ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные—двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

Уважаемые граждане!

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР НА 1972 ГОД

«АСТРОФИЗИКА», на русском языке, периодичность—в год 4 номера, годовая подписная плата 4 рубля.

«ИСТОРИКО-ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ», периодичность—в год 4 номера, годовая подписная плата 3 рубля 20 коп.

«ДОКЛАДЫ», периодичность—в год 10 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

«ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И КЛИНИЧЕСКОЙ МЕДИЦИНЫ», периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40.

«КРОВООБРАЩЕНИЕ», на русском языке, периодичность—6 номеров в год, годовая подписная плата 1 руб. 80 к.

«ВЕСТНИК ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК», периодичность—в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность—в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб 20 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *Науки о Земле*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ХИМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность—в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 80 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *технических* наук, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *математика*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *механика*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *физика*, периодичность—в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

Все журналы, кроме Астрофизики, издаются на армянском и русском языках, а резюме на одном из этих языков.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ:

В городских отделах, районных агентствах «Союзпечать», в пунктах приема подписки, в районных узлах и во всех отделениях связи, на предприятиях, в учреждениях, учебных заведениях, совхозах, колхозах, строительных объектах, у общественных распространителей печати.

Прием подписки с января 1972 года на все советские газеты и журналы будет производиться до 25 ноября После указанного срока подписка будет оформляться на февраль и последующие месяцы 1972 года.

СОЮЗПЕЧАТЬ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 4, 1971 Математика

В. П. ХАВИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПРИВАЛОВА-ЗИГМУНДА О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ*

§ 3. Начало доказательства теоремы 1

Будем считать, что $|f(\zeta)|\leqslant 1$ при всех $\zeta\in U\cup\Gamma$. Пусть t и τ—две точки единичной окружности Γ. Предположим, что $\tau=t\,e^{ih}$, где $h\in\in\left(0,\frac{1}{100}\right)$, $\omega(\sqrt{h})<\frac{1}{2}$. Нам предстоит оценить разность $|f(t)-f(\tau)|$. Для этого представим функцию f в виде

$$f=Bg, \tag{17}$$

где B—произведение Бляшке, построенное по нулям функции f:

$$B(z)=z^m\prod_k\frac{z-z_k}{1-z\bar z_k}\cdot\frac{\bar z_k}{|z_k|}$$

(см. (4)), а g принадлежит A (см. [3], гл. VI) и не имеет нулей в U. Применим к функции g лемму 3 с

$$a=2\omega(|f|,\beta(h)\sqrt{h}), \tag{18}$$

где $\beta(h)$—число, выбор которого мы уточним позже. Пока предположим только, что $3\sqrt{h}<\beta(h)\leqslant 1$.

Условимся в дальнейшем вместо $\omega(|f|,\delta)$ писать просто $\omega(\delta)$. Ясно, что

$$f=\Phi_a I_a, \tag{19}$$

где $I_a=B\,\varphi_a$ (мы используем обозначения леммы 3; индекс a мы в дальнейшем будем опускать, имея в виду, что a определено равенством (18)). Из (19) следует, что

$$|f(t)-f(\tau)|\leqslant|\Phi(\tau)-\Phi(t)|+|\Phi(\tau)|\,|I(t)-I(\tau)|. \tag{20}$$

Начнем с оценки числа $|\Phi(\tau)-\Phi(t)|$. Условимся вместо $|\Phi|$ писать H. Имеем

$$\Phi(t)=H(t)\exp\int S_t\log H\,d\sigma,$$

$$\Phi(\tau)=H(\tau)\exp\int S_\tau\log H\,d\sigma,$$

* Продолжение, начало см. в №№ 2—3, 1971 г.

где интегралы следует понимать в смысле главного значения. Подынтегральные функции в последних выражениях чисто мнимые. Ясно, что

$$|\Phi(\tau)-\Phi(t)|=H(t)\left|1-\frac{H(\tau)}{H(t)}\exp\left[\int(S_\tau-S_t)\log H\,d\sigma\right]\right|=$$

$$=H(t)\left|1-\frac{H(t)-(H(t)-H(\tau))}{H(t)}\exp\left[\int(S_\tau-S_t)\log H\,d\sigma\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant H(t)\left|1-\exp\left[\int(S_\tau-S_t)\log H\,d\sigma\right]\right|+|H(t)-H(\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant H(t)\left|\int(S_\tau-S_t)\log H\,d\sigma\right|+|H(t)-H(\tau)|\leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant H(t)\left|\int(S_\tau-S_t)\log H\,d\sigma\right|+\omega(h).$$

Мы воспользовались тем, что $\omega(H,\delta)\leqslant\omega_2(|f|,\delta)=\omega(\delta)$ при всех $\delta>0$ (см. (8)).

Обозначим через Γ_t дугу окружности Γ длины $6h$ с центром в точке t:

$$\Gamma_t=\{te^{i\varphi}\colon |\varphi|<3h\},$$

и пусть

$$\Delta_t=\Gamma\setminus\Gamma_t.$$

Следуя классическому доказательству теоремы И. И. Привалова, запишем тождество

$$\int(S_t-S_\tau)\log H\,d\sigma=\int_{\Gamma_t}(\log H-\log H(t))\,S_t\,d\sigma-$$

$$-\int_{\Gamma_t}(\log H-\log H(\tau))\,S_\tau\,d\sigma+\int_{\Delta_t}(S_t-S_\tau)(\log H-\log H(\tau))\,d\sigma=$$

$$=J_1+J_2+J_3 \tag{22}$$

(при доказательстве этого тождества следует учесть, что

$$\int_{\Delta_t}S_t\,d\sigma=\int_{\Gamma_t}S_t\,d\sigma=\int_{\Gamma}S_\tau\,d\sigma=0).$$

Оценим интеграл J_1. Имеем (см. (7)): $|H(\gamma)|>2\omega(\beta(h)\sqrt{h})>$ $>2\omega(3h)$ при всех $\gamma\in\Gamma$. Поэтому для любой точки γ дуги Γ_t

$$H(\gamma)>H(t)-|H(t)-H(\gamma)|=H(t)\left(1-\frac{|H(t)-H(\gamma)|}{H(t)}\right)>$$

$$\geqslant H(t)\left(1-\frac{\omega(3h)}{2\omega(3h)}\right)>\frac{H(t)}{2}, \tag{23}$$

и

$$|\log H(\gamma)-\log H(t)|\leqslant 2\frac{|H(\gamma)-H(t)|}{H(t)}\leqslant 2\frac{\omega(|\varphi|)}{H(t)},$$

если $\gamma=te^{i\varphi}$. Поэтому

$$|J_1|\leqslant\frac{2}{H(t)}\int\limits_{\Gamma_t}\frac{|H(\gamma)-H(t)|}{|\gamma-t|}d\sigma(\gamma)\leqslant\frac{c_1}{H(t)}\int\limits_0^{3h}\frac{\omega(u)}{u}du\leqslant\frac{c}{H(t)}\int\limits_0^h\frac{\omega(u)}{u}du, \tag{24'}$$

где c_1, c — абсолютные постоянные.

Точно так же можно проверить, что

$$|J_2|\leqslant\frac{c}{H(t)}\int\limits_0^h\frac{\omega(u)}{u}du. \tag{24''}$$

Возвращаясь к (21), получаем

$$|\Phi(t)-\Phi(\tau)|\leqslant c\int\limits_0^h\frac{\omega(u)}{u}du+$$

$$+\omega(h)+H(t)\,|J_3|, \tag{25}$$

где c — абсолютная постоянная.

§ 4. Оценка интеграла J_3

Именно на этом этапе доказательства мы в первый раз получим члены $c\cdot\omega(\beta(h)\sqrt{h})$.

Отметим, что

$$S_t(\gamma)-S_\tau(\gamma)=(t-\tau)\frac{2\gamma}{(\gamma-t)(\gamma-\tau)}\quad(\gamma\in\Gamma,\ \gamma\neq t,\ \gamma\neq\tau). \tag{26}$$

Поэтому

$$|J_3|\leqslant 2h\int\limits_{\Delta_t}\frac{|\log H(\gamma)-\log H(\tau)|}{|\gamma-t|\,|\gamma-\tau|}d\sigma(\gamma)=2h\left(\int\limits_{\Delta_t^1}+\int\limits_{\Delta_t^2}\right), \tag{27}$$

где

$$\Delta_t^1=\left\{\gamma\in\Delta_t:\gamma=\tau e^{i\varphi},\ \varphi\in[-\pi,\pi],\ \omega(|\varphi|)\leqslant\frac{1}{2}H_a(\tau)\right\},\ \Delta_t^2=\Delta_t\setminus\Delta_t^1.$$

Если $\gamma\in\Delta_t$, то

$$|\gamma-t|\geqslant|\gamma-\tau|\left(1-\frac{|t-\tau|}{|\gamma-\tau|}\right)\geqslant q\,|\gamma-\tau|,$$

где q — положительная абсолютная постоянная. В то же время при $\gamma\in\Delta_t^1$

$$H(\gamma) > H(\tau) - |H(\tau) - H(\gamma)| \geqslant H(\tau)\cdot\left(1 - \frac{\omega(|\varphi|)}{H(\tau)}\right) >$$

$$\geqslant H(\tau)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}H(\tau)}{H(\tau)}\right) = \frac{1}{2}H(\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Delta_t^1} \frac{|\log H(\gamma) - \log H(\tau)|}{|\gamma - t|\,|\gamma - \tau|} d\sigma(\gamma) \leqslant \frac{2}{qH(\tau)} \int\limits_{\Delta_t^1} \frac{|H(\gamma) - H(\tau)|}{|\gamma - \tau|^2} d\sigma(\gamma) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{H(t)} \int\limits_h^\pi \frac{\omega(u)}{u^2}\, du, \tag{28}$$

так как $H(\tau) > \frac{1}{2} H(t)$ (см. (23)).

Оценке интеграла $\int\limits_{\Delta_t^2}$ предпошлем простую лемму.

Лемма 4.

$$J(\zeta, \varepsilon) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\{\gamma\in\Gamma:|\gamma-\zeta|>\varepsilon\}} \frac{|\log H_a(\gamma)|\, d\sigma(\gamma)}{|\gamma - \zeta|^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{A}(f, c\sqrt{\varepsilon}) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int |\log|f||\, d\sigma, \tag{29}$$

каковы бы ни были число $\varepsilon \in (0, 1)$ *и точка* $\zeta \in \Gamma$ (*c—абсолютная постоянная, величина* $\mathbf{A}(f, \delta)$ *была определена в* (15)).

Доказательство.

$$J(\zeta, \varepsilon) = \int\limits_{\sqrt{\varepsilon} > |\zeta - \gamma| > \varepsilon} + \int\limits_{|\zeta - \gamma| > \sqrt{\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\{\gamma\in\Gamma:\, |\gamma - \zeta| < \sqrt{\varepsilon}\}} |\log|f||\, d\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma} |\log|f||\, d\sigma_1.$$

Доказательство закончено.

Положим

$$\alpha(\varepsilon) = \sup\left\{\eta^2 \int\limits_{|\gamma - \zeta| > \eta} \frac{|\log|f(\gamma)||\, d\sigma(\gamma)}{|\gamma - \zeta|^2} : 0 < \eta \leqslant \varepsilon,\ \zeta \in \Gamma\right\}. \tag{30}$$

Из леммы 4 следует, что $\alpha(\varepsilon) = o(1)$ $(\varepsilon \to 0)$, так как

$$\alpha(\varepsilon) \leqslant \mathbf{A}(f, c\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon \int |\log|f||\, d\sigma. \tag{31}$$

Продолжим теперь оценку интеграла $\int\limits_{\Delta_t^2}$. Имеем

$$\int\limits_{\Delta_t^2} \frac{|\log H(\gamma)-\log H(\tau)|}{|\gamma-t||\gamma-\tau|} d\sigma(\gamma) \leqslant \frac{1}{q}\left(\int\limits_{\Delta_t^2} \frac{|\log H(\gamma)|}{|\gamma-\tau|^2} d\sigma(\gamma) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta_t^2} \frac{|\log H(\tau)|}{|\gamma-\tau|^2} d\sigma(\gamma)\right) = \frac{1}{q}(s_1+s_2), \tag{32}$$

где q — абсолютная постоянная.

Оценим интеграл s_1. Рассмотрим две возможности:

а) $H_a(\tau) < 2\omega\left(\sqrt{\dfrac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right)$;

б) $H_a(\tau) \geqslant 2\omega\left(\sqrt{\dfrac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right)$.

В случае а) рассмотрим число $u^* = \inf\left\{u \geqslant 0 \colon \omega(u) > \frac{1}{2} H_a(\tau)\right\}$. Если множество, стоящее под знаком infimum'а, пусто, то $\Delta_t^1 = \Delta_t$, и $\Delta_t^2 = \Lambda$, так что $s_1 = 0$. Если же $\Delta_t^2 \neq \Lambda$, то, очевидно, $\omega(u^*) = \frac{1}{2} H_a(\tau) \geqslant \frac{1}{2} a = \omega(\beta(h)\sqrt{h})$ (см. (18)). Поэтому

$$u^* \geqslant \beta(h)\sqrt{h},$$

так как в противном случае из определения числа u^* и из монотонности функции ω следовало бы, что

$$\omega(\beta(h)\sqrt{h}) > \frac{1}{2} H_a(\tau) \geqslant \omega(\beta(h)\sqrt{h}).$$

Кроме того

$$\omega(u^*) \geqslant \frac{1}{2} \min_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|,$$

так как $H_a \geqslant |f|$.

Положим

$$\chi(h) = \inf\left\{v > 0 \colon v \geqslant \beta(h)\sqrt{h},\ \omega(v) \geqslant \frac{1}{2} \min_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|\right\}. \tag{33}$$

Тогда

$$u^* \geqslant \chi(h).$$

Заметим еще, что при $\gamma = \tau e^{i\varphi} \in \Delta_t^2$ ($\varphi \in [-\pi, \pi]$) справедливо неравенство $\omega(|\varphi|) > \frac{1}{2} H(\tau)$, и потому $|\varphi| \geqslant u^*$, $|\gamma-\tau| \geqslant cu^*$. Значит

$$s_1 \leqslant c_1 \int\limits_{|\gamma-\tau|\geqslant cu^*} \frac{|\log H(\gamma)|}{|\gamma-\tau|^2} d\sigma(\gamma) \leqslant c_2 \frac{\alpha(u^*)}{(u^*)^2} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \alpha(u^*) \cdot \frac{1}{\chi(h)} \cdot \frac{\omega(u^*)}{u^*} \cdot \frac{1}{\omega(u^*)} \leqslant 2c_2 \alpha(u^*) \frac{\omega(\chi(h))}{|\chi(h)|^2 \cdot \frac{1}{2} H(\tau)}$$

(c, c_1, $c_2, \cdots$ — абсолютные постоянные; см. п. 1 в конце § 1).

Из условия a) следует, что

$$\omega(u^*) < \omega\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right),$$

так как $\omega(u^*) = \frac{1}{2} H(\tau)$. Поэтому $u^* \leqslant \left(\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}\right)^{1/2}$. Итак, в случае a)

$$s_1 \leqslant c_3 \alpha\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right) \frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2} \frac{1}{H(\tau)}. \tag{34}$$

Если функция f обращается в нуль на Γ, то $\chi(h) = \beta(h)\sqrt{h}$.

В случае б) при любом $\gamma = \tau e^{i\varphi} \in \Delta_l^2$ имеем

$$\omega(|\varphi|) > \frac{1}{2} H(\tau) > \omega\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right).$$

Поэтому

$$|\varphi| > \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}, \quad |\gamma - \tau| > c_4 \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}},$$

и по определению функции α

$$s_1 \leqslant \alpha\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right) \frac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{c_4^2 h}. \tag{35}$$

Оценим теперь интеграл s_2. Полагая $\gamma = \tau e^{i\varphi}$, получим

$$s_2 \leqslant |\log H(\tau)| \int\limits_{\pi > |\varphi| > u^*} \frac{d\sigma(\gamma)}{|\gamma - \tau|^2} \leqslant c_5 |\log H(\tau)| \frac{1}{u^*} =$$

$$= c_5 \frac{|\log H(\tau)|}{\omega(u^*)} \frac{\omega(u^*)}{u^*} \leqslant c_5 \frac{|\log H(\tau)|}{\frac{1}{2} H(\tau)} \cdot 2 \frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)}, \tag{36}$$

где c_5 — абсолютная постоянная.

Из (25), (27), (28) и (32) получаем теперь, что

$$|\Phi(t) - \Phi(\tau)| \leqslant c \left\{ \int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u} du + \omega(h) + h \int\limits_h^\pi \frac{\omega(u)}{u^2} du + \right.$$

$$\left. + hH(t) s_1 + hH(t) s_2 \right\}, \tag{37}$$

где c — абсолютная постоянная. Учитывая (28), (34), (35) и (36), получим

$$hH(t)\, s_1 \leqslant \alpha \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} \right) \left[\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + h\,\frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2} \right],$$

$$hH(t)\, s_2 \leqslant ch\,|\log l(h)| \cdot \frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)},$$

где $l(h)$ — большее из двух чисел: $2\omega(\beta(h)\sqrt{h})$ и $\min\limits_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)|$ (напомним, что $H(\gamma) > l(h)$ при всех $\gamma \in \Gamma$). Учитывая неравенство $\Omega(h) \geqslant$ $\geqslant c\omega(h)$ (см. § 1), получим

$$|\Phi(t) - \Phi(\tau)| \leqslant c \left\{ \Omega(h) + \alpha \left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} \right) \left[\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + h\,\frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2} \right] + h\,|\log l(h)|\,\frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)} \right\}, \qquad (38)$$

где c — абсолютная постоянная.

Оценка разности $|\Phi(t) - \Phi(\tau)|$ закончена.

§ 5. Окончание доказательства теоремы 1

Оценим теперь $|\Phi(\tau)| \cdot |I(t) - I(\tau)|$ (см. (20)*). Обозначим через t^* ближайшую к t точку множества Γ^a (см. (10), (17) и (18)). Пусть $t^* = te^{i\rho}$, где $|\rho| \leqslant \pi$. Если $|\rho| < \beta(h)\sqrt{h}$, то

$$|f(t) - f(\tau)| \leqslant |f(t)| + |f(\tau)| \leqslant 2\,|f(t)| + \big||f(t)| - |f(\tau)|\big| \leqslant$$

$$< 2\,(|f(t^*)| + \big||f(t)| - |f(t^*)|\big|) + \omega(h) \leqslant 2a + 2\omega(|\rho|) +$$

$$+ \omega(h) < 4\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + 2\omega(\beta(h)\sqrt{h}) + \omega(h) < 7\omega(\beta(h)\sqrt{h}). \qquad (39)$$

Предположим теперь, что

$$|\rho| \geqslant \beta(h)\sqrt{h}. \qquad (40)$$

В этом случае мы получим две различные оценки модуля разности $[I(t) - I(\tau)]$ (см. ниже (48) и (51)). Обе эти оценки будут использованы при выводе окончательного неравенства.

Ясно, что $|t^* - t| = 2\left|\sin\frac{\rho}{2}\right| \geqslant \frac{2|\rho|}{\pi}$. Поэтому при любом $\gamma \in \Gamma^a$ при условии (40) верны следующие неравенства:

$$|\gamma - \tau| \geqslant |\gamma - t| - |t - \tau| = |\gamma - t| \left(1 - \frac{|t - \tau|}{|\gamma - t|}\right) \geqslant$$

$$\geqslant |\gamma - t| \left(1 - \frac{h}{|t^* - t|}\right) \geqslant |\gamma - t| \left(1 - \frac{h}{2/\pi|\rho|}\right) \geqslant$$

---

* Если $\min\limits_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma)| > 0$, то при всех достаточно малых h множество Γ^a пусто, и $I \equiv 1$.

$$>|\gamma-t|\left(1-\frac{h}{2/\pi\beta(h)\sqrt{h}}\right)>|\gamma-t|\left(1-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{|\gamma-t|}{3}. \tag{41}$$

Точки t и τ расположены на одной и той же открытой дуге L окружности Γ, дополнительной к замкнутому множеству Γ^a, так как $t^*=te^{i\varphi}$, где $|\varphi|>\beta(h)\sqrt{h}>3h$, а $\tau=te^{ih}$. Функция $I=I_a$ аналитична на этой дуге. Поэтому

$$|I(t)-I(\tau)|\leqslant\max_{\xi\in P_{t,\tau}}|I'(\xi)|\cdot h, \tag{42}$$

где $P_{t,\tau}$ — содержащаяся в L дуга с концами t и τ (длина этой дуги равна h). Имеем (см. (19))

$$|I'(\xi)|\leqslant|\varphi'(\xi)|+|B'(\xi)|\leqslant2\int\limits_{\Gamma^a}\frac{d\mu_a(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2}+m+\sum_k\frac{1-|t_k|^2}{|t_k-\xi|^2}. \tag{43}$$

Впредь мы будем считать, что $m=0$.

Лемма 5. *Если мера μ непрерывна (т. е. мера любого одноточечного подмножества окружности Γ равна нулю), то при $\xi\in\Gamma\setminus Z_f$*

$$2\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2}+\sum_k\frac{1-|t_k|^2}{|t_k-\xi|^2}<\frac{\eta(\xi)}{[\operatorname{dist}(\xi, Z_f)]^2}, \tag{44}$$

где $Z_f=\{\gamma\in\Gamma: f(\gamma)=0\}$, $\eta(\xi)\to0$, если $\operatorname{dist}(\xi, Z_f)\to0$ ($\operatorname{dist}(\xi, E)$ — расстояние от точки ξ до множества E, μ и t_k обозначают то же, что в лемме 1).

Функцию η можно считать монотонной.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2}=2\int\limits_d^{\infty}F_u(\xi)\frac{du}{u^3}, \tag{45}$$

где $F_u(\xi)=\mu\{\gamma\in\Gamma: |\gamma-\xi|<u\}$, $d=\operatorname{dist}(\xi, Z_f)$.

Каждая из функций F_u непрерывна на Γ, и

$$F_u(\xi)\downarrow0 \text{ при } u\downarrow0$$

в каждой точке $\xi\in\Gamma$. Из теоремы Дини следует, что

$$\lim_{u\to0}\max_{\xi\in\Gamma}F_u(\xi)=0.$$

Поэтому интеграл в (45) не больше, чем $\int\limits_d^{\infty}\frac{\lambda(u)}{u^3}du$, где λ — ограниченная непрерывная функция, причем $\lim\limits_{u\to0}\lambda(u)=0$. Применяя правило Лопиталя, убеждаемся в том, что последний интеграл есть $o(d^{-2})(d\to+0)$.

Из условия, которому подчинены корни функции f, расположенные в круге U, следует, что

$$\operatorname{dist}(\xi, Z_f) \leqslant c\,|t_k - \xi| \tag{46}$$

(c не зависит от ξ и k).

Поэтому ряд $\sum\limits_k (1-|t_k|^2)\dfrac{[d(\xi)]^2}{|t_k-\xi|^2}$ при всех $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$ мажорируется сходящимся рядом $c\sum\limits_k (1-|t_k|)$, что обеспечивает возможность почленного перехода к пределу при $d(\xi)\to 0$. Лемма доказана.

Сопоставляя (42), (43) и (44) с тем фактом, что

$$d(\xi) \geqslant c\beta(h)\sqrt{h} \text{ при всех } \xi \in P_{t,\tau}$$

(c — абсолютная постоянная; см. (40) и (41)), предполагая, что для любой точки $\xi \in P_{t,\tau}$

$$d(\xi) \leqslant \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}, \tag{47}$$

получим (см. (13))

$$|I(t) - I(\tau)| \leqslant (\zeta(h) + \nu(\Gamma))\,[\beta(h)]^{-2},$$

$$\zeta(h) = \gamma_1\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right) + \int\limits_{\Gamma^a} |\log|f||\,d\sigma + |\log a|\,\sigma(\Gamma^a), \tag{48}$$

где $\nu(\Gamma)$ — сумма всех чисто точечных нагрузок, входящих в μ.

Если же неравенство (47) нарушается для какой-нибудь точки $\xi_0 \in P_{t,\tau}$, то, принимая во внимание неравенство

$$\operatorname{diam} P_{t,\tau} \leqslant h,$$

получим, что для любой точки $\xi \in P_{t,\tau}$

$$d(\xi) \geqslant \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} - h \geqslant \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\cdot\frac{4}{5},$$

так как $\omega(|f|, \delta) \leqslant 2$ при всех $\delta > 0$, а $h < \dfrac{1}{100}$.

Поэтому

$$|\Phi(\tau)|\,|I(t) - I(\tau)| \leqslant |I(t) - I(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant h \max_{\xi\in P_{t,\tau}} \left| 2\int\limits_{\Gamma^a} \frac{d\lambda_a(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2} + \sum_k \frac{1-|t_k|^2}{|t_k-\xi|^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C\,\frac{h}{\min\limits_{\xi\in P_{t,\tau}} [d(\xi)]^2} \leqslant C_1\,\omega(\beta(h)\sqrt{h}), \tag{49}$$

где C_1 — постоянная, которую можно выразить через $\mu(\Gamma)$, последовательность $\{t_k\}$ и M_a (см. лемму 3).

Вернемся еще раз к оценкам (42) и (43). Принимая во внимание (41), заключаем, что

$$\geqslant|\gamma-t|\left(1-\frac{h}{2/\pi\beta(h)\sqrt{h}}\right)\geqslant|\gamma-t|\left(1-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{|\gamma-t|}{3}. \tag{41}$$

Точки t и τ расположены на одной и той же открытой дуге L окружности Γ, дополнительной к замкнутому множеству Γ^a, так как $t^*=te^{i\rho}$, где $|\rho|>\beta(h)\sqrt{h}>3h$, а $\tau=te^{ih}$. Функция $I=I_a$ аналитична на этой дуге. Поэтому

$$|I(t)-I(\tau)|\leqslant\max_{\xi\in P_{t,\tau}}|I'(\xi)|\cdot h, \tag{42}$$

где $P_{t,\tau}$ — содержащаяся в L дуга с концами t и τ (длина этой дуги равна h). Имеем (см. (19))

$$|I'(\xi)|\leqslant|\varphi'(\xi)|+|B'(\xi)|\leqslant2\int\limits_{\Gamma^a}\frac{d\mu_a(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2}+m+\sum_k\frac{1-|t_k|^2}{|t_k-\xi|^2}. \tag{43}$$

Впредь мы будем считать, что $m=0$.

Лемма 5. *Если мера μ непрерывна (т. е. мера любого одноточечного подмножества окружности Γ равна нулю), то при $\xi\in\Gamma\setminus Z_f$*

$$2\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2}+\sum_k\frac{1-|t_k|^2}{|t_k-\xi|^2}<\frac{\eta(\xi)}{[\operatorname{dist}(\xi,Z_f)]^2}, \tag{44}$$

где $Z_f=\{\gamma\in\Gamma\colon f(\gamma)=0\}$, $\eta(\xi)\to0$, если $\operatorname{dist}(\xi,Z_f)\to0$ ($\operatorname{dist}(\xi,E)$ — расстояние от точки ξ до множества E, μ и t_k обозначают то же, что в лемме 1).

Функцию η можно считать монотонной.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\gamma)}{|\gamma-\xi|^2}=2\int\limits_d^\infty F_u(\xi)\frac{du}{u^3}, \tag{45}$$

где $F_u(\xi)=\mu\{\gamma\in\Gamma\colon|\gamma-\xi|<u\}$, $d=\operatorname{dist}(\xi,Z_f)$.

Каждая из функций F_u непрерывна на Γ, и

$$F_u(\xi)\downarrow0 \text{ при } u\downarrow0$$

в каждой точке $\xi\in\Gamma$. Из теоремы Дини следует, что

$$\lim_{u\to0}\max_{\xi\in\Gamma}F_u(\xi)=0.$$

Поэтому интеграл в (45) не больше, чем $\int\limits_d^\infty\frac{\lambda(u)}{u^3}du$, где λ — ограниченная непрерывная функция, причем $\lim\limits_{u\to0}\lambda(u)=0$. Применяя правило Лопиталя, убеждаемся в том, что последний интеграл есть $o(d^{-2})(d\to+0)$.

Из условия, которому подчинены корни функции f, расположенные в круге U, следует, что

$$\operatorname{dist}(\xi, Z_f) \leqslant c\,|t_k - \xi| \tag{46}$$

(c не зависит от ξ и k).

Поэтому ряд $\sum\limits_k (1 - |t_k|^2) \dfrac{[d(\xi)]^2}{|t_k - \xi|^2}$ при всех $\xi \in \Gamma \setminus Z_f$ мажорируется сходящимся рядом $c \sum\limits_k (1 - |t_k|)$, что обеспечивает возможность почленного перехода к пределу при $d(\xi) \to 0$. Лемма доказана.

Сопоставляя (42), (43) и (44) с тем фактом, что

$$d(\xi) \geqslant c\beta(h)\sqrt{h} \quad \text{при всех } \xi \in P_{t,\tau}$$

(c — абсолютная постоянная; см. (40) и (41)), предполагая, что для любой точки $\xi \in P_{t,\tau}$

$$d(\xi) \leqslant \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}, \tag{47}$$

получим (см. (13))

$$|I(t) - I(\tau)| \leqslant (\zeta(h) + \nu(\Gamma))\,[\beta(h)]^{-2},$$

$$\zeta(h) = \gamma_1\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right) + \int\limits_{\Gamma^a} |\log|f||\,d\sigma + |\log a|\,\sigma(\Gamma^a), \tag{48}$$

где $\nu(\Gamma)$ — сумма всех чисто точечных нагрузок, входящих в μ.

Если же неравенство (47) нарушается для какой-нибудь точки $\xi_0 \in P_{t,\tau}$, то, принимая во внимание неравенство

$$\operatorname{diam} P_{t,\tau} \leqslant h,$$

получим, что для любой точки $\xi \in P_{t,\tau}$

$$d(\xi) \geqslant \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} - h \geqslant \sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}} \cdot \frac{4}{5},$$

так как $\omega(|f|, \delta) \leqslant 2$ при всех $\delta > 0$, а $h < \dfrac{1}{100}$.

Поэтому

$$|\Phi(\tau)|\,|I(t) - I(\tau)| \leqslant |I(t) - I(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant h \max_{\xi \in P_{t,\tau}} \left[2 \int\limits_{\Gamma^a} \frac{d\lambda_a(\gamma)}{|\gamma - \xi|^2} + \sum_k \frac{1 - |t_k|^2}{|t_k - \xi|^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{h}{\min\limits_{\xi \in P_{t,\tau}} [d(\xi)]^2} \leqslant C_1\,\omega(\beta(h)\sqrt{h}), \tag{49}$$

где C_1 — постоянная, которую можно выразить через $\mu(\Gamma)$, последовательность $\{t_k\}$ и M_a (см. лемму 3).

Вернемся еще раз к оценкам (42) и (43). Принимая во внимание (41), заключаем, что

$$|\gamma-\xi|>\frac{1}{3}|t^*-t|, \tag{50}$$

если $\gamma\in\Gamma^a$, а $\xi\in P_{t,\tau}$. Поэтому из (42) и (43) непосредственно (с учетом (44) и (50)) получим

$$|I(t)-I(\tau)|\leqslant\frac{C}{|t^*-t|^2}\left(\lambda_a(\Gamma)+\sum_k(1-|t_k|)\right)\cdot h=\frac{D}{|t^*-t|^2}\cdot h, \tag{51}$$

где $D=D_f$ зависит лишь от последовательности $\{t_k\}$, $\mu(\Gamma)$, $\sup|\log a|\times$ $\times\int\limits_{\Gamma^a}|\log|f||\,d\sigma$, $\int\limits_{\Gamma}|\log|f||\,d\sigma$.

Наконец, заметим, что

$$|\Phi(\tau)|\leqslant|\Phi(t)|+\omega(h)\leqslant|\Phi(t^*)|+\omega(|\rho|)+$$
$$+\omega(h)=2\omega(\beta(h)\sqrt{h})+\omega(|\rho|)+\omega(h).$$

Вспоминая, что $|I(\gamma)|\leqslant 1$ при всех $\gamma\in\Gamma$, получим

$$|\Phi(\tau)||I(t)-I(\tau)|\leqslant 4\omega(\beta(h)\sqrt{h})+2\omega(h)+\omega(|\rho|)\,|I(t)-I(\tau)|. \tag{52}$$

Приступая к оценке последнего слагаемого, представим $|I(t)-$ $-I(\tau)|$ в виде $|I(t)-I(\tau)|^{1/2}\cdot|I(t)-I(\tau)|^{1/2}$, для оценки первого сомножителя используем неравенство (51), а для второго—(48). Получим

$$\omega(|\rho|)\,|I(t)-I(\tau)|<\omega(|\rho|)\cdot\frac{\sqrt{D_f}}{|t-t^*|}\cdot\sqrt{h}\cdot\frac{\sqrt{\zeta(h)+\nu(\Gamma)}}{\beta(h)}\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{\sqrt{h}[\beta(h)]^2}\sqrt{D_f}\sqrt{h}\sqrt{\zeta(h)+\nu(\Gamma)}=$$
$$=2\sqrt{D_f}\,\frac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{[\beta(h)]^2}\sqrt{\zeta(h)+\nu(\Gamma)} \tag{53}$$

(мы воспользовались оценкой $\dfrac{\omega(|t-t^*|)}{|t-t^*|}\leqslant 2\dfrac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{\beta(h)\sqrt{h}}$ и неравенством $\operatorname{dist}(\xi,Z_f)\leqslant\sqrt{\dfrac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}$ $(\xi\in P_{t,\tau})$; если это последнее неравенство не выполнено при каком-нибудь $\xi\in P_{t,\tau}$, то выполнено (49)).

Итак (см. (20), (38), (52), (53) и (49)), получаем окончательно: если t и τ—точки окружности Γ, $\tau=te^{ih}$, $0<h<\frac{1}{100}$, $\omega(\sqrt{h})<\frac{1}{2}$, $|\rho|>\beta(h)\sqrt{h}$, то

$$|f(t)-f(\tau)|\leqslant c\left\{\Omega(h)+\alpha\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right)\left[\omega(\beta(h)\sqrt{h})+\right.\right.$$

$$+h\frac{\omega(\chi(h))}{[\chi(h)]^2}\Bigg|+h|\log l(h)|\frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)}+$$

$$+\frac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{[\beta(h)]^2}\sqrt{\eta\left(\left(\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}\right)^{1/2}\right)+2\int_{\Gamma^a}|\log|f||\,d\sigma+\nu(\Gamma)+}$$

$$+\omega(\beta(h)\sqrt{h})\Bigg\},$$

где c — число, зависящее лишь от μ, $\|f\|_\Gamma$ и последовательности $\{t_k\}$; $l(h)=a=2\omega(\beta(h)\sqrt{h})$, $\chi(h)=\beta(h)\sqrt{h}$, если функция f обращается в нуль на окружности Γ, а в противном случае l и χ отделены от нуля; α и η — монотонные на $(0,+\infty)$ неотрицательные функции,

$$\lim_{x\to+0}\eta(x)=\lim_{x\to+0}\alpha(x)=0.$$

Если же $|\rho|<\beta(h)\sqrt{h}$, то

$$|f(t)-f(\tau)|\leqslant 7\omega(\beta(h)\sqrt{h})$$

(см. (39)).

Теперь можно уточнить выбор $\beta(h)$. Если $\nu(\Gamma)>0$, то мы положим $\beta(h)=1$. Если $\nu(\Gamma)=0$, то $\beta(h)$ нужно выбрать так, чтобы коэффициент при $\omega(\beta(h)\sqrt{h})$ оставался ограниченным, и $\lim\limits_{h\to+0}\beta(h)=0$ Для этого в том случае, когда f имеет корни на Γ, положим, например (см. (15))

$$\beta(h)=h^{1/4}+[\alpha(ch^{1/8})]^{1/2}+[\eta(ch^{1/8})+2A(f,\sigma(\Gamma^{2\omega(\sqrt{h})}))]^{1/4},$$

где c — положительное число, не зависящее от h. Тогда (см. п. 2 в конце § 1) получим

$$\omega(\beta(h)\sqrt{h})\geqslant\omega(h^{3/4})\geqslant\varkappa h^{3/4},\ [\beta(h)]^2\geqslant\alpha(ch^{1/8}),$$

$$[\beta(h)]^2\geqslant\sqrt{\eta(ch^{1/8})+2\int_{\Gamma^a}|\log|f||\,d\sigma},$$

$$\frac{1}{[\beta(h)]^2}\alpha\left(\sqrt{\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha(ch^{1/8})}\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}h^{1/8}\right)\leqslant 1,$$

$$\frac{1}{[\beta(h)]^2}\left[\eta\left(\left(\frac{h}{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}\right)^{1/2}\right)+2\int_{\Gamma^a}|\log|f||\,d\sigma\right]^{1/2}\leqslant 1,$$

если $\varkappa=c^{-2}$.

В то же время

$$h|\log l(h)|\frac{\omega(\chi(h))}{\chi(h)}\leqslant\sqrt{h}\,|\log\omega(\beta(h)\sqrt{h})|\frac{\omega(\beta(h)\sqrt{h})}{\beta(h)}\leqslant$$

$$\leqslant h^{1/4}|\log\varkappa h^{3/4}|\,\omega(\beta(h)\sqrt{h}).$$

Итак

$$\omega(f, h) = O(\omega(\sqrt{h}) + \Omega(h)) \quad (h \to +0),$$

$$\omega(f, h) = O(\omega(o(\sqrt{h})) + \Omega(h)) \quad (h \to +0),$$

если $\nu(\Gamma) = 0$.

Если же f не обращается в нуль на Γ, то можно положить $\beta(h) = 3\sqrt{h}$. В этом случае

$$\omega(\beta(h)\sqrt{h}) = \omega(3h) = O(\Omega(h)) \quad (h \to +0),$$

$$\omega(f, h) = O(\Omega(h)) \quad (h \to +0).$$

Теорема 1 доказана.

§ 6. Точность теоремы 1

Теорема 2. *Пусть φ — функция, заданная на открытой полуоси $(0, +\infty)$, возрастающая и такая, что*

$$\varphi(x_1 + x_2) \leqslant \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \ (x_1, x_2 > 0), \ \lim_{x \to +0} \varphi(x) = 0 \tag{54}$$

(короче, φ—какой-нибудь модуль непрерывности).

Если

$$\int_0 \frac{\varphi(u)}{u} du < +\infty, \tag{55}$$

то существует такая функция f класса A, что

$$\omega(|f|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \to +0),$$

$\omega(f, \delta) > \varphi(\sqrt{\delta}) + \Phi(\delta)$ *при всех* δ *из интервала* $(0, 1)$,

где

$$\Phi(\delta) = \int_0^\delta \frac{\varphi(u)}{u} du + \delta \int_\delta^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

Доказательство. Функция φ совпадает со своим модулем непрерывности. Не умаляя общности, можно считать, что φ непрерывно дифференцируема в интервале $(0, +\infty)$, и

$$\frac{\varphi'(\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{1}{\delta} \quad (\delta > 0) \tag{56}$$

(см. § 1, п. 5). Последнее неравенство следует из монотонности отношения $\dfrac{\varphi(\delta)}{\delta}$:

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right) = \frac{\varphi'(\delta)}{\delta} - \frac{\varphi(\delta)}{\delta^2} \leqslant 0.$$

Пусть w—заданная на единичной окружности Γ функция, обладающая следующими свойствами:

$$w(e^{i\theta}) = \varphi(|\theta|), \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}; \tag{57}$$

$$w(e^{i(\pi+\theta)}) = \begin{cases} 1, \text{ если } -\dfrac{\pi}{4} < \theta < 0; \\ \exp \varphi(|\theta|), \text{ если } 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{58}$$

(мы будем считать, что $\varphi(0) = 0$);

$$w \text{ непрерывна на } \Gamma \text{ и строго положительна на } \Gamma \setminus \{1\}; \tag{59}$$

$$\omega(w, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \to +0). \tag{60}$$

Из условий (57) и (59) следует, что функция $\log w$ суммируема на Γ. Положим

$$g(t) = \exp\left[\int_\Gamma \log w \cdot S_t \, d\sigma\right] \quad (t \in U). \tag{61}$$

Функцию g можно продолжить на замкнутый круг $U \cup \Gamma$ с сохранением непрерывности. Это следует из того, что в некоторой окрестности V_γ каждой точки γ множества $\Gamma \setminus \{1\}$ функция $\log w$ непрерывна, и модуль непрерывности $\omega(\log w, V_\gamma, \delta)$ ее сужения на V_γ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^{\cdot} \frac{\omega(\log w, V_\gamma, \delta)}{\delta} d\delta < +\infty,$$

а $\lim\limits_{t \to 1, |t| < 1} |g(t)| = 0$ (мы считаем, что $|g(\gamma)| = w(\gamma)$, если $\gamma \in \Gamma$ — см. лемму 2).

Положим

$$f(t) = \exp\left[-\frac{1+t}{1-t}\right] \cdot g(t) \quad (t \in (U \cup \Gamma) \setminus \{1\}), \tag{62}$$

$$f(1) = 0.$$

Легко видеть, что f принадлежит классу A, и

$$\omega(|f|, \delta) = \omega(w, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \to +0).$$

Если $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, то

$$f(e^{i\theta}) = \varphi(\theta) \cdot \exp[iD(\theta)],$$

где

$$D(\theta) = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log w(e^{iu}) \operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2} \, du.$$

Проверим, что

$$D(\theta)=-\frac{2}{\theta}+R(\theta)+O(1)\quad(\theta\to+0),\tag{63}$$

где R — функция, дифференцируемая на промежутке $(0,\pi/4)$ и удовлетворяющая условию

$$R'(\theta)=o\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\quad(\theta\to+0).\tag{64}$$

Пусть $h(\theta)=\log w(e^{i\theta})$. Если $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, то (см. (57))

$$h'(\theta)=\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}.$$

Как отмечалось в начале доказательства (см. (56))

$$h'(\theta)\leqslant\frac{1}{\theta}\quad\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right).\tag{65}$$

Положим

$$R(\theta)=-\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\theta/2}+\int\limits_{3\theta/2}^{\pi}\right)h(u)\frac{1}{u-\theta}\,du\quad\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right).\tag{66}$$

Легко проверить, что

$$D(\theta)=-\frac{2}{\theta}+R(\theta)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta/2}^{3\theta/2}\frac{h(u)}{u-\theta}\,du+r(\theta)\quad\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right),\tag{67}$$

где r — функция, аналитическая на интервале $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. Имеем

$$-\pi R'(\theta)=-\frac{h(\theta/2)}{\theta/2}+\int\limits_{-\pi}^{\theta/2}\frac{h(u)}{(u-\theta)^2}\,du-\frac{h\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\theta/2}+\int\limits_{3\theta/2}^{\pi}\frac{h(u)}{(u-\theta)^2}\,du.\tag{68}$$

Ясно, что $|h(\theta)|=|\log\varphi(|\theta|)|\leqslant|\log C|\theta||$. Поэтому

$$\frac{\left|h\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|+\left|h\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|}{\theta}=O\left(\frac{|\log\theta|}{\theta}\right)\quad(\theta\to+0),\tag{69}$$

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\theta/2}\frac{h(u)}{(u-\theta)^2}\,du\right|\leqslant\int\limits_{-\pi/4}^{0}\frac{|h(u)|}{(u-\theta)^2}\,du+\int\limits_{0}^{\theta/2}\frac{|h(u)|\,du}{(u-\theta)^2}+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{|\log Cu|}{(u+\theta)^2}\,du+\frac{4}{\theta^2}\int\limits_{0}^{\theta/2}|\log Cu|\,du+O(1)=$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{|\log u|}{(u+\theta)^2}\, du + O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) \leqslant \frac{1}{\theta} \int_0^{\pi/4\theta} \frac{|\log v| + |\log \theta|}{v+1}\, dv +$$

$$+ O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) = O\left(\frac{(\log \theta)^2}{\theta}\right) \quad (\theta \to +0). \tag{70}$$

Наконец

$$\left|\int_{3\theta/2}^{\pi} \frac{h(u)}{(u-\theta)^2}\, du\right| \leqslant \int_{3\theta/2}^{\pi/4} \frac{|h(u)|\, du}{(u-\theta)^2} + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \left| h\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right| \int_{3\theta/2}^{\pi/4} \frac{du}{(u-\theta)^2} + O(1) = O\left(\frac{|\log \theta|}{\theta}\right) \quad (\theta \to +0). \tag{71}$$

Итак (см. (68)—(71))

$$R'(\theta) = O\left(\frac{|\log \theta|^2}{\theta}\right) \quad (\theta \to +0),$$

так что (64) выполнено, если функция R определяется равенством (66).

Осталось проверить, что

$$\int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u)}{u-\theta}\, du = O(1) \quad (\theta \to +0).$$

Имеем

$$\left|\int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u)}{u-\theta}\, du\right| = \left|\int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{h(u)-h(\theta)}{u-\theta}\, du\right| \leqslant \frac{2}{\theta}\cdot \theta = 2$$

(мы воспользовались оценкой (65) и теоремой Лагранжа о среднем). Утверждения (63) и (64) доказаны.

Ясно, что $\lim D(\theta) = -\infty$, и что D — функция, непрерывная в интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Пусть θ — достаточно малое положительное число, и пусть $B(\theta)$ — такая точка промежутка $(0, \theta)$, что

$$D(B(\theta)) = D(\theta) - \pi.$$

Применяя (63), (64) и теорему Лагранжа о среднем, получим

$$\pi = D(\theta) - D(B(\theta)) =$$

$$= \frac{2}{c^2}(\theta - B(\theta))\cdot(1 + o(1)) + O(1) \qquad (\theta \to +0),$$

где c — некоторая точка промежутка $(B(\theta), \theta)$. Поэтому

$$\theta - B(\theta) = \left(\frac{\pi}{2} + O(1)\right)\cdot(1 + o(1))\, c^2 \leqslant O(1)\cdot\theta^2 \quad (\theta \to +0).$$

В то же время

$$|f(e^{i\theta})-f(e^{iB(\theta)})|=|\varphi(\theta)\,e^{iD(\theta)}-\varphi(B(\theta))\,e^{i(D(\theta)-\pi)}|=$$
$$=\varphi(\theta)+\varphi(B(\theta))\geqslant\varphi(\theta).$$

Значит, найдется такое положительное C, что

$$\frac{|f(e^{i\theta})-f(e^{iB(\theta)})|}{\varphi(\sqrt{\theta-B(\theta)})}>\frac{\varphi(\theta)}{\varphi(C\theta)}>\frac{1}{C}$$

при всех достаточно малых положительных θ ($\theta<\theta_0$). Всякое достаточно малое положительное число δ совпадает с некоторым числом вида $\theta-B(\theta)$, где $\theta\in(0,\theta_0)$. Поэтому

$$C\omega(f,\delta)>\varphi(\sqrt{\delta}), \tag{72}$$

если число δ положительно и достаточно мало.

Оценим теперь снизу разность $|f(-1)-f(e^{i\theta})|$ при θ, принадлежащих промежутку $\left(\frac{3}{4}\pi,\ \pi\right)$ и близких к π.

Ясно, что

$$|f(-1)-f(e^{i\theta})|>|g_1(-1)-g_1(e^{i\theta})|-r_1(\theta), \tag{73}$$

где

$$g_1(t)=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-3\pi/4}\varphi(\pi+u)\,\frac{e^{iu}+t}{e^{iu}-t}\,du\right],\quad (t\in U)$$

и

$$r_1(\theta)=O(\pi-\theta)\quad(\theta\to\pi-0).$$

Полагая $\theta=\pi-\delta$, получим

$$|g_1(-1)-g_1(e^{i\theta})|=\left|1-\frac{g_1(e^{i\theta})}{g_1(-1)}\right|>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{\pi/4}\varphi(u)\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,du-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^{\pi/4}\varphi(u)\operatorname{ctg}\frac{u+\delta}{2}\,du\right|>\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_0^1\frac{\varphi(u)}{u}\,du-\int\limits_0^1\frac{\varphi(u)}{u+\delta}\,du\right]-r_2(\delta), \tag{74}$$

где $r_2(\delta)=O(\delta)\quad(\delta\to+0)$.

Далее

$$\int\limits_0^1\frac{\varphi(u)}{u}\,du-\int\limits_0^1\frac{\varphi(u)}{u+\delta}\,du=\int\limits_0^\delta\frac{\varphi(u)}{u}\,du+\int\limits_\delta^1\varphi(u)\left[\frac{1}{u}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{u+\delta}\right]du-\int\limits_0^\delta\frac{\varphi(u)}{u+\delta}\,du=\Phi(\delta)-\delta\int\limits_\delta^1\frac{\varphi(u)}{u^2}\,\frac{\delta\,du}{u+\delta}-\int\limits_0^\delta\frac{\varphi(u)}{u+\delta}\,du.$$

Заметим теперь, что

$$\delta\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(u)}{u^2}\,\frac{\delta\,du}{u+\delta} < \frac{\delta}{2}\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du \leqslant \frac{1}{2}\,\Phi(\delta),$$

$$\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\varphi(u)}{u+\delta}\,du \leqslant \varphi(\delta)\log 2.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\varphi(u)}{u}\,du - \int\limits_{0}^{1}\frac{\varphi(u)}{u+\delta}\,du > \frac{1}{2}\,\Phi(\delta) - \log 2\cdot\varphi(\delta)$$

(эта оценка известна—см. [2]).

Возвращаясь к (73) и (74), получим

$$\omega(f,\delta) > |f(-1) - f(e^{i(\pi-\delta)})| > \frac{1}{4\pi}\,\Phi(\delta) - \frac{\log 2}{2\pi}\,\varphi(\delta) - r_3(\delta), \qquad (75)$$

где $r_3(\delta) = O(\delta)$ $(\delta \to +0)$.

Сопоставляя (75) с (72), при всех малых положительных δ получим

$$C\,\omega(f,\delta) > \varphi(\sqrt{\delta}) + \frac{1}{4\pi}\,\Phi(\delta) - \frac{\log 2}{2\pi}\,\varphi(\delta) - r_3(\delta) >$$

$$> \left(1 - \frac{\log 2}{2\pi}\right)\varphi(\sqrt{\delta}) + \frac{1}{4\pi}\,\Phi(\delta) - r_3(\delta),$$

если C — достаточно большое (не зависящее от δ) число. Заметим теперь, что $r_3(\delta) = O(\delta) = o(\varphi(\sqrt{\delta}))$ $(\delta \to +0)$, так как $\dfrac{\delta}{\varphi(\sqrt{\delta})} =$
$= \dfrac{\sqrt{\delta}}{\varphi(\sqrt{\delta})}\cdot\sqrt{\delta} = O(\sqrt{\delta})$ $(\delta \to +0)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть φ—функция, удовлетворяющая условиям* (54) *и* (55) *теоремы* 2, *а β—положительная функция, заданная на интервале* (0, 1). *Если $\beta(+0)=0$, то найдется внешняя функция g класса A такая, что*

$$\omega(|g|,\delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \to +0),$$

$$\omega(g,\delta) > \varphi(\beta(\delta)\sqrt{\delta}) + \Phi(\delta)$$

при всех достаточно малых положительных δ.

Функцию β можно, не умаляя общности, считать возрастающей.

Доказательству этой теоремы предпошлем простую лемму.

Лемма 6. *Пусть η—положительная функция, заданная на промежутке* (0, 1], *причем $\lim\limits_{\delta \to +0}\eta(\delta) = 0$. Тогда существует непрерывно дифференцируемая и суммируемая на промежутке* (0, 1] *убывающая положительная функция ψ такая, что*

$$\left.\begin{aligned} \eta(\delta) &= o\left(\int_0^\delta \psi(u)\,du\right) \\ \psi'(\delta) &= o\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (\delta\to+0).$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно предполагать, что

$$\eta(\delta) = \left(\int_0^\delta g(u)\,du\right)^2,$$

где функция g положительна и суммируема на промежутке (0,1) (достаточно рассмотреть возрастающую непрерывную на промежутке [0,1] мажоранту функции $\sqrt{\eta}$, кусочно-линейную на каждом сегменте вида $[\varepsilon, 1]$ $(0<\varepsilon<1)$. Введем в рассмотрение невозрастающую на интервале (0,1) функцию g^*, равноизмеримую с функцией g (определение функции g^* и описание ее свойств можно найти в пункте 13 первой главы монографии [1]).

Пусть теперь $\Psi(x) = \int_0^1 x^\alpha g^*(\alpha)\,d\alpha$. Функция Ψ бесконечно дифференцируема и возрастает в промежутке (0, 1), причем $\lim_{x\to+0}\Psi(x)=0$. Кроме того ([1], стр. 57)

$$\Psi(x) > \int_0^x x^\alpha g^*(\alpha)\,d\alpha > x^x \int_0^x g^*(\alpha)\,d\alpha >$$

$$> x^x \int_0^x g(\alpha)\,d\alpha \geqslant x^x \sqrt{\eta(x)},$$

так что $\dfrac{\Psi(x)}{\eta(x)} > \mathrm{const}\,\dfrac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \to +\infty$ при $x\to+0$.

Наконец

$$\Psi''(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^1 \alpha(\alpha-1)\,x^\alpha g^*(\alpha)\,d\alpha = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x\to+0),$$

$$\Psi''(x) \leqslant 0 \quad (x\in(0,1)),$$

остается положить $\psi = \Psi'$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим функцию w, заданную на окружности Γ, обладающую свойствами (58), (59), (60) и такую, что

$$w(e^{i\theta}) = \begin{cases} \varphi(\theta) & 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \\ \exp\left[-\psi(|\theta|)\right] & -\dfrac{\pi}{4} < \theta < 0, \end{cases}$$

где ψ — убывающая непрерывно дифференцируемая в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ положительная функция, выбор которой мы уточним позже. Пока предположим только, что

$$\psi'(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)(x \to +0), \int\limits_0^{\pi/4} \psi(x)\,dx < +\infty, \ \psi(x) > \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Рассмотрим функцию g, определенную формулой (61). Ясно, что $g \in A$ и что

$$\omega(|g|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \ (\delta \to +0).$$

Отметим, что на дуге $\left\{e^{i\theta}: -\frac{\pi}{4} < \theta < 0\right\}$ функция $|g|$ непрерывно дифференцируема, так как

$$\frac{d}{d\theta}\left[e^{-\psi(\theta)}\right] = e^{-\psi(\theta)} \cdot \psi'(\theta) \underset{\theta \to +0}{\to} 0.$$

В самом деле,

$$\psi(\theta) > \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \text{ а } \psi'(\theta) = o\left(\frac{1}{\theta^2}\right) \quad (\theta \to +0).$$

Пусть $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда

$$g(e^{i\theta}) = \varphi(\theta) \exp\left[iD^*(\theta)\right],$$

где

$$D^*(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log w(e^{iu}) \operatorname{ctg} \frac{u-\theta}{2}\,du =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\psi(u)\,du}{u+\theta} + R^*(\theta) + O(1) \quad (\theta \to +0); \tag{76}$$

а R^* — функция, заданная при $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ следующим образом:

$$R^*(\theta) = -\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{\theta/2} \frac{\log \varphi(u)}{u-\theta}\,du + \int\limits_{3\theta/2}^{\pi/4} \frac{\log \varphi(u)}{u-\theta}\,du\right].$$

При доказательстве теоремы 2 было установлено, что

$$\left|\frac{d}{d\theta}\,[R^*(\theta)]\right| = O\left(\frac{|\log\theta|}{\theta}\right)\ (\theta\to+0).$$

Положим $J(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\psi(u)\,du}{u+\theta}$. Ясно, что при малых положительных θ

$$\frac{d}{d\theta}\,[J(\theta)+R^*(\theta)] = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\psi(u)\,du}{(u+\theta)^2} + \frac{d}{d\theta}\,R^*(\theta) \geqslant$$

$$\geqslant cJ'(\theta) - c_1\frac{|\log\theta|}{\theta} \geqslant c_2\,J'(\theta),$$

так как $J'(\theta) \geqslant \int\limits_0^{\theta}\frac{du}{\sqrt{u}\,(u+\theta)^2} \geqslant \frac{c_3}{\theta^{3/2}}$ (c, c_1, $c_2, \cdots$ — положительные константы, не зависящие от θ).

Функция D^* непрерывна, и $\lim\limits_{\theta\to+0} D^*(\theta) = -\infty$. Пусть θ — достаточно малое положительное число. Через $B^*(\theta)$ обозначим точку интервала $(0, \theta)$, удовлетворяющую равенству $D(B^*(\theta)) = D(\theta) - \pi$.

Как и при доказательстве теоремы 2, из (76) получим

$$\pi = D^*(\theta) - D^*(B(\theta)) \geqslant \frac{d}{d\theta}\,[J(\theta)+R^*(\theta)]|_{\theta=c}\,(\theta - B^*(\theta)) +$$

$$+ O(1) \geqslant \mathrm{const}\cdot J'(c)\,(\theta - B^*(\theta)) + O(1) =$$

$$= \mathrm{const}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\psi(u)\,du}{(u+c)^2}\cdot(\theta - B^*(\theta)) + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{const}\int\limits_0^{\theta}\frac{\psi(u)\,du}{(u+\theta)^2}\cdot(\theta - B^*(\theta)) + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{const}\ \frac{1}{\theta^2}\int\limits_0^{\theta}\psi(u)\,du\cdot(\theta - B^*(\theta)) + O(1)\quad (\theta\to+0),$$

где c — некоторое число из интервала $(B^*(\theta), \theta)$. Поэтому

$$\theta - B^*(\theta) \leqslant O(1)\,\theta^2\left(\int\limits_0^{\theta}\psi(u)\,du\right)^{-1}\quad (\theta\to+0).$$

Пользуясь леммой 6, выберем теперь φ так, чтобы

$$\beta^2(\theta) = o\left(\int\limits_0^{\theta}\psi(u)\,du\right)\quad (\theta\to+0).$$

Тогда

$$\theta - B^*(\theta) < \frac{\theta^2}{[\beta(\theta)]^2} \leqslant \frac{\theta^2}{[\beta(\theta - B^*(\theta))]^2}$$

при всех достаточно малых положительных θ. Поэтому

$$\varlimsup_{\theta \to +0} \frac{|g(e^{i\theta}) - g(e^{iB^*(\theta)})|}{\varphi(\beta(\theta - B^*(\theta)))\sqrt{\theta - B^*(\theta)}} \geqslant 1.$$

Тот факт, что $\omega(f, \delta)$ мажорирует const $\cdot \Phi(\delta)$ при малых δ, устанавливается точно так же, как при доказательстве теоремы 2. Доказательство закончено.

В заключение благодарю Г. И. Натансона и С. А. Виноградова за полезное обсуждение результатов этой работы.

Ленинградский государственный
университет

Поступило 7.VI.1971

Վ. Պ. ԽԱՎԻՆ. Համալուծ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի մասին Պրիվալով-Զիգմունդի թեորեմի ընդհանրացումը *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է շրջանում ռեգուլյար և ընդհուպ մինչև եզրը· անընդհատ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի և ֆունկցիայի մոդուլի եզրային արժեքների անընդհատության մոդուլի կապը։

V. P. HAVIN. *Generalization of the Privalov-Zygmund theorem on the modulus of continuity of conjugate function* (summary)

Let U be the open unit disc on the complex plane, Γ its boundary;

$$\omega(\psi, \delta) = \sup\{|\psi(e^{i\theta}) - \psi(e^{i\theta'})|: \theta, \theta' \in [0, 2\pi], |\theta - \theta'| \leqslant \delta\},$$

$$\Omega(\psi, \delta) = \int_0^\delta \frac{\omega(\psi, u)}{u} du + \delta \int_\delta^{2\pi} \frac{\omega(\psi, u)}{u^2} du$$

(ψ is a function defined on Γ); let A be the set of all functions continuous on $U \cup \Gamma$ and analytic on U.

Each function f from A admits canonical factorization (see [3], p. 100):

$$f = B_f Q_f S_f, \tag{*}$$

where Q_f is outer function, B_f is Blaschke product,

$$S_f(z) = \exp\left[-\int_\Gamma \frac{\gamma + z}{\gamma - z} d\mu_f(\gamma)\right] \quad (z \in U)$$

and μ_f is a positive Borel measure on Γ.

Theorem 1. Let the function f belong to A. Suppose that

$$\varlimsup_{z \to \gamma,\, z \in N_f} \frac{|z - \gamma|}{1 - |z|} < +\infty \ (\gamma \in \Gamma), \ N_f = \{z \in U, f(z) = 0\}.$$

Then

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \to +0). \tag{1}$$

If f satisfies the supplementary condition:

μ_f has no point masses

then

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \beta_f(\delta)\sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \to +0) \tag{2}$$

where $\beta_f(\delta) = o(1)$ $(\delta \to +0)$.

The proof of the theorem 1 yields an explicit expression of the function $\beta_f(\delta)$ in terms of the parameters involved in (*). This expression shows that for the nonvanishing in $U \cup \Gamma$ function $f \in A$

$$\beta_f(\delta) = O(\sqrt{\delta}) \quad (\delta \to +0).$$

That is why the theorem 1 implies the following assertion:

$$f \in A, \ \min_\Gamma |f| > 0 \Rightarrow \omega(f, \delta) = O(\Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \to +0)$$

which is equivalent to the Privalov-Zygmund theorem:

$$f \in A \Rightarrow \omega(f, \delta) = O(\Omega(Re f, \delta)) \quad (\delta \to +0).$$

The preciseness of (1) is shown by

Theorem 2. Let φ be a modulus of continuity (i. e. φ is an increasing function defined on $[0, +\infty)$ and such that $\varphi(+0) = 0$,

$$\varphi(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) \quad (\delta_1, \delta_2 > 0)).$$

If $\int_0^1 \varphi(u) u^{-1} du < \infty$, then there exists a function $f \in A$ with

$$\omega(f, \delta) \geqslant \varphi(\sqrt{\delta}) + \int_0^\delta \frac{\varphi(u)}{u} du + \delta \int_\delta^1 \frac{\varphi(u)}{u^2} du \quad (0 < \delta < 1) \tag{3}$$

$$\omega(|f|, \delta) = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta \to +0). \tag{4}$$

The condition (4) and the divergence of the integral $\int_0 \varphi(u) u^{-1} du$ are compatible with the arbitrarily slow decreasing of $\omega(f, \delta)$ (even for $f \in A$ without zeros in $U \cup \Gamma$).

The estimate (2) is also exact: the function $\beta_f(\delta)$ in general tends to zero arbitrarily slowly for outer functions $f \in A$ (theorem 3). The condition imposed on the set $f^{-1}(0) \cap U$ in theorem 1 cannot be deleted.

The estimation (1) and its preciseness were established for $f \in A$ with $f^{-1}(0) \cap U = \Lambda$ and $|f| \in \mathrm{Lip}(\alpha, \Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$ in a slightly weaker form in [4]. After paper [4] was published L. Carleson communicated to the author that for outer f's with $|f| \in \mathrm{Lip}(\alpha, \Gamma)$ (1) and its preciseness were proved earlier by him and his student Jacobs. This result of Carleson and Jacobs has not been published.

For outer functions f with $|f| \in \mathrm{Lip}(\alpha, \Gamma)$ (2) implies even $\omega(f, \delta) = o(\delta^{\alpha/2})$ $(\delta \to +0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. 1. М., 1965.
2. *Н. К. Бари, С. Б. Стечкин.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Труды Московского мат. о-ва, т. 5, 1956, 483—522.
3. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
4. *В. П. Хавин, Ф. А. Шамоян.* Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 19, 1970, 237—239.
5. *Ф. А. Шамоян.* Некоторые проблемы деления в пространствах аналитических функций, Диссертация, ЛГУ, 1970.
6. *М. Г. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
7. *Я. Л. Геронимус.* О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе, Мат. сб., 38, № 3, 1956, 319—330.
8. *Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз.* Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда, Мат. сб., 52, № 3, 1960, 891—894.
9. *В. П. Хавин.* О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22, 1971.
10. *А. Ф. Тиман.* Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 4, 1971 Математика

Р. С. ДАВТЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛАМИ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

В 1939 году Д. Е. Меньшовым была доказана следующая теорема о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами (см. [1]).

Теорема I (Д. Е. Меньшов). *Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.1}$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В дальнейшем А. А. Талаляном была доказана теорема (см. [2], теорему 1), являющаяся усилением теоремы 1. Она формулируется следующим образом.

Теорема II (А. А. Талалян). *Существует тригонометрический ряд (1.1), обладающий тем свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, из ряда (1.1) можно выделить подряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x,\ 0 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots,$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходится к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.

Заметим, что в доказательстве теоремы II существенно использована одна лемма Д. Е. Меньшова о свойствах интеграла Дирихле (см. [3], лемму 2), которая играет важную роль при доказательстве теоремы I. Однако теорема II, в отличие от теоремы I, доказывается без использования принципа локализации Римана для общих тригонометрических рядов и конструкции Д. Е. Меньшова построения нуль-рядов. Это обстоятельство позволяет, используя метод доказательства теоремы II, доказать следующую теорему о представлении измеримых функций интегралами Фурье.

Теорема 1. *Для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$, определенной на $[0, \infty)$, существует непрерывная на $[0, \infty)$ функция $g(t)$ такая, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\lambda} g(t)\cos xt\,dt = F(x) \tag{1.2}$$

для почти всех x, $x\in[0,\infty)$, *причем*

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \tag{1.3}$$

и

$$\overset{\rho}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\, g \leqslant \rho \quad (\rho\in[0,\infty)). \tag{1.4}$$

Заметим, что аналогичная теорема при более слабой сходимости (сходимость по мере) интегралов (1.2) и без требования выполнения (1.4) была доказана в [4], где вместо ядра $\cos xt$ рассмотрены более общие ядра.

Согласно теореме 1, оказывается, что при помощи сравнительно узкого класса функций $g(t)$, удовлетворяющих условиям (1.3) и (1.4), косинус-интегралами Фурье представляются все конечные измеримые функции, определенные на $[0,\infty)$. В связи с этим представляет интерес следующая задача.

Пусть $\varphi(\rho)$—неубывающая функция, заданная на $[0,\infty)$, и через B_φ обозначен класс непрерывных функций $g(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad \text{и} \quad \overset{\rho}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\, g = O(\varphi(\rho)) \text{ при } \rho\to\infty.$$

Для каких функций $\varphi(\rho)$ можно утверждать, что B_φ является классом представления конечных функций в смысле (1.2)?

Теорема 1 означает, что можно взять $\varphi(\rho)\equiv\rho$.

Из доказательства теоремы 1 будет видно, что существует функция $\varphi(\rho)=o(\rho)$, для которой класс B_φ все же является классом представления (в указанном выше смысле) для всех конечных измеримых функций.

Кроме того, легко показать, что нельзя взять $\varphi(\rho)=O(1)$. Однако нам не удалось найти окончательных оценок для $\varphi(\rho)$.

§ 2. Вспомогательные леммы

Лемма 1 (Д. Е. Меньшов) (см. [3], лемму 1). Пусть $[c, d]$—любой отрезок, r и $\nu>8$ — произвольные натуральные числа и

$$\delta=\frac{d-c}{\nu r},\ c_s=c+s\nu\delta,\ a_s=c_s-\delta$$

$$(s=0,1,2,\cdots,r). \tag{2.1}$$

Тогда

$$\left|\sum_{s=1}^{r}\int\limits_{a_s}^{c_s}\frac{\sin\rho(t-x)}{t-x}\,dt\right|<L$$

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\ \rho\in(-\infty,\ \infty)\right), \tag{2.2}$$

где L — абсолютная константа*.

Замечание 1. Пусть $[c,\ d]\subset[0,\ \infty)$ и сохранены все обозначения леммы 1. Положим

$$E_r=[c,\ d]-\bigcup_{s=1}^{r}[a_s,\ c_s], \tag{2.3}$$

$$\varphi_r(t)=\begin{cases}0, & t\in E_r\\ 1, & t\in[c,\ d]-E_r.\end{cases} \tag{2.4}$$

Тогда

$$E_r\subset[c,\ d],\ \mu E_r=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)(d-c), \tag{2.5}$$

$$\left|\int_c^d\varphi_r(t)\left[\frac{\sin\rho\,(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho\,(x+t)}{x+t}\right]dt\right|<C$$

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\quad \rho\in[0,\ \infty)\right), \tag{2.6}$$

где C — абсолютная константа, $C>1$.

Действительно, выполнение (2.5) очевидно (см. (2.3) и (2.1)). Обратившись к (2.6), заметим, что если $x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right]$ и $t\in[c,\ d]$, то $x+t\geqslant 2c+\frac{d-c}{\nu}$, и следовательно

$$\left|\int_c^d\varphi_r(t)\ \frac{\sin\rho\,(x+t)}{x+t}\,dt\right|=\left|\int_{[c,\ d]-E_r}\frac{\sin\rho\,(x+t)}{x+t}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\mu\{[c,\ d]-E_r\}}{2c+\frac{d-c}{\nu}}=\frac{\frac{d-c}{\nu}}{2c+\frac{d-c}{\nu}}\leqslant 1$$

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\quad \rho\in[0,\ \infty)\right).$$

С другой стороны (см. 2.2))

$$\left|\int_c^d\varphi_r(t)\ \frac{\sin\rho\,(x-t)}{x-t}\,dt\right|=\left|\sum_{s=1}^{r}\int_{a_s}^{c_s}\frac{\sin\rho\,(t-x)}{t-x}\,dt\right|<L$$

---

* ρ не обязано быть целым.

$$\left(x\in\left[c+\frac{d-c}{\nu},\ d-\frac{d-c}{\nu}\right],\ \rho\in[0,\infty)\right).$$

Из последних двух неравенств следует (2.6) при $C=L+1$.

Лемма 2. *Пусть A и M—некоторые положительные числа. Тогда для любой измеримой и почти везде конечной на $[0, A]$ функции $f(x)$, равной нулю вне некоторого множества $E\subset[0,A]$, для произвольных положительных η, σ, B, α и натурального $\nu>8$ существуют отрезок $[q, s]$, функция $g(x)$ и измеримые множества R и G, которые удовлетворяют условиям:*

a′) $s>q>\sigma$, *$g(x)$ непрерывна на отрезке $[q, s]$ и*

$$g(q)=g(s)=0,\ |g(x)|<\frac{8A}{\nu}\quad (x\in[q, s]);$$

b′) $R\subset E,\ \mu R>\left(1-\frac{8}{\nu}\right)\mu E;$

c′) $G\subset[0, A]-E,\ \mu G>A-\left(1+\frac{8}{\nu}\right)\mu E;$

d′) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^s g(t)\cos xt\,dt-f(x)\right|<\eta\quad (x\in R);$

e′) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^\rho g(t)\cos xt\,dt\right|<\frac{8A}{\nu}\ (x\in G,\ \rho\in[q, s]);$

f′) $B+\overset{\rho}{\underset{q}{\mathrm{V}}}\,g\leqslant\alpha\rho\quad (\rho\in[q, s]).$

Кроме этого, при наличии дополнительного условия

$$|f(x)|<M \tag{2.7}$$

имеет место также неравенство

$$g')\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^\rho g(t)\cos xt\,dt\right|<5\,CM\nu\quad (x\in R,\ \rho\in[q, s]),$$

где $C>1$— абсолютная константа, фигурирующая в формулировке замечания 1.

Доказательство. Легко видеть, что в силу C-свойства Лузина, множество E можно предположить замкнутым, а функцию $f(x)$—непрерывной на E. Так как для любого $\lambda>0$ можно определить конечное число непересекающихся замкнутых интервалов: $[c_1, d_1]$, $[c_2, d_2],\cdots$, $[c_p, d_p]$, лежащих внутри $[0, A]$, и числа $l_1, l_2,\cdots, l_p$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\mu\left\{\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i]-E\right\}<\lambda,\ \mu\left\{E-\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i]\right\}<\lambda,$$

$$|f(x)-l_i|<\lambda \quad (x\in E\cap[c_i, d_i],\ i=1, 2,\cdots, p),$$

а при наличии (2.7) также $|l_i|<M$ $(i=1, 2,\cdots, p)$, то, не нарушая общности, можно считать

$$E=\bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i], \tag{2.8}$$

$$f(x)=\begin{cases} l_i, & x\in[c_i, d_i]\ (i=1, 2,\cdots, p)\\ 0, & x\overline{\in}\ \bigcup_{i=1}^{p}[c_i, d_i].\end{cases} \tag{2.9}$$

Обозначая

$$M_1=\max_{1<i<p} l_i, \tag{2.10}$$

при дополнительном условии (2.7) будем иметь

$$M_1\leqslant M. \tag{2.11}$$

Для удобства будем считать, что

$$\eta<CM_1\nu \tag{2.12}$$

и

$$\eta<\frac{3\mu E}{\nu}. \tag{2.13}$$

Выберем натуральное число m настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\pi}\ \frac{3M_1p\nu}{m}<\frac{4}{3\nu}\mu E, \tag{2.14}$$

$$4M_1A\mu E<m\alpha, \tag{2.15}$$

$$\frac{M_1}{m}<\frac{4}{\nu}. \tag{2.16}$$

Пусть α_i, β_i $(i=1, 2,\cdots, n)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_i<\beta_i\leqslant\alpha_{i+1}\ (i=1, 2,\cdots, n-1), \tag{2.17}$$

$$\beta_i-\alpha_i<\frac{\mu E}{m}, \tag{2.18}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i, \beta_i]=E. \tag{2.19}$$

Очевидно для каждого i $(1\leqslant i\leqslant n)$ существует единственное k $(1\leqslant\leqslant k\leqslant p)$ такое, что

$$[\alpha_i, \beta_i]\subset[c_k, d_k].$$

Положим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[\alpha_i, \beta_i]\\ 0, & x\overline{\in}[\alpha_i, \beta_i]\end{cases}\quad (i=1, 2,\cdots, n). \tag{2.20}$$

Тогда ясно, что $f_i(x)$ постоянна на $[\alpha_i, \beta_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x). \tag{2.21}$$

Пусть i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — любое целое число, а σ_i — произвольное положительное число. Возьмем $h > 0$ так, чтобы

$$2h \frac{8\mu E}{\nu} < \frac{\eta}{3n} \tag{2.22}$$

и выберем $\sigma_i^{(1)}$ настолько большим, чтобы

$$2i \frac{8\mu E}{\nu} < \frac{\sigma_i^{(1)} - h}{2} \alpha - B, \tag{2.23}$$

$$\sigma_i^{(1)} > \sigma_i + h. \tag{2.24}$$

Пусть теперь

$$r_0 = 1, \ r_k = r_{k-1} \nu \ (k \geqslant 1). \tag{2.25}$$

Для каждого $k = 0, 1, 2, \cdots$ положим в замечании 1 $[c, d] = [\alpha_i, \beta_i]$, $r = r_k$ и возьмем ν, удовлетворяющее условию настоящей леммы. Тем самым мы можем определить последовательности функций $\{\varphi_{r_k}(x)\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ и множеств $\{E_{r_k}\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ так, чтобы выполнялись условия, получающиеся из (2.5) и (2.6) заменой c, d, r соответственно на α_i, β_i, r_k $(k = 0, 1, \cdots)$. Рассмотрим функции

$$\psi_k(x) = l\,(1 - \nu\, \varphi_{r_k}(x)) \quad (k = 0, 1, \cdots), \tag{2.26}$$

где

$$l = f_i(x), \ x \in [\alpha_i, \beta_i] \tag{2.27}$$

(вспомним, что $f_i(x)$ постоянна на $[\alpha_i, \beta_i]$).

Нетрудно убедиться, что если $0 \leqslant k_1 < k_2$, то интеграл от ψ_{k_2} по каждому интервалу постоянства функции ψ_{k_1} равен нулю (надо учесть (2.25), (2.26) и конструкцию функций $\varphi_{r_k}(x)$ $(k = 0, 1, \cdots)$). Отсюда следует, что функции ψ_k $(k = 0, 1, \cdots)$ образуют ортогональную систему в $L_2[\alpha_i, \beta_i]$. А так как в силу (2.26) и (2.4) L_2-нормы функций ψ_k $(k = 0, 1, \cdots)$ ограничены в совокупности, то можно взять k_0 настолько большим, чтобы

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \psi_{k_0}(t) \cos x_j t \, dt \right| < \frac{\eta}{6n\sigma_i^{(1)}} \quad (j = 1, 2, \cdots, v), \tag{2.28}$$

где x_j $(j = 1, 2, \cdots, v)$ — некоторые числа, образующие $\frac{\eta}{6n\sigma_i^{(1)}} \cdot \frac{1}{2M_1 A^2}$ — сеть отрезка $[0, \sigma_i^{(1)}]$, т. е. для любого $x \in [0, \sigma_i^{(1)}]$ существует j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant v$ такое, что

$$|x-x_{j_0}|<\frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}\frac{1}{2M_1A^2}. \tag{2.29}$$

Обозначим

$$\theta_l(x)\equiv\begin{cases}\psi_{k_0}(x), & x\in[\alpha_l,\beta_l]\\ 0, & x\overline{\in}[\alpha_l,\beta_l],\end{cases} \tag{2.30}$$

$$E^l\equiv E_{r_{k_0}}, \tag{2.31}$$

$$G_l(x)\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^A\theta_l(t)\cos xt\,dt\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos xt dt. \tag{2.32}$$

Поскольку $\psi_{r_{k_0}}$ и $E_{r_{k_0}}$ определены аналогично (2.3) и (2.4), то, учитывая замечание 1, (2.26) и (2.27), будем иметь

$$\theta_l(x)=f_l(x)\quad(x\in E^l\cup\{[0,A]-[\alpha_l,\beta_l]\}), \tag{2.33}$$

$$E^l\subset[\alpha_l,\beta_l],\ \mu E^l=\left(1-\frac{1}{\nu}\right)(\beta_l-\alpha_l), \tag{2.34}$$

$$\int\limits_0^A|\theta_l(x)|\,dx=\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}|\psi_{k_0}(x)|\,dx=\int\limits_{E_l}|l|\,dx+$$

$$+\int\limits_{[\alpha_l,\beta_l]-E_l}|l|\,(\nu-1)\,dx=|l|\,\mu E^l+|l|\,(\nu-1)\,\mu\{[\alpha_l,\beta_l]-E^l\}=$$

$$=|l|\left(1-\frac{1}{\nu}\right)(\beta_l-\alpha_l)+|l|\,(\nu-1)\,\frac{1}{\nu}(\beta_l-\alpha_l)=$$

$$=2\,|l|\,\frac{\nu-1}{\nu}(\beta_l-\alpha_l)<2M_1(\beta_l-\alpha_l), \tag{2.35}$$

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\rho G_l(u)\cos xu\,du\right|=\frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^\rho\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\ \cos ut\ \cos ux\,dt\,du\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\,dt\int\limits_0^\rho\cos ut\cos ux\,du\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\,dt\int\limits_0^\rho[\cos u(x-t)+\cos u(x+t)]\,du\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right|=$$

$$= \frac{|l|}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}(1-\nu\varphi_{r_{k_0}}(t))\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|l|}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right| +$$

$$+\frac{|l|\,\nu}{\pi}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\varphi_{r_{k_0}}(t)\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\,|l| + C\,|l|\,\nu \leqslant 2\,CM_1\,\nu$$

$$\left(x\in\left[\alpha_l+\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu},\quad \beta_l-\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu}\right],\ \rho>0\right)^*, \tag{2.36}$$

так как $C>1$, $\nu>8$ и $|l|<M_1$.

Для произвольного $x\in[0,\sigma_l^{(1)}]$ выберем j_0 $(1\leqslant j_0\leqslant v)$ так, чтобы выполнялось (2.29), тогда в силу (2.28), (2.30) и (2.35)

$$|G_l(x)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos xtdt\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos d_{j_0}tdt\right| +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\,[\cos x_{j_0}t-\cos xt]\;dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\,\sigma_l^{(1)}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}2\theta_l(t)\sin\frac{x_{j_0}-x}{2}t\sin\frac{x_{j_0}+x}{2}tdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,|x_{j_0}-x|\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}|\theta_l(t)\,t\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+|x_{j_0}-x|\,A\cdot 2M_1\,(\beta_l-\alpha_l) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{6n\sigma_l^{(1)}}+2\,|x_{j_0}-x|\,A^2M_1 < \frac{\eta}{3n\sigma_l^{(1)}}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$|G_l(x)| < \frac{\eta}{3n\,\sigma_l^{(1)}}\ (x\in[0,\sigma_l^{(1)}]), \tag{2.37}$$

---

* Первый из последних двух интегралов оценивается с помощью неравенства $\left|\int\limits_a^b\frac{\sin\rho(x\pm t)}{x\pm t}dt\right| < 2\pi$, справедливого для любых a, b, ρ и x.

из которого непосредственно следует

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sigma_l^{(1)}} |G_l(t)\cos xt|\,dt \leqslant \frac{\eta}{3n} \quad (x\in[0,\ \infty)). \tag{2.38}$$

Так как $\theta_l(x)\in L_2[0,\ \infty)$, то в силу теоремы Планшереля (см. [5], теорему 50)

$$\theta_l(x)=\underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} G_l(t)\cos xt\,dt \quad (x\in[0,\ \infty)).$$

Следовательно, существуют $\sigma_l^{(2)}$, $\sigma_l^{(2)}>\sigma_l^{(1)}$ и измеримое множество R_l такие, что

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sigma_l^{(2)}} G_l(t)\cos xt\,dt-\theta_l(x)\right|<\frac{\eta}{6n} \quad (x\in R_l), \tag{2.39}$$

$$R_l\subset[0,\ A],\ \mu R_l>A-\frac{\eta}{6n}. \tag{2.40}$$

Положим

$$\tau=\frac{4}{3\nu\rho}\,\mu E, \tag{2.41}$$

$$G_1=[0,\ A]-\bigcup_{k=1}^{p}[c_k-\tau,\ d_k+\tau], \tag{2.42}$$

$$F_l=[0,\ A]-\left[\alpha_l-\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu},\quad \beta_l+\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu}\right], \tag{2.43}$$

тогда будем иметь

$$x+t\geqslant|x-t|>\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu} \quad (x\in F_l,\ t\in[\alpha_l,\ \beta_l]), \tag{2.44}$$

$$x+t\geqslant|x-t|>\tau \quad (x\in G_1\ t\in E), \tag{2.45}$$

$$F_l\subset[0,\ A]-[\alpha_l,\ \beta_l], \tag{2.46}$$

$$\mu F_l\geqslant\mu\{[0,\ A]-[\alpha_l,\ \beta_l]\}-2\,\frac{\beta_l-\alpha_l}{\nu}. \tag{2.47}$$

Учитывая (2.32), (2.45), (2.35), (2.18), (2.41) и (2.14), получим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\rho} G_l(u)\cos xu\,du\right|=\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\rho}\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos ut\cos xu\,dt\,du\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\left[\frac{\sin\rho(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\rho(x+t)}{x+t}\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{\tau}\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}|\theta_l(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{4M_1(\beta_l-\alpha_l)}{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{4M_1\mu E}{m}\cdot\frac{3\nu p}{4\mu E} = \frac{1}{\pi}\,\frac{3M_1 p\nu}{m} < 4\,\frac{\mu E}{3\nu}\quad (x\in G_l,\ \rho\in[0,\infty)). \qquad (2.48)$$

Аналогично при $x\in F_l$ (см. (2.44)) и любом $\rho>0$ будем иметь

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\rho} G_l(u)\cos xu\,du\right| \leqslant \frac{4}{\pi}M_1\nu < 2M_1\nu \qquad (2.49)$$

$$(x\in F_l,\ \rho\in[0,\infty)).$$

Отметим также, что в силу (2.35), (2.18) и (2.16) справедливо неравенство

$$|G_l(x)| = \left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}\theta_l(t)\cos xt\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\alpha_l}^{\beta_l}|\theta_l(t)|\,dt \leqslant 2M_1(\beta_l-\alpha_l) < 2M_1\frac{\mu E}{m} < \frac{8}{\nu}\mu E\quad (x\in[0,\infty)). \qquad (2.50)$$

Пусть теперь (см. (2.22))

$$q_l \equiv \sigma_l^{(1)} - h,\qquad s_l \equiv \sigma_l^{(2)} + h \qquad (2.51)$$

$$g_l(x) = \begin{cases} G_l(x), & x\in[\sigma_l^{(1)},\ \sigma_l^{(2)}] \\ G_l(\sigma_l^{(1)})\,\dfrac{x-q_l}{h}, & x\in[q_l,\ \sigma_l^{(1)}] \\ -G_l(\sigma_l^{(2)})\,\dfrac{x-s_l}{h}, & x\in[\sigma_l^{(2)},\ s_l] \\ 0, & x\overline{\in}[q_l,\ s_l],\ x>0. \end{cases} \qquad (2.52)$$

Тогда, учитывая (2.22) и (2.50), получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\limits_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} + \int\limits_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l}\right)|g_l(t)\cos xt|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2h\,\frac{8\mu E}{\nu} < \frac{\eta}{3n}\ (x\in[0,\ \infty)). \qquad (2.53)$$

Если $\rho\in[\sigma_l^{(1)},\ \sigma_l^{(2)}]$, а $x_0,\ x_1,\cdots,x_v$ — произвольные числа, причем

$$\sigma_l^{(1)} = x_0 < x_1 < \cdots < x_v = \rho, \qquad (2.54)$$

то

$$\sum_{k=1}^{v} \left|g_i(x_k) - g_i(x_{k-1})\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{v} \left|\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \theta_i(t)\,[\cos x_k t - \cos x_{k-1} t]\,dt\right| =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{v} \left|\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \theta_i(t) \sin \frac{x_k + x_{k-1}}{2} t \cdot \sin \frac{x_k - x_{k-1}}{2} t\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_{\alpha_i}^{\beta_i} t\,|\theta_i(t)|\,dt\right) \sum_{k=1}^{v} (x_k - x_{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A\,(\rho - \sigma_i^{(1)}) \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\theta_i(t)|\,dt.$$

Отсюда с помощью неравенств (2.35), (2.18) и (2.15) легко получим

$$\bigvee_{\sigma_i^{(1)}}^{\rho} g_i \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A\,(\rho - \sigma_i^{(1)}) \cdot 2M_1\,(\beta_i - \alpha_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A\,(\rho - \sigma_i^{(1)})\, 2\,M \frac{\mu E}{m} \leqslant \frac{\alpha}{2}\,(\rho - \sigma_i^{(1)}). \tag{2.55}$$

С другой стороны, используя (2.52) и (2.50), будем иметь

$$\bigvee_{q_i}^{\sigma_i^{(1)}} g_i \leqslant |\,G_i(\sigma_i^{(1)})| \leqslant \frac{8}{\nu}\,\mu E, \tag{2.56}$$

$$\bigvee_{\sigma_i^{(2)}}^{s_i} g_i \leqslant \frac{8}{\nu}\,\mu E. \tag{2.57}$$

Предположим, что все вышеуказанные рассуждения и построения сделаны для всех целых i, где $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом, ввиду произвольности чисел $\sigma_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, можно было их последовательно определить следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_i = s_{i-1} \quad (2 \leqslant i \leqslant n). \tag{2.58}$$

Введем обозначения:

$$q \equiv q_1, \quad s \equiv s_n. \tag{2.59}$$

$$R \equiv \left(\bigcup_{i=1}^{n} E^i\right) \cap \bigcap_{i=1}^{n} \left\{R_i \cap \left(\left[\alpha_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{\nu},\ \beta_i - \frac{\beta_i - \alpha_i}{\nu}\right] \cup F_i\right)\right\}, \tag{2.60}$$

$$G \equiv G_1 \cap \bigcap_{i=1}^{n} R_i, \tag{2.61}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} g_i(x), & x \in [q_i, s_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ 0 & \text{— в остальных точках } x \in [0, \infty). \end{cases} \tag{2.62}$$

Последнее определение допустимо в силу очевидных неравенств $s_{l-1} < q_l$ $(2 \leq i \leq n)$, являющихся следствием (2.58), (2.24) и первого равенства (2.51).

Покажем теперь, что функция (2.62) и множества (2.60) и (2.61) удовлетворяют требованиям леммы 2. Действительно, условие a′) непосредственно следует из соотношений (2.62), (2.51), (2.52), (2.32), (2.50) и (2.59); b′) получается из (2.60), (2.46), (2.47), (2.40), (2.13) и (2.34), а c′)—из (2.41), (2.42), (2.40), (2.13) и (2.61).

Пусть теперь $x \in R$. Согласно (2.62) и (2.20) имеем

$$J \equiv \left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_q^s g(t)\cos xt\,dt - f(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^n\left|\int\limits_{q_l}^{s_l} g_l(t)\cos xt dt - f_l(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^n\left(\int\limits_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} + \int\limits_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l}\right)|g_l(t)\cos xt|\,dt +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^n\left|\int\limits_{\sigma_l^{(1)}}^{\sigma_l^{(2)}} g_l(t)\cos xt dt - f_l(x)\right|.$$

Первая сумма последнего выражения не превосходит $\frac{\eta}{3}$ (см. (2.53)). Учитывая, что из $x \in R$ следует $x \in R_l$ и $x \in E^l \cup ([0, A] - [\alpha_l, \beta_l])$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ (см. (2.60) и (2.34)), преобразуем вторую сумму согласно (2.52), (2.33) и оценим ее с помощью (2.38) и (2.39). Тогда

$$J \leqslant \frac{\eta}{3} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^n\left|\int\limits_{\sigma_l^{(1)}}^{\sigma_l^{(2)}} G_l(t)\cos xt dt - \theta_l(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{3} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^n\left|\int\limits_0^{\sigma_l^{(1)}} G_l(t)\cos xt\,dt\right| +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{l=1}^n\left|\int\limits_0^{\sigma_l^{(2)}} G_l(t)\cos xt dt - \theta_l(x)\right| <$$

$$< \frac{\eta}{3} + \sum_{l=1}^n\frac{\eta}{3n} + \sum_{l=1}^n\frac{\eta}{6n} < \eta.$$

Таким образом, условие d′) выполнено. Обратившись к e′), заметим, что если $\rho \in [q, s]$, то, как легко видеть из (2.62), существуют i' $(1 \leqslant i' \leqslant n)$ и $\rho' \in [q_{i'}, s_{i'}]$ такие, что

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{\rho} g(t) \cos xt dt\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{\rho'} g(t) \cos xt\, dt\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{i'-1} \left|\int_{q_l}^{s_l} g_l(t) \cos xt dt\right| + \left|\int_{q_{l'}}^{\rho'} g_{l'}(t) \cos xt dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{i'} \left(\int_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} + \int_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l}\right) |g_l(t) \cos xt|\, dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i'} \left|\int_0^{\sigma_l^{(1)}} G_l(t) \cos xt\, dt\right| +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i'-1} \left|\int_0^{\sigma_l^{(2)}} G_l(t) \cos xt dt\right| + \left|\int_0^{\rho'} G_{l'}(t) \cos xt dt\right|^{*}. \tag{2.63}$$

Пусть $x \in G$. Применяя к (2.63) неравенства (2.53), (2.38), (2.48), (2.39) (в силу (2.30) $\theta_l(x) = 0$ при $x \in G$) и учитывая (2.13), получим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{\rho} g(t) \cos xt dt\right| \leqslant \sum_{l=1}^{i'} \frac{\eta}{3n} + \sum_{l=1}^{i'} \frac{\eta}{3n} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{i'-1} \frac{\eta}{6n} + 4\frac{\mu E}{3\nu} \leqslant \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{6} + 4\frac{\mu E}{3\nu} =$$

$$= \frac{5\eta}{6} + 4\frac{\mu E}{3\nu} < \frac{8\mu E}{\nu} \leqslant \frac{8A}{\nu}.$$

Это значит, что условие e′) выполняется.

Пусть теперь $\rho \in [q, s]$. Тогда существуют ρ' и i' $(1 \leqslant i' \leqslant n)$ такие, что

$$\rho' \leqslant \rho, \ \rho' \in [q_{i'}, s_{i'}] \tag{2.64}$$

и

$$\bigvee_q^{\rho} g(t) = \bigvee_q^{\rho'} g = \sum_{l=1}^{i'-1} \bigvee_{q_l}^{s_l} g_l + \bigvee_{q_{l'}}^{\rho'} g_{l'} \leqslant$$

---

* Суммы вида $\sum\limits_{l=1}^{i'-1}$ при $i' = 1$ считаем равными нулю.

$$\leqslant \sum_{l=1}^{l'} \bigvee_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} g_l + \sum_{l=1}^{l'} \bigvee_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l} g_l + \sum_{l=1}^{l'-1} \bigvee_{\sigma_l^{(1)}}^{\sigma_l^{(2)}} g_l + \bigvee_{\sigma_{l'}^{(1)}}^{\rho'} g_{l'}\,^{*}.$$

Имея в виду (2.64), неравенства (2.55)—(2.57), (2.23) и первое равенство (2.51), получим

$$\bigvee_{q}^{\rho} g \leqslant 2\sum_{l=1}^{l'} \frac{8}{\nu}\mu E + \frac{\alpha}{2}\sum_{l=1}^{l'-1} (\sigma_l^{(2)} - \sigma_l^{(1)}) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}(\rho' - q_{l'}) < 2l' \frac{8}{\nu}\mu E + \frac{\alpha}{2}\sum_{l=1}^{l'-1} (q_{l+1} - q_l) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}(\rho - q_{l'}) < \frac{\sigma_{l'}^{(1)} - h}{2}\alpha - B + \frac{\alpha}{2}(\rho - q_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} q_{l'} - B + \frac{\alpha}{2}(\rho - q) \leqslant \alpha\rho - B.$$

Итак, условие $f')$ также выполняется.

Остается проверить последнее утверждение леммы 2. Сопоставляя неравенства (2.36) и (2.49), будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} \left|\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\rho} G_l\,(u) \cos xu du\right| < 2CM_1\nu \\ \left(x \in \left[\alpha_l + \dfrac{\beta_l - \alpha_l}{\nu},\ \beta_l - \dfrac{\beta_l - \alpha_l}{\nu}\right] \cup F_l,\ \rho > 0\right). \end{array}\right\} \qquad (2.65)$$

Пусть $\rho \in [q, s]$, тогда существуют l' $(1 \leqslant l' \leqslant n)$ и $\rho' \in [q_{l'}, s_{l'}]$, для которых может выполняться (2.63). Если теперь $x \in R$, то для некоторого i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$ будет $x \in E^{i_0}$. Но тогда $\theta_l(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq i_0)$ (см. (2.30) и (2.34)), так что из (2.63) получим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{\rho} g\,(t) \cos xt dt\right| \leqslant \sum_{l=1}^{l'} \left(\int_{q_l}^{\sigma_l^{(1)}} + \int_{\sigma_l^{(2)}}^{s_l}\right) |g_l\,(t) \cos xt|\, dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l'} \left|\int_0^{\sigma_l^{(1)}} G_l\,(t) \cos xt dt\right| + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_0}}^{l'-1} \left|\int_0^{\sigma_l^{(2)}} G_l\,(t) \cos xt dt - \theta_l\,(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_0^{\sigma_{i_0}^{(2)}} G_{i_0}(t) \cos xt dt\right| + \left|\int_0^{\rho'} G_{l'}\,(t) \cos xt dt\right|.$$

---

* $\sum\limits_{l=1}^{l'-1}$ при $l' = 1$, и $\bigvee\limits_{\sigma_{l'}^{(1)}}^{\rho'}$ при $\rho' < \sigma_{l'}^{(1)}$ считаются равными нулю.

Применяя к слагаемым правой части этого неравенства соответственно (2.53), (2.38), (2.39), (2.65), (2.65) и учитывая (2.12), имеем

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_q^{\rho} g(t)\cos xt\,dt\right| \leqslant \frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{6}+$$

$$+2CM_1\nu+2CM_1\nu<5CM_1\nu\quad (x\in R). \tag{2.66}$$

Но при выполнении (2.7) имеет место (2.11), так что в этом случае из (2.66) вытекает g'). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых положительных чисел A и $\varepsilon<1$ можно определить $\delta>0$ такое, что какова бы ни была измеримая функция $f(x)$,*

$$f(x)=0 \quad при \quad x\overline{\in} E,\ E\subset[0,\ A], \tag{2.67}$$

и

$$|f(x)|\leqslant\delta,\ x\in E, \tag{2.68}$$

и каковы бы ни были $\alpha>0$, $\sigma>0$, $\eta>0$ и $B>0$, существуют измеримое множество R и функция $g(x)$, для которых выполняются следующие условия:

a) *$g(x)$ — непрерывная функция, определенная на $[q,\ s]$, где $s>q>\sigma$, причем*

$$g(q)=g(s)=0,\ |g(x)|<\varepsilon\ (x\in[q,\ s]),$$

b) $R\subset E$, $\mu R>\mu E-\varepsilon$,

c) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_q^s g(t)\cos xt\,dt-f(x)\right|<\eta\quad (x\in R)$,

d) $\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_q^{\rho} g(t)\cos xt\,dt\right|<\varepsilon\ (x\in R,\ q\leqslant\rho\leqslant s)$,

e) $B+\bigvee_q^{\rho} g\leqslant\alpha\rho\quad (q\leqslant\rho\leqslant s)$.

Доказательство. Возьмем натуральное число $\nu>8$ настолько большим, чтобы

$$\frac{8A}{\nu}<\varepsilon \tag{2.69}$$

и выберем $\delta>0$ настолько малым, чтобы

$$5C\delta\nu<\varepsilon, \tag{2.70}$$

где C — абсолютная постоянная, фигурирующая в формулировке леммы 2. Покажем, что выбранное так число δ удовлетворяет требованию леммы 3. Действительно, пусть $f(x)$—измеримая функция, а E—измеримое множество такие, что

$$f(x)=0 \text{ при } x\overline{\in}E,\quad E\subset[0,\ A],$$

$$|f(x)| \leqslant \delta \quad (x \in E),$$

и пусть α, σ, η и B — произвольные положительные числа. Применим лемму 2 к функции $f(x)$, полагая в формулировке леммы $M \equiv \delta$. Тогда мы можем найти функцию $g(x)$ и множество R, которые удовлетворяют условиям a'), b'), d'), f') и условию g') при $M=\delta$. Отсюда, в силу (2.69) и (2.70), получим утверждения а)—е) леммы 3. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $A>1$—некоторое число, а $f(x)$—почти везде конечная на $[0, A]$ измеримая функция, равная нулю вне некоторого множества $E \subset [0, A]$. Тогда для любых положительных чисел α, σ, B и $\delta<1$ существуют функция $g(x)$ и измеримые множества P и Q, удовлетворяющие условиям:*

1) *$g(x)$—непрерывная функция, определенная на $[q, s]$, где $s>q>\sigma$, причем*

$$g(q)=g(s)=0, \quad |g(x)|<\delta \quad (x \in [q, s]),$$

2) $P \subset E$, $\mu P > \mu E - \delta$,

3) $\left|\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_q^s g(t)\cos xt\,dt - f(x)\right| < \delta \quad (x \in P),$

4) $Q \subset [0, A]-E$, $\mu Q > \mu\{[0, A]-E\} - \delta$,

5) $\left|\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_q^\rho g(t)\cos xt\,dt\right| < \delta \quad (x \in Q,\ \rho \in [q, s]),$

6) $B + \bigvee_q^\rho g \leqslant \alpha\rho \quad (\rho \in [q, s]).$

Эта лемма получается из леммы 2 при $\eta \equiv \delta$ и некотором ν, $\nu > 8A\delta^{-1}$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Возьмем две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_l\}$ и $\{A_l\}$, где

$$1>\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_l>\cdots, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon_l<+\infty, \tag{3.1}$$

$$1<A_1<A_2<\cdots<A_l<\cdots, \quad A_l\to\infty. \tag{3.2}$$

Для каждой пары $\varepsilon=\varepsilon_l$ и $A=A_l$ $(l=1, 2, \cdots)$ определим число $\delta=\delta_l$ согласно лемме 3, т. е. так, чтобы при наличии условий вида (2.67), (2.68), для произвольных σ, η, B и α выполнялись все утверждения а)—е) леммы 3, в которых вместо ε, A и δ взяты, соответственно, ε_l, A_l и δ_l. При этом из формулировки леммы 3 ясно, что можно считать $\delta_l<\varepsilon_l$ $(l=1, 2, \cdots)$. В силу (3.1) будем иметь

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l < +\infty. \tag{3.3}$$

Пусть $F(x)$—функция, фигурирующая в формулировке теоремы. Применим лемму 4, полагая в ее формулировке $A = A_1$, $f(x) = F(x)$ $(x \in [0, A_1])$, $E = [0, A_1]$, $\sigma = 0$, $B = 0$, $\alpha = 1$ и $\delta = \delta_2$. Тогда мы можем определить измеримое множество $P = P_1$ и непрерывную функцию $g(x) = g_1(x)$ $(x \in [q, s_1])$, где $s_1 > q > 0$, для которых выполняются условия:

$$g_1(q) = g_1(s_1) = 0, \ |g_1(x)| < \delta_2 \ (x \in [q, s_1]), \tag{3.4}$$

$$P_1 \subset [0, A_1], \ \mu P_1 > A_1 - \delta_2, \tag{3.5}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_1} g_1(t) \cos xt dt - F(x) \right| < \delta_2 \ (x \in P_1), \tag{3.6}$$

$$\bigvee_q^{\rho} g_1(x) \leqslant \rho \quad (\rho \in [q, s_1]). \tag{3.7}$$

Предположим, что для некоторого $l > 2$ определены измеримое множество P_{l-1} и непрерывная функция $g_{l-1}(x)$ $(x \in [q, s_{l-1}]$, где $s_{l-1} > q$—некоторое число), которые удовлетворяют условиям:

$$\bigvee_q^{\rho} g_{l-1} \leqslant \rho \quad (\rho \in [q, s_{l-1}]), \tag{3.8}$$

$$P_{l-1} \subset [0, A_{l-1}], \ \mu P_{l-1} > A_{l-1} - \delta_l, \tag{3.9}$$

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_{l-1}} g_{l-1}(t) \cos xt dt - F(x) \right| < \delta_l \ (x \in P_{l-1}), \tag{3.10}$$

$$g_{l-1}(q) = g_{l-1}(s_{l-1}) = 0. \tag{3.11}$$

Положим

$$f_{l-1}(x) = F(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_{l-1}} g_{l-1}(t) \cos xt dt \quad (x \in [0, \infty)), \tag{3.12}$$

$$B_{l-1} = \bigvee_q^{s_{l-1}} g_{l-1}(t).$$

В силу (3.10) и (3.11) имеем

$$|f_{l-1}(x)| < \delta_l \quad (x \in P_{l-1}). \tag{3.13}$$

Применим лемму 3 к функции $f(x) = f_{l-1}(x)$, полагая в формулировке леммы $A = A_{l-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_l$, $\delta = \delta_l$, $E = P_{l-1}$, $\sigma = s_{l-1}$, $B = B_{l-1}$, $\eta = \frac{\delta_{l+1}}{2}$, $\alpha = 1$. Тогда мы можем определить измеримое множество R, отрезок $[q', s']$ $(s' > q' > s_{l-1})$ и непрерывную на $[q', s']$ функцию $g^*(x)$, для которых выполняются условия:

$$g^*(q') = g^*(s') = 0, \ |g^*(x)| < \varepsilon_l \ (x \in [q', s']), \tag{3.14}$$

$$R \subset P_{l-1},\ \mu R > \mu P_{l-1} - \varepsilon_l, \tag{3.15}$$

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{s'} g^*(t) \cos xt\,dt - f_{l-1}(x)\right| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \quad (x \in R), \tag{3.16}$$

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{\rho} g^*(t) \cos xt\,dt\right| < \varepsilon_l \quad (x \in R,\ \rho \in [q', s']), \tag{3.17}$$

$$B_{l-1} + \bigvee_{q'}^{\rho} g^*(t) \leqslant \rho \quad (\rho \in [q', s']). \tag{3.18}$$

Положим

$$B' = B_{l-1} + \bigvee_{q}^{s'} g^*(t) \equiv \bigvee_{q'}^{s_{l-1}} g_{l-1}(t) + \bigvee_{q'}^{s'} g^*(t) \tag{3.19}$$

и применим лемму 4 к функции

$$f(x) = f_{l-1}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{s'} g^*(t) \cos xt\,dt, \tag{3.20}$$

полагая в формулировке леммы

$$A \equiv A_l,\ E \equiv [0,\ A_l] \setminus R,\ s \equiv s',\ B \equiv B',\ \alpha \equiv 1,\ \delta = \frac{\delta_{l+1}}{2}.$$

Тогда можно определить измеримые множества P и Q, отрезок $[q_l, s_l]$ $(s_l > q_l > s')$ и непрерывную на $[q_l, s_l]$ функцию $g^{**}(x)$, для которых выполняются следующие условия:

$$g^{**}(q_l) = g^{**}(s_l) = 0,\ |g^{**}(x)| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \quad (x \in [q_l,\ s_l]), \tag{3.21}$$

$$P \subset [0,\ A_l] \setminus R,\ \mu P > \mu\,([0,\ A_l] \setminus R) - \frac{\delta_{l+1}}{2}, \tag{3.22}$$

$$Q \subset R,\ \mu Q > \mu R - \frac{\delta_{l+1}}{2}, \tag{3.23}$$

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q'}^{s'} g^*(t) \cos xt\,dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q_l}^{s_l} g^{**}(t) \cos xt\,dt - f_{l-1}(x)\right| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \tag{3.24}$$

$$(x \in P)$$

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{q_l}^{\rho} g^{**}(t) \cos xt\,dt\right| < \frac{\delta_{l+1}}{2} \quad (x \in Q,\ \rho \in [q_l,\ s_l]), \tag{3.25}$$

$$B' + \bigvee_{q_l}^{\rho} g^{**} \leqslant \rho \quad (\rho \in [q_l,\ s_l]). \tag{3.26}$$

Введем обозначения

$$P_i = P \cup Q \cap R = P \cup Q, \tag{3.27}$$

$$Q_i = Q \cap R = Q, \tag{3.28}$$

$$g_i(x) = \begin{cases} g_{i-1}(x), & x \in [q, s_{i-1}] \\ g^*(x), & x \in [q', s'] \\ g^{**}(x), & x \in [q_i, s_i] \\ 0 & \text{— в остальных точках } [q, s_i]. \end{cases} \tag{3.29}$$

В силу равенств (3.11), (3.14), (3.21) и непрерывности функций $g_{i-1}(x)$, $g^*(x)$, $g^{**}(x)$ функция $g_i(x)$ непрерывна на $[q, s_i]$. Из определения функции $g_i(x)$ (см. (3.29)) и из неравенств (3.14), (3.21) следует, что

$$|g_i(x)| < \varepsilon_i + \delta_{i+1} \quad (x \in [s_{i-1}, s_i]), \tag{3.30}$$

$$g_i(q) = g_i(s_i) = 0. \tag{3.31}$$

Используя соотношения (3.12), (3.16), (3.24) и (3.25), получим

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^{s_i} g_i(t) \cos xt dt - F(x) \right| < \delta_{i+1} \quad (x \in P_i), \tag{3.32}$$

а из (3.17), (3.25), (3.28) и (3.29) имеем

$$\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{s_{i-1}}^{\rho} g_i(t) \cos xt dt \right| < \varepsilon_i + \delta_{i+1} \tag{3.33}$$

$$(x \in Q_i, \ \rho \in [s_{i-1}, s_i]).$$

Учитывая (3.9), (3.15), (3.22) и (2.23), убедимся, что

$$P_i \subset [0, A_i], \ \mu P_i > A_i - \delta_{i+1}, \tag{3.34}$$

$$Q_i \subset [0, A_{i-1}], \ \mu Q_i > A_{i-1} - (\varepsilon_i + \delta_i + \delta_{i+1}). \tag{3.35}$$

Заметим также, что в силу (3.26), (3.18), (3.19) и (3.8) справедливо соотношение

$$\bigvee_q^{\rho} g_i(t) \leqslant \rho \quad (\rho \in [q, s_i]). \tag{3.36}$$

Имея в виду (3.36), (3.34), (3.32) и (3.31), заключаем, что к полученной функции $g_i(x)$ применимы те же рассуждения, которые были применены к $g_{i-1}(x)$, только в этих рассуждениях нужно заменить i на $i+1$.

С другой стороны, на первом шагу уже определена функция $g_1(x)$, удовлетворяющая условиям (3.4)—(3.7), которые аналогичны соотношениям (3.31), (3.34), (3.32), (3.36).

Таким образом, мы можем определить последовательности чисел $q = s_0 < s_1 < \cdots$, функций $\{g_i(x)\}$ $(x \in [q, s_i], \ i=1, 2, \cdots)$ и множеств $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$, для которых выполняются условия (3.31), (3.34), (3.32), (3.36) при $i \geqslant 1$, условия (3.30), (3.33), (3.35) при $i \geqslant 2$ и, кроме того

$$g_{i+1}(x) = g_i(x) \quad (x \in [q, s_i], \ i \geqslant 1). \tag{3.37}$$

Положим

$$g(x)=\begin{cases}0 \quad, & x\in[0,\,q]\\ g_i(x), & x\in[q,\,s_i],\ i\geq 1,\end{cases} \tag{3.38}$$

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} Q_i. \tag{3.39}$$

Ясно, что равенство (3.38) определяет непрерывную функцию на $[0, \infty)$, которая согласно (3.36) и (3.30) удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0,\ \bigvee_0^{\infty} g\leqslant \rho.$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} g(t)\cos xt dt = F(x) \quad (x\in E). \tag{3.40}$$

Пусть $x_0\in E$. Выберем i_0 так, чтобы

$$x_0\in Q_i \quad (i\geqslant i_0) \tag{3.41}$$

и рассмотрим интегралы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} g(t)\cos x_0 t\, dt \quad \text{при } \lambda > s_{i_0}.$$

Очевидно

$$\int_0^{\lambda} g(t)\cos x_0 t dt=\int_0^{s_i} g(t)\cos x_0 t\, dt+\int_{s_i}^{\lambda} g(t)\cos x_0\, t dt, \tag{3.42}$$

где $i\geqslant i_0$ и $s_i<\lambda\leqslant s_{i+1}$.

В силу (3.32), (3.38), (3.41) и того, что $Q_i\subset P_i$ (см. (3.27), (3.28)), получаем

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{s_i} g(t)\cos x_0\, t dt - F(x_0)\right| < \delta_{i+1}. \tag{3.43}$$

С другой стороны, согласно (3.33) и (3.41), где вместо i взято $i+1$, будем иметь

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{s_i}^{\lambda} g(t)\cos x_0\, t\, dt\right| < \varepsilon_{i+1}+\delta_{i+2} \quad (i\geqslant i_0). \tag{3.44}$$

Из (3.42), (3.43) и (3.44) находим

$$\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} g(t)\cos x_0 t dt - F(x_0)\right| < \varepsilon_{i+1}+\delta_{i+1}+\delta_{i+2}, \tag{3.45}$$

где $s_i<\lambda\leqslant s_{i+1}$, $i\geqslant i_0$.

Так как $i \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, то из (3.45), (3.1) и (3.3) и из того, что x_0 — произвольная точка множества E, следует справедливость (3.40). Учитывая это, заметим, что согласно (3.35), (3.39) и (3.2) имеет место равенство

$$\mu\{[0, \infty) - E\} = 0,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание 2. Пусть $\alpha_i \downarrow 0$ при $i \to +\infty$. Используя конструкцию построения универсального тригонометрического ряда относительно подрядов (см. [2]), можно построить непрерывную на $[0, \infty)$ функцию $\psi(t)$ и последовательность чисел $\{s_n\}$, где $0 = s_0 < s_1 < \cdots$ и $s_i \to \infty$, такие, что

1°. $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0, \quad \psi(s_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$,

2°. $\bigvee\limits_0^\rho \psi \leqslant \varphi(\rho) \quad (\rho \in [0, \infty))$,

где $\varphi(\rho) = \alpha_n \rho$ при $\rho \in [s_{n-1}, s_n]$ $n = 1, 2, \cdots$.

3°. Для произвольной измеримой функции $F(x)$, конечной почти всюду на $[0, \infty)$, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t) \cos xt dt = F(x)$$

для почти всех $x \in [0, \infty)$, где

$$g(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [s_{n_i}, s_{n_i+1}] \ (i = 1, 2, \cdots) \\ 0 & \text{— в остальных точках } [0, \infty). \end{cases}$$

Замечание 2 означает, что в теореме 1 условие (1.4) можно заменить более сильным требованием

$$\bigvee_0^\rho g \leqslant \varphi(\rho) \quad (\rho \in [0, \infty)),$$

где $\varphi(\rho)$ — некоторая возрастающая функция, не зависящая от представляемой функции $F(x)$ и удовлетворяющая условию

$$\varphi(\rho) = o(\rho) \quad \text{при } \rho \to \infty.$$

С другой стороны, если $g(t)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям: $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$, $\bigvee\limits_0^\rho g \leqslant K$ (K — постоянная) и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t) \cos xt dt = F(x)$$

для почти всех $x \in [0, \infty)$, где $F(x)$ — почти всюду конечная измеримая функция, то

$$\left|\int\limits_0^{\lambda} g(t)\cos xtdt\right| = \frac{1}{x}\left|\int\limits_0^{\lambda} g(t)\,d\sin xt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{x}\ g(t)\sin xt\ \Big|_0^{\lambda}\right| + \frac{1}{x}\left|\int\limits_0^{\lambda}\sin xt\,dg(t)\right| \leqslant \frac{K}{x} + \frac{K}{x} = \frac{2K}{x},$$

так что

$$|F(x)| \leqslant \frac{2K}{x}\ \text{(почти всюду).}$$

Отсюда следует, что в теореме 1 условие (1.4) нельзя заменить условием $\bigvee\limits_0^{\rho} g = O(\varphi(\rho))$, при $\rho \to \infty$ ни для какого $\varphi(\rho)$, удовлетворяющего условию $\varphi(\rho) = O(1)$, при $\rho \to \infty$.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступило 20.V.1971

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ. Չափելի ֆունկցիաների Ֆուրյեի ինտեգրալներով ներկայացնելու մասին *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ [0, ∞)*-ում որոշված ցանկացած համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի* $F(x)$ *ֆունկցիայի համար գոյություն ունի* [0, ∞)*-ում որոշված* $g(t)$ *անընդհատ ֆունկցիա այնպիսին, որ*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\lambda} g(t)\cos xtdt = F(x)$$

[0, ∞)*-ին պատկանող համարյա բոլոր x-երի համար, ընդ որում՝*

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \ \text{և} \ \bigvee_0^{\rho} g \leqslant \rho \ (\rho\in[0,\ \infty)):$$

R. S. DAVTIAN. *Representation of measurable functions by Fourie integrals* (summary)

The following theorem is proved:

Theorem. For an arbitrary almost every where finite measurable on [0, ∞) function $F(x)$ there exsts a function $g(t)$, continous on [0, ∞), such that

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\lambda} g(t)\cos xtdt = F(x)$$

for almost all $x\in[0,\ \infty)$, and

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad \text{and} \quad \bigvee_0^{\rho} g \leqslant \rho\ (\rho\in[0,\ \infty)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов.* Sur la representation des fonctions mesurables par des series t gonometriques, Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
2. *А. А. Талалян.* Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядо Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 1963, 621—660.
3. *Д. Е. Меньшов.* Sur les series de Fourier des fonctions continues, Матем. сб., 8 (50 1940, 493—518.
4. *А. А. Талалян.* О представлении измеримых функций интегралами с ядрами уни тарных преобразований пространства L_2 (0, ∞), Матем. сб., 53 (95), № 3, 196 287—312.
5. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 9

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 4, 1971 Математика

Н. А. ЛЕБЕДЕВ и Н. А. ШИРОКОВ

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО УГЛОВЫХ ТОЧЕК С НЕНУЛЕВЫМИ ВНЕШНИМИ УГЛАМИ

Пусть $\overline{G}$—замкнутое множество точек комплексной плоскости Z, содержащее не менее двух точек, дополнение G^1 которого есть односвязная область, содержащая точку ∞; G—множество внутренних точек множества $\overline{G}$; $z=\psi(t, \overline{G})=\psi(t)=\gamma t+\gamma_0+\gamma_1 t^{-1}+\cdots$, $\gamma>0$, функция регулярная в области $1<|t|<\infty$, однолистно отображающая эту область на G^1; $t=\varphi(z, \overline{G})=\varphi(z)$ — функция, обратная для $z=(t, \overline{G})$; $\Gamma=\Gamma_1=\Gamma_1(\overline{G})$— граница $\overline{G}$; $\Gamma_R=\Gamma_R(\overline{G})=\psi(|t|=R, \overline{G})$, $R>1$, ψ=линия уровня G_1; $G_R^1=\psi(|t|>R, \overline{G})$, $R\geqslant 1$; $G_R=C\overline{G}_R^1$—дополнение $\overline{G}_R^1$ $\rho(E_1, E_2)$—расстояние между множествами точек E_1 и E_2; $\rho_R(z)=\rho(z, \Gamma_R)$-расстояние от точки z до линии уровня Γ_R. Далее рассматриваем множества $\overline{G}$ такие, что $\psi(t, \overline{G})$ непрерывна при $1\leqslant|t|<\infty$.

Пусть $t_j=e^{i\theta_j}$, $-\pi<\theta_j\leqslant\pi$, $j=1,\cdots, l$, $l=0, 1,\cdots$—различные точки окружности $|t|=1$; α_j, $0<\alpha_j\leqslant 2$, $\alpha_j\neq 1$, $j=1,\cdots, l$ —фиксированные числа; h, $0<h<h_0=\dfrac{1}{2}\min\left(|\theta_j-\theta_{j'}|, \dfrac{1}{2}\right)$, $j\neq j'$, $j, j'=1,\cdots, l$;

$$u_j=\left\{t; \left|\arg\frac{t_j}{t}\right|<h, |t|>1\right\};$$ u — дополнение $\bigcup\limits_{j=1}^{l} u_j$ до области $|t|>1$.

Будем говорить, что $\overline{G}$ имеет l (и только l) угловых точек $z_j=\psi(t_j, \overline{G})$, $j=1,\cdots, l$, с внешними (не нулевыми) углами $\alpha_j\pi$, если существуют две постоянные c_1 и c_2, $0<c_1<c_2<\infty$ такие, что

$$c_1\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}, \quad t\in u_j,\ j=1,\cdots, l,$$

$$c_1\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2, \qquad t\in u, \tag{1}$$

$$\psi(t)=\psi(t_j)+A_j(t)\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j}, \quad t\in u_j,\ j=1,\cdots, l,$$

где $A_j(t)$ — функции, регулярные в $1<|t|<\infty$, непрерывные в точке t_j, $A_j(t_j)\neq 0$, и выбрана та ветвь функции $\left(1-\dfrac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j}$, которая обращается в единицу при $t=\infty$.

Угловую точку $z_j=\psi(t_j)$ будем называть простой, если $\psi(t)\neq\neq\psi(t_j)$ при $t\neq t_j$, $|t|=1$, и s-кратной, если существуют точки $t_{j,\nu}$,

$\nu=1,\cdots, s$, $|t_{j,\nu}|=1$, $t_{j,\nu}\neq t_{j,\nu'}$, $\nu\neq\nu'$, такие, что $\psi(t_j)=\psi(t_{j,\nu})$, $\nu=1,\cdots$ $\cdots, s$, и $\psi(t)\neq\psi(t_j)$ при $t\neq t_{j,\nu}$, $\nu=1,\cdots, s$, $|t|=1$. Среди точек $t_{j,\nu}$ могут быть точки (на самом деле не более одной), не совпадающие ни с одной из точек t_j, $j=1,\cdots, l$. Такой точке $t_{j,\nu}$ сопоставляем $\alpha_{j,\nu}=1$ и дополнительно к условиям (1) требуем, чтобы для нее выполнялось третье условие из (1) (с заменой t_j на $t_{j,\nu}$ и α_j на $\alpha_{j,\nu}=1$).

Класс множеств, удовлетворяющих поставленным выше условиям обозначаем через Ψ или через $\Psi(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \cdots, t_l, \alpha_l)$ и при $l=0$ через $\Psi(c_1, c_2)$. Если $l=0$, то при всех t, $|t|>1$, выполняется второе из условий (1) и мы говорим, что множество $\overline{G}$ не имеет угловых точек. Класс множеств $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, являющихся замыканием области G, будем обозначать через $\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$. Ясно, что $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$ не имеет кратных угловых точек. Класс множеств $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, не имеющих кратных угловых точек будем обозначать через $\Psi^+(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$.

В работе доказана следующая

Теорема. *Пусть $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, $l\geqslant 0$; $f(z)$—функция, регулярная в G, имеющая в $\overline{G}$ r $(r=0, 1,\cdots)$ непрерывных производных,*

$$\omega(\delta)=\omega(\delta, f^{(r)})=\sup_{|z-z'|<\delta,\, z,\, z'\in\overline{G}}|f^{(r)}(z')-f^{(r)}(z)|,\ \delta>0,$$

— модуль непрерывности $f^{(r)}(z)$ в $\overline{G}$. Тогда для каждого $n=0, 1,\cdots$ существует полином $P_n(z)$ степени не выше n такой, что

$$|f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)|\leqslant A_\nu\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^{r-\nu}\,\omega(\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)),\ z\in\Gamma,\ \nu=0,\cdots, r,$$

где A_ν— постоянные, зависящие лишь от $\overline{G}$.

Эта теорема справедлива и для $\overline{G}\in\Psi^+(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$, но доказательство при этом становится несколько более сложным и менее прозрачным, и мы его здесь не приводим. Для $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1,\cdots, t_l)$ формулировка теоремы изменяется, а доказательство еще более сложное. Эта теорема для $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2)$ ($\overline{G}$ не имеет угловых точек) доказана Н. А. Широковым, причем дано явное выражение A_ν через c_1 и c_2. Общий случай доказан авторами совместно.

Приведенные нами результаты обобщают некоторые результаты В. К. Дзядыка из работ [1], [2], [3], [4] и Н. Н. Воробьева [6], [7] (см. также [5]), в которых накладываются более жесткие условия на границу Γ множества $\overline{G}$. В случае, если $\overline{G}$—множество без угловых точек, В. К. Дзядык требует, чтобы граница Γ была гладкой, и в случае множеств с угловыми точками—чтобы Γ была кусочно гладкой с непрерывной кривизной на каждом куске (и некоторые дополнительные условия в угловых точках).

В пункте 1° работы мы введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения. В п. 2° совершим важные преобразования множества $\overline{G}$. В п. 3° даны леммы, используемые при доказательстве теоремы, которое проведено в п. 4°.

1°. Некоторые обозначения. Пусть: $R>1$, θ — вещественное число,

$$\zeta_{R,\theta}=\zeta_{R,\theta}(\zeta)=\psi\left(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta)\right),\ \zeta\in\overline{G},\ \zeta_R=\zeta_{R,0},$$

$$\zeta_{[\theta]}=\zeta_{1,\theta};\ K(z,\delta)=\{\zeta\colon|\zeta-z|<\delta\},\ \delta>0;\ K(z,\delta,\Delta)=\{\zeta\colon\delta<|\zeta-z|<\Delta\}$$

$$0<\delta<\Delta;\ K[z,\delta]=K(z,\delta,\infty);\ \Gamma_R(z,\delta)=\Gamma_R\cap K(z,\delta),\ \Gamma_R[z,\delta]=$$

$$=\Gamma_R\cap K[z,\delta],\ \Gamma_R(z,\delta,\Delta)=\Gamma_R\cap K(z,\delta,\Delta).$$

Длину произвольной спрямляемой кривой L обозначаем через $|L|$.

При доказательствах мы не будем следить за зависимостью одних постоянных от других, введенных ранее, и потому будем использовать сплошь и рядом одни и те же буквы для обозначения различных постоянных. В частности, буквы A и c, иногда с индексами, всегда будут обозначать постоянные. Кроме того, будем пользоваться следующим определением. Если на множестве E заданы две неотрицательные функции α и β такие, что $0<A'<\frac{\alpha}{\beta}<A<\infty$ на E, то пишем $\alpha\asymp\beta$ на E и говорим, что α эквивалентно β на E. Две однозначные аналитические в области B функции α и β будем называть эквивалентными на $\overline{B}$, если они непрерывны в $\overline{B}$ и их модули эквивалентны. Для двух функций α и β, неотрицательных на E, будем писать $\alpha<\cdot\beta$, $\beta\cdot>\alpha$, если $\alpha\leqslant A\beta$.

Далее мы неоднократно будем пользоваться следующей легко доказываемой эквивалентностью. Пусть $\alpha>0$ фиксировано, $a>0$ и $b>0$. Тогда

$$(a+b)^{\alpha}\asymp a^{\alpha}+b^{\alpha}.$$

2°. Класс $\Psi^*(c_1,c_2,t_1,\alpha_1,\cdots,t_l,\alpha_l)$ замкнутых множеств. Пусть $\overline{G}\in\Psi(c_1,c_2,t_1,\cdots,\alpha_l)$. Границу Γ множества G будем рассматривать как образ окружности $t=e^{i\theta}$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$, при отображении $z=\psi(t,\overline{G})$. Используя (1), легко убедимся, что Γ — спрямляемая кривая.

Пусть $\chi(t)=\prod\limits_{j=1}^{l}\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j-1}$, где выбрана та непрерывная ветвь этой функции в $|t|>1$, которая обращается в единицу при $t=\infty$. Заметим, что модуль функции $\frac{\psi'(t)}{\chi(t)}$, регулярной в $|t|>1$, ограничен сверху и снизу постоянными, отличными от нуля и ∞ (что следует из (1)), и потому

$$\psi'(t)=A(t)\prod_{j=1}^{l}\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{\alpha_j-1},\ |t|>1, \qquad (2)$$

где $A(t)$ — регулярная в $|t|>1$ функция такая, что $0<c_1'<|A(t)|<$ $<c_2'<\infty$ при $|t|>1$. Ясно, что из (2) снова следует первое и второе из условий (1).

Рассмотрим векторы

$$K_-(t_j)=\lim_{\theta\to\theta_j-0}\frac{\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})}{|\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})|},\quad K_+(t_j)=\lim_{\theta\to\theta_j+0}\frac{\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})}{|\psi(e^{i\theta})-\psi(e^{i\theta_j})|}. \tag{3}$$

Используя третье из условий (1) легко покажем, что

$$K_-(t_j)=\frac{A_j(t_j)}{|A_j(t_j)|}e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha_j}=e^{i\varphi_j^-},\ K_+(t_j)=\frac{A_j(t_j)}{|A_j(t_j)|}e^{i\frac{\pi}{2}\alpha_j}=e^{i\varphi_j^+}. \tag{3'}$$

Эти векторы очевидно являются касательными в точке $z_j=\psi(t_j)$ соответственно к дугам $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j-h\leqslant\theta\leqslant\theta_j$, и $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j\leqslant\theta\leqslant$ $\leqslant\theta_j+h$. Вектор $k_-(t_j)$ нужно повернуть против часовой стрелки на угол $\pi\alpha_j$ (при $\alpha_j=2$ векторы $k_-(t_j)$ и $k_+(t_j)$ совпадают), чтобы он совпал с $k_+(t_j)$. В этом смысле кривая Γ в точке $z_j=\psi(t_j)$ имеет внешний угол равный $\pi\alpha_j$. Отсюда же следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует h', $0<h'<h$, такое, что дуги $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j-h'\leqslant\theta\leqslant\theta_j$ и $z=\psi(e^{i\theta})$, $\theta_j\leqslant\theta\leqslant\theta_j+h'$ лежат в углах раствора ε с вершинами в z_j и биссектрисами, параллельными соответственно векторам $k_-(t_j)$ и $k_+(t_j)$, и если z_j — простая угловая точка и $\alpha_j<2$, то сектор

$$\varphi_j^+-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\arg(z-z_j)\leqslant\varphi_j^-+\frac{\varepsilon}{2},\quad |z-z_j|\leqslant h',$$

принадлежит $\overline{G}$.

Преобразуем теперь $\overline{G}\in\Psi^*(c_1,c_2,t_1,\cdots,\alpha_l)$, $l>0$. Исходя из $\overline{G}=\overline{G}(1)$, построим некоторую последовательность множества $\overline{G}(k)$, $k=1,\cdots,l+1$, следующим образом. Если $\overline{G}(k)$ построено, то строим некоторое замкнутое множество $\lambda_k\subset\overline{G}(k)$, дополнение к которому есть некоторая односвязная область $D(k)$. Отобразим $D(k)$ с помощью некоторой однолистной функции $\xi=\varphi_k(z)$, $\varphi_k(\infty)=\infty$, $\varphi_k'(\infty)>0$. Эта функция отображает $G^1(k)=C\overline{G}(k)$ на некоторую область $G^1(k+1)$, дополнение которой обозначим через $\overline{G}(k+1)$. Полагаем $z_j=z_j^{(1)}$, $z_j^{(k+1)}=\varphi_k\circ\varphi_{k-1}\circ\cdots\circ\varphi_1(z_j^{(1)})$, $j=1,\cdots,l$, $k=1,\cdots,l$, $z_k^{(k)}\in\lambda_k$, $a_k\in\lambda_k$, $a_k\neq z_k^{(k)}$,

$$\xi=\varphi_k(z)=a_k+\frac{z_k^{(k)}-a_k}{1-\left(\dfrac{z-z_k^{(k)}}{z-a_k}\right)^{1/\alpha_k}}. \tag{4}$$

Здесь выбрана та ветвь функции $\left(\dfrac{z-z_k^{(k)}}{z-a_k}\right)^{1/\alpha_k}$, которая обращается в единицу в точке $z=\infty$. Заметим, что $z_k^{(k+1)}=z_k^{(k)}$.

Опишем теперь выбор точек a_k и построение λ_k и по индукции покажем, что $\overline{G}(k) \in \Psi^*(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, t_k, \alpha_k, \cdots, t_l, \alpha_l), k=1, \cdots, l$, и $\overline{G}(l+1) \in \Psi^*(c_1^{(l+1)}, c_2^{(l+1)})$.

1) Если $\alpha_k = 2$, то в (4) в качестве a_k возьмем какую-нибудь точку из $G(k)$ и в качестве λ_k возьмем какую-либо спрямляемую простую кривую, соединяющую точки a_k и $z_k^{(k)}$ (лежащую в $\overline{G}(k)$). Ясно, что если $\overline{G}(k)$—замкнутая область, то $\overline{G}(k+1)$ также замкнутая область и конформность в $\overline{G^1}(k)$ при преобразовании (4) имеет место во всех точках за исключением точки $z_k^{(k)}$. В частности, сохраняются углы между односторонними касательными в точках $z_j^{(k)}$, $j=1, \cdots, l$, $j \neq k$. Исследуем точку $z_k^{(k)}$, для чего найдем производную функции $\zeta = \psi(t, \overline{G}(k+1)) = \varphi_k(\psi(t, \overline{G}(k)))(\psi(\infty, \overline{G}(k+1)) = \infty, \psi'(\infty, \overline{G}(k+1)) > 0)$, однолистно отображающей $|t| > 1$ на $G^1(k+1)$. Имеем $\psi'(t, \overline{G}(k+1)) = \varphi_k'(\psi(t, \overline{G}(k)))\, \psi'(t, \overline{G}(k))$,

$$\varphi_k'(z) = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{z_k^{(k)} - a_k}{1 - \left(\frac{z - z_k^{(k)}}{z - a_k}\right)^{1/\alpha_k}}\right)^2 \left(\frac{z - z_k^{(k)}}{z - a_k}\right)^{1/\alpha_k} \frac{1}{(z - z_k^{(k)})(z - a_k)}.$$

В силу предположения индукции $\overline{G}(k) \in \Psi^*(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, t_k, \alpha_k, \cdots, t_l, \alpha_l)$, и для $\psi'(t, \overline{G}(k))$ имеют место аналоги неравенств (1). Используя их, легко убедимся, что

$$0 < c_1^{(k+1)} < |\psi'(t, \overline{G}(k+1))| < c_2^{(k+1)} < \infty, \ t \in u_k,$$

и легко убедимся, что $\overline{G}(k+1) \in \Psi^*(c_1^{(k+1)}, c_2^{(k+1)}, t_{k+1}, \alpha_{k+1}, \cdots, t_l, \alpha_l)$.

2) Если $\alpha_k < 2$, $\alpha_k \neq 1$, то проведем через точку $z_k^{(k)}$ биссектрису угла, образованного векторами k_+ и k_- (см. (3) и (3')) для точки $z_k^{(k)}$ множества $\overline{G}(k)$ и на части биссектрисы, лежащей в $G(k)$, возьмем некоторую точку a_k такую, что отрезок $(z_k^{(k)}, a_k] \in G(k)$ ($G(k)$—множество внутренних точек $\overline{G}(k)$). Если $1 < \alpha_k < 2$, то полагаем $\lambda_k = [z_k^{(k)}, a_k]$. Если $0 < \alpha_k < 1$, то с обеих сторон отрезка $[z_k^{(k)}, a_k]$ проведем дуги окружностей с концами в $z_k^{(k)}$ и a_k, образующие с отрезком углы $(1 - \alpha_k)\dfrac{\pi}{2}$. Легко видеть, что всегда можно выбрать a_k так, чтобы замкнутая луночка, образованная указанными дугами, принадлежала $G(k)$ за исключением точки $z_k^{(k)}$. Эту замкнутую луночку обозначим через λ_k. Как и в (1) убедимся, что если $\overline{G}(k) \in \Psi^*(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, t_k, \cdots, \alpha_l)$, то $\overline{G}(k+1) \in \Psi^*(c_1^{(k+1)}, c_2^{(k+1)}, t_{k+1}, \alpha_{k+1}, \cdots, t_l, \alpha_l)$ (отметим, что при $\alpha_k < 1$ образом $D(k)$—дополнение луночки λ_k при отображении (4)—является дополнение отрезка $[z_k^{(k)}, a_k]$).

Из изложенного ясно, что $\overline{G}(l+1) \in \Psi(c_1^{(l+1)}, c_2^{(l+1)})$.

Обозначим через $z=\psi_k(\xi)$, $\xi\in\overline{G}^1(k+1)$ функцию, обратную для $\xi=\varphi\ (z)$:

$$z=\psi_k(\xi)=a_k+\frac{z_k^{(k)}-a_k}{1-\left(\dfrac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k}},\ \xi\in G^1(k+1),\ k=1,\cdots,l. \tag{4'}$$

Введем функцию

$$z=\psi_*(\xi)=\psi_1\circ\psi_2\circ\cdots\circ\psi_l(\xi),$$

которая однолистно и конформно отображает $G^1(l+1)$ на G^1, и пусть $\xi=\varphi_*(z)$—обратная для $z=\psi_*(\xi)$ функция. Отметим, что функция

$$z=\psi(t,\overline{G}(k))=\varphi_{k-1}\circ\varphi_{k-2}\circ\cdots\circ\varphi_1(\psi(t,\overline{G})),\ |t|>1,\ k=1,\cdots,l+1,$$

отображает область $|t|>1$ однолистно на $G^1(k)$ и

$$\psi(t)=\psi(t,\overline{G})=\psi_k(\psi(t,\overline{G}(l+1)).$$

Ради краткости записи введем еще обозначение

$$z=\psi_{[k]}(\xi)=\psi_k\circ\psi_{k+1}\circ\cdots\circ\psi_l(\xi),\ \xi\in\overline{G}^1(l+1),\ k=1,\cdots,l,$$

и пусть $\xi=\varphi_{[k]}(z)$—функция, обратная для $z=\psi_{[k]}(\xi)$. Кроме того, положим $\xi_j=\psi(t_j,\ \overline{G}(l+1))=z_j^{(l+1)}$.

По множеству $\overline{G}(k)$, $k=1,\cdots,l+1$, как в начале работы, введем линии уровня $L_R(\overline{G}(k))$ и области $G_R(k)$ и $G_R^1(k)$ для $R>1$.

3°. Леммы, используемые при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть $a\in G(l+1)$. Тогда*

$$\psi_*'(\xi)=A_*(\xi)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{\xi-\xi_j}{\xi-a}\right)^{\alpha_j-1},\ \xi\in\overline{G}^1(l+1),$$

где $A_k(\xi)$ — регулярная в $G^1(l+1)$ и непрерывная в $\overline{G}^1(l+1)$ функция такая, что $0<c_1'\leqslant|A_*(\xi)|\leqslant c_2'<\infty$, $\xi\in\overline{G}^1(l+1)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\psi_*'(\xi)=\psi_1'(\psi_{[2]}(\xi))\,\psi_2'(\psi_{[3]}(\xi))\cdots\psi_{l-1}'(\psi_{[l]}(\xi))\,\psi_l'(\xi). \tag{5}$$

Рассмотрим сомножитель $\psi_k'(\psi_{[k+1]}(\xi))$, $k=1,\cdots,l$. Имеем (см. (4'))

$$\psi_k'(\xi)=-\alpha_k\left[\frac{1-w}{1-w^{\alpha_k}}\right]^2\left(\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k-1},\ w=\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k},\ \xi\in\overline{G}^1(k+1). \tag{6}$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в (6), как функция от ξ непрерывна в $\overline{G}^1(k+1)$ (функция $\left(\dfrac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k}$ обращается в единицу лишь при $\xi=\infty$) и не обращается в нуль в $\overline{G}^1(k+1)$, а потому она эквивалентна единице в $\overline{G}^1(k+1)$. Мы хотим показать, что

$$\psi_k'(\psi_{[k+1]}(\xi)) \asymp \left(\frac{\xi-\xi_k}{\xi-a_k}\right)^{\alpha_k-1}, \quad \xi\in\overline{G}^1(l+1),$$

и это будет доказано, если покажем, что

$$\frac{\psi_{[k+1]}(\xi)-z_k^{(k)}}{\psi_{[k+1]}(\xi)-a_k}\asymp\frac{\xi-\xi_k}{\xi-a_k},\quad \xi\in\overline{G}^1(l+1),$$

для чего достаточно показать, что функция

$$\frac{\psi_{[k+1]}(\xi)-z_k^{(k)}}{\xi-\xi_k}\asymp 1,\quad \xi\in\overline{G}^1(l+1).$$

Или, записывая эту функцию в виде

$$\frac{\psi_{[k+1]}(\xi)-\psi_{[k+1]}(\xi_k)}{\psi_{[k+2]}(\xi)-\psi_{[k+2]}(\xi_k)}\cdot\frac{\psi_{[k+2]}(\xi)-\psi_{[k+2]}(\xi_k)}{\psi_{[k+3]}(\xi)-\psi_{[k+3]}(\xi_k)}\cdots\frac{\psi_l(\xi)-\psi_l(\xi_k)}{\xi-\xi_k},$$

видим, что достаточно показать эквивалентность

$$\frac{\psi_\nu(\xi)-\psi_\nu(z_k^{(\nu)})}{\xi-z_k^{(\nu)}}\asymp 1,\quad \xi\in\overline{G}^1(\nu+1),\ \nu=k+1,\cdots,l.$$

После преобразований получаем

$$\frac{(z_\nu^{(\nu)}-a_\nu)\left[\left(\dfrac{\xi-z_\nu^{(\nu)}}{\xi-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}-\left(\dfrac{z_k^{(\nu)}-z_\nu^{(\nu)}}{z_k^{(\nu)}-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right]}{\left(1-\left(\dfrac{\xi-z_\nu^{(\nu)}}{\xi-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right)\left(1-\left(\dfrac{z_k^{(\nu)}-z_\nu^{(\nu)}}{z_k^{(\nu)}-a_\nu}\right)^{\alpha_\nu}\right)(\xi-z_k^{(\nu)})}\asymp 1,\quad \xi\in\overline{G}^1(\nu+1),$$

и легко видеть, что эта эквивалентность имеет место. Учитывая изложенное выше, получаем заключение леммы.

Следствие 1. *Пусть* $h'>0$ *такое, что окрестности* $u_j=\{\xi:\xi\in\overline{G}^1(l+1),\ |\xi-\xi_j|<h'\}$ *точек* ξ_j, $j=1,\cdots,l$, *попарно не имеют общих точек, и* u' — *дополнение* $\bigcup_{j=1}^{l}u_j$ *до* $\overline{G}^1(l+1)$. *Тогда существуют постоянные* c_1' *и* c_2', $0<c_1'<c_2'<\infty$, такие, что

$$c_1'|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}\leqslant|\psi_\bullet'(\xi)|\leqslant c_2'|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1},\quad \xi\in u_j,\ j=1,\cdots,l,$$

$$c_1'\leqslant|\psi_\bullet'(\xi)|\leqslant c_2',\quad \xi\in u'.$$

Лемма 2. *Пусть*: $z',z''\in\overline{G}_2(k)\cap\overline{G}^1(k)$, $k=1,\cdots,l$, $\xi'=\varphi_k(z')$, $\xi''=\varphi_k(z'')$. *Если* $0<\alpha_k<2$, *то*

$$|z''-z'|\asymp|\xi''-\xi'|\left[|z''-z_k^{(k)}|^{1/\alpha_k}+|\xi''-\xi'|\right]^{\alpha_k-1}. \tag{7}$$

Соответствующая оценка сверху имеет место и при $\alpha_k=2$. *Соответствующая оценка снизу для* $\alpha_k=2$ *имеет место, если модуль приращения* $\arg(z-z_k^{(k)})$ *при движении точки* z *от* z' *до* z'' *по некоторой кривой, соединяющей* z' *и* z'' *и лежащей в* $\overline{G}^1(k)$, *не превосходит* $2\pi-\delta$, *где* $\delta>0$ *фиксировано. Ясно, что в* (7) *можно заменить в правой части* z'' *на* z'.

Доказательство. Рассмотрим преобразование (4′): $z=\psi_k(\xi)$, $\xi\in\overline{G}^1(k+1)$. Ради краткости записи полагаем

$$w=\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k},\quad w_1=\frac{\xi'-z_k^{(k)}}{\xi'-a_k},\quad w_2=\frac{\xi''-z_k^{(k)}}{\xi''-a_k}. \tag{8}$$

Имеем (см. (4′))

$$z'-z_k^{(k)}=(z_k^{(k)}-a_k)\frac{w_1^{\alpha_k}}{1-w_1^{\alpha_k}},\ z''-a_k=(z_k^{(k)}-a_k)\frac{1}{1-w_1^{\alpha_k}},$$

$$z''-z'=(z_k^{(k)}-a_k)\frac{w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}}{(1-w_2^{\alpha_k})(1-w_1^{\alpha_k})}. \tag{9}$$

Покажем сначала, что

$$|w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}|\asymp|w_2-w_1|\,(|w_1|+|w_2-w_1|)^{\alpha_k-1}. \tag{10}$$

Полагая $x=w_2-w_1$, при $|x|>\frac{1}{2}|w_1|$, $y=\left|\frac{w_1}{x}\right|$, имеем

$$u=\frac{|w_1^{\alpha_k}-(w_1+x)^{\alpha_k}|}{|x|\,(|w_1|+|x|)^{\alpha_k-1}}\leqslant\frac{y^{\alpha_k}+(1+y)^{\alpha_k}}{(1+y)^{\alpha_k-1}}=1+y+y\left(\frac{y}{1+y}\right)^{\alpha_k-1}.$$

Правая часть возрастает с возрастанием y и потому

$$u\leqslant 3+2\left(\frac{2}{1+2}\right)^{\alpha_k-1}=3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha_k}\right)\leqslant 6.$$

При $|x|<\frac{1}{2}|w_1|$, $y=\frac{x}{w_1}$ имеем

$$u=\frac{|1-(1+y)^{\alpha_k}|}{|y|\,(1+|y|)^{\alpha_k-1}}=\frac{\left|\alpha_k y+\frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{2}y^2+\frac{\alpha_k(\alpha_k-1)(\alpha_k-2)}{3!}y^3+\cdots\right|}{|y|\,(1+|y|)^{\alpha_k-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_k}{(1+|y|)^{\alpha_k-1}}\left(1+\frac{1}{2}|y|+\frac{1}{3}|y|^2+\cdots\right)\leqslant\frac{\alpha_k}{(1+|y|)^{\alpha_k-1}}\,2\ln 2\leqslant 6\ln 2.$$

Итак

$$|w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}|\leqslant 6\,|w_2-w_1|\,(|w_1|+|w_2-w_1|)^{\alpha_k-1},\ 0<\alpha_k\leqslant 2.$$

Получим теперь оценку снизу для u. Положим $w=\frac{\xi-z_k^{(k)}}{\xi-a_k}$, $\xi\in G^1(k+1)$. При этом отображении $G^1(k+1)$ при $\alpha_k\neq 2$ отобразится в некоторую область $G_*^1(k+1)$, не содержащую области $|\arg w|>\varphi_0>\frac{\pi}{2}$, $\varphi_0\alpha_k<\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_0<\frac{\pi}{\alpha_k}$. Чтобы в этом убедиться в $G(k)$ проведем дуги окружностей одинаковых радиусов с концами в точках $z_k^{(k)}$ и a_k такие, чтобы область, ограниченная ими, содержала λ_k. Этим дугам в $G_*^1(k+1)$ соответствуют лучи, исходящие из точки $w=0$, образующие с вещественной осью углы φ_0 и $-\varphi_0$. Легко видеть, что так определенное φ_0 — искомое.

Далее полагаем для определенности $|w_2|\geqslant|w_1|$ и обозначаем $\left|\frac{w_1}{w_2}\right|=x$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $\arg\frac{w_1}{w_2}=2\varphi$. При $0<\alpha_k<2$, $\alpha_k\neq 1$, имеем $|\varphi|<\varphi_0$.

Легко видеть, что при выполнении условий леммы при $\alpha_k=2$ для $\arg\frac{w_1}{w_2}=2\varphi$ имеем $|\varphi|<\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right)=\varphi_0$ и $\varphi_0\alpha_k=2\varphi_0=\pi-\frac{\delta}{2}<\pi$. Заметим еще, что

$$\max(|w_1|,\ |w_2|)\leqslant|w_1|+|w_2-w_1|\leqslant 2\max(|w_1|,\ |w_2|).$$

Теперь имеем

$$u^2\geqslant\left(\frac{|w_2^{\alpha_k}-w_1^{\alpha_k}|}{|w_2-w_1|\cdot|2w_2|^{\alpha_k-1}}\right)^2\geqslant\frac{1}{4}\left|\frac{(xe^{2i\varphi})^{\alpha_k}-1}{xe^{2i\varphi}-1}\right|^2=$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{1-2x^{\alpha_k}\cos 2\varphi\alpha_k+x^{2\alpha_k}}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}=\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\alpha_k\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}.$$

Пусть $1<\alpha_k\leqslant 2$. Так как $\sin\varphi\alpha_k-\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi(\alpha_k-1)}{2}\cos\frac{\varphi(\alpha_k+1)}{2}>0$ при $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{\alpha_k+1}$, то при таких φ получаем

$$u^2\geqslant\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1+x^{\alpha_k}}{1+x}\right)^2\geqslant\frac{1}{16}.$$

Если $\frac{\pi}{\alpha_k+1}<\varphi\leqslant\varphi_0$, то

$$u^2\geqslant\frac{1}{4}\,\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi_0\alpha_k}{(1+x)^2}\geqslant\frac{1}{16}\left[(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi_0\alpha_k\right].$$

Находя минимум по x^{α_k}, видим, что он достигается при $x^{\alpha_k}=0$, если $\sin^2\varphi_0\alpha_k\geqslant\frac{1}{2}$ и при $x^{\alpha_k}=1-2\sin^2\varphi_0\alpha_k$, если $\sin^2\varphi_0\alpha_k\leqslant\frac{1}{2}$, и мы имеем $u^2\geqslant\frac{1}{16}$ при $\sin^2\varphi_0\alpha_k\geqslant\frac{1}{2}$ и $u^2\geqslant\frac{1}{4}\sin^2\varphi_0\alpha_k\cos^2\varphi_0\alpha_k$ при $\sin^2\varphi_0\alpha_k\leqslant\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случай $0<\alpha_k<1$. Выясним при каких φ функция $v(\varphi)=\sin\varphi\alpha_k-\alpha_k\sin\varphi$ неотрицательна. Имеем: $v(0)=0$, $v'(\varphi)=$ $=\alpha_k[\cos\varphi\alpha_k-\cos\varphi]=2\alpha_k\sin\frac{\varphi(1-\alpha_k)}{2}\sin\frac{\varphi(1+\alpha_k)}{2}$. Таким образом, $v(\varphi)\geqslant 0$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{1+\alpha_k}$ и, следовательно

$$u^2\geqslant\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\alpha_k^2\sin^2\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}\geqslant\alpha_k^2\frac{(1-x^{\alpha_k})^2+4x^{\alpha_k}\sin^2\varphi}{(1-x)^2+4x\sin^2\varphi}\geqslant$$

$$\geqslant\alpha_k^2\min\left(\left(\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}\right)^2,\ \frac{1}{x^{1-\alpha_k}}\right)=\alpha_k^2\left(\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}\right)^2.$$

Производная функции $\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}$ равна $\frac{1-\alpha_k x^{\alpha_k-1}-(1-\alpha_k)x^{\alpha_k}}{(1-x)^2}$ и она отрицательна при $0<x<1$, ибо производная числителя положительна, и числитель обращается в нуль при $x=1$, потому $u\geqslant\alpha_k\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1-x^{\alpha_k}}{1-x}=\alpha_k^2$.

Итак эквивалентность (10) доказана.

Опираясь на формулы (9) и (10), получаем

$$|z''-z'|\asymp\frac{|w_2-w_1|\,[|w_1|+|w_2-w_1|]^{\alpha_k-1}}{|1-w_1^{\alpha_k}|\,|1-w_2^{\alpha_k}|}=$$

$$=\frac{|w_2-w_1|}{|1-w_1^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}|1-w_2^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}}\left[\left|\frac{w_1^{\alpha_k}}{1-w_1^{\alpha_k}}\right|^{1/\alpha_k}\left|\frac{1}{1-w_2^{\alpha_k}}\right|^{1/\alpha_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{|w_2-w_1|}{|1-w_1^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}|1-w_2^{\alpha_k}|^{1/\alpha_k}}\right]^{\alpha_k-1}.$$

Заметим, что в силу формул (9) первое слагаемое, стоящее в квадратных скобках, равно $|z'-z_k^{(k)}|^{1/\alpha_k}|z''-a_k|^{1/\alpha_k}\asymp|z'-z_k^{(k)}|^{1/\alpha_k}$.

В доказательстве леммы 1 было показано, что $|1-w_1^{\alpha_k}|\asymp|1-w_1|$, $k=1,\cdots,l$. Опираясь на это, легко показать, что множитель, стоящий перед квадратной скобкой, эквивалентен $|\xi''-\xi'|$, и требуемая эквивалентность (7) доказана.

Замечание 1. Если не обе точки z', z'' лежат в некоторой фиксированной окрестности точки $z_k^{(k)}$, то в (7) правую часть можно заменить на $|\xi''-\xi'|$.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые обозначения. Выберем $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы $\overline{k}(z_j,4\varepsilon)\cap\overline{k}(z_{j'},4\varepsilon)=\Phi$, $j\neq j'$, $j,j'=1,\cdots,l$, и таким, чтобы прообраз $\overline{k}(z_j,4\varepsilon)\cap\overline{G}^1=u_j(4\varepsilon)$ при отображении $z=\psi(t,\overline{G})$ лежал в достаточно малой окрестности точки t_j: $|t-t_j|\leqslant h'<h$, $j=1,\cdots,l$; $u_j(\varepsilon)=u_j(4\varepsilon)\cap\overline{k}(z_j,\varepsilon)$. Положим $u(\varepsilon)=\overline{G}^1\setminus\bigcup_{j=1}^{l}u_j(\varepsilon)$, $R_\varepsilon=\sup\left\{R:\ \sup\rho_R(z)<\frac{1}{2}\varepsilon\right\}$, $\Gamma^j=\Gamma\cap u_j(\varepsilon)$, $\Gamma'=$ $=\Gamma\setminus\bigcup_{j=1}^{l}\Gamma^j$; $\Gamma_R^j=\Gamma_R\cap u_j(4\varepsilon)$.

Следствие 2. Пусть: $z',z''\in\overline{G}_2\cap\overline{G}^1$; $\xi'=\varphi_*(z')$, $\xi''=\varphi_*(z'')$. Если одна из точек z', z'' принадлежит $u_j(\varepsilon)$, то

$$|z''-z'|<\cdot|\xi''-\xi'|\,[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi''-\xi'|]^{\alpha_j-1}.$$

Если $z',z''\in u(\varepsilon)$, то $|z''-z'|<\cdot|\xi''-\xi'|$.

Доказательство получим, применяя последовательно лемму 2 для $k=1,\cdots,l$ и замечание 1.

Следствие 3. *Пусть*: $\zeta\in\Gamma$; $1<R\leqslant R_\varepsilon$, $-\pi<\theta\leqslant\pi$, $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in$ $\in u_j(\varepsilon)$. *Тогда*

$$|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot(|\theta|+(R-1))[|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-z_j|^{1/\alpha_j}+(|\theta|+(R-1))]^{\alpha_j-1}. \tag{11}$$

Если $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u(\varepsilon)$, *то* $|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot|\theta|+(R-1)$.

Доказательство. Положим $\xi_0=\varphi_*(\zeta)$, $\xi_{R,\theta}=\varphi_*(\zeta_{R,\theta}(\zeta))$, $\xi_R=$ $=\varphi_*(\zeta_R(\zeta))$. Тогда при $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u_j(\varepsilon)$ имеем

$$|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\,[|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|]^{\alpha_j-1}. \tag{12}$$

Учитывая, что $\overline{G}(l+1)\in\Psi(c_1', c_2')$, и обозначая $\xi_0=\psi(e^{i\theta_0}, \overline{G}(l+1))$, имеем $\xi_{R,\theta}=\psi(Re^{i(\theta+\theta_0)}, \overline{G}(l+1))$. Далее последовательно получаем

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\leqslant|\xi_{R,\theta}-\xi_R|+|\xi_R-\xi_0|,$$

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_R|\leqslant\left|\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\theta}|\psi'(Re^{i\tau}, \overline{G}(l+1))|R|\,d\tau|\right|\leqslant Rc_2'|\theta|,$$

$$|\xi_R-\xi_0|\leqslant\int\limits_1^R|\psi'(\tau\cdot e^{i\theta_0}, \overline{G}(l+1))|\,d\tau\leqslant c_2'(R-1),$$

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_0|\leqslant R_1c_2'(|\theta|+(R-1)). \tag{13}$$

Отсюда и из (12) получаем (11). Если $\zeta_{R,\theta}(\zeta)\in u(\varepsilon)$, то $|\zeta_{R,\theta}(\zeta)-\zeta|<\cdot$ $<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|$, и учитывая (13) получаем требуемую оценку. Следствие доказано.

Покажем, что существует $\varepsilon>0$, удовлетворяющее поставленным выше условиям, такое, что справедлива

Лемма 3. *Пусть* $1<R\leqslant R_1$. *Тогда*

$$\rho_R(z)\asymp(R-1)[|z-z_j|^{1/\alpha_j}+(R-1)]^{\alpha_j-1},\ z\in\Gamma^j,$$
$$\rho_R(z)\asymp R-1,\ z\in\Gamma'.$$

Доказательство. Так же как при доказательстве следствия 3 получим нужные оценки сверху для $\rho_R(z)$ при $z\in\Gamma^j$ и $z\in\Gamma'$. Эти оценки справедливы для любого $\varepsilon>0$, которое удовлетворяет поставленным выше условиям. Получим необходимые оценки снизу.

Пусть $z\in\Gamma$, $z^*\in\Gamma_R$, $|z-z^*|=\rho_R(z)$, z' — ближайшая к z точка отрезка $[z, z^*]$ такая, что $[z', z^*]\subset\overline{G}^1$. Ясно, что если $|z-z_j|>\varepsilon$ для всех $j=1,\cdots, l$, то $|z^*-z_j|>\frac{1}{2}\varepsilon$, $j=1,\cdots, l$, ибо $R<R_1$. Если $|z-$ $-z_j|\leqslant\varepsilon$, то $|z^*-z_j|\leqslant\frac{3}{2}\varepsilon$. Обозначим прообраз отрезка $[z', z^*]$ при отображении $z=\psi(t, \overline{G})$ через $\gamma_R(z)$. Ясно, что при $z\in\Gamma'$ существует $C''>0$ такое, что $|\psi'(t, \overline{G})|>c_1'$, $t\in\gamma_R(z)$, $z\in\Gamma'$, и потому при $z\in\Gamma'$ имеем

$$\rho_R(z)\geqslant|z'-z^*|=\left|\int\limits_{\gamma_R(z)}\psi'(t, \overline{G})\,dt\right|=$$

$$=\int\limits_{\gamma_R(z)}|\psi'(t, \overline{G})|\cdot|dt|>\int\limits_{\gamma_R(z)}c_1'|dt|\geqslant c_1'(R-1).$$

Пусть теперь $z\in\Gamma^j$. Если $\zeta\in[z', z^*]$, то $\zeta\in u_j\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)$. Положим $\chi_k(z)=\varphi_k\circ\varphi_{k-1}\circ\cdots\circ\varphi_1(z)$, $\chi_k(z')=z'^{(k+1)}$, $\chi_k(z^*)=z^{*(k+1)}$, и напомним, что $\gamma_k(z_j) = z_j^{(k+1)}$. Ясно, что при $\varepsilon > 0$ достаточно малом производная функции $\gamma_{j-1}(z)$ достаточно мало изменяется в $u_j\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)$ и ее модуль ограничен снизу положительным числом, а потому соответствующие углы треугольников (z_j, z', z^*) и $(z_j^{(l)}, z'^{(l)}, z^{*(l)})$ мало отличаются. Отсюда заключаем, что, во-первых, $|z' - z_j| \asymp |z'^{(l)} - z_j^{(l)}|$ и $|z' - z^*| \asymp |z'^{(l)} - z^{*(l)}|$ и, во-вторых, применима лемма 2 (с заменой в ней k на j), и мы получаем

$$|z' - z^*| \cdot > |z'^{(l)} - z^{*(l)}| \cdot >$$
$$\cdot > |z'^{(l+1)} - z^{*(l+1)}| \, [|z'^{(l)} - z_j^{(l)}|^{1/\alpha_j} + |z'^{(l+1)} - z^{*(l+1)}|]^{\alpha_j - 1}.$$

Далее, рассуждая как и выше, покажем, что $|z'^{(l+1)} - z^{*(l+1)}| \asymp |z'^{(l+1)} - z^{*(l+1)}|$. Так как $z'^{(l+1)} \in \Gamma(\overline{G}(l+1))$, $z^{*(l+1)} \in \Gamma_R(\overline{G}(l+1))$ и $\overline{G}(l+1) \in \Psi(c_1, c_2)$, то как и выше при оценке снизу $\rho_R(z)$, $z \in \Gamma'$, покажем, что $|z'^{(l+1)} - z^{*(l+1)}| \asymp R - 1$, и учитывая, что $|z'^{(l)} - z_j^{(l)}| \asymp |z' - z_j|$, имеем

$$|z' - z^*| \cdot > (R-1)[|z' - z_j|^{1/\alpha_j} + (R-1)]^{\alpha_j - 1}, \quad 1 < R \leqslant R_0.$$

Но

$$\rho_R(z) = |z - z^*| = |z - z'| + |z' - z^*| \cdot > |z - z'| + (R-1)[|z' - z_j|^{1/\alpha_j} + (R-1)]^{\alpha_j - 1},$$

и нам достаточно доказать неравенство

$$|z - z'| + (R-1)[|z' - z_j|^{1/\alpha_j} + (R-1)]^{\alpha_j - 1} \cdot > (R-1)[|z - z_j|^{1/\alpha_j} + (R-1)]^{\alpha_j - 1}.$$

При $\alpha_j > 1$, полагая $x = \dfrac{|z' - z_j|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, $y = \dfrac{|z - z'|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, видим, что достаточно доказать неравенство

$$y + (x^{1/\alpha_j} + 1)^{\alpha_j - 1} \cdot > [(x + y)^{1/\alpha_j} + 1]^{\alpha_j - 1}.$$

Заменяя левую и правую части этого неравенства эквивалентными, получаем очевидное неравенство $y + x^{1-\alpha_j^{-1}} + 1 \cdot > y^{1-\alpha_j^{-1}} + x^{1-\alpha_j^{-1}} + 1$.

При $\alpha_j < 1$, полагая $x = \dfrac{|z - z_j|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, $y = \dfrac{|z - z'|}{(R-1)^{\alpha_j}}$, приходим к необходимости доказать неравенство

$$y + \frac{1}{((x+y)^{1/\alpha_j} + 1)^{1-\alpha_j}} \cdot > \frac{1}{(x^{1/\alpha_j} + 1)^{1-\alpha_j}},$$

которое равносильно следующему очевидному неравенству

$$y + \frac{1}{x^{\alpha_j^{-1} - 1} + y^{\alpha_j^{-1} - 1} + 1} \cdot > \frac{1}{x^{\alpha_j^{-1} - 1} + 1}.$$

Итак, случай $z \in \Gamma^j$ также доказан. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть $z', z'' \in u_j(\varepsilon)$, $\alpha_j < 1$, $|z' - z_j| \geqslant |z'' - z_j|$, $[z', z''] \in \overline{G}^1$, $\gamma(z', z'') = \varphi_0([z', z''])$. Тогда*

$$|z''-z'|\cdot>|\gamma(z', z'')|\,[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+|\gamma(z', z'')|]^{\alpha_j-1}.$$

Доказательство. Пусть $z_\nu = z' + \frac{\nu}{n}(z''-z')$, $\nu = 0, \cdots, n$, $\xi_\nu = \varphi_*(z_\nu)$. Тогда в силу доказательства леммы 3

$$|z''-z'| = \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}|\cdot > \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|\xi_\nu - \xi_{\nu-1}|}{[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi_\nu - \xi_{\nu-1}|]^{1-\alpha_j}}.$$

Но справедливо неравенство

$$\frac{a}{(c+a)^{1-\alpha}} + \frac{b}{(c+b)^{1-\alpha}} \geqslant \frac{a+b}{(c+a+b)^{1-\alpha}},\ a,\ b,\ c>0,\ 0<\alpha<1,$$

и потому

$$|z''-z'|\cdot > \frac{\sum_{\nu=1}^{n}|\xi_\nu - \xi_{\nu-1}|}{\left[|z'-z_j|^{1/\alpha_j}+\sum_{\nu=1}^{n}|\xi_\nu - \xi_{\nu-1}|\right]^{1-\alpha_j}}.$$

Отсюда, устремляя n к ∞ получаем заключение следствия.

Замечание 2. Повторяя частично доказательство леммы 3, легко получим следующее утверждение. Если $z \in \Gamma^j$ $\zeta^* \in \Gamma^j_R$, $1<R\leqslant R_1$, $\xi_0 = \varphi_*(z)$, $\xi^* = \varphi_*(\zeta^*)$, то при $\alpha_j<2$ имеем

$$|\zeta^* - z|\cdot>\zeta|\xi^* - \xi_0|\,[|\zeta^* - z_j|^{1/\alpha_j}+|\xi^* - \xi_0|]^{\alpha_j-1}. \tag{14}$$

Здесь в квадратных скобках ζ^* можно заменить на z. Если $\alpha_j = 2$, то такая оценка, вообще говоря, не имеет места, и мы ее заменим несколько другой оценкой. Пусть $\alpha_j=2$, Γ^j_+ и Γ^j_- — образы дуг $t=e^{i\theta}$, $\theta_j \leqslant \theta \leqslant \theta_j + h'$, и $t=e^{i\theta}$, $\theta_j - h' \leqslant \theta \leqslant \theta_j$, при отображении $z=\psi(t, \overline{G})$, где h' — достаточно малое, но такое, что $\Gamma^j \subset \Gamma^j_+ \cup \Gamma^j_-$. Допустим, не умаляя общности, что $z \in \Gamma^j_+$, и обозначим через z' какую-либо точку, принадлежащую Γ^j_- такую, что $|z'-z_j| = |z-z_j|$ и положим $\xi'_0 = \varphi_*(z')$. Мы считаем, что $z \neq z_j$ (ибо при $z = z_j$ неравенство (14) имеет место). Проведем вектор $k = \frac{1}{2}(z+z') - z_j$ из точки z_j и разделим плоскость Z прямой, проходящей через z_j параллельно k, на две полуплоскости—правую, которая лежит правее k, если смотреть по направлению k, и левую. Если ζ^* лежит в правой (в левой) полуплоскости, то обозначим через ζ' ближайшую к $z(kz')$ точку отрезка $[\zeta^*, z]$ (отрезка $[\zeta^*, z']$), отрезок $[\zeta^*, \zeta'] \in \overline{G}'$. Ясно, что $\zeta' \in \Gamma^j_+$ (соответственно $\zeta' \in \Gamma^j_-$). Точки z и ζ^* (z' и ζ^*) можно соединить кривой, состоящей из дуги $\overset{\frown}{z, \zeta'}$ (дуги $\overset{\frown}{z', \zeta'}$) кривой Γ, соединяющей точки z и ζ' (z' и ζ') и не содержащей точки z_j и отрезка $[\zeta', \zeta^*]$. Изменение $\arg\zeta$, когда ζ пробегает эту кривую, не превосходит π, и рассуждая как при доказательстве леммы 3 (используя лемму 2), получим, что при $\varepsilon>0$ достаточно малом имеет место оценка (14), если ζ^* лежит в правой полуплоскости, и оценка

$$|\zeta^*-z|\geqslant|\zeta^*-z'|\cdot>|\zeta^*-\zeta_0|\,[\,|\zeta^*-z_j|^{1/2}+|\zeta^*-\zeta_0|],$$

если ζ^* лежит в левой полуплоскости. Ясно, что если ζ^* лежит на границе указанных полуплоскостей, то справедлива любая из оценок (14) и (14′). Отметим еще, что $\rho_R(z)\asymp\rho_R(z')$, ибо $|z-z_j|=|z'-z_j|$.

Лемма 4. *Пусть $z', z''\in\overline{G}$. Тогда существует спрямляемая простая кривая $\lambda=\lambda(z', z'')\subset\overline{G}$ с концами в точках z' и z'' такая, что*

$$|\lambda(z', z'')|\leqslant U|z'-z''|,$$

где U—некоторая постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$.

Лемма 5. *Пусть $1\leqslant R\leqslant R_1$ и $\delta>0$. Тогда*

$$|\Gamma_R(z, \delta)|\leqslant V\delta, \tag{15}$$

где V -некоторая постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$.

Доказательства лемм 4 и 5 аналогичны. Сведем сначала доказательства этих лемм к доказательству некоторого неравенства.

Сведение в лемме 4. Отрезок $[z', z'']=(\bigcup_\nu\Lambda_\nu)\cup(\bigcup_\nu\Lambda_\nu^*)$, где Λ_ν и Λ_ν^* — непересекающиеся отрезки соответственно принадлежащие G^1 и $\overline{G}$. Пусть z_ν', z_ν'' — концы Λ_ν, $t_\nu'=\varphi(z_\nu', \overline{G})$, $t_\nu''=\varphi(z_\nu'', \overline{G})$, $\Lambda_\nu'=\varphi(\Lambda_\nu, \overline{G})$, λ_ν' — та из дуг окружности $|t|=1$ с концами в точках t_ν' и t_ν'', которая вместе с Λ_ν' является границей ограниченной области, не содержащей круга $|t|<1$, $\lambda_\nu=\psi(\lambda_\nu', \overline{G})$. Точки z_ν', z_ν'', $t_\nu'=e^{i\theta_\nu'}$, $t_\nu''=e^{i\theta_\nu''}$, обозначаем так, чтобы $\lambda_\nu'=\{e^{i\theta}\colon\theta_\nu'\leqslant\theta\leqslant\theta_\nu''\}$. В качестве $\lambda(z', z'')$ возьмем кривую $(\bigcup_\nu\lambda_\nu)\cup(\bigcup_\nu\Lambda_\nu^*)$. Если мы покажем, что

$$|\lambda_\nu|\leqslant U|\Lambda_\nu| \tag{16}$$

при всех ν, где $U\geqslant1$, то лемма 4 будет доказана. Действительно

$$|\lambda(z', z'')|\leqslant\sum_\nu|\lambda_\nu|+\sum_\nu|\Lambda_\nu^*|\leqslant U\sum_\nu|\Lambda_\nu|+\sum_\nu|\Lambda_\nu^*|\leqslant$$

$$\leqslant U(\sum_\nu|\Lambda_\nu|+\sum_\nu|\Lambda_\nu^*|)=U|z'-z''|.$$

Итак доказательство леммы 4 сведено к доказательству неравенства (16).

Сведение в лемме 5. Пусть α_R — диаметр Γ_R. Если $V\geqslant2\dfrac{|\Gamma_R|}{\alpha_R}$, то неравенство (15) справедливо при $\delta>\dfrac{1}{2}\alpha_R$, и потому далее полагаем, что $V\geqslant2\dfrac{|\Gamma_R|}{\alpha_R}$ и $\delta<\dfrac{1}{2}\alpha_R$. Заметим, что $\overline{G}_R\subset k(z, \delta)$ при $\delta<<\dfrac{1}{2}\alpha_R$ и при таких δ либо $|\Gamma_R(z, \delta)|=0$, если $\Gamma_R\subset ck(z, \delta)$ и неравенство (15) справедливо, либо $\Gamma_R \cap k(z, \delta) \neq \Phi$, что и предполагаем в дальнейшем.

Пусть $\Lambda = \bigcup_\nu \Lambda_\nu$, где Λ_ν—непересекающиеся дуги границы круга $k(z, \delta)$, принадлежащие $\overline{G}_R$, z'_ν, z''_ν—концы Λ_ν, $t'_\nu = \varphi(z'_\nu, \overline{G})$, $t''_\nu = \varphi(z''_\nu, \overline{G})$, $\Lambda'_\nu = \varphi(\Lambda_\nu, \overline{G})$, λ'_ν — та из дуг окружности $|t| = R$ с концами в точках t'_ν и t''_ν, которая вместе с Λ'_ν является границей ограниченной области, не содержащей круга $|t| < R$, $\lambda_\nu = \psi(\lambda'_\nu, \overline{G})$. Точки z'_ν, z''_ν, $t'_\nu = Re^{i\theta'_\nu}$, $t''_\nu = Re^{i\theta''_\nu}$ выбираем так, чтобы $\lambda'_\nu = \{Re^{i\theta}: \theta'_\nu \leqslant \theta \leqslant \theta''_\nu\}$. Ясно, что $\Gamma_R(z, \delta) \subset \bigcup_\nu \lambda_\nu$, и если мы докажем, что

$$|\lambda_\nu| \leqslant A\, |\Lambda_\nu| \tag{16'}$$

для всех ν, где A—постоянная, зависящая лишь от $\overline{G}$, то

$$|\Gamma_R(z, \delta)| \leqslant \sum_\nu |\lambda_\nu| \leqslant A \sum_\nu |\Lambda_\nu| < 2\pi A\delta,$$

и в качестве V мы можем взять $\max\left\{\sup\limits_{1<R<R_1} 2\frac{|\Gamma_R|}{\alpha_R}, 2\pi A\right\}$. Итак доказательство леммы 5 сведено к доказательству неравенства (16′).

Докажем неравенство (16′) ((16) доказывается аналогично). При каждом θ, $\theta'_\nu \leqslant \theta \leqslant \theta''_\nu$, положим $x(\theta) = \min|t|$, $t = xe^{i\theta} \in \Lambda_\nu$. Тогда

$$|\Lambda_\nu| \geqslant \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} |\psi'(x(\theta)e^{i\theta})|\, x(\theta)\, d\theta = J(\theta'_\nu, \theta''_\nu) = J_\nu,$$

$$|\lambda_\nu| \leqslant \int\limits_{\lambda'_\nu} |\psi'(t)|\, |dt| = \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} |\psi'(Re^{i\theta})|\, R d\theta = J_*(\theta'_\nu, \theta''_\nu) = J_{*\nu}.$$

Неравенство (16′) будет доказано, если покажем, что отношение $v_\nu = v(\theta'_\nu, \theta''_\nu) = J_{*\nu} J_\nu^{-1}$ ограничено сверху при любых θ'_ν и θ''_ν. Для этого достаточно оценить v_ν в следующих случаях.

1) Всякая точка $z \in \lambda_\nu$ отстоит от точек z_j больше чем на ε.

3) Точки z'_ν, $z''_\nu \in u_j(\varepsilon)$.

Если ни 1) ни 2) не выполнены, то λ_ν разобьем на части, для каждой из которых выполнено одно из этих условий. Соответствующим образом разобьем Λ_ν.

В первом случае мы можем считать, что (см. (1) и (2)) для $t \in \Lambda'_\nu$ выполняется второе из неравенств (1) и мы имеем

$$J_*(\theta'_\nu, \theta''_\nu) \leqslant c_2(\theta''_\nu - \theta'_\nu), \quad J(\theta'_\nu, \theta''_\nu) \geqslant c_1(\theta''_\nu - \theta'_\nu), \quad v_\nu < \frac{c_2}{c_1}.$$

Во втором случае, при $\alpha_j > 1$ имеем

$$J_\nu \leqslant c_2 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{R}\right)^2 + 4\,\frac{1}{R}\,\sin^2\frac{\theta_j-\theta}{2}\right]^{\frac{\alpha_j-1}{2}} R d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{R}\right)^{\alpha_j-1} R + R^{\frac{\alpha_j+1}{2}} |\theta_j-\theta|^{\alpha_j-1}\right] d\theta = c_2 J^*_\nu,$$

$$J_\nu \geqslant c_1 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{x(\theta)}\right)^2 + 4\,\frac{1}{x(\theta)}\,\sin^2\frac{\theta_j-\theta}{2}\right]^{\frac{\alpha_j-1}{2}} x(\theta)\, d\theta \cdot >$$

$$\cdot > c_1 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left[\left(1-\frac{1}{x(\theta)}\right)^{\alpha_j-1} x(\theta) + x(\theta)^{\frac{\alpha_j+1}{2}} |\theta_j-\theta|^{\alpha_j-1}\right] d\theta \geqslant$$

$$\geqslant c_1 J^*_\nu, \quad v_\nu < \cdot \frac{c_2}{c_1}.$$

Во втором случае, при $\alpha_j<1$ рассмотрим сначала подслучай, когда одна из точек z'_ν и z''_ν лежит на границе $k(z_j, \varepsilon)$, например, точка z'. Тогда существует $h_1>0$ такое, что $|\theta'_\nu - \theta_j| \geqslant h_1$. Пусть, для определенности, $\theta'_\nu < \theta''_\nu \leqslant \theta_j$ (случай $\theta'_\nu < \theta_j < < \theta''_\nu$ рассматривается аналогично). Имеем

$$J_\nu < c_2 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\alpha_j} |\theta_j-\theta|^{\alpha_j-1} d\theta \leqslant \frac{2c_2}{\alpha_j}\left[(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j} - (\theta_j-\theta''_\nu)^{\alpha_j}\right],$$

$$J_\nu \geqslant c_1 \int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu} \frac{x(\theta)^{1-\alpha_j}}{\left[(x(\theta)-1)^2 + 4x(\theta)\sin^2\dfrac{\theta_j-\theta}{2}\right]^{\frac{1-\alpha_j}{2}}}\, d\theta.$$

Подынтегральная функция, как функция от $x(\theta)$ достигает максимального значения в $1 \leqslant x(\theta) \leqslant \infty$ при $x(\theta) = \infty$, и мы имеем

$$J_\nu \geqslant c_1 \left((\theta_j-\theta'_\nu) - (\theta_j-\theta''_\nu)\right),$$

$$v_\nu \leqslant \frac{2}{\alpha_j}\,\frac{c_2}{c_1}\,\frac{(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j} - (\theta_j-\theta''_\nu)^{\alpha_j}}{(\theta_j-\theta'_\nu)-(\theta_j-\theta''_\nu)} \leqslant \frac{2}{\alpha_j}\,\frac{c_2}{c_1}\,\frac{1}{(\theta_j-\theta'_\nu)^{1-\alpha_j}} \leqslant \frac{2}{\alpha_j}\,\frac{c_2}{c_1}\,\frac{1}{h_1^{1-\alpha_j}}.$$

Из изложенного следует, что при любом расположении точек z'_ν и z''_ν относительно точек z_j отношение $\dfrac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}$ ограничено, если только точки z'_ν и z''_ν одновременно не лежат в $u_j(\varepsilon)$ и $\alpha_j<1$. Случай, когда $z', z''\in u_j(\varepsilon)$ и $\alpha_j<1$ теперь и рассмотрим. При этом θ'_ν и θ''_ν лежат в промежутке $[\theta_j-h_1, \theta_j+h_1]$. Пусть сначала θ'_ν и θ''_ν лежат по разные стороны от θ_j. Как и выше имеем

$$|\lambda_\nu|\leqslant J_\nu\leqslant\frac{2}{\alpha_j}c_2[(\theta''_\nu-\theta_j)^{\alpha_j}+(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}].$$

Полагая $\xi'_\nu=\varphi_*(z'_\nu)$, $\xi''_\nu=\varphi_*(z''_\nu)$, $\gamma_\nu=\varphi_*([z'_\nu, z''_\nu])$, в силу леммы 3 и следствия 4, имеем

$$|z'_\nu-z_j|<\cdot|\xi'_\nu-\xi_j|^{\alpha_j},\ |z''_\nu-z'_\nu|\cdot>|\gamma_\nu|[|\xi'_\nu-\xi_j|+|\gamma_\nu|]^{\alpha_j-1}.$$

(Мы считаем, что $|z'_\nu-z_j|\leqslant|z''_\nu-z_j|$). Далее имеем

$$|\xi'_\nu-\xi_j|<\cdot c'_2(\theta_j-\theta'_\nu),\ |\gamma_\nu|=\int\limits_{\gamma_\nu}|d\xi|\geqslant\int\limits_{\theta'_\nu}^{\theta''_\nu}c_1|d\theta|=c_1(\theta''_\nu-\theta'_\nu).$$

Таким образом, $|z''_\nu-z'_\nu|\cdot>(\theta''_\nu-\theta'_\nu)[\theta_j-\theta'_\nu+\theta''_\nu-\theta'_\nu]^{\alpha_j-1}$ и

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{(\theta''_\nu-\theta_j)^{\alpha_j}+(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}}{(\theta''_\nu-\theta'_\nu)(\theta_j-\theta'_\nu+\theta''_\nu-\theta'_\nu)^{\alpha_j-1}}.$$

Полагая $x=\dfrac{\theta_j-\theta'_\nu}{\theta''_\nu-\theta'_\nu}$, имеем

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{(1-x)^{\alpha_j}+x^{\alpha_j}}{(1+x)^{\alpha_j-1}}<2[(1-x)^{\alpha_j}+x^{\alpha_j}]\leqslant4.$$

Пусть теперь θ'_ν и θ''_ν лежат по одну сторону от θ_j, например, $\theta'_\nu<\theta''_\nu<\theta_j$. Имеем

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{(\theta_j-\theta'_\nu)^{\alpha_j}-(\theta_j-\theta''_\nu)^{\alpha_j}}{(\theta''_\nu-\theta'_\nu)(\theta_j-\theta'_\nu+\theta''_\nu-\theta'_\nu)^{\alpha_j-1}}.$$

Полагая $x=\dfrac{\theta_j-\theta''_\nu}{\theta_j-\theta'_\nu}$, имеем

$$\frac{|\lambda_\nu|}{|\Lambda_\nu|}<\cdot\frac{1-x^{\alpha_j}}{(1-x)[2-x]^{\alpha_j-1}}\leqslant2\frac{1-x^{\alpha_j}}{1-x}\leqslant2.$$

Леммы 4 и 5 доказаны.

Следствие 5. Пусть функция $F(z)$ непрерывна в $\overline{G}$, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $F(z)$ в $\overline{G}$, $\lambda\geqslant1$. Тогда

$$\omega(\lambda\delta)\leqslant\sigma\lambda\omega(\delta),\ \delta>0,\ \sigma\leqslant2U.$$

Доказательство. Пусть $z', z''\in\overline{G}$, $|z'-z''|\leqslant\lambda\delta$, $\delta>0$. Соеди ним z' и z'' кривой $\lambda(z', z'') \in \overline{G}$, как указано в лемме 4, и отложим на ней $N \leqslant [\lambda U]+1$ точки z_ν, расстояние между которыми равно δ, $z=z'$, $|z_N - z''| \leqslant \delta$. Тогда

$$|F(z')-F(z'')| \leqslant \sum_{\nu=1}^{N-1} |F(z_\nu)-F(z_{\nu+1})| + |F(z_N)-F(z'') \leqslant$$
$$\leqslant N\omega(\delta) \leqslant (\lambda U+1)\,\omega(\delta) \leqslant 2U\lambda\omega(\delta).$$

Отсюда и из определения модуля непрерывности следует заключение следствия.

Лемма 6. *Имеют место оценки* $(0<\delta<h)$

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta)} |\zeta-z|^s\,|d\zeta| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{s+1}\,V\delta^{s+1}, & -1<s\leqslant 0, \\ V\delta^{s+1}, & s\geqslant 0, \end{cases} \qquad \overline{\Gamma}_R(z,\delta)=\Gamma_R \cap \overline{k(z,\delta)},$$

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta,h)} |\zeta-z|^s\,|d\zeta| \leqslant \begin{cases} \dfrac{s}{s+1}\,V\delta^{s+1}, & s<-1, \\ \dfrac{1}{s+1}\,Vh^{s+1} & -1<s<0 \\ Vh^{s+1}, & s\geqslant 0 \end{cases} \qquad \overline{\Gamma}_R(z,\delta,h)=\Gamma_R \cap \overline{k(z,\delta,h)}.$$

Доказательство. Для $\overline{\Gamma}_R(z,\delta)=\Gamma_R \cap \overline{k(z,\delta)}$, в силу леммы 5, при любом $\varepsilon>0$ имеем

$$|\overline{\Gamma}_R(z,\delta)|<\Gamma_R(z,\delta+\varepsilon) \leqslant V(\delta+\varepsilon),\ \delta>0;$$

в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем $|\overline{\Gamma}_R(z,\delta)| \leqslant V\delta$. Ради краткости записи положим $S(x)=|\overline{\Gamma}_R(z,x)|$, $x>0$. Тогда при $-1<s<0$ имеем

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta)} |\zeta-z|^s\,|d\zeta| = \int_0^\delta x^s\,dS(x) = S(x)\,x^s\Big|_0^\delta - s\int_0^\delta x^{s-1}S(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant S(\delta)\,\delta - sV\int_0^\delta x^s\,dx \leqslant V\delta^{s+1} - \frac{s}{s+1}\,V\delta^{s+1} = \frac{1}{s+1}\,V\delta^{s+1}.$$

При $s\geqslant 0$ получаем

$$\int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta)} |\zeta-z|^s\,|d\zeta| \leqslant S(x)\,x^s\Big|_0^\delta \leqslant V\delta^{s+1}.$$

Аналогично при $s<0$

$$J_s = \int\limits_{\overline{\Gamma}_R(z,\delta,h)} |\zeta-z|^s\,|d\zeta| = S(x)\,x^s\Big|_\delta^h - sV\int_\delta^h x^s\,dx.$$

Отсюда при $s\neq -1$ имеем

$$J_s \leqslant Vh^{s+1} - \frac{s}{s+1}Vh^{s+1} + \frac{s}{s+1}\,V\delta^{s+1} = \frac{1}{s+1}Vh^{s+1} + \frac{s}{s+1}\,V\delta^{s+1}.$$

Если $s>-1$, то $J_s \leqslant \frac{1}{s+1} \; Vh^{s+1}$, и если $s<-1$, то $J_s \leqslant \frac{s}{s+1} \quad V\delta^{s+1}$. При $s \geqslant 0$ очевидно, что $J_s \leqslant Vh^{s+1}$. Лемма доказана.

Далее нам потребуется ядро типа Джексона

$$J_{n,m}(\theta) = \frac{1}{\gamma_{n,m}} \left(\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta} \right)^m \quad \gamma_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta} \right)^m d\theta,$$

где $m>0$ — четное число и n — натуральное. Отметим некоторые свойства этого ядра.

1) Ядро $J_{n,m}(\theta)$ есть четный тригонометрический полином порядка не выше n,

2) $\left| \frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta} \right| \leqslant \left[\frac{n}{m}\right], \; |\theta| < \frac{\pi m}{n}, \; \left| \frac{\sin\left[\frac{n}{m}\right]\theta}{\sin\theta} \right| \leqslant \frac{1}{|\theta|}, \; |\theta| < \pi,$

3) $\gamma_{n,m} \asymp n^{m-1}$,

4) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, \theta^s \, d\theta \asymp \frac{1}{n^s}, \; 0 \leqslant s \leqslant m,$

5) $\int\limits_{|\theta|>a>0} J_{n,m}(\theta)\, \theta^s \, d\theta < \frac{1}{n^{m-1} a^{m-1-s}}, \; 0 \leqslant s \leqslant m.$

Пусть $\overline{G} \in \Psi^*$. Положим $R>1$,

$$P_n(z,\zeta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta) \sum_{p=1}^{k} \frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p} \, d\theta, \; \zeta \in \overline{G}^1, \;\; z \in G.$$

Покажем, что $p_n(z,\zeta)$ есть полином от z степени не выше $n-1$. Разлагая в ряд по степеням $e^{i\theta}$, последовательно получаем

$$(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1} = (\psi(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta))-\zeta)^{p-1} = (\gamma R\varphi(\zeta)\, e^{-i\theta} + (\gamma_0-\zeta) +$$
$$+ \gamma_1 R^{-1} \varphi(\zeta)^{-1} e^{i\theta} + \cdots)^{p-1} = \gamma^{p-1} R^{p-1} \varphi(\zeta)^{p-1} e^{-i(p-1)\theta} \times$$
$$\times \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \gamma_{p,q}(\zeta)\, e^{iq\theta}\right),$$

где $\gamma_{p,q}(\zeta)$ — функции, регулярные в G^1 и непрерывные в $\overline{G}^1$,

$$\frac{1}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p} = \frac{1}{\gamma^p R^p \varphi(\zeta)^p e^{-ip\theta} \left(1 + \frac{\gamma_0 - z}{\gamma R\varphi(\zeta)} e^{i\theta} + \frac{\gamma_1}{\gamma R^2 \varphi(\zeta)^2} e^{2i\theta} + \cdots\right)^p} =$$

$$= \frac{1}{\gamma^p R^p \varphi(\zeta)^p e^{-ip\theta}} \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} p_{p,q}(z,\zeta)\, e^{iq\theta}\right),$$

$$\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p} = \frac{1}{\gamma R} e^{i\theta} \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} p^{*}_{p,q}(z,\zeta)\, e^{iq\theta}\right).$$

Здесь $p_{p,q}(z, \zeta)$ и $\overset{*}{p}_{p,q}(z, \zeta)$ — полиномы от z степени q, коэффициенты которых есть функции от ζ, регулярные в G^1 и непрерывные в $\overline{G}^1$. Теперь ясно, что $p_n(z, \zeta)$ есть полином от z степени не выше n.

4°. **Доказательство теоремы.** Пусть $p_n(z, \zeta)$ — полином, введенный в конце пункта 3°, $R = 1 + \frac{1}{n} \leqslant R_1$, $k \geqslant \frac{4}{\alpha}(r+1)$, $\alpha = \min\limits_{j=1,\dots,l}(\alpha_j, 1)$, $m = 4(k+1)$, ν, $0 \leqslant \nu \leqslant r$, — целое число

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\, p_n(z, \zeta)\, d\zeta, \quad z \in G.$$

Имеем

$$f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\Bigg[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} -$$

$$- \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!}\, \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}}\Bigg] d\zeta\, d\theta. \tag{17}$$

Заметим, что

$$f(\zeta) - \sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(z)(\zeta - z)^{\mu} = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{z}^{\zeta} (\zeta - \tau)^{r-1}[f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z)]\, d\tau = f_r(\zeta), \tag{18}$$

где интегрирование производится по некоторой спрямляемой кривой $L(z, \zeta)$, соединяющей точки z и ζ и лежащей в $\overline{G}$. В силу леммы 5 мы можем считать, что $|L(z, \zeta)| < V|\zeta - z|$ и $L(z, \zeta) \subset \overline{G} \cap K(z, V|\zeta - z|)$ и потому для $\rho > 0$ имеем

$$|f_r(\zeta)| \leqslant \frac{1}{(r-1)!} V^r |\zeta - z|^r\, \omega(V|\zeta - z|) < \cdot \begin{cases} \dfrac{\omega(\rho)}{\rho}|\zeta - z|^{r+1}, & |\zeta - z| > \rho, \\ \omega(\rho)|\zeta - z|^r, & |\zeta - z| \leqslant \rho. \end{cases} \tag{19}$$

Не умаляя общности мы можем считать, что $f(z)$ обращатся в нуль вместе с r первыми производными в некоторой точки $z_0 \in \Gamma$, и потому

$$\sum_{\mu=0}^{r} \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(z)(\zeta - z)^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{r-1} \frac{(\zeta - z)^{\mu}}{\mu!(r-\mu-1)!}\int\limits_{z_0}^{z} (z - \tau)^{r-\mu-1}[f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z_0)]\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{r!}[f^{(r)}(z) - f^{(r)}(z_0)](\zeta - z)^r = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{z_0}^{z} (\zeta - \tau)^{r-1}[f^{(r)}(\tau) - f^{(r)}(z)]\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{r!}[f^{(r)}(z) - f^{(r)}(z_0)](\zeta - z)^r = p_r(z, \zeta).$$

Здесь интегрирование производится по кривой $L(z_0, z)$, построенной так же как $L(z, \zeta)$. Обозначая через d_2 диаметр $\overline{G}_2$, имеем

$$|p_r(z, \zeta)| \leqslant \left(\frac{V^r}{(r-1)!} + \frac{1}{r!}\right) d_2^r\, \omega(d_2) < \cdot \frac{\omega(\rho)}{\rho}, \; \rho < d_2, \; \zeta \in \Gamma_2. \tag{20}$$

Учитывая, что $f(\zeta) = f_r(\zeta) + p_r(z, \zeta)$, представим в (17) интеграл по Γ в виде суммы двух интегралов. Интеграл

$$\int_\Gamma f_r(\zeta) \left[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}}\right] d\zeta$$

разобьем на два интеграла по $\Gamma[z, \rho]$ и $\Gamma(z, \rho)$ и заменим интегрирование по $\Gamma(z, \rho)$ для слагаемого

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z,\rho)} f_r(\zeta) \frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta$$

интегрированием по $\gamma_\rho = \overline{G} \cap \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$. В интеграле

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma p_r(z, \zeta) \left[\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}}\right] d\zeta,$$

пользуясь аналитичностью $p_r(z, \zeta)$ в $\overline{G}^1$ по ζ, заменим интегрирование по Γ на интегрирование по Γ_2. Далее, учитывая, что

$$\frac{\nu!}{(\zeta - z)^{\nu+1}} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(p+\nu-1)!}{(p-1)!} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p+\nu}} = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\left[\frac{1}{\zeta - z} - \sum_{p=1}^{k} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{p}}\right] =$$

$$= \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta} - z)^k (\zeta - z)} = \nu! \sum_{p=0}^{\nu} C_{k+p-1}^{k-1} \frac{(\zeta_{R,\theta} - \zeta)^k}{(\zeta_{R,\theta} - z)^{k+p} (\zeta - z)^{\nu-p+1}},$$

получим формулу, в которой произведем оценку модуля левой части, пользуясь (19) и (20):

$$|f^{(\nu)}(z) - p_n^{(\nu)}(z)| < \cdot \int_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta) \left[\sum_{p=0}^{\nu} \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma[z,\rho]} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{k+p}} |\zeta - z|^{r-\nu+p} |d\zeta| + \right.$$

$$+ \int_{\gamma_\rho} |\zeta - z|^{r-\nu-1} |d\zeta| + \sum_{p=1}^{k} \int_{\Gamma(z,\rho)} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^{p-1}}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{p+\nu}} |\zeta - z|^r |d\zeta| +$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{\nu} \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_2} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{k+p}} |d\zeta|\right] d\theta \cdot \omega(\rho). \tag{21}$$

Далее полагаем, что $z \in \Gamma$ и $\rho = \rho_R(z)$, и нам нужно показать, что правая часть в $(21) < \cdot \rho^{r-\nu} \omega(\rho)$.

Оценим сначала интегралы по Γ_2. Полагая $\delta = \rho(\overline{G}, \Gamma_2)$ и учитывая, что $|\zeta_{R,\theta} - \zeta| < \left(|\theta| + \frac{1}{n}\right)^\alpha$, имеем

$$J_p(\Gamma_2)=\int\limits_{\Gamma_2}\frac{1}{\rho}\frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^k}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{k+p}}|d\zeta|<\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\left(|\theta|+\frac{1}{n}\right)^{k\alpha}}{\delta^{k+p}}|\Gamma_2|<\cdot\frac{1}{\rho}\left(|\theta|^{k\alpha}+\frac{1}{n^{k\alpha}}\right),$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,J_p(\Gamma_2)\,d\theta<\cdot\frac{1}{\rho}\frac{1}{n^{k\alpha}}\leqslant\frac{1}{\rho n^{2(r+1)}}<\cdot\rho_R(z)^r,\ p=0,\cdots,\nu.$$

Далее очевидно, что

$$J(\gamma_\rho)=\int\limits_{\gamma_\rho}|\zeta-z|^{r-\nu-1}|d\zeta|\leqslant 2\pi\rho^{r-\nu}<\cdot\rho_R(z)^{r-\nu},$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,J(\gamma_\rho)\,d\theta<\cdot\rho_R(z)^{r-\nu}.$$

Оценим интегралы по $\Gamma(z,\rho)$

$$J_p^*(\Gamma(z,\rho))=\int\limits_{\Gamma(z,\rho)}\frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{p-1}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{p+\nu}}|\zeta-z|^r|d\zeta|<\cdot\rho^{r-\nu-p}J_p^*,\ J_p^*=\int\limits_{\Gamma(z,\rho)}|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{p-1}|d\zeta|,$$

и задача свелась к оценке интегралов J_p^*. Пусть z_j — ближайшая угловая точка от ζ, $\zeta\in\Gamma(z,\rho)$, и пусть сначала z лежит в окрестности радиуса ε угловой точки z_j. В этом случае имеем

$$J_p^*<\cdot\int\limits_{\Gamma(z,\rho)}\theta_*^{p-1}\left(|\zeta-z_j|^{1/\alpha_j}+\theta_*\right)^{(p-1)(\alpha_j-1)}|d\zeta|.$$

Здесь и везде далее $\theta_*=|\theta|+\dfrac{1}{n}$. Если $\alpha_j>1$, то

$$\left(|\zeta-z_j|^{1/\alpha_j}+\theta_*\right)^{(p-1)(\alpha_j-1)}<\cdot|\zeta-z|^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}+|z-z_j|^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}+\theta_*^{(p-1)(\alpha_j-1)},$$

и мы имеем

$$J_p^*<\cdot\theta_*^{p-1}\rho^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}+1}+\theta_*^{p-1}|z-z_j|^{(p-1)\frac{\alpha_j-1}{\alpha_j}}\rho+\theta_*^{(p-1)\alpha_j}\rho,$$

а учитывая, что $\rho\asymp\dfrac{1}{n}\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}>\dfrac{1}{n^{\alpha_j}}$, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,J_p^*(\Gamma(z,\rho))\,d\theta<\cdot\frac{1}{n^{p-1}}\rho^{r-\nu-(p-1)\frac{1}{\alpha_j}}+$$

$$+\frac{\rho^{r-\nu-p+1}}{n^{p-1}}\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}\right)^{(p-1)(\alpha_j-1)}+\frac{\rho^{r-\nu-p+1}}{n^{(p-1)\alpha_j}}<\cdot\rho^{r-\nu}.$$

Если $\alpha_j<1$, то при $|z-z_j|>2\rho$ имеем

$$J_p^* < \cdot \int\limits_{\Gamma(z,\,\rho)} \frac{\theta_*^{p-1}}{\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{(p-1)(1-\alpha_j)}}\,|d\zeta| < \cdot\, n^{p-1}\rho^p\theta_*^{p-1},$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, J_p^*(\Gamma(z,\rho))\,d\theta < \cdot\, \rho^{r-\nu},\ p=1,\cdots,k.$$

Если $|z-z_j|<2\rho$, то $\rho \asymp \frac{1}{n}\left(|z-z_j|^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1} < \cdot \frac{1}{n^{\alpha_j}}$, $\rho \cdot > \frac{1}{n} \times \left(\rho^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}$, и из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{n} < \cdot\, \rho\left(\rho^{1/\alpha_j}+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha_j} < \rho^{1/\alpha_j} + \frac{1}{n^{1-\alpha_j}}\,\rho.$$

Полагая здесь $\rho=\frac{1}{n^{\alpha_j}}x$, имеем $A < x^{1/\alpha_j}+x$, где $A>0$—постоянная, откуда заключаем, что x ограничен снизу и, следовательно, $\rho \cdot > \frac{1}{n^{\alpha_j}}$. Таким образом, $\rho \asymp \frac{1}{n^{\alpha_j}}$, и мы имеем

$$J_p^* < \cdot \int\limits_{\Gamma(z,\,\rho)} \theta_*^{(p-1)\alpha_j}|d\zeta| < \cdot\, \theta_*^{(p-1)\alpha_j}\rho,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, J_p(\Gamma(z,\rho))\,d\theta < \cdot\, \rho^{r-\nu-p}\frac{1}{n^{\alpha_j(p-1)}}\rho < \cdot\, \rho^{r-\nu},\ p=1,\cdots,k.$$

Пусть теперь z лежит вне окрестности радиуса ε угловых точек. В этом случае $\rho \asymp \frac{1}{n}$ и $|\zeta_{R,\theta}-\zeta| < \cdot\, \theta_*$, и мы имеем

$$J_\rho^* < \cdot \int\limits_{\Gamma(z,\,\rho)} \theta_*^{p-1}|d\zeta| < \cdot\, \theta_*^{p-1}\rho,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{n,m}(\theta)\, J_p(\Gamma(z,\rho))\,d\theta < \cdot$$

$$< \cdot\, \frac{1}{n^{p-1}}\rho^{r-\nu-p+1} < \rho^{r-\nu},\ p=1,\cdots,k.$$

Итак, интегралы по $\Gamma(z,\rho)$ в (21) рассмотрены и получены нужные оценки. Осталось рассмотреть интегралы по $\Gamma[z,\rho]$. Учитывая, что $|\zeta-z|^{r-\nu+p} < \cdot\, |\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{r-\nu+p}+|\zeta_{R,\theta}-z|^{r-\nu+p}$, видим, что нам достаточно оценить интегралы

$$I_q = \int\limits_{\Gamma[z,\,\rho]} \frac{|\zeta_{R,\theta}-\zeta|^{q+r}}{|\zeta_{R,\theta}-z|^{q+\nu}}\,|d\zeta|,\ q=k-r+p,\ q=k-\nu+p,\ p=0,\cdots,\nu.$$

Если мы покажем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_{n,\,m}(\theta)\, I_q\, d\theta <\cdot\, \rho^{r-\nu+1},$$

то теорема будет доказана.

Пусть сначала $|\theta| > \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}$. Тогда $|\zeta_{R,\,\theta}-\zeta| <\cdot\, \theta_*^{\alpha}$, $I_q <\cdot\, \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha}}{\rho^{q+\nu}}$ и

$$\int\limits_{|\theta|>\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,\,m}(\theta)\, I_q\, d\theta <\cdot\, \frac{1}{n^{m-1}\,\rho^{q+\nu}} \int_{\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}}^{\pi} \theta_*^{(q+r)\alpha-m}\, d\theta <\cdot$$

$$<\cdot\, \frac{1}{n^{\frac{1}{2}(q+r)\alpha+\frac{1}{2}(m-1)}\,\rho^{q+\nu}} <\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}(q+r)\alpha+\frac{1}{2}(m-1)-2q-2\nu} <$$

$$<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k+r}{2}\alpha+2(k+1)-\frac{1}{2}-2k-2\nu} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k+r}{2}\alpha+\frac{3}{2}-2\nu} <\cdot\, \rho^{r-\nu+1}.$$

Далее рассматриваем случай $|\theta| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}$ и в скобках после I_q указываем по какой части $\Gamma[z,\rho]$ производится интегрирование. Разобьем $\Gamma[z,\rho]$ в зависимости от положения точки z. Пусть z_j, $j=1,\cdots,l$, —все угловые точки. Определим множества Γ_*, $\Gamma(j)$, $\Gamma_{**} \subset \Gamma[z,\rho]$ следующим образом:

а) Пусть для всех $j=1,\cdots,l$ выполнено $|z-z_j| > \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$\Gamma_* = \left\{\zeta\colon \zeta\in\Gamma[z,\rho];\ |\zeta_{R,\,\theta}-z| > \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}},\ |\zeta_{R,\,\theta}-z_j| > \frac{\varepsilon}{6},\ j=1,\cdots,l\right\},$$

$$\Gamma(j) = \left\{\zeta\colon \zeta\in\Gamma[z,\rho];\ |\zeta_{R,\,\theta}-z_j| < \frac{\varepsilon}{6}\right\},\ j=1,\cdots,l,$$

$$\Gamma_{**} = \left\{\zeta\colon \zeta\in\Gamma[z,\rho];\ |\zeta_{R,\,\theta}-z| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}\right\}.$$

в) Пусть для некоторого j_0 выполняется условие $|z-z_{j_0}| < \frac{\varepsilon}{4}$ (ясно, что такая точка z_{j_0} единственна). Тогда Γ_* определим, как в а), $\Gamma(j)$ определим, как в а) для $j\neq j_0$, и не определяем для $j=j_0$, и

$$\Gamma_{**} = \left\{\zeta\colon \zeta\in\Gamma[z,\rho];\ |\zeta_{R,\,\theta}-z| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}\right\}\cup$$

$$\cup\left\{\zeta\colon \zeta\in\Gamma[z;\rho];\ |\zeta_{R,\,\theta}-z_{j_0}| < \frac{\varepsilon}{6}\right\}.$$

Очевидно, что в обоих случаях $\Gamma = \Gamma_* \cup \Gamma_{**} \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{p} \Gamma(j)\right)$.

Оценим сначала $I_q(\Gamma_*)$. Заметим, что при $\zeta \in \Gamma_*$ имеем

$$|\zeta_{R,\theta} - \zeta| \prec \theta_*, \quad |\zeta - z| \leqslant |\zeta_{R,\theta} - \zeta| + |\zeta_{R,\theta} - z| \prec |\zeta_{R,\theta} - z|.$$

Используя лемму 6, получим

$$I_q(\Gamma_*) \prec \int\limits_{\Gamma_*} \frac{\theta_*^{q+r}}{|\zeta - z|^{q+\nu}} |d\zeta| \prec \theta_*^{q+r} \sqrt{n}^{\,q+\nu-1},$$

$$\int\limits_{|\theta| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_*)\, d\theta \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{q+r-\frac{1}{2}(q+\nu-1)} \prec$$

$$\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{k-\frac{1}{2}(k-r+\nu-1)} < \left(\frac{1}{n}\right)^{2(r-\nu+1)} \prec \rho^{r-\nu+1}.$$

Отметим, что на $\Gamma(j)$ имеем $|\zeta_{R,\theta} - z| \geqslant |z - z_j| - |\zeta_{R,\theta} - z_j| > \dfrac{\varepsilon}{12}$, и потому

$$I_q(\Gamma(i)) \prec \int\limits_{\Gamma_j} \theta_*^{(q+r)\alpha_j} |d\zeta| \prec \theta_*^{k\alpha_j},$$

$$\int\limits_{|\theta| < \frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma(j)) \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{k\alpha_j} < \left(\frac{1}{n}\right)^{3(r+1)} \prec \rho^{r-\nu+1}.$$

Оценим $I_q(\Gamma_{**})$. Для этого перейдем на вспомогательную плоскость ξ и обозначим прообразы точек ζ, $\zeta_{R,\theta}$, z, z_j (z_j — ближайшая угловая точка z) и Γ_{**} при отображении $z = \psi_*(\xi)$ через ξ, $\xi_{R,\theta}$, ξ_0, ξ_j и γ_{**}. Если $|z - z_j| > \dfrac{\varepsilon}{4}$, то $\Gamma_{**} = \left\{\zeta\colon \zeta \in \Gamma;\ |\zeta_{R,\theta} - z| < \dfrac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}\right\}$, и потому $|\zeta_{R,\theta} - z_j| \geqslant |z - z_j| - |\zeta_{R,\theta} - z| > \dfrac{\varepsilon}{4} - \dfrac{\varepsilon}{6} = \dfrac{\varepsilon}{12}$ и $|\zeta - z_j| \geqslant |z - z_j| - |\zeta - \zeta_{R,\theta}| - |\zeta_{R,\theta} - z| > \dfrac{\varepsilon}{4} - \theta_* - \dfrac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}$ и при n достаточно больших $\zeta - z| > \dfrac{\varepsilon}{8}$. Теперь имеем $|\zeta_{R,\theta} - \zeta| \prec \theta_* \left(|\zeta_{R,\theta} - z_j|^{1/\alpha_j} + \theta_*\right)^{\alpha_j - 1} \asymp \theta_*$,

$$|\zeta_{R,\theta} - z| \succ |\xi_{R,\theta} - \xi_0| \left[\,|z - z_j|^{1/\alpha_j} + |\xi_{R,\theta} - \xi_0|\right]^{\alpha_j - 1} \asymp |\xi_{R,\theta} - \xi_0|,$$

$\zeta'_\xi \asymp 1$, $\rho_R(z) \asymp \dfrac{1}{n}$ и имеем

$$I_q(\Gamma_{**}) = \int\limits_{\Gamma_{**}} \frac{|\zeta_{R,\theta} - \zeta|^{q+r}}{|\zeta_{R,\theta} - z|^{q+\nu}} |d\zeta| \prec \int\limits_{\gamma_{**}} \frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_{R,\theta} - \xi_0|^{q+\nu}} |d\xi| \prec$$

$$\prec \int\limits_{\gamma_{**}} \frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_{R,\theta}(\xi) - \xi_0|^{q+\nu}} |d\xi_{R,\theta}(\xi)| \prec \theta_*^{q+r}\, n^{q+\nu-1},$$

$$\int\limits_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_{**})\, d\theta < \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{q+r} n^{q+\nu-1} < \cdot\, \rho^{r-\nu+1}.$$

Пусть теперь $|z-z_j|<\frac{1}{4}\varepsilon$. Тогда $|z-z_j|\asymp|\xi_0-\xi_j|^{\alpha_j}$, $|\zeta_{R,\theta}-z_j|\asymp$ $\asymp|\xi_{R,\theta}-\xi_j|^{\alpha_j}$ и при $\alpha_j<2$ имеем

$$I_q(\Gamma_{**})<\cdot\int\limits_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{q+r}(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*)^{(q+r)(\alpha_j-1)}|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|)^{(q+\nu)(\alpha_j-1)}}. \quad (22)$$

Если же $\alpha_j=2$, то как в замечании 2 введем точку z' и $\xi_0'=\varphi_*(z')$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $z\in\Gamma'_+$. Разобьем Γ_{**} на две части: Γ_{**}^+ — множество тех $\zeta\in\Gamma_{**}$, для которых $\zeta_{R,\theta}$ лежит в правой полуплоскости по отношению к вектору $k=\frac{1}{2}(z+z')-z_j$ (см. замечание 2) и Γ_{**}^- — множество тех $\zeta\in\Gamma_{**}$, для которых $\zeta_{R,\theta}$ лежит в левой полуплоскости по отношению к тому же вектору. Соответственно этому γ_{**} разобьем на γ_{**}^+ и γ_{**}^-. Тогда $I(\Gamma_{**})$ можно разбить на два интеграла по Γ_{**}^+ и по Γ_{**}^-. Первый интеграл после замены переменной и оценки числителя и знаменателя даст интеграл (22), взятый по γ_{**}^+, который можно заменить интегралом по γ_{**}. Во втором интеграле (по Γ_{**}^-) заменим сначала z на z', что увеличит интеграл, а затем произведем замену переменной и оценки числителя и знаменателя. Это приведет к интегралу (22) по γ_{**}^-, в котором ξ_0 заменено на ξ_0'. В этом интеграле интегрирование по γ_{**}^- можно заменить интегрированием по γ_{**}. Таким образом, $I(\Gamma_{**})<\cdot$ суммы интегралов вида (22), в одном из которых ξ_0 заменено на ξ_0'. Эти интегралы оцениваются одинаковым способом и дают одинаковый результат, поскольку $\rho_R(z')\asymp\rho_R(z)$. Потому далее мы можем считать, что и при $\alpha_j=2$ имеет место неравенство (22). Займемся оценкой интеграла (22).

Рассмотрим сначала случай $\alpha_j>1$. Если $|\xi_{R,\theta}-\xi_j|\leqslant\theta_*$, то $|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi|^{\alpha_j-1}+|\xi_{R,\theta}-\xi_j|^{\alpha_j-1}<\cdot\,\theta_*^{\alpha_j-1}$, и числитель в подынтегральном выражении в (22) можно заменить на $\theta_*^{(q+r+1)\cdot\alpha_j-1}$, а знаменатель—на $|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}$. Если $|\xi_{R,\theta}-\xi_j|>\theta_*$, то

$$|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|+|\xi_0-\xi_j|,\ \ |\xi-\xi_j|\leqslant|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|+$$
$$+|\xi_0-\xi_j|<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|+|\xi_0-\xi_j|$$

и потому

$$(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*)^{(r-\nu)(\alpha_j-1)}|\xi-\xi_j|^{\alpha_j-1}<\cdot|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}+$$
$$+|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)},$$

и подынтегральное выражение в (22) можно заменить на

$$\frac{\theta_*^{q+r}(|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}+|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)})}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}}.$$

Таким образом

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int\limits_{\gamma_{**}}\left(\frac{\theta_*^{(q+r+1)\alpha_j-1}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}}+\frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu-(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\theta_*^{q+r}|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}}\right)|d\xi|.$$

Используя лемму 5, получаем

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \theta_*^{(q+r+1)\alpha_j-1}n^{(q+\nu)\alpha_j-1}+\theta_*^{q+r}n^{q+\nu-(r-\nu+1)(\alpha_j-1)-1}+$$

$$+\theta_*^{q+r}n^{q+\nu-1}|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(\alpha_j-1)}.$$

$$\int\limits_{|\theta|<\frac{\varepsilon}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\,I_q(\Gamma_{**})\,d\theta \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(r-\nu+1)\alpha_j}+$$

$$+\left(\frac{1}{n}|\xi_0-\xi_j|^{\alpha_j-1}\right)^{r-\nu+1} \prec \rho^{r-\nu+1}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\rho \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j}$, $\rho \succ \frac{1}{n}|\xi_0-\xi_j|^{\alpha_j-1}$, ибо $\rho \asymp \frac{1}{n}\left(|\xi_0-\xi_j|+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1}$.

Рассмотрим случай $\alpha_j<1$. Имеем, в силу (11) и (14) (см. также (22))

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int\limits_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{q+r}(|\xi_0-\xi_j|+|\xi_{R,\theta}-\xi_0|)^{(q+\nu)(1-\alpha_j)}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}(|\xi_{R,\theta}-\xi_j|+\theta_*)^{(q+r)(1-\alpha_j)}}\frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}. \tag{23}$$

Рассмотрим несколько подслучаев. 1) $|\xi_0-\xi_j|<\frac{A}{n}$, где $A>0$ — некоторая постоянная. При этом из геометрических соображений ясно, что $|\xi_{R,\theta}-\xi_0| \asymp |\xi_{R,\theta}-\xi_j| \succ |\xi_0-\xi_j|$, и потому

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int\limits_{\gamma_{**}}\frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}|d\xi|.$$

Представим γ_{**} в виде объединения γ' и γ'', на которых соответственно $|\xi-\xi_j|\leqslant\frac{1}{n}$ и $|\xi-\xi_j|>\frac{1}{n}$, $\xi\in\gamma_{**}$. При этом получаем

$$I_q(\Gamma_{**}) \prec \int\limits_{\gamma'}\theta_*^{(q+r)\alpha_j}n^{(q+\nu)\alpha_j}\frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}+$$

$$+\int_{\gamma''} \theta_*^{(q+r)\alpha_j} n^{1-\alpha_j} \frac{|d\xi_{R,\theta}|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}}.$$

Используя лемму 5, имеем

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot\, \theta_*^{(q+r)\alpha_j} n^{(q+\nu)\alpha_j-\alpha_j} + \theta_*^{(q+r)\alpha_j} n^{(q+\nu)\alpha_j-1+1-\alpha_j},$$

$$\int_{|\theta|<\frac{\pi}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta) I_q(\Gamma_{**})\, d\theta < \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{(r-\nu+1)\alpha_j} < \cdot\, \rho^{r-\nu+1}.$$

Последнее следует из того, что $\rho \asymp \frac{1}{n}\left(|\xi_0-\xi_j|+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1} \asymp \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha_j}$.

2) $|\xi_0-\xi_j| > \frac{A}{n}$. Представим $\gamma_{**}=\gamma' \cup \gamma''$, $\gamma'=\{\xi: \xi\in\gamma_{**};\ |\xi_{R,\theta}-\xi_0| > A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, $\gamma''=\{\xi: \xi\in\gamma_{**};\ |\xi_{R,\theta}-\xi_0| < A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, где A_1 — некоторая постоянная $0<A_1<\frac{1}{2}$. Тогда $|\xi_{R,\theta}-\xi_j| \geqslant |\xi_0-\xi_j|-|\xi_{R,\theta}-\xi_0| > (1-A_1)|\xi_0-\xi_j|$, $\xi\in\gamma''$, и из (23) имеем

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot \int_{\gamma'} \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}} +$$

$$+\int_{\gamma''} \frac{\theta_*^{q+r}|d\xi|}{|\xi_{R,\theta}-\xi_0|^{q+\nu}|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu)(1-\alpha_j)}|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}.$$

Положим $\gamma'=\gamma_1'\cup\gamma_2'$, $\gamma_1'=\{\xi: \xi\in\gamma';\ |\xi-\xi_j|\geqslant A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, $\gamma_2'=\{\xi: \xi\in\gamma';\ |\xi-\xi_j|<A_1|\xi_0-\xi_j|\}$, и аналогичным образом $\gamma''=\gamma_1''\cup\gamma_2''$. Тогда

$$I_q(\Gamma_{**}) < \cdot \int_{\gamma_1'} \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_0-\xi_j|^{1-\alpha_j}} \frac{|d\xi_{R,\theta}(\xi)|}{|\xi_{R,\theta}(\xi)-\xi_0|^{(q+\nu)\alpha_j}} +$$

$$+\int_{\gamma_2'} \frac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_0-\xi_j|^{(q+\nu)\alpha_j}} \frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}} +$$

$$+\int_{\gamma_1''} \frac{\theta_*^{q+r}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(1-\alpha_j)}} \frac{|d\xi_{R,\theta}(\xi)|}{|\xi_{R,\theta}(\xi)-\xi_0|^{q+\nu}} + \int_{\gamma_2''} \frac{\theta_*^{q+r} n^{q+\nu}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu)(1-\alpha_j)}} \frac{|d\xi|}{|\xi-\xi_j|^{1-\alpha_j}}.$$

Заметим, что для $\xi\in\gamma_2''$ имеем $\theta_* > \cdot\, |\xi_{R,\theta}-\xi| \geqslant |\xi_0-\xi_j|-|\xi_{R,\theta}-\xi_0|-|\xi-\xi_j| > (1-2A_1)|\xi_0-\xi_j|$, т. е. $\theta_* > A_2|\xi_0-\xi_j|$, где $A_2>0$ — некоторая постоянная. Следовательно при $\theta_* \leqslant A_3|\xi_0-\xi_j|$ интеграл по γ_2'' отсутствует. Далее, применяя лемму 5, и учитывая в интеграле по γ_1', что $|\xi_{R,\theta}-\xi_0| > A_1|\xi_0-\xi_j|$, получаем оценку

$$
I_q(\Gamma_{**}) <\cdot \begin{cases} \dfrac{\theta_*^{(q+r)\alpha_j}}{|\xi_0-\xi_j|^{(q+\nu-1)\alpha_j}} + \dfrac{\theta_*^{q+r}\, n^{q+\nu-1}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu+1)(1-\alpha_j)}} = M_q(\theta), \\ \qquad\qquad \theta_* \leqslant A_2|\xi_0-\xi_j|; \\ M_q(\theta)+N_q(\theta),\ N_q(\theta) = \dfrac{\theta_*^{(q+r)}\, n^{q+\nu}}{|\xi_0-\xi_j|^{(r-\nu)(1-\alpha_j)-\alpha_j}}, \\ \qquad\qquad \theta_* > A_2|\xi_0-\xi_j|. \end{cases} \tag{24}
$$

Теперь имеем

$$
\int\limits_{|\theta|<\frac{\delta}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, I_q(\Gamma_{**})\, d\theta \leqslant \int\limits_{|\theta|<\frac{\delta}{6\sqrt{n}}} J_{n,m}(\theta)\, M_q(\theta)\, d\theta + \int\limits_{|\theta|>A_2|\xi_0-\xi_j|} J_{n,m}(\theta)\, N_q(\theta)\, d\theta = \varepsilon_n + \delta_n. \tag{25}
$$

Обозначая $x=|\xi_0-\xi_j|$, легко получаем, пользуясь (24) и (25)

$$
\varepsilon_n <\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{(q+r)\alpha_j} \frac{1}{x^{(q+\nu-1)\alpha_j}} + \left(\frac{x^{\alpha_j-1}}{n}\right)^{r-\nu+1},
$$

$$
\delta_n <\cdot n^{q+\nu-m+1}\, x^{q+r-m-(r-\nu)(1-\alpha_j)+\alpha_j-1},
$$

и $\varepsilon_n+\delta_n <\cdot \rho^{r-\nu+1}$, поскольку $\rho \asymp \dfrac{1}{n}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha_j-1} \asymp \dfrac{x^{\alpha_j-1}}{n}$, $nx>A$, $m=4(k+1)$, $k-r\leqslant q\leqslant k$, $k>\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)r$.

Теорема доказана для n достаточно больших. Ясно, что она справедлива и для всех $n=0, 1, \cdots$ (с некоторыми другими постоянными A_ν).

Замечание 3. Пусть $\bar{G}=\bigcup\limits_{k=1}^{m} \bar{G}^{(k)}$, $\bar{G}^{(k)} \cap \bar{G}^{(k')}=\varnothing$, $k\neq k'$, $k, k'=1,\cdots,m$, $\bar{G}^{(k)}\in\Psi^*$. Применяя метод работ П. Я. Киселева [8], [9], мы получим теоремы приближения полиномами функций, регулярных во внутренних точках множества $\bar{G}$ и имеющих r ($r=0, 1, \cdots$) непрерывных производных на $\bar{G}$ (см. также работу В. К. Дзядыка [3], стр. 1163). Имеются и другие обобщения.

Ленинградский государственный университет

Поступило 10.V.1971

Ն. Ա. ԼԵԲԵԴԵՎ, Ն. Ա. ՇԻՐՈԿՈՎ. Ֆունկցիաների ճշգրտաչափ մոտարկման մասին այնպիսի փակ բազմությունների վրա, որոնք ունեն վերջավոր թվով անկյունային կետեր ոչ զրոյական արտաքին անկյուններով *(ամփոփում)*

Դիցուք $\bar{G}$-*ն փակ տիրույթ է,* $\Gamma=\partial\bar{G}$, $\psi(t)=a_1 t+a_0+a_{-1}t^{-1}+\cdots$; $a_1>0$, *կոնֆորմ արտապատկերում է* $|t|>1$ *տիրույթը* $C\bar{G}$-*ի վրա,* $\Gamma_R=\psi(\{|t|=R\})$, $R>1$, $\rho_R(z)=\operatorname{dist}(z,\Gamma_\rho)$, $l>0$ *ամբողջ թիվ է։*

$$|t_j|=1,\ j=1,\cdots,l,\ t_j\neq t_{j'},\ j\neq j',\ 0<\alpha_j\leqslant 2,$$

$$\alpha_j\neq 1,\ j=1,\cdots,l,\ 0<h\leqslant\frac{1}{2}\min_{j\neq j'}(|t_j-t_{j'}|,1),\ 0<c_1<c_2<\infty.$$

կասենք, որ $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1,\ldots, t_l, \alpha_l)$, եթե $\psi(t)$-ն անընդհատ է $1<|t|<\infty$-ում

$$c_1\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}<|\psi'(t)|<c_2\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1},\ \left|\arg\frac{t_j}{t}\right|<h,$$

$$c_1<|\psi'(t)|<c_2,\quad\left|\arg\frac{t_j}{t}\right|\geqslant h,\ j=1,\cdots,l,\ \psi(t)\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{-\alpha_j}$$

անընդհատ է t_j կետում: Ապացուցված է թեորեմ, որը ընդհանրացնում է Վ. Կ. Ձյադիկի և Ն. Ն. Վորոբյովի համապատասխան թեորեմները [1—7]:

Դիցուք $f(z)\in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}$, $z\in\overline{G}$, $r\geqslant 0$, ամբողջ է $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1,\cdots, t_l, \alpha_l)$:

Այդ դեպքում $n=1, 2,\ldots$ համար գոյություն ունի $P_n(z)$ բազմանդամ, որի աստիճանը $\leqslant n$-ից այնպես, որ $\nu=0,\ldots, r$ դեպքում տեղի ունի

$$|f^{(\nu)}(z)-P_n^{(\nu)}(z)|\leqslant A_\nu\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^{r-\nu}\,\omega\left(\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right),\ z\in\Gamma,$$

որտեղ A_ν-ը հաստատուններ են, կախված միայն $\overline{G}$-ից: Նշված են որոշ ընդհանրացումներ:

N. A. LEBEDEV, N. A. SHIROKOV. *On uniform approximation of functions on closed sets with finite number of angular points with nonzero exterior angles* (summary)

Let $\overline{G}$ be a closed domain, $\Gamma=\partial\overline{G}$, $\psi(t)=a_1t+a_0+a_{-1}t^{-1}+\cdots$, $a_1>0$, the conformal map of $|t|>1$ onto $C\overline{G}$;

$$\Gamma_R=\psi(\{|t|=R\}),\ R>1,\ \rho_R(z)=\text{dist}(z,\Gamma_R),\ l>0$$

an integer, $|t_j|=1$, $j=1,\cdots,l$, $t_j\neq t_{j'}$, $j\neq j'$; $0<\alpha_j\leqslant 2$,

$$\alpha_j\neq 1,\ j=1,\cdots,l;\ 0<h\leqslant\frac{1}{2}\min_{j\neq j'}(|t_j-t_{j'}|,1),\ 0<c_1<c_2<\infty.$$

By definition $\overline{G}\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1, \alpha_1,\cdots, t_l, \alpha_l)$ if $\psi(t)$ is continuous in $1<|t|<\infty$,

$$c_1\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1}<|\psi'(t)|<c_2\left|1-\frac{t_j}{t}\right|^{\alpha_j-1},\ \left|\arg\frac{t_j}{t}\right|<h,$$

$$c_1<|\psi'(t)|<c_2,\ \left|\arg\frac{t_j}{t}\right|\geqslant h,\ j=1,\cdots,l,\ \psi(t)\left(1-\frac{t_j}{t}\right)^{-\alpha_j}$$

is continuous at the point t_j. A theorem is proved which generalises the corresponding theorems of V. K. Dzjadik, N. N. Vorobjev [1—7]. Let the function $f(z)\in A^{(r)}H^{\omega(\delta)}$, $z\in\overline{G}$, $r\geqslant 0$ be an integer, $G\in\Psi^*(c_1, c_2, t_1,\cdots,\alpha_l)$. Then for $n=1,2,\cdots$ there exists a polynomial $p_n(z)$ of degree $\leqslant n$ such that for $\nu=0,\cdots,r$ the condition

$$|f^{(\nu)}(z)-p_n^{(\nu)}(z)|<A_\nu\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^{r-\nu}\,\omega\left(\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right),\ z\in\Gamma,$$

is satisfied, where A_ν are constants depending only on $\overline{G}$. Some generalisations are indicated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык.* О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 1959, 697—736.
2. *В. К. Дзядык.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского (первое сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 6, 1962, 797—824.
3. *В. К. Дзядык.* К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях и о проблеме С. М. Никольского (второе сообщение), Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 5, 1963, 1135—1164.
4. *В. К. Дзядык.* О конструктивной характеристике классов Гельдера на замкнутых множествах с кусочно гладкой границей, допускающей ненулевые углы, УМЖ, 20, № 5, 1968, 603—619.
5. *В. К. Дзядык.* Исследования по теории приближений аналитических функций, проводимые в Институте математики АН УССР, УМЖ, 21, № 2, 1969, 173—192.
6. *Н. Н. Воробьев.* О приближении непрерывных функций некоторых классов, заданных на жордановых дугах, УМЖ, 19, № 3, 1967, 90—95.
7. *Н. Н. Воробьев.* Об одновременом приближении функций и их производных в комплексной области, УМЖ, 20, № 1, 1968, 113—119.
8. *П. Я. Киселев.* О приближении аналитических функций полиномами в конечном числе областей, УМЖ, 14, № 2, 1962, 202—205.
9. *П. Я. Киселев.* Некоторые вопросы аппроксимации аналитических функций в конечном числе областей, Сб. „Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций", Баку, 1965, 326—332.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS