ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в с оответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը ЦЕНА 50 կ. к.

Индекс 77735

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

Э. О. НАЗАРЯН

КВАЗИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА C^n НА ПРОСТРАНСТВО C^m $(m \leqslant n)$, КОНФОРМНЫЕ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения области $G \subset C_z^n$ на область $G^* \subset C_w^m$ $(m \leqslant n)$, конформные на комплексных прямых. Построен, в замкнутой форме, класс квазиголоморфных отображений $B_0(n, m, k)$ (где k—ранг голоморфной части отображения), который в частном случае, когда $n = m = k$, совпадает с классом А. А. Шматкова (см. [4]).

§ 1. Постановка задачи

Пусть функции

$$T \quad w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n), \quad i=1, \cdots m,$$

определенные в области $G \subset C_z^n$ и удовлетворяющие там условию

$$\mathrm{Rang}\, \frac{\partial (w_1, \cdots, \overline{w}_m)}{\partial (z_1, \cdots, \overline{z}_n)} = 2m, \tag{1.1}$$

осуществляют отображение области $G \subset C_z^n$ на область $G^* \subset C_w^m$. Пусть точке $Q \in G$ соответствует при этом отображении точка $Q^* \in G^*$. Перенесем начала координат пространств C_z^n и C_w^m соответственно в точки Q и Q^* и рассмотрим дифференциал отображения (T).

$$T_d \quad w = Az + B\overline{z},$$

где $w = (w_1, \cdots, w_m)'$, $z = (z_1, \cdots, z_n)'$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$i=1, \cdots, m; \; j=1, \cdots, n.$$

Здесь

$$a_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial z_j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \overline{z}_j},$$

вычисленные в начале координат.

Матрицы A и B называют матрицами голоморфной и антиголоморфной частей отображения (T) в точке Q.

Из условия (1.1) следует, что

$$\mathrm{Rang} \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = 2m, \tag{1.2}$$

в силу чего ядро отображения (T_d) имеет действительную размерность, равную $2n-2m$.

В зависимости от размерности пересечения комплексной прямой

$$z = \omega t, \tag{1.3}$$

где $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)'$, t — комплексный параметр, с ядром отображения (T_d), удовлетворяющего условию (1.2), эта комплексная прямая при отображении (T_d) переходит или 1) в точку 0, если

$$A\omega = B\overline{\omega} = 0 \tag{1.4}$$

или 2) в действительную прямую $w = A\omega\tau$, где τ—действительный параметр, для чего необходимо и достаточно, чтобы

$$A\omega = \pm B\overline{\omega}, \tag{1.5}$$

либо 3) в действительно двумерную плоскость, определяемую уравнением

$$w = A\omega t + B\overline{\omega}\, \overline{t}. \tag{1.6}$$

Комплексная прямая $z = \omega t$, где ω удовлетворяет условиям (1.4) или (1.5), называется вырождающейся при отображении (T_d).

Рассмотрим окружность

$$\left\{ z \in C_z^n;\ |z|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = R^2,\ z = \omega t \right\}.$$

Полагая $t = re^{i\varphi}$, уравнение этой окружности можно написать в ви де

$$z = \omega e^{i\varphi} |\omega|^{-1} R, \tag{1.7}$$

где

$$|\omega|^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\omega_k|^2 \right)^{-1/2}.$$

Если комплексная прямая (1.3) вырождается, то окружности (1.7) при отображении (T_d) переходят или в точку или в отрезки прямой; в другом случае они переходят в эллипсы, определяемые уравнениями

$$w = (A\omega e^{i\varphi} + B\overline{\omega}\, e^{-i\varphi}) |\omega|^{-1} R.$$

Определение 1.1 Отображение

$$T \quad w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n),\ i = 1, \cdots, m$$

области $G \subset C_z^n$, удовлетворяющее там условию

$$\operatorname{Rang} \frac{\partial (w, \overline{w})}{\partial (z, \overline{z})} = 2m,$$

называется принадлежащим к классу квазиголоморфных отображений $B_Q(n, m, k)$ в точке $Q \in G$, если 1) дифференциал (T_d), вычисленный в точке Q, сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие на всех невырождающихся комплексных прямых и переводит в точки окружности с центром в точке Q, лежащие на всех вырождающихся комплексных прямых, 2) $\operatorname{Rang} A = k \leqslant m$.

Имеет место

Теорема 1.1. *Для того чтобы отображение* (T) *принадлежало к классу квазиголоморфных отображений* $B_Q(n, m, k)$, *для какого-либо* k, *в точке* Q, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$A'\overline{B} = \psi,$$

где ψ — *кососимметрическая матрица размерности* n.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть $T \in B_Q(n, m, k)$. Возьмем произвольный вектор

$$\{\omega e^{i\varphi}\} = \{\omega_1 e^{i\varphi}, \cdots, \omega_n e^{i\varphi}\},$$

лежащий в плоскости $z = \omega t$ и рассмотрим искажение $\varkappa$ радиуса окружности (1.7) в направлении этого вектора. Тогда

$$\varkappa^2 = \frac{|w|^2}{|z|^2} = (A\omega e^{i\varphi} + B\overline{\omega}\, e^{-i\varphi})(\overline{A}\,\overline{\omega} e^{-i\varphi} + \overline{B}\omega e^{i\varphi})\,|\omega|^{-2} =$$

$$= [|A\omega|^2 + |B\overline{\omega}|^2 + (A\,\omega)'\,\overline{B}\omega e^{i2\varphi} + (B\overline{\omega})'\,\overline{A}\,\overline{\omega} e^{-i2\varphi}]\,|\omega|^{-2}. \qquad (1.8)$$

Поскольку $T \in B_Q(n, m, k)$, коэффициент $\varkappa$ не зависит от параметра φ и, следовательно,

$$(A\omega)'\overline{B}\omega = \omega' A' \overline{B}\,\omega = 0. \qquad (1.9)$$

Равенство (1.9) эквивалентно равенству

$$\omega' B^* A\omega = 0, \qquad (1.10)$$

которое получается транспонированием матрицы (1.9). Складывая равенства (1,9) и (1,10), получаем

$$\omega'(A'\overline{B} + B^* A)\,\omega = 0. \qquad (1.11)$$

В силу того, что $T \in B_Q(n, m, k)$, заключаем, что равенство (1.11) имеет место для любого ω; отсюда легко следует, что

$$A'\overline{B} + B^* A = 0, \qquad (1.12)$$

или

$$A'\overline{B} = \psi,$$

где ψ — некоторая кососимметрическая матрица.

2. Достаточность. Умножая равенство

$$A'\overline{B} = -B^* A$$

слева на строку ω', а справа — на столбец ω, получаем, что

$$\omega' A'\overline{B}\omega = -\omega' B^* A\omega$$

или

$$(A\omega)'\overline{B}\,\omega = -(A\omega)'\overline{B}\omega.$$

Отсюда следует, что

$$(A\omega)'\overline{B}\,\omega = 0. \qquad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), находим

$$x^2=(|A\omega|^2+|B\bar{\omega}|^2)\,|\omega|^{-2}.$$

Из (1.9) и последнего равенства следует, что $T\in B_Q(n, m, k)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $T\in B_Q(n, m\ k)$. Если при отображении (T_d) комплексные прямые вырождаются, то они вырождаются только в точку.

Действительно, подставляя (1.5) в (1.9), приходим к условию (1.4).

Прямым вычислением может быть доказана

Теорема 1.2. *Для того чтобы отображение (T) принадлежало к классу $B_Q(n, m, k)$ в точке Q, необходимо и достаточно, чтобы отображение (T_d) сохраняло углы между любыми векторами, принадлежащими к одной и той же невырождающейся комплексной прямой, проходящей через точку Q.*

§ 2. Вспомогательные рассмотрения

1. Известно (см. [3]), что для любой матрицы A размерности (m, n), из системы матричных равенств

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (AX)^*=AX,\ (XA)^*=XA$$

определяется единственная матрица X размерности (n, m), которая обозначается через A^+ и называется псевдообратной матрицей для матрицы A.

Рассмотрим матрицы A, B размерности (m, n) и кососимметрическую матрицу ψ размерности n. Имеет место

Лемма 2.1. *Если матрицы A и B удовлетворяют равенству*

$$A'\bar{B}=\psi, \tag{2.1}$$

то существует такая матрица U_1 размерности (m, n), что

$$\bar{B}=FA+(E-A'^{+}A')\,U_1, \tag{2.2}$$

где F—кососимметрическая матрица размерности m, определяемая равенством

$$F=A'^{+}\psi A^{+}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из теоремы Пенроза (см. [2], теорема 1) следует, что для того чтобы существовало решение матричного уравнения

$$A'X=\psi, \tag{2.1'}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A'A'^{+}\psi=\psi. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) эквивалентно равенству

$$\psi A^{+}A=\psi, \tag{2.5}$$

которое получается транспонированием матриц левой и правой частей равенства (2.4), при использовании условия кососимметричности матрицы ψ.

Тогда матрица X определяется формулой

$$X = A'^{+}\psi + (E - A'^{+}A')\, U, \tag{2.6}$$

где E—единичная матрица размерности m, а U—произвольная матрица размерности (m, n).

Так как матрица $\overline{B}$ удовлетворяет уравнению (2.1′), то из (2.6) следует, что существует такая матрица U_1, что

$$\overline{B} = A'^{+}\psi + (E - A'^{+}A')\, U_1. \tag{2.7}$$

Из условия (2.5) вытекает

$$A'^{+}\psi = A'^{+}\psi A^{+}A = FA, \tag{2.8}$$

где $F = A'^{+}\psi A^{-}$ — кососимметрическая матрица, что проверяется непосредственно.

Подставляя (2.8) в (2.7), мы завершаем доказательство леммы.

II. Пусть теперь

$$\operatorname{Rang} A = k, \tag{2.9}$$

где $0 \leqslant k \leqslant m$. Для определенности предположим, что k—минор

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots k \\ i_1 & i_2 \cdots i_k \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.10}$$

В силу условий (2.9) и (2.10) существует матрица $\overline{\lambda}$ размерности $(m-k, k)$, для которой справедливо равенство

$$A_2 = \overline{\lambda} A_1. \tag{2.11}$$

Здесь A_1—матрица размерности (k, n), состоящая из первых k строк матрицы A, а A_2—матрица размерности $(m-k, n)$, состоящая из последних $(m-k)$ строк матрицы A.

Имея в виду равенство (2.11), мы можем написать, что

$$A = \left(\frac{E}{\lambda}\right) A_1, \tag{2.12}$$

где E—единичная матрица размерности k.

Теперь, учитывая условие (2.12), преобразуем равенство (2.2). Сначала докажем, что имеет место

Лемма 2.2. *Если U_2—матрица размерности $(m-k, m)$, состоящая из последних $(m-k)$ строк матрицы $E - A'^{+}A'$ и*

$$A = \left(\frac{E}{\lambda}\right) A_1,$$

то имеет место равенство

$$E - A'^{+}A' = \begin{pmatrix} -\lambda^{*} \\ E \end{pmatrix} U_2, \tag{2.13}$$

где матрица E (в правой части равенства)—единичная, размерности $(m-k)$.

Доказательство. Из определения псевдообратной матрицы следует, что

$$A'^{+}A' = (E\lambda^*)^{+} A_1'^{+} A_1' (E\lambda^*) = (E\lambda^*)^{+} (E\lambda^*) =$$

$$= \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} \left[(E\lambda^*) \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} \right]^{-1} (E\lambda^*) = \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} (\overline{D}, \overline{D}\lambda^*) = \begin{pmatrix} \overline{D}, & \overline{D}\lambda^* \\ \lambda\overline{D}, & \lambda\overline{D}\lambda^* \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{D} = \left[(E\lambda^*) \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} \right]^{-1}.$$

Тогда имеем

$$E - A'^{+}A' = \begin{pmatrix} E - \overline{D}, & \overline{D}\lambda^* \\ \lambda\overline{D}, & E - \lambda\overline{D}\lambda^* \end{pmatrix},$$

и из матричных равенств

$$E - \overline{D} = \lambda^*\lambda\overline{D}, \quad -\overline{D}\lambda^* = -\lambda^*(E - \lambda\overline{D}\lambda^*),$$

которые проверяются непосредственно, заключаем, что

$$E - A'^{+}A' = \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} (-\lambda^*\overline{D}, \; E - \lambda\overline{D}\lambda^*) = \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} U_2.$$

Лемма доказана.

Подставляя (2.13) в соотношение (2.2), его можно написать в виде

$$\overline{B} = FA + \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} U_3 \quad \text{или}$$

$$\overline{B} = F \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{\lambda} A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda^* \\ E \end{pmatrix} U_3, \tag{2.14}$$

где $U_3 = U_2 \cdot U_1$.

Поскольку матрица F кососимметрична, мы можем ее представить в виде

$$F = \begin{pmatrix} F_1, & -F_2' \\ F_2, & F_3 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

где F_1, F_3—кососимметрические матрицы размерностей соответственно k и $(m-k)$, а F_2—произвольная матрица размерности $(m-k,\ k)$.

Подставляя (2.15) в (2.14), получаем

$$\begin{aligned} \overline{B}_1 &= F_1A_1 - F_2'\overline{\lambda}A_1 - \lambda^*U_3, \\ \overline{B}_2 &= F_2A_1 + F_3\overline{\lambda}A_1 + U_3, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\overline{B}_1$—матрица размерности (k, n), состоящая из первых k строк матрицы $\overline{B}$, а $\overline{B}_2$—матрица размерности $(m-k, n)$, состоящая из последних $(m-k)$ строк матрицы $\overline{B}$.

Определяя U_3 из второго равенства условия (2.16) и подставляя в первое, находим, что

$$\overline{B}_1 = \overline{P}A_1 - \lambda^*\overline{B}_2,$$

где

$$\overline{P} = F_1 - F_2\overline{\lambda} + \lambda^* F_2 + \lambda^* F_3 \overline{\lambda}.$$

Из кососимметричности матриц F_1 и F_3 следует, что матрица P тоже кососимметрична.

Итак доказана

Лемма 2.3. *Пусть A, B—матрицы размерности (m, n), ψ—кососимметрическая матрица размерности n и*

$$A'\overline{B} = \psi, \quad \mathrm{Rang}\, A = k,$$

причем

$$A = \begin{pmatrix} E \\ \lambda \end{pmatrix} A_1.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \overline{\Phi} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

где

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} \overline{P}, & -\lambda^* \\ \overline{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

—кососимметрическая матрица размерности m.

Лемма 2.4. *Если*

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \overline{\Phi} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

то

$$A'\overline{B} = \psi,$$

где ψ—кососимметрическая матрица размерности n.

Доказательство. Умножая равенство (2.17) слева на матрицу $\begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}'$, получим

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}' \overline{\Phi} \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}.$$

Так как в правой части этого равенства стоит кососимметрическая матрица, то

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} A_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$A_1'\overline{B}_1 + B_2^* A_2 + B_1^* A_1 + A_2'\overline{B}_2 = 0.$$

Последнее равенство можно написать в форме

$$(A_1', A_2') \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} + (B_1^*, B_2^*) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$A'\overline{B} + B^* A = 0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобиться следующая

Лемма 2.5. *Пусть C—матрица размерности (m, n), и*

$$\operatorname{Rang} C = m, \tag{2.19}$$

а Φ_k $(k=1,\cdots, n)$—кососимметрические матрицы размерности m. Если

$$\Phi_i C_j = \Phi_j C_i \quad i<j;\ i, j=1,\cdots, n, \tag{2.20}$$

где C_j—j-ый столбец матрицы C, то матрицы Φ_k—нулевые.

Доказательство. В силу условия (2.19) существует m-минор матрицы C, отличный от нуля. Пусть

$$C\begin{pmatrix} 1\,2\cdots m \\ k_1k_2\cdots k_m \end{pmatrix}\neq 0. \tag{2.19'}$$

Тогда, пользуясь леммой Шматкова (см. [4], стр. 488), получаем

$$\Phi_t=0,\ t=k_1,\cdots, k_m. \tag{2.21}$$

Нам остается доказать, что $\Phi_k=0$ для $k\neq k_1,\cdots, k_m$. Выделим из (2.20) следующие m равенств:

$$\Phi_k C_t = \Phi_t C_k,\ t=k_1,\cdots, k_m. \tag{2.22}$$

В силу условий (2.21) правые части равенств (2.22) равны нулю, поэтому равенство (2.22) можно записать в следующей форме:

$$\Phi_k\cdot C\begin{pmatrix} 1\,2\cdots m \\ k_1k_2\cdots k_m \end{pmatrix}=0. \tag{2.23}$$

Из условий (2.19') и (2.23) следует, что

$$\Phi_k=0,\ k\neq k_1,\cdots, k_m.$$

Лемма доказана.

§ 3. Основная локальная теорема

Чтобы использовать результаты, полученные в § 2, для формулировки основной локальной теоремы, нам необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 3.1. *Для любой матрицы A размерности (m, n) существует кососимметрическая матрица ψ размерности n, удовлетворяющая условию*

$$\psi A^+ A = \psi. \tag{2.5}$$

Доказательство. Соотношение (2.5) можно записать в виде

$$\psi\,(E-A^+ A)=0.$$

Решая это уравнение относительно матрицы ψ, получим

$$\psi = V\,[E-(E-A^+ A)^+ (E-A^+ A)], \tag{3.1}$$

где V—произвольная матрица размерности (m, n). В силу эрмитово идемпотентности матрицы $E-A^+ A$ имеем (см. [3], лемма 2.1)

$$(E-A^+ A)^+ (E-A^+ A)=E-A^+ A.$$

Подставляя выражение для левой части последнего равенства в соотношение (3.1), получаем

$$\psi = V A^+ A. \tag{3.2}$$

В силу кососимметричности матрицы ψ, из соотношения (3.2) вытекает

$$VC=-C'V', \tag{3.3}$$

где $C=A^+ A$ —эрмитово идемпотентная матрица и Rang $C=$Rang $A=k\leqslant m$.

Нам остается доказать существование кососимметрической матрицы V, удовлетворяющей уравнению

$$VC=C'V. \tag{3.4}$$

В силу эрмитово идемпотентности матрицы C, ее можно привести к виду (см. [2], стр. 85, [1], стр. 208)

$$C=UE_k U^*, \tag{3.5}$$

где U—унитарная матрица, а E_k— диагональная матрица, у которой первые K диагональных элементов равны единице, а остальные являются нулевыми.

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем

$$VUE_k U^* = \overline{U} E_k U' V.$$

Умножая обе части этого равенства слева на матрицу U', а справа на U и учитывая унитарность матрицы U, находим, что

$$YE_k=E_k Y, \tag{3.6}$$

где

$$Y=U'VU. \tag{3.7}$$

Очевидно, уравнению (4.5) удовлетворяет любая кососимметрическая матрица $y=(y_{ij})$, $i, j=1,\cdots, n$, у которой $y_{ij}=0$, при $i>k$, $j>k$, а элементы y_{ij} для $i\leqslant k$, $j\leqslant k$ составляют кососимметрическую матрицу размерности k, тогда умножая равенство (3.7) слева на $(U')^{-1}$, а справа—на U^{-1}, получаем, что матрица V тоже кососимметрическая.

Лемма доказана.

Из теоремы 1.1 и лемм 2.3, 2.4, 3.1 следует

Теорема 3.1 (основная локальная). *Для того чтобы отображение*

$$T \quad w_i=f_i(z_1,\cdots,\overline{z}_n),\ i=1,\cdots, m$$

области $G\subset C_z^n$, *удовлетворяющее там условию*

$$\text{Rang}\ \frac{\partial (w, \overline{w})}{\partial (z, \overline{z})}=2m, \tag{1.1}$$

принадлежало к классу квазиголоморфных отображений $B_0(n, m, k)$ *в точке* $Q\subset G$, *необходимо и достаточно, чтобы его дифференциал* (T_d), *вычисленный в точке* Q, *имел вид*

$$W=\begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{\lambda} A_1\end{pmatrix} Z+\begin{pmatrix} P\bar{A}_1-\lambda' B_2 \\ B_2\end{pmatrix}\bar{z}, \tag{3.8}$$

где A_1, B_2, λ — *матрицы размерностей соответственно* (k, n) $(m-k, n)$, $(m-k, k)$, *а* P—*кососимметрическая матрица размерности* k.

Теорема 3.2. *Для того чтобы отображение* $T\in B_0(n, m, k)$ *в точке* Q, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{P}, & -\lambda^* \\ \bar{\lambda}, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2\end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где P—*кососимметрическая матрица размерности* k, λ—*некоторая матрица размерности* $(m-k, k)$, *а* A_1, A_2, B_1, B_2 — *матрицы, состоящие из первых* k *строк и последних* $(m-k)$ *строк матриц* A *и* B.

§ 4. Преобразование якобиана отображения $T\in B_0$ (n, m, k)

Из того, что отображение $T\in B_0$ (n, m, k) в точке Q, следует, что

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} A, & B \\ \bar{B}, & \bar{A}\end{pmatrix}=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} A_1, & P_1\bar{A}_1-\lambda' B_2 \\ \bar{\lambda} A_1, & B_2 \\ \bar{P} A_1-\lambda^*\bar{B}_2, & \bar{A}_1 \\ \bar{B}_2, & \lambda\bar{A}_1\end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} E & -\lambda' & P & 0 \\ \bar{\lambda} & E & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & E & -\lambda^* \\ 0 & 0 & \lambda & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & \bar{A}_1 \\ \bar{B}_2 & 0\end{pmatrix}=2m. \tag{4.1}$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & \bar{A}_1 \\ \bar{B}_2 & 0\end{pmatrix}=2m.$$

Переставляя второй и четвертый блок-строки этой матрицы, легко видеть, что последнее условие эквивалентно следующему:

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2\end{pmatrix}=m. \tag{4.2}$$

Из условия (4.1) также следует, что

$$\det\begin{pmatrix} E & -\lambda' & P & 0 \\ \bar{\lambda} & E & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & E & -\lambda^* \\ 0 & 0 & \lambda & E \end{pmatrix} \neq 0.$$

Отсюда, в результате преобразований, мы найдем, что

$$\det\begin{pmatrix} D & 0 & P & 0 \\ \bar{\lambda} & E & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & \bar{D} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & E \end{pmatrix} \neq 0, \tag{4.3}$$

где $D = E + \lambda'\bar{\lambda}$ — невырожденная матрица. Ее невырожденность следует из того (см. [1], стр. 33), что

$$D = E + \lambda'\bar{\lambda} = (E\lambda')\begin{pmatrix} E \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Переставляя в матрице (4.3) третий блок-столбец со вторым, а третью блок-строку со второй, получаем

$$\det\begin{pmatrix} D & P & 0 & 0 \\ \bar{P} & \bar{D} & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & 0 & E & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & E \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.4}$$

Из формулы Шура (см. [1], стр. 59) и из (4.4) следует, что

$$\det\begin{pmatrix} D, & P \\ \bar{P}, & \bar{D} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.5}$$

Используя равенство

$$\begin{pmatrix} E & \overline{D^{-1}P} \\ D^{-1}P & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{D}, & \bar{P} \\ P, & D \end{pmatrix},$$

условие (4.5) и снова формулу Шура, заключаем, что

$$\det\begin{pmatrix} E & \overline{D^{-1}P} \\ D^{-1}P & E \end{pmatrix} = \det\,(E - D^{-1}P\,\overline{D^{-1}P}) = \det\,(E - \Gamma\bar{\Gamma}) \neq 0. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\Gamma = D^{-1}P. \tag{4.7}$$

§ 5. Построение класса отображений $B_G(n, m, k)$

Определение 5.1. Отображение

$$T \qquad w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^1(G),\ i = 1, \cdots, m$$

принадлежит к классу квазиголоморфных отображений в области G, если

1) $$\operatorname{Rang}\frac{\partial(w, \bar{w})}{\partial(z, \bar{z})} = 2m,$$

2) Существуют функции $f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_k}$, для которых

$$\mathrm{Rang}\, \frac{\partial (w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_k})}{\partial (z_1, \cdots, z_n)} = k$$

во всех точках области. Здесь $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ — некоторые фиксированные индексы.

3) В каждой точке $Q \in G$ дифференциал (T_d) отображения T сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие на всех невырождающихся комплексных прямых и переводит в точки окружности с центром в точке Q, лежащие на всех вырождающихся комплексных прямых.

Очевидно, что для подобного отображения имеют место теоремы 3.1 и 3.2 в любой точке $Q \in G$.

Мы далее полагаем $\alpha_1 = 1, \cdots, \alpha_k = k$, что не умаляет общности наших рассмотрений.

Рассмотрим вопрос об интегрировании системы дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять функции

$$w_i = f_i(z_1, \cdots, \bar{z}_n) \in C^2 (G),\ i = 1, \cdots, m,$$

определяющие отображение $T \in B_Q (n, m, k)$.

Эта система дифференциальных уравнений, в силу теоремы 3.2, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}, & -\lambda^* \\ \bar{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь A_1, A_2, B_1, B_2—матрицы, состоящие из первых k строк и последних $(m-k)$ строк матриц A и B, P—кососимметрическая матрица размерности k, λ—некоторая матрица размерности $(m-k,\ k)$.

Перепишем систему (3.9) в раскрытом виде

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial w_q}{\partial z_i} - \sum_{\alpha=1}^{k} \bar{P}_{q\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_i} + \sum_{\beta=1}^{m-k} \bar{\lambda}_{\beta q} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial z_i} = 0 \\ &\frac{\partial w_{k+\beta}}{\partial z_i} - \sum_{\alpha=1}^{k} \bar{\lambda}_{p\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_i} = 0, \end{aligned} \right. \tag{5.1}$$

где $i = 1, \cdots, n$; $q = 1, \cdots, k$; $p = 1, \cdots, m-k$, функции $P_{q\alpha}$ и $\lambda_{p\alpha}$ являются элементами матриц λ, P (они пока произвольные функции класса $C^1 (G)$).

Последнее обстоятельство следует из того, что умножая равенство (3.9) справа на $\begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}^+$ и имея в виду условия (4.2), получаем

$$\begin{pmatrix} \bar{P}, & -\lambda^* \\ \bar{\lambda}, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}^+.$$

Выпишем систему (5.1) относительно индекса j

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{w}_q}{\partial z_j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \overline{P}_{q\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j} + \sum_{\beta=1}^{m-k} \overline{\lambda}_{\beta q} \frac{\partial \overline{w}_\beta}{\partial z_j} = 0 \\ &\frac{\partial w_{k+p}}{\partial z_j} - \sum_{\alpha=1}^{k} \overline{\lambda}_{p\alpha} \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.2}$$

Дифференцируя теперь (5.1) по z_l, а (5.2) по z_l и вычитая из первого равенства второе, получаем

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^{m-k}\left(\frac{\partial \overline{\lambda}_{\beta q}}{\partial z_j}\frac{\partial \overline{w}_{k+\beta}}{\partial z_l} - \frac{\partial \overline{\lambda}_{\beta q}}{\partial z_l}\frac{\partial \overline{w}_{k+\beta}}{\partial z_j}\right) - \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial \overline{P}_{q\alpha}}{\partial z_j}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_l} - \frac{\partial \overline{P}_{q\alpha}}{\partial z_l}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j}\right) = 0 \\ &\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial \overline{\lambda}_{p\alpha}}{\partial z_j}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_l} - \frac{\partial \overline{\lambda}_{p\alpha}}{\partial z_l}\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

Условия (5.3) можно записать в матричной форме

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda^*}{\partial z_l}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_j} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial z_j}\cdot\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_l} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial z_l}\frac{\partial w^1}{\partial z_j} + \frac{\partial \overline{P}}{\partial z_j}\frac{\partial w^1}{\partial z_l} = 0 \\ &\frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_l}\frac{\partial w^1}{\partial z_j} - \frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_j}\frac{\partial w^1}{\partial z_l} = 0 \end{aligned}\right.$$

или

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{P}}{\partial z_l}, & -\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial z_l} \\ \dfrac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_l}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^1}{\partial z_j} \\ \dfrac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{P}}{\partial z_j}, & -\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial z_j} \\ \dfrac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_j}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^1}{\partial z_l} \\ \dfrac{\partial w^2}{\partial z_l} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

где $i<j$; $i, j=1,\cdots, n$.

Здесь

$$\frac{\partial w^1}{\partial z_j} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_j},\cdots,\frac{\partial w_k}{\partial z_j}\right)', \quad \frac{\partial w^2}{\partial z_j} = \left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial z_j},\cdots,\frac{\partial w_m}{\partial z_j}\right)'.$$

Заметим, что столбцы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^1}{\partial z_j} \\ \dfrac{\partial \overline{w}^2}{\partial z_j} \end{pmatrix}, \quad j=1,\cdots, n$$

являются столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

которая, как мы показали в (4.2), имеет полный ранг, равный m.

Учитывая это обстоятельство и применяя лемму 2.5 к условиям (5.4), заключаем, что

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\lambda}}{\partial z_i} = 0, \quad i=1,\cdots, n,$$

т. е. элементы матриц P и λ являются голоморфными функциями. Имея в виду голоморфность функций P_{qt} и λ_{pt}, q, $t=1,\cdots,k$; $p=1,\cdots,m-k$, легко установить, что функции

$$\Lambda_q = w_q - \sum_{\alpha=1}^{k} P_{q\alpha}\overline{w}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m-k} \lambda_{\beta q} w_{k+\beta},$$

$$\Lambda_p = \overline{w}_{k+\beta} - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_{p\alpha}\overline{w}_\alpha \tag{5.5}$$

удовлетворяют условиям Коши-Римана. Действительно, в силу (5.1) имеем

$$\frac{\partial \Lambda_q}{\partial \overline{z}_l} = \frac{\partial w_q}{\partial \overline{z}_l} - \sum_{\alpha=1}^{k} P_{q\alpha}\frac{\partial \overline{w}_\alpha}{\partial \overline{z}_l} + \sum_{\beta=1}^{m-k} \lambda_{\beta q}\frac{\partial w_{k+\beta}}{\partial \overline{z}_l} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda_p}{\partial \overline{z}_l} = \frac{\partial \overline{w}_{k+\beta}}{\partial \overline{z}_l} - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_{p\alpha}\frac{\partial \overline{w}_\alpha}{\partial \overline{z}_l} = 0.$$

В силу равенства (2.18), (5.5) можно записать в виде

$$\Lambda = \begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} \overline{w}^1 \\ w^2 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где

$$\Lambda = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m)'.$$

Решая систему, состоящую из уравнения (5.6) с ним сопряженным, получим

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} = (E - \Phi\overline{\Phi})^{-1} (\Phi\overline{\Lambda} + \Lambda). \tag{5.7}$$

Из уравнения (5.6), используя условие (4.6), мы найдем, что

$$w^1 = (E - \Gamma\overline{\Gamma})^{-1} (\Gamma\overline{\varphi} + \varphi),$$

$$w^2 = \overline{\lambda} (E - \Gamma\overline{\Gamma})^{-1} (\Gamma\overline{\varphi} + \varphi) + \overline{\Lambda}^2, \tag{5.8}$$

где

$$\Gamma = D^{-1} P,\ D = (E + \lambda'\overline{\lambda}),\ \varphi = D^{-1} (\Lambda^1 - \lambda'\overline{\Lambda}^2),$$

$$\Lambda^1 = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k)',\ \Lambda^2 = (\Lambda_{k+1}, \cdots, \Lambda_m)'.$$

Итак доказана

Теорема 5.1. *Если отображение*

$$T \quad w_i = f_i(z_1, \cdots, \overline{z}_n) \in C^2(G),\ i = 1, \cdots, m$$

принадлежит классу $B_0(n, m, k)$, то в некоторой окрестности любой точки $Q \in G$ оно может быть представлено в виде

$$T^* \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} = (E - \Phi\overline{\Phi})^{-1} (\Phi\overline{\Lambda} + \Lambda).$$

Здесь $w^1 = (w_1, \cdots, w_k)'$, $w^2 = (w_{k+1}, \cdots, w_m)'$, *столбец* Λ *и кососимметрическая* матрица Φ *состоят из голоморфных функций, причем* $\Phi_{lt} = 0$ *для* $l, t > k$.

Имеет место

Теорема 5.2. *Отображение* (T^*) *области* $G \subset C^n_z$, *определяемое равенствами*

$$T^* \qquad \begin{pmatrix} w^1 \\ \overline{w}^2 \end{pmatrix} = (E - \Phi\overline{\Phi})^{-1} (\Phi\overline{\Lambda} + \Lambda),$$

принадлежит классу $B_G(n, m, k)$, *если*

$$\text{Rang } \frac{\partial (w^1, \overline{w}^2)}{\partial z} = m.$$

Здесь столбец Λ *и кососимметрическая матрица* Φ *состоят из голоморфных в области* G *функций, а* $\Phi_{lt} = 0$ *для* $l, t > k$.

Теорема 5.2 доказывается непосредственной проверкой.

Заметим, что теоремы 5.1 и 5.2 можно сформулировать в терминах отображения (5.8).

§ 6. Пример отображения $B_G(n, m, k)$

Теорема 6.1. *Отображение*

$$w_1 = z_1 (1 - |z_2|^2)(1 + |z_1 z_2|^2)^{-1},$$

$$w_2 = \overline{z}_2 (1 + |z_1|^2)(1 + |z_1 z_2|^2)^{-1} \qquad (6.1)$$

принадлежит классу B_G (2.2.1) *в единичном бицилиндре* $G = \{z \in C^2;$ $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1\}$ *и гомеоморфно отображает этот бицилиндр на единичный гипершар.*

Доказательство. Выписывая формулу (5.7) для $n = m = 2$, $k = 1$ и полагая $\Phi_{12} = -z_1 z_2$, $\Lambda_1 = z_1$, $\Lambda_2 = z_2$, получаем отображение (6.1). Из (6.1) легко вывести, что

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(1 + |z_1 z_2|^2)^{-1}.$$

Отсюда следует, что функции (6.1) отображают бицилиндр G на гипершар. Нам остается доказать гомеоморфизм этого отображения.

Пусть различным точкам $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$, $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ соответствует одна точка (w_1, w_2). Тогда

$$z_1^{(1)}(1 - |z_2^{(1)}|^2)(1 + |z_1^{(1)} z_2^{(1)}|^2)^{-1} = z_1^{(2)} (1 - |z_2^{(1)}|^2)(1 + |z_1^{(2)} z_2^{(2)}|^2)^{-1},$$

$$\overline{z}_2^{(1)} (1 + |z_1^{(1)}|^2)(1 + |z_1^{(1)} z_2^{(1)}|^2)^{-1} = \overline{z}_2^{(2)} (1 + |z_1^{(2)}|^2)(1 + |z_1^{(2)} z_2^{(2)})^{-1}. \qquad (6.2)$$

Отсюда вытекает

$$|z_1^{(1)}|(1 - |z_2^{(1)}|^2)(1 + |z_1^{(1)}|^2)^{-1} = |z_1^{(2)}|(1 - |z_2^{(2)}|^2(1 + |z_1^{(2)} z_2^{(2)}|^2)^{-1},$$

$$|z_2^{(1)}|(1 + |z_1^{(1)}|^2)(1 + |z_1^{(1)} z_2^{(1)}|^2)^{-1} = |z_2^{(2)}| (1 + |z_1^{(2)}|^2)(1 + |z_1^{(2)} z_2^{(2)}|^2)^{-1}. \qquad (6.3)$$

Обозначим

$$(1+|z_1^{(1)}|^2)(1+|z_1^{(1)}\ z_2^{(1)}|^2)^{-1}=h.$$

Тогда имеем

$$|z_1^{(1)}|^2=(h-1)\,(1-|z_2^{(1)}|^2\,h)^{-1},$$

$$|z_1^{(2)}|^2=(|z_2^{(2)}|-h\,|z_2^{(1)}|)(|z_2^{(2)}|^2\,|z_2^{(1)}|\,h-|z_2^{(2)}|)^{-1}. \qquad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в первое уравнение (6.3), получаем

$$|z_2^{(1)}|=|z_2^{(2)}|. \qquad (6.5)$$

Из последнего равенства и из (6.4) следует, что

$$|z_1^{(1)}|=|z_1^{(2)}|. \qquad (6.6)$$

И, наконец, из условий (6.5), (6.6) и (6.2) мы найдем, что $z_1^{(1)}=z_1^{(2)}$, $z_2^{(1)}=z_2^{(2)}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 6.2. *Отображение*

$$W^1=(E-P\overline{P})^{-1}\,(P\overline{Z}^1+Z^1),$$

$$W^2=\overline{Z^2}, \qquad (6.6')$$

где $z^1=(z_1,\cdots,z_k)'$, $z^2=(z_{k+1}z_{m+1}\cdots z_n,\cdots,z_m\,z_{m+1}\cdots z_n)'$, *а кососимметрическая матрица P определяется условием*

$$p_{ij}=\begin{cases} z_i z_j, & \text{если } i<j \\ 0 & \text{если } i=j \\ -z_i z_j, & \text{если } i>j, \end{cases}$$

принадлежащее к классу $B_0(n,\ m,\ k)$ в единичном полицилиндре $G=\{|z_i|<1,\ i=1,\cdots,n\}$ отображает его на область

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}|w_k|^2<1,\ |w_j|\leq 1,\ j=k+1,\cdots,m\right\}.$$

Доказательство. Полагая в (5.8)

$$\lambda=0,\ \Lambda^1=Z^1,\ \Lambda^2=Z^2,$$

получаем отображение (6.6').

Используя теорему А. А. Шматкова (см. [4], теорема 5.1), заключаем, что полицилиндр

$$G_k=\{|z_i|<1,\ i=1,\cdots,k\}$$

при отображении (6.6') переходит в гипершар

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}|w_i|^2<1\right\}.$$

Отсюда легко получается утверждение теоремы.

В заключение выражаю благодарность Б. А. Фуксу за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ереванский государственный
университет

Поступило 28.I.1971

Է. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ. C^m տարածության վրա $C^n (m<n)$ տարածության քվազի հոլոմորֆ արտապատկերումների մասին, որոնք կոնֆորմ են կոմպլեքս ուղիղների վրա *(ամփոփում)*

Հոդվածում դիտարկվում են $G^* \subset C^m_w$ տիրույթի վրա $G \subset C^n_z$ $(m < n)$ տիրույթի հարթ արտապատկերումները, որոնք կոնֆորմ են կոմպլեքս ուղիղների վրա։ Փակ տեսքով կառուցված է քվազի հոլոմորֆ արտապատկերումների $B_G (n, m, k)$ դասը։ Գտնված են այդ դասին պատկանելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ Քննարկված են օրինակներ։

E. H. NAZARIAN. *On quasi-holomorphic mappings of C^n on C^m $(m<n)$ which are conform on complex lines* (summary)

The article discusses smooth mappings of $G \subset C^n_z$ on $G^* \subset C^m$, $m<n$ (G^* and G are domaines), which are conform on complex lines. Construction of a class $B_G (n, m, k)$ of quasiholomorphic mappings is given. The necessary and sufficient condition of belonging to that class are obtained and examples constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Гантмахер.* Теория матриц, 1967.
2. *Р. Белман.* Введение в теорию матриц, изд. „Наука", 1969.
3. *R. Penrose.* A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phill. Soc., 51, № 3, 1955, 406—413.
4. *А. А. Шматков.* Квазиголоморфные отображения пространства C^n, конформные на комплексных прямых, Изв. АН АрмССР, „Математика", 3, № 6, 1968, 479—496.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

Б. М. ЕДИГАРЯН, Д. К. ФАДДЕЕВ

КОМПЛЕКСНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ МАТРИЦ РАНГА 2 НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Цель работы—исследование представлений над полем C комплексных чисел полугруппы квадратных матриц над конечным полем $K=GF(q)$, $q=p^c$. В работе излагается дальнейшее развитие метода предложенного в [1] для описания представлений полугруппы матриц ранга $\leqslant 1$. Здесь решается тот же вопрос для матриц ранга $\leqslant 2$.

1°. Строение полугруппы матриц. Пусть M^n—полугруппа матриц порядка n над полем K. Всякий двусторонний идеал полугруппы M^n есть множество матриц, ранг каждой из которых не превосходит некоторого числа, так что все двусторонние идеалы естественным образом линейно упорядочены по включению

$$M^n = M^n_n \supset M^n_{n-1} \supset \cdots \supset M^n_1 \supset M^n_0 = (0).$$

Здесь M^n_m обозначает множество матриц, имеющих ранг, не превосходящий m.

Фактор-полугруппа $M^n_m \setminus M^n_{m-1}$ вполне простая и к ней может быть применена известная структурная теорема (см. [2]). Для наших целей нужно фактическое описание структурной матрицы для этой полугруппы.

Введем в рассмотрение пространство столбцов S_n длины n над полем K и пространство строк S^*_n той же длины. Пространство S^*_n естественно считать сопряженным с пространством S_n. Каждую квадратную матрицу будем интерпретировать как оператор левого умножения в пространстве S_n. С любой матрицей $A \in M^n$ связаны пространство ее столбцов (точнее, натянутые на ее столбцы) и пространство ее строк. Первое—AS_n содержится в S_n и является образом при действии оператора A. Второе содержится в S^*_n и представляет собой аннулятор ядра оператора A. Если ранг матрицы A равен m, то пространства ее столбцов и строк m-мерны,

Пусть $P=AS_n$—пространство столбцов матрицы $A \in M^n_m \setminus M^n_{m-1}$ (т. е. ранга m), и пусть $\overline{P}$—матрица вида $n\times m$, столбцы которой составляют некоторый базис пространства P. Ясно, что $A=\overline{P}B$, где B—некоторая $(m\times n)$-матрица, составленная из коэффициентов, с которыми столбцы матрицы A выражаются через столбцы матрицы $\overline{P}$. Матрица B в этом представлении единственна. Далее, строки матрицы A являются линейными комбинациями строк матрицы B, так что пространство Q' строк матрицы A содержится в пространстве строк матрицы B. Матрица B имеет m строк, а пространство Q' имеет размерность m. Поэтому пространства строк для матриц A и B совпадают, и строки матрицы B линейно независимы. Пусть $\overline{Q}'$ — матрица вида $m\times n$, строки которой составляют некоторый базис пространства Q'. Тогда $B=C\overline{Q}'$, где C однозначно определенная невырожденная $m\times m$ матрица. Таким образом, верно следующее предложение.

Предложение 1. *Матрицы ранга m, заданные над полем K и имеющие данное пространство P столбцов и данное пространство Q' строк, однозначно записываются в виде $A=\overline{P}C\overline{Q}'$, где C принадлежит группе $L(m, k)$ невырожденных матриц порядка m, $\overline{P}$ — матрица, столбцы которой составляют базис пространства P и $\overline{Q}'$ — матрица, строки которой составляют базис пространства Q'.*

Предложение 1 верно при любом поле K. В дальнейшем будем считать $K=GF(q)$.

Рассмотрим квадратные матрицы порядка

$$N_m^n=\frac{(q^n-1)\cdots(q-1)}{(q^m-1)\cdots(q-1)(q^{n-m}-1)\cdots(q-1)},$$

равного числу подпространств размерности m в n-мерном пространстве над полем K. Строки матриц занумеруем m-мерными подпространствами P пространства S_n, столбцы — m-мерными подпространствами Q' пространства S_n^*. Предположим, что во всех этих подпространствах выбраны базисы. Матрице $A\in M_m^n\setminus M_{m-1}^n$, $A=\overline{P}C\overline{Q}'$ сопоставим матрицу $\varphi(A)$ порядка N_m^n, у которой имеется единственный ненулевой элемент, равный C, на пересечении строки и столбца с номерами P и Q':

$$\varphi(A)=C\mathbf{X}^*e_{P,\,Q'}. \tag{1}$$

Будем считать, что умножение матриц A_i ранга m осуществляется как в полугруппе $M_m^n\setminus M_{m-1}^n$, т. е. произведение заменяется на нуль, если ранг произведения меньше m. Легко видеть, что

$$\varphi(A_1A_2)=\varphi(A_1)\Pi\varphi(A_2),\quad \text{где } \Pi=\sum_{P,\,Q'}(\overline{Q}'\overline{P})\mathbf{X}^*e_{Q',\,P}.$$

Здесь $(\overline{Q}'\overline{P})$ обозначает элемент группы $L(m, K)$, если $\overline{Q}'\overline{P}$ невырожденная матрица и 0, если эта матрица вырожденная.

Введем теперь в рассмотрение полугрупповую алгебру V_m^n над полем C комплексных чисел для полугруппы $M_m^n\setminus M_{m-1}^n$ и алгебру матриц W_m^n порядка N_m^n над групповой алгеброй группы $L(m, K)$. Указанное выше отображение φ базисных элементов алгебры V_m^n в алгебру W_m^n естественно продолжается до биективного отображения V_m^n на W_m^n. Ясно, что формула $\varphi(A_1A_2)=\varphi(A_1)\Pi\varphi(A_2)$ сохраняется для любых $A_1, A_2\in V_m^n$. Отображение ψ; $A\to\varphi(A)\Pi$ будет гомо-

* Знак X обозначает тензорное произведение.

морфизмом V_m^n в W_m^n и это отображение будет изоморфизмом V_m^n на W_m^n в том и только в том случае, если П—невырожденная матрица.

Пусть Δ—представление группы $L(m, K)$. Ясно, что если П невырождена, то матрица $\Pi_\Delta = \Delta(\Pi) = \sum\limits_{P, Q'} \Delta(\overline{Q'}\,\overline{P}) \times e_{Q', P}$ невырождена и обратно, если все Π_Δ невырождены, то невырождена и П, причем достаточна невырожденность Π_Δ при всех неприводимых представлениях Δ.

Наши дальнейшие усилия будут направлены на доказательство невырожденности Π_Δ для некоторых классов представлений Δ. В частности, будет установлена невырожденность Π_Δ при $m=2$ и любом n, для всех представлений Δ группы $L(2, K)$.

2°. Матрица π_Δ. При замене представления Δ на эквивалентное, матрица Π_Δ, очевидно, подвергается преобразованию подобия. Выясним как она изменяется в зависимости от выбора базисов в пространствах P и Q'. Пусть $\overline{\overline{P}}$ и $\overline{\overline{Q'}}$— матрицы, составленные из некоторых новых базисов подпространств P и Q', так что $\overline{\overline{P}} = \overline{P}\alpha(P)$, $\overline{\overline{Q'}} = \beta(Q')\,\overline{Q'}$, где $\alpha(P), \beta(Q') \in L(m, K)$—матрицы, связывающие новые базисы $\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{Q'}}$ с исходными $\overline{P}, \overline{Q'}$. Тогда

$$\widetilde{\Pi}_\Delta = \sum_{P, Q'} \Delta(\beta(Q')(\overline{Q'}\,\overline{P})\,\alpha(P)) \times e_{Q', P} = U\Pi_\Delta V,$$

где $U = \sum\limits_{Q'} \Delta(\beta(Q')) \times e_{Q', Q'}$, $V = \sum\limits_{P} \Delta(\alpha(P)) \times e_{P, P}$ — квазидиагональные матрицы.

Введем в рассмотрение матрицы $\Pi_\Delta^* = \sum \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{P}) \times e_{P, Q'}$ и

$$\pi_\Delta = \Pi_\Delta^* \Pi_\Delta = \sum_{P_i, P_j} \left(\sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{P}_i)\,\Delta(\overline{Q'}\,\overline{P}_j)\right) \times e_{P_i, P_j}.$$

Из формулы преобразования матрицы Π_Δ и аналогичной формулы для Π_Δ^* следует, что матрица π_Δ не изменяется при изменении базисов в подпространствах Q' и претерпевает преобразование подобия посредством матрицы V при изменении базисов в подпространствах P. При переходе от представления Δ к эквивалентному матрица π_Δ тоже превращается в подобную. Поэтому собственные значения матрицы π_Δ не зависят ни от выбора базисов подпространств, ни от выбора представления Δ в классе эквивалентных представлений.

Если Δ—унитарное представление (а такое существует в каждом классе эквивалентных представлений), то матрица Π_Δ^* сопряжена с Π_Δ. Поэтому матрица π_Δ всегда отлична от нулевой, матрицы π_Δ и Π_Δ— одновременно вырожденные или невырожденные, и все собственные значения матрицы π_Δ вещественны и неотрицательны.

3°. Подъем представлений. Пусть дано представление Δ группы $L(m, K)$. Построим, исходя из него, представление $\lambda_m^n \Delta$ группы $L(n, K)$ следующим образом. Выберем базисы $\overline{P}$ во всех m-мерных подпространствах P пространства S_n. Пусть $A \in L(n, K)$. Ясно, что матрица $A\overline{P}$ дает некоторый базис пространства AP но, вообще говоря, отличный от заранее выбранного $\overline{AP}$, так что $A\overline{P} = \overline{AP} \cdot \alpha(A, P)$, где $\alpha(A, P)$—некоторый элемент группы $L(m, K)$. Положим

$$(\lambda_m^n \Delta)(A) = \sum_P \Delta(\alpha(A, P)) \times e_{AP,\, P}. \tag{2}$$

Легко проверить, что $\lambda_m^n \Delta$ есть действительно представление группы $L(n, K)$. Переход от представления Δ к представлению $\lambda_m^n \Delta$ будем называть подъемом, а само представление $\lambda_m^n \Delta$ — поднятым от Δ. Ясно, что замена представления Δ на эквивалентное влечет переход к эквивалентному поднятому представлению. Изменение базиса: $\overline{P}' = \overline{P}\,\nu(P)$, тоже влечет преобразование подобия: $\lambda_m^n\Delta \to \Gamma^{-1}(\lambda_m^n\Delta)\,\Gamma$,

где $\quad \Gamma = \sum\limits_P \nu(P) \times e_{\overline{P},\, \overline{P}}$.

Подъем представления можно описать еще следующим образом. Представление Δ группы $L(m, K)$ естественно распространяется на группу H_m^n, составленную из невырожденных ступенчатых матриц $\begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ с диагональными клетками порядков m и $n-m$, если положить $\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \Delta(B_1)$. Тогда $\lambda_m^n \Delta$ есть не что иное, как представление, индуцированное на $L(n, K)$ представлением $\tilde{\Delta}$. В обозначениях статьи [3] $\lambda_m^n \Delta = \Delta \circ 1_{n-m}$.

Если представление Δ приводимо: $\Delta = \Delta_1 \oplus \cdots \oplus \Delta_s$, то $\lambda_m^n \Delta = \lambda_m^n \Delta_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m^n \Delta_s$. Если Δ—неприводимо, то $\lambda_m^n \Delta$ может оказаться приводимым. Неприводимые представления группы D, входящие в поднятые от группы $L(m, K)$ представления, характеризуются следующим свойством.

Предложение 2. *Для того чтобы неприводимое представление D группы $L(n, K)$ входило в $\lambda_m^n \Delta$ при некотором представлении Δ группы $L(m, K)$, $m \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы ограничение D на группу $\tilde{H}_m^n$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} E_m & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ содержало единичное представление этой группы.*

Действительно, по закону двойственности Фробениуса, ограничение D на $\tilde{H}_m^n$ содержит единичное представление в том и только в том случае, когда D содержится в представлении, индуцированном единичным представлением группы $\tilde{H}_m^n$. Имеет место включение $\tilde{H}_m^n \subset H_m^n \subset L(n, K)$, причем $\tilde{H}_m^n$ есть нормальный делитель H_m^n. Представление, индуцированное на H_m^n единичным представлением $\tilde{H}_m^n$ есть регулярное представление факторгруппы $H_m^n / \tilde{H}_m^n \approx L(m, K)$, распространенное на H_m^n и оно распадается в прямую сумму (с надлежащими кратностями) всех представлений $\tilde{\Delta}$, где Δ—неприводимые представления группы $L(m, K)$. Поэтому представление δ, индуцированное на $L(n, K)$ единичным представлением группы $\tilde{H}_m^n$ есть прямая сумма (с теми же кратностями) поднятых представлений $\lambda_m^n \Delta$, где Δ — все неприводимые представления $L(m, K)$. Тем самым, неприводимые составляющие представления δ суть те и только те представления $L(n, K)$, которые содержатся в представлениях $\lambda_m^n \Delta$, что и требовалось доказать.

Нетрудно выяснить, что представляют собой те неприводимые представления Δ группы $L(m, K)$, в подъеме которых содержится данное представление D группы $L(n, K)$. Именно, ограничим D на группу H_m^n и разложим получившееся представление на неприводимые. Некоторые из них при ограничении на $\tilde{H}_m^n$ не будут содержать единичное, некоторые будут. Но $\tilde{H}_m^n$ есть нормальный делитель группы H_m^n. Поэтому, если ограничение некоторого неприводимого представления группы H_m^n на $\tilde{H}_m^n$ содержит единичное представление, то оно превращается в единичную матрицу на $\tilde{H}_m^n$, т. е. его можно рассматривать как естественное продолжение $\tilde{\Delta}$ на H_m^n представления Δ факторгруппы $H_m^n / \tilde{H}_m^n \approx L(m, K)$. Ясно, что D будет содержаться в подъеме тех и только тех Δ, для которых $\tilde{\Delta}$ содержится в ограничении D на H_m^n.

Группы $\tilde{H}_m^n$ упорядочены по включению:

$$L(n, K) = \tilde{H}_0^n \supset \tilde{H}_1^n \supset \cdots\cdot \supset \tilde{H}_{n-1}^n \supset \tilde{H}_n^n = (E).$$

Поэтому, если единичное представление содержится в ограничении представления D группы $L(n, K)$ на группу $\tilde{H}_m^n$, то единичное представление содержится и в ограничениях на все $\tilde{H}_k^n$ при $k \geqslant m$. Наименьшее m, обладающее этим свойством, назовем *глубиной* представления. Единичное представление и только оно обладает глубиной 0.

4°. Алгебра матриц, коммутирующих с матрицами поднятого представления. Пусть матрица $B = \sum\limits_{P_i, P_j} B_{P_i, P_j}$ X X e_{P_i, P_j}, разбитая на квадратные клетки B_{P_i, P_j}, коммутирует с матрицами представления $\lambda_m^n \Delta$. Очевидно, что условие коммутирования равносильно следующей системе соотношений между клетками:

$$B_{AP_i, AP_j} = \Delta(\alpha(A, P_i))\, B_{P_i, P_j}\, \Delta^{-1}(\alpha(A, P_j)). \qquad (3)$$

Эти соотношения показывают, что как только известна некоторая клетка B_{P_i, P_j}, так однозначно определяются все клетки B_{AP_i, AP_j}. Все пары (P_i, P_j) разбиваются на траектории (AP_i, AP_j). Ясно, что две пары (P_i, P_j) и (P_k, P_l) принадлежат одной траектории в том и только в том случае, если $\dim P_i \cap P_j = \dim P_k \cap P_l$. Число различных траекторий равно поэтому $m+1$.

Для дальнейшего целесообразно остановиться на некотором каноническом выборе базисов в m-мерных подпространствах P пространства столбцов S_n. Именно, будем считать, что номера первых сверху ненулевых элементов столбцов строго возрастают слева направо, все эти элементы равны 1, и все элементы строки, предшествующие верхнему ненулевому элементу столбца равны 0. Ясно, что любая $n \times m$ матрица с линейно независимыми столбцами может быть приведена к такому виду посредством линейного комбинирования столбцов и такое приведение единственно.

Рассмотрим подробнее клетку B_{P_1, P_2}, считая

$$\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_2 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(разбиение на клетки одинаковое, так что размеры всех клеток очевидны). Ясно, что $\dim (P_1 \cap P_2) = f$.

Равенства $AP_1 = P_1$ и $AP_2 = P_2$ будут одновременно иметь место тогда и только тогда, когда матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \tag{4}$$

(при разбиении на клетки согласованном с предыдущим, так что A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}—квадратные невырожденные матрицы порядков f, $m-f$, $m-f$, $n-2m+f$ соответственно). В этом предположении

$$A\bar{P}_1 = \bar{P}_1 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ и } A\bar{P}_2 = \bar{P}_2 \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, соотношение (3) дает

$$B_{P_1, P_2} = \Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} B_{P_1, P_2} \Delta^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ 0 & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Положив $A_{11} = E_f$, $A_{33} = E_{m-f}$, $A_{13} = 0$, получим

$$B_{P_1, P_2} = \Delta \begin{pmatrix} E_f & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \cdot B_{P_1, P_2}.$$

Это значит, что если $B_{P_1, P_2} \neq 0$, то ненулевые столбцы матрицы B_{P_1, P_2} принадлежат подпространству, инвариантному для ограничения представления Δ на подгруппу матриц $\widetilde{H}_f^m = \left\{\begin{pmatrix} E_f & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right\}$, и на этом подпространстве ограничение представления обращается в единичное.

Далее, положив $A_{12} = A_{13}$, $A_{22} = A_{33}$, получим

$$\Delta\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} B_{P_1, P_2} = B_{P_1, P_2} \Delta\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

что означает, что клетка B_{P_1, P_2} перестановочна с ограничением представления Δ на подгруппу $H_f^m = \left\{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right\}$. Допустим, что базис в модуле представления Δ выбран так, что ограничение Δ на H_f^m разбивается на неприводимые части. Некоторые из них $\delta_1, \cdots, \delta_s$ обращаются в единичные матрицы на $\widetilde{H}_f^m$, остальные не содержат единичного представления на $\widetilde{H}_f^m$. Тогда $B_{P_1, P_2} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где C—матрица, коммутирующая с матрицами представления $\delta_1 \oplus \cdots \oplus \delta_s$. Легко видеть, что любая матрица такого вида может быть принята за клетку B_{P_1, P_2}.

Отметим некоторые следствия. Прежде всего, неравенство $B_{P_1, P_2} \neq 0$ возможно только, если $f = \dim P_1 \cap P_2$ не меньше глубины представления Δ. В частности, если глубина Δ равна m, то отличными от нуля могут быть только диагональные блоки. Далее, диагональные блоки все скалярные, если Δ—неприводимое представление, ибо B_{P_1, P_1} коммутирует со всеми матрицами представления Δ. Остальные диагональные блоки B_{AP_1, AP_1} равны B_{P_1, P_1} в силу (3), так что они вместе составляют скалярную матрицу.

5°. Свойства матрицы π_Δ.

Предложение 3. *Матрица π_Δ коммутирует с матрицами представления $\lambda_m^n \Delta$.*

Доказательство. Матрица π_Δ составлена из блоков

$$C_{P_i, P_j} = \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{P}_i)\,\Delta(\overline{Q'}\,\overline{P}_j).$$

Ясно, что каждое слагаемое не зависит от выбора базиса в пространствах Q'. Поэтому

$$C_{P_i, P_j} = \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,A\overline{P}_i)\,\Delta(\overline{Q'}\,A\overline{P}_j),$$

ибо Q' и $Q'A$ одновременно пробегают все m-мерные подпространства пространства $S_n^{\cdot}$. Далее

$$C_{AP_i\, AP_j} = \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,\overline{AP}_i)\,\Delta(\overline{Q'}\,\overline{AP}_j) =$$

$$= \sum_{Q'} \Delta^{-1}(\overline{Q'}\,A\overline{P}_i(\alpha(A, P_i))^{-1})\,\Delta(\overline{Q'}A\overline{P}_j(\alpha(A, P_j))^{-1}) =$$

$$= \Delta(\alpha(A, P_i))\cdot\sum_{Q'}\Delta^{-1}(\overline{Q}'A\overline{P}_i)\,\Delta\,(\overline{Q}'A\overline{P}_j)\cdot\Delta^{-1}(\alpha(A, P_j)) =$$

$$= \Delta(\alpha(A, P_i))\,C_{P_i, P_j}\,\Delta^{-1}(\alpha(A, P_j)).$$

Таким образом, матрица π_Δ удовлетворяет соотношениям коммутирования (3), что и требовалось доказать.

Следствие. Если глубина представления Δ равна m, то матрица π_Δ невырождена. Действительно, в силу сказанного в конце 4° она скалярна. Кроме того, как отмечалось выше, π_Δ всегда отлична от нулевой матрицы. Следовательно, $\pi_\Delta = aE$ при $a \neq 0$.

Таким образом, для нас в дальнейшем будут представлять интерес только те неприводимые представления Δ группы $L(m, K)$, глубина которых меньше m.

Вычислим теперь клетки C_{P_i, P_j}, из которых составлена матрица π_Δ, исходя из описанного выше канонического выбора базисов в подпространствах P. Будем считать, что матрицы $\overline{Q}'$ транспонированы с каноническими.

Пусть

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{P}_2 = \begin{pmatrix} E_f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{m-f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что произведение $\overline{Q}'\,\overline{P}_1$ будет невырожденной матрицей, только если первые m столбцов матрицы $\overline{Q}'$ составляют невырожденную матрицу, а тогда, в силу канонического выбора, матрица $\overline{Q}'$ имеет вид $\begin{pmatrix} E_f & 0 & B_1, & B_3 \\ 0 & E_{m-f} & B_2 & B_4 \end{pmatrix}$. Поэтому $\overline{Q}'\,\overline{P}_1 = E_m$, $\overline{Q}'\,\overline{P}_2 = \begin{pmatrix} E_f & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица B_2 невырожденная и

$$C_{P_1, P_2} = q^{m(n-2m+f)}\,\Lambda_f, \tag{7}$$

где

$$\Lambda_f = \sum_{B_1, B_2}\Delta\begin{pmatrix} E_f, & B_1 \\ 0, & B_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В этом равенстве B_1 пробегает все $f \times (m-f)$-матрицы, B_2 — все невырожденные матрицы порядка $m-f$. Множитель $q^{m(n-2m+f)}$ равен числу возможностей для матриц B_3, B_4.

В частности, диагональные блоки равны $q^{m(n-m)}E$, где E—единичная матрица, порядок которой равен степени представления Δ.

В общем случае, матрица Λ_f подобна матрице

$$q^{\frac{(m-f)(m+f-1)}{2}}(q^{m-f}-1)\cdots(q-1)\cdot\begin{pmatrix} E_{\nu(f,\Delta)}, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $\nu(f, \Delta)$ равно числу вхождений единичного представления в ограничение Δ на подгруппу $\tilde{H}_f^m$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно разложить ограничение Δ на $\tilde{H}_f^m$ на неприводимые составляющие и заметить, что порядок группы $\tilde{H}_f^m$ равен

$$q^{f(m-f)}(q^{m-f}-1)(q^{m-f}-q)\cdots(q^{m-f}-q^{m-f-1}).$$

Вычислим теперь след квадрата матрицы π_Δ.

Предложение 4.

$$S_p\,\pi_\Delta^2=\sum_{f=0}^{m} q^{2mn-2m^2-m+f}\cdot\frac{\Pi_n(q)\cdot\nu(f,\Delta)}{\Pi_f(q)\,\Pi_{n-2f+m}(q)}.$$

Здесь $\Pi_r(q)=(q^r-1)\cdots(q-1)$.

Доказательство. $S_p\,\pi_\Delta^2=\sum\limits_{P_i,P_j} S_p\,C_{P_i,P_j}\,C_{P_j,P_i}$.

Разобьем полную сумму на суммы по траекториям пар. Имеем, согласно предложению 3

$$C_{AP_i,AP_j}=\Delta(\alpha(A,P_i)C_{P_i,P_j}\Delta^{-1}(\alpha(A,P_j)),$$

$$C_{AP_j,AP_i}=\Delta(\alpha(A,P_j))\,C_{P_j,P_i}\,\Delta^{-1}(\alpha(A,P_i)).$$

Следовательно

$$C_{AP_i,AP_j}\,C_{AP_j,AP_i}=\Delta(\alpha\ (A,P_i))\,C_{P_i,P_j}\,C_{P_j,P_i}\,\Delta^{-1}(\alpha(A,P_i)),$$

откуда следует, что следы матриц $C_{P_i,P_j}\,C_{P_j,P_i}$ одинаковы, пока пары (P_i,P_j) пробегают одну траекторию. Вклад от одной траектории, характеризующейся равенством $\dim P_i\cap P_j=f$, составляет

$$T_m^n(f)\cdot S_p\,C_{P_1,P_2}\,C_{P_2,P_1}.$$

Здесь (P_1,P_2)—какая-либо пара на изучаемой траектории, $T_m^n(f)$—число пар на траектории.

Возьмем, как и раньше

$$\overline{P}_1=\begin{pmatrix}E_f & 0\\ 0 & E_{m-f}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{P}_2=\begin{pmatrix}E_f & 0\\ 0 & 0\\ 0 & E_{m-f}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Положим

$$A=\begin{pmatrix}E_f & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_{m-f} & 0\\ 0 & E_{m-f} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{n-2m+f}\end{pmatrix}.$$

Тогда $A\overline{P}_1=\overline{P}_2$, $A\overline{P}_2=\overline{P}_1$, так что $\alpha(A,P_1)=\alpha(A,P_2)=1$ и $C_{P_1,P_2}=C_{P_2,P_1}$. Поэтому

$$S_p\,C_{P_1,P_2}\,C_{P_2,P_1}=S_p\,C^2_{P_1,P_2}=q^{2m(n-2m+f)+(m-f)(m+f-1)}\cdot\Pi^2_{m-f}(q)\cdot\nu(f,\Delta).$$

Осталось подсчитать $T_m^n(f)$. Это число равно индексу стационарной для пары $(\overline{P}_1,\overline{P}_2)$ подгруппы в полной линейной группе $L(n,K)$

Порядок $L(n, K)$ равен $\Pi_n(q)\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, причем второй множитель есть порядок силовской p-подгруппы. Стационарная подгруппа, матрицы которой имеют вид (4), имеет индекс $q^{(m-f)^2}$ в квазитреугольной группе матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}$$

с диагональными клетками порядков f, $m-f$, $m-f$, $n-2m+f$. Группа эта содержит силовскую p-подгруппу группы $L(n, K)$ и ее порядок равен $\Pi_f(q)\,\Pi^2_{m-f}(q)\,\Pi_{n-2m+f}(q)\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Таким образом

$$T^n_m(f) = \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_f(q)\,\Pi^2_{m-f}(q)\,\Pi_{n-2m+f}(q)}\cdot q^{(m-f)^2},$$

и вклад в $S_p\,\pi^2_\Delta$ от рассматриваемой траектории составляет

$$\frac{\Pi_n(q)}{\Pi_f(q)\,\Pi_{n-2m+f}(q)}\cdot q^{2m(n-m)-m^2+f}\cdot\nu(\Delta, f), \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

6°. Подъем единичного представления. Поднятое единичное представление есть группа подстановок S^n_m, которые претерпевают m-мерные подпространства пространства S_n под действием элементов группы $L(n, K)$. Порядок матриц этого представления равен $N^n_m = \dfrac{\Pi_n(q)}{\Pi_m(q)\,\Pi_{n-m}(q)}$. Алгебра матриц, коммутирующих с матрицами этого представления, есть, очевидно

$$\mathfrak{M}^n_m = \{c_0 U_0 + c_1 U_1 + \cdots + c_m U_m\}, \tag{11}$$

где

$$U_f = \sum_{\dim P_i \cap P_j = f} e_{P_i, P_j}. \tag{12}$$

Ясно, что представление S^n_m эквивалентно представлению S^n_{n-m} и, соответственно, алгебра $\mathfrak{M}^n_m$ изоморфна алгебре $\mathfrak{M}^n_{n-m}$, поэтому мы будем считать $m \leqslant \dfrac{n}{2}$. В этом предположении все матрицы U_f, начиная с U_0, имеют смысл, и ранг алгебры $\mathfrak{M}^n_m$ равен $m+1$.

Имеем

$$U_{f_1}\cdot U_{f_2} = \sum_{\substack{\dim P_i \cap P_j = f_1 \\ \dim P_j \cap P_k = f_2}} e_{P_i, P_k} = \sum \mu(P_i, P_k)\, e_{P_i, P_k},$$

где $\mu(P_i, P_k)$ равно числу подпространств P_j, имеющих с P_i пересечение размерности f_1, и с P_k—пересечение размерности f_2. Ясно, что

$\mu(P_i, P_k)$ зависит лишь от размерности $P_i \cap P_k$, так что можно записать

$$U_{f_1} \cdot U_{f_2} = \sum_{f_3} n^{f_3}_{f_1, f_2} U_{f_3},$$

где $n^{f_3}_{f_1, f_2}$ равно $\mu(P_i, P_k)$ для каких-либо P_i, P_k, имеющих f_3-мерное пересечение. Из этого описания следует, что $n^{f_3}_{f_1, f_2} = n^{f_3}_{f_2, f_1}$, т. е. алгебра $\mathfrak{M}^n_m$ коммутативна. Поэтому представление S^n_m разлагается в прямую сумму $m+1$ неприводимых представлений.

Введем в рассмотрение модуль R^n_m представления S^n_m с базисом $\{e_{P_i}\}$. Обозначим через Q_j подпространства размерности $m-1$ пространства S_n и положим $e_{Q_j} = \sum\limits_{P_i \supset Q_j} e_{P_i}$.

Предложение 5. *При $m \leqslant \frac{n+1}{2}$ векторы e_{Q_j} линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\sum C_{Q_j} e_{Q_j} = 0$. Это равенство равносильно $\sum\limits_{P_i} (\sum\limits_{Q_j \subset P_i} C_{Q_j}) e_{P_i} = 0$ и, в силу того, что e_{P_i} линейно независимы, $\sum\limits_{Q_j \subset P_i} C_{Q_j} = 0$ при всех P_i.

Пусть Q—одно из Q_j. Обозначим через T_f, $0 \leqslant f \leqslant m-1$, множество таких Q_j, что $\dim Q \cap Q_j = f$. Пусть $Q_j \in T_f$ и $P_i \supset Q_j$. Тогда $\dim P_i \cap Q = f$ или $\dim P_i \cap Q = f+1$. Обозначим число таких P_i через α_f и β_f соответственно. В силу условия $(m-1)+m \leqslant n$, обе возможности для P_i реализуются при любом f, начиная с $f=0$, так что $\alpha_f > 0$; $\beta_f > 0$. Ясно, что α_f и β_f не зависят ни от выбора Q, ни от выбора Q_j (внутри T_f). Обозначим через $\tilde{T}_f$ множество таких P_i, что $\dim Q \cap P_i = f$. Если $P_i \in \tilde{T}_f$ и $Q_j \subset P_i$, то $Q_j \in T_f$ или $Q_j \in T_{f-1}$.

Просуммируем равенства $\sum\limits_{Q_j \subset P_i} C_{Q_j} = 0$ по всем $P_i \in \tilde{T}_f$. Получим, после перегруппировки слагаемых

$$\sum_{Q_j \in T_{f-1}} C_{Q_j} \Big(\sum_{\substack{P_i \in \tilde{T}_f \\ P_i \supset Q_j}} 1 \Big) + \sum_{Q_j \in T_f} C_{Q_j} \Big(\sum_{\substack{P_i \in \tilde{T}_f \\ P_i \supset Q_j}} 1 \Big) = 0$$

или, согласно определениям чисел α_f и β_f

$$\beta_{f-1} \sum_{Q_j \in T_{f-1}} C_{Q_j} + \alpha_f \sum_{Q_j \in T_f} C_{Q_j} = 0.$$

Заметим, что при $f = m-1$ множество T_f состоит из одного единственного элемента Q. Таким образом,

$$\alpha_{m-1} C_Q + \beta_{m-2} \sum_{Q_j \in T_{m-2}} C_{Q_j} = 0,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\alpha_1 \sum_{Q_j \in T_1} C_{Q_j} + \beta_0 \sum_{Q_j \in T_0} C_{Q_j} = 0,$$

$$\alpha_0 \sum_{Q_j \in T_0} C_{Q_j} = 0,$$

откуда заключаем, что $C_Q = 0$. Так как Q было произвольным, все $C_{Q_j}=0$, что и требовалось доказать.

Подпространство, натянутое на $\{e_{Q_j}\}$, очевидно инвариантно и, как модуль для $L(n, K)$, изоморфно модулю представления S^n_{m-1}. Поэтому справедливо следующее.

Предложение 6. *При* $m \leqslant \frac{n}{2}$ *представление* S^n_m *содержит представление* S^n_{m-1} *и дополнительное представление* T^n_m *неприводимо.*

Действительно, первое утверждение ясно из предшествующего. Второе—из подсчета числа неприводимых слагаемых в S^n_m и S^n_{m-1}.

Следствие. $S^n_m = T^n_0 \oplus T^n_1 \oplus \cdots \oplus T^n_m$, при $m \leqslant \frac{n}{2}$. Степень представления T^n_m равна

$$N^n_m - N^n_{m-1} = \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_m(q)\,\Pi_{n-m}(q)} - \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_{m-1}(q)\,\Pi_{n-m+1}(q)} =$$

$$= \frac{\Pi_n(q)}{\Pi_m(q)\,\Pi_{n-m+1}(q)} \cdot q^m \cdot (q^{n-2m+1} - 1).$$

7°. Дважды поднятое представление. Пусть $f < m < n$ и δ—представление группы $L(f, K)$. Представление $\lambda^n_m(\lambda^m_f \delta)$ есть, согласно [3], $(\delta \circ 1_{m-f}) \circ 1_{n-m}$. В силу ассоциативности действия $\circ$, оно эквивалентно результату тройной композиции $\delta \circ 1_{m-f} \circ 1_{n-m}$ и может быть интерпретировано следующим образом. Рассмотрим пары пространств $Q_l < P_l$, $\dim Q_j = f$, $\dim P_l = m$, составляющие „флаги" F_k. Тогда $D = \delta \circ 1_{m-f} \circ 1_{n-m}$ есть представление, сопоставляющее элементу $A \in L(n, K)$ матрицу

$$D(A) = \sum_{F_k} \delta(\alpha(A, Q_l)) \times e_{AF_k, F_k};$$

при этом $Q_l \in F_k$ и $\alpha(A, Q_l) \in L(f, K)$, $A\overline{Q_l} = \overline{AQ_l} \cdot \alpha(A, Q_l)$.

Можно указать явные формулы, дающие изоморфизм модулей представлений $\lambda^n_m(\lambda^m_f \delta)$ и D, но они нам здесь не будут нужны.

Предложение 7. *Представление* $\lambda^n_m(\lambda^m_f \delta)$ *содержит представление* $\lambda^n_f \delta$.

Доказательство. Модуль представления для D есть тензорное произведение модуля R представления δ и пространства, натянутого на векторы e_{F_k}, нумерованные флаги F_k. Положим $e_{Q_l} = \sum_{F_k \supset Q_l} e_{F_k}$. Векторы e_{Q_l} линейно независимы. Очевидно, что произведение пространства R на пространство, натянутое на $\{e_{Q_l}\}$, инвариантно для матриц представления D и на нем D действует как представление $\lambda_j^n \delta$, что и требовалось доказать.

Предложение 8. *Пусть $f < m < n$. Дважды поднятое единичное представление группы $L(f, K)$ содержит однократно поднятое единичное представление группы $L(m, K)$ и однократно поднятое единичное представление группы $L(f, K)$, с исключенным единичным представлением.*

Доказательство. Модуль для дважды поднятого единичного представления является пространство, натянутое на базисные векторы e_{F_k}, занумерованные флагами, и эти векторы переставляются как флаги при действии $A \in L(n, K)$:

$$D(A) = \sum_{F_k} e_{AF_k, F_k}.$$

Положим $e_{Q_l} = \sum_{F_k \ni Q_l} e_{F_k}$ и $e_{P_l} = \sum_{F_k \ni P_l} e_{F_k}$.

Покажем, что между векторами e_{Q_l} и e_{P_l} имеется единственная линейная зависимость $\sum_{Q_l} e_{Q_l} = \sum_{P_l} e_{P_l}$. Действительно, пусть $\sum_{Q_l} C_{Q_l} e_{Q_l} + \sum_{P_l} d_{P_l} e_{P_l} = 0$. Это равносильно $\sum_{Q_l} C_{Q_l} \sum_{F_k \ni Q_l} e_{F_k} + \sum_{P_l} d_{P_l} \sum_{F_k \ni P_l} e_{F_k} = 0$, откуда $C_{Q_l} + d_{P_l} = 0$, как только Q_l и P_l составляют флаг, то есть $Q_l \subset P_l$. Из этих равенств легко заключить, что все C_{Q_l} и d_{P_l} равны между собой, что и приводит к единственной линейной зависимости $\sum_{Q_l} e_{Q_l} - \sum_{P_l} e_{P_l} = 0$.

Подпространство, натянутое на $\{e_{Q_l}\}$, инвариантно и на нем действует представление, поднятое от единичного представления группы $L(f, K)$. Подпространство, натянутое на $\{e_{P_l}\}$ тоже инвариантно и на нем действует представление, поднятое от единичного представления группы $L(m, K)$. Их пересечение одномерно и на нем действует единичное представление. Тем самым, предложение доказано.

8°. Представления группы $L(2, K)$, глубина которых меньше 2. Применим выполненные выше исследования к случаю $m = 2$. Группа $L(2, K)$ имеет, как известно, q^2-1 неприводимых представлений. Интересны для нас только те, глубина которых меньше 2. Все они содержатся в представлениях, поднятых от представлений группы $L(1, K)$, которая есть мультипликативная группа поля K и имеет $q-1$ неприводимых представлений $\chi_0 = 1, \chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$. Все они имеют степень 1. Глубина представлений $\chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$ равна 1, и поднятые от них представления $\delta_l = \lambda_1^2 \chi_l$ неприводимы. Степени этих представлений равны $q+1$. Представление же $\pi^2_{\chi_0}$ состоит из двух неприводимых слагаемых—единичного представления и представления T^2_1 степени q. Таким образом, имеется только q неприводимых представлений глубины $\leqslant 1$ — это единичное представление, представления δ_i, $i=1,\cdots,q-2$ и представление T^2_1.

9°. Матрица π_Δ в случае единичного представления группы $L(2, k)$. Из формул (7), (8) следует, что при $n \geqslant 4$

$$\pi_\Delta = q^{2n-7}(q-1)(q^2-1)\,U_0 + q^{2n-5}(q-1)\,U_1 + q^{2n-4}\,U_2$$

в обозначениях 6°. Алгебра $\mathfrak{M}^n_2$ имеет три гомоморфизма $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ в поле комплексных чисел. Их кратности равны 1,

$$\frac{q^n-1}{q-1}-1 \text{ и } \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Первый из этих гомоморфизмов легко найти, для чего следует воспользоваться тем, что $U_0+U_1+U_2=w=\begin{pmatrix}1, \cdots, 1\\ \cdots\cdots \\ 1, \cdots, 1\end{pmatrix}$. Матрица w имеет собственные значения $\dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ и 0, с кратностями 1 и $\dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-1$ соответственно. Ясно, что первое из них есть $\varphi_0(w)$, а $\varphi_1(w)=\varphi_2(w)=0$. Далее, $U_1 w = aw$, где a равно числу ненулевых элементов в строке матрицы U_1, которое равно, в свою очередь, числу 2-мерных подпространств S^n, имеющих с данным подпространством одномерное пересечение. Легко видеть, что оно равно $(q+1)\cdot\left(\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}-1\right)=$ $=\dfrac{(q+1)(q^{n-2}-1)\,q}{q-1}$. Поэтому $\varphi_0(U_1)=\dfrac{(q+1)(q^{n-2}-1)\,q}{q-1}$. Далее $U_2=E$, так что $\varphi_0(U_2)=\varphi_1(U_2)=\varphi_2(U_2)=1$, а $\varphi_0(U_0)=\varphi_0(w)-\varphi_0(U_1)-\varphi_0(U_2)=$ $=\dfrac{q^4(q^{n-3}-1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}$.

Для вычисления гомоморфизмов φ_1 и φ_2 найдем, согласно 6°, $U_1^2=\overset{0}{n}_{11}U_0+\overset{1}{n}_{11}U_1+\overset{2}{n}_{11}U_2$. Здесь $\overset{0}{n}_{11}$ равно числу 2-мерных подпространств S_n, пересекающихся по одномерным подпространствам с данными 2-мерными подпространствами, пересекающимися по O. Это число равно, очевидно, $(q+1)^2$. Далее, $\overset{1}{n}_{11}$ равно числу двумерных подпространств, имеющих одномерные пересечения с двумя данными 2-мерными, имеющими одномерное пересечение. Интересующие нас подпространства могут проходить через пересечение данных, могут не проходить. Раздельный подсчет в этих двух случаях дает $\overset{1}{n}_{11}=\left(\dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}-2\right)+q^2$.

Наконец, $\overset{2}{n}_{11}$ есть число двумерных подпространств, имеющих одномерное пересечение с данным двумерным подпространством. Легко видеть, что $n_{11}^2=(q+1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-1\right)$.

Итак, $U_1^2=(q+1)^2U_0+\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-2+q^2\right)U_1+(q+1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-\right.$ $\left.-1\right)U_2=(q+1)^2w+\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-3-2q\right)U_1+(q+1)\frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}E.$

Обозначив $\varphi_1(U_1)=z_1$, $\varphi_2(U_1)=z_2$, получим, что z_1 и z_2 являются корнями квадратного уравнения

$$z^2-\frac{q^{n-1}-2q^2-q+2}{q-1}z-(q+1)\frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}=0,$$

откуда $z_{1,2}=-1-q;\ \frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}$.

Сравнение следа матрицы U_1 с суммой собственных значений, с учетом кратностей, дает, что $\varphi_1(U_1)=\frac{q^{n-1}-q^2-q+1}{q-1}$, $\varphi_2(U_1)=$ $=-1-q$. Далее, $\varphi_1(U_0)=-\varphi_1(U_1)-1=-\frac{q^{n-1}-q^2}{q-1}$, $\varphi_2(U_0)=-\varphi_2(U_1)-$ $-1=q$. Наконец, для $\pi_\Delta=q^{2n-7}(q-1)(q^2-1)U_0+q^{2n-5}(q-1)U_1+$ $+q^{2n-4}U_2$ имеем

$$\varphi_0(\pi_\Delta)=q^{4n-8};\ \varphi_1(\pi_\Delta)=q^{3n-8};\ \varphi_2(\pi_\Delta)=q^{2n-6}.$$

Таким образом, все три собственных значения матрицы π_Δ отличны от 0 и, следовательно, π_Δ невырождена.

Остается рассмотреть случай $n=3$. В этом случае U_0 отсутствует, $\pi_\Delta=q(q-1)U_1+q^2U_2$, $U_2=E$, $U_1+U_2=w=\begin{pmatrix}1,\cdots,1\\ \cdots\cdots\\ 1,\cdots,1\end{pmatrix}$, собственные значения w равны q^2+q+1 и 0 с кратностями 1 и q^2+q. Соответственно, собственные значения $\varphi_0(U_1)$ и $\varphi_1(U_1)$ для U_1 равны q^2+q и -1 с теми же кратностями. Для $\pi_\Delta=q(q-1)U_1+q^2E$ имеем: $\varphi_0(\pi_\Delta)=q^4$, $\varphi_1(\pi_\Delta)=q$, так что π_Δ невырождена.

10°. **Матрица π_Δ для $\Delta=\delta_l$.** Представление $\hat{\delta}_l=\lambda_1^2\chi_l$ однократно содержится в представлении, индуцированном единичным представлением группы $\widetilde{H}_1^2$. Поэтому и ограничение δ_l на $\widetilde{H}_1^2$ содержит единичное представление один раз и матрицы, коммутирующие с матрицами представления $\lambda_2^n\delta_l$ имеют вид $xE+yU$, $x, y\in C$, где U—матрица, отвечающая траектории пар (P_i, P_j), при $\dim P_i\cap P_j=1$. Таким образом, ранг коммутаторной алгебры для представления $\lambda_2^n\delta_l$ равен 2 и $\lambda_2^n\delta_l$ состоит из двух неприводимых представлений, входящих однократно. Одно из них, согласно предложению 7, есть $\lambda_1^n\chi_l$, его степень равна $\frac{q^n-1}{q-1}$. Следовательно, степень второго равна

$$(q+1)\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)q}{(q-1)^2}.$$

Соответственно, кратности гомоморфизмов коммутаторной алгебры равны $\frac{q^n-1}{q-1}$ и $\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)\,q}{(q-1)^2}$. Обозначим через α и β собственные значения матрицы π_Δ. Диагональные блоки этой матрицы составляют $q^{2n-4}\,E$, матрица $U=\pi_\Delta-q^{2n-4}\,E$ содержит ненулевые блоки, соответствующие траектории пар подпространств с одномерным пересечением. Обозначим через α_1 и β_1 собственные значения матрицы U. Очевидно, что $Sp\,U=0$. Далее, по формуле (10),

$$SpU^2=\frac{\Pi_n(q)}{\Pi_1(q)\Pi_{n-3}(q)}\cdot q^{4n-9}.$$

Следовательно, α_1 и β_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{q^n-1}{q-1}\,\alpha_1+\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)\,q}{(q-1)^2}\beta_1=0,$$

$$\frac{q^n-1}{q-1}\,\alpha_1^2+\frac{(q^n-1)(q^{n-2}-1)\,q}{(q-1)^2}\,\beta_1^2=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{q-1}\cdot q^{4n-9},$$

откуда $\beta_1=\pm(q-1)\,q^{2n-5}$, $\alpha_1=\mp(q^{n-2}-1)\,q^{2n-4}$. Это дает для α и β два варианта:

$$\beta=q^{2n-4}+(q-1)\,q^{2n-5};\ \alpha=-(q^{n-2}-2)\,q^{2n-4}$$

или

$$\beta=q^{2n-5};\ \alpha=q^{3n-6}.$$

Первый вариант отпадает при $q>2$ и при $q=2$, $n\geqslant4$, ибо собственное значение матрицы π_Δ не может быть отрицательным. Единственный сомнительный случай $q=2$, $n=3$ отпадает из-за того, что при $q=2$ изучаемые представления δ_l отсутствуют.

Итак, собственные значения матрицы π_Δ отличны от нуля и матрица π_Δ обратима и в этом случае.

11°. **Матрица** π_Δ^n **для** $\Delta=T_1^2$. Представление T_1^2 имеет глубину 1 и содержится в представлении, индуцированном единичным представлением группы $\widetilde{H}_1^2$, один раз, так что и ограничение T_1^2 на группе $\widetilde{H}_1^2$ содержит единичное представление один раз. Поэтому алгебра матриц, коммутирующих с матрицами представления $\lambda_2^n\,T_1^2$, имеет ранг 2 и само представление $\lambda_2^n\,T_1^2$ состоит из двух однократно входящих неприводимых представлений. Одно из них есть T_1^n. Действительно, $\lambda_1^2\,(1)=(1)\oplus T_1^2$, так что $\lambda_2^n\,(\lambda_1^2\,(1))=\lambda_2^n\,(1)\oplus\lambda_2^n\,T_1^2$. В силу предложения 8, представление $\lambda_2^n\,(\lambda_1^2\,(1))$ содержит сумму $\lambda_2^n\,(1)$ и $\lambda_1^n\,(1)$, с исключенным единичным представлением, то есть $\lambda_2^n\,(1)\oplus T_1^n$, так что $\lambda_2^n\,T_1^2$ действительно содержит T_1^n. Степень T_1^n равна $\frac{q^n-1}{q-1}-1$. Следовательно, степень второго неприводимого представления, входящего в $\lambda_2^n\,T_1^2$, равна

$$q\,\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}-\left(\frac{q^n-1}{q-1}-1\right)=\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{(q^2-1)(q-1)}.$$

Далее, положим $\pi_\Delta=q^{2n-4}E+U$, выделив слагаемое U, соответствующее клеткам траектории с $\dim P_i\cap P_j=1$. Обозначим через α и β собственные значения матрицы π'_Δ, через α_1 и β_1 — собственные значения матрицы U. Получим подобно предыдущему

$$\frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1}\alpha_1+\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}\beta_1=0,$$

$$\frac{q(q^{n-1}-1)}{q-1}\alpha_1^2+\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}\beta_1^2=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)}{q-1}q^{4n-9},$$

откуда получаем значения для β_1 и α_1:

$$\beta_1=\pm(q^2-1)\,q^{2n},\quad \alpha_1=\mp(q^{n-2}-1)\,q^{2n-4}$$

и два варианта для α и β:

$$\beta=(q^2-1)\,q^{2n-6}+q^{2n-4},\quad \alpha=-(q^{n-2}-2)\,q^{2n-4}$$

или

$$\beta=q^{2n-6},\quad \alpha=q^{3n-6}.$$

Первый вариант отпадает при всех q и n, кроме, быть может, $q=2$ и $n=3$. В этом случае вычисление проводится непосредственно и оно показывает, что и здесь имеет место второй вариант.

Таким образом, мы снова получили, что собственные значения матрицы π_Δ отличны от 0.

Из всего сказанного следует, что полугруппа матриц ранга 2 над конечным полем имеет полупростую полугрупповую алгебру в поле нулевой характеристики и все ее абсолютно неприводимые представления просто связаны с представлениями группы $L(2, K)$.

В частности, полупростота полугрупповой алгебры имеет место для полугруппы всех матриц третьего порядка, ибо полугруппа $M_3^3\setminus M_2^3$ изоморфна группе $L(3, K)$ (с присоединением нуля), а полугруппа M_2^3 имеет, в силу результата настоящей работы, полупростую алгебру.

Ереванский государственный университет,
Ленинградское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 20.IX.1971

Բ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ, Դ. Կ. ՖԱԴԴԵԵՎ. Վերջավոր դաշտի նկատմամբ 2 ռանգի մատրիցների կիսախմբի կոմպլեքս ներկայացումները (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է վերջավոր GF(q) *դաշտի նկատմամբ մատրիցների կիսախմբի կոմպլեքս ներկայացումները։*

Ուսումնասիրվող արդյունքները կիրառվում են 2 ռանգի մատրիցների կիսախմբի կիսախմբային հանրահաշվի կիսապարզությունը ապացուցելու համար։

B. M. EDIGARIAN, D. K. FADDEEV. *Complex representations of the semigroup of square matrices of rank 2 over the finite field* (summary)

Complex representations of semigroups of square matrices over the finite field are investigated. The results are applied to prove that the semigroup algebra for semigroup of matrices of rank two is semisimple.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Едигарян.* Представления полугруппы квадратных матриц ранга один над конечным полем, Известия АН АрмССР, сер. „Математика“, IV, № 3, 1969. 215—220.
2. *A. H. Clifford.* Matrix representations of completely simple semigroups, Amer· Journ. Math., 64, 1942, 327—342.
3. *J. A. Green.* The characters of the finite general linear groups, Trans. of the Amer. math. soc., 80, № 2, 1955, 402—407.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

P. GAUTHIER* and W. SEIDEL

SOME APPLICATIONS OF ARAKÉLIAN'S APPROXIMATION THEOREMS TO THE THEORY OF CLUSTER SETS

The purpose of this short note is to display the great strength of Arakélian's generalizations of Mergelian's beautiful theorem [9] (see also [11]).

During the fifties F. Bagemihl and W. Seidel developed techniques for studying boundary behaviour based on approximation theory. The versatility of these techniques has been considerably enhanced by the introduction by K. Barth and W. Schneider of the "pole sweeping" method.

We believe that most of the cluster-set results proved thus far by these methods could be more easily obtained by the use of Arakélian's theorems. We content ourselves with two examples. First we prove an extended version of the Bagemihl-Seidel-Rudin theorems on the existence of holomorphic functions with prescribed asymptotic behaviour. Our second example, meant to show that Arakélian's theorem encompasses the pole sweeping technique, is an extended version of Schneider's theorem [12] on the existence of an unbounded holomorphic function bounded in a prescribed "Schneider noodle".

§ 1. Arakélian's theorems

Let $(\overline{C}, \chi)$ be the Riemann sphere endowed with the chordal metric. Let D be a proper domain in $\overline{C}$, and let D^* denote the one-point compactification of D. We denote by ∂D the boundary of D in $\overline{C}$. Following Arakélian we introduce the following notion.

1.1. Definition. Let E be a relatively closed subset of D. E is said to satisfy conditon (A) if for each $z \in D \setminus E$, there is a boundary curve $\gamma = \gamma_z$ in $D \setminus E$ which connects z to ∂D; i. e. there is a curve $\gamma(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, in $D \setminus E$ such that $\gamma(0) = z$ and

$$\chi(\gamma(t), \partial D) \to 0, \text{ as } t \to \infty.$$

1.2. Definition (see [4, p. 422]). A domain $D_0 \subset D$ is simply connected with respect to D if each finite family of Jordan curves in D_0 which bounds in D also bounds in D_0.

1.3. Theorem. *A compact set $E \subset D$ satisfies condition (A) if and only if $D^* \setminus E$ is connected.*

---

* Research supported by NRC of Canada: Grant A—5597.

Proof. If E satisfies condition (A), then for each point $z\in D\setminus E$, there is a boundary curve $\gamma(z)$ as in Definition 1.1. Let ∞ be the ideal point of the one-point compactification D^*. Then $\overline{\gamma}=\gamma\cup\{\infty\}$, where $\overline{\gamma}$ denotes the closure of γ in D^*. Since γ is connected, so is its closure $\overline{\gamma}$, and thus

$$D^*\setminus E=\cup\,\{\overline{\gamma}(z):z\in D\setminus E\}$$

is connected.

Conversely, suppose E is compact and $D^*\setminus E$ is connected. Let $z\in D\setminus E$ and let G be the component of $\overline{C}\setminus E$ which contains z. Then $\partial G\subset E$ and we claim that G meets ∂D. For otherwise $G\subset D\setminus E\subset D^*\setminus E$, and so G is open in $D^*\setminus E$. Moreover, since $\partial G\subset E$, then $\overline{G}\subset D$, where $\overline{G}$ denotes the closure of G in $\overline{C}$. Since $\overline{G}$ is compact, it is closed in D^* and so

$$G=\overline{G}\cap D^*\setminus E$$

is closed in $D^*\setminus E$. Thus G is both open and closed in $D^*\setminus E$, and since the latter is connected, it follows that $G=D^*\setminus E$. But then G contains the ideal point, which is absurd, since $G\subset D$. Hence G meets ∂D as claimed.

To conclude the proof, let γ^* be an arc in G from z to some point $z_1\in G\cap\partial D$, and let z_0 be the first point of ∂D which γ^* meets. Now if we let γ be that portion of γ^* running from z to z_0, then γ satisfies the requirements of Definition 1.1. This completes the proof.

We present an example to show that the above theorem does not hold for (relatively) closed sets. Let E_1 be the graph of the curve

$$y=|(1/x)\sin(1/x)|,\ 0<x\leqslant\pi^{-1};\ E_2=\{(0,y):-1\leqslant y<+\infty\},$$

and let E_3 be the straight line segment joining the points π^{-1} and $-i$. Now let $D=C$ and set $E=E_1\cup E_2\cup E_3$. Then $D^*\setminus E$ is connected, but E does not satisfy condition (A).

1.4. Theorem. *A domain $D_0\subset D$ is simply connected with respect to D if and only if $D^*\setminus D_0$ is connected.*

Proof. Suppose first that D_0 is simply connected with respect to D. Then if $\{D_n\}$ is a normal exhaustion [4, p. 587] (see also [8, p. 300]) of D_0, and if some component of $\overline{C}\setminus D_n$ is in D, then it is also in D_0. Thus we may assume that no component of $\overline{C}\setminus D_n$ is in D. Hence each component of $\overline{C}\setminus D_n$ meets ∂D, and so $D^*\setminus D_n$ is connected. Now D^* is compact Hausdorff and $D^*\setminus D_n$ is a nested sequence of continua. It follows that

$$D^*\setminus D_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}(D^*\setminus D_n)$$

is a continuum, and in particular is connected.

Suppose conversely that $D^*\setminus D_0$ is connected and $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ is a finite family of Jordan curves in D_0 which bounds in D i. e. there is a domain G such that

$$\partial G=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\subset D_0,$$

and G is precompact in D. We must show that $G\subset D_0$. Since G is precompact in D, $\overline{G}$ is compact in D, and

$$\overline{G}\cap(D^*\setminus D_0)=G\cap(D^*\setminus D_0)$$

is closed in $D^*\setminus D_0$. Also G is open in D^* and so $G\cap(D^*\setminus D_0)$ is open in $D^*\setminus D_0$. Since $D^*\setminus D_0$ is connected and $G\cap D_0\neq\varnothing$, it follows that $G\cap(D^*\setminus D_0)=\varnothing$. Thus $G\subset D_0$, and the proof is complete.

Motivated by the preceding theorems and the theorem to follow, we now extend Definition 1.2.

1.5. Definition. A subset $E\subset D$ is said to be simply connected with respect to D if and only if $D^*\setminus D$ is connected.

1.6. Definition. A subset $E\subset D$ is said to be a set of uniform approximation (by functions holomorphic in D) provided that for each function g continuous on E and holomorphic on E° and for each $\varepsilon>0$, there exists a function f holomorphic in D such that

$$|f(z)-g(x)|<\varepsilon, \text{ for all } z\in E.$$

The following theorem of Arakélian generalizes Mergelian's theorem to arbitrary domains.

1.7. Theorem [1]. *A compact set $E\subset D$ is a set of uniform approximation if and only if E is simply connected with respect to D.*

Let us denote by ∞ the ideal point in D^*.

1.8. Definition. A set $E\subset D$ is in Arakélian's class $K(D)$ if E satisfies condition (A) and for each neighborhood U of ∞, there is a neighborhood V of ∞ such that each point

$$z\in(D\setminus E)\cap V$$

can be connected to ∞ by a boundary curve γ in U (compare Definition 1.1).

We state another theorem of Arakélian which extends Mergelian's theorem to closed sets.

1.9. Theorem [1]. *A (relatively) closed set $E\subset D$ is a set of uniform approximation if and only if $E\in K(D)$.*

Let us now consider a much stronger sort of approximation.

1.10. Definition. A set $E\subset D$ is a set of tangential approximation (by functions holomorphic in D) provided that for each function g continuous on E and holomorphic on E° and each positive continuous function $\varepsilon(t)$, $0<t<1$, there is a function f holomorphic in D such that, for all $z\in E$

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon(\chi(z, \partial D)).$$

The following result is also due to Arakèlian [1].

1.11. Theorem. *Let E be a closed subset of D such that $E \in K(D)$ and $E^{\circ} = \varnothing$. Then E is a set of tangential approximation.*

With additional hypotheses it is sometimes possible to achieve tangential approximation even though E° may be quite large [7].

§ 2. Applications

In this section, with the aid of Arakélian's theorems, we extend some known results on cluster sets. Moreover our proofs will be much shorter than the earlier proofs. We begin with the following two theorems originally proved by Bagemihl and Seidel [2, 3].

2.1. Theorem. *Let $D = (|z| < R)$, $R \leqslant +\infty$; let $\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ be a countable family of disjoint simple boundary curves, and let g be defined and continuous on each α_n. Then there exists a function f holomorphic in D such that for each n*

$$|f(\alpha_n(t)) - g(\alpha_n(t))| \to 0, \text{ as } t \to \infty.$$

Proof. Let $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < R$, $r_n \to R$, and set $E = \bigcup_n \{\alpha_n \cap (|z| \geqslant r_n)\}$. Then E satisfies the conditions in Arakélian's Theorem 1.11, and g is continuous on E. Thus f exists as claimed.

The above theorem is a special case of the next theorem, but we thought it worthwhile to present the preceding proof because of its brevity. The following theorem was originally proved for monotonic boundary curves in domains bounded by finitely many Jordan curves.

2.2. Theorem. *Let D be a proper domain of the Riemann sphere; let α_n, $n = 1, 2, \cdots,$ be a countable family of disjoint simple boundary curves; and let g be defined and continuous on each α_n. Then there exists a function f holomorphic on D such that for each n*

$$|f(\alpha_n(t)) - g(\alpha_n(t))| \to 0, \text{ as } t \to \infty.$$

Proof. Let $\{D_k\}$ be a normal exhaustion of D; i. e. $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_k \cup \cdots$, where each D_k is bounded by finitely many Jordan curves and $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$. We may also assume that each D_k has the property that each component of $\overline{C} \setminus \overline{D}_k$ meets ∂D (i. e. D_k is simply connected with respect to D).

Let β_n be the tail end of α_n starting from the last point at which α_n leaves $\overline{D}_n$, and set $E = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_n \cup \cdots$. We will show that E satisfies the conditions of Arakélian's Theorem on tangential approximation. First of all

$$E \cap \overline{D}_n = \overline{D}_n \cap \bigcup_{k=1}^{n} \beta_k$$

is closed (perhaps empty) and thus E is closed in D and nowhere dense.

For $\varepsilon > 0$, we write

$$V_\varepsilon(\partial D) = \{z \in D : \chi(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

To show that $E \in K(D)$ it will be sufficient to show that for each $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that for all z in

$$(D \setminus E) \cap V_\delta (\partial D), \tag{1}$$

we can find a boundary curve $\gamma = \gamma (z)$,

$$\gamma (z) \subset (D \setminus E) \cap V_\varepsilon (\partial D),$$

which connects z to ∂D.

Suppose ε and z are given as above. We claim there exists an N such that

$$n > N \Rightarrow \beta_n \subset V_\varepsilon (\partial D). \tag{2}$$

Indeed

$$D \setminus V_\varepsilon (\partial D) = \{z \in D : \chi (z, \partial D) \geq \varepsilon\} = \{z \in \overline{C} : \chi (z, \overline{C} \setminus D) \geq \varepsilon\}$$

is closed in $\overline{C}$ and hence compact. This set is therefore contained in some D_k, and we may choose $N = k+1$ in (2).

For $k=1, 2, \cdots, N$, let z_k be the last point at which α_k leaves $\overline{D}_N$, and let α_k^N be the initial part of α_k running from $\alpha_k (0)$ to z_k (if $\alpha_k \cap \overline{D}_N = \varnothing$, we may set $\alpha_k^N = \varnothing$). We now choose $N_1 > N$ so that

$$D_{N_1} \supset \bigcup_{k=1}^{N} \alpha_k^N .$$

Let $\delta > 0$ be chosen so that

$$V_\delta (\partial D) \subset D \setminus \overline{D}_{N_1}.$$

Suppose z lies in (1), and let G be the component of $\overline{C} \setminus \overline{D}_{N_1}$ which contains z. By the way in which the exhaustion $\{D_n\}$ was chosen, it follows that G meets ∂D. Let γ^* be an arc from z to ∂D in G. if $\gamma^* \cap E = \varnothing$, we are through. If not, there is a first point $p \in \gamma^*$ which is in E. Thus p lies in some β_n. Let $\lambda = \chi (p, E \setminus \beta_n) > 0$, and let q be the first point of γ^* for which $\chi(q, p) \leq \lambda/2$.

There are two cases to consider. If $n > N$, then $\beta_n \subset V_\varepsilon (\partial D)$. Thus we may easily construct the required curve $\gamma = \gamma (z) \subset V_\varepsilon (\partial D)$ by running along γ^* from z to q. Then γ stays close to β_n and follows β_n out to ∂D in such a way as to remain in $V_\varepsilon (\partial D)$ and to remain disjoint from each β_k, $k=1, 2 \cdots$.

If $n \leq N$, then $p \in \beta_n \setminus \alpha_n^N$. This means that p is past (further along) z_n on β_n and so β_n will never return to $\overline{D}_N$ after it passes p. Thus we may again construct γ by going along γ^* from z to q, and then staying near β_n as it runs out to ∂D, being careful to avoid each β_k and to remain outside of $\overline{D}_N$ and therefore in $V_\varepsilon (\partial D)$. Thus $E \in K (D)$, and the theorem follows from Arakélian's Theorem on tangential approximation.

Under appropriate hypotheses it is also possible to specify boundary behaviour on uncountably many boundary curves. The following theorem is due to Bagemihl and Seidel [3] and Rudin [10]. The following version is stated in [5, p. 163].

2.3. Theorem. *Let g be an arbitrary continuous function in* $|z|<1$, *let F be a set of first category on* $|z|=1$, *and let* $\{L(\theta)\}$ *be a family of mutually disjoint boundary curves terminating at the points* $e^{i\theta}\in F$ *and such that* $\{L(\theta)\}$ *is homeomorphic to a family of radial segments* $\{\lambda(\theta)\}$ *terminating at F. That is, there exists a homeomorphism* ψ *of* $|z|\leqslant 1$ *onto itself which leaves each point of* $|z|=1$ *fixed and such that* $L(\theta)=\psi(\lambda(\theta))$. *Then there exists a function f, holomorphic in* $|z|<1$, *such that for every* $e^{i\theta}\in F$

$$f(z)-g(z)\to 0, \text{ as } z\to e^{i\theta} \text{ on } L(\theta).$$

Proof. $F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, where each F_n is closed and nowhere dense in $|z|=1$. Set

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

where

$$E_n=\psi\,\{\lambda(\theta)\cap(|z|\geqslant 1-1/n):\ e^{i\theta}\in F_n\}.$$

Then E satisfies the hypotheses of Arakélian's Theorem on tangential approximation, and so f exists as claimed.

By a similar argument we could also prove the analogous theorem of Bagemihl and Seidel [3] on tresses. Also, we believe that the above theorems remain valid on arbitrary open Riemann surfaces, however it seems that the approximation theory for proving such theorems (easily) has yet to be developed.

The following theorem is due to Schneider [12] although he restricted his attention to monotonic (in modulus) boundary curves for simplicity. The original proof made use of the pole sweeping method.

2.4. Theorem. *Let* $D=(|z|<R)$, $R\leqslant+\infty$; *and let* α *and* β *be two simple boundary arcs disjoint except for their common initial point, say* $\alpha(0)=\beta(0)=0$. *Let* E_0, E_1 *be the two domains into which* $\alpha\cup\beta$ *separates D. Then there exists a function f, holomorphic in D, such that f is bounded in* E_0 *and unbounded in* E_1.

Proof. Let $\{z_n\}$ be a sequence in E_1 such that $|z_n|\to R$, as $n\to\infty$, and set $E=E_0\cup\{z_n\}$. We define a continuous function g on E by setting g equal to zero on E_0 and $g(z_n)=n$, for $n=1, 2\cdots$.

As in the proof of Theorem 2.2 (but much more easily in this case) we see that E is relatively closed in D and is in $K(D)$. From Arakélian's Theorem 1.9, there exists a function f, holomorphic in D, such that $|f(z)-g(z)|<1$, for all $z\in E$. The proof is complete.

Remark: After submitting this paper, we have noticed that Theorem 2.2 of the present paper is essentially the same as Theorem 9 in W. Kaplan's paper, Approximation by entire functions, Mich. Math. J., 3 (1955—1956), 43—52.

Université de Montréal
Montréal, Canada,
Wayne State University, Detroit, Michigan, U.S.A.

Received 2.VIII.1971

Պ. ԳՈԹՅԵ, Վ. ԶԱՅԴԵԼ. Առաքելյանի մոտարկման թեորեմների որոշ կիրառություններ եզրային բազմությունների տեսության մեջ *(ամփոփում)*

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ տվյալ տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաներով շոշափումային մոտավորության թեորեմները պարզեցնում են անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի վերաբերյալ որոշ հարցերի հետազոտումը։

Մոտարկումային թեորեմների օգնությամբ միասնական ձևով ապացուցվում են Բագեմիլի և Զեյդելի, Ռուդինի, Շնեյդերի թեորեմների ընդհանրացված տարբերակները եզրային բազմությունների տեսությունից։

П. ГОТЬЕ, В. ЗЕЙДЕЛЬ. *Некоторые приложения аппроксимационных теорем Аракеляна в теории предельных множеств* (резюме)

В заметке показывается, что теоремы о возможности касательного приближения аналитическими в данной области функциями упрощают изучение некоторых вопросов граничного поведения аналитических функций. С помощью аппроксимационных теорем единым способом доказываются обобщенные варианты некоторых теорем Багемиля и Зейделя, Рудина, Шнейдера из теории предельных множеств.

REFERENCES

1. *N. U. Arakelian*. Uniforn and tangential approximation by holomorphic function s, Izvestija Akad. Nauk Armjan. SSR, Mat., 3, 1968, English summary, 273—286, (Russian), ZB 175 : 76.
2. *F. Bagemihl* and *W. Seidel*. Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analitic and meromorphic functions, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 39, 1953, 1251—1258, MR 15: 515.
3. *F. Bagemihl*. Some boundary properties of analytic functions, Math. Z. 61, 1954, 186—199, MR 16:460.
4. *H. Behnke* and *F. Sommer*. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 3rd ed. Springer—Verlag, Berlin, 1965.
5. *E. F. Collingwood* and *A. J. Lohwater*. The theory of cluster sets, Cambridge University Press., 1966, MR 38: 325.
6. *W. H. J. Fuchs*. Théorie de l'approximation des fonctions d'une variable complexe, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1968.
7. *P. M. Gauthier*. Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc, Izvestija Akad. Nauk Armjan. SSR, Mat., 4, 1969, 319—326.
8. *E. Hille*. Analytic function theory, Vol. 11, Ginn, Boston, 1962. MR 34: 1490
9. *S. N. Mergelian*. Uniform approximations of functions of a complex variable, Uspehi Matem. Nauk (N. S.) 7, no 2 (48), 1952, 31—122 (Russian) MR 14 : 547. Amer. Math. Soc. translation, no. 101, 1954, 99 pp.
10. *W. Rudin*. Radial cluster sets of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc., 60, 1954, 545.
11. *W. Rudin*. Real and complex analysis, McGraw-Hill, New York, 1966. MR 35: 1420.
12. *W. J. Schneider*. An elementary proof and extension of an example of Valiron, Pacific J. Math. (to appear).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

А. А. НЕРСЕСЯН

О МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕМАНА

Пусть D—область в расширенной комплексной плоскости, $\partial D \neq \varnothing$. Назовем множество $E \subset D$ множеством Карлемана в D, если E замкнуто в D и для любой пары функций $f(z)$ и $\varepsilon(z)$, где $f(z)$ непрерывная на E и аналитическая во внутренности E° множества E функция, а $\varepsilon(z) > 0$—непрерывная на D функция, убывающая к нулю при приближении z к границе ∂D области D, существует аналитическая в D функция $g(z)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \text{ при } z \in E. \qquad (*)$$

Т. Карлеман показал [1], что при $D = C$ действительная ось является множеством, допускающим аппроксимацию вида (*).

М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [2] было получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы континуум с пустой внутренностью был множеством Карлемана.

П. Готье [3] было получено условие на замкнутое множество с неограниченной внутренностью, необходимое для того, чтобы оно было множеством Карлемана. В работе [3] дано и условие на множество, достаточное для того, чтобы оно было множеством Карлемана.

В настоящей работе показано, что некоторые известные ранее условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы множество E было множеством Карлемана.

1°. Пусть $z, \zeta \in D$, через $\rho(z, \zeta)$ обозначим сферическое расстояние между z и ζ:

$$\rho(z, \zeta) = \frac{|z - \zeta|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |\zeta|^2)}}.$$

Обозначим через $V_\varepsilon(\partial D)$ сферическую ε-окрестность границы D

$$V_\varepsilon(\partial D) = \{z \in \overline{C} \mid \rho(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Скажем, что множество E удовлетворяет условию K, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каждую точку $z \in (D - E) \cap V_\delta(\partial D)$ можно соединить с ∂D жордановой кривой $\gamma_z \subset (D - E) \cap V_\varepsilon(\partial D)$.

Скажем, что множество E удовлетворяет условию A, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что ни одна из компонент множества E° не пересекает одновременно множества $V_\delta(\partial D)$ и $D - V_\varepsilon(\partial D)$.

Докажем, что справедлива следующая

Теорема. *Для того чтобы замкнутое в D множество $E \subset D$ было множеством Карлемана, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям A и K.*

Необходимость условия K вытекает из теоремы Н. У. Аракеляна о равномерных приближениях [4]. Необходимость условия A доказал П.Готье [3] для случая $D=(|z|<R)$, $0<R\leqslant\infty$, однако нетрудно заметить, что это доказательство верно и для общего случая.

2°. При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Пусть F—компакт в C с дополнением, состоящим из конечного числа компонент. Открытое подмножество G множества F таково, что $\partial G\subset\partial F$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ существует рациональная функция $R(z, G, \varepsilon)$ такая, что*

a) $|R(z, G, \varepsilon)|<\varepsilon$ *при* $z\in G-(\partial G)_\varepsilon$,
b) $|1-R(z, G, \varepsilon)|<\varepsilon$ *при* $z\in F-G_\varepsilon$,
c) $|R(z, G, \varepsilon)|<c$ *при* $z\in F$,

где c—абсолютная постоянная, а N_ε—ε-окрестность данного множества N.

По теореме Титце—Урысона, для любого $\delta>0$ существует непрерывная на всей плоскости функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условиям

1. $\varphi(z)=0$ при $z\in\overline{G}$,
2. $\varphi(z)=1$ при $z\in\overline{C(G_\delta)}$,
3. $0\leqslant\varphi(z)\leqslant 1$.

Если $\omega(r)$—модуль непрерывности $\varphi(z)$, то $\omega(\delta)=1$. Рассмотрим усреднение функции $\varphi(z)$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi\delta^2}\iint\limits_{|\zeta-z|<\delta}\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

Отметим следующие свойства функции $\Phi(z)$:

1. $$|\Phi(z)-\varphi(z)|<\frac{1}{\pi\delta^2}\iint\limits_{|\zeta-z|<\delta}|\varphi(\zeta)-\varphi(z)|\,d\xi d\eta\leqslant\omega(\delta)=1.$$

Отсюда вытекает, что $|\Phi(z)|\leqslant 2$.

2. $\Phi(z)=0$ при $z\in G-(\partial G)_\delta$; $\Phi(z)=1$ при $z\in C(G_{2\delta})$. Пусть

$$\bar\partial\Phi(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+i\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right),\quad z=x+iy. \tag{1}$$

По формуле Грина имеем

$$\Phi(z)=-\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-x|=\delta}d\xi\int\limits_0^{\eta+y}\varphi(\zeta)\,d\eta=\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-iy|=\delta}d\eta\int\limits_0^{\xi+x}\varphi(\zeta)\,d\xi. \tag{2}$$

Из (2) вытекает

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)\,d\eta;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)\,d\xi.$$

Подставляя эти выражения в (1), принимая во внимание свойство 3) функции $\varphi(z)$, будем иметь

$$|\bar{\partial}\Phi(z)| = \frac{1}{2\pi\delta^2}\left|\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)(d\eta - id\xi)\right| = \frac{1}{2\pi\delta^2}\left|\int\limits_{|\zeta-z|=\delta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{\delta}. \quad (3)$$

Пусть R такое, что $F \subset (|z| < R) = S$ и $(|z| = R) \subset C(G_{2\delta})$, тогда по формуле Бореля—Помпею

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in S}\frac{\bar{\partial}\Phi(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta = 1 - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in S-F}\frac{\bar{\partial}\Phi(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F}\frac{\bar{\partial}\Phi(z)}{\zeta - z}d\xi d\eta = 1 - J_1 - J_2. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что J_1 непрерывна на F и аналитична на F°. Так как дополнение к F состоит из конечного числа компонент, то существует рациональная функция $R_1(z)$ такая, что

$$|1 - J_1 - R_1(z)| < \delta \quad \text{при } z \in F, \quad (5)$$

согласно теореме С. Н. Мергеляна [5].

Так как $\bar{\partial}\Phi(z) = 0$ при $z \in F - (\partial G)_{2\delta}$, а расстояние от точек множества $F \cap (\partial G)_{2\delta}$ до дополнения к F не превосходит 2δ в силу условия леммы на ∂G, то для всякого $\zeta \in F \cap (\partial G)_{2\delta}$ в силу известной леммы С. Н. Мергеляна об аппроксимации ядра Коши [5], существует рациональная функция $R_\zeta(z)$, удовлетворяющая условиям

$$1. \quad |R_\zeta(z)| < \frac{c_1}{\delta}, \quad z \in F, \quad (6)$$

$$2. \quad \left|\frac{1}{\zeta - z} - R_\zeta(z)\right| < \frac{c_1\delta^2}{|\zeta - z|^3}, \quad |\zeta - z| > c_2\delta, \quad (7)$$

где $c_1, c_2, \cdots$ — абсолютные постоянные, а порядки полюсов рациональных функций $R_\zeta(z)$ ограничены числом, не зависящим от ζ. Пусть

$$R_2(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in F\cap(\partial G)_{2\delta}}\bar{\partial}\Phi(\zeta)\,R_\zeta(z)\,d\xi d\eta. \quad (8)$$

Имеем согласно (3), (6), (7) и (8) при $z \in F$

$$|J_2 - R_2(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\zeta\in F\cap(\partial G)_{2\delta}}|\bar{\partial}\Phi(z)|\left|\frac{1}{\zeta - z} - R_\zeta(z)\right|d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta - z| < c_2\delta}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} + \frac{1}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta - z| < c_2\delta}|R_\zeta(z)|d\xi d\eta + \frac{1}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta - z| > c_2\delta}\left|\frac{1}{\zeta - z} -\right.$$

$$\left.- R_\zeta(z)\right|d\xi d\eta \leqslant \frac{1}{\pi\delta}2\pi c_2\delta + \frac{c_1}{\pi\delta^2}\pi c_2^2\delta^2 + c_1\frac{\delta^2}{c_2\pi\delta^2} = c_3. \quad (9)$$

Будем считать, что δ настолько мало, что $c_2\delta < \sqrt{\delta}$. Тогда для точек множества $\{z\in F | d(z, F^0\cap(\partial G)_{2\delta}) > \sqrt{\delta}\}$, где $d(z, N)$ — евклидово расстояние точки z до множества N, будем иметь согласно (7)

$$|J_2-R_2(z)|\leqslant\frac{c_1\delta^2}{\pi\delta}\iint\limits_{|\zeta-z|>\delta}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta-z|^3}=2c_1\sqrt{\delta};\qquad(10)$$

а для функции $R(z)=R_1(z)+R_2(z)$ согласно (4), (5), (9) и (10) имеем

$$|\Phi(z)-R(z)|<\delta+c_3<c_4 \quad \text{при} \quad z\in F,$$

$$|\Phi(z)-R(z)|<2c_1\sqrt{\delta}=c_5\sqrt{\delta} \quad \text{при} \quad z\in F-(\partial G)_{2\delta+\sqrt{\delta}}.$$

Для данного $\varepsilon>0$, выбирая $\delta>0$ из условия $\sqrt{\delta}<\dfrac{\varepsilon}{2c_5}$ и принимая во внимание свойства 1) и 2) функции $\Phi(z)$, убедимся в справедливости леммы.

3°. Последовательность расширяющихся множеств $\{D_n\}$ определим следующим образом.

Пусть $A_0=\{z\in D | \rho(z, \partial D)\geqslant r_0\}$, где $r_0>0$ настолько мало, что $A_0\neq\varnothing$, A_0—замкнутое множество с конечным числом компонент дополнения, каждая из которых содержит подмножество множества CD. B_0—замыкание части CE, точки которой могут быть соединены с ∂D только непрерывными кривыми, пересекающими A_0, C_0—замыкание совокупности компонент E°, замыкание которых пересекается с множеством $A_0\cup B_0$. Пусть $D_0=A_0\cup B_0\cup C_0$.

Отметим следующие свойства множества D_0:

a) Существует $r_0'>0$ такое, что $\rho(D_0, \partial D)>r_0'$. Это вытекает из того, что E удовлетворяет условиям A и K;

b) D_0—замкнуто;

c) Дополнение к D_0 состоит из конечного числа компонент, каждая из которых содержит подмножество CD (вытекает из определения D_0).

d) $\partial D_0\subset\partial(D_0\cup E)$. Так как $\partial D_0\subset\partial A_0\cup\partial B_0\cup\partial C_0$, то точка $z\in\partial D_0\cap\cap(\partial A_0\cup\partial B_0)$ является предельной для множества $C(D_0\cup E)$ по определению D_0, а точка $z\in\partial D_0\cap\partial C_0$ является предельной для $C(D_0\cup E)$ по определению компоненты связности E°.

Используя ту же конструкцию, построим множество D_1, беря $A_1=\{z\in D|\rho(z, \partial D)\geqslant r_1\}$, где $0<r_1<\dfrac{r_0'}{2}$ и т. д.

Ясно, что любое компактное подмножество области D принадлежит всем D_n при n достаточно большом.

Замкнутые множества D_n', D_n'', $n=0, 1, 2,\cdots$ выберем так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

a) $D_n'\subset D_n^\circ$; $D_n\subset(D_n'')^\circ$; $D_n''\subset(D_{n+1}')^\circ$;

b) $C(\overset{*}{D}_n)$ состоит из конечного числа компонент, содержащих подмножества CD.

Через $\overset{*}{r}_n$ обозначим $\rho(\overset{*}{D}_n, \partial D)$.

Замечания: a) Множество $E \cap \overset{*}{D}_n$ допускает равномерное приближение рациональными функциями [5].

b) Все рациональные функции, рассматриваемые ниже, имеют свои полюсы в CD;

c) Не нарушая общности, функцию $\varepsilon(z)$ можем принять зависящей от $\rho(z, \partial D)$;

Существует рациональная функция $R_0(z)$ такая, что

$$|f(z) - R_0(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_0) \quad \text{при} \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_0, \tag{11}$$

где c постоянная леммы.

Рациональную функцию $Q_1(z)$ выберем так, чтобы

$$|f(z) - R_0(z) - Q_1(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_1) \quad \text{при} \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_1. \tag{12}$$

Согласно лемме, при $G = \overset{*}{D}_0$, $F = D_0 \cup (E \cap \overset{*}{D}_1)$ можно найти рациональную функцию $r(z, D_0, \varepsilon)$ с $\varepsilon_1 > 0$ таким, что функция $R_1(z) = r(z, D_0, \varepsilon_1)\, Q_1(z)$ будет обладать следующими свойствами:

$$|R_1(z)| < \frac{1}{2}, \quad z \in D_0',$$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_1), \quad z \in E \cap (\overset{*}{D}_1 - \overset{*}{D}_0). \tag{13}$$

Выбор ε_1 гарантируется тем, что (12) выполняется на замкнутом множестве и в нем исключено равенство.

При $z \in E \cap \overset{*}{D}_0$ будем иметь согласно (11), (12) и свойству 3) функции $r(z, D_0, \varepsilon_1)$,

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_0) + c\left(\frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_1) + \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_0)\right) < \varepsilon(\overset{*}{r}_0).$$

Рациональную функцию $Q_2(z)$ выберем из условия

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - Q_2(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_2), \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_2. \tag{14}$$

Число $\varepsilon_2 > 0$ возьмем настолько малым, чтобы функция $R_2(z) = r(z, D_1, \varepsilon_2)\, Q_2(z)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$|R_2(z)| < \frac{1}{4}, \quad z \in D_1',$$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - R_2(z)| < \varepsilon(\overset{*}{r}_0), \quad z \in E \cap \overset{*}{D}_0,$$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - R_2(z)| < \frac{1}{4c}\,\varepsilon(\overset{*}{r}_2), \quad z \in E \cap (\overset{*}{D}_2 - \overset{*}{D}_1).$$

Принимая во внимание (13) и (14), будем иметь при $z \in E \cap (D_1^{\cdot} - D_0^{\cdot})$

$$|f(z) - R_0(z) - R_1(z) - R_2(z)| < \frac{1}{4c} \varepsilon(r_1^{\cdot}) + c\left(\frac{1}{4c} \varepsilon(r_2^{\cdot}) + \frac{1}{4c} \varepsilon(r_1^{\cdot})\right) < \varepsilon(r_1^{\cdot}).$$

Пусть для некоторого n выбраны функции $R_0(z), R_1(z), \cdots, R_n(z)$ такие, что

$$|R_k(z)| < \frac{1}{2^k}, \quad z \in D_{k-1}^{\prime}, \; k = 1, 2, \cdots, n, \tag{15}$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z)| < \varepsilon(r_k^{\cdot}), \; z \in E \cap (D_k^{\cdot} - D_{k-1}^{\cdot}), \; k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

$$D_{-1}^{\cdot} = \varnothing, \tag{16}$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z)| < \frac{1}{4c} \varepsilon(r_n^{\cdot}), \; z \in E \cap (D_n^{\cdot} - D_{n-1}^{\cdot}). \tag{17}$$

Рациональную функцию $Q_{n+1}(z)$ выберем так, чтобы

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z) - Q_{n+1}(z)| < \frac{1}{4c} \varepsilon(r_{n+1}^{\cdot}), \; z \in E \cap D_{n+1}^{\cdot}. \tag{18}$$

Число $\varepsilon_{n+1} > 0$ возьмем настолько малым, чтобы для функции $R_{n+1}(z) = r(z, D_n, \varepsilon_{n+1}) \, Q_{n+1}(z)$ выполнялись неравенства

$$|R_{n+1}(z)| < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad z \in D_n^{\prime},$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_n(z) - R_{n+1}(z)| < \varepsilon(r_k^{\cdot}), \; z \in E \cap (D_k^{\cdot} - D_{k-1}^{\cdot}),$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_{n+1}(z)| < \frac{1}{4c} \varepsilon(r_{n+1}^{\cdot}), \quad z \in E \cap (D_{n+1}^{\cdot} - D_n^{\cdot}).$$

Согласно (17), (18) и условию 3 на $r(z, D_n, \varepsilon_{n+1})$ будем иметь при $z \in E \cap (D_n^{\cdot} - D_{n-1}^{\cdot})$

$$|f(z) - R_0(z) - \cdots - R_{n+1}(z)| < \frac{1}{4c} \varepsilon(r_n^{\cdot}) + c\left(\frac{1}{4c} \varepsilon(r_{n+1}^{\cdot}) + \frac{1}{4c} \varepsilon(r_n^{\cdot})\right) <$$
$$< \varepsilon(r_n^{\cdot}).$$

Принимая во внимание (15), нетрудно видеть, что ряд $\sum_0^\infty R_n(z)$ сходится равномерно на любом компактном подмножестве области D, следовательно представляет аналитическую в D функцию $g(z) = \sum_0^\infty R_n(z)$. В силу (16) имеем

$$|f(z) - G(z)| \leqslant \varepsilon(z), \; z \in E.$$

Теорема доказана.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить

благодарность доктору физико-математических наук Н. У. Аракеляну за ценные указания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 17.XI.1971

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Կառլեմանի բազմությունների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք D-*ն տիրույթ է ընդլայնված հարթության վրա* $\partial D \neq \varnothing \cdot E \subset D$ D-*ի նկատմամբ փակ բազմություն է։* E-*ն կանվանենք Կառլեմանի բազմություն, եթե ֆունկցիաների ցանկացած* f(z), ε (z) *զույգի համար, որտեղ* f(z)-*ը անընդհատ է* E-*ի վրա և անալիտիկ՝* E-*ի ներսում, իսկ* ε (z)-*ը դրական, անընդհատ ֆունկցիա է,* $\varepsilon(z) \to 0$ *ցանկացած արագությամբ, երբ* z-*ը մոտենում է* D-*ին, գոյություն ունի մի* g(z), *անալիտիկ* D-*ում, ֆունկցիա այնպես, որ* $|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z)$, $z \in E$.

Ապացուցված է, որ A *և* K *պայմանները անհրաժեշտ և բավարար են, որպեսզի* E-*ն լինի Կառլեմանի բազմություն։*

A. H. NERSESIAN. *On the Carleman sets* (summary)

Let D be a domain on the extended complex plane, $\partial D \neq \varnothing$, $E \subset D$ be relatively closed subset of D. We call E a Carleman set if for any pair of functions $f(z)$, $\varepsilon(z)$ where $f(z)$ is continuous on E and analytical in the interiour of E, $\varepsilon(z)$ is a positive, continuous on D function, $\varepsilon(z) \to 0$ arbitrarily rapid when z tends to ∂D, there exists, a function $g(z)$ analytical in D such that

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z), \; z \in E.$$

It is proved that the conditions A and K are necessary and sufficient for E to be a set of Carleman.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. Carleman*. Sur un théorème de Weierstrass, Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fisik, Bd 20, № 4, 1927, 1—5.
2. *М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев*. Об одной задаче Карлемана, ДАН СССР, 23, № 8, 1939, 746—748.
3. *P. Gauthier*. Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", IV, № 5, 1969, 319—326.
4. *Н. У. Аракелян*. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями, Изв. АН АрмССР, сер. „Математика", III, №№ 4—5, 1968.
5. *С. Н. Мергелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

А. И. ХЕЙФИЦ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОТКРЫТОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Представление мероморфных в замкнутой полуплоскости функций, характеристика которых имеет степенной рост, было получено Р. Неванлинной ([1]). И. О. Хачатрян ([2]) рассмотрел функции с произвольно растущей характеристикой. Н. В. Говоров ([3], стр. 78) получил представление аналитических в полуплоскости функций конечного порядка. Используя идеи работ [2] и [3], мы получим представление аналитических в открытой полуплоскости функций произвольного роста.

Мы будем рассматривать аналитические в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ функции $f(z)$, удовлетворяющие следующему условию:

Г) в каждом полукруге $\{\operatorname{Im} z>0\} \cap \{|z|<R\}$, $0<R<\infty$, $f(z)$ ограничена. Условие Г) впервые было введено в ([3], стр. 24). Оно естественно при рассмотрении функций в полуплоскости. В силу теоремы Фату, у функций, удовлетворяющих этому условию, почти всюду на вещественной оси существуют угловые предельные значения. В остальных точках границы полагают $|f(t)|=\overline{\lim}\,|f(z)|$, когда точка z стремится к вещественному значению t по любому пути, лежащему в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ ([3], стр. 24). Известно ([3], стр. 53, [4]), что если $f(z)$ удовлетворяет условию Г), то существует невозрастающая сингулярная функция $\varphi(t)$, определяемая равенством $(-\infty<t<\infty)$

$$\varphi(t)=\lim_{y\to+0}\int_0^t \ln|f(x+iy)|\,dx-\int_0^t \ln|f(x)|\,dx, \tag{1}$$

причем (1) имеет место для всех t, если разрывы $\varphi(t)$—правильные т. е., при всех вещественных t $2\varphi(t)=\varphi(t+0)+\varphi(t-0)$.

Пусть $V(r)$—определенная при $r>0$ положительная неубывающая функция. Через A_V обозначим класс аналитических в $\{\operatorname{Im} z>0\}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию Г) и неравенству ($C_f=\text{const}$),

$$\sup_{0<\theta<\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\leqslant C_f\, V(r). \tag{2}$$

Заметим, что целые функции, удовлетворяющие условию типа неравенства (2), рассмотрены в [5].

Введем (см. [2], [6]) обозначения

$$L_p(t, z)=\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t}-\frac{z}{t^2}-\cdots-\frac{z^p}{t^{p+1}},\ p=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

$$L(t, z)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-z} & \text{при } |t|<1,\\ L_{p_n}(t, z) & \text{при } n-1\leqslant|t|<n,\end{cases} \tag{3}$$

где $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет выбрана зависящей лишь от $V(r)$. Как обычно, $G(u, p)=(1-u)\exp\left\{u+\cdots+\frac{u^p}{p}\right\}$—первичный множитель Вейерштрасса, $N_p(z, a)=G\left(\frac{z}{a}, p\right)G^{-1}\left(\frac{z}{\bar{a}}, p\right)$—первичный множитель Неванлинны (этот термин введен Н. В. Говоровым [3]).

Теорема. *Каждая функция $f(z)\in A_V$ может быть представлена следующим образом*:

$$f(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}L(t, z)\,d\psi(t)+i\,h(z)\right\}\times$$

$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{n-1<|z_\mu|<n}N_{p_n}(z, z_\mu), \tag{4}$$

где $\psi(t)=\lim_{y\to+0}\int_0^t\ln|f(x+iy)|\,dx$, $z_\mu=r_\mu e^{i\theta_\mu}$—корни $f(z)$, $p_1=0$, $p_n=[\ln V\times\times(n+1)]$, $n=2, 3,\cdots$, $h(z)$—*целая функция с вещественными тейлоровскими коэффициентами, рост которой можно оценить через* $V(r)$.

Доказательство. Сначала запишем для $f(z)$ обобщенную формулу Карлемана ([3], стр. 61):

$$\sum_{1<r_\mu<r}\left(\frac{1}{r_\mu}-\frac{r_\mu}{r^2}\right)\sin\theta_\mu-\frac{1}{2\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{r^2}\right)d\,[\varphi(x)-\varphi(-x)]=$$

$$=\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi\ln|f(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(x)|dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(-x)|\,dx+A(r), \tag{5}$$

где $A(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\operatorname{Im}\,[\ln f(e^{i\theta})(e^{-i\theta}-e^{i\theta}r^{-2})]\,d\theta$ — ограниченная величина при $r\to\infty$.

Из (2) следует, что при $-\infty<x<\infty$ $\ln|f(x)|\leqslant CV(|x|)$. (Здесь и далее C обозначает различные положительные постоянные). Учитывая, что все слагаемые в левой части (5) неотрицательны, получим

$$\sum_{1<r_\mu<r}\left(\frac{1}{r_\mu}-\frac{r_\mu}{r^2}\right)\sin\theta_\mu\leqslant CV(r),$$

$$\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) d\varphi(x) \geqslant -CV(r),$$

$$\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) d\varphi(-x) \leqslant CV(r). \qquad (r>1)$$

Из этих неравенств легко следует, что

$$\sum_{1<r_\mu<r} \frac{\sin\theta_\mu}{r_\mu} \leqslant CrV(r+1), \tag{6}$$

$$|\varphi(\pm r)| \leqslant Cr^3 V(r+1) \quad (r>1). \tag{7}$$

Здесь надо учесть монотонность $\varphi(t)$. Далее, из (5) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(x)|\, dx \geqslant -\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta})| \sin\theta d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(-x)|\, dx + O(1) \geqslant -CV(r),$$

в силу (2). Или же

$$\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) (\ln^+|f(x)| - \ln^-|f(x)|)\, dx \geqslant -CV(r),$$

откуда

$$\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^-|f(x)|\, dx \leqslant CV(r).$$

Поэтому

$$\int_1^r \ln^-|f(x)|\, dx \leqslant Cr^3 V(r+1).$$

Аналогично

$$\int_1^r \ln^-|f(-x)|\, dx \leqslant Cr^3 V(r+1).$$

Отсюда

$$\int_1^r |\ln|f(\pm x)||\, dx \leqslant Cr^3 V(r+1)$$

Следовательно, при $-\infty < x < \infty$

$$|\psi(x)| \leqslant C(|x|+1)^3 V(|x|+1). \tag{8}$$

Рассмотрим интеграл

$$I=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}L(t,\,z)\;d\psi\,(t)=\sum_{n}\frac{1}{\pi i}\,(I_n^{+}+I_n^{-}),$$

где $I_n^{+}=\int\limits_{n-1}^{n}L_{p_n}(t,\,z)\,d\psi\,(t)$, а I_n^{-} определяется аналогично. Используя (4) и (8), легко показать, что I сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте в $\{\operatorname{Im} z>0\}$ (см. [2]).

Далее, так же, как и в [2], легко показать, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\ \prod\limits_{n-1<|z_\mu|<n} N_{p_n}(z,\,z_\mu)$ сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте в $\{\operatorname{Im} z>0\}$, не содержащем точек z_μ. Значит, функция

$$g\,(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}L\,(t,\,z)\;d\psi\,(t)\right\}\prod_{n=1}^{\infty}\ \prod_{n-1<|z_\mu|<n}N_{p_n}\ (z,\,z_\mu)\text{ — аналитиче-}$$

ская в $\{\operatorname{Im} z>0\}$. Теперь, как в ([3], стр. 88), можно показать, что функция $F\,(z)=g\,(z)/f\,(z)$—аналитическая и не имеет нулей в $\{\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$, причем $|F\,(t)|=1$ $(-\infty<t<\infty)$. Следовательно, $\ln F\,(z)$—целая функция, и $\ln F\,(z)=i\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, где a_n — вещественные числа. Положим $h\,(z)=-i\ln F\,(z)$. Теорема доказана.

Ростовский-на-Дону
государственный университет

Поступило 2.VII.1971

Ա. Ի. ԽԵՅՖԻՑ. Բաց կիսահարթության մեջ անվերջ կարգի անալիտիկ ֆունկցիաների ներկայացումը (*ամփոփում*)

Դիցուք A_V-*ն* $\operatorname{Im} z>0$ *կիսահարթության մեջ անալիտիկ և յուրաքանչյուր*

$$\{\operatorname{Im} z>0\}\cap\{|z|<R\},\ 0<R<+\infty$$

կիսաշրջանում սահմանափակ $f(z)$ *ֆունկցիաների դաս է, որոնք բավարարում են*

$$\sup_{0<\theta<\pi}\ln|f\,(re^{i\theta})|\leqslant G_f\,V\,(r)$$

պայմանին, որտեղ $C_f>0$*-հաստատուն է, իսկ* $V\,(r)$*-ը որոշված է* $z>0$ *արժեքների համար դրական, անսահմանափակ աճող ֆունկցիա է։*

Հոդվածում ստացված է A_V *դասի ֆունկցիաների կանոնական ներկայացումը։*

A. I. KCHEIFITZ. *Representation of analytical in an open halfplain functions of infinite order* (summary)

Let A_V be the class of functions $f\,(z)$ which are analitical in $\{\operatorname{Im} z>0\}$ bounded in each semicircle $\{\operatorname{Im} z>0\}\cap\{|z|<R\}$, $0<R<\infty$, and satisfying the inequality

$$\sup_{0<\theta<\pi} \ln|f(re^{i\theta})| \leqslant C_f V(r),$$

where $C>0$ is a constant and $V(r)$ is a positive function increasing on $(0, \infty)$.

In the article canonical representation of functions from A_V is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci. Fenn., 50, № 12, 1925.
2. *И. О. Хачатрян.* Представление мероморфных функций бесконечного порядка в полуплоскости, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, XVIII, № 2, 1965.
3. *Н. В. Говоров.* О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости, Кандидатская диссертация, Ростов-на-Дону, 1966.
4. *В. И. Крылов.* О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб., 6 (48), 1939.
5. *L. A. Rubel, B. A. Taylor.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math., France, 96, 1968, 53—96.
6. *R. Nevanlinna.* Über eine Erweiterung des Poissonschen Integrals, Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. A 24, № 4, 1925, 3—15.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 6, 1971 Математика

УДК 513.7 РЕФЕРАТ

М. А. ВАСИЛЬЯН

ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРПОЛОС

1°. В настоящей работе изучается геометрия регулярных гиперполос многомерного проективного пространства. При этом использован метод исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым [1], основанный на теории групп Ли и теории внешних дифференциальных форм.

Основной целью работы является построение инвариантного оснащения регулярной гиперполосы $H_r (1 \leqslant r < n-1)$ пространства P_n—оснащения, связанного внутренним образом с этой гиперполосой. Эта задача решается в п° п° 4, 5, притом строится два оснащения, полезность которых выявляется при рассмотрении частных классов гиперполос. Этими частными классами гиперполос H_r являются плоские, конические (п°6) и квадратичные (п°7) гиперполосы. Для плоских и конических гиперполос пригодно лишь инвариантное оснащение, построенное вторым способом (п°5), и наоборот, для квадратичных гиперполос—лишь инвариантное оснащение, построенное первым способом (п°4). Оказывается, что геометрия квадратичных гиперполос H_r тесно связана с геометрией r-мерной поверхности конформного пространства C_{n-1} [2].

В работе всюду используется принцип двойственности проективного пространства, и все полученные результаты имеют двойственное истолкование.

2°. В пространстве P_n рассмотрим точечный репер A_ξ и двойственный ему тангенциальный репер α^η ($\xi, \eta = 0, \cdots, n$), элементы которых удовлетворяют соотношениям $(A_\xi \alpha^\eta) = \delta_\xi^\eta$. Уравнения инфинитезимальных перемещений этих реперов имеют вид

$$dA_\xi = \omega_\xi^\eta A_\eta, \quad d\alpha^\xi = -\omega_\eta^\xi \alpha^\eta.$$

Пусть (A, α) — r-параметрическое семейство плоских элементов пространства P_n. Тогда при изменении параметров точка A описывает r-мерную поверхность V_r, а семейство гиперплоскостей α огибает некоторую тангенциально вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^r, обладающую $(n-r-1)$-мерными плоскими образующими E_{n-r-1}.

Гиперполосой называется такое r-параметрическое семейство плоских элементов (A, α), что гиперплоскость α касается r-мерной поверхности V_r, описываемой точкой A. Такое семейство будем называть r-мерной гиперполосой или гиперполосой ранга r и обозначать через H_r.

Присоединим к гиперполосе H_r репер нулевого порядка, полагая $A_0 = A$, $\alpha^n = \alpha$. Тогда получим

$$\omega_0^n = 0. \tag{1}$$

Предполагая, что гиперполоса H_r регулярна [3], поместим точки A_i $(i=1,\cdots, r)$ в касательной плоскости E_r поверхности V_r, а точки A_v $(v = r+1,\cdots, n-1)$—в плоскости E_{n-r-1}. В этом репере, который является репером первого порядка, имеем

$$\omega_0^v = 0, \quad \omega_v^n = 0. \tag{2}$$

Система уравнений (1), (2) представляет собой систему основных уравнений гиперполосы H_r. При этом (1) и первое уравнение (2) являются уравнениями V_r, (1) и второе уравнение (2) — уравнениями V_{n-1}^r. Формы ω^i и ω_i^n являются соответственно базисными формами V_r и V_{n-1}^r.

3°. Нормаль E_{r-1}, принадлежащая касательной плоскости E_r поверхности V_r, определяется точками $M_i = A_i + x_i A_0$. Вторая нормаль E_{n-r}, содержащая образующую E_{n-r-1} гиперповерхности V_{n-1}^r, определяется как пересечение гиперплоскостей $\mu^i = \alpha^i + \xi^i \alpha^n$. Кроме этих нормалей введем дополнительные элементы оснащения: плоскость $E_{n-r-2} \subset E_{n-r-1}$, не проходящую через точку A_0, определяемую точками $M_v = A_v + x_v A_0$, и плоскость $E_{r+1} \supset E_r$, не лежащую в гиперплоскости α^n, определяемую гиперплоскостями $\mu^v = \alpha^v + \xi^v \alpha^n$. Плоскости E_{r-1} и E_{n-r} так же как плоскости E_{r+1} и E_{n-r-2} не пересекаются. Далее определим инвариантные точку $M_n = A_n - \xi^v A_v - \xi^i A_i + x A_0$ и гиперплоскость $\mu^0 = \alpha^0 - x_i \alpha^i - x_v \alpha^v + \xi \alpha^n$, условие инцидентности которых имеет вид $x + \xi + x_i \xi^i + x_v \xi^v = 0$.

Требование инвариантности указанных выше элементов оснащения приводит к тому, что величины x_i, x_v, ξ^i, ξ^v образуют каждая в отдельности геометрические объекты, величина x образует геометрический объект вместе с ξ^i, ξ^v, а величина ξ — вместе с x_i, x_v. Эти объекты назовем оснащающими объектами гиперполосы H_r.

4°. Мы будем строить инвариантное оснащение гиперполосы H_r, внутренним образом с ней связанное. Для этого нужно построить оснащающие объекты с помощью объектов фундаментальной последовательности геометрических объектов [1] гиперполосы H_r. Эта последовательность получается путем продолжения основных уравнений — уравнений (1), (2) гиперполосы H_r.

Первое продолжение уравнений (1), (2) приводит нас к уравнениям

$$\omega_i^n = a_{ij}\, \omega^j, \quad \omega_i^v = \lambda_{ij}^v\, \omega^j, \quad \omega_v^i = \lambda_v^{ij}\, \omega_j^n, \tag{3}$$

где a_{ij}, λ_{ij}^v λ^{ij} симметричны по индексам i, j. Здесь a_{ij} — основной тензор гиперполосы H_r, невырожденный в силу ее регулярности. Величины λ_{ij}^v образуют геометрический объект вместе с тензором a_{ij}, а λ_v^{ij} — вместе с обратным ему тензором a^{ij}. Тензор a_{ij} определяется окрестностью первого порядка гиперполосы H_r, объекты λ_{ij}^v, λ_v^{ij}—ее окрестностью второго порядка. Продолжение первого из уравнений

(3) вводит новый объект λ_{ijk}, симметричный по всем индексам, определяемый окрестностью второго порядка. Полученная часть фундаментальной последовательности геометрических объектов позволяет построить объекты $\lambda_v = \frac{1}{r} a_{ij} \lambda_v^{ij}, \lambda^v = \frac{1}{r} a^{ij} \lambda_{ij}^v$. Эти объекты определяют точки $M_v = A_v - \lambda_v A_0$, которые порождают инвариантную плоскость E_{n-r-2} и гиперплоскости $\mu^v = \alpha^v - \lambda^v \alpha^n$, порождающие инвариантную плоскость E_{r+1}, внутренним образом связанные с гиперполосой и двойственные друг другу.

Образующая E_{n-r-1} гиперповерхности V_{n-1}^r несет фокусную поверхность F_r —алгебраическую поверхность порядка r. Плоскость E_r, касательная к поверхности V_r, является вершиной конуса Φ^r—алгебраического конуса класса r. Инвариантная плоскость E_{n-r-2} будет гармонической полярой точки A_0 относительно F_r, а плоскость E_{r+1}— гармонической полярой гиперплоскости α^n относительно Φ^r.

Величины $b_{ij}^v = \lambda_{ij}^v - \lambda^v a_{ij}$, $c_v^{ij} = \lambda_v^{ij} - \lambda_v a^{ij}$ являются тензорами и удовлетворяют условиям аполярности

$$b_{ij}^v a^{ij} = 0, \; c_v^{ij} a_{ij} = 0.$$

Рассмотрим тензор $J_v^u = b_{ij}^u c_v^{ij}$ и предположим, что его ранг $\rho > 0$. Тогда относительный инвариант $J = J_{[v_1}^{v_1} J_{v_2}^{v_2} \cdots J_{v_\rho]}^{v_\rho}$ будет отличным от нуля. Дифференцируя этот инвариант, определим геометрические объекты J_i и $J^i = a^{ij} J_j$. Затем построим объекты $t_i = \frac{1}{r+2} \lambda_{ijk} a^{jk}$ $t^i = a^{ij} t_j$. Тогда объекты $\lambda_i = -\frac{1}{2}(t_i + J_i), \lambda^i = -\frac{1}{2}(t^i - J^i)$ будут оснащающими. Точки $M_i = A_i - \lambda_i A_0$ и гиперплоскости $\mu^i = \alpha^i - \lambda^i \alpha^n$ определяют инвариантные нормали E_{r-1} и E_{n-r} гиперполосы H_r, связанные с ней внутренним образом. Эти нормали определяются окрестностью третьего порядка элемента гиперполосы H_r.

Без особого труда строятся также оснащающие объекты λ^0, λ_n, определяющие инвариантные точку $M_n = A_n + \lambda^v A_v + \lambda^i A_i + \lambda^0 A_0$ и гиперплоскость $\mu^0 = \alpha^0 + \lambda_i \alpha^i + \lambda_v \alpha^v + \lambda_n \alpha^n$. Эти элементы определяются окрестностью четвертого порядка гиперполосы.

Таким образом, построенные нами инвариантные реперы гиперполосы H_r определяются окрестностью четвертого порядка элемента гиперполосы.

5°. Укажем другой метод построения инвариантного оснащения, который годится также для случая $\rho = 0$. С этой целью построим тензоры $l_{ijk} = \lambda_{ijk} - 3a_{(ij} t_{k)}$, $l^{ijk} = a^{ip} a^{jq} a^{ks} l_{pqs}$, удовлетворяющие условиям аполярности

$$l_{ijk} a^{jk} = 0, \; l^{ijk} a_{jk} = 0.$$

Тензор l_{ijk} назовем тензором Дарбу [1] поверхности V_r, а тензор l^{ijk} — тензором Дарбу гиперповерхности V_{n-1}^r.

Рассмотрим относительный инвариант $l = l_{ijk} l^{ijk}$ и пусть он отличен от нуля. Дифференцируя этот инвариант, получим объекты l_i, $l^i = a^{ij} l_j$. Объекты $\overset{*}{\lambda}_i = -\frac{1}{2}(t_i + l_i)$, $\overset{*}{\lambda}{}^i = -\frac{1}{2}(t^i - l^i)$ будут оснащающими. С их помощью так же как выше определяются инвариантные нормальные плоскости $\overset{*}{E}_{r-1}$ и $\overset{*}{E}_{n-r}$, а затем и остальные элементы инвариантного оснащения. Порядок этого оснащения будет такой же, как и порядок оснащения, построенного выше.

6°. Гиперполоса H_r называется конической, если ее гиперповерхность V^r_{n-1} является гиперконусом, вершиной которого служит неподвижная плоскость E_{n-r-2}. Гиперполоса H_r называется плоской, если ее поверхность V_r лежит в неподвижной плоскости E_{r+1}.

Теорема 1. *Для того чтобы гиперполоса H_r была конической при $n>2$ необходимо и достаточно, чтобы $C^{ij}_v = 0$. Для того чтобы гиперполоса H_r была плоской при $n \geqslant 2$ необходимо и достаточно, чтобы $b^v_{ij} = 0$.*

Заметим, что если гиперполоса является конической, то фокусная поверхность F_r вырождаясь совпадает с инвариантной плоскостью E_{n-r-2}, а если гиперполоса плоская, то конус Φ^r вырождается в связку гиперплоскостей, осью которой служит плоскость E_{r+1}. Для плоских и конических гиперполос H_r возможно только второе построение инвариантного оснащения (п°5).

7°. Гиперполоса H_r называется квадратичной, если ее поверхность V_r принадлежит невырожденной гиперквадрики Q_{n-1}, а гиперповерхность V^r_{n-1} касается этой гиперквадрики. Если гиперполоса H_r является квадратичной, то на ней $l_{ijk} = 0$. Для квадратичной гиперполосы инвариант J обращается в нуль тогда и только тогда, когда ее тензоры b^v_{ij} и c^{ij}_v тождественно обращаются в нуль, то есть когда эта гиперполоса будет плоской и конической одновременно. В дальнейших рассмотрениях предполагается, что $J \neq 0$. Для квадратичной гиперполосы годится только первый способ построения инвариантного оснащения.

Теорема 2. *Для квадратичной неплоской гиперполосы H_r элементы инвариантного репера будут полярно сопряженными относительно Q_{n-1}, а именно, сопряженными будут: касательная плоскость E_r и образующая E_{n-r-1}, оснащающие плоскости E_{n-r-2} и E_{r+1}, нормали E_{r-1} и E_{n-r}, точка M_n и гиперплоскость μ^0.*

Геометрия квадратичных гиперполос H_r пространства P_n связана с геометрией r-мерной поверхности конформного пространства C_{n-1} [2]. Инвариантный репер r-мерной поверхности пространства C_{n-1} при перенесении Дарбу переходит в построенный нами инвариантный репер квадратичной гиперполосы H_r пространства P_n.

Ереванский государственный
университет

Поступило 15.I.1971

Полный текст настоящей работы
депонирован в ВИНИТИ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ф. Лаптев.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Тр. Моск. мат. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
2. *М. А. Акивис.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей, Мат. сб., 53 (95), № 1, 1961, 53—72.
3. *В. В. Вагнер.* Теория поля локальных гиперполос, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 8, 1950, 197—272.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1971 թ., VI, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика" за 1971 г., VI, №№ 1—6

CONTENTS

Of the Isvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, seria "Matematika", 197, 1vol. VI, №№ 1—6

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՌԵՖԵՐԱՏՆԵՐ

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТЫ

CONTENTS

ABSTRACTS