

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԲԱՇՏԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՑԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼԻՏԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ՔԱԼԱՆԻՏԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼԻՏԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՑԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։ Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդիաները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) լին թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է նոտրագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутия, 24, Редакция Известия АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barakamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

В. М. АДАМЯН, Д. Э. АРОВ, М. Г. КРЕЙН

БЕСКОНЕЧНЫЕ БЛОЧНО-ГАНКЕЛЕВЫ МАТРИЦЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ

В этой статье мы продолжаем наши исследования [1а-г] по бесконечным ганкелевым матрицам и их приложениям. Здесь мы обобщаем полученные ранее результаты на случай, когда элементами бесконечной ганкелевой матрицы являются не числа, а блоки-операторы, действующие из одного гильбертова пространства N_1 в другое N_2 .

Все рассматриваемые гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными. Для двух гильбертовых пространств H_1 и H_2 через $[H_1, H_2]$ обозначается пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2 .

Если N — фиксированное гильбертово пространство, то через $l_2^+(N)$ обозначается гильбертово пространство односторонних последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ векторов $\xi_k \in N$, для которых

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_k\|^2 < \infty.$$

Естественно N рассматривать как подпространство в $l_2^+(N)$ векторов ξ , у которых все „координаты“ $\xi_k = 0$ при $k > 1$.

Оператор $\Gamma \in [l_2^+(N_1), l_2^+(N_2)]$ называется ганкелевым, если он определяется блочно-ганкелевой матрицей $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, где блоки $\gamma_k \in [N_1, N_2]$ ($k=1, 2, \dots$):

$$\Gamma \{\xi_j\}_{j=1}^\infty = \{\eta_j\}_{j=1}^\infty, \quad \eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1} \xi_k, \quad j=1, 2, \dots \quad (0.1)$$

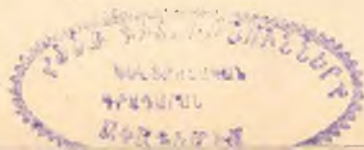
Множество всех ганкелевых операторов из $[l_2^+(N_1), l_2^+(N_2)]$ в дальнейшем обозначается через $H^+(N_1, N_2)$.

Пусть $L_\infty(N_1, N_2)$ — пространство слабо измеримых* на единичной окружности $C = \{\zeta: |\zeta|=1\}$ оператор-функций $F(\zeta)$ со значениями из $[N_1, N_2]$ с нормой

$$\|F\|_\infty = \text{ess sup } \|F(\zeta)\| < \infty.$$

Класс операторов $H^+(N_1, N_2)$ играет особую роль в гармоническом анализе функций из $L_\infty(N_1, N_2)$.

* В силу сепарабельности рассматриваемых гильбертовых пространств все слабо измеримые абстрактные функции, встречающиеся в работе, являются одновременно сильно измеримыми.



Теорема 0.1. Пусть заданы последовательность $\{\gamma_k\}_1^\infty$ операторов из $[N_1, N_2]$ и число $\rho > 0$. Для того чтобы существовала оператор-функция $F \in L_-(N_1, N_2)$ такая, что

$$c_{-k}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \zeta^k F(\zeta) |d\zeta| = \gamma_k \quad (k=1, 2, \dots), \quad (0.2)$$

и

$$\|F\|_- \leq \rho, \quad (0.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы матрицей $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ определялся по формуле (0.1) оператор $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ и чтобы $\rho > \|\Gamma\|$.

В скалярном случае ($\dim N_1 = \dim N_2 = 1$) это предложение впервые было установлено Нехари [2] как обобщение классического результата И. Шура [3].

Функция $F(\zeta) (\in L_-(N_1, N_2))$, удовлетворяющая при фиксированных $\gamma_k (k=1, 2, \dots)$ и $\rho (>0)$ условиям (0.2) и (0.3), называется $(\Gamma; \rho)$ -функцией. При $\rho = \|\Gamma\|$ она также называется Γ -минифункцией.

Даже для скалярного случая после работы [2] оставался открытым вопрос об описании всех $(\Gamma; \rho)$ -функций и, в частности, вопрос о единственности Γ -минифункции.

Решение этих вопросов авторы получили в [16] на основе теории расширения изометрических операторов. Попутно было получено новое доказательство теоремы Нехари, которое непосредственно переносится на общий случай ($1 \leq \dim N_k \leq \infty, k=1, 2$).

Для случая $\dim N_1 = \dim N_2 (< \infty)$ доказательство теоремы 0.1, являющееся прямым обобщением скалярного варианта доказательства теоремы, приведенного в [2] и [1а], фактически содержится в статье [4]. В статье [5] для того же случая ($\dim N_1 = \dim N_2 < \infty$) показано, что теорема 0.1 является простым следствием одного сравнительно недавнего результата Б. С. Надея и Ч. Фояша (см. [16], теорема II. 2.3). В настоящей работе попутно получается еще одно доказательство теоремы 0.1 в самом общем случае.

В § 1 мы показываем, что при фиксированных $\Gamma (\in H^+(N_1, N_2))$ и $\rho (> \|\Gamma\|)$ „нулевые“ коэффициенты Фурье $c_0(F)$ всевозможных $(\Gamma; \rho)$ -функций $F(\zeta)$ заполняют операторный квази-шар $K(\Gamma; \rho)$ в $[N_1, N_2]$, центр $\gamma_0^{(u)}(\Gamma; \rho)$ и полурадиусы $R_L(\Gamma; \rho)$ и $R_P(\Gamma; \rho)$ (левый и правый) которого находятся по оператору Γ и числу ρ с помощью следующих процедур.

Положим

$$R_P = (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1}, \quad R_L = (\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-1},$$

где I_k — единичный оператор в пространстве $l_2^+(N_k)$ ($k=1, 2$), и далее

* Интеграл в правой части равенства (0.2) понимается в слабом смысле.

$$G(\Gamma; \rho) = [P_1 R_{\rho} | N_1]^{-\frac{1}{2}} (\gg 0), \quad \hat{G}(\Gamma; \rho) = [P_2 \hat{R}_{\rho} | N_2]^{-\frac{1}{2}} (\gg 0),$$

где P_k — ортопроекторы в $l_2^+(N_k)$ на N_k ($k=1, 2$).

Через T_k ($k=1, 2$) обозначим операторы правого сдвига в $l_2^+(N_k)$:

$$T_k \{\xi_1, \xi_2, \dots\} = \{0, \xi_1, \xi_2, \dots\}, \quad \{\xi_j\}_1^\infty \in l_2^+(N_k) \quad (k=1, 2).$$

Подчеркнем, что для оператора $\Gamma \in [l_2^+(N_1), l_2^+(N_2)]$ равенство

$$\Gamma T_1 = T_2^* \Gamma$$

является характеристическим для принадлежности Γ классу $H^+(N_1, N_2)$.

При $\rho > \|\Gamma\|$ „параметрическое“ уравнение квази-шара $K(\Gamma; \rho)$ записывается в виде

$$c_0 = \gamma_0^{(u)}(\Gamma; \rho) + R_L(\Gamma; \rho) E R_{II}(\Gamma; \rho), \quad E \in B(N_1, N_2),$$

где

$$R_L(\Gamma; \rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} \hat{G}(\Gamma; \rho), \quad R_{II}(\Gamma; \rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} G(\Gamma; \rho),$$

$$\gamma_0^{(u)}(\Gamma; \rho) = \begin{cases} -P_2 \Gamma T_1 R_{\rho} G^2(\Gamma; \rho) \\ -G^2(\Gamma; \rho) P_2 \hat{R}_{\rho} T_2 \Gamma | N_1, \end{cases}$$

а $B(N_1, N_2)$ — множество всех сжимающих операторов $E \in [N_1, N_2]$ ($\|E\| \leq 1$).

При $\rho = \|\Gamma\|$ соответствующий квази-шар $K(\Gamma) (= K(\Gamma; \|\Gamma\|))$ получается как предельный для семейства последовательно вложенных друг в друга квази-шаров $K(\Gamma; \rho')$ при $\rho' \uparrow \|\Gamma\|$.

Для определенности мы всюду предполагаем, что $\dim N_1 \leq \dim N_2$. Через E_k ($k=1, 2$) обозначается единичный оператор в N_k .

В §§ 2, 3 показывается, что при $\rho > \|\Gamma\|$ коэффициенту $c_0(F)$, лежащему на „остове“ квази-шара $K(\Gamma; \rho)$ ($E^*E = E_1$), отвечает одна и только одна $(\Gamma; \rho)$ -функция $F(\zeta)$ ($c_0 = c_0(F)$); последняя называется канонической $(\Gamma; \rho)$ -функцией.

При изучении $(\Gamma; \rho)$ -функций с $\rho > \|\Gamma\|$ фундаментальную роль играют операторы

$$P = \rho R_{\rho} G(\Gamma; \rho) (\in [N_1, l_2^+(N_1)]), \quad Q = T_2 \Gamma R_{\rho} G(\Gamma; \rho) (\in [N_1, l_2^+(N_2)]),$$

$$\hat{P} = \rho \hat{R}_{\rho} \hat{G}(\Gamma; \rho) (\in [N_2, l_2^+(N_2)]), \quad \hat{Q} = T_1 \Gamma^* \hat{R}_{\rho} \hat{G}(\Gamma; \rho) (\in [N_2, l_2^+(N_1)]).$$

„Положительные“ коэффициенты Фурье $c_j(F)$ ($j=1, 2, \dots$) любой канонической $(\Gamma; \rho)$ -функции $F(\zeta)$ могут быть найдены с помощью рекуррентных соотношений

$$c_j(F) = \rho^{-1} \left[\sum_{k=0}^{j-1} c_k(F) X_{j-k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k X_{j+k+1} \right] G(\Gamma; \rho),$$

где $X_k = P_1 T_1^{k-1} (P + Q E)$ ($k=1, 2, \dots$).

В § 6 в предположении, что $\dim N_k < \infty$ ($k=1, 2$), дано описание всех $(\Gamma; \rho)$ -функций для $\rho > \|\Gamma\|$, аналогичное тому, которое в скалярном случае было сформулировано авторами в [16] (теорема 4.2) и доказано в [1г]. При этом же предположении показано (§ 5), что $\det G(\Gamma; \rho) = \det \hat{G}(\Gamma; \rho)$, и тем самым установлено, что если один из предельных полурадиусов $R_{\text{л}}(\Gamma) (= \lim_{\rho \rightarrow \|\Gamma\|} R_{\text{л}}(\Gamma; \rho))$ и $R_{\text{п}}(\Gamma) (= \lim_{\rho \rightarrow \|\Gamma\|} R_{\text{п}}(\Gamma; \rho))$ не вырождается, то это же имеет место и для другого. Последний результат допускает обобщение на тот случай, когда выполняется всего лишь условие: $P_1 \Gamma$ (или, что равносильно $P_2 \Gamma^*$) — оператор Гильберта-Шмидта, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_p(\gamma_k^* \gamma_k) < \infty. \quad (0.4)$$

Это условие, в частности, выполняется, если хотя бы одно из чисел $\dim N_k$ ($k=1, 2$) конечно.

Важный класс ганкелевых операторов Γ со свойством (0.4) будет исследован в другом месте. Для операторов этого класса (а значит, и, подавно, для операторов $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ с $\dim N_k < \infty$, $k=1, 2$) удастся дать прозрачное описание не только множества всех $(\Gamma; \rho)$ -функций при любом $\rho > \|\Gamma\|$, но и множества всех Γ -минифункций во вполне неопределенном случае (т. е., когда предельные полурадиусы $R_{\text{л}, \text{п}}(\Gamma)$ не вырождаются).

В другом месте будут также рассмотрены приложения полученных результатов в вопросах экстраполяции матриц и оператор-функций различных классов. В частности, с новых позиций будет получен ряд известных результатов по матричной проблеме Неванлинны-Пика ([6], [7], [8]), по более общей матричной проблеме Д. Сарасона [4], которая, как будет показано, включает в себя проблему продолжения эрмитово-положительных матриц с отрезка (см. [9], [10], [11]), а также ряд дополнений к ним.

Интересные детали возникают в том случае, когда оператор Γ оказывается вполне непрерывным. Следует отметить, что для одного специального важного класса таких операторов (с $\dim N_1 = \dim N_2 < \infty$) описание $(\Gamma; \rho)$ -функций при $\rho > \|\Gamma\|$ получено в работе [12], в которой одновременно выяснилась связь рассматриваемого круга вопросов с теорией S -матриц канонических дифференциальных операторов.

Считаем своим долгом указать, что стимулом к установлению теоремы о совпадении детерминантов левого и правого полурадиусов $R_{\text{л}, \text{п}}(\Gamma)$ послужил соответствующий результат В. П. Потапова и И. В. Ковалишиной [13], [14] по матричной проблеме Неванлинны-Пика (личное сообщение весной 1970 г.).

§ 1. Одноступенчатые $(\Gamma; \rho)$ -продолжения

1. Пусть $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ определяется блочно-ганкелевой матрицей (γ_{j+k-1}) ; тогда всякий оператор $\Gamma^{(1)} \in H^+(N_1, N_2)$ с блочно-ган-

келевой матрицей $(\gamma_{j, k-1}^{(1)})$, где $\gamma_1^{(1)} = \gamma_0$ — произвольный оператор из $[N_1, N_2]$, а $\gamma_k^{(1)} = \gamma_{k-1}$ при $k=1, 2, \dots$, будет называться *одноступенчатым Γ -продолжением*. Для такого оператора $\Gamma^{(1)}$ имеем: $\|\Gamma\| \leq \|\Gamma^{(1)}\|$ и

$$\Gamma^{(1)} = \gamma_0 P_1 + T_2 \Gamma + P_2 \Gamma T_1. \quad (1.1)$$

Если наряду с (1.1) для фиксированного числа ρ ($\rho > \|\Gamma\|$) имеем $\|\Gamma^{(1)}\| < \rho$, то оператор $\Gamma^{(1)}$ называется *одноступенчатым $(\Gamma; \rho)$ -продолжением*, если же $\|\Gamma^{(1)}\| = \|\Gamma\|$, то — *одноступенчатым минипродолжением*.

Оказывается, множество всех одноступенчатых $(\Gamma; \rho)$ -продолжений при $\rho > \|\Gamma\|$ допускает простое описание:

Теорема 1.1. Для $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ и $\rho > \|\Gamma\|$ одноступенчатые $(\Gamma; \rho)$ -продолжения (1.1) определяются теми и только теми $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$, которые принадлежат операторному квази-шару

$$\gamma_0 = -P_2 \Gamma T_1 R_{\rho^2} G^2(\Gamma; \rho) + \rho^{-1} \dot{G}(\Gamma; \rho) E G(\Gamma; \rho), \quad E \in B(N_1, N_2). \quad (1.2)$$

Доказательство. Условие $\|\Gamma^{(1)}\| \leq \rho$ означает, что $\rho^2 I_2 - \Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)*} = \rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^* - (\gamma_0 + T_2 \Gamma) P_1 (\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*) \geq 0$ или, что одно и то же, $I_2 - A^* A > 0$, где

$$A = P_1 (\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*) R_{\rho^2}^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{R}_{\rho^2}^{\frac{1}{2}} = (\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} (\gg 0).$$

Так как условие $I_2 - A^* A > 0$ равносильно условию $I_1 - A A^* > 0$, то приходим к неравенству

$$P_1 - P_1 (\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*) \dot{R}_{\rho^2} (\gamma_0 + T_2 \Gamma) P_1 > 0. \quad (1.3)$$

Заметим теперь, что произвольное $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$ однозначно представимо в виде (1.2) при некотором $E \in [N_1, N_2]$. Подставим это выражение в (1.3). Так как при этом

$$\begin{aligned} (\gamma_0^* P_2 + P_1 \Gamma^* T_2^*) \dot{R}_{\rho^2} \gamma_0 &= -P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} \dot{G}^2 P_2 \dot{R}_{\rho^2} \gamma_0 + \\ &+ \rho^{-1} G E^* \dot{G} P_2 \dot{R}_{\rho^2} \gamma_0 + P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} \dot{G} \gamma_0 = -P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} \dot{G}^2 \dot{G}^{-2} \gamma_0 + \\ &+ \rho^{-1} G E^* \dot{G} \dot{G}^{-2} \gamma_0 + P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} \gamma_0 = \rho^{-1} G E^* \dot{G}^{-1} \gamma_0 = \\ &= -\rho^{-1} G E^* \dot{G} P_2 \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 + \rho^{-2} G E^* \dot{G}^{-1} \dot{G} E G = \\ &= -\rho^{-1} G E^* \dot{G} P_2 \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 + \rho^{-2} G E^* E G, \end{aligned}$$

где $G = G(\Gamma; \rho)$, $\dot{G} = \dot{G}(\Gamma; \rho)$ и

$$\begin{aligned} \gamma_0^* P_2 \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 &= -P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} \dot{G}^2 P_2 \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 + \rho^{-1} G E^* \dot{G} P_2 \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1, \\ \text{то неравенство (1.3) равносильно следующему условию на } E \in [N_1, N_2]: \\ P_1 - \rho^{-2} G E^* E G P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} \dot{G}^2 P_2 \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 - P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 &\geq 0. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Убедимся теперь в том, что справедливо тождество

$$P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, \dot{G}^2 P_2 \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 - P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 = \rho^{-2} G^2 P_1, \quad (1.5)$$

в силу которого неравенство (1.4) равносильно

$$G(E_1 - E^* E) G \geq 0.$$

Тем самым доказательство теоремы будет завершено. Для $\Gamma \in \in H^+(N_1, N_2)$ легко убедиться в справедливости равенства

$$\Gamma T_1^* = T_2 \Gamma + P_2 \Gamma T_1^* - T_2 \Gamma P_1,$$

которое с учетом основного соотношения $\Gamma T_1 = T_2^* \Gamma$ дает

$$(\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*) T_2 = T_2 (\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*) + T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* - P_2 \Gamma T_1^* \Gamma^*,$$

или

$$T_2 \dot{R}_p = \dot{R}_p, T_2 + \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* \dot{R}_p - \dot{R}_p, P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p, \quad (1.6)$$

откуда

$$\dot{R}_p = T_2^* \dot{R}_p, T_2 + T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* \dot{R}_p - T_2^* \dot{R}_p, P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p.$$

Повтому

$$\begin{aligned} P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 &= P_1 \Gamma^* \dot{R}_p, \Gamma P_1 - P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* \dot{R}_p, \Gamma P_1 + \\ &+ P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p, \Gamma P_1 = -P_1 + \rho^2 G^{-2} P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 - \\ &- \rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma G^{-2} P_1 + \rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p, P_1. \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\begin{aligned} \rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 &= -G^2 P_1 + \rho^2 P_1 + \\ &+ \rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p, G^2 P_1, \end{aligned}$$

т. е.

$$P_1 - P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p, G^2 P_1 = \rho^{-2} G^2 P_1.$$

Для доказательства (1.5) остается проверить, что

$$P_2 \Gamma T_1^* \dot{R}_p, G^2 P_1 = G^2 P_2 \dot{R}_p, T_2 \Gamma P_1. \quad (1.7)$$

На основании (1.6) имеем

$$\begin{aligned} P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 &= P_1 \Gamma^* \dot{R}_p, T_2^* P_2 - P_1 \Gamma^* \dot{R}_p, \Gamma P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 + \\ &+ P_1 \Gamma^* \dot{R}_p, \Gamma T_1^* \dot{R}_p, P_2 \dot{R}_p, P_2 = P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 - \rho^2 P_1 \dot{R}_p, P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 + \\ &+ \rho^2 P_1 \dot{R}_p, T_1^* \dot{R}_p, P_2 \dot{R}_p, P_2, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$P_1 \dot{R}_p, P_1 \Gamma^* T_2^* \dot{R}_p, P_2 = P_1 \dot{R}_p, T_1^* \dot{R}_p, P_2,$$

или

$$G^{-2} P_1 \Gamma^* T_2 \dot{R}_\rho P_2 = P_1 R_\rho T_1 \Gamma^* G^{-2} P_2,$$

что дает (1.7).

Теорема доказана.

2. Как видно из (1.2), операторы

$$R_L(\Gamma; \rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} \tilde{G}(\Gamma; \rho), \quad R_\Pi(\Gamma; \rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} G(\Gamma; \rho)$$

являются левым и правым полурадиусами операторного квази-шара (1.2). Для центра этого квази-шара получили два выражения, а именно

$$\gamma_0^{(u)}(\Gamma; \rho) = \begin{cases} -P_2 \Gamma T_1^* R_\rho G^2(\Gamma; \rho), \\ -G^2(\Gamma; \rho) P_2 \dot{R}_\rho T_1 \Gamma | N_1. \end{cases}$$

Из проведенных выкладок видно, что $\|\Gamma^{(1)}\| = \rho$ в том и только том случае, когда для $E \in B(N_1, N_2)$ в (1.2) имеем $\|E\| (= \|E^*\|) = 1$, причем в этом случае нормы операторов $\Gamma^{(1)}$ и E , если достигаются, то одновременно.

3. Множество $K(\Gamma; \rho)$ операторов $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$, представимых в виде (1.2), мы называли операторным квази-шаром, так как по определению множество $K \subset [N_1, N_2]$ называется *квази-шаром с центром* $\gamma^{(u)} \in [N_1, N_2]$, если оно состоит из всех операторов γ вида

$$\gamma = \gamma^{(u)} + R_L E R_\Pi \quad (E \in B(N_1, N_2)),$$

где $R_\Pi (\in [N_1, N_1])$ и $R_L (\in [N_2, N_2])$ суть некоторые фиксированные неотрицательные операторы, называемые соответственно *правым* и *левым полурадиусом* квази-шара K .

Центр $\gamma^{(u)}$, будучи центром симметрии квази-шара K , определяется по K единственным образом.

Квази-шар K вырождается в точку в том и только том случае, когда хотя бы один из полурадиусов R_L и R_Π равен нулю; в этом случае шар состоит только из своего центра и называется *тривиальным*.

Если квази-шар K нетривиален, то его полурадиусы R_L и R_Π определяются с точностью до умножения и деления на положительное число $r > 0$: $R_\Pi \rightarrow r R_\Pi$, $R_L \rightarrow r^{-1} R_L$.

Если $K^{(1)} \supset K^{(2)} \supset \dots \supset K^{(n)} \supset \dots$ есть последовательность вложенных друг в друга квази-шаров, то их пересечение есть снова некоторый квази-шар, причем его центр есть слабый предел центров квази-шаров $K^{(n)}$. Кроме того, правые и левые полурадиусы $R_\Pi^{(n)}$ и $R_L^{(n)}$ квази-шаров $K^{(n)}$ могут быть так выбраны, чтобы они составляли невозрастающие последовательности $R^{(n)} \geq R^{(n+1)}$ ($n=1, 2, \dots$). Тогда их сильные пределы $R_\Pi = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R_\Pi^{(n)}$ и $R_L = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} R_L^{(n)}$ будут соответственно правым и левым полурадиусом пересечения K .

Все сформулированные выше утверждения об операторных квази-шарах установлены в [15]*.

Введенные в теореме 1.1 квази-шары $K(\Gamma; \rho)$ ($\rho > \|\Gamma\|$), очевидно, образуют гнездящееся однопараметрическое семейство квази-шаров: $K(\Gamma; \rho) \supset K(\Gamma; \rho')$ при $\rho > \rho'$ ($> \|\Gamma\|$), с невозрастающими полурадиусами. Следовательно, согласно сказанному выше, существует непустое пересечение

$$K(\Gamma) = \bigcap_{\rho > \|\Gamma\|} K(\Gamma; \rho),$$

и оно является квази-шаром с центром

$$\gamma_0^{(u)}(\Gamma) = w\text{-}\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \gamma_0^{(u)}(\Gamma; \rho)$$

и полурадиусами

$$R_{II}(\Gamma) = s\text{-}\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \|\Gamma\|^{-\frac{1}{2}} [P_1(\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} |N_1|]^{-\frac{1}{2}},$$

$$R_L(\Gamma) = s\text{-}\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \|\Gamma\|^{-\frac{1}{2}} [P_2(\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-1} |N_2|]^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, на основании теоремы 1.1 получается

Теорема 1.2. *Одноступенчатые Γ -минипродолжения определяются теми и только теми $\gamma_0 \in]N_1, N_2]$, которые принадлежат квази-шару*

$$K(\Gamma): \gamma_0 = \gamma_0^{(u)}(\Gamma) + R_L(\Gamma) \in R_{II}(\Gamma) \quad (E \in B(N_1, N_2)).$$

В качестве непосредственного следствия теоремы 1.2 получается первое утверждение следующего предложения:

Теорема 1.3. *Для $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ существует единственное одноступенчатое Γ -минипродолжение в том и только том случае, когда выполняется хотя бы одно из двух условий*

$$\begin{aligned} \text{а) } s\text{-}\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} [P_1(\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} |N_1|]^{-\frac{1}{2}} &= 0, \\ \text{а*) } s\text{-}\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} [P_2(\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-1} |N_2|]^{-\frac{1}{2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Условия а) и а*) эквивалентны соответственно условиям б) и б*):

$$\text{б) } N_1 \cap (\|\Gamma\|^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{\frac{1}{2}} I_2^+(N_1) = \{0\}, \quad \text{б*) } N_2 \cap (\|\Gamma\|^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{\frac{1}{2}} I_2^+(N_2) = \{0\}.$$

Докажем, например, эквивалентность условий а) и б). Пусть выполняется условие а) и $g \in N_1 \cap (\|\Gamma\|^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{\frac{1}{2}} I_2^+(N_1)$. Тогда

$$\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} ((\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} g, g) = \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} (G^{-2}(\Gamma; \rho) g, g) = \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \|G^{-1}(\Gamma; \rho) g\|^2 < \infty. \quad (1.9)$$

* В работе [15] квази-шар именуется просто шаром, а полурадиусы — радиусами.

Поскольку $s\text{-}\lim G(\Gamma; \rho) = 0$ и семейство векторов $h_\rho = G^{-1}(\Gamma; \rho) g$ ($\rho > \|\Gamma\|$) ограничено, то $g = G(\Gamma; \rho) h_\rho = w\text{-}\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} G(\Gamma; \rho) h_\rho = 0$. Таким образом, из а) следует б). Пусть теперь условие а) не выполняется и при некотором $h \in N_1$ имеем $g = \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} G(\Gamma; \rho) h \neq 0$. Тогда для вектора

g выполняется (1.9) и потому $g \in N_1 \cap (\|\Gamma\|^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{\frac{1}{2}} I_2^+(N_1)$.

В дальнейшем нам понадобится следующий достаточный признак единственности Γ -минипродолжения.

Следствие 1.1. Если ρ^2 является собственным числом оператора $\Gamma^* \Gamma$ ($\Gamma \Gamma^*$), а отвечающее ему собственное подпространство $L \subset I_2^+(N_1)$ ($\bar{L} \subset I_2^+(N_2)$) таково, что $\overline{P_1 L} = N_1$ ($P_2 \bar{L} = N_2$), то одноступенчатое Γ -минипродолжение единственно.

В самом деле, если, например, $\overline{P_1 L} = N_1$, то для $g = (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{1/2} f$ ($f \in I_2^+(N_1)$) будем иметь: $g \perp L$. Поэтому, если, кроме того, $g \in N_1$, то $g = P_1 g \perp \overline{P_1 L} = N_1$, откуда $g = 0$. Таким образом, выполняется условие б) теоремы 1.3.

§ 2. Одноступенчатые канонические $(\Gamma; \rho)$ -продолжения

Без ограничения общности будем предполагать, что $(n_1 =) \dim N_1 \leq \dim N_2 (= n_2)$. В противном случае вместо $\Gamma (\in H^+(N_1, N_2))$ можно было бы рассматривать $\Gamma^* (\in H^+(N_2, N_1))$. В этом параграфе мы остановимся подробнее на тех одноступенчатых $(\Gamma; \rho)$ -продолжениях $\Gamma^{(1)}$ ($\rho > \|\Gamma\|$), которым отвечают в (1.2) изометрические отображения E пространства N_1 в N_2 , т. е. $E^* E = E_1$. Такие $(\Gamma; \rho)$ -продолжения назовем каноническими. В дальнейшем фундаментальную роль играет

Теорема 2.1. Для канонического одноступенчатого $(\Gamma; \rho)$ -продолжения $\Gamma^{(1)}$, определяемого оператором $E (\in B(N_1, N_2))$, имеют место равенства

$$\Gamma^{(1)} (P + Q E) = \rho (Q + P E); \quad \Gamma^{(1)*} (Q + P E) = \rho (P + Q E), \quad (2.1)$$

и линейалы

$$L_\rho = (P + Q E) N_1, \quad \bar{L}_\rho = (Q + P E) N_1$$

являются собственными подпространствами соответственно операторов $\Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)*}$, отвечающими собственному числу ρ^2 .

Все точки интервала $(\|\Gamma\|, \rho^2)$ являются регулярными точками оператора $\Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)}$, или, что эквивалентно, оператора $\Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)*}$.

Замечание 2.1. Из формул (2.1) следует

$$P_1 L_\rho = N_1, \quad P_2 \bar{L}_\rho = N_2.$$

Действительно

$$P_1 L_\rho = P_1 P N_1 = \rho G^{-2}(\Gamma; \rho) N_1 = N_1; \quad P_2 \bar{L}_\rho = P_2 P E N_1 = \rho \check{G}^{-2}(\Gamma; \rho) N_2 = N_2.$$

Доказательство теоремы. В справедливости равенств (2.1) можно убедиться, если учесть, что при любом $E \in [N_1, N_2]$

$$\Gamma(P + Q E) = \rho T_2^*(Q + P E), \quad \Gamma^*(Q + P E) = \rho T_2^*(P + Q E)$$

и использовать формулы (1.1), (1.2), (1.7), а также условие $E^*E = E_1$.

Из (2.1) видно, что линейалы L_ρ и $\tilde{L}_\rho$, определяемые формулами (2.2), являются собственными для операторов $\Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)*}$ соответственно. Их максимальность вытекает из замечания 2.1. Действительно, из (2.3) следует, что если бы существовал собственный вектор оператора $\Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)}$, отвечающий собственному значению ρ^2 и не принадлежащий L_ρ , то существовал бы собственный вектор $\xi \in L_\rho$ с $P_1 \xi = 0$, т. е. вида $\xi = T_1 h$, $0 \neq h \in L_2^+(N_1)$. Но тогда имели бы

$$\|\Gamma^{(1)} \xi\| = \|\Gamma^{(1)*} \xi\| = \rho \|h\|.$$

С другой стороны, на основании (1.1)

$$\|\Gamma^{(1)} \xi\| = \|\Gamma^{(1)} T_1 h\| = \|T_2^* \Gamma^{(1)} h\| = \|\Gamma h\|,$$

так что $\|\Gamma h\| > \rho \|h\|$, а это противоречит условию $\|\Gamma\| < \rho$. Аналогично проверяется максимальность $\tilde{L}_\rho$.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Из рассуждений, аналогичных проведенным в начале доказательства теоремы 1.1, следует, что точка $\lambda > \|\Gamma\|^2$ регулярна для оператора $\Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)*}$ точно тогда, когда обратим в N_2 оператор

$$\Phi(\lambda) = E_1 - P_1(\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*) \tilde{R}_\lambda (\gamma_0 + T_2 \Gamma) P_1 N_1, \quad \tilde{R}_\lambda = (\rho I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-1}.$$

С другой стороны, $\Phi(\rho^2)$ совпадает с сужением на N_1 левой части неравенства (1.3), которое, как было показано, равно $\rho^{-2} G(E_1 - E^*E)G = 0$. При $\lambda > \|\Gamma\|^2$ оператор-функция $\Phi(\lambda)$ с ростом λ возрастает, в частности, равномерно положителен оператор $\Phi(\lambda) = \Phi(\rho^2) - \Phi(\lambda)$ при $\rho^2 > \lambda > \|\Gamma\|^2$. В самом деле, так как из спектрального разложения резольвенты R_λ следует $((\tilde{R}_\lambda - \tilde{R}_{\rho^2})g, g) > c(\lambda) \|g\|^2$ ($g \in L_2^+(N_2)$), где $c(\lambda) = (\rho^2 - \lambda)/\lambda \rho^2$, то

$$-(\Phi(\lambda)f, f) \geq c(\lambda) \|f\|^2 \quad (\rho^2 > \lambda > \|\Gamma\|^2).$$

где

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \|(\gamma_0 + T_2 \Gamma) f\|^2 = \|\tilde{R}_{\rho^2}^{-\frac{1}{2}} \tilde{R}_{\rho^2}^{\frac{1}{2}} (\gamma_0 + T_2 \Gamma) f\|^2 \geq \rho^{-1} \|\tilde{R}_{\rho^2}^{\frac{1}{2}} (\gamma_0 + T_2 \Gamma) f\|^2 \\ &= \rho^{-1} \|f\|^2, \quad f \in N_1. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы еще раз учли, что $\Phi(\rho^2) = 0$. Таким образом

$$-(\Phi(\lambda)f, f) > [(\rho^2 - \lambda)[(\rho^2 - \lambda)/\lambda \rho^4] \|f\|^2 \quad (f \in N_1),$$

а, следовательно, оператор $\Phi(\lambda)$ ограниченно обратим при $\|\Gamma\|^2 < \lambda < \rho^2$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что ρ^2 является изолированным собственным числом оператора $\Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)}$ с максимальным собственным под-

пространством $L_p = (P + Q E) N_1$, причем $P_1 L_p = N_1$. Так как $\|\Gamma^{(1)}\| = \rho$, то одноступенчатое $(\Gamma^{(1)}; \rho)$ -продолжение будет $\Gamma^{(1)}$ -минипродолжением. К этому минипродолжению применимо следствие 1.1, откуда получается

Теорема 2.2. Если $\Gamma^{(1)}$ — произвольное каноническое одноступенчатое (Γ, ρ) -продолжение ($\rho > \|\Gamma\|$), то для него одноступенчатое $\Gamma^{(1)}$ -минипродолжение $\Gamma^{(2)}$ единственно.

§ 3. Полные $(\Gamma; \rho)$ -продолжения

1. Если N — произвольное гильбертово пространство, то $l_2^+(N)$ можно рассматривать как подпространство в $l_2(N)$ двухсторонних последовательностей $h = \{h_k\}_{-\infty}^{\infty}$ векторов $h_k \in N$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), для которых

$$\|h\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty.$$

Ортопроектор $l_2(N)$ на $l_2^+(N)$ будем обозначать через P_+ . Для оператора T правого сдвига в $l_2^+(N)$ минимальным унитарным расширением является оператор U правого сдвига в $l_2(N)$: $U\{h_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{h'_k\}_{-\infty}^{\infty}$, где $h'_k = h_{k-1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Пусть N_1 и N_2 — два произвольных гильбертовых пространства, а U_1 и U_2 — операторы правого сдвига соответственно в $l_2(N_1)$ и $l_2(N_2)$. Оператор $\bar{\Gamma}$ из $[l_2(N_1), l_2(N_2)]$ назовем *полным ганкелевым*, если он определяется некоторой блочно-ганкелевой матрицей $(\tilde{\gamma}_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$:

$$\bar{\Gamma}\{h_k\}_{-\infty}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_{j+k-1} h_k \right\}_{-\infty}^{\infty}, \quad \{h_k\}_{-\infty}^{\infty} \in l_2(N_1), \quad \tilde{\gamma}_k \in [N_1, N_2],$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для такого оператора (и только такого) справедливо соотношение

$$\bar{\Gamma} U_1 = U_2 \bar{\Gamma}.$$

Подпространство всех полных ганкелевых операторов из $[l_2(N_1), l_2(N_2)]$ обозначим через $H(N_1, N_2)$. Пусть Γ — фиксированный оператор из $H^+(N_1, N_2)$. Оператор $\bar{\Gamma} (\in H(N_1, N_2))$ назовем *полным Γ -продолжением*, если

$$\Gamma = P_+ \bar{\Gamma}|_{l_2^+(N_1)}.$$

Если оператор $\Gamma (\in H^+(N_1, N_2))$ определяется блочно-ганкелевой матрицей $(\gamma_{j+k-1})_1^{\infty}$, то оператор $\bar{\Gamma} (\in H(N_1, N_2))$ является полным Γ -продолжением в том и только том случае, когда он определяется блочно-ганкелевой матрицей $(\tilde{\gamma}_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$, у которой $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ при $k = 1, 2, \dots$.

Очевидно, для любого полного Γ -продолжения $\tilde{\Gamma}$: $\|\tilde{\Gamma}\| > \|\Gamma\|$. Если для фиксированного числа ρ ($> \|\Gamma\|$) полное Γ -продолжение таково, что $\|\tilde{\Gamma}\| \leq \rho$, то будем его называть *полным* $(\Gamma; \rho)$ -*продолжением*, а если при этом $\rho = \|\Gamma\|$, то *полным Γ -минипродолжением* и обозначать через $\tilde{\Gamma}_\rho$. Справедлива

Теорема 3.1. *Для любого $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ существует полное Γ -минипродолжение $\tilde{\Gamma}_\rho$. Оно единственно в том и только том случае, когда одноступенчатое Γ -минипродолжение единственно, т. е. когда выполняется хотя бы одно из условий (1.8).*

Доказательство. По теореме 1.2 для Γ существует хотя бы одно одноступенчатое Γ -минипродолжение. Пусть $\{\Gamma^{(p)}\}_1^\infty \subset H^+(N_1, N_2)$, причем $\Gamma^{(p)}$ является одноступенчатым $\Gamma^{(p-1)}$ -минипродолжением ($p=1, 2, \dots$; $\Gamma^{(0)} = \Gamma$). Тогда $\|\Gamma^{(p)}\| = \|\Gamma\|$ и, если оператору Γ отвечает блочно-ганкелева матрица $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, то продолжениям $\Gamma^{(p)}$ отвечают блочно-ганкелевы матрицы $(\gamma_{j+k-1-p})_1^\infty$, где блоки $\gamma_0, \gamma_{-1}, \dots, \gamma_{-p+1}$ ($p=1, 2, \dots$) — некоторые операторы из $[N_1, N_2]$. Рассмотрим составленную из полученной таким образом двухсторонней последовательности блоков $\{\gamma_k\}_{-\infty}^\infty$ ($\gamma_k \in [N_1, N_2]$) матрицу $(\gamma_{j+k-1})_{j,k=-\infty}^\infty$.

Очевидно, что этой матрицей определяется полное Γ -минипродолжение, т. е. формулой

$$\tilde{\Gamma} |h_k\rangle_{-\infty}^\infty = \left\{ \sum_{k=-\infty}^\infty \gamma_{j+k-1} h_k \right\}_{j=-\infty}^\infty$$

определяется оператор $\tilde{\Gamma} \in H(N_1, N_2)$ и $\|\tilde{\Gamma}\| = \|\Gamma\|$.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. В силу него, если для оператора $\Gamma (\in H^+(N_1, N_2))$ полное Γ -минипродолжение $\tilde{\Gamma}_\rho$ единственно, то и одноступенчатое Γ -минипродолжение $\Gamma^{(1)}$ единственно. Чтобы убедиться в обратном утверждении, достаточно проверить, что если $\Gamma^{(1)}$ определяется единственным образом, то это же имеет место для $\Gamma^{(2)}$.

Так как $\Gamma = T_2^* \Gamma^{(1)}$, то

$$\Gamma^* \Gamma = \Gamma^{(1)*} T_2 T_2^* \Gamma^{(1)} = \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)} - \Gamma^{(1)*} P_2 \Gamma^{(1)} \geq \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)},$$

а поэтому $(\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} \leq (\rho^2 I_1 - \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)})^{-1}$. Стало быть

$$G^{-2}(\Gamma; \rho) = P_1 (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} N_1 \leq P_1 (\rho^2 I_1 - \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)})^{-1} N_1 = G^{-2}(\Gamma^{(1)}; \rho),$$

так что: $G(\Gamma^{(1)}; \rho) \leq G(\Gamma; \rho)$. Аналогично получается:

$$\hat{G}(\Gamma^{(1)}; \rho) \leq \hat{G}(\Gamma; \rho).$$

Из этих неравенств и теоремы 2.2 уже непосредственно следует, что вместе с $\Gamma^{(1)}$ единственным образом определяется и его $\Gamma^{(1)}$ -минипродолжение $\Gamma^{(2)}$.

Тeopeмa дoкaзaнa.

Слeдcтвиe 3.1. Если u oпepaтopa $\Gamma (\in H^-(N_1, N_2))$ числo $\rho^2 = \|\Gamma\|^2$ являeтcя coбcтвeнным для $\Gamma^*\Gamma$ ($\Gamma\Gamma^*$) и cooтвeтcтвующee eмy coбcтвeннoe пoдпpocтpaнcтвo L ($\bar{L}$) тaкoвo, чтo $P_1\bar{L} = N_1$ ($P_2L = N_2$), тo пoлнoe Γ -минипpoдoлжeниe $\tilde{\Gamma}$ eдинcтвeннo.

2. Oтaнoвимcя пoдpoбнee нa вaжнoм для дaльнeйшeгo cлyчae, кoгдa выпoлняeтcя ycлoвиe cлeдcтвия 3.1, пpитoм в ycилeннoй фoрмe. Пycть, нaпpимep, вмecтo ycлoвиa $\bar{P}_1\bar{L} = N_1$ выпoлняeтcя ycлoвиe: oпepaтop P_1 пpoектиpyeт L oднooднoзнaчнo нa вce N_1 .

Пo тeopeмe Бaнaxa oпepaтop, oбpaтный к cужeнию $P_1|L (\in [L, N_1])$, oгpaничeн. Oбoзнaчим eгo чepeз X . Тoгдa, eсли $Y = \rho^{-1}\Gamma X$, тo, пoскoлькy L —coбcтвeннoe пoдпpocтpaнcтвo oпepaтopa $\Gamma^*\Gamma$, oтвeчaющee coбcтвeннoмy числy $\rho^2 = \Gamma^*\Gamma$, бyдeм имeть

$$\Gamma X = \rho Y, \quad \Gamma^* Y = \rho X. \quad (3.1)$$

Для (eдинcтвeннoгo) пoлнoгo Γ -минипpoдoлжeния $\tilde{\Gamma}$ пoлучaeм

$$\|P_+ \tilde{\Gamma} Xh\| = \|\Gamma Xh\| = \rho \|Xh\| = \|\tilde{\Gamma}\| \cdot \|Xh\| \quad (h \in N_1),$$

oткyдa виднo, чтo $\Gamma X = P_+ \tilde{\Gamma} X = \tilde{\Gamma} X$. Aнaлoгичнo пoлучaeтcя, чтo $\Gamma^* Y = P_+ \tilde{\Gamma}^* Y = \tilde{\Gamma}^* Y$. Тaким oбpaзoм, имeeм

$$\tilde{\Gamma} X = \rho Y, \quad \tilde{\Gamma}^* Y = \rho X. \quad (3.2)$$

Пoлoжим

$$X_k = P_1 T_1^{*k-1} X (\in [N_1, N_1]), \quad Y_k = P_2 T_2^{*k-1} Y (\in [N_1, N_2]) \quad (k=1, 2, \dots)$$

тaк чтo

$$Xh = \sum_{k=1}^{\infty} T_1^{*k-1} X_k h = \{X_k h\}_{\tilde{\Gamma}}^{\infty} (\in l_2^+(N_1)),$$

$$Yh = \sum_{k=1}^{\infty} T_2^{*k-1} Y_k h = \{Y_k h\}_1^{\infty} (\in l_2^+(N_2)) \quad (h \in N_1).$$

Если $(\gamma_{j+k-1})_{k=1}^{\infty}$ —мaтpицa, oтвeчaющaя oпepaтopy $\tilde{\Gamma}$, тo cooтнoшeния (3.1) эквивaлeнтны cистeмe paвeнcтв (cxoдимocть пoнимaeтcя в cильнoм cмыcлe):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1} X_k = \rho Y_j, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1}^* Y_k = \rho X_j \quad (j=1, 2, \dots),$$

a cooтнoшeния (3.2) дoпoлнитeльнo дaют cистeмy paвeнcтв

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1} X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1}^* Y_k = 0 \quad (j=0, -1, -2, \dots). \quad (3.3)$$

Из определений оператора X и последовательности $\{X_k\}_1^\infty$ следует, что $X_1 = E_1$. Система равенств (3.3) дает возможность по матрице $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, отвечающей оператору Γ , и по последовательности $\{X_k\}_1^\infty$ найти все неизвестные блоки γ_k ($k=0, -1, -2, \dots$) матрицы $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$. Действительно, из (3.3) последовательно получаем: при $j=0$

$$\gamma_0 = - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{k-1} X_k = - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k X_{k+1},$$

при $j = -1$

$$\gamma_{-1} = - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{k-2} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k X_{k+2},$$

и т. д.

Для операторов $X (\in [N_1, l_2^+(N_1)])$ и $Y (\in [N_1, l_2^+(N_2)])$, удовлетворяющих при $\rho \neq 0$ соотношениям (3.1), справедливы равенства

$$X^* T_1^* X = Y^* T_2^* Y \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Действительно, при $k > 0$

$$Y^* T_2^* Y = \rho^{-1} Y^* T_2^* \Gamma X = \rho^{-1} Y^* \Gamma T_1^* X = X^* T_1^* X.$$

Полученные в этом пункте соотношения принимают особенно прозрачный вид в теоретико-функциональной интерпретации.

Рассмотрим следующие изоморфизмы пространств: $l_2(N_1)$ и $l_2(N_2)$ на пространства $L_2(N_1)$ и $L_2(N_2)$ соответственно:

$$\xi_+(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \zeta^{k-1}, \text{ если } \{\xi_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2(N_1),$$

и

$$\eta_-(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k \zeta^{-k}, \text{ если } \{\eta_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_2(N_2).$$

Равенства здесь понимаются в смысле сходимости в среднем. При этих изоморфизмах подпространства $l_2^+(N_1)$ и $l_2^+(N_2)$ перейдут соответственно в подпространства Харди $H_2(N_1)$ и $H_2^-(N_2) = L_2(N_2) \ominus H_2(N_2)$. Ортопроекторы на эти подпространства обозначим через π_+ и π_- . Если $\bar{\Gamma} (\in H(N_1, N_2))$ — произвольный полный ганкелев оператор и ему отвечает матрица $(\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$, то при рассматриваемых изоморфизмах он перейдет в оператор „умножения“ на оператор-функцию $F(\zeta)$ со значениями из $[N_1, N_2]$:

$$F(\zeta) h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} h, \quad h \in N_1,$$

для

$$\xi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \zeta^{k-1} \in L_2(N_1).$$

будем иметь

$$F(\zeta) \zeta(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_j \zeta^{-j} \in L_2(N_2),$$

где

$$\gamma_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{j+k-1} \xi_k \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

причем

$$\|\tilde{\Gamma}\| = \|\tilde{F}\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{C}} \|F(\zeta)\|.$$

Для определенных ранее операторов X и Y определим соответствующие им оператор-функции $X_+(\zeta)$ и $Y_-(\zeta)$:

$$X_+(\zeta)h = [Xh]_+(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \zeta^{k-1} h, \quad Y_-(\zeta)h = [Yh]_-(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \zeta^{-k} h, \quad h \in N_1.$$

Тогда соотношения (3.1) и (3.2) можно переписать в виде

$$(\pi_- F X_+)(\zeta) = \rho Y_-(\zeta), \quad (\pi_+ F^* Y_-)(\zeta) = \rho X_+(\zeta), \quad (3.5)$$

$$F(\zeta) X_+(\zeta) = \rho Y_-(\zeta), \quad F^*(\zeta) Y_-(\zeta) = \rho X_+(\zeta). \quad (3.6)$$

Система равенств (3.4) означает, что равны все коэффициенты Фурье у функций $(X_+(\zeta)h', X_+(\zeta)h'')$ и $(Y_-(\zeta)h', Y_-(\zeta)h'')$ ($h', h'' \in N_1$), т. е. эти функции почти всюду совпадают. В этом (слабом) смысле имеет место равенство

$$X_+^*(\zeta) X_+(\zeta) = Y_-^*(\zeta) Y_-(\zeta). \quad (3.7)$$

Функциональные рассуждения упрощаются и приводят к интересным результатам, если предположить конечномерность пространств N_1 и N_2 , т. е. что $n_k = \dim N_k < \infty$ ($k=1, 2$). Тогда из сходимости рядов Фурье в среднем квадратичном для оператор-функций со значениями из $[N_1, N_k]$ ($j, k=1, 2$) в сильном смысле следует их равномерная сходимость в среднем квадратичном. Так, например, для введенных в предыдущем параграфе оператор-функций $X_+(\zeta)$ и $Y_-(\zeta)$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} \left\| X_+(\zeta) - \sum_{k=1}^n X_k \zeta^{k-1} \right\|^2 |d\zeta| = 0, \quad \int_{\mathbb{C}} \|X_+(\zeta)\|^2 |d\zeta| < \infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} \left\| Y_-(\zeta) - \sum_{k=1}^n Y_k \zeta^{-k} \right\|^2 |d\zeta| = 0, \quad \int_{\mathbb{C}} \|Y_-(\zeta)\|^2 |d\zeta| < \infty.$$

Для оператор-функции $X_+(\zeta)$ ее детерминант $\det X_+(\zeta)$ есть функция класса Харди H_{2/n_1} . Так как $\det X_1 (=1) \neq 0$, то $\det X_+(\zeta) \neq 0$ почти всюду на единичной окружности. Поэтому равенство (3.6) можно переписать в виде

$$F(\zeta) = \rho Y_-(\zeta) X_+^{-1}(\zeta). \quad (3.8)$$

Соотношения (3.8) и (3.7) показывают, что оператор-функция $F(\zeta)$ почти при всех ζ изометрически отображает все N_1 в N_2 . Можно показать, что оператор-функция $X_+(\zeta)$ является внешней, т. е.

$$(0=) \ln \det X_1 = \ln \det X_+(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln |\det X_+(\zeta)| |d\zeta|.$$

Внешней также является оператор-функция $\zeta^{-1} Y_-(\zeta^{-1})$ в смысле общего определения, которое, например, имеется в [16].

3. Пусть теперь $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$, $\rho > \|\Gamma\|$ и $\Gamma^{(1)}$ — произвольное каноническое одноступенчатое $(\Gamma; \rho)$ -продолжение, определяемое изометрическим параметром E ($E^*E = E_1$) по формулам (1.1), (1.2). На основании теоремы 2.1 для $\Gamma^{(1)} (\in H^+(N_1, N_2))$ применимы построения п. 2 и роль операторов X и Y будут играть соответственно операторы $P + \dot{Q}E$ и $Q + \dot{P}E$ (нормировка $X_1 = E_1$ в этих рассмотрениях не существенна, важно лишь, чтобы оператор X_1 был ограничено обратим). Таким образом, если $\tilde{\Gamma}^{(1)}$ — (единственное) полное $\Gamma^{(1)}$ -мини-продолжение, то оно определяется из соотношения

$$\tilde{\Gamma}^{(1)}(P + \dot{Q}E) = \rho(Q + \dot{P}E), \quad \tilde{\Gamma}^{(1)*}(Q + \dot{P}E) = \rho(P + \dot{Q}E).$$

Так как $\Gamma^{(1)} T_1 = T_2^* \Gamma^{(1)} = \Gamma$, то $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^{(1)} U_1 = U_2^* \tilde{\Gamma}^{(1)}$ — полное $(\Gamma; \rho)$ -продолжение. Для него имеем

$$\tilde{\Gamma}(P + \dot{Q}E) = \rho U_2(Q + \dot{P}E), \quad \tilde{\Gamma}^* U_2(Q + \dot{P}E) = \rho(P + \dot{Q}E). \quad (3.9)$$

Определим оператор-функции $P_{\pm}(\zeta)$ и $Q_{\pm}(\zeta)$ по формулам

$$P_+(\zeta)h = [Ph]_+(\zeta), \quad Q_+(\zeta)h = [Qh]_+(\zeta) \quad (h \in N_1),$$

$$P_-(\zeta)g = [\dot{P}g]_+(\bar{\zeta}), \quad Q_-(\zeta)g = [Qg]_+(\bar{\zeta}) \quad (g \in N_2).$$

Тогда, если полному $(\Gamma; \rho)$ -продолжению $\tilde{\Gamma}$ отвечает матрица $(\gamma_{j+k-1})_{j,k=0}^{\infty}$, то для оператор-функции $F(\zeta)$, определенной по формуле (3.8), соотношения (3.9) перепишутся в виде

$$F(\zeta)[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E] = \rho[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E], \\ F^*(\zeta)[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E] = \rho[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]. \quad (3.10)$$

Таким образом, блоки γ_k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) матрицы $(\gamma_{j+k-1})_{j,k=0}^{\infty}$, отвечающей полному $(\Gamma; \rho)$ -продолжению $\tilde{\Gamma}$ — суть коэффициенты Фурье оператор-функции $F(\zeta)$, и неизвестные блоки γ_k ($k=0, -1, -2, \dots$), однозначно определяются по известным блокам и оператор-функциям $[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]$ и $[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E]$ из функциональных соотношений (3.10). В этом смысле

$$F(\zeta) = \rho[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E][P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]^{-1}. \quad (3.11)$$

Получаемое таким образом полное $(\Gamma; \gamma)$ -продолжение будем называть *каноническим*.

В случае, когда $n_k (= \dim N_k, k=1, 2) < \infty$, формула (3.11) понимается в обычном смысле, т. е. как равенство, имеющее место почти всюду при $|\zeta|=1$.

§ 4. Основные тождества

Установим ряд тождеств для четверки операторов $P, \bar{P}, \bar{Q}, Q$, играющих в дальнейшем фундаментальную роль. Напомним, что по указанной четверке операторов определяется четверка оператор-функций $P_+(\zeta), P_-(\zeta), Q_+(\zeta), Q_-(\zeta)$ по формулам

$$\begin{aligned} P_+(\zeta)h &= [Ph]_+(\zeta), \quad Q_-(\zeta)h = [Qh]_-(\zeta) \quad (h \in N_1), \\ P_-(\zeta)g &= [\bar{P}g]_-(\zeta), \quad Q_+(\zeta)g = [\bar{Q}g]_+(\zeta) \quad (g \in N_2), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где для вектора $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty \in l_2^+(N)$ через $\xi_+(\zeta)$ обозначена вектор-функция $\xi_+(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \zeta^{k-1}$ класса Харди $H_2(N)$. Произведение $P_+^*(\zeta) P_-(\zeta)$, которое будет встречаться ниже, можно понимать в слабом смысле

$$(P_+^*(\zeta) P_-(\zeta) h', h'') \stackrel{\text{def}}{=} (P_+(\zeta) h', P_+(\zeta) h'') \quad (h', h'' \in N_1).$$

Правая часть определена почти при всех ζ , так как под знаком скалярного произведения стоят вектор-функции из класса Харди $H_2(N_1)$. Аналогично понимаются такого рода произведения для любой пары оператор-функций из рассматриваемой четверки.

Теорема 4.1. Для операторов $P, \bar{P}, \bar{Q}, Q$, построенных по $\Gamma (\in H^+(N_1, N_2))$ и числу $\rho (> \|\Gamma\|)$, справедливы тождества

$$\begin{aligned} P_+^*(\zeta) P_-(\zeta) - Q_-^*(\zeta) Q_-(\zeta) &= E_1, \\ P_-^*(\zeta) P_-(\zeta) - Q_+^*(\zeta) Q_+(\zeta) &= E_2 \quad (\text{почти всюду}), \quad (4.2) \\ P_-^*(\zeta) Q_-(\zeta) - Q_+^*(\zeta) P_+(\zeta) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P^* T_1^k P - Q^* T_2^k Q &= \delta_{0k} E_1, \\ \bar{P}^* T_2^k \bar{P} - \bar{Q}^* T_1^k \bar{Q} &= \delta_{0k} E_2, \\ \bar{P}^* T_2^k Q &= Q^* T_1^k P, \quad \bar{P}^* T_2^k Q = \bar{Q}^* T_1^k P, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $k=0, 1, 2, \dots$, а $\delta_{00}=1$, $\delta_{0k}=0$ при $k>0$.

Заметим для этого, что

$$T_2 \Gamma P = \rho Q, \quad \Gamma^* T_2 Q = \rho P - G.$$

Из второго равенства получаем, что $P^* = \rho^{-1} (G + Q^* T_2 \Gamma)$.

Поэтому

$$P^* T_1^* P = \rho^{-1} (G P_1 + Q^* T_2 \Gamma) T_1^* P = \rho^{-1} Q^* T_2^* T_2 \Gamma P = Q^* T_2^* Q$$

при $k > 0$ и

$$P^* P - Q^* Q = P^* P - \rho^{-2} P^* \Gamma^* \Gamma P = \rho^{-2} P^* (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma) P = G P_1 R_p, G = E_1.$$

Таким образом, доказана первая система равенств в (4.3). Аналогично из соотношений

$$T_1 \Gamma^* \dot{P} = \rho \dot{Q}, \quad \Gamma T_1^* \dot{Q} = \rho \dot{P} - \dot{G}$$

выводится вторая система равенств в (4.3).

Имеем, далее, при $k > 0$

$$\begin{aligned} \dot{P}^* T_2^* Q &= \rho^{-1} (\dot{G} P_2 + \dot{Q}^* T_1 \Gamma^*) T_2^* Q = \rho^{-1} \dot{Q}^* T_1^* \Gamma^* \Gamma R_p G = \\ &= \rho \dot{Q}^* T_1^* R_p G = \dot{Q}^* T_1^* P \end{aligned}$$

и при $k > 0$

$$Q^* T_1^* P = \rho^{-1} P^* \Gamma T_1^* P = \rho^{-1} P^* T_2^* T_2 \Gamma P = P^* T_2^* Q.$$

Тем самым доказана последняя система равенств в (4.3).

Из первой системы равенств в (4.3) получаем для $h', h'' \in N_1$

$$(T_1^* P h', P h'') - (Q h', T_2^* Q h'') = \delta_{0k}(h', h''),$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \{ P_+(\zeta) h', P_+(\zeta) h'' \} |d\zeta| - \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \{ Q_-(\zeta) h', Q_-(\zeta) h'' \} |d\zeta| = \\ = \delta_{0k}(h', h'') \end{aligned}$$

при $k > 0$. В силу произвольности $h', h'' (\in N_1)$ последняя система равенств имеет место при всех целых k . Тем самым доказано первое тождество в (4.2). Аналогично из (4.3) получаются остальные два тождества в (4.2). Теорема доказана.

§ 5. Аналитические свойства функций $P_{\pm}(\zeta)$ и $Q_{\pm}(\zeta)$ в конечномерном случае ($\dim N_k < \infty, k = 1, 2$)

1. В этом и следующем параграфах мы будем предполагать, что числа $n_1 = \dim N_1 \leq n_2 = \dim N_2 < \infty$.

При этом введенные ранее оператор-функции $P_+(\zeta)$ и $P_-(\zeta)$ можно рассматривать как квадратные матрицы-функции порядков n_1 и n_2 , а $Q_+(\zeta)$ и $Q_-(\zeta)$ — соответственно как прямоугольные $(n_1 \times n_2)$ и $(n_2 \times n_1)$ — матрицы-функции.

Обозначим через $U(\zeta)$ квадратную матрицу-функцию порядка $n_1 + n_2$, имеющую вид

$$U(\zeta) = \begin{pmatrix} P_+(\zeta) & Q_+(\zeta) \\ Q_-(\zeta) & P_-(\zeta) \end{pmatrix},$$

а через J — матрицу

$$J = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что тождества (4.2) выражают тот факт, что матрица-функция $U(\zeta)$ удовлетворяет соотношению

$$U^*(\zeta) J U(\zeta) = J \quad (\text{почти всюду}),$$

т. е. является J -унитарной (п. в.). Так как $n_1 + n_2 < \infty$, то J -унитарной будет и матрица-функция $U^*(\zeta)$, т. е. $U(\zeta) J U^*(\zeta) = J$, а поэтому наряду с (4.2) имеют место тождества:

$$\begin{aligned} P_+(\zeta) P_+^*(\zeta) - Q_+(\zeta) Q_+^*(\zeta) &= E_1, \\ P_-(\zeta) P_-^*(\zeta) - Q_-(\zeta) Q_-^*(\zeta) &= E_2 \quad (\text{почти всюду}), \\ P_+(\zeta) Q_-^*(\zeta) - Q_+(\zeta) P_-^*(\zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

2. Из тождеств (4.2) (или (5.1)) вытекает, что матрицы $P_{\pm}(\zeta)$ обратимы и что $\|P_{\pm}^{-1}(\zeta)\| \leq 1$ (п. в.). Введем в рассмотрение функцию $\chi(\zeta)$, полагая

$$\chi(\zeta) = P_+^{-1}(\zeta) Q_-(\zeta) (= Q_-^*(\zeta) P_-^{-1}(\zeta)). \quad (5.2)$$

На основании (5.1) имеем

$$\|\chi(\zeta)\|^2 = \|\chi(\zeta) \chi^*(\zeta)\| = \|E_1 - P_+^{-1}(\zeta) P_+^{-1}(\zeta)\| = 1 - \|P_+(\zeta)\|^{-2} < 1 \quad (\text{п. в.})$$

Так как все элементы матриц $P_{\pm}(\zeta)$ являются функциями из пространства L_2 , то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \|P_{\pm}(\zeta)\|^2 |d\zeta| < \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \text{Sp}(P_{\pm}^*(\zeta) P_{\pm}(\zeta)) |d\zeta| < \infty.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} (1 - \|\chi(\zeta)\|)^{-1} |d\zeta| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (1 - \|\chi(\zeta)\|)^{-2} |d\zeta| = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \|P_+(\zeta)\|^2 |d\zeta| < \infty, \end{aligned}$$

так что

$$(1 - \|\chi(\zeta)\|)^{-1} \in L_1. \quad (5.3)$$

Как было показано в конце § 3, для каждой изометрической матрицы E ($E^*E = E_1$) элементы матрицы-функции $F_E(\zeta)$,

$$F_E(\zeta) = \rho [Q_-(\zeta) + P_-(\zeta) E] [P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E]^{-1} \quad (5.4)$$

суть ограниченные функции, а ее коэффициенты Фурье $\{\gamma_j(E)\}_{j=0}^{\infty}$ являются блоками некоторого полного канонического $(\Gamma; \rho)$ -продолжения $\bar{\Gamma}$, так что $\bar{\gamma}_j(E) = \gamma_j$ при $j > 0$.

В силу тождеств (4.2) определение (5.4) эквивалентно следующему:

$$F_E(\zeta) = \rho [P_-^*(\zeta) + E Q_-^*(\zeta)]^{-1} [Q_+(\zeta) + E P_+(\zeta)]. \quad (5.5)$$

Из этих же тождеств следует, что для любых сжимающих E_1 и E_2

$$F_{E_1}(\zeta) - F_{E_2}(\zeta) = \rho [P_-^*(\zeta) + E_2 Q_-^*(\zeta)]^{-1} (E_2 - E_1) [Q_+(\zeta) E_1 + P_+(\zeta)]^{-1}, \quad (5.6)$$

при этом для F_E используется формула (5.5), а для F_{E_1} — формула (5.4).

Будем говорить, что матрица-функция принадлежит классу Харди H_p , ($0 < p \leq \infty$), если все ее элементы являются функциями из этого класса. Согласно сказанному выше, „отрицательные“ коэффициенты Фурье у матриц-функций F_E и F_{E_1} для изометрических E_1, E_2 совпадают, и поэтому разность этих матриц-функций принадлежит H_∞ . По построению матрицы-функции $[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E_1]$ и $[P_-^*(\zeta) + E_2 Q_-^*(\zeta)]$ принадлежат классу H_2 . На основании (5.6) отсюда следует, что $(E_2 - E_1) [P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E_1]^{-1}$ и $[P_-^*(\zeta) + E_2 Q_-^*(\zeta)]^{-1} (E_2 - E_1)$ также входят в H_2 .

Заметим теперь, что при фиксированной изометрической матрице E_1 изометрическую матрицу E_2 можно подобрать так, чтобы произведение $(E_2^* - E_1^*) (E_2 - E_1)$ было невырожденной матрицей (например, положить $E_2 = -E_1$), а при фиксированном значении E_2 надлежащим выбором матрицы E_1 можно добиться того, чтобы наперед заданный вектор $h \in N_2$ входил в область значений отображения $E_2 - E_1$. В силу этих соображений классу H_2 будут принадлежать матрицы-функции $[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E_1]^{-1}$ и $[P_-^*(\zeta) + E_2 Q_-^*(\zeta)]^{-1}$.

3. Образует с помощью произвольной сжимающей $(n_2 \times n_1)$ -матрицы E функцию класса H_1

$$\Phi_E(z) = [P_+(z) + Q_+(z) E]^{-1} [P_+(z) - Q_+(z) E] \quad (|z| < 1).$$

Для ее граничных значений согласно (5.2) имеем

$$\Phi_E(\zeta) = [E_1 + \chi(\zeta) E]^{-1} [E_1 - \chi(\zeta) E],$$

и так как $\|\chi(\zeta)\| < 1$ (п. в.), то

$$\Phi_E^*(\zeta) + \Phi_E(\zeta) > 0 \quad (\text{п. в.}).$$

Используя представление матрицы-функции $\Phi_E(z)$ в точках круга $|z| < 1$ в виде интеграла Пуассона от ее граничных значений, непосредственно убеждаемся в том, что выполняется неравенство $\Phi_E^*(z) + \Phi_E(z) > 0$. Поэтому в круге $|z| < 1$ матрица-функция $\Phi_E(z)$ представима в виде

$$\Phi_E(z) = [E_1 + \bar{\chi}(z)]^{-1} [E_1 - \bar{\chi}(z)],$$

где $\bar{\chi}(z)$ — голоморфная матрица-функция такая, что $\|\bar{\chi}(z)\| < 1$. Граничные значения $\bar{\chi}(\zeta)$ матрицы-функции $\bar{\chi}(z)$ почти в каждой точке ζ должны совпадать с $\chi(\zeta) E$. Следовательно, $\chi(\zeta) E$ — матрица-функция класса H_∞ .

Так как это утверждение справедливо при произвольном выборе изометрического отображения E , то $\chi(\zeta)$ также принадлежит классу H_∞ .

Наконец, умножив $[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]^{-1}$ слева на $[E_1 + \gamma(\zeta)E]$, приходим к заключению, что матрица-функция $P_-^{-1}(\zeta)$ входит в класс H_2 , а значит, в силу ее ограниченности, и в класс H_∞ . Точно так же можно показать, что матрица-функция $(P_-^*)^{-1}(\zeta)$ входит в класс H_∞ .

4. Так как $\det P_+(\zeta) \in H_{2n}$, $[\det P_+(\zeta)]^{-1} \in H_\infty$, то

1°. $\det P_+(\zeta)$ — внешняя функция, а значит, $P_+(\zeta)$ — внешняя матрица-функция, т. е.

$$\det P_+(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \ln |\det P_+(\zeta)| |d\zeta| \right\} \quad (5.7)$$

(здесь учтено, что $\det P_+(0) > 0$). Точно так же

$$\det (P_-^*)(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \ln |\det P_-^*(\zeta)| |d\zeta| \right\}. \quad (5.8)$$

В силу второго тождества в (4.2) и первого тождества в (5.1)

$$|\det P_+(\zeta)|^2 = \det (E_1 - Q_+(\zeta) Q_+^*(\zeta)) = \det (E_2 - Q_+^*(\zeta) Q_+(\zeta)) = |\det P_-(\zeta)|^2.$$

Из равенств (5.7) и (5.8) поэтому следует

$$2^\circ. \quad \det P_+(z) = \det (P_-^*)(z) \quad (|z| < 1). \quad (5.9)$$

Условие (5.3), как известно (см., например, [17]) является достаточным для разрешимости левой факторизационной задачи в классе H_- для матрицы-функции $E_1 - \gamma(\zeta) \gamma^*(\zeta)$. В классе внешних матриц-функций, принимающих положительные значения в точке $z=0$ решение этой задачи единственно. Так как

$$E_1 - \gamma(\zeta) \gamma^*(\zeta) = P_+^{-1}(\zeta) P_+^{-1*}(\zeta), \quad (5.10)$$

то $P_+^{-1}(\zeta)$, а следовательно, $P_+(\zeta)$ и $Q_+(\zeta) (= P_+(\zeta) \gamma(\zeta))$ определяются однозначно по $\gamma(\zeta)$. Аналогично, $(P_-^*)^{-1}(\zeta)$ является единственным решением правой факторизационной задачи

$$E_2 - \gamma^*(\zeta) \gamma(\zeta) = P_-^{-1}(\zeta) (P_-^*)^{-1}(\zeta) \quad (5.11)$$

в классе внешних матриц-функций, принимающих положительные значения в точке $z=0$ и, следовательно, $P_-(\zeta)$ и $Q_-(\zeta) (= P_-(\zeta) \gamma^*(\zeta))$ однозначно определяются по $\gamma(\zeta)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. Пусть $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$, $\rho > \|\Gamma\|$ и $n_k (= \dim N_k, k=1, 2) < \infty$. Тогда матрица-функция $\gamma(z)$, определяемая по формуле (5.2), является голоморфной в круге $|z| < 1$ и обладает свойствами:

$$1) \gamma(0) = 0, \quad 2) \|\gamma(z)\| < 1 \quad (|z| < 1), \quad 3) (1 - \|\gamma(\zeta)\|)^{-1} \in L_1. \quad (5.12)$$

По матрице-функции $\gamma(\zeta)$ однозначно восстанавливаются матрицы-функции $P_\pm(\zeta)$ и $Q_\pm(\zeta)$.

5. Поскольку левый и правый полурадиусы $R_d(\Gamma; \rho)$ и $R_p(\Gamma; \rho)$

операторного квази-шара (1.2) выражаются через $P_+(0)$ и $(P_-)(0)$
 $R_L(\Gamma; \rho) = \rho^{1/2} P_+(0)$, $R_{II}(\Gamma; \rho) = \rho^{1/2} (P_-)(0)$, то из равенства (5.9) вытекает
 $3^\circ. \quad \det R_L(\Gamma; \rho) = \det R_{II}(\Gamma; \rho).$ (5.13)

Устремляя $\rho \downarrow \|\Gamma\|$, получаем предложение:

Теорема 5.2. Пусть $\dim N_k < \infty$ ($k=1, 2$); тогда для любого $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$:

$$\det R_L(\Gamma) = \det R_{II}(\Gamma)$$

и, стало быть, если один из полурадиусов $R_L(\Gamma)$, $R_{II}(\Gamma)$ не выражается, то это же имеет место для второго.

§ 6. Описание полных $(\Gamma; \rho)$ -продолжений в конечномерном случае

Пусть $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_{l+l-1})_{l=-\infty}^\infty$ — некоторое полное $(\Gamma; \rho)$ -продолжение блочно-ганкелевой матрицы $\Gamma = (\gamma_{l+l-1})_l$, и пусть $F(\zeta; \tilde{\Gamma})$ ($n_2 \times n_1$)-матрица-функция, задаваемая с помощью ряда Фурье:

$$F(\zeta; \tilde{\Gamma}) = \sum_{l=-\infty}^\infty \tilde{\gamma}_l \zeta^{-l}. \quad (6.1)$$

Выше уже указывалось, что для любого полного $(\Gamma; \rho)$ -продолжения $\tilde{\Gamma}$ матрица-функция $F(\zeta; \tilde{\Gamma})$ измерима и ограничена в том смысле, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{C}} \|F(\zeta; \tilde{\Gamma})\| \leq \rho \quad (\rho > \|\Gamma\|). \quad (6.2)$$

Матрицы-функции $F(\zeta; \tilde{\Gamma})$, связанные с $(\Gamma; \rho)$ -продолжениями $\tilde{\Gamma}$ по формуле (6.1), будем называть $(\Gamma; \rho)$ -функциями. $(\Gamma; \rho)$ -функции, которые соответствуют каноническим $(\Gamma; \rho)$ -продолжениям, естественно называть каноническими. Подчеркнем, что согласно теоретико-функциональной интерпретации, проведенной в § 3, любая $(n_2 \times n_1)$ -матрица-функция $F(\zeta)$, удовлетворяющая условию (6.2) и такая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} F(\zeta) \zeta^j |d\zeta| = \gamma_j \quad (j=1, 2, \dots), \quad (6.3)$$

является $(\Gamma; \rho)$ -функцией. Поэтому задача об описании всех $(\Gamma; \rho)$ -продолжений $\tilde{\Gamma}$ сводится к задаче об описании всех $(\Gamma; \rho)$ -функций, т. е. всех $(n_2 \times n_1)$ -матриц-функций, подчиненных условиям (6.3) и (6.2).

Обозначим через $B(n_2 \times n_1)$ множество $(n_2 \times n_1)$ -матриц-функций $E(\zeta)$ класса H_+ таких, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathbb{C}} \|E(\zeta)\| \leq 1. \quad (6.4)$$

Теорема 6.1. Формулой

$$F_E(\zeta) = \rho [Q_-(\zeta) + P_-(\zeta) E(\zeta)] [P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E(\zeta)]^{-1} \quad (6.5)$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством всех матриц-функций $E(\zeta)$ из $B(n_2 \times n_1)$ и множеством всех $(\Gamma; \gamma)$ -функций.

Доказательство. Так как матрица-функция

$$U(\zeta) = \begin{pmatrix} P_+(\zeta) & Q_+(\zeta) \\ Q_-(\zeta) & P_-(\zeta) \end{pmatrix}$$

J — унитарна при почти всех ζ , то преобразование (6.5) отображает множество всех $n_2 \times n_1$ -матриц-функций, удовлетворяющих условию (6.4), на множество всех $(n_2 \times n_1)$ -матриц-функций, удовлетворяющих условию (6.2)*.

Остается выяснить, какими дополнительными свойствами должны обладать матрицы-функции $E(\zeta)$, чтобы для соответствующих матриц-функций $F_E(\zeta)$ имели место равенства (6.3).

Пусть $E_1(\zeta)$ и $E_2(\zeta)$ — произвольные матрицы-функции из $B(n_2 \times n_1)$. Для разности матриц-функций $F_{E_2}(\zeta)$ и $F_{E_1}(\zeta)$, так же как и в § 5, получаем

$$\begin{aligned} (G_{E_1, E_2}(\zeta) &\stackrel{\text{def}}{=} F_{E_1}(\zeta) - F_{E_2}(\zeta) = \\ &= [P_-(\zeta) + E_2(\zeta) Q_-(\zeta)]^{-1} [E_2(\zeta)' - E_1(\zeta)] [P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E_1(\zeta)]^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Предположим сначала, что $\text{ess sup } \|E_k(\zeta)\| < 1$ ($k=1, 2$). Тогда из теоремы 5.1 и предложения 1° § 5 будет следовать, что

$$[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta) E_1(\zeta)]^{-1} = [E_1 + \gamma(\zeta) E_1(\zeta)]^{-1} P_+^{-1}(\zeta) \in H_+.$$

Аналогично: $[(P_-(\zeta) + E_2(\zeta) Q_-(\zeta))]^{-1} \in H_-$. Таким образом, при сделанных предположениях относительно $E_k(\zeta)$ ($k=1, 2$) матрица-функция $G_{E_1, E_2}(\zeta)$ будет принадлежать классу Харди H_- , т. е. будут совпадать „отрицательные“ коэффициенты у функций $F_{E_1}(\zeta)$ и $F_{E_2}(\zeta)$.

Положим, далее, $E_k(\zeta) = r \bar{E}_k(\zeta)$ ($k=1, 2$), где $0 \leq r < 1$, а $\bar{E}_k(\zeta)$ — уже произвольные матрицы-функции из $B(n_2 \times n_1)$. Так как

$$\text{ess sup}_{\zeta \in G} \|G_{\bar{E}_1, \bar{E}_2}(\zeta)\| \leq 2\rho$$

и для почти всех ζ

$$\lim_{r \uparrow 1} G_{r\bar{E}_1, r\bar{E}_2}(\zeta) = G_{\bar{E}_1, \bar{E}_2}(\zeta),$$

* Мы используем здесь тот факт, что если матрица $A = (A_{jk})_1^2$, где блоки A_{jk} размерности $n_j \times n_k$, является J -унитарной, то преобразование $E = (A_{21} + A_{22} E)(A_{11} + A_{12} E)^{-1}$ отображает шар $E^* E < I$ всех сжимающих $(n_2 \times n_1)$ -матриц взаимно однозначно на себя.

то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \gamma G_{E_+, E_-}(\zeta) |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \gamma G_{E_+, E_-}(\zeta) |d\zeta| = 0 \quad (j=1, 2, \dots).$$

Поэтому при любых $E_1(\zeta)$ и $E_2(\zeta)$ из $B(n_2 \times n_1)$ „отрицательные“ коэффициенты Фурье у матриц-функций $F_{E_+}(\zeta)$ и $F_{E_-}(\zeta)$ совпадают.

Предположим теперь, что для некоторой $(n_2 \times n_1)$ -матрицы-функции $E_0(\zeta)$, удовлетворяющей условию (6.4), матрица-функция $F_{E_0}(\zeta)$ имеет те же отрицательные коэффициенты Фурье, что и все матрицы-функции $F_E(\zeta)$ при $E(\zeta) \in B(n_2 \times n_1)$.

Рассмотрим соотношение (6.6) при $E_1(\zeta) = E_0(\zeta)$ и $E_2(\zeta) = 0$. Так как матрица-функция $G_{E_+, 0}(\zeta)$ по предположению принадлежит классу H_∞ , то матрица-функция

$$(P_-^*)(\zeta) G_{E_+, 0}(\zeta) P_+(\zeta) = -E_0(\zeta) [E_1 + \gamma(\zeta) E_0(\zeta)]^{-1} \quad (6.7)$$

принадлежит классу H_1 . Поэтому классу H_1 будет принадлежать и матрица-функция

$$\begin{aligned} \Phi_{E_+}(\zeta) &= [E_1 - \gamma(\zeta) E_0(\zeta)] [E_1 + \gamma(\zeta) E_0(\zeta)]^{-1} = \\ &= E_1 + 2\gamma(\zeta) (P_-^*)(\zeta) G_{E_+, 0}(\zeta) P_+(\zeta). \end{aligned}$$

Используя в точности те же рассуждения, что и в п. 3 § 5, выводим отсюда, что произведение $\gamma(\zeta) E_0(\zeta)$ входит в H_∞ , а значит, ввиду (6.7), в H_∞ входит и матрица-функция $E_0(\zeta)$.

Для завершения доказательства теоремы остается вспомнить, что еще в § 3 было показано, что формула (6.5) с постоянными изометрическими E дает описание всех канонических $(\Gamma; \gamma)$ -функций. Теорема доказана.

Замечание 6.1. Формулой (6.5) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством всех матриц-функций $E(\zeta)$ из $B(n_2 \times n_1)$, удовлетворяющих условию

$$E^*(\zeta)E(\zeta) = E_1$$

и множеством всех $(\Gamma; \gamma)$ -функций $F_E(\zeta)$, удовлетворяющих условию

$$F_E^*(\zeta)F_E(\zeta) = \gamma^2 E_1.$$

2. Из доказательства теоремы 6.1 вытекает следующее предложение.

Пусть $\gamma(z)$ — произвольная голоморфная в круге $|z| < 1$ $(n_1 \times n_2)$ -матрица-функция, удовлетворяющая условиям (5.12). Определим по ней четверку матриц-функций $P_\pm(\zeta)$ и $Q_\pm(\zeta)$ следующим образом: $P_+^{-1}(\zeta) ((P_-^*)^{-1}(\zeta))$ — внешняя матрица-функция, принимающая при $z=0$ положительное значение и являющаяся решением левой (правой) факторизационной задачи (5.10) (задачи (5.11)), а $Q_+(\zeta) = P_+(\zeta) \gamma(\zeta)$, $Q_-(\zeta) = P_-(\zeta) \gamma^*(\zeta)$. Если с помощью построенной четверки матриц-функций образовать по формуле (6.5) с произвольным $\rho > 0$ семейство матриц-функций F_E ($E \in B(n_2 \times n_1)$), то все они будут иметь одинако-

вые „отрицательные“ коэффициенты Фурье $\gamma_k = c_{-k}$ (F_E) ($k=1, +2, \dots$). Более того, для блочно-ганкелевой матрицы $\Gamma = \Gamma(\gamma; \rho) = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ формулой (6.5) будут описываться все $(\Gamma; \rho)$ -функции. При этом, однако, может оказаться, что $\|\Gamma\| = \rho$.

Формулу (6.5) можно переписать в виде

$$F_E(\zeta) = \rho \Psi_-^{-1}(\zeta) [\gamma^*(\zeta) + E(\zeta) [E_1 + \gamma(\zeta) E(\zeta)]^{-1} \Psi_+(\zeta), \quad (6.8)$$

где $\Psi_\pm(\zeta) = P_\pm^{-1}(\zeta)$, так что $\Psi_+ \in B(n_1 \times n_1)$, а $\Psi_- \in B(n_2 \times n_2)$.

Для скалярного случая ($n_1 = n_2 = 1$) эта формула получена авторами еще в [16] при более общих предположениях относительно функции γ . Для этого случая указано было также, когда $\|\Gamma\| < \rho$.

Վ. Մ. ԱԴԱՄԻԱՆ, Դ. Զ. ԱՐՈՎ, Մ. Գ. ԿՐԵԻՆ. Անվերջ հանկելյան բլոկ մատրիցներ և նրանց հետ կապված շարունակելիության պրոբլեմներ (ամփոփում)

Դիտարկվում է սահմանափակ, անվերջ հանկելյան բլոկ $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ մատրից, որի γ_j ($j \geq 1$) բլոկները հանդիսանում են դժային սահմանափակ օպերատորներ և արտապատկերում են N_1 հիլբերտյան տարածությունը N_2 -ի մեջ.

$\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ մատրիցան կոչվում է լրիվ (Γ, ρ) -շարունակելիության, եթե

$$\gamma_j = \gamma_j, \text{ երբ } j \geq 1 \text{ և } \|\Gamma\| \leq \rho:$$

Ուսումնասիրվում է, որ եթե $\rho > \|\Gamma\|$, ապա այդպիսի շարունակելիություններ գոյություն ունեն, ընդ որում, երբ $\rho > \|\Gamma\|$ —շարունակելիությունները մեծվելով շատ են, և նրանց հարելի է ստանալ աշխատանքում կառուցված ալգորիթմի միջոցով:

Ստացված է լրիվ (Γ, ρ) —շարունակելիության միակուսյան հայտանիշ $\rho = \|\Gamma\|$ դեպքում:

Դիտարկվող խնդիրը համարվել է $|\zeta| = 1$ միավոր շրջանագծի վրա արված էսպես սահմանափակ $F(\zeta)$ օպերատոր-ֆունկցիայի գտնելուն, որի բացասական $c_{-j}(F)$ ֆուրյեի գործակիցները համընկնում են, γ_j ($j \geq 1$) հետ և $\|F\|_- < \rho$:

Երբ N_1 և N_2 տարածությունները վերջավոր չափանի են, $\rho > \|\Gamma\|$ դեպքում, ստացված է բոլոր այդպիսի $N(\zeta)$ ֆունկցիաները նկարագրող բանաձև:

V. M. ADAMIAN, D. Z. AROV, M. G. KREIN. *Infinite Hankel block-matrices and related continuation problems (summary)*

A bounded, infinite Hankel block-matrix $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, blocks γ_j being bounded linear operators from a Hilbert space N_1 to a Hilbert space N_2 ($\gamma_j \in [N_1, N_2]$, $j=1, 2, \dots$) is considered. A matrix $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_{j+k-1})_1^\infty$ is called a full (Γ, ρ) -continuation if $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$ for $j=1, 2, \dots$ and $\|\tilde{\Gamma}\| < \rho$.

The set of these continuations is not empty iff $\rho > \|\Gamma\|$ and becomes infinite if $\rho > \|\Gamma\|$. A special „one step (Γ, ρ) -continuation“ algorithm permits to construct each continuation of the set. For the case $\rho = \|\Gamma\|$ uniqueness theorem is established.

The work was motivated by the related problem of finding an essentially bounded operator-valued function $F(\zeta)$ ($F(\zeta) \in [N_1, N_2]$) on the circle $|\zeta|=1$ with given negative Fourier coefficients $c_{-j}(F) = \gamma_j$ ($j \geq 1$) and with $\|F\|_- < \rho$. The explicit formulae are given for description of all such functions F when $\rho > \|\Gamma\|$ and $\dim N_k < \infty$ ($k=1, 2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн. а) О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори-Фейера и Ф. Рисса, Функци. анализ и его прил., 2, в. 1, 1968, 1—19; б) Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори-Фейера и И. Шура, Функци. анализ и его прил., 2, в. 4, 1968, 1—17; в) Об ограниченных операторах, коммутирующих с сжатием класса S_{00} единичного ранга неунитарности, Функци. анализ и его прил., 3, в. 3, 1969, 86—87. г) Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура-Такаги, Матем. сборник, 85 (128), № 1 (9), 1971, 33—73.
2. Z. Nehari. On bounded bilinear forms, Ann. Math, 65, № 1, 1957, 153—162.
3. I. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, J. reine angew. Math., 147, 1917.
4. D. Sarason. Generalized interpolation in H^∞ , Trans. Amer. Math. Soc., 127, № 2, 1967, 180—203.
5. B. Pate Lavon. Bounded and compact vectorial Hankel operators, Trans. Amer. Math. Soc., 150, № 2, 1970, 529—539.
6. R. Nevanlinna. Über beschränkte analytische Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A 32, № 7, 1929.
7. М. Г. Крейн. Об обобщенной проблеме моментов, ДАН СССР, 44, 1944, 239—243.
8. B. Sz. Nagy, A. Korányi. Relations d'un probleme de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs, de l'espace Hilbertien, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7, 1956, 295—302.
9. М. Г. Крейн. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций, ДАН СССР, 26, 1940, 17—21.
10. М. Г. Крейн. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) , УМЖ, 1: 2, 1949, 3—66.
11. Ю. М. Бerezанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965, 1—798, (гл. VIII).
12. М. Г. Крейн. Ф. Э. Мелик-Адамян. Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы, Функци. анализ и его прил., 4, в. 4, 1970, 73—75.
13. В. П. Потапов. Общие теоремы теории аналитических J -нерастягивающих матриц-функций, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций, Харьков, сентябрь 1971 г.
14. И. В. Ковалишина. Аналитические и J -нерастягивающие матрицы-функции и классические задачи анализа, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций, Харьков, сентябрь 1971 г.
15. Ю. А. Шмудьян. Операторные шары, Сб. „Функциональный анализ, теория функций и их приложения“, вып. 6, 1968, 68—81, Харьков.
16. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фолш. Гармонический анализ линейных операторов в гильбертовом пространстве, „Мир“, Москва, 1970.
17. Ю. А. Розанов. Стационарные случайные процессы, Из-во „Наука“, 1963, 1—284.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. Г. АСЛАНЯН, В. Б. ЛИДСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧАСТОТ НИЖНЕЙ СЕРИИ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В в е д е н и е

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая собственные колебания оболочки вращения с m волнами по параллели (см. [1, 2]):

$$\begin{aligned} & -u'' - \frac{B'}{B} u' - \frac{(1+\sigma)m}{2B} v' - \left[\left(\frac{B'}{B} \right)' + (1-\sigma) \left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{m^2}{2B^2} \right) \right] u + \\ & + \frac{(3-\sigma)m}{2} \frac{B'}{B^2} v + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right) w' + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w = \lambda u, \\ & -\frac{1-\sigma}{2} v'' + \frac{(1+\sigma)m}{2B} u' - \frac{1-\sigma}{2} \frac{B'}{B} v' + \frac{(3-\sigma)m}{2} \frac{B'}{B^2} u - \\ & - \left[\frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{B'}{B} \right)' + \frac{1-\sigma}{R_1 R_2} - \frac{m^2}{B^2} \right] v - \frac{m}{B} \left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w = \lambda v, \quad (0.1) \\ & \mu^4 \frac{1}{B} \left(\frac{d}{ds} B \frac{d}{ds} - \frac{m^2}{B} \right) \frac{1}{B} \left(\frac{d}{ds} B \frac{dw}{ds} - \frac{m^2}{B} w \right) - \\ & - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2} \right) \frac{du}{ds} - \left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{B'}{B} u - \frac{m}{B} \left(\frac{\sigma}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v + \\ & + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\sigma}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) w = \lambda w. \end{aligned}$$

Здесь u, v, w — проекции смещения точки срединной поверхности, s — длина дуги меридиана, $a \leq s \leq b$, $B(s)$ — расстояние от меридиана до оси вращения, функция $B(s)$ предполагается положительной и достаточно гладкой; $R_1(s)$ и $R_2(s)$ — главные радиусы кривизны оболочки:

$$R_1^{-1}(s) = -\frac{B''(s)}{\sqrt{1-B'^2(s)}}, \quad R_2^{-1}(s) = \frac{\sqrt{1-B'^2(s)}}{B(s)}; \quad (0.2)$$

λ — параметр, константой отличающийся от частоты колебаний,

μ — малый параметр: $\mu^4 = \frac{1}{12} h^3$, где h — толщина оболочки,

σ — коэффициент Пуассона, $\sigma^2 < \frac{1}{4}$. Система (0.1) в настоящей статье

рассматривается при граничных условиях

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0, \quad (0.3)$$

что соответствует жесткому закреплению. Задача (0.1, 3) является самосопряженной*.

Положив в системе (0.1) $\mu=0$, мы приходим к безмоментной (вырожденной) системе уравнений, которую запишем сокращенно в виде

$$Z_0 f = \lambda f, \quad (0.4)$$

где f — вектор-функция (u, v, w) . Как показано в [3, 4] система (0.4) при граничных условиях

$$u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0 \quad (0.5)$$

также является самосопряженной. Скалярное произведение (f_1, f_2) вводится по формуле

$$(f_1, f_2) = \int_a^b B(s)(u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2 + w_1 \bar{w}_2) ds. \quad (0.6)$$

В противоположность моментной задаче (0.1, 3) безмоментная задача (0.4, 5) имеет не чисто дискретный спектр. Как было нами показано в статьях [3, 4], отрезок $[z, \beta]$ значений функции

$$\varphi_1(s) = \frac{1-s^2}{R_2^2(s)}, \quad a \leq s \leq b \quad (0.7)$$

состоит из точек непрерывного спектра. Вне отрезка $[z, \beta]$ спектр дискретен. Концы этого отрезка могут быть точками сгущения собственных значений. Особый интерес представляет нижняя серия дискретного спектра:

$$\lambda_k < z. \quad (0.8)$$

Интерес к этой части спектра усиливается тем обстоятельством, что при условии (0.8) имеет место регулярное вырождение в смысле [5] задачи (0.1, 3) при $\mu \rightarrow 0$ в задачу (0.4, 5). Поэтому для собственных значений моментной задачи $\lambda_k(\mu) < z$ справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k(\mu) = \lambda_k + \omega_k^{(1)} + o(\mu). \quad (0.9)$$

В настоящей статье мы находим условия, при которых нижняя серия частот безмоментной задачи бесконечна и находим асимптотику λ_k при $k \rightarrow \infty$.

Развиваемая в статье техника мажорантных и минорантных операторов может быть использована при отыскании асимптотики функции распределения у общих самосопряженных систем дифференциальных уравнений при наличии вырождения в старших членах и малого

* Здесь и в дальнейшем под этим понимается, что соответствующий оператор на многообразии гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям, является существенно самосопряженным.

параметра. Например, к исследованию асимптотики функции распределения моментной задачи (0.1, 3) при $h \rightarrow 0$.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру и П. Е. Товстику за неоднократные обсуждения.

§ 1. Вспомогательные леммы

В этом параграфе мы приведем ряд вспомогательных предложений, которыми воспользуемся ниже при получении асимптотики.

1°. Положим в последнем уравнении (0.1) $\mu=0$ и выразим w через u , v , u' . Подставив w в первые два уравнения (0.1) и умножив каждое из них на $B(s)$, мы придем к системе двух уравнений второго порядка относительно u и v . Эту систему запишем сразу в матричной форме:

$$lz \equiv -(A_0 z')' + A_1 z' + \frac{1}{2} A_1 z + A_2 z = 0, \quad (1.1)$$

где $z = (u, v)$ — искомый вектор-столбец, A_0 , A_1 , A_2 — матрицы:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Элементы матриц A_0 , A_1 и A_2 — функции λ и s .

Для дальнейшего существенно, что

$$a_1(s, \lambda) = B(s) \frac{\lambda - \varphi_1(s)}{\lambda - \varphi_2(s)}, \quad (1.3)$$

где $\varphi_1(s)$ определено по формуле (0.7), а $\varphi_2(s) = R_1^{-2} + 2\sigma R_1^{-1} R_2^{-1} + R_2^{-2}$. Легко проверить, что

$$\varphi_2(s) - \varphi_1(s) = (R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1})^2 \geq 0. \quad (1.4)$$

Отметим еще, что

$$d_1(s) = \frac{1-\sigma}{2} B(s) > 0. \quad (1.5)$$

Выражения для элементов матриц A_1 и A_2 мы пока не приводим. Важно отметить, что задача

$$lz = \mu z, \quad z(a) = z(b) = 0, \quad (1.6)$$

где l определено формулой (1.1), является самосопряженной, если скалярное произведение определено по формуле

$$(z_1, z_2) = \int_a^b (u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2) ds. \quad (1.7)$$

Самосопряженность оператора l можно проверить непосредственно*.

2°. Пусть $\lambda < \alpha$, где

$$\alpha = \inf \varphi_1(s), \quad s \in [a, b]. \quad (1.8)$$

Обозначим через $n(\lambda)$ число собственных значений задачи (0.4, 5), меньших λ ($n(\lambda)$ называется функцией распределения собственных значений задачи).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. $n(\lambda)$ при каждом $\lambda < \alpha$ равно числу отрицательных собственных значений задачи (1.6).

Доказательство следует из установленной нами в [3, 4] осцилляционной теоремы, согласно которой $n(\lambda)$ при $\lambda < \alpha$ равно числу нулей определителя

$$\Delta(s, \lambda) = \begin{vmatrix} u_1(s, \lambda) & u_2(s, \lambda) \\ v_1(s, \lambda) & v_2(s, \lambda) \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

при $a < s < b$. Здесь $(u_i(s, \lambda), v_i(s, \lambda))$ ($i=1, 2$) — два решения задачи Коши для системы (1.1) с начальными условиями:

$$u_1(a, \lambda) = 0, v_1(a, \lambda) = 0, u'_1(a, \lambda) = 1, v'_1(a, \lambda) = 0, \quad (1.10)$$

$$u_2(a, \lambda) = 0, v_2(a, \lambda) = 0, u'_2(a, \lambda) = 0, v'_2(a, \lambda) = 0. \quad (1.11)$$

Известно, однако**, что число нулей определителя (1.9) на интервале (a, b) равно числу отрицательных собственных значений задачи (1.6). Отсюда следует справедливость леммы 1.

Лемма 1 позволяет свести вопрос об асимптотике функции распределения $n(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \alpha - 0$ к исследованию отрицательного спектра задачи (1.6). Последняя представляет собой классическую самосопряженную задачу и для исследования ее спектра может быть привлечена развитая техника.

3°. Пусть $N(\mu)$ — функция распределения собственных значений задачи (1.6)***. Пусть $c \in (a, b)$. Рассмотрим на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ две краевые задачи для уравнения $lz = \mu z$ с нулевыми граничными условиями на концах этих отрезков. Пусть $N_1(\mu)$ и $N_2(\mu)$ — соответствующие функции распределения. Ниже мы используем следующий факт.

* Этот факт следует также из вещественности квадратичной формы $Y(f) = (L_0 f, f) - \lambda(f, f)$ при вещественном фиксированном λ и всех $f = (u, v, w)$ таких, что выполнено для u и v (0.5), а w — произвольно. В самом деле, подставив w из третьего уравнения (0.1) с $\mu = 0$ в интеграл $Y(f)$, мы обнаружим, что интеграл (lz, z) вещественен при всех z , удовлетворяющих условию (0.5). Отсюда следует самосопряженность l .

** Этот факт также следует из [3, 4]. См., кроме того, [6, 7]. Всяду нули и собственные значения берутся с учетом кратности.

*** Подчеркнем, что $n(\lambda) = N(0)$.

Лемма 2. При всех μ

$$N_1(\mu) + N_2(\mu) \leq N(\mu) \leq N_1(\mu) + N_2(\mu) + 2. \quad (1.12)$$

По поводу левого неравенства см. [8], стр. 345, теорема 2. Правое неравенство легко следует из теоремы 13, [9], стр. 31.

4°. Число отрицательных собственных значений задачи (1.6) может неограниченно возрастать при $\lambda \rightarrow \alpha - 0$, поскольку в силу (1.3) задача (1.6) является сингулярной при $\lambda = \alpha$. Действительно, в точке $s = s_0$, где функция $\varphi_1(s)$ (см. (0.7)) достигает инфимума α , коэффициент $a_1(s, \alpha)$ при старшей производной обращается в нуль. Можно показать однако, что нижняя серия бесконечна лишь при условии

$$\frac{\partial}{\partial s} a_1(s_0, \alpha) = 0, \text{ то есть}$$

$$\varphi_1'(s_0) = 0^*. \quad (1.13)$$

Из наших дальнейших рассуждений будет следовать, что асимптотика $n(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \alpha - 0$ обусловлена поведением функции $\varphi_1(s)$ в малой окрестности точки s_0 . Функция $n(\lambda)$ растет тем быстрее, чем сильнее уплощение графика $\varphi_1(s)$ в окрестности $s = s_0$.

Пусть при $p \geq 2$

$$\varphi_1(s) = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{p!} \varphi_1^{(p)}(s_0)(s-s_0)^p + O((s-s_0)^{p+1}). \quad (1.14)$$

Предположим для определенности, что функция $\varphi_1(s)$ достигает инфимума в единственной точке $s_0 < b$. Введем безразмерный параметр $\varepsilon > 0$ по формуле**

$$\varepsilon = [\gamma^2(\alpha - \lambda)]^{1/p}. \quad (1.15)$$

Разобьем отрезок $[s_0, b]$ на три***:

$$\Delta_1 = [s_0, s_1], \Delta_2 = [s_1, s_2], \Delta_3 = [s_2, b]. \quad (1.16)$$

Функции распределения трех задач для системы $lz = \mu z$ с нулевыми граничными условиями на концах отрезков Δ_k ($k=1, 2, 3$) обозначим соответственно через $N_k(\mu)$.

Из наших дальнейших рассмотрений будет следовать, что основной вклад в асимптотику $n(\lambda)$ при определенном выборе точек $s_1(\varepsilon)$ и $s_2(\varepsilon) \rightarrow s_0$ вносится функцией $N_2(0)$.

Для функций $N_3(0)$ и $N_1(0)$ мы сейчас укажем грубые оценки сверху, достаточные для дальнейшего.

Лемма 3. Справедливо неравенство

* Нетрудно проверить, что $\varphi_2(s_0) > \alpha$ и, следовательно, все коэффициенты системы (1.1) — гладкие функции $s \in [a, b]$ при $\lambda < \alpha$.

** Здесь γ — размерная единица.

*** Если s_0 — внутренняя точка, то разбиению, аналогичному (1.16), подвергается и отрезок $[a, s_0]$.

$$N_2(0) \leq \frac{C}{t_2^{1/2}}, \quad (1.17)$$

где $t_2(\varepsilon) = s_2(\varepsilon) - s_0$, а константа C не зависит от ε .

Для доказательства оценим снизу квадратичную форму*

$$(lz, z) = \int_{\Delta_1} \left\{ (A_0 z', z') + (A_1 z', z) + \frac{1}{2} (A_1' z, z) + (A_2 z, z) \right\} ds. \quad (1.18)$$

Разложив функции $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ в (1.3) по степеням $t = s - s_0$, получим с учетом (1.14)

$$a_1(s, \lambda) = (a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p)(1 + O(\rho)), \quad (1.19)$$

где

$$a_{p,0} > 0, \quad q_0 > 0, \quad (1.20)$$

а

$$\rho = (t^2 + \gamma^2 \varepsilon^2)^{1/2}. \quad (1.21)$$

Аналогично**,

$$d_1(s) = d_{1,0}(1 + O(\rho)), \quad d_{1,0} > 0. \quad (1.22)$$

Очевидно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $s > s_2$ будет

$$a_1(s, \lambda) \geq \frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p, \quad d_1(s) > \frac{1}{2} d_{1,0}. \quad (1.23)$$

Интегрируя в (1.18) по частям то слагаемое из $(A_1 z', z)$, которое содержит u' , легко приходим с учетом (1.23) к заключению, что

$$(lz, z) \geq \int_{\Delta_1} \left[\frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p u'^2 + \frac{1}{2} d_{1,0} v'^2 - C_1 |v' \cdot u| - C_1 (u^2 + v^2) \right] ds$$

при достаточно большом C_1 . Поскольку, далее $C_1 |v' \cdot u| \leq \frac{1}{2} C_1 \delta v'^2 +$

$+\frac{1}{2} \frac{C_1}{\delta} u^2$ при любом $\delta > 0$, то, выбирая δ из условия $\frac{1}{2} d_{1,0} -$

$-\frac{1}{2} C_1 \delta > \frac{1}{4} d_{1,0}$, получим при всех достаточно малых t_2 : $(lz, z) >$

$> \int_{\Delta_1} \left[\frac{1}{2} a_{p,0} t_2^p (u'^2 + v'^2) - C(u^2 + v^2) \right] ds$. Отсюда следует, что

$$(lz, z) \geq (l_1 z, z), \quad (1.24)$$

* Во избежание путаницы, отметим, что круглыми скобками под знаком интеграла обозначено „обычное“ скалярное произведение для двумерных векторов. Напри-

мер, $(A_2 z, z) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} z_i z_j$, где $z_1 = u$, $z_2 = v$. Для наших целей здесь достаточно

брать лишь вещественные вектор-функции $z = (u, v)$.

** Явные выражения для констант см. на стр. 22, 23.

где $l_1 z = -\frac{1}{2} a_{p,0} t_1^p z'' - Cz$. Система $l_1 z = \mu z$ при нулевых граничных условиях на концах отрезка Δ_1 легко интегрируется, и в силу (1.24) мы получаем оценку (1.17). Лемма 3 доказана.

Аналогично устанавливается

Лемма 4.

$$N_1(0) \leq \frac{C t_1}{\varepsilon^{p/2}}, \quad (1.25)$$

где $t_1(z) = s_1(z) - s_0$, а константа C не зависит от ε .

5°. Оценка функции $N_2(0)$ много тоньше и мы займемся ею в §§ 2 и 3. Заметим здесь, что система $lz = \mu z$ на отрезке $[s_1, s_2]$ может быть упрощена. В дополнение к (1.19) и (1.22) разложим по формуле Тейлора в окрестности (s_0, α) элементы матриц (1.2):

$$b_1(s, \lambda) = b_{1,0} + \left. \frac{\partial b_1}{\partial s} \right|_0 \cdot t + O(\rho^2), \quad (1.26)$$

$$a_{1l}(s, \lambda) = a_{1l,0} + \left. \frac{\partial}{\partial s} a_{1l} \right|_0 \cdot t + O(\rho^2). \quad (1.27)$$

Заметим, что для любой функции $v(s)$, обращающейся в нуль на концах отрезка Δ_2 , справедливо неравенство

$$\int_{\Delta_2} v'^2(s) ds > \frac{\pi^2}{(s_2 - s_1)^2} \int_{\Delta_2} v^2(s) ds > \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \int_{\Delta_1} v^2(s) ds, \quad (1.28)$$

где*

$$\rho_0 = (t_2^2 + \tau^2 \varepsilon^2)^{1/2}, \quad t_2 = s_2 - s_0. \quad (1.29)$$

Рассмотрим после этого наряду с задачей $lz = \mu z$, $z(s_1) = z(s_2) = 0$, две задачи:

$$-(A_0^- z') + A_1^+ z' + A_2^\pm z = \mu z, \\ z(s_1) = z(s_2) = 0, \quad (1.30)$$

где 2×2 матрицы $A_0^\pm$, $A_1^\pm$, $A_2^\pm$ имеют вид:

$$A_0^\pm = \text{diag} \{ (a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p)(1 \pm C\rho_0), d_{1,0}(1 \pm C\rho_0) \}, \\ A_1^\pm = \begin{pmatrix} 0 & -b_{1,0} \\ b_{1,0} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2^\pm = \text{diag} \{ a_{11,0} \pm C\rho_0, 0 \}. \quad (1.31)$$

Системы в (1.30) сокращенно будем записывать в виде $l^\pm z = \mu z$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Существует столь большое C и такое $\delta > 0$, что при всех $\rho_0 < \delta$ будет

$$l^+ > l > l^-. \quad (1.32)$$

* По поводу τ см. сноску на стр. 117.

Соотношение (1.32) понимается в смысле неравенства квадратичных форм операторов.

Для доказательства оценим интегралы

$$J_1 = \int_{\Delta_1} t |v' \cdot u| dt, \quad J_2 = \int_{\Delta_1} |u \cdot v| dt, \quad J_3 = \int_{\Delta_1} v^2 dt, \quad (1.33)$$

которые входят в оценку формы оператора l с некоторыми постоянными (мы пользуемся разложениями коэффициентов в окрестности (s_0, a)). Очевидно

$$|J_1| \leq \frac{1}{2} \rho_0 \int_{\Delta_1} v'^2 dt + \frac{1}{2} \rho_0 \int_{\Delta_1} u^2 dt,$$

$$|J_2| \leq \frac{1}{2\rho_0} \int_{\Delta_1} v^2 dt + \frac{1}{2} \rho_0 \int_{\Delta_1} u^2 dt,$$

и, наконец, в силу (1.28),

$$|J_3| \leq \frac{\rho_0^2}{\pi^2} \int_{\Delta_1} v'^2 dt.$$

Эти неравенства позволяют легко указать столь большое C в (1.31), при котором выполнено (1.32) при всех достаточно малых ρ_0 . Лемма 5 доказана.

6°. Мы воспользуемся ниже также следующим предложением.

Лемма 6. Пусть $r'(t) > 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$. Пусть функция $\psi(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\psi(t)| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left| \frac{\psi'(t)}{r'(t)} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1.34)$$

при всех $t_1 \leq t \leq t_2$. Тогда число нулей $v(t_1, t_2)$ уравнения

$$\sin r(t) + \psi(t) = 0 \quad (1.35)$$

на отрезке $[t_1, t_2]$ удовлетворяет неравенству

$$\left\lfloor \frac{1}{\pi} (r(t_2) - r(t_1)) \right\rfloor - 2 \leq v(t_1, t_2) \leq \left\lceil \frac{1}{\pi} (r(t_2) - r(t_1)) \right\rceil + 2. \quad (1.36)$$

Квадратными скобками здесь обозначена целая часть числа.

Подстановкой $\tau = r(t)$ лемма сводится к элементарному рассуждению, которое мы опускаем.

Дальнейшие рассмотрения мы разобьем на два случая, в зависимости от значения p в формуле (1.14). Мы начнем с технически более сложного случая.

§ 2. Случай $p > 2$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi_1(s) = \frac{1-\tau^2}{R_2^2(s)}$ достигает своего инфимума α в единственной точке $s=s_0$, лежащей внутри отрезка $[a, b]$. Пусть $\alpha > 0$ и пусть

$$\varphi_1(s_0) = \varphi_1'(s_0) = \dots = \varphi_1^{(p-1)}(s_0) = 0, \quad \varphi_1^{(p)}(s_0) \neq 0 \quad (p > 2). \quad (2.1)$$

Тогда для функции распределения собственных значений $n(\lambda)$ задачи (0.4, 5) имеет место формула

$$\lim_{\lambda \rightarrow \alpha-0} \frac{n(\lambda)}{(a-\lambda)^{\frac{2-p}{2p}}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\delta} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{a_{p,0} t^p + q_0}}, \quad (2.2)$$

где*

$$\delta = \frac{b_{1,0}^2}{d_{1,0}} - a_{11,0} > 0. \quad (2.3)$$

Для доказательства разобьем отрезок $[s_0, b]$ на три, как в (1.16), положив

$$s_1 = s_0 + \gamma \varepsilon^{1/\alpha} x_1, \quad s_2 = s_0 + \gamma \varepsilon^x, \quad (2.4)$$

где x и x_1 подчинены условиям

$$0 < x < \frac{p-2}{p}, \quad 0 < x_1 < \frac{p-2}{2}. \quad (2.5)$$

После этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$l^+ z = \mu z \quad (2.6)$$

(см. § 1, п. 5°) и оценим число $N_2^+(0)$ отрицательных собственных значений задачи (2.6) при нулевых граничных условиях на концах отрезка $[s_1, s_2]$. С этой целью введем определитель $\Delta(s, \varepsilon)$, аналогичный определителю (1.9), с той лишь разницей, что начальные условия вида (1.10), (1.11) для решений системы (2.6) задаются при $s=s_0$. Система $l^+ z = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} -((a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p)(1 + C_{p0}) u_t')_t - b_{1,0} v_t' + (a_{11,0} + C_{p0}) u &= 0, \\ -d_{1,0}(1 + C_{p0}) v_{tt}' + b_{1,0} u_t' &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$t = s - s_0.$$

Второе уравнение интегрируется, и задача сводится к одному уравнению второго порядка относительно $u(t)$. Последнее интегрируется асимптотически при $t \rightarrow +0$ и $\varepsilon \rightarrow +0$ ([10]). Для элементов $c_{11}(t, \varepsilon)$ определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ находим формулы:

$$c_{11}(t, \varepsilon) = [g(t, \varepsilon)]^{-1/4} \{\sin r(t, \varepsilon) + \chi(t, \varepsilon)\}, \quad (2.8)$$

* Выражения для констант $a_{p,0}$; q_0 ; $b_{1,0}$; $d_{1,0}$; $a_{11,0}$; δ см. в § 4, п. 2°.

$$c_{11}(t, \varepsilon) = \frac{b_{1,0}}{d_{1,0}^*} \int_0^t c_{11}(\xi, \varepsilon) d\xi, \quad (2.9)$$

$$c_{12}(t, \varepsilon) = -\frac{b_{1,0}}{\delta^*} + \frac{b_{1,0}}{\delta^*} \left[\frac{g(0, \varepsilon)}{g(t, \varepsilon)} \right]^{1/4} (\cos r(t, \varepsilon) + \gamma(t, \varepsilon)), \quad (2.10)$$

$$c_{22}(t, \varepsilon) = t + \frac{b_{1,0}}{d_{1,0}^*} \int_0^t c_{12}(\xi, \varepsilon) d\xi. \quad (2.11)$$

Здесь

$$g(t, \varepsilon) = a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p, \quad (2.12)$$

$$r(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{\sqrt{\delta - \frac{1}{4} [(\sqrt{g})']^2 + O(\rho_0)}}{\sqrt{g}} d\xi. \quad (2.13)$$

Через $d_{1,0}^*$ и δ^* обозначены функции ε , которые стремятся к $d_{1,0}$ и δ соответственно при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\rho_0 = (t_2^2 + \gamma^2 \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \quad t_2 = s_2 - s_0. \quad (2.14)$$

Через $\gamma(t, \varepsilon)$ обозначены функции, удовлетворяющие условиям:

$$\gamma(t, \varepsilon) = O(t^{\frac{p}{2}-1}), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(t, \varepsilon) = |g(t, \varepsilon)|^{-\frac{1}{2}} \cdot O(t^{\frac{p}{2}-1}) \quad (2.16)$$

с константами в O -членах, не зависящими от ε .

Оценка остатков $\gamma(t, \varepsilon)$ в (2.8) и (2.10) проводится стандартным приемом. Уравнение $(g(t, \varepsilon) u_i)' + \delta^* u = 0$ подстановкой $u = y_1$, $\sqrt{g} u_i = y_i$ сводится к системе двух уравнений, которая после диагонализации приводится к интегральному уравнению (см. по этому поводу [10], гл. 1).

Оценим число нулей $\gamma(t_1, t_2)$ определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, где $t_1 = s_1 - s_0$, $t_2 = s_2 - s_0$, а $s_1(\varepsilon)$ и $s_2(\varepsilon)$ определены формулой (2.4)*.

Оценим предварительно элементы $c_{ij}(t, \varepsilon)$ при

$$\gamma \varepsilon^{1+\varepsilon_1} \leq t \leq \gamma \varepsilon^{\varepsilon_2}. \quad (2.17)$$

В силу (2.3) из (2.10) следует, что

$$c_{22}(t, \varepsilon) = -\frac{a_{11,0}}{\delta^*} t + \frac{b_{1,0}}{\delta^*} \int_0^t \left[\frac{g(0, \varepsilon)}{g(\xi, \varepsilon)} \right]^{1/4} \cos r(\xi, \varepsilon) d\xi +$$

* Заметим, что согласно леммам 1 и 2 $\gamma(t_1, t_2)$ с точностью до ± 2 совпадает с $N_2^+(0)$.

$$+ t O(\rho_0) + O(t^2)^{\frac{p}{4}}. \quad (2.18)$$

Интеграл в (2.18) обозначим через J . Взяв его по частям, легко найдем

$$|J| \leq C \varepsilon^{\frac{p}{4}} [g(t, \varepsilon)]^{\frac{1}{4}}$$

и, следовательно

$$|J| \leq t \cdot C \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{p}{4}}}{g^{1/4}} \cdot \frac{g^{1/2}}{t}. \quad (2.19)$$

Заметим, что при условии (2.17), в силу (2.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{g^{1/2}}{t} = \frac{\sqrt{a_{p,0} t^p + q_0 \varepsilon^p}}{t} = o(1). \quad (2.20)$$

Предполагая временно, что

$$a_{11,0} \neq 0, \quad (2.21)$$

получаем

$$c_{22}(t, \varepsilon) = -\frac{a_{11,0}}{\delta} t (1 + o(1)). \quad (2.22)$$

Интегрируя по частям интеграл с $\sin r(t, \varepsilon)$ в (2.9), получаем:

$$|C_{21}(t, \varepsilon)| \leq C [g(t, \varepsilon)]^{1/4}. \quad (2.23)$$

Имеем теперь, используя (2.8), (2.22),

$$\begin{aligned} \Delta(t, \varepsilon) &= c_{11}c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = \\ &= \frac{c_{22}}{g^{1/4}} [\sin r(t, \varepsilon) + \gamma(t, \varepsilon) + \chi_1(t, \varepsilon)], \end{aligned} \quad (2.24)$$

где

$$\gamma_1(t, \varepsilon) = -g^{\frac{1}{4}} c_{12} c_{21} c_{22}^{-1}. \quad (2.25)$$

Для этой функции в соответствии с (2.22) и (2.23) имеем

$$|\gamma_1(t, \varepsilon)| \leq C g^{1/4} \cdot g^{1/4} \cdot t^{-1} = o(1). \quad (2.26)$$

Мы воспользовались формулой (2.20). Аналогично доказывается, что при условии (2.17)

$$\left| \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} \right| = [g(t, \varepsilon)]^{-1/2} \cdot o(1). \quad (2.27)$$

Используя оценки для $\gamma(t, \varepsilon)$ и $\gamma_1(t, \varepsilon)$, мы заключаем на основании леммы 6, что число нулей $v(t_1, t_2)$ определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ на отрезке (2.17) с точностью до ± 2 равно

$$\left[\frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\delta - \frac{1}{4} [(Vg)]^2 + O(\rho_0)}}{Vg} dx \right].$$

Замечая, что

$$[(\sqrt{g})']^2 = O\left[\left(\frac{t^{p-1}}{\sqrt{g}}\right)^2\right] = O(t^{p-2})$$

с константами в O -членах, не зависящими от ε , получаем

$$\begin{aligned} v(t_1, t_2) &= \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} \int_{1+z_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{g(\tau, \varepsilon)}} (1 + o(1)) = \\ &= \varepsilon^{\frac{2-p}{2}} \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{a_{p,0} \zeta^p + q_0}} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Таким образом, для $N_2^+(0)$ справедлива асимптотическая формула (2.28) (см. сноску на стр. 122). Поскольку в главный член (2.28) не входит константа C , то эта же формула, очевидно, справедлива и для $N_2^-(0)$. В силу леммы 5 имеем $N_2^-(0) \geq N_2(0) \geq N_2^+(0)$. Следовательно, формула (2.28) справедлива и для $N_2(0)$. Заметим теперь, что согласно лемме 4

$$N_1(0) = O(\varepsilon^{1+z_1-\varepsilon^{-p/2}}) = o(\varepsilon^{1-\frac{p}{2}}),$$

а в силу леммы 3 $N_3(0) = O(\varepsilon^{-\frac{r}{2}})$, что вследствие (2.5) также есть $o(\varepsilon^{1-\frac{p}{2}})$.

Повторив все рассуждения для отрезка $[a, s_0]$ и воспользовавшись леммами 2 и 1, мы приходим к формуле (2.2).

Освободимся теперь от условия (2.21). Возмутим коэффициент при u в первом уравнении системы (0.1) функцией $\xi \omega(s)$, где $\omega(s)$ положительна в малой окрестности точки s_0 и продолжена нулем на весь отрезок $[a, b]$, ξ — малый параметр. Меняя знак у ξ , находим для n (1.) оценки сверху и снизу; устремив ξ к нулю, получаем формулу (2.2) без предположения (2.21).

Если s_0 совпадает с концом отрезка $[a, b]$, то правую часть (2.2) следует разделить на 2. В этом случае p может быть любым действительным числом, большим двух.

В заключение отметим, что обращение формулы (2.2) дает при $k \rightarrow \infty$

$$\lambda_k = a - C_0^{\frac{2p}{p-2}} \cdot k^{\frac{2p}{2-p}} (1 + o(1)). \quad (2.29)$$

Через C_0 обозначена правая часть (2.2).

§ 3. Случай $p = 2$

Докажем следующее предложение.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi_1(s)$ достигает положительного инфимума λ в единственной точке $s=s_0 \in (a, b)$. Пусть $\varphi_1'(s_0)=0$ и

$$\varphi_1''(s_0) \neq 0, \quad (3.1)$$

тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2-0} \frac{n(\lambda)}{\ln \frac{1}{\gamma^2(\lambda-1)}} = \frac{1}{\pi \sqrt{a_{2,0}}} \operatorname{Re} \sqrt{\delta - \frac{1}{4} a_{2,0}}. \quad (3.2)$$

Константы те же, что и в теореме 1. По поводу γ см. сноску на стр. 117.

Для доказательства разобьем отрезок $[s_0, b]$ на три, как в (1.16), положив

$$s_1 = s_0 + \gamma \varepsilon \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad s_2 = s_0 + \gamma \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Для функции $N_1(0)$ согласно лемме 4 справедлива оценка

$$N_1(0) = O\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.4)$$

Для $N_2(0)$ согласно лемме 3 имеем

$$N_2(0) = O\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.5)$$

Для оценки $N_2(0)$ обратимся к системам $l^+ z = 0$ и $l^- z = 0$. Последние при $p=2$ имеют вид (ср. (2.7))

$$\begin{aligned} -((a_{2,0} t^2 + q_0 \varepsilon^2) (1 \pm C_{p_0}) u_t')_t - b_{1,0} v_t' + (a_{11,0} \pm C_{p_0}) u &= 0, \\ -d_{1,0} (1 \pm C_{p_0}) v_{tt}' + b_{1,0} u_t' &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$t_1 \leq t \leq t_2,$$

где

$$t_1 = \gamma \varepsilon \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad t_2 = \gamma \left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Асимптотика решений системы (3.6) при $t \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ отличается от асимптотики, приведенной нами в § 2 при $p > 2$. Мы упростим исследование, введя в рассмотрение на отрезке $[t_1, t_2]$ две вспомогательные задачи:

$$\begin{aligned} -\left(\left(a_{2,0} + \frac{q_0}{C_1(\varepsilon)}\right) t^2 (1 + C_{p_0}) u_t'\right)_t - b_{1,0} v_t' + (a_{11,0} + C_{p_0}) u &= \mu u, \\ -d_{1,0} (1 + C_{p_0}) v_{tt}' + b_{1,0} u_t' &= \mu v \end{aligned} \quad (3.8)$$

и

$$-(a_{2,0} (1 - C_{p_0}) t^2 u_t')_t - b_{1,0} v_t' + (a_{11,0} - C_{p_0}) u = \mu u,$$

$$-d_{1,0}(1-C_{p_0})v''_t + b_{1,0}u'_t = \mu v \quad (3.9)$$

при нулевых граничных условиях на концах отрезка $[t_1, t_2]$. Систему (3.8) условимся сокращенно записывать в виде $l^+ z = \mu z$, а систему (3.9) — в виде $l^- z = \mu z$. В первом уравнении системы (3.8) мы через $C_1(z)$ обозначили $\gamma \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}$; учитывая неравенство $\frac{t}{C_1(\varepsilon)} \geq \varepsilon$ при условии $t > t_1$, легко придти к заключению, что $l^+ \geq l \geq l^-$, и следовательно, $N_2^{--}(0) > N_2(0) > N_2^{++}(0)$. Системы (3.8) и (3.9) интегрируются в элементарных функциях. Для элементов $c_{ij}(t, \varepsilon)$ характеристического определителя $\Delta(t, \varepsilon)$ получаем*

$$c_{11} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\sigma_1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\sigma_2}; \quad c_{21} = \frac{b_{1,0}}{d_{1,0}^*} \int_{t_1}^t c_{11}(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

$$c_{12} = \frac{b_{1,0}}{\delta^*} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\sigma_1} - \frac{b_{1,0}}{\delta^*}; \quad c_{22} = \frac{b_{1,0}}{d_{1,0}^*} \int_{t_1}^t c_{12}(\tau, \varepsilon) d\tau + (t - t_1). \quad (3.10)$$

Здесь через σ_1 и σ_2 обозначены корни квадратного уравнения $\sigma^2 + \sigma + \frac{\delta^*}{a_{2,0}} = 0$, возникающего при решении уравнения Эйлера, к которому сводится интегрирование системы (3.9):

$$\sigma_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{\delta^* - \frac{1}{4} a_{2,0}^*}}{\sqrt{a_{2,0}^*}}.$$

Через $a_{2,0}^*$, $d_{1,0}^*$, δ^* обозначены функции ε , которые стремятся соответственно к $a_{2,0}$, $d_{1,0}$, δ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для облегчения оценки нулей $\Delta(t, \varepsilon)$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ удобно сделать подстановку $t = \varepsilon \tau$. В результате мы сведем вопрос к оценке числа нулей функции $\Delta_1(\tau) \equiv \Delta(\varepsilon \tau, \varepsilon)$ на отрезке

$$\gamma \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq \tau \leq \gamma \frac{1}{\varepsilon \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (3.11)$$

Легко проверить, что при условии

$$\delta - \frac{1}{4} a_{2,0} > 0$$

для $\Delta_1(\tau)$ справедлива формула

$$\Delta_1(\tau) = 2i\varepsilon\tau^{\frac{1}{2}} C_2 C_1^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) \left\{ \sin \left[\frac{\sqrt{\delta^* - \frac{1}{4} a_{2,0}^*}}{\sqrt{a_{2,0}^*}} \ln \frac{\tau}{C_1} + \varphi_0 \right] + O(\tau^{-1/2}) \right\}. \quad (3.12)$$

* Мы ограничиваемся рассмотрением системы (3.8). Условия Коши (ср. (1.10) и (1.11)) ставятся при $t = t_1$.

Здесь φ_0 и $C_0 > 0$ — постоянные. Следовательно, для числа нулей $\nu(t_1, t_2)$ детерминанта $\Delta(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ справедлива оценка

$$\nu(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\varphi^* - \frac{1}{4} a_{2,0}^*}}{\sqrt{a_{2,0}^*}} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\ln \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.13)$$

Такая же оценка справедлива, очевидно, и в случае системы $l = z = 0$. Учитывая (3.4), (3.5) и формулу $\varepsilon = |\gamma^2(z - \lambda)|^{1/2}$, мы для случая внутренней точки s_0 получаем соотношение (3.2).

Если $\varphi - \frac{1}{4} a_{2,0} \leq 0$, то определитель $\Delta(t, \varepsilon)$ имеет лишь конечное число нулей на отрезке $[t_1, t_2]$ и формула (3.2) справедлива всегда.

§ 4. Некоторые замечания

1°. В случае, если функция $\varphi_1(s)$ достигает своего инфимума α в нескольких точках с одним и тем же p , то главный член асимптотической формулы для $n(\lambda)$ представляет собой при $p > 2$ сумму правых частей (2.2), а при $p = 2$ сумму правых частей (3.2).

В связи с формулой (2.2) отметим, что если $\varphi_1(s)$ принимает свое наименьшее значение α на некотором отрезке $[s_0 - d, s_0 + d]$ (это соответствует $p = +\infty$), то для функции распределения справедлива формула

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{n(\lambda)}{(\alpha - \lambda)^{-1/2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-d}^d \frac{\sqrt{\tilde{\varphi}(s)}}{\sqrt{q(s)}} ds, \quad (4.1)$$

где $\tilde{\varphi}(s) = \frac{b_1^2(s)}{a_1^2(s)} - a_{11}(s)$ (ср. (2.3)), а $q(s) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} a_1(s, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ (ср. (1.19)).

Нетрудно показать, что в этом случае участок меридиана оболочки, соответствующий $s \in [s_0 - d, s_0 + d]$, представляет собой либо вертикальный отрезок (случай цилиндра), либо дугу окружности с центром на оси вращения (случай сферического пояса).

Интеграл в правой части (4.1) берется явно и в случае цилиндра равен

$$\frac{2d}{\pi R_2^2} \sqrt{(1 - \tau^2)(\tau^2 + 2m^2)}, \quad (4.2)$$

а в случае сферы равен

$$\frac{2d}{\pi R^2} \sqrt{(1 - \tau^2)(1 + \tau)(2 + \tau)}. \quad (4.3)$$

Обратив формулу (4.1), найдем при $k \rightarrow +\infty$

$$\lambda_k = \alpha - \frac{C_0^2}{k^2} (1 + o(1)), \quad (4.4)$$

где через C_0 обозначена правая часть (4.1).

2°. Приведем выражения для констант, входящих в формулы предыдущих параграфов.

Пусть в окрестности точки $s = s_0$, где $\varphi_1(s)$ достигает минимума

$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 t + \frac{1}{2!} \beta_2 t^2 + \dots, \quad t = s - s_0, \quad (4.5)$$

и

$$\varphi_1(s) = \frac{1-\sigma^2}{\beta_0^2} \left\{ \omega_0 + \omega_1 t + \frac{1}{2!} \omega_2 t^2 + \dots \right\}, \quad (4.6)$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1 - \beta_1^2, \quad \omega_1 = -\frac{2\beta_1}{\beta_0} (1 - \beta_1^2 + \beta_0 \beta_2), \\ \omega_2 &= 2 \left[-\beta_2 - \frac{\beta_2}{\beta_0} (1 - 5\beta_1^2) + \frac{3(1 - \beta_1^2)\beta_1^2}{\beta_0^2} - \beta_1 \beta_3 \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условие $\varphi_1'(s_0) = 0$ (см. (1.13)) выполняется согласно (4.7) в двух случаях:

$$A. \quad \beta_1 = B'_s(s_0) = 0,$$

$$B. \quad 1 - \beta_1^2 + \beta_0 \beta_2 = 0.$$

В случае А. меридиан имеет в точке $s = s_0$ вертикальную касательную, и мы назовем этот случай цилиндрическим. В случае Б точка $s = s_0$ является омбилической: $R_1(s_0) = R_2(s_0)$, и мы назовем этот случай сферическим. Выражения для констант через функцию $B(s)$ и ее производные в случаях А и Б оказываются различными.

Случай А. $p=2$.

Имеем: $\omega_2 > 0$. Отсюда, в силу (4.7), $-\frac{1}{\beta_0} < \beta_2 < 0$. Далее,

$$a_{2,0} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial s^2} a_1(s, \varepsilon) \Big|_0 = -\frac{(1-\sigma^2) \beta_2 (1 + \beta_0 \beta_2)}{(\sigma - \beta_0 \beta_2)^2} > 0, \quad (4.8)$$

$$q_0 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} a_1(s, \varepsilon) \Big|_0 = \frac{\beta_0^3}{(\sigma - \beta_0 \beta_2)^2} > 0, \quad (4.9)$$

$$d_{1,0} = \frac{1-\sigma}{2} \beta_0 > 0, \quad (4.10)$$

$$b_{1,0} = \frac{m(1-\sigma)}{2(\sigma - \beta_0 \beta_2)} (2 + \sigma + \beta_0 \beta_2), \quad (4.11)$$

$$a_{11,0} = \frac{(1-\sigma) m^2}{2\beta_0} - (1-\sigma^2) \frac{\sigma - 2\beta_0 \beta_2}{\beta_0 (\sigma - \beta_0 \beta_2)}. \quad (4.12)$$

Для δ (см. (2.3)) получаем формулу

$$\delta = \frac{2m^2(1-\sigma^2)(1+\beta_0 \beta_2)}{\beta_0 (\sigma - \beta_0 \beta_2)^2} + (1-\sigma^2) \frac{\sigma - 2\beta_0 \beta_2}{\beta_0 (\sigma - \beta_0 \beta_2)} > 0, \quad (4.13)$$

$$\delta - \frac{1}{4} a_{2,0} = \frac{1-\sigma^2}{4\beta_0(\sigma-\beta_0\beta_2)^2} [8m^2(1+\beta_0\beta_2) + 9(\beta_0\beta_2)^2 - (12\sigma-1)\beta_0\beta_2 + 4\sigma^2]. \quad (4.14)$$

Случай А. $p > 2$.

Имеем:

$$\omega_2 = -2\beta_2 \left(\beta_2 + \frac{1}{\beta_0} \right) = 0 \quad (4.15)$$

и $\omega_p > 0$. Далее

$$a_{p,0} = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial s^p} a_1(s, \varepsilon) \Big|_0 = \frac{\beta_0(1-\sigma^2)}{(\sigma-\beta_0\beta_2)^2} \cdot \frac{\omega_p}{p!} > 0. \quad (4.16)$$

Остальные константы те же, что и в случае $p=2$. Следует лишь учесть условие (4.15).

Случай Б. $p=2$.

Поскольку $\omega_2 > 0$, то $\beta_1 \neq 0$, иначе последняя формула (4.7) приведет к противоречию. Имеем

$$a_{2,0} = \frac{(1-\sigma)\beta_0\omega_2}{2(1+\sigma)\omega_0} > 0, \quad (4.17)$$

$$q_0 = \frac{\beta_0^3}{(1+\sigma)^2\omega_0} > 0, \quad (4.18)$$

$$d_{1,0} = \frac{1-\sigma}{2} \beta_0 > 0, \quad (4.19)$$

$$b_{1,0} = \frac{1-\sigma}{2} m, \quad (4.20)$$

$$a_{11,0} = \frac{(1-\sigma)m^2}{2\beta_0} - (1-\sigma)\beta_0 \left[\frac{(2+\sigma)\omega_0}{\beta_0^2} + \frac{\omega_2}{2(1+\sigma)\omega_0} \right], \quad (4.21)$$

$$\delta = (1-\sigma) \left[\frac{(2+\sigma)\omega_0}{\beta_0} + \frac{\beta_0\omega_2}{2(1+\sigma)\omega_0} \right] > 0. \quad (4.22)$$

И, наконец

$$\delta - \frac{1}{4} a_{2,0} = (1-\sigma) \left\{ \frac{(2+\sigma)\omega_0}{\beta_0} + \frac{3\beta_0\omega_2}{8(1+\sigma)\omega_0} \right\} > 0. \quad (4.23)$$

Подчеркнем, что в этом случае правая часть (3.2) всегда положительна и не зависит от m .

Случай Б. $p > 2$.

Имеем

$$a_{p,0} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{\beta_0\omega_p}{p!\omega_0} > 0 \quad (4.24)$$

и

$$q_0 = \frac{\beta_0^3}{(1+\sigma)^2\omega_0} > 0. \quad (4.25)$$

Остальные константы те же, что и в случае Б, $p=2$, следует лишь учесть, что $\omega_2=0$.

Ա. Գ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Բ. ԼԻԴՍԿԻԻ. Պտտման թաղանթների տեսության ստորին խմբի հաճախականությունների համար ասիմպտոտական բանաձևեր (ամփոփում)

Դիտարկվում է բարակ, ճկուն պտտման թաղանթների սեփական տատանումները նկարագրող «վերածված» դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմա: Գտնված են պայմաններ, որոնց դեպքում սեփական թվերի ցածրագույն խումբը անվերջ է: Գտնված է սեփական թվերի ասիմպտոտիկան:

A. G. ASLANIAN, V. B. LIDSKII. *Asymptotic formula for frequencies of lower serie in theory of shells (summary)*

The paper concerns a "degenerate" system of differential equations describing the natural oscillations of a thin elastic shell of revolution. The conditions are found under which the lower serie of eigenvalues is infinite. The asymptotics of the eigenvalues is obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Л. Гольденвейзер. Некоторые математические проблемы теории упругих тонких оболочек, УМН, XV, вып. V, 1960, 3—75.
2. П. Е. Товстик. Исследования по упругости и пластичности, Изд. АГУ, № 5, 1966, 45—55.
3. А. Г. Асламян, В. Б. Лидский. Осцилляционная теорема в теории колебаний тонких оболочек вращения, ДАН СССР, 196, № 5, 1971, 1040—1042.
4. А. Г. Асламян, В. Б. Лидский. Спектр системы, описывающей колебания оболочки вращения, ПММ; 35, № 4, 1971.
5. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, XII, вып. 5 (77), 1957, 3—122.
6. В. Б. Лидский. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 102, 1955, 877—880.
7. Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные задачи, М., 1968, гл. 10.
8. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
9. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., Физматгиз, 1963.
10. И. М. Рапопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, Киев, 1954.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

М. Г. ГАСЫМОВ

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Известная работа М. В. Келдыша [1] об n -кратной полноте системы $K(\Pi)$ собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка вида

$$L(\lambda) = I + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T_j H^j + \lambda^n H^n,$$

где $H \in \sigma_p$, $H = H^*$, $T_j \in \sigma_n$, $j = \overline{0, n-1}$, и H — полный оператор в гильбертовом пространстве L , повлекла за собой большой цикл работ по теории несамосопряженных операторов с дискретным спектром в гильбертовых и банаховых пространствах. Обзоры этих работ имеются [2].

В данной работе устанавливается связь между кратной полнотой системы $K(\Pi_-)$ собственных и присоединенных векторов, отвечающей собственным числам из левой полуплоскости полиномиального пучка, и существованием регулярного решения задачи (2) — (3) в гильбертовом пространстве. Далее, указываются различные достаточные условия, при которых система $K(\Pi_-)$ является k -кратно полной в L . Попутно мы получаем (см. п. 4 § 3) доказательство теоремы М. В. Келдыша о кратной полноте, не сводя полиномиальный пучок к линейному пучку.

Заметим, что приведенная в тексте формулировка теоремы М. В. Келдыша отличается от различных ее обобщений (см., напр., [3], [4]) тем, что здесь в некотором смысле промежуточные члены не подчинены главной части пучка.

§ 1. Основные определения и результаты

Определение 1. Пусть $A_0 = I$, A_j , $j = \overline{1, n}$, и A являются линейными операторами в гильбертовом пространстве L . Пусть выполняются следующие условия:

а) A является замкнутым оператором в L со всюду плотной областью определения $D(A) \subset L$;

в) $A_j A^{-n} \in \mathfrak{L}_\infty$, $j = \overline{0, n}$;

с) $I + A_n A^{-n}$ имеет ограниченный обратный.

Тогда скажем, что операторный пучок

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^n (i\lambda)^j A_j + A^n \quad (1)$$

порядка n принадлежит классу K .

Замечание 1. Если оператор A самосопряженный, $A^{-1} \in \mathcal{D}$ и операторы $T_j = A_j A^{-j} \in \mathcal{D}$, $j = \overline{1, n}$, то полагая $A^{-1} = H$ и $L(\lambda) = P(\lambda)H^n$, мы получаем операторный пучок, который изучался М. В. Келдышем [1].

Очевидно, что спектр пучка из класса K дискретный и имеет единственную предельную точку в бесконечности. Действительно, полагая

$$L(\lambda) = (I + A_n A^{-n})^{-1} P(\lambda) A^{-n},$$

получаем, что $I - L(\lambda)$ является вполне непрерывным, а при $\lambda=0$ оператор $L(0)=I$ имеет ограниченный обратный. Теперь остается применить теорему 5.1 из [2].

Систему собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$, которые отвечают точкам спектра из левой полуплоскости $\Pi_- = \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ обозначим через $K(\Pi_-)$.

Определение 2. Система $K(\Pi_-)$ называется k -кратно полной в L , если для любого набора k векторов $f_j \in L$, $j = \overline{0, k-1}$, из гомоморфности вектор-функции

$$(P^{-1}(\bar{\lambda}))^* \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j f_j$$

в полуплоскости Π_- вытекает, что $f_j=0$, $j = \overline{0, k-1}$.

Определение 2-кратной полноты внешне отличается от определения кратной полноты М. В. Келдыша.

Можно показать, что определение М. В. Келдыша и определение 2-кратной полноты эквивалентны, если $k=n$, а вместо Π_- берется вся комплексная плоскость. Однако, определение 2 допускает более простое обобщение на пучки с более сложной природой спектра в гильбертовом и в банаховом пространствах.

В данной статье исследуется следующая *основная задача*: когда система $K(\Pi_-)$ будет k -кратно полной в L ? Оказывается, что решение этой задачи тесно связано с существованием решения дифференциального уравнения

$$P(d/dt) u(t) = f(t), \quad 0 \leq t < \infty \quad (2)$$

с начальными условиями

$$u_t^{(j)}(0) = \varphi_j, \quad j = \overline{0, k-1} \quad (3)$$

и некоторыми аналитическими свойствами резольвенты $P^{-1}(\lambda)$. Предварительно приведем еще два определения.

Определение 3. Пусть $f(t) \in L_2(0, \infty; L)^*$. Задача (2)–(3)

* Определение пространства $L_2(0, \infty; L)$ имеется, например, в [5].

называется k -регулярной задачей, если для любого набора k векторов $\varphi_j \in D(A^{n-1-1})$, $j=\overline{0, k-1}$, существует (вообще говоря, не единственная) вектор-функция $u(t)$ такая, что

- а) $u(t) \in L_2(0, \infty; L)$;
- б) $u(t)$ имеет $(n-1)$ сильно непрерывную производную на $(0, \infty)$;
- с) $A^{n-1} u_t^{(j)}(t) \in L_2(0, \infty, L)$, $j=\overline{0, n}$;
- д) $u_t^{(j)}(0) = \varphi_j \in D(A^{n-1-1})$, $j=\overline{0, n-1}$;
- е) $P(d/dt) u(t) \equiv f(t)$.

Вектор-функция $u(t)$ называется регулярным решением задачи (2)–(3). В условиях (3) заданы только векторы φ_j , $j=\overline{0, k-1}$, а векторы φ_j , $j=\overline{k, n-1}$, заранее нам не известны. Они каким-то образом выражаются через φ_j , $j=\overline{0, k-1}$.

Определение 4. Пусть операторный пучок $P(\lambda)$ из класса K удовлетворяет следующим условиям*:

- а) Резольвента $P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше ρ и конечного типа σ при порядке ρ ;
- б) При некотором $\theta \in (0, \frac{\pi}{r})$ и для больших λ из секторов

$$S_{\pm\theta} = \left\{ \lambda \mid \lambda = r \exp(\pm i\varphi), \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \theta, 0 < r < \infty \right\}$$

имеет место оценка

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leq C |\lambda|^{-\alpha}, \quad n-1 < \alpha \leq n; \quad (4)$$

с) Существует множество $\{\Omega\}$ лучей в левой полуплоскости, куда входят также лучи $\Gamma_{\pm\theta} = \left\{ \lambda \mid \lambda = r \exp\left(\pm i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right), r > 0 \right\}$, такое, что угол между соседними лучами из этого множества меньше, чем $\frac{\pi}{\rho}$ (если $\sigma = 0$, то угол между соседними лучами может равняться $\frac{\pi}{\rho}$) и на этих лучах $\|P^{-1}(\lambda)\|$ растет не быстрее, чем $|\lambda|^\beta$, где β — фиксированное число.

Тогда будем говорить, что пучок $P(\lambda)$ принадлежит классу $K_{\rho, \sigma}$.

Теорема 1. Пусть при $f(t) \equiv 0$ задача (2)–(3) является k -регулярной, и пучок $P(\lambda) \in K_{\rho, \sigma}$. Тогда $K(\Pi_-)$ образует k -кратно полную систему в L .

Эта теорема показывает, что для решения основной задачи надо найти различные условия на пучок $P(\lambda)$ из класса K , при которых задача (2)–(3) является k -регулярной и $P(\lambda) \in K_{\rho, \sigma}$. Некоторые такие условия даются в §§ 3, 4, 5.

* Факты из теории целых функций, которые цитируются в этой статье, можно найти в книге [6].

§ 2. Доказательство теоремы 1

Теорему докажем от противного. Пусть существует ненулевая система векторов $f_j \in L$, $j = \overline{0, k-1}$, для которой вектор-функция

$$R(\lambda) = (P^{-1}(\bar{\lambda}))^* \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j f_j$$

является голоморфной в левой полуплоскости Π_- .

Обозначим через $u(t)$ одно из решений k -регулярной задачи (2)–(3) с правой частью $f(t) \equiv 0$ для любого набора $\varphi_j \in D(A^{n-j-1})$, $j = \overline{0, k-1}$. (В определении 3 не предполагается существование единственного решения). Тогда, если полагать, что

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{u}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda,$$

то

$$\hat{u}(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(\lambda) \varphi_j,$$

где $\varphi_j = u^{(j)}(0)$,

$$Q_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{j+1}} \left(P(\lambda) - \sum_{s=0}^j (\hat{A})^s A_{n-s} - A^n \right)$$

и, следовательно

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} P^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(\lambda) \varphi_j e^{\lambda t} d\lambda.$$

Из условия в) определения 4 вытекает, что в последней формуле контур $(-i\infty, i\infty)$ можно заменить другим контуром Γ , который для больших λ совпадает с лучами $\Gamma_{+\theta}$ и $\Gamma_{-\theta}$ (см. [7]). В результате получаем, что при $t > 0$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \hat{u}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda.$$

При $t > 0$ этот интеграл можно дифференцировать сколько угодно раз. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{k-1} (u^{(j)}(t), f_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda^j \hat{u}(\lambda), f_j) e^{\lambda t} d\lambda.$$

Положим

$$v(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda^j \hat{u}(\lambda), f_j) = (q(\lambda), R(\bar{\lambda})),$$

где $q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(\lambda) \varphi_j$. Тогда $v(\lambda)$ является целой функцией порядка ρ и типа σ ; при этом в правой полуплоскости $v(\lambda)$ растет не быстрее, чем $|\lambda|^{n-1}$, а на лучах из системы $\{\varphi_j\}$ в левой полуплоскости — не быстрее, чем $|\lambda|^{n-1}$. Следовательно, $v(\lambda)$ является многочленом:

$$v(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j v_j.$$

При $t > 0$

$$\int_{\Gamma} \lambda^j e^{\lambda t} d\lambda = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

Следовательно, при $t > 0$

$$\sum_{j=0}^{k-1} (u_j^{(n)}(t), f_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = 0.$$

Отсюда, учитывая начальные условия (3), получим, что для любого $\varphi_j \in D(A^{n-j-1})$

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\varphi_j, f_j) = 0.$$

Поскольку $D(A^{n-j-1})$ плотно в L , то из последнего тождества следует, что $f_j = 0$, $j = 0, k-1$. Получили противоречие. Теорема 1 доказана.

§ 3. Аналитические свойства резольвенты

Теорема 2*. Пусть

$$L(\lambda) = I + \sum_{j=0}^n \lambda^j B_j \equiv I + M(\lambda), \quad (5)$$

где $B_j \in \mathfrak{B}_H$, $j = 1, n$ и оператор $I + B_0$ имеет ограниченный обратный.

Тогда резольвента $L^{-1}(\lambda)$ является операторнозначной мероморфной функцией и представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq n} (j\rho_j) \quad (6)$$

и минимального типа при порядке ρ .

Доказательство. Не уменьшая общности, можно предполагать, что $B_0 = 0$. Рассмотрим случай, когда $\rho_j \leq 1$. В этом случае

* Эта теорема принадлежит М. В. Келдышу [1] (см. также [2]). Однако, данная формулировка теоремы является более общей, чем в [1], [2].

$$|\det L(\lambda)| \leq \prod_{\alpha=1}^{\infty} (1 + S_{\alpha}(M(\lambda))), \quad (7)$$

где через $S_{\alpha}(\cdot)$ обозначено s -число оператора $(\cdot)$ с номером α . Здесь используются некоторые свойства s -чисел, которые приведены, например, в [2].

Из хорошо известных свойств s -чисел вытекает, что если $\alpha = nm + \beta$ и $m = 0, 1, \dots, \beta = \overline{1, n}$, то

$$\begin{aligned} 1 + S_{\alpha}(M(\lambda)) &\leq 1 + S_{mn}(M(\lambda)) \leq \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^n |\lambda|^j S_{m-1}(B_j^1) \leq \prod_{j=1}^n (1 + |\lambda|^j S_{m-1}(B_j)). \end{aligned}$$

Пусть

$$q_l(\lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + |\lambda|^l S_m(B_l)).$$

Тогда, поскольку ряд $\sum_{m=1}^{\infty} S_m^{p,l}(B_l)$ сходится, имеем

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln q_l(\lambda)}{\ln |\lambda|} < j_{p,l},$$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\ln q_l(\lambda)}{|\lambda|^{j_{p,l}}} = 0.$$

Поэтому из неравенства (7) вытекает, что $\det L(\lambda)$ есть целая функция порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ . В этом случае утверждение теоремы следует из неравенства В. Б. Лидского

$$\|L^{-1}(\lambda) \det L(\lambda)\| \leq \prod_{\alpha=1}^{\infty} (1 + S_{\alpha}(M(\lambda))).$$

Пусть число p такое, что $p_j p^{-1} \leq 1, j = \overline{1, n}$. Тогда

$$(I + M(\lambda))^{-1} = (I + M^p(\lambda))^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j M^j(\lambda),$$

причем коэффициенты пучка $M^p(\lambda)$ являются ядерными операторами, так как, если

$$A \in \sigma_{q_1}, B \in \sigma_{q_2}, \text{ то } AB \in \sigma_{q_3}, \text{ где } q_3^{-1} = q_1^{-1} + q_2^{-1}.$$

Теперь, снова используя свойства определителей и s -чисел ядерных операторов, нетрудно завершить доказательство теоремы.

Замечание 1. В этой теореме при определении числа ρ решающим может оказаться промежуточный член пучка $L(\lambda)$. В этом случае член $\lambda^n B_n$ носит „подчиненный характер“. Это отличает пучок (5) от пучков, изученных в [1], [2], [3], [4] и т. д.

2. Главная часть резольвенты в окрестности полюса. Пусть операторы $B_j \in \mathfrak{S}_\infty$, и при некотором фиксированном λ_0 оператор $L(\lambda_0)$ не имеет обратного. Тогда число λ_0 является полюсом резольвенты $L^{-1}(\lambda)$ конечного порядка m . Определим формулу для главной части резольвенты в окрестности λ_0 и попутно дадим краткое ее доказательство. Пусть

$$L^{-1}(\lambda) f = \sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{-j} A_{-j} f + A_0(\lambda), \quad (8)$$

где A_{-j} , $j = \overline{1, m}$, — неизвестные нам операторы, а $A_0(\lambda)$ — регулярная в точке λ_0 операторная функция. Из последней формулы мы имеем следующее тождество:

$$f = \sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{-j} L(\lambda) A_{-j} f + L(\lambda) A_0(\lambda) f.$$

Повтому

$$\sum_{s=0}^j \frac{1}{s!} \left(\frac{d^s}{d\lambda^s} L(\lambda) \right)_{\lambda=\lambda_0} A_{-m+s} f = 0, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Предположим, что существует единственный элемент φ_0 из L (конечно, с точностью до постоянного множителя) такой, что $L(\lambda_0) \varphi_0 = 0$. Пусть φ_j , $j = \overline{1, m-1}$ есть присоединенные к φ_0 векторы пучка $L(\lambda)$, отвечающие характеристическому числу λ_0 (см. [1]). Тогда

$$A_{-m+j} f = \sum_{s=0}^j C_s(t) \varphi_s, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Легко видеть, что $C_s(f)$, $s = \overline{0, m-1}$ являются линейными функционалами в L . Повтому существуют векторы ψ_s , $s = \overline{0, m-1}$ из L такие, что $C_s(f) = (f, \psi_s)$, $s = \overline{0, m-1}$.

Подставляя в (8) вместо f выражение $L(\lambda) f$, можно доказать, что векторы ψ_s , $s = \overline{0, m-1}$ образуют систему собственных и присоединенных векторов сопряженного пучка.

Используя разложения (8) резольвенты в окрестности характеристического числа, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Кратная полнота в смысле определения Келдыша и кратная полнота в смысле определения 2 эквивалентны.*

3. Достаточные условия для того, чтобы пучок $P(\lambda) \in K_{p, \pi}$.

Теорема 4. *Пусть A — нормальный оператор, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ и $0 \leq \arg \lambda^2 j < 2\pi \alpha_j$, а числа $\alpha_j < \pi$. Определим оператор A^{2j} и рассмотрим пучок*

$$P_0(\lambda) = \sum_{j=1}^{n-1} (i\lambda)^j a_{n-j} A^{2n-j} + (i\lambda)^n I + a_n A^n. \quad (9)$$

Предположим, что если μ_k принадлежит спектру оператора A , то корни уравнения

$$P_0(s, \mu_k) \equiv s^n + a_1 s^{n-1} \mu_k^2 + \dots + a_{n-1} s \mu_k^{n-1} + a_n \mu_k^n = 0 \quad (10)$$

не вещественные и при $k \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к конечному числу лучей l_j , $j = \overline{1, \alpha}$, отличных от лучей вещественной оси. Пусть $B_j A^{-j} \in \sigma_-, j = \overline{1, n-1}$, $B_n A^{-n} \in \sigma_-$ и

$$P_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (i\lambda)^j B_{n-j}. \quad (11)$$

Тогда пучок

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) \quad (12)$$

принадлежит классу $K_{p, n}$. Здесь

$$p = \max \left(p, \frac{p(n-1)}{n-a_1}, \dots, \frac{p}{n-a_{n-1}} \right). \quad (13)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P(\lambda) = \{P_0(\lambda) A^{-n} + P_1(\lambda) A^{-n} \mid A^n$$

и, поскольку $A^{-1} \in \sigma_p$, то

$$A^{qj-n} \in \sigma_{\frac{p}{n-a_j}}, B_j A^{-n} \in \sigma_{\frac{p}{n-a_j}}.$$

Тогда из теоремы 2 вытекает, что $P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше p (число p определяется как в (13)) и минимального типа при порядке p .

Пусть $\{\varphi_k\}$ — система ортогональных собственных векторов оператора A и $A\varphi_k = \mu_k \varphi_k$, а числа $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1, n}$ — корни уравнения (10).

Положим

$$H_j = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_j(k) (\cdot, \varphi_k) \varphi_k.$$

Тогда

$$P_0(\lambda) = \prod_{j=1}^n (i\lambda I - H_j).$$

Очевидно, что

$$P(\lambda) = \{I + P_1(\lambda) P_0^{-1}(\lambda)\} P_0(\lambda). \quad (1.4)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда вне секторов с раствором ε , биссектрисами которых служат l_j , $j = \overline{1, \alpha}$, останется лишь конечное число характеристических чисел пучка $P_0(\lambda)$. Оценим норму оператора $P_1(\lambda) P_0^{-1}(\lambda)$ вне секторов $S_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1, \alpha}$, каждый с раствором 2ε и биссектрисами l_j , $j = \overline{1, \alpha}$. В этих областях при больших λ

$$\|(\lambda I - H_j)^{-1}\| \leq (\|\lambda\| \sin \varepsilon/2)^{-1}.$$

Оценим норму оператора $\lambda^q B_q P_0^{-1}(\lambda)$ при $i\lambda \in S$, $S = \bigcup_{j=1}^n S_j(\varepsilon)$. Очевидно, что

$$\lambda^q B_q P_0^{-1}(\lambda) f = \lambda^q (B_q A^{-2q}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{2q}(f, \varphi_k)}{\prod_{\beta=1}^n (i\lambda - \lambda_{\beta}(k))} \varphi_k. \quad (15)$$

Поскольку при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\lambda_j(k) \rightarrow \infty$ и

$$a_q \mu_k^{2q} = (-1)^q \sum_{n_1 \dots n_q} \lambda_{n_1}(k) \dots \lambda_{n_q}(k),$$

то существует некоторый набор индексов, например, $n_1=1, \dots, n_q=q$, такой, что

$$|\mu_k^{2q}| < C_0 \prod_{s=1}^q |\lambda_s(k)|, \quad (16)$$

где $0 < C_0 < \infty$. Зададим произвольное положительное число $\delta > 0$. Представим вполне непрерывный оператор $B_q A^{-2q}$ в виде $T_q + R_q$, где

$$T_q = \sum_{j=1}^m (\cdot, \psi_{j,q}) \varphi_{j,q} \quad (\|\varphi_{j,q}\|=1)$$

— конечномерный оператор и

$$\|R_q\| < \delta.$$

Тогда, учитывая (15) и (16), получим

$$\|R_q A^{2q} P_0^{-1}(\lambda)\| \leq |\lambda|^{q-n} \delta C_0 (\sin \varepsilon/2)^{-n}. \quad (17)$$

Теперь, рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} T_q A^{2q} P_0^{-1}(\lambda) f &= T_q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{2q}(f, \varphi_k)}{P_0(i\lambda, \mu_k)} \varphi_k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \frac{\mu_k^{2q}(f, \varphi_k) (\varphi_k, \psi_{j,q})}{P_0(i\lambda, \mu_k)} \varphi_{j,q}. \end{aligned} \quad (18)$$

По числу δ найдем такой номер N , чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |(\varphi_k, \psi_{j,q})|^2 < \delta, \quad j = \overline{1, m}, \quad q = \overline{1, n-1}. \quad (19)$$

Пусть теперь r_0 настолько большое число, что для всех $i\lambda \in S$ и $|\lambda| > r_0$ имеет место

$$\sum_{k=1}^N \left| \frac{\mu_k^{2q} \lambda^{n-q}}{P_0(i\lambda, \mu_k)} \right|^2 |(\varphi_k, \psi_{j,q})|^2 < \delta. \quad (20)$$

Тогда из формул (17), (18), (19), (20) очевидным образом вытекает, что

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ i\lambda \in S}} \|P_1(\lambda) P_0^{-1}(\lambda)\| = 0$$

равномерно вне секторов $S_j(z)$, $j = \overline{1, \alpha}$.

Поэтому при больших $i \in S$, оператор $I + P_1(i) P_0^{-1}(i)$ имеет ограниченный обратный. Тогда для всех λ из множества $\{|\lambda| i \in S, |i| > r_0\}$ имеет место

$$\|P^{-1}(i)\| \leq C_i |\lambda|^{-n}.$$

Теорема 5. Пусть $A > 0$, $A^{-1} \in \mathcal{A}_p$, $p \leq k$, $n = 2k$. Предположим, что $\|B_j A^{-j}\| \leq z_j$, $P_0(i) = (i\lambda)^{2k} + A^{2k}$ и число

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-j) z_j}{n} \left(\frac{j}{n-j} \right)^{j/n} + z_n < 1. \quad (21)$$

Тогда пучок $P(i)$, определенный формулой (12), принадлежит классу $K_{p,0}$.

Доказательство. Поскольку операторы $C_j = (B_j A^{-j}) A^{-n+j} \in \sigma_{\frac{p}{n-j}}$, то из формулы

$$P(i) = \left\{ I + (i\lambda)^n A^{-n} + \sum_{j=1}^{n-1} (i\lambda)^{n-j} C_j \right\} A^n$$

вытекает, что $P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка p и минимального типа. С другой стороны, если полагать

$$C_j(\lambda) = (B_j A^{-j}) A^j [(i\lambda)^n I + A^n]^{-1},$$

то $P(\lambda) = Q(\lambda) P_0(i)$,

$$Q(i) = I + \sum_{j=1}^n (i\lambda)^{n-j} C_j(i).$$

Найдем оценку для нормы оператора $C_j(\lambda)$. Очевидно, что

$$\|C_j(\lambda)\| \leq z_j \sup_{\mu \in \sigma(A)} \mu^j |(i\lambda)^n + \mu^n|^{-1}.$$

Пусть $i\lambda = s = \operatorname{rexp}(i\varphi)$. Тогда

$$\|C_j(i)\| \leq z_j \sup_{\mu \in \sigma(A)} \mu^j (r^{2n} + 2r^n \mu^n \cos n\varphi + \mu^{2n})^{-1/2}.$$

Пусть $\delta > 0$ и $1 - \delta \leq \cos n\varphi \leq 1$. Тогда

$$\|C_j(i)\| \leq \frac{z_j}{1 - \delta} \left(\frac{j}{n-j} \right)^{j/n} \frac{n-j}{n}.$$

Подберем число δ настолько малым, чтобы $\alpha(1 - \delta)^{-1} < 1$. Имеем

$$\|I - Q(i)\| \leq \frac{\alpha}{1 - \delta} < 1$$

при больших λ вне секторов (их количество равно $2k$):

$$\{|\lambda| i\lambda = \operatorname{rexp}(i\varphi), 1 - \delta \leq \cos 2k\varphi \leq 1, r > 0\}.$$

Тогда из того факта, что $P^{-1}(\lambda) = P_0^{-1}(\lambda) Q^{-1}(i)$ очевидным образом вытекает утверждение теоремы.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 6. Пусть $A > 0$, $A^{-1} \in \mathcal{K}_{k+1}$ при любом $\varepsilon > 0$, $n = 2k$. Предположим, что $\|B_j A^{-j}\| \leq \varepsilon_j$, $P_0(\lambda) = (i\lambda)^n I + A^n$ и число α из теоремы 5 меньше единицы. Тогда для достаточно малых значений ε пучок $P(\lambda)$, определенный формулой (12), принадлежит классу $\mathcal{K}_{k+1, 0}$.

4. Доказательство теоремы М. В. Келдыша о кратной полноте. Приведенная ниже теорема содержит в себе теорему М. В. Келдыша о кратной полноте, поскольку пучок, рассмотренный М. В. Келдышем принадлежит классу $\mathcal{K}_{p, \sigma}$. Однако, эта теорема, если принять во внимание приведенные выше достаточные условия принадлежности пучка $P(\lambda)$ к классу $\mathcal{K}_{p, \sigma}$, дает также новые достаточные условия кратной полноты, отличные от различных обобщений теоремы М. В. Келдыша (см. [2]).

Теорема 7. Если пучок $P(\lambda)$ удовлетворяет условиям одной из теорем 4, 5, или 6, то система $K(\Pi)$ всех его собственных и присоединенных векторов будет n -кратно полной в L .

Доказательство. Пусть $K(\Pi)$ не является n -кратно полной системой в L . Тогда существует ненулевая система векторов $f_j \in L$, $j = \overline{0, n-1}$, для которой

$$R(\lambda) = (P^{-1}(\bar{\lambda}))^* \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j f_j \quad (22)$$

является целой функцией порядка ρ и конечного или минимального типа (в зависимости от условия теоремы). Поэтому для произвольного φ из $D(A^n)$ функция

$$(R(\lambda), P(\bar{\lambda})\varphi) = v(\lambda) \quad (23)$$

будет целой функцией порядка ρ и конечного или минимального типа, причем $|\lambda|^{-n-1}|v(\lambda)|$ стремится к нулю в направлении лучей мнимой оси и ограничена на таком количестве лучей, что к $v(\lambda)$ можно применять теорему Фрагмена-Линделёфа. В результате имеем

$$v(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-2} v_j \lambda^j,$$

а из (23) вытекает, что $v(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (f_j, \varphi) \lambda^j$. Следовательно,

$(f_{n-1}, \varphi) = 0$. Тогда $f_{n-1} = 0$. В этом случае в направлении мнимой оси функция $|\lambda|^{-n+2}|v(\lambda)|$ должна стремиться к нулю. Поэтому $v_{n-2} = 0$ и $(f_{n-2}, \varphi) = 0$. Следовательно, $f_{n-2} = 0$. Продолжая этот процесс, получаем, что $f_j = 0$, $j = \overline{0, n-1}$. Это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

§ 4. Условия k -регулярности задачи (2)–(3)

В этом параграфе предполагаем, что $n = 2k$, а оператор A поло

жительный. Здесь указываются различные условия, при которых задача (2)–(3) является k -регулярной.

Многие результаты допускают очевидные обобщения (некоторые из них приводятся в виде замечания к теоремам).

1. Случай пучка $P_0(\dot{u}, A)$. Предположим, что

$$P_0(\dot{u}, A) = (\dot{u})^n I + \sum_{j=1}^n (\dot{u})^{n-j} P_j(A) \quad (24)$$

и

а) $P_j(A) A^{-j}$ — ограниченные операторы в L ,

в) $P_n(A) = \sum_{j=0}^n a_j A^j$, $a_n \neq 0$.

Рассмотрим задачу

$$P_0(id/dt, A) u(t) = f(t), \quad u_i^{(j)}(0) = \varphi_j, \quad j = \overline{0, k-1}. \quad (25)$$

Теорема 8. Пусть A — положительный самосопряженный оператор с дискретным спектром $\sigma(A)$, $\inf \sigma(A) = s_0 > 0$, и корни $\lambda_j(s)$ уравнения $P_0(\dot{u}, s) = 0$ разбиваются на две группы так, что при $s \in \sigma(A)$

а) $|\arg \lambda_j(s) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \delta_1$, $\delta_1 > 0$, $j = \overline{1, k}$;

в) $\operatorname{Re} \lambda_j(s) \geq \delta_2 > 0$, $j = \overline{k+1, n}$.

Тогда для любой вектор-функции $f(t) \in L_2(0, \infty; L)$ задача (25) имеет единственное k -регулярное решение $u(t)$, которое представляется в виде

$$u(t) = \int_0^t R_0(t, \xi) f(\xi) d\xi \equiv R_0 f, \quad (26)$$

где ядро $R_0(t, \xi)$ явным образом вычисляется с помощью оператора и корней $\lambda_j(s)$, $j = \overline{1, n}$, $s \in \sigma(A)$.

Доказательство. Предположим, что задача (25) имеет регулярное решение $u(t)$. Обозначим через $\hat{u}(\lambda)$ его преобразование Лапласа. Тогда, если ввести обозначения (заметим, что $u_i^{(j)}(0)$, $j = \overline{k, n-1}$, нам заранее не известны),

$$\psi_j = \sum_{\alpha=0}^{n-k-j-1} i^{n-\alpha} P_\alpha(A) u_j^{(\alpha-k-j-1)}(0), \quad P_0(A) \equiv I,$$

то очевидные вычисления показывают, что вектор-функция

$$\hat{u}(\lambda) = (P_0(\dot{u}, A))^{-1} \left\{ \hat{f}(\lambda) + \sum_{j=0}^{n-k-1} \lambda^j \psi_j \right\} \quad (27)$$

не должна иметь особенностей в правой полуплоскости.

Это замечание позволяет определить векторы $\psi_j, j=0, \overline{n-k-1}$, единственным образом. При этом можно показать, что $\psi_j \in D(A^{n-j-1})$. Следовательно, $u^{(n-j)}(0) \in D(A^{n-j-1})$. Пусть, теперь

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma}^{\gamma} (P_0(i\lambda, A))^{-1} \hat{f}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda + \sum_{j=0}^{n-k-1} u_j(t) \psi_j, \quad (28)$$

где

$$u_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (P_0(i\lambda, A))^{-1} \psi_j e^{\lambda t} d\lambda,$$

причем при больших λ контур Γ совпадает с лучами

$$|\lambda| \lambda = r \exp [\pm (\pi/2 + \beta_1)], \quad 0 < r < \infty.$$

Используя формулу (28), непосредственно можно показать, что вектор-функция $u(t)$ является единственным регулярным решением задачи (25). После этих замечаний нетрудно получить представления (26) для $u(t)$.

Замечание 1. Предположим, что корни $\lambda_j(s), j=\overline{1, n}$, уравнения $P_0(i\lambda, s)=0$ различны при $s \in \sigma(A)$. Определим операторы

$$H_j = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_j(\mu_\alpha)(\cdot, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha,$$

где $\{\varphi_\alpha\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора A и $A\varphi_\alpha = \mu_\alpha \varphi_\alpha$. Тогда при $t \leq \xi$

$$R_0(t, \xi) = \sum_{\alpha=k+1}^n \sum_{\beta=1}^k E_\alpha^{(+)} E_\beta^{(-)} (H_\beta - H_\alpha)^{-1} [e^{-H_\beta(t-\xi)} - e^{H_\beta t} e^{-H_\alpha \xi}], \quad (29)$$

а при $t \geq \xi$

$$R_0(t, \xi) = \sum_{\alpha=k+1}^n \sum_{\beta=1}^k E_\alpha^{(+)} E_\beta^{(-)} (H_\beta - H_\alpha)^{-1} [e^{-H_\alpha(t-\xi)} - e^{H_\beta t} e^{-H_\alpha \xi}], \quad (29')$$

где

$$E_\alpha^{(+)} = \prod_{\substack{\beta=k+1 \\ \alpha \neq \beta}}^n (H_\alpha - H_\beta)^{-1}, \quad E_\beta^{(-)} = \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^k (H_\beta - H_\alpha)^{-1}. \quad (30)$$

Аналогичные формулы можно вывести также в общем случае. Однако, из-за громоздкости записи мы их не приводим.

Замечание 2. Обозначим через $D_0(R_0)$ область значений оператора R_0 , определенного формулой (26) в пространстве $L_2(0, \infty; L)$. Тогда оператор

$$Lu = [P_\epsilon(id/dt, A) u] \quad u(t) \in D_0(R_0)$$

является замкнутым оператором в $L_2(0, \infty; L)$.

Замечание 3. Предположим, что условия теоремы 8 выполнены и при всех вещественных $i\lambda = \mu$ и при $s \geq s_0$ имеет место $P_0(\mu, s) > c_0 > 0$ (для этого необходимо, чтобы $n=2k$).

Тогда оператор L из замечания 2 будет самосопряженным и положительным в $L_2(0, \infty; L)$, ограниченным снизу числом c_0 .

2. Достаточные условия k -регулярности задачи (2)–(3). Пусть A -самосопряженный, положительный оператор с дискретным спектром, $P_0(i\lambda, A)$ удовлетворяет условиям теоремы 8. Предположим, что

$$P_1(i\lambda) = \sum_{l=1}^n (i\lambda)^{n-l} B_l.$$

Положим $P(i) = P_0(i\lambda, A) + P_1(i\lambda)$ и рассмотрим задачу

$$P(d/dt) u(t) = f(t), u_j^{(l)}(0) = 0, j = \overline{0, k-1}. \quad (31)$$

Теорема 9. Пусть для любой вектор-функции $u(t) \in D_0(R_0)$ (здесь $D_0(R_0)$ — из замечания теоремы 8) удовлетворяется неравенство

$$\|P_1(id/dt) u(t)\|_{L_2} \leq \alpha \|P_0(id/dt, A) u(t)\|_{L_2}, \quad (32)$$

где $\alpha < 1$. Тогда задача (31) имеет единственное регулярное решение, принадлежащее $D_0(R_0)$.

Теорема 10. Пусть удовлетворяются условия замечания 3 п. 1 и для любой вектор-функции $u(t) \in D_0(R_0)$ имеют место оценки

$$\int_0^\infty (P(d/dt) u(t), u(t))_{L_2} dt \geq \varepsilon \int_0^\infty (u(t), u(t))_{L_2} dt, \quad (33)$$

$$\|P_1(id/dt) u(t)\|_{L_2}^2 \leq \alpha \|P_0(id/dt, A) u(t)\|_{L_2}^2 + \beta \|u(t)\|_{L_2}^2, \quad (34)$$

где $\varepsilon > 0$, $\alpha < 1$, $\beta > 0$. Тогда задача (31) имеет единственное регулярное решение из $D_0(R_0)$.

При выполнении условий теоремы 9 оператор $P_1(id/dt) R_0$ ограниченный в $L_2(0, \infty; L)$ и норма его не больше, чем $\alpha < 1$. В условиях теоремы 10, по теореме Като [8], дифференциальное выражение $P(d/dt)$ порождает самосопряженный оператор в $L_2(0, \infty; L)$, область определения которого совпадает с $D_0(R_0)$. Из этих замечаний следует утверждение теоремы.

Замечание. В условиях теорем 9 или 10 задача (2)–(3) является k -регулярной.

Это утверждение очевидно, так как в условиях (3) векторы $\varphi_j \in D(A^{n-j-1})$, и поэтому с помощью простых замен можно неоднородную задачу (2)–(3) свести к задаче вида (31).

Более подробному исследованию k -регулярных задач будет посвящена отдельная работа автора.

§ 5. Условия k -кратной полноты системы $K(\Pi_-)$

Теперь, комбинируя результаты § 3, § 4, и с помощью основной теоремы 1 мы можем получить различные теоремы о k -кратной полноте системы $K(\Pi_-)$ в пространстве L .

Сформулируем некоторые из них, доказательства которых фактически приведены выше.

Теорема 11. Пусть A — положительный оператор в L с дискретным спектром, а пучок $P_0(\tilde{\lambda}, A)$ определяется формулой (24) и

$$P(\lambda) = P_0(\tilde{\lambda}, A) + \sum_{j=1}^n (\tilde{\lambda})^{n-j} B_j.$$

Предположим, что выполняется одно из условий а) или в):

а) пучок $P_0(\tilde{\lambda}, A)$ удовлетворяет условиям теоремы 8; $A^{-1} \in \sigma_p$, $B_j A^{-j} \in \sigma_{\infty}$, $j = \overline{1, n}$ и для любой функции $u(t) \in D_0(R_0)$ имеет место неравенство (32) при $\alpha < 1$;

в) пучок $P_0(\tilde{\lambda}, A)$ удовлетворяет условиям теоремы 8 и замечания 3 к ней; $A^{-1} \in \sigma_p$, $B_j A^{-j} \in \sigma_{\infty}$, $j = \overline{1, n}$, и для любой функции $u(t) \in D_0(R_0)$ имеют место неравенства (33) и (34). Тогда система $K(\Pi_-)$ для пучка будет k -кратно полной в L .

Теорема 12. Пусть A — положительный оператор в L с дискретным спектром и $P_0(\tilde{\lambda}, A) = (\tilde{\lambda})^{2k} I + A^{2k}$,

$$P(\lambda) = P_0(\tilde{\lambda}, A) + \sum_{j=1}^{2k} (\tilde{\lambda})^{2k-j} B_j.$$

Тогда, если выполнены условия:

а) теоремы 2 (или теоремы 3) и теоремы 9
или

в) теоремы 2 (или 3) и теоремы 10,

то система $K(\Pi_-)$ для пучка $P(\lambda)$ будет k -кратно полной в L .

Замечание. В теоремах 11 и 12 при выполнении условия а) операторы B_j , $j = \overline{1, n}$ могут быть даже не симметричными в $D(A^n)$.

2. Приложение к квадратичным пучкам. Пусть

$$P(\lambda) = (\tilde{\lambda})^2 I + \tilde{\lambda} A_1 + A^2 + A_2, \quad A > 0, \quad A^{-1} \in \sigma_p.$$

Тогда применение теорем 11 и 12 к данному пучку показывает, что система $K(\Pi_-)$ для него будет полной в L , если

$$\frac{1}{2} \|A_1 A^{-1}\| + \|A_2 A^{-2}\| < 1,$$

и при любом $\epsilon > 0$ оператор $A^{-1} \in \sigma_{1+\epsilon}$ или $A^{-1} \in \sigma_p$ и операторы $A_1 A^{-1}$ и $A_2 A^{-2}$ вполне непрерывны (сравните с результатами работ [9], [10], см. также [2]).

Можно также привести приложения абстрактных результатов к исследованию дифференциальных операторных пучков, в частности, пучков, изученных М. Г. Джавадсвым [11].

Մ. Գ. ԳԱՍԻՄՈՎ. Բազմանդամային օպերատորային փնջերի սեփական և հարակից վեկտորների մի մասի բազմապատիկ լրիվություն մասին (ամփոփում)

Կապ է նշված

$$P(\lambda) = (i\lambda)^n I + \sum_{j=1}^n (i\lambda)^{n-j} A_j + A^n$$

բազմանդամային օպերատորային փնջի՝ ձախ կիսահարթության մեջ գտնվող սեփական և հարակից վեկտորների $K(\Pi_-)$ սխեմային, L հիմնության տարածության մեջ բազմապատիկ լրիվության և հետևյալ խնդրի ռեզոլյար լուծման գոյության միջև (այդպիսի խնդրի սահմանափակ տրվում է հոդվածում)

$$P(d/dt) u(t) = f(t), u_i^{(j)}(0) = \tau_j, j=0, \overline{k-1} :$$

Իրված են տարրեր բավարար պայմաններ, որոնց կատարվելու դեպքում $K(\Pi_-)$ -ն կազմում է L -ում բազմապատիկ լրիվ սխեմա:

M. G. GASIMOV. On the multiple completeness of the part of eigen and adjoint vectors of the polynomial operator bundles (summary)

We indicate the connection between multiple completeness of the system $K(\Pi_-)$ of eigen and adjoint vectors in Gilbert space, which corresponds the eigen numbers from the left semiplane of the polynomial operator bundle

$$P(\lambda) = (i\lambda)^n I + \sum_{j=1}^n (i\lambda)^{n-j} A_j + A^n$$

and the existence of regular solution of the problem (the definition of such a problem is given in the paper)

$$P(d/dt) u(t) = f(t), u_i^{(j)}(0) = \tau_j, j=0, \overline{k-1} .$$

Different sufficient conditions under which $K(\Pi_-)$ is multiply complete system. in L are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, № 1, 1951, 11—14.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.
3. Дж. Э. Аллахвердиев. О полноте собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, близких к нормальным, ДАН СССР, 115, № 2, 1957, 210—213.
4. Ю. А. Паламт. Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 559—560.
5. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы, ИИЛ, М., 1962.
6. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.
7. А. М. Эфрос, А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы, Хрк., 1937.
8. T. Cato. Perturbation theory for linear operators, Springer—Verlag, New York 1966.

9. *М. Г. Крейн, Г. К. Лантер.* К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов, ДАН СССР, 154, № 6, 1964, 1258—1261.
10. *И. В. Горюк.* Одна теорема о полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка, Вестн. Моск. ун-та, „Матем. механ.“, № 1, 1970, 55—60.
11. *М. Г. Джавадов.* Об m -кратной полноте половины собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора 2-го порядка, ДАН СССР, 160, № 4, 1965, 754—757.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. А. ГОНЧАР

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ
С НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ
ФУНКЦИЯМИ

§ 1. В в е д е н и е

Пусть f — функция, определенная и непрерывная на отрезке $\Delta = [a, b]$ действительной прямой $\mathbb{R}$, $R_n(f)$ — наилучшее приближение функции f на отрезке Δ посредством рациональных функций порядка не выше n .

$$R_n(f) = \inf_{\{r_n\}} \max_{x \in \Delta} |f(x) - r_n(x)|,$$

где нижняя грань берется в классе всех рациональных функций вида

$$r_n(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n},$$

без каких-либо ограничений на расположение полюсов*. Как обычно, через $E_n(f)$ будем обозначать наилучшее приближение f на Δ посредством (алгебраических) полиномов степени $\leq n$. Очевидно, $R_n(f) \leq E_n(f)$ при любом $n=0, 1, 2, \dots$.

Хорошо известно, что функции, аналитические на отрезке, характеризуются условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} < 1$$

(теорема С. Н. Бернштейна). В то же время простые примеры показывают, что любая скорость стремления к нулю последовательности $R_n(f)$ совместима с неаналитичностью функции f в каждой точке отрезка Δ . Ниже будет доказано, что тем не менее класс функций f , для которых последовательность $R_n(f)$ стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, обладает одним из важнейших свойств класса функций, аналитических на отрезке — свойством единственности. При более сильных ограничениях на скорость убывания $R_n(f)$ соответствующие теоремы единственности были получены ранее в работе [1].

Обозначим через $R(\Delta)$ класс всех функций $f(x)$, $x \in \Delta$, для которых выполнено условие

* Функция f , вообще говоря, комплекснозначна; $a_i, b_i, i=0, 1, \dots, n$ — комплексные числа.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Если функции f и g принадлежат классу $R(\Delta)$ и $f(x) = g(x)$ на множестве $e \subset \Delta$ положительной емкости (в частности, на отрезке $\delta \subset \Delta$), то $f(x) \equiv g(x)$, $x \in \Delta$.

Здесь и всюду в дальнейшем под емкостью множества понимается его логарифмическая (гармоническая) емкость. Заметим, что если множество $e \subset \mathbb{R}$ имеет положительную лебегову меру, то емкость его также положительна. Более того, если положительна h -мера Хаусдорфа множества e относительно функции h , удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{t} dt < \infty,$$

то положительна и емкость множества e (см., например, [2]).

Класс $R(\Delta)$ является естественным расширением класса функций, аналитических на отрезке Δ , в котором сохраняется свойство единственности. Нетрудно проверить, что если f и g принадлежат $R(\Delta)$, то $c_1 f + c_2 g$ (c_1, c_2 — произвольные комплексные числа) и $f \cdot g$ также принадлежат $R(\Delta)$. Тем самым, $R(\Delta)$ — квазианалитическая алгебра функций, содержащая — в качестве собственной подалгебры — совокупность всех функций, аналитических на Δ .

Теорема 1 допускает следующее усиление.

Теорема 2. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1$$

и $f(x) = 0$ на множестве $e \subset \Delta$ положительной емкости, то $f(x) \equiv 0$, $x \in \Delta$.

Отсюда следует, что каждый из классов $R_{\{n_k\}}(\Delta)$, определяемых условием

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{R_{n_k}(f)} < 1,$$

где $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, также обладает свойством единственности (в форме теоремы 1) и является, тем самым, квазианалитическим классом функций. Переход от $R(\Delta)$ к $R_{\{n_k\}}(\Delta)$ совершенно аналогичен переходу от алгебры всех аналитических функций к квазианалитическим классам С. Н. Бернштейна

$B_{\{n_k\}}(\Delta)$ (класс $B_{\{n_k\}}(\Delta)$ определяется условием $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k}(f)} < 1$).

Каждый из классов $R_{\{n_k\}}(\Delta)$ является расширением соответствующего класса $B_{\{n_k\}}(\Delta)$.

В основе доказательства приведенных теорем лежит оценка минимума модуля рациональных функций, формулируемая в терминах

емкости конденсатора; эта оценка содержится в работе [3]. Необходимые для дальнейшего определения и формулировку соответствующей леммы мы приведем в следующем параграфе (подробнее см. [3]).

§ 2. Емкость конденсатора. Леммы

Пусть S —расширенная комплексная плоскость, E и F —непересекающиеся замкнутые подмножества S , каждое из которых имеет связное дополнение, D —дополнение к $E \cup F$. Пару (E, F) (или тройку (E, F, D)) будем называть конденсатором.

Предположим, что каждое из множеств E, F имеет положительную емкость. Пусть $H(z)$ —гармоническая мера множества ∂F относительно области D в точке $z \in D$. Другими словами, H —обобщенное решение задачи Дирихле в области D , построенное по граничным данным, равным 0 на ∂E и 1 на ∂F . Конденсатор (E, F, D) будем называть регулярным, если все точки границы области D регулярны в смысле задачи Дирихле в области D ; в этом случае функция H гармонична в D , непрерывна в $\bar{D}$ и равна 0 и 1 на ∂E и ∂F , соответственно.

Обозначим через Γ произвольный контур (состоящий из конечно-го числа попарно непересекающихся аналитических жордановых кривых), принадлежащий области D и разделяющий множества E и F ($S \setminus \Gamma$ представляет собой объединение двух открытых множеств $D(E) \supset E$ и $D(F) \supset F$ таких, что $\partial D(E) = \partial D(F) = \Gamma$). Пусть $\frac{\partial}{\partial n}$ —производная по нормали к контуру Γ , внешней по отношению к множеству $D(E)$, ds —элемент длины дуги. Величина

$$c = c(E, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial n} ds$$

называется емкостью конденсатора (E, F) . При тех ограничениях, которые уже наложены на множества E, F , имеем $0 < c(E, F) < +\infty$.

Лемма 1 (см. [3]). Пусть (E, F) —конденсатор, $r_n(z)$ —произвольная рациональная функция от z порядка не выше n . Если

$$\max_{z \in E} |r_n(z)| \leq M,$$

то

$$\min_{z \in F} |r_n(z)| \leq M e^{\frac{n}{c}},$$

где $c = c(E, F)$ —емкость конденсатора (E, F) .

Пусть теперь $\bar{E}$ и $\bar{F}$ —произвольные непересекающиеся подмножества S , каждое из которых имеет связное дополнение и положительную емкость. По определению положим: $c(\bar{E}, \bar{F}) = \sup c(E, F)$, где верхняя грань берется по всем конденсаторам (E, F) таким, что

$E \subset \bar{F}$, $F \subset \bar{E}$. Для доказательства сформулированных выше теорем кроме леммы 1 нам понадобится

Лемма 2. Если замкнутое множество $E \subset \Delta$ имеет положительную емкость и $E \neq \Delta$, то $c(E, \Delta \setminus E) = +\infty$.

Следующие два параграфа посвящены доказательству этой леммы

§ 3. Вспомогательные предложения

Предложения, приведенные в этом параграфе, формулируются и доказываются в той степени общности, которая необходима для дальнейшего. Возможно, некоторые из них представляют самостоятельный интерес.

1°. Пусть (E, F, D) — конденсатор; A, B — действительные числа, $A < B$; $U(z)$, $z \in D$ — функция, гармоническая в D и такая, что

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, \zeta \in D} U(z) \geq A, \quad \forall \zeta \in \partial E,$$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, \zeta \in D} U(z) \leq B, \quad \forall \zeta \in \partial F.$$

Тогда

$$c(E, F) \geq \frac{1}{2\pi(B-A)} \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds, \quad (1)$$

где Γ — произвольный контур, разделяющий множества E и F , $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к Γ , внешней по отношению к множеству, ограниченному Γ и содержащему E .

Это предложение по существу содержится в монографии [4] (ср. п. 2.12, (в)).

Пусть K — ограниченное замкнутое множество положительной емкости, имеющее связное дополнение G . Через $g(K, z)$ будем обозначать функцию Грина области G с особенностью в бесконечно удаленной точке. Множество K называется регулярным, если все его граничные точки являются регулярными точками в смысле задачи Дирихле в области G . Регулярные точки $\zeta \in \partial K$ характеризуются условием: $\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in G} g(K, z) = 0$ (критерий Булигана). Заметим, что конденсатор (E, F) регулярен в том и только том случае, когда регулярны множества E и F .

2°. Пусть (E, F, D) — конденсатор; множества E, F — ограничены и имеют положительную емкость; ρ_1 и ρ_2 — положительные постоянные. Если $\partial F \subset \{z: g(E, z) \leq \rho_1\}$, $\partial E \subset \{z: g(F, z) \leq \rho_2\}$, то

$$c(E, F) > \frac{1}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (2)$$

Положим $U(z) = g(E, z) - g(F, z)$, $z \in D$. Эта функция гармонична в D , причем

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in D} U(z) > -\rho_2, \quad \forall \zeta \in \partial E,$$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in D} U(z) \leq \rho_1, \quad \forall \zeta \in \partial F.$$

Пусть Γ — контур, разделяющий множества E и F ; выберем его так, чтобы $\infty \in D(F)$ (определение $D(F)$ см. в § 2). По 1° имеем

$$c(E, F) > \frac{1}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)} \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds. \quad (3)$$

При этом

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial g(E, z)}{\partial n} ds = 2\pi, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial g(F, z)}{\partial n} ds = 0.$$

Следовательно, $\int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 2\pi$; учитывая это равенство, из (3) получаем (2).

3°. Пусть E — замкнутое множество положительной лебеговой меры, принадлежащее отрезку $[\alpha, \beta]$, $\text{mes } E \geq \tau(\beta - \alpha)$, $0 < \tau < 1$. Тогда

$$\sup_{z \in [\alpha, \beta] \setminus E} g(E, z) \leq g([0, \tau], 1). \quad (4)$$

Докажем сначала, что если какая-либо концевая точка отрезка $[\alpha, \beta]$ — например, точка β — не принадлежит множеству E , то

$$g(E, \beta) \leq g([0, \tau], 1). \quad (5)$$

Воспользуемся для этого следующим соотношением (см., например, [5]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|t_n(z)|}{\max_{z \in E} |t_n(z)|} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{K(E, z)}, \quad z \notin E, \quad (6)$$

где $t_n(z)$ — полином Чебышева для множества E с нулями на этом множестве (степень $t_n(z)$ равна n , старший коэффициент равен 1). Фиксируем натуральное n ; пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_k \leq a_{k+1}$) — нули полинома $t_n(z)$. Положим $E^* = [\alpha, \alpha + \text{mes } E]$, $a_k^* = \alpha + \text{mes}(E \cap [\alpha, a_k])$, $k = 1,$

$$2, \dots, n, \quad t_n^*(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k^*).$$

Легко видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$|t_n^*(\beta)| \geq |t_n(\beta)|, \quad (7)$$

$$\max_{z \in E^*} |t_n^*(z)| \leq \max_{z \in E} |t_n(z)|. \quad (8)$$

По лемме Бернштейна-Уолша (см. [3])

$$|t_n^*(\beta)| \leq \max_{z \in E^*} |t_n^*(z)| \cdot e^{nK(E^*, \beta)}. \quad (9)$$

Наконец

$$g(E^*, \beta) \leq g([z, z + \tau(\beta - z)], \beta) = g([0, \tau], 1). \quad (10)$$

Из соотношений (7)–(10) следует

$$\left(\frac{|t_n(\beta)|}{\max_{z \in E} |t_n(z)|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{|t_n^*(\beta)|}{\max_{z \in E^*} |t_n^*(z)|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq e^{\tau([0, \tau], 1)}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$ и используя равенство (6), получаем неравенство (5).

Докажем теперь неравенство (4). Без ограничения общности можно предположить, что E — регулярное множество (так что для любой точки $\zeta \in E$ $g(E, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in E$). В этом случае $\sup_{z \in [a, \beta] \setminus E} g(E, z) = g(E, x_0)$, $x_0 \in [a, \beta] \setminus E$. Положим $\Delta_1 = [z, x_0]$, $\Delta_2 = [x_0, \beta]$, $|\Delta_k| = \text{mes } \Delta_k$, $E_k = E \cap \Delta_k$. По крайней мере для одного из отрезков Δ_k имеем $\text{mes } E_k > \tau |\Delta_k|$. По доказанному, для соответствующего k $g(E_k, x_0) \leq g([0, \tau], 1)$. Остается заметить, что $g(E, x_0) \leq g(E_k, x_0)$; неравенство (4) доказано.

4°. Пусть E — замкнутое множество нулевой лебеговой меры, принадлежащее отрезку $[a, \beta]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $F \subset [a, \beta] \setminus E$ такое, что $g(F, z) < \varepsilon$ для $z \in [a, \beta] \setminus F$.

По $\varepsilon > 0$ подберем τ_* , $0 < \tau_* < 1$, так, чтобы было выполнено неравенство $g([0, \tau_*], 1) < \varepsilon$. В качестве F можно взять любое замкнутое множество, принадлежащее $[a, \beta] \setminus E$ и такое, что $\text{mes } F > \tau_*(\beta - a)$. Из предложения 3° вытекает: $g(F, z) \leq g([0, \tau_*], 1) < \varepsilon$ для любого $z \in [a, \beta] \setminus F$.

5°. Пусть E и F — произвольные замкнутые подмножества отрезка $[a, \beta]$ такие, что $E \cap F = \emptyset$, $\text{mes } E \geq \frac{\beta - a}{4}$, $\text{mes } F \geq \frac{\beta - a}{4}$. Тогда $c(E, F) \geq C_0$, где $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

Согласно 3° имеем $g(E, z) \leq g\left([0, \frac{1}{4}], 1\right)$, $z \in F$, $g(F, z) \leq g\left([0, \frac{1}{4}], 1\right)$, $z \in E$. Применяя 2°, получаем

$$c(F, F) \geq \left[2g\left([0, \frac{1}{4}], 1\right) \right]^{-1} = C_0.$$

Пусть P_1 и P_2 — ограниченные замкнутые множества на действительной прямой, $P_1 \subset P_2$. Через $H(P_1, P_2, z)$ будем обозначать гармоническую меру множества P_1 относительно $S \setminus P_2$ в точке $z \in S \setminus P_2$.

6°. Для любого замкнутого множества $e \subset \Delta_1 = [-1, 1]$, $0 < \tau_1 \leq \text{mes } e \leq \tau_2 < 2$, и любого $x > 1$ справедливы неравенства

$$H([-1, -1 + \tau_1], \Delta_1, x) \leq H(e, \Delta_1, x) \leq H([1 - \tau_2, 1], \Delta_1, x).$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственным вычислением (достаточно выразить соответствующие гармо-

нические меры через функцию Грина для дополнения к $[-1, 1]$ с особенностью в точке x).

7°. Пусть E и F — непересекающиеся замкнутые подмножества отрезка $\Delta_1 = [-1, 1]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $A_1 > 1$ и $\delta_1 > 0$ (A_1 и δ_1 зависят только от ε) такие, что каковы бы ни были E , $\text{mes } E > 1 - \delta_1$, и F , $\text{mes } F > 1 - \delta_1$, при любом действительном x , $|x| > A_1$, имеет место неравенство

$$|H(F, E \cup F, x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon. \quad (11)$$

Пусть $x > 1$; E и F — непересекающиеся замкнутые множества, принадлежащие Δ_1 ; предположим, что мера каждого из них $> 1 - \delta$, $\delta > 0$. Используя 6°, получаем

$$H([-1, -\delta], \Delta_1, x) \leq H(F, \Delta_1, x) \leq H([- \delta, 1], \Delta_1, x). \quad (12)$$

Следующие неравенства очевидны:

$$\begin{aligned} H(F, \Delta_1, x) &\leq H(F, E \cup F, x) \leq H(\Delta_1 \setminus E, \Delta_1, x) = \\ &= H(F, \Delta_1, x) + H(\Delta_1 \setminus (E \cup F), \Delta_1, x). \end{aligned} \quad (13)$$

Снова используя 6°, оцениваем последнее слагаемое

$$H(\Delta_1 \setminus (E \cup F), \Delta_1, x) \leq H([1 - 2\delta, 1], \Delta_1, x). \quad (14)$$

Объединяя (12), (13) и (14), получаем

$$\begin{aligned} H([-1, 0], \Delta_1, x) - H([- \delta, 0], \Delta_1, x) &\leq H(F, E \cup F, x) \leq \\ &\leq H([0, 1], \Delta_1, x) + H([- \delta, 0], \Delta_1, x) + H([1 - 2\delta, 1], \Delta_1, x). \end{aligned} \quad (15)$$

Имеем $H([-1, 0], \Delta_1, \infty) = H([0, 1], \Delta_1, \infty) = \frac{1}{2}$. Следовательно, можно найти такое $A_1 > 1$, чтобы для $x > A_1$ имели место неравенства

$$\left| H([-1, 0], \Delta_1, x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| H([0, 1], \Delta_1, x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (16)$$

Число $\delta_1 > 0$ найдем из условия

$$H([1 - 2\delta_1, 1], \Delta_1, x) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad x > A_1; \quad (17)$$

тогда, очевидно, и

$$H([- \delta_1, 0], \Delta_1, x) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad x > A_1. \quad (18)$$

Для $\delta = \delta_1$ из (15), (16), (17) и (18) получаем

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < H(F, E \cup F, x) < \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad x > A_1.$$

Тем самым, неравенство (11) при $x > A_1$ установлено для любых замкнутых множеств E, F , принадлежащих Δ_1 , при условии, что мера каждого из них $\geq 1 - \delta_1$. Из соображений симметрии следует, что оно имеет место для таких множеств и при $x < -A_1$. Предложение 7^о доказано.

8^о. Пусть E и F — непересекающиеся замкнутые подмножества отрезка $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $H(z) = H(F, E \cup F, z)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $A = A_{\varepsilon, \eta} > \eta$ и $\delta = \delta_{\varepsilon, \eta} > 0$ такие, что каковы бы ни были E , $\text{mes } E > \eta - \delta$, и F , $\text{mes } F > \eta - \delta$, при любом действительном x , $|x - x_0| > A$, имеет место неравенство

$$\left| H(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

При этом $A_{\varepsilon, \eta} = \eta A_{\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ (ε — фиксировано).

Это утверждение сводится к предыдущему очевидным линейным преобразованием.

§ 4. Доказательство леммы 2

Докажем сначала утверждение леммы 2 при следующем дополнительном предположении: существует отрезок $\Delta_1 \subset \Delta$ такой, что емкость множества $E_1 = E \cap \Delta_1$ положительна, в то время как лебегова мера E_1 равна нулю. Пусть E_2 — замкнутое подмножество E_1 , все точки которого регулярны (емкость $E_2 > 0$, мера $E_2 = 0$). Положим $g(E_2, x) = 0$ для $x \notin E_2$ и рассмотрим множество $\Omega = \{x \in \Delta_1: g(E_2, x) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Ω — открытое (относительно Δ_1) множество, покрывающее E_2 ; пусть $\omega_1, \dots, \omega_m$ — непересекающиеся интервалы, принадлежащие Ω и в совокупности покрывающие E_2 , $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m$ — соответствующие отрезки,

$\bar{\omega} = \bigcup_{k=1}^m \bar{\omega}_k$. По 4^о при любом k , $1 \leq k \leq m$, существует замкнутое множество $F_k \subset \bar{\omega}_k \setminus E_1$ такое, что $g(F_k, x) < \varepsilon$ для $x \in \bar{\omega}_k \setminus F_k$. Пусть $F = \bigcup_{k=1}^m F_k$; очевидно

$$F \subset \bar{\Omega} = \{z: g(E_2, z) \leq \varepsilon\}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $x \in \bar{\omega} \setminus F$. При некотором k , $1 \leq k \leq m$, имеем $x \in \bar{\omega}_k \setminus F_k$ и $g(F, x) \leq g(F_k, x) < \varepsilon$. Тем самым, $g(F, x) < \varepsilon$ для $x \in \bar{\omega} \setminus F$; следовательно

$$E_2 \subset \{z: g(F, z) < \varepsilon\}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) вытекает оценка $s(E_2, F) \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ (см. предложение 2^о). Устремляя ε к нулю и учитывая, что $E_2 \subset E_1$, $F \subset \Delta_1 \setminus E_1$, получаем $s(E_1, \Delta_1 \setminus E_1) = +\infty$; тем более, $s(E, \Delta \setminus E) = +\infty$.

Теперь мы будем предполагать, что для любого отрезка $\Delta_1 \subset \Delta$ емкость и лебегова мера множества $E \cap \Delta_1$ одновременно положительны или равны нулю. Пусть Ω — объединение всех интервалов $\omega \subset R$ таких, что $\text{mes}(E \cap \omega) = 0$ (по предположению, тогда и емкость множества $E \cap \omega$ равна нулю); положим $E_1 = \Delta \setminus \Omega$. Очевидно, $E_1 \subset E$ и если $x \in E_1$, то для любого интервала $u \ni x$ $\text{mes}(E_1 \cap u) > 0$. Далее, емкость множества $E \setminus E_1 = E \cap \Omega$ равна нулю; учитывая этот факт, получаем

$$c(E_1, \Delta \setminus E_1) = c(E_1, \Delta \setminus E) \leq c(E, \Delta \setminus E).$$

Поэтому нам достаточно показать, что $c(E_1, \Delta \setminus E_1) = +\infty$. Отдельно рассмотрим два случая.

а) Множество $\Delta \setminus E_1$ состоит из конечного числа интервалов (тогда E_1 — объединение конечного числа отрезков). Пусть ξ — общая концевая точка какого-нибудь интервала, принадлежащего $\Delta \setminus E_1$, и отрезка, принадлежащего E_1 . При некотором $\rho > 0$ и любом δ , $0 < \delta < \rho$, один из отрезков $[\xi - \rho, \xi - \delta]$, $[\xi + \delta, \xi + \rho]$ принадлежит множеству E_1 , другой — множеству $\Delta \setminus E_1$. Емкость конденсатора, соответствующего

этой паре отрезков, нетрудно вычислить. Полагая $k = \frac{\delta}{\rho}$, имеем

$$\begin{aligned} c([\xi - \rho, \xi - \delta], [\xi + \delta, \xi + \rho]) &= c([-1, -k], [k, 1]) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{K'}{K} \sim \frac{1}{\pi^2} \log \frac{1}{k}, \quad k \rightarrow 0; \end{aligned}$$

здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k , K' — соответствующий интеграл для дополнительного модуля $k' = \sqrt{1-k^2}$. Тем самым, $c([\xi - \rho, \xi - \delta], [\xi + \delta, \xi + \rho]) \rightarrow +\infty$ при $\delta \rightarrow 0$ (и фиксированном ρ). Следовательно, $c(E_1, \Delta \setminus E_1) = +\infty$.

б) Множество $\Delta \setminus E_1$ есть объединение бесконечного числа непересекающихся интервалов. Фиксируем произвольное натуральное число N . Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — различные точки множества E_1 , концевые для дополнительных к E_1 интервалов. Положим $a = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq N} |\xi_i - \xi_j|$,

$\varepsilon = \frac{1}{N}$. Выберем число η , $0 < \eta < \frac{a}{2}$, столь малым, что $A_{\xi_i, \eta} < a$ ($A_{\xi_i, \eta}$ —

число, фигурирующее в предложении 8°). Обозначим $u_i = (\xi_i - \eta, \xi_i + \eta)$, $i = 1, \dots, N$. Поскольку $\xi_i \in E_1$, имеем $\text{mes}(E_1 \cap u_i) > 0$; пусть x_i — какая-либо точка плотности множества E_1 , принадлежащая u_i . Рассмотрим отрезок Δ'_i с центром в точке x_i , столь малый, что $\Delta'_i \subset u_i$

и $\text{mes}(E_1 \cap \Delta'_i) > \frac{1}{2} |\Delta'_i|$. Будем расширять этот отрезок в сторону ин-

тервала, дополнительного к E_1 с концом в точке ξ_i ; в результате такого расширения можно построить отрезок $\Delta_i \subset u_i$ такой, что

$\text{mes}(E_1 \cap \Delta_i) = \frac{1}{2} |\Delta_i|$. Пусть $\eta_i = \frac{1}{2} |\Delta_i|$, $\delta_i = \delta$, $\eta_i > 0$ — число, фигу-

рирующее в предложении 8°, $i = 1, \dots, N$. Построим замкнутые регу-

лярные множества E_i и F_i , принадлежащие соответственно $E_1 \cap \Delta_i$ и $\Delta_i \setminus E_i$, так, чтобы лебегова мера каждого из них была больше, чем $\max \left(\eta_i - \varepsilon_i, \frac{\eta_i}{2} \right)$. Рассмотрим регулярный конденсатор (E_i, F_i) ; через $H_i(z)$ обозначим гармоническую меру множества F_i в точке z относительно дополнения к $E_i \cup F_i$. Учитывая построение отрезков Δ_i и множеств E_i, F_i и применяя предложение 8°, приходим к следующему выводу: при любых $i, 1 \leq i \leq N$, и $j, 1 \leq j \leq N, i \neq j$,

$$\left| H_i(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \quad x \in \Delta_i. \quad (21)$$

Пусть $E' = \bigcup_{i=1}^N E_i, F' = \bigcup_{i=1}^N F_i, U(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z)$. Ввиду того, что конденсатор (E_i, F_i) регулярен, функция $H_i(z)$ непрерывна во всей плоскости S , равна 0 на E_i и 1 на F_i . Следовательно, функция $U(z)$ непрерывна в S , гармонична в области $D = S \setminus (E' \cup F')$, причем (см. (21))

$$U(\zeta) > (N-1) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right), \quad \forall \zeta \in E', \quad (22)$$

$$U(\zeta) \leq 1 + (N-1) \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right), \quad \forall \zeta \in F'. \quad (23)$$

Пусть Γ_i — контур, лежащий в достаточно малой окрестности множества E_i и разделяющий множества E_i и F_i (так, что $\infty \in D(F_i)$). Учитывая, что E_i и F_i принадлежат отрезку Δ_i и мера каждого из них $> \frac{\eta_i}{2} = \frac{|\Delta_i|}{4}$, получаем (см. предложение 5°)

$$c(E_i, F_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial H_i}{\partial n} ds \geq C_0, \quad (24)$$

где $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная. Отметим также, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial H_i}{\partial n} ds = 0, \quad i \neq j. \quad (25)$$

Контур $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ разделяет множества E' и F' . Применяя соотношения (24) и (25), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial H_i}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \frac{\partial H_i}{\partial n} ds \geq NC_0. \quad (26)$$

Наконец, используя (22), (23), (26) и применяя предложение 1°, получаем (напомним, что $\varepsilon = \frac{1}{N}$)

$$c(E', F') > \frac{NC_0}{1+(N-1) \cdot 2\varepsilon} > \frac{NC_0}{3}.$$

Поскольку $E' \subset E_1$, $F' \subset \Delta \setminus E_1$, отсюда следует, что $c(E_1, \Delta \setminus E_1) \geq \frac{NC_0}{3}$; ввиду произвольности N это означает, что $c(E_1, \Delta \setminus E_1) = +\infty$.

Лемма 2 доказана полностью.

§ 5. Доказательство теорем 1, 2

Теорема 1 является следствием теоремы 2 и линейности класса $R(\Delta)$. Будем доказывать поэтому теорему 2.

В условиях этой теоремы существуют возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и число q , $0 < q < 1$, такие, что $R_{n_k}(f) < q^{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Пусть $r_{n_k}(x)$ — последовательность рациональных функций (порядок $r_{n_k}(x)$ не превосходит n_k), для которой

$$\max_{x \in \Delta} |f(x) - r_{n_k}(x)| < q^{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

(в качестве $r_{n_k}(x)$ можно взять рациональную функцию наилучшего приближения f на Δ порядка n_k). Пусть $f(x) = 0$ на множестве $e \subset \Delta$ положительной емкости и $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta$. Положим* $E = \{x \in \Delta: f(x) = 0\}$; множество E замкнуто, имеет положительную емкость и $E \neq \Delta$. По лемме 2 найдется замкнутое множество $F \subset \Delta \setminus E$ такое, что

$$c(E, F) \geq Q, \quad qe^{\frac{1}{Q}} = q_1 < 1. \quad (28)$$

По предположению, f не имеет нулей на множестве F ; следовательно, $\mu = \min_{x \in F} |f(x)| > 0$. Поскольку последовательность $r_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на множестве F , имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{x \in F} |r_{n_k}(x)| = \mu > 0. \quad (29)$$

С другой стороны, из (27) следует неравенство

$$\max_{x \in E} |r_{n_k}(x)| < q^{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Применяя к конденсатору (E, F) и рациональной функции $r_{n_k}(x)$ лемму 1 и используя (30), (28), получаем

* Необходимость рассматривать полное множество нулей функции f показывает, что и при доказательстве теорем единственности по значениям на отрезке $\delta \subset \Delta$ по существу приходится применять лемму 2 в общей формулировке (во всяком случае, для произвольного E положительной лебеговой меры), а не только ее очевидный частный случай: $c(\delta, \Delta \setminus \delta) = +\infty$.

$$\min_{x \in J^k} |r_{n_k}(x)| < q^{n_k} e^{\frac{n}{Q}} = q_1^{n_k}, \quad k=1, 2, \dots$$

Следовательно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{x \in J^k} |r_{n_k}(x)| = 0. \quad (31)$$

Полученное противоречие (ср. (29) и (31)) доказывает теорему.

Ա. Ա. ԳՈՆՉԱՐ. Խաղիտեալ ֆունկցիաներով լավագոյն մոտարկումներէ հետ կապված ֆունկցիաների բնութագրական զանազան (ամփոփում)

Դիցուք $f[a, b]$ -ում տրված ֆունկցիա է

$$R_n(f) = \inf_{a_k, b_k} \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} \right|.$$

Իհարկում. եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1$$

և $f(x) = 0, x \in e \subset [a, b]$, сар $e > 0$, ապա $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

A. A. GONČAR. Quasyanalytic classes of functions, connected with best approximations by rational functions (summary)

Let f be continuous function on $[a, b]$,

$$R_n(f) = \inf_{a_k, b_k} \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} \right|.$$

Theorem. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1$$

and $f(x) = 0, x \in e \subset [a, b]$, сар $e > 0$, then $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Гончар. О наилучших приближениях рациональными функциями, ДАН СССР, 100, № 2, 1955, 205—208.
2. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
3. А. А. Гончар. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями, Матем. сборник, 78 (129), № 4, 1959, 640—655.
4. Г. Поля и Г. Сеге. Изопериметрические неравенства в математической физике, М., Физматгиз, 1962.
5. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Изд-во «Наука», 1966.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

И. Ц. ГОХБЕРГ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ КОНЕЧНОМЕРНОМОРФНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

Фундаментальная статья М. В. Келдыша [1] посвящена теоремам о кратной полноте собственных и присоединенных векторов операторных полиномов с вполне непрерывными коэффициентами в гильбертовом пространстве.

В доказательствах основных теорем статьи [1] существенную роль играют некоторые новые понятия и общие предложения об операторных полиномах. Здесь имеются в виду понятия цепочки собственного и присоединенных векторов и кратности характеристического числа, формула для кратности характеристического числа и формула, выражающая главную часть резольвенты операторного полинома через его собственные и присоединенные векторы.

В последнее время эти понятия и результаты были существенно развиты (см. [2—7]). В настоящей статье содержится обзор результатов, полученных в этом направлении. Они, в основном, установлены с помощью нового метода факторизации оператор-функций. Ряд результатов публикуется впервые.

§ 1. Эквивалентность оператор-функций. Факторизация оператор-функции в точке

1. Пусть B_1 и B_2 — два банаховых пространства и $L(B_1 \rightarrow B_2)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2 . Через $M[\lambda_0] = M[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_2]$, где λ_0 — некоторое комплексное число, обозначим совокупность всех оператор-функций $A(\lambda)$ со значениями из $L(B_1 \rightarrow B_2)$, голоморфных в точке λ_0 или имеющих в этой точке полюс. Условимся еще через $M_0[\lambda_0] = M_0[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначать множество оператор-функций из $M[\lambda_0]$, голоморфных и обратимых в точке λ_0 .

Две оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ будем называть эквивалентными в точке λ_0 , если существуют оператор-функция $F(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_1]$ и $E(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_2 \rightarrow B_2]$ такие, что имеет место равенство $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$ для всех $\lambda (\neq \lambda_0)$ из некоторой окрестности точки λ_0 .

Отношение эквивалентности естественным образом разбивает $M[\lambda_0]$ на классы эквивалентных между собой оператор-функций. В этом параграфе рассматривается задача о нахождении в каждом классе простейших представителей.

Пусть P_j ($j = 0, 1, \dots, n$) — некоторая система ортогональных между собой проекторов из $L(B_1 \rightarrow B_1)$, а D_1 — оператор из $L(B_1 \rightarrow B_2)$, отображающий изоморфно подпространство $\text{Im } \sum P_j (\subset B_1)$ на какое-либо подпространство из B_2 , имеющее прямое дополнение.

Оператор-функцию $D(\lambda) \in M[\lambda_0]$ вида

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} D_1 P_j, \quad (1.1)$$

где k_j — целые числа, назовем *степенной диагональной оператор-функцией* (в точке λ_0). Числа k_j ($j = 1, 2, \dots, n$) будем считать расположенными в порядке невозрастания.

Приведенное определение степенной диагональной оператор-функции эквивалентно следующему: $D(\lambda)$ имеет вид

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} Q_j D_2,$$

где Q_j ($j = 0, 1, \dots, n$) — система ортогональных между собой проекторов из $L(B_2 \rightarrow B_2)$, $D_2 \in L(B_1 \rightarrow B_2)$, причем подпространство $\text{Ker } D_2$ имеет прямое дополнение в B_1 и $\text{Im } \sum Q_j \subset \text{Im } M$.

Очевидно, диагональные степенные оператор-функции и только они допускают также симметричное представление вида

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} Q_j D P_j, \quad (1.2)$$

где $D \in L(B_1 \rightarrow B_2)$ — оператор, отображающий изоморфно $\text{Im } P_j$ на $\text{Im } Q_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$), а $\{P_j\}_0^n$ и $\{Q_j\}_0^n$ — введенные выше системы проекторов.

Если оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентна в точке λ_0 некоторой диагональной степенной оператор-функции $D(\lambda)$, то равенство $A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda)$, устанавливающее эту эквивалентность, назовем *факторизацией* $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

2. Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ из $M[\lambda_0]$ имеет вид

$$A(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_j. \quad (1.3)$$

Если в этом разложении операторы A_{-j} ($j = 1, 2, \dots, \nu$) конечномерны, то оператор-функция $A(\lambda)$ называется *конечномероморфной* в точке λ_0 .

Оператор $A \in L(B_1 \rightarrow B_2)$ называется *Ф-оператором* (см. [8]), если он нормально разрешим (то есть $\text{Im } A$ замкнуто), его ядро $\text{Ker } A = \{x: Ax = 0\}$ конечномерно и $\dim(B_2/\text{Im } A) < \infty$. Число

$$\text{Ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim(B_2/\text{Im } A)$$

называется *индексом* Ф-оператора A .

Оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ называется *фредгольмовой* в точке λ_0 , если в разложении (1.3) оператор A_0 является Φ -оператором.

Степенная диагональная оператор-функция $D(\lambda)$, представленная в виде (1.2), является конечномероморфной и фредгольмовой в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:

1. $\dim \operatorname{Im} P_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\dim \operatorname{Im} (I - P_0) < \infty$;
2. $\dim \operatorname{Im} Q_j < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\dim \operatorname{Im} (I - Q_0) < \infty$;
3. $k_0 = 0$.

Если эти условия выполнены, то без ограничения общности можно предполагать, что все числа $\dim \operatorname{Im} P_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), а следовательно, и числа $\dim \operatorname{Im} Q_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) равны единице. Этого предположения всюду в дальнейшем будем придерживаться.

Совокупность всех диагональных степенных конечномероморфных и фредгольмовых в точке λ_0 оператор-функций обозначим через $S[\lambda_0] = S[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_2]$.

Если для оператор-функции $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$, представленной в виде (1.2), $\dim \operatorname{Im} (I - P_0) = \dim \operatorname{Im} (I - Q_0)$, то оператор D можно считать обратимым. Если оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентна такой степенной диагональной оператор-функции $D(\lambda)$ и $B_2 = B_1$, то, очевидно, факторизацию $A(\lambda)$ в точке λ_0 можно записать в виде

$$A(\lambda) = E(\lambda) \left(\sum_{j=1}^n (\lambda - \lambda_0)^{k_j} P_j + P_0 \right) F(\lambda). \quad (1.4)$$

3. Имеет место

Теорема 1.1. *Для того чтобы оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ была эквивалентна некоторой диагональной оператор-функции из $S[\lambda_0]$, необходимо и достаточно, чтобы $A(\lambda)$ была конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 .*

При дополнительном требовании $\operatorname{Ind} A_0 = 0$, где A_0 — оператор из разложения (1.3), эта теорема доказана в [4]. В общем случае она доказана в [5]. Ее доказательство из [5] можно значительно упростить, воспользовавшись схемой доказательства подобной теоремы 3 из [6].

Факторизацию (1.4) в точке λ_0 назовем *нормальной*, если $P_0 + P_1 + \dots + P_n = I$.

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает, что конечномероморфная и фредгольмова оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ допускает нормальную факторизацию в точке λ_0 в том и только том случае, когда все значения $A(\lambda)$ в некотором проколоте круге $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ являются обратимыми операторами.

Отметим, что в факторизации (1.4) множители, вообще говоря, не зависят непрерывно от оператор-функции. В этом легко убедиться на примере факторизации матрицы-функции

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda - \lambda_0 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Каждой оператор-функции $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$, представленной в виде (1.2), сопоставим набор чисел $\pi(D(\lambda)) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^+, \omega^-\}$, где

$$\omega^+ = \omega^+(D(\lambda)) = \dim \operatorname{Im} \left(I - \sum_{j=0}^n P_j \right)$$

и

$$\omega^- = \omega^-(D(\lambda)) = \dim \operatorname{Im} \left(I - \sum_{j=1}^n Q_j \right).$$

Этот набор назовем *показателем* $D(\lambda)$.

Отметим, что если $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$, то и $D^*(\lambda) \in S[\lambda_0; B_2^* \rightarrow B_1^*]$. Если при этом $\pi(D(\lambda)) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^+, \omega^-\}$, то $\pi(D^*(\lambda)) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^-, \omega^+\}$.

Для того чтобы две оператор-функции из $S[\lambda_0]$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их показатели совпадали. Достаточность условия этого утверждения очевидна. Его необходимость вытекает из результатов § 3 и § 6, в которых будет выяснена спектральная роль чисел $k_1, k_2, \dots, k_n, \omega^+$ и ω^- .

Таким образом, каждый класс эквивалентных между собой конечномерных фредгольмовых оператор-функций определяется набором $\{k_1, k_2, \dots, k_n; \omega^+, \omega^-\}$, являющимся показателем оператор-функции из $S[\lambda_0]$, входящей в этот класс.

§ 2. Корневые функции, полюсные функции и набор кратностей в точке

1. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$. Голоморфная в точке λ_0 вектор-функция $\varphi(\lambda)$ со значениями из B_1 и с $\varphi(\lambda_0) \neq 0$ называется *корневой функцией* оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , если вектор-функция $A(\lambda)\varphi(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0 и обращается в этой точке в нуль. Это определение развивает определение корневой (производящей) функции, введенное для аналитических оператор-функций независимо С. Г. Крейном и В. П. Трофимовым [9] и В. И. Мацаевым и Ю. А. Палантом [10].

Если у оператор-функции $A(\lambda)$ существует в точке λ_0 хотя бы одна корневая функция $\varphi(\lambda)$, то число λ_0 называется *характеристическим числом* $A(\lambda)$.

Кратность нуля вектор-функции $A(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 называется *кратностью* корневой функции $\varphi(\lambda)$, а вектор $\varphi_0 = \varphi(\lambda_0)$ — *собственным вектором* $A(\lambda)$, соответствующим характеристическому числу λ_0 .

Все собственные векторы оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 вместе с нулевым вектором образуют линейное множество. Его замыкание называется *ядром* $A(\lambda)$ в точке λ_0 и обозначается через

$\text{Ker } A(\lambda_0)$. Рангом собственного вектора φ_0 называется максимальная из кратностей всех корневых функций $\varphi(\lambda)$ таких, что $\varphi(\lambda_0) = \varphi_0$, если кратности этих функций ограничены. Если эти кратности неограничены, то ранг φ_0 считается равным бесконечности. Через $\text{rang } \varphi_0$ обозначается ранг собственного вектора φ_0 .

Пусть $\alpha = \dim \text{Ker } A(\lambda_0) < \infty$ и ранги всех векторов $\varphi_0 \in \text{Ker } A(\lambda_0)$ конечны. Канонической системой собственных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 называется базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\alpha$ подпространства $\text{Ker } A(\lambda_0)$, обладающий следующим свойством:

$$\text{rang } \varphi_j = \max_{\varphi \in L_j} \text{rang } \varphi \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha),$$

где через L_j обозначена линейная оболочка векторов $\varphi_j, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_\alpha$.

Пусть $n_j = \text{rang } \varphi_j$ ($j = 1, 2, \dots, \alpha$). Легко видеть, что ранг любого собственного вектора $\varphi \in \text{Ker } A(\lambda_0)$ равен одному из чисел n_j . Следовательно, числа n_j ($j = 1, 2, \dots, \alpha$) определяются оператор-функцией $A(\lambda)$ однозначно (хотя сама каноническая система собственных векторов определяется, вообще говоря, неоднозначно). Числа n_j называются частными нулевыми кратностями, а набор $n(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_\alpha\}$ — набором частных нулевых кратностей $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Если точка λ_0 не является характеристическим числом $A(\lambda)$ (то есть $\text{Ker } A(\lambda_0) = \{0\}$), то набор $n(A(\lambda_0))$ считается пустым.

Если оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентны, то

есть $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$, где $E(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_2 \rightarrow B_2]$ и $F(\lambda) \in M_0[\lambda_0; B_1 \rightarrow B_1]$, то общий вид корневых функций $\varphi_2(\lambda)$ для $A_2(\lambda)$ в точке λ_0 дается равенством

$$\varphi_2(\lambda) = F(\lambda) \varphi_1(\lambda),$$

где $\varphi_1(\lambda)$ — произвольная корневая функция $A_1(\lambda)$ в точке λ_0 .

С помощью этого замечания легко доказывается

Теорема 2.1. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномерная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция и равенство

$$A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda), \quad (2.1)$$

где

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_j} DP_j + DP_0, \quad (2.2)$$

является ее факторизацией в точке λ_0 . Пусть, кроме того, $P_0 + P_1 + \dots + P_m = I$, т. е. $\omega^+ = 0$. Тогда

$$\text{Ker } A(\lambda_0) = \text{Im } \sum_{k_j > 0} F^{-1}(\lambda_0) P_j,$$

система векторов $\{F^{-1}(\lambda_0) e_j\}_{k_j > 0}$, где e_j — ненулевой вектор из одномерного подпространства $\text{Im } P_j$, образует каноническую систему

собственных векторов, набор частных нулевых кратностей $n(A(\lambda_0))$ состоит из расположенных в порядке невозрастания чисел $\{k_j\}_{k_j > 0}$.

Пусть $A(\lambda_0) \in M[\lambda_0]$ и $n(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_s\}$. Число $N(A(\lambda_0)) = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ называется нулевой кратностью характеристического числа λ_0 оператор-функции $A(\lambda_0)$.

Если хотя бы один из рангов собственных векторов $A(\lambda)$, соответствующих числу λ_0 , бесконечен или $\dim \text{Ker } A(\lambda_0) = \infty$, то полагаем $N(A(\lambda_0)) = \infty$. Если в точке λ_0 оператор-функция $A(\lambda) (\in M[\lambda_0])$ не имеет корневых функций, то будем считать $N(A(\lambda_0)) = 0$.

Легко видеть, что если для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ имеет место равенство (2.1) и $D(\lambda)$ имеет вид (2.2), то

$$N(A(\lambda_0)) = \sum_{k_j > 0} k_j.$$

Изложенные в этом пункте результаты установлены в [4]. Приведенные определения также заимствованы из [4]. Эти определения являются естественным развитием аналогичных определений для случая голоморфных оператор-функций или операторных полиномов.

2. Голоморфную в точке λ_0 вектор-функцию $\chi(\lambda)$ со значениями из B_2 и с $\chi(\lambda_0) \neq 0$ назовем *полюсной функцией* оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 , если $\chi(\lambda)$ допускает представление $\chi(\lambda) = A(\lambda) \psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — голоморфная в точке λ_0 вектор-функция со значениями из B_1 , причем $\psi(\lambda_0) = 0$. Легко видеть, что для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ существует полюсная функция в точке λ_0 в том и только том случае, когда λ_0 является полюсом $A(\lambda)$. Порядок λ_0 как нуля функции $\psi(\lambda)$ называется *порядком* полюсной функции $\chi(\lambda)$, а вектор $\chi(\lambda_0)$ назовем *полюсным вектором* $A(\lambda)$, соответствующим полюсу λ_0 . Очевидно, порядок любой полюсной функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 не превосходит порядка полюса $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Все полюсные векторы оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 вместе с нулевым вектором образуют линейное множество. Его замыкание назовем *полюсным ядром* $A(\lambda)$ в точке λ_0 и обозначим через $\text{Pol } A(\lambda_0)$.

Рангом полюсного вектора $\gamma_0 \in \text{Pol } A(\lambda_0)$ назовем максимальный из порядков всех полюсных функций $\chi(\lambda)$ таких, что $\chi(\lambda_0) = \gamma_0$. Ранг γ_0 обозначим через $\text{rang } \gamma_0$.

Пусть $\beta = \dim \text{Pol } A(\lambda_0) < \infty$. Канонической системой полюсных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 называется базис $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\beta$ подпространства $\text{Pol } A(\lambda_0)$, обладающий следующим свойством:

$$\text{rang } \gamma_j = \max_{\chi \in L_j} \text{rang } \chi \quad (j = 1, 2, \dots, \beta),$$

где через L_j обозначена линейная оболочка векторов $\gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_\beta$.

Легко видеть, что ранг каждого полюсного вектора $\chi \in \text{Pol } A(\lambda_0)$ равен одному из чисел $p_j = \text{rang } \gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots, \beta$). Следовательно, эти числа определяются оператор-функцией $A(\lambda)$ однозначно. Числа p_j назовем *частными полюсными порядками*, а набор $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_\beta\}$ — *набором* частных полюсных порядков $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Если оператор-функция $A(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0 , то будем считать набор $p(A(\lambda_0))$ пустым.

Набор частных полюсных порядков оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 определяется главной частью оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , то есть набор частных полюсных порядков $A(\lambda)$ в точке λ_0 не меняется при добавлении к $A(\lambda)$ голоморфной в λ_0 оператор-функции $X(\lambda)$. В самом деле, пусть $\chi(\lambda)$ — полюсная функция порядка p оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , то есть $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^p A(\lambda) \psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda)$ — голоморфная в λ_0 вектор-функция, для которой $\psi(\lambda_0) \neq 0$. Тогда, очевидно, вектор-функция $\chi_1(\lambda) = \chi(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^p X(\lambda) \psi(\lambda)$ является полюсной вектор-функцией $A(\lambda) + X(\lambda)$ того же порядка p .

Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ принимает обратимые значения всюду в окрестности точки λ_0 за исключением, быть может, самой точки λ_0 . Непосредственно из соответствующих определений вытекает, что полюсные функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 совпадают с корневыми функциями оператор-функции $A^{-1}(\lambda)$ в той же точке.

Кроме того, легко видеть, что в этом случае $p(A^{-1}(\lambda_0)) = p(A(\lambda_0))$.

Теорема 2.2. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномерная и фредгольмова оператор-функция в точке λ_0 и равенство

$$A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda), \quad (2.3)$$

где

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^m (\lambda - \lambda_0)^{k_j} DP_j + DP_0, \quad (2.4)$$

является ее факторизацией в точке λ_0 .

Тогда

$$\text{Pol } A(\lambda_0) = \text{Im} \sum_{k_j < 0} E(\lambda_0) DP_j,$$

система векторов $\{E(\lambda_0) De_j\}_{k_j < 0}$, где e_j — ненулевой вектор из n -номерного подпространства $\text{Im } P_j$, образует каноническую систему полюсных векторов, набор частных полюсных порядков $p(A(\lambda_0))$ состоит из расположенных в порядке невозрастания чисел $\{-k_j\}_{k_j < 0}$.

Эта теорема доказывается с помощью следующего простого замечания. Если оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ эквивалентны, то есть $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$, то их полюсные функции $\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ связаны равенствами

$$\chi_1(\lambda) = E(\lambda) \chi_2(\lambda).$$

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. Число $P(A(\lambda_0)) = p_1 + p_2 + \dots + p_r$ называется полюсной кратностью полюса λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$.

Если хотя бы один из рангов полюсных векторов $A(\lambda)$, соответствующих λ_0 , бесконечен или $\dim \text{Pol } A(\lambda_0) = \infty$, то полагаем $P(A(\lambda_0)) =$

$= \infty$. Если оператор-функция $A(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0 , то будем считать $P(A(\lambda_0)) = 0$.

Отметим, что если для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ имеет место равенство (2.3) и $D(\lambda)$ имеет вид (2.4), то

$$P(A(\lambda_0)) = - \sum_{k_j < 0} k_j.$$

3. Пусть для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ заданы наборы $n(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_\alpha\}$ и $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_\beta\}$. Образует набор $m(A(\lambda_0)) = \{k_1, k_2, \dots, k_{\alpha+\beta}\}$, где $k_j = n_j$ ($j=1, 2, \dots, \alpha$) и $k_{\alpha+j} = -p_{\beta+1-j}$ ($j=1, 2, \dots, \beta$). Этот набор назовем *полным набором частных кратностей* оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает

Теорема 2.3. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномероморфная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция, эквивалентная диагональной оператор-функции $D(\lambda) \in S[\lambda_0]$ с показателем $\{k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \infty\}$. Тогда

$$m(A(\lambda_0)) = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}.$$

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $m(A(\lambda_0)) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$. Число $M(A(\lambda_0)) = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ называется *полной кратностью* числа λ_0 для оператор-функции $A(\lambda)$. Очевидно, $M(A(\lambda_0)) = N(A(\lambda_0)) - P(A(\lambda_0))$.

Отметим, что если пространство $B_1 = B_2$ гильбертово и все значения оператор-функции $A(\lambda) - I$ ($A(\lambda) \in M[\lambda_0]$) в окрестности точки λ_0 ($\lambda \neq \lambda_0$) являются ядерными операторами, то $M(A(\lambda_0))$ равно порядку функции $\det A(\lambda)$ в точке λ_0 (см. [17, 3, 4]).

Отметим еще, что для любой конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$ имеет место равенство $m(A(\lambda_0)) = m(A^*(\lambda_0))$.

§ 3. Обобщение формулы М. В. Келдыша для главной части резольвенты

1. Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $\varphi(\lambda)$ — ее корневая функция в точке λ_0 кратности r . Если

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \varphi_j,$$

то $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}$ называются *присоединенными* векторами к собственному вектору $\varphi_0 = \varphi(\lambda_0)$, а система $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{r-1}$ называется *цепочкой* из собственного и присоединенных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 . Это определение естественным образом развивает первоначальное определение М. В. Келдыша для полиномиальных оператор-функций (см. [4]).

Пусть оператор $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ имеет вид

$$A(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_j.$$

Легко видеть, что система векторов $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ тогда и только тогда образует цепочку собственных и присоединенных векторов, когда существуют векторы $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{n+\nu}$ такие, что выполняются соотношения

$$\sum_{j=-\nu}^s A_j \varphi_{s-j} = 0 \quad (s = -\nu, -\nu+1, \dots, n).$$

Рассмотрим случай, когда для оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ число λ_0 является характеристическим и $A(\lambda)$ имеет в точке λ_0 конечную нулевую кратность. Предположим, что $\varphi_0^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, \dots, \varphi_0^{(a)}$ образует каноническую систему собственных векторов $A(\lambda)$, отвечающих числу λ_0 . Обозначим через $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)}$, где $n_j = \text{rang } \varphi_0^{(j)}$, цепочку присоединенных векторов к $\varphi_0^{(j)}$. Система

$$\varphi_0^{(j)}, \varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, a)$$

называется *канонической* системой собственных и присоединенных векторов оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Точка λ_0 называется *нормальной* точкой оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$, если в этой точке $A(\lambda)$ конечномероморфна и фредгольмова и во всех $\lambda (\neq \lambda_0)$ из некоторой окрестности λ_0 значения $A(\lambda)$ являются обратимыми операторами. Как уже отмечалось в § 1, точка λ_0 является нормальной для оператор-функции $A(\lambda)$ в том и только том случае, когда $A(\lambda)$ допускает нормальную факторизацию в этой точке. Отсюда непосредственно вытекает, что если точка λ_0 является нормальной для $A(\lambda)$, то она является также нормальной для $A^{-1}(\lambda)$.

Условимся через $\Xi(A(\lambda))$ обозначать главную часть оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 .

Теорема 3.1. Пусть λ_0 является нормальной точкой оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$. Тогда существуют канонические системы

$$\varphi_0^{(j)}, \varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_{n_j}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, a)$$

и

$$\Psi_0^{(j)}, \Psi_1^{(j)}, \dots, \Psi_{n_j}^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, a)$$

собственных и присоединенных векторов в точке λ_0 соответственно оператор-функций $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$, такие, что

$$\Xi(A^{-1}(\lambda))x = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^{n_j} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{r=0}^{n_j-k} \Psi_r^{(j)}(x) \varphi_{n_j-k-r}^{(j)}. \quad (3.1)$$

Для случая операторных полиномов в гильбертовом пространстве эта теорема установлена М. В. Келдышем [1]. В приведенном виде она доказана в [4]. Ее доказательство проводится сперва для диаго-

нальных оператор-функций из $S[\lambda_0]$, а затем с помощью факторизации распространяется на общий случай.

2. Формула (3.1) позволяет выразить главную часть оператор-функции $A_1(\lambda) = A^{-1}(\lambda)$ в точке λ_0 через некоторые коэффициенты Тейлора определенной системы полюсных функций оператор-функций $A_1(\lambda)$ и $A_1^*(\lambda)$ в точке λ_0 . Эта интерпретация формулы (3.1) позволяет ее обобщить для любых конечномероморфных и фредгольмовых в точке λ_0 оператор-функций. Для формулировки соответствующего обобщения понадобится определение присоединенных векторов к полюсному вектору.

Пусть $\chi(\lambda)$ — полюсная функция оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ в точке λ_0 и

$$\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j (\lambda - \lambda_0)^j.$$

Если порядок $\chi(\lambda)$ равен p , то векторы $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p-1}$ назовем *присоединенными* к полюсному вектору χ_0 , а систему векторов $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_p$ ($p \leq r-1$) будем называть *цепочкой* из полюсного и присоединенных к нему векторов.

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и в точке λ_0 оператор-функция $A(\lambda)$ имеет конечную полюсную кратность. Обозначим через $\chi_0^{(1)}, \chi_0^{(2)}, \dots, \chi_0^{(\beta)}$ ($\beta = \dim \text{Pol } A(\lambda_0)$) каноническую систему полюсных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 и через p_j — числа $\text{rang } \chi_0^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, \beta$). Если для каждого $j = 1, 2, \dots, \beta$ система $\chi_0^{(j)}, \chi_1^{(j)}, \dots, \chi_{p_j-1}^{(j)}$ образует цепочку из полюсного и присоединенного к нему векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 , то систему

$$\chi_0^{(j)}, \chi_1^{(j)}, \dots, \chi_{p_j-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, \beta) \quad (3.2)$$

назовем *канонической системой* полюсных и присоединенных векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Если оператор-функция является конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 , то таковой является и $A^*(\lambda)$, причем $p(A(\lambda_0)) = p(A^*(\lambda_0))$. Последнее непосредственно следует из возможности факторизации оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Теорема 3.2. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномероморфная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция. Тогда существуют канонические системы

$$\chi_0^{(j)}, \chi_1^{(j)}, \dots, \chi_{p_j-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, \beta)$$

и

$$Z_0^{(j)}, Z_1^{(j)}, \dots, Z_{p_j-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, \beta)$$

полюсных и присоединенных векторов в точке λ_0 соответственно оператор-функций $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$ такие, что для главной части $\Xi(A(\lambda))$ оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 имеет место представление

$$\Xi(A(\lambda))x = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{p_j} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{r=0}^{p_j-k} Z_r^{(j)}(x) \chi_{p_j-k-r}. \quad (3.3)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Учитывая, что корневые функции $A(\lambda)$ в нормальной точке λ_0 совпадают с полюсными функциями $A^{-1}(\lambda)$ в этой точке, можно из теоремы 3.2 вывести теорему 3.1.

3. Формула (3.3) позволяет получить главную часть конечномероморфной и фредгольмовой в точке λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$ по каноническим системам полюсных и присоединенных к ним векторов $A(\lambda)$ и $A^*(\lambda)$. В этом пункте решается обратная задача. Указывается правило построения канонической системы полюсных и присоединенных к ним векторов $A(\lambda)$ в точке λ_0 по $\Xi(A(\lambda))$.

Пусть $A(\lambda)$ — конечномероморфная в точке λ_0 оператор-функция и

$$\Xi(A(\lambda)) = (\lambda - \lambda_0)^{-1} K_1 + (\lambda - \lambda_0)^{-\nu+1} K_2 + \dots + (\lambda - \lambda_0)^{-1} K_\nu.$$

Обозначим через U_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) пересечение ядер операторов $K_1, K_2, \dots, K_j$ и через V_j какое-либо дополнение к U_j в U_{j-1} ($U_0 = B_1$). Положим $V_1 = I_1$, а подпространства V_j ($j=2, 3, \dots, \nu$) разложим в прямую сумму $V_j = H_j + H_j'$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$K_j H_j \subset K_1 H_1 + K_2 H_2 + \dots + K_{j-1} H_{j-1} \quad (j=2, 3, \dots, \nu)$$

и

$$K_j H_j \cap (K_1 H_1 + K_2 H_2 + \dots + K_{j-1} H_{j-1}) = \{0\} \quad (j=2, 3, \dots, \nu).$$

При этих обозначениях имеет место

Теорема 3.3. Для конечномероморфной в точке λ_0 оператор-функции $A(\lambda)$ имеет место равенство

$$\text{Pol } A(\lambda_0) = K_1 H_1 + K_2 H_2 + \dots + K_\nu H_\nu.$$

Для любого ненулевого вектора $\psi \in H_j$ ($j=1, 2, \dots, \nu$) векторы

$$\chi^{(0)} = K_j \psi, \chi^{(1)} = K_{j-1} \psi, \dots, \chi^{(\nu-j)} = K_\nu \psi \quad (3.4)$$

образуют цепочку из полюсного и присоединенных векторов для $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

Пусть $\{\psi_l\}_{l=1}^p$ — объединение базисов всех подпространств H_j ($j=1, 2, \dots, \nu$) и $\{\chi_l^{(k)}\}$ ($l=1, 2, \dots, p$) — система, построенная для вектора $\psi = \psi_l$ по правилу (3.4). Тогда системы $\{\chi_l^{(k)}\}$ ($l=1, 2, \dots, p$) образуют каноническую систему полюсных и присоединенных векторов для $A(\lambda)$ в точке λ_0 .

В случае, когда λ_0 является нормальной точкой оператор-функции $A(\lambda)$, теорема 3.3 дает правило построения канонической системы собственных и присоединенных векторов для $A(\lambda)$ в точке λ_0 по коэффициентам главной части оператора $A^{-1}(\lambda)$.

§ 4. Основные теоремы об оператор-функциях, нормальных в области

1. Пусть G — некоторая область в комплексной плоскости. Оператор-функция $A(\lambda)$ со значениями из $L(B_1 \rightarrow B_2)$ называется *нормальной* в G , если она голоморфна и обратима всюду в G за исключением, быть может, конечного числа точек, которые являются ее нормальными точками. Эти исключительные точки назовем *особыми точками* $A(\lambda)$.

Положим

$$M(A(\lambda); G) = \sum_{j=1}^k M(A(\lambda_j)),$$

где λ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — все особые точки $A(\lambda)$ в G .

Через $N[G] = N[G; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначим множество всех нормальных оператор-функций в области G , а через $M_0[G] = M_0[G; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначим множество всех голоморфных в G оператор-функций, все значения которых обратимы.

Теорема 4.1. Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in N[G]$. Тогда

$$M(A(\lambda); G) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{sp} \int_{\Gamma} A'(\lambda) A^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad (4.1)$$

где Γ — простой замкнутый контур, содержащийся в G и ограничивающий область, в которую попадают все особые точки $A(\lambda)$ из G .

Оператор, стоящий под знаком следа в правой части равенства (4.1), конечномерен. След этого оператора равен сумме всех его собственных чисел (с учетом их кратностей).

Теорема 4.1 установлена в [4]. Она выводится из следующей теоремы.

Теорема 4.2. Пусть λ_0 — нормальная точка оператор-функции $A(\lambda)$, тогда

$$M(A(\lambda_0)) = (\lambda - \lambda_0) \operatorname{sp} \Xi(A'(\lambda) A^{-1}(\lambda)).$$

Именно в такой формулировке для случая полиномиальных операторных пучков эта теорема установлена М. В. Келдышем [1]. Для голоморфных оператор-функций она доказана А. С. Маркусом и Е. И. Сигалом [3].

В [4] теорема 4.2 доказана с помощью теоремы 1.1 о факторизации.

Как и в классической теории функций, теорема 4.1 допускает следующее обобщение, полученное в [4].

Теорема 4.3. Пусть $A(\lambda) \in N[G]$ и $f(\lambda)$ — аналитическая в G скалярная функция, тогда

$$\operatorname{sp} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) A'(\lambda) A^{-1}(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^k M(A(\lambda_j)) f(\lambda_j),$$

где Γ — такой же контур, как в теореме 4.1, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — система всех особых точек $A(\lambda)$ из G .

Из теоремы 4.2 легко выводится

Теорема 4.4. Если точка λ_0 является нормальной для оператор-функций $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$, то она является нормальной и для их произведения $A(\lambda) = A_1(\lambda) A_2(\lambda)$, причем

$$M(A(\lambda_0)) = M(A_1(\lambda_0)) + M(A_2(\lambda_0)).$$

Эта теорема для голоморфных оператор-функций установлена в [3, 11]. В общем случае она получена в [4].

С помощью теоремы 4.4 доказывается следующая теорема о выделении особенностей.

Теорема 4.5. Пусть $A(\lambda) \in N[G]$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — система всех особых точек $A(\lambda)$ в G . Тогда $A(\lambda)$ допускает следующие представления

$$A(\lambda) = E(\lambda) (I + K(\lambda)), \quad A(\lambda) = (I + R(\lambda)) F(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ и $F(\lambda) \in M_0[G]$, а $K(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — рациональные в G оператор-функции вида

$$K(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j} (\lambda - \lambda_j)^{-\nu} K_{\nu j}, \quad R(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^{\nu_j} (\lambda - \lambda_j)^{\nu} R_{\nu j}$$

с конечномерными коэффициентами $K_{\nu j}$ и $R_{\nu j}$.

2. Оператор-функцию $A(\lambda) \in N[G]$ назовем вполне нормальной, если $A(\lambda)$ допускает расширение по непрерывности на замыкание G и во всех граничных точках G оператор-функция $A_1(\lambda)$ принимает обратимые значения.

Теорема 4.6. Пусть оператор-функция $A_1(\lambda)$ вполне нормальна в области G с границей Γ . Если конечномерноморфная* в G и непрерывная вплоть до Γ оператор-функция $A_2(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\rho(A_1^{-1}(\lambda) A_2(\lambda)) < 1 \quad (\lambda \in \Gamma),$$

где $\rho(C)$ — спектральный радиус оператора C , то оператор-функция $A(\lambda) = A_1(\lambda) + A_2(\lambda)$ вполне нормальна в G и

$$M(A(\lambda); G) = M(A_1(\lambda); G).$$

При дополнительных ограничениях эта теорема установлена в [2, 3]. Во всей общности она содержится в [4].

§ 5. Факторизация оператор-функций относительно контура

1. Пусть Γ — линия в комплексной плоскости, состоящая из конечного числа непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых

* Оператор-функция $A(\lambda)$ называется конечномерноморфной в области G , если она конечномерноморфна во всех точках этой области.

кривых. Предполагается, что контур Γ разбивает расширенную плоскость на два открытых множества G^+ и G^- , причем каждая точка Γ является граничной как для G^+ , так и для G^- . Кроме того, предполагается, что бесконечно удаленная точка принадлежит G^- и $0 \in G^+$.

В этом параграфе рассматривается случай $B_1 = B_2 = B$.

В статье [12] было введено следующее определение факторизации оператор-функций. Пусть $A(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) — непрерывная на Γ оператор-функция в $L = L(B \rightarrow B)$. Представление оператор-функции $A(\lambda)$ в виде

$$A(\lambda) = A_-(\lambda) D(\lambda) A_+(\lambda) \quad (\lambda \in \Gamma) \quad (5.1)$$

называется *факторизацией* оператор-функций $A(\lambda)$ относительно контура Γ , если множители обладают следующими свойствами:

1) оператор-функция $D(\lambda)$ имеет вид

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^{x_j} P_j + P_0,$$

где операторы P_j ($j=1, 2, \dots, n$) являются взаимно ортогональными одномерными проекторами из L , $P_0 = I - \sum_{j=1}^n P_j$ и $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ — некоторые целые числа, отличные от нуля;

2) оператор-функции $A_-(\lambda)$, $A_+(\lambda)$ допускают продолжения, голоморфные внутри и непрерывные в множествах $G^- \cup \Gamma$, $G^+ \cup \Gamma$, причем все значения оператор-функций $A_-(\lambda)$ и их продолжения обратимы.

Если оператор-функция $A(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) допускает факторизацию, то, как показано в [12], числа $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ однозначно определяются самой оператор-функцией $A(\lambda)$. Число $\text{Ind } A(\lambda)$, определяемое равенством

$$\text{Ind } A(\lambda) = \sum_{j=1}^n x_j (= \text{Ind } (A(\lambda); \Gamma))$$

назовем *суммарным индексом* оператор-функции $A(\lambda)$.

Теорема 5.1. Пусть $A(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) — непрерывная оператор-функция со значениями из L , допускающая продолжение в $\Gamma \cup G^+$, являющееся вполне нормальной в G^+ оператор-функцией.

Тогда оператор-функция $A(\lambda)$ допускает факторизацию (5.1) относительно контура Γ (со свойствами 1) и 2)), причем множитель $A_-(\lambda)$ может быть выбран так, чтобы он имел вид

$$A_-(\lambda) = I + \sum_{r=1}^k \sum_{j=-n_r}^0 (\lambda - a_r)^j K_{rj}, \quad (5.2)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k \in G^+$ и операторы K_{rj} конечномерны.

Эта теорема доказывается сведением к конечномерному случаю. Последнее возможно произвести в силу теоремы 4.5.

Теорема 5.1 сохраняет силу, если в ее формулировке заменить G^+ на G^- , а формулу (5.2) заменить на соответствующую формулу

для $A(i)$. Эти две теоремы позволяют легко доказать следующее предложение.

Теорема 5.2. *Оператор-функция $A(i) (i \in \Gamma)$ с обратимыми значениями допускает факторизацию относительно контура Γ в том и только том случае, когда она представима в виде $A(i) = X(i) Y(i)$, где $X(i)$ — вполне нормальная оператор-функция в G^- , а $Y(i)$ вполне нормальна в G^+ .*

2. В следующем предложении указывается формула для вычисления суммарного индекса.

Теорема 5.3. *Для каждой вполне нормальной в G^+ оператор-функции $A(i)$ имеет место равенство*

$$\text{Ind}(A(i); \Gamma) = M(A(i); G^+).$$

Если оператор-функция $dA(i)/di (i \in G^+)$ допускает непрерывное продолжение на Γ , то, кроме того, имеет место равенство

$$\text{Ind}(A(i); \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{sp} \int_{\Gamma} A'(i) A^{-1}(i) di.$$

Аналогичная теорема справедлива в случае, когда оператор-функция $A(i)$ вполне нормальна в G^- .

Из теоремы 5.3 легко выводится равенство

$$\text{Ind}(A_1(i) A_2(i)) = \text{Ind}(A_1(i)) + \text{Ind}(A_2(i))$$

для случая, когда $A_1(i)$ и $A_2(i)$ одновременно являются вполне нормальными в G^+ или G^- , а также в случае, когда $A(i)$ вполне нормальна в G^- , а $A_2(i)$ вполне нормальна в G^+ .

Результаты этого параграфа получены совместно с Ю. Лайтерером. При более ограничительных условиях теорема 5.1 установлена в [12].

§ 6. Нулевые фактор-кратности оператор-функций

1. Пусть $A(i) \in M[l_0]$ и пусть λ_0 — характеристическое число $A(i)$. Все собственные векторы бесконечного ранга $A(i)$ в точке λ_0 вместе с нулевым вектором образуют линейное множество. Его замыкание обозначим через $U(A(\lambda_0))$. Фактор-пространство $\text{Ker } A(\lambda_0)/U(A(\lambda_0))$ называется *фактор-ядром* $A(i)$ в точке λ_0 и обозначается через $\overline{\text{Ker}} A(\lambda_0)$.

Элементами фактор-ядра являются классы собственных векторов, ранги которых конечны и равны между собой. Эти классы называются *собственными фактор-векторами* оператор-функции $A(i)$ в точке λ_0 . Если $\Phi \in \overline{\text{Ker}} A(\lambda_0)$, то *рангом* Φ называется ранг любого собственного вектора класса Φ . Ранг Φ обозначается через $\text{Rang } \Phi$.

Пусть $\alpha = \dim \text{Ker } A(\lambda_0) < \infty$. Канонической системой собственных фактор-векторов $A(i)$, отвечающей числу λ_0 , называется система

фактор-векторов $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\alpha$, ранги которых обладают следующим свойством: $\text{Rang } \Phi_1$ является максимальным из рангов всех собственных фактор-векторов, соответствующих λ_0 , а $\text{Rang } \Phi_j$ ($j = 2, 3, \dots, \alpha$) является максимальным из рангов всех собственных фактор-векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $\text{Ker } A(\lambda_0)$ к линейной оболочке фактор-векторов $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{j-1}$.

Пусть $n_j = \text{Rang } \Phi_j$ ($j = 1, 2, \dots, \alpha$). Легко видеть, что ранг любого собственного фактор-вектора Φ , соответствующего числу λ_0 , всегда равен одному из чисел n_j . Следовательно, числа n_j ($j = 1, 2, \dots, \alpha$) определяются оператор-функцией $A(\lambda)$ однозначно (сама каноническая система собственных фактор-векторов определяется, вообще говоря, неоднозначно). Числа n_j называются *частными нулевыми фактор-кратностями* оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 , а набор $\bar{n}(A(\lambda_0)) = [n_1, n_2, \dots, n_\alpha]$ — *набором частных нулевых фактор-кратностей*. Число $\bar{N}(A(\lambda_0)) = \sum_{j=1}^{\alpha} n_j$ называется *нулевой фактор-кратностью* опера-

тор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 . Если $\text{Ker } A(\lambda_0) = U(A(\lambda_0))$, то положим $\bar{N}(A(\lambda_0)) = 0$ и будем считать набор $\bar{n}(A(\lambda_0))$ пустым.

Если $\dim \text{Ker } A(\lambda_0) = \infty$, то положим $\bar{N}(A(\lambda_0)) = \infty$. Легко видеть, что если ранги всех собственных векторов $A(\lambda)$, соответствующих λ_0 , конечны, то есть $\text{Ker } A(\lambda_0) = \text{Ker } A(\lambda_0)$, то $\bar{N}(A(\lambda_0)) = \bar{N}(A(\lambda_0))$ и $\bar{n}(A(\lambda_0)) = \bar{n}(A(\lambda_0))$.

Если оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$ эквивалентны в точке λ_0 , то $\bar{n}(A_1(\lambda_0)) = \bar{n}(A_2(\lambda_0))$ и, следовательно, $\bar{N}(A_1(\lambda_0)) = \bar{N}(A_2(\lambda_0))$.

Теорема 6.1. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — конечномероморфная и фредгольмова в точке λ_0 оператор-функция и равенство

$$A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda),$$

где $D(\lambda) = \sum_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j)^{k_j} Q_j D P_j + Q_0 D P_0$, является ее факторизацией в точке λ_0 . Тогда имеют место равенства

$$\text{Ker } A(\lambda_0) = \text{Im } F_n^{-1}(\lambda_0) \left(I - \sum_{k_j > 0} P_j - P_0 \right),$$

$$U(A(\lambda_0)) = \text{Im } F^{-1}(\lambda_0) \left(I - \sum_{j=0}^n P_j \right), \quad U(A^*(\lambda_0)) = \text{Im } E^{*-1}(\lambda_0) \left(I^* - \sum_{j=0}^n Q_j^* \right),$$

$$\omega^+(D(\lambda_0)) = \dim U(A(\lambda_0)) \quad \text{и} \quad \omega^-(D(\lambda_0)) = \dim U(A^*(\lambda_0)).$$

Набор частных нулевых фактор-кратностей $\bar{n}(A(\lambda_0))$ совпадает с системой чисел $\{k_j\}_{k_j > 0}$ и

$$\bar{N}(A(\lambda_0)) = \sum_{k_j=0} k_j.$$

Конечномероморфная в области G оператор-функция называется *фредгольмовой* в этой области, если она фредгольмова во всех точках G . С помощью теоремы 6.1 легко доказывается

Теорема 6.2. Пусть $A(\lambda)$ — конечномероморфная и фредгольмова оператор-функция в области G . Тогда для всех точек $\lambda \in G$ число $\dim U(A(\lambda_0))$ принимает одно и то же значение. Всюду за исключением, быть может, конечного или счетного множества точек с предельными на границе G , имеет место равенство $\text{Ker } A(\lambda) = U(A(\lambda))$; в упомянутых изолированных точках $\bar{N}(A(\lambda)) > 0$ и $\text{Ker } A(\lambda) \supset U(A(\lambda))$.

Теоремы 6.1 и 6.2 установлены в [4, 5]. Для голоморфных оператор-функций теорема 6.2 доказана в [13] в более общем случае. Часть утверждений теоремы 6.2 установлена ранее для голоморфных оператор-функций в [14] и для некоторых классов конечномероморфных оператор-функций в [15] и [16].

Точку λ_0 назовем *особой* точкой оператор-функции $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$, если λ_0 является полюсом $A(\lambda)$ или $\bar{N}(A(\lambda_0)) > 0$.

Теорема 6.3. Пусть $A(\lambda)$ — конечномероморфная и фредгольмова оператор-функция в области G и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — все особые точки $A(\lambda)$ в G . Тогда $A(\lambda)$ можно представить в виде

$$A(\lambda) = A_1(\lambda)(I + K(\lambda)), \quad A(\lambda) = (I + R(\lambda))A_2(\lambda),$$

где $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ — голоморфные и фредгольмовы в G оператор-функции, для которых

$$U(A_j(\lambda)) = \text{Ker } A_j(\lambda) \quad (\lambda \in G; j=1, 2);$$

оператор-функции $K(\lambda)$ и $R(\lambda)$ имеют вид

$$K(\lambda) = \sum_{l=1}^s \sum_{\nu=-n_j}^{m_j} (\lambda - \lambda_j)^\nu K_{jl},$$

и

$$R(\lambda) = \sum_{l=1}^s \sum_{\nu=-p_j}^{q_j} (\lambda - \lambda_j)^\nu R_{jl},$$

где K_{jl} и R_{jl} — конечномерные операторы. Кроме того

$$n(I + K(\lambda)) = n(I + R(\lambda)) = \bar{n}(A(\lambda)) \quad (\lambda \in G).$$

2. Теорему 4.4 о кратности произведения оператор-функций можно дополнить следующим предложением.

Теорема 6.4. Пусть $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[\lambda_0]$ — две конечномероморфные и фредгольмовы в точке λ_0 оператор-функции. Тогда для их произведения $A(\lambda) = A_1(\lambda)A_2(\lambda)$ имеют место соотношения

$$\bar{N}(A(\lambda_0)) \leq \bar{N}(A_1(\lambda_0)) + \bar{N}(A_2(\lambda_0)), \quad P(A(\lambda_0)) \leq P(A_1(\lambda_0)) + P(A_2(\lambda_0)) \quad (6.1)$$

и

$$\dim U(A(\lambda_0)) \leq \dim U(A_1(\lambda_0)) + \dim U(A_2(\lambda_0)).$$

Эта теорема по существу установлена в [7]. Из нее вытекает, что если $U(A_1(\lambda_0)) = U(A_2(\lambda_0)) = \{0\}$, то $U(A(\lambda_0)) = \{0\}$ и

$$N(A(\lambda_0)) \leq N(A_1(\lambda_0)) + N(A_2(\lambda_0)).$$

Для формулировки одного уточнения теоремы 6.2 введем следующие обозначения.

Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$, причем $\bar{n}(A(\lambda_0)) = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ и $p(A(\lambda_0)) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. Числа $\bar{n}_j(A(\lambda_0))$ и $p_j(A(\lambda_0))$ ($j=1, 2, \dots$) определим равенствами

$$\bar{n}_j(A(\lambda_0)) = \begin{cases} n_j; & j \leq k \\ 0; & j > k \end{cases}; \quad p_j(A(\lambda_0)) = \begin{cases} p_j; & j \leq s \\ 0; & j > s \end{cases}.$$

Теорема 6.5. При условиях теоремы 6.4 имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^m \bar{n}_j(A(\lambda_0)) \leq \sum_{j=1}^m \bar{n}_j(A_1(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^m \bar{n}_j(A_2(\lambda_0)) \quad (m=1, 2, \dots)$$

и

$$\sum_{j=1}^m p_j(A(\lambda_0)) \leq \sum_{j=1}^m p_j(A_1(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^m p_j(A_2(\lambda_0)) \quad (m=1, 2, \dots).$$

Эта теорема доказывается с помощью теоремы 6.4.

3. Рассмотрим еще изменение кратности оператор-функции при ее малых возмущениях, если не выполнены условия теоремы 4.6 о полной нормальности невозмущенной оператор-функции.

Теорема 6.5. Пусть $A_1(\lambda)$ — голоморфная и фредгольмова оператор-функция в замыкании области G , причем для всех $\lambda \in G$, за исключением, быть может, конечного числа точек, $\dim \text{Ker } A(\lambda) = 0$. Пусть Γ — граница области G . Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что всякая оператор-функция $A_2(\lambda)$, голоморфная в G , непрерывная вплоть до Γ и удовлетворяющая условию

$$\max_{\lambda \in \Gamma} \|A_1(\lambda) - A_2(\lambda)\| < \delta,$$

является фредгольмовой в $GU\Gamma$, причем

$$N(A_2(\lambda); G) \leq N(A_1(\lambda); G),$$

где через $N(A(\lambda); G)$ обозначена сумма нулевых кратностей $A(\lambda)$ во всех особых точках из G .

Каким бы малым ни было число δ , величина $N(A_2(\lambda); G)$ при соответствующем выборе $A_2(\lambda)$ может принимать все значения от нуля до $N(A(\lambda); G)$.

Теорема 6.5 установлена в [17]. В [7] предложено другое доказательство этой теоремы и установлено последнее замечание.

§ 7. Факторизация оператор-функций в области и ее приложения

1. Пусть G — некоторая область комплексной плоскости. Через $M[G] = M[G; B_1 \rightarrow B_2]$ обозначим множество оператор-функций $A(\lambda)$ ($\lambda \in G$) со значениями из $L(B_1 \rightarrow B_2)$, каждая из которых гооморфна всюду в G , за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет полюсы.

Оператор-функцию $D(\lambda) \in M[G]$ назовем *диагональной рациональной* в G , если она представима в виде

$$D(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j(\lambda) Q_j D P_j, \quad (7.1)$$

где $r_j(\lambda)$ — рациональные функции, все нули и полюсы которых лежат в G , P_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — система взаимно ортогональных проекторов в пространстве B_1 , Q_j ($j = 0, 1, \dots, k$) — система взаимно ортогональных проекторов в пространстве B_2 , а $D \in L(B_1 \rightarrow B_2)$ — оператор, изоморфно отображающий подпространство $\text{Im } P_j$ на подпространство $\text{Im } Q_j$ ($j = 0, 1, \dots, k$).

Легко видеть, что диагональная рациональная в G оператор-функция $D(\lambda)$ конечномероморфна и фредгольмова в G в том и только том случае, когда $D(\lambda)$ допускает представление (7.1) со следующими дополнительными свойствами:

$$\dim Q_j = \dim P_j = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad r_0(\lambda) \equiv 1 \quad (7.2)$$

и

$$\dim(I - P_0) < \infty, \quad \dim(I - Q_0) < \infty. \quad (7.3)$$

Обозначим через $S[G]$ множество всех конечномероморфных и фредгольмовых в G диагональных и рациональных оператор-функций. При этом будем всегда предполагать, что они представлены в виде (7.1) и выполняются соотношения (7.2), (7.3).

Две оператор-функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda) \in M[G]$ назовем *эквивалентными* в G , если $A_1(\lambda) = E(\lambda) A_2(\lambda) F(\lambda)$, где $E(\lambda) \in M_0[G; B_2 \rightarrow B_2]$ и $F(\lambda) \in M_0[G; B_1 \rightarrow B_1]$. Если оператор-функция $A(\lambda) \in M[G]$ эквивалентна оператор-функции $D(\lambda) \in S[G]$, то равенство, устанавливающее эту эквивалентность, назовем *факторизацией* $A(\lambda)$ в области G .

Теорема 7.1. Для того чтобы оператор-функция $A(\lambda) \in M[G]$ допускала факторизацию в области G , необходимо и достаточно, чтобы $A(\lambda)$ была конечномероморфна и фредгольмова в G .

Если оператор-функция $A(\lambda)$ допускает факторизацию в G , то диагональный множитель в ней

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^k r_j(\lambda) Q_j DP_j + Q_0 DP_0 \quad (7.4)$$

может быть выбран так, чтобы отношения $r_{j+1}(\lambda)/r_j(\lambda) (j=1, 2, \dots, k-1)$ были полиномами.

Если оператор-функция $A(\lambda)$ нормальна в G и $B_2=B_1$, то равенство (7.4) может быть заменено равенством

$$D(\lambda) = \sum_{j=1}^k r_j(\lambda) P_j + P_0.$$

Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ нормальна в G и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — все ее особые точки. Если $A(\lambda)$ эквивалентна в точке λ_j степенной диагональной оператор-функции $D_j(\lambda)$, то в области G она эквивалентна произведению всех $D_j(\lambda)$.

Теорема 7.1 доказана в [6]. В ее доказательстве используется одно предложение из статьи М. А. Шубина [18], доказанное топологическими методами. В замкнутой части G теорема 7.1 может быть доказана без использования этого предложения.

2. Из теоремы 7.1 (см. [6]) непосредственно следует

Теорема 7.2. Пусть оператор-функция $A(\lambda) \in M[G]$ конечно-мероморфна и фредгольмова в области G и имеет в этой области не более конечного числа особых точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда существуют оператор-функции $F(\lambda) \in M_0[G; B_1 \rightarrow B_1]$ и $E(\lambda) \in M_0[G; B_2 \rightarrow B_2]$ такие, что для всех $\lambda \in G$, за исключением особых точек,

$\text{Ker } A(\lambda) = F(\lambda) V_1$ и $\text{Im } A(\lambda) = E(\lambda) V_2$ ($\lambda \in G, \lambda \neq \lambda_j, j=1, 2, \dots, n$),

где V_j — некоторое фиксированное подпространство $B_j (j=1, 2)$. В особых точках имеют место соотношения

$$\text{Ker } A(\lambda_j) \supset F(\lambda_j) V_1 \text{ и } \text{Im } A(\lambda_j) \subset E(\lambda_j) V_2 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

В случае отсутствия особых точек при более общих предположениях эта теорема установлена в [18].

3. Остановимся еще на одном приложении теоремы 7.1, изложенном в [6]. Пусть $A(\lambda) \in M[\lambda_0]$ и $y \in B_2$. Голоморфную в точке λ_0 вектор-функцию $x(\lambda)$ с $x(\lambda_0) \neq 0$ назовем функциональным решением уравнения

$$A(\lambda) x = y, \quad (7.5)$$

если вектор-функция $A(\lambda) x(\lambda) - y$ голоморфна в точке λ_0 и обращается в этой точке в нуль. Вектор $x_0 = x(\lambda_0)$ называется решением уравнения (7.5) в точке λ_0 . Порядок λ_0 как нуля вектор-функции $A(\lambda) x(\lambda) - y$ называется кратностью функционального решения $x(\lambda)$. Рангом решения x_0 уравнения (7.2) называется максимальная из кратностей всех функциональных решений $x(\lambda)$ таких, что $x(\lambda_0) = x_0$, если эти кратности

сти ограничены в совокупности. Если же они неограничены, то будем полагать ранг x_0 равным бесконечности.

Обозначим через $R(A(\lambda_0))^*$ множество всех векторов $y \in B_2$, для которых ранг решения уравнения (7.5) в точке λ_0 неограничен.

Теорема 7.3. Пусть $A(\lambda) \in M[G]$ — конечномероморфная и фредгольмова в области G оператор-функция, Ψ — множество всех особых точек $A(\lambda)$ в G и $\Lambda = G \setminus \Psi$. Для любого вектора $y \in B_2$ имеет место альтернатива: либо уравнение (7.5) разрешимо для всех $\lambda \in \Lambda$, либо оно разрешимо только, быть может, для некоторого не более чем счетного множества точек $\lambda \in \Lambda$, предельные точки которого могут находиться лишь на границе G .

Множество $R(A(\lambda))$ одно и то же для всех $\lambda \in G$. Первое утверждение альтернативы имеет место в том и только том случае, когда $y \in R(A(\lambda))$.

Отметим, что если Ψ состоит из конечного числа точек и равенство $A(\lambda) = E(\lambda) D(\lambda) F(\lambda)$, где $D(\lambda)$ имеет вид (7.1), является факторизацией в G оператор-функции $A(\lambda)$, то легко видеть, что $R(A(\lambda))$ состоит из всех векторов $y \in B_2$, для которых выполняется равенство

$$\left(I - \sum_{j=0}^n Q_j\right) E^{-1}(\lambda) y = 0 \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Теорема 7.3 при некоторых дополнительных ограничениях установлена в [19, 20].

Խ. Յ. ԳՈՒԵՐԳԵՐ. Վերլավոր-մերոմորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների մի քանի հարցերի մասին (ամփոփում)

Հոդվածը նվիրված է վերլավոր-մերոմորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների սպեկտրալ տեսության բնագավառում վերջերս կատարված որոշ հետազոտությունների շարադրմանը:

Որպես ալդ աշխատանքների ելակետ հանդիսացան Մ. Վ. Կելդիշի հայտնի արդյունքները բազմանդամային օպերատորային խորձերի սպեկտրալ հատկությունների մասին:

Մի շարք արդյունքներ տպագրվում են առաջին անգամ:

I. C. GOHBERG. On some topics of spectral theory of finite meromorphic operator-functions (summary)

This is a review of some recent developments in the spectral theory of finite meromorphic operator-functions.

The research on this topic begins with the well known results of M. V. Keldysh on spectral properties of polynomial operator bundle.

Some of the results are being published for the first time.

* В работах [19, 20] это множество называется ядром.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, № 1, 1951, 11—14.
2. М. В. Ени. Об устойчивости корневого числа аналитической оператор-функции и о возмущениях ее характеристических чисел и собственных векторов, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1251—1254.
3. А. С. Маркус и Е. И. Сигал. О кратности характеристического числа аналитической оператор-функции, Матем. исследования, Кишинев, т. 5, вып. 3, 1970.
4. И. Ц. Гохберги и Е. И. Сигал. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теорема Руше, Матем. сборник, 84 (126), № 4, 1971, 607—630.
5. Е. И. Сигал. Фактор-кратность характеристического числа мероморфной оператор-функции, Матем. исслед., Кишинев, т. 5, вып. 4, 1970.
6. И. Ц. Гохберги и Е. И. Сигал. Глобальная факторизация мероморфной оператор-функции и некоторые ее приложения, Матем. исслед., Кишинев, т. 6, вып. 1, 1971.
7. И. Ц. Гохберги и Е. И. Сигал. О корневой кратности произведения мероморфных оператор-функций, Матем. исслед., Кишинев, т. 6, вып. 2, 1971.
8. И. Ц. Гохберги и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, 12, вып. 2, 1957, 43—118.
9. С. Г. Крейн и В. П. Трофимов. О голоморфных оператор-функциях нескольких комплексных переменных, Функциональный анализ и его приложения, 3, вып. 4, 1969, 85—86.
10. Ю. А. Палант. Об одном методе получения признаков кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов. Зап. мех.-мат. факультета Харьковского университета и Харьковского матем. о-ва, 34, 1969.
11. Е. И. Сигал. О кратности характеристического числа произведения оператор-функций, Матем. исслед., Кишинев, 5, вып. 1, 1970, 118—127.
12. И. Ц. Гохберги. Задача факторизации оператор-функций, Известия АН СССР, серия матем. наук, 12, вып. 5, 1964, 1055—1082.
13. А. С. Маркус. О голоморфных оператор-функциях, ДАН СССР, 119, № 6, 1958, 1099—1102.
14. И. Ц. Гохберги. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, ДАН СССР, 78, № 4, 1951, 629—632.
15. Д. Ф. Харазов. К теории линейных уравнений в пространстве Банаха, Тр. Тбилисского матем. ин-та им. Размадзе, 19, 1953.
16. П. М. Блехер. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра, Вестник Московского университета, № 5, 1969, 30—36.
17. В. М. Ени. Некоторые вопросы теории возмущений аналитических оператор-функций, Диссертация, 1967.
18. М. А. Шубин. О голоморфных семействах подпространств банахова пространства, Матем. исслед., Кишинев, 5, вып. 4, 1970.
19. И. Ц. Гохберги и А. С. Маркус. Об одном характеристическом свойстве ядра линейного оператора, ДАН СССР, 105, № 5, 1955, 893—896.
20. А. С. Маркус. О характеристическом свойстве ядра линейного оператора, ДАН СССР, 105, № 6, 1955, 1144—1146.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

М. М. ДЖРБАШЯН, В. С. ЗАХАРЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ПОДКЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ
ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

1°. Настоящая статья содержит существенные дополнения к результатам § 3 совместного исследования авторов [1], посвященного граничным свойствам определенных подклассов функций $N[\omega]$, входящих в класс N функций ограниченного вида Р. Неванлинна.

В указанной работе [1] авторы опирались на теорию факторизации мероморфных в круге функций, развитую в другом исследовании одного из авторов [2].

Напомним лишь некоторые обозначения и определения, приведенные в работе [1].

Классы Ω и $\Omega_0 \subset \Omega$. Через Ω обозначим множество функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\omega(x) > 0$ и непрерывны на $[0, 1)$,

$$2) \quad \omega(0) = 1, \quad \int_0^1 \omega(x) dx < +\infty,$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \{|\omega(x) - 1| x^{-1}\} < +\infty.$$

Подмножество функций $\omega(x) \in \Omega$, которые не убывают на $(0, 1)$, обозначим через Ω_0 .

ω -емкость $C_\omega(E)$. Пусть $\omega(x) \in \Omega_0$, и пусть аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ функция $C(z; \omega)$ определяется как сумма ряда

$$C(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad (1.1)$$

где

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.2)$$

Условимся говорить, что B -измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ имеет положительную ω -емкость, если существует такая мера $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$, для которой интеграл

$$U_\omega(z; \mu) = \int_0^{2\pi} |C(ze^{-it}; \omega)| d\mu(t) \quad (1.3)$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{|z| \leq 1} U_m(z; \mu) < +\infty. \quad (1.4)$$

В случае же отсутствия такой меры, т. е. в случае, когда для любой меры $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$

$$\sup_{|z| \leq 1} U_m(z; \mu) = +\infty, \quad (1.5)$$

будем считать, что ω -емкость множества E равна нулю. При этом соответственно будем писать $C_m(E) > 0$ или $C_m(E) = 0$.

Отметим также, что, как легко проверить, мера $C_m(E)$ обладает свойством

$$C_m(E_1 + E_2) = 0, \text{ если } C_m(E_1) = C_m(E_2) = 0. \quad (1.6)$$

В работе [2] для каждой мероморфной в круге $|z| < 1$ функции $F(z)$ и для любой функции $\omega(x) \in \Omega$ было введено понятие ω -характеристики $T_m(r; F)$, и класс $N\{\omega\}$ был определен таким образом:

$$F(z) \in N\{\omega\}, \text{ если } \sup_{0 < r < 1} T_m(r; F) < +\infty. \quad (1.7)$$

При этом было установлено (см. [2], теорему 4.2 (1°)), что если $\omega(x) \in \Omega_0$, причем $\lim_{x \rightarrow 1-0} \omega(x) = +\infty$, то имеет место строгое включение

$$N\{\omega\} \subset N. \quad (1.8)$$

Как известно, если $F(z) \in N$, то предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.9)$$

существует всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$ линейной меры нуль, причем если $F(z) \not\equiv 0, \infty$, то

$$\int_0^{2\pi} |\log |F(e^{i\theta})|| d\theta < +\infty, \quad (1.10)$$

Как было отмечено в работе [2], в связи со свойством (1.8) классов $N\{\omega\}$ при $\omega(x) \in \Omega_0$, естественно возникают следующие вопросы (см. [2], стр. 608).

Не „утонышается“ ли для функций классов $N\{\omega\} \subset N$ то исключительное множество $E \subset [0, 2\pi]$ нулевой линейной меры, где предел (1.9) возможно и не существует?

Нельзя ли для граничных значений $F(e^{i\theta})$ функции $F(z) \in N\{\omega\} \subset N$ утверждать нечто большее, чем конечность интеграла (1.9)?

В связи с этими вопросами там же было высказано предположение, что ответ на эти вопросы должен опираться именно на понятие ω -емкости множеств, ассоциированное с интегралом (1.3) и совпадающее с понятием $1+\alpha$ ($-1 < \alpha < 0$)-емкости по Фростману лишь в специальном случае, когда $\omega(x) = (1-x)^\alpha$.

В работе [1] авторам удалось получить положительное решение первого из поставленных в [2] вопросов, притом не для всего класса $N\{\omega\} \subset N$, $\omega(x) \in \Omega_0$, а лишь для двух важных функций, входящих в этот класс*: а именно функции Бляшке $B(z; z_k)$, нули которой подчинены условию**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx < +\infty,$$

и для функции $B_m(z; z_k)$, играющей важную роль в теории факторизации всех классов $N\{\omega\}$, $\omega(x) \in \Omega$.

В настоящей статье дается полный ответ как на первый, так и на второй из этих вопросов в терминах указанного уже выше понятия ω -емкости множеств.

2°. В работе [6] была установлена теорема 8 (2°), согласно которой, если $\omega(x) \in \Omega_0$, то проблема моментов Хаусдорфа

$$\Delta_n^{-1} = \int_0^1 \tau^n d\alpha(\tau) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.1)$$

где Δ_n определяется из (1.2), имеет решение $\alpha(\tau)$ в классе неубывающих и ограниченных на $[0, 1]$ функций.

Из этой теоремы непосредственно следовала лемма 1.4 работы [1], согласно которой при условии $\omega(x) \in \Omega_0$ как функция $C(z; \omega)$, так и функция

$$S(z; \omega) = 2C(z; \omega) - 1 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad (2.2)$$

допускают интегральные представления

$$C(z; \omega) = \int_0^1 \frac{d\alpha(\tau)}{1 - z\tau} \quad (|z| < 1), \quad (2.3)$$

$$S(z; \omega) = \int_0^1 \frac{1 + z\tau}{1 - z\tau} d\alpha(\tau) \quad (|z| < 1), \quad (2.4)$$

* Отметим, что в работе авторов [3] в специальном случае, когда $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ ($-1 < \alpha < 0$), для соответствующих классов N_α , впервые введенных и исследованных в работах одного из авторов [4], [5], оба эти вопроса были поставлены и получили почти полное решение для каждого класса N_α ($-1 < \alpha < 0$).

Дело в том, что в работе [3] удалось найти ответы на эти вопросы не точно в терминах $1+\alpha$ -емкости по Фростману, а лишь в терминах γ -емкости, при условии, что γ — любое число из интервала $(1+\alpha, 1)$.

** Согласно теореме 5.4 работы [2] это условие необходимо и достаточно, чтобы $B(z; z_k) \in N\{\omega\}$.

где $\alpha(\tau)$ — некоторая неубывающая и ограниченная функция на $[0, 1]$.
При этом очевидно, что

$$\int_0^1 d\alpha(\tau) = C(0; \omega) = 1. \quad (2.5)$$

Заметив далее, что в силу (2.4)

$$S'(z; \omega) = 2 \int_0^1 \frac{\tau d\alpha(\tau)}{(1 - z\tau)^2} \quad (|z| < 1), \quad (2.6)$$

докажем следующую лемму.

Лемма 1. Если $\omega(x) \in \Omega_0$, то имеет место неравенство

$$L(S; \varphi) \equiv \int_0^1 |S'(re^{i\varphi}; \omega)| dr \leq 16(1 + 2|S(e^{i\varphi}; \omega)|) \quad (0 < |\varphi| \leq \pi). \quad (2.7)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение интеграл

$$J(\tau; \varphi) = \int_0^1 \frac{dr}{|1 - \tau r e^{i\varphi}|^2}, \quad (2.8)$$

и заметим, что из представления (2.6) легко следует неравенство

$$L(S; \varphi) \leq 2 \int_0^1 J(\tau; \varphi) d\alpha(\tau). \quad (2.9)$$

Отметим теперь, что при $0 \leq \tau \leq 1$, $|z| \leq 1$ имеем

$$\left| \tau - \frac{1}{z} \right| \geq 1 - \tau \quad \text{и} \quad \left| \tau - \frac{1}{z} \right| \geq \left| 1 - \frac{1}{z} \right| - (1 - \tau),$$

откуда следует

$$2 \left| \tau - \frac{1}{z} \right| \geq \left| 1 - \frac{1}{z} \right|,$$

т. е.

$$|1 - \tau z| > \frac{1}{2} |1 - z|.$$

Положив здесь $z = re^{i\varphi}$ ($0 \leq r \leq 1$), мы получим неравенство

$$|1 - \tau r e^{i\varphi}| > \frac{1}{2} |1 - \tau e^{i\varphi}| \quad (0 \leq r, \tau \leq 1). \quad (2.10)$$

Отметим далее, что

$$|1 - e^{i\varphi}| \leq 2 \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

и положив

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} |1 - \tau e^{i\varphi}| \quad (0 \leq \eta \leq 1), \quad (2.11)$$

представим интеграл $J(\tau; \varphi)$ в виде суммы

$$J(\tau; \varphi) = \int_0^\eta \frac{dr}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} + \int_\eta^1 \frac{dr}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} \equiv J_1(\tau; \varphi) + J_2(\tau; \varphi). \quad (2.12)$$

Поскольку $|1 - \tau e^{i\varphi}| > 1 - r$ ($0 \leq \tau \leq 1$), имеем, в силу (2.11)

$$J_1(\tau; \varphi) \leq \int_0^\eta \frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{\eta}{1-\eta} \leq \frac{2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|}. \quad (2.13)$$

Далее, пользуясь неравенством (2.10), снова в силу (2.11) получим

$$J_2(\tau; \varphi) \leq \frac{4}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} \int_\eta^1 dr = \frac{4(1-\eta)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} = \frac{2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \quad (2.14)$$

Из (2.12), (2.13) и (2.14) следует оценка интеграла $J(\tau; \varphi)$

$$J(\tau; \varphi) \leq \frac{4}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \quad (0 \leq \tau \leq 1, \quad 0 < |\varphi| \leq \pi),$$

и из (2.9) приходим к неравенству

$$L(S; \varphi) \leq 8 \int_0^1 \frac{\tau d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \quad (0 < |\varphi| \leq \pi). \quad (2.15)$$

Отметим, с другой стороны, что представление (2.4) функции $S(z; \omega)$, очевидно, сохраняет силу и на дуге $z = e^{i\varphi}$ ($0 < |\varphi| \leq \pi$) единичной окружности, и поэтому мы будем иметь

$$S(e^{i\varphi}; \omega) = \int_0^1 \frac{1 + \tau e^{i\varphi}}{1 - \tau e^{i\varphi}} d\alpha(\tau) = \int_0^1 \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} d\alpha(\tau) + i \cdot 2 \sin \varphi \int_0^1 \frac{\tau d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2}.$$

Отсюда, очевидно, следуют неравенства

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} d\alpha(\tau) = \operatorname{Re} S(e^{i\varphi}; \omega) \leq |S(e^{i\varphi}; \omega)|, \quad (2.16)$$

$$0 \leq 2 |\sin \varphi| \int_0^1 \frac{\tau d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} = |\operatorname{Im} S(e^{i\varphi}; \omega)| \leq |S(e^{i\varphi}; \omega)|.$$

Убедимся, наконец, что справедливы также неравенства

$$\frac{\tau}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} \leq \begin{cases} \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} + 2 |\sin \varphi| \frac{\tau}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2}, & 0 < |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} + 2, & \frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi. \end{cases} \quad (2.17)$$

В самом деле, поскольку

$$|1 - \tau e^{i\varphi}| = \sqrt{1 - 2\tau \cos \varphi + \tau^2} = \sqrt{(1 - \tau)^2 + 4\tau \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leq 1 - \tau + 2\sqrt{\tau} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| <$$

$$\leq 1 - \tau^2 + 4 \frac{|\sin \varphi|}{\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|} \leq \begin{cases} 1 - \tau^2 + 4\sqrt{2} |\sin \varphi|, & 0 < |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 - \tau^2 + 2, & \frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi, \end{cases}$$

а также

$$|1 - \tau e^{i\varphi}| > 1, \quad \frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi,$$

то неравенства (2.17) непосредственно следуют из тождества

$$\frac{\tau}{|1 - \tau e^{i\varphi}|} = \frac{\tau |1 - \tau e^{i\varphi}|}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2}.$$

Из оценок (2.15) и (2.17) имеем

$$L(S; \varphi) \leq 8 \int_0^1 \frac{1 - \tau^2}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2} d\alpha(\tau) +$$

$$+ \begin{cases} (16\sqrt{2}) 2 |\sin \varphi| \int_0^1 \frac{\tau d\alpha(\tau)}{|1 - \tau e^{i\varphi}|^2}, & 0 < |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 16 \cdot \int_0^1 \tau d\alpha(\tau), & \frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi. \end{cases}$$

Наконец, требуемое неравенство (2.7) леммы непосредственно вытекает из (2.18), в силу оценок (2.16), если заметить, что

$$\int_0^1 \tau d\alpha(\tau) \leq \int_0^1 d\alpha(\tau) = 1.$$

3°. Рассмотрим интегралы вида

$$F_\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(e^{-i\theta} z; \omega) d\tau(\theta), \quad (3.1)$$

где $\tau(\theta) = \tau_1(\theta) + i\tau_2(\theta)$, а $\tau_k(\theta)$ ($k = 1, 2$) — любые функции с конечным изменением на $[0, 2\pi]$.

Как непосредственно следует из определения (1.1) — (1.2) функции $C(z; \omega)$

$$\{C(z; \omega)\}_{\omega=1} = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

Поэтому в специальном случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, интеграл (3.1) принимает вид

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\sigma(\theta)}{e^{i\theta} - z}, \quad (3.2)$$

известный под названием *интеграла типа Коши-Стилтьеса*.

Как хорошо известно [7], интеграл типа Коши-Стилтьеса внутри круга $|z| < 1$ изображает функцию $F(z)$, входящую в классы H_δ Рисса при любом $0 < \delta < 1$. По этой причине радиальный предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

существует и конечен всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $\text{mes } E = 0$.

Докажем следующую теорему о граничных свойствах интегралов типа $F_\omega(z)$ в предположении, что $\omega(x) \in \mathcal{Q}_0$.

Теорема 1. Если $\omega(x) \in \mathcal{Q}_0$, то функция

$$F_\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(e^{-i\theta} z; \omega) d\sigma(\theta)$$

всюду на $[0, 2\pi]$ обладает конечными радиальными граничными значениями

$$F_\omega(e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\varphi}), \quad (3.3)$$

кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$.

Доказательство. Отметим сначала же, что, ввиду свойства (1.6) ω -емкости множеств, достаточно доказать теорему в предположении, что $\sigma(\theta)$ — произвольная неубывающая и ограниченная функция на отрезке $[0, 2\pi]$.

Отметим далее, что поскольку

$$F_\omega(re^{i\varphi}) = F_\omega(0) + \int_0^r F'_\omega(re^{i\varphi}) dr \quad (0 \leq r < 1, |\varphi| \leq \pi),$$

то очевидно, что предел (3.3) существует и конечен в каждой точке $\varphi \in [0, 2\pi]$, где

$$L(F_\omega; \varphi) = \int_0^1 |F'_\omega(re^{i\varphi})| dr < +\infty.$$

Обозначим через E_0 множество тех точек $\varphi \in [0, 2\pi]$, где $L(F_\omega; \varphi) = +\infty$, а через E — множество тех точек $\varphi \in [0, 2\pi]$, где предел (3.3) не существует. Тогда очевидно, что $E \subset E_0$, и для доказа-

тельства теоремы нам достаточно установить, что $C_\omega(E_0) = 0$, поскольку тогда очевидно, что будем иметь также $C_\omega(E) = 0$.

Убедимся теперь, что предположение $C_\omega(E) > 0$ приведет нас к противоречию.

В самом деле, если $C_\omega(E) > 0$, то тогда имеем также $C_\omega(E_0) > 0$ и, согласно определению, существует такая мера $\mu_0 \prec E$, $\mu_0(E) = 1$, для которой интеграл

$$U_\omega(z; \mu_0) = \int_0^{2\pi} |C(ze^{-i\theta}; \omega)| d\mu_0(\theta)$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{|z| < 1} U_\omega(z; \mu_0) < +\infty. \quad (3.4)$$

Из (3.4), в частности, следует также, что

$$\sup_{|\varphi| \leq \pi} U_\omega(e^{i\varphi}; \mu_0) < +\infty. \quad (3.4')$$

С другой стороны, так как

$$L(F_\omega; \varphi) = +\infty, \quad \varphi \in E_0,$$

то очевидно, что будем иметь

$$\int_0^{2\pi} L(F_\omega; \varphi) d\mu_0 = \int_{E_0} L(F_\omega; \varphi) d\mu_0 = +\infty. \quad (3.5)$$

Далее, из (3.1) имеем

$$F'_\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C'(e^{-i\theta} z; \omega) e^{-i\theta} d\sigma(\theta)$$

и, так как по (2.2) $S'(z; \omega) = 2C'(z; \omega)$, то

$$F'_\omega(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} S'(e^{-i\theta} z; \omega) e^{-i\theta} d\sigma(\theta).$$

Отсюда следует оценка

$$L(F_\omega; \varphi) \equiv \int_0^1 |F'_\omega(re^{i\varphi})| dr \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 |S'(re^{i(\varphi-\theta)}; \omega)| dr \right\} d\sigma(\theta),$$

или, ввиду леммы 1, также оценка

$$L(F_\omega; \varphi) \leq \sigma_0 + \frac{8}{\pi} \int_0^{2\pi} |S(e^{i(\varphi-\theta)}; \omega)| d\sigma(\theta), \quad |\varphi| \leq \pi, \quad (3.6)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma(\vartheta).$$

Отметив, что

$$S(z; \omega) = 2 C(z; \omega) - 1,$$

из (3.6) мы приходим к неравенству

$$L(F_\omega; \varphi) \leq 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi} \int_0^{2\pi} |C(e^{i(\varphi-\vartheta)}; \omega)| d\sigma(\vartheta), \quad |\varphi| \leq \pi. \quad (3.6')$$

Интегрируя, наконец, неравенство (3.6) по мере μ_0 , мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} L(F_\omega; \varphi) d\mu_0(\varphi) &\leq 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} |C(e^{i(\varphi-\vartheta)}; \omega)| d\sigma(\vartheta) \right\} d\mu_0(\varphi) = \\ &= 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} |C(e^{i(\vartheta-\varphi)}; \omega)| d\mu_0(\varphi) \right\} d\sigma(\vartheta) = \\ &= 3\sigma_0 + \frac{16}{\pi} \int_0^{2\pi} U_\omega(e^{i\vartheta}; \mu_0) d\sigma(\vartheta). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (3.4), вытекает неравенство

$$\int_0^{2\pi} L(F_\omega; \varphi) d\mu_0 < +\infty,$$

что противоречит условию (3.5). Таким образом, теорема доказана.

4°. Докажем теперь первую основную теорему данной работы.

Теорема 2. Для любой функции $F(z) \in N\{\omega\}$, где $\omega(x) \in \Omega_0$, существует конечный предел

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\vartheta}) \quad (4.1)$$

для всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$.

Доказательство. Известно (см. [2], теорему 5.6), что функция $F(z) \in N\{\omega\}$ при $\omega(x) \in \Omega_0$ допускает представление вида

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_\omega} z^\lambda \frac{B(z; a_\mu)}{B(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta} z; \omega) d\sigma(\vartheta) \right\}, \quad (4.2)$$

где $\lambda \geq 0$ — любое целое, γ — любое вещественное число и $\sigma(\vartheta)$ — некоторая вещественная функция на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, а $B(z; a_\mu)$ и $B(z; b_\nu)$ — сходящиеся произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{(n)} \int_{|a_n|}^1 \omega(x) dx < +\infty, \quad \sum_{(n)} \int_{|b_n|}^1 \omega(x) dx < +\infty. \quad (4.3)$$

С другой стороны, известно (см. [1], теорему 8), что при условиях (4.3) утверждение теоремы справедливо для функций Бляшке $B(z; a_n)$ и $B(z; b_n)$. Одновременно, согласно теореме 1, наше утверждение справедливо и для экспоненциального множителя, участвующего в представлении (4.2).

Из сказанного выше непосредственно вытекает утверждение теоремы, если воспользоваться представлением (3.2) функции $F(z)$ и свойством (1.6) ω -емкости.

Таким образом, дан полный ответ на первый из поставленных в пункте 1° вопросов.

5°. Ответ на второй из поставленных там же вопросов дается в следующей основной теореме.

Теорема 3. Пусть $F(z) \in N\{\omega\}$, $\omega(x) \in \mathfrak{D}_0$ и $E \subset [0, 2\pi]$ — любое множество, для которого $C_\infty(E) > 0$.

Пусть, далее, $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$ — любая мера, обладающая свойством*

$$U_\infty(\mu) \equiv \sup_{|z| < 1} U_\infty(z; \mu) = \sup_{|z| < 1} \int_0^{2\pi} |C(ze^{-i\theta}; \omega)| d\mu(\theta) < +\infty. \quad (5.1)$$

Тогда для граничных значений $F(e^{i\theta})$ функции $F(z)$ выполняется условие

$$\int_E |\log |F(e^{i\theta})|| d\mu(\theta) = \int_0^{2\pi} |\log |F(e^{i\theta})|| d\mu(\theta) < +\infty. \quad (5.2)$$

Доказательство. Функция $F(z) \in N\{\omega\}$, $\omega(x) \in \mathfrak{D}_0$ допускает представление вида (4.2). Обозначая

$$\Phi(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega) d\sigma(\theta) \right\}, \quad (5.3)$$

имеем, таким образом

$$F(z) = e^{i\gamma + i\lambda_0} z^{\lambda} \frac{B(z; a_n)}{B(z; b_n)} \Phi(z). \quad (5.4)$$

Отметим теперь, что ввиду соотношения

$$S(z; \omega) = 2C(z; \omega) - 1$$

для функции $\Phi(z)$ получим оценку

* Поскольку $C_\infty(E) > 0$, то хотя бы одна такая мера μ существует.

$$|\log |\Phi(re^{i\varphi})|| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |d\sigma(\vartheta)| + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(re^{i(\varphi-\vartheta)}; \omega)| |d\sigma(\vartheta)| \quad (0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (5.5)$$

Принтегрировав неравенство (5.5) по любой мере $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$, подчиненной условию (5.1), мы получим

$$\int_E |\log |\Phi(re^{i\varphi})|| d\mu(\varphi) \leq \{1 + U_\omega(\mu)\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |d\sigma(\vartheta)| < +\infty \quad (0 \leq r < 1). \quad (5.6)$$

Поскольку, очевидно, $\Phi(z) \in N\{\omega\}$, согласно теореме 2 предел

$$\Phi(e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \Phi(re^{i\varphi}) \quad (5.7)$$

может не существовать лишь на множестве $e \in [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(e) = 0$. При этом очевидно, что $\mu(e) = 0$.

Поэтому, переходя к пределу в неравенстве (5.6), в силу теоремы Фату [8], заключаем, что

$$\int_E |\log |\Phi(e^{i\varphi})|| d\mu(\varphi) < +\infty. \quad (5.8)$$

Итак, для любой функции $\Phi(z)$ вида (5.3) утверждение нашей теоремы справедливо.

Установим теперь справедливость теоремы для любой функции Бляшке

$$B(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k},$$

нули $\{z_k\}_1^\infty$ которой подчинены условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx < +\infty. \quad (5.9)$$

С этой целью отметим, что, как известно (см. [1], теорему 8), при условии (5.9)

$$\log |B(e^{i\varphi}; z_k)| = \lim_{r \rightarrow 1-0} \log |B(re^{i\varphi}; z_k)| = 0 \quad (5.10)$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $e_0 \subset [0, 2\pi]$, для которого $C_\omega(e_0) = 0$.

Следовательно, для каждого множества $E \subset [0, 2\pi]$ и для каждой меры $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$, подчиненной условиям теоремы из (5.10), следует, что

$$\int_E |\log |B(e^{i\tau}; z_k)|| d\mu(\tau) = 0. \quad (5.11)$$

Наконец, полное доказательство теоремы следует из утверждений (5.8) и (5.11), если принять во внимание представление (5.4) функции $F(z)$.

6°. Следуя статье [2], обозначим через $A\{\omega\}$ множество аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, принадлежащих классу $N\{\omega\}$.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующая теорема единственности для функций класса $A\{\omega\}$, когда $\omega(x) \in \mathcal{D}_0$.

Теорема 4. Пусть $f(z) \in A\{\omega\}$ и $E \subset [0, 2\pi]$ — некоторое множество, для которого $C_\infty(E) > 0$. Пусть, далее, для некоторой меры $\mu \prec E$, $\mu(E) = 1$

$$\sup_{|z| < 1} U_\infty(z; \mu) < +\infty.$$

а) Если для граничных значений $f(e^{i\tau})$ функции $f(z)$

$$\int_E \log |f(e^{i\tau})| d\mu(\tau) = -\infty, \quad (6.1)$$

то $f(z) \equiv 0$;

б) Если

$$f(e^{i\tau}) = 0, \quad \tau \in E, \quad (6.2)$$

то $f(z) \equiv 0$.

В самом деле, если предположить, что $f(z) \not\equiv 0$, то согласно теореме 3 будем иметь

$$\int_E |\log |f(e^{i\tau})|| d\mu(\tau) < +\infty,$$

что противоречит условию (6.1). Из условия же (6.2), очевидно, вытекает (6.1).

Մ. Մ. ԶՐԱՇԹԱՆ. Վ. Ս. ԶԱՎԱՐԹԱՆ Սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների հերթադասերի եզրային հատկությունները (ամփոփում)

Հոդվածը պարունակում է Ռ. Նեանլինսոնի սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների $N\{\omega\}$ դասին պատկանող որոշակի $N\{\omega\}$ ենթադասերի եզրային հատկություններին նվիրված հեղինակների համատեղ [1] հետազոտություն 3 պարագրաֆի արդյունքների էական լրացումներ:

Ներմուծելով ω -ունակություն հասկացողությունը, ապացուցվում են $N\{\omega\}$ դասերի ֆունկցիաների եզրային հատկություններին վերաբերող թեորեմներ:

Հիմնական արդյունքներից մեկը կարելի է ձևակերպել այսպես՝ թող $\omega(x)$ ֆունկցիան բավարարի որոշակի պայմաններին, ապա ցանկացած $F(z) \in N\{\omega\}$ ֆունկցիայի համար հետևյալ վերջավոր սահմանը

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta})$$

դրված թվանշանների բազմություն $\theta \in [0, 2\pi]$ համար, բացի, դեպքի, մի բացահայտվող $E \subset [0, 2\pi]$ բացահայտված, որի ω -նվաճակով թվանշանը հաճախորդ է գրություն:

M. M. DŽRBAŠIAN, V. S. ZAKARIAN. *Boundary properties of subclasses of mehmorphic functions of bounded type (summary)*

The paper contains substantial complements to the results of § 3 of the earlier joint paper of the same authors [1], which was devoted to the boundary properties of functions, belonging to the subclasses $N(\omega) \subset N$, N being the class of functions of bounded type of R. Nevanlinna.

The main result states, that under certain conditions on $\omega(x)$, for every $E(z) \subset N[\omega]$ a finite limit

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta})$$

exists for all $\theta \in [0, 2\pi]$, with exception may be of a set $E \subset [0, 2\pi]$, whose ω -capacity is zero.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
2. М. М. Джрбашян. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем сб., 79 (121), 1969, 517—615.
3. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. О граничных свойствах мероморфных функций класса N_+ , ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250. Граничные свойства мероморфных функций класса N_+ , Изв. АН АрмССР, „Математика“, II, № 5, 1967, 275—294.
4. М. М. Джрбашян. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
5. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука“, 1966.
6. М. М. Джрбашян. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его приложения, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 1075—1111.
7. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
8. С. Сакс. Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ НА ИНТЕРВАЛЕ

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. По теореме Мюнтца система $\{1, x^{\lambda_j}\}$ полна в метрике C на $[0, a]$, $a > 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_1 \lambda_j^{-1} = \infty$. В интервале $[a, a]$, $0 < a < a$, при указанном условии будет полной и система $\{x^{\lambda_j}\}$. Если сделать замену $x = e^t$, то получим, что при условии $\sum_1 \lambda_j^{-1} = \infty$ в любом интервале вещественной оси является

система экспонент $\{e^{\lambda_j t}\}$. При более сильном условии: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma > 0$ система $\{e^{\lambda_j z}\}$ полна в полосе $D: |\operatorname{Im} z| < \pi\sigma$. Это означает, что если $f(z)$ — функция, аналитическая в D и $\bar{F}$ — ограниченная замкнутая область из D , то по $\varepsilon > 0$ найдется конечная линейная комбинация $P(z)$ из функций $e^{\lambda_j z}$, удовлетворяющая условию

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon, z \in \bar{F}. \quad (1)$$

Возьмем в качестве $\bar{F}$ прямоугольник: $|\operatorname{Im} z| \leq h < \pi\sigma$, $a < \operatorname{Re} z \leq b$. По формуле Коши из (1) следует

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \frac{n!}{h^n} (n \geq 0), a + h \leq x \leq b - h, h < \pi\sigma. \quad (2)$$

Очевидно, что из (2) вытекает

$$|f(z) - P(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{h_1}{h}\right)^n, h_1 < h, \\ |\operatorname{Im} z| \leq h_1, a + h \leq \operatorname{Re} z \leq b - h.$$

Следовательно, полнота в полосе D равносильна наличию соотношений (2) в точках x из любого интервала вещественной оси.

В случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна ни в какой области и, значит, для произвольных функций, аналитических на вещественной оси, ни при каком $h > 0$ не будут верны соотношения (2). Наша цель — доказать, что существуют такие числа M_n , зависящие только от $\{\lambda_n\}$, что и в случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ для функции $f(x)$, аналитической на ве-

щественной оси, и интервала $[a, b]$ по $\varepsilon > 0$ можно подобрать конечную комбинацию $P(x)$ так, что будет

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \varepsilon M_n (n \geq 0), \quad a \leq x \leq b. \quad (3)$$

Ясно при этом, что числа M_n должны расти быстрее чем $\frac{n!}{h^n}$, каково бы ни было $h > 0$. Указанный результат можно рассматривать как дополнение к теореме Мюнтца.

Итак, пусть $\sum_1^\infty \lambda_n^{-1} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$. Разобьем последовательность $\{\lambda_n\}$ на две бесконечные последовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, причем так, чтобы было $\sum_1^\infty [\lambda''_n]^{-1} = \infty$. Положим

$$L_1(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda'_n)^2}\right) = \sum_{n=0}^\infty a_{2n} \lambda^{2n},$$

$$M(r) = \sum_{n=0}^\infty |a_{2n}| r^{2n}, \quad \gamma_n = \min_{r>0} \frac{(1+r) M(r)}{r^n} \quad (n \geq 0).$$

Теорема 1. В качестве чисел M_n в соотношениях (3) можно взять числа $M_n = \gamma_n^{-1}$ ($n \geq 0$) или числа $M_{2n} = M_{2n+1} = |a_{2n}|^{-1}$ ($n \geq 0$).

Естественно возникает вопрос об оценке величин M_n снизу. Оценка снизу вытекает из теоремы, которая сейчас будет сформулирована и которая имеет самостоятельный интерес.

Положим

$$L(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n \quad (c_{2n+1} = 0)$$

и обозначим через m_n положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_0^\infty \beta_n m_n < \infty, \quad (4)$$

где $\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$ ($n \geq 0$).

Теорема 2. Пусть $P(x)$ — конечная линейная комбинация из функций $e^{\lambda_n x}$ удовлетворяет условию

$$|P^{(n)}(0)| < A m_n \quad (n \geq 0),$$

и пусть G — угол с вершиной в точке $x_0 > 0$ раствора $< \pi$, биссектриса которого расположена на отрицательной части вещественной оси. Имеется постоянная K , зависящая от $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$ и угла G , но не зависящая от $P(x)$, такая, что

$$|P(x)| < AK, \quad x \in G.$$

Следствие. Пусть $\{P_k(x)\}$ — последовательность конечных линейных комбинаций экспонент из системы $\{e^{\lambda_n x}\}$, которая сходится на

некотором интервале $(\alpha, 0)$ вещественной оси и удовлетворяет еще условию

$$|P_k^{(n)}(0)| < A m_n \quad (n > 0, k > 1).$$

Тогда эта последовательность равномерно сходится внутри полуплоскости $\operatorname{Re} x < 0$.

Из последнего результата вытекает, что числа M_n не могут все быть меньше m_n .

Для сравнения M_n и m_n рассмотрим случай, когда $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$, при уточненном порядке $\rho(r)$ таком, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = \infty,$$

где $\varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$. При этом $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ при уточненном порядке $\rho(r)$, если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} = \tau.$$

При указанных условиях $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$. В рассматриваемом случае оказывается в качестве M_n можно взять числа

$$M_n = h_1^n [\varphi(n)]^n \quad (n \geq 0), \quad h_1 > h_0 = (e\pi\tau)^{-1},$$

а в качестве m_n числа

$$m_n = h_2^n [\varphi(n)]^n \quad (n > 0) \quad h_2 < h_0.$$

В конкретном случае $\lambda_n = n \ln n$ ($n > 2$) получаем

$$M_n = h_1^n (n \ln n)^n, \quad h_1 > (e\pi)^{-1},$$

$$m_n = h_2^n (n \ln n)^n, \quad h_2 < (e\pi)^{-1}.$$

§ 1. Доказательство теоремы 1

Пусть E — какой-нибудь отрезок, лежащий на части $[1, \infty)$ вещественной оси, в котором нет точек из $\{\lambda_n\}$. Возьмем произвольную точку β из E . Положим

$$\Phi_n(x) = L_1(\beta) q_n(\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{-i} \frac{e^{x\mu} d\mu}{(\beta - \mu) L_1(\mu) q_n(\mu)} \quad (n \geq 2), \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$q_n(\mu) = \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_m}\right).$$

Имеем

$$\Phi_n^{(p)}(x) = L_1(\beta) q_n(\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{-i} \frac{\mu^p e^{x\mu} d\mu}{(\beta - \mu) L_1(\mu) q_n(\mu)} \quad (p=0, 1, 2, \dots).$$

Интеграл сходится, ибо $|L_1(\mu)|$ растет на мнимой оси быстрее любой степени $|\mu|$. Получаем

$$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq |L_1(\beta)| |q_n(\beta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mu|^p |d\mu|}{(1+|\mu|) |L_1(\mu)| \left(1 + \frac{|\mu|}{\lambda_1}\right) \left(1 + \frac{|\mu|}{\lambda_2}\right)},$$

откуда

$$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq A |L_1(\beta)| |q_n(\beta)| \max_{\operatorname{Re} \mu=0} \frac{|\mu|^p}{(1+|\mu|) |L_1(\mu)|},$$

где A — постоянная. На мнимой оси

$$|L_1(\mu)| = \prod_1 \left(1 + \frac{|\mu|^2}{(\lambda_n)^2}\right) = M(r), \quad r = |\mu|, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |L_1(z)|,$$

а

$$(1+|\mu|) |L_1(\mu)| = (1+r) M(r).$$

Правая часть является максимумом модуля функции

$$(1+\mu) L_1(\mu) = \sum_0 \delta_p \mu^p, \quad \delta_{2n} = \delta_{2n+1} = a_{2n} \quad (n \geq 0).$$

На основании этого

$$\delta_p \leq \min_{r>0} \frac{(1+r) M(r)}{r^p} = \gamma_p$$

и, значит

$$\max_{\operatorname{Re} \mu=0} \frac{|\mu|^p}{(1+|\mu|) |L_1(\mu)|} = \frac{1}{\min_{r>0} \frac{(1+r) M(r)}{r^p}} = \frac{1}{\gamma_p} \leq \frac{1}{\delta_p}.$$

Таким образом

$$|\Phi_n^{(p)}(x)| \leq A |L_1(\beta)| |q_n(\beta)| \gamma_p^{-1} \quad (p \geq 0), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

В силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$, функция $L_1(\mu)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sqrt[p]{\gamma_p} = 0$$

или

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{\sqrt[p]{\gamma_p^{-1}}} = 0. \quad (6)$$

Это означает, что γ_p^{-1} растет существенно быстрее чем p^p или $p!$

Теперь заметим, что, на основании условия $\sum (\lambda_n)^{-1} = \infty$, величина $L_1(\beta) q_n(\beta) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\beta \in E$. Из этого, согласно (5), вытекает, что на всей оси последовательность $\{\Phi_n^{(p)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к нулю.

Определим вид функции $\Phi_n(x)$. Пусть Γ — граница угла $|\arg \mu| < \frac{\pi}{4}$. Для отрицательных x имеем

$$\Phi_n(x) = L_1(\beta) q_n(\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-x\mu} d\mu}{(\beta - \mu) L_1(\mu) q_n(\mu)}$$

(здесь мы использовали тот очевидный факт, что $|L_1(\mu)| \geq 1$ при $\frac{\pi}{4} \leq |\arg \mu| \leq \frac{3\pi}{4}$). Из этого представления видно, что $\Phi_n(x)$ — аналитическая функция по крайней мере в угле $|\pi - \arg x| < \frac{\pi}{4}$. Учтем, что имеется система окружностей $|\mu| = \rho_k$, $\rho_k \uparrow \infty$, на которых при фиксированном n и любом $\varepsilon > 0$

$$|L_1(\mu)| |q_n(\mu)| > e^{-\varepsilon/\rho_k}, \quad |\mu| = \rho_k, \quad k > K(\varepsilon).$$

В силу этого, на основании теории вычетов, получим, что в угле

$$|\pi - \arg x| < \frac{\pi}{4}$$

$$\Phi_n(x) = e^{\beta x} - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_m < \rho_k} a_m^{(n)}(\beta) e^{\lambda_m x}, \quad (7)$$

причем сходимость внутри угла (7) равномерная. Она равномерная будет и относительно $\beta \in E$. Здесь $a_m^{(n)}(\beta)$ — некоторые постоянные.

Пусть c — произвольная (но фиксированная) точка вещественной оси, лежащая слева от начала координат. Возьмем какой-нибудь угол D , который лежит целиком в угле (7) и содержит в себе бесконечный отрезок $(-\infty, c]$. Пусть ε_n — положительная величина, стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. По ε_n подберем $k = k_n$ так, чтобы функция

$$\psi_n(x, \beta) = \Phi_n(x) - e^{\beta x} + \sum_{\lambda_m < \rho_{k_n}} a_m^{(n)}(\beta) e^{\lambda_m x}$$

удовлетворяла условию

$$|\psi_n(x, \beta)| < \varepsilon_n, \quad x \in D, \quad \beta \in E.$$

Из этого условия, поскольку $\psi_n(x, \beta)$ — аналитическая функция в D , получим

$$|\psi_n^{(p)}(x, \beta)| < \varepsilon_n \delta^{-p} p!, \quad x \in (-\infty, c] \quad (8)$$

(производная взята по переменному x), где δ — расстояние от отрезка $[-\infty, c]$ до границы угла D .

Имеем

$$e^{\beta x} - \Phi_n(x, \beta) = \Phi_n^{(1)}(x) - \psi_n(x, \beta),$$

где

$$\Phi_n^{(1)}(x, \beta) = \sum_{\lambda_m < \rho_{k_n}} a_m^{(n)}(\beta) e^{\lambda_m x}.$$

Из оценок (5) и (8) получаем

$$|e^{\beta x} - \varphi_n(x, \beta)|^p \leq A |L_1(\beta) q_n(\beta)| \gamma_p^{-1} + \varepsilon_n \delta^{-p} p!, \\ \beta \in E, \quad -\infty < x \leq c.$$

Правая часть, в силу (6), меньше $B \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta)|)$. Если мы заменим x на $x - \alpha$ и затем умножим левую и правую части на $e^{\alpha \beta}$, то получим, что

$$|e^{\beta x} - \varphi_n(x - \alpha, \beta)|^p < e^{\alpha \beta} B \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta)|)$$

для $\beta \in E, -\infty < x < c + \alpha$. Выражение $\varphi_n(x - \alpha, \beta)$ есть линейная комбинация экспонент из $\{e^{\lambda_n x}\}$, его мы по-прежнему будем обозначать через $\varphi_n(x, \beta)$. Множитель $e^{\alpha \beta}$ ограничен для $\beta \in E$. Число $c + \alpha$ за счет выбора α может быть любым фиксированным числом. Таким образом, можно считать доказанным, что

$$|e^{\beta x} - \varphi_n(x, \beta)|^{(p)} < C \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta)|), \quad p \geq 0, \\ -\infty < x < c, \quad \beta \in E \quad (9)$$

где c — любое фиксированное число, а C не зависит ни от p , ни от n .

Пусть $f(x)$ — функция, аналитическая на отрезке $[a, b]$ (нет необходимости считать ее аналитической на всей вещественной оси). Тогда она — аналитическая в некоторой области G , охватывающей $[a, b]$. Возьмем в интервале E бесконечную последовательность точек $\{\beta_s\}$. Известно, что система $\{e^{\beta_s x}\}$ полна во всей плоскости. На этом основании имеем

$$f(x) = \sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} e^{\beta_s x} = \psi_s(x), \quad (10)$$

причем

$$|\psi_s(x)| < \frac{1}{s}, \quad x \in \bar{F}, \quad s \geq 1,$$

где $\bar{F}$ — замкнутая область, охватывающая $[a, b]$ и лежащая в G . Поскольку $\psi_s(x)$ — аналитическая функция в $\bar{F}$, получаем

$$|\psi_s^{(p)}(x)| \leq s^{-1} q^{-p} p! \quad (p \geq 0, s \geq 1, x \in [a, b]), \quad (11)$$

где q — расстояние от отрезка $[a, b]$ до границы области $\bar{F}$. Обратимся к неравенству (9). Положим

$$e^{\beta_s x} - \varphi_n(x, \beta_s) = \psi_{n,s}(x),$$

где через $\varphi_n(x)$ мы обозначили $\varphi_n(x, \beta_s)$. Согласно (9)

$$|\psi_{n,s}^{(p)}(x)| < C \gamma_p^{-1} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta_s)|), \quad (12)$$

$$-\infty < x < b, \quad p \geq 0, \quad n \geq 1, \quad s \geq 1.$$

Имеем

$$\sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} e^{\beta_s x} - \sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} \varphi_n(x) = \sum_{s=1}^{m_s} A_s^{(s)} \psi_{n,s}(x).$$

На основании этого, принимая во внимание (10), находим

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \varphi_{n_{\nu}}(x) = \psi_s(x) + \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \psi_{n_{\nu}}(x).$$

Отсюда, в силу (11) и (12), получаем

$$\left| f^{(p)}(x) - \left\{ \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \varphi_{n_{\nu}}(x) \right\}^{(p)} \right| < \frac{q^{-p} \cdot p!}{s} + C_{\gamma_p}^{-1} \sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu} \max(\varepsilon_n, |q_n(\beta_{\nu})|), \\ x \in [a, b], \quad p \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Для каждого $s (s=1, 2, \dots)$ подберем $n=n_s$ так, чтобы сумма, стоящая в правой части, была меньше $\frac{1}{s}$. Полагая для этого $n=n_s$,

$$\sum_{\nu=1}^{m_s} A_{\nu}^{(s)} \varphi_{n_{\nu}}(x) = \omega_s(x),$$

учитывая (6), получим

$$|f^{(p)}(x) - \omega_s^{(p)}(x)| < C_1 \frac{\gamma_p^{-1}}{s}, \quad x \in [a, b], \quad p \geq 0, \quad s \geq 1.$$

При большом s величина $\frac{C_1}{s}$ будет меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Теорема 1 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 2

При доказательстве теоремы 2 нет необходимости предполагать, что $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, мы будем использовать лишь условие: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$.

При этом условии функция

$$L(\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right) = \sum_0^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n}$$

растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Из этого следует, что на любом луче $\arg \lambda = \varphi_0 \neq 0, \pi$ при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$|L(\lambda)| > C(\varepsilon, \varphi_0) e^{-\varepsilon |\lambda|}, \quad \arg \lambda = \varphi_0 \neq 0, \pi. \quad (13)$$

Далее, имеются окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$, на которых опять-таки при произвольном $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| > e^{-\varepsilon |\lambda|}, \quad |\lambda| = r_k, \quad k > K(\varepsilon). \quad (14)$$

Имеем

$$L(i\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right) = \sum_0^{\infty} (-1)^n c_{2n} \lambda^{2n} = \sum_0^{\infty} |c_{2n}| \lambda^{2n}.$$

Можно убедиться, что

$$|c_{2(n+p)}| \leq |c_{2n}| |c_{2p}| \quad (n > 0, p > 0). \quad (15)$$

Положим $\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$ ($n > 0$), $q = \max(1, |c_2|)$. Справедливо соотношение

$$\beta_{m+k} \leq q \beta_m \beta_k \quad (m > 0, k > 0). \quad (16)$$

Для четных m и k оно сразу вытекает из (15). Пусть теперь $m = 2n + 1$, $k = 2p$. Тогда, в силу (15)

$$\beta_{m+k} = \beta_{2n+2p} = |c_{2n+2p}| \leq |c_{2n}| |c_{2p}| = \beta_m \beta_k \leq q \beta_m \beta_k.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $m = 2n + 1$, $k = 2p + 1$.

В этом случае

$$\begin{aligned} \beta_{m+k} = \beta_{2n+2p+2} &= |c_{2n+2p+2}| \leq |c_2| |c_{2n+2p}| \leq |c_2| |c_{2n}| |c_{2p}| = \\ &= |c_2| \beta_m \beta_k \leq q \beta_m \beta_k. \end{aligned}$$

Соотношение (16) установлено.

Рассмотрим функцию

$$\omega(\mu, P) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [P_{(0)}^{(k-1)} + \mu P_{(0)}^{(k-2)} + \dots + \mu^{k-1} P(0)].$$

Согласно условию теоремы $|P_{(0)}^{(n)}| \leq A m_n$ ($n > 0$), причем числа m_n удовлетворяют неравенству (4). Оценим функцию $\omega(\mu, P)$. Имеем

$$\begin{aligned} |\omega(\mu, P)| &\leq A \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (m_{k-1} + |\mu| m_{k-2} + \dots + |\mu|^{k-1} m_0) = \\ &= A \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+p} m_n \right) |\mu|^{p-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, на основании (16), получаем

$$|\omega(\mu, P)| \leq qA \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p |\mu|^{p-1} \right)$$

или, приняв во внимание условие (4)

$$|\omega(\mu, P)| \leq AB \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p+1} |\mu|^p, \quad (17)$$

где B — постоянная, которая не зависит от $P(x)$, а зависит лишь от $|\lambda_n|$ и $|m_n|$. Очевидно, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p+1} |\mu|^p < C(\varepsilon) e^{\varepsilon |\mu|}. \quad (18)$$

Отсюда, в частности, видно, что $\omega(\mu, P)$ — целая функция, растущая не быстрее целой функции первого порядка минимального типа.

Функция $\omega(\mu, P)$ неоднократно уже использовалась в том или ином виде в литературе (см., например, [1]—[3]). Отметим, что

$$\omega(\mu, e^{\lambda, x}) = \frac{L(\mu)}{\mu - \lambda},$$

откуда сразу вытекает следующее основное свойство этой функции: вычет функции

$$\frac{\omega(\mu, \psi) e^{\mu x}}{L(\mu)} \quad (\psi = e^{\lambda, x})$$

как функции переменного μ равен ψ в точке $\mu = \lambda$, и равен нулю во всех остальных точках.

На основании отмеченного свойства имеем

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu,$$

где, если

$$P(x) = \sum_{k=1}^p \gamma_k e^{\lambda_k x}, \quad (19)$$

контур Γ_0 — замкнутый, содержащий внутри точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Пусть Γ — граница угла $|\arg \mu| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. На основании условий (13), (14), (17), (18) получаем что

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\pi - \arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0.$$

На основании (13), (17) и (18) далее имеем

$$|P(x)| < AC_1(\varepsilon, \varphi_0) \int_{\Gamma} e^{2\varepsilon |\mu|} e^{\operatorname{Re}(x\mu)} |d\mu|. \quad (20)$$

Возьмем $x_0 < 0$ и обозначим через G угол с вершиной в точке x_0 , стороны которого наклонены к отрицательной части вещественной оси под углами $\pm \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$. Угол G получается сдвигом угла $|\pi - \arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ на вектор x_0 . Пусть x лежит в угле G . Тогда

$$\operatorname{Re}(x\mu) < -(|x_0| \cos \varphi_0) |\mu|.$$

Выбрав $2\varepsilon < |x_0| \cos \varphi_0$, из (20) получаем

$$|P(x)| < AK, \quad x \in G,$$

где K — постоянная, которая не зависит от $P(x)$ (она зависит от $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$ и угла G). Раствор угла G (за счет выбора φ_0) может быть сделан сколь угодно близким к π . Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 по духу близка к теореме Л. Шварца

[4] (см. также [5], [6]), утверждающей, что если $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ и полином (19) ограничен по модулю константой A на отрезке $[a, 0]$ ($a < 0$),

то тогда он ограничен по модулю в указанном выше угле G величиной AK , где K не зависит от $P(x)$. Отметим только, что в этой теореме условие $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ является существенным, в теореме же 2 оно может и не выполняться.

Теорему 2 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. Пусть

$$P(x) = Q(x) + R(x),$$

где

$$Q(x) = \sum_{n=1}^q a_n e^{\lambda_n x}, \quad R(x) = \sum_{n=1}^r b_n e^{-\lambda_n x}.$$

Если

$$|P^{(n)}(0)| < A m_n \quad (n \geq 0),$$

причем m_n удовлетворяют условию (4), то в угле $G_1: |\arg(x-x_0)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \left(x_0 > 0, 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ имеет место оценка

$$|R(x)| < AK, \quad x \in G_1,$$

а в угле G_2 , симметричном G_1 относительно начала координат, — оценка

$$|Q(x)| < AK,$$

где K не зависит от $P(x)$ (K зависит от $\{\lambda_n\}$, $\{m_n\}$ и G_1, G_2).

Доказательство проводится также как и выше, следует только учесть, что

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\pi - \arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0,$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\omega(\mu, P) e^{\mu x}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\arg x| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0,$$

где Γ_1 — граница угла $|\arg \mu| < \frac{\pi}{4}$, а Γ_2 — граница угла $|\pi - \arg \mu| < \frac{\pi}{4}$.

Замечание. В теоремах 2 и 3 производные $P^{(n)}(x)$ можно было бы рассматривать не в начале координат, а в какой-нибудь фиксированной точке a , $-\infty < a < \infty$. Тогда вершину угла G_1 следует взять правее точки a , а вершину угла G_2 — левее точки a .

Следствие. Пусть

$$P_k(x) = Q_k(x) + R_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где

$$Q_k(x) = \sum_{n=1}^{q_k} a_{n,k} e^{\lambda_{n,k} x}, \quad R_k(x) = \sum_{n=1}^{r_k} b_{n,k} e^{-\lambda_{n,k} x}.$$

Если

$$|P_k^{(n)}(a)| < Am_n, \quad |P_k^{(n)}(b)| < Am_n \quad (a < b, n > 0),$$

причем выполняется условие (4), и последовательность $\{P_k(x)\}$ сходится на интервале (a, b) или на его какой-нибудь части, то последовательность $\{Q_k(x)\}$ равномерно сходится внутри полуплоскости $\operatorname{Re} x < b$, а последовательность $\{R_k(x)\}$ — внутри полуплоскости $\operatorname{Re} x > a$. Последовательность $\{P_k(x)\}$ при этом сходится равномерно внутри полосы $a < \operatorname{Re} x < b$.

§ 3. Частный случай

Рассмотрим случай, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$ при показателе $\rho(r)$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок.

Функция $\rho(r)$ ($r > 0$) называется уточненным порядком, если существует предел $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r$. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\frac{1}{\rho}} I(\lambda_n)} = \tau,$$

то мы говорим, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ при показателе $\rho(r)$. Если для целой функции $f(z)$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\rho}}(r)} = \sigma \neq 0, \infty, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется уточненным порядком целой функции $f(z)$, а σ — тип этой функции при уточненном порядке $\rho(r)$.

Известно, что функция $t = r^{\rho(r)}$ — возрастающая, поэтому она имеет обратную функцию $r = \varphi(t)$. Эта функция обладает свойством: имеется предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(at)}{\varphi(t)} = a^{\frac{1}{\rho}}, \quad 0 < a < \infty. \quad (21)$$

Отметим еще два необходимых нам факта (все эти сведения имеются в книге Б. Я. Левина [7]): 1) тип σ целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ при уточненном порядке $\rho(r)$ определяется по формуле

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(n)^{\frac{1}{\rho}} |a_n| = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}; \quad (22)$$

2) если $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ при уточненном порядке $\rho(r)$, то существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\rho}}(r)} = \frac{\pi \tau}{\sin \frac{\pi \rho}{m}}, \quad M(r) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^m}{\lambda_k^m} \right), \quad (23)$$

где m — целое $> \rho$.

Мы рассматриваем случай, когда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum \frac{1}{\varphi(n)} = \infty \quad (24)$$

(совместность всех этих условий будет ниже проверена на примере). Второе из условий (24) дает нам, что функция $f(z)$ конечного типа при порядке $\rho(r)$ растет не быстрее функции первого порядка минимального типа в обычном понимании.

Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ и $\{\lambda_n\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$ при показателе $\rho(r)$, удовлетворяющем условиям (24). Покажем, что в этом случае в качестве чисел M_n из теоремы 1 можно взять числа

$$M_n = h_1^n [\varphi(n)]^n \quad (n > 0), \quad h_1 > h_0 = (\pi e \tau)^{-1}.$$

Для доказательства возьмем положительные числа τ_1 и τ_2 , причём $\tau_1 + \tau_2 = \tau$. Положим $k_n = \left\lfloor \frac{\tau_1}{\tau_2} n \right\rfloor$ ($[a]$ — целая часть числа a). Обозначим через $\{s_n\}$ дополнение $\{k_n\}$ до последовательности $|n|$ всех натуральных чисел. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n} = \frac{\tau_1}{\tau},$$

то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s_n} = \frac{\tau_2}{\tau}.$$

Отсюда $s_n \approx \frac{\tau_2}{\tau} n$. Положим

$$\lambda_n' = \gamma_n = \lambda_{k_n}, \quad \lambda_n'' = \delta_n = \lambda_{s_n}.$$

Так как

$$\frac{n}{\lambda_n'(\gamma_n)} = \tau + o(1), \quad \lambda_n = \varphi\left(\frac{n}{\tau + o(1)}\right),$$

то, следовательно

$$\frac{k_n}{\gamma_n^{\rho(\gamma_n)}} = \tau + o(1), \quad \gamma_n = \varphi\left(\frac{k_n}{\tau + o(1)}\right)$$

и далее

$$\frac{s_n}{\delta_n^{\rho(\delta_n)}} = \tau + o(1), \quad \delta_n = \varphi\left(\frac{s_n}{\tau + o(1)}\right).$$

Значит, существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\gamma_n^{\rho(\gamma_n)}} = \tau_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\delta_n^{\rho(\delta_n)}} = \tau_2$$

и, согласно свойству (21)

$$\lambda_n' = \gamma_n = \frac{1}{\tau_1 + o(1)} \varphi(n), \quad \lambda_n'' = \delta_n = \frac{1}{\tau_2 + o(1)} \varphi(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из (25), принимая во внимание третье из условий (24), выводим, что

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{i_n} = \infty.$$

Оценим величины

$$\gamma_c = \min_{r>0} \frac{(1+r)M(r)}{r^n}, \quad M(r) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right).$$

На основании (23) (положив $\rho = 1$, $m = 2$) имеем

$$\frac{(1+r)M(r)}{r^n} > \frac{A(\varepsilon)}{r^n} \exp[(\pi\tau_1 - \varepsilon)r^{\rho(r)}], \quad r > 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Положим

$$\psi(r) = \frac{1}{r^n} \exp[(\pi\tau_1 - \varepsilon)r^{\rho(r)}]$$

и найдем минимум этой функции. Для этого возьмем производную, приравняв ее нулю, получим уравнение

$$r^{\rho(r)} [\rho(r) + r\rho'(r) \ln r] = \frac{n}{\gamma}, \quad \gamma = \pi\tau_1 - \varepsilon.$$

Если n велико, то и r велико, $\rho(r)$ близко к $\rho = 1$, $r\rho'(r) \ln r$ близко к нулю. Значит

$$r = \varphi\left(\frac{n}{\gamma + o(1)}\right) = \frac{1}{\gamma + o(1)} \varphi(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, учитывая, что

$$r^{\rho(r)} = \frac{n}{\gamma + o(1)},$$

получим

$$\min_{r>0} \psi(r) = [e\gamma + o(1)]^n [\varphi(n)]^{-n}.$$

Следовательно

$$\gamma_n \geq A(\varepsilon) [e\gamma + o(1)]^n [\varphi(n)]^{-n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\gamma_n^{-1} < \left[\frac{1}{e(\pi\tau_1 - \varepsilon) + o(1)} \right]^n [\varphi(n)]^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

При τ_1 , близком к τ , малом $\varepsilon > 0$, квадратная скобка будет меньше h_1 , если $h_1 > h_0 = (e\pi\tau)^{-1}$. Это и дает нам то, что нужно, ибо в качестве M_ε в теореме 1 можно взять числа γ_n^{-1} .

Теперь убедимся, что в теореме 2 в качестве m_n можно взять числа

$$m_n = h_2^n [\varphi(n)]^n, \quad h_2 < h_0.$$

Функция

$$L(\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n \quad (c_{2n+1} = 0)$$

на основании (23) (положив $\rho = 1$, $m = 2$) имеет тип $\pi\tau$ при уточненном порядке $\rho(r)$. Поэтому, согласно формуле (22),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = \pi e\tau,$$

откуда при любом $\varepsilon > 0$

$$|c_n| < \left[\frac{\pi e\tau + \varepsilon}{\varphi(n)} \right]^n, \quad n > N(\varepsilon).$$

Такому же неравенству будут удовлетворять числа β_n ($\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$). При малом $\varepsilon > 0$ получим

$$\sum_1^\infty \beta_n m_n < \infty, \quad m_n = h_2^n [\varphi(n)]^n, \quad h_2 < h_0 = (\pi e\tau)^{-1},$$

что и надо было показать.

Рассматриваемый случай интересен тем, что в нем указана точная граница $h_0 [\varphi(n)]^n$ для чисел M_n снизу и для чисел m_n сверху.

Осталось привести конкретный пример уточненного порядка $\rho(r)$, удовлетворяющего одновременно всем условиям (24). Положим

$$\rho(r) = 1 - \frac{\ln \ln r}{\ln r}. \quad (26)$$

Очевидно, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1$. Так же легко убедиться, что $\lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0$.

Имеем далее

$$r^{\rho(r)} = \frac{r}{\ln r}, \quad r^{\rho(r)-1} = \frac{1}{\ln r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Обратная функция $r = \varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = (1 + o(1)) t \ln t, \quad t \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\varphi(n)} = \infty.$$

Следовательно, порядок (26) — искомый.

В случае порядка (26)

$$M_n = h_1^n (n \ln n)^n, \quad m_n = h_2^n (n \ln n)^n,$$

где

$$h_1 > h_0, \quad h_2 > h_0, \quad h_0 (e\pi\tau)^{-1}.$$

Ա. Ֆ. ԼԵՈՆՏՅԵՎԻ. Համաձայն վրա էփսպոնենոնեհի սխտեմի լրիվարյան եարցի մասին (ամփոփում)

$$\text{Կոդը } 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \sum_1^\infty \lambda_n^{-1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

նշվում է թվերի այնպիսի $M_0, M_1, \dots$ սխտեմ, որ իրական առանցքի $[a, b]$ հատվածի վրա անսխտիկ յուրաքանչյուր $f(x)$ ֆունկցիայի համար, ըստ $\varepsilon > 0$ -ի կարելի է ընտրել այնպիսի

$$P(x) = \sum_{k=1}^p a_k e^{\lambda_k x} \text{ րազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին }^1$$

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \varepsilon M_n \quad (n \geq 0, a \leq x \leq b).$$

Այնուհետև նշվում է թվերի մի ուրիշ $m_0, m_1, \dots$ սխտեմ, $\sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} \rightarrow \infty$, այնպես, որ եթե

նշված սխտեմի $P(x)$ րազմանդամի համար

$$|P^{(n)}(0)| \leq m_n \quad (n \geq 0),$$

այդա ձևի կիրառարթություն յուրաքանչյուր անկյան մեջ $|P(x)| < A$, որտեղ A -ն կախված է $P(x)$ -ից, այլ կախված է չափ անկյունից, $\{\lambda_n\}$ և $\{m_n\}$ հաջորդականություններից:

A. F. LEONTJEV. On completeness of a system of exponents on an interval (summary)

Let

$$0 < \lambda_n \uparrow \infty, \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

A set of numbers $M_0, M_1, \dots$ is pointed out such that for any analytic on $[a, b]$ function $f(x)$ and any given $\varepsilon > 0$ a polynomial $P(x) = \sum_1^p a_n e^{\lambda_n x}$ may be found such that

$$|f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)| < \varepsilon M_n \quad (n \geq 0, a \leq x \leq b).$$

Further on, another set of numbers $m_0, m_1, \dots$ is pointed out such that if

$$|Q^{(n)}(0)| \leq m_n \quad (n \geq 0), \quad Q(x) = \sum_1^q b_n e^{\lambda_n x}, \quad \sqrt[n]{\frac{m_n}{n!}} \rightarrow \infty,$$

then $|Q(x)| < A$ for all x from the domain $|\arg[\pi - (x - x_0)]| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_0 < 0$, where A depends on $\{\lambda_n\}$, x_0 , φ_0 and is independent from $Q(x)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Ф. Леонтьев. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XXXIX, 1951.
2. L. Carleson. On infinite differential equations with constant coefficients, I, Math.—Scandinavica, 1, 1953, 31—38.
3. А. Ф. Леонтьев. Представление функций обобщенными рядами Дирихле, УМН, XXIV, вып. 2, 146, 1969, 97—164.
4. L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles réelles, Paris, 1943.
5. I. A. Clarkson and P. Erdős. Approximation by polynomials, Duke Math. I, 10, № 1, 1943, 5—11.
6. А. Ф. Леонтьев. Об одной последовательности полиномов, ДАН СССР, 72, № 4, 1950, 621—624.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

С. О. СИНАНЫН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОДНОМ КОМПАКТЕ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК

В работе уточняются результаты статьи [1].

1°. Пусть E — компакт на комплексной плоскости. Через $A(E)$ обозначим банахову алгебру аналитических на E функций. Элементы этой алгебры наследуют многие свойства аналитических на E функций — например, аналитичность во внутренних точках компакта. Если же E не имеет внутренних точек, то функции из $A(E)$ не обязательно являются аналитическими на E функциями. Но если нигде не плотный компакт E достаточно „массивен“, то многие свойства аналитических функций переносятся на все функции алгебры $A(E)$. Например, из обращения в нуль любой функции из $A(E)$ на некоторой порции множества E следует тождественное равенство нулю данной функции на всем E (свойство единственности аналитических функций).

Идея о возможности переноса таким путем свойств аналитических функций на функции алгебры $A(E)$, когда E нигде не плотный компакт, исходит от Келдыша М. В. и Мергеляна С. Н.

В настоящей работе на примере одного компакта E анализируется вопрос о переносе дифференциальных свойств и более глубокого свойства — свойства единственности аналитических функций, на функции алгебры $A(E)$.

Пусть $1 = n_0 < n_1 < \dots$ — последовательность нечетных чисел, $N_m = n_0 n_1 \dots n_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, Δ — единичный замкнутый квадрат. Разделим Δ прямыми, параллельными его сторонам, на n_1^2 равных квадратов. Обозначим получившийся центральный открытый квадрат через $\Delta_1^{(1)}$, а остальные квадраты — через $\delta_i^{(1)}$, $1 \leq i < n_1^2$. Каждый из квадратов $\delta_i^{(1)}$, в свою очередь, разделим прямыми, параллельными его сторонам, на n_2^2 равных квадратов. Обозначим получившийся в $\delta_i^{(1)}$ центральный открытый квадрат через $\Delta_i^{(2)}$, $1 \leq i < n_1^2$, а остальные квадраты второго деления — через $\delta_p^{(2)}$, $1 \leq p < n_1^2 \cdot n_2^2$.

Пусть квадраты $\delta_i^{(k-1)}$, $1 \leq i < N_{k-1}$, уже построены. Разделим каждый из этих квадратов прямыми, параллельными его сторонам, на n_k^2 равных квадратов. Центральные в $\delta_i^{(k-1)}$ открытые квадраты обозначим через $\Delta_i^{(k)}$, $1 \leq i < N_{k-1}$.

Остальные квадраты k -го деления обозначим через $\delta_p^{(k)}$, $1 \leq p < N_{k-1} \cdot n_k^2$. Продолжим этот процесс бесконечно. Определим нигде не плотный континуум

$$E_0 = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \Delta_l^{(k)} \right).$$

Через $\bar{\Delta}_l^{(k)}$ обозначим concentрический к $\Delta_l^{(k)}$ открытый квадрат со стороной $\frac{1}{N_k} + \frac{S_k}{N_k}$, где S_k — нечетное число. Положим

$$E_m = \Delta \setminus \bar{\Delta}_m, \text{ где } \bar{\Delta}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bar{\Delta}_l^{(k)}.$$

$E_{m, \delta}$ — множество тех точек из $E_m \cap E_0$, расстояние которых от границы области $D_m = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_{l=1}^{\infty} \Delta_l^{(k)} \right)$ не менее, чем $\delta > 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{mes}(E_0 \setminus E_{m, \delta}) &< \text{mes}(D_m \setminus E_{m, \delta}) < \\ &< \sum_{k=1}^{m-1} N_{k-1}^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{N_k} + 2\delta \right)^2 - \frac{1}{N_k^2} \right] + \text{mes} \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bar{\Delta}_l^{(k)} \right) < \\ &< 4\delta^2 \cdot N_{m-1}^2 + \sum_{k=m}^{\infty} N_{k-1}^2 \left[\left(\frac{1}{N_k} + \frac{S_k}{N_k} \right)^2 - \frac{1}{N_k^2} \right] < 4\delta^2 \cdot N_{m-1}^2 + 4 \cdot \left(\frac{S_m}{n_m} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

(При рассмотрении множеств $E_{m, \delta}$ заранее предполагается сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{S_k}{n_k} \right)^2$).

Из последней оценки видно, что выбирая сначала m достаточно большим, а затем $\delta > 0$ достаточно маленьким, множество $E_{m, \delta}$ по мере можно сделать сколь угодно близким к множеству E_0 .

Через $C^s(E_0)$ обозначим подмножество функций из множества $C(E_0)$, которые s раз непрерывно дифференцируемы на всех множествах $E_{m, \delta}$ (m и $\delta > 0$ произвольны, производная берется по указанному множеству). Через $C^\infty(E_0)$ обозначим множество всех функций из указанных, которые на всех множествах $E_{m, \delta}$ бесконечно дифференцируемы.

Утверждение 1. 1) Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_{k-1}}{n_k} = +\infty$, то $A(E_0) = C(E_0)$.

2) Если $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{k-1}}{n_k} < +\infty$, то $A(E_0) \neq C(E_0)$ ($A(E_0) \subset C(E_0)$).

Это утверждение есть частный случай результата Мергеляна С. Н. (см. [2]). (Написанный ряд представляет из себя сумму длин границ дополнительных к E_0 ограниченных областей).

Здесь и в дальнейшем будем требовать монотонность последовательности $\left\{ \frac{N_{k-1}^s}{n_k} \right\}$ для каждого натурального числа s . Отметим, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_{k-1}^s}{n_k} < +\infty \quad (2)$$

выполняется для $n_k \sim e^{s \cdot k}$ при $\alpha > \log(s+1)$, а при $\alpha \leq \log(s+1)$ нарушается.

Любопытно отметить, что при выполнении условия (2) последовательность $\left\{ \frac{N_{k-1}^s}{n_k} \right\}$ будет убывать быстрее, чем e^{k^α} ($\alpha > 0$ — любое),

а при нарушении условия (2) — возрастать быстрее, чем e_k . Здесь сказывается влияние неустойчивости аналитической емкости (о неустойчивости аналитической емкости см., например, [3]).

В утверждении 2 обобщается утверждение 1 и уточняется 2-ая часть этого утверждения.

Утверждение 2. Если выполняется условие (2), то

$$A(E_0) \subset C^s(E_0), \quad A(E_0) \neq C^s(E_0).$$

Заметим, что это и последующие утверждения можно без заметных изменений сформулировать и доказать для нигде не плотных компактов, которые получаются удалением из замкнутых областей последовательности открытых областей со спрямляемыми границами. (Формулировки будут в терминах длин указанных границ).

Утверждение 3. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log N_{k-1}}{\log N_k} < +\infty, \quad (3)$$

то $A(E_0) \subset C^\infty(E_0)$.

Утверждение 4. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log N_{k-1}}{\log \log N_k} < +\infty, \quad (4)$$

то алгебра $A(E_0)$ обладает свойством единственности аналитических функций — из обращения в нуль какой-нибудь функции этой алгебры на некоторой порции множества E_0 следует тождественное равенство нулю функции на всем множестве.

Замечание. В связи с утверждениями 2 и 3 отметим следующее. Если $A(E_0)$ не содержит все непрерывные на E_0 функции, то $A(E_0)$ не может содержать также все бесконечно дифференцируемые функции (ибо ими можно всегда аппроксимировать любую непрерывную функцию).

Доказательство утверждений

2°. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, полюсы которой лежат вне множества E_0 и

$$\|R\| = \max_{z \in E_0} |R(z)| < B.$$

$\Delta_l^{(k)}$ будем называть квадратами k -го ранга. Через M обозначим номер наивысшего ранга квадрата $\Delta_l^{(k)}$, который содержит полюсы функции $R(z)$. Через $R_{k, l}(z)$ обозначим ту часть разложения $R(z)$ в сумму простейших дробей, полюсы которой лежат в $\Delta_l^{(k)}$

$$R(z) = P(z) + \sum_{k=1}^M \sum_i R_{k,i}(z), \quad (5)$$

где $P(z)$ — многочлен (целая часть $R(z)$).

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$\sum_i |R_{M,i}(z)| < 6 \cdot \frac{N_{M-1}}{n_M} \cdot B, \quad z \in \bigcup_j \partial \delta_j^{(M-1)}.$$

Доказательство. Основной в доказательстве служит формула

$$R_{k,i}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_i^{(k)}} \frac{R(t)}{t-z} dt, \quad z \in \Delta_i^{(k)}. \quad (6)$$

Пусть $z_0 \in \partial \delta_{i_0}^{(M-1)}$. Рассмотрим квадратные рамки $\tau_1 = \delta_{i_0}^{(M-1)}$, $\sigma_2, \dots, \sigma_{N_{M-1}}$, которые concentричны к τ_1 , имеют ширину $\frac{1}{N_{M-1}}$, каждая последующая окружает предыдущую, и образуются из квадратов $\delta_j^{(M-1)}$. σ_k содержит не более, чем $8 \cdot k$ из квадратов $\delta_j^{(M-1)}$. σ_k содержит не более, чем $8 \cdot k$ из квадратов $\delta_j^{(M-1)}$.

Согласно формуле (6) при $\delta_{i_0}^{(M-1)} \subset \sigma_k$ имеем

$$|R_{M,i}(z_0)| < \frac{B}{2\pi} \cdot \int_{\partial \Delta_i^{(M)}} \frac{|dt|}{|t-z_0|} < \frac{\frac{4B}{N_M}}{2\pi \cdot k \cdot \frac{1}{N_{M-1}}} = \frac{2B}{\pi \cdot k \cdot n_M}.$$

Откуда

$$\sum_{\delta_j^{(M-1)} \subset \sigma_k} |R_{M,i}(z_0)| < 8 \cdot k \cdot \frac{2B}{\pi \cdot k \cdot n_M} < \frac{6 \cdot B}{n_M}.$$

Суммируя последнее неравенство по всем рамочкам, получим

$$\sum_i |R_{M,i}(z_0)| < 6 \cdot \frac{B \cdot N_{M-1}}{n_M}. \quad (7)$$

Лемма 2. Обозначим $\Phi_m(z) = R(z) - \sum_{k=m}^M \sum_i R_{k,i}(z)$. Имеет место оценка $|\Phi_m(z)| < A \cdot B$, где

$$A = \prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{6N_{k-1}}{n_k} \right), \quad z \in D_{\text{ext}}. \quad (8)$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$|\Phi_m(z)| < \left(1 + \frac{6N_{m-1}}{n_m} \right) \cdot B, \quad z \in \bigcup_j \partial \delta_j^{(M-1)}.$$

Так как $\Phi_m(z)$ аналитична на любом квадрате $\delta_j^{(M-1)}$, то

$$\sum_j |R_{M-1, j}(z)| < 6AB \cdot \left(\frac{N_{M-2}}{n_{M-1}} + \frac{1}{S_{M-1}} \right), \quad z \in C \cup \bar{\Delta}_l^{(M-1)}.$$

Написав подобную оценку для всех $\Phi_r(z)$, $r = M, M-1, \dots, m$, и затем объединяя их, будем иметь

$$\sum_{k=m+1}^M \sum_l |R_{k, l}(z)| < 6AB \cdot L_m, \quad z \in C \cup_{k=m+1}^M \cup \bar{\Delta}_l^{(k)}.$$

3°. Доказательство утверждений 2 и 3. Пусть выполняется условие (2) и $f(z)$ — произвольная функция алгебры $A(E_0)$. Рассмотрим последовательность аналитических на E_0 рациональных функций $\{R_s(z)\}$, которая сходится к $f(z)$ (в пространстве $A(E_0)$). Для рациональной функции $R(z) = R_s(z)$ будем сохранять все предыдущие обозначения.

Пусть $z \in C \bar{\Delta}_{l_0}^{(M)}$; $z \in \delta_{l_0}^{(M-1)}$. Из формулы (6) следует

$$\frac{d^s}{dz^s} R_{M, l}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_l^{(M)}} \frac{R(t)}{(t-z)^{s+1}} dt.$$

Аналогично доказательству леммы 1 имеем

$$\left| \frac{d^s}{dz^s} R_{M, l_0}(z) \right| < \frac{4B \cdot s! \cdot \frac{1}{N_M}}{2\pi \left(\frac{S_M}{N_M} \right)^{s+1}} = \frac{2B \cdot s!}{2\pi} \cdot \frac{N_M^s}{S_M^{s+1}}.$$

Для остальных индексов i , $\delta_l^{(M-1)} \subset \sigma_k$ можно записать оценку

$$\left| \frac{d^s}{dz^s} R_{M, l}(z) \right| < \frac{4B \cdot \frac{1}{N_M} \cdot s!}{2\pi \left(\frac{k}{N_{M-1}} \right)^{s+1}} = \frac{2B \cdot s!}{\pi} \cdot \frac{N_{M-1}^s}{k^{s+1} \cdot n_M}.$$

Суммируя последнее неравенство по всем рамочкам σ_k и прибавляя к предпоследней оценке, получим

$$\sum_l \left| \frac{d^s}{dz^s} R_{M, l}(z) \right| < \frac{2B \cdot s!}{\pi} \cdot \beta_M, \quad \text{где } \beta_M = \frac{N_M^s}{S_M^{s+1}} + \frac{8N_{M-1}^s}{k^s \cdot n_M}, \quad z \in \bar{\Delta}_{l_0}^{(M)}.$$

Совершенно аналогично оценкам лемм 2, 3 можно получить неравенство

$$\sum_{k=m}^M \sum_l \left| \frac{d^s}{dz^s} R_{M, l}(z) \right| < 6B \cdot A_1 \cdot d_m, \quad z \in C \cup_{k=m}^M \cup \bar{\Delta}_l^{(k)}, \quad (12)$$

где $A_1 = \prod_{k=1}^m (1 + \beta_k)$, $a_m = \sum_{k=m}^{\infty} \beta_k$.

Последовательность $\{S_k\}$ выбирается так, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k^2}{S_k^{k+1}}$
 (например $S_k \sim \left\lfloor \frac{n_k}{k} \right\rfloor$).

Заметим, что

$$\text{mes} \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_l \tilde{\Delta}_l^{(k)} \right) < \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{S_k}{n_k} \right)^2 < +\infty.$$

Оценка (12) справедлива вне множества $\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_l \tilde{\Delta}_l^{(k)}$. Тогда имеем

$$|\Phi_m(z)| < B \cdot (1 + 6A_1 \cdot \alpha_m), \quad z \in D_m \setminus \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \bigcup_l \tilde{\Delta}_l^{(k)} \right). \quad (13)$$

Так как $\Phi_m(z)$ аналитична на области D_m , то из последней оценки следует, что внутри области D_m последовательности $\left\{ \frac{d^i}{dz^i} \Phi_m^{(s)}(z) \right\}$ при любых m, i равномерно сходятся при $\varepsilon \rightarrow +0$. Далее, применяя оценку (12) к разности $R_s(z) - R_i(z)$, получим, что последовательности

$$\{R_s(z)\}, \left\{ \frac{d^i}{dz^i} R_s(z) \right\}$$

на каждом множестве E_m, ε при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно сходятся. Следовательно, предельная функция $f(z)$ последовательности $\{R_s(z)\}$ принадлежит $C^s(E_0)$.

Доказательство утверждения 3 содержится в доказательстве утверждения 2, ибо при выполнении условия (3) условие (2) выполняется при любом натуральном s .

Перейдем к доказательству утверждения 4.

4°. Рассмотрим произвольную функцию $f(z)$ алгебры $A(E_0)$, которая обращается в нуль на некоторой порции множества E_0 . Пусть $\delta_{i_0}^{(k_0)}$ — наибольший квадрат среди $\{\delta_i^{(k)}\}$ (с наименьшим верхним индексом), который принадлежит указанной порции. $\{R_s(z)\}$ — последовательность аналитических на E_0 функций, пределом которой при $\varepsilon \rightarrow +0$ на E_0 является функция $f(z)$. Обозначим

$$\alpha(\varepsilon) = \max_{\delta_{i_0}} |R_s(z)|, \quad \text{где } \delta_0 = E_0 \cap \delta_{i_0}^{(k_0)}. \quad (14)$$

По условию $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \alpha(\varepsilon) = 0$.

Применяя оценку (10) относительно квадрата $\delta_{i_0}^{(k_0)}$, будем иметь

$$\sum_{k=k_0+1}^M \sum_l^{**} |R_{k,l}(z)| < 6 \cdot \alpha(\varepsilon) \cdot B \cdot L_{k_0+1}, \quad z \in C \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} \bigcup_l^{**} \tilde{\Delta}_l^{(k)}, \quad (15)$$

где $(**)$ означает, что суммы распространяются по тем индексам i, k ,

для которых $\Delta_i^{(k)}$ принадлежат квадрату $\delta_i^{(k)}$. Тогда на множестве $\bar{G}^* = \bar{G}_0 \setminus \left(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} \bigcup_i^{**} \bar{\Delta}_i^{(k)} \right)$ имеем (согласно принципу максимума)

$$\left| R_i(z) - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_i^{**} R_{k,i}(z) \right| < \alpha(\varepsilon) + 6B \cdot \alpha(\varepsilon) L_{k_0+1}. \quad (16)$$

Следовательно, оценка (16) имеет место на множестве $\delta_i^{(k)}$. Еще раз обращаясь к (14) (сопоставляя с оценкой (15)), получим

$$\sum_{k=k_0+1}^M \sum_i^{**} |R_{k,i}(z)| < 2\alpha(\varepsilon) + 6B \cdot \alpha(\varepsilon) L_{k_0+1}, \quad z \in C \cup \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} \bigcup_i^{**} \Delta_i^{(k)}.$$

Так что с самого начала можно предположить, что рациональные функции $R_i(z)$ аналитичны на квадрате $\delta_i^{(k)}$.

Обозначим через D_m^* область

$$\Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_i^* \Delta_i^{(k)} \right),$$

где знак (*) означает, что сумма распространяется по тем индексам i, k , для которых квадраты $\Delta_i^{(k)}$ находятся во внешности квадрата $\delta_i^{(k)}$.

S_0 — концентрический к $\delta_i^{(k)}$ круг с радиусом $r_0 = \frac{1}{4N_{k_0-1}}$, $\Gamma_m = \partial D_m^*$, $\bar{D}_m = D_m^* \setminus S_0$. Основную роль в дальнейшем доказательстве будут играть оценки гармонической в области $\bar{D}_m$ функции $\omega_m(z)$:

$$\omega_m(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in \partial S_0 \\ 0 & \text{при } z \in \Gamma_m \end{cases}$$

Из оценки (10) и из аналитичности функции $\Phi_m^{(s)}(z)$ на множестве

$$\bigcup_m \bigcup_i \bar{\Delta}_i^{(k)} \text{ имеем}$$

$$|\Phi_m^{(s)}(z)| < B + 7AB \cdot L_m < C, \quad z \in D_m^*.$$

Кроме этого (опять используя оценку (10))

$$|\Phi_m^{(s)}(z)| < C \cdot \left[\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right], \quad z \in \delta_i^{(k)}.$$

В силу принципа максимума для субгармонических функций имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_m^{(s)}(z)| &< \left[C \left(\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right) \right]^{\omega_m(z)} \cdot C^{1-\omega_m(z)} = \\ &= C \cdot e^{\omega_m(z) \log \left[\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right]}, \quad z \in \bar{D}_m. \end{aligned}$$

Мы можем рассмотреть настолько маленькие значения $\varepsilon > 0$, для которых $\alpha(\varepsilon) < \frac{N_{m-1}}{n_m}$. Тогда

$$\log \left[\alpha(\varepsilon) + \frac{N_{m-1}}{n_m} \right] < \log 2 + \log N_{m-1} - \log n_m.$$

Можно записать центральное для доказательства неравенство

$$|\Phi_m(z)| < C \cdot e^{-\frac{\omega_m(z)}{2} \cdot \log n_m}, \quad z \in \bar{D}_m. \quad (17)$$

Займемся оценкой гармонической функции $\omega_m(z)$. Область $\bar{D}_m$ состоит из коридоров ширины не менее, чем $\frac{1}{N_{m-2}} - \frac{1}{N_{m-1}}$. Через F_m обозначим подмножество всех тех точек $\bar{D}_m$, расстояние которых до границы $\bar{D}_m$ не менее, чем $\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$. (Нетрудно проверить, что $\text{mes}(E_0 \setminus F_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$).

Пусть ζ — произвольная точка множества F_m , r_0, z_0 — радиус и центр круга S_0 . Выберем такие круги $S_1, S_2, \dots, S_p$ с центрами $z_1, z_2, \dots, z_p$ и радиусами $r = r_1 = r_2 = \dots = r_p = \frac{1}{2N_{m-2}}$, соответственно, что $|z_k - z_{k+1}| = \frac{r}{2}$, $k \geq 1$, $|z_0 - z_1| = \frac{3}{2}r_0$. Точка $\zeta \in S_p$ удалена от ∂S_0 на расстояние не менее, чем $\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$.

Нетрудно видеть, что количество этих кругов $-(p+1)$ можно взять не более, чем $8N_{m-2} \left(= \frac{4}{r} \right)$.

Далее рассмотрим гармонические функции $\mu_0(z), \mu_1(z), \dots, \mu_p(z)$.

$$\mu_0(z) = \log \frac{|z - z_0|}{2r_0} \bigg/ \log \frac{1}{2}.$$

$\mu_0(z) = 1$ при $|z - z_0| = r_0$ и $\mu_0(z) = 0$ при $|z - z_0| = 2r_0$. Обозначим $S'_k = \left\{ Z; |z - z_k| \leq \frac{r}{8} \right\}$, $k = 1, 2, \dots, p$. На круге S'_1 имеем оценку

$$\mu_0(z) > \log \frac{\frac{3}{2}r_0 + r}{2r_0} \bigg/ \log \frac{1}{2} = \log \left(\frac{3}{4} + \frac{r}{2r_0} \right) \bigg/ \log \frac{1}{2} = \lambda_1.$$

Определим

$$\mu_1(z) = \lambda_1 \cdot \log \frac{|z - z_1|}{r} \bigg/ \log \frac{1}{8}.$$

На круге S'_2 будем иметь оценку

$$\mu_1(z) > \lambda_1 \cdot \log \frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{8}}{r} \bigg/ \log \frac{1}{8} = \lambda_1 \cdot \log \frac{5}{8} \bigg/ \log \frac{1}{8} = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Определим

$$\mu_2(z) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \log \frac{|z - z_2|}{r} \left| \log \frac{1}{8} \right|.$$

На круге S_3 имеем оценку

$$\mu_2(z) > \lambda_1 \lambda_2 \log \frac{5}{8} \left| \log \frac{1}{8} \right| = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2.$$

И вообще

$$\mu_k(z) = \lambda_1 \lambda_2^{k-1} \log \frac{|z - z_k|}{r} \left| \log \frac{1}{8} \right|.$$

На круге S_{k+1} имеем оценку

$$\mu_k(z) > \lambda_1 \cdot \lambda_2^k, \quad k \leq p.$$

В силу принципа максимума гармонических функций имеем

$$\omega_m(z) > \mu_p(z), \quad z \in S_p.$$

Кроме этого

$$\begin{aligned} \mu_p(\zeta) &> \lambda_1 \lambda_2^{p-1} \cdot \log \frac{|\zeta - z_p|}{r} \left| \log \frac{1}{8} \right| > \lambda_1 \lambda_2^{p-1} \log \frac{r - \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}}{r} \left| \log \frac{1}{8} \right| > \\ &> \lambda_1 \lambda_2^{p-1} \cdot \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}. \end{aligned}$$

Сопоставляя последнюю оценку с оценкой (17), получим

$$|\Phi_m^{(i)}(\zeta)| < C \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \lambda_2^{4N_{m-2}} \cdot \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}} \cdot \log n_m}, \quad \zeta \in F_m. \quad (18)$$

Из условия (4) имеем

$$\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}} \cdot \lambda_2^{4N_{m-2}} \cdot \log n_m \cdot \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}} e^{\log \log n_m + 4N_{m-2} \log \lambda_2} \rightarrow +\infty \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m^{(i)}(z) = 0 \quad (z = z(m)), \quad \zeta \in F_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F_k; \quad \text{mes}(E_0 \setminus F_0) = 0.$$

Также учитывая оценку (10), приходим к окончательному выводу: за исключением подмножества E_0 , мера которого стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, в остальных точках множества E_0 равномерно $R_\varepsilon(z) = 0$ (1) при $\varepsilon \rightarrow +0$. Откуда следует, что $f(z) \equiv 0, z \in E_0$. Утверждение 4 доказано.

Ս. Ն. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. Առանց ենթին կետերի մի կոմպակտի վրա տրված ածալիտիկ ֆունկցիաների բախախյան ալգեբրայի զիֆերենցիալ ճառկությունները (ամփոփում)

Ամենուրեք նորս փակ բազմություն օրինակի վրա ցույց է արվում, որ այդ բազմության վրա ածալիտիկ ֆունկցիաների զիֆերենցիալ ճառկությունները կարող են փոխանցվել սահմանային (հավասարաչափ) ֆունկցիաների վրա: Սահմանային ֆունկցիաները կարող են նաև ժառանգել ածալիտիկ ֆունկցիաների միակության հատկությունը (այն բանից, որ ֆունկցիան ընդունում է զրոյական արժեքներ փակ բազմության որեէ պորցիայի վրա հետևում է, որ ֆունկցիան նույնա-րար հավասար է զրոյի ամբողջ բազմության վրա):

Տրվում են քանակական գնահատականներ:

S. O. SYNANIAN. *Differential properties of Banach algebra of analytic functions on a compact without inner points* (summary)

Using an example of nowhere dense compact it is shown, that differential properties of analytical on a compact functions expand to the limiting functions (uniform). The limiting functions may as well inherit the property of uniqueness of analytic functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. О. Синанян. Свойство единственности аналитических функций на замкнутых множествах без внутренних точек, Сибирский математ. журнал, VI, № 6, 1965, 1366—1381.
2. С. Н. Мерцелян. Равномерное приближение функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (28), 1952, 31—122.
3. А. Г. Витушкин. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, XXII, вып. 6 (138), 1967, 141—199.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

С. Я. ХАВИНСОН

О ПОНЯТИИ ПОЛНОТЫ, УЧИТЫВАЮЩЕМ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

В в е д е н и е

Хорошо известно, что возможность сколь угодно близкой аппроксимации элемента ω в нормированном пространстве X элементами подпространства $E \subset X$ эквивалентна тому, чтобы всякий линейный функционал $I \in X^*$, обращающийся в нуль на E , был бы равен нулю на элементе ω . На этом основывается связь между проблемами аппроксимации и теоремами единственности теории аналитических функций. С рассматриваемым линейным функционалом часто удается связать аналитическую функцию и равенство функционала на некоторых элементах нулю означает обращение в нуль данной аналитической функции в определенных точках. В теории аналитических функций имеются, однако, более сильные теоремы единственности, когда заключение $f(z) \equiv 0$ вытекает из того, что $f(z)$ лишь достаточно мала на определенном множестве. Каким фактам полноты систем отвечают подобные теоремы единственности? Оказалось, что связь с этими теоремами единственности имеют такие аппроксимационные процессы, в которых в расчет принимаются не только отклонения приближающих полиномов от приближаемой функции, но и величины коэффициентов приближающих полиномов. Основы теории полноты, учитывающей величины коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, были даны в работах Дейвиса и Фань—Цзи [1] и автора [2]. Конкретные результаты были этим методом получены в [1]—[7]. В заметке [8] было дано дальнейшее развитие теории и сформулированы новые конкретные результаты. В настоящей статье дается подробное изложение доказательств теорем из [8].

§ 1. Общие теоремы

Пусть X — нормированное пространство. Рассмотрим, наряду с X , последовательность n -мерных пространств E_n , состоящих из точек $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $n = 1, 2, \dots$. В E_n считаем заданной норму (или полунорму) $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, причем предполагаем выполненным следующее условие согласования:

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}) \quad (1)$$

для $\forall m > n$ и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Сопряженное к E_n пространство обозначим E_n^* , а норму в E_n^* обозначим через p^* . Выделим в X систему элементов $\{\varphi_j\}$, $j=1, \dots$. Для произвольного $\omega \in X$ положим

$$\bar{p}(\omega) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} p(\lambda_1^k, \dots, \lambda_{n_k}^k), \quad (2)$$

где $\inf$ взята по всем системам $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_{n_k}^k)$ таким, что

$$\left\| \omega - \sum_1^{n_k} \lambda_j^k \varphi_j \right\| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Если для данного ω вообще не имеется последовательности линейных комбинаций элементов $\{\varphi_j\}$, сходящейся к ω , то полагаем $\bar{p}(\omega) = \infty$.

Определение. Мы скажем, что система $\{\varphi_j\}$, $j=1, \dots, O(p)$ полна в X , если $\bar{p}(\omega) < \infty$ для $\forall \omega \in X$. Если же для $\forall \omega \in X$ будет $\bar{p}(\omega) = 0$, то скажем, что $\{\varphi_j\}$ будет $o(p)$ полной в X .

Лемма 1. Если X — пространство Банаха и $\bar{p}(\omega) < \infty$ для элементов образующих множество второй категории в X , то существует константа $C > 0$ такая, что

$$\bar{p}(\omega) \leq C \|\omega\|, \quad \forall \omega \in X. \quad (4)$$

Доказательство леммы основывается на принципах теории Банаха — Штейнхауса и приводится для полноты изложения. Обозначим через X_M

множество элементов ω , для которых $\bar{p}(\omega) \leq M$, $M > 0$. Множество X_M — замкнутое. Действительно, пусть $\{\omega_n\} \subset X_M$ и $\omega_n \rightarrow \omega$. Взяв $\varepsilon > 0$, найдем ω_n такое, чтобы $\|\omega - \omega_n\| < \varepsilon$. Для ω_n подбираем линейную комбинацию $\sum_1^N \lambda_j \varphi_j$ такую, что $\|\omega_n - \sum_1^N \lambda_j \varphi_j\| < \varepsilon$, $p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \leq M + \varepsilon$. От-

сюда сейчас же следует, что $\bar{p}(\omega) \leq M$ и $\omega \in X_M$. Пусть Y — множество всех элементов, для которых $\bar{p}(\omega) < \infty$. Функция $\bar{p}(\omega)$ есть полунорма на Y (т. е. $\bar{p}(\omega_1 + \omega_2) \leq \bar{p}(\omega_1) + \bar{p}(\omega_2)$ и $\bar{p}(\gamma\omega) = |\gamma| \bar{p}(\omega)$). Далее, $Y = \bigcup_{M=1}^{\infty} X_M$ и Y — множество второй категории. Повтому некоторое X_M не будет нигде не плотным и, будучи замкнутым, содержит некоторую сферу $S(\omega, r)$ (ω — центр, r — радиус). Тогда сфера $S'(0, r) \subset X_{2M}$, и для любого $\omega \in X$ имеет место неравенство $\bar{p}(\omega) \leq \frac{2M_0}{r} \|\omega\|$.

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. Система $\{\varphi_j\}$, $j=1, \dots, O(p)$ полна в X .
2. $\bar{p}(\omega) < \infty$ для элементов, образующих множество второй категории в X .
3. Существует константа $C > 0$ такая, что для произвольного линейного функционала $l \in X^*$ из неравенств

$$p^*(l(\varphi_1), \dots, l(\varphi_n)) \leq 1, \quad n=1, 2, \dots \quad (4)$$

вытекает неравенство

$$\|l\| \leq C. \quad (5)$$

Доказательство. То, что $1 \rightarrow 2$ — очевидно. Покажем, что

$2 \rightarrow 3$. Согласно лемме 1, $\exists C > 0$ такое, что $\bar{p}(\omega) \leq C$, если $\|\omega\| \leq 1$. Если бы утверждение 3 было неверно, то при любом $K > 0$, $\exists l_0 \in X^*$ такой, что имеет место (4), но $\|l_0\| = T > K$. Поэтому $\exists \omega \in X$, $\|\omega\| = 1$, для которого $|l_0(\omega)| > \frac{1}{2} T$. Воспользуемся теперь соотношениями двойственности работ [6], [12], из которых следует, что

$$\sup_{\substack{p^*(l(\varphi_1), \dots, l(\varphi_n)) < 1 \\ n=1, 2, \dots}} |l(\omega)| = \inf_{\{I_j\}} \left[T \left\| \omega - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\| + p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right]. \quad (6)$$

Но так как очевидно, что

$$\frac{1}{2} T < |l_0(\omega)| \leq \sup |l(\omega)|, \quad (7)$$

где $\sup$ взята по тем же l , что и в (6), то

$$\inf_{\{\lambda_j\}} \left[\left\| \omega - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\| + \frac{1}{T} p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right] > \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Отсюда немедленно следует, что для любой последовательности

$\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \rightarrow \omega$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{T} \lim_{k \rightarrow \infty} p(\lambda_1^k, \dots, \lambda_{n_k}^k) > \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $\bar{p}(\omega) > \frac{1}{2} T$. Так как T сколь угодно велико, то

получилось противоречие с тем, что $\bar{p}(\omega) \leq C$. Итак, $2 \rightarrow 3$. Для того, чтобы показать, что $3 \rightarrow 1$ опять воспользуемся соотношениями двойственности из [6] и [12]. Тогда по соотношению двойственности для $\forall \omega \in X$ имеем при любом $K > C$

$$\sup_{\substack{\|l\| \leq K, \\ p^*(l(\varphi_1), \dots, l(\varphi_n)) < 1, \\ n=1, 2, \dots}} |l(\omega)| = \inf_{n, \{\lambda_j\}} \left[K \left\| \omega - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\| + p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \right]. \quad (9)$$

С другой стороны, так как из (4) следует (5), то левая часть (9) не зависит от K . Это может быть лишь тогда, когда

$$\sup |l(\omega)| = \bar{p}(\omega), \quad (10)$$

где $\sup$ взята по всем l , удовлетворяющим (4). В силу (5) получаем $\bar{p}(\omega) < \infty$ и теорема доказана.

При значении $C = 0$ из (4) получаем критерий $o(p)$ полноты.

Теорема 3. Для того чтобы система $\{\varphi_j\}$, $j=1, \dots$, была $o(p)$ полна в X необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного функционала $l \in X^*$ из неравенств (4) следовало бы, что

$$l = 0. \quad (11)$$

Достаточность следует из рассмотрения соотношения (9) со сколь угодно малым $K > 0$. Необходимость — из рассмотрения (9) с $K = 1$.

Так как теперь правая часть, совпадающая с $\bar{p}(\omega)$, равна нулю, то из условий (4) и $\|l\| < 1$ вытекает (11). Очевидно тогда, что из условий (4) всегда вытекает (11). Несколько иное доказательство теоремы 3 дано ранее в [2].

§ 2. О полноте простых дробей

Пусть G — единичный круг $|z| < 1$, $\Gamma = \partial G$ — единичная окружность. Рассмотрим пространство $C_A(\Gamma)$ функций, аналитических в G и непрерывных в $\bar{G}$, с обычной нормой

$$\|f\| = \max_{|z|=1} |f(z)| = \max_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)|. \quad (12)$$

Зададимся последовательностью $\{t_n\}$, $n=1, \dots$, положительных чисел и поставим следующий вопрос. При каких условиях на $\{t_n\}$ можно подобрать систему простых дробей $\left\{ \frac{1}{\zeta - a_n} \right\}$, $|a_n| > 1$, чтобы для любой $f(z) \in C_A(\Gamma)$ нашлась константа $C(f) > 0$ такая, что возможно была бы аппроксимация

$$\left| f(\zeta) - \sum_1^{n_k} \lambda_j^k \frac{1}{\zeta - a_j} \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (13)$$

при выполнении условия

$$|\lambda_j^k| < C(f) t_j, \quad k = 1, \dots, j = 1, \dots? \quad (14)$$

Иными словами, при каких условиях на $\{t_n\}$ можно найти систему дробей $\left\{ \frac{1}{\zeta - a_n} \right\}$, которая будет $O(p)$ полна в пространстве $C_A(\Gamma)$ при

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sup_{j=1, \dots, n} \left| \frac{\lambda_j}{t_j} \right|, \quad n = 1, 2, \dots? \quad (15)$$

Теорема 4. Пусть задана последовательность $\{t_n\}$, $t_n > 0$, $n=1, \dots$, и $p(i_1, \dots, i_n)$ задается формулой (15). Для того чтобы существовала система дробей $\left\{\frac{1}{z_n - z_n}\right\}$, $|z_n| > 1$, $n=1, 2, \dots$, которая была бы $O(p)$ полна в пространстве $C_A(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1 t_j = \infty. \quad (16)$$

Если выполнено (16), то существует система дробей, которая $O(p)$ полна в $C_A(\Gamma)$.

Чтобы доказать теорему нам потребуются две простые леммы.

Лемма 5. Существуют точки $|z_n|$, $|z_n| > 1$ и числа $\delta_n \geq 0$, $n=1, 2, \dots$ такие, что для любой аналитической при $|z| > 1$ функции $F(z)$, $F(\infty) = 0$, из условия

$$\sum_1 \delta_n |F(z_n)| < \infty \quad (17)$$

вытекает, что $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Возьмем точку z_0 , $|z_0| > 1$, и пусть $z_n \rightarrow z_0$, z_n — различные точки. Подберем δ_n столь большими, чтобы из сходимости ряда (17) следовало бы, что $|F(z_n)| \leq C(F) \exp\left(-\frac{1}{|z_n - z_0|}\right)$.

Ясно теперь, что (17) влечет $F(z) \equiv 0$.

Лемма 6. Пусть ряд (16) расходится. Всегда существует последовательность различных точек $|z_n|$, $|z_n| > 1$, $n=1, 2, \dots$ такая, что для любой аналитической при $|z| > 1$ функции $F(z)$ ограниченного вида, $F(\infty) = 0$, из условия

$$\sum_1 t_n |F(z_n)| < \infty \quad (18)$$

следует, что $F(z) \equiv 0$.

Можно ограничиться случаем $|F(z)| \leq 1$, так как любая функция ограниченного вида есть частное двух функций, ограниченных по модулю единицей. Запасемся положительными числами ε_j , $j=1, \dots$, такими, чтобы ряд $\sum_1 \varepsilon_j t_j$ сходил. Берем точку z_1 из предыдущей леммы, соответствующее ей число δ_1 и фиксируем индекс k_1 так, чтобы

$$t_1 + \dots + t_{k_1} > \delta_1. \quad (19)$$

Берем теперь различные точки $z_1, \dots, z_{k_1}$ столь близкими к z_1 , чтобы для любой $F(z)$, $|F(z)| \leq 1$ было бы

$$|F(z_j) - F(z_1)| \leq \varepsilon_j, \quad j=1, \dots, k_1. \quad (20)$$

Берем далее точку z_2 и фиксируем индекс $k_2 > k_1$ так, чтобы

$$t_{k_1+1} + \dots + t_{k_2} \geq \delta_{z_2}. \quad (21)$$

Выбираем различные точки $a_{k_1+1}, \dots, a_{k_2}$ столь близкими к z_2 , чтобы

$$|F(a_j) - F(z_2)| \leq \varepsilon_j, \quad j = k_1+1, \dots, k_2 \quad (22)$$

для всех $F(z)$, $|F(z)| \leq 1$. Продолжаем это построение для всех z_k . Получившаяся последовательность $\{a_j\}$ — нужная. В самом деле. Если

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j |F(a_j)| < \infty, \quad (23)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |F(z_n)| \leq \sum_1 t_j |F(a_j)| + \sum_1 \varepsilon_j t_j.$$

Таким образом, из (18) вытекает (17) и поэтому $F(z) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 4. Пусть ряд (16) расходится и $\{a_j\}$ — точки, построенные в предыдущей лемме. Покажем, что система $\left\{ \frac{1}{\zeta - a_n} \right\}$, $n=1, \dots$ будет $O(p)$ полна. Для нормы $p(i_1, \dots, i_n)$ вида (15) норма p^* в сопряженном к E_n пространстве E_n^* задается равенством

$$p^*(c_1, \dots, c_n) = \sum_1^n t_j |c_j|. \quad (24)$$

Пусть

$$l(f) = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\mu$$

какой-нибудь линейный функционал над $C_A(\Gamma)$. Здесь μ — представляющая, согласно теореме Рисса, функционал l — борелевская мера. Образует аналитическую функцию ограниченного вида в области $|z| > 1$:

$$F(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu}{\zeta - z}. \quad (25)$$

Если положить $\varphi_j = \frac{1}{\zeta - a_j}$, $j=1, \dots$, то $l(\varphi_j) = F(a_j)$.

Допустим, что удовлетворяются неравенства

$$p^*(l(\varphi_1), \dots, l(\varphi_n)) \leq 1, \quad n=1, \dots. \quad (26)$$

Тогда ряд

$$\sum_1 t_j |F(a_j)|$$

сходится и поэтому, по лемме 6, $F(z) \equiv 0$. Но тогда $d\mu = \varphi(\zeta) d\zeta$, где $\varphi(\zeta)$ — граничные значения на Γ аналитической в G функции $\varphi(z)$ класса H_1 (см. [11]). Но тогда для любой $f(z) \in C_A(\Gamma)$ будем иметь

$$l(f) = \int_{\Gamma} f(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta = 0,$$

в силу теоремы Коши. Следовательно, $l \equiv 0$ и осталось воспользоваться теоремами 2 и 3, чтобы убедиться в том, что система взятых нами простых дробей $O(p)$ и даже $o(p)$ полна в $C_A(\Gamma)$. Допустим теперь, что

$$\sum_1^{\infty} t_j < \infty. \quad (27)$$

Пусть $\left\{ \varphi_n = \frac{1}{\zeta - a_n} \right\}$ — произвольная система простых дробей. Для того чтобы показать, что эта система не может быть $O(p)$ полной в $C_A(\Gamma)$, надо, согласно теореме 2, убедиться в том, что существуют линейные функционалы l , для которых

$$p^*(l(\varphi_1), \dots, l(\varphi_n)) = \sum_1^n t_j |l(\varphi_j)| \leq 1, \quad (28)$$

$$n=1, 2, \dots,$$

а $|K|$ — сколь угодно велика. Возьмем произвольное натуральное число K и пусть m таково, что

$$\sum_{m+1}^{\infty} t_j < \frac{1}{K}. \quad (29)$$

Построим аналитическую при $|\zeta| > 1$ функцию

$$\psi(\zeta) = \frac{K}{\zeta} \prod_1^m \frac{\zeta - a_j}{1 - \bar{a}_j \zeta}.$$

Очевидно, что $\psi(\infty) = 0$ и $|\psi(\zeta)| = K$ на единичной окружности. Рассмотрим линейный функционал l над $C_A(\Gamma)$:

$$l(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta.$$

Имеем

$$l(\varphi_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{\zeta - a_j} = \psi(a_j), \quad j=1, \dots.$$

Поэтому

$$l(\varphi_j) = 0, \quad j=1, \dots, m; \quad |l(\varphi_j)| \leq K, \quad j=m+1, \dots. \quad (30)$$

Из (29) и (30) вытекает, что

$$\sum_1^{\infty} t_j |l(\varphi_j)| \leq 1,$$

и поэтому (28) удовлетворено. С другой стороны для функции

$$f(\zeta) = \frac{1}{i} \prod_1^m \frac{\bar{a}_j \zeta - 1}{a_j - \zeta},$$

входящей в $S_A(\Gamma)$ и имеющей $|f|=1$, будет выполняться соотношение на Γ :

$$f(\zeta) \psi(\zeta) d\zeta = K d\bar{\theta}, \quad \zeta = e^{i\theta}.$$

Поэтому $l(f) = K/2\pi$ и, следовательно, $|f| > K/2\pi$. (На самом деле $|f| = K/2\pi$). Доказательство завершено.

Заключение теоремы 4 остается верным и при замене пространства $S_A(\Gamma)$ пространствами H_p , $p > 0$. Можно также рассматривать аппроксимацию в обычных пространствах $C(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$, добавляя к дробям с полюсами во внешности круга дробь с полюсами внутри круга.

Интересно дополнительно отметить, что для функций, аналитических в замкнутом круге, возможна аппроксимация дробями с весьма малыми коэффициентами, для которых условие (16) наверняка не выполняется. Это не противоречит нашей теории, так как функции, аналитические в замкнутом круге, образуют в $S_A(\Gamma)$ множество первой категории.

§ 3. К теореме Мюнца

Теорема 7. Пусть $k_1, \dots, k_n, \dots$ — точки в правой полуплоскости, удовлетворяющие условиям

$$\sum_1 \frac{1}{|k_j|} = \infty, \quad |k_{j+1}| - |k_j| \geq d > 0, \quad j=1, \dots, \quad (31)$$

а последовательность положительных чисел $\{\nu_j\}$ такова, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \nu_j = \infty. \quad (32)$$

Положим для $\forall n$

$$p(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_1^n e^{-\nu_j |k_j|}. \quad (33)$$

Тогда система степеней $1, z^{k_1}, \dots, z^{k_n}, \dots$ будет $o(p)$ полна в пространстве $C[0, 1]$. Если все $k_i > 0$ и $A > 0$ — произвольное число и мы положим

$$p_1(\nu_1, \dots, \nu_n) = \sum_1^n e^{-A \nu_j k_j}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (34)$$

то система $1, z^{k_1}, \dots, z^{k_n}, \dots$ не будет $o(p_1)$ полна в пространстве $C[0, 1]$.

Доказательство. Поскольку в устройство норм p не входит λ_0 , рассмотрим подпространство $C_0[0, 1]$ пространства $C[0, 1]$, состоящее из функций, обращающихся в нуль при $z=0$. Если мы докажем, что система $z^{k_1}, z^{k_2}, \dots$ $o(p)$ полна в $C_0[0, 1]$, то очевидно, что система $1, z^{k_1}, \dots$ будет $o(p)$ полна в $C[0, 1]$.

Для (33) полуорма в сопряженном пространстве определяется как

$$p^*(c_1, \dots, c_n) = \max_{1 \leq j \leq n} \{e^{j|k_j|} |c_j|\}, \quad n=1, \dots. \quad (35)$$

Если $l(f)$ какой-то линейный функционал над $C_0[0, 1]$:

$$l(f) = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\mu, \quad \Gamma = (0, 1],$$

μ — борелевская мера, то образуем аналитическую функцию

$$F(z) = \int_{\Gamma} e^{z \ln w} d\mu_w, \quad (36)$$

ограниченную при $\operatorname{Re} z > 0$. Имеем

$$l(w^{k_j}) = F(k_j), \quad j=1, \dots. \quad (37)$$

Если выполняется условие $(\varphi_j = z^{k_j})$

$$p^*(l(\varphi_1), \dots, l(\varphi_n)) \leq 1, \quad n=1, \dots, \quad (38)$$

то в силу (35) отсюда получаем

$$e^{j|k_j|} |F(k_j)| \leq 1, \quad j=1, \dots.$$

И, следовательно

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(k_j)|}{k_j} = -\infty.$$

Согласно теореме единственности И. В. Ушаковой [10] отсюда вытекает, что $F(z) \equiv 0$. В частности, при любом $k > 0$

$$F(k) = \int_{\Gamma} w^k d\mu = 0.$$

В силу обычной теоремы Мюнца о полноте отсюда следует, что мера $\mu \equiv 0$. Мы доказали первую часть теоремы. Последний шаг в ее доказательстве можно было бы провести и иначе, использовав рассуждения из [9], стр. 39. Чтобы убедиться в справедливости второй части теоремы следует снова опираться на критерий из теоремы 3 и заметить, что теперь из условий (38) (где p взято по формуле (34)) не следует, что $l=0$. Действительно, если $A > 0$ — задано, то, взяв ρ_0 , $0 < \rho_0 < 1$, таким, что $\ln \rho_0 < -A$, увидим, что функция $e^{z \ln \rho_0}$ имеет вид (36) и для нее

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} < -A.$$

§ 4. Одна теорема о моментах

Теорема 8. Пусть Γ — компакт в комплексной плоскости, и μ — некоторая борелевская комплексная мера на Γ . Положим

$$c_n = \int_{\Gamma} z^n d\mu, \quad n=1, 2, \dots \quad (39)$$

и пусть

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = R. \quad (40)$$

Относительно устройства Γ предположим следующее. Пусть D — круг $|z| \leq R$ и Γ' — часть Γ , лежащая вне D . Если Ω — дополнительная к $D \cup \Gamma$ область, содержащая ∞ , то $\Gamma' \subset \partial\Omega$. При выполнении всех этих условий замкнутый носитель меры μ содержится в D .

Настоящая теорема не относится непосредственно к проблеме полноты, однако метод ее доказательства близок к тому, которым мы установили обобщение теоремы М. А. Лаврентьева в духе $Q(p)$ полноты [7]. В силу указанной близости рассуждений, доказывающих сформулированную теорему, к проделанным в [7], мы приведем доказательство более конспективно, чем в предыдущих параграфах.

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu_z}{t-z}.$$

В окрестности $t = \infty$ $F(t)$ разлагается в ряд

$$F(t) = \sum_0^{\infty} c_k t^{-(k+1)},$$

сходящийся при $|t| > R$. Сумму ряда обозначим через $F_1(t)$. Следует доказывать равенство $F(t) = F_1(t)$ при $|t| > R$; а priori это равенство может нарушаться в точках Γ' .

Сперва допускаем, что $F(t) = F_1(t)$ почти везде (относительно плоской меры) вне круга D . Тогда легко устанавливается, что вне этого круга мера μ отсутствует. (ср. [9], стр. 39).

Допустим теперь, что равенство $F_1(t) = F(t)$ не имеет место почти везде на Γ' . Это означает существование точки $t_0 \in \Gamma'$, в которой

$$\int_{\Gamma} \frac{|d\mu|}{|t_0 - z|} < \infty$$

и $F_1(t_0) \neq F(t_0)$. Возьмем круг D_ε радиуса $R + \varepsilon$ и пусть Ω_ε та из дополнительных к $D_\varepsilon \cup \Gamma$ областей, которая содержит ∞ . При достаточно малом $\varepsilon > 0$ точка $t_0 \in \partial\Omega_\varepsilon$. Для произвольного многочлена $Q(t)$ имеет место равенство:

$$\int_{\Gamma} Q(t) d\mu_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} F_1(t) Q(t) dt.$$

Повтому мера ν , вводимая соотношением

$$\nu(e) = \mu(e \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi i} \int_{e \cap \partial D_1} F_1(t) dt,$$

ортогональна к любому многочлену. Исходя из этого устанавливается тождество

$$\int \frac{Q(t) d\nu}{t - t_0} = Q(t_0) \int \frac{d\nu}{t - t_0}$$

(интегрирование по $\Gamma_1 = \Gamma \cup \partial D_1$). Если $P(\Gamma_1)$ — алгебра всех непрерывных на Γ_1 функций, являющихся равномерными пределами полиномов, то для $\forall g(t) \in P(\Gamma_1)$ имеем

$$\int_{\Gamma_1} \frac{g(t) d\nu}{t - t_0} = g(t_0) \int_{\Gamma_1} \frac{d\nu}{t - t_0}. \quad (41)$$

Сужение $P(\Gamma_1)$ на ∂D_1 — алгебра $P(\partial D_1)$ есть алгебра Дирихле (см. [9], §§ 5—7). Повтому минимальная граница $P(\partial D_1)$ совпадает с ∂D_1 , и повтому имеется функция $g(t) \in P(\partial D_1)$, принимающая в точке t_0 . Далее приходим к противоречию с (41) точно так же, как это сделано в [9] на стр. 41.

§ 5. О теореме М. А. Лаврентьева

Метод доказательства, примененный в [7] (и повторенный только что в § 4) позволяет установить несколько более сильное предложение, чем сформулировано в работе [7].

Теорема 9. Пусть Γ — компакт в комплексной плоскости, нигде не плотный и имеющий связное дополнение. Пусть $C_0(\Gamma)$ — подпространство в $C(\Gamma)$, состоящее из функций, нормированных условием

$$f(0) = 0$$

(если $0 \in \Gamma$). Пусть $\{w_n\}$ последовательность положительных чисел, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{w_n} = \infty.$$

Определим нормы $P(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ равенствами

$$P(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=0}^n \frac{|\lambda_j|}{w_j}.$$

Система степеней $\{z^n\}$, $n=0, 1, \dots$ будет $o(p)$ полной в $C_0(\Gamma)$.

Если o — предельная точка Γ

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{w_n} < \infty$$

и мы положим

$$\rho_1(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \max_{0 \leq j \leq n} \left| \frac{\lambda_j}{w_j} \right|,$$

то система $\{z^n\}$, $n=0, 1, \dots$ не может быть $O(\rho_1)$ полной в $C_0(\Gamma)$.

В работе [7] был рассмотрен лишь функционал $\rho_1 \sim \rho$.

§ 6. Об областях класса S

В настоящем параграфе мы видим применения соотношений, на которых основаны результаты § 1, к характеристике областей класса В. И. Смирнова (см. [11]). Согласно известному результату В. И. Смирнова [13], М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [14] области класса S характеризуются тем, что в них система полиномов полна в классах E_p . Излагаемая ниже теорема тесно связана с этим фактом и также дает характеристику аппроксимационного характера для областей класса S .

Пусть G — область со спрямляемой границей Γ . Введем для $\forall z \in G$ следующие величины:

$$\Omega_1(z) = \inf \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{t-z} - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{t-z_k} \right| |dt|, \quad (42)$$

и

$$\Omega_2(z) = \inf \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{t-z} - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{t-z_k} \right| |dt| + \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \right], \quad (43)$$

где $\inf$ взяты по всевозможным n , всевозможным наборам точек $z_1, \dots, z_n$ вне $\bar{G}$ и произвольным коэффициентам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Очевидно, что $\Omega_1(z) \leq \Omega_2(z)$.

Теорема 10. Если

$$\sup_{z \in G} \Omega_1(z) < \infty, \quad (44)$$

то $G \in S$. Если $G \in S$, то

$$\sup_{z \in G} \Omega_2(z) \leq 2. \quad (45)$$

Доказательство. Допустим, что $G \notin S$. Тогда существует (см. [11]) функция $\alpha_0(z) \in E_1(G)$, для которой $|\alpha_0(t)| \leq 1$ почти везде на Γ и тем не менее $\sup_{z \in G} |\alpha_0(z)| = \infty$. С другой стороны, согласно теоремам двойственности будем иметь

$$\Omega_1(z) = \sup |\alpha(z)|, \quad (46)$$

где $\sup$ взята по всем $\alpha(z) \in E_1(G)$, $|\alpha(t)| \leq 1$ п. в. на Γ . Ясно поэтому, что $\Omega_1(z) \geq |\alpha_0(z)|$ не является ограниченной в G . Пусть теперь $G \in S$. Из соотношений двойственности следует равенство

$$\Omega_2(z) = \sup \left| \int_{\Gamma} \frac{z(t) dt}{t-z} \right|, \quad (47)$$

где $\sup$ взята по функциям $z(t)$ на Γ , для которых $|z(t)| \leq 1$ п. в. на Γ и

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{z(t) dt}{t-\tau} \right| \leq 1, \quad \tau \in \bar{G}. \quad (48)$$

Положим

$$z^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z(t) dt}{t-z}, \quad (49)$$

где $z^{+}(z)$ определена внутри G , а $z^{-}(z)$ — вне G . Функция $z^{-}(z)$ ограничена и поэтому $z^{-}(z) \in E_1$ во внешности G . С помощью известных фактов об интегралах типа Коши установим, что $z^{+}(z) \in E_1(G)$ и, кроме того, $|z^{+}(t)| \leq |z(t)| + |z^{-}(t)| \leq 2$. Следовательно, $|z^{+}(z)| \leq 2$ при $\forall z \in G$, так как область $G \in S$. Из (47) следует, что

$$\Omega_2(z) = \sup |z^{+}(z)| \leq 2.$$

Доказательство завершено.

Настоящая теорема была замечена автором в сотрудничестве с Г. Ц. Тумаркиным.

Ա. Յա. ԽԱՎԻՆՍՈՆ. Լրիվալթյան զաղափարի մասին, որը հաշվի է առնում մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծությունները (ամփոփում)

Առաջադրված են մոտարկման մի շարք թեորեմներ, մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծությունների հաշվառումով:

Թեորեմ. Դիցուք տված են $t_j > 0$ թվեր, որոնցից $\frac{1}{t_j - a_j}$, պարզ կոտորակների հաջորդականությունը $|a_j| > 1$, այնպիսին, որ $f(z) \in C_A(\Gamma)$ համար հնարավոր լինի հավասարաչափ մոտարկում $\sum_{j=1}^{N_k} \frac{C_j}{t_j - a_j}$ կոտորակների C_j^k գործակիցներով, որոնք բավարարում են

$$|C_j^k| \leq C(j) t_j, \quad j=1, \dots; k=1, \dots,$$

այսմանին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\sum t_j = \infty.$$

C_A տարածությունը կազմված է այնպիսի ֆունկցիաներից, որոնք անալիտիկ են $|z| < 1$ -ում և անընդհատ $|z| < 1$ -ում: Այլ թեորեմներում դիտարկված են $\mathcal{U}$ յունցի և Լավրենտի թեորեմների որոշ լրացումները:

Տրված է Վ. Ի. Սմիռնովի դասի տիրույթների նոր մոտարկումային հայտանիշ:

S. Y. HAVINSON. *A notion of completeness, which takes account of coefficients of approximating polynomials (summary)*

Theorem. In order a sequence $\left\{ \frac{1}{z - \alpha_j} \right\}$, $|z_j| > 1$ to exist, such that for every $f(z) \in C_A(\Gamma)$ there is an approximating sequence $\left\{ \sum_{j=1}^{n_k} C_j^* \frac{1}{z - \alpha_j} \right\}$ with coefficients

$$|C_j^*| \leq C(f) t_j, \quad j=1, \dots, k=1, \dots,$$

$t_j > 0$, the condition $\sum_1^\infty t_j = \infty$ is necessary and sufficient.

Here $C_A(\Gamma)$ is the space of analytical $|z| < 1$ and continuous for $|z| < 1$ functions.

Other results supplement the theorem of Münz and Lavrentjev, and a new description of the domains of Smirnov type is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ky Fan and Ph. Davis. Complete sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. Journ., 24, № 2, 1957, 189—192.
2. С. Я. Хавинсон. Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4, 1961, 793—796.
3. С. Я. Хавинсон. Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуля, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 44—46.
4. С. Я. Хавинсон. Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 60, 1961, 304—324.
5. Е. Ш. Чацкая. Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, XVII, № 4, 1964, 9—22.
6. С. Я. Хавинсон. Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН СССР, 135, № 2, 1960, 270—273.
7. С. Я. Хавинсон. Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Матем. заметки, 6, № 5, 1969, 619—625.
8. С. Я. Хавинсон. Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов, ДАН СССР, 1971.
9. Дж. Вермер. Банаховы алгебры и аналитические функции, в сб. "Некоторые вопросы теории приближений", И. Л., Москва, 1963.
10. И. В. Ушакова. Теорема единственности для ограниченных функций в круге, ДАН СССР, 137, № 2, 1961, 1319—1322.
11. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.
12. С. Я. Хавинсон. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН XVIII, № 2 (110), 1963, 25—28.
13. В. И. Смирнов. Sur la théorie des polynomes orthogonaux à la variable complexe, журнал Ленингр. физ.-матем. об-ва, 2: 1, 1928, 155—179.
14. М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев. Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables., Ann. École Norm. (3), 54, 1937, 1—38.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

А. А. ШАГИНЯН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ГРАДИЕНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. II

В работе [1] нами было выяснено, какими максимальными особенностями в терминах криволинейных предельных множеств могут обладать гармонические в шаре функции у граничной сферы.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для гармонических отображений (каждая компонента которых гармоническая функция) и отображений, осуществляемых градиентами гармонических в шаре функций.

Пусть S — сфера радиуса единица в трехмерном евклидовом пространстве R^3 .

Определение 1. Отображение $f: \text{int } S \rightarrow R^n$ единичного открытого шара в n -мерное евклидово пространство называется гармоническим, если реализующие его функции $f_i(P)$ ($f(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P))$) являются гармоническими.

Определение 2. Предельным множеством $C_l(f)$ отображения $f: \text{int } S \rightarrow R^n$ по пути l , лежащему в $\text{int } S$, кроме конечной точки, совпадающей с $a \in S$, называется совокупность $\{a\}$ всех точек из R^n , для которых существует последовательность $a_i \in l$, стремящаяся к a и такая, что $f(a_i)$ стремится к a .

Полное решение задачи о том, какими максимальными особенностями в терминах криволинейных предельных множеств могут обладать гармонические отображения шара, дается следующей теоремой.

Теорема 1. Существует гармоническое отображение $H: \text{int } S \rightarrow R^n$ такое, что для любой точки $a \in S$ и любого континуума $k \subset \bar{R}^n$ (одноточечной компактификации R^n) при $n \geq 2$ и $k \subset R^1$ при $n = 1$ существует спрямляемый путь $l_{a,k}$, лежащий в $\text{int } S$, кроме конечной точки, совпадающей с a и ортогональный к S в этой точке, вдоль которого $C_{l_{a,k}}(H) = k \cap R^n$.

Замечание 1. Теорему 1 нельзя усилить, беря более широкий класс множеств вместо $\{k \cap R^n\}$.

Замечание 2. Теорема 1 содержит в себе результаты Г. Пираяна [2] и Ф. Багемила [3], а также работы [1].

Замечание 3. Аналог теоремы 1 для круга на плоскости не имеет места в силу результата Ф. Багемила [4].

* Символ $\text{int } F$ обозначает область, ограниченную поверхностью F .

Теорема 1' легко получается при помощи теоремы 2 из работы [5], в которой получено полное решение задачи о характеристике множеств, на которых возможна гармоническая аппроксимация с касанием.

Полное решение аналогичной задачи для отображений шара в R^3 , осуществляемых градиентами гармонических функций, дается теоремой 2°.

Теорема 2. *Существует гармоническая в шаре $\text{int } S$ функция F такая, что соответствующее градиентное отображение $\text{grad } F: \text{int } S \rightarrow R^3$ обладает следующим свойством: для любой точки $a \in S$ и любого континуума $k \subset R^3$ существует спрямляемый путь $l_{a,k}$, лежащий в $\text{int } S$, кроме конечной точки, совпадающей с a , ортогональный к S в этой точке, вдоль которого $C_{l_{a,k}}(\text{grad } F) = k \cap R^3$.*

Замечание 4. Теорему 2 нельзя усилить, беря более широкий класс множеств вместо $\{k \cap R^3\}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями работы [1]. В [1] были построены древообразное множество L и система точек a_k, i_n^1, i_n^2 на нем.

Построим отображение $f: L \rightarrow R^n$ следующим образом. Положим $f: a_k, i_n^1, i_n^2 \rightarrow p_{i_n}$, где p_k — k -я точка с рациональными координатами при некоторой нумерации всех таких точек из R^n . Продолжим эти значения f на все L так, чтобы на ветви L , соединяющей $a_k, i_{n-1}^1, i_{n-1}^2$ и a_k, i_n^1, i_n^2 , f интерполировало значения $p_{i_{n-1}}$ и p_{i_n} в этих точках, изменяясь линейно на радиальной части этой ветви, лежащей выше соответствующего сферического слоя ветвления, и оставаясь постоянным на нижних частях, перпендикулярных радиусу и ниже до S_{n-1} .

Покажем теперь, что отображение $f: L \rightarrow R^n$ обладает у S асимптотическими свойствами искомого гармонического отображения H : для всякой точки $a \in S$ и континуума $k \subset R^n$ при $n \geq 2$ и $k \subset R^1$ при $n=1$ существует путь $l_{a,k}$, составленный из ветвей L и такой, что $C_{l_{a,k}}(f) = k \cap R^n$.

Для выбора путей $l_{a,k}$ нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Всякий континуум $k \subset R^n$ при $n \geq 2$ и $k \subset R^1$ при $n=1$ является предельным множеством некоторого пути $l_k: [0, 1] \rightarrow R^n$.*

Лемма 2. *Всякий путь $l_k: [0, 1] \rightarrow R^n$ можно приблизить с касанием ломаным путем $\bar{l}_k: [0, 1] \rightarrow R^n$ с рациональными вершинами.*

Обозначим вершины $\bar{l}_k$ через $\bar{l}_k$. Выбор пути $l_{a,k}$ производится следующим образом: проектируем точку a на S и выбираем точку a_0, i_0^1, i_0^2 из N^3 , содержащего эту проекцию, в которой f наи-

более близко к $\bar{T}_k$. Чтобы получить точку $a_{k_0^1, \dots, k_0^4}$, проектируем a на S_4 и выбираем точку из квадрата $N^1_{k_0^1, \dots, k_0^4}$, содержащего эту проекцию, значение f в которой наиболее близко к $\bar{T}_k$.

Точки $l_{a,k} \cap S_n$ получаются аналогичным образом: индексы $k_0^1, \dots, k_0^n$ определяют квадрат $N^n_{k_0^1, \dots, k_0^n}$, в который попадает радиальная проекция a , индекс (j_n^0) определяет точку $a_{k_0^1, \dots, k_0^n}$, значение f в которой наиболее близко к $\bar{T}_k$. Окончательно, путь $l_{a,k}$ это ветвь L , проходящая через эти точки $a_{k_0^1, \dots, k_0^n}$. Сравнение размеров квадрата первого ранга на S_n с расстоянием от S_n до S показывает, что $l_{a,k}$ перпендикулярен к S в точке a . Обозначим через f_i компоненты отображения f .

В теореме 2 работы [5] нами были получены необходимые и достаточные условия для возможности гармонической аппроксимации с касанием. Очевидно, что все условия этой теоремы для возможности аппроксимации с касанием непрерывных на L функций гармоническими в шаре $\text{int } S$ функциями удовлетворяются.

Обозначим через $H: \text{int } S \rightarrow R^n$ гармоническое отображение, каждая компонента которого приближает с касанием соответствующую функцию f_i на L . Отображение H приближает с касанием отображение f и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Очевидно, что для доказательства этой теоремы достаточно аппроксимировать с касанием отображение $f: L \rightarrow R^3$, построенное выше, градиентом гармонической в $\text{int } S$ функции. Существенно не изменяя L , мы будем считать в дальнейшем, что он состоит из прямолинейных отрезков.

Смысл дальнейшего построения заключается в том, чтобы строить локально гармонические функции, градиенты которых приближают отображение f , и склеить их.

Обозначим через $\square$ сглаженный цилиндр постоянной конечной высоты и переменной толщины h ; $\square_1, \dots, \square_6$ — равноудаленные сечения $\square: L_\square$ — ось $\square$; $\square_{1,2}, \dots, \square_{5,6}$ — подцилиндры $\square$, ограниченные этими сечениями. Пусть дано гладкое отображение $g_\square: \text{int } \square_{1,2} \cup L_\square \cup \text{int } \square_{5,6} \rightarrow R^3$, которое изменяется только на $L_\square \cap \text{int } \square_{3,4}$.

Лемма 3. При каждом $h > 0$ существует гармоническая функция $F_\square$ в $\text{int } \square$ такая, что $\|g_\square - \text{grad } F_\square\| \leq C \cdot h^4$ там, где определено $g_\square$ и $|F_\square| < C$ в $\text{int } \square$, а C не зависит от h .

Доказательство. Пусть $g_\square = (g_\square^1, g_\square^2, g_\square^3)$, $F_\square$ построены

в виде $F_{\Pi}^1(x, y) + F_{\Pi}^2(y, z)$, где каждое слагаемое зависит только от двух параметров и является их гармонической функцией.

По теореме Мергеляна о наилучших приближениях [6] существует аналитическая функция $F_{\Pi}^*(\zeta)$, где $\zeta = x + iy$, приближающая с точностью $C \cdot h^4$ функцию $g_{\Pi}^1 - i g_{\Pi}^2$ на проекции области определения g_{Π} на плоскость (x, y) (ось L_{Π} лежит на оси x) и $|F_{\Pi}^*(\zeta)| < C$ на всей проекции Π .

Положим $F_{\Pi}^1 = \operatorname{Re} \int F^*(\zeta) d\zeta$, она является гармонической функцией на проекции Π .

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int F^*(\zeta) d\zeta = F^*(z), \quad (1)$$

с другой стороны

$$\frac{\partial}{\partial x} \int F^*(\zeta) d\zeta = \frac{\partial}{\partial x} F_{\Pi}^1 + i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \int F^*(\zeta) d\zeta = \frac{\partial}{\partial x} F_{\Pi}^1 - i \frac{\partial}{\partial y} F_{\Pi}^1.$$

Из того, что F_{Π}^* равномерно приближает (g_{Π}^1, g_{Π}^2) и имеет место (1), окончательно получаем $\| \operatorname{grad} F_{\Pi}^1 - (g_{\Pi}^1, g_{\Pi}^2) \| \leq C \cdot h^4$. Поступая аналогично с g_{Π}^2 , построим функцию F_{Π}^2 . Функция $F_{\Pi} = F_{\Pi}^1 + F_{\Pi}^2$ удовлетворяет условиям леммы 3.

Замечание 5. Всякая функция $F_{\Pi} + C$ удовлетворяет условиям леммы 3.

Пусть $L_i = L \cap \overline{\operatorname{int} S_i}$ и $T^{0,i}(\tau)$ — гладкая трубчатая поверхность толщины τ , охватывающая L_i . Пусть также $g: L_i \rightarrow R^3$ — произвольное непрерывное отображение L_i .

Лемма 4. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\tau(\varepsilon)$ такое, что решение задачи Дирихле $g^0(P)$ в $\operatorname{int} T^{0,i}(\tau(\varepsilon))$ по граничным значениям $g^0: T^{0,i}(\tau(\varepsilon)) \rightarrow R^3$, определяемым ниже, удовлетворяет при $P \in L_i$ условию

$$\|g(P) - \operatorname{grad} g^0(P)\| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Доказательство основано на лемме 3 и оценках гармонической меры, проведенных в работе [1]. Существует $\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ такое, что из $P, Q \in L_i$ и $\rho(P, Q) \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$ следует $\|g(P) - g(Q)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, так как g равномерно непрерывно на L_i . Проведем разбиение L_i на конечное число связанных частей L_i^k , диаметр каждого из которых меньше $\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$:

$$\operatorname{diam} L_i^k \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right). \quad (3)$$

Обозначим через $g^1: L_1 \rightarrow R^3$ непрерывное отображение, обладающее следующими свойствами:

4.1. На тех L_i^k , которые содержат точки ветвления L , g^1 постоянно и равно значению g при произвольном $P \in L$.

4.2. На остальных L_i^k , которые представляют из себя отрезки, g^1 изменяется линейно на внутренних седьмых частях и постоянно равно значениям g в соответствующих граничных точках L_i^k на остальных частях.

Индексы, удовлетворяющие 4.1, обозначим через J_1 , а условие 4.2 — J_2 .

Чтобы не загромождать изложение, будем обозначать через C различные переменные, не зависящие от τ .

Имеем при $P \in L_i$

$$\|g^1(P) - g(P)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4)$$

Проведя сечения по краям L_i^k , получим разбиение $T_k^{0,1}$ на части $T_k^{0,1}$. При $k \in J_2$ $T_k^{0,1}$ — прямолинейные цилиндрики. Разобьем при каждом из этих $k \in J_2$ L_i^k на семь частей ${}^n L_i^k$, $n=1, \dots, 7$ так, что ${}^1 L_i^k$ — часть L_i^k , на которой изменяется g^1 . Соответствующие цилиндры обозначим через ${}^1 T_k^{0,1}, \dots, {}^7 T_k^{0,1}$.

Обозначим далее через

$$g_{i,k}^1: L_i^k \cup \text{int } {}^1 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^2 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^6 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^7 T_k^{0,1} \rightarrow R^3$$

отображение, которое получается из g^1 постоянным продолжением соответствующих значений на цилиндры

$$\text{int } {}^1 T_k^{0,1}, \text{int } {}^2 T_k^{0,1}, \text{int } {}^6 T_k^{0,1}, \text{int } {}^7 T_k^{0,1}.$$

Пусть $k \in J_2$ и $g_i^k(P)$ — произвольная гармоническая в $\text{int } T_k^{0,1}$ функция, градиент которой приближает с точностью $\frac{\varepsilon}{4}$ $g_{i,k}^1$ на $L_i^k \cup \text{int } {}^1 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^2 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^6 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^7 T_k^{0,1}$:

$$\|\text{grad } g_i^k(P) - g_{i,k}^1(P)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Такая функция существует, в силу леммы 3.

Положим $g^0|_{T_k^{0,1}} = g_i^k + C_i^k$ при $k \in J_2$ и

$$g^0|_{T_k^{0,1}} = \overrightarrow{g^1(P)} \cdot \vec{P} + C_i^k \quad \text{при } k \in J_1.$$

Здесь постоянные C_i^k выбираем следующим образом. Из построения g_i^k видно, что при $k \in J_2$ и $P \in \text{int } {}^1 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^2 T_k^{0,1}$ или $P \in \text{int } {}^6 T_k^{0,1} \cup \text{int } {}^7 T_k^{0,1}$ имеем

$$|g_i^k(P) - \overline{g^1(P)} \cdot \bar{P} - {}^j C_i^k| \leq C \cdot \tau^4$$

при соответствующем выборе ${}^j C_i^k$, где j принимает значения 1 и 7 соответственно.

Значения постоянных C_i^k будем выбирать последовательно. Пусть мы выбрали произвольное значение C_1^k , соответствующее $T_{k_0}^{0,1}$; этим самым определяются ${}^1 C_i^k$ такие, что при вышеуказанных P

$$|g_i^k(P) - C_i^k - \overline{g^1(P)} \cdot \bar{P} - {}^1 C_i^k| \leq C \cdot \tau^4.$$

Пусть $T_{k_1}^{0,1}$ примыкает к ${}^1 T_{k_0}^{0,1}$. Определим C_1^k так, чтобы при $P \in \text{int } {}^1 T_{k_1}^{0,1} \cup \text{int } {}^1 T_{k_0}^{0,1}$ было $|g_i^k + C_1^k - \overline{g^1(P)} \cdot \bar{P} - {}^1 C_i^k| \leq C \cdot \tau^4$. Пусть также $T_{k_1}^{0,1}$ примыкает к ${}^1 T_{k_0}^{0,1}$. Определим C_1^k так, чтобы при $P \in \text{int } \times \times {}^1 T_{k_1}^{0,1} \cup \text{int } {}^1 T_{k_1}^{0,1}$ было

$$|(g_i^k + C_1^k) - \overline{g^1(P)} \cdot \bar{P} - {}^1 C_i^k| \leq C \cdot \tau^4.$$

При $k \in J_1$ построение C_i^k аналогично.

Таким образом, можно корректно определить все C_i^k , так как по построению ветви L не сходятся.

И, окончательно, $g^0: \text{int } T_k^{0,1} \rightarrow R^1$ — решение задачи Дирихле по граничным значениям g^0 .

Докажем, что действительно можно выбрать такое $\tau(\varepsilon)$, чтобы имело место неравенство (2).

Каждая из функций g_i^k — гармонична и при $P \in L_i$

$$\|\text{grad } g_i^k(P) - g^1(P)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (6)$$

в силу неравенства (5).

Можно считать, что $|g^0(P)| \leq C$, где C не зависит от τ , так как каждая $g_j^i(P)$ удовлетворяет этому условию, в силу леммы 3. Покажем, что при $\tau \rightarrow 0$ $\|\text{grad } g^0(P) - \text{grad } g_j^i(P)\| \rightarrow 0$ равномерно по $P \in L_i$.

Пусть $k \in J_2$ и $P \in {}^2 L_1^k \cup {}^3 L_1^k \cup {}^4 L_1^k \cup {}^5 L_1^k \cup {}^6 L_1^k$. Рассмотрим цилиндр

$T_k^{0,1}$ и сферу $S_{\frac{\tau}{2}}(P)$ радиуса $\frac{\tau}{2}$ с центром в точке P .

Пусть $Q \in S_{\frac{\tau}{2}}(P)$.

Имеем

$$\begin{aligned} |g^0(Q) - g_j^i(Q)| &= \left| \int_{N \in \partial \left[\text{int } T_k^{0,1} \right]} |g^0(N) - g_j^i(N)| d\omega(Q, \alpha(N), \text{int } T_k^{0,1}) \right| \leq \\ &\leq C \cdot \omega(Q, \partial \{ \text{int } T_k^{0,1} \} \setminus T_k^{0,1}, \text{int } T_k^{0,1}) \leq C \cdot \frac{\tau^2}{\delta \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее неравенство мы получили воспользовавшись оценкой (8) § 3 работы [1] для гармонической меры.

Используя оценку градиента гармонической функции в центре шара по ее оценке на сфере, из (7) получим

$$\|\operatorname{grad} g^{\circ}(P) - \operatorname{grad} g_j^i(P)\| \leq C \cdot \tau. \quad (8)$$

Пусть теперь $P \in {}^1L_i^k$, $Q \in S_{\frac{\tau}{2}}(P)$ и L_i^k примыкает к ${}^1L_i^k$. При $Z \in \operatorname{int} {}^1T_k^{0,1} \cup \operatorname{int} {}^2T_k^{0,1}$ имеем

$$|g^{\circ}(Z) - \overrightarrow{g^1(P) \cdot P} - C_i^k| \leq C \cdot \tau^4.$$

Обозначим через B поверхность, ограниченную основанием ${}^2T_k^{0,1}$, примыкающим к ${}^2T_k^{0,1}$, с одной стороны, и основаниями $T_{k*}^{0,1}$, не соприкасающимися с ${}^1T_k^{0,1}$, с другой стороны. Воспользовавшись оценкой (8) § 3 из работы [1] и леммой 3, получим

$$\begin{aligned} |g^{\circ}(Q) - g_j^i(Q)| &\leq \left| \int_{Z \in B \cap \overline{\operatorname{int} T_k^{0,1}}} \{g^{\circ}(Z) - g_j^i(Z)\} d\omega(Q, \alpha(Z), \operatorname{int} B) \right| + \\ &+ \left| \int_{Z \in B \cap \operatorname{int} T_{k*}^{0,1}} |g^{\circ}(Z) - \overrightarrow{g^1(Z) \cdot Z} - C_i^k| d\omega(Q, \alpha(Z), \operatorname{int} B) \right| \leq \\ &\leq C \cdot \frac{\tau^4}{\tau^2} + C \cdot \frac{\tau^2}{\delta \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)}. \end{aligned}$$

Снова оценивая градиент гармонической функции, получаем, что неравенство (8) имеет место и при $P \in {}^1L_i^k$. Аналогично, воспользовавшись оценкой (8) § 3 работы [1] и леммой 3, доказываем, что неравенство (8) имеет место на остальных частях L_i .

Воспользовавшись неравенствами (4), (6) и (8), получим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau(\varepsilon) > 0$, что при $P \in L_i$

$$\|g(P) - \operatorname{grad} g^{\circ}(P)\| \leq \varepsilon.$$

Лемма 4 доказана.

Функцию $F: \operatorname{int} S \rightarrow R^1$, существование которой утверждается в теореме 2, строим в виде ряда $\sum_{l=1}^{\infty} F_l(P)$ гармонических в $\operatorname{int} S$ функций.

Пусть $\{\varepsilon_l\}$ — произвольная последовательность положительных чисел с условием

$$\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l < \infty. \quad (9)$$

Построение $F_1(P)$. В силу леммы 4 существует гармоническая в $\text{int } T^{0,3}\left(\tau\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\right)$ функция $g_3^0(P)$ такая, что при $P \in L_3$

$$\| \text{grad } g_3^0(P) - f(P) \| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}. \quad (10)$$

Воспользовавшись техникой вывода полюсов, как это было проведено в работе [1], получим существование гармонической в $\text{int } S$ функции $F_1(P)$, удовлетворяющей на L_3 условию

$$\| \text{grad } F_1(P) - \text{grad } g_3^0(P) \| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}. \quad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) окончательно получаем, что при $P \in L_3$

$$\| \text{grad } F_1(P) - f(P) \| \leq \varepsilon_1. \quad (12)$$

Построение $F_2(P)$. Обозначим через $T^{1,4}(\tau)$ — трубку $\partial(\text{int } S_1^* \cup \text{int } T^{0,4}(\tau))$, где S_1^* — сфера радиуса $\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^l} + \tau$. Положим $g = f - \text{grad } F_1: L_4 \rightarrow R^3$. Воспользовавшись леммой 4, построим $g^0: T^{0,4}(\tau) \rightarrow R^1$. Определим функцию $g^{0,2}: T^{1,4}(\tau) \rightarrow R^1$, полагая

$$g^{0,2}|_{T^{0,4}(\tau) \cap T^{1,4}(\tau)} = g^0, \quad (13)$$

и считая $g^{0,2} = 0$ на

$$T^{1,4}(\tau) \cap S_1^*. \quad (14)$$

Совершенно такие же оценки, как и при доказательстве леммы 4, дают существование такого $\varepsilon_2 > 0$, что удовлетворяются следующие условия:

2.1. При $P \in \text{int } S_1 \cup |L \cap \text{int } S_1^*|$

$$\| \text{grad } g^{0,2}(P) \| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

2.2. При $P \in L_4 \setminus \text{int } S_1^*$

$$\| f(P) - \text{grad } F_1(P) - \text{grad } g^{0,2}(P) \| \leq \varepsilon_2.$$

Проводя стандартный вывод полюсов, получим существование гармонической в $\text{int } S$ функции $F_2(P)$, удовлетворяющей следующему условию:

При $P \in \text{int } S_1 \cup \text{int } T^{1,4}\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$

$$\| \text{grad } F_2(P) - \text{grad } g^{0,2}(P) \| \leq \varepsilon_2. \quad (15)$$

Подставляя (15) в 2.1 и 2.2, окончательно получаем при $P \in S_1 \cup |L_4 \cap \text{int } S_1^*|$

$$\| \text{grad } F_2(P) \| \leq \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2, \quad (16)$$

$$\|f(P) - \text{grad } F_1(P) - \text{grad } F_2(P)\| \leq 2 \cdot \varepsilon_2 \quad (17)$$

при $P \in L_4 \setminus \text{int } S_1^{\tau_1}$.

Построение $F_n(P)$ вполне аналогично построению $F_2(P)$.

Обозначим через $T^{n-1, n+2}(\tau)$ трубку

$$\sigma(\text{int } S_{n-1}^{\tau} \cup \text{int } T^{0, n+2}(\tau)).$$

Положим $g = f - \text{grad } F_1 - \dots - \text{grad } F_{n-1}$; $L_{n+2} \rightarrow R^3$. Воспользовавшись леммой 4, построим функцию $g^0: T^{0, n+2}(\tau) \rightarrow R^1$. Определим функцию $g^{0, n}: T^{n-1, n+2}(\tau) \rightarrow R^1$, полагая

$$g^{0, n}|_{T^{0, n+2}(\tau) \cap T^{n-1, n+2}(\tau)} = g^0 \quad (18)$$

и считая $g^{0, n} = 0$ на

$$T^{n-1, n+2}(\tau) \cap S_{n-1}^{\tau}. \quad (19)$$

Совершенно так же, как и при построении $F_2(P)$, получаем существование такого $\tau_n > 0$, что удовлетворяются следующие условия:

п.1. При $P \in \text{int } S_{n-1} \cup \{L \cap \text{int } S_{n-1}^{\tau_n}\}$

$$\|\text{grad } g^{0, n}(P)\| \leq 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n;$$

п.2. При $P \in L_{n+2} \setminus \text{int } S_{n-1}^{\tau_n}$

$$\|f(P) - \text{grad } F_1(P) - \dots - \text{grad } F_{n-1}(P) - \text{grad } g^{0, n}(P)\| \leq \varepsilon_n.$$

Проведя вывод полюсов, получим существование гармонической в $\text{int } S$ функции $F_n(P)$ такой, что

$$\text{при } P \in \text{int } S_{n-1} \cup \text{int } T^{n-1, n+2}\left(\frac{\tau_n}{2}\right)$$

$$\|\text{grad } F_n(P) - \text{grad } g^{0, n}(P)\| \leq \varepsilon_n. \quad (20)$$

Подставляя (20) в п.1 и п.2, окончательно получаем:

$$\text{при } P \in \text{int } S_{n-1} \cup \{L_{n+2} \cap \text{int } S_{n-1}^{\tau_n}\}$$

$$\|\text{grad } F_n(P)\| \leq 2 \cdot \varepsilon_{n-1} + 2 \varepsilon_n, \quad (21)$$

и при $P \in L_{n+2} \setminus \text{int } S_{n-1}^{\tau_n}$

$$\|f(P) - \text{grad } F_1(P) - \dots - \text{grad } F_n(P)\| \leq 2 \cdot \varepsilon_n. \quad (22)$$

Сходимость ряда $\sum_{l=1}^{\infty} F_l(P)$ при $P \in \text{int } S$ сразу же следует из (21)

и (9). Обозначим эту сумму через $F(P)$. $F(P)$, очевидно, гармонична в $\text{int } S$. Покажем, что

$$\|\text{grad } F(P) - f(P)\| \rightarrow 0$$

при стремлении P к S по L .

Действительно, пусть $P \in L_{l+1} \setminus L_l$.

В силу неравенств (21) и (22) имеем

$$\|f(P) - \text{grad } F(P)\| \leq \|f(P) - \text{grad } [F_1(P) + \dots + F_{n+1}(P)]\| + \\ + \|\text{grad } F_{n+2}(P)\| + \dots \leq 2 \cdot \varepsilon_{n+1} + 2 \cdot \sum_{l=n}^{\infty} \varepsilon_l.$$

Последняя сумма стремится к нулю, в силу (9').

Теорема 2 доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. Н. Мергеляну за полезные обсуждения.

Ա. Ա. ՇԱԳԻՆՅԱՆ Հարմոնիկ և գրադիենտային արտապատկերումների սահմանային բազմությունների մասին II (ամփոփում)

Այս հոդվածում կառուցված են զնդի հարմոնիկ և գրադիենտային արտապատկերումներ, որոնք ունեն մաքուր մալ եզակիություններ եզրի վրա, կորագիծ սահմանային բազմությունների տերմիններով: Նշանակենք S -ով R^3 -ում զանգոգ միավոր սֆերան, Արտապատկերված են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. Գոյություն ունի $\text{Int } S$ զնդի այնպիսի հարմոնիկ արտապատկերում $H: \text{Int } S \rightarrow R^n$, որ ամեն մի $a \in S$ կետի և ամեն մի կոնտինուումի $K \subset \bar{R}^n$ (կոմպակտիֆիկացված տարածություն) երբ $n \geq 2$ և $K \subset R^1$, երբ $n = 1$ համար գոյություն ունի $l_{a,k}$ ողակի կոր, որը զտնվում է S -ի ներսում բացի վերջնակետից, որը համընկնում է $a \in S$ կետի հետ, այնպիսին, որ $C_{l_{a,k}}(H) = K \cap R^n$:

Թեորեմ 2. Գոյություն ունի $\text{Int } S$ -ում այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա F , որ ամեն $a \in S$ կետի և $R \subset \bar{R}^3$ կոնտինուումի համար գոյություն ունի ուղղիկ կոր $l_{a,k}$, որը զտնվում է զնդի ներսում բացի վերջնակետից, որը համընկնում է a -ի հետ այնպիսին, որ $C_{l_{a,k}}(\text{grad } F) = K \cap R^3$:

A. A. SHAGINIAN, On cluster sets of harmonic and gradient mappings II (summary)

The article gives construction of harmonic and gradient mappings of the ball in R^n with maximal singularities on boundary in terms of curvilinear cluster sets.

Let S be a sphere in R^3 .

Theorem 1. There exists a harmonic mapping $H: \text{Int } S \rightarrow R^n$ such, that for every point $a \in S$ and every continuum $K \subset \bar{R}^n$ (one-point compactification of R^n) $n \geq 2$, and $K \subset R^1$, $n = 1$, there exists a rectifiable path $l_{a,k}$ lying in $\text{Int } S$ except its endpoint a and orthogonal to S in a such that the curvilinear cluster set $C_{l_{a,k}}(H) = K \cap R^n$.

Theorem 2. There exists a function F , harmonic inside a sphere such, that for every $a \in S$ and a continuum $K \subset \bar{R}^3$ there exists a rectifiable path $l_{a,k}$ lying in $\text{Int } S$ except its end-point a such, that the curvilinear cluster set $C_{l_{a,k}}(\text{grad } F) = K \cap R^3$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Шагинян. О предельных множествах функций, гармонических внутри сферы, Изв. АН АрмССР, Математика, IV, № 5, 1969, 327—350.
2. G. Piranian. Ambiguous points of a functions continuous inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, № 2, 1957.
3. F. Bagemihl. Ambiguous points of a function harmonic inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, № 2, 1957.

4. F. Bagemihl. Curvilinear cluster sets of a arbitrary functions. Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A., 41, 1955.
5. А. А. Шацкин. О равномерной и касательной гармонической аппроксимации непрерывных функций на произвольных совокупностях, Матем. заметки, 9, вып. 2, 1971, 131—142.
6. С. Н. Мортелли. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.

Добавление при корректуре

Методы, применяемые в этой работе, позволяют решить в частном случае задачу об описании совокупностей из R^3 , любое непрерывное отображение которых в R^3 может быть равномерно приближено градиентами гармонических в пространстве функций.

Пусть $K = \{E\}$ — класс компактов из R^3 , состоящих из конечного числа гладких клеток. Обозначим через $C_3(E)$ совокупность непрерывных отображений $f: E \rightarrow R^3$; и через $GH(E)$ — совокупность отображений, допускающих равномерное приближение посредством градиентов гармонических в пространстве функций ($g: E \rightarrow R^3$ принадлежит $GH(E)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует гармоническая в пространстве функция $f(P)$ такая, что $\|g(P) - \text{grad } f(P)\| \leq \varepsilon$ при $P \in E$.

Теорема. Для равенства $C_3(E) = GH(E)$ на произвольном $E \in K$ необходимо и достаточно, чтобы дополнения к произвольным компактным частям E были односвязны.

Общая задача об описании произвольных совокупностей E из R^3 , для которых $C_3(E) = GH(E)$ остается открытой.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

В. А. ЯВРЯН

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

В настоящей заметке изучается функция спектрального сдвига (ф.с.с.) двух самосопряженных операторов Штурма-Лиувилля с различными условиями на одном конце. Получены формулы, связывающие ф.с.с. со спектральной функцией. Эти формулы позволяют решить обратную задачу: восстановить потенциал по ф.с.с.

Пусть $q(x)$ ($0 < x < b$) вещественная функция, суммируемая на каждом интервале $(0, c)$ при $c < b < \infty$, а h — произвольное вещественное число. Рассмотрим в пространстве $L_2(0, b)$ самосопряженный оператор H_h , задаваемый равенством

$$H_h y = -y'' + q(x)y$$

и граничным условием

$$y'(0) - hy(0) = 0.$$

Точнее, оператор H_h является замыканием оператора, действующего на финитных функциях. Если при этом оператор H_h не оказывается самосопряженным, то мы накладываем для всех h одно и то же условие самосопряженности в точке b .

Таким образом, операторы H_h при различных h будут отличаться только условием в нуле. Отсюда следует, что разность резольвент соответствующих операторов будет одномерным оператором.

В работах М. Г. Крейна ([1], [2]) установлено, что если резольвенты самосопряженных операторов A и B отличаются на ядерный оператор, то существует вещественная функция $\xi(\lambda, A, B)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) такая, что

$$\text{Sp} [(B - zI)^{-1} - (A - zI)^{-1}] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda, A, B)}{(\lambda - z)^2} d\lambda \quad (1)$$

для всех z , не принадлежащих спектрам A и B .

Из (1) функция $\xi(\lambda, A, B)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следуя [2], эту функцию $\xi(\lambda, A, B)$ назовем функцией спектрального сдвига (ф.с.с.) для операторов A и B .

Таким образом, для операторов H_{h_1} и H_{h_2} имеет смысл ф.с.с. $\xi(\lambda, h_1, h_2)$, которую мы нормируем условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\lambda, h_1, h_2)|}{1 + |\lambda|} d\lambda < \infty.$$

Напомним теперь определение спектральной функции оператора H_h .

Пусть функции $\psi_h(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-y'' + q(x)y - \lambda y = 0$$

и условиям

$$\psi_h(0, \lambda) = 1, \psi'_h(0, \lambda) = h; \varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1.$$

Хорошо известна теорема о том, что существует неубывающая функция $\sigma_h(\lambda)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\sigma_h(\lambda) = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx,$$

где $F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \psi_h(x, \lambda) dx$.

Эта функция $\sigma_h(\lambda)$ (нормированная условием $\sigma_h(-\infty) = 0$) называется спектральной функцией оператора H_h .

Справедлива следующая

Теорема 1. *Имеют место формулы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t - \lambda} dt = \ln \left(1 + (h_2 - h_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{h_1}(t)}{t - \lambda} \right), \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, h_1, h_2) dt = \int_{h_1}^{h_2} \sigma_h(\lambda) dh. \quad (3)$$

При $h_1 = 0$ формулу (2) сообщил автору М. Г. Крейн.

Доказательство. Составим функцию

$$\chi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + m_{h_1}(\lambda) \psi_{h_1}(x, \lambda),$$

где $m_{h_1}(\lambda)$ выбрана так, что $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет требуемому граничному условию в b в случае круга Вейля или $\chi(x, \lambda) \in L_2(0, b)$ — в случае точки Вейля (т. е. когда операторы H_h самосопряжены). Тогда ядро резольвенты оператора H_h для не вещественных λ будет задаваться формулой

$$R_\lambda(x, s, H_h) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{1 + (h - h_1) m_{h_1}(\lambda)} \psi_h(x, \lambda) (\varphi(s, \lambda) + m_{h_1}(\lambda) \psi_{h_1}(s, \lambda)) & \text{при } x \leq s \\ -\frac{1}{1 + (h - h_1) m_{h_1}(\lambda)} \psi_h(s, \lambda) (\varphi(x, \lambda) + m_{h_1}(\lambda) \psi_{h_1}(x, \lambda)) & \text{при } x > s. \end{cases}$$

Отсюда без труда получаем

$$\operatorname{Sp} \{R_\lambda(H_{h_2}) - R_\lambda(H_{h_1})\} = \frac{h_2 - h_1}{1 - (h_2 - h_1) m_{h_1}(\lambda)} \int_0^\infty \chi^2(x, \lambda) dx. \quad (4)$$

Вычислим последний интеграл. Легко видеть, что

$$(\lambda - \mu) \int_0^\infty \chi(x, \lambda) \chi(x, \mu) dx = m_{h_1}(\lambda) - m_{h_1}(\mu),$$

откуда

$$\int_0^\infty \chi^2(x, \lambda) dx = -\frac{d}{d\lambda} m_{h_1}(\lambda).$$

Подставляя это значение в (4), получаем

$$\operatorname{Sp} (R_\lambda(H_{h_2}) - R_\lambda(H_{h_1})) = -\frac{d}{d\lambda} \ln (1 - (h_2 - h_1) m_{h_1}(\lambda)). \quad (5)$$

Сопоставляя (1) с (5) и используя то, что $m_h(iy) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ [3], окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t - \lambda} dt = \ln (1 - (h_2 - h_1) m_{h_1}(\lambda)).$$

Для доказательства формулы (2) остается заметить [3], что

$$m_{h_1}(\lambda) = - \int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma_{h_1}(t)}{t - \lambda}.$$

Перейдем к доказательству формулы (3).

Для этого разделим интервал $[h_1, h_2]$ на n равных частей и обозначим $\Delta h = \frac{h_2 - h_1}{n}$, $p_k = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)k}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Согласно (2) имеем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi(t, p_k, p_{k+1})}{t - \lambda} dt = \ln \left(1 + \Delta h \int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma_{p_k}(t)}{t - \lambda} \right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Теперь заметим, что для любых h_1, h_2, h_3 ф.с.с. обладает свойством

$$\xi(t, h_1, h_2) = \xi(t, h_1, h_3) + \xi(t, h_3, h_2).$$

Имея это в виду и складывая предыдущие равенства, получаем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t - \lambda} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \Delta h \int_{-\infty}^\infty \frac{d\sigma_{p_k}(t)}{t - \lambda} \right).$$

С другой стороны, легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \Delta h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{p_k}(t)}{t-\lambda} \right) \rightarrow \int_{h_1}^{h_2} dh \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_h(t)}{t-\lambda}.$$

Итак, получена формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t-\lambda} dt = \int_{h_1}^{h_2} dh \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_h(t)}{t-\lambda}.$$

Отсюда, пользуясь теоремами Хелли и формулой обращения Стильтеса, заключаем, что $\sigma_h(\lambda)$ при любом λ интегрируема по Риману и что во втором интеграле можно менять порядок интегрирования, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t, h_1, h_2)}{t-\lambda} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-\lambda} d \left(\int_{h_1}^{h_2} \sigma_h(t) dh \right).$$

Применяя еще раз формулу обращения, получаем (3).

Отметим, что в том случае, когда оператор H_h регулярен или имеет дискретный спектр, формула (2) совпадает с формулами (2.1.14) и (3.2.17) из работы [4] Б. М. Левитана и М. Г. Гасимова.

В случае, когда оператор H_h рассматривается на полупрямой (т. е. $b = \infty$), пользуясь известной асимптотикой ([5], [6]) для спектральной функции (эта асимптотика равномерна относительно h из конечного интервала) и (3), приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$\int_{-\infty}^0 \xi(t, h_1, h_2) dt + \int_0^{\infty} \left(\xi(t, h_1, h_2) - \frac{1}{\pi \sqrt{t}} (h_2 - h_1) \right) dt = -\frac{h_2^2 - h_1^2}{2}. \quad (6)$$

Для любого $a > 0$

$$\int_{-\infty}^0 e^{a\sqrt{|t|}} |\xi(t, h_1, h_2)| dt < +\infty.$$

Теоремы 1 и 2 приведены без доказательства в работе автора [7]. Отметим, что (6) есть обобщение формулы Б. М. Левитана и М. Г. Гасимова [4] о сумме разностей собственных значений операторов H_{h_1} и H_{h_2} .

Из того, что резольвенты операторов H_{h_1} и H_{h_2} отличаются на одномерный оператор, следует, что $0 \leq \xi(t, h_1, h_2) \leq 1$ при $h_1 < h_2$. Это видно также из (2).

Пусть известно, что функция $\xi(t)$ ($0 \leq \xi(t) \leq 1$) есть ф.с.с. для некоторых операторов $H_{h_1}^*$ и H_{h_2} . Тогда из формулы (6) находим числа h_1 и h_2 , после чего из (2) определяем спектральную функцию $\sigma_{h_1}(\lambda)$.

Таким образом, задача восстановления потенциала $q(x)$ по функции спектрального сдвига сводится к задаче восстановления потенциала по спектральной функции. Эта последняя задача, как хорошо известно, решена в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [8].

Теорема 3. Если $\xi(t, h_1, h_2)$ есть функция спектрального сдвига для операторов H_{h_1} и H_{h_2} , то функция

$$\frac{1}{h_2 - h_1} \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, h_1, h_2) dt$$

будет спектральной функцией некоторого оператора Штурма-Лиувилля с локально суммируемым потенциалом.

Согласно (3) нужно проверить, что $\frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \sigma_h(\lambda) dh$ есть спектральная функция. Как известно, в работах [8] и [9] установлен критерий того, чтобы наперед заданная возрастающая функция была спектральной функцией для некоторого оператора Штурма-Лиувилля. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\Phi_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda} d\sigma_h(\lambda), \quad 0 \leq x < \infty$$

имела две абсолютно непрерывные производные и $\Phi'_h(0) = 1$, $\Phi''_h(0) = h$.

Пользуясь тем, что $\Phi'_h(0) = H_h(x, 0)$, где $H_h(x, t)$ есть ядро оператора преобразования (см., напр., [4]), легко видеть, что вышеуказанным свойством обладает функция

$$\frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \Phi_h(x) dh = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda} d \left(\int_{h_1}^{h_2} \sigma_h(\lambda) dh \right).$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда оператор H_h имеет полуограниченный дискретный спектр

$$\lambda_1(h) < \lambda_2(h) < \dots < \lambda_n(h) < \dots, \quad \lambda_n(h) \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда ($h_1 < h_2$)

$$\xi(\lambda, h_1, h_2) = \begin{cases} 1, & \lambda_n(h_1) < \lambda < \lambda_n(h_2) \\ 0, & \lambda_n(h_2) < \lambda < \lambda_{n+1}(h_1). \end{cases}$$

В этом случае задание $\xi(\lambda, h_1, h_2)$ равносильно заданию спектров операторов H_{h_1} и H_{h_2} .

Применив теорему 3, получаем, что функция

$$\frac{1}{h_2 - h_1} \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, h_1, h_2) dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{h_2 - h_1} \sum_{\lambda_k(h_1) < \lambda} (\lambda_k(h_2) - \lambda_k(h_1)) + \frac{\lambda - \lambda_n(h_1)}{h_2 - h_1} & \text{при } \lambda_n(h_1) < \lambda < \lambda_n(h_2) \\ \frac{1}{h_2 - h_1} \sum_{\lambda_k(h_1) < \lambda} (\lambda_k(h_2) - \lambda_k(h_1)) & \text{при } \lambda_n(h_2) < \lambda < \lambda_{n+1}(h_1) \end{cases}$$

будет спектральной функцией некоторого оператора Штурма-Лиувилля.

Отметим, что предположение, близкое к последнему утверждению, содержится в работе [4].

Վ. Ա. ՅԱՎՐԻԱՆ. Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների վերաբերյալ մի հակադրած խնդրի մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում հետազոտվում է տարբեր եզրային պայմաններով տված երկու Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիան: Ստացված են բանաձևեր, որոնք կապում են այդ ֆունկցիան սպեկտրալ ֆունկցիայի հետ: Այդ բանաձևերը հնարավորություն են տալիս տված սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիայի միջոցով վերականգնել օպերատորը:

V. A. JAVRIAN. On an inverse problem for Sturm-Liouville operators (summary)

The function of spectral shift (f.s.s) of two selfadjointed Sturm-Liouville operators with differing conditions on one end are investigated. Formulas, connecting f.s.s. with spectral function are obtained, which give the solution of inverse problem, i. e. the problem of reconstruction of potential in terms of f.s.s.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. Г. Крейн. О формуле следов в теории возмущений, Мат. сб., 33 (75), 1953, 597—626.
2. М. Г. Крейн. Об определителях возмущения и формуле следов унитарных и самосопряженных операторов, ДАН СССР, 144, № 2, 1962, 268—271.
3. В. А. Марченко. Разложение по собственным функциям самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, Матем. сб., 52 (94), № 2, 1960, 739—788.
4. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам, УМН, XIX, вып. 2 (116), 1964, 3—63.
5. Б. М. Левитан. Об асимптотическом поведении спектральной функции, и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 33—58.
6. В. А. Марченко. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 381—422.
7. В. А. Яврян. О регуляризованном следе разности двух сингулярных операторов в Штурма-Лиувилля, ДАН СССР, 169, № 1, 1966, 49—51.
8. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по спектральной функции, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 309—360.
9. М. Г. Крейн. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка, ДАН СССР, 88, № 3, 1953, 405—408.

Посвящается 60-летию академика М. В. Келдыша

В. П. ХАВИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПРИВАЛОВА-ЗИГМУНДА О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Формулировки результатов

Пусть U — открытый единичный круг на комплексной плоскости, Γ — его граница. Обозначим через A множество всех функций f , непрерывных в $U \cup \Gamma$ и регулярных в U . Символом $\omega(\psi, \delta)$ мы будем обозначать модуль непрерывности функции ψ на единичной окружности Γ : $\omega(\psi, \delta) = \sup \{ |\psi(\gamma) - \psi(\gamma e^{i h})| : \gamma \in \Gamma, |h| \leq \delta, h \text{ вещественно} \}$. Положим еще

$$\Omega(\psi, \delta) = \int_0^\delta \frac{\omega(\psi, u)}{u} du + \delta \int_\delta^{2\pi} \frac{\omega(\psi, u)}{u^2} du \quad (0 < \delta < 2\pi),$$

Хорошо известно, что если f — функция из A , то

$$\omega(f, \delta) = O(\Omega(\operatorname{Re} f, \delta)) \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (1)$$

(см. [1], стр. 199).

Если $\omega(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$, то оценка (1) превращается в известную теорему И. И. Привалова о сопряженных функциях. Точность оценки (1) доказана в работе [2].

Оценку (1) можно записать в следующей равносильной форме: если $f \in A$ и f не имеет нулей в замкнутом круге $U \cup \Gamma$, то

$$\omega(f, \delta) = O(\Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (2)$$

В самом деле, множество всех функций из A , не имеющих нулей в $U \cup \Gamma$, совпадают с множеством всех функций вида $\exp \varphi$, где $\varphi \in A$, причем модули непрерывности (на Γ) функций φ и $\exp \varphi$ (соотв. $|\exp \varphi|$ и $\operatorname{Re} \varphi$) очень просто связаны друг с другом.

В этой статье будет доказана теорема, обобщающая оценку (2).

Напомним, что всякая функция f класса A представима в виде произведения:

$$f = B_f S_f Q_f,$$

где B_f — функция Бляшке, S_f — внутренняя функция, не имеющая нулей в U , Q_f — внешняя функция* (см. [3], стр. 100). Функция S_f имеет следующий вид:

$$S_f(t) = \exp \left[- \int_{\Gamma} \frac{\gamma+t}{\gamma-t} d\mu_f(\gamma) \right],$$

где μ_f — неотрицательная борелевская мера на окружности Γ .

Теорема 1. Пусть f — функция, непрерывная в замкнутом единичном круге $U \cup \Gamma$ и регулярная в U (короче, функция класса A). Предположим, что расположенные в U корни функции f не могут сгущаться к единичной окружности Γ по касательному пути (т. е.

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \gamma, z \in N_f} \frac{|z-\gamma|}{1-|z|} < +\infty \quad (\gamma \in \Gamma), \quad N_f = \{z \in U: f(z) = 0\}.$$

Тогда

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (3)$$

Если мера μ_f не содержит точечных нагрузок (т. е. $\mu_f(\{\gamma\}) = 0$, какова бы ни была точка $\gamma \in \Gamma$), то

$$\omega(f, \delta) = O(\omega(|f|, \beta_f(\delta) \sqrt{\delta}) + \Omega(|f|, \delta)) \quad (\delta \rightarrow 0), \quad (3')$$

где $\beta_f(\delta) = o(1) \quad (\delta \rightarrow 0)$.

Мы не будем приводить явного выражения функции β_f , хотя доказательство теоремы 1 в принципе позволяет это сделать. Грубо говоря, $\beta_f(\delta)$ стремится к нулю тем быстрее, чем меньше нулей имеет функция f в замкнутом круге $U \cup \Gamma$. Если f вообще не имеет нулей в $U \cup \Gamma$, то в качестве $\beta_f(\delta)$ можно взять $\sqrt{\delta}$, и тогда утверждение теоремы 1 совпадает с (2) и, в конечном счете, с (1). В общем случае малости $\beta_f(\delta)$ благоприятствует малость следующих величин:

σ — мера Лебега на Γ

$$\sup \left\{ \int_B |\log |f|| d\tau; B \subset \Gamma, \sigma(B) \leq \delta \right\}$$

(модуль „абсолютной непрерывности“ интеграла $\int |\log |f|| d\tau$;

$$\sup \{\mu_f(B): B \subset \Gamma, \text{diam } B \leq \delta\},$$

* Внешней называют регулярную в U функцию Q , логарифм модуля которой представляем в U интегралом Пуассона:

$$\log |Q(t)| = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \frac{1-|t|^2}{|e^{i\theta} - t|^2} d\theta \quad (t \in U),$$

где $\psi \in L^1([-\pi, \pi])$.

и

$$\min \left\{ n: n - \text{натуральное, } \sum_{k=1}^n (1 - |t_k|) \leq \delta \right\},$$

где $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность корней функции f , расположенных в U и занумерованных так, что $|t_{k+1}| \geq |t_k|$, $k=1, 2, \dots$.

Оценка (3) точна в следующем смысле: если ω — какой-нибудь модуль непрерывности, для которого соответствующая функция Ω конечна*, то существует функция $f \in A$, не имеющая корней в U и такая, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) \left[\omega(1/\delta) + \int_0^{\delta} \frac{\omega(u)}{u} du + \delta \int_0^1 \frac{\omega(u)}{u^2} du \right]^{-1} > 0,$$

$\omega(|f|, \delta) = O(\omega(\delta))$ ($\delta \rightarrow 0$) (см. ниже теорему 2).

Отметим еще, что если f — внешняя функция из A , то $\beta_f(\delta)$ стремится к нулю, вообще говоря, сколь угодно медленно (теорема 3).

Условие, которому в теореме 1 подчинены корни функции f , расположенные в U , не может быть отброшено. Действительно, нетрудно построить внешнюю функцию Q с бесконечнодифференцируемым вдоль Γ модулем и произведением Бляшке B , нули которого сгущаются к Γ по должным образом выбранному касательному пути так, что функция QB будет принадлежать классу A , но ее модуль непрерывности в $U \cup \Gamma$ стремится к нулю сколь угодно медленно (этого можно добиться, достаточно тесно придвигая корни функции B к окружности Γ). Из результатов работ [7], [8] следует, что и модуль непрерывности $\omega(QB, \delta)$ также можно сделать сколь угодно медленно убывающим (хотя $|QB| \equiv |Q|$ на Γ и потому $|QB| \in C^\infty(\Gamma)$).

Из теоремы 1 легко вывести такое

Следствие. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, а $|f|$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha \in (0, 1]$ на Γ , то f удовлетворяет условию Липшица порядка $\frac{\alpha}{2}$ в $U \cup \Gamma$. Показатель $\frac{\alpha}{2}$ в этом утверждении нельзя увеличить.

В несколько менее общем виде утверждение следствия было сформулировано в заметке [4]. В [5] изложено доказательство этого результата, основанное на теореме Харди-Литтльвуда ([6], стр. 397). Это доказательство можно обобщить на модули непрерывности, удовлетворяющие условиям (B) и (B_1) статьи [2], если воспользоваться результатами работ [7] и [8]. В общем случае приходится непосредственно оценивать значения функции f на Γ и работать с соответ-

* Если $\Omega(\delta) \equiv +\infty$, то можно легко построить функции $f \in A$, не имеющие нулей в $U \cup \Gamma$ и такие, что $\omega(|f|, \delta) = O(\omega(\delta))$ ($\delta \rightarrow +0$), а $\omega(f, \delta)$ стремится к нулю сколь угодно медленно (см. [2]).

ствующими сингулярными интегралами, как это и сделано ниже при доказательстве теоремы 1.

После того, как заметка [4] была опубликована, Л. Карлесон сообщил мне, что утверждение следствия было доказано четырьмя годами ранее им и его учеником Джекобсом (Jacobs) для внешних функций f (отметим, что на самом деле, как видно из теоремы 1, $\omega(f, \delta) = o(\delta^{1/2})$ ($\delta \rightarrow 0$), если f — внешняя и $|f| \in \text{Lip}(\alpha, \Gamma)$). Этот результат не публиковался. Кроме того, Карлесон сообщил, что утверждение, аналогичное следствию, справедливо и при

$$\alpha > 1 \quad (f \in \text{Lip } \alpha, \overset{\text{def}}{f^{[\alpha]}} \in \text{Lip}(\alpha - [\alpha]), [\alpha] < \alpha).$$

Результаты настоящей работы были анонсированы в заметке [9].

Перечислим в заключение этого параграфа свойства модулей непрерывности, которыми мы будем пользоваться.

1. Если f — функция, непрерывная на Γ , то

$$0 < \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \frac{\omega(f, \delta_2)}{\delta_2} \leq 2 \frac{\omega(f, \delta_1)}{\delta_1} \quad ([10], \text{ стр. 111}).$$

2. Если f отлична от постоянной, то

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega(f, \delta)}{\delta} > 0 \quad ([10], \text{ стр. 111}).$$

3. $\omega(f, C\delta) \leq 2C\omega(f, \delta)$, каковы бы ни были числа $C > 0$ и $\delta > 0$.

4. $\omega(f, \delta) \leq c\Omega(f, \delta)$, где c — абсолютная постоянная, а δ — любое положительное число, меньшее 2π .

В самом деле

$$\Omega(f, \delta) \geq \int_{\delta/2}^{\delta} \frac{\omega(f, u)}{u} du \geq \omega(f, \delta/2) \cdot \log 2 \geq \frac{\log 2}{2} \omega(f, \delta).$$

5. Для любой функции f , непрерывной на Γ , существует непрерывно дифференцируемая на открытой полуоси $(0, +\infty)$ возрастающая функция φ такая, что

$$\frac{1}{4} \omega(f, \delta) \leq \varphi(\delta) \leq \omega(f, \delta) \quad \text{при любом положительном } \delta,$$

$$\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \text{ убывает с возрастанием } \delta.$$

Доказательство. Сначала построим непрерывную и возрастающую на полуоси $(0, +\infty)$ функцию φ_1 такую, что

$$\frac{1}{2} \omega(f, \delta) \leq \varphi_1(\delta) \leq \omega(f, \delta) \quad (\delta > 0),$$

$$\frac{\varphi_1(\delta)}{\delta} \text{ убывает с возрастанием } \delta$$

$(\varphi_1(\delta) = \delta \inf \left\{ \frac{w(f, u)}{u} : 0 < u \leq \delta \right\}; [10], \text{ стр. 112}).$ Затем положим

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \varphi_1(t) dt \quad (\delta > 0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\delta) &\leq \varphi_1(\delta), \quad \varphi(\delta) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\varphi_1(t)}{t} dt > \\ &> \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\varphi_1(\delta)}{\delta} \cdot \frac{\delta^2}{2} = \frac{\varphi_1(\delta)}{2}; \quad \frac{d}{d\delta} \left[\frac{\varphi(\delta)}{\delta} \right] = \frac{\varphi'(\delta)}{\delta} - \frac{\varphi(\delta)}{\delta^2} = \\ &= \frac{\varphi_1(\delta)}{\delta^2} - 2 \frac{1}{\delta^3} \int_0^\delta \varphi_1(t) dt = \frac{1}{\delta^2} [\varphi_1(\delta) - 2\varphi(\delta)] < 0. \end{aligned}$$

§ 2. Вспомогательные сведения о функциях класса A

Меру Лебега на единичной окружности Γ мы будем обозначать буквой σ . Мы будем считать меру σ нормированной: $\sigma(\Gamma) = 1$. Вместо $\int_\Gamma f d\sigma$ мы будем часто писать $\int f d\sigma$. Нам потребуется ядро Шварца

$$S: S_t(\gamma) = (\gamma + t)(\gamma - t)^{-1} \quad (\gamma \in \Gamma, t \in U).$$

Из следующих трех лемм две первые хорошо известны (см., напр., [3], гл. V, VI).

Лемма 1. Пусть f — функция класса A , не все значения которой равны нулю. Тогда существуют вещественное число s , неотрицательное целое число m , неотрицательная борелевская мера μ на Γ и (конечная или бесконечная) последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ точек круга U такие, что при всех $t \in U$ справедливо равенство

$$f(t) = t^m \prod_{k=1}^\infty \frac{t - t_k}{1 - \bar{t}_k t} \frac{\bar{t}_k}{t_k} \exp \left[\int \log |f| \cdot S_t d\sigma - \int S_t d\mu + ic \right], \quad (4)$$

$$|t_k| \leq |t_{k+1}| \quad \text{при всех } k,$$

$$\sum_k (1 - |t_k|) < +\infty,$$

носитель меры μ содержится в множестве нулей функции f и содержит все предельные точки последовательности $\{t_k\}$.

Отметим еще, что в условиях леммы 1 $\int \log |f| d\sigma > -\infty$.

Лемма 2. Пусть w — неотрицательная функция, заданная и непрерывная на Γ . Если

$$\int \log w \, dz > -\infty,$$

то функция f , заданная в U равенством

$$f(z) = \exp \int \log w \cdot S_t \, dz, \quad (5)$$

обладает следующими свойствами: f ограничена и регулярна в U ; функция $|f|$ равномерно непрерывна в U ; ее непрерывное продолжение на окружность Γ совпадает с w .

Доказательство немедленно следует из известных свойств ядра Пуассона $\operatorname{Re} S_t$.

Лемма 3. Пусть g — функция класса A , не имеющая нулей в U . Предположим, что

$$|g(z)| \leq 1 \quad (z \in U).$$

Тогда существует положительное число M_g , обладающее следующим свойством:

при любом положительном a , меньшем единицы, функция g представима в U в виде

$$g = \varphi_a \Phi_a, \quad (6)$$

где Φ_a — функция, регулярная в U и такая, что функция $|\Phi_a|$ непрерывно продолжима на весь замкнутый круг $U \cup \Gamma$;

$$a \leq |\Phi_a(z)| \leq 1 \quad (z \in U \cup \Gamma), \quad (7)$$

$$||\Phi_a(\gamma')| - |\Phi_a(\gamma'')|| \leq ||g(\gamma')| - |g(\gamma'')|| \quad (\gamma', \gamma'' \in \Gamma), \quad (8)$$

$$\varphi_a(z) = \exp \left[- \int S_t \, d\lambda_a + ic \right] \quad (z \in U), \quad (9)$$

где λ_a — неотрицательная борелевская мера на Γ с носителем в множестве

$$\Gamma^a = \{\gamma \in \Gamma: |g(\gamma)| \leq a\}; \quad (10)$$

при всех γ из этого множества $|\Phi_a(\gamma)| = a$,

$$\lambda_a(\Gamma) \leq M_g, \quad (11)$$

a — вещественное число.

Подчеркнем, что константа M_g не зависит от a .

Из доказательства будет видно, что функция Φ_a представима по формуле (5) с $w = \log |\Phi_a|$ (т. е. Φ_a — внешняя) и что

$$\sup \left\{ \int |\log |\Phi_a|| \, d\sigma: 0 < a \leq 1 \right\} < +\infty.$$

(Полезно отметить также, что при всех $a \in (0, 1)$

$$|\varphi_a(z)| \leq 1 \quad (z \in U). \quad (12)$$

Доказательство леммы 3. Положим $H_a = \min(|g|, a)$, $h_a = |g| \cdot H_a^{-1}$, так что $|g| = H_a h_a$. В качестве Φ_a возьмем теперь функ-

цию, определяемую равенством (5) с $w = H_a$. Из (4) следует (6). Значение меры λ_a на любом борелевском подмножестве B окружности Γ равно

$$-\int_{B^a} \log \frac{|g|}{a} d\sigma + \mu(B), \text{ где } B^a = \{\gamma \in B: |g(\gamma)| \leq a\}.$$

Утверждения (7) и (8) следуют теперь из леммы 2, в силу которой $|\Phi_a(\gamma)| = H_a(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$).

Осталось оценить $\lambda_a(\Gamma)$. Ясно, что

$$\lambda_a(\Gamma) = \int_{\Gamma^a} \left| \log \frac{|g|}{a} \right| d\sigma + \mu(\Gamma) \leq \int_{\Gamma^a} |\log |g|| d\sigma + |\log a| \sigma(\Gamma^a) + \mu(\Gamma). \quad (13)$$

Интеграл $\int |\log |g|| d\sigma$ конечен. Поэтому

$$\sup_{A>0} A \cdot \sigma\{\gamma \in \Gamma: |\log |g|| \geq A\} < +\infty.$$

Но при

$$a \in (0, 1) \quad \Gamma^a = \{\gamma \in \Gamma: |\log |g|| > |\log a|\}.$$

Поэтому произведение $|\log a| \cdot \sigma(\Gamma^a)$ при всех $a \in (0, 1)$ не превосходит числа, зависящего лишь от f . Лемма доказана.

Замечание. Предположим, что функция f , о которой говорится в лемме 3 — внешняя (т. е., что $\mu = 0$). Тогда можно утверждать, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lambda_a(\Gamma) = 0. \quad (14)$$

Для доказательства свяжем с функцией g „модуль абсолютной непрерывности“ функции $\log |g|$:

$$A(g, \delta) = \sup \left\{ \int_E |\log |g|| d\sigma: E \subset \Gamma, \sigma(E) \leq \delta \right\}. \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^a} \left| \log \frac{|g|}{a} \right| d\sigma &= - \int_{\Gamma^a} \log |g| d\sigma - \log a \cdot \sigma(\Gamma^a) \leq \\ &\leq 2A(g, \sigma(\Gamma^a)), \end{aligned}$$

так что

$$\lambda_a(\Gamma) \leq 2A(g, \sigma(\Gamma^a)) + \mu(\Gamma), \quad (16)$$

откуда и следует (14) для внешней функции g .

(Продолжение в следующем номере журнала)

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

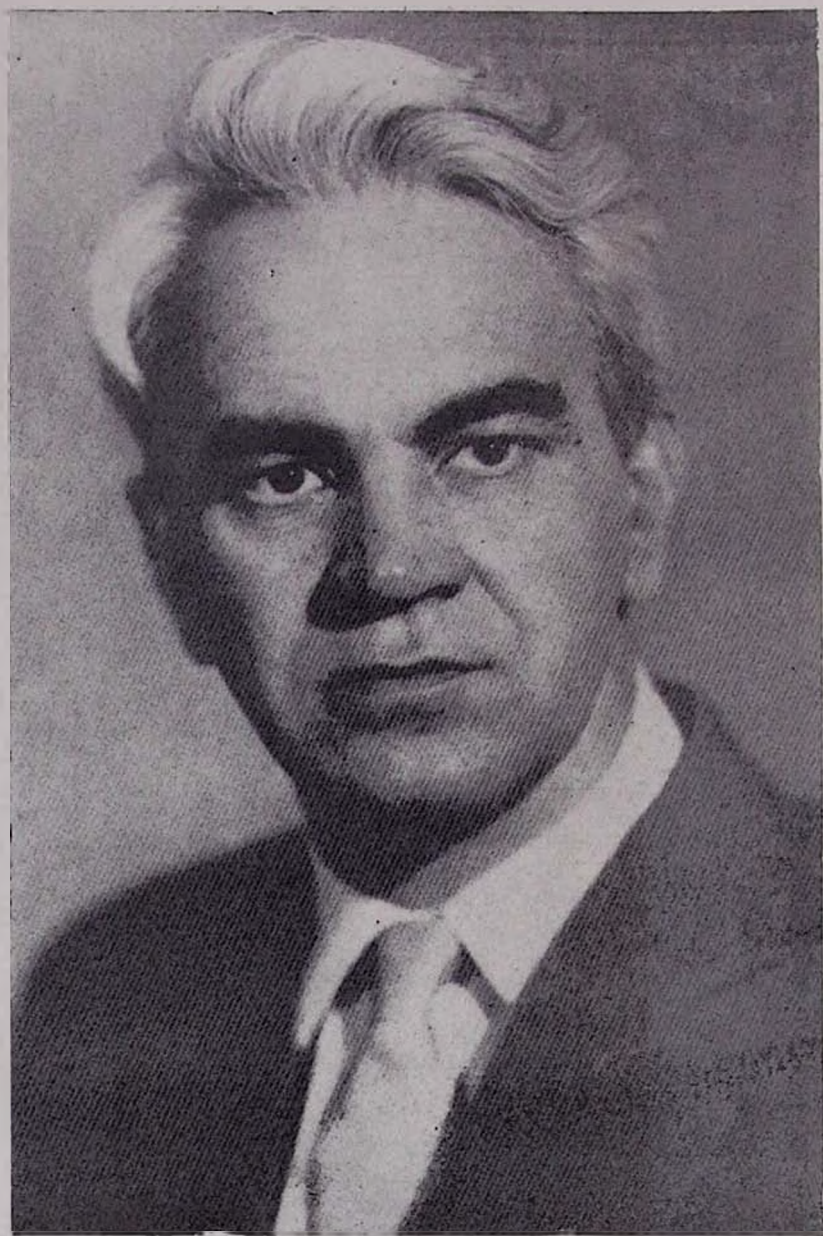
Վ. Մ. Ազաճյան, Դ. Ջ. Սրով, Մ. Դ. Կեյն, Անվերջ հանկելյան ըլով մատրիցներ և նրանց հետ կապված շարունակելիության պրոբլեմներ	87
Ա. Դ. Ասլանյան, Վ. Ռ. Լիդսկի. Պոտման թաղանթների տեսության ստորին խմբի հաճախականությունների համար ասիմպտոտական բանաձևեր	113
Ի. Դ. Գասիմով, Բաղմանդամային օպերատորային փնջերի սեփական և հարակից վեկտորների մի մասի բաղմապատիկ լրիվության մասին	131
Ա. Ա. Դոնչար, Ռադիոնալ ֆունկցիաներով լավագույն մոտարկումների հետ կապված ֆունկցիաների քվադրանտիկ դասեր	148
Ի. Յ. Դոսթերգ, Վերջավոր-մերոմորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների մի քանի հարցերի մասին	160
Մ. Մ. Զրբաշյան, Վ. Ս. Ջաֆարյան, Սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադասերի եզրային հատկությունները	182
Ա. Շ. Լեոնտև, Հատվածի վրա էքսպոնենտների սիստեմի լրիվության հարցի մասին	195
Ս. Հ. Սիմեյան, Առանց ներքին կետերի մի կոմպակտի վրա տրված անալիտիկ ֆունկցիաների բանախյան ալգեբրայի դիֆերենցիալ հատկությունները	210
Ս. Յա. Խավին, Լրիվության զադափարի մասին, որը հաշվի է առնում մոտարկող բաղմանդամների գործակիցների մեծությունները	221
Ա. Ա. Շահինյան, Հարմոնիկ և զրադիենտային արտապատկերումների սահմանային բաղմոթյունների մասին II	235
Վ. Ա. Յավրյան, Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորների վերաբերյալ մի հակադարձ խնդրի մասին	246
Վ. Պ. Խավին, Համալուծ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի մասին Պրիվալով—Զիգմունդի թեորեմի ընդհանրացումը	252

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В. М. Адамян, Д. Э. Аров, М. Г. Квейн. Бесконечные блочно-ганкеловы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения	87
А. Г. Асланян, В. Б. Лидский. Асимптотические формулы для частей нижней серии в теории оболочек вращения	113
М. Г. Гасымов. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков	131
А. А. Гончар. Квазинаналитические классы функций, связанные с наивлучшими приближениями радиональными функциями	148
И. Ц. Гохберг. О некоторых вопросах спектральной теории конечномероморфных оператор-функций	160
М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида	182
А. Ф. Леонтьев. К вопросу о полноте системы экспонент на интервале	195
С. О. Синаян. Дифференциальные свойства банаховой алгебры аналитических функций на одном компакте без внутренних точек	210
С. Я. Хавинсон. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов	221
А. А. Шаинян. О предельных множествах гармонических и градиентных отображений II	235
В. А. Яврян. Об одной обратной задаче для операторов Штурма-Лиувилля	246
В. П. Хавин. Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции	252

CONTENTS

<i>V. M. Adamian, D. Z. Arov, M. G. Krein.</i> Infinite Hankel block-matrices and related continuation problems	87
<i>A. G. Aslantan, V. B. Lidskii.</i> Asymptotic formula for frequencet of lower seria in theory of shells	113
<i>M. G. Gasimov.</i> On the multiple completeness of the part of eigen and adjoint vectors of the polynomial operator bundles	131
<i>A. A. Gončar.</i> Quasyanalytic classes of functions, connected with best approximations by rational functions	148
<i>I. C. Gohberg.</i> On some topics of spectral theory of finite mehromorphic operator-functions	160
<i>M. M. Džrbašan, V. S. Zakarian.</i> Boundary properties of subclasses of mehromorphic functions of bounded type	182
<i>A. F. Leontjev.</i> On completeness of a system of exponents on an interval . . .	195
<i>S. O. Synanian.</i> Differential properties of Banach algebrn of analytic functions on a compact without inner points	210
<i>S. Y. Havinson.</i> A notion of completness, which takes ackount of coefficients of approximating polynomials	221
<i>A. A. Shagintan.</i> On cluster sets of harmonic and gradient mappings II . . .	235
<i>V. A. Javrian.</i> On an inverse problem for Sturm-Liuville operators	246
<i>V. P. Havin.</i> Generalization of the Privalov-Zygmund theorem on the modulus of continuity of conjugate function	252



АКАДЕМИК МСТИСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ КЕЛДЫШ

Редакция журнала „Математика“, посвящая специальный выпуск одному из наиболее выдающихся ученых нашего времени, академику Мстиславу Всеволодовичу Келдышу в связи с его шестидесятилетием, искренне желает ему крепкого здоровья, дальнейших выдающихся успехов во славу отечественной науки.

Наряду с громадной ролью, которую он играет в деле организации Советской науки в целом, академик М. В. Келдыш внес неоценимый личный вклад во многие важнейшие области современной науки, а его фундаментальные исследования в области теории функций вещественного и комплексного переменного, теории потенциала и спектральной теории несамосопряженных операторов вошли в сокровищницу мировой науки, прославляя отечественную математику.

Нам особенно приятно, пользуясь случаем, отметить исключительно большую роль Мстислава Всеволодовича в создании и развитии математической школы в Армении.