ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրատարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրատարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կոտսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статья в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Уважаемые граждане!

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ

НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР НА 1972 ГОД

«АСТРОФИЗИКА», на русском языке, периодичность—в год 4 номера, годовая подписная плата 4 рубля.

«ИСТОРИКО-ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ», периодичность—в год 4 номера, годовая подписная плата 3 рубля 20 коп.

«ДОКЛАДЫ», периодичность—в год 10 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

«ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И КЛИНИЧЕСКОЙ МЕДИЦИНЫ», периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40.

«КРОВООБРАЩЕНИЕ», на русском языке, периодичность—6 номеров в год, годовая подписная плата 1 руб. 80 к.

«ВЕСТНИК ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК», периодичность—в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность—в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *Науки о Земле*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ХИМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность—в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 80 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *технических* наук, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *математика*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *механика*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *физика*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

Все журналы, кроме Астрофизики, издаются на армянском и русском языках, а резюме на одном из этих языков.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ:

В городских отделах, районных агентствах «Союзпечать», в пунктах приема подписки, в районных узлах и во всех отделениях связи, на предприятиях, в учреждениях, учебных заведениях, совхозах, колхозах, строительных объектах, у общественных распространителей печати.

Прием подписки с января 1972 года на все советские газеты и журналы будет производиться до 25 ноября После указанного срока подписка будет оформляться на февраль и последующие месяцы 1972 года.

СОЮЗПЕЧАТЬ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

Н. К. НИКОЛЬСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ЗАДАЧА ВЕСОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ ОКОЛО ГРАНИЦЫ

Пусть X—банахово пространство и T—линейный оператор в X с полной системой K собственных (или корневых) векторов. Говорят [1—4], что для оператора T возможен *спектральный синтез*, если любое его (замкнутое) инвариантное подпространство порождается корневыми векторами, содержащимися в нем*:

$$TM \subset M \Rightarrow M = \mathrm{L}\,(x\colon x \in M \cap K).$$

В этой статье рассматривается вопрос о возможности синтеза** для оператора сдвига S

$$(Sf)(z) = zf(z), \ |z| < 1 \tag{1}$$

в пространствах функций, аналитических в круге $\mathrm{D} = \{z\colon |z| < 1\}$, с заданным ограничением на рост около границы. Аналогичная задача для функций, гладких вплоть до границы, рассматривалась в [5].

§ 1. Постановка вопроса и абстрактная форма метода М. В. Келдыша

Пусть X—банахово пространство функций, регулярных в круге $\mathrm{D} = \{z\colon |z| < 1\}$, инвариантное относительно оператора (1) и такое, что функционалы ψ_z

$$\psi_z(f) = f(z), \ f \in X \tag{2}$$

непрерывны при любом z, $|z| < 1$, и нормы $\|\psi_z\|$ ограничены на компактных подмножествах в D. Тогда функционалы $\psi_{z,n}$

$$\psi_{z,n}(f) = f^{(n)}(z), \ |z| < 1, \ n \geqslant 0 \tag{3}$$

суть корневые векторы оператора S^* (bX^*), а возможность спектрального синтеза S^*-инвариантных подпространств, замкнутых в слабой топологии, означает, что подпространства, инвариантные для S, определяются своими нулями:

---

* Здесь и далее через $\mathrm{L}\,(A)$ обозначается замкнутая линейная оболочка множества A, $A \subset X$.

** Для сокращения письма будем говорить также, что T допускает синтез, если оператор T^* уже обладает этим свойством. В терминах самого оператора T (который может вообще не иметь собственных векторов) возможность синтеза означает, что инвариантные подпространства T „определяются своими нулями“ (подробнее для $T = S$ см. § 1).

$$SM \subset M \Rightarrow M = M(z_n, K_n) = \{f \in X\colon f^{(i)}(z_n) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant K_n\}.$$

Общепринятое предположение состоит в том, что наличие нормы в пространстве X приводит к появлению у функций f из X специфических „граничных эффектов", к возможности выделения S-инвариантных подпространств с помощью таких особенностей граничного поведения, и, следовательно, к отсутствию синтеза* для оператора S. Первые примеры такого рода дают теоремы М. В. Келдыша [9] ($X = H^2(dxdy)$), А. Бёрлинга [10] ($X = H^p$) и Г. Е. Шилова [11] ($X = C_A = \{f\colon f$ — регулярна в D и непрерывна в $\overline{D}\}$). Для того чтобы сформулировать эти результаты, а также описать один общий подход к доказательству невозможности синтеза, приведем, следуя Г. Шапиро [12], определение слабо обратимого элемента в пространстве X. Предположим сначала, что множество всех полиномов $\mathbf{P}$ содержится в X и плотно в нем. Функция f, $f \in X$ называется *слабо обратимой в X*, если существует последовательность многочленов $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$1 = \lim_n p_n f,$$

где $1(z) \equiv 1$, $|z| < 1$.

Очевидно, слабая обратимость f равносильна каждому из следующих утверждений:

1). $M_f = X$, где

$$M_f \equiv \mathrm{L}\,(S^n f\colon n \geqslant 0),$$

то есть f не содержится ни в одном (нетривиальном) S-инвариантном подпространстве.

2). Полиномы плотны в весовом пространстве $X_f = \{g\colon gf \in X\}$ (относительно весовой нормы $\|g\|_f = \|gf\|_X$).

В работе [9] построен первый пример функции f, $f(z) \neq 0$, $z \in D$ (именно, $f(z) = \exp\,(z-1)^{-1}$) не слабо обратимой** в $H^2(dxdy)$. Метод М. В. Келдыша, использованный затем лишь в [11]***, приводит к следующей общей схеме построения не обратимых элементов в пространстве X:

Лемма 1. *Пусть γ — замкнутая (гладкая) жорданова кривая, $\gamma \subset \overline{D}$, симметричная относительно вещественной оси и выходящая на границу круга лишь в точке $z = 1$* (т. е. $\gamma \cap \partial D = \{1\}$). *Пусть, кроме того, $f \in X$ и G — внешняя**** функция во внутренности* $\operatorname{Int}\gamma$ *кривой γ — таковы, что*

---

* Для счетно-нормированных пространств аналитических функций, с „мягкой" топологией, синтез для оператора S (S^*) напротив того, как правило, возможен (см., например, [6, 7, 8, 22] и замечания на стр. 20 и 27).

** т. е. такой, что многочлены не плотны в пространстве с весом $H^2(|f|^2 dxdy)$.

*** Работы о слабой обратимости [10, 12, 13, 8, 22] и многие другие использовали иные соображения, связанные с возможностью факторизации функций, см. [14, 23].

**** Назовем функцию G *внешней в области* Ω, если $G \circ \omega$ — внешняя функция в круге D; здесь ω — конформное отображение D на Ω. При этом внешними в круге

1) $\|\psi_z\| \, |f(z)| \leqslant |G(z)|, \; z \in \gamma,$

2) $f(x) = o\,(1/G(x)), \; x \to 1-0.$

Тогда $M_f \neq X$, то есть f—не слабо обратимый элемент в пространстве X.

Доказательство. Если $1 = \lim\limits_n p_n f$, $p_n \in \mathrm{P}$, то $|p_n(z) f(z) - 1| \leqslant \|\psi_z\| \cdot \|p_n f - 1\|_X$. Следовательно, $|p_n(z)| \leqslant \mathrm{const} \, \|\psi_z\| / f(z)|$ (так как $\|\psi_z\| \geqslant \|1\|_X^{-1} > 0$), и согласно условию 1): $|p_n(z)| \leqslant \mathrm{const} \, |G(z)|$, $z \in \gamma$. Поскольку G—внешняя функция, то $|p_n(z)| \leqslant \mathrm{const} |G(z)|$ в $\mathrm{Int}\,\gamma$, и потому $|1/f(x)| = \lim\limits_n |p_n(x)| \leqslant \mathrm{const}\,|G(x)|$, $0 \leqslant x_0 \leqslant x < 1$, в противоречие с 2). Лемма доказана.

Замечание 1. Функции f, удовлетворяющие условиям леммы, напоминают своими свойствами *внутренние функции* [14] (и в случаях $X = H^\infty$ или $X = C_A$ других функций, подчиненных 1)—2), фактически нет). В самом деле, условие 1) означает, что f хорошо „подпирает" норму $\|\psi_z\|$: эта норма должна почти достигаться на функции f для всех z, $z \in \gamma$; оптимальный случай $\|\psi_z\| \leqslant \mathrm{const}\,|f(z)|$, $z \in \gamma$, приводит к упрощению условия 2): $f(x) = o(1)$, $x \to 1-0$. С другой стороны, второе требование на f означает, что скорость ее убывания на радиусе $\mathrm{Re}\, z = 0$ экстремальна среди функций класса X, и f „гасит" любую внешнюю в $\mathrm{Int}\,\gamma$ функцию. Например, внутренняя функция f_0, $f_0(z) = \exp\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$, $|z| < 1$, удовлетворяет условиям леммы с кривой γ: $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, и с внешней функцией $G \equiv 1$ (случай $X = H^\infty$; в случае $X = C_A$ следует брать $f = (z-1)\, f_0(z)$, см. [11]) или $G(z) = (1-z)^{-2}$, $|z| < 1$ (случай $X = H^2(dxdy)$, см. [9]).

Замечание 2. Каждый раз, когда в пространстве X находится не слабо обратимая и всюду отличная от нуля функция f, устанавливается не только невозможность синтеза в X для оператора сдвига S, но и невозможность „анализа": поляра $M_f^\perp$ инвариантна относительно S^* и не содержит собственных векторов этого оператора.

Ниже в §§ 2—5, задача о синтезе рассматривается в пространствах* $C_0(\lambda)$, $C_0(\lambda) \equiv \{f\colon f$—регулярна в D и $|f(z)| = o\,(\lambda(|z|))$, $|z| \to 1\}$,

---

будем называть (несколько отклоняясь от общепринятой терминологии, см. [14]) функции F с ограниченной характеристикой (т. е. $\sup\limits_r \int\limits_0^{2\pi} |\log|F(re^{it})|\,|dt < +\infty$), у которых отсутствуют внутренние сомножители в стандартной факторизации (см. [14]).

* Приемы, используемые в настоящей работе, применимы и к некоторым другим пространствам аналитических функций. Например, из результатов § 3 сразу следует невозможность синтеза в любом пространстве X, для которого $H^\infty \subset X$ и $\log \|\psi_z\| < C\,(1-|z|)^{-1} \log^{-(2+\varepsilon)} (1-|z|)^{-1}$, $|z| < 1$, $\varepsilon > 0$ (в частности, для $X = H^2(h(r)\, dr d\theta)$ с $h(r) \geqslant \exp[-(1-r)^{-\alpha}]$, $0 < \alpha < 1$). Такого рода приложения результатов и методов этой работы будут даны в специальном сообщении.

где λ—непрерывная функция на промежутке $[0, 1)$; $\lambda(r)\uparrow\infty$, $r\to 1$. Устанавливается (часто при довольно специальных ограничениях на вес λ), что *никакой порядок роста функции* λ *не обеспечивает возможности синтеза* в соответствующем классе. Поиски экстремальных (в смысле леммы 1) функций в пространствах $C_0(\lambda)$ оказываются тесно связанными с оценками минорант для $|f(z)|$ при $f\in C_0(\lambda)$, $f(z)\neq 0$, $|z|<1$ (см. [15—16] и §§ 2—4). В § 4 описывается класс весов λ, для которых пространство $C_0(\lambda)$ содержит не слабо обратимые функции, ограниченные в D. В последнем параграфе содержатся некоторые достаточные признаки слабой обратимости, которые являются точными для многих „правильных" шкал роста. Эти признаки немедленно приводят, например, к тому факту, что каждый идеал в алгебре $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} C_0\left(\exp\dfrac{\varepsilon}{(1-r)^B}\right)$, $B>1$, —закрепленный (подробнее см. § 5; отметим, что для более грубой шкалы $\bigcap\limits_{B>B_0>1} C_0\left(\exp\dfrac{1}{(1-r)^B}\right)$ аналогичный факт (вместе с полным описанием идеалов) был получен в [8,22]).

Необходимая в дальнейшем полнота многочленов в пространствах $C_0(\lambda)$ вытекает из элементарной леммы 2:

Лемма 2. *Пусть X— банахово пространство аналитических функций, в котором непрерывны функционалы* (2), $\psi_{0,n}\neq 0$ *при любом n, $n\geqslant 0$* (см. (3)), *и норма инвариантна и непрерывна относительно поворота*: $\|f\|_X=\|f_\alpha\|_X$, $f_\alpha(z)\equiv f(\alpha z)$, $|z|<1$, $|\alpha|=1$, *и пусть, кроме того, из условий*

$$\sup_n \|g_n\|_X<+\infty,\ \lim_n g_n(z)=0,\ |z|<1, \tag{4}$$

вытекает, что $g_n\xrightarrow{\text{сл.}}0$ *(слабая сходимость в пространстве X). Тогда** $\mathrm{P}\subset X$ *и* $\overline{\mathrm{P}}=X$.

Доказательство. Из непрерывности отображения $\alpha\to f_\alpha$ окружности $\partial\mathrm{D}$ в пространство X вытекает, что „свертка" f с конечной мерой на окружности снова принадлежит пространству X:

$$f*\mu\equiv\int\limits_{|\alpha|=1} f\,d\mu(\alpha)\in X$$

и $\|f*\mu\|\leqslant\|f\|\cdot\mathrm{Var}\,|\mu|$. Выбирая $d\mu=\alpha^{-n-1}d\alpha$, $n\geqslant 0$, и вспоминая, что существует f, $f\in X$, с $f^{(n)}(0)\neq 0$, в лим, что $l_n\in X$, где $l_n(z)\equiv z^n$, $|z|<1$. Таким образом, $\mathrm{P}\subset X$. Слабая, а значит и сильная, полнота многочленов следует теперь из того замечания, что арифметические средние $\sigma_n(f)$ ряда Тейлора функции f получаются сверткой f с ядром Фейера и, стало быть, $g_n=\sigma_n(f)-f$ удовлетворяют условию (4).

Следствие. *Полиномы плотны в пространстве* $C_0(\lambda)$.

---

* Другой вариант леммы 2 можно получить, заменив условие непрерывности отображения $\alpha\to f_\alpha$, $|\alpha|=1$, на слабую секвенциальную полноту пространства X.

Действительно, в проверке нуждается лишь критерий (4) слабой сходимости в $C_0(\lambda)$, который немедленно вытекает из теоремы Ф. Рисса о функционалах в пространстве типа C:

$$F \in C_0(\lambda)^* \Longrightarrow F(g) = \int\limits_D \frac{g(z)}{\lambda(|z|)} d\mu_F(z), \quad g \in C_0(\lambda).$$

В заключение этого параграфа приведем еще два утверждения, полезные в приложениях леммы 1 (см. также замечание 1 к лемме 1).

Лемма 3. Пусть γ — кривая в круге $\{t: |t|<1\}$, $t = \tau + i\sigma$, симметричная относительно вещественной оси, и пусть уравнение верхней части кривой $\gamma \cap \{t: \operatorname{Im} t \geqslant 0\}$ имеет вид

$$\sigma = \sigma(\tau), \ \sigma \in C^{(2)}; \ \sigma(\tau) > 0, \ 0 \leqslant \tau < 1, \ \lim_{\tau \to 1-0} \sigma(\tau) = 0.$$

Если* $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\rho\varphi'(\rho)^2}{\varphi(\rho)} d\rho < +\infty$ и $\displaystyle\int\limits_0^1 |\varphi' + \rho\varphi''| d\rho < +\infty$, то для любой функции G, внешней в области $\operatorname{Int} \gamma$, справедлива оценка

$$\log |G(\tau)| = o\left(\exp\left[\pi \int\limits_0^\tau \frac{du}{(1-u^2) \operatorname{arctg} \dfrac{2\sigma(u)}{1-(u^2+\sigma^2(u))}}\right]\right),$$

при $\tau \to 1-0$.

Лемма 4. Пусть кривая γ удовлетворяет условиям леммы 3, и p, $p \geqslant 0$, — функция на γ. Если

$$\int\limits_0^1 |\log p| \exp\left(-\pi \int\limits_0^\tau \frac{du}{(1-u^2) \operatorname{arctg} \dfrac{2\sigma(u)}{1-(u^2+\sigma^2)}}\right) \frac{(1-u^2-\sigma^2)\, d\tau}{(1-\tau)\,\sigma(\tau)} < +\infty,$$

то существует внешняя в $\operatorname{Int} \gamma$ функция F такая, что $|F| = p$ на γ; и обратно.

Доказательства этих лемм носят стандартный для такого рода утверждений характер (см., например, [17—18]) и сводятся к нескольким заменам переменных в известных теоремах единственности для функций в круге $\mathbf{D}$ [4] с использованием асимптотических оценок С. Варшавского [18] для конформных отображений. Поэтому мы приведем лишь набросок доказательства леммы 3, совсем опустив сходные вычисления для леммы 4.

Пусть ω — конформное отображение $\operatorname{Int} \gamma$ на $\mathbf{D}$, $\varphi(\zeta) = \log \dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $|\zeta|<1$, — отображение круга $\mathbf{D}$ на полосу $\left\{w: |\operatorname{Im} w| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, а W —

* Здесь $1 - t = \rho e^{i\varphi}$.

—отображение области φ (Int γ) на ту же полосу. Пусть далее $y=y(x)$, $-\infty<x<\infty$, —уравнение границы $\partial[\varphi(\text{Int}\,\gamma)]$. Имеет место

Теорема Варшавского, [18]. Если $\int\limits_1^\infty \frac{y'(x)^2}{y(x)}\,dx<+\infty$ и $\int\limits^\infty |y''|\,dx<+\infty$, то

$$W(x+iy)=C+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^x\frac{dt}{y(t)}+\pi i\frac{y}{2y(x)}+o(1).$$

Обозначим через g внешнюю функцию в $\mathbf{D}$,

$$g(t)\equiv G(\omega^{-1}(t)),\ |t|<1,$$

и заметим (см., например, в [14] интегральное представление для неванлинновского класса), что для таких функций

$$(1-r)\log|g(r)|=o(1),\ r\to 1-0,$$

и потому

$$(1-\omega(\tau))\log|G(\tau)|=o(1),\ \tau\to 1-0.$$

Пользуясь теоремой Варшавского и равенством $\omega=\varphi^{-1}W\varphi$, находим

$$|\omega(\tau)-1|=\frac{2}{|e^{W(\varphi(\tau))}+1|}\sim\text{const}\cdot\exp\left[-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\log\frac{\tau+1}{1-\tau}}\frac{dt}{y(t)}\right]=^*$$

$$=\text{const}\cdot\exp\left[-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\tau\frac{\varphi'(u)\,du}{\operatorname{arctg}\dfrac{2\sigma(u)}{1-u^2-\sigma(u)^2}}\right]=$$

$$=\text{const}\cdot\exp\left[-\pi\int\limits_0^\tau\frac{du}{(1-u^2)\operatorname{arctg}\dfrac{2\sigma(u)}{1-u^2-\sigma^2}}\right].$$

Остается показать, что условия Варшавского переходят в условия леммы 3:

$$\int\limits^\infty\frac{y'^2}{y}\,dx=\int\limits_0\frac{\rho^2\varphi'(\rho)^2}{\varphi(\rho)}\frac{d\rho}{\rho}=\int\limits_0\frac{\rho\varphi'(\rho)^2}{\varphi(\rho)}\,d\rho,$$

$$\int\limits^\infty|y''|\,dx=\int\limits_0|\varphi'+\rho\varphi''|\,d\rho,$$

* Уравнение γ переходит в $y=y(x)$, где $y(x)=\text{Im}\,\varphi(\tau+i\sigma)$ при $x=\text{Re}\,\varphi(\tau+i\sigma)$, т. е. $y(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2\sigma}{1-(\tau^2+\sigma^2)}$; $\sigma=\sigma(\tau)$.

так как $y(x) = -\varphi$ при $x = \log \frac{1}{\rho}$, и $y'(x) = -\rho\varphi'(\rho)$, $y''(x) = = \rho[\varphi'(\rho) + \rho\varphi''(\rho)]$, $dx = -\frac{1}{\rho}d\rho$.

§ 2. Невозможность синтеза в классах эквивалентности для $\log \lambda$

Для применения леммы 1 к пространствам $C_0(\lambda)$ нужно уметь строить функции f, $f \in C_0(\lambda)$, максимум модуля которых $M_f(r) = = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $r<1$, близок к естественной границе. В случае произвольной скорости роста* мажоранты λ построения и оценки, содержащиеся в этом параграфе, являются точными лишь на классе пространств с эквивалентными $\log \lambda$ (или даже $\log\log \lambda$). При этом условия на правильность роста функции λ оказываются весьма жесткими. Прежде чем формулировать эти условия, отметим, что некоторого сглаживания мажоранты можно всегда добиться за счет полиномиальной регуляризации. Именно, вес

$$\lambda^*(r) = \sup_{\|p\|_{C_0(\lambda)} \leq 1} |p(r)|, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

порождает тот же класс функций, что и λ, но для него $\log \lambda^*$ — выпуклая и монотонная непрерывная функция.

Будем говорить, что *функция N* на промежутке $[0, \infty)$ *принадлежит классу E*, если

1) $N \in C^{(2)}$, $N \uparrow +\infty$ и N—выпукла (вверх или вниз),
2) $N'/N^2 = o(1)$, 3) $N''/(N')^{3/2} = o(1)$.

Нетрудно видеть, что все эти требования относятся к „правильности" роста и не налагают ограничений на скорость возрастания функции N. Легко также убедиться в том, что выпуклость (вверх или вниз) функции $1/N$ обеспечивает выполнение условия 2), а выпуклость (вверх или вниз) функции $(N')^{-1/2}$ в случае конечности $\lim\limits_{x\to\infty} N'(x)$, или функции** $(n')^{-1/2}$ в случае $\lim\limits_{x\to\infty} N'(x) = +\infty$, обеспечивает выполнение 3).

Теорема 1. 1). *Пусть* λ_0—*функция на* $[0,1)$, $\lambda_0 \in C^{(3)}$, $\lambda_0 \nearrow +\infty$; $\Phi\left(\frac{1}{1-r}\right) = \log\log \lambda_0(r)$ *и* $\Phi' \in E$. *Тогда существует* λ_*, $\lambda_* \nearrow +\infty$, *такая что в пространстве* $C_0(\lambda_*)$ *невозможен спектральный синтез и* $\log\log \lambda_0(r) \sim \log\log \lambda_*(r)$ *при* $r \to 1-0$.

---

* Пространства функций конечного порядка роста рассматриваются в § 3.

** $n = N^{-1}$—функция, обратная к функции N.

2). *Если* λ *удовлетворяет условиям п.* 1), *то заключение этого пункта справедливо и для функции* μ: $\mu(r)=\lambda(1-1/\log(1-r)^{-1})$, $0\leqslant r<1$, (*т. е. для* $\Phi_\mu(t)=\Phi_\lambda(\log t)$, $0\leqslant t<\infty$).

3) *Пусть* $N\in E$ *и*

$$\log\lambda(r)=\sqrt{2\pi}(N'((1-r)^{-1}))^{1/2}\exp\left(\int\limits_0^{(1-r)^{-1}}N(s)\,ds\right),\ 0\leqslant r<1.$$

Тогда существует функция λ *такая, что* $\log\lambda_*\sim\log\lambda$, *и в пространстве* $C_0(\lambda_*)$ *невозможен спектральный синтез.*

З а м е ч а н и е. Теорема 1 содержательна для быстро растущих весов λ, у которых $\log\lambda$ растет быстрее любой степени $(1-r)^{-1}$. Для степенных порядков роста $\log\lambda$ ниже будут получены утверждения более точные, чем теорема 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Сначала мы установим утверждение 3) теоремы, а затем выведем из него 1) и 2). Положим

$$H(u)=\int\limits_0^u n(t)\,dt,$$

где $n=N^{-1}$ — функция, обратная к функции N, и

$$F(z)=\int\limits_C^\infty e^{uz-H(u)}\,du. \tag{5}$$

Функция F регулярна во всей комплексной плоскости, ограничена в каждой полуплоскости $\operatorname{Re}z<C$ и вещественна на оси $\operatorname{Im}z=0$. Пользуясь методом Лапласа, покажем, что

$$\max_{|\zeta|=r}\operatorname{Re}F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\sim\log\lambda(r),\ r\to1-0, \tag{6}$$

и

$$\min_{|\zeta|=r}\operatorname{Re}F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\sim-\log\lambda(r),\ r\to1-0. \tag{7}$$

Для этого достаточно проверить, что выполнены условия следующей теоремы М. А. Евграфова [17]:

Т е о р е м а М. А. Е в г р а ф о в а, [17]. *Пусть* $H\in C^{(2)}_{[0,\infty)}$, *и*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2H''(x)=\lim\limits_{x\to\infty}H'(x)=+\infty$.

б) *При любом* A, $A>0$, $H''(u)\sim H''(x)$, *если* $x\to+\infty$ *и* $|u-x|\leqslant A(H''(x))^{-1/2}$.

Тогда функция $x\to xt-H(x)$ *имеет при достаточно больших* t *единственный максимум* $x=c(t)$, *и интеграл* $F(t)=\int\limits_0^\infty e^{xt-H(x)}dx$ *асимптотически равен вкладу этой точки:*

$$V_c(t) = \sqrt{2\pi}\, \rho_{c(t)} \cdot \exp(-H(c(t)) + tc(t))$$

(*здесь* $\rho_{c(t)} = [H''(c(t))]^{-1/2}$ — *радиус влияния точки максимума* $c(t)$).

В нашем случае $H'(u) = n(u)$ и $H''(u) = 1/N'(n(u))$, так что первое условие теоремы Евграфова сводится к условиям 1) – 2) для функции N из определения класса E. Так как $H''(u) = 1/N'(n(u)) = n'(u)$ — монотонная функция, то для проверки условия б) нужно убедиться в том, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H''(x)}{H''(x \pm A\rho_x)} = 1$$

для любого A, $A>0$. Обозначив $g(x) = H''(x)$, получим

$$\left|\frac{g(x+A\rho_x)}{g(x)} - 1\right| = \left|\frac{g'(\xi)A\rho_x}{g(x)}\right| = \frac{A|g'(\xi)|}{g(x)^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant A\frac{|g'(\xi)|}{g(\xi)^{3/2}} = A\,\frac{|N''(n(\xi))|}{N'(n(\xi))^{3/2}},$$

если H'' убывает (то есть N выпукла вниз). Аналогичные оценки для $\left|\dfrac{g(x)}{g(x+A\rho_x)} - 1\right|$ при противоположном знаке выпуклости функции N, вместе с условием 3) из определения класса E приводят к требуемому результату. Точно так же рассматривается и отношение $\dfrac{g(x-A\rho_x)}{g(x)}$.

Применяя теорему Евграфова (с $c(t) = N(t)$ и $(H''(c(t)))^{-1/2} = (N'(t))^{1/2}$, получим асимптотическое равенство, близкое к (6):

$$\max_y \operatorname{Re} F(x+iy) = \int_0^\infty e^{ux-H(u)}\,du \sim$$

$$\sim \sqrt{2\pi}\,(N'(x))^{1/2} \exp(-H(N(x)) + xN(x))^* =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,(N'(x))^{1/2} \exp\left(\int_0^x N(s)\,ds\right).$$

Так как при отображении $\zeta \to \dfrac{1}{1-\zeta}$ окружность $\{z\colon |z| = r\}$, $r<1$, переходит в окружность ∂K_r с диаметром $\left[\dfrac{1}{1+r}, \dfrac{1}{1-r}\right]$, то соотношение (6) доказано.

---

* Действительно, $H(N(x)) = \int_0^{N(x)} n(t)\,dt = \int_0^x sN'(s)\,ds = sN(s)\Big|_0^x -$

$- \int_0^x N(s)\,ds = xN(x) - \int_0^x N(s)\,ds.$

Для того чтобы проверить утверждение (7), получим сначала асимптотическое выражение для $\min_y \operatorname{Re} F(x+iy)$, а затем перейдем на окружность ∂K_r. По определению вклада точки максимума (см. [17], стр. 20) в интеграл (5) имеем

$$F(x) \sim V_c(x) = \int_{c(x)-\rho_c(x)\tau(x)}^{c(x)+\rho_c(x)\tau(x)} e^{xu-H(u)}\,du,$$

где функция τ, $\tau(x)\nearrow+\infty$, возрастает сколь угодно медленно. Обозначим нижний предел интегрирования через $a(x)$, а верхний — через $b(x)$. Тогда

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{N(x)-\tau(x)\,N'(x)^{1/2}}{N(x)+\tau(x)\,N'(x)^{1/2}} = 1-2\tau(x)\,\frac{N'(x)^{1/2}}{N(x)+\tau(x)\,N'(x)^{1/2}} =$$

$=1-o(1)$, если выбрать τ так, что $\tau(x)\dfrac{N'(x)^{1/2}}{N(x)}=o(1)$ (см. условие 2) из определения класса E). Следовательно

$$1>\frac{a(x)}{b(x)}=1-o(1),$$

и если положить

$$y(x)=\frac{\pi(1-\varepsilon)}{a(x)},\quad \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{a(x)}{b(x)}, \tag{8}$$

то получим

$$a(x)\leqslant u\leqslant b(x) \Rightarrow \pi(1-\varepsilon)\leqslant yu\leqslant\pi(1+\varepsilon),$$

и значит

$$-F(x)\leqslant\min_y \operatorname{Re} F(x+iy)\leqslant\operatorname{Re} F(x+iy(x)) =$$

$$=\int_0^\infty e^{ux-H(u)}\cos uy(x)\,du=\int_{a(x)}^{b(x)} e^{ux-H(u)}\cos uy(x)\,du+o(V_c(x))\leqslant$$

$$\leqslant\cos\pi(1-\varepsilon)\int_{a(x)}^{b(x)} e^{ux-H(u)}\,du+o(V_c(x))=$$

$$=\cos\pi(1-\varepsilon)\cdot V_c(x)+o(V_c(x))\sim -V_c(x),$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$ (см. (8)). Таким образом

$$\min_y \operatorname{Re} F(x+iy)\sim(-V_c(x))\sim(-F(x)).$$

Чтобы вывести отсюда соотношение (7), заметим сначала, что для всех z, $z\in K_r$, имеем $\operatorname{Re} F(z)\geqslant -F(\operatorname{Re}(z))>-F\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\sim -V_c\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$.

Поэтому достаточно указать точку z_r, $z_r \in K_r$ такую, что

$$\operatorname{Re} F(z_r) \sim -V_c\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Лемма 5. $N'(u) \sim N'(V)$ при $u \to +\infty$ и $0 < u - V < AN(u)^{-1}$, где A, $A > 0$, произвольно.

Лемма 6. Если $x_r = \dfrac{1}{1-r} - AN\left(\dfrac{1}{1-r}\right)^{-1}$, $y_r = BN(x)^{-1}$, то $z_r = x_r + iy_r \in K_r$ при r достаточно близких к 1. Здесь A и B—произвольные положительные числа.

Доказательство леммы 5 получается из определения класса E на том же пути, что и вывод условия 6) к теореме Евграфова, и потому может быть опущено.

Доказательство леммы 6. Нужно доказать, что $\left|\dfrac{1}{1-r^2} - z_r\right|^2 \leqslant \dfrac{r^2}{(1-r^2)^2}$ при больших r. Имеем

$$\left|\frac{1}{1-r^2} - z_r\right|^2 = \left(x_r - \frac{1}{1-r^2}\right)^2 + y_r^2 = \left(\frac{r}{1-r^2} - \frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)^2 +$$

$$+\frac{B^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r} - \ldots\right)} = \frac{r^2}{(1-r^2)^2} - \frac{2Ar}{(1-r^2)\,N\left(\frac{1}{1-r}\right)} +$$

$$+\frac{A^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r}\right)} + \frac{B^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r} - \ldots\right)}.$$

Остается проверить, что

$$\frac{2Ar}{(1-r^2)\,N\left(\frac{1}{1-r}\right)} > \frac{A^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r}\right)} + \frac{B^2}{N^2\left(\frac{1}{1-r} - \ldots\right)}$$

при $r \to 1-0$, а для этого достаточно

$$N\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1} > N\left(\frac{1}{1-r} - \frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)^{-2} \quad \text{при} \quad r \to 1-0.$$

Из леммы 5 вытекает равенство

$$N\left(\frac{1}{1-r}\right) - N\left(\frac{1}{1-r} - \frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right) = N'(\xi)\,\frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)} =$$

$$= N'\left(\frac{1}{1-r}\right)\cdot\frac{A\,(1+o\,(1))}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)},$$

и потому

$$N\left(\frac{1}{1-r}-\frac{A}{N\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right)=N\left(\frac{1}{1-r}\right)\left\{1-\frac{N'\left(\frac{1}{1-r}\right)}{N^2\left(\frac{1}{1-r}\right)}A\ (1+o\,(1))\right\}=$$

$$=N\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+o\ (1)),$$

в силу условия 2) из определения класса E. Лемма доказана.

На основании леммы 6 выберем $A\ (r)$ так, чтобы точка

$z_r=x_r+i\pi N\,(x_r)^{-1}$, $x_r=\dfrac{1}{1-r}-A_r\,N\left(\dfrac{1}{1-r}\right)^{-1}$, принадлежала K_r при $r_0\leqslant r<1$ и $\lim\limits_{r\to1-0}A_r=0$. Тогда*

$$\operatorname{Re}F\,(z_r)=-V_c\,(x_r)(1+o\,(1))=-\sqrt{2\pi}\,N'\,(x_r)^{1/2}\,e^{\int\limits_0^{x_r}N\,(s)}\cdot(1+o\,(1))=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\,N'\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\exp\left(\int\limits_0^{(1-r)^{-1}}N\ (s)\,ds\right)\cdot\left[\frac{N'\,(x_r)}{N'\left(\frac{1}{1-r}\right)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left(\exp\int\limits_{x_r}^{(1-r)^{-1}}N\,(s)\,ds\right)(1+o\,(1))=-V_c\left(\frac{1}{1-r}\right)(1+o\,(1)),$$

так как $N'\,(x_r)\sim N'\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ в силу леммы 5, и

$$1\leqslant\exp\left(\int\limits_{(1-r)^{-1}-AN\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1}}^{(1-r)^{-1}}N\,(s)\,ds\right)\leqslant\exp\left(AN\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-1}N\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)=$$

$$=\exp A_r\to1\qquad\text{при}\quad r\to1-0.$$

Итак, асимптотические равенства (6) и (7) доказаны. Положим теперь

$$\lambda_*\,(r)=\max_{|\zeta|<r}\left|\exp\left(-F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\right)\right|=\exp\left(-\min_{|\zeta|<r}\operatorname{Re}F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\right),$$

$$f\,(\zeta)=(1-\zeta)\exp\left(-F\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)\right),\quad |\zeta|<1,$$

---

* Нетрудно видеть, что если вместо формул (8) положить $y\,(x)=\pi N\,(x)^{-1}$, то $a\,(x)\dfrac{\pi}{N\,(x)}=\pi\,(1+o\,(1))$ и $b\,(x)\dfrac{\pi}{N\,(x)}=\pi\,(1+o\,(1))$, и потому $\operatorname{Re}F\,(x+iy\,(x))\sim\sim(-V_c\,(x))$.

и применим к этой паре* лемму 1. Из-за вещественности функции F на $(-\infty, \infty)$ кривая γ: $\zeta=\zeta(r)$, $0\leqslant r<1$, на которой достигается верхняя грань модуля $\left|\frac{f(\zeta)}{1-\zeta}\right|$, удовлетворяет условиям леммы 1,

$$\frac{\lambda_*(|\zeta|)}{|f(\zeta)|}=|1-\zeta|^{-1},\ \zeta\in\gamma,$$

и в силу этой леммы $M_f\neq C_0(\lambda_*)$, то есть f — не слабо обратимый элемент в $C_0(\lambda_*)$ и спектральный синтез невозможен. Утверждение 3) теоремы 1 полностью доказано.

Утверждение 1) вытекает из уже доказанного, если заметить (см., например, условие 2) из определения класса E), что для функции λ из третьей части теоремы (с $N=\Phi'$) имеем

$$\log\log\lambda_0(r)\sim\log\log\lambda(r),\ r\to 1-0.$$

Утверждение 2) получается из 1) и 3) с помощью подстановки $z\to\log z$, $\operatorname{Re}z\geqslant 0$, в конструкции, использованной при доказательстве утверждения 3). Теорема доказана.

§ 3. Слабый рост: $\log\lambda(r)=A(1-r)^{-B}$

Теорема 2. *Если*

$$\lambda(r)=\exp\frac{A}{(1-r)^B},\ 0\leqslant r<1,\quad A>0,$$

и либо 1) $0\leqslant B<1$, *либо* 2) $B=2, 3,\cdots$, *то в пространстве* $C_0(\lambda)$ *спектральный синтез невозможен.*

Замечание 1. Как и в § 1 справедливость теоремы 2 вытекает из существования в $C_0(\lambda)$ не слабо обратимой функции f, всюду отличной от нуля. При этом, случай 1) получается как следствие к теореме 3 (с $f=f_0$, см. § 3 ниже; близкие утверждения имеются в [20] и [22]), а в случае 2) используется лемма 1 с $G\equiv 1$.

Доказательство теоремы 2 начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 7. *Пусть*

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{(1-z)^k},\quad |z|<1,\tag{9}$$

a_k — *вещественные числа*, $n\geqslant 2$. *Тогда*:

1) *Функция* m,

$$m(r)=\max_{|z|=r}\operatorname{Re}p(z),\qquad 0\leqslant r<1,\tag{10}$$

представляется в виде

---

* $f\in C_0(\lambda_*)$, так как $\max\limits_{|\zeta|=r}|f(\zeta)|$ может достигаться при r, близких к 1, лишь в достаточно малой окрестности точки $\zeta=1$.

$$m(r)=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{1}{(1-r)^k}+q(r), \tag{11}$$

где b_k вещественны, $b_n>0$, если $a_n\neq 0$, и q — ограниченная на $[0, 1)$ функция. При этом максимум в (10) *достигается на кривой γ, удовлетворяющей условиям леммы* 1.

2) *Для любых $b_0, \cdots, b_n$ с $b_n>0$ существуют $a_0, \cdots, a_n$ с $a_n<0$, такие, что выполнены равенства* (9)—(11).

Прежде чем доказывать лемму 7 отметим, что теорема 2, случай 2), сразу следует из леммы 1, если положить $f(z)=\exp p(z)$, где полином p выбран в соответствии с леммой 7 так, что* $b_n=A$, $b_k=0$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, и $a_n<0$. Итак, остается привести

Доказательство леммы 7. Сделаем замену переменной, положив $w=(1-z)^{-1}$, и заметим, что окружность $\{z: |z|=r\}$ перейдет при этом в окружность $C_r=\left\{w: \left|w-\frac{1}{1-r^2}\right|=\frac{r}{1-r^2}\right\}$, $0\leqslant r<1$. Поэтому

$$m(r)=\max_{w\in C_r}\operatorname{Re} p\left(\frac{w-1}{w}\right)=\max_{0<\varphi<2\pi}\operatorname{Re} p_1\left(\rho\frac{\rho+(\rho-1)e^{i\varphi}}{\rho+(\rho-1)}\right), \tag{12}$$

где $\rho=\frac{1}{1-r}$; $p_1(w)=\sum_{k=0}^{n} a_k w^k$. Проверим сначала, что правая часть равенства (12) с точностью до ограниченного при $\rho\to\infty$ слагаемого представляет собой полином (степени n, если $a_n\neq 0$) от ρ. Для этого достаточно установить, что существует функция t_+, $t_+=t_+(\rho)$, регулярно зависящая от ρ в окрестности бесконечности, $0<\lim\limits_{\rho\to\infty} t_+(\rho)<+\infty$, и такая, что $\cos\varphi=t_+(\rho)$ доставляет максимум выражению** из формулы (12). Имеем

$$m(r)=\max_{\varphi}\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\rho\frac{\rho+(\rho-1)e^{i\varphi}}{\rho+(\rho-1)}\right)^k=$$

$$=\max_{\varphi}\left(a_n\rho^n\frac{\rho^n\operatorname{Re}\left(1+e^{i\varphi}-\frac{1}{\rho}e^{i\varphi}\right)^n}{(2\rho-1)^n}+\cdots\right), \tag{13}$$

причем остальные слагаемые этой суммы есть $o(\rho^n)$, $\rho\to\infty$,

т. е.
$$m(r)=\rho^n\frac{1}{2^n}\max_{\varphi} a_n F(\varphi),$$

$$F(\varphi)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^k\cos k\varphi+o\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

---

* В элементарном случае $B=n=2$ все постоянные могут быть найдены явно, и мы получим: $a_2=-4A$; $a_1=6A$.

** которое, как легко видеть является полиномом по целым степеням $\cos\varphi$.

и остаток $o\left(\frac{1}{\rho}\right)$ регулярно зависит от $\frac{1}{\rho}$ в окрестности точки $\rho=\infty$. Уравнением экстремальных точек будет

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^k\cdot k\,(-\sin k\varphi)+o\left(\frac{1}{\rho}\right)=0.$$

При $\rho=\infty$ это уравнение переходит в

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k\,(-\sin k\varphi)=\frac{\partial}{\partial \varphi}\operatorname{Re}\,(1+e^{i\varphi})^n=0,$$

т. е. $\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\frac{\varphi n}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}\right)=0$. Теперь нетрудно подсчитать, что наибольшее значение нужная нам функция (при $\rho=\infty$) принимает в точках* $\varphi=\pm\frac{2\pi}{n+1}$ (которые, кстати, будут простыми нулями производной $\frac{\partial}{\partial \varphi}\operatorname{Re}\,(1+e^{i\varphi})^n$). По теореме о неявной функции отсюда следует существование требуемой ветви t_+, $\cos\varphi_+(\rho)=t_+(\rho)$, регулярной в окрестности $\rho=+\infty$ и такой, что $\varphi_+(\infty)=\frac{2\pi}{n+1}$. Ясно, что тот же экстремум достигается и на симметричной кривой $\varphi_-=\varphi_-(\rho)$ с $\varphi_-(\infty)=-\frac{2\pi}{n+1}$. Утверждение 1) доказано.

Проверку второго утверждения леммы начнем с того (очевидного после проделанных выкладок) замечания, что старший коэффициент b_n в (11) пробегает всю полуось $[0,\infty)$, когда a_n пробегает $(-\infty,0]$. Так как при изменении a_m меняются только коэффициенты b_k с номерами $k\leqslant m$ и так как $b_1,\cdots,b_n$ непрерывно зависят от $a_1,\cdots,a_n$, то достаточно проверить, что b_m принимает сколь угодно большие и сколь угодно малые значения при соответствующем выборе a_m. Ясно однако, что при** $\varphi=\varphi_+(\rho)$ m-ое слагаемое в сумме из формулы (13) имеет вид

$$a_m\,\rho^m\left(\text{const}+o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right),$$

т. е. его вклад в соответствующий максимум асимптотически линейно зависит от a_m. Лемма 7 доказана.

Замечание 2. Отметим, что задачи о слабой обратимости становятся тем проще, чем „мягче" метрика (топология) рассматриваемого пространства (см. также об этом начало § 1). Например (и это уже было отмечено в § 1 при $A=0$) из результатов § 5 следует, что

* Рассматривается только случай $a_n<0$; $a_n>0$ исследуется аналогично.

** Асимптотика $\varphi_+(\rho)$ не зависит от a_m, $m<n$.

в пространстве $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} C_0\left(\exp\dfrac{A+\varepsilon}{(1-r)^B}\right)$, $B>1$, $A>0$, каждая функция, не обращающаяся в нуль, слабо обратима. Многие классические пространства аналитических функций, выделяемые ограничениями на их рост около границы (учитывающие, например, порядок и тип функции, или уточненные порядок и тип и т. д.), имеют вид $C_0(\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta)$, $\bigcap\limits_{\beta>\beta_0} C_0(\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta)$ или $\bigcup\limits_{\beta>\beta_0} C_0(\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta)$, где λ_1 и λ_2— две заданные мажоранты. Было бы интересно выяснить сколь быстро должна расти функция λ_2 (в сравнении с λ_1), чтобы в пространствах двух последних типов каждая не обращающаяся в нуль функция была слабо обратима (т. е. был возможен спектральный анализ).

§ 4. Слабая обратимость ограниченных функций

Все первые теоремы об отсутствии спектрального синтеза (см. [9], [11], [12], [20]) основывались на неявном применении леммы 1 в различных конкретных ситуациях к функции f_0, $f_0(z)=\exp\dfrac{1}{z-1}$, $|z|<1$, убывание которой на вещественном радиусе является экстремальным среди ограниченных функций. Эта универсальность функции f_0 нуждается в испытании, и следующая теорема дает (может быть точную?) нижнюю грань мажорант, которые допускают слабое обращение f_0.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda\in C^{(2)}[0,1)$, $\lambda\nearrow+\infty$, *и* $\varphi(r)=\left(\dfrac{1-r}{\log\lambda(r)}\right)^{1/2}$. *Пусть далее*

$$\left.\begin{aligned}&\text{а) } \varphi''<0,\ r_0\leqslant r<1;\quad \text{б) } \sup_r (1-r)\log\lambda(r)<+\infty;\\ &\text{в) } \sup_{0<r<1}(1-r)(\log\log\lambda(r))'<+\infty.\end{aligned}\right| \tag{14}$$

Если

$$\int_0^1\frac{dr}{\varphi(r)}=\int_0^1\frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}\,dr<+\infty, \tag{15}$$

то $M_{f_0}\neq C_0(\lambda)$. *Если же* $\varliminf\limits_{r\to 0}(1-r)\log\lambda(r)>0$, *то* $M_{f_0}=C_0(\lambda)$.

Замечание. Вместе с f_0 условия (14) и (15) дают необратимость в $C_0(\lambda)$ произвольной ограниченной функции f, $f\neq0$, для которой существует ζ, $|\zeta|=1$ такое, что $\varliminf\limits_{r\to1-0}(1-r)\log|f(r\zeta)|<0$. Как и при обсуждении теоремы 1, можно заметить, что условия (14) являются ограничениями „правильности“*, но не скорости роста мажоран-

* Выполненными, например, для всех мажорант λ с $\log\lambda$, зависящим от степеней $\dfrac{1}{1-r}$, $\log\dfrac{1}{1-r}$, $\log\log\dfrac{1}{1-r}$ и т. д.

ты λ. В самом деле, например, при $(1-r)(\log\log\lambda(r))' \geqslant 1$, $r \geqslant r_0$, получим $\lambda(r) \geqslant \exp\frac{1}{1-r}$, то есть слабую обратимость f_0 в $C_0(\lambda)$. Отметим, наконец, что в степенной шкале $C_0(\lambda_\alpha)$, $0 \leqslant \alpha$, $\lambda_\alpha(r) = \exp\frac{A}{(1-r)^\alpha}$, $1 \leqslant r < 1$, условие необратимости (15) является точным.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что в условиях теоремы существует гладкая кривая γ требуемого леммой 1 типа, которая касается окружности ∂D и для которой

$$\int\limits_\gamma \log\frac{\lambda(|z|)}{|f_0(z)|}|dz| = \int\limits_\gamma \log\lambda(|z|)\,|dz| + \int\limits_\gamma \log\frac{1}{|f_0(z)|}\,|dz| < +\infty.$$

Так как $|f_0| \leqslant 1$ в D, то интегралы обязаны сходиться по отдельности Если $y = y(x)$, $0 \leqslant x < 1$, —уравнение верхней половины $\gamma_+ = \gamma \cap \{z$ $\operatorname{Im} z > 0\}$ кривой γ и $z = x + iy$, то*

$$\int\limits_{\gamma_+} \log\frac{1}{|f_0(z)|}|dz| = \int\limits_{\gamma_+} \frac{1-x}{(1-x)^2 + y(x)^2}\,ds =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} \frac{(1-x)\,ds}{y^2(x)\left(\left(\frac{1-x}{y}\right)^2 + 1\right)} \asymp \int\limits_{\gamma_+} \frac{1-x}{y^2(x)}\,ds,$$

поскольку γ_+ касается $\partial D \left(\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1-x}{y(x)} = 0\right)$. Записывая уравнение γ_+ в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, приходим к задаче отыскания достаточно гладкой функции $r(\varphi)$, для которой

$$\int\limits_0 \frac{1 - r\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi < +\infty,$$

$$\int\limits_0 \log\lambda(r)\sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi < +\infty.$$

Учитывая, что $\frac{1-r^2}{\varphi} = \frac{1-(x^2+y^2)}{r\sin\varphi}\cdot\frac{r\sin\varphi}{\varphi} = \left|\frac{(1-x)(1+x)}{y} - y\right| \times$ $\times r\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ стремится к нулю при $\varphi \to 0$ (т. е. $y \to 0$), получим $\lim\limits_{\varphi\to 0} r'(\varphi) = 0$, $\sqrt{r^2 + r'(\varphi)^2} \sim 1$ при $\varphi \to 0$. Итак, должны быть конечными интегралы

$$\int\limits_0 \log\lambda(r(\varphi))\,d\varphi$$

* Знак $\asymp$ означает равносходимость интегралов.

и

$$\int_0 \frac{1-r\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0 \frac{1-r\,(1-2\sin^2\varphi/2)}{r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\asymp\int_0 \frac{1-r}{\varphi^2}\,d\varphi.$$

Положим $\dfrac{1}{1-r(\varphi)}\cdot\log\lambda(r(\varphi))=\dfrac{1}{\varphi^2}$. Тогда

$$\varphi^2(r)=\frac{1-r}{\log\lambda(r)},$$

$$\varphi'(r)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-r}{\log\lambda(r)}\right)^{-1/2}\frac{\lambda(r)\log\lambda(r)+\lambda'(r)(1-r)}{\lambda(r)\log^2\lambda(r)},$$

и потому

$$\int_0 \frac{1-r}{\varphi^2}\,d\varphi=\int_0 \log\lambda(r(\varphi))\,d\varphi=\int^1 \varphi'(r)\log\lambda(r)\,dr=$$

$$=\int^1 \frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}\,dr+\int^1 \frac{\lambda'(r)\,(1-r)^{1/2}}{\lambda(r)\log^{1/2}\lambda(r)}\,dr<+\infty,$$

так как первый из этих интегралов сходится по условию (15), а второй сводится к нему с помощью оценки (14) в):

$$\frac{\lambda'(r)(1-r)^{1/2}}{\lambda(r)\log^{1/2}\lambda(r)}=\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}\cdot\frac{(1-r)}{\log\lambda(r)}\cdot\frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}\leqslant\mathrm{const}\,\frac{\log^{1/2}\lambda(r)}{(1-r)^{1/2}}.$$

Пусть G — внешняя функция в области $\operatorname{Int}\gamma$ с $|G(z)|=\lambda(|z|)/|f(z)|$, $z\in\gamma$. Пользуясь касанием кривых γ и $\partial\mathrm{D}$, и условиями а) – б) нетрудно показать, что для пары f_0, G выполняются все условия леммы 1 Действительно, в проверке нуждается лишь условие 2) этой леммы, которое мы выведем из представления

$$\log G(z)=\int_\gamma G(t)\,d\mu(t,z),$$

где $\mu(e,z)$ — гармоническая мера множества e, $e\subset\gamma$, в точке z относительно области $\operatorname{Int}\gamma$. Требуемая оценка $\left(\log G(r)=o\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)$ получается из следующих двух элементарных лемм*.

Лемма 8. *Если* $\varphi''<0$, $r_0\leqslant r<1$, *то* γ — *выпуклая кривая.*

Лемма 9. *Если* γ — гладкая $(\in C^{(1)})$ *и выпуклая кривая, то при всех* r *и* Δ

$$\mu(\Delta,r)\leqslant\frac{1}{\pi}\,\alpha(\Delta,r)\leqslant\mathrm{const}\cdot\frac{1}{1-r}\,|\Delta|, \tag{16}$$

---

* и теоремы Лебега о предельном переходе (следует учесть, что $\lim\limits_{r\to1-0}\mu(\Delta,r)=0$, если замкнутая дуга Δ не содержит точки 1).

где $\alpha(\Delta, r)$ — угол, под которым дуга Δ, $\Delta\subset\gamma$, видна из точки r, $|\Delta|$ — длина Δ.

Опуская доказательства леммы 8 (сводится к дифференцированию параметрически заданной функции $y = y(x)$) и леммы 9 (сводится к неравенствам между сторонами некоторых треугольников на плоскости), отметим только, что первая из оценок (16) составляет содержание известной теоремы Линделефа (см., например, [24], стр. 346). Основное утверждение теоремы доказано.

Что касается слабой обратимости f_0 в пространстве $C_0(\lambda)$ со степенным ростом $\log\lambda$, то мы установим ее сейчас лишь при дополнительном условии $(1-r)\log\lambda(r)\geqslant 1$, $r_0\leqslant r<1$. Общий случай будет вытекать из теоремы 4 (§ 5). Если же $\lambda(r)\geqslant\exp\dfrac{1}{1-r}$, $r\geqslant r_0$, то $\sigma_n f_0\to 1$, $n\to\infty$, в смысле слабой сходимости в пространстве $C_0(\lambda)$, где σ_n — средние арифметические ряда Тейлора для функции $1/f_0$. Действительно

$$\|\sigma_n f_0\|_{C_0(\lambda)} = \max_{|z|<1}\frac{|\sigma_n(z) f_0(z)|}{\lambda(|z|)}\leqslant\max_{|z|<1}\frac{|\sigma_n(z)|}{\exp((1-|z|)^{-1})}\leqslant 1,$$

поскольку $\max\limits_{|z|<r}|\sigma_n(z)|\leqslant\max\limits_{|z|<r}|1/f_0(z)| = \exp((1-r)^{-1})$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(z) f_0(z) = 1$ для любого z, $|z|<1$, а отсюда, как уже отмечалось в следствии к лемме 2, вытекает слабая сходимость $\sigma_n\to 1$. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось в примечании на странице 347 теорема 3 гарантирует необратимость функции f_0 в любом пространстве X, к которому приложима лемма 1 и для которого

$$\int_0^1\frac{\log^{1/2}\|\varphi_r\|}{(1-r)^{1/2}}\,dr<+\infty.$$

Неясно, однако, будет ли условие (15) необходимым для необратимости f_0 в $C_0(\lambda)$, хотя бы при дополнительных условиях гладкости типа (14).

§ 5. Схема Смирнова-Лебедева-Шапиро

В этом параграфе устанавливаются некоторые утверждения о слабой обратимости в положительном направлении. Они основаны на следующем рассуждении, использованном для пространств с интегральными метриками в работах В. И. Смирнова—Н. А. Лебедева [21], стр. 240, и Шапиро [20]. Пусть $f\in X$, $f(z)\neq 0$, $z\in\mathbf{D}$, и пространство X удовлетворяет условиям из § 1. Положим для $0\leqslant r<1$

$$M_f(r) = \max_{|z|<r}|f(z)|,\quad m_f(r) = \min_{|z|<r}|f(z)|.$$

Если функция $1/m_f$ „не слишком велика", например, так, что при некотором ε, $\varepsilon>0$, $M_f(r)/m_f^{\varepsilon}(r)$ мажорируется $\|\varphi_r\|$, то в некоторых пространствах X оказывается возможным деление f/f^t без выхода из подпространства M_f, так что отображение $t\to f^t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, стягивает f в 1 в подпространстве M_f. Вот пример простейшей теоремы такого типа.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda(r)\uparrow+\infty$, $r\to 1-0$, *и существует* ε, $\varepsilon>0$, *такое, что* $M_f(r)/m_f^{\varepsilon}(r)<\mathrm{const}\,\lambda(r)$, $r_0\leqslant r<1$. *Тогда функция* f *слабо обратима в* $C_0(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим через σ_n, $n\geqslant 1$, арифметические средние ряда Тейлора для функции f^{-t}, $0<t\leqslant\varepsilon$. Тогда $\max\limits_{|z|<r}|\sigma_n(z)|\leqslant\max\limits_{|z|<r}|f^{-t}(z)|=m_f(r)^{-t}$ и

$$\|\sigma_n f-f^{1-t}\|_{C_0(\lambda)}=\max_{|z|<1}\frac{|\sigma_n f-f^{1-t}|}{\lambda(|z|)}\leqslant$$

$$\leqslant\max_r\frac{M_f(r)\max\limits_{|z|=r}|\sigma_n-f^{-t}|}{\lambda(r)}\leqslant\max\,[2M_f(r)/m_f^t(r)]\,\lambda(r)^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\cdot\max_r\lambda(r)^{-1}\cdot M_f(r)\cdot m_f(r)^{-\varepsilon}\leqslant\mathrm{const},$$

при всех n, $n\geqslant 1$. Следовательно $\sigma_n f\xrightarrow{\text{сл.}}f^{1-t}$, $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$, и потому $f^{1-t}\in M_f$. Повторяя этот процесс $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ раз добъемся, чтобы $1\in M_f$. Все доказано.

Следствие 1. *Функция* f *слабо обратима в* $C_0(\lambda)$, *если* $\lim\limits_{r\to 1-0}(1-r)\log\lambda(r)>0$, так как в этом случае $M_{f_0}(r)\equiv 1$ и $1/f_0^{\varepsilon}\in C_0(\lambda)$ при достаточно малых ε, $\varepsilon>0$. Отсюда вытекает, что существует вес λ, $\lambda(r)\uparrow\infty$ и $\lim\limits_{r\to 1-0}(1-r)\log\lambda(r)=0$, для которого все же $M_{f_0}=C_0(\lambda)$. Это несколько сближает необходимые и достаточные условия для обратимости f_0, данные в теореме 3.

Следствие 2. *Обозначим через* m_λ *миноранту класса* $C_0(\lambda)$, *то есть такую функцию, для которой*

$f\in C_0(\lambda)$, $f(z)\neq 0$, $z\in\mathrm{D}\Rightarrow|f(z)|\geqslant m_\lambda(|z|)^A$ *при некотором* A, $A>0$. *Если* $\inf\limits_{\delta>0}\sup\limits_r\dfrac{\lambda(r)\,m_\lambda(r)^{-\delta}}{\lambda_1(r)}<+\infty$, *то* $f\in C_0(\lambda)$, $f(z)\neq 0\Rightarrow f$ *слабо обратима в* $C_0(\lambda_1)$.

Замечание 1. Грубую оценку миноранты для класса $C_0(\lambda)$ можно указать, используя интеграл Пуассона

$$\log|f(z)|\geqslant-\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\left(\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta+|\log|f(0)||\right),$$

$$\log |f(z)| \geqslant -\inf_{|z|<\rho<1} \left\{\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}\log \lambda(\rho)+\frac{\mathrm{const}}{\rho-|z|}\right\},$$

то есть функция m_λ — не хуже, чем

$$m_\lambda^*(r)=\exp\left(-\inf_{r<\rho<1}\left(\frac{\rho+r}{\rho-r}\log\lambda(\rho)+\frac{C}{\rho-r}\right)\right).$$

Например, для $\lambda\equiv 1$, наилучшая миноранта есть

$$m_1(r)=\exp\frac{1}{r-1},\quad 0<r<1,$$

а для

$$\lambda(r)=\exp\left(\frac{1}{1-r}\prod_{k=1}^{m}\left(\log_k\frac{1}{1-r}\right)^{-2}\prod_{k=m}^{n}\left(\log_k\frac{1}{1-r}\right)^{\alpha_k}\right),$$

и эта миноранта является наилучшей (см. [16]; здесь $\log_k t=\log\log_{k-1} t$, $\log_1 t=\log t$).

Замечание 2. Необязательно стягивать f в постоянную функцию 1 с помощью степеней: $t\to f^t$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Например, нетрудно доказывается

Теорема 5. *Предположим, что для любой гармонической в круге D функции u, такой что $u(0)=1$ и $u(z)\leqslant\log\lambda_1(|z|)$, справедливо неравенство*

$$|u(z)|\leqslant K_u\cdot\log\lambda_2(|z|),\quad K_u>0,$$

а числа $c_n=\sup\limits_r\dfrac{\lambda_1(r)(\log\lambda_2(r))^n}{\lambda(r)}$, $n\geqslant 1$, *таковы что* $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{c_n}{n!}\right)^{1/n}<\infty$.
Тогда каждая функция f, $f\in C_0(\lambda_1)$ $f(z)\neq 0$, слабо обратима в $C_0(\lambda)$

Замечание 3. М. Картрайт [15] показала, что для $\lambda_1(r)=\exp\dfrac{1}{(1-r)^\alpha}$ можно взять $\lambda_2=\exp\dfrac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}$, если $0<\alpha<1$, $\lambda_2(r)=\exp\left(\dfrac{\log^2(1-r)^{-1}}{1-r}\right)$, если $\alpha=1$ (см. также [16]), и $\lambda_2(r)=\lambda_1(r)$, если $\alpha>1$.

Из последнего замечания и теорем 4 и 5 вытекает

Следствие 3. *Функция f, $f(z)\neq 0$, $|z|<1$,*

а) *слабо обратима в* $C_0\left(\exp\dfrac{1}{(1-r)^{\alpha-1}}\right)$, *если* $f\in C_0\left(\exp\dfrac{1}{(1-r)^\alpha}\right)$, $0<\alpha<1$;

б) *слабо обратима в* $C_0\left(\exp\dfrac{\log^2(1-r)^{-1}}{1-r}\right)$, *если*

$$f\in C_0\left(\exp\frac{1}{1-r}\right);$$

в) *слабо обратима в* $C_0\left(\exp\frac{A+\varepsilon}{(1-r)^\alpha}\right)$, *если* $f\in C_0\left(\exp\frac{A}{(1-r)^\alpha}\right)$, $\alpha>1$ (ε, $\varepsilon>0$, *произвольно*).

ЛОМИ им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступило 5.V.1971

Ն. Կ. ՆԻԿՈԼՍԿԻ. Սպեկտրալ սինթեզ և կշռային ապրոկսիմացիայի խնդիրը եզրի մոտ անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ տարածություններում *(ամփոփում)*

$C_0(\lambda) = \{f: f$-ը *անալիտիկ է, երբ* $|z|<1$ *և* $f(z)=o(\lambda(|z|))$, $|z|\to 1\}$ *տարածություններում, որտեղ* λ *— տված մաժորանտան է, դիտարկվում է կամայական* g, $g\in C_0(\lambda)$ *ֆունկցիայի մոտարկման հնարավորության հարցը* $p_n f, n\geqslant 1$ (p_n*-ը — բազմանդամներ են,* f*-ը — տված ֆունկցիա* $f(z)\neq 0$, $|z|<1$) *տիպի հաջորդականություններով։ Օգտվելով* f *ֆունկցիայի «թույլ հակադարձելիության» մասին մի ընդհանուր պնդումից (լեմմա 1) ստացվում է, որ*

ա) ինչքան արագ էլ աճի λ-ֆունկցիան, գոյություն ունեն ոչ թույլ հակադարձելի f, $f(z)\neq 0$ *ֆունկցիաներ։*

բ) $f(z)=\exp\frac{1}{z-1}$ *ֆունկցիան ոչ թույլ հակադարձելի է* $C_0(\lambda)$*-ում, եթե* $\int_0^1(1-r)^{-1/2}\log^{1/2}\lambda(r)\,dr<\infty$։ *Ստացված են նաև (§ 5) սահմանափակումներ* $\min_{|z|=r}|f(z)|$, $r\to 1-0$ *նվազելու արագության վրա, որոնք ապահովում են* f*-ի թույլ հակադարձելիությունը* $C_0(\lambda)$*-ում։*

N. K. NIKOLSKY. *Spectral syntesis and weighted approximation in some spaces of analytic functions* (summary)

Define the space $C_0(\lambda)=\{f: f$ is analytic for $|z|<1$ and $|f(z)|=o(\lambda(|z|))$, $|z|\to 1\}$. Under consideration is the possibility of approximation $g=C_0-\lim\limits_n p_n f$ for all $g\in C_0(\lambda)$, where p_n are polinomials and f is prescribed $f(z)\neq 0$, $|z|<1$. On the basis some general proposition on such „woak invortability" of f (see § 1) the following is proved: a) for any rate of growth of the weigth λ there exists the function f ($f(z)\neq 0$, $|z|<1$) non-weakly invertable in $C_0(\lambda)$; b) the function $f=\exp\frac{1}{z-1}$ is non-weakly invertable in $C_0(\lambda)$ if $\int_0^1(1-r)^{-1/2}\log^{1/2}\lambda(r)\,dr<\infty$. Some sufficient conditions for weak invertability of the function f, $f\in C_0(\lambda)$ are found in § 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer*. On invariant subspaces of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 3, № 2, 1952, 270—277.
2. *D. Sarason*. Weak-star density of polynomials, preprint.
3. *Н. К. Никольский*. Об инвариантных подпространствах унитарных операторов, Вестник ЛГУ, сер. матем., № 19, 1966, 96—143.
4. *А. С. Маркус*. О задаче спектрального синтеза для операторов с точечным спектром, Функц. анализ и его прим., 2, № 3, 1968, 91—92.

5. *Н. К. Никольский.* Спектральный синтез для оператора сдвига и нули в некоторых классах аналитических функций, гладких вплоть до границы. ДАН СССР, 170, № 2, 1970.
6. *L. Ehrenpreis.* Mean periodic functions, part I., Amer. J. Math., 77, № 2, 1955, 233—328.
7. *Н. К. Никольский.* Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций, Сибирский Матем. журн., 9, № 1, 1968, 211—215.
8. *Ф. А. Шамоян.* О замкнутых идеалах в одной алгебре быстро растущих аналитических функций, Изв. АН АрмССР, „Математика", IV, № 4, 1969, 268—277.
9. *М. В. Келдыш.* Sur l'approximation en moyenne par polynomes des fonctions d'une variable complexe, Матем. сб., 16 (58), 1945, 1—20.
10. *A. Beurling.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert spaces, Acta Math., 81, № 1: 2, 1949, 239—255.
11. *Г. Е Шилов.* О кольцах функций с равномерной сходимостью, Укр. матем. журн., 4, 1951, 404—411.
12. *H. S. Shapiro.* Weakly invertible elements in certain functions spaces and generators in l^1, Mich. Math. J., 11, 1964, 161—165.
13. *Н. К. Никольский.* Инвариантные подпространства оператора сдвига и ограниченная аппроксимация почти всюду, Труды МИАН, т. 96, 1968, 243—257.
14. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
15. *M. L. Cartwright.* On analytic functions regular in the unit circle, Quart. J. Math., Oxford ser., 4, № 16, 1933, 246—256.
16. *C. N. Linden.* The minimum modulus of functions regular and of finite order in the unit circle, Quart. J. Math., 11 ser., 7, № 27, 1956, 196—216.
17. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз, 1962.
18. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, М., ИЛ, 1962.
19. *S. E. Warschawski.* On conformal mapping of infinite strips, Trans. Amer. Math. Soc., 51, 1942.
20. *H. S. Shapiro.* Weighted polynomial approximation and boundary behaviour of analytic functions, „Совр. пробл. теории аналит. функ.", М., „Наука", 1966, 326—335.
21. *В. И. Смирнов* и *Н. А. Лебедев.* Конструктивная теория функций комплексного переменного, М. —Л., „Наука", 1964.
22. *Ф. А. Шамоян.* Описание замкнутых идеалов и некоторые вопросы факторизации в алгебрах растущих функций в круге, Изв. АН АрмССР, „Математика" V, № 5, 1970, 419—433.
23. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
24. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, М., „Наука", 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

К. А. АБГАРЯН

ОДНО АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1°. Статья посвящена преобразованию к расщепленному виду линейной системы

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)\, x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t), \tag{1.1}$$

где x и f—столбцовые матрицы типа $n\times 1$, а A и B—квадратные матрицы порядка n, допускающие на сегменте $0\leqslant\tau\leqslant L$ разложения (сходящиеся или, по крайней мере, асимптотические) по степеням параметра ε

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau),\ B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau). \tag{1.2}$$

Вопрос о расщеплении систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка на независимые подсистемы рассматривался многими авторами (см., например, [1—7]). В отличие от цитированных и других работ, посвященных расщеплению линейных дифференциальных систем, в данной работе решается задача о расщеплении системы (1.1) на независимые подсистемы уравнений первого порядка при дополнительном условии, что матрицы коэффициентов подсистем имеют каноническую форму.

Как известно [8], если n-мерное векторное пространство R расщепляется на подпространства $R_1, \cdots, R_p$, инвариантные и циклические относительно линейного оператора A в R, то в R имеется базис, в котором этому линейному оператору отвечает квазидиагональная матрица $J=\operatorname{diag}(J_1,\cdots, J_p)$ с диагональными блоками, имеющими естественную нормальную форму:

$$J_\sigma = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_{k_\sigma\sigma} & -\alpha_{k_\sigma-1\sigma} & \cdots & -\alpha_{2\sigma} & -\alpha_{1\sigma} \end{Vmatrix} \quad (\sigma=1,\cdots, p).$$

Матрица A, отвечающая оператору A в произвольном базисе, связана с матрицей J соотношением подобия

$$A = KJK^{-1}.$$

В соответствии с этим линейная стационарная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (A = \text{const})$$

при замене переменных

$$x = Ky$$

распадается на p независимых подсистем

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = J_\sigma y_\sigma \quad (\sigma = 1, \cdots, p)$$

($y_1, \cdots, y_p$ — субматрицы столбцовой матрицы y с размерами соответственно $k_1 \times 1, \cdots, k_p \times 1$).

Ниже показывается, что, подобно стационарной системе, и система (1.1) при некоторых условиях может быть расщеплена на подсистемы, матрицы коэффициентов которых имеют структуру матриц J_σ. Указывается также преобразование, приводящее к расщеплению исходной системы на подсистемы, матрицы которых имеют структуру аналогичных J_σ матриц

$$J_\sigma = \left\| \begin{matrix} -\alpha_{1\sigma} & -\alpha_{2\sigma} & \cdots & -\alpha_{k_\sigma - 1\sigma} & -\alpha_{k_\sigma\sigma} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \quad (\sigma = 1, \cdots, p).$$

2°. Теорема 2.1. *Пусть на сегменте* $[0, L]$ *а) матрицы* $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ *имеют производные по* τ *всех порядков, а* $A_0(\tau)$, *кроме того, является невырожденной матрицей; б) собственные значения матрицы* $U(\tau) = A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ *разбиты на* p *групп* $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)} \left(\sigma = 1, \cdots, p;\ \sum\limits_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ *так, что*

$$|\lambda_i^{(\sigma)}(\tau) - \lambda_j^{(s)}(\tau)| \geqslant c > 0 \quad (\sigma \neq s;\ i = 1, \cdots, k_\sigma;\ j = 1, \cdots, k_s); \tag{2.1}$$

в) *соответствующие этим группам подпространства* $R_1, \cdots, R_p$ *являются инвариантными и циклическими подпространствами* n-*мерного пространства* R *относительно линейного оператора* U, *которому в некотором базисе отвечает матрица* U. *Тогда формальное решение системы* (1.1) *может быть представлено равенствами*

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma, \tag{2.2}$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \widetilde{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma + \widetilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon)\, R(\tau, \varepsilon)\, f(t, \tau, \varepsilon), \tag{2.3}$$

где $\widetilde{K}_\sigma$, $\widetilde{\Lambda}_\sigma$, $\widetilde{M}_\sigma$, R — *матрицы типа соответственно* $n \times k_\sigma$, $k_\sigma \times k_\sigma$, $k_\sigma \times n$, $n \times n$, *представленные формальными рядами*

$$\widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]}(\tau), \quad \widetilde{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_\sigma^{[k]}(\tau),$$

$$\widetilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_\sigma^{[k]}(\tau), \quad R(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k(\tau), \tag{2.4}$$

причем

$$\Lambda_\sigma^{[0]} \equiv J_\sigma,$$

$$\Lambda_\sigma^{[k]} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ -\alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]} & -\alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]} \cdots -\alpha_{2\sigma}^{[k]} & -\alpha_{1\sigma}^{[k]} \end{Vmatrix}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Подставляя равенства (2.2) и (2.3), определяющие вектор x, в систему (1.1) и отделяя в полученном соотношении коэффициенты при y_σ $(\sigma=1, \cdots, p)$ и свободный член, будем иметь

$$A(\tau, \varepsilon) \left[\varepsilon \frac{d\widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + \widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \widetilde{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon) \right] = B(\tau, \varepsilon) \widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \tag{2.6}$$

$$(\sigma=1, \cdots, p),$$

$$\left[A(\tau, \varepsilon) \sum_{\sigma=1}^{p} \widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \widetilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) - E_n \right] f(t, \tau, \varepsilon) = 0. \tag{2.7}$$

Для того чтобы равенства (2.6), в которых по предположению $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{\Lambda}_\sigma$ представлены рядами (2.4), выполнялись тождественно относительно ε, необходимо и достаточно, чтобы члены разложений матриц $\widetilde{K}_\sigma$ и $\widetilde{\Lambda}_\sigma$ были решениями матричных уравнений

$$UK_\sigma^{[0]} = K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[0]}, \tag{2.8}$$

$$UK_\sigma^{[k]} = K_\sigma^{[k]} \Lambda_\sigma^{[0]} + K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[k]} + D_\sigma^{[k-1]} \tag{2.9}$$

$$(\sigma=1, \cdots, p; \ k=1, 2, \cdots),$$

где

$$D_\sigma^{[k-1]} = \sum_{l=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-l]} \Lambda_\sigma^{[l]} +$$

$$+ A_0^{-1} \sum_{\nu=1}^{k} \left(A_{\nu-1} \frac{dK_\sigma^{[k-\nu]}}{d\tau} - B_\nu K_\sigma^{[k-\nu]} + \sum_{l=0}^{k-\nu} A_\nu K_\sigma^{[k-l]} \Lambda_\sigma^{[l]} \right).$$

В силу условия б) теоремы могут быть построены (см. [9]) квадратные матрицы

$$K = (K_1 \cdots K_p), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\Lambda_1, \cdots, \Lambda_p), \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{bmatrix}$$

с субматрицами K_σ, Λ_σ, M_σ $(\sigma=1,\cdots,p)$ типа соответственно $n\times k_\sigma$, $k_\sigma\times k_\sigma$, $k_\sigma\times n$, дифференцируемые на $[0, L]$ по τ столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица U и такие, что

$$U=K\Lambda M=\sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma, \tag{2.10}$$

$$MK=KM=E_n, \quad M_\sigma K_s=\begin{cases} E_{k_\sigma} & (s=\sigma)\\ 0 & (s\neq\sigma)\end{cases} \tag{2.11}$$

(E_l – единичная матрица порядка l). Заметим, что при условии а) теоремы матрица U имеет производные всех порядков.

Далее, поскольку k_σ-мерное подпространство R_σ, отвечающее группе σ собственных значений матрицы U, циклическое, то минимальный аннулирующий многочлен этого подпространства есть многочлен степени k_σ, коэффициенты которого определяются формулами Вьета:

$$\psi_\sigma(\lambda)=\lambda^{k_\sigma}+\alpha_{1\sigma}\lambda^{k_\sigma-1}+\cdots+\alpha_{k_\sigma-1\sigma}\lambda+\alpha_{k_\sigma\sigma},$$

$$\alpha_{1\sigma}=-(\lambda_1^{(\sigma)}+\cdots+\lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}),$$

$$\alpha_{2\sigma}=\lambda_1^{(\sigma)}\lambda_2^{(\sigma)}+\lambda_1^{(\sigma)}\lambda_3^{(\sigma)}+\cdots+\lambda_{k_\sigma-1}^{(\sigma)}\lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k_\sigma}=(-1)^{k_\sigma}\lambda_1^{(\sigma)}\cdots\lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)},$$

а матрица Λ_σ либо совпадает, либо подобна матрице J_σ.

Используя произвол, имеющийся в выборе матриц K_σ и M_σ, всегда можно сделать так, чтобы Λ_σ совпадала с J_σ. Учитывая это, далее будем считать, что в разложении (2.10)

$$\Lambda_\sigma\equiv J_\sigma \quad (\sigma=1,\cdots,p).$$

С помощью соотношений (2.10) и (2.11), легко проверить, что при подстановке вместо $K_\sigma^{[0]}$ и $\Lambda_\sigma^{[0]}$ соответственно K_σ и Λ_σ, равенство (2.8) обращается в тождество. Поэтому положим

$$K_\sigma^{[0]}(\tau)\equiv K_\sigma(\tau),\ \Lambda_\sigma^{[0]}(\tau)\equiv\Lambda_\sigma(\tau)\equiv J_\sigma(\tau). \tag{2.12}$$

Остальные члены разложений матриц $\widetilde{K}_\sigma(\tau,\varepsilon)$ и $\widetilde{\Lambda}_\sigma(\tau,\varepsilon)$ последовательно могут быть определены следующим путем.

Допустим, что $K_\sigma^{[0]}$, $\Lambda_\sigma^{[0]}$, $\cdots$, $K_\sigma^{[k-1]}$, $\Lambda_\sigma^{[k-1]}$ уже найдены, и, следовательно, в k-ом равенстве (2.9) $D_\sigma^{[k-1]}$—известная матрица.

Через $\xi_{1\sigma}^{[k]}$, $\cdots$, $\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]}$ обозначим столбцы матрицы $K_\sigma^{[k]}$, а через $d_{1\sigma}^{[k-1]}$, $\cdots$, $d_{k_\sigma\sigma}^{[k-1]}$— столбцы матрицы $D_\sigma^{[k-1]}$, так что

$$K_\sigma^{[k]}=(\xi_{1\sigma}^{[k]}\cdots\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]}),\quad D_\sigma^{[k-1]}=(d_{1\sigma}^{[k-1]}\cdots d_{k_\sigma\sigma}^{[k-1]}).$$

В том случае, когда $\Lambda_\sigma^{[k]}$ $(k=1, 2,\cdots)$ имеет структуру (2.5), k-ое равенство (2.9) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= U\xi_{1\sigma}^{[k]} + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[0]}\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}\xi_{k_\sigma\sigma}^{[0]} - d_{1\sigma}^{[k-1]}, \\ \xi_{1\sigma}^{[k]} &= U\xi_{2\sigma}^{[k]} + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[0]}\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]}\xi_{k_\sigma\sigma}^{[0]} - d_{2\sigma}^{[k-1]}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]} &= U\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} + \alpha_{1\sigma}^{[k]}\xi_{k_\sigma\sigma}^{[0]} - d_{k_\sigma\sigma}^{[k-1]}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Умножим равенства (2.13) слева соответственно на E_n, $U,\cdots$, $U^{k_\sigma-2}$, $U^{k_\sigma-1}$ и сложим. Получим, учитывая еще, что $\alpha_{j\sigma}^{[0]}=\alpha_{j\sigma}$ $(j=1,\cdots$ $\cdots, k_\sigma)$,

$$\psi_\sigma(U)\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]} = -(\alpha_{1\sigma}^{[k]}U^{k_\sigma-1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]}U^{k_\sigma-2} + \cdots + \alpha_{k_\sigma-1\sigma}U + \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}E_n)\xi_{k_\sigma\sigma}^{[0]} + d_\sigma^{[k-1]}, \tag{2.14}$$

где

$$d_\sigma^{[k-1]} = U^{k_\sigma-1}d_{k_\sigma}^{[k-1]} + \cdots + Ud_{2\sigma}^{[k-1]} + d_{1\sigma}^{[k-1]}.$$

Пользуясь соотношениями (2.10) и (2.11), равенство (2.14) можно преобразовать к виду

$$\psi_\sigma(\Lambda)\,Q_\sigma^{[k]} = -MK_\sigma L_\sigma\alpha_\sigma^{[k]} + Md_\sigma^{[k-1]}; \tag{2.15}$$

здесь

$$Q_\sigma^{[k]} = M\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]},\quad L_\sigma = (\Lambda_\sigma^{k_\sigma-1}a_\sigma\,\Lambda_\sigma^{k_\sigma-2}a_\sigma\cdots a_\sigma),\quad a_\sigma = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \alpha_\sigma^{[k]} = \begin{bmatrix}\alpha_{1\sigma}^{[k]}\\ \vdots\\ \alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]}\end{bmatrix}.$$

Равенство (2.15) распадается на p независимых матричных соотношений

$$\psi_\sigma(\Lambda_s)\,Q_{s\sigma}^{[k]} = -M_sK_\sigma L_\sigma\alpha_\sigma^{[k]} + M_sd_\sigma^{[k-1]}\ (s=1,\cdots,p), \tag{2.16}$$

где $Q_{s\sigma}^{[k]} = M_s\xi_{k_\sigma\sigma}^{[k]}$ — субматрица матрицы $Q_\sigma^{[k]}$ с размерами $k_s\times 1$.

При $s=\sigma$ $\psi_\sigma(\Lambda_\sigma)=0$, а $M_\sigma K_\sigma = E_{k_\sigma}$. Поэтому из (2.16) получаем

$$L_\sigma\alpha_\sigma^{[k]} = M_\sigma d_\sigma^{[k-1]}.$$

Как нетрудно проверить, L_σ — невырожденная матрица ($\det L_\sigma=1$), так что последнее равенство разрешимо относительно $\alpha_\sigma^{[k]}$:

$$\alpha_\sigma^{[k]} = L_\sigma^{-1}M_\sigma d_\sigma^{[k-1]}. \tag{2.17}$$

При $s\neq\sigma$ $M_sK_\sigma=0$, а $\psi_\sigma(\Lambda_s)$ в силу условия б) теоремы—невырожденная матрица. Учитывая это, из (2.16) находим

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = \psi_\sigma^{-1}(\Lambda_s)\,M_sd_\sigma^{[k-1]}, \tag{2.18}$$

Формула (2.18) определяет все субматрицы блочной матрицы $Q_\sigma^{[k]}$, кроме одной — $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$. Из вышеизложенного ясно, что в качестве $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ может быть принята произвольная матрица типа $k_\sigma \times 1$, имеющая производные по τ всех порядков. В частности, можно принять $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$.

Таким образом, матрица $Q_\sigma^{[k]}$ определяется полностью. Через эту матрицу последний столбец матрицы $K_\sigma^{[k]}$ выражается так:

$$\xi_{k_\sigma \sigma}^{[k]} = K Q_\sigma^{[k]}.$$

Остальные столбцы матрицы $K_\sigma^{[k]}$ $(\xi_{k_\sigma - 1\sigma}^{[k]}, \cdots, \xi_{1\sigma}^{[k]})$ определяются соотношениями (2.13).

Остается указать способ построения членов разложений матриц $\tilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon)$ и $R(\tau, \varepsilon)$, обращающих равенство (2.7) в тождество.

Как показано в [5], равенство (2.7) выполняется тождественно относительно ε, если квадратную матрицу

$$\tilde{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M^{[k]}(\tau), \quad M^{[k]} = \begin{bmatrix} M_1^{[k]} \\ \cdot \\ \cdot \\ M_p^{[k]} \end{bmatrix},$$

и члены разложения матрицы $R(\tau, \varepsilon)$ определить формулами

$$M^{[0]} = M, \ M^{[k]} = \sum_{l=1}^{k} K^{[l]} M^{[k-l]},$$

$$R_0 = A_0^{-1}, \quad R_k = -A_0^{-1} \sum_{l=1}^{k} A_l R_{k-l};$$

здесь $K^{[l]} = (K_1^{[l]} \cdots K_p^{[l]})$.

Полученные соотношения позволяют последовательно определить члены разложений (2.4), посредством которых представляется формальное решение системы (1.1) в форме (2.2)—(2.3). Тем самым теорема доказана.

3°. Аналогичным путем доказывается

Теорема 3.1. *Пусть на сегменте* $[0, L]$ а) *матрицы* $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ *имеют производные по* τ *всех порядков, а* $A_0(\tau)$, *кроме того, является невырожденной матрицей;* б) *собственные значения матрицы* $U(\tau) = A_0^{-1}(\tau) B_0(\tau)$ *разбиты на* p *групп* $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ $\left(\sigma = 1, \cdots, p; \ \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ *при условии* (2.1); в) *соответствующие этим группам подпространства* $R_1, \cdots, R_p$ *являются инвариантными и циклическими подпространствами* n*-мерного пространства* R *относительно линейного оператора* $\mathbf{U}$, *которому в некотором базисе отвечает матрица* U. *Тогда формальное решение системы* (1.1) *может быть представлено равенствами*

$$x=\sum_{\sigma=1}^{p} \widetilde{K}_\sigma (\tau, \varepsilon) y_\sigma, \tag{3.1}$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \widetilde{\Lambda}_\sigma (\tau, \varepsilon) y_\sigma + \widetilde{M}_\sigma (\tau, \varepsilon) R (\tau, \varepsilon) f (t, \tau, \varepsilon), \tag{3.2}$$

где $\widetilde{K}_\sigma$, $\widetilde{\Lambda}_\sigma$, $\widetilde{M}_\sigma$, R — *матрицы типа соответственно* $n\times k_\sigma$, $k_\sigma\times k_\sigma$, $k_\sigma\times n$, $n\times n$, *представленные формальными рядами*

$$\widetilde{K}_\sigma(\tau, \varepsilon)= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k K_\sigma^{[k]} (\tau),\ \widetilde{\Lambda}_\sigma (\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_\sigma^{[k]}(\tau),$$

$$\widetilde{M}_\sigma(\tau, \varepsilon)= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k M_\sigma^{[k]} (\tau),\ R (\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k (\tau), \tag{3.3}$$

причем

$$\Lambda_\sigma^{[0]} \equiv I_\sigma,$$

$$\Lambda_\sigma^{[k]}=\begin{bmatrix} -\alpha_{1\sigma}^{[k]} & -\alpha_{2\sigma}^{[k]} & \cdots & -\alpha_{k_\sigma-1\sigma}^{[k]} & -\alpha_{k_\sigma\sigma}^{[k]} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Члены рядов (3.3) в данном случае определяются следующими рекуррентными соотношениями.

Как и в п. 2

$$\alpha_{j\sigma}^{[0]} \equiv \alpha_{j\sigma}\ (j=1,\cdots, k_\sigma),$$

$$\alpha_\sigma^{[k]}=L_\sigma^{-1} M_\sigma d_\sigma^{[k-1]},$$

где

$$L_\sigma= (\Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} a_\sigma\ \Lambda_\sigma^{k_\sigma-2} a_\sigma \cdots a_\sigma),$$

$$d_\sigma^{[k-1]} = U^{k_\sigma-1} d_{1\sigma}^{[k-1]}+\cdots + Ud_{k_\sigma-1\sigma}^{[k-1]}+ d_{k_\sigma\sigma}^{[k-1]},$$

только теперь $\Lambda_\sigma = I_\sigma$, $a_\sigma=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$.

(Заметим попутно, что при этом $\det L_\sigma = (-1)^{\frac{1}{2} k_\sigma (k_\sigma-1)}$).

Столбцы матрицы $K_\sigma^{[k]}$ определяются так.

Первый столбец

$$\xi_{1\sigma}^{[k]}=KQ_\sigma^{[k]} = \sum_{s=1}^{p} K_s Q_{s\sigma}^{[k]},$$

где

$$Q_{s\sigma}^{[k]}= \psi_\sigma^{-1} (\Lambda_s) M_s d_\sigma^{[k-1]} \quad (s \neq \sigma),$$

а $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ — произвольная матрица типа $k_\sigma\times 1$, имеющая производные по τ всех порядков.

Остальные столбцы матрицы $K_\sigma^{[k]}$ определяются формулами

$$\xi_{j\sigma}^{[k]} = U\xi_{j-1,\sigma}^{[k]} + \alpha_{j-1,\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{j-1,\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} - d_{j-1,\sigma}^{[k-1]}$$

$$(j=2, 3, \cdots, k_\sigma).$$

Что касается членов разложений матриц $\tilde{M}_\sigma$ и R, то для них остаются в силе соотношения, приведенные в конце п. 2, имея в виду, что $K^{[l]}$ построены по формулам настоящего параграфа.

4°. Вектор (столбцовую матрицу) $x_m(t, \varepsilon)$, определенный равенствами (2.2) и (2.3) (или (3.1) и (3.2)) в предположении, что в разложениях (2.4) (соответственно (3.3)) оставлены лишь члены порядка не выше m относительно ε, назовем „приближенным решением“ системы (1.1). Итак, приближенное решение представляется равенствами

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma^{(m)},$$

$$\frac{dy_\sigma^{(m)}}{dt} = \Lambda_\sigma^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma^{(m)} + M_\sigma^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, R^{(m)}(\tau, \varepsilon)\, f(t, \tau, \varepsilon),$$

где

$$K_\sigma^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]}(\tau), \quad \Lambda^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \Lambda_\sigma^{[k]}(\tau),$$

$$M_\sigma^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k M_\sigma^{[k]}(\tau), \quad R^{(m)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k R_k(\tau).$$

Замечание. Для построения приближенного решения условия дифференцируемости матриц A_ν, B_ν, сформулированные в теоремах 2.1 и 3.1, могут быть ослаблены: для формального построения приближенного решения x_m достаточно существования лишь первых $m-\nu$ производных матриц A_ν и B_ν $(\nu \leqslant m)$.

При условии, что матрицы A_ν и B_ν $(\nu \leqslant m)$ имеют на $[0, L]$ производные по τ до $m-\nu+1$ порядка включительно, а $f(t, \tau, \varepsilon)$ — непрерывная вектор-функция, регулярная относительно ε в окрестности точки $\varepsilon=0$, имеют место следующие оценки для приближенного решения x_m.

Если

$$x|_{t=t_1} = x_m|_{t=t_1},$$

то существуют такое $\varepsilon_0 > 0$ и постоянная $c_m > 0$, что для всех $t \in [t_1, t_2] \subset \left[0, \frac{L}{\varepsilon_0}\right]$

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m \varepsilon^{m+1}.$$

Если, помимо сделанных выше предположений, все собственные значения эрмитовой матрицы $\frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*)$ неположительны, то

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1} \quad \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]\right).$$

В случае однородной системы ($f = 0$) имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m \varepsilon^{m} \quad \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]\right).$$

Приведенные оценки свидетельствуют об асимптотическом характере приближенного решения x_m*.

5°. В случае однородной системы расщепленные системы (2.3) и (3.2) принимают вид

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \overline{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma \quad (\sigma = 1, \cdots, p). \tag{5.1}$$

Пусть $y_{1\sigma}, \cdots, y_{k_\sigma \sigma}$ — элементы столбцовой матрицы y_σ.

Если исходить из теоремы 2.1, то, полагая $y_{1\sigma} \equiv q_\sigma$, равенства (2.2) и (2.3) можно представить в виде

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \left[\overline{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma + \overline{\xi}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{dq_\sigma}{dt} + \cdots + \overline{\xi}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} \right], \tag{5.2}$$

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \overline{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \cdots + \overline{\alpha}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma = 0 \tag{5.3}$$

$$(\sigma = 1, \cdots, p),$$

где

$$\overline{\xi}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_{j\sigma}^{[k]}(\tau), \quad \overline{\alpha}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_{j\sigma}^{[k]}(\tau).$$

Если же исходить из теоремы 3.1, то, полагая $y_{k_\sigma \sigma} \equiv q_\sigma$, вместо (3.1) и (3.2) будем иметь

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \left[\widetilde{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1}}{dt^{k_\sigma - 1}} + \widetilde{\xi}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 2} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 2}} + \cdots + \widetilde{\xi}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma \right], \tag{5.4}$$

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \widetilde{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \cdots + \widetilde{\alpha}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma = 0 \tag{5.5}$$

$$(\sigma = 1, \cdots, p).$$

Таким образом, однородная система (1.1) ($f \equiv 0$) путем замены переменных (5.2) (или (5.4)) преобразуется формально к расщепленной системе (5.3) (или соответственно (5.5)), состоящей из отдельных линейных дифференциальных уравнений. Мы пришли несколько иным путем к результату, установленному в статье [10].

Приближенные решения однородной системы согласно (5.2)—(5.3) и (5.4)—(5.5) могут быть представлены равенствами

---

* Эти оценки получены с использованием метода построения асимптотической оценки, приведенного в [11].

$$x_m=\sum_{\sigma=1}^{p}\left[\xi_{1\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)\,q_\sigma^{(m)}+\xi_{2\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)\frac{dq_\sigma^{(m)}}{dt}+\cdots+\xi_{k_\sigma\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)\frac{d^{k_\sigma-1}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma-1}}\right],$$

$$\frac{d^{k_\sigma}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma}}+\alpha_{1\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)\frac{d^{k_\sigma-1}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma-1}}+\cdots+\alpha_{k_\sigma\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)\,q_\sigma^{(m)}=0\quad(\sigma=1,\cdots,p)$$

или соответственно равенствами

$$x_m=\sum_{\sigma=1}^{p}\left[\xi_{1\sigma}^{(m)}\frac{d^{k_\sigma-1}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma-1}}+\xi_{2\sigma}^{(m)}\frac{d^{k_\sigma-2}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma-2}}+\cdots+\xi_{k_\sigma\sigma}^{(m)}\,q_\sigma^{(m)}\right],$$

$$\frac{d^{k_\sigma}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma}}+\alpha_{1\sigma}^{(m)}\frac{d^{k_\sigma-1}q_\sigma^{(m)}}{dt^{k_\sigma-1}}+\cdots+\alpha_{k_\sigma\sigma}^{(m)}\,q_\sigma^{(m)}\quad(\sigma=1,\cdots,p),$$

где

$$\xi_{j\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\,\xi_{j\sigma}^{[k]}(\tau),\quad \alpha_{j\sigma}^{(m)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\,\alpha_{j\sigma}^{[k]}(\tau).$$

В силу оценки, приведенной для однородной системы в п. 4, эти приближенные решения имеют асимптотический характер.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 12.X.1970

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ. Գծային դիֆերենցիալ սիստեմի մեկ ասիմպտոտիկ ձևափոխություն *(ամփոփում)*

Հոդվածում մատնանշված են այն ձևափոխությունները, որոնք բերում են առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների անհամասեռ սիստեմի ավելի ցածր կարգի հավասարումների ենթասիստեմների ասիմպտոտիկ ճեղքմանը։ Ի տարբերություն գծային դիֆերենցիալ սիստեմների ճեղքմանը նվիրված հայտնի աշխատանքների, այս հոդվածում ճեղքման խնդիրը լուծված է այն լրացուցիչ պայմանի համար, երբ ենթասիստեմների գործակիցների մատրիցաները ունեն կանոնիկ տեսք։

K. A. ABGARIAN. *One asymptotic transformation of linear differential system*
(summary)

Transformations leading to asymptotic splitting of nonhomogeneous systems of first order linear differential equations into lower order subsystems are pointed out. In contrast with known works on splitting here the problem is solved under additional condition, that matrices of subsystems' coefficients have canonical form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. З. Штокало.* Критерии устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Матем. сб., 19 (61), № 2, 1946.
2. *С. Ф. Фещенко.* Об асимптотическом поведении интегралов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, ДАН УкрССР, № 1, 1949.
3. *Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн.* О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, Укр. матем. журн., 2, № 4, 1950.

4. *Х. Л. Территтин.* Асимптотическое разложение решений систем обыкновенны линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Сб. перев Математика, ИЛ, 1 : 2, 1957.
5. *К. А. Абгарян.* Асимптотическое расщепление уравнений линейной системы авто матического управления, ДАН СССР, 166, № 2, 1966.
6. *С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко.* Асимптотические методы теории линейных дифференциальных уравнений, „Наукова думка", Киев, 1966.
7. *В. Вазов.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. Мир, М., 1968.
8. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, Изд. Наука, М., 1966.
9. *К. А. Абгарян.* Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.
10. *К. А. Абгарян.* Одно формальное преобразование системы линейных дифференциальных уравнений, Известия АН АрмССР, сер. „Математика", V, № 4, 1970, 317—326.
11. *Н. Н. Боголюбов.* О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН Укр. ССР, 1945.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

В. А. АРАКЕЛОВ, Р. Р. ВАРШАМОВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Широкое распространение в последнее время получили циклические корректирующие коды. Это объясняется тем, что они имеют простые правила кодирования, допускающие относительно несложную реализацию, и тем, что свойство цикличности приводит к определенной алгебраической структуре кодов, которая может быть использована не только для предсказания их корректирующих свойств, но и для нахождения относительно простых алгоритмов декодирования.

Циклическим кодам посвящено довольно большое число исследований. Хорошо изученными являются циклические коды максимальной длины [1]. Найден новый класс циклических кодов, проверочный полином которых представим в виде произведения примитивных полиномов с попарно взаимно простыми степенями [2]. Естественным обобщением этих кодов, очевидно, является случай, когда проверочный полином задается произведением неприводимых полиномов. Задача исследования таких кодов фактически сводится к анализу распределения весов кодовых векторов и определению конечной формулы кодового расстояния, которая, в свою очередь, может быть получена в результате более глубокого анализа алгебраической структуры циклических последовательностей. Кроме того, более детальное изучение циклических возвратных последовательностей несомненно найдет приложение как в вопросах порогового декодирования [3], так и в конструктивной теории приводимости полиномов над конечными полями. Поэтому данная работа посвящена исследованию математической структуры и характерных особенностей рекуррентных периодических последовательностей.

Известно [4], что периодические последовательности получаются с помощью генератора на регистре сдвига, обратная связь которого соответствует некоторому нормированному полиному $h(x)=\sum_{l=0}^{k} h_l x^l$, $h_0 \neq 0$ степени k, с коэффициентами из поля Галуа $GF(q)$.

Если в первоначальный момент работы генератора накопитель его заполнен комбинацией $a(0), a(1), \cdots, a(k-1)$, то выходная последовательность, снимаемая с первого разряда регистра сдвига, будет иметь вид

$$a(0), \quad a(1), \cdots, a(k-1), \; a(k), \cdots.$$

Полином $h(x)$ определяет рекуррентное соотношение

$$a(i+k) = -\sum_{j=0}^{k-1} h_j a(i+j) \quad (i=0, 1, \cdots), \tag{1}$$

в силу которого любой элемент $a(N)$ $(N>0)$ выходной последовательности можно представить в виде некоторой линейной комбинации первоначального заполнения с коэффициентами φ из поля $GF(q)$:

$$a(x) = \varphi_0(x)\, a(0) + \varphi_1(x)\, a(1) + \cdots + \varphi_{k-1}(x)\, a(k-1). \tag{2}$$

В настоящей статье предлагается метод определения коэффициентов разложения (2) для всякого $N \geqslant k$ (случай $N<k$ тривиален). Попытаемся вначале вычислить первый коэффициент $\varphi_0(x)$ выражения (2). Если $k=N$, то, согласно (1), будем иметь соотношение

$$a(k) = -h_0 a(0) - h_1 a(1) - \cdots - h_{k-1} a(k-1),$$

позволяющее непосредственно определить $\varphi_0(k) = -h_0$. Если $N > k$, то, рассматривая диофантово уравнение

$$N - k = m_0 z_0 + m_1 z_1 + \cdots + m_t z_t, \tag{3}$$

где $m_i = k - k_i$, k_i — номера всех* отличных от нуля коэффициентов полинома $h(x) = x^k + \sum_{i=0}^{t} h_{k_i} x^{k_i}$, можно показать, что оно имеет непосредственное значение при вычислении коэффициентов разложения (2). Так, например, выяснилось, что для всех значений N, для которых уравнение (3) не разрешимо в целых неотрицательных значениях z_i, коэффициент $\varphi_0(N)=0$. А поэтому ясно, что выражение $\varphi_0(x)$ может быть отлично от нуля лишь в случае, когда (3) имеет хотя бы одно целочисленное решение. Именно этот случай в дальнейшем и будет нами рассмотрен.

Условимся преобразование, в результате которого $a(x)$ переходит в $a(x+1)$, т. е. $a(x) \to a(x+1)$, называть шагом функции $a(x)$, а преобразование из, соответственно, $m_i = k - k_i$ $(i = \overline{0, t})$ последовательных шагов — i-переходом. Тогда преобразование $a(k) \to a(N)$, состоящее из $N-k$ последовательных шагов, в зависимости от (3), можно будет осуществлять различными i-переходами, содержащими, соответственно, по m_i шагов каждый. В самом деле, пусть $\{z_0^{(l)}, z_1^{(l)}, \cdots, z_t^{(l)}\}$ $(l=\overline{1, s})$ означает множество всевозможных различных решений (3), а $z_0^{(u)}, z_1^{(u)}, \cdots, z_t^{(u)}$ — некоторый его произвольный элемент. Тогда, применяя к функции $a(k)$ вначале, соответственно, $z_0^{(u)}$ раз 0-переход, затем $z_{(1)}^{u}$ раз 1-переход и т. д., $z_t^{(u)}$ раз t-переход, получим некоторое выражение $\bar{a}^{(u)}(N)$, которое, в свою очередь, может быть записано в виде

$$\bar{a}^{(u)}(N) = \bar{\varphi}_0^{(u)}(N)\, a(0) + \bar{\varphi}_1^{(u)}(N)\, a(1) + \cdots + \bar{\varphi}_{k-1}^{(u)}(N)\, a(k-1),$$

---

* Исключая старший коэффициент.

где

$$\tilde{\varphi}_0^{(u)}(N) = (-1)^{z_0^{(u)}+\cdots+z_l^{(u)}+1} h_0^{z_0^{(u)}+1} h_1^{z_1^{(u)}} \cdots h_{k_l}^{z_l^{(u)}}.$$

Причем, если указанные преобразования осуществлять без учета порядка переходов, то общее число различных вариантов $P(z_0^{(u)}, z_1^{(u)}, \cdots, z_l^{(u)})$ определится формулой

$$P(z_0^{(u)}, z_1^{(u)}, \cdots, z_l^{(u)}) = \frac{(z_0^{(u)} + z_1^{(u)} + \cdots + z_l^{(u)})!}{z_0^{(u)}!\, z_1^{(u)}! \cdots z_l^{(u)}!},$$

а поэтому в выражении

$$a^{(u)}(N) = \sum \tilde{a}^u(N) = \varphi_0^{(u)}(N)\, \tilde{a}(0) + \cdots + \varphi_{k-1}^{(u)}(N)\, a(k-1) \qquad (4)$$

коэффициент

$$\varphi_0^{(u)}(N) = \tilde{\varphi}_0^{(u)}(N) \frac{(z_0^{(u)} + z_1^{(u)} + \cdots + z_l^{(u)})!}{z_0^{(u)}!\, z_1^{(u)}! \cdots z_l^{(u)}}.$$

Сопоставляя между собой (2) и (4) и принимая во внимание также, что $a(N) = \sum_{u=1}^{s} a^{(u)}(N)$, окончательно получим

$$\varphi_0(N) = \sum_{u=1}^{s} \varphi_0^{(u)}(N) = \sum_{u=1}^{s} (-1)^{z_0^{(u)}+\cdots+z_l^{(u)}+1} h_0^{z_0^{(u)}+1} \cdots h_{k_l}^{z_l^{(u)}} \times$$
$$\times P(z_0^{(u)}, \cdots, z_l^{(u)}).$$

Таким образом, нами установлен следующий факт.

Теорема. *Пусть целое* $N \geqslant k$, $h(x) = \sum_{s=0}^{k} h_l x^l$ *— произвольный нормированный полином над полем* $GF(q)$, *порождающий периодическую последовательность, у которого только коэффициенты* $h_0, h_{k_1}, \cdots, h_{k_l}, h_k$ *отличны от нуля, и пусть* $\{z_0^{(i)}, z_1^{(i)}, \cdots, z_l^{(i)}\}$ $(i=\overline{1,s})$ *— непустая система всевозможных неотрицательных решений диофантова уравнения* $N - k = \sum_{l=0}^{l} (k - k_l)\, z_l$. Тогда

$$\varphi_0(N) \equiv \sum_{i=1}^{s} (-1)^{z_0^{(i)}+\cdots+z_l^{(i)}+1} h_0^{z_0^{(i)}+1} \cdots h_{k_l}^{z_l^{(i)}} \frac{(z_0^{(i)} + \cdots + z_l^{(i)})!}{z_0^{(i)}! \cdots z_l^{(i)}!} \pmod p,$$

где p *— характеристика основного поля.*

Опираясь далее на очевидное соотношение $\varphi_{k-1}(N)\, h_0 = \varphi_0(N)$, нетрудно получить соотношение

$$\varphi_j(N) = \frac{1}{h_0} \sum_{l=0}^{j} \varphi_0(N - j + i)\, h_l, \qquad (5)$$

справедливое для любых натуральных N и j.

Это соотношение позволяет по найденным значениям $\varphi_0(N)$ определять остальные коэффициенты $\varphi_1(N), \varphi_2(N), \cdots, \varphi_{s-1}(N)$ разложения (2).

Примеры:

1. Пусть $q=3$, $h(x)=x^3+x+1$ и $N=13$. Подставляя эти данные в (3), получим

$$10=3z_0+2z_1. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два решения:

$$z_0^{(1)}=0,\quad z_1^{(1)}=5 \text{ и } z_0^{(2)}=2,\quad z_1^{(2)}=2,$$

и поэтому, согласно теореме, будем иметь

$$2\cdot 2^5\cdot\frac{5!}{5!}-2^3\cdot 2^2\,\frac{4!}{2!\,2!}\equiv 1 \pmod 3,$$

т. е. $\varphi_0(13)=1$.

Аналогичным образом определим коэффициенты $\varphi_0(12)=2$, $\varphi_0(11)=1$, которые, согласно (5), позволят получить $\varphi_1(13)=\varphi_2(13)=0$, а, следовательно, и $a(13)=a(0)$. Таким образом, выяснилось, что 13 является кратным периоду полинома $h(x)$. А это означает, так как 13 является простым числом, что период полинома x^3+x+1 равен 13, и поскольку $13|3^3-1$, то полином x^3+x+1 неприводим в поле $GF(3)$.

2. Пусть $q=2^4$, $h(x)=x^4+\alpha x+1$, где α — примитивный элемент поля $GF(2^4)$, являющийся корнем полинома x^4+x+1. В данном случае $h_0=-1=1$, $h_1=-\alpha=\alpha$, $h_2=h_3=0$ и следовательно, уравнение (3) примет вид

$$N-4=4z_0+3z_1.$$

Пусть $N=15$, тогда уравнение $11=4z_0+3z_1$ будет иметь единственное решение $z_0=2$, $z_1=1$ и, согласно теореме, получим $\alpha\frac{3!}{2!\,1!}\equiv\alpha$ (mod 2), т. е. $\varphi_0(15)=\alpha$. Аналогичным образом определим $\varphi_0(14)=\alpha^2$, $\varphi_0(13)=\alpha^3$ и $\varphi_0(12)=1$. Используя (5), получим $\varphi_1(15)=\varphi_2(15)=0$, $\varphi_3(15)=\alpha$, т. е. $a(15)=\alpha\cdot a(0)+\alpha\cdot a(3)$.

Как видно из теоремы определение коэффициентов упирается в вычисление выражения $P(z_0, z_1,\cdots, z_l)$. Нетрудно показать, что

$$P(z_0, z_1,\cdots,z_l)\equiv p^F R \pmod p,$$

где

$$F=\sum_{\nu=1}\left[\frac{z_0+\cdots+z_l}{p^\nu}\right]-\left[\frac{z_0}{p^\nu}\right]-\cdots-\left[\frac{z_l}{p^\nu}\right]^*,$$

а R — некоторая числовая функция от $z_0, z_1,\cdots, z_l$, удовлетворяющая условию $R\not\equiv 0 \pmod p$. Поэтому, если $F>0$, то $P(z_0,\cdots,z_l)\equiv 0 \pmod p$; если $F=0$, то $P(z_0,\cdots,z_l)\equiv R\not\equiv 0 \pmod p$.

Пусть

---

* $[z]$ — наибольшее целое число, не превосходящее z.

$$z=\sum_{j=0}^{n} \beta_{n-j}\, p^{n-j},$$

$$z_i=\sum_{j=0} \beta_{n-j}^{(i)}\, p^{n-j} \quad (i=\overline{0,t}) \tag{7}$$

являются представлением чисел $z=\sum_{i=0}^{t} z_i$; $z_0, z_1, \cdots, z_t$, в p-ичной системе счисления. Тогда справедлива

Лемма. *Для того чтобы функция* $F=\sum_{\nu=1}\left[\frac{z}{p^\nu}\right]-\left[\frac{z_0}{p^\nu}\right]-\cdots-\left[\frac{z_t}{p^\nu}\right]$ *была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_j=\sum_{i=0}^{n}\beta_j^{(i)}$ $(j=\overline{1,n})$.

Доказательство. Необходимость. Действительно, используя (7), функцию F можно представить в следующем виде:

$$F=A_0+A_1+\cdots+A_{n-1},$$

где

$$A_0=(\beta_n-\beta_n^{(0)}-\cdots-\beta_n^{(t)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n-1}=(\beta_n-\beta_n^{(0)}-\cdots-\beta_n^{(t)})\,p^{n-1}+$$

$$+(\beta_{n-1}-\beta_{n-1}^{(0)}-\cdots-\beta_{n-1}^{(t)})\,p^{n-2}+\cdots+(\beta_1-\beta_1^{(0)}-\cdots-\beta_1^{(t)}),$$

причем $A_j\geqslant 0$.

Поэтому, если $F=0$, то $A_j=0$ и $\beta_j=\sum_{i=0}^{t}\beta_j^{(i)}$, что и требовалось показать. Достаточность очевидна.

Можно также показать, что в случае, если $F=0$, будет иметь место сравнение

$$P(z_0,\cdots,z_t)\equiv\prod\frac{\left[\frac{z}{p^l}\right]_p}{\left[\frac{z_0}{p^l}\right]\cdots\left[\frac{z_t}{p^l}\right]} \pmod p,$$

где $\left[\frac{z}{p}\right]_p=z-p\left[\frac{z}{p}\right]$,

позволяющее в значительной степени упростить вычисление $P(z_0,\cdots$ $\cdots, z_t)$, а следовательно, согласно теореме, и коэффициентов $\varphi_0(N)$.

В заключение следует отметить, что рассмотренный метод, устанавливающий тесную связь между структурой периодических последовательностей и соответствующими диофантовыми уравнениями, оказывается весьма полезным и при решении ряда актуальных задач теории приводимости полиномов над конечными полями. Так, например, при исследовании арифметической функции $T(h(x))$*, определении вычетов функции высоких степеней по модулю заданного полинома $h(x)$ и др. В самом деле, умножая выражение (3) на произвольное натуральное число λ и исследуя его затем, можно получить одно из важнейших свойств функции $T(h(x))$, а именно

$$T(h(x^{\lambda})) = \lambda T(h(x)).$$

Или же, используя добавочно некоторые вспомогательные средства, можно также для $T(h(x))$ получить ряд интересных соотношений, справедливых в поле $GF(2)$. Приведем без доказательства некоторые из них

1. $$T(x^{2^k}+x+1) = 2^{2^k}-1,$$

2. $$T\left(\sum_{\nu=0}^{m} x^{\frac{1}{2^k-1}(2^{\nu k}-1)}\right) = 2^k\left(\frac{2^{mk}-1}{2^k-1}\right)+1,$$

где m и k — любые целые положительные числа.

Вычислительный центр АН АрмССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 20.VII.1968

Վ. Ա. ԱՌԱՔԵԼՈՎ, Ռ. Ռ. ՎԱՌՇԱՄՈՎ. Ռեկուռենտ պարբերական հաջորդականությունների հանրահաշվական կառուցվածքի ուսումնասիրության շուրջը *(ամփոփում)*

Երկու մասից բաղկացած աշխատանքը նվիրված է Գալուայի $GF(q)$, ($q=p^n$) դաշտից վերցված գործակիցներով K աստիճանի նորմավորված $h(x)$ բազմանդամին համապատասխանող հետադարձ կապով տեղաշարժի ռեգիստրով գեներատորի օգնությամբ ստացվող ռեկուռենտ պարբերական հաջորդականությունների մաթեմատիկական կառուցվածքի և բնորոշ հատկությունների ուսումնասիրմանը։

Եթե ռեգիստրի սկզբնական պարունակությունն է $a(0),\cdots,a(k-1)$, *ապա ելքի հաջորդականության ցանկացած* $a(N)$, ($N\geqslant 0$) *անդամ կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.*

$$a(N) = \varphi_0(N)\,a(0)+\varphi_1(N)\,a(1)+\cdots+\varphi_{k-1}(N)\,a(k-1),$$

որտեղ $\varphi_l(N)$ *գործակիցները* $GF(q)$ *դաշտից են։*

Առաջին մասի հիմնական արդյունքը հետևյալն է։

Թեորեմ. Դիցուք $N\geqslant k$, *ամբողջ թիվ է,* $h(x)=\sum_{j=0}^{k} h_j x^j$, $h_j\in GF(q)$ *տեղաշարժի ռեգիստրով գեներատորի հետադարձ կապի բազմանդամն է, որի միայն* $h_0, h_{k_1},\cdots, h_{k_t}, h_{k_t}=1$ *գործակիցներն են զերոյից տարբեր և* $\{z_0^{(l)},\cdots z_l^{(l)}\}$ ($l=\overline{1,s}$), $N-k=\sum_{l=1}^{t}(k-k_l)\,z_l$ *հավասարման բոլոր հնարավոր ամբողջաթիվ ոչ բացասական լուծումների բազմությունն է։ Այդ դեպքում՝*

* $T(h(x))$ есть показатель, которому принадлежит полином $h(x)$, т. е. наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $x^T\equiv 1 \pmod{h(x)}$.

$$\sum_{l=1}^{s}(-1)^{z_0^{(l)}+\cdots+z_t^{(l)}+1}\cdot h_0^{z_0^{(l)}+1}\cdot h_{k_1}^{z_1^{(l)}}\cdots h_{k_t}^{z_t^{(l)}}\frac{(z_0^{(l)}+\cdots+z_t^{(l)})!}{z_0^{(l)}!\cdots z_t^{(l)}!}\equiv\varphi_0(N)(\mathrm{mod}\,p),$$

ընդունելով $\sum_{l=1}^{0}=0$:

Երկրորդ մասում հետազոտվում է հետևյալ թվային ֆունկցիան՝

$$P(z_0,\cdots,z_t)=\frac{(z_0+z_1+\cdots+z_t)!}{z_0!z_1!\cdots z_t!}.$$

V. A. ARAKELOV, R. R. VARSHAMOV. *On the research of algebraic structure of periodical recurrent sequencies* (summary)

The paper is devoted to investigation of mathematical structure and of characteristic peculiarities of recurrent periodic sequencies, received by means of the generator on shift register with feedback, corresponding to a monic polinomial $h(x)$, of degree k, with factors from the Galua field $GF(q)$ $(q=p^n)$.

If $a(0)$, $a(1)\cdots$, $a(k-1)$ is the initral filling of generator storage on the shift register, any element $a(N)$ $(N>0)$, of output generator's sequence can be represented by:

$$a(N)=\varphi_0(N)\,a(0)+\varphi_1(N)\,a(1)+\cdots+\varphi_{k-1}(N)\,a(k-1)$$

where factors $\varphi_i(N)$ are elements of field $GF(q)$.

Theorem (§ 1). Let integer $N\geqslant k$, $h(x)=\sum_{j=0}^{k}h_jx^j$, $h_j\in GF(q)$ be the polinomial of generator feedback on shift register, with nonsero factors h_0, $h_{k_1},\cdots,h_{k_t}$, $h_{k_t}=1$, and let $\{z_0^{(l)},\ z_1^{(l)},\cdots,z_t^{(l)}\}$ $(l=\overline{1,s})$ be a system of all integer non-negative solutions of equation $N-k=\sum_{l=0}^{t}(k-k_l)\,z_l$.

Then

$$\sum_{l=1}^{s}(-1)^{z_0^{(l)}+\cdots+z_t^{(l)}+1}\cdot h_0^{z_0^{(l)}+1}\cdot h_{k_1}^{z_1^{(l)}}\cdots h_{k_t}^{z_t^{(l)}}\cdot\frac{(z_0^{(l)}+\cdots+z_t^{(l)})!}{z_0^{(l)}!\cdots z_t^{(l)}!}\equiv\varphi_0(N)(\mathrm{mod}p),$$

assuming $\sum_{l=1}^{0}=0$.

In § 2 numerical function $P(z_0,\cdots,z_t)=\dfrac{(z_0+\cdots+z_t)!}{z_0!\cdots z_t!}$ is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. H. Green*, R. L. Sr. San Souce. An error correcting encoder and decoder of high Efficiency, Proc. IRE, 46, 1958.
2. *Р. Р. Варшамов, Г. М. Тенентольц*. Об одном классе циклических кодов, Проблемы кибернетики, Изд-во „Наука", вып. 22, 1970, 157—166.
3. *Дж. Месси*. Пороговое декодирование, Изд-во Мир, М., 1964.
4. *У. Питерсон*. Коды, исправляющие ошибки, Изд-во Мир, М., 1964.
5. *В. А. Аракелов*. Об одном методе исследования периодических рекуррентных последовательностей, Сборник трудов III Всесоюзной конференции по теории передачи и кодирования информации, Изд-во ФАН, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

А. Г. МАРКОСЯН

ЧИСЛО ВНУТРЕННЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ

Как известно, проблема нахождения пропускной способности дискретного канала при нулевой ошибке приводит к проблеме нахождения числа внутренней устойчивости в n-ом декартовом произведении*. Шеннон [2], исследуя проблему нахождения пропускной способности канала, привел пример графа (простой цикл из пяти вершин), для которого число внутренней устойчивости в 2-декартовом произведении на единицу больше, чем квадрат числа внутренней устойчивости в исходном графе. В работе [3] автором этой статьи было доказано, что если хотя бы один из графов G и H не содержит простых циклов нечетной длины $\geqslant 5$, то число внутренней устойчивости в декартовом произведении этих графов равно произведению чисел внутренней устойчивости графов G и H: $\alpha(G\times H) = \alpha(G)\cdot\alpha(H)$.

Из примера Шеннона и из последней теоремы видно, что циклы нечетной длины играют особую роль при определении числа внутренней устойчивости в декартовом произведении графов. Исходя из этих соображений О. Оре [4] поставил проблему исследования числа внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов. Из вышеприведенной теоремы следует, что если граф $G=(X, U)$ представляет собой цикл четной длины, то

$$\alpha(G\times G) = \alpha(G^2) = \alpha^2(G).$$

Однако, если G представляет собой цикл нечетной длины, то задача нахождения $\alpha(G^2)$ намного усложняется. Вышеуказанный пример Шеннона—это пятивершинный цикл, для которого $\alpha(G^2) = \alpha^2(G)+1$.

Шеннон определил такой класс графов, для которых $\alpha(G^n)=\alpha^n(G)$. Это—класс графов, имеющих такое отображение σ, переводящее X в X и сохраняющее несмежность, что $\sigma(X)$ представляет собой внутренне устойчивое множество (в работе [3] такое отображение называется полным сжато-сохранным). Ясно, что циклы четной длины принадлежат этому классу. Циклы же нечетной длины, как будет указано в этой статье, не принадлежат вышеуказанному классу. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если граф $G=(X, U)$ представляет собой цикл нечетной длины, то*

$$\alpha(G^2)\leqslant\alpha^2(G)+\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

* Мы следуем терминологии и обозначениям Бержа [1].

Доказательство. Пусть X — множество вершин графа G: $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_{2k}\}$. Так как G — простой цикл, то $U = \{(x_i, x_{i+1})/x_{2k+1} = x_0, i = 0, 1, \cdots, 2k\}$. Ясно, что $\alpha(G) = k$. Предположим, что $S \subset X \times X$-некоторое внутренне устойчивое множество в декартовом произведении G^2. Обозначим через $S_i = \{(x_i x_j)/(x_i x_j) \in S\}$, ясно, что $S = \bigcup_{i=0}^{2k} S_i$. Легко видеть, что $|S_i| \leqslant k$, $|S_i| + |S_{i+1}| \leqslant k$ для каждого $i = 0, 1, 2, \cdots, 2k$ ($S_{2k+1} = S_0$). Отсюда $\sum_{i=0}^{2k-1} |S_i| = (|S_0| + |S_1|) + (|S_2| + |S_3|) + \cdots + (|S_{2k-2}| + |S_{2k-1}|) \leqslant k + k + \cdots + k = k^2$.

а) Пусть $|S_0| + |S_{2k-1}| = k - p$, где $p \geqslant 0$. Покажем, что тогда $\sum_{i=0}^{2k-1} |S_i| \leqslant k^2 - p$.

Предположим, что i_1—первый наименьший четный индекс, для которого $|S_{i_1}| < k - |S_0|$. Из выбора i_1 следует, что $|S_{i_1-2}| \geqslant k - |S_0|$ и $|S_{i_1-1}| \leqslant |S_0|$, в силу того, что $|S_{i_1-2}| + |S_{i_1-1}| \leqslant k$. Пусть $|S_{i_1}| = k - |S_0| - q_1$, где $q_1 > 0$, тогда

$$|S_{i_1-1}| + |S_{i_1}| \leqslant |S_0| + k - |S_0| - q_1 = k - q_1.$$

Если i_2—второй по величине четный индекс, для которого

$$|S_{i_2}| < k - |S_0| - q_1,$$
$$|S_{i_2}| = k - |S_0| - (q_1 + q_2), \quad (q_2 > 0),$$

то

$$|S_{i_2-2}| \geqslant k - |S_0| - q_1, \quad |S_{i_2-1}| \leqslant |S_0| + q_1$$
$$|S_{i_2-1}| + |S_{i_2}| \leqslant |S_0| + q_1 + k - |S_0| - q_1 - q_2 = k - q_2$$

и т. д.

Пусть i_e — последний по величине четный индекс, для которого

$$|S_{i_e}| < k - |S_0| - \sum_{i=1}^{e-1} q_i,$$

$$|S_{i_e}| = k - |S_0| - \sum_{i=1}^{e} q_i \quad (q_e > 0),$$

тогда

$$|S_{i_e-2}| \geqslant k - |S_0| - \sum_{i=1}^{e-1} q_i,$$

$$|S_{i_e-1}| \leqslant |S_0| + \sum_{i=1}^{e-1} q_i,$$

$$|S_{i_e-1}| + |S_{i_e}| \leqslant |S_0| + \sum_{i=1}^{e-1} q_i + k - |S_0| - \sum_{i=1}^{e} q_i = k - q_e.$$

Заметим, что $\sum_{l=1}^{e} q_l \geqslant p$,

$$\sum_{l=0}^{2k-1} |S_l| \leqslant k(k-e) + \sum_{l=1}^{e}(k-q_l) = k^2 - ek + ek - \sum_{l=1}^{e} q_l \leqslant k^2 - p.$$

Отсюда

$$\sum_{l=0}^{2k} |S_l| = \sum_{l=0}^{2k-1} |S_l| + |S_{2k}| \leqslant k^2 - p + |S_{2k}|.$$

Но $|S_{2k}| \leqslant k - \max(|S_0|, |S_{2k-1}|)$. Из того, что $|S_0| + |S_{2k-1}| = k - p$ следует

$$\max_{|S_0| + |S_{2k-1}| = k-p} [k - \max(|S_0|, |S_{2k-1}|)] = \begin{cases} k - \dfrac{k-p}{2}, & \text{если } k-p \text{ четно;} \\ k - \dfrac{k-p+1}{2}, & \text{если } k-p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

$$|S_{2k}| \leqslant \begin{cases} \dfrac{k+p}{2}, & \text{если } k-p \text{ четно,} \\ \dfrac{k+p-1}{2}, & \text{если } k-p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{l=0}^{2k} |S_l| \leqslant \begin{cases} k^2 - p + \dfrac{k+p}{2} = k^2 + \dfrac{k-p}{2}, & \text{если } k-p \text{ четно,} \\ k^2 - p + \dfrac{k+p-1}{2} = k^2 + \dfrac{k-p-1}{2}, & \text{если } k-p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

$$|S| \leqslant \begin{cases} k^2 + \dfrac{k-p}{2}, & \text{если } k-p \text{ четно,} \\ k^2 + \dfrac{k-p-1}{2}, & \text{если } k-p \text{ нечетно.} \end{cases} \qquad (*)$$

Из последних неравенств (*) получим

$$|S| \leqslant \begin{cases} \max\limits_{p>0} \left(k^2 + \dfrac{k-p}{2}\right) = k^2 + \dfrac{k}{2}, & \text{если } k \text{ четно,} \\ \max\limits_{p>0} \left(k^2 + \dfrac{k-p-1}{2}\right) = k^2 + \dfrac{k-1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases} \qquad (**)$$

б) Пусть $|S_0| + |S_{2k-1}| = k + p$ $(p > 0)$, тогда $|S_{2k}| \leqslant k - \max(|S_0|, |S_{2k-1}|)$, и

$$\max_{|S_0| + |S_{2k-1}| = k+p} [k - \max(|S_0|, |S_{2k-1}|)] = \begin{cases} k - \dfrac{k+p}{2}, & \text{если } k+p \text{ четно,} \\ k - \dfrac{k+p+1}{2}, & \text{если } k+p \text{ нечетно,} \end{cases}$$

т. е.

$$|S_{2k}| \leqslant \begin{cases} \frac{k-p}{2}, & \text{если } k+p \text{ четно,} \\ \frac{k-p-1}{2}, & \text{если } k+p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В случае б)

$$\sum_{l=0}^{2k-1} |S_l| \leqslant k^2, \qquad \text{а}$$

$$|S| \leqslant \begin{cases} k^2 + \frac{k-p}{2}, & \text{если } k+p \text{ четно,} \\ k^2 + \frac{k-p-1}{2}, & \text{если } k+p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Получилась такая же оценка, что и в случае а) (*). Но $\alpha(G^2) = \max\limits_{S \subset X \times X} |S|$. Так как $\alpha(G) = k$, то легко видеть, что полученные неравенства (**) эквивалентны неравенству

$$\alpha(G^2) \leqslant \alpha^2(G) + \left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

Теорема доказана.

Эта теорема дает верхнюю оценку для числа внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов нечетной длины. Возникает вопрос: достижима ли эта оценка? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Если граф $G = (X, U)$ — простой цикл нечетной длины, то*

$$\alpha(G^2) = \alpha^2(G) + \left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

Для доказательства этой теоремы достаточно показать существование одного внутренне устойчивого множества $S \subset X \times X$ в графе G^2, для которого

$$|S| = \alpha^2(G) + \left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

Здесь обозначения те же, что и в предыдущей теореме.

а) Предположим, что $k = \alpha(G)$ — четное число.

Возьмем за S_l $\left(S = \bigcup\limits_{l=0}^{2k} S_l\right)$ следующие множества:

$$S_0 = \{(x_0 x_0),\ (x_0 x_2),\ (x_0 x_4), \cdots, (x_0 x_{k-2})\};$$

$$S_1 = \{(x_1 x_k),\ (x_1\ x_{k+2}),\ (x_1\ x_{k+4}), \cdots, (x_1\ x_{2k-2})\};$$

$$S_2 = \{(x_2\, x_{2k}),\ (x_2\ x_1),\ (x_2(x_3), \cdots, (x_2\ x_{k-3})\};$$

$$S_3=\{(x_3\, x_{k-1}),\ (x_3\, x_{k+1}),\ (x_3\, x_{k+3}),\cdots,\ (x_3\, x_{2k-3})\};$$

. . . .

. . . .

$$S_{2k-1}=\{(x_{2k-1}\, x_1),\ (x_{2k-1}\, x_3),\ (x_{2k-1}\, x_5),\cdots,\ (x_{2k-1}\, x_{k-1})\};$$

$$S_{2k}=\{(x_{2k}\, x_{k+1}),\ (x_{2k}\, x_{k+3}),\ (x_{2k}\, x_{k+5}),\cdots,\ (x_{2k}\, x_{2k-1})\}.$$

Множества S_i и S_{i+1} не имеют смежных элементов в графе G^2 для любого $i=0,\ 1,\cdots,\ 2k$ $(S_{2k+1}=S_0)$. Это следует из структуры множеств S_i и S_{i+1}

$$S_i=\{(x_i\, x_{e(i)}),\ (x_i\, x_{e(i)+2}),\ (x_i\, x_{e(i)+4}),\cdots,\ (x_i\, x_{e(i)+k-2})\};$$

$$S_{i+1}=\{(x_{i+1}\, x_{e(i)+k}),(x_{i+1}\, x_{e(i)+k+2}),(x_{i+1}\, x_{e(i)+k+4}),\cdots,(x_{i+1}\, x_{e(i)+2k-2})\}.$$

Здесь индексы x суммируются по модулю $2k+1$. Но каждое множество S_i содержит $\frac{k}{2}=\frac{\alpha(G)}{2}$ элементов.

Следовательно

$$\alpha(G^2)=|S|=(2\alpha(G)+1)\cdot\frac{\alpha(G)}{2}=\alpha^2(G)+\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

Теорема для четного $k=\alpha(G)$ доказана.

а) Пусть $\alpha(G)$—нечетное число.

Тогда возьмем за S_i следующие множества:

$$S_0=\{(x_0x_0),\ (x_0x_2),\ (x_0x_4),\cdots,\ (x_0x_{k-1})\};$$

$$S_1=\{(x_1x_{k+1}),\ (x_1x_{k+3}),\ (x_1x_{k+5}),\cdots,\ (x_1x_{2k-2})\};$$

$$S_2=\{(x_2\, x_{2k}),\ (x_2x_1),\ (x_2x_3),\cdots,\ (x_2\, x_{k-2})\};$$

$$S_3=\{(x_3x_k),\ (x_3\, x_{k+2}),\ (x_3\, x_{k+4}),\cdots,\ (x_3\, x_{2k-3})\};$$

. . . .

. . . .

$$S_{2k-1}=\{(x_{2k-1}\, x_2),\ (x_{2k-1}\, x_4),\ (x_{2k-1}\, x_6),\cdots,\ (x_{2k-1}\, x_{k-1})\};$$

$$S_{2k}=\{(x_{2k}\ x_{k+1}),\ (x_{2k}\, x_{k+3}),\ (x_{2k}\, x_{k+5}),\ \cdots,(x_{2k}\, x_{2k-2})\},$$

т. е. для $i=0,\ 1,\cdots,\ k-1$

$$S_{2i}=\{(x_{2i}\, x_{e(2i)}),\ (x_{2i}\, x_{e(2i)+2}),\cdots,(x_{2i}\, x_{e(2i)+k-1})\};$$

$$S_{2i+1}=\{(x_{2i+1}\, x_{e(2i)+k+1}),(x_{2i+1}\, x_{e(2i)+k+3}),\cdots,(x_{2i+1}\, x_{e(2i)+2k-2})\}.$$

Число элементов множества S_{2i} равно $\frac{k+1}{2}$, $S_{2i+1}-\frac{k-1}{2}$ $(i=0,\ 1,\cdots$ $\cdots,\ k-1)$, а $S_{2k}-\frac{k-1}{2}$.

Ясно, что множества S_i и S_{i+1} $(i=0,\ 1,\cdots,\ 2k;\ S_{2k+1}=S_0)$ не имеют смежных элементов, и множество $S=\bigcup\limits_{i=0}^{2k} S_i$ является внутренне устойчивым. Легко видеть, что $|S|=k^2+\frac{k-1}{2}$, или, что то же самое

$$\alpha(G^2)=\alpha^2(G)+\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Если $G=(X, U)$—простой цикл нечетной длины, то

$$\alpha(G^n)\geqslant\alpha^n(G)+\alpha^{n-2}(G)\cdot\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right].$$

Последнее неравенство вытекает из теоремы 2 и из того, что $\alpha(G\times H)\geqslant\alpha(G)\cdot\alpha(H)$ для любых G и H.

Из этого следствия получается нижняя оценка для C_0-пропускной способности канала при нулевой ошибке. По Шеннону

$$C_0=\sup_n\frac{1}{n}\log_2\alpha(G^n).$$

Для простых циклов нечетной длины

$$C_0\geqslant\sup_n\frac{1}{n}\log_2\left(\alpha^n(G)+\alpha^{n-2}(G)\cdot\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right]\right),$$

однако легко видеть, что

$$\sup_n\frac{1}{n}\log_2\left(\alpha^n(G)+\alpha^{n-2}(G)\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right]\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\alpha^2(G)+\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right]\right).$$

Получается

Следствие 2. Для простых циклов нечетной длины

$$C_0\geqslant\frac{1}{2}\log_2\left(\alpha^2(G)+\left[\frac{\alpha(G)}{2}\right]\right).$$

Если $\alpha(G)=2$, т. е. G—простой цикл из пяти вершин (пример Шеннона), то получаем $C_0\geqslant\frac{1}{2}\log_2 5$ т. е. известную оценку, полученную Шенноном.

В заключение заметим, что нахождение числа внутренней устойчивости простого цикла длины e эквивалентно следующей задаче: найти максимальное число не бьющих друг друга королей, которых можно поставить на торе, образованном из квадратной доски, имеющей e^2 клеток. Это число при четном e равно $\left(\frac{e}{2}\right)^2$, а при нечетном e: $\left(\frac{e-1}{2}\right)^2+\left[\frac{e-1}{4}\right]$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 25 XII.1970

Ա. Գ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ. Պարզ ցիկլերի դեկարտյան արտադրյալի ներքին կայունության թվի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում հետազոտված է O. Օրեի կողմից [4] առաջարկած պարզ ցիկլերի դեկարտյան արտադրյալի ներքին կայունության թիվը։ Հատկապես շատ կարևոր է այդ հարցը հետազոտել կենտ երկարություն ունեցող ցիկլերի դեպքում, քանի որ այդ դասը չի մտնում Շեննոնի կողմից նկարագրված գրաֆների դասի մեջ։ Նշված դասի համար ստացված է $\alpha(G^3) = \alpha^3(G) + \left[\frac{\alpha(G)}{2}\right]$ *կապը։ Այստեղից ստացվում է ներքին գնահատական անցուղու թողունակության համար զրո սխալի դեպքում։*

A. G. MARKOSIAN. *On number of internal stability of simple cycles of Cartesian factors* (summary)

The paper investigats the number of internal stability of simple cycles of Cartesian factors suggested by O. Ore [4].

Especially important is the problem for cycles of odd length since that class does not evter in the class of graphs descrided by Shennon.

For this class it is shown, that $\alpha(G^3) = \alpha^3(G) + \left[\frac{\alpha(G)}{2}\right]$. This leads to the internal evaluation for the zero error capacity of a noisy channel.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Шеннон.* Работы по теории информации и кибернетике, Изд. ИЛ, М., 1963.
2. К. *Берж.* Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.
3. *А. Г. Маркосян.* О числе внутренней устойчивости в декартовом произведении графов, ДАН АрмССР, LII, № 1, 1971, 14–18.
4. *О. Оре.* Теория графов, Изд. Наука, М., 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

Г. С. МИКАЕЛЯН

О СИЛОВСКИХ LQ-БАЗАХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП

В статье вводится понятие силовской LQ-базы (обобщение понятия силовской Σ-базы, см. [7]), доказываются некоторые теоремы о сопряженности таких баз. Часть из этих теорем является обобщением известных результатов о сопряженности силовских П и θ-баз, полученных ранее другими авторами.

Автор приносит глубокую благодарность профессору А. Г. Курошу за руководство работой.

1°. Пусть $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — расщепляемая система силовских классов (см. [2]). Легко показать (см. [7]), что в этом случае, если мощность $|M|$ множества M больше единицы, то силовский класс $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$, порожденный всеми классами Σ_α, $\alpha\in M$, т. е. минимальный силовский класс, содержащий все классы Σ_α, $\alpha\in M$, будет некоторым классом периодических групп. Следовательно, если $|M|>1$, то ставя в соответствие силовскому классу, порожденному расщепляемой системой силовских классов $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$, множество тех простых чисел, которые входят в порядок хотя бы одного $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$ — элемента*, мы получаем однозначное соответствие между указанными системами силовских классов и множествами простых чисел. Такое соответствие не является взаимно однозначным. Если множество простых чисел, соответствующих классу $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$ указанным выше образом есть П, то обозначим через $\overline{\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}}$ класс всех П-групп. Ясно, что всегда $\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}\subset\overline{\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}}$. Теперь для всякого $N\subseteq M$, $|N|>1$ берем такой силовский класс L_N, что

$$\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}\subseteq L_N\subseteq\overline{\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}}. \tag{1}$$

Обозначим $L=\langle L_N|N\subseteq M,\ |N|>1\rangle$. Пусть задана некоторая группа G. Систему подгрупп $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ группы G назовем ее **силовской LQ-базой**, если

1). A_α является силовской Σ_α-подгруппой группы G для всех $\alpha\in M$;

2). для всякого $N\subseteq M$, $|N|>1$, $\{A_\beta|\beta\in N\}\in L_N$.

Если кроме указанных двух свойств имеет место еще

3). $G=\{A_\alpha|\alpha\in M\}$,

то заданную силовскую LQ-базу будем называть **полной силовской LQ-базой** группы G.

Если для всякого $N\subseteq M$, $|N|>1$, $L_N=\overline{\{\Sigma_\beta|\beta\in N\}}$ $(L_N=\{\Sigma_\beta|\beta\in N\})$, то силовскую LQ-базу будем называть **верхней (нижней) силовской Q-базой**.

* Для произвольного класса Σ элемент a называется Σ-элементом, если $\{a\}\in\Sigma$.

Понятие Σ-базы из работы [7] совпадает с понятием верхней силовской Q-базы.

Как уже отмечалось, силовские классы L_N из (1) можно взять не однозначным образом. Следовательно, для заданной расщепляемой системы силовских классов Q соответствующая ей система L также определяется неоднозначно. Упорядочим множество $\mathfrak{M}_Q$ всех таких L следующим образом: если L', $L'' \in \mathfrak{M}_Q$, то положим $L' \leqslant L''$ тогда и только тогда, когда для всех $N \subseteq M$ $L'_N \subseteq L''_N$, где L'_N (L''_N) — силовский класс из L' (L''), соответствующий множеству N. Очевидно, что при $L' \leqslant L''$ каждая силовская $L'Q$-база будет силовской $L''Q$-базой данной группы. Приведем пример, показывающий, что обратное утверждение не всегда верно.

Сначала сформулируем одну лемму.

Лемма 1.1. *Если* Π-*произвольное множество простых чисел, то*

1) *класс всех локально конечных* Π-*групп будет силовским.*

2) *класс всех локально конечных и локально разрешимых* Π-*групп будет силовским.*

Доказательство просто. Оно проводится проверкой свойств силовского класса.

Берем теперь знакопеременную группу A_5 порядка 60, в которой содержатся подгруппы A и B порядков 5 и 12 соответственно. Обозначим через $L_{<2,3,5>}$ и $L'_{<2,3,5>}$ соответственно классы локально конечных и локально разрешимых $<2, 3, 5>$-групп. По лемме 1.1 эти классы силовские и для них выполняется условие (1). Обозначим далее $L = < L_{<2,3,5>} >$, $L' = < L'_{<2,3,5>} >$. Система $<A, B>$ будет силовской $L<5, <2, 3>>$-базой и не будет $L'<5, <2, 3>>$-базой группы A_5, так как $A_5 = \{A, B\}$ и A_5 неразрешима.

2°. Лемма 2.1. *Пусть* Σ — *некоторый силовский класс,* G — *периодическая группа,* A — *ее силовская* Σ-*подгруппа,* B — *нормальная в* G *подгруппа, содержащаяся в нормализаторе подгруппы* A. *Тогда, если в группе* $\overline{G} = G/B$ *каждая* Σ-*подгруппа является* N-*группой (см.* [1]), *то* $\overline{A} = AB/B$ *будет силовской* Σ-*подгруппой в ней.*

Доказательство. Пусть $\overline{A}$ — собственная подгруппа некоторой Σ-подгруппы $\overline{A}^*$ группы $\overline{G}$. Тогда по условию существует такой элемент $\overline{a}^* \in \overline{A}^*$, $\overline{a}^* \notin \overline{A}$, что $\overline{a}^{*-1} \overline{A} \overline{a}^* = \overline{A}$. Отсюда для всякого элемента a из A получаем

$$a^{*-1} a a^* = a_1 b, \tag{2}$$

где $a_1 \in A$, $b \in B$, a^* — некоторый прообраз элемента $\overline{a}^*$ при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$. Учитывая следствие 2 из [7], можно считать, что $\{a^*\} \in \Sigma$. Из равенства (2) следует, что элемент a^* содержится в нормализаторе подгруппы A в G и, следовательно в A. Таким образом $\overline{a}^* \in \overline{A}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.2. *Пусть Σ—некоторый силовский класс, G—периодическая группа, A—ее силовская Σ-подгруппа, B—нормальная в G подгруппа, содержащейся в нормализаторе подгруппы A в G. Тогда, если в группе $\overline{G}=G/B$ каждая Σ-подгруппа является N-группой, то из сопряженности в группе $\overline{G}$ силовских Σ-подгрупп следует сопряженность таких подгрупп в группе G.*

Доказательство. Пусть C—любая силовская Σ-подгруппа группы G. Обозначим $\overline{C}=CB/B$. Так как $\overline{A}$—силовская Σ-подгруппа группы $\overline{G}$ (по лемме 2.1), то ясно, что для некоторого $\overline{g}\in\overline{G}$, $\overline{g}^{-1}\overline{C}\overline{g}\subseteq\subseteq\overline{A}$ или $g^{-1}cg=ab$, где $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, g—некоторый прообраз элемента $\overline{g}$ в G при естественном гомоморфизме $G\to\overline{G}$. Из последнего равенства следует, что $g^{-1}cg\in A$, т. е. $g^{-1}Cg=A$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.3. *Если периодическая группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ с таким силовским нормализатором S (см. [4], [7]), что $\{\overline{A}_\alpha|\alpha\in M\}$, где $\overline{A}_\alpha=A_\alpha S/S$ является силовской L_M-подгруппой группы $\overline{G}=G/S$, то $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$—силовская L_M-подгруппа группы G.*

Доказательство. Предположим, что $\{A_\alpha|\alpha\in M\}\subseteq A$, где A—некоторая L_M-подгруппа группы G. Обозначим $S'=S\cap A$. Имеем $AS/S\simeq A/S'$. Отсюда следует, что $\{A_\alpha|\alpha\in M\}S'/S'$—силовская L_M-подгруппа группы A/S'. Но $A\in L_M$. Следовательно $\{A_\alpha|\alpha\in M\}S'=A$.

Пусть теперь $a\in A$. Тогда $a=a's'$, где $a'\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, $s'\in S'$. Покажем, что

$$\{s'\}=\{\{s'\}\cap A_\alpha|\alpha\in M\}. \tag{3}$$

Из $\{s'\}\in L_M\subseteq\{\Sigma_\alpha|\alpha\in M\}$ следует, что группа $\{s'\}$ разлагается в прямое произведение циклических подгрупп, содержащихся в классах Σ_α, $\alpha\in M$. Но каждая A_α содержит все Σ_α-элементы своего нормализатора. Следовательно (3) верно. Из него получаем $s'\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ или $a\in\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$. Лемма доказана.

3°. Теорема 3.1. *Если периодическая группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ с таким силовским нормализатором S, что в группе $\overline{G}=G/S$ для всякого $\alpha\in M$ каждая Σ_α-подгруппа является N-группой и имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп, то из сопряженности в $\overline{G}$ силовских LQ-баз следует сопряженность таких баз в группе G.*

Доказательство. Пусть $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$—произвольная силовская LQ-база группы G. По лемме 2.2 подгруппы A_α и B_α сопряжены для всех $\alpha\in M$. Следовательно S будет силовским нормализатором силовской LQ-базы $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$. По лемме 2.1 $\langle\overline{B}_\alpha|\alpha\in M\rangle$, где $\overline{B}_\alpha=B_\alpha S/S$, будет силовской LQ-базой группы $\overline{G}$. По предположению существует такой элемент $\overline{g}$ из $\overline{G}$, что $\overline{g}^{-1}\overline{B}_\alpha\overline{g}=\overline{A}_\alpha$ для всех $\alpha\in M$. Отсюда легко получается, что $g^{-1}B_\alpha g=A_\alpha$, где g—некоторый прообраз элемента $\bar{g}$ в G при естественном гомоморфизме $G \to \bar{G}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть группа G обладает некоторой полной силовской LQ-базой с таким силовским нормализатором S, что для всякого $\alpha \in M$ в группе $\bar{G} = G/S$ имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп, и каждая Σ_α-подгруппа является N-группой. Тогда из сопряженности в группе $\bar{G}$ полных силовских LQ-баз следует сопряженность таких баз в группе G.

Действительно, если мощность $|M|$ множества M равна единице, то все очевидно, если же $|M|>1$, то группа G будет периодической, а ее полные силовские LQ-базы переходят в полные в $\bar{G}$ и здесь достаточно требовать сопряженности полных силовских LQ-баз группы $\bar{G}$ (см. доказательство теоремы 3.1).

Следствие 3.2 (П. А. Гольберг [4]). Если группа G обладает полной силовской базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S локально конечна с условием минимальности, то в G имеет место сопряженность полных силовских баз.

Действительно, в локально конечной группе с условием минимальности, обладающей полной силовской базой, имеет место сопряженность полных силовских баз и силовских p-подгрупп (см. [4]), а локально конечная p-группа с условием минимальности будет p-группой Черникова.

Пусть Π_i — некоторое множество простых чисел, $i=1, 2, \cdots$ и $\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Следствие 3.3. Если периодическая группа G обладает силовской $\theta = <\Pi_1, \Pi_2, \cdots>$-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S конечна, разрешима и каждая ее Π_i-подгруппа, $i=1, 2, \cdots$, нильпотентна, то в G имеет место сопряженность силовских θ-баз.

Действительно, в группе G/S имеет место сопряженность силовских Π_i-подгрупп, $i=1, 2, \cdots$, по известной теореме Ф. Холла (см. [8]). С другой стороны, в каждой конечной разрешимой группе имеет место сопряженность силовских (холловских) θ-баз. Действительно, пусть $<A_1, \cdots, A_n>$ и $<B_1, \cdots, B_n>$ — силовские (холловские) θ-базы конечной разрешимой группы A. Ясно, что $\{A_1, \cdots, A_n\}$ и $\{B_1, \cdots, B_n\}$ будут силовскими (холловскими) $(\Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n)$-подгруппами группы A. По упомянутой теореме Холла эти подгруппы сопряжены, т. е. $g^{-1}\{A_1, \cdots, A_n\} g = \{B_1, \cdots, B_n\} = B$, где $g \in A$. По лемме 2.2 из [5] в разрешимой группе B имеет место сопряженность полных силовских (холловских) θ-баз $<g^{-1} A_1 g, \cdots, g^{-1} A_n g>$ и $<B_1, \cdots, B_n>$.

Теорема 3.2. *Пусть периодическая группа G обладает силовской LQ-базой $<A_\alpha | \alpha \in M>$ с таким силовским нормализатором S, что в группе $\bar{G} = G/S$ имеет место:*

1) *сопряженность силовских L_M-подгрупп и Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$,*

2) *Σ_α-подгруппы являются N-группами для всех $\alpha \in M$,*

3) *подгруппы каждой ее силовской LQ-базы порождают силовскую L_M-подгруппу.*

Тогда из сопряженности полных силовских LQ-баз группы $\{\overline{A}_\alpha|\alpha\in M\}$, где $\overline{A}_\alpha=A_\alpha S/S$, следует сопряженность силовских LQ-баз группы G.

Доказательство. Берем произвольную силовскую LQ-базу $<B_\alpha|\alpha\in M>$ группы G. По лемме 2.2 ее силовский нормализатор совпадает с S и согласно лемме 2.1 $<\overline{B}_\alpha|\alpha\in M>$, где $\overline{B}_\alpha=B_\alpha S/S$, является силовской LQ-базой группы $\overline{G}$. Следовательно $\{\overline{B}_\alpha|\alpha\in M\}$ — силовская L_M-подгруппа группы $\overline{G}$. По предположению подгруппы $\{\overline{A}_\alpha|\alpha\in M\}$ и $\{\overline{B}_\alpha|\alpha\in M\}$ сопряжены в $\overline{G}$, т. е. существует такой элемент $\overline{x}\in\overline{G}$, что

$$\overline{x}^{-1}\{\overline{B}_\alpha|\alpha\in M\}\,\overline{x}=\{\overline{A}_\alpha|\alpha\in M\}.$$

Отсюда следует, что для всякого $b\in\{B_\alpha|\alpha\in M\}$ существуют такие $a\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, $s\in S$, что $x^{-1}bx=as$, где x—прообраз элемента $\overline{x}$ в G.

Покажем, что

$$S\subseteq N_G(\{A_\alpha|\alpha\in M\}). \tag{4}$$

Действительно, пусть $a\in\{A_\alpha|\alpha\in M\}$. Тогда существуют такие $a_k\in A_{\alpha_k}$, $k=1,\cdots,m$, что $a=a_1\cdots a_m$. Отсюда, для всякого $s\in S$ имеем

$$s^{-1}as=s^{-1}a_1s\cdots s^{-1}a_ms. \tag{5}$$

Но для всех $\alpha\in M$ $s\in N_G(A_\alpha)$. Следовательно правая часть равенства (5) содержится в $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ и, тем самым, (4) доказано. Теперь из (4) следует, что as и следовательно $x^{-1}bx$ содержатся в нормализаторе подгруппы $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ в G. Но по лемме 2.3 $\{A_\alpha|\alpha\in M\}$ — силовская L_M-подгруппа в G и $\{b\}\in L_M$ (значит и $\{x^{-1}bx\}\in L_M$). Отсюда следует, что $\{x^{-1}bx\}\subseteq\{A_\alpha|\alpha\in M\}$, т. е. $x^{-1}\{B_\alpha|\alpha\in M\}x=\{A_\alpha|\alpha\in M\}$. Обозначим

$$A=\{A_\alpha|\alpha\in M\}=x^{-1}\{B_\alpha|\alpha\in M\}x=\{x^{-1}B_\alpha x|\alpha\in M\}.$$

В группе $\overline{A}=AS/S$ полные силовские LQ-базы $<\overline{A}_\alpha|\alpha\in M>$ и $<\overline{x}^{-1}\overline{B}_\alpha\overline{x}|\alpha\in M>$, где $\overline{x}=xS$, сопряжены. Отсюда, как и в теореме 3.1, нетрудно вывести сопряженность силовских LQ-баз $<A_\alpha|\alpha\in M>$ и $<B_\alpha|\alpha\in M>$ в группе G. Теорема доказана.

Следствие 3.4. Если периодическая группа G обладает силовской Π-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S конечна и в ней имеет место сопряженность силовских Π-подгрупп, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

Действительно, во всякой конечной группе имеет место сопряженность силовских p-подгрупп и полных силовских баз, а подгруппы силовской Π-базы порождают силовскую Π-подгруппу.

4°. Пусть $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — расщепляемая система силовских классов. В работе Б. И. Плоткина [2] группа названа Q-разложимой, если она разлагается в прямое произведение своих Σ_α-подгрупп, $\alpha\in M$. В этой же работе (для более широких классов групп), показано, что подгруппа и фактор-группа Q-разложимой группы также Q-разложимы. С другой стороны, произведение двух Q-разложимых инвариантных подгрупп произвольной группы опять Q-разложима. Q-разложимо и объединение возрастающей последовательности Q-разложимых подгрупп. Следовательно, в любой группе G существует единственная максимальная Q-разложимая нормальная подгруппа, которую назовем Q-радикалом данной группы и обозначим через $R_Q(G)$.

Как известно (см. [9], [2]), максимальная нормальная Σ-подгруппа (Σ-радикал) произвольной группы, где Σ — некоторый силовский класс, совпадает с пересечением всех силовских Σ-подгрупп этой группы. Отсюда следует, что Q-радикал $R_Q(G)$ группы G совпадает с подгруппой, порожденной всеми подгруппами R_α, где R_α Σ_α-радикал группы G. Но Q—расщепляемая система силовских классов. Следовательно $R_Q(G)$ совпадает с прямым произведением подгрупп R_α, т. е.

$$R_Q(G)=\prod_{\alpha\in M}R_\alpha.$$

Для дальнейшего полезно заметить, что если группа G обладает силовской LQ-базой $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$, то

$$R_Q(G)\subseteq\{A_\alpha|\alpha\in M\}.$$

Лемма 4.1. *Если группа G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса, то она обладает и Q-разложимой инвариантной подгруппой конечного индекса.*

Доказательство. Пусть A — Q-разложимая подгруппа конечного индекса группы G. Обозначим

$$S=\bigcap_{x\in G}x^{-1}[N_G(A)]\,x.$$

Ясно, что подгруппа S нормальна в G и имеет конечный индекс в ней. Подгруппа $C=A\cap S$ Q-разложима и нормальна в S. Следовательно $C\subseteq R_Q(S)$. Но C обладает конечным индексом в G, такой будет и $R_Q(S)$. С другой стороны, $R_Q(S)$ нормальна в G и, тем самым, будет искомой инвариантной подгруппой.

Лемма 4.2. *Пусть $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$ — силовские LQ-базы группы G, а $G'=\{A_\alpha, B_\alpha|\alpha\in M\}$ и $\overline{G}'=G'/R_Q(G)$ — соответственно локально конечная и конечная группы. Тогда из сопряженности силовских LQ-баз во всех конечных подгруппах группы G' следует сопряженность в ней заданных силовских LQ-баз.*

Доказательство. Из конечности группы $\overline{G}'$ следует, что существует только конечное число α (скажем $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$), для которых A_α и B_α не являются нормальными в G. Группы

$A_{\alpha_i}R_Q(G)/R_Q(G) \simeq A_{\alpha_i}/A_{\alpha_i} \cap R_Q(G)$, $B_{\alpha_i}R_Q(G)/R_Q(G) \simeq B_{\alpha_i}/B_{\alpha_i} \cap R_Q(G)$ конечны и $A_{\alpha_i} \cap R_Q(G) = B_{\alpha_i} \cap R_Q(G)$. Обозначим $A_{\alpha_i} \cap R_Q(G) = H_i$. Ясно, что существуют такие конечные подгруппы $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$, что

$$A_{\alpha_i} = A^{(i)} H_i, \; B_{\alpha_i} = B^{(i)} H_i, \; i=1, \cdots, n. \quad (6)$$

Берем в конечной группе $D = \{A^{(i)}, B^{(i)} | i=1, \cdots, n\}$ некоторую силовскую Σ_{α_i}-подгруппу $\overline{A}^{(i)}$, содержащую $A^{(i)}$. Пусть $a \in \overline{A}^{(i)}$. Тогда $\{a\} \in \Sigma_{\alpha_i}$ и

$$\{a, A_{\alpha_i}\}/H_i = \{a, A^{(i)}\} H_i/H_i \simeq \{a, A^{(i)}\}/\{a, A^{(i)}\} \cap H_i. \quad (7)$$

Следовательно $\{a, A_{\alpha_i}\} \in \Sigma_{\alpha_i}$, т. е. $a \in A_{\alpha_i}$. Аналогично получаем, что $\overline{B}^{(i)} \subseteq B_{\alpha_i}$, где $\overline{B}^{(i)}$ — силовская Σ_{α_i}-подгруппа группы D, содержащая $B^{(i)}$. Далее, если D_α, D'_α — две силовские Σ_α-подгруппы группы D, $\alpha \in M$, $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, то $D_\alpha, D'_\alpha \subseteq C_\alpha$, где C_α — силовская Σ_α-подгруппа в G. Мы получаем, что для указанных α силовские Σ_α-подгруппы группы D единственны. Обозначим для $\alpha \in M$ такую подгруппу через D_α (для некоторых α возможно и $D_\alpha = 1$). Из сказанного следует, что системы подгрупп

$$\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha | i=1, \cdots, n \rangle, \; \langle \overline{B}^{(i)}, D_\alpha | i=1, \cdots, n \rangle$$

будут силовскими LQ-базами конечной группы D. Следовательно существует такой элемент $d \in D$, что

$$d^{-1} \overline{A}^{(i)} d = \overline{B}^{(i)}, \; i=1, \cdots, n.$$

Покажем, что элемент d трансформирует базу $\langle B_\alpha | \alpha \in M \rangle$ в базу $\langle B_\alpha | \alpha \in M \rangle$. Действительно, пусть $a_i \in A_{\alpha_i}$. Тогда из (6) следует, что $a_i = a'_i h_i$, где $a'_i \in A_{\alpha_i}$, $h_i \in H_i$. Имеем $d^{-1} a_i d = (d^{-1} a'_i d) \times (d^{-1} h_i d)$. Ясно, что $d^{-1} a'_i d \in \overline{B}^{(i)}$, $d^{-1} h_i d \in H_i$. Но $\overline{B}^{(i)} \subseteq B_{\alpha_i}$, $H_i \subseteq B_{\alpha_i}$. Следовательно, $d^{-1} a_i d \in B_{\alpha_i}$, т. е. для всех $i = 1, \cdots, n$ $d^{-1} A_{\alpha_i} d = B_{\alpha_i}$. Так как для любого $\alpha \in M$, $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $C_\alpha \lhd G$, то $d^{-1} C_\alpha d = C_\alpha$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 4.1. Пусть локально конечная группа G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса. Тогда из сопряженности во всех конечных подгруппах группы G силовских LQ-баз следует сопряженность таких баз в группе G.

Действительно, по лемме 4.1 группа G обладает Q-разложимой инвариантной подгруппой конечного индекса. Остается применить лемму 4.2 к произвольным двум силовским LQ-базам группы G.

Пусть $Q = \langle \Sigma_\alpha | \alpha \in M \rangle$ — расщепляемая система силовских классов. Для всякого $\alpha \in M$ взяв в качестве Σ_α класс всех p_α-групп, где p_α — простое число и $p_\alpha \neq p_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, приходим к понятию $S(\Pi)$-подгруппы ($S(\Pi)$-радикала) группы, где Π — множество всех p_α, $\alpha \in M$ (см. [6]), т. е. такой подгруппы (максимальной инвариантной подгруппы), которая разлагается в прямое произведение своих p_α-подгрупп.

Аналогично определяется θ-разложимая подгруппа, где $\theta = \langle \Pi_1, \Pi_2, \cdots \rangle$, Π_i —некоторое множество простых чисел, $i=1, 2, \cdots$, при $i \neq j$ $\Pi_i \cap \cap \Pi_j = \varnothing$.

Следствие 4.2. Если периодическая локально разрешимая группа G обладает θ-разложимой ($S(\Pi)$-разложимой) подгруппой конечного индекса, то в ней имеет место сопряженность силовских θ-баз (Π—баз).

Лемма 4.3. *Если локально конечная группа G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса, и если в каждой ее конечной подгруппе:* а) *имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз,* б) *подгруппа, порожденная всеми членами любой ее силовской LQ-базы является силовской L_M-подгруппой, то в группе G имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз.*

Доказательство. Пусть силовские LQ-базы $\langle A_\alpha | \alpha \in M \rangle$ и $\langle B_\alpha | \alpha \in M \rangle$ являются полными для группы G. Тогда ясно, что $G \in L_M$. С другой стороны, мы имеем силовские LQ-базы $\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha \rangle$ и $\langle \overline{B}^{(i)}, D_\alpha \rangle$ конечной группы D (см. лемму 4.2). По предположению б) подгруппы $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\}$ и $\{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\}$ являются силовскими L_M-подгруппами группы D. Но $D \subseteq G$. Следовательно $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\} = \{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\} = D$ и вышеупомянутые базы будут полными для D. По предложению а) они сопряжены. Далее как в лемме 4.2.

Следствие 4.3. (Stonehewer [10]). Если периодическая локально разрешимая группа G обладает локально нильпотентной инвариантной подгруппой конечного индекса, то в ней имеет место сопряженность силовских баз.

Лемма 4.4. *Пусть в каждой конечной подгруппе локально конечной группы G имеет место* а) *сопряженность полных силовских LQ-баз и силовских L_M-подгрупп,* б) *подгруппы каждой ее силовской LQ-базы порождают силовскую L_M-подгруппу. Тогда, если G обладает Q-разложимой подгруппой конечного индекса, то в ней имеет место сопряженность силовских LQ-баз.*

Доказательство. Из условия б) следует, что подгруппы $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\}$ и $\{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\}$ (см. лемму 4.2) будут силовскими L_M-подгруппами конечной группы D. По предположению а) они сопряжены в D, т. е.

$$x^{-1}\{\overline{B}^{(i)}, D_\alpha\}x = \{x^{-1}\overline{B}^{(i)}x, D_\alpha\} = \{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha\} = A,$$

где $A \subseteq D$, $x \in D$. Мы получаем полные силовские LQ-базы $\langle \overline{A}^{(i)}, D_\alpha \rangle$ и $\langle x^{-1}\overline{B}^{(i)}x, D_\alpha \rangle$ конечной группы A. По предположению они сопряжены. Далее как в лемме 4.2.

Следствие 4.4. Если локально конечная группа G обладает $S(\Pi)$-подгруппой конечного индекса и в каждой ее конечной подгруппе имеет место сопряженность силовских Π-подгрупп, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

5. Пусть $Q=\langle\Sigma_\alpha|\alpha\in M\rangle$—расщепляемая система силовских классов и $Q'=\langle\Sigma_\beta|\beta\in F\subseteq M\rangle$—ее произвольная подсистема.

Лемма 5.1. *Пусть $\langle A_\beta|\beta\in F\rangle$ и $\langle B_\beta|\beta\in F\rangle$—силовские LQ'-базы группы G. Группа $G'=\{A_\beta,\ B_\beta|\beta\in F\}$ локально конечна, а ее образ $\overline{G}$ при естественном гомоморфизме $G\to G/R_Q(G)$ конечен. Тогда из сопряженности в любой конечной подгруппе группы G' силовских LQ'-баз следует сопряженность заданных баз в группе G'.*

Доказательство. В силу изоморфизма

$$G'R_Q(G)/R_Q(G)\simeq G'/G'\cap R_Q(G)=\overline{G}'$$

группа $\overline{G}'$ конечна. Следовательно существует только конечное число $\beta\in F$, для которых A_β не нормальна в G'. Далее

$$A_\beta\cap(G'\cap R_Q(G))=B_\beta\cap(G'\cap R_Q(G))$$

и здесь получаются равенства вида (6). Далее как в лемме 4.2.

Следствие 5.1. Если локально конечная и локально П-отделимая (см. [6]) группа обладает $S(\Pi)$-подгруппой конечного индекса и $\Pi'\subseteq\Pi$, то в ней имеет место сопряженность силовских Π'-баз.

Действительно, в любой конечной П-отделимой группе имеет место сопряженность силовских Π'-баз по известной теореме Гольберга (см. [3]).

Лемма 5.2. *Пусть G—некоторая группа, $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$—ее силовские LQ-базы и $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ обладает конечным числом сопряженных в G. Тогда если группа $\{A_\alpha,\ B_\alpha|\alpha\in M\}$ локально конечна, то группа $\{A_\alpha,\ B_\alpha|\alpha\in M\}/R_Q(G)$ конечна.*

Доказательство. Ясно, что для каждого $\alpha\in M$ A_α обладает конечным числом сопряженных в G. Тогда по лемме 2 работы [2] группа $\{A_\alpha, B_\alpha\}/R_\alpha$ конечна. С другой стороны, конечна и группа $\{A_\alpha/\alpha\in M\}\ S/S$, где S—силовский нормализатор силовской LQ-базы $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$. Но $A_\alpha\subseteq S$ влечет нормальность A_α в G. Действительно, из $S\lhd G$ следует, что для всякого элемента g из G $g^{-1}A_\alpha g\subseteq S$. Но $g^{-1}A_\alpha g\in\Sigma_\alpha$. Следовательно, так как $S\subseteq N_G(A_\alpha)$ и A_α содержит все Σ_α-элементы своего нормализатора, $g^{-1}A_\alpha g=A_\alpha$. Таким образом, существует только конечное число таких α, для которых A_α не является нормальной в G. Остается заметить, что $\{A_\alpha,\ B_\alpha|\alpha\in M\}$ локально конечна.

Лемма 5.3. *Пусть в группе G силовская LQ-база $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ имеет конечное число сопряженных и группа $G'=\{A_\alpha,\ B_\alpha|\alpha\in M\}$, где $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$—некоторая силовская LQ-база в G, является локально конечной. Тогда из сопряженности силовских LQ-баз в каждой конечной подгруппе группы G' следует сопряженность в ней заданных баз $\langle A_\alpha|\alpha\in M\rangle$ и $\langle B_\alpha|\alpha\in M\rangle$.*

Доказательство. Нужно воспользоваться леммами 5.2 и 4.2.

Следствие 5.2. Пусть локально конечная группа G обладает силовской LQ-базой с конечным числом сопряженных. Тогда из сопряженности силовских LQ-баз в каждой конечной подгруппе группы G следует сопряженность таких баз в самой группе G.

Следствие 5.3. Если периодическая локально разрешимая (локально конечная и локально П-отделимая) группа G обладает силовской θ-базой (П′-базой, $\Pi' \subseteq \Pi$) с конечным числом сопряженных, то в ней имеет место сопряженность силовских θ-баз (П′-баз).

6°. Теорема 6.1. *Пусть периодическая группа G обладает силовской LQ-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S локально конечна с Q-разложимой подгруппой конечного индекса, и каждая ее Σ_α-подгруппа является N-группой для всех $\alpha \in M$. Тогда из сопряженности в каждой конечной подгруппе группы G/S силовских LQ-баз и Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$ следует сопряженность силовских LQ-баз группы G.*

Доказательство. В силу следствия 4.1 в группе $\overline{G}=G/S$ имеет место сопряженность силовских LQ-баз. Покажем, что в ней имеет место также сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha \in M$. По лемме 4.1 в $\overline{G}$ существует Q-разложимая инвариантная подгруппа H конечного индекса. Обозначим через H_α силовскую Σ_α-подгруппу группы H. Ясно, что она будет характеристической в H и, следовательно, $H_\alpha \lhd \overline{G}$. Пусть теперь A_α и B_α—любые две силовские Σ_α-подгруппы группы $\overline{G}$. Мы имеем

$$A_\alpha H/H \simeq A_\alpha/A_\alpha \cap H = A_\alpha/H_\alpha, \quad B_\alpha H/H \simeq B_\alpha/B_\alpha \cap H = B_\alpha/H_\alpha.$$

Но группа $\overline{G}/H$ конечна. Конечны, следовательно, и группы A_α/H_α и B_α/H_α. Ввиду локальной конечности группы $\overline{G}$ существуют такие ее конечные подгруппы A_1 и B_1, что $A_\alpha = A_1 H_\alpha$, $B_\alpha = B_1 H_\alpha$. Обозначим $D=\{A_1, B_1\}$. Пусть A_1' и B_1' — силовские Σ_α-подгруппы конечной группы D, содержащие соответственно A_1 и B_1. Тогда $A_1' \subseteq A_\alpha$, $B_1' \subseteq B_\alpha$. Действительно, пусть, например, $a \in A_1'$. Тогда ввиду изоморфизма

$$\{a, A_\alpha\}/H_\alpha = \{a, A_1\} H_\alpha/H_\alpha \simeq \{a, A_1\}/\{a, A_1\} \cap H_\alpha$$

получаем, $\{a, A_\alpha\} \in \Sigma_\alpha$, т. е. $a \in A_\alpha$, так как A_α—силовская Σ_α-подгруппа в $\overline{G}$. Теперь, по предположению $g^{-1} A_1' g = B_1'$ для некоторого $g \in D$. Тогда для всякого $a \in A_\alpha$ имеем $a = a_1 h$, где $a_1 \in A_1$, $h \in H_\alpha$ или $g^{-1}ag = (g^{-1} a_1 g)(g^{-1} hg)$ и, так как $g^{-1} a_1 g \in B_1' \subseteq B_\alpha$ и $g^{-1} hg \in H_\alpha \subseteq B_\alpha$, то $g^{-1} A_\alpha g = B_\alpha$. Таким образом, для группы G выполняются все условия теоремы 3.1. По этой теореме в G имеет место сопряженность силовских LQ-баз.

Здесь можно привести некоторые следствия о сопряженности силовских θ и П-баз. Например

Следствие 6.1. Если периодическая группа G обладает силовской П-базой с таким силовским нормализатором S, что группа G/S локально разрешима с локально нильпотентной подгруппой конечного индекса, и каждая ее p-подгруппа для всех $p\in\Pi$ является N-группой, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

Теорема 6.2. *Пусть периодическая группа G обладает силовской LQ-базой с таким силовским нормализатором S, что группа $\overline{G}=G/S$ локально конечна с Q-разложимой подгруппой конечного индекса, и каждая ее Σ_α-подгруппа является N-группой для всех $\alpha\in M$. Тогда, если в каждой конечной подгруппе группы $\overline{G}$ имеет место* а) *сопряженность полных силовских LQ-баз, силовских L_M и Σ_α-подгрупп для всех $\alpha\in M$,* б) *подгруппы каждой ее силовской LQ-базы порождают силовскую L_M-подгруппу, то в G имеет место сопряженность силовских LQ-баз.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме здесь доказывается, что в группе $\overline{G}$ имеет место сопряженность силовских Σ_α-подгрупп для всех $\alpha\in M$. Покажем, что в ней имеет место сопряженность силовских L_M-подгрупп. Пусть A и B — две такие подгруппы, а H Q-разложимая инвариантная подгруппа конечного индекса группы $\overline{G}$ (см. лемму 4.1). Ясно, что $H\subseteq A$, $H\subseteq B$.

Так как подгруппы A/H и B/H конечны и A и B локально конечны, то существуют такие конечные подгруппы A_1 и B_1, что $A=A_1H$, $B=B_1H$. Обозначим $D=\{A_1, B_1\}$. Пусть A_1' и B_1' — силовские L_M-подгруппы в D, содержащие A_1 и B_1 соответственно и $a\in A_1'$. Тогда в силу изоморфизма

$$\{a, A\}/H\simeq\{a, A_1\}/\{a, A_1\}\cap H$$

получаем $\{a, A\}\in L_M$ или $a\in A$. Следовательно $A_1'\subseteq A$, $B_1'\subseteq B$. Но по предположению A_1' и B_1' сопряжены в D. Отсюда как и в предыдущей теореме получаем сопряженность подгрупп A и B.

Покажем, что подгруппы каждой силовской LQ-базы группы $\overline{G}$ порождают силовскую L_M-подгруппу. Пусть $<A_\alpha|\alpha\in M>$ — силовская LQ-база в $\overline{G}$ и $\{A_\alpha|\alpha\in M\}\subseteq A\in L_M$. Как уже отмечалось, из конечности группы $\overline{G}/H$ следует, что существует только конечное число таких α (скажем $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$), что A_α не нормально в $\overline{G}$. Ясно, что для всех $i=1,\cdots, n$ группа A_{α_i}/H_i, где $H_i=A_{\alpha_i}\cap H$ конечна. Следовательно, существует такая конечная группа $A^{(i)}$, что $A_{\alpha_i}=A^{(i)}H_i$. Отсюда получаем $A_{\alpha_i}H=A^{(i)}H$ и $\{A_\alpha|\alpha\in M\}=\{A^{(i)}|i=1,\cdots, n\}H$. Далее из конечности группы A/H следует, что $A=A_1H$, где A_1 — конечная группа и можно предполагать, что $\{A^{(i)}|i=1,\cdots, n\}\subseteq A_1$.

Пусть теперь $\overline{A}^{(i)}$ — силовская Σ_{α_i}-подгруппа группы A_1, содержащая $A^{(i)}$. Тогда, если $a\in\overline{A}^{(i)}$, то в силу изоморфизма (7) $\{a, A_{\alpha_i}\}\in\Sigma_{\alpha_i}$ или $a\in A_{\alpha_i}$. Таким образом, система подгрупп $<\overline{A}^{(i)}, D_\alpha|\alpha\in M, \alpha\neq\alpha_i, i=1,\cdots, n>$, где D_α — силовская Σ_α-подгруппа группы A_1, будет силовской LQ-базой в A_1. Но $A_1\in L_M$. Следовательно, по предположению б) $\{\overline{A}^{(i)}, D_\alpha|\alpha\in M, \alpha\neq\alpha_i, i=1,\cdots, n\}=A_1$. С другой стороны, $\bar{A}^{(i)} \subseteq A_{\alpha_i}$ и $D_\alpha \subseteq A_\alpha$, т. е. $A_1 \subseteq \{A_\alpha | \alpha \in M\}$. Но и $H \subseteq \{A_\alpha | \alpha \in M\}$. Следовательно $A = A_1 H \subseteq \{A_\alpha | \alpha \in M\}$ и $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$ — силовская L_H-подгруппа в группе $\bar{G}$.

Покажем, наконец, что в группе $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$ имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз. Так как $\bar{G}$ локально конечна, то такова же и $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$. С другой стороны, $\{A_\alpha | \alpha \in M\} H / H \simeq \{A_\alpha | \alpha \in M\} / \{A_\alpha | \alpha \in M\} \cap H$. Следовательно, $\{A_\alpha | \alpha \in M\} \cap H - Q$-разложимая подгруппа конечного индекса группы $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$. Для группы $\{A_\alpha | \alpha \in M\}$ выполняются все условия леммы 4.3. По этой лемме в ней имеет место сопряженность полных силовских LQ-баз. Таким образом, для группы G справедливы все условия теоремы 3.2.

Приведем одно следствие о сопряженности силовских Π и θ-баз.

Следствие 6.2. Пусть периодическая группа G обладает силовской Π-базой с таким силовским нормализатором S, что G/S локально конечна с локально нильпотентной подгруппой конечного индекса, и каждая ее p-подгруппа является N-группой для всех $p \in \Pi$. Тогда, если в каждой конечной подгруппе группы G/S имеет место сопряженность силовских Π-подгрупп, то в G имеет место сопряженность силовских Π-баз.

Ереванский армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступило 15.XII.1970

Հ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Սիլովյան LQ-բազաների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում մտցվում է սիլովյան LQ-բազայի գաղափարը (սիլովյան Σ-բազայի ընդհանրացում, տես [7])։ Ապացուցվում են թեորեմներ խմբերի LQ-բազաների համալուծության վերաբերյալ, որոնցից մի քանիսը սիլովյան Π և θ-բազաների համալուծության վերաբերյալ Բերի, Գոլբերգի և Ստոնեհեվերի որոշ հայտնի արդյունքների ընդհանրացումներ են։

H. S. MIKAELIAN. *On Silov LQ-bases of groups* (summary)

The concept of Silov LQ-base is introduced, which generalises the notion of Silov Σ-base, and some theorems on conjugation of such bases are proved. Some corollarys on conjugation of Silov Π-bases follow. In part these theorem are generalisations of known results on conjugation of Silov Π and θ-bases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош.* Теория групп, М., 1967.
2. *Б. И. Плоткин.* Абстрактные силовские свойства. Тр. Уральск Эл-мех. института инж. ж/д транспорта, вып. 2, 1959, 7—14.
3. *П. А. Гольберг.* Силовские базы П-отделимых групп, ДАН СССР, 64, 1949, 615—618.
4. *П. А. Гольберг.* Силовские базы бесконечных групп, Мат. сб., 32, 1953, 465—476.
5. *П. А. Гольберг.* Холловские базы некоторых классов групп, Сиб. мат. ж., 1, 1960, 14—44.

6. *П. А. Гольберг.* S-радикал и силовские базы бесконечных групп, Мат. сб., 50, 1960, 25—42.
7. *Г. С. Микаелян.* О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Изв. АН АрмССР, серия „Математика", V, № 2, 1970, 154—161.
8. *P. Hall.* A note on soluble groups, J. London Math. Soc., 3, 1928, 98—105.
9. *W. Specht.* Gruppentheorie, Berlin—Cotingen—Heidelberg, 1956.
10 *S. E. Stonehewer.* Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14 1964, 520—536.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

К. И. ОСКОЛКОВ, С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

К ОЦЕНКАМ П. Л. УЛЬЯНОВА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

1°. Если функция $f(t) \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, то ее интегральным модулем непрерывности в метрике L^p называют функцию

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{ \int_0^{1-h} |f(t) - f(t+h)|^p \, dt \right\}^{1/p}, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

При исследовании вложений классов функций П. Л. Ульянов опирался на следующие установленные им оценки для интегральных модулей непрерывности ([1], лемма 6; [2], леммы 4 и 4′)

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}, f\right) > \frac{1}{9} G_n(f) \tag{1}$$

и при $p > 1$

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant \frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{1+2^{2+\frac{1}{p}}} F_n(f), \tag{2}$$

где

$$G_n(f) = \sup_{\substack{E \subset [0, 1] \\ |E| = \frac{1}{n}}} \int_E |f(t)| \, dt - \inf_{\substack{E \subset [0, 1] \\ |E| = \frac{1}{n}}} \int_E |f(t)| \, dt, \tag{3}$$

$$F_n(f) = \sup_{\substack{E \subset [0, 1] \\ |E| = \frac{1}{n}}} \left\{ \int_E |f(t)| \, dt - \sup_{\substack{E_1 \subset [0, 1] \setminus E \\ |E_1| = \frac{1}{n}}} \int_{E_1} |f(t)| \, dt \right\} \tag{4}$$

и $n = 2, 3, \cdots$. Заметим, что константа в оценке (2) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{1+2^{2+\frac{1}{p}}} < \frac{1}{5}.$$

Мы показываем здесь*, что в оценках (1) и (2) константа может быть увеличена до $\frac{1}{3}$. С другой стороны, в качестве константы в этих

* Результаты п. 2 получены первым автором, п. 3—вторым.

неравенствах нельзя взять 1, точнее, нельзя взять величину, большую $\left(\frac{5}{7}\right)^{1/p}$.

Указанное увеличение константы усиливает некоторые результаты П. Л. Ульянова. Например, случай 1) теоремы 1 из работы [2] приобретает такой вид: если $\varphi(t)$ — четная неотрицательная и неубывающая на $[0, \infty)$ функция и $f(t) \in L(0, 1)$, то

$$\int_0^1 \varphi(f(t))\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi(3 \cdot 2^n \omega_1(2^{-n}, f) + 2\|f\|_{L(0,1)}).$$

В [2] в этой оценке вместо множителя 3 стояло 9. Эта замена множителя оказывается существенной для быстро растущих φ.

В самом деле, для $\varphi(t) = e^{|t|}$ П. Л. Ульянов ([2], стр. 114) доказал, что если для достаточно малых δ справедлива оценка

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant C\delta \log \frac{1}{\delta},$$

то при $C < \frac{1}{9}$

$$\int_0^1 \exp|f(t)|\,dt < \infty, \tag{5}$$

а при $C=1$ этот вывод сделать уже нельзя.

Теперь мы можем утверждать, что (5) имеет место и при $C < \frac{1}{3}$. Остается неизвестным, для каких C, удовлетворяющих условиям $\frac{1}{3} \leqslant C < 1$, сохраняется это свойство.

2°. Теорема. *Имеют место оценки* $(n=2, 3, \cdots)$

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant \frac{1}{3} G_n(f) \tag{6}$$

и при $p>1$

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant \frac{1}{3}\, n^{1-\frac{1}{p}} F_n(f). \tag{7}$$

Поскольку для модулей непрерывности справедлива оценка (см. [1], лемма 5)

$$\omega_p(\delta, f) \geqslant \omega_p(\delta, |f|),$$

а $G_n(f)$ и $F_n(f)$ зависят только от модуля f, то достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных функций f.

При доказательстве теоремы мы будем опираться на следующие предложения.

Лемма 1 (П. Л. Ульянов [4], лемма 3). *Пусть $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, а функции $\psi_n(t)$ определены равенствами*

$$\psi_n(t) = n \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \quad \text{при } t \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n-1;\ n = 2, 3, \cdots). \tag{8}$$

Тогда

$$\|f - \psi_n\|_{L^p(0,1)} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{9}$$

Лемма 2 (П. Л. Ульянов [1], оценки (2.9) и (2.10)). *Если $\psi_n(t)$ — ступенчатая функция, принимающая постоянные значения на интервалах $\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, то*

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}, \psi_n\right) \geqslant G_n(\psi_n) \tag{10}$$

и при $p > 1$

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \psi_n\right) \geqslant n^{1-\frac{1}{p}} F_n(\psi_n). \tag{11}$$

Лемма 3. *Если $f \in L^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, и функция $\psi_n(t)$ определена равенствами* (8), *то*

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \psi_n\right) \leqslant \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{12}$$

Доказательство леммы. Пусть $0 < h \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда

$$\int\limits_0^{1-h} |\psi_n(t) - \psi_n(t+h)|^p\,dt = \sum_{k=0}^{n-2} \int\limits_{\frac{k+1}{n}-h}^{\frac{k+1}{n}} |\psi_n(t) - \psi_n(t+h)|^p\,dt =$$

$$= n^p h \sum_{k=0}^{n-2} \left| \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) \right] dx \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant n^{p-1} \sum_{k=0}^{n-2} \left| \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) \right] dx \right|^p. \tag{13}$$

Отсюда при $p = 1$ видим, что

$$\omega_1\left(\frac{1}{n},\ \psi_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right| dx \leqslant \omega_1\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

А для $p>1$ из (13) с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\omega_p^p\left(\frac{1}{n},\ \psi_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right|^p dx \leqslant \omega_p^p\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $f(t) \in L^p(0, 1)$ и функция $\psi_n(t)$ определена по формулам (8).

Рассмотрим сначала $p=1$. Пусть E и E_1—произвольные непересекающиеся подмножества отрезка $[0,1]$, мера каждого из которых равна $\frac{1}{n}$. Тогда

$$\int_E f(t)\, dt - \int_{E_1} f(t) dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_E \psi_n(t)\, dt - \int_{E_1} \psi_n(t)\, dt + \int_0^1 |f(t) - \psi_n(t)|\, dt. \tag{14}$$

С помощью неравенств (10) и (12) находим, что

$$\int_E \psi_n(t)\, dt - \int_{E_1} \psi_n(t)\, dt \leqslant G_n(\psi_n) \leqslant \omega_1\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

Подставим эту оценку в (14) и воспользовавшись оценкой (9), получаем

$$\int_E f(t)\, dt - \int_{E_1} f(t)\, dt \leqslant 3\omega_1\left(\frac{1}{n},\ f\right).$$

Отсюда в силу произвольности множеств E и E_1 вытекает оценка (6).

Пусть теперь $p>1$. Из определения величин F_n следует, что

$$F_n(f) = F_n(\psi_n) + \sup_{\substack{A \subset [0,\ 1] \\ |A| = \frac{2}{n}}} \int_A |f(t) - \psi_n(t)|\, dt. \tag{15}$$

Для первого слагаемого правой части формулы (15) в силу (11) и (12) имеем

$$F_n(\psi_n) \leqslant n^{\frac{1}{p}-1}\, \omega_p\left(\frac{1}{n},\ f\right),$$

а второе слагаемое оценим с помощью неравенств Гельдера и (9):

$$\sup_{\substack{A\subset[0,1]\\|A|=\frac{2}{n}}}\int_A |f(t)-\psi_n(t)|\,dt\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\|f(t)-\psi_n(t)\|_{L^p(0,1)}\leqslant$$

$$\leqslant 2n^{\frac{1}{p}-1}\omega_p\left(\frac{1}{n},f\right).$$

Таким образом, из (15) следует оценка (7). Теорема доказана.

3°. Получим оценки сверху для наилучших констант в неравенствах вида (1) и (2).

Для каждого $n>2$ определим на $[0,1]$ функцию $\varphi_n(t)$ следующим образом: $\varphi_n(t)=1$, если $t\in\left[0,\frac{3}{4n}\right]\cup\left[\frac{1}{n},\frac{5}{4n}\right]$, и $\varphi_n(t)=0$ — для остальных значений t.

Так как функция $\varphi_n(t)$ отлична от нуля только на множестве меры $\frac{1}{n}$, на котором она равна 1, то

$$G_n(\varphi_n)=F_n(\varphi_n)=\frac{1}{n}. \tag{16}$$

Найдем теперь $\omega_p\left(\frac{1}{n},\varphi_n\right)$. Для этого заметим, что в силу определения функции φ_n, интеграл

$$J(h)=\int_0^{1-h}|\varphi_n(t)-\varphi_n(t+h)|^p\,dt$$

является линейной функцией от h, когда h принадлежит отрезкам $\left[\frac{i-1}{4n},\frac{i}{4n}\right]$, $i=1, 2, 3, 4$. Поэтому верхняя грань $\sup\limits_{0<h<\delta} J(h)$ равна наибольшему из выражений $J\left(\frac{i}{4n}\right)$, $i=1, 2, 3, 4$. Но как легко подсчитать, $J\left(\frac{1}{4n}\right)=J\left(\frac{3}{4n}\right)=\frac{3}{4n}$, $J\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}$, а $J\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{4n}$, если $n>2$, и $J\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}$ при $n=2$. Таким образом

$$\omega_p\left(\frac{1}{n},\varphi_n\right)=\left(\frac{3}{4n}\right)^{1/p}. \tag{17}$$

Отсюда и из (16) заключаем, что наилучшая константа в неравенствах вида (1) и (2) не может превышать $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/p}$.

Несколько лучшую оценку для этой константы, а именно $\left(\frac{5}{7}\right)^{1/p}$ дает функция, равная 1 на отрезках $\left[0, \frac{4}{7n}\right]$, $\left[\frac{9}{14n}, \frac{11}{14n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, \frac{9}{7n}\right]$, и равная 0 в остальных точках. В этом нетрудно убедиться с помощью аналогичных подсчетов.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 20.I.1971

Կ. Ի. ՕՍԿՈԼԿՈՎ, Ս. Ա. ՏԵԼՅԱԿՈՎՍԿԻ. Պ. Լ. Ուլյանովին պատկանող անընդհատության ինտեգրալ մոդուլի գնահատականների մասին *(ամփոփում)*

Ճշգրտվում է Ուլյանովին պատկանող անընդհատության ինտեգրալ մոդուլի համար հաստատուն արժեքների գնահատականները ներքևից։

K. I. OSKOLKOV, S. A. TELIAKOVSKI. *On the P. L. Ul'janov's estimates of the integral moduli of continuity* (summary)

The values of constants are sharpened from below in the P. L. Ul'janov's estimates of the integral moduli of continuity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Л. Ульянов.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω, Изв. АН СССР, серия матем., 32, № 3, 1968, 649—686.
2. *П. Л. Ульянов.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Матем. сборник, 81, (123), № 1, 1970, 104—131.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 5, 1971 Математика

В. В. ВОСКАНЯН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

Пусть K есть открытое кольцо в комплексной плоскости, ограниченное окружностями $\Gamma_1=\{z: |z|=1\}$ и $\Gamma_\rho=\{z: |z|=\rho\}$, $0<\rho<1$. Обозначим через $H^p(K)$, $1\leqslant p<\infty$, банахово пространство функций $f(z)$, аналитических (и однозначных) в K, таких, что

$$\|f\|^p=\sup_{\rho<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dt<\infty,$$

с нормой $\|f\|$. Функции из $H^p(K)$ имеют почти всюду на $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_\rho$ граничные значения $f(e^{it})$ и $f(\rho e^{it})$, суммируемые с p-й степенью (см., например, [1]). Впредь нам будет удобнее пользоваться другой нормой $\|f\|_p$, эквивалентной основной норме

$$\|f\|_p=\left[\int_\Gamma|f(x)|^p\,ds\right]^{1/p}=\left[\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\,dt+\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p\,\rho dt\right]^{1/p}.$$

Аналогично, $H^\infty(K)$ будет обозначать банахово пространство аналитических и ограниченных в K функций с нормой

$$\|f\|_\infty=\sup_{z\in K}|f(z)|=\operatorname{Vrai}\max_{x\in\Gamma}|f(x)|.$$

Пусть на Γ задана функция $\omega(x)\in L^q(\Gamma)$, где $1/q+1/p=1$. Тогда она по формуле $\omega(f)=\int_\Gamma f(x)\,\omega(x)\,dx$ порождает на $H^p(K)$ функционал ω. Обозначим через S_p единичный шар в пространстве $H^p(K)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. В нашей заметке мы хотим построить экстремальную функцию $f^*\in H^p(K)$, дающую норму функционала ω, т. е. такую, что

$$\|f^*\|_p=1 \text{ и } \|\omega\|=\sup_{f\in S_p}|\omega(f)|=|\omega(f^*)|,$$

в случае, когда $\omega(x)$ есть граничное значение мероморфной в $\overline{K}$ с полюсами в K функции $\omega(z)$.

В работе [5] решалась та же задача для круга. Систематическое изучение экстремальных задач такого типа для круга и многосвязных областей было проведено в работах С. Я. Хавинсона (см., например, [2], [3], [4] и другие) на основе принципа двойственности. Из этого принципа, в частности, следует, что

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \sup_{f\in S_p}\left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^q(K)}\left[\int_\Gamma |\omega(x)-\varphi(x)|^q\,ds\right]^{1/q}, 1<p\leqslant\infty,\\ \lambda &= \sup_{f\in S_1}\left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^\infty(K)} \operatorname{Vrai}\max_{x\in\Gamma}|\omega(x)-\varphi(x)|\end{aligned}\right| \quad (1)$$

(см. [3], гл. II, § 1, пп 2, 3, 4).

Результаты, применяемые в нашем (мероморфном) случае, утверждают (там же, гл. II, 2—1, 3—1, 4—1, 2, 3):

а) При $1\leqslant p\leqslant\infty$ существуют экстремальные функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$, для которых равенство (1) достигается.

б) Функция $\varphi^*(z)$ единственна, когда $f^*(z)$ не постоянна. При $1<p\leqslant\infty$ функция $f^*(z)$ единственна с точностью до постоянного множителя $e^{i\alpha}$, а при $p=1$ может и не быть единственной в этом смысле

в) Для того чтобы $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ были экстремальными, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на Γ выполнялись равенства

$$f^*(x)[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = e^{i\alpha}\lambda^{1-q}|\omega(x)-\varphi^*(x)|^q\,ds \text{ при } 1<p\leqslant\infty \quad (2)$$

и

$$f^*(x)[\omega(x)-\varphi^*(x)]\,dx = e^{i\alpha}\lambda|f^*(x)|\,ds \text{ при } p=1. \quad (3)$$

Впредь мы будем рассматривать ту экстремальную функцию $f^*(z)$, для которой $e^{i\alpha}=i$ в равенствах (2) и (3).

Теорема. *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$, и пусть функция $\omega(z)$ аналитична в K за исключением n полюсов β_i, лежащих в K, причем каждый полюс засчитывается столько раз, какова его кратность. Тогда для функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$, дающих решение экстремальной задачи (1), справедливы следующие утверждения: существует n чисел $\alpha_i\in K$ таких, что*

I. *Функция $R(z)=\omega(z)-\varphi^*(z)$ имеет единственное представление*

$$R(z) = Mz^k \prod{}' \frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_i}}(z)}\cdot\prod_1^n \frac{A_{\frac{1}{\overline{\beta}_i}}(z)}{A_{\beta_i}(z)}\prod_1^n\left[\frac{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_i}}(z)}{A_{\frac{1}{\overline{\beta}_i}}(z)}\right]^{2/q}, \quad (4)$$

где знак произведения Π' распространяется на все индексы i такие, что $\alpha_i\in\Gamma$, и на некоторую часть оставшихся индексов;

$$A_\alpha(z) = (z-\alpha)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\rho^{2m}\cdot\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\rho^{2m}\cdot\frac{\alpha}{z}\right);\ k\text{—целое.}$$

II. *Функция $f^*(z)$ экстремальна тогда и только тогда, когда $\|f^*\|_p=1$ и имеет вид*

$$f^*(z) = Nz^{-k-1}\prod{}'' \frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_i}}(z)}\cdot\prod_1^n\left[\frac{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_i}}(z)}{A_{\frac{1}{\overline{\beta}_i}}(z)}\right]^{2/p}. \quad (5)$$

Здесь Π'' есть дополнение к Π' по всем n индексам i. В формулах (4) и (5) с нецелыми степенями $2/q$ и $2/p$ взято то значение степенной функции z^{ν}, которое равно 1 при $z=1$.

$$\text{III.}\qquad \text{а) } \prod_1^n \frac{\alpha_i}{\bar{\beta}_i} < 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } \prod_1^n \left|\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right|^{1/p} \prod{}'' |x_i| = \rho^{*+1/q}.$$

Замечание. Из соотношения (4) видно, что при $p=1$ возможен случай, когда не все α_i будут участвовать в представлении $R(z)$. Эти оставшиеся параметры в формуле (5) могут быть выбраны произвольно, и функция $f^*(z)$ окажется неединственной.

Лемма. *Если $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$—экстремальные функции. то существует n чисел $\alpha_i \in \overline{K}$ таких, что имеет место представление*

$$L(z)=zf^*(z)\cdot R(z)=C\frac{\prod_1^n A_{\alpha_i}(z)\cdot A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)}{\prod_1^n A_{\beta_i}(z)\cdot A_{\frac{1}{\bar{\beta}_i}}(z)}, \tag{6}$$

где C—константа.

Доказательство. Так как $\varphi^*(z)\in H^q(K)$, то для $1\leqslant q<\infty$

$$\|R(x)-R(rx)\|_{L^q(\Gamma_1)}\to 0 \text{ при } r\to 1-,\ x\in\Gamma_1$$

и

$$\|R(x)-R(rx)\|_{L^q(\Gamma_\rho)}\to 0 \text{ при } r\to 1+,\ x\in\Gamma_\rho.$$

В случае $q=\infty$

$$\overline{\lim_{r\to 1-}}\ \sup_{x\in\Gamma_1}|R(rx)|<\infty \text{ при } x\in\Gamma_1$$

и

$$\overline{\lim_{r\to 1+}}\ \sup_{x\in\Gamma_\rho}|R(rx)|<\infty \text{ при } x\in\Gamma_\rho.$$

Точно такие же соотношения с показателем p вместо q (для $1\leqslant p<\infty$ и $p=\infty$) имеют место для функции $f^*(z)$ ввиду того, что $f^*(z)\in H^p(K)$. Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}&\|L(x)-L(rx)\|_{L^1(\Gamma_1)}\to 0 \text{ при } r\to 1-,\ x\in\Gamma_1,\\ &\|L(x)-L(rx)\|_{L^1(\Gamma_\rho)}\to 0 \text{ при } r\to 1+,\ x\in\Gamma_\rho\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

С другой стороны, равенства (2) и (3) показывают, что

$$\left.\begin{aligned}&L(x)\geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_1,\\ &L(x)\leqslant 0 \text{ п. в на } \Gamma_\rho\end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) позволяют сохранить классическое доказательство принципа симметрии Шварца. Функцию $L(z)$ можно продолжить до функции, мероморфной в кольце $K(\rho^2, 1/\rho)$ с радиусами ρ^2 и $1/\rho$. Далее, продолжая $L(z)$ по симметрии с одного кольца на другое следующим образом:

$$K(\rho^2, 1) \to K(1, 1/\rho^2),\ K(\rho, 1/\rho^2) \to K(\rho^4, \rho),\ K(\rho^4, 1) \to K(1, 1/\rho^4) \ldots,$$

мы получим в итоге функцию, мероморфную на всей плоскости, за исключением точек 0 и ∞ накопления полюсов.

Если α есть нуль функции $L(z)$ в $\overline{K}$, то она будет иметь нулями и точки

$$\frac{1}{\overline{\alpha}}, \frac{1}{\rho^2 \overline{\alpha}}, \frac{\rho^2}{\overline{\alpha}}, \rho^2\alpha, \frac{\alpha}{\rho^2}, \ldots, \frac{1}{\rho^{2m} \overline{\alpha}}, \frac{\rho^{2m}}{\overline{\alpha}}, \rho^{2m}\alpha, \frac{\alpha}{\rho^{2m}}, \ldots.$$

Поэтому функция $L(z)$ должна содержать множитель

$$(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)\prod_1^\infty\left(1-\rho^{2m}\frac{z}{\alpha}\right)\left(1-\rho^{2m}\frac{\alpha}{z}\right)\left(1-\rho^{2m}\frac{1}{\overline{\alpha}z}\right)(1-\rho^{2m}\overline{\alpha}z)=$$

$$= A_\alpha(z)\cdot A_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}(z).$$

Полюсы β_l функции $L(z)$ порождают такие же множители в знаменателе. По принципу аргумента число нулей в $\overline{K}$ должно быть равно n. (Заметим, что кратность нуля α, лежащего на Γ, есть четное число $2s$, но в ряду нулей функции $L(z)$ в $\overline{K}$ α участвует s раз).

Таким образом, функция

$$l(z)=\frac{\prod_1^n A_{\alpha_l}(z)\cdot A_{\frac{1}{\overline{\alpha}_l}}(z)}{\prod_1^n A_{\beta_l}(s)\, A_{\frac{1}{\overline{\beta}_l}}(z)}\cdot\prod_1^n\frac{\beta_l}{\alpha_l}$$

имеет те же нули и полюсы в $\overline{K}$, что и $L(z)$. Заметив, что

$$\left.\begin{aligned} &A_\alpha(x) = -\alpha x\overline{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}(x)} \quad \text{на } \Gamma_1 \\ \text{и}\quad &A_\alpha(x) = \alpha^2\overline{A_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}(x)} \quad \text{на } \Gamma_\rho \end{aligned}\right|, \tag{9}$$

легко показать, что

$$l(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_1$$

и

$$\arg l(x) = \arg\prod_1^n\frac{\alpha_l}{\beta_l} = \theta \quad \text{при} \quad x\in\Gamma_\rho.$$

Поэтому функция $h(z) = L(z)/l(z)$ не имеет ни особенностей, ни нулей в $\overline{K}$ и

$$g(x) > 0,\ x\in\Gamma_1 \text{ и } \arg g(x) = \pi-\theta,\ x\in\Gamma_\rho. \tag{10}$$

Для однозначности аналитической в $\overline{K}$ функции $g(z)$ необходимо выполнение равенства

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(e^{is})]\,ds = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(\rho e^{is})]\,ds. \tag{11}$$

Действительно, величина

$$\int_0^{2\pi} g(re^{is})\,ds = \frac{1}{i}\int \frac{g(z)}{z}\,dz,$$

где интеграл справа берется по окружности радиуса r $(\rho < r < 1)$ с центром в точке $z=0$, очевидно, не зависит от r. Тем же свойством обладает и мнимая часть написанного интеграла. Отсюда, приближая вначале r к 1, а затем к ρ, и замечая, что в интеграле

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(re^{is})]\,ds$$

можно сделать требуемые предельные переходы, получим (11).

Из (10) и (11) следует, что

$$0 = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(e^{is})]\,ds = \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[g(\rho e^{is})]\,ds = \int_0^{2\pi} |g(\rho e^{is})| \sin(\pi - \theta)\,ds.$$

Поэтому $\sin(\pi-\theta)=0$, и из соотношений (10) вытекает, что

$$\operatorname{Im} g(x) = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \operatorname{Im} g(x) = |g(x)|\cdot\sin(\pi-\theta) = 0 \text{ на } \Gamma_\rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} g(z) \equiv 0 \text{ на } K \Rightarrow g(z) = \text{const}, \text{ откуда и следует (6).}$$

Лемма доказана, и попутно установлено утверждение III а) теоремы.

Доказательство теоремы. Из соотношений (2) и (3) легко вывести равенство

$$|R(x)|^{1/p} = \lambda^{1/p}\,|f^*(x)|^{1/q}$$

и отсюда

$$\begin{cases} |R(x)| = \lambda^{1/p}|L(x)/x|^{1/q}, \\ |f^*(x)| = \lambda^{-1/p}|L(x)/x|^{1/p} \end{cases} \text{ на } \Gamma \text{ при } 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{12}$$

Точки $\alpha_i \in K$ в (6) подразделяются на нули $f^*(z)$ и $R(z)$ в K. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{M}{z}\cdot \prod{}'' \frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)} \prod_1^n \left[\frac{A_{\frac{1}{\bar{\alpha}_i}}(z)}{A_{\frac{1}{\bar{\beta}_i}}(z)}\right]^{2/p}, \tag{13}$$

где знак произведения Π'' распространяется на те индексы i, для которых α_i являются нулями функции $f^*(z)$ в K. Приняв во внимание формулы (6) и (9) и выбирая надлежащим образом число M

$$\left(M = \lambda^{-1/p}\cdot C^{1/p}\cdot \prod{}'' \frac{1}{|\alpha_i|}\cdot \prod_1^n \left|\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right|^{1/p}\right),$$

легко показать, что

$$\left.\begin{aligned} &|\Phi(x)| = \lambda^{-1/p}\,|L(x)/x|^{1/p} = |f^*(x)| \quad \text{на } \Gamma_1 \\ &\text{и} \\ &|\Phi(x)| = \prod_1^n \left|\frac{\beta_l}{\alpha_l}\right|^{1/q} \cdot \rho^{-l} \cdot \prod{}' |\alpha_l| \cdot |f^*(x)| = B\,|f^*(x)| \quad \text{на } \Gamma_\rho \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

В работе [4] (см. доказательство теоремы 10 из § 5) было показано, что $\ln|f^*(z)|$ представляется по формуле Грина в кольцеобразных областях, примыкающих к Γ и не содержащих нулей $f^*(z)$. Так как $\Phi(z)$ имеет в K те же нули, что и $f^*(z)$, то отсюда вытекает, что функция $\ln|f^*(z)/\Phi(z)|$ представляется по формуле Грина во всем K. По этой формуле представится тогда и функция $\ln|z^{\log_\rho B} f^*(z)/\Phi(z)|$. Но она равна нулю на Γ, ввиду равенств (14), поэтому

$$|z^{\log_\rho B} f^*(z)/\Phi(z)| = 1 \text{ на } K.$$

Так как функция $f^*(z)/\Phi(z)$ однозначна, то $\log_\rho B = k$ есть целое число. Из вида B следует утверждение III б). Таким образом, $f^*(z) = \mathrm{const}\cdot\Phi(z)\cdot z^{-k}$ и доказано II. Функция $R(z)$ в I определяется теперь из II и формулы (6).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если рассматривать банахово пространство $A(K)$ функций, аналитических в K и непрерывных вплоть до границы, с sup—нормой, и функционал ω на нем, то принцип двойственности приводит к равенству

$$\sup_{f\in S(A)} \left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right| = \inf_{\varphi\in H^1(K)} \int_\Gamma |\omega(x) - \varphi(x)|\,ds = \sup_{f\in S_\infty} \left|\int_\Gamma \omega(x) f(x)\,dx\right|.$$

Так как экстремальная функция $f^*(z)$ для пространства $H^\infty(K)$ в условиях теоремы оказалась непрерывной вплоть до границы, то она будет решением экстремальной задачи и для пространства $A(K)$. Таким образом, все рассуждения теоремы для $H^\infty(K)$ переносятся на пространство $A(K)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ереванский государственный университет
Поступило 25.I.71

Վ. Վ. ՌՍԿԱՆՅԱՆ. Օղակում անալիտիկ ֆունկցիաների բանախի տարածությունների տեսության մի էքստրեմալ խնդրի մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք K—ն կոմպլեքս հարթության վրա Γ եզրագիծ ունեցող մի օղակ է։ $H^p(K)$, $1<p<\infty$, և $A(K)$ բանախի տարածություններում սահմանված է $\omega\left(\omega(f) = \int_\Gamma \omega(z) f(z)\,dz\right)$ ֆունկցիոնալը, որտեղ $\omega(z)$—ը մի ֆունկցիա է, որն անալիտիկ է $\bar K$-ում բացառությամբ վերջավոր թվով բևեռներից K-ում։

Ներկա աշխատանքում գտնվում է այդ ֆունկցիոնալի նորմը տվող $f^*\in H^p(K)$, $A(K)$ էքստրեմալ ֆունկցիայի տեսքը և $\varphi^*(z)$ էքստրեմալ ֆունկցիայի ներկայացումը երկակի խնդրում։

V. V. VOSKANIAN. ***On an extremal problem in the Banach space of analytical in an annulus functions*** **(summary)**

Let K be an annulus in a complex plane with boundary Γ. In Banach spaces $H^p(K)$, $1 < p < \infty$, and $A(K)$ the functional ω $(\omega(f) = \int_{\Gamma} \omega(z) f(z) dz)$, is defined where $\omega(z)$ is an analytical function in $\bar{K}$ except for a finite number of poles in K.

In the present paper the extremal function $f^* \in H^p(K)$, $A(K)$ which gives the norm of this functional, is found along with the representation of the extremal function $\varphi^*(z)$ in the dual problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон.* Классы аналитических функций в многосвязных областях, Исследования по современным проблемам, ТФКП, 1960.
2. *С. Я. Хавинсон.* О некоторых экстремальных задачах теории аналитических функций, Уч. записки МГУ, вып. 148, т. 4, 1951.
3. *С. Я. Хавинсон.* Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях, Мат. сб., 36 (78), вып. 3, 1955.
4. *Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон.* Исследование свойств экстремальных функций с помощью соотношений двойственности в экстремальных задачах для классов аналитических функций в многосвязных областях, Мат. сб., 46, (88), вып. 2, 1958.
5. *W. W. Rogosinsky, H. S. Shapiro.* On certain problems for analytic functions, Acta Math., 90, №№ 3—4, 1953.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS