f)$ was calculated for any probability law for the sampling.

Recent work [8] has shown that in the event perturbation theory is adequate to deal with the randomness involved, the results for perturbation theory are easily specialized from the general expression for $G_H(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$ by letting $\mathrm{R} = \epsilon \mathrm{L}_1$, with $\langle \mathrm{L}_1 \rangle = 0$. However, we are not limited to perturbation results nor special processes such as white noise and we make no closure approximations in the Boguliubov or hierarchy manner [6]. Thus for the stochastic differential equation $\mathrm{L}y = x$ where $x(t, \omega')$, $t \in T$, $\omega' \in \Omega'$ is a stochastic process (Ω' has a σ-algebra defined and a measure) and $\mathrm{L}(t, \omega) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t, \omega)\, d^\nu/dt^\nu$ is an operator involving the stochastic process coefficient $a_\nu(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, the expected solution $\langle y \rangle = \int_\Omega \int_{\Omega'} y(t, \omega, \omega')\, d\mu(\omega)\, d\mu'(\omega')$ where μ and μ' are the appropriate measures on Ω and Ω' [6]. $\langle y \rangle$ is not in general, except for singular measures, equal to $L^{-1}\langle x \rangle$ where $\langle x \rangle = \int_{\Omega'} x(t, \omega')\, d\mu'(\omega')$ and $L[\cdot] = \langle \mathrm{L}(t, \omega)[\cdot] \rangle = \int_\Omega \mathrm{L}(t, \omega)[\cdot]\, d\mu(\omega)$.
Equivalently, $\langle \mathrm{L}y \rangle \neq \langle \mathrm{L} \rangle \langle y \rangle$, obviously, and, similarly, quantities of the form $\langle \mathrm{R}L^{-1}\mathrm{R}L^{-1}\mathrm{R} \cdots \mathrm{R}L^{-1}\mathrm{R}y \rangle$ cannot be separated into $\langle \mathrm{R}L^{-1}\mathrm{R}L^{-1} \cdot \mathrm{R} \cdots \mathrm{R}L^{-1}\mathrm{R} \rangle \langle y \rangle$ and the error in making such an approximation is now determinable.

One can further consider a linear system with input $x(t)$, whose output state vector $y(t)$ is n dimensional, described by the system equation $\dot{y} = f(y, x, t) = A(t)\, y + x(t)$ where A is an $n \times n$ stochastic matrix (not the usual probability transition matrices but matrices with randomly time varying elements $a_{ij}(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in (\Omega, \mathrm{F}, \mu)$, a probability space) $x(t)$ is the product of an $n \times r$ stochastic matrix $B(t)$ with a $r \times 1$ matrix $u(t)$, a convenient formulation for stochastic control applications. The deterministic Green's function G will now become a Green's matrix for the deterministic part of the operator, i. e., a state transition matrix. This work is being published.

Finally, generalizations to partial stochastic differential equations and wave equations with stochastic d'Alembertian operator are possible Consider the scalar wave equation

$$\nabla^2 y(\bar{r}, t, \omega) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{c^2} + \alpha(\bar{r}, t, \omega)\right] y(\bar{r}, t, \omega) = x(\bar{r}, t, \omega)$$

where $t \in T$ represents time, $\bar{r} \in R^3$, $\omega \in \Omega$ on a probability space (Ω, F, μ). The quantities x and α, and consequently y, are all stochastic processes (s. p.) dependent on space position and time, i. e., random fields. The deterministic operator L is given by the ordinary d'Alembertian $\nabla^2-(1/c^2)\, \partial^2/\partial t^2$ and the random part of the stochastic operator by $\mathrm{R}=(\partial^2/\partial t^2)\,\alpha$.

Litting $L^{-1}x=F$ we write the above as

$$y(\bar{r}, t, \omega)=F(\bar{r}, t, \omega)+L^{-1}(\partial^2/\partial t^2)\, \alpha(\bar{r}, t, \omega)\, y(\bar{r}, t, \omega)$$

where L^{-1} is the inverse of the operator $\nabla^2-(1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$. Denoting the Green's function by $G(\bar{r}, t, \tau)$ or $G(t, \tau)$*, the last term is rewritten as $\int\int G(t, \tau)\,(\partial^2/\partial t^2)\,\alpha(\bar{r}, \tau)\, y(\bar{r}, \tau)\, dv d\tau$, i. e., the random operator R is $-(\partial^2/\partial t^2)\,\alpha(t)$.

After integrating twice by parts we can write**

$$y(\bar{r}, t, \omega)=F(\bar{r}, t, \omega)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{v}[\partial^2 G(\bar{r}, t, \tau)/\partial\tau^2]\,\alpha(\bar{r}, \tau, \omega)\, y(\bar{r}, \tau, \omega)\, dv d\tau$$

or more simply

$$y(t)=F(t)+\int\int[\partial^2 G(t, \tau)/\partial\tau^2]\,\alpha(\tau)\, y(\tau)\, dv d\tau.$$

(Suppressing the ω and $\bar{r}$ for notational convenience) if quantities

$$G(t, \tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\alpha(\tau)\, y(\tau)$$

and

$$\frac{\partial G(t, \tau)}{\partial\tau}\alpha(\tau)\, y(\tau)$$

vanish as $t\to\pm\infty$ which we suppose does happen either because of the initial conditions (G and G' zero) or because α is a reducible-to-stationary stochastic process.

We write $\Gamma(t, \tau)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m K_{m+1}(t, \tau)$ with $K_1=K$ as before,

$$K(t, \tau)=\frac{\partial^2 G(t, \tau)}{\partial\tau^2}\alpha(\tau),$$

$$K_2(t, \tau)=\int\int K(t, \tau_1)\, K(\tau_1, \tau)\, dv d\tau_1=$$

---

* The Green's function, for L^{-1}, is found from $\Box^2 G=\delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2')\,\delta(x_3-x_3')\,\delta(t-t')$ where $G(x_1, x_2, x_3, t)$, or $G(\bar{r}, t)$ satisfies the equation and initial conditions $G(\bar{r}, 0)=G_t(\bar{r}, 0)=0$ and such that G is bounded for all t as either $x_1, x_2, x_3\to\pm\infty$.

** Products of generalized functions are undefined unless they are in different dimensions, but we always do an integration in between so the iteration procedure here will still be valid.

$$= \iint \frac{\partial^2 G(t, \tau_1)}{\partial \tau_1^2} \alpha(\tau_1) \frac{\partial^2 G(\tau_1, \tau)}{\partial \tau^2} \alpha(\tau)\, dv d\tau_1,$$

$$K_3(t, \tau) = \iint K(t, \tau_1) K_2(\tau_1, \tau)\, dv d\tau_1, \quad \text{etc.}$$

$$\Gamma(t, \tau) = K(t, \tau) - K_2(t, \tau) + K_3(t, \tau) + \cdots =$$

$$= K(t, \tau) - \iint K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau)\, dv_1 d\tau_1 + \iiiint K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) \times$$

$$\times K(\tau_2, \tau)\, dv_1 dv_2 d\tau_1 d\tau_2 - \cdots =$$

$$= \frac{\partial^2 G(t, \tau)}{\partial \tau^2} \alpha(\tau) - \iint \frac{\partial^2 G(t, \tau_1)}{\partial \tau_1^2} \frac{\partial^2 G(\tau_1, \tau)}{\partial \tau^2} \alpha(\tau_1) \alpha(\tau)\, dv_1 d\tau_1 +$$

$$+ \iiiint \frac{\partial^2 G(t, \tau_1)}{\partial \tau_1^2} \frac{\partial^2 G(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2^2} \frac{\partial^2 G(\tau_2, \tau)}{\partial \tau^2} \alpha(\tau_1) \alpha(\tau_2) \alpha(\tau) \times$$

$$\times\, dv_1 dv_2 d\tau_1 d\tau_2 - \cdots.$$

Thus we can determine the s. g. t. (stochastic Green's function) either for the spectral density s. m. (statistical measure) if it exists, or immediately the more general two point correlation (and mutual coherence functions) thus

$$R_y(t_1, t_2) = \iint G_H(t_1, t_2, \sigma_1, \sigma_2) R_x(\sigma_1, \sigma_2)\, d\sigma_1 d\sigma_2$$

where G_H is found from $h(t, \tau)$, the random Green's function.

The first term of G_H (which we do not write out) shows the results for waves propagating in a *deterministic* medium. The other terms of G_H involving statistics of Γ show the effects of spectral spreading due to the stochastic medium. These are the terms lost by a monochromatic assumption. The calculation for a specific case presents considerable difficulty but can be made knowing the statistics (i. e., s. m.) of α (such as correlation if α is gaussian). This problem has been considered substantially only by Sibul*).

The simplest calculation of the spectral spreading should result (if one determines first that stationarity exists in the solution process or wave function—the necessary and sufficient conditions will be discussed in another paper) if the spectral density is calculated from [1]

$$\Phi_y(f) = \int K_H(s, f)\, \Phi_x(s)\, ds$$

where the stochastic Green's function K_H is

$$K_H(s, f) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle h(t, \tau)\, h^*(t + \beta, \tau + \alpha) \rangle \exp\{2\pi i f \beta\} \times$$

$$\times \exp\{-2\pi i s \sigma\}\, d\tau d\beta d\sigma.$$

---

* A following paper by Sibul and Adomian will calculate the spectral spreading and the mutual coherence and related quantities.

In the more general nonstationary case, we make the time domain iterative treatment, and if we assume gaussian behavior for the index of refraction, we observe the odd terms vanish in the series (terms involving products of odd numbers of α's) and the even terms are negative. Thus in forming products $y(t_1)\, y(t_2)$ for correlations, the contribution of the spectral spreading or non-monochromatic terms of G_H (i. e., the last three of the four term expression) are all positive.

Our procedure involves no assumption of statistical independence of the solution s. p. or wave function and the stochastic index of refraction and makes no closure approximations [6].

The first application of this work was the processing of a signal by a „stochastic filter“ which randomly sampled the signal at intervals of time governed by a probability law. Work on optimization of stochastic systems and numerous other applications is immediately suggested.

A c k n o w l e d g m e n t. This work has been supported by the National Aeronautics and Space Administration (NGR11—003—020) and has also received partial support from the office of Naval Research (Contract № N00014—69—A—0423—Themis).

University of Georgia, USA

Received 15.XI.1971

Գ. ԱԴՈՄՅԱՆ. Ազդանշանի ձևափոխումը ժամանակի ընթացքում պատահական ձևով փոփոխվող սիստեմներում *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է սիստեմի ելքում պրոցեսի բաշխումը նկարագրելու խնդիրը սիստեմի մուտքում պրոցեսի բաշխման և սիստեմը բնութագրող պատահական Գրինի ֆունկցիայի տերմիններով։ Խնդիրը բերվում է ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը։ Ստացված է նաև երկկետանի կոռելյացիոն ֆունկցիայի արտահայտությունը։

Г. АДОМЯН. *Преобразование сигнала в системах, случайно меняющихся во времени* (резюме)

С помощью теории стохастических операторов рассматриваются преобразующие сигнал детерминистические системы; системы, параметры которых определены неточно или стохастически, а также системы, параметры которых случайно меняются во времени.

Решается задача определения распределения процесса на выходе системы в терминах распределения процесса на ее входе и стохастической функции Грина, описывающей работу системы. Впервые эта теория была применена при определении спектральной плотности случайной выборки значений случайного процесса. В дальнейшем удалось получить двухточечную функцию корреляции для процесса на выходе системы, включающей любые линейные операции, т. е. для решения обычного или с частными производными дифференциального уравнения с коэффициентами, граничными условиями или правыми частями, задаваемыми случайными процессами. При этом удается избежать предположений о частном виде процессов, а также процедур возмущения усреднения. Оптимальное преобразование процесса или его регулирование могут рассматриваться как применения этой теории.

REFERENCES

1. *G. Adomian*. Linear Stochastic Operators, Ph. D. Dissertation (Physics) UCLA, 1961.
2. *G. Adomian*. Linear Stochastic Operators, Revs. of Mod. Phys., 35, 185, Jan. 1963.
3. *G. Adomian*. Stochastic Green's Functions, in Proc. of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 16, R. Bellman, Ed., Amer. Math. Soc., 1964, 1—39.
4. *G. Adomian*. Theory of Random Systems, Trans. of the Fourth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, an Random Processes, Prague, 1965, Publishing House of Czechoslovak Academy of Sciences, 205—222.
5. Sibul Leon H.. Application of Linear Stochastic Operator Theory, Dissertation (E. E.) Penn. State University, December 1968.
6. *G. Adomian*. The Closure Approximations in the Hierarchy Equations, Jour. of Statistical Physics, Vol. 3, no 2, 1971, 127—133.
7. *G. Adomian*. Linear Random Operator Equations in Mathematical Physics I, Jour. of Mathematical Physics, Vol. 11, no 3, March 1970, 1069—1084.
8. *G. Adomian*. Linear Random Operator Equations in Mathematical Physics II, Jour. of Mathematical Physics, Sept. (or Oct.), 1971.
9. *G. Adomian*. Linear Random Operator Equations in Mathematical Physics III, Journal of Mathematical Physics, Oct. (or Nov.), 1971.
10. *G. Adomian*. A Theory of Stochastic Systems with Applications to Physics, Bull. Amer. Phys. Soc., Series II, Vol. 16, no. 4, 1971.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

Л. А. ОГАНЕСЯН

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ТОМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Для решения уравнений Навье-Стокса в многоугольных областях, стороны которых параллельны осям координат, успешно применяется разностная схема Тома [1], [2]. В настоящей работе показано, что эта схема для уравнений, заданных в прямоугольнике, имеет точность $O(h^{2-\alpha})$, где h — шаг сетки по пространственным переменным, α—малая константа.

Обозначения. Переменные x, y, t — независимые переменные, x и y будем называть пространственными переменными, t—переменной по времени: $\square$ — прямоугольник $0<x<A=\mathrm{const}$, $0<y<B=$ $=\mathrm{const}$ в переменных x, y, Γ—его граница.

Нормы. Пусть $\psi(x, y, t)$—функция в $\square$, зависящая от t при $0\leqslant t\leqslant T=\mathrm{const}$ как от параметра, $\|\psi\|_{k,\eta}$ — норма в пространстве Соболева $W_2^k(\square)$ функции $\psi(x, y, t)$, рассматриваемой как функция только x и y при $t=\eta$, например

$$\|\psi\|^2_{1,\eta} = \iint_{\square} dxdy\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y, \eta)\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y, \eta)\right)^2 + \psi^2(x, y\ \eta)\right],$$

$$\|\psi\|_k = \max_t \|\psi\|_{k,t},\quad |||\psi|||^2_{k,\eta} = \int_0^\eta dt\,\|\psi\|^2_{k,t}$$

(значок η в указателе нормы может опускаться).

Сетка. Примем ради простоты, что $M=\dfrac{A}{h}$ и $J=\dfrac{B}{h}$ — целые числа, (x_m, y_j)—точки сетки или узлы сетки, причем $x_m=mh$, $y_j=jh$, $m=-1, 0,\cdots, M+1$, $j=-1, 0,\cdots, J+1$, $\square_h$ — множество точек сетки $(x_m, y_j)\in\square$, Γ_h — множество $(x_m, y_j)\in\Gamma$, γ — множество всех граничных узлов, кроме вершин $\square$, ω — элементы γ, $t_n=n\tau$ — n-ый момент времени в сеточной задаче, $\tau=O(h^2)$—шаг по времени, $N\tau=T$, $n=0, 1,\cdots, N$, ω_+ — ближайшая к ω точка из $\square_h$, то есть ближайшая к ω точка сетки внутри $\square$, ω_- — ближайшая к ω точка сетки, такая что $\omega_-\overline{\in}\square_h\cup\Gamma_h$, то есть ближайшая к ω точка сетки вне прямоугольника $\square$, $\Omega_h\equiv\square_h\cup\Gamma_h\cup(\bigcup_\gamma\omega_-)$.

Константы. C, ε, α—положительные константы, не зависящие от шагов сетки и от оцениваемых функций, ε и α сколь угодно малы (отметим, что одной буквой могут обозначаться различные константы), $\mathrm{h}=h/2$, неравенство $a \ll b$ означает, что $a \leqslant Cb$.

Дифференциальные и разностные операторы. Осреднения.

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 u \equiv \Delta\,(\Delta u),$$

$u_x \equiv (u\,(x+h,\ y,\ t) - u\,(x,\ y,\ t))/h,\ u_{\bar{x}} \equiv (u\,(x,\ y,\ t) - u\,(x-h,\ y,\ t))/h,$

$u_{\hat{x}} = (u_x + u_{\bar{x}})/2$, аналогично определяются разностные отношения по y и t, а также отношения $u_{x\bar{x}}$, u_{xy} и др.

$$\Delta_h u = u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}}, \quad \Delta_h^2 u = \Delta_h\,(\Delta_h u),$$

$u^x\,(x,\ y,\ t) = h^{-1} \int\limits_{x-\mathrm{h}}^{x+\mathrm{h}} d\zeta\ u\,(\zeta,\ y,\ t)$, аналогично определяются u^y и u^t,

$u^{p} \equiv (u^x)^y \equiv u^{xy}$, смысл u^{pp}, u^{pt} и др. очевиден;

$$\hat{u}\,(x,\ y,\ t) \equiv u\,(x,\ y,\ t+\tau),\ \overset{\tau}{u}\,(x,\ y,\ t) = u\left(x,\ y,\ t + \frac{\tau}{2}\right).$$

Скалярные произведения и сеточные нормы.

$$(u,\ v)^x = h \sum_{m=1}^{M-1} u\,(x_m,\ y_j,\ t_n)\,v\,(x_m,\ y_j,\ t_n) \equiv h \sum_{m=1}^{M-1} uv$$

(в последней сумме не отмечена зависимость от j и n)

$$[u,\ v)^x = h \sum_{m=0}^{M-1} uv;\ [u,\ v]^x = h \sum_{m=0}^{M} uv;\ \langle u,\ v)^x = \{[u,\ v)^x + (u,\ v)^x\}/2.$$

Таким образом, вид скобки определяет с каким коэффициентом входит в сумму значение uv в граничном узле (означает, что uv в левом граничном узле не входит в сумму, [означает, что uv в левом граничном узле входит с коэффициентом 1, < означает, что uv в левом граничном узле входит с коэффициентом 1/2. Аналогичный смысл имеют правые скобки; $[[u,\ v]^x]^y = h^2 \sum\limits_{j=0}^{J} \sum\limits_{m=0}^{M} uv$. По аналогии ясен смысл $([u,\ v\rangle^x]^y$, $[\langle u,\ v)^x]^y$ и др. Последние выражения суть скалярные произведения на сетке. Если значки x и y опущены, значит внутренние скобки указывают пределы суммирования по x, а внешние—по y; например, $[[u,\ v]] \equiv [[u,\ v]^x]^y$; $[[u]] \equiv ([[u,\ u]])^{1/2}$, аналогично определяются $](u\rangle)$, $(\langle u]]$ и др. Последние выражения суть нормы на некоторых сетках. В заключение отметим формулу суммирования по частям: $[u_x,\ v) = uv\Big|_0^M - (u,\ v_{\bar{x}}]$.

§ 1. Дифференциальное и разностное уравнения

Требуется решить уравнение в $\square$ при $0<t\leqslant T$

$$L\psi\equiv-\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta^2\psi+\frac{\partial}{\partial x}(a\Delta\psi)-\frac{\partial}{\partial y}(b\Delta\psi)=f, \tag{1.1}$$

где $\psi(x, y, t)$—искомая, а f—заданная функция, $a=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $b=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, при условиях

$$\psi\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0 \text{ при } 0<t\leqslant T \tag{1.2}$$

и $$\psi|_{t=0}=0.$$

Ввиду наличия угловых точек у $\square$ нет основания ожидать, что ψ будет гладкой функцией x и y даже при сколь угодно гладких $f(x, y, t)$. Примем поэтому, что у ψ ограничена норма $[[\psi]]$, где

$$[[\psi]]\equiv\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{7/3}+\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\|+\|\psi\|_4. \tag{1.3}$$

Основания для этого допущения приведены в приложении. Примем, кроме того, что a и b—известные функции, т. е. будем решать линеаризованные уравнения Навье-Стокса.

Для решения задачи (1.1)—(1.2) Том [1] предложил следующую разностную схему. Найти $v(x_m, y_l, t_n)$, удовлетворяющее

а) алгебраической системе в $\square_h$ при t_n, соответствующих $n=0, 1,\cdots, N-1$:

$$L_h v\equiv-\Delta_h v_t+\Delta_h^2 v+(a\Delta_h v)_{\hat{x}}-(b\Delta_h v)_{\hat{y}}=\overset{\tau}{f}{}^{ppt}, \tag{1.1'}$$

б) „граничным условиям“

$$v\Big|_{\Gamma_h}=0,\quad \frac{v(\omega_+)-v(\omega_-)}{2h}\Big|_{\gamma}=0 \tag{1.2'}$$

при t_n, соответствующих $n=1, 2,\cdots, N$,

в) условию $v|_{t_0}=0$ в Ω_h. (Отметим, что приведенная схема несущественно отличается от схемы в [1]).

Из приведенной системы определяются v для последовательных значений t_n. Действительно, начальное значение $v|_{t_0}=0$ в Ω_h известно. Пусть теперь нам известно v при t_n и всех $(x_m, y_l)\in\Omega_h$. Тогда в (1.1′) определены операторы $\Delta_h^2 v$, $(a\Delta_h v)_{\hat{x}}$, $(b\Delta_h v)_{\hat{y}}$, так как они используют лишь значения v в точках Ω_h. Из (1.1′) определяется $\Delta_h v_t\equiv\tau^{-1}(\Delta_h\hat{v}-\Delta_h v)$ в $\square_h$ и, так как второе слагаемое известно, то определяется и $\Delta_h\hat{v}$. Используя „граничное условие“ $\hat{v}|_{\Gamma_h}=0$, мы можем обратить оператор $\Delta_h\hat{v}$ и найти $\hat{v}$ в $\square_h\cup\Gamma_h$. Из второго „граничного условия“ найдется $\hat{v}(\omega_-)$, т. е. мы найдем $\hat{v}$ во всем Ω_h.

Для простоты изложения, положим пока $a=0$, $b=0$. В § 8 мы изучим влияние отброшенных членов.

§ 2. Уравнение для невязки

При доказательстве сходимости разностной схемы обычно пользуются тем, что решение ψ уравнения (1.1) приближенно удовлетворяет разностным уравнениям. Мы также покажем нечто подобное. Продолжим ψ по x, y и t с сохранением нормы (1.3) на все значения x, y и t. Осредним (1.1) два раза по ρ и раз по t в узлах $\square_h$. Используем известные легко проверяемые соотношения:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^{xx} = \psi_{x\bar{x}} = \frac{\partial^2\psi^{xx}}{\partial x^2}; \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^t \Bigg|_{t=t_n+\frac{\tau}{2}} = \psi_t\big|_{t=t_n}. \tag{2.1}$$

Из (1.1) получим равенство

$$-(\psi^{yy}_{x\bar{x}t} + \psi^{xx}_{y\bar{y}t}) + \Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt}_{x\bar{x}} + \Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{xxt}_{y\bar{y}} = \overset{\tau}{f}{}^{\rho\rho t} \quad B\square_h,$$

которое за счет прибавления и вычитания соответствующих разностных отношений от $\psi^{\rho\rho t}$ можно привести к виду

$$-(\psi^{\rho\rho t}_{x\bar{x}t} + \psi^{\rho\rho t}_{y\bar{y}t}) + \Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{x\bar{x}} + \Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{y\bar{y}} \equiv -\Delta_h\psi^{\rho\rho t}_t + \Delta_h^2\psi^{\rho\rho t} = \overset{\tau}{f}{}^{\rho\rho t} - H,$$

дэ невязка H равна

$$H = (\psi^{\rho\rho t} - \psi^{yy})_{x\bar{x}t} + (\psi^{\rho\rho t} - \psi^{xx})_{y\bar{y}t} +$$

$$+ (\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt}_{x\bar{x}} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{x\bar{x}}) + (\Delta\overset{\tau}{\psi}{}^{xxt}_{y\bar{y}} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t}_{y\bar{y}}). \tag{2.2}$$

Теперь видно, что $\psi^{\rho\rho t}$ почти удовлетворяет (1.1′), так как все члены H малы. Составим уравнение для $\theta \equiv v(x_m, y_j, t_n) - \psi^{\rho\rho t}\big|_{x=x_m,\, y=y_j,\, t=t_n}$

$$-\Delta_h\theta_t + \Delta_h^2\theta = H \text{ в } \square_h \text{ и для } t_n \text{ при } n=0, 1, \cdots, N-1. \tag{2.3}$$

Хочется воспользоваться обычной техникой доказательства сходимости схем для параболических уравнений [3], стр. 263: умножить (2.3) на θ, просуммировать такие произведения по x, y, t и далее „интегрированием“ (точнее суммированием) по частям получить слева квадрат некоторой нормы θ. Однако вследствие правила продолжения ψ с сохранением нормы $\|\ \|_1$ $\psi^{\rho\rho t}$, а тем самым и θ, будет удовлетворять граничным условиям (1.2) лишь приближенно. Это не дает возможности при суммировании по частям избавиться от членов, вылезающих на границе. Поэтому постараемся построить функцию Φ, которая была бы мала и чтобы $\theta + \Phi \equiv w$ уже удовлетворяла бы граничным условиям. Для этого Φ должна удовлетворять условиям

$$\Phi\Big|_{\Gamma_h} = \psi^{\rho\rho t}\Big|_{\Gamma_h}, \quad \frac{\Phi(\omega_+) - \Phi(\omega_-)}{2h}\Bigg|_{\gamma} = \frac{\psi^{\rho\rho t}(\omega_+) - \psi^{\rho\rho t}(\omega_-)}{2h}\Bigg|_{\gamma}. \tag{2.4}$$

Прибавив к обеим частям (2.3) выражение $-\Delta_h\Phi_t+\Delta_h^2\Phi$, получим уравнение для w в F:

$$L_h w \equiv -\Delta_h w_t+\Delta_h^2 w=F, \tag{2.5}$$

где $F=F_1+F_2+F_3+F_4$,

$$F_1=(\psi^{\rho\rho t}-\psi^{yy}-\Phi)_{x\bar{x}t},\quad F_2=(\psi^{\rho\rho t}-\psi^{xx}-\Phi)_{y\bar{y}t},$$

$$F_3=(\Delta\psi^{yyt}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}+\Delta_h\Phi)_{x\bar{x}},\quad F_4=(\Delta\psi^{xxt}-\Delta_h\psi^{\rho\rho t}+\Delta_h\Phi)_{y\bar{y}}.$$

С помощью этого уравнения в последующем получим нужные оценки. Как выяснится в следующих параграфах, нам не удается построить описанную функцию Ф, удовлетворяющую (2.4), однако мы построим Ф, удовлетворяющую (2.4) везде, кроме 4-х точек. Это оказывается достаточным для оценок.

§ 3. Вспомогательные неравенства

Прежде чем приступить к построению Ф, приведем ряд неравенств, широко используемых в последующем.

1. Неравенства, связанные с осреднениями. Нам понадобится оценивать скорость стремления осредненных функций к исходной. Впредь будем считать, что функции распространены финитным образом на всю плоскость с сохранением нужных норм и под $\|\ \|_k$, если не оговорено противное, будем понимать норму по всей плоскости x, y.

а) Рассмотрим функцию $u(x)$ одной переменной. Интуитивно ясно, что осредненная функция u^x будет стремиться к u при $h\to 0$ со скоростью $O(h^2)$. Докажем этот факт. Проведем характерную для последующего выкладку. Составим разность

$$u^x(x)-u(x)=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\,[u(x+\zeta)-u(x)]=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_0^{\zeta}\frac{\partial u}{\partial\eta}(x+\eta)\,d\eta. \tag{3.1}$$

Заметим, что если бы подынтегральная функция в последнем интеграле была постоянной, то интеграл равнялся бы нулю. Значит к подынтегральной функции можно прибавить любую функцию, не зависящую от η и ζ. Тогда

$$u^x(x)-u(x)=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_0^{\zeta}d\eta\left[\frac{\partial u}{\partial\eta}(x+\eta)-\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right]$$ и отсюда получим

$$u^x(x)-u(x)=h^{-1}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_0^{\zeta}d\eta\int_0^{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+t)\,dt. \tag{3.2}$$

Легко заметить, что аргумент функции $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+t)$ не выходит за пределы $(x-\mathrm{h},\ x+\mathrm{h})$. Расширим пределы внутреннего интеграла до $-\mathrm{h},\ \mathrm{h}$, получим оценку:

$$|u^x-u|\ll\frac{h^2}{h}\int\limits_{-\mathrm{h}}^{\mathrm{h}}\left|\frac{\partial^2 u(x+t)}{\partial t^2}\right|dt.$$

Отсюда следует

$$|u^x-u|^2\ll h^3\int\limits_{-\mathrm{h}}^{\mathrm{h}}dt\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+t)\right)^2. \tag{3.3}$$

Складывая такие неравенства, написанные для всех x_m, получим

$$h\sum_{m=0}^{M}|u^x-u|^2\ll h^4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx. \tag{3.3'}$$

Прием получения тождества типа (3.2) и неравенств типа (3.3) и (3.3′) из (3.2) будет применяться без подробного объяснения, однако тождества типа (3.2) всегда будут выписаны, и их легко проверить, вычислив интегралы в правой части равенства.

Следствием (3.3′) является неравенство для $z(x,\ y)$, заданного при $|x|,\ |y|<\infty$

$$[[(z^y)^x-(z^y)]]^2\ll h^5\sum_{j=0}^{J}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\left(\frac{\partial^2 z^y}{\partial x^2}(x,\ y_j)\right)^2\ll h^4\|z\|_2^2. \tag{3.4}$$

Элементарно получается отсюда неравенство

$$[[(z^y)^{xx}-(z^y)]]\ll[[(z^x)^{yx}-(z^x)^y]]+[[z^{yx}-z^y]]\ll$$
$$\ll h^2\|z^x\|_2+h^2\|z\|_2\ll h^2\|z\|_2. \tag{3.4'}$$

Как следствие последнего неравенства при $z=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, помня, что $z^{xx}=$ $=u_{x\bar{x}}$, получим $\left[\left[u^y_{x\bar{x}}-\dfrac{\partial^2 u^y}{\partial x^2}\right]\right]\ll h^2\|u\|_4$ и

$$[[\Delta_h u^p-\Delta u^p]]\ll h^2\|u\|_4. \tag{3.5}$$

II. Неравенства, связанные с оператором $\Delta_h u$. а) Во-первых, отметим аналог теоремы об эквивалентности норм $\|\Delta u\|_{L_2^0}$ и $\|u\|_{L_2^2}$. Если $u|_{\Gamma_h}=0$, то имеет место эквивалентность

$$((\Delta_h u))^2\sim((u_{x\bar{x}}))^2+((u_{y\bar{y}}))^2+2\,[[u_{xy}))^2. \tag{3.6}$$

б) Пусть $\Delta_h^{-1}q$ обозначает решение p уравнения $\Delta_h p=q$ в $\square_h$, $p|_{\Gamma_h}=0$. Тогда при произвольном u и F имеет место неравенство $|((u_{x\bar{x}},\ \Delta_h^{-1}F_{\bar{x}}))|\ll h^{-2}([u])^2+([F))^2$. Действительно, обозначим $\Delta_h^{-1}F_{\bar{x}}=$ $=\nu$, тогда $\Delta_h\nu=F_{\bar{x}}$ в $\square_h$. Умножив последнее равенство на ν и суммируя по частям, получим неравенство: $([\nu_x))^2+[(\nu_y))^2 \ll ([F))^2$. Отсюда следует, что $|((u_{x\bar{x}}, \nu))|=|([u_x, \nu_x))| \ll h^{-2}([u])^2+([F))^2$. Так же оценится $((u_{y\bar{y}}, \nu))$, значит имеет место неравенство

$$|((u_{y\bar{y}}, \Delta_h^{-1} F_{\bar{x}}))| + |((u_{x\bar{x}}, \Delta_h^{-1} F_{\bar{x}}))| \ll h^{-2} \{[(u)]^2+([u])^2\} + ([F))^2. \quad (3.8)$$

III. Неравенства, связывающие свойства периодических функций и коэффициентов их рядов Фурье.

Пусть дана функция дискретного аргумента x_m и непрерывного — y, равная нулю при $|y|>\pi$ и периодическая по x с периодом 2π. Обозначим ее $u(x_m, y)$, и будем считать для простоты, что π/h есть целое число K. Обозначим $S(u)=h\sum\limits_m \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^2(x_m, y)\,dy$. Здесь сумма по m берется по x_m в пределах одного периода. Представим $u(x_m, y)$ в виде тригонометрического полинома: $u(x_m, y)=\sum\limits_k e^{ikx_m} a_k(y)$ (в таких разложениях целое число k всегда меняется в пределах $-K<k\leqslant K$). Пусть $u=z^{xx}$. Тогда имеют место неравенства

$$\sum_k k^4 \int_{-\pi}^{\pi} |a_k^2(y)|\,dy \ll \|z\|_2^2, \quad (3.9)$$

$$\sum_k k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial a_k}{\partial y}\right|^2 dy \ll \|z\|_2^2, \quad (3.10)$$

$$\sum_k \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^2 a_k}{\partial y^2}\right|^2 dy \ll \|z\|_2^2. \quad (3.11)$$

Действительно, $u_{x\bar{x}}=-\sum e^{ikx} S_k^2 a_k(y)$ $\left(\text{где впредь } S_k=\dfrac{\sin kh/2}{h/2}\right)$, а $u_x=i\sum\limits_k e^{ikx} e^{ikh/2} S_k a_k(y)$. Из равенства Бесселя следует:

$$\|z\|_2^2 \gg S\,(u_{x\bar{x}}) \sim \sum_k S_k^4 \int_{-\pi}^{\pi} |a_k^2|\,dy \sim \sum_k k^4 \int_{-\pi}^{\pi} |a_k^2|\,dy, \text{ т. е. (3.9)},$$

$$\|z\|_2^2 \gg S\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \sim \sum_k S_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial a_k}{\partial y}\right|^2 \sim \sum_k k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial a_k}{\partial y}\right|^2, \text{ т. е. (3.10)}.$$

Неравенство (3.11) очевидно.

IV. Дискретные неравенства типа теорем вложения. а) Часто будет использоваться сеточное неравенство [4]:

$$u^2|_{m=0,\, j=0} \ll \ln h^{-1} \{[[u_x))^2+[[u_y))^2+[[u))^2\}. \quad (3.11')$$

б) Отметим дискретные аналоги неравенств ([5], стр. 243)

$$\iint u^2 r dr d\varphi / r^{4-\alpha} \ll \iint (\nabla u)^2 r dr d\varphi / r^{2-\alpha} \ll \|u\|_2^2 \tag{3.12}$$

для финитных функций, равных нулю на некотором луче $\varphi=\text{const}$, где φ и r—полярные координаты.

Пусть сеточная функция равна нулю при $x_0=0$. Тогда

$$h^2 \sum_{m=0} \sum_{j=m} \frac{u^2(x_m, y_j)}{(r+h)^{4-\alpha}} \ll h^2 \left\{ \sum_{m=1} \sum_{j=m} u_{\bar{x}}^2/(r+h)^{2-\alpha} + \sum_{m=0} \sum_{j=m} u_y^2/(r+h)^{2-\alpha} \ll \right.$$

$$\ll h^2 \left\{ \sum_{m=1} \sum_{j=m} u_{\bar{x}y}^2 + \sum_{m=1} \sum_{j=m+1} u_{x\bar{x}}^2 + \sum_{m=0} \sum_{j=m+1} u_{y\bar{y}}^2 + \sum_{m=0} \sum_{j=m} u^2 \right\}. \tag{3.13}$$

Верхние пределы в суммах здесь по индексу m до M, по j—до J. Первое неравенство из (3.13) доказывается с помощью линейного в треугольниках и непрерывного восполнения u (см. [6]) и применения к нему первого из неравенств (3.12). При этом интегралы в (3.12) $\iint \frac{u_x^2+u_y^2}{r^{2-\alpha}} d\theta r dr$ вычислятся, и это даст первый знак неравенства в (3.13). К полученному члену снова нужно применить изложенный прием и использовать правую часть неравенства (3.12). При этом получим правую часть (3.13).

V. Неравенства для норм по малым областям. Будут использоваться неравенства:

$$\text{а)} \int_0^h u^2(x)\, dx \ll h^{1-\alpha} \|u\|_{1/2}^2, \tag{3.14}$$

являющееся следствием неравенства (1), см. [7], стр. 41;

$$\text{б)} \int \left(\int_0^h r dr u^2 \right) d\varphi \ll h^2 \ln h^{-1} \|u\|_1^2 \ll h^{2-\alpha} \|u\|_1^2, \tag{3.15}$$

которое получается из неравенства

$$u^2(r, \varphi) \ll \ln \frac{1}{r} \int_r^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 \rho d\rho + \int_0^1 u^2 d\rho.$$

§ 4. Снятие граничных условий с прямой линии

Сначала научимся строить функцию, снимающую граничные условия с прямой линии. Построенная функция будет использована в дальнейшем для конструирования функции Φ.

Пусть дана функция $\vartheta(x, y)$, периодическая по x с периодом 2π и равная нулю при $|y| \geqslant \pi$. Пусть

$$\vartheta(x, 0) = \frac{\partial \vartheta(x, 0)}{\partial y} = 0. \qquad (4.1)$$

Построим функцию $\chi(x_m, y_j)$ такую, что

$$\chi(x_m, 0) = \vartheta^{pp}(x_m, 0), \frac{\chi(x_m, h) - \chi(x_m, -h)}{2h} = \frac{\vartheta^{pp}(x_m, h) - \vartheta^{pp}(x_m, -h)}{2h} \qquad (4.2)$$

и чтобы ее норма была мала. Для этой цели подчиним χ условию, чтобы она была ограничена при $j=1, 2, \cdots, \infty$ при всех x_m, и чтобы $\Delta_h^2 \chi = 0$. Ищем решение последнего уравнения в виде $\chi = \sum_k p^{(k)}(y_j)\, e^{ikx_m}$ и для $p^{(k)}(y_j) \equiv p^{(k)}$ получаем уравнение

$$p^{(k)}_{yy\bar{y}\bar{y}} - 2S_k^2 p^{(k)}_{y\bar{y}} + S_k^4 p^{(k)} = 0.$$

Возьмем решение $p_j^{(k)} = (C_k + E_k y_j)\, q_k^j$ при $j = -1, 0, \cdots, \infty$, $q_k = 1 + \frac{\mu_k^2}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{\mu_k^2}{2}\right)^2 - 1}$, а $\mu_k = 2 \sin \frac{kh}{2}$. Константы C_k и E_k определяются из граничных условий

$$\sum_k C_k e^{ikx_m} = \vartheta^{pp}(x_m, 0); \sum_k \{C_k(q_k - q_k^{-1}) + E_k h (q_k + q_k^{-1})\} \frac{e^{ikx_m}}{h} = $$
$$= \vartheta^{pp}_{\overset{\circ}{y}}(x_m, 0). \qquad (4.3)$$

Лемма 4.1. *При $A=2\pi$, $B=\pi$ имеет место оценка* $[[\chi_{x\bar{x}}]] \ll \ll h^2 \|\vartheta\|_4$.

Доказательство. Из равенства Бесселя следует

$$[[\chi_{x\bar{x}}]]^2 \ll \sum_k S_k^4 \left(h \sum_{j=0}^{\infty} |p_j^{(k)}|^2 \right) \ll \sum_k k^4 \left\{ |C_k|^2 \left(h \sum_{j=0}^{\infty} (q_k^j)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + |E_k|^2 \left(h \sum_{j=0}^{\infty} (jh)^2 q_k^{2j} \right)\right\} \ll \sum_k |C_k|^2 (|k|^3 + 1) + |E_k|^2 (|k| + 1).$$

При получении последнего знака неравенства использовались оценки: $h \sum_{j=0}^{\infty} q_k^{2j} \ll \frac{h}{1 - q_k^2} \sim \frac{1}{|k| + 1}$ (последнее следует из определения q_k) и

$$h^3 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 q_k^{2j} \sim h^3 q_k^2 \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)\, q_k^{2(j-1)} \ll \frac{h^3}{(1 - q_k)^3} \ll \frac{1}{|k|^3 + 1}.$$

Оценим теперь $\sum_k |C_k|^2 (|k|^3 + 1)$, помня, что C_k — коэффициенты Фурье $\vartheta^{pp}(x, 0)$. Пусть $\vartheta^{xx} = \sum_k b_k(y)\, e^{ikx}$. Так как $b_k(0) = \frac{\partial b_k(0)}{\partial y} = 0$ по (4.1), то

$$C_k = h^{-2} \int_{-h}^{h} d\zeta \int_{-h}^{h} d\eta \int_{0}^{\zeta+\eta} dp \int_{0}^{p} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}\, dt.$$

Отсюда следует, что

$$|C_k|^2 \ll h^4 \max_{|y|<2h} \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 \ll h^4 \int_{y^*}^{\pi} \frac{\partial}{\partial y}\left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 dy \ll h^4 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 dy \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

где y^*—значение, при котором реализуется упомянутый максимум.

Следовательно

$$\sum_k |C_k|^2 (|k|^2+1) \ll \left(\sum_k (|k|^2+1) \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_k (k^4+1) \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 \right) \ll h^4 \|\theta\|_4^2$$

$\left(\text{сравни с (3.9) и (3.10) при } a_k = \frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right)$. Теперь оценим $\sum\limits_k |E_k|^2 (|k|+1)$. Из (4.3) следует, что $|E_k|^2 \ll |C_k|^2 k^2 + |(b_k^{yy}(h) - b_k^{yy}(-h))/2h|^2$ (здесь использована эквивалентность $q_k - q_k^{-1} \sim \mu_k$). Из представления

$$G_k = \frac{b_k^{yy}(h) - b_k^{yy}(-h)}{2h} = \frac{h^{-3}}{2} \int_{-h}^{h} d\zeta \int_{-h}^{h} d\eta \int_{-h}^{h} dp \int_{0}^{p+\zeta+\eta} dt \int_{0}^{t} \frac{\partial^3 b_k(\nu)}{\partial \nu^3}\, d\nu \tag{4.4}$$

следует, что

$$|G_k|^2 \ll h^4 \max_{|y|<2h} \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 \ll h^4 \left(\int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial^4 b_k}{\partial y^4}\right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$\sum_k |E_k|^2 (|k|+1) \ll \sum_k |C_k|^2 (|k|^2+1) +$$

$$+ h^4 \sum_k \left((k^2+1) \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^3 b_k}{\partial y^3}\right|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\frac{\partial^4 b_k}{\partial y^4}\right|^2 \right) \ll h^4 \|\theta\|^2.$$

Лемма доказана. Оценки $[[\chi_{y\bar{y}}]]$ и $[[\chi_{xy}))$ сводятся к оценкам тех же $\sum\limits_k |C_k|^2 (|k|^2+1)$ и $\sum\limits_k |E_k|^2 (|k|+1)$, поэтому имеет место неравенство

$$[[\chi_{x\bar{x}}]] + [[\chi_{y\bar{y}}]] + [[\chi_{xy})) \ll h^2 \|\theta\|_4 \tag{4.5}$$

Отметим еще оценку, получающуюся аналогичным образом:

$$[[\chi, \chi]] \ll \sum_k \frac{|C_k|^2}{|k|+1} + \frac{|E_k|^2}{|k|^2+1} \ll \sum_k |C_k|^2 + |G_k|^2 \ll h^{4-\alpha} \|\theta\|_{7/2}^2. \tag{4.6}$$

Последнее неравенство получается использованием неравенства

$$\sum_k |G_k|^2 \ll h^2 \sum_k \int_{-2h}^{2h} dy \left|\frac{\partial^2 b_k}{\partial y^2}\right|^2 \ll h^4 \sum_m \int_{-2h}^{2h} dy \left|\frac{\partial^2 \vartheta^{xx}(x_m, y)}{\partial y^2}\right|^2 \ll h^{4-\alpha} \|\vartheta\|^2_{l_2},$$

где последний знак неравенства получен с помощью (3.14), а предпоследний—с помощью равенства Парсеваля.

На первый взгляд неравенство (4.6) получено за счет большого огрубления. Однако мы не знаем, как использовать наличие $|k|$ в знаменателе.

§ 5. Снятие граничных условий со сторон прямоугольника

Построим функцию Φ, снимающую граничные условия со сторон прямого угла $x>0$, $y>0$. Пусть дана функция ϑ^{pp}, равная нулю вне круга $x^2+y^2 \geqslant \varepsilon^2$. Возьмем χ, построенную в предыдущем параграфе (ϑ^{pp} удовлетворяет требованиям периодичности, так как она может быть периодически продолжена по x).

Возьмем еще χ', которая снимает граничные условия у ϑ^{pp} на линии $x=0$. Рассмотрим функцию $\Phi=(1-\zeta)\chi+\zeta\chi'$, где $\zeta(y/x)$ в первом квадранте такая, что $\zeta(y/x)=0$ при $y/x\leqslant 1$ и при $x=y=0$, $\zeta(y/x)=1$ при $y/x>2$, и ζ—гладкая функция своего аргумента, Во втором квадранте $\zeta=1$, а в четвертом — $\zeta=0$.

Лемма. 5.1. *Имеет место оценка* $[[\Phi_{x\bar{x}}]] \ll h^{2-\alpha}\|\vartheta\|_4$.

Доказательство. Будем исходить из равенства

$$\Phi_{x\bar{x}} = \zeta\chi'_{x\bar{x}} + (1-\zeta)\chi_{x\bar{x}} + \zeta_x(\chi'-\chi)_x + \zeta_{\bar{x}}(\chi'-\chi)_{\bar{x}} + (\chi'-\chi)\zeta_{x\bar{x}}$$

и из легко проверяемых оценок

$$|\zeta_{\bar{x}}| \ll \frac{1}{r+h}, \quad |\zeta_{x\bar{x}}| \ll \frac{1}{(r+h)^2}, \text{ где } r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Тогда

$$\sum_{m=0}\sum_{l=-m}(\chi'-\chi)^2|\zeta_{x\bar{x}}|^2 \ll \frac{1}{h^\alpha}\sum_{m=0}\sum_{l=m}(\chi'-\chi)^2/(r+h)^{4-\alpha} \ll$$

$$\ll \frac{1}{h^\alpha}\{[[(\chi'-\chi)_{x\bar{x}}]]^2 + [[(\chi'-\chi)_{xy})^2 + [[(\chi'-\chi)_{y\bar{y}}]]^2 + [[\chi'-\chi]]^2\} \ll h^{4-\alpha}\|\vartheta\|^2_4.$$

Аналогично оцениваются остальные члены. Лемма доказана. Так же как в лемме 5.1 устанавливаются оценки $[[\Phi_{y\bar{y}}]]$ и $[[\Phi_{xy}))$.

Теперь, используя разложение единицы, можно представить φ^{pp} как сумму функций типа ϑ^{pp}, не равных нулю лишь в окрестности каждого угла или на частях сторон прямоугольника, не включающих углы. Для каждой такой функции мы доказали возможность снятия граничных условий. В результате мы построим функцию Φ, удовлетворяющую неравенствам

$$[[\Phi_{x\bar{x}}]]^2+[[\Phi_{y\bar{y}}]]^2+[[\Phi_{xy}))^2+[[\Phi]]^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi^t\|_3^2;\ [[\Phi]]^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi^t\|_{7/2}^2 \tag{5.1}$$

и неравенству, являющемуся следствием определения функции и второго неравенства (5.1)

$$[[\Phi_{t_l}]]^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|_{7/2,\,t}^2. \tag{5.2}$$

Однако построенная таким образом функция Φ не удовлетворяет граничному условию (2.4) б) при $m=0$, $j=1$ и в соответственно расположенных точках прямоугольника. Действительно, используя значения ζ получим

$$\frac{[\Phi(h,h)-\Phi(-h,h)]-[\psi^{ppt}(h,h)-\psi^{ppt}(-h,h)]}{2h}=\frac{\chi(h,h)-\chi'(h,h)}{2h}.$$

Интересно оценить, с какой же точностью выполняется граничное условие в этих 4-х точках, впредь именуемых особыми? Оценим $w_{\hat{x}}|_{m=0,\,j=1}$

$$w_{\hat{x}}=\frac{\chi(h,h)-\chi'(h,h)}{2h}=\frac{1}{2}\chi_y(h,0)-\frac{1}{2}\chi_x^t(0,h)+$$

$$+\frac{\psi^{ppt}(h,0)-\psi^{ppt}(0,h)}{2h}.$$

Для $\frac{1}{2h}\psi^{ppt}(h,0)$, при использовании очевидного равенства $\psi^{yyt}(0,0)=0$, имеем

$$\frac{1}{2h}\psi^{ppt}(h,0)=\frac{1}{2h}(\psi^{ppt}(h,0)-\psi^{yyt}(h,0))+\frac{1}{2}\psi_x^{yyt}(0,0)=$$

$$=\frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_{-h}^{h}d\eta\int_{0}^{\zeta+\eta}dt\int_{0}^{t}d\nu\left(\frac{\partial^2\psi^{xxt}(h,\nu)}{\partial\nu^2}-\frac{\partial^2\psi^t(h,\nu)}{\partial\nu^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}d\zeta\int_{-h}^{h}d\eta\int_{0}^{\zeta+\eta}dt\int_{0}^{t}\frac{\partial^2\psi_{\bar{x}}^t(0,\nu)}{\partial\nu^2}d\nu.$$

Из этого равенства следует, что

$$\left[\frac{\psi^{ppt}(h,0)}{2h}\right]^2 \ll h\int_{-h}^{h}\left|\frac{\partial^2\psi^{xxt}}{\partial\nu^2}(h,\nu)-\frac{\partial^2\psi^t}{\partial\nu^2}(h,\nu)\right|^2 d\nu+h^3\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^2\psi_x^t}{\partial\nu^2}(0,\nu)\right)^2 d\nu \ll$$

$$\ll h^3\int_{-h}^{h}dy\int_{-h}^{h}d\zeta\left|\frac{\partial^3\psi^t(h+\zeta,y)}{\partial y^2\,\partial\zeta}\right|^2+h^3\int_{0}^{h}dx\int_{-h}^{h}dy\left(\frac{\partial^3\psi^t}{\partial y^2\partial x}\right)^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|_3^2$$

(здесь использовано неравенство (3.15)).

Аналогично оценивается $\frac{1}{2h}\psi^{ppt}(0,h)$. Используя еще (3.11′), получим оценку $\chi_y(h,0)$:

$$|\chi_y(h,0)| \ll \ln h^{-1} \{[(\chi_{xy}))^2 + [(\chi_{y\bar{y}}))^2 + [(\chi_y))^2\} \ll h^{4-\alpha} \|\psi\|^2_4 ,$$

и такую же оценку для $\chi_x(0, h)$. Следовательно, имеет место оценка

$$|w_{\hat{x}}|^2 \ll h^{4-\alpha} \|\psi\|^2_4 . \tag{5.3}$$

§ 6. Оценка квадратичной формы $((L_h w, \hat{w}))$

Будем доказывать сходимость схемы при обычном предположении, что $\tau = \varepsilon h^2$. Умножим (2.5) на $\hat{w}$ и просуммируем по всей области $\square_h$. Оценим левую часть снизу, а правую сверху. Займемся оценкой $((L_h w, \hat{w}))$ снизу. Исходим из равенства $((L_h w, \hat{w})) = ((-\Delta_h w_t, \hat{w})) + ((\Delta_h^2 w, \hat{w}))$. Вначале оценим $((\Delta_h w_t, \hat{w}))$.

I) Оценка $((\Delta_h w_t, \hat{w}))$. Просуммировав по частям, получим

$$((\Delta_h w_t, \hat{w})) = -\frac{((\Delta_h \hat{w}, \hat{w})) - ((\Delta_h w, \hat{w}))}{\tau} \geqslant \{([\hat{w}_x))^2 + [(\hat{w}_y))^2 -$$

$$-([w_x))^2 - [(w_y))^2\}/2\tau.$$

Здесь использованы соотношения типа

$$((w_{x\bar{x}}, \hat{w})) = ([w_x, \hat{w}_x)) \leqslant \{([\hat{w}_x))^2 + ([w_x))^2\}/2.$$

II) Оценка $((\Delta_h^2 w, \hat{w}))$. Будем исходить из равенства $\hat{w} = w + \tau\Delta_h^{-1}\Delta_h^2 w - \tau\Delta_h^{-1} F$. Тогда

$$((\Delta_h^2 w, \hat{w})) = ((\Delta_h^2 w, w)) + \tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1}\Delta_h^2 w)) - \tau((\Delta_h^2 w, \Delta_h^{-1} F)).$$

Таким образом нужно оценить три члена, учитывая что $\tau = \varepsilon h^2$.

а) оценим $((\Delta_h^2 w, w))$, состоящий из двух слагаемых $((\Delta_h w_{x\bar{x}}, w))$ и $((\Delta_h w_{y\bar{y}}, w))$. Займемся более трудным—первым. Для любой функции Q (принимая во внимание условие $w|_{\Gamma_h} = 0$ и формулу суммирования по частям) имеем

$$((Q_{x\bar{x}}, w)) = -([Q_x, w_x)) = ((Q, w_{x\bar{x}}]) - (w_x, Q)^y|_{m=M} + (w_x, Q)^y|_{m=0}. \tag{6.1}$$

Учитывая, что везде при $m=0$ и M, кроме особых точек $w_x|_{m=0,M} = w_{\bar{x}}|_{m=0,M}$, т. е. $w_x|_{m=0,M} = \frac{h}{2} w_{x\bar{x}}|_{m=0,M}$, получим

$$((Q_{x\bar{x}}, w)) = (\langle Q, w_{x\bar{x}} \rangle) + R + \left(h w_x - \frac{h^2}{2} w_{x\bar{x}}\right) Q|_{l=1,\, m=0} , \tag{6.2}$$

где R—сумма таких же слагаемых, как последнее, но для прочих особых точек. На основании (5.3) получаем оценку при $Q = \Delta_h w$:

$$\left|\left(h w_x - \frac{h^2}{2} w_{x\bar{x}}\right) Q\right|_{m=0,\, l=1} \equiv |w_{\hat{x}} \cdot h \cdot \Delta_h w|_{m=0,\, j=1} \ll$$

$$\ll \varepsilon h^2 |\Delta_h w|^2_{m-0,\, j-1} + |w_{\hat{x}}|^2 \ll \varepsilon\, ([\Delta_h w])^2 + h^{4-\alpha} \|\psi\|_4^2 \tag{6.2'}$$

и аналогичную оценку для R.

Таким же приемом, однако учитывая, что здесь особых точек нет, получится

$$((Q_{y\bar{y}},\ w)) = \langle (Q,\ w_{y\bar{y}}) \rangle. \tag{6.3}$$

Теперь примем во внимание, что $w_{y\bar{y}}$ — нуль при $m=0$ и $m=M$ для $w \in \gamma$. Это позволяет прибавить к правой части (6.3) выражение $h\,(Q,\ w_{y\bar{y}})^y|_{m=0} + h\,(Q,\ w_{y\bar{y}})^y|_{m=M}$, а к правой части (6.2)—выражение $h\,(Q,\ w_{x\bar{x}})^x|_{j=0} + h\,(Q, w_{x\bar{x}})^x|_{j=J}$. Складывая после этого (6.2) и (6.3), получим с учетом (6.2′)

$$((\Delta_h Q,\ w)) \gg \frac{1}{4}([Q])^2 + \frac{1}{4}[(Q)]^2 - Ch^{4-\alpha} \|\psi\|_4^2, \text{ где } Q = \Delta_h w;$$

б) оценим

$$\tau((\Delta_h^2 w,\ \Delta_h^{-1} \Delta_h^2 w)) = \tau\,((\Delta_h Q,\ \Delta_h^{-1} Q_{x\bar{x}})) + \tau\,((\Delta_h Q,\ \Delta_h^{-1} Q_{y\bar{y}})), \tag{6.4}$$

используя (3.8) и условие $\tau = \varepsilon h^2$:

$$\tau\,((\Delta_h Q,\ (\Delta_h^{-1} Q_x)_{\bar{x}})) \ll \varepsilon\, \{[(Q)]^2 + ([Q])^2 + h^2\, ([Q_x))^2\} \ll$$

$$\ll \varepsilon\, \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\}, \text{ где } Q = \Delta_h w.$$

Точно также оценивается второе слагаемое правой части (6.4);

в) оценим, наконец, $((\Delta_h^2 w,\ \Delta_h^{-1} F))$. Проведем эту оценку лишь для слагаемых F_1 и F_3, так как для F_2 и F_4 она проводится также. Используя (3.8), получим как в предыдущем пункте:

$$\tau\,((\Delta_h^2 w,\ \Delta_h^{-1} F_1))| \ll \varepsilon\, \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\} + \varepsilon\, ([\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy} - \Phi_t])^2 \ll$$

$$\ll \varepsilon\, \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\} + h^{4-\alpha} \left(\|\psi_t\|^2_{7/2,\, t} + \left\| \frac{\partial \psi_t}{\partial t} \right\|^2_{2,\, t} + \|\psi\|^2 \right).$$

Здесь использованы неравенства

$$([\Phi_t])^2 \ll h^{4-\alpha} \|\psi_t\|^2_{7/2,\, t} \text{ и } ([\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy}])^2 \ll ([\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{\rho\rho}])^2 +$$

$$+ ([\psi_t^{\rho\rho} - \psi_t^{yy}])^2 \ll \tau^2 \left\| \frac{\partial \psi_t}{\partial t} \right\|^2_{2,\, t} + h^4 \|\psi_t\|^2_{2,\, t} \ll h^4 \left(\left\| \frac{\partial \psi_t}{\partial t} \right\|^2_{2,\, t} + \|\psi\|^2 \right),$$

см. (5.2). Таким же образом

$$\tau\,((\Delta_h^2 w,\ \Delta_h^{-1} F_3)) \ll \varepsilon\, \{[(Q)]^2 + ([Q])^2\} + \varepsilon\, ([\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{\rho\rho t} + \Delta_h \Phi])^2,$$

где последнее слагаемое оценится через

$$C\, \{([\Delta\, (\overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \psi^{yyt})])^2 + ([\Delta\psi^{yyt} - \Delta\psi^{\rho\rho t}])^2 + ([\Delta\psi^{\rho\rho t} - \Delta_h \psi^{\rho\rho t}])^2 +$$

$$+ ([\Delta_h \Phi])^2\} \ll \tau^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|^2_2 + h^4 \|\psi\|_4^2 + h^{4-\alpha} \|\psi\|_4^2 \ll h^{4-\alpha} \|\psi\|^2 \tag{6.5}$$

(второе слагаемое в правой части получено на основании (3.4), примененного к функции $\Delta\psi^{yt}$, третье слагаемое—на основании (3.5) и последнее—на основании (5.1)).

Таким образом, получена оценка

$$((L_h w, \hat{w})) \geqslant \frac{([\hat{w}_x))^2 + [(\hat{w}_y))^2}{2} + \frac{1-\varepsilon}{4}([w_{x\bar{x}}])^2 +$$

$$+ \frac{1-\varepsilon}{4}[(w_{y\bar{y}})]^2 - C h^{4-\alpha} \left(\|\psi\|^2 + \left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,t} + \|\psi_t^t\|^2_{F_{l_3},t}\right).$$

§ 7. Оценка формы $((F, \hat{w}))$

Вспомним, что мы получаем оценки скорости сходимости, исходя из равенства

$$((L_h\, w, \hat{w})) \equiv ((-\Delta_h\, w_t + \Delta_h^2\, w, \hat{w})) = ((F, \hat{w})).$$

Левую часть его мы оценили. Теперь оценим правую. Используем представление

$$((F, \hat{w})) = ((F, w)) + \tau\, ((F, \Delta_h^{-1}\, \Delta_h^2\, w)) - \tau\, ((F, \Delta_h^{-1} F))$$

и оценим отдельные его слагаемые.

а) Оценим $((F, w))$, помня, что $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$$((F_1, w)) = ((\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy} - \Phi_t, w_{x\bar{x}})),$$

так как при суммировании по частям или w, или $\psi_t^{\rho\rho t} - \psi_t^{yy} - \Phi_t$ равны нулю на границе. Отсюда

$$((F_1, w)) \ll \varepsilon\, ((w_{x\bar{x}}))^2 + h^{4-\alpha}\left(\|\psi\|^2_k + \|\psi_t^t\|^2_{F_{l_3},t} + \left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,t}\right)$$

(см. пункт в) в § 6).

Далее, на основании (6.2) получим оценку

$$|((F_3, w))| \ll (\langle \Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{\rho\rho t} + \Delta_h \Phi \rangle)^2 + \overline{R} + \varepsilon\, (\langle w_{x\bar{x}} \rangle)^2 +$$

$$+ \left(|w_{\hat{x}}|^2 + h^2 |\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\, \psi^{\rho\rho t} + \Delta_h\, \Phi|^2_{m=0,\, l=1}\right),$$

где $\overline{R}$—сумма таких же слагаемых, как последнее, но относящихся к остальным особым точкам. Используя теперь очевидное неравенство

$$h^2 |\Delta\, \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\, \psi^{\rho\rho t} + \Delta_h \Phi|^2 \ll ([\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h\, \psi^{\rho\rho t} + \Delta_h \Phi]),$$

получаем на основании (6.5) и (5.2)

$$|((F_3, w))| \ll \varepsilon\, (\langle w_{x\bar{x}} \rangle)^2 + h^{4-\alpha}\, \|\psi\|^2.$$

Остальные слагаемые $((F, w))$ оцениваются также.

б) Оценим характерный член $\tau\, ((F, \Delta_h^{-1}\, \Delta_h^2\, w))$, используя (3.8)

$$|\tau((F_3,\ \Delta_h^{-1}\ \Delta_h^2 w))| = |\tau((F_3,\ \Delta_h^{-1}(\Delta_h w_x)_{\bar{x}})) + \tau((F_3,\ \Delta_h^{-1}(\Delta_h w_y)_{\bar{y}}))| \ll$$

$$\ll \varepsilon([\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \overset{\tau}{\psi}{}^{ppt} + \Delta_h \Phi])^2 + \varepsilon[(\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{ppt} + \Delta_h \Phi)]^2 +$$
$$+ \varepsilon\{([\Delta_h w])^2 + [(\Delta_h w)]^2\}$$

(последнее слагаемое возникло при оценке $\tau([\Delta_h w_x))^2 + \tau[(\Delta_h w_y))^2$. Отсюда $|((F_3,\ \Delta_h^{-1}\ \Delta_h^2 w))| \ll \varepsilon[(\Delta_h w)]^2 + \varepsilon([\Delta_h w])^2 + h^{4-\alpha}\|\psi\|^2$.

в) Покажем, как оценивать $((F,\ \Delta_h^{-1} F))$ для одного из наборов F_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Используя (3.8), получим

$$\tau((F_3,\ \Delta_h^{-1} F_3)) \ll \varepsilon([\Delta \overset{\tau}{\psi}{}^{yyt} - \Delta_h \psi^{ppt} + \Delta_h \Phi])^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2.$$

Собирая оценки § 6 и § 7, получаем неравенство

$$\frac{1}{2\tau}\left\{([\hat{w}_x))^2 + [(\hat{w}_y))^2 - ([w_x))^2 - [(w_y))^2\right\} + \frac{1-\varepsilon}{4}\{([\Delta_h w])^2 + [(\Delta_h w)]^2\} \ll$$

$$\ll \varepsilon\{([w_{x\bar{x}}])^2 + [(w_{y\bar{y}})]^2\} + C\|\psi\|^2\ h^{4-\alpha} + C\|\psi_t\|^2_{7/2,\ t} + \left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\ t}. \tag{7.1}$$

Складывая такие неравенства по n, получим

$$\max_h\ \{([w_x))^2 + [(w_y))^2\} \leqslant C h^{4-\alpha}\, T\|\psi\|^2 + C h^{4-\alpha}\cdot\tau \sum_{n=1}^{N}\left(\|\psi_t\|^2_{7/2,\ t} + \left\|\frac{\partial \psi_t}{\partial t}\right\|^2_{2,\ t}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C h^{4-\alpha}\, T\|\psi\|^2 + C h^{4-\alpha}\left(\left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\|_{7/2} + \left\|\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right\|_2\right)^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2,$$

и точно так же

$$\tau\sum_{n=1}^{N}([\Delta_h w])^2 + [(\Delta_h w)]^2 \sim \tau\sum_{n=1}^{N}([w_{x\bar{x}}])^2 + [(w_{y\bar{y}})]^2 + [[w_{xy}))^2 \ll h^{4-\alpha}\|\psi\|^2$$

(здесь знак эквивалентности получен на основании (3.6)).

Итак, доказана требуемая сходимость.

§ 8. Влияние отброшенных членов

Пусть теперь $a \neq 0$, а $b = 0$ в (1.1′) (случай, когда и $a \neq 0$, и $b \neq 0$ рассматривается точно так же). Основная трудность оценок в том, что мы должны считать $a = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ обладающим лишь теми свойствами, которые следуют из ограниченности $\|\psi\|$, т. е. мы можем считать, что

$$\|a\|_3 + \left\|\frac{\partial a}{\partial t}\right\|_{5/2} + \left\|\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right\|_1 \leqslant E. \tag{8.1}$$

Вторая трудность оценок состоит в том, что если раньше мы пользовались перестановочностью операторов осреднения и дифференцирования, то при наличии переменных коэффициентов это невозможно. Установим предварительно несколько фактов об осреднении произведения некоторых функций $p(x, y)$ и $u(x, y)$, которые будем считать распространенными на всю плоскость. Обозначим через $|p|_k$ — норму в пространстве $C^{(k)}$ функции с непрерывной k-ой производной. Тогда очевидно, что

$$\text{а)}\quad [[pu]]^2 \ll |p|_0^2\, [[u]]^2; \qquad \text{б)}\quad [pu, pu]^x \ll |p|_0^2\, [u, u]^x;$$

$$\text{в)}\quad [[u_x]] \ll \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_0 \quad \text{и} \quad \text{г)}\quad [[u^y]]^2 \ll h \sum_{m=0}^{M} \int dy\, u^2\, (x_m, y);$$

$$\text{д)}\quad [[u^{xy}]]^2 \ll h \sum_{m=0}^{M} \int dy\, [u^x\ (x_m^2, y)]^2 \ll \|u\|_0^2 \cdot \tag{8.2}$$

Используя неравенство (8.2), а также неравенство (3.4), получим

$$[[(pu)^{xy} - pu^{xy}]]^2 \ll [[\ (pu)^x - pu]]^2 + [[\{(pu) - (pu^x)\}^y]]^2 +$$

$$+ [[(pu^x)^y - pu^x]]^2 + [[p\,(u - u^y)^x]]^2 \ll h \int dy \sum_m \{(pu)^x - pu\}^2|_{x=x_m} +$$

$$+ h \int dy \sum_m p^2\, (u - u^x)^2|_{x=x_m} + h^4\, h \sum_m \int dy \left(\frac{\partial^2 pu^x}{\partial y^2}\right)^2\Bigg|_{x=x_m} + |p|_0^2 \cdot h\, \times$$

$$\times \sum_l \int dx\, (u - u^y)^2|_{y=y_l} \ll$$

$$\ll h^4 \left\|\frac{\partial^2 pu}{\partial x^2}\right\|_0^2 + h^4 |p|_0^2 \cdot \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_0^2 + h^4 \cdot |p|_2^2\, \|u\|_2^2 + h^4 \cdot |p|_0^2 \cdot \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_0^2 \ll h^4\, |p|_2^2\, \|u\|_2^2 \tag{8.3}$$

(здесь каждое слагаемое в правой части является оценкой слагаемого с тем же порядковым номером в левой части).

Теперь приступим к оценкам. Какие изменения вносит наличие члена $\dfrac{\partial}{\partial x}(a\Delta\psi)$ в уравнении?

а) В операторе $L_h w$ появится слагаемое $(a\Delta_h w)_{\hat{x}}$, а в F — слагаемое $F_5 = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\, \overset{\tau}{a}\, \Delta\, \overset{\tau}{\psi}\right)^{pp'} - (a\Delta_h\, \psi^{pp'})_{\hat{x}} + (a\Delta_h \Phi^{pp'})_{\hat{x}}$. Тем самым в выражении $((L_h\, w, \hat{w}))$ появится слагаемое $(((a\Delta_h\, w)_{\hat{x}}, \hat{w})) =$
$= -\dfrac{1}{2}([a\Delta_h w, \hat{w}_x)) - \dfrac{1}{2}((a\,\Delta_h\, w, \hat{w}_{\bar{x}}])$, которое оценится через $\varepsilon\, ([\Delta_h w])^2 +$
$+ C\, E^2\, ([\hat{w}_x))^2$, где E определено в (8.1). Это не изменит рассуждений и заключения о сходимости схемы.

б) В $(L_h w, \hat{w})$ появится член $((\Delta_h^2\, w,\ \Delta_h^{-1}\, F_5))$, который доставляет максимум хлопот. При этом та часть этого члена, которая связана с последним слагаемым F_5 оценивается по (3.8) и ничего нового не вносит.

Оставшаяся часть имеет вид $\tau\, ((\Delta_h^2\, w,\ \Delta_h^{-1}\, P))$, где в качестве P нужно подставлять

$$F_6 = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\, a\Delta\check{\psi}\right)^{p\rho t} - (a\Delta_h \psi^{\rho p t})_{\hat{x}}\right\} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\, a\Delta\check{\psi}\right)^{p\rho t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} a\Delta\psi\right)^{\rho x}\right\} +$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} a\Delta\psi\right)^{\rho x} - (a\Delta_h \psi^{\rho})_{\hat{x}}\right\} + \{(a\,(\Delta_h\,\psi^{\rho} - \Delta_h\,\psi^{\rho\rho t}))_{\hat{x}}\}. \tag{8.4}$$

Трудности при оценке (8.4) связаны с предпоследним слагаемым F_6. Действительно, при оценке (8.4), где в качестве P взято последнее слагаемое F_6, непосредственно применима формула (3.8), а малость получается за счет $\Delta_h\psi^{\rho} - \Delta_h\psi^{\rho\rho t}$. Соответствующая оценка не меняет структуры (7.1).

Здесь и далее $u|_{x_m - \mathrm{h}}$ означает $u|_{x = x_m - \mathrm{h}}$. Если учесть, что $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^x = (u|_{x_m - \mathrm{h}})_x$, то первое слагаемое в F_6 представится в виде $(\{(a\Delta\check{\psi})^{y\rho t} - (a\Delta\psi)^{\rho}\}_{x = x_m - \mathrm{h}})_x$. Опять применив (3.8), оценим (8.4), когда вместо P подставлено последнее выражение. Это добавит в (7.1) члены

$$\varepsilon[(\Delta_h w)]^2 + \varepsilon([\Delta_h w])^2 \text{ и } \tau([\{(a\Delta\check{\psi})^{y\rho t} - (a\Delta\psi)^{\rho}\}_{x = x_m - \mathrm{h}}]) \ll$$

$$\ll \tau\,\|(a\Delta\check{\psi})^{yt} - a\,\Delta\,\psi\|_0^2 \ll \tau\|\,(a\Delta\check{\psi})^{yt} - (a\Delta\psi)^{yt} + (a\Delta\psi)^{yt} - (a\Delta\psi)^{y} + (a\Delta\psi)^{y} -$$

$$- a\Delta\psi\|_0^2 \ll \tau^3 \left\|\frac{\partial a\Delta\psi}{\partial t}\right\|_0^2 + |a|_1^2\,\tau\left(\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_2^2 + h^2\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\|_2^2\right) \ll h^4E^2\|\psi\|^2,$$

здесь при получении первого знака неравенства было использовано (8.1). Основные трудности связаны со вторым слагаемым F_6, которое мы обозначим F_7 и представим в виде

$$F_7 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,(a\Delta\psi)\right)^{x\rho} - (a\Delta_h\psi^{\rho})_{\hat{x}} = \frac{1}{2}\,(2\,(a\Delta\psi)^{\rho}|_{x_m - \mathrm{h}} - (a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m - 2\mathrm{h}} -$$

$$- (a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m})_x.$$

Оценим (8.4), когда вместо P подставлено F_7. Применим опять (3.8), получим

$$\tau\,((\Delta_h^2\,w,\ \Delta_h^{-1}\,F_7)) \ll \varepsilon\,([\Delta_h w])^2 + \varepsilon\,[(\Delta_h w)]^2 +$$

$$+ \tau\,([2\,(a\Delta\psi)^{\rho}|_{x_m - \mathrm{h}} - (a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m - 2\mathrm{h}} - (a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m}])^2.$$

Займемся последним слагаемым. Оно оценится сверху через

$$C\tau\,([2\,(a\Delta\,\psi)^{\rho}|_{x_m - \mathrm{h}} - 2\,(a\Delta_h\,\psi^{\rho})|_{x_m - \mathrm{h}}]) + C\tau\,([2\,(a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m - \mathrm{h}} -$$

$$- (a\Delta_h\psi^{\rho})|_{x_m - 2\mathrm{h}} - (a\Delta_h\,\psi^{\rho})|_{x_m}])^2. \tag{8.5}$$

Второе слагаемое (8.5) содержит второе разностное отношение от $a\Delta_h\,\psi^{\rho}$, но взятое с шагом h. Поэтому второе слагаемое оценится через $C\tau h^4\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\Delta\psi^{\rho})\right\|_0^2$. Первое слагаемое оценится на основании (8.3) через $C\tau h^4 E^2 \|\psi\|_2^2$. Таким образом, и в этом случае сохраняется структура (7.1).

в) При оценке $((F, \hat{w}))$ у нас появится член $((F_5, \hat{w}))$. В пункте б) было показано, что F_5 представлено как разностное отношение по x некоторой функции. Это позволяет суммированием по частям перебросить это разностное отношение на $\hat{w}$ и получить оценку

$$((F_5, \hat{w})) \ll ([\hat{w}_x])^2 + E^2 h^{4-\alpha} \|\psi\|^2.$$

Таким образом, заключение о сходимости, основанное на (7.1), остается в силе и при $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Приложение

В статье предполагается, что $[[\psi]]$ ограничена. Каковы основания для этого?

1) В [8] установлено существование обобщенного решения (1.1) в классе $\|\psi\|_2 + \left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_1 < C$ и указана методика получения оценок последующих производных ψ по t. Покажем ограниченность $\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\|_2$. Будем обозначать D_l^k различные по l линейные дифференциальные операторы порядка k по пространственным переменным. В [8] показано, что обобщенное решение (1.1) можно найти методом Галеркина как предел при $h \to \infty$ функций $\overset{n}{\psi}$, удовлетворяющих интегральному тождеству (сравни [8], стр. 157, (6.4))

$$\iint\limits_{\square} \left\{ \nabla \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} \nabla Q + \Delta \overset{n}{\psi} \Delta \overset{n}{Q} + \sum_{l,s,r} D_l \overset{n}{\psi} D_s \overset{n}{\psi} D_r^2 \overset{n}{Q} \right\} dxdy = \iint\limits_{\square} f \overset{n}{Q} dxdy, \tag{9.1}$$

где $\overset{n}{\psi} = \sum_{k=1}^{n} \overset{n}{\psi}_k(t) \varphi^k(x, y)$, $\overset{n}{\psi}_k(t)$—искомые функции, φ^k — собственные функции задачи $\Delta^2 \varphi^k = \lambda_k \Delta \varphi^k$ в $\square$, $\varphi \Big|_\Gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$, нормированные так: $-\iint\limits_{\square} \Delta\varphi^k \varphi^k\, dxdy = 1$; $\overset{n}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overset{n}{Q}_k(t)\, \varphi^k$, где $Q_k(t)$—произвольные непрерывные функции. Тождество (9.1) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых существует и дифференцируемо по t столько раз, сколько дифференцируемы $f_k(t) = \iint\limits_{\square} f\varphi^k\, dxdy$ (см. [8], стр. 199). Соответствующие интегральные тождества получим, если будем дифференцировать (9.1) по t, считая

$Q_k(t)$ не зависящими от t. Возьмем две такие производные. Получим при $\overset{n}{Q} = \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2}$

$$\iint\limits_{\square} \left\{ \nabla \frac{\partial^3 \overset{n}{\psi}}{\partial t^3} \nabla \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} + \left(\Delta \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right)^2 + \sum_{l,s,r} D_l \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} D_s \overset{n}{\psi} D_r^2 \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l,s,r} D_l \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} D_s \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} D_r^2 \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\} dxdy = \iint\limits_{\square} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} dxdy. \tag{9.2}$$

Интегралы по t от членов, содержащих операторы D, оценятся как в [8] с использованием неравенства $\|u^2\|_0 \leqslant C \|u\|_0 \|u\|_1$

$$\left| \int_0^\eta dt \iint\limits_{\square} D_l \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \cdot D_s \overset{n}{\psi} \cdot D_r^2 \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} dxdy \right| \ll \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{2,\eta} \left\| D_l \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{0,\eta}^{1/2} \|(D_s \overset{n}{\psi})^2\|_{0,\eta}^{1/2} \ll$$

$$\ll \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{2,\eta} \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{2,\eta}^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{1,\eta}^{1/2},$$ так как $\|\psi\|_2$ и $\|\psi\|_1$ оценены в [1]. Аналогично

$$\left| \int_0^\eta dt \iint\limits_{\square} D_l \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} D_s \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} D_r^2 \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} dxdy \right| \ll \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{2,\eta} \left\| \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} \right\|_{2,\eta} \left\| \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} \right\|_{1,\eta} \ll \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{2,\eta}.$$

Обозначим $\lambda(\eta) = \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{2,\eta}^2$, $\mu(\eta) = \left\| \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right\|_{1,\eta}^2$. Проинтегрировав (9.2) по t от 0 до η, получим неравенство

$$\mu(\eta) - \mu(0) + \lambda(\eta) \leqslant C_1 \lambda^{3/4} \left(\int_0^\eta \mu dt \right)^{1/4} + C_2 \lambda^{1/2} + C_3,$$

из которого следовала бы ограниченность $\lambda(\eta)$ и $\mu(\eta)$, если бы мы умели оценить $\mu(0)$. Для оценки $\mu(0)$ положим в (9.1), продифференцированное упомянутым способом по t один раз, $\overset{n}{Q} = \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2}$ и $t=0$. Получим, что при $t=0$

$$\iint\limits_{\square} \nabla \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \nabla \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} dxdy + \iint\limits_{\square} \Delta \frac{\partial \overset{n}{\psi}}{\partial t} \Delta \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} dxdy = \iint\limits_{\square} \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} dxdy \tag{9.3}$$

(здесь ряд членов исчез в силу начального условия).

Из (9.3) получится неравенство при $t=0$:

$$\sum_{k=0}^{n} (\overset{n}{\dot{\psi}}_k)^2 + \lambda^k \overset{n}{\dot{\psi}}_k \overset{n}{\dot{\psi}}_k \ll \frac{1}{\varepsilon} \iint\limits_{\square} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dxdy + \varepsilon \iint\limits_{\square} \left(\frac{\partial^2 \overset{n}{\psi}}{\partial t^2} \right)^2 dxdy$$

и далее неравенство

$$\mu(0) = \sum_{k=1}^{n} (\overset{n}{\dot{\psi}}_k)^2 \Big|_{t=0} \ll \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (\overset{n}{\dot{\psi}}_k)^2 \Big|_{t=0} + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 .$$

Положим теперь в (9.1) $\overset{n}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \overset{n}{\dot{\psi}}_k \varphi^k$ и $t=0$. Получим при $t=0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (\overset{n}{\dot{\psi}}_k)^2 = \iint_{\square} f \overset{n}{Q}\, dxdy. \tag{9.4}$$

Предположим, что $f|_{t=0} = \Delta\chi$, где $\chi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$. Это требование является естественным, если желать, чтобы уравнение Навье-Стокса выполнялось при $t=0$, так как при этом $f|_{t=0} = \Delta\psi_t$, т. е. f имеет предписанный характер. Таким образом, наше требование является условием типа условия согласования. Предположим еще, что $f \in W_2^2$. Тогда χ как решение уравнения $\Delta^2\chi = \Delta f \in L_2$ при $\chi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$ будет из W_2^4. Система $\varphi^k(x, y)$ есть ортогональный базис в $\overset{0}{W}{}_2^2$. Поэтому $\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \varphi^k$ и ряд этот можно дважды дифференцировать, т. е. $\Delta\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \Delta\varphi^k$. Тогда

$$\iint_{\square} f \overset{n}{Q}\, dxdy = \sum_{k=1}^{n} \chi_k \dot{\psi}_k \lambda_k^2 \ll \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \dot{\psi}_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \chi_k^2 . \tag{9.5}$$

Последний ряд сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^2 \lambda_k^2 = \iint_{\square} \Delta\chi \Delta^2\chi\, dxdy \ll \|f\|_{2,0}^2 .$$

Использование последнего неравенства в (9.5) позволяет оценить левую часть (9.4) через известные величины, а тем самым оценить $\mu(0)$.

Очевидно, что установленные оценки верны не только для $\overset{n}{\psi}$, $\overset{n}{Q}$, но и для их пределов ψ, Q. Таким образом, нами доказано утверждение:

Если $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\|_0$ и $\|f\|_{2,0}$ ограничены и $f = \Delta\chi$, где $\chi \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$, то ограничено $\left\| \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\|_2$.

2) Изложим схему доказательства того, что $\|\psi\|_4 \leqslant C$. Положим в (9.1) ψ и Q вместо $\overset{n}{\psi}$ и $\overset{n}{Q}$, так как (9.1) верно и для предельных по

n значений $\overset{n}{\psi}$ и $\overset{n}{Q}$. Перенесем теперь $\iint\limits_{\square} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\nabla Q\,dxdy$ в правую часть равенства. Трудность здесь в оценке $\|\psi\|_4$ в окрестности угла. Положим $Q = \mathrm{I}q$, где $\mathrm{I}(x, y)$—срезающая функция, не равная нулю лишь в ε-окрестности начала координат, в которой находится вершина угла. Тогда можно сделать эту I множителем при ψ так, что из (9.1) получим относительно $p = \mathrm{I}\psi$ уравнение

$$\iint\limits_{\square} \Delta p\Delta q\,dxdy + \iint\limits_{\square} D\psi D^2pDq\,dxdy = \iint\limits_{\square} \overline{F}Dq\,dxdy. \tag{9.4}$$

Здесь в $\overline{F}$ объединены все члены, которые получились при перенесении I множителем на ψ за счет соответствующих дифференцирований и про которые известно, что их норма $\|\ \|_0$ ограничена. Здесь важным является то обстоятельство, что носитель $D\psi$ в (9.4) можно считать малым, поскольку вне supp$p$ (I) функция p равна нулю.

Будем исходить из следующей леммы, доказываемой методами [5]. Решение P тождества при всех $q \in \overset{0}{W}{}_2^2$:

$$\iint\limits_{\Omega} \Delta P\Delta q\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} RDq\,dxdy,\quad P\Big|_{\Gamma(\Omega)} = \frac{\partial P}{\partial n}\Big|_{\Gamma(\Omega)} = 0$$

удовлетворяет неравенству $\|P\|_3 \leqslant C\|R\|_0$, если Ω содержит лишь один угол, меньший π, а в остальном имеет гладкую границу.

Далее показывается, что множитель при Dq во втором интеграле (9.4) оценивается так: $\|D\psi D^2p\|_1' \leqslant \varepsilon\|p\|_3$. При этом используется, что $D\psi \in L_\alpha$ при любых α, а малость (множитель ε) есть следствие малости supp $(D\psi)$. Из упомянутой леммы получаем, что $\|p\|_3 < C\|\overline{F}\|_0$, где C не зависит от t. Отсюда следует, что $\|\psi\|_3 \leqslant C\|F\|_0$. Теперь произведем интегрирование по частям в последних двух интегралах (9.4) и запишем (9.4) в виде:

$$\iint \Delta p\Delta q\,dxdy = \iint \widetilde{F}q\,dxdy,$$

где в силу принадлежности $\psi \in W_2^3$ и $\psi_t \in W_2^2$ ограничена $\|\widetilde{F}\|_0$. Последнее уравнение—бигармоническое относительно p и его решение в прямом угле имеет оценку $\|p\|_4 \leqslant \|\widetilde{F}\|_0$. Следовательно, $\psi \in W_2^4$ (утверждение [5], стр. 288, что решение бигармонической задачи не принадлежит W_2^4 есть следствие описки в формуле (5.35)).

3) Доказательство принадлежности $\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{1/2} \leqslant C$ проще. Возьмем разностное отношение от тождества (9.1) по t, считая, что будто бы Q не зависит от t (легко показать, что это можно делать и формально). Для ψ_t и произвольных гладких $Q \in \overset{0}{W}{}_2^2$ получим тождество

$$\iint_{\square} \Delta\psi_t \Delta Q\, dxdy = \iint_{\square} D^2\psi_t (D\psi + \overset{2\tau}{D\psi})\, DQ\, dxdy +$$

$$+ \iint_{\square} D\psi_t (D^2\psi + \overset{2\tau}{D^2\psi})\, DQ\, dxdy + \iint_{\square} f_t\, Q\, dxdy - \iint_{\square} \frac{\partial \nabla\psi_t}{\partial t} \nabla Q\, dxdy.$$

Все множители при Q, DQ и ∇Q имеют ограниченную норму $\| \, \|_0$. Согласно лемме $\|\psi_t\|_3$ будет ограничено. Перебросим все производные в правой части последнего равенства с Q. Получим, что ψ_t удовлетворяет бигармоническому уравнению и, следовательно, $\|\psi_t\|_{4,\,t} < C + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi_t \right\|_{0,\,t}$ (здесь учтена ограниченность $\|\psi_t\|_3$). Отсюда следует, что $\max_{\tau} \|\psi_t\|_4 \ll \left\| \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial t^2} \right\|_0 + C \leqslant C.$

Добавление. § 9. Нелинейный случай

Вместо уравнения Навье-Стокса рассмотрим уравнение с урезанной нелинейностью*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \Delta^2\psi + \frac{\partial}{\partial x}(a\mathrm{I}(\Delta\psi)) - \frac{\partial}{\partial y}(b\mathrm{I}(\Delta\psi)) = f. \tag{9.1}$$

Здесь $\mathrm{I}(t) = t$ при $|t| < C_1$, 1 при $|t| > C_2$ и гладкая.

Выберем в качестве C_1 число, оценивающее сверху $\max_t |\Delta\psi|$ из (1.1). Такое C_1 существует вследствие ограниченности $\|\psi\|_4$ от решения (1.1). Тогда решения (9.1) и (1.1) совпадут.

Разностную схему будем строить для (9.1). Эта схема будет отличаться от уже рассмотренной лишь из-за двух последних членов левой части (9.1). Аппроксимируем член $\frac{\partial}{\partial x}(a\mathrm{I}(\Delta\psi))$ из (9.1) через $(v_{\hat{y}}\, \mathrm{I}(\Delta_h v))_{\hat{x}}$. Аналогично поступим с $\frac{\partial}{\partial y}(b\mathrm{I}(\Delta\psi))$. В левой части (2.5) добавится член $L_3 w = (w_y \mathrm{I} + \overset{\tau}{\psi}{}^{ppt}_{\hat{y}}\, \mathrm{I}' \Delta_h w)_{\hat{x}}$, а в правой $-(\Phi_{\hat{y}} \cdot \mathrm{I} + \overset{\tau}{\psi}{}^{ppt}_{\hat{y}}\, \Delta_h \Phi)_{\hat{x}} \equiv F_8$ и $F_9 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \overset{\tau}{\psi}}{\partial y} \mathrm{I}(\overset{\tau}{\Delta\psi})\right)^{ppt} - (\psi_{\hat{y}}\, \mathrm{I}(\Delta_h \psi))_{\hat{x}}$ и такие же члены с заменой x на y. Отметим, что значок I здесь в F_9 можно отбрасывать. Какие новые оценки потребуют эти добавки?

а) При умножении (2.5) на $\hat{w}$ получим $((L_3 w, \hat{w}))$, оцениваемый как в § 6.

б) Член $((\Delta^2 w, \Delta^{-1} F_8))$ оценивается также элементарно.

---

* Этот прием предложен В. Я. Ривкиндом и Н. Н. Уральцевой и сообщен мне В. Я. Ривкиндом.

в) Член $((\Delta^2 w, \Delta^{-1} F_9))$ оценивается как в (8.4). Новым моментом там является лишь легко проводимая оценка члена $((\Delta_h^2 w, \Delta^{-1}(F_{10})_{\hat{x}}))$, где $F_{10} = ((a - \psi^{pp'}_{\hat{y}})\, \Delta_h\, \psi^{pp'})_{\hat{x}}$.

г) Очевидным образом оценивается член

$$((F_8, \hat{w})) \ll ([w_x])^2 + h^{4-\varepsilon} \|\psi'\|_4^2 .$$

Наконец член $((F_9, \hat{w}))$ оценивается как в пункте в) в § 8.

Таким образом установлена сходимость схемы и в нелинейном случае.

ЛО ЦЭМИ АН СССР

Поступило 18.XII.1970

Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Նավե-Ստոքսի հավասարումների համար գրված Թոմի վերջավոր տարբերությունների սխեմայի զուգամիտությունը ուղղանկյուն տիրույթում *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում է Թոմի կողմից առաջարկված սխեման, որը ծառայում է Նավե-Ստոքսի հավասարումների մոտավոր լուծման համար: Ապացուցված է, որ այդ սխեմայի սխալը էներգետիկ նորմայում ուղղանկյուն տիրույթի համար գնահատվում է $O(h^{2-\alpha})$*-ով, որտեղ* α *-կամայական փոքր թիվ է, իսկ* h *-ը սխեմայի քայլը:*

L. A. OGANESIAN. *Convergence Tom's finite-difference scheme for Navie-Stocks equations in the rectangel* (summary)

In this paper the finite-difference scheme of Tom for Navie-Stocks equations in the rectangular domain is considered. It is proved that the error of this scheme in the energetic norm is $O(h^{2-\alpha})$ (here α may be arbitrarily small and h is the step of the scheme).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Том, К. Д. Эйплт.* Числовые расчеты полей в технике и физике, „Энергия“, 1964.
2. *Л. А. Чудов, Т. В. Кускова.* О применении разностных схем к расчету нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, Сборник „Численные методы в газовой динамике“, вып. 2, МГУ, 1963.
3. *А. А. Самарский.* Лекции по теории разностных схем, М., 1969.
4. *J. H. Bramble.* A. second order finite difference analog of the first biharmonic boundary value problem, Num. Math., 9, 1966.
5. *В. А. Кондратьев.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, Труды ММО, т. 16, 1967.
6. *Ю. А. Гусман, Л. А. Оганесян.* Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных уравнений, Журн. Выч. Мат. и мат.-физ., 5, № 2, 1965, 351—357.
7. *В. И. Буренков.* Об аддитивности классов W_p^2, Труды МИАН, 89, 1967, 31—55.
8. *О. А. Ладыженская.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, „Физматгиз“, М., 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

Э. А. ДАНИЕЛЯН, Б. Н. ДИМИТРОВ

ОДНА ПРИОРИТЕТНАЯ СИСТЕМА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСТОЧНИКОВ И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ

Введение

За последние годы, судя по публикациям, интерес к различным задачам с приоритетом резко возрос. Появилось много новых постановок задач с приоритетом, по-видимому, возникших из практики. Приоритетные задачи с конечным числом источников изучались в [1]; исследование производилось методом введения дополнительных переменных Кокса, что приводило к уравнениям в частных производных первого порядка.

Далее, имеются статьи по задачам с приоритетом, когда обслуживание разбивается на несколько независимых этапов (многоэтапное), [2, 3], причем на некоторых этапах возможно прерывание вызова (но системы с конечным числом источников не затрагивались).

Неприоритетными задачами с ограничением на время ожидания занимались многие авторы [4—6].

В настоящей статье рассматривается одноканальная система с конечным числом источников, ограничением на время ожидания, двухэтапным обслуживанием и абсолютным приоритетом. Инженерная постановка и решение задачи, приводящей к подобной системе обслуживания, в детерминированном случае имеются в [7].

Основная цель работы—получение асимптотики времени до первой потери вызова при быстром обслуживании. Кроме того, находятся соотношения, определяющие период занятости и время пребывания вызова на приборе.

Функции, к которым применяется преобразование Лапласа-Стильтьеса, обозначаются прописными латинскими буквами; преобразование Лапласа-Стильтьеса—соответствующими строчными латинскими или греческими буквами, а моменты—теми же малыми буквами, но с индексом внизу (указывающим порядок момента).

Описание системы. Один прибор обслуживает вызовы N источников. Вызовы от источников после обслуживания возвращаются обратно в свои источники. В каждом источнике имеется ровно один вызов. Если в момент t в i-ом источнике есть вызов, то он в промежутке $(t, t+\Delta t)$ потребует обслуживания с вероятностью $a_i\Delta t+o(\Delta t)$ и остается в источнике с вероятностью $1-a_i\Delta t+o(\Delta t)$, $a_i>0$, $i=1,\cdots,N$. Если в момент прихода вызова из i-го источника (i-вызова), на обслуживание прибор занят обслуживанием j-вызова, то при $i<j$ обслуживание j-вызова прерывается и начинается обслуживание i-вызова; при $i>j$ i-вызов начнет обслуживаться сразу после того, как кончится обслуживание вызовов с номерами, меньшими чем i. Если перед началом обслуживания i-вызов ждал, то его обслуживание состоит из двух этапов с независимыми длительностями $\eta_1^{(i)}$ и $\eta_2^{(i)}$ с функциями распределения (ф. р.) $B_1^{(i)}(t)$ и $B_2^{(i)}(t)$ соответственно; если же вызов начнет обслуживаться сразу, то обслуживание длится всего один этап $\eta_2^{(i)}$, $i=1,\cdots,N$. Время ожидания i-вызова не должно превышать случайную величину сл. в. ζ_i с распределением $P\{\zeta_i<t\}=1-e^{-\nu_i t}$, $\nu_i>0$, в противном случае вызов теряется. Если прерывание вызова произошло на втором этапе обслуживания, то вызов возвращается обратно в источник без дообслуживания, а если на первом, то вызов ожидает начала нового полного двухэтапного обслуживания с новой реализацией времени ожидания (заново).

Одна вспомогательная система обслуживания.

А. Рассматриваемая здесь система обслуживания ненадежным прибором, одним источником и ограничением на время ожидания будет нужна при изучении основной системы.

Ненадежный прибор обслуживает один вызов (один источник). Времена „жизни" и времена восстановлений прибора образуют альтернирующий процесс восстановления [8] и имеют ф.р. $1-e^{-\sigma t}$, $\sigma>0$ и $F(t)$ соответственно. Если вызов находится в источнике, то время до его поступления на прибор распределено по экспоненциальному закону с параметром $a>0$. Если в момент поступления вызова прибор неисправен, то вызов ждет до конца восстановления. Если время ожидания превосходит сл. в. ζ, где $P\{\zeta<t\}=1-e^{-\nu t}$, $\nu>0$, то вызов теряется. В противном случае после восстановления прибор приступает сразу к обслуживанию вызова. Если до начала обслуживания вызов ждал, обслуживание состоит из двух независимых этапов с ф.р. $B_1(t)$ и $B_2(t)$ соответственно; если обслуживание началось сразу, то только из второго с ф.р. $B_2(t)$. При выходе прибора из строя на первом этапе обслуживания, время ожидания вызова и следующее за этим обслуживание начинаются заново; при прерывании же обслуживания на втором этапе вызов возвращается обратно в источник.

Замечание: Прибавление дополнительного этапа ко времени обслуживания после ожидания можно рассматривать как штраф за ожидание. Во многих системах надежности, обслуживания станков и некоторых задачах теории управления запасами можно встретить эту схему как элемент более сложной схемы (см. также [7]).

Б. Промежуток времени с момента начала или восстановления прибора, или обслуживания вызова до первого момента, когда прибор свободен и исправлен, назовем „периодом занятости" системы и обозначим его через π. Через A обозначим событие: за период занятости вызов не потерян.

Пусть $\Pi(t)$—вероятность того, что за период занятости не наблюдалась потеря вызова и длительность этого периода не превосходит t, т. е.

$$\Pi(t)=p\{\pi<t,\ A\}.$$

Через π_1 обозначим период занятости, начавшийся с восстановления прибора, при условии, что вызов находится в источнике; через π_2—период занятости, начавшийся с момента поступления вызова из источника, π_3—период занятости, начавшийся с двухэтапного обслуживания. Положим

$$\Pi_i(t)=P\{\pi_i<t,\ A\},\quad \pi_i(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,d\Pi_i(t),\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

B. Считаем, что независимо от функционирования системы наступают „катастрофы“, поток которых является пуассоновским с параметром $s>0$. Тогда $\pi_1(s)$—вероятность того, что период занятости начался с восстановления прибора, а за весь период вызов не был потерян и „катастрофы“ не наступали.

$\pi_2(s)$ $(\pi_3(s))$ — вероятность того, что период занятости начался с момента поступления вызова из источника (с двухэтапного обслуживания), а за весь период занятости вызов не был потерян и „катастрофы“ не наступали. $\varphi(s+a)$—вероятность того, что за время одного восстановления прибора вызов не наступал и не наступали „катастрофы“.

$$\frac{a}{a-\nu}[\varphi(s+\nu)-\varphi(s+a)]=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x)\int_0^x e^{-(x-u)\nu}\,d\left[1-e^{-au}\right]$$

—вероятность того, что за время одного восстановления прибора „катастрофа“ не наступила, поступил вызов, но не был потерян.

$\varphi(s+\nu)$—вероятность того, что за время одного восстановления прибора не будет потерян вызов и не наступят „катастрофы“, при условии, что в момент начала восстановления вызов ожидал обслуживания.

$\beta_i(s+\sigma)$—вероятность того, что на i-ом этапе обслуживания прибор не выйдет из строя и не наступят „катастрофы“.

$\frac{\sigma}{s+\sigma}[1-\beta_i(s+\sigma)]$—вероятность того, что за i-ый этап обслуживания прибор вышел из строя, а до выхода прибора из строя „катастрофа“ не наступала.

По формуле полной вероятности выписываются уравнения, связывающие функции $\pi_i(s)$.

$$
\left.\begin{aligned}
\pi_1(s) &= \varphi(s+a) + \frac{a}{a-\nu}\left[\varphi(s+\nu) - \varphi(s+a)\right]\pi_3(s),\\
\pi_2(s) &= \beta_2(s+\sigma) + \frac{\sigma}{s+\sigma}\left[1-\beta_2(s+\sigma)\right]\pi_1(s),\\
\pi_3(s) &= \beta_1(s+\sigma)\,\pi_2(s) + \frac{\sigma}{s+\sigma}\left[1-\beta_1(s+\sigma)\right]\varphi(s+\nu)\,\pi_3(s)
\end{aligned}\right|. \tag{1}
$$

Разрешив систему уравнений (1), получаем

$$
\pi_1(s) = \frac{\varphi(s+a)\left[1-\frac{\sigma}{s+\sigma}(1-\beta_1(s+\sigma))\,\varphi(s+\nu)\right] + \frac{a}{a-\nu}\left[\varphi(s+\nu)-\varphi(s+a)\right]\beta_1(s+\sigma)\,\beta_2(s+\sigma)}{1-\frac{\sigma}{s+\sigma}\cdot\frac{a}{a-\nu}\left[\varphi(s+\nu)-\varphi(s+a)\right]\beta_1(s+\sigma)\left[1-\beta_2(s+\sigma)\right] - \frac{\sigma}{s+\sigma}\,\varphi(s+\nu)\left[1-\beta_1(s+\sigma)\right]}, \tag{2}
$$

$$
\pi_2(s) = \frac{\left[\beta_2(s+\sigma) + \frac{\sigma}{s+\sigma}(1-\beta_2(s+\sigma))\,\varphi(s+a)\right]\times\left[1-\frac{\sigma}{s+\sigma}(1-\beta_1(s+\sigma))\,\varphi(s+\nu)\right]}{1-\frac{\sigma}{s+\sigma}\cdot\frac{a}{a-\nu}\left[\varphi(s+\nu)-\varphi(s+a)\right]\beta_1(s+\sigma)\left[1-\beta_2(s+\sigma)\right] - \frac{\sigma}{s+\sigma}\,\varphi(s+\nu)\left[1-\beta_1(s+\sigma)\right]}. \tag{3}
$$

Замечание 2. В формулах (1)—(3) считаем $a \neq \nu$. Если $a=\nu$, то вместо $\frac{a}{a-\nu}\left[\varphi(s+\nu)-\varphi(s+a)\right]$ нужно брать $a\cdot(-\varphi'(s+a))$.

Всюду в дальнейшем мы будем выписывать результаты для случая $a \neq \nu$, но будем иметь ввиду замечание 2, не указывая соответствующий результат для случая $a=\nu$.

Г. С вероятностью $\frac{\sigma}{\sigma+a}$ период занятости равен π_1 и с вероятностью $\frac{a}{\sigma+a}$ — равен π_2. Поэтому

$$
\pi = \frac{\sigma}{\sigma+a}\pi_1 + \frac{a}{\sigma+a}\pi_2. \tag{4}
$$

Ясно, что ф.р. $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$, $\Pi(t)$ — несобственные (т. е. при $t\to\infty$ не стремятся к 1) и

$$P(A)=\Pi(\infty)=\pi(0)=\frac{\sigma}{\sigma+a}\pi_1(0)+\frac{a}{\sigma+a}\pi_2(0)<1. \tag{5}$$

На основании (2), (3)

$$\pi_1(0)=\frac{\varphi(a)[1-(1-\beta_1(\sigma))\varphi(\nu)]+\frac{a}{a-\nu}[\varphi(\nu)-\varphi(a)]\beta_1(\sigma)\beta_2(\sigma)}{1-\frac{a}{a-\nu}[\varphi(\nu)-\varphi(a)]\beta_1(\sigma)[1-\beta_2(\sigma)]-\varphi(\nu)[1-\beta_1(\sigma)]}, \tag{6}$$

$$\pi_2(0)=\frac{[\beta_2(\sigma)+(1-\beta_2(\sigma))\varphi(a)][1-(1-\beta_1(\sigma))\varphi(\nu)]}{1-\frac{a}{a-\nu}[\varphi(\nu)-\varphi(a)]\beta_1(\sigma)[1-\beta_2(\sigma)]-\pi(\nu)[1-\beta_1(\sigma)]}. \tag{7}$$

Следовательно

$$P(A)=\frac{[\sigma\varphi(a)+a(1-\beta_2(\sigma))\varphi(a)+a\beta_2(\sigma)][1-(1-\beta_1(\sigma))\varphi(\nu)]+\frac{a\sigma}{a-\nu}[\varphi(\nu)-\varphi(a)]\beta_1(\sigma)\cdot\beta_2(\sigma)}{(\sigma+a)\left\{1-\frac{a}{a-\nu}[\varphi(\nu)-\varphi(a)]\beta_1(\sigma)[1-\beta_2(\sigma)]-\varphi(\nu)[1-\beta_1(\sigma)]\right\}}. \tag{8}$$

Обозначим через $\hat{\Pi}(t)$ условную ф.р. периода занятости при условии, что не произошла потеря вызова. Имеет место

Теорема 1. *Ф. р.* $\hat{\Pi}(t)$ *дается своим преобразованием Лапласа-Стильтьеса*

$$\hat{\pi}(s)=\frac{\sigma}{\sigma+a}\frac{\pi_1(s)}{\pi_1(0)}+\frac{a}{\sigma+a}\frac{\pi_2(s)}{\pi_2(0)}, \tag{9}$$

где $\pi_i(s)$, $\pi_i(0)$, $i=1, 2$, *определяются по формулам* (2), (3), (6), (7).

Д. Периодом регенерации процесса обслуживания назовем промежуток времени между двумя соседними моментами времени, когда прибор переходит в свободное и исправное состояние, причем за этот промежуток времени не наблюдалась потеря вызова.

Пусть $G(t)$—ф. р. длительности периода регенерации. Очевидно, что

$$G(t)=[1-e^{-(\sigma+a)t}]*\Pi(t) \text{ и } P(A)=G(\infty).$$

$P(A)$ есть также вероятность того, что за один период занятости вызов не потерян.

Тогда $[P(A)]^n[1-P(A)]$ — вероятность того, что вызов будет потерян на $(n+1)$-ом периоде регенерации $(n=0, 1,\cdots)$.

Если λ—число шагов (периодов регенерации) до потери вызова, то

$$M\lambda=\sum_{n>1} nP\{\lambda=n\}=\sum_{n>1} n[P(A)]^{n-1}\cdot[1-P(A)]=\frac{1}{1-P(A)}. \tag{10}$$

Е. Обозначим через $\hat{G}(t)$ ф. р. периода регенерации при условии, что за этот период не произошла потеря вызова. Очевидно, что

$$\hat{G}(t) = [1 - e^{-(\sigma+a)t}] * \hat{\Pi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\hat{\alpha} < t\} \tag{11}$$

и

$$M\hat{\alpha} = \frac{1}{\sigma + a} + \hat{\pi}_1. \tag{12}$$

Если τ — суммарная длительность периодов регенерации до первой потери вызова (включается и период регенерации, за который вызов был потерян), то

$$\tau = \hat{\alpha}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_\lambda,$$

где $\hat{\alpha}_i$ $(i=1, 2, \cdots)$—независимые, одинаково распределенные сл. в. с ф. р. $\hat{G}(t)$. По формуле Вальда

$$M\tau = M\hat{\alpha} \cdot M\lambda = \frac{\dfrac{1}{\sigma + a} + \hat{\pi}_1}{1 - P(A)}. \tag{13}$$

Истинное значение времени θ до потери вызова заключено между суммами

$$\hat{\alpha}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_{\lambda-1} \leqslant \theta \leqslant \hat{\alpha}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_\lambda = \tau. \tag{14}$$

Ж. На основании (14) можно выяснить асимптотическое поведение длительности работы системы до потери вызова при быстром ремонте (ремонт считается быстрым, когда φ_1 мало). Из неравенства $1 - e^{-sx} \leqslant sx$ $(s > 0, x > 0)$ следует $1 - \varphi(s) \leqslant s\varphi_1$. Поэтому, при $\varphi_1 \to 0$ равномерно по s в любом конечном интервале изменения s $\varphi(s) \to 1$. Более того, $\varphi^1(s) \to 0$ равномерно по s. Тогда из (8) вытекает, что $P(A) \to 1$, а из (10) находим $M\lambda \to \infty$ при $\varphi_1 \to 0$. По теореме Пуассона ([9], стр. 99) имеем

$$P\left\{\frac{\lambda}{M\lambda} > x\right\} \underset{\varphi_1 \to 0}{\rightarrow} e^{-x}. \tag{15}$$

Из (2), (3), (6), (7) и (9) легко получить

$$\hat{\pi}(s) \underset{\varphi_1 \to 0}{\rightarrow} \frac{\sigma}{\sigma + a} + \frac{a}{\sigma + a}\left\{\beta_2(\sigma) + \frac{\sigma}{s + \sigma}[1 - \beta_2(s + \sigma)]\right\},$$

откуда вычисляется $\hat{g}(s) = Me^{-s\hat{\alpha}}$ при $\varphi_1 \to 0$.

$$\hat{g}(s) \underset{\varphi_1 \to 0}{\rightarrow} \frac{1}{s + \sigma + a}\left\{\sigma + a\left[\frac{\sigma}{s + \sigma} + \beta_2(\sigma)\frac{s}{s + \sigma}\right]\right\}. \tag{16}$$

Из (16) находим, что при $\varphi_1 \to 0$

$$M\hat{\alpha}_i \to \frac{1}{\sigma + a} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{a}{\sigma + a}[1 - \beta_2(\sigma)]. \tag{17}$$

Последовательность сл. в. $\{\hat{\alpha}_n\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\hat{\alpha}_1+\cdots+\hat{\alpha}_N}{N\cdot M\hat{\alpha}_1}=1 \text{ с вероятностью 1.} \tag{18}$$

Неравенство (14) позволяет выписать для вероятностей следующие соотношения:

$$P\left\{\frac{\hat{\alpha}_1+\cdots+\hat{\alpha}_{\lambda-1}}{(\lambda-1)\cdot M\hat{\alpha}_1}\cdot\frac{\lambda-1}{M\lambda-1}>x\right\}\leqslant P\left\{\frac{\theta}{M\hat{\alpha}_1\cdot M\lambda}>x\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{\hat{\alpha}_1+\cdots+\hat{\alpha}_\lambda}{M\hat{\alpha}_1\cdot\lambda}\cdot\frac{\lambda}{M\lambda}>x\right\}. \tag{20}$$

Из (20) и из дополнений выводится

Теорема 2. *При быстром восстановлении прибора справедливо соотношение*

$$\lim_{\varphi_1\to 0} P\left\{\frac{\theta}{M\hat{\alpha}_1\cdot M\lambda}>x\right\}=e^{-x}, \tag{21}$$

или в более удобной для применений форме

$$P\{\theta\leqslant x\}\sim 1-e^{-\frac{1-P(A)}{M\hat{\alpha}_1}x}. \tag{22}$$

Здесь $P(A)$, $M\hat{\alpha}_1$ *и* $M\lambda$ *определяются по формулам* (8), (12) *и* (10) *соответственно. Знак* $\sim$ *означает асимптотическую эквивалентность при* $\varphi_1\to 0$.

Из (13), (14) также следует, что

$$M\theta\sim\frac{\frac{1}{\sigma+a}+\hat{\pi}_1}{1-P(A)} \quad \text{при } \varphi_1\to 0. \tag{23}$$

Если мы умеем управлять средним временем восстановления прибора φ_1 и требуется определить такое $\varphi_{10\,\text{пг}}$, чтобы вероятность за время T „вызов не будет потерян" была не меньше заданного числа p_0, то область значений $\varphi_{10\,\text{пг}}$ можно определить из асимптотического соотношения

$$e^{-\frac{1-P(A)}{M\hat{\alpha}_1}T}\geqslant p_0, \text{ или } \frac{1-P(A)}{M\hat{\alpha}_1}\leqslant-\frac{1}{T}\log p_0.$$

Обслуживание N источников. Через $\hat{\pi}_{i-1}$ обозначим интервал времени, начинающийся с момента начала восстановления или (первого) обслуживания вызова какого-нибудь источника с номером $1,\cdots,i-1$ до первого следующего момента, когда прибор становится доступным для обслуживания вызовов с номерами $i, i+1, \cdots, N$, при условии, что за этот период не наблюдалось потери вызовов $1, \cdots, i-1$. Обозначим

$$\hat{\Pi}_{i-1}(t) = P\{\hat{\pi}_{i-1} < t\}; \quad \hat{\pi}_{i-1}(s) = Me^{-s\hat{\pi}_{i-1}}.$$

Предположим, что прибор ненадежен и время его безотказной работы распределено по показательному закону с параметром $\sigma > 0$, время ремонта—с ф. р. $F(x)$. Ремонт полностью восстанавливает свойства обслуживающего прибора. Результаты для вспомогательной модели дают возможность определить период занятости системы из N источников, вероятность безотказной работы за время T и получить интересные асимптотические результаты.

Положим

$$\hat{\pi}_0(s) = \varphi(s), \quad \sigma_0 = \sigma, \quad \sigma_i = \sigma + a_1 + \cdots + a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{24}$$

Если рассматривать процесс обслуживания i-го источника, то ввиду абсолютного приоритета присутствие источников $i+1, \cdots, N$ не влияет на его характеристики. Выходом прибора из строя можно считать как отказ прибора, так и приход вызова с номером, меньшим чем i, поэтому интервал доступности прибора для i-вызова распределен по показательному закону с параметром σ_{i-1}, а интервал недоступности длится случайное время $\hat{\pi}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$. Таким образом, мы получили вспомогательную систему, вписываемую внутрь общей системы.

Теорема 3. *Функции $\hat{\pi}_i(s)$ могут быть получены последовательно по формулам*

$$\hat{\pi}_i(s) = \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\frac{\pi_{1i}(s)}{\pi_{1i}(0)} + \frac{a_i}{\sigma_i}\frac{\pi_{2i}(s)}{\pi_{2i}(0)}, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{25}$$

где $\pi_{1i}(s)$ и $\pi_{2i}(s)$ задаются выражениями (2), (3) при замене $\varphi(s)$, a, σ, ν, $\beta_j(s)$ $(j = 1, 2)$ *на* $\hat{\pi}_{i-1}(s)$, a_i, ν_i, σ_{i-1}, $\beta_j^{(i)}(s)$ *соответственно, т. е.*

$$\pi_{1i}(s) = \frac{\hat{\pi}_{i-1}(s+a_i)\left[1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s+\sigma_{i-1}}(1 - \beta_1^{(i)}(s+\sigma_{i-1}))\,\hat{\pi}_{i-1}(s+\nu_i)\right] + \frac{a_i}{a_i-\nu_i}[\hat{\pi}_{i-1}(s+\nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s+a_i)]\cdot\beta_1^{(i)}(s+\sigma_{i-1})\cdot\beta_2^{(i)}(s+\sigma_{i-1})}{1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s+\sigma_{i-1}}\cdot\frac{a_i}{a_i-\nu_i}[\hat{\pi}_{i-1}(s+\nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s+a_i)]\,\beta_1^{(i)}(s+\sigma_{i-1})\times[1 - \beta_2^{(i)}(s+\sigma_{i+1})] - \frac{\sigma_{i-1}}{s+\sigma_{i-1}}[1 - \beta_1^{(i)}(s+\sigma_{i-1})]\,\hat{\pi}_{i-1}(s+\nu_i)}, \tag{26}$$

$$\pi_{2i}(s) = \frac{\left[\beta_2^{(i)}(s+\sigma_{i-1}) + \frac{\sigma_{i-1}}{s+\sigma_{i-1}}(1 - \beta_2^{(i)}(s+\sigma_{i-1}))\,\hat{\pi}_{i-1}(s+a_i)\right]\times}{1 - \frac{\sigma_{i-1}}{s+\sigma_{i-1}}\cdot\frac{a_i}{a_i-\nu_i}[\hat{\pi}_{i-1}(s+\nu_i) - \hat{\pi}_{i-1}(s+a_i)]\,\beta_1^{(i)}(s+\sigma_{i-1})\times}$$

$$\frac{\times\left[1-\frac{\sigma_{l-1}}{s+\sigma_{l-1}}\left(1-\beta_1^{(l)}(s+\sigma_{l-1})\right)\hat{\pi}_{l-1}(s+\nu_l)\right]}{\times\left[1-\beta_2^{(l)}(s+\sigma_{l-1})\right]-\frac{\sigma_{l-1}}{s+\sigma_{l-1}}\left[1-\beta_1^{(l)}(s+\sigma_{l-1})\right]\hat{\pi}_{l-1}(s+\nu_l)}. \tag{27}$$

Если где-нибудь $a_l=\nu_l$, учитывается замечание 1.

Тем самым определен период занятости $\hat{\pi}_l$ системы обслуживанием первых i вызовов при условии, что не наблюдалось потерь вызовов с номерами $1,\cdots,i$. Через A_l обозначим следующее событие: на одном периоде занятости $\hat{\pi}_l$ не потерян i-вызов, при условии, что за это время не потерян ни один из вызовов с номерами $1,\cdots,i-1$. Тогда $P(A_l)$ задается формулой (8) с указанными выше заменами параметров σ, a, ν и функций $\varphi(s)$, $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$.

Через θ_l обозначим промежуток времени с момента $t=0$ до первой потери i-вызова при условии, что до этого не потерян ни один вызов с номерами $1,\cdots,i-1$. Определение θ_l производится как во вспомогательной системе обслуживания. Если определить величину τ_l как суммарную длительность периодов регенераций до потери i-вызова при условии, что до того не терялись вызовы $1,\cdots,i-1$ и λ_l — как число этих периодов регенераций, то

$$\tau_l=\hat{\alpha}_1^{(l)}+\cdots+\hat{\alpha}_{\lambda_l}^{(l)},$$

где $P\{\hat{\alpha}_j^{(l)}<t\}=\{1-e^{-\sigma_l t}\}*\hat{\Pi}_l(t)$. При этом

$$\hat{\alpha}_1^{(l)}+\cdots+\hat{\alpha}_{\lambda_l-1}^{(l)}\leqslant\theta_l\leqslant\hat{\alpha}_1^{(l)}+\cdots+\hat{\alpha}_{\lambda_l}^{(l)}, \tag{28}$$

и асимптотические свойства θ_l могут быть установлены с помощью (28).

Предположим, что параметры σ, a_l, ν_l, $\beta_{1l}^{(l)}$ — фиксированы и конечны, однако φ_1 и $\beta_{2l}^{(l)}$ можно менять. Пусть $\varphi_1\to 0$, $\beta_{2l}^{(l)}\to 0$, $i=1,\cdots,N$. Будем говорить в таком случае, что обслуживания — быстрые. Тогда легко заметить, что если $\varphi_1\to 0$ и $\beta_{21}^{(1)}\to 0$, то $\hat{\pi}_{11}\to 0$. Индуктивно получим, что все $\hat{\pi}_{ll}\to 0$ при быстрых обслуживаниях. Также нетрудно видеть, что если обслуживания — быстрые, то $P(A_l)\to 1$, т. е. $\theta_l\xrightarrow{p}\infty$. Как и во вспомогательной системе получим, что в таком случае справедливы асимптотические соотношения

$$P(\theta_l>x)\sim e^{-\frac{1-P(A_l)}{M\alpha^{\lambda(l)}}}, \quad i=1,\cdots,N. \tag{29}$$

Пусть в момент 0 все вызовы находятся в своих источниках. Через θ обозначим время до первой потери какого-нибудь вызова. Пусть $T>0$ — некоторый момент времени и $B_l(T)$ означает событие, заключающееся в том, что до момента T i-вызов не потерян, $i=1,\cdots,N$. Тогда, очевидно

$$P(\theta > T) = P\left\{\bigcap_{i=1}^{N} B_i(T)\right\}. \tag{30}$$

Применив несколько раз формулу

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A),$$

получим

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{N} B_i(T)\right\} = \prod_{i=1}^{N} P\left\{B_i(T) \,\Big|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} B_j(T)\right\}. \tag{31}$$

Заметим, что здесь

$$P\left\{B_i(T) \,\Big|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} B_j(T)\right\} = P\{\theta_i > T\},\ i=1,\cdots,N. \tag{32}$$

Из соотношений (30)—(32) выводится

Теорема 4.1. *Время θ до первой потери вызова удовлетворяет соотношению*

$$P\{\theta > T\} = \prod_{i=1}^{N} P\{_i > T\}. \tag{33}$$

2. *При быстрых обслуживаниях справедливо асимптотическое соотношение*

$$P\{\theta > T\} \sim \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} \frac{1-P(A_i)}{M\hat{\alpha}^{(i)}}\, T\right\}. \tag{34}$$

Формулой (34) можно пользоваться при не очень больших значениях N, при которых $\hat{\pi}_{Ni}$ все еще малы по сравнению с параметрами $\frac{1}{\sigma_i}$, $\frac{1}{a_i}$, $\frac{1}{\nu_i}$.

Дополнения. При получении (21) из (20) мы пользовались утверждением

$$\lim_{\nu_1 \to 0} P\left\{\frac{\hat{\alpha}_1 + \cdots + \hat{\alpha}_\lambda}{\lambda \cdot M\hat{\alpha}_1} \cdot \frac{\lambda}{M\lambda} > x\right\} = e^{-x}, \tag{35}$$

которое получается из доказываемых ниже лемм.

Лемма 1. *Если* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ *и*

$$P\{\xi < \infty\} = P\{\eta < \infty\} = 1,$$

то

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi \cdot \eta. \tag{36}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — любые числа. Справедливы неравенства

$$P\{|\xi_n \eta_n - \xi\eta| > \varepsilon\} \leqslant P\left\{|\xi_n - \xi| \cdot |\eta_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|\xi| \cdot |\eta_n - \eta| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{37}$$

Однако последовательность η_n^n стохастически ограничена, т. е. существует число M такое, что

$$P\,\{|\eta_n| > M \text{ для всех } n\} < \frac{\delta}{4}\cdot$$

Можно выбрать M еще таким образом, чтобы

$$P\,\{|\xi| > M\} < \frac{\delta}{4}\cdot$$

Существует такое n_0, что при всех $n > n_0$

$$P\left\{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2M}\right\} < \frac{\delta}{4}, \quad P\left\{|\eta_n - \eta| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right\} < \frac{\delta}{4}\cdot$$

Поэтому получим

$$P\left\{|\xi_n - \xi|\cdot|\eta_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant P\,\{|\eta_n| > M\} + P\left\{|\xi_n - \xi| \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}\right\} < \frac{\delta}{2},$$

а также

$$P\left\{|\xi|\cdot|\eta_n - \eta| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\delta}{2}\cdot$$

Последние два неравенства и (37) дают

$$P\,\{|\xi_n\,\eta_n - \xi\eta| \geqslant \varepsilon\} < \delta,$$

что и утверждается в (36). Лемма 1 доказана.

Пусть $\{\alpha_l^{(n)}\}_{l\geqslant 1}$ $(n=1, 2,\cdots)$ — последовательность независимых при каждом n, одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, и пусть при $n\to\infty$

$$\alpha_l^{(n)} \xrightarrow{P} \alpha_l, \quad M\alpha_l^{(n)} \to M\alpha_l \neq 0. \tag{38}$$

При этих условиях верна

Лемма 2. *Для любых* $\varepsilon>0$, $\delta>0$ *существует такое* N, *что при всех* n *и* $k>N$

$$P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)}+\cdots+\alpha_k^{(n)}}{kM\alpha_1^{(n)}} - 1\right| > \varepsilon\right\} < \delta. \tag{39}$$

Доказательство. Положим $\xi_{nl} = \dfrac{\alpha_l^{(n)}}{nM\,\alpha_1^{(n)}}$ и покажем, что последовательность серий $\xi_{n1},\cdots,\xi_{nn}$ подчиняется закону больших чисел, т. е. последовательность сумм $S_n = \xi_{n1}+\cdots+\xi_{nn}$ является относительно устойчивой (ср. [10], стр. 142). Для этого необходимо и достаточно, чтобы при $n\to\infty$

$$n\int_1^{\infty} dF_n\,(nM\,\alpha_1^{(n)}\,x + M\,\alpha_1^{(n)}) \to 0, \tag{40}$$

где $F_n(x) = P\,\{\alpha_1^{(n)} < x\}$.

В силу (38) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{M\alpha_1^{(n)}} = \dfrac{1}{M\alpha} \neq 0$ и

$$n\cdot\int\limits_1^\infty dF_n\,(nM\alpha_1^{(n)}x+M\alpha_1^{(n)})\leqslant\frac{1}{M\alpha_1^{(n)}}\int\limits_{m\cdot M\alpha_1^{(n)}}^{\infty}y\,dF_n\,(y+M\alpha_1^{(n)}).$$

Таким образом, для любых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ существует такое n_0, что при всех $n>n_0$

$$P\{|S_n-1|\geqslant\varepsilon\}<\delta/2. \tag{41}$$

С другой стороны, последовательность $\{\alpha_l^{(n)}\}_{l\geqslant1}$, $m=1,\cdots,n_0$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, т. е. для $\varepsilon>0$, $\delta>0$ существуют такие числа N_m, что при всех $k>N_m$

$$P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(m)}+\cdots+\alpha_n^{(m)}}{kM\alpha_1^{(m)}}-1\right|>\varepsilon\right\}<\delta/2,\ m=1,\cdots,n_0. \tag{42}$$

Теперь (39) следует из (41) и (42), если мы выберем

$$N=\max\{N_1,\cdots,N_{n_0},n_0\}.$$

Лемма 3. *Если последовательность $\{\alpha_l^{(n)}\}$ удовлетворяет условиям леммы 2 и целочисленные сл. в. $\lambda_n>0$ таковы, что $\lambda_n\xrightarrow{P}\infty$ при $n\to\infty$, то*

$$\frac{\alpha_1^{(n)}+\cdots+\alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n\cdot M\alpha_1^{(n)}}\xrightarrow{P}1. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть N—достаточно большое число, $\varepsilon>0$, $\delta>0$. Существует такое n_0, что при всех $n>n_0$

$$P\{\lambda_n>N\}>1-\delta.$$

Выберем для N то значение, при котором выполняется соотношение (39) для всех $k>N$. При всех $n>n_0$

$$P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)}+\cdots+\alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n\cdot M\alpha_1^{(n)}}-1\right|\geqslant\varepsilon\right\}=P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)}+\cdots+\alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n\cdot M\alpha_1^{(n)}}-1\right|>\varepsilon\cap\{\lambda_n\leqslant N\}\right\}+$$

$$+P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)}+\cdots+\alpha_{\lambda_n}^{(n)}}{\lambda_n\cdot M\alpha_1^{(n)}}-1\right|>\varepsilon\cap\{\lambda_n>N\}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\lambda_n\leqslant N\}+P\left\{\left|\frac{\alpha_1^{(n)}+\cdots+\alpha_k^{(n)}}{k\cdot M\alpha_1^{(n)}}-1\right|>\varepsilon\ \text{для всех}\ k>N\right\}<2\delta,$$

и лемма 3 доказана.

Соотношение (35) следует из леммы 1 с учетом (15) и (43).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 12.VII.1971

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Բ. Ն. ԴԻՄԻՏՐՈՎ. Վերջավոր թվով աղբյուրներ և սպասողության ժամանակի վրա դրված սահմանափակումներ ունեցող նախապատվություններով մի սիստեմ *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է նախապատվություններ սպասողության վերջավոր թվով աղբյուրներ ունեցող սպասարկման սիստեմներ։ Ստացված են ռեկուրենտ առնչություններ զբաղվածության տևողության և պահանջի սիստեմում մնալու ժամանակաշրջանի համար։

Ենթադրելով, որ սպասարկման ժամանակները փոքր են, ուսումնասիրվում է պահանջի առաջին կորստի մոմենտի ասիմպտոտիկ վարքը։

E. A. DANIELIAN, B. N. DIMITROV. *On a priority finitesource system with bounded waiting time* (summary)

Finite-source single server queuing system with preemptive priority discipline and some other special features is considered.

Recurrent relations for the busy period and for the time spent by a customer in the queue are derived. The asymptotic behaviur of the time before the first los , of a customer is studied in the case when the service times are small.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. K. Jaiswal.* Priority Queues, Academic Press, New York and London, vol. 50s 1968.
2. *В. Ф. Матвеев.* Однолинейная система обслуживания с приоритетом, Изд-во МГУ, сб. „Матем. вопр. управл. произв"., вып. 2, 1970.
3. *О. И. Бронштейн.* Об управляемой системе многоэтапного обслуживания „Техн. киберн.", № 2, 1969.
4. *Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко.* Введение в теорию массового обслуживания, М., „Наука", 1966.
5. *Л. Г. Афанасьева.* О некоторых задачах массового обслуживания с ограниченным временем ожидания, „Техн. киберн.", № 6, 1964.
6. *И. Н. Коваленко.* Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением Теор. вер. и ее прим., VI, вып. 2, 1961.
7. *Э. А. Даниелян, Б. Н. Димитров, Б. Н. Пискунов.* Об одной системе управления с конечным числом объектов и приоритетом, Сб. ОКБА „Автоматизация химических производств", НИИТЭХИМ, М., 4, 1971.
8. *Д. Кокс, В. Смит.* Теория восстановления, М., „Советское Радио", 1967.
9. *Б. В. Гнеденко.* Курс теории вероятностей, М., „Наука", 1969.
10. *Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТА, М.—Л., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII № 1, 1972 Математика

Э. О. НАЗАРЯН

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВА C^n НА ПРОСТРАНСТВО C^m $(m \leqslant n)$, ПРИДАЮЩИХ ВСЕМ КОМПЛЕКСНЫМ ПРЯМЫМ ОДИНАКОВЫЙ ДЕФЕКТ

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения области $G \subset C_z^n$ на область $G^* \subset C_w^m$ $(m \leqslant n)$, конформные на комплексных прямых и придающие всем комплексным прямым, проходящим через каждую точку $Q \in G$, одинаковый дефект, зависящий только от точки Q. Построен, в замкнутом виде, класс подобных квазиголоморфных отображений $E_Q(n, m)$, где $m=2l$, который в частном случае, когда $n=m=2l$, совпадает с классом В. В. Юрашева (см. [5]).

1°. Рассмотрим отображение

$$T\colon w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^1(G), \; i=1, \cdots, m$$

области $G \subset C_z^n$, принадлежащее классу квазиголоморфных отображений $B_Q(n, m, k)$, конформных на комплексных прямых (см. [6]). Пусть

$$Td\colon w = Az + B\bar{z}$$

—дифференциал отображения (T). Здесь

$$w = (w_1, \cdots, w_m)', \; z = (z_1, \cdots, z_n)', \; A = (a_{ij}), \; B = (b_{ij}),$$

$$i=1, \cdots, m; \; j=1, \cdots, n; \; a_{ij} = \left(\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\right)_{z=Q}, \quad b_{ij} = \left(\frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j}\right)_{z=Q},$$

$$\operatorname{Rang} A = k \leqslant m.$$

В силу теоремы 2.1, доказанной в работе [6], для того чтобы отображение $T \in B_Q(n, m, k)$ в точке Q, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(A\omega)'\bar{B}\omega = 0 \tag{1.1}$$

для всех $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)'$, или условия

$$A'\bar{B} = \Psi, \tag{1.2}$$

где Ψ—некоторая кососимметрическая матрица.

Если $T \in B_Q(n, m, k)$ в точке Q, то комплексная прямая

$$z = \omega t, \tag{1.3}$$

где t — комплексный параметр, при отображении T_d переходит или в точку, или, вообще говоря, в действительно двумерную плоскость с уравнением

$$w = A\omega t + \overline{B\omega}\,\overline{t}. \tag{1.4}$$

Дефект плоскости (см. [3], стр. 411) (1.4) вычисляется по формуле (см. [4])

$$\operatorname{def}(\omega, T_d) = 2\left(\frac{G(A\omega, \overline{B\omega})}{(|A\omega|^2 - |\overline{B\omega}|^2)^2 + 4G(A\omega, \overline{B\omega})}\right), \tag{1.5}$$

где $G(A\omega, \overline{B\omega})$—определитель Грамма векторов $A\omega$, $\overline{B\omega}$.

Определение 1.1. Отображение

$$T\colon w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n) \in C^1(G),\ i = 1, \cdots, m$$

области $G \subset C_z^n$ на область $G^* \subset C_w^m$, принадлежащее классу квазиголоморфных отображений $B_Q(n, m, k)$ в точке $Q \in G$, принадлежит к классу $E_Q(n, m, k)$ в этой точке, если дифференциал T_d придает всем невырождающимся комплексным прямым, проходящим через точку Q, одинаковый дефект.

Пусть $T \in B_Q(n, m, k)$ в точке Q. Преобразуя формулу (1.5), получаем, что

$$\operatorname{def}(\omega, T_d) = \left(\frac{2(|A\omega|^2|\overline{B\omega}|^2 - |(A\omega)'\overline{B}\omega|)}{(|A\omega|^2 - |\overline{B\omega}|^2)^2 + 2(|A\omega|^2|\overline{B\omega}|^2 - |(A\omega)'\overline{B}\omega|^2)}\right)^{1/2}. \tag{1.6}$$

Так как отображение T_d удовлетворяет условию (1.1), то формула (1.6) в этом случае принимает более простой вид, а именно

$$\operatorname{def}(\omega, T_d) = \left(\frac{2|A\omega|^2|\overline{B\omega}|^2}{|A\omega|^4 + |\overline{B\omega}|^4}\right)^{1/2}. \tag{1.7}$$

Пусть $\operatorname{def}(\omega, T_d) = \delta > 0$. Тогда из (1.7) получаем, что

$$\sigma|A\omega|^2 = |\overline{B\omega}|^2, \tag{1.8}$$

где либо $\sigma = (1 + \sqrt{1-\delta^4})\delta^{-2}$, либо $\sigma = (1 - \sqrt{1-\delta^4})\delta^{-2}$. Условие (1.8) эквивалентно следующему:

$$\sigma\omega' A'\overline{A}\,\overline{\omega} = \omega' B^* B\overline{\omega}$$

или

$$\omega'(\sigma A'\overline{A} - B^* B)\overline{\omega} = 0. \tag{1.9}$$

Положим $C = \sigma A'\overline{A} - B^* B$. Имеет место

Лемма 1.1. *Для того чтобы равенство*

$$\omega' C\overline{\omega} = 0 \tag{1.10}$$

имело место для любого ω *необходимо и достаточно, чтобы матрица* C *была нулевой.*

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, \cdots, n$, тогда условие (1.10) можно записать в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\overline{\omega}_j = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\omega_i\overline{\omega}_j = 0.$$

Чтобы это равенство имело место для любого w_i $(i=1,\cdots,n)$ необходимо, чтобы $c_{ij}=0$ $(i,j=1,\cdots,n)$.. Лемма доказана.

Из леммы и из (1.9) следует, что

$$\sigma A'\bar{A}=B^*B. \tag{1.11}$$

Из (1.2) и (1.1) следует

Теорема 1.1. *Для того чтобы отображение*

$$T:\ w_i=f_i(z_1,\cdots,\bar{z}_n)\in C^2(G),\ i=1,\cdots,m$$

области $G\subset C^n_z$ на область $G^*\subset C^m_w$ принадлежало классу $B_\sigma(n, m, k)$, для какого либо k, в точке $Q\in G$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B, голоморфной и антиголоморфной частей дифференциала отображения T в точке Q, удовлетворяли условиям

$$1)\qquad A'\bar{B}=\Psi,$$

где Ψ — кососимметрическая матрица;

$$2)\qquad \sigma A'\bar{A}=B^*B,$$

где либо $\sigma=(1+\sqrt{1-\delta^4})\,\delta^{-2}$, либо $\sigma=(1-\sqrt{1-\delta^4})\,\delta^{-2}$, δ — дефект, приобретаемый комплексными прямыми, проходящими через точку Q.

2°. О совместности условий теоремы 1.1. Пусть в точке Q

$$\operatorname{Rang} A=k<m. \tag{2.1}$$

Для определенности предположим, что отличен от нуля минор

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\cdots\ k\\ i_1\ i_2\cdots\ i_k\end{pmatrix}\neq 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через A_1, B_1—матрицы размерности (k, n), состоящие из первых k строк матриц A и B, а через A_2, B_2—матрицы размерности $(m-k, n)$, состоящие из последних $(m-k)$ строк матриц A и B.

Тогда в силу (2.1) и (2.2) существует матрица λ, размерности $(m-k, k)$, для которой справедливо равенство

$$A_2=\bar{\lambda}A_1$$

или

$$A=\left(\frac{E}{\lambda}\right)A_1, \tag{2.3}$$

где E—единичная матрица размерности k.

В работе [6] установлено, что из первого условия теоремы 1.1 и условий (2.1) и (2.2) следует, что

$$\bar{B}_1=\bar{P}A_1-\lambda^*\bar{B}_2, \tag{2.4}$$

где P—кососимметрическая матрица. В силу того, что $T\in B_\sigma(n, m, k)$ в точке Q, из соотношения (2.4) далее следует, что

$$\operatorname{Rang}\left(\frac{A_1}{B_2}\right)=m. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3) и (2.4) во второе условие теоремы 1.1, получаем что

$$\sigma(A_1', A_1'\lambda^*)\begin{pmatrix}\overline{A}_1\\ \lambda\overline{A}_1\end{pmatrix} - (A_1' P^* - B_2^*\overline{\lambda},\ B_2^*)\begin{pmatrix}P\overline{A}_1 - \lambda' B_2\\ B_2\end{pmatrix}$$

или

$$\sigma A_1'\overline{A}_1 + \sigma A_1'\lambda^*\lambda\overline{A}_1 - (A_1'P^* - B_2^*\overline{\lambda})(P\overline{A}_1 - \lambda' B_2) - B_2^* B_2 = 0.$$

Отсюда далее вытекает, что

$$\begin{pmatrix}\overline{A}_1\\ B_2\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\sigma D - P^*P, & P^*\overline{\lambda}\\ \overline{\lambda}P, & -D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \overline{B}_2\end{pmatrix}' = 0, \tag{2.6}$$

где $D = E + \lambda'\overline{\lambda}$—невырожденная матрица (см. [1], стр. 33). Из условий (2.5) и (2.6) следует, что

$$\begin{pmatrix}\sigma D - P^*P, & P^*\overline{\lambda}\\ \overline{\lambda}P, & -D\end{pmatrix} = 0.$$

Это соотношение противоречит требованию невырожденности матрицы D.

Нам остается разобрать случай, когда $k = m$, т. е.

$$\operatorname{Rang} A = m. \tag{2.7}$$

Сначала мы докажем некоторые леммы.

Лемма 2.1. *Пусть матрицы A и B размерности (m, n) удовлетворяют условию*

$$A'\overline{B} = \Psi, \tag{1.2}$$

где Ψ—кососимметрическая матрица и

$$\operatorname{Rang} A = m. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\overline{B} = \overline{\Phi} A, \tag{2.8}$$

где Φ—некоторая кососимметрическая матрица.

Доказательство. Известно, что (см. [2], теорема 1) для существования решения матричного уравнения

$$A'X = \Psi \tag{1.2}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$A'A'^{+}\Psi = \Psi,$$

или, в силу кососимметричности матрицы Ψ, условия

$$\Psi A^{+} A = \Psi, \tag{2.9}$$

где A^{+} — псевдообратная матрица для матрицы A (см. [1], стр. 32). При выполнении этого условия общее решение уравнения (1.2) дается формулой

$$X = A'^{+}\Psi + (E - A'^{+}A')U, \tag{2.10}$$

где E—единичная матрица размерности m, а U—произвольная матрица размерности (m, n).

Подставляя левую часть соотношения (2.9) в (2.10), получаем, что

$$X=\overline{\Phi}A+(E-A'^{+}A')U,$$

где

$$\overline{\Phi}=A'^{+}\Psi A^{+}.$$

Кососимметричность матрицы Φ проверяется непосредственно. Так как матрица $\overline{B}$ удовлетворяет уравнению (1.2), то существует такая матрица U_1, что

$$\overline{B}=\overline{\Phi}A+(E-A'^{+}A')U_1. \tag{2.11}$$

Из определения псевдообратной матрицы следует, что если матрица A имеет полный ранг, т. е. если Rang $A=m$, то

$$AA^{+}=E \quad \text{или} \quad E-A'^{+}A'=0. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.11), завершаем доказательство леммы.

Лемма 2.2. *Если*

$$\overline{B}=\overline{\Phi}A, \tag{2.8}$$

где Φ—кососимметрическая матрица, то

$$A'\overline{B}=\Psi, \tag{1.2}$$

где матрица Ψ—тоже кососимметрична.

Доказательство. Действительно, умножая равенство (2.8) слева на матрицу A' и обозначая

$$\Psi=A'\overline{\Phi}A,$$

получаем условие (1.2)

Из лемм 2.1, 2.2 следует, что условие 1) теоремы 1.1 эквивалентно условию (2.8). Таким образом, должны одновременно выполняться условия

$$\overline{B}=\overline{\Phi}A \tag{2.8}$$

и

$$\sigma A'\overline{A}=B^{*}B. \tag{1.11}$$

Отсюда вытекает, что матрицы A и B должны иметь один и тот же ранг, равный m. Отсюда и из условия (2.8) далее следует, что $m=2l$, поскольку кососимметрическая матрица Φ может иметь только четный ранг (см. [1], стр. 322).

Подставляя (2.8) в (1.11), находим, что $\Phi^{*}\Phi=\sigma E$, где

$$\sigma=(1+\sqrt{1-\delta^{4}})\,\delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l}|\Phi_{sl}|^{2}<1,$$

$$\sigma=(1-\sqrt{1-\delta^{4}})\,\delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l}|\Phi_{sl}|^{2}>1.$$

Итак доказаны

Теорема 2.1. *Класс $E_Q(n, m, k)$ в случае, если $k<m$ и $m\neq 2l$— пуст.*

Замечание. Благодаря наличию этой теоремы, мы дальше рассматриваем только отображения $E_Q(n, 2l, 2l) \equiv E_Q(n, 2l)$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы отображение*

$$T:\ w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C_1(G),\ i=1, \cdots, 2l,\ 2l \leqslant n$$

области $G \subset C_z^n$ принадлежало классу квазиголоморфных отображений $E_Q(n, 2l)$ в точке Q, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B, голоморфной и антиголоморфной частей дифференциала отображения T в этой точке удовлетворяли условиям

$$1)\quad \bar{B} = \bar{\Phi} A,$$

где Φ—кососимметрическая матрица и

$$2)\quad \Phi^*\Phi = \sigma E,$$

где

$$\sigma = (1+\sqrt{1-\delta^4})\delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 > 1,$$

$$\sigma = (1-\sqrt{1-\delta^4})\,\delta^{-2}, \quad \text{если} \quad \sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 < 1.$$

Здесь δ — дефект невырождающихся комплексных прямых, проходящих через точку $Q \in G$.

Замечание. Второе условие этой теоремы означает, что кососимметрическая матрица Φ отличается от унитарной на постоянный множитель.

3°. Построение класса отображений $E_Q(n, 2l)$.

Определение 3.1. Отображение

$$T:\ w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^1(G),\ i=1, \cdots, 2l;\ 2l \leqslant n,$$

принадлежит классу квазиголоморфных отображений $E_Q(n, 2l)$ в области G, если

$$1)\quad \mathrm{Rang}\ \frac{\partial(w, \bar{w})}{\partial(z, \bar{z})} = 4l;$$

2) В каждой точке $Q \in G$ дифференциал отображения T сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие на всех невырождающихся комплексных прямых, переводит окружности, лежащие на вырождающихся комплексных прямых, в точки и придает всем невырождающимся комплексным прямым, проходящих через точку Q, одинаковый дефект.

Очевидно, что для подобного отображения имеет место теорема 2.2 в любой точке $Q \in G$.

Рассмотрим вопрос об интегрировании системы дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции $w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n)$, определяющие отображение $E_Q(n, 2l)$.

Эта система дифференциальных уравнений, в силу теоремы 2.2, может быть написана в следующей форме:

$$\begin{cases} \overline{B} = \overline{\Phi} A \\ A = -\sigma^{-1} \Phi \overline{B}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\sigma^{-1} = \left(\sum\limits_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 \right)^{-1}$ — элементы кососимметрической матрицы Φ, функции $\Phi_{st} \in C^1(G)$ $(s, t=1, \cdots, 2l)$.

Последнее обстоятельство следует из того, что если первое равенство условия (3.1) умножить справа на матрицу A^+, получается $\overline{\Phi} = \overline{B} A^+$.

В работе [6] доказано, что из условий интегрируемости системы (3.1) следует голоморфность функций

$$\Phi_{ij} \text{ и } \left(\sum_{s=1}^{2l} |\Phi_{st}|^2 \right)^{-1} \overline{\Phi}_{ij}$$

в области G. Учитывая голоморфность этих функций, можно доказать (см. [5], стр. 74), что

$$\Phi = \varphi L, \tag{3.2}$$

где φ—некоторая голоморфная функция $L=(l_{ij})$, i, $j=1, \cdots, 2l$ — некоторая кососимметрическая унитарная матрица.

Используя соотношения (3.1), легко показать, что

$$\Lambda = W - \Phi \overline{W}. \tag{3.3}$$

Здесь $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_{2l})'$, Λ_k —функции, голоморфные в области G.

Решая систему, состоящую из уравнения (3.3) и ему сопряженного, получим

$$W = (E - \Phi\overline{\Phi})^{-1}(\Phi\overline{\Lambda} + \Lambda). \tag{3.4}$$

Подставляя правую часть соотношения (3.2) в (3.4), найдем, что

$$W = (\varphi L \overline{\Lambda} + \Lambda)(1 + |\varphi|^2)^{-1}. \tag{3.5}$$

Итак доказана

Теорема 3.1. *Если отображение*

$$T: \; w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n) \in C^2(G), \; i=1, \cdots, 2l; \; 2l \leqslant n$$

принадлежит классу $E_Q(n, 2l)$, то в некоторой окрестности каждой точки $Q \in G$ оно может быть представлено в виде

$$T^*: \; W = (\varphi L \overline{\Lambda} + \Lambda)(1 + |\varphi|^2)^{-1}.$$

Здесь φ и $\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_{2l})$ — голоморфные в G функции, L—постоянная унитарная кососимметрическая матрица.

Имеет место

Теорема 3.2. *Отображение T^* области $G \subset C_z^n$, определяемое равенствами* (3.5), *принадлежит классу $E_Q(n, 2l)$, если*

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial (w, \overline{w})}{\partial (z, \overline{z})} = 4l$$

в каждой точке $Q \in G$, функции, входящие в (3.5) *голоморфны в G, а L—постоянная унитарная кососимметрическая матрица.*

Теорема доказывается непосредственной проверкой. Рассмотрим пример отображения, принадлежащего классу $E_O(n, 2l)$.

Теорема 3.3. *Отображение*

$$w_k = (z_k + (-1)^{k-1} \bar{z}_{k+(-1)^{k-1}} z_{2l+1} \cdots z_n)(1+|z_{2l+1} \cdots z_n|^2)^{-1}, \tag{3.6}$$

$k=1, \cdots, 2l$, *принадлежит классу $E_O(n, 2l)$ в области*

$$G = \left\{ z \in C^n, \sum_{k=1}^{2l} |z_k|^2 < 1, \ |z_{2l+1} \cdots z_n| < 1 \right\}$$

и отображает эту область на гипершар

$$\left\{ \sum_{k=1}^{2l} |w_k|^2 < 1 \right\}.$$

Доказательство. Подставляя в (3.5)

$$L_{2i-1,\,j} = \begin{cases} 0, & j \neq 2i \\ 1, & j = 2i \end{cases} \qquad L_{2i,\,j} = \begin{cases} 0, & j \neq 2i-1 \\ -1, & j = 2i-1, \end{cases}$$

$$\varphi = z_{2l+1} \cdots z_n, \ \Lambda_j = z_j, \ i = 1, \cdots, l; \ j = 1, \cdots, 2l,$$

получаем отображение (3.6).

Вычисления показывают, что

$$\mathrm{Rang} \frac{\partial (w, \bar{w})}{\partial (z, \bar{z})} = 4l \tag{3.7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{2l} |w_k|^2 = (1 + |z_{2l+1} \cdots z_n|^2)^{-1} \sum_{k=1}^{2l} |z_k|^2. \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.7) и (3.8) следует справедливость теоремы.

Заметим, что дефекты, приобретаемые комплексными прямыми при отображении (3.6), изменяются в области G от нуля до единицы.

В заключение выражаю благодарность проф. Б. А. Фуксу за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный
университет

Поступило 28.I.1971

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. C^m տարածության վրա $C^n (m<n)$ տարածության կոնֆորմ արտապատկերումների մասին, որոնք բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին հաղորդում են միևնույն դեֆեկտը

(ամփոփում)

Դիտարկվում են $G^* \subset C^m$ տիրույթի վրա $G \subset C^n_z (m<n)$ տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերումները, որոնք բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին հաղորդում են միևնույն դեֆեկտը։ Փակ տեսքով կառուցված է $E_O(n, m)$ դասը։ Գտնված են այդ դասին պատկանելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

E. H. NAZARIAN. *On quasi-conformal mappings of C^n space on C^m* ($m < n$) *which ascribe the same defect to every complex line* (summary)

The paper discuses conform mappings of domain $G \subset C_z^n$ on domain $G \subset C_z^m$ ($m < n$) which induces the same defect to each complex line. In a closed form the class $E_0(n, 2l)$ is constructed. Necessary and sufficient condition of belonging to that class are pointed out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Гантмахер.* Теория матриц, 1967.
2. *R. Penrose.* A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phill. Soc., 51, № 3, 1955, 406—413.
3. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.
4. *Д. Е. Рудник.* Об одной оценке дефекта при квазиголоморфных отображениях в пространстве C^n, Труды МИЭМ, вып. 4.
5. *В. В. Юрашев.* О квазиголоморфных отображениях, придающих всем комплексным прямым одинаковый дефект, Известия АН АрмССР, сер. „Математика", IV, № 1, 1969, 69—76.
6. *Э. О. Назарян.* Квазиголоморфные отображения пространства C^n на пространство C^m ($m < n$), конформные на комплексных прямых, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", VI, № 6, 1971, 423—439.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VII, № 1, 1972 Математика

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОСИ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМ СДВИГОМ И НЕТЕРОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В теории сингулярных интегральных уравнений со сдвигом обычно [1]—[2] предполагается, что сдвиг $\alpha(t)$ (изоморфизм контура Γ на себя) является дифференцируемым отображением и $\alpha'(t)\in H^{\lambda}(\Gamma)$. Такие условия на сдвиг $\alpha(t)$, разумеется, предполагают конечность контура Γ. В случае же бесконечного контура сдвиг $\alpha(t)$ всегда является неограниченной функцией, что приводит к тому, что оператор сдвига $(W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)]$ не ограничен, вообще говоря, в пространствах суммируемых функций. Здесь естественно возникает вопрос о корректном выборе пространства решений. Мы рассмотрим на контуре $\Gamma=(-\infty, \infty)$ сингулярное интегральное уравнение

$$(K\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+b(x)\varphi[\alpha(x)]+c(x)(S\varphi)(x)+d(x)(S\varphi)[\alpha(x)]=f(x), \tag{1}$$

где S—сингулярный оператор

$$(S\varphi)(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,$$

и $\alpha(x)$—дробно-линейный сдвиг, удовлетворяющий условию Карлемана: $\alpha[\alpha(x)]\equiv x$. Такой сдвиг, как известно, имеет вид

$$\alpha(x)=\frac{\delta x+\beta}{\gamma x-\delta},$$

где β, δ и γ—вещественные числа.

В настоящей статье для оператора (1) будет найдено весовое пространство $L_p^{\rho}(-\infty, \infty)$ (с весом ρ, зависящим от p), в котором оператор K можно рассматривать как нетеров. Будут найдены условия нетеровости и получена формула для вычисления индекса.

Подчеркиваем, что необходимость в построении специального пространства L_p^{ρ} возникает при $\gamma\neq 0$. В случае $\gamma=0$, т. е. в случае, когда сдвиг $\alpha(x)$ является отражением: $\alpha(x)=\nu-x$, $\nu=-\frac{\beta}{\delta}$, исследование упрощается и проводится в рамках пространства $L_p(-\infty, \infty)$*.

* При $\gamma=0$ исследование можно провести также и в пространстве L_p^{ρ} с любым весом ρ, допускаемым в теории сингулярных уравнений.

Исследование оператора K основано на одной простой схеме исследования линейных операторов вида $A+QB$, где Q—инволюция: $Q^2=I$, а A и B—операторы из некоторой алгебры. Эта схема приведена в § 1. В § 2 рассмотрен случай $\gamma=0$. Основной же результат получен в § 3.

Заметим, что общая схема § 1 применима такжє к уравнениям с произвольным гладким карлемановским сдвигом на замкнутом контуре, что позволяет по новому взглянуть на теорию таких уравнений. Мы, однако, здесь на этом не останавливаемся.

§ 1. О нетеровости одного класса линейных операторов

Пусть X—банахово пространство и Q—линейный (ограниченный) в X оператор, являющийся инволюцией:

$$Q^2=I,\ Q\neq \pm I.$$

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{M}$ линейных в X операторов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для любых $A,\ B\in\mathfrak{M}$ коммутант $AB—BA$ $(\in\mathfrak{M})$ вполне непрерывен в X;

2) для любого $A\in\mathfrak{M}$ существует оператор $A_1\in\mathfrak{M}$ такой, что оператор $QA-A_1Q$ вполне непрерывен в X.

Мы будем изучать операторы вида

$$K=A+QB, \tag{2}$$

где $A,\ B\in\mathfrak{M}$. Приведем предварительно несколько примеров алгебр $\mathfrak{M}$.

Пример 1. $X=L_p(-\infty,\ \infty)$, $p>1$, $(Q\varphi)(x)=\varphi(\nu-x)$, ν— вещественное число, и

$$(A\varphi)(x)=a(x)\,\varphi(x)+c(x)\,(S\varphi)(x)+(T\varphi)(x), \tag{3}$$

где T — вполне непрерывный оператор, $a(x),\ c(x)\in C([-\infty,\ \infty])$*. Здесь

$$(A_1\varphi)(x)=a(\nu-x)\,\varphi(x)-c(\nu-x)(S\varphi)(x). \tag{4}$$

Пример 2. $X=l_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $(Q\varphi)_n=(-1)^n\varphi_n$, $n=0,\ 1,\cdots$,

$$(A\varphi)_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n-k}\,\varphi_k+(T\varphi)_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ \{a_n\}_{-\infty}^{\infty}\in l_1.$$

Здесь $(A_1\varphi)_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{n-k}\,a_{n-k}\,\varphi_k,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ (ср. с [3]).

Пример 3. $X=L_p(\Gamma)$, $p>1$, Γ — ляпуновский контур, $Q=S$, $(A\varphi)(x)=a(x)\,\varphi(x)+(T\varphi)(x)$, $A_1=A$.

Здесь и всюду в дальнейшем через T, T_1, T_2 и т. д. обозначены вполне непрерывные операторы.

---

* Подчеркиваем, что функции из $C([-\infty,\ \infty)]$ имеют равные значения на бесконечности: $a(\infty)=a(-\infty)$.

Для операторов (2) справедлива следующая

Теорема 1. *Если оператор* $AA_1 - BB_1$ *нетеров в* X, *то и оператор* $A+QB$ *нетеров в* X.

Доказательство. Введем оператор

$$\bar{K} = A_1 - QB. \tag{5}$$

Мы имеем: $K\bar{K} = (A+QB)(A_1 - QB) = AA_1 - QBQB + QBA_1 - AQB = AA_1 - B_1B + T$, так что

$$K\bar{K} = AA_1 - BB_1 + T_1,$$

$$\bar{K}K = AA_1 - BB_1 + T_2, \tag{6}$$

где операторы T_1, T_2 вполне непрерывны в X. Остается применить теорему Аткинсона.

Остановимся на вопросе об индексе оператора K. В приложениях излагаемой схемы индекс $\varkappa(A)$ операторов A из алгебры $\mathfrak{M}$ обычно известен. Поэтому мы будем исходить из того, что индекс $\varkappa(AA_1 - BB_1)$ известен. Из (6) следует, что (в случае нетеровости)

$$\varkappa(K) + \varkappa(\bar{K}) = \varkappa(AA_1 - BB_1).$$

Отсюда ясно, что для вычисления $\varkappa(K)$ нужно установить связь между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(\bar{K})$. (В примерах 1 и 2 $\varkappa(K) = \varkappa(\bar{K})$, а в примере 3 $\varkappa(K) = -\varkappa(\bar{K})$.

Введем еще вспомогательный оператор

$$K' = A - QB, \tag{7}$$

который будем называть сопутствующим (по аналогии с терминологией в [2]). Привлечение оператора K' вызвано тем, что в приложениях обычно легче найти связь между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(K')$, чем между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(\bar{K})$. Оказывается, из связи между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(K')$ может быть получена связь между $\varkappa(K)$ и $\varkappa(\bar{K})$.

Добавим к аксиомам 1), 2), определяющим алгебру $\mathfrak{M}$, еще одну аксиому:

3) Множество нетеровых операторов из $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{M}$. Эта аксиома выполняется в приложениях, в частности, в примерах 1—3.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *алгебра, определяемая условиями* 1)—3), *пусть* $A, B \in \mathfrak{M}$ *и оператор* $AA_1 - BB_1$ *нетеров. Тогда из равенства*

$$\varkappa(L) = \varkappa(L') \tag{8}$$

для любого нетерова оператора $L = C + QD$, $C, D \in \mathfrak{M}$, *следует, что и*

$$\varkappa(K) = \varkappa(\bar{K}).$$

Доказательство. Операторы K, K', $\tilde{K}$ — нетеровы в силу теоремы 1. Заменим, пользуясь аксиомой 3, в операторе $K = A + QB$ оператор A на близкий ему по норме нетеров оператор $A^{(\varepsilon)}$ так, что операторы $K^{(\varepsilon)} = A^{(\varepsilon)} + QB$, $\tilde{K}^{(\varepsilon)} = A_1^{(\varepsilon)} - QB$, $(K^{(\varepsilon)})' = A^{(\varepsilon)} - QB$ по-прежнему нетеровы и, в силу теорем об устойчивости, их индексы не изменились. Очевидно, $A_1^{(\varepsilon)} = QA^{(\varepsilon)}Q + T^{(\varepsilon)}$, где $T^{(\varepsilon)}$ вполне непрерывен. Поэтому с самого начала можно считать, что A (а, следовательно, и $A_1 = QAQ + T$) нетеров. Имеем

$$A_1K = A_1A + QAB + T_3,$$

$$\tilde{K}A = A_1A - QAB + T_4,$$

где T_3, T_4 — вполне непрерывные операторы. Из (8), считая $L = A_1A + QAB$, получаем, что $\varkappa(A_1K) = \varkappa(\tilde{K}A)$. Так как здесь все операторы нетеровы, и $\varkappa(A_1) = \varkappa(A)$, то $\varkappa(K) = \varkappa(\tilde{K})$, что и требовалось.

Таким образом, если в алгебре $\mathfrak{M}$ удается доказать равенство (8): $\varkappa(L) = \varkappa(L')$, $L = C + QD$, $C, D \in \mathfrak{M}$, то индекс оператора K вычисляется по формуле

$$\varkappa(K) = \frac{1}{2}\varkappa(AA_1 - BB_1).$$

Замечание. Равенство (8) будет выполнено, если, например, в алгебре $\mathfrak{M}$ существует нетеров оператор U такой, что $UQ + QU$ — вполне непрерывный оператор. Тогда между данным оператором и сопутствующим существует простая связь:

$$UK - K'U = T. \tag{9}$$

В §§ 2, 3 в соответствующей реализации излагаемой схемы оператор U будет найден.

Заметим в связи с построениями этого параграфа, что для операторов вида $A + QB$, где $Q^2 = I$, некоторые результаты алгебраического характера были получены в работах D. Przeworska-Rolewicz при иных аксиоматических предположениях (см., например, [4]).

§ 2. Сингулярный оператор с отражением (случай $\gamma = 0$)

Рассматриваем в $L_p(-\infty, \infty)$, $p > 1$, оператор

$$(K\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi(\nu - x) + c(x)(S\varphi)(x) + d(x)(S\varphi)(\nu - x) \tag{10}$$

где ν — вещественное число, $a(x), b(x), c(x), d(x) \in C([-\infty, \infty])$. Оператор K имеет вид $K = A + QB$, где $(Q\varphi)(x) = \varphi(\nu - x)$, $(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + c(x)(S\varphi)(x)$, $(B\varphi)(x) = b(\nu - x)\varphi(x) + d(\nu - x)(S\varphi)(x)$. Очевидно, $QS = -SQ$, так что здесь оператор A_1, определяемый аксиомой 2) § 1 находится по формуле (4). Отметим, что в алгебре $\mathfrak{M}$ операторов вида $A+T$ аксиома 3) § 1 выполняется.

В силу теоремы 1 § 1 нетеровость оператора (10) обеспечивается нетеровостью оператора

$$(AA_1-BB_1)\varphi=p(x)\varphi(x)+q(x)(S\varphi)(x)+(T_5\varphi)(x),$$

где

$$p(x)+q(x)=[a(x)+c(x)][a(\nu-x)-c(\nu-x)]-[b(x)-d(x)][b(\nu-x)+ \\ +d(\nu-x)]=\Delta(x),\quad p(x)-q(x)=\Delta(\nu-x).$$

Таким образом, при

$$\Delta(x)\neq 0,\quad -\infty\leqslant x\leqslant\infty, \tag{11}$$

оператор (10) нетеров в $L_p(-\infty,\infty)$.

Переходим к вычислению индекса $\varkappa(K)$ оператора (10), считая условие (11) выполненным. Покажем, что $\varkappa(K)=\varkappa(K')$, где

$$(K'\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)-b(x)\varphi(\nu-x)+c(x)(S\varphi)(x)-d(x)(S\varphi)(\nu-x).$$

Имеет место простая связь вида (9):

$$SK-K'S=T_6, \tag{12}$$

где T_6—вполне непрерывный оператор. Для ее доказательства достаточно заметить, что $SQ=-QS$. Из (12) же следует, что

$$\varkappa(K)=\varkappa(K'),$$

каковы бы ни были коэффициенты a, b, c, $d\in C([-\infty,\infty])$. Тогда в силу теоремы 2 $\varkappa(K)=\varkappa(\bar{K})$, и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Оператор* (10) *нетеров в* $L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, *при выполнении условия* (11) *и* $\varkappa(K)=-\operatorname{ind}\Delta(x)$.

Следствие. Краевая задача Римана с отражением

$$A(x)\Phi^+(x)+B(x)\Phi^-(x)+C(x)\Phi^+(\nu-x)+D(x)\Phi^-(\nu-x)=F(x) \tag{13}$$

с непрерывными коэффициентами нетерова в $L_p^\pm$, если

$$\Delta(x)=A(x)B(\nu-x)-D(x)C(\nu-x)\neq 0,$$
$$-\infty\leqslant x\leqslant\infty$$

и ее индекс равен $-\operatorname{ind}\Delta(x)$.

Отметим работы И. М. Мельника [5] и В. И. Азаматовой [6], в которых рассматривались некоторые специальные случаи задачи (13) при $\nu=0$, а также работы Юханонова Н. Н. [8] и Комяка И. И. [9].

§ 3. Сингулярные операторы с дробно-линейным сдвигом

Рассматривается оператор

$$(K\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+b(x)\varphi[\alpha(x)]+c(x)(S\varphi)(x)+d(x)(S\varphi)[\alpha(x)]=f(x),$$
$$-\infty<x<\infty, \tag{14}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\delta x+\beta}{x-\delta}$$

(без ограничения общности считаем $\gamma=1$).

Введем следующее весовое пространство:

$$L_p^\rho = \left\{ \varphi(x) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \rho(x)\, dx < \infty \right\},$$

где

$$\rho(x) = |x-\delta|^{\frac{p}{2}-1}.$$

Очевидно, $\rho(x) = |\Delta|^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2}} |\alpha'(x)|^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}}$, $\Delta = \delta^2+\beta$.

Мы увидим (при некоторых предположениях к относительно коэффициентов a, b, c, d), что именно в этом пространстве операторы вида (14) образуют кольцо (с точностью до вполне непрерывных слагаемых).

п °1. *Случай сдвига, сохраняющего ориентацию* ($\Delta<0$). Обозначим

$$b_0(x) = \frac{b(x)(x-\delta)}{i\sqrt{|\Delta|}}, \quad d_0(x) = \frac{d(x)(x-\delta)}{i\sqrt{|\Delta|}},$$

$$(Q\varphi)(x) = i\sqrt{|\Delta|}\,\frac{\varphi[\alpha(x)]}{x-\delta},$$

так что оператор (14) принимает вид

$$K\varphi = a\varphi + b_0 Q\varphi + cS\varphi + d_0 QS\varphi. \tag{15}$$

Очевидно, оператор Q ограничен в L_p^ρ

$$\|Q\varphi\|_{L_p^\rho} = \|\varphi\|_{L_p^\rho}$$

и является инволюцией: $Q^2 = I$. Мы естественно будем предполагать, что коэффициенты $a(x)$, $b_0(x)$, $c(x)$, $d_0(x) \in C([-\infty, \infty])$. Тогда оператор K ограничен в L_p^ρ (см. [7]).

Справедлива следующая

Лемма. *Операторы Q и S коммутируют*

$$QS\varphi = SQ\varphi, \quad \varphi \in L_p^\rho.$$

Доказательство. Имеем

$$(QS\varphi)(x) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi}\,\frac{1}{x-\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\alpha(x)} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi}\,\frac{1}{x-\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi[\alpha(t)]\,|\alpha'(t)|}{\alpha(t)-\alpha(x)}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi[\alpha(t)]}{(t-\delta)(t-x)} dt = (SQ\varphi)(x).$$

Здесь мы воспользовались формулами

$$\alpha'(x) = -\Delta (x-\delta)^{-2}, \quad \alpha(t) - \alpha(x) = -\Delta \frac{t-x}{(t-\delta)(x-\delta)}.$$

Следствие. Операторы $K+T$, где K — оператор (15), а T — вполне непрерывный оператор, образуют кольцо.

Применим рассуждения § 1. Рассмотрим в L_p^ρ алгебру $\mathfrak{M}$ операторов вида

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + c(x)(S\varphi)(x) + (T\varphi)(x),$$

где T — вполне непрерывный оператор, $a(x), c(x) \in C([-\infty, \infty])$. Эта алгебра удовлетворяет аксиомам 1)—3) § 1, при этом оператор A_1, определяемый аксиомой 2), имеет вид

$$(A_1\varphi)(x) = a[\alpha(x)]\varphi(x) + c[\alpha(x)](S\varphi)(x),$$

что легко проверяется с помощью леммы.

В силу теоремы 1 § 1 нетеровость оператора (14) или, что то же, (15) в L_p^ρ обеспечивается нетеровостью оператора $AA_1 - BB_1$, где на этот раз

$$(B\varphi)(x) = b_0[\alpha(x)]\varphi(x) + d_0[\alpha(x)](S\varphi)(x), \quad (B_1\varphi)(x) = b_0(x)\varphi(x) + \\ + d_0(x)(S\varphi)(x).$$

Мы имеем

$$(AA_1 - BB_1)\varphi = m(x)\varphi(x) + n(x)(S\varphi)(x) + (T_7\varphi)(x),$$

где

$$m(x) + n(x) = \{a(x) + c(x)\}\{a[\alpha(x)] + c[\alpha(x)]\} - \\ -\{b(x) + d(x)\}\{b[\alpha(x)] + d[\alpha(x)]\} = \Delta_1(x),$$

$$m(x) - n(x) = \{a(x) - c(x)\}\{a[\alpha(x)] - c[\alpha(x)]\} - \\ -\{b(x) - d(x)\}\{b[\alpha(x)] - d[\alpha(x)]\} = \Delta_2(x).$$

Таким образом, условие нетеровости оператора K принимает вид

$$\Delta_1(x) \neq 0, \quad \Delta_2(x) \neq 0, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty. \tag{16}$$

Покажем, как и в § 2, что $\varkappa(K) = \varkappa(\widetilde{K})$, для чего достаточно показать, что $\varkappa(K) = \varkappa(K')$, где $K' = A - QB$.

Последнее утверждение вытекает из связи типа (9)

$$UK - K'U = T_8, \tag{17}$$

где U — обратимый в L_p^ρ оператор: $(U\varphi)(x) = u(x)\varphi(x)$, где

$$u(x) = \frac{x - \alpha(x)}{x + \alpha(x) + i} = \frac{x^2 - 2\delta x - \beta}{x^2 + \beta + i(x-\delta)} \neq 0.$$

Связь (17) проще всего проверить, если заметить, что $u(x)+ + u[\alpha(x)]\equiv 0$.

Тем самым получена следующая

Теорема 4. *Пусть* $a(x), c(x), b(x)(x-\delta), d(x)(x-\delta)\in \in C([-\infty, \infty])$. *Оператор* (14) *нетеров в пространстве* L_p^ρ *при выполнении условий (16), при этом*

$$\varkappa(K) = -\frac{1}{2}\operatorname{ind}\frac{\Delta_1(x)}{\Delta_2(x)}.$$

Следствие. Краевая задача с дробно-линейным сдвигом $(\Delta<0)$

$$A(x)\Phi^+(x)+B(x)\Phi^-(x)+C(x)\Phi^+[\alpha(x)]+D(x)\Phi^-[\alpha(x)]=F(x)$$
$$-\infty<x<\infty$$

с коэффициентами $A(x), B(x), C(x)(x-\delta), D(x)(x-\delta)\in C([-\infty, \infty])$ нетерова в $(L_p^\rho)^\pm$, если $\Delta_1(x)=A(x)A[\alpha(x)]-C(x)C[\alpha(x)]\neq 0$, $\Delta_2(x)=B(x)B[\alpha(x)]-D(x)D[\alpha(x)]\neq 0$, и ее индекс равен

$$-\frac{1}{2}\ \operatorname{ind}\frac{\Delta_1(x)}{\Delta_2(x)}.$$

п° 2. *Случай сдвига, изменяющего ориентацию* $(\Delta>0)$. В случае такого сдвига все построения повторяют рассуждения § 2. Изменения по сравнению с п° 1 этого параграфа коснутся лишь выбора Q:

$$(Q\varphi)(x)=\sqrt{\Delta}\ \frac{\varphi[\alpha(x)]}{x-\delta}$$

(очевидно, снова $Q^2=I$, $\|Q\varphi\|_{L_p^\rho}=\|\varphi\|_{L_p^\rho}$). В этом случае, как и в § 2,

$$QS=-SQ.$$

Поэтому оператор A_1 по оператору $(A\varphi)(x)=a(x)\varphi(x)+c(x)(S\varphi)(x)$ строится в виде $(A_1\varphi)(x)=a[\alpha(x)]\varphi(x)-c[\alpha(x)](S\varphi)(x)$. И, наконец, роль оператора U из связи (9) играет, как и в § 2, оператор S. Окончательный результат содержит следующая

Теорема 5. *Пусть* $a(x), c(x), b(x)(x-\delta), d(x)(x-\delta)\in \in C([-\infty, \infty])$. *Оператор* (14) *нетеров в* L_p^ρ *при выполнении условия*

$$\Delta(x)=\{a(x)+c(x)\}\{a[\alpha(x)]-c[\alpha(x)]\}-$$
$$-\{b(x)-d(x)\}\{b[\alpha(x)]+d[\alpha(x)]\}\neq 0,$$
$$-\infty\leqslant x\leqslant\infty$$

при этом

$$\varkappa_{L_p^\rho}(K)=-\operatorname{ind}\Delta(x).$$

Аналогично переформулируется следствие из п°1.

Ростовский-на-Дону
Государственный университет

Поступило 10.VI.1971

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Կառլեմանի կոտորակագծային տեղաշարժով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներ առանցքի վրա և ինվոլյուցիայով օպերատորների նետերայնությունը *(ամփոփում)*

Առաջարկվում է Բանախի տարածության մեջ $A - QB$ *(*Q*-ն ինվոլյուցիա է,* $Q^2 = I$*) տեսքի օպերատորների հետազոտման մի ընդհանուր սխեմա, որը կիրառվում է*

$$(K\varphi)(x) = a(x)\,\varphi(x) + b(x)\,\varphi[\alpha(x)] + \frac{c(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt +$$

$$+\frac{d(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-\alpha(x)}\,dt,$$

սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների ուսումնասիրության մեջ։ Այստեղ $\alpha(x)$*-ը կոտորակագծային տեղաշարժ է, որը բավարարում է Կարլեմանի պայմանին՝*

$$\alpha[\alpha(x)] \equiv x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Գտնված է այնպիսի կշռային L_p *տարածություն, որտեղ* K *օպերատորի համար ճիշտ է Նետերի տեսությունը։ Գտնված են օպերատորի նետերայնության պայմաններ և բանաձև, որով կարելի է հաշվել նրա ինդեքսը։*

N. K. KARAPETIANĆ, S. G. SAMKO. *Singular integral operators on a line with a fractional linear shift of Carleman type and Noether theory of operators with involution* (summary)

A general scheme of investigation of operators $A+QB$ with involution Q ($Q^2=I$) in Banach spaces is proposed and applied to singular integral operator

$$(K\varphi)(x) = a(x)\,\varphi(x) + b(x)\,\varphi[\alpha(x)] + c(x)(S\varphi)(x) + d(x)(S\varphi)[\alpha(x)]$$

where $(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(t-x)^{-1}\,dt$ and $\alpha(x)$ is a fractional linear shift of Carleman type: $\alpha[\alpha(x)] = x$. The weight L_p-space is found which is appropriate for the Noether theory of operator K. The condition for operator K to be Noetherian as well as the formula for its index are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., ФМ, 1963.
2. *Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН, XXIII, вып. 3, 1968.
3. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко.* О функциональном уравнении $\psi(x+a) - b(x) \times \psi(x) = g(x)$, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", V, № 5, 1970, 441—448.
4. *D. Przeworska-Rolewicz.* Sur les equations involutives et leurs applications, Studia Mathem., 20, № 2, 1961, 95—117.
5. *И. М. Мельник.* О сингулярном интегро-функциональном уравнении, Изв. ВУЗ-ов, Математика, № 2, 1964, 100—109.
6. *В. И. Азаматова.* О некоторых интегральных уравнениях с суммарными и разностными ядрами, Тр. II респ. конференции математиков Белоруссии, Минск, Белорусский ун-т, 1969, 249—252.

7. *К. И. Бабенко.* О сопряженных функциях, ДАН СССР, 62, № 2, 1948, 157—160.
8. *Н. Н. Юхананов.* О некоторых особых интегральных уравнениях на прямой и полупрямой, ДАН Тадж. ССР, 10, № 4, 1967, 10—14.
9. *И. И. Комяк.* Об одном интегральном уравнении на полуоси, 'ДАН БССР, 13, № 3, 1969, 197—201.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS