ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

Индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Р. С. ДАВТЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ СХОДИМОСТИ

§ 1. Введение

Приведем некоторые обозначения и определения. $L_2(\Delta)$ будет означать класс функций, интегрируемых с квадратом на отрезке Δ. Далее положим

$$L_2 \equiv L_2([0, 1]),$$

$$a_k(f) \equiv \int_0^1 f(x)\,\varphi_k(x)\,dx,$$

$$S_n(f, x) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\,\varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — некоторая ортонормированная система, а $f(x)$ — некоторая функция из L_2.

Определение 1. Ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, заданная на отрезке $[0,1]$, называется системой сходимости, если всякий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x)$$

сходится почти всюду на $[0,1]$ как только

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty.$$

Определение 2. Будем говорить, что полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации в классе L_2, если ряд Фурье любой функции из L_2, равной нулю в некотором интервале отрезка $[0,1]$, равномерно сходится к нулю на каждом отрезке, лежащем внутри этого интервала.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с представимостью измеримых функций рядами по полным ортонормированным системам.

В 1939 г. Д. Е. Меньшовым была доказана следующая фундаментальная теорема о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами (см. [1]).

Теорема I (Д. Е. Меньшов). *Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.1}$$

сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В наиболее общем случае, когда представимая функция $f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, задача изображения измеримой функции почти всюду сходящимся тригонометрическим рядом остается открытой. Существенным продвижением в направлении решения этой задачи явилась доказанная в 1949 году (см. [2])

Теорема II (Д. Е. Меньшов). *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить ряд (1.1), сходящийся по мере на $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$ и, кроме того, удовлетворяющий условию*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

В дальнейшем А. А. Талаляном была доказана теорема (см. [3], теорему 3), являющаяся усилением теоремы II. Она формулируется следующим образом:

Теорема III. *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, существует тригонометрический ряд (1.1), сходящийся к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходящийся к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.*

Оказывается, что теорему III А. А. Талаляна можно распространить на некоторый класс полных ортонормированных систем, точнее справедлива

Теорема 1. *Пусть полная в L_2 ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такова, что*

a) $\{\varphi_n(x)\}$ *является системой сходимости,*

b) $\{\varphi_n(x)\}$ *обладает свойством локализации в классе L_2 (см. определение 2).*

Тогда для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[0, 1]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, существует ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),$$

сходящийся к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходящийся к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.

Используя результат Л. Карлесона (см. [4], теорему (c)) о том, что тригонометрическая система является системой сходимости, из теоремы 1 можно получить теорему III (выполнение условия b) теоремы 1 для тригонометрической системы хорошо известно).

Заметим, что теорема I Меньшова была доказана задолго до доказательства теоремы Карлесона, и поэтому при ее доказательстве были использованы другие, очень глубокие свойства тригонометрической системы. При этом для доказательства теоремы I Д. Е. Меньшовым была использована доказанная им же очень сильная теорема о том, что если $f(x)$—произвольная измеримая функция и ε—произвольное положительное число, то существует непрерывная функция $\psi(x)$ такая, что

$$\mu\{x: f(x) \neq \psi(x)\} < \varepsilon,$$

и ряд Фурье функции $\psi(x)$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ (см. [5]*).

Методы, примененные Д. Е. Меньшовым [1] (и в дальнейшем А. А. Талаляном [3], [6]), существенно использованы также при доказательстве теоремы 1, несмотря на то, что в ее формулировке от системы $\{\varphi_n(x)\}$ требуется, чтобы она была системой сходимости.

Проверяя условия a) и b) для различных полных ортонормированных систем, из теоремы 1 можно получить аналогии теоремы III для этих систем. А именно: требованиям a) и b) теоремы 1 удовлетворяют, например, следующие системы $\{\varphi_n(x)\}$:

1) $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша (опр. см. в [7]);

2) $\{\varphi_n(x)\}$ — любая полная ортонормированная система сходимости, удовлетворяющая условиям

$$\left.\begin{array}{r}\varphi_n(x)=0 \text{ при } x \in \Delta_n \\ \mu\,\Delta_n \to 0\end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

где Δ_n — интервал, принадлежащий отрезку [0,1]. (В частности $\{\varphi_n(x)\}$ может совпадать с системой Хаара);

3) $\{\varphi_n(x)\}$ — любая система, обладающая свойством равносходимости относительно тригонометрической системы в следующем смысле:

если $f(x) \in L_2([-\pi, \pi])$ и $S(f)$ и $\sigma(f)$ ее ряды Фурье соответственно по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и по тригонометрической системе, то из сходимости почти всюду ряда $\sigma(f)$ следует сходимость почти всюду ряда $S(f)$, а из равномерной на некотором отрезке сходимости ряда $\sigma(f)$ следует равномерная сходимость ряда $S(f)$ на том же отрезке. (В частности этим свойством обладают системы Штурма-Лиувилля (см., например, [8])).

В случае 1) условие a) выполняется согласно [9], а условие b) следует из теорем XXIII и XXX работы [10].

В случае 2) свойство a) системы $\{\varphi_n(x)\}$ уже предположено, а свойство b) следует из условия (1.2).

---

* Заметим также, что эта теорема Меньшова об „исправлении функции" не перекрывается с теоремой Карлесона.

В случае 3) система $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условиям a) и b), ибо тригонометрическая система обладает этим свойством.

Отметим, что результат теоремы 1, когда $\{\varphi_n(x)\}$ — система Хаара или Уолша, нельзя усилить, заменяя сходимость по мере (на том множестве, где представимая функция равна $+\infty$ или $-\infty$) сходимостью почти всюду (см. [11], теоремы 1 и 2).

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (А. А. Талалян)*. Пусть $f(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots \varphi_N(x)$ — произвольные функции (N конечное), принадлежащие классу $L_2(\Delta)$, где Δ — некоторый отрезок. Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить функцию $f^*(x)$ и множество e, обладающие следующими свойствами:

a) $f^*(x) = f(x)$ при $x \overline{\in} e$, где $e \subset \Delta$, $\mu e < \varepsilon_0 \mu \Delta$,

b) $\int\limits_{\Delta} |f^*(x)|^2 dx \leqslant \frac{2}{\varepsilon_0} \int\limits_{\Delta} f^2(x)\, dx$,

c) $\left| \int\limits_{\Delta} f^*(x) \varphi_k(x)\, dx \right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant N)$.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная на отрезке [0,1] система сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что если $f(x) \in L_2$ и $\|f\| < \lambda$, то существует множество E_f, для которого выполняются условия*

$$E_f \subset [0,1], \quad \mu E_f > 1 - \varepsilon; \tag{2.1}$$

$$|S_n(x, f)| < \varepsilon \quad (x \in E_f, \; n = 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система сходимости и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ утверждение леммы 2 нарушается. Пусть, далее, N_{i-1} ($i \geqslant 2$) — некоторое натуральное число.

Выберем $\lambda_i > 0$ настолько малым, чтобы для некоторого множества Q_i, $Q_i \subset [0,1]$ и

$$\mu Q_i > 1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \tag{2.3}$$

выполнялось условие

$$|S_{N_{i-1}}(x, g)| < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad (x \in Q_i) \tag{2.4}$$

для всех функций $g(x) \in L_2$, удовлетворяющих неравенству

$$\|g(x)\| < \lambda_i. \tag{2.5}$$

В силу обратного допущения можно найти функцию $f_i(x) \in L_2$ такую, что

---

* См. [6], стр. 86 или [12], стр. 167.

$$\|f_i\| < \lambda_i \tag{2.6}$$

и

$$\mu\{x: \sup_n |S_n(x, f_i)| > \varepsilon_0\} > \varepsilon_0.$$

Отсюда следует, что существуют измеримое множество A_i и натуральное число $N_i (N_i > N_{i-1})$, удовлетворяющие условиям

$$\mu A_i > \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{2.7}$$

и

$$\sup_{n < N_i} |S_n(x, f_i)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (x \in A_i). \tag{2.8}$$

Обозначим

$$B_i = A_i \cap Q_i. \tag{2.9}$$

Тогда в силу неравенств (2.3) и (2.7) будет

$$\mu B_i > \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{2.10}$$

а из (2.6), (2.4), (2.8) и (2.9) получим

$$\sup_{N_{i-1} < n < N_i} \left| \sum_{j=N_{i-1}+1}^{n} a_j(f_i)\, \varphi_j(x) \right| > \frac{\varepsilon_0}{4} \quad (x \in B_i). \tag{2.11}$$

Относительно числа N_i применимы те же рассуждения, которые были применены к числу N_{i-1} для определения чисел λ_i и N_i, функции $f_i(x)$ и множества B_i, удовлетворяющих условиям (2.6), (2.10) и (2.11); только в этих рассуждениях нужно заменить i на $i+1$.

Таким образом, можно считать, что построены последовательности натуральных чисел $\{N_i\}_1^\infty$ $(N_1 < N_2 < \cdots)$, положительных чисел $\{\lambda_i\}_2^\infty$, функций $\{f_i(x)\}_2^\infty$ и множеств $\{B_i\}_2^\infty$, для которых выполняются (2.6), (2.10) и (2.11) $(i=2, 3, \cdots)$. От последовательности $\{\lambda_i\}_2^\infty$, очевидно, можно потребовать также выполнение условия

$$\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty. \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.6) $(i=2, 3, \cdots)$ получим

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j^2(f_i) \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} \|f_i\|^2 < \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty. \tag{2.13}$$

Обозначим

$$B = \lim_{i>1} \sup B_i, \tag{2.14}$$

и, учитывая (2.11), заметим, что ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j(f_i)\, \varphi_j(x)$$

расходится на множестве B, которое в силу (2.14) и (2.10) имеет положительную меру.

Отсюда и из (2.13) следует, что $\{\varphi_n(x)\}$ не является системой сходимости, а это противоречит условию леммы.

Лемма 3. *Если полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством локализации в классе L_2, то для всякого $\varepsilon>0$ и любого отрезка $[a, b]\subset[0, 1]$ существуют $\delta>0$ и множество E,*

$$E\subset C[a, b], \ \mu E>\mu C[a, b]-\varepsilon \tag{2.15}$$

такие, что если $g(x)\in L_2$, $g(x)=0$ при $x\overline{\in}[a, b]$ и $\|g\|<\delta$, то выполняются неравенства

$$|S_n(x, g)|<\varepsilon \quad (x\in E, \ n=1, 2,\cdots). \tag{2.16}$$

Доказательство. Пусть

$$F\subset[0, 1], \ \mu F>1-\frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.17}$$

$$|\varphi_i(x)|<M_i \quad (x\in F, \ i=1, 2,\cdots), \tag{2.18}$$

где $\{M_i\}$ — некоторая последовательность положительных чисел. В силу (2.17) множество

$$E\equiv\left[F-\left(a-\frac{\varepsilon}{6}, b+\frac{\varepsilon}{6}\right)\right]\cap\left[\frac{\varepsilon}{6}, 1-\frac{\varepsilon}{6}\right] \tag{2.19}$$

удовлетворяет условию (2.15).

Допуская, что для этого множества ни при каком $\delta>0$ не выполняются требования леммы 3, установим существование функции $F(x)\in L_2$, $F(x)=0$ при $x\overline{\in}[a, b]$, для которой в одном из интервалов $(0, a)$ и $(b, 1)$ нарушается свойство локализации.

Итак, пусть для множества E, определенного равенством (2.19), нельзя определить $\delta>0$, обладающее указанными в лемме 3 свойствами.

Взяв произвольное число $\delta_1>0$, можно найти функцию $f_1(x)\in L_2$, натуральное число p_1 и точку $x_1\in E$, для которых справедливы следующие условия:

$$f_1(x)=0 \text{ при } x\overline{\in}[a, b], \quad \|f_1(x)\|<\delta_1, \tag{2.20}$$

$$|S_{p_1}(x_1, f_1)|>\varepsilon. \tag{2.21}$$

Учитывая (2.19) и первую часть (2.20) и применяя свойство локализации, можно определить натуральное число $q_1>p_1$ такое, что

$$|S_\nu(x, f_1)|<\frac{\varepsilon}{2^3} \quad (x\in E, \ \nu>q_1). \tag{2.22}$$

Предполагая, что натуральное число q_{i-1} определено $(i\geqslant 2)$, возьмем $\delta_i>0$ такое, что

$$\delta_i<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}\sqrt{q_{i-1}}\max\limits_{k<q_{i-1}} M_k}. \tag{2.23}$$

Вследствие обратного допущения найдутся функция $f_l(x) \in L_2$, точка $x_l \in E$ и натуральное число p_l, удовлетворяющие условиям:

$$f_l(x)=0 \text{ при } x \overline{\in} [a, b], \ \|f_l\| < \delta_l, \tag{2.24}$$

$$|S_{p_l}(x_l, f_l)| > \varepsilon. \tag{2.25}$$

Из (2.18), (2.19), (2.23) и из неравенства в (2.24) получим

$$|S_\mu(x, f_l)| \leqslant \sum_{k=1}^{q_{l-1}} |a_k(f_l)| \, |\varphi_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{q_{l-1}} |a_k(f_l)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{q_{l-1}} [\varphi_k(x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \|f_l(x)\| \cdot \sqrt{q_{l-1}} \cdot \max_{k < q_{l-1}} M_k \leqslant \delta_l \sqrt{q_{l-1}} \max_{k < q_{l-1}} M_k < \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} \tag{2.26}$$

$$(x \in E, \ \mu \leqslant q_{l-1}).$$

Из неравенств (2.25) и (2.26) следует, что $p_l > q_{l-1}$.

Далее, в силу свойства локализации, учитывая равенство в (2.24) и определение множества E, можно найти натуральное число $q_l > p_l$, обладающее следующим свойством:

$$|S_\nu(x, f_l)| < \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} \tag{2.27}$$

$$(x \in E, \ \nu > q_l).$$

Относительно полученного числа q_l применимы те же рассуждения, которые были применены к числу q_{l-1}, для определения удовлетворяющей условиям (2.24), (2.25), (2.26) и (2.27) функции f_l, только в этих рассуждениях нужно заменить l на $l+1$.

С другой стороны, на первом шагу уже была определена функция $f_1(x)$, удовлетворяющая условиям (2.20), (2.21) и (2.22), которые аналогичны условиям (2.24), (2.25) и (2.27).

Таким образом, можно определить последовательности чисел $\{\delta_l\}$, $\{p_l\}$ и $\{q_l\}$, функций $\{f_l\}$ и последовательность точек $\{x_l\}$

$$x_l \in E \quad (l=1, 2, \cdots), \tag{2.28}$$

для которых справедливы (2.24), (2.25) и (2.27) ($l=1, 2, \cdots$), (2.23) и (2.26) ($l=2, 3, \cdots$), причем $p_l < q_l < p_{l+1}$ ($l=1, 2, \cdots$).

Учитывая (2.23) и второе из условий (2.24), имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\| < +\infty. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{l=1}^{\infty} f_l(x)$ сходится в пространстве L_2 к некоторой функции $F(x) \in L_2$. В силу этого будем иметь

$$a_k(F)=\sum_{l=1}^{\infty} a_k(f_l) \quad (k=1, 2,\cdots). \tag{2.30}$$

Исходя из этих равенств, а также используя неравенства (2.25), (2.26) и (2.27), получим

$$|S_{p_i}(x_i, F)| > |S_{p_i}(x_i, f_i)| -$$

$$-\sum_{l=1}^{i-1} |S_{p_i}(x_i, f_l)| - \sum_{l=i+1}^{\infty} |S_{p_i}(x_i, f_l)| >$$

$$> \varepsilon - \sum_{l=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} - \sum_{l=i+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{l+i}} > \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.31}$$

$$(i=2, 3,\cdots).$$

Учитывая (2.19) и то обстоятельство, что согласно (2.24)

$$F(x)=0 \text{ при } x \bar{\in} [a, b],$$

мы видим, что неравенства (2.31) противоречат свойству локализации системы $\{\varphi_n(x)\}$. Тем самым лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$—полная ортонормированная система сходимости, обладающая свойством локализации в классе L_2. Пусть, далее, $\varepsilon<1$ и λ — произвольные положительные числа, а $\delta>0$ — число, определенное равенством*

$$\delta^2=\frac{\varepsilon\lambda^2}{64}. \tag{2.32}$$

Тогда каковы бы ни были отрезок $[a, b]\subset(0,1)$ и измеримая функция $f(x)$,

$$f(x)=0 \text{ при } x \bar{\in} [a, b] \text{ и } |f(x)|<\delta \text{ при } x\in[0, 1], \tag{2.33}$$

и каковы бы ни были натуральное число N и положительное η, существуют измеримые множества R и G и полином вида $\sum_{n=N+1}^{L} a_n\varphi_n(x)$ $(L>N)$, для которых выполняются следующие условия:

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j^2 < \frac{\lambda^2}{4}(b-a), \tag{2.34}$$

$$\left|\sum_{l=N+1}^{L} a_l\varphi_l(x)-f(x)\right|<\eta \quad (x\in R), \tag{2.35}$$

$$R\subset[a, b], \ \mu R>\mu[a, b]-\frac{\varepsilon}{4}\mu[a, b], \tag{2.36}$$

$$\left|\sum_{l=N+1}^{r} a_l\varphi_l(x)\right|<\eta \ (x\in G, \ N<r\leqslant L), \tag{2.37}$$

$$G\subset C[a,\ b],\ \mu G>\mu C\ [a,\ b]-\eta. \tag{2.38}$$

Доказательство. Пусть выполняются все условия леммы. Применяя лемму 3, когда в ее формулировке положено $\varepsilon=\frac{\eta}{4}$, определим множество E

$$E\subset C\ [a,\ b],\ \mu E>\mu C\ [a,\ b]-\frac{\eta}{4} \tag{2.39}$$

и число $\sigma>0$ такие, что для всякой функции $g\ (x)\in L_2$, удовлетворяющей условиям

$$g\ (x)=0 \text{ при } x\overline{\in}\ [a,\ b] \text{ и } \|g\|<\sigma, \tag{2.40}$$

выполнялось неравенство

$$|S_r\ (x,\ g)|<\frac{\eta}{4}\ (x\in E,\ r=1,\ 2,\cdots). \tag{2.41}$$

Разделим теперь отрезок $[a,\ b]$ на непересекающиеся равные отрезки $\Delta_1,\ \Delta_2,\cdots,\ \Delta_s$ такие что

$$\mu\Delta_i<\frac{\varepsilon\sigma^2}{16\delta^2}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \tag{2.42}$$

и рассмотрим функции

$$f_i(x)=\begin{cases} f\ (x), & x\in\Delta_i \\ 0, & x\overline{\in}\Delta_i\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,\ s). \tag{2.43}$$

Отметим, что в силу второго соотношения (2.33)

$$\|f_i\|^2=\int\limits_{\Delta_i} f^2\ (x)\ dx<\delta^2\mu\Delta_i. \tag{2.44}$$

Для удобства изложения сначала покажем следующее свойство функций $\{f_i\ (x)\}\ (i=1,\ 2,\cdots,\ s)$:

A) Для каждой функции $f_i(x)$ и для всякого натурального N_i существуют полином вида

$$\sum_{k=N_i+1}^{L_i} a_k\ \varphi_k\ (x)\ \ (L_i>N_i) \tag{2.45}$$

и множества A_i и B_i, обладающие свойствами

$$\left|\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j\varphi_j(x)-f_i(x)\right|<\frac{\eta}{2}\ \mu\Delta_i\ \ (x\in A_i), \tag{2.46}$$

$$A_i\subset[0,1],\ \mu A_i>1-\frac{\varepsilon}{4}\ \mu\Delta_i, \tag{2.47}$$

$$\left|\sum_{j=N_i+1}^{r} a_j\ \varphi_j\ (x)\right|<\frac{\eta}{2}\ (x\in B_i,\ N_i<r\leqslant L_i), \tag{2.48}$$

$$B_l \subset E, \ \mu B_l > \mu E - \frac{\eta}{2}\mu\Delta_l. \tag{2.49}$$

$$\left| \sum_{j=N_l+1}^{L_l} a_j\varphi_j(x) \right| < \frac{\eta}{2}\mu\Delta_l \quad (x \in B_l), \tag{2.50}$$

$$\sum_{j=N_l+1}^{L_l} a_j^2 < \frac{\lambda^2}{4}\mu\Delta_l. \tag{2.51}$$

Пусть множество Q_1 и число M определены так, что

$$Q_1 \subset [0,\ 1],\ \mu Q_1 > 1 - \frac{\eta}{4}\mu\Delta_l, \tag{2.52}$$

$$|\varphi_k(x)| < M \quad (x \in Q_1\ 1 \leqslant k \leqslant N_l). \tag{2.53}$$

Применим лемму 1 к набору функций $f_l(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_{N_l}(x)$ $x \in \Delta_l)$, полагая в ее формулировке

$$\Delta \equiv \Delta_l,\ N \equiv N_l,\ \varepsilon_0 \equiv \frac{\varepsilon}{8},\ \varepsilon \equiv \frac{\eta\mu\Delta_l}{4MN_l}.$$

Вследствие этого можно найти функцию $f_l^*(x)$ и множество Q_2, для которых, согласно условиям a), b) и c) (см. лемму 1), справедливы следующие соотношения:

$$f_l^*(x) = f_l(x) \quad (x \in Q_2 \cup C\Delta_l), \tag{2.54}$$

$$Q_2 \subset \Delta_l,\ \mu Q_2 > \mu\Delta_l\left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right), \tag{2.55}$$

$$\|f_l^*\|^2 \leqslant \frac{16}{\varepsilon}\|f_l\|^2, \tag{2.56}$$

$$|a_k(f_l^*)| < \frac{\eta\mu\Delta_l}{4MN_l} \quad (1 \leqslant k \leqslant N_l). \tag{2.57}$$

В силу (2.54), (2.56), (2.43), (2.44) и (2.42) получим

$$f_l^*(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} [a,\ b],\ \|f_l^*\| < \sigma. \tag{2.58}$$

Так как эти условия вполне соответствуют условиям (2.40), то в силу (2.41) будем иметь

$$|S_r(x,\ f_l^*)| < \frac{\eta}{4} \quad (x \in E,\ r = 1,\ 2, \cdots). \tag{2.59}$$

С другой стороны, согласно (2.57) и (2.53) можно написать

$$|S_{N_l}(x,\ f_l^*)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_l} |a_k(f_l^*)|\,|\varphi_k(x)| \leqslant \frac{\eta}{4}\mu\Delta_l \tag{2.60}$$

$$(x \in Q_1).$$

Определим теперь множество Q_3 и натуральное число L_l так, чтобы

$$|S_{L_i}(x, f_i^*) - f_i^*(x)| < \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i \quad (x \in Q_3), \tag{2.61}$$

$$Q_3 \subset [0,1], \ \mu Q_3 > 1 - \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i. \tag{2.62}$$

Обозначим

$$a_k = a_k(f_i^*) \quad (N_i < k \leqslant L_i), \tag{2.63}$$

$$B_i = E \cap Q_1 \cap Q_3. \tag{2.64}$$

$$A_i = Q_1 \cap Q_3 \cap [Q_3 \cup C\Delta_i]. \tag{2.65}$$

Тогда в силу (2.52), (2.55) и (2.62) и в силу того, что, не нарушающая общности, можно было считать $\eta < \frac{\varepsilon}{4}$, получим (2.47) и (2.49).

Из (2.65), (2.54), (2.63), (2.61) и (2.60) при $x \in A_i$ получим

$$\left| \sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j \varphi_j(x) - f_i(x) \right| = \left| \sum_{j=1}^{L_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{N_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) - f_i^*(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{j=1}^{L_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) - f_i^*(x) \right| + \left| \sum_{j=1}^{N_i} a_j(f_i^*)\varphi_j(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i + \frac{\eta}{4}\mu\Delta_i = \frac{\eta}{2}\mu\Delta_i.$$

Неравенство (2.46) выполнено.

Соотношение (2.48) является следствием (2.64), (2.59) и (2.60). Учитывая теперь (2.63), (2.56), (2.44) и определение числа δ, получим

$$\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j^2 < \|f_i^*\|^2 \leqslant \frac{16}{\varepsilon}\|f_i\|^2 < \frac{16}{\varepsilon}\delta^2\mu\Delta_i = \frac{\lambda^2}{4}\mu\Delta_i.$$

Наконец, условие (2.50) получается из (2.64), (2.61) и (2.60), надо только заметить, что

$$f_i^*(x) = 0 \quad (x \in B_i, \ 1 \leqslant i \leqslant s).$$

Таким образом, свойство A) функций $\{f_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ установлено.

Так как фигурирующие в формулировке свойства A) числа N_i произвольны, то полиномы (2.45) $(i=1, 2, \cdots, s)$, очевидно, можно определить таким образом, чтобы числа N_i, L_i удовлетворяли условию

$$N_1 = N, \ N_i = L_{i-1} \quad (i = 2, 3, \cdots, s). \tag{2.66}$$

Положим

$$L = L_s, \tag{2.67}$$

$$R=[a, b]\cap\bigcap_{i=1}^{s} A_i, \tag{2.68}$$

$$G=\bigcap_{i=1}^{s} B_i \tag{2.69}$$

и докажем, что множества R, G и полином

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j\varphi_j(x)\equiv\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j\varphi_j(x) \tag{2.70}$$

удовлетворяют всем требованиям леммы 4. В самом деле, сложив неравенства (2.51) по i ($i=1, 2,\cdots, s$) и учитывая (2.66) и (2.67), получим (2.34). Условия (2.36) и (2.38) получаются при помощи (2.68), (2.69), (2.47), (2.49) и (2.39).

Учитывая теперь, что в силу (2.43)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s} f_i(x), \tag{2.71}$$

из (2.70), (2.68) и (2.46) получим

$$\left|\sum_{j=N+1}^{L} a_j\varphi_j(x)-f(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{s}\left|\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j\varphi_j(x)-f_i(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{s}\frac{\eta}{2}\mu\Delta_i<\eta \quad (x\in R).$$

Таким образом, условие (2.35) доказано. Остается проверить выполнение (2.37). Пусть r — некоторое натуральное число, причем $N<r\leqslant L$. Тогда для некоторого k, $1\leqslant k\leqslant s$ будем иметь $N_k<r\leqslant L_k$. Поскольку

$$\left|\sum_{j=N+1}^{r} a_j\varphi_j(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=N_i+1}^{L_i} a_j\varphi_j(x)\right|+$$

$$+\left|\sum_{j=N_k+1}^{r} a_j\varphi_j(x)\right| \quad (x\in[0, 1]), \tag{2.72}$$

то в силу (2.69), (2.50) и (2.48) имеем

$$\left|\sum_{j=N+1}^{r} a_j\varphi_j(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{\eta}{2}\mu\Delta_i+\frac{\eta}{2}<\eta \quad (x\in G).$$

Лемма 4 доказана.

Замечание к лемме 4. При доказательстве леммы 4 неравенство $|f(x)|<\delta$, где δ определяется равенством (2.32), используется только для установления условия (2.34). Для доказательства остальных условий леммы 4 условие $|f(x)|<\delta$ можно заменить более слабым $|f(x)|<M$, где на M уже не налагаются никакие ограничения вида (2.32). Таким

образом, по схеме доказательства леммы 4 можно доказать такую лемму.

Лемма 5. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система, обладающая свойством локализации в классе L_2, а $f(x)$ — измеримая функция, равная нулю вне некоторого отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$ и удовлетворяющая неравенству $|f(x)| < M$, где $M > 0$ — некоторое число. Тогда для любого натурального N и любого положительного δ существуют полином вида $\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x)$ и множества A и B такие, что выполняются следующие условия:*

$$\left| \sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) - f(x) \right| < \delta \quad (x \in A), \tag{2.73}$$

$$A \subset [a, b], \ \mu A > b - a - \delta, \tag{2.74}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \delta \quad (x \in B, \ N < r \leqslant L), \tag{2.75}$$

$$B \subset C[a, b], \ \mu B > \mu C[a, b] - \delta. \tag{2.76}$$

Лемма 6. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система сходимости, обладающая свойством локализации в классе L_2. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon < 1$ можно определить $\delta > 0$ такое, что каковы бы ни были измеримое множество $E \subset [0, 1]$ и измеримая функция $f(x)$, где*

$$f(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} E \text{ и } |f(x)| < \delta \text{ при } x \in [0, 1], \tag{2.77}$$

и каковы бы ни были натуральное число N и положительное число η, существуют измеримые множества R и G и полином вида

$$\sum_{n=N+1}^{L} a_n \varphi_n(x) \quad (L > N), \tag{2.78}$$

для которых выполняются следующие условия:

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in R, \ N < r \leqslant L), \tag{2.79}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) - f(x) \right| \leqslant \eta \ (x \in R), \tag{2.80}$$

$$R \subset E, \ \mu R > \mu E - \varepsilon, \tag{2.81}$$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x) \right| < \eta \quad (x \in G, \ N < r \leqslant L), \tag{2.82}$$

$$G \subset CE, \ \mu G > \mu CE - \eta. \tag{2.83}$$

Доказательство. Пусть число $\lambda>0$ определено в зависимости от $\frac{\varepsilon}{4}$, согласно лемме 2. Докажем, что

$$\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}\,\lambda}{8} \tag{2.84}$$

удовлетворяет всем требованиям леммы 6.

Итак, пусть измеримая функция $f(x)$ и измеримое множество E удовлетворяют условиям

$$f(x)=0 \quad (x\in CE); \tag{2.85}$$

$$|f(x)|<\delta \quad (x\in[0,1]), \tag{2.86}$$

а N и η — числа, фигурирующие в формулировке леммы.

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\eta<\lambda<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.87}$$

Определим конечное число непересекающихся замкнутых интервалов $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2],\cdots$, $[a_s, b_s]$, лежащих внутри $[0, 1]$ так, чтобы выполнялись условия

$$\mu\left\{\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]-E\right\}<\frac{\eta}{2}, \tag{2.88}$$

$$\mu\left\{E-\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]\right\}<\frac{\eta}{2}. \tag{2.89}$$

Возьмем положительные числа $\eta_i\,(i=1, 2,\cdots, s)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s}\eta_i<\frac{\eta}{2s}. \tag{2.90}$$

Обозначим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a_i, b_i]\\ 0, & x\overline{\in}[a_i, b_i]\end{cases} \quad (i=1, 2,\cdots, s). \tag{2.91}$$

Последовательным применением леммы 4*, предварительно полагая в ее формулировке $[a, b]\equiv[a_i, b_i]$, $\eta\equiv\eta_i$ и $f(x)\equiv f_i(x)$ $(i=1, 2,\cdots, s)$, можно определить полиномы

$$\sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} a_k\varphi_k(x) \quad (i=1, 2,\cdots, s) \tag{2.92}$$

и множества R_i и G_i $(i=1, 2,\cdots, s)$ так, чтобы

$$N_0=N,\ N_0<N_1<\cdots<N_s, \tag{2.93}$$

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j^2<\frac{\lambda^2}{4}(b_i-a_i), \tag{2.94}$$

---

* Лемму 4 можно применять, так как число δ определено равенством (2.84), совпадающим с (2.32).

$$\left|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j \varphi_j(x) - f_l(x)\right| < \eta_l \quad (x \in R_l), \tag{2.95}$$

$$R_l \subset [a_l,\ b_l],\ \mu R_l > \mu[a_l,\ b_l]\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right), \tag{2.96}$$

$$\left|\sum_{j=N_{l-1}+1}^{r} a_j \varphi_j(x)\right| < \eta_l \quad (x \in G_l,\ N_{l-1} < r \leqslant N_l), \tag{2.97}$$

$$G_l \subset C[a_l,\ b_l],\ \mu G_l > \mu C[a_l,\ b_l] - \eta_l. \tag{2.98}$$

Обозначим

$$L = N_s \tag{2.99}$$

и рассмотрим полином

$$\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) \equiv \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j \varphi_j(x). \tag{2.100}$$

Учитывая условие (2.94), получим

$$\left\|\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x)\right\| = \left(\sum_{l=1}^{s} \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\lambda}{2}. \tag{2.101}$$

Так как $\frac{\varepsilon}{4}$ и λ удовлетворяют условиям леммы 2, то неравенство (2.101) позволяет применить эту лемму к функции (2.100). Следовательно существует множество F такое, что

$$F \subset [0,\ 1],\ \mu F > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.102}$$

$$\left|\sum_{j=N+1}^{r} a_j \varphi_j(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (x \in F,\ N < r \leqslant L). \tag{2.103}$$

Докажем, что множества

$$R \equiv E \cap F \cap \bigcup_{l=1}^{s}\left(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{s} G_j\right), \tag{2.104}$$

$$G \equiv \bigcap_{l=1}^{s} G_l - E \tag{2.105}$$

и полином (2.100) удовлетворяют требованиям леммы 6.

В силу условий (2.96), (2.98) и (2.90) получим

$$\mu\left(R_i \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} G_j\right) > \mu[a_i,\ b_i] - \frac{\eta}{2s} - \frac{\varepsilon}{4}\mu[a_i,\ b_i]$$

$$(i = 1,\ 2, \cdots, s).$$

Отсюда следует, что

$$\mu \bigcup_{l=1}^{s}\left(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{s} G_j\right) > \mu \bigcup_{l=1}^{s} [a_l,\ b_l] - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как множество в левой части последнего неравенства входит во множество в правой части, то

$$\mu\left\{E \cap \bigcup_{l=1}^{s}\left(R_l \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{s} G_j\right)\right\} > \mu\left\{E \cap \bigcup_{l=1}^{s} [a_l, b_l]\right\} - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда, в силу (2.89), (2.87), (2.104) и (2.102), заключаем, что

$$\mu R > \mu E - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} > \mu E - \varepsilon.$$

Этим условие (2.81) получено.

Из (2.105), (2.98), (2.90) и (2.88) получим (2.83). Условие (2.79) следует из (2.103) и (2.104). С помощью (2.97), (2.105) и (2.90) получим (2.82).

Пусть теперь $x \in R$, тогда для некоторого i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant s)$ будет: $x \in R_{i_0}$ и $x \in G_i$ $(i \neq i_0,\ 1 \leqslant i \leqslant s)$, так что в силу (2.95), (2.97), (2.90) и (2.91)

$$\left|\sum_{j=N+1}^{L} a_j \varphi_j(x) - f(x)\right| \leqslant \left|\sum_{j=N_{i_0-1}+1}^{N_{i_0}} a_j \varphi_j(x) - f_i(x)\right| +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{s} \left|\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j \varphi_j(x)\right| < \eta_{i_0} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{s} \eta_i \leqslant \eta.$$

Таким образом, лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормированная система, обладающая свойством локализации в классе L_2, а $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, равная нулю вне некоторого измеримого множества E. Тогда для любого натурального N_0 и положительного δ существуют полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида*

$$\sum_{j=N_0+1}^{L} a_j \varphi_j(x)$$

и множества A и B такие, что выполняются следующие условия:

$$A \subset E,\ \mu A > \mu E - \delta, \tag{2.106}$$

$$B \subset CE,\ \mu B > \mu CE - \delta, \tag{2.107}$$

$$\left|\sum_{j=N_0+1}^{L} a_j \varphi_j(x) - f(x)\right| < \delta \quad (x \in A), \tag{2.108}$$

$$\left|\sum_{j=N_0+1}^{r} a_j \varphi_j(x)\right| < \delta \quad (x \in B,\ N_0 < r \leqslant L). \tag{2.109}$$

Доказательство. Определим конечное число непересекающихся замкнутых интервалов $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_s, b_s]$, лежащих внутри (0,1), так, чтобы выполнялись условия:

$$\mu\left\{\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]-E\right\}<\frac{\delta}{2},\quad \mu\left\{E-\bigcup_{i=1}^{s}[a_i, b_i]\right\}<\frac{\delta}{2}. \tag{2.110}$$

Из формулировки леммы следует, что, не нарушая общности, функцию $f(x)$ можно считать ограниченной.

Возьмем положительные числа δ_i $(i=1, 2,\cdots, s)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s}\delta_i<\frac{\delta}{2s}$$

и положим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a_i, b_i] \\ 0, & x\,\overline{\in}\,[a_i, b_i] \end{cases}\quad (i=1, 2,\cdots, s).$$

Применяя лемму 5, полагая в ее формулировке $[a, b]\equiv[a_i, b_i]$, $\delta=\delta_i$, $f(x)=f_i(x)$ $(i=1, 2,\cdots, s)$, мы можем определить полиномы $\sum\limits_{-N_{i-1}+1}^{N_i} a_j\varphi_j(x)$ и множества A_i и B_i $(i=1, 2,\cdots, s)$ так, чтобы выполнялись условия вида (2.73)—(2.76) леммы 5.

Нетрудно убедится, что полином

$$\sum_{j=N_0+1}^{L} a_j\varphi_j(x)\equiv\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} a_j\varphi_j(x)$$

и множества

$$A=E\cap\bigcup_{i=1}^{s}\Big(A_i\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}B_j\Big),\quad B=\bigcap_{i=1}^{s}B_i-E$$

удовлетворяют требованиям леммы 7.

Теорема 1 легко следует из лемм 6 и 7 и ее доказательство можно провести, повторяя рассуждения, приведенные в [3] (стр. 648—659). При этом следует заменить в этих рассуждениях леммы 4 и 5 работы [3] (см. стр. 631 и 633) аналогичными им леммами 7 и 6 настоящей работы.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20.VII.1970

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ. Լրիվ օրթոնորմալ զուգամիտության սիստեմների շարքերով չափելի ֆունկցիաների ներկայացման մասին (*ամփոփում*)։

Ներկա աշխատանքում չափելի ֆունկցիաները եռանկյունաչափական շարքերով ներկայացման մասին Դ. Ե. Մենշովի թեորեմը տարածված է որոշակի լոկալիզացիայի հատկությամբ օժտված օրթոնորմալ սիստեմների մի դասի վրա։

R. S. DAVTIAN. *On representation of measurable functions by the series by complete orthonormal systems of convergence* (summary)

The theorem of D. E. Menshow on representation of measurable functions by trigonometric series is extended to a class of orthonormal systems, pocessing certain localisation properties.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов*. Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonometriques, Матем. сб., 9 (51), 1941, 667—692.
2. *Д. Е. Меньшов*. О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 32, 1950.
3. *А. А. Талалян*. Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 1963, 621—660.
4. *Л. Карлесон*. О сходимости рядов Фурье и о росте их частных сумм, Математика, сб. пер., 11: 4, 1967, 111—132.
5. *Д. Е. Меньшов*. Sur la convergence uniforme des series de Fourier, Матем. сб., II (53), 1942, 67—96.
6. *А. А. Талалян*. Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 1960, 77—141.
7. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз*. Теория ортогональных рядов, М., 1958, стр. 155.
8. *Дж. Сансоне*. Обыкновенные дифференциальные уравнения, том I, ИЛ, 1953, стр. 219.
9. *P. Billard*. Sur la convergence presque partout des series de Fourier—Walsh des fonctions de l'espasc $L^2(0, 1)$, Studia Mathematica, XXVIII, № 3, 1967, 363—388.
10. *N. J. Fine*. On the Walsh functions, Trans Amer. Math. Soc., 65, 1949, 372—414.
11. *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян*. О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Мат. сб., 66 (108): 2, 1965, 240—247.
12. *Г. Алексич*. Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., ИЛ, 1963, стр. 167

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ПЕРЕСТАВЛЕННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА

§ 1. Введение

Известно, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n (x) \tag{1.1}$$

по системе Хаара, у которого не все коэффициенты a_n $(n=1, 2,\cdots)$ равны нулю, может сходиться к нулю всюду на отрезке $[0,1]$, кроме одной точки. Пример такого ряда впервые был указан в работе [4]. В дальнейшем были найдены те естественные условия на коэффициенты a_n $(n=1, 2,\cdots)$ ряда (1.1), выполнение которых обеспечивает единственность ряда (1.1), сходящегося к данной функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$, кроме, быть может, счетного множества.

Это условие на коэффициенты ряда (1.1) приведено в совместной работе Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна (см. [1]) и формулируется следующим образом:

А) для произвольной точки $x_0 \in [0,1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{|\chi_{n_k}(x_0)|} = 0,$$

где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ суть все те номера n, для которых $\chi_n(x_0) \neq 0$.

В этой же работе была доказана

Теорема 1. Если коэффициенты ряда (1.1) удовлетворяют условию А), и некоторая подпоследовательность $\{S_{m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ его частных сумм сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$, кроме, быть может, некоторого счетного множества, то (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.

В настоящей работе рассматривается аналогичный вопрос для систем $\{\chi_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, полученных всевозможными перестановками функций системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть когда $\{\nu_k\}$ — произвольная перестановка натурального ряда $1, 2,\cdots, n,\cdots$. Оказывается, что в рассматриваемом случае ответ на вопрос: является ли ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} \chi_{\nu_k} (x) \tag{1.2}$$

рядом Фурье, существенно зависит от свойств той функции, к которой сходится подпоследовательность его частных сумм. А именно: верна следующая

Теорема 2. *Пусть коэффициенты ряда* (1.2) *удовлетворяют условию А), и некоторая подпоследовательность* $\{Q_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ *его частных сумм сходится к ограниченной функции* $f(x)$ *всюду на отрезке* [0,1], *кроме, быть может, счетного множества, тогда для всех* k $(k=1, 2, \cdots, n, \cdots)$ *справедливо соотношение*

$$a_{\nu_k} = \int_0^1 f(x)\chi_{\nu_k}(x)\,dx. \tag{1.3}$$

С другой стороны, приводится пример суммируемой функции $f(x)$, ряда (1.2) и последовательности натуральных чисел $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. коэффициенты $\{a_{\nu_k}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию А),

2. подпоследовательность $\{S_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ частных сумм ряда (1.2 всюду на отрезке [0,1] сходится к $f(x)$,

3. равенство (1.2) имеет место не для всех k $(k=1, 2, \cdots)$.

Отметим, что в некотором смысле сходный пример был приведен В. А. Скворцовым (см. [2]).

§ 2. Вспомогательные определения и утверждения

В дальнейшем вместе с соответствующей ряду (1.2) последовательностью

$$\{\chi_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.1}$$

система Хаара будет рассмотрена в своем обычном порядке

$$\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2.2}$$

Через (ν_k) обозначим номер функции $\chi_{\nu_k}(x)$ в последовательности (2.2). Знаки $\Delta_{\nu_k}^{(1)}$, $\Delta_{\nu_k}^{(2)}$, Δ_{ν_k} соответственно будут означать внутренности множеств

$$\{x: \chi_{\nu_k}(x)>0\}, \ \{x: \chi_{\nu_k}(x)<0\} \text{ и } \{x: \ x\in \Delta_{\nu_k}^{(1)}\cup\Delta_{\nu_k}^{(2)}\}. \tag{2.3}$$

$[\nu_k]=n$ будет означать, что ν_k удовлетворяет следующему соотношению:

$$2^n+1 \leqslant (\nu_k) < 2^{n+1}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2.1 *Для того чтобы* (1.2) *было рядом Фурье суммируемой функции* $f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

В) *пусть* $\chi_{\nu_j}(x)$ — *произвольная функция, а* k_0 *такое натуральное число, что если* $[\nu_k] \leqslant [\nu_j]$, *то* $k \leqslant k_0$. *Тогда имеют место нижеприведенные равенства*

$$\int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_j}} Q_{k_0}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_j}} f(x)\,dx,\quad l=1,2, \tag{2.5}$$

где $Q_{k_0}(x)$ *есть частная сумма ряда* (1.2).

Доказательство. Достаточность. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x) \tag{2.6}$$

есть ряд Фурье функции $f(x)$, а j'—произвольное натуральное число. Надо показать, что $a_{\nu_{j'}} = c_{(\nu_{j'})}$. Обозначим $G=\{j\colon [\nu_j] < [\nu_{j'}]\}$. Допустим $\{\nu_{j_i}\}_{i=1}^{2^{[\nu_{j'}]}}$ есть совокупность всех тех номеров, для которых $[\nu_{j_i}]=[\nu_{j'}]$. Из соотношения (2.5) следует, что

$$\int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} Q_{k_0}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} f(x)\,dx,\ \text{где}\ i=1,2,\cdots,2^{[\nu_{j'}]};\ l=1,2. \tag{2.7}$$

Учитывая, что система Хаара обладает следующим свойством: а) интеграл функции $\chi_{\nu_j}(x)$, где $[\nu_j] \geqslant [\nu_{j'}]$ на каждом интервале $\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}$, $i=1,2,\cdots,2^{[\nu_{j'}]}$; $l=1,2$, для которого $\nu_{j_i} \neq \nu_j$, равен нулю, получим

$$\int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} Q_{k_0}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} \sum_{j\in G} a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} f(x)\,dx, \tag{2.8}$$

$$i=1,2,\cdots,2^{[\nu_{j'}]},\ l=1,2.$$

Из того, что (2.6) является рядом Фурье функции $f(x)$, имеем

$$\int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} \sum_{n=1}^{2^{[\nu_{j'}]+1}} c_n \chi_n(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}} f(x)\,dx,\ i=1,2,\cdots,2^{[\nu_{j'}]};\ l=1,2. \tag{2.9}$$

Так как полиномы $\sum\limits_{j\in G} a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{2^{[\nu_{j'}]+1}} a_n\chi_n(x)$ на каждом из интервалов $\Delta^{(l)}_{\nu_{j_i}}$ ($i=1,2,\cdots,2^{[\nu_{j'}]}$); $l=1,2$ принимают постоянное значение и

$$\bigcup_{i=1}^{2^{[\nu_{j'}]}} (\bar{\Delta}^{(1)}_{\nu_{j_i}} \cup \bar{\Delta}^{(2)}_{\nu_{j_i}}) = [0,1],$$

то из соотношений (2.8) и (2.9) получим

$$\sum_{j\in G} a_{\nu_j} \chi_{\nu_j}(x) = \sum_{n=1}^{2^{[\nu_{j'}]+1}} c_n \chi_n(x) \quad \text{при } x \in [0, 1].$$

Отсюда, используя линейную независимость функций системы Хаара, легко убедиться, что при $j \in G$ имеет место соотношение $a_{\nu_j} = c_{(\nu_j)}$ и следовательно $a_{\nu_{j'}} = c_{(\nu_{j'})}$. Таким образом, достаточность доказана.

Необходимость легко следует из соотношений (2.9) и из свойства a).

В условиях теоремы 2 обозначим $r_i = \max\limits_{1 \le j \le m_i} [\nu_j]$, тогда за счет выбора подпоследовательности из множества $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно предполагать, что числа m_i, $i=1, 2, \cdots$ удовлетворяют следующим требованиям:

если

$$[\nu_j] \leqslant r_i, \text{ то } j < m_{i+1} \text{ и } r_i < r_{i+1}, \ i=1, 2, \cdots. \tag{2.10}$$

Предположим теорема 2 не верна, тогда, используя лемму (2.1), легко установить существование натуральных чисел i_0, q_0, удовлетворяющих соотношению

$$\int_{\Delta} Q_{m_{i_0+1}}(x)\, dx \neq \int_{\Delta} f(x)\, dx, \text{ где } 1 \leqslant q_0 \leqslant 2^{r_{i_0}+1}, \ \Delta = \left(\frac{q_0 - 1}{2^{r_{i_0}+1}}, \frac{q_0}{2^{r_{i_0}+1}}\right). \tag{2.11}$$

В условиях теоремы 2 и сделанном предположении справедливы следующие леммы.

Лемма 2.2. *Для произвольной точки $x_0 \in [0, 1]$ существуют натуральные числа $i' > i_0$, q, $1 \leqslant q \leqslant 2^{r_{i'-1}+1}$, удовлетворяющие требованиям*

1) $\sigma = \left(\frac{q-1}{2^{r_{i'-1}+1}}, \frac{q}{2^{r_{i'-1}+1}}\right) \subset \Delta$, $x_0 \overline{\in} \bar{\sigma}$,

2) $\frac{1}{\operatorname{mes} \sigma} \left| \int_{\sigma} Q_{m_{i'}}(x)\, dx \right| > \sup\limits_{0<x<1} |f(x)| + 1.$

Лемма 2.3. *Предположим, что i' и q удовлетворяют требованиям леммы (2.2), тогда можно указать интервал Δ', для которого имеют место следующие соотношения:*

3) $\Delta' = \left(\frac{p-1}{2^{r_{i'}+1}}, \frac{p}{2^{r_{i'}+1}}\right)$, *где p—натуральное число*, $1 \leqslant p \leqslant 2^{r_{i'}+1}$,

4) $x_0 \overline{\in} \bar{\Delta}'$, $\Delta' \subset \sigma \subset \Delta$,

5) $|Q_{m_{i'}}(x)| = \text{const} > 0$ *и* $|Q_{m_{i'}}(x)| \geqslant \sup\limits_{0<x<1} |f(x)| + 1$ *при* $x \in \Delta'$,

6) $\int_{\Delta'} Q_{m_{i'+1}}(x)\, dx \neq \int_{\Delta'} f(x)\, dx.$

Доказательство леммы 2.2. Пусть (1.2) получается после некоторой перестановки членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x). \tag{2.12}$$

Возможны два случая:

I. ряд (2.12) на интервале Δ сходится почти всюду;

II. ряд (2.12) расходится на подмножестве положительной меры интервала Δ.

Из результатов, сформулированных в работах [3] и [5], легко следует, что в первом случае ряд (2.12) почти всюду на интервале Δ сходится к $f(x)$. Заметим, что тот же факт немедленно получается применением метода, использованного в работе [6]. Легко убедиться, что существует „n", для которого $\chi_n(x)=0$ при $x \overline{\in} \overline{\Delta}$ и $a_n = \int\limits_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx$.

Отсюда, так как коэффициенты $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию A), то, используя лемму работы [1], для точки x_0 можно указать натуральные числа m и l, удовлетворяющие соотношениям

$$m > r_{l_0} \quad \left(\frac{l}{2^{m+1}}, \frac{l+1}{2^{m+1}}\right) \subset \Delta, \quad x_0 \overline{\in} \left[\frac{l}{2^{m+1}}, \frac{l+1}{2^{m+1}}\right], \tag{2.13}$$

$$|S_{2^{m+1}}(x)| > \sup_{0<x<1} |f(x)| + 1 \quad \text{при} \quad x \in \left(\frac{l}{2^{m+1}}, \frac{l+1}{2^{m+1}}\right), \tag{2.14}$$

где $S_{2^{m+1}}(x)$ есть частная сумма ряда (2.12).

Убедимся, что и во втором случае существуют числа m и l, удовлетворяющие условиям (2.13) и (2.14). Пусть ряд (2.12) расходится во всех точках множества $E \subset \Delta$, $\text{mes}\, E > 0$. Тогда, как известно (см. [3]), существует множество E', $E' \subset E$, $\text{mes}\, E' = \text{mes}\, E$, для каждой точки x' которого можно указать подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую соотношению $S_{2^{n_k}}(x') \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Пусть x' — произвольное двоично иррациональное число множества E', не совпадающее с x_0. Выберем k_0 настолько большим, чтобы имели место следующие условия:

$$\frac{1}{2^{n_{k_0}+1}} < \min\left(|x'-x_0|, \left|x' - \frac{q_0-1}{2^{r_{l_0}+1}}\right|, \left|x' - \frac{q_0}{2^{r_{l_0}+1}}\right|\right), \tag{2.15}$$

$$|S_{2^{n_{k_0}+1}}(x')| > \sup_{0<x<1} |f(x)| + 1. \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.16) и (2.15) следует, что существует число l, для которого справедливы нижеследующие требования:

$$x' \in \left(\frac{l}{2^{n_{k_0}+1}}, \frac{l+1}{2^{n_{k_0}+1}}\right) \subset \Delta; \quad x_0 \overline{\in} \left[\frac{l}{2^{n_{k_0}+1}}, \frac{l+1}{2^{n_{k_0}+1}}\right]$$

$$S_{2^{n_{k_0}+1}}(x') = S_{2^{n_{k_0}+1}}(x) \text{ при } x \in \left(\frac{l}{2^{n_{k_0}+1}}, \frac{l+1}{2^{n_{k_0}+1}}\right).$$

Взяв $m=n_{k_0}$, получим, что соотношения (2.13) и (2.14) удовлетворены и во-втором случае.

Отсюда легко установить справедливость леммы 2.2. Действительно, выберем число i' настолько большим, чтобы $r_{i'-1}>m$. Так как последовательность $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2.10) и интеграл той функции $\chi_{\nu_k}(x)$, для которой $[\nu_k]>m$ на множестве $\left(\frac{l}{2^{m+1}}, \frac{l+1}{2^{m+1}}\right)$ равен нулю, то, обозначая $\sigma'=\left(\frac{l}{2^{m+1}}, \frac{l+1}{2^{m+1}}\right)$, запишем

$$\left|S_{2^{n_{k_0}}+1}(x)\right|=\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma'}\left|\int\limits_{\sigma'} S_{2^{n_{k_0}}+1}(x)\,dx\right|=\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma'}\left|\int\limits_{\sigma'} Q_{m_{i'}}(x)\,dx\right|>$$

$$>\sup_{0<x<1}|f(x)|+1.$$

Отсюда легко установить существование натурального числа q, удовлетворяющего требованиям

$$\sigma=\left(\frac{q-1}{2^{r_{i'-1}+1}}, \frac{q}{2^{r_{i'-1}+1}}\right)\subset\sigma'\subset\Delta, \quad x_0\,\overline{\in}\,\overline{\sigma},$$

$$\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma}\left|\int\limits_{\sigma} Q_{m_{i'}}(x)\,dx\right|>\sup_{0<x<1}|f(x)|+1,$$

что и доказывает лемму 2.2.

Доказательство леммы 2.3. Пусть i' и q — числа, удовлетворяющие требованиям леммы 2.2. Рассмотрим совокупность интервалов

$$\left(\frac{t}{2^{r_{i'}+1}}, \frac{t+1}{2^{r_{i'}+1}}\right), \quad \text{где } t=\frac{2^{r_{i'}}}{2^{r_{i'-1}}}(q-1),\ \frac{2^{r_{i'}}}{2^{r_{i'-1}}}(q-1)+1, \cdots,$$

$$\frac{2^{r_{i'}}}{2^{r_{i'-1}}}q-1. \tag{2.17}$$

Ясно, что каждый из этих интервалов является подмножеством σ.

Легко убедиться, что существует натуральное число p, удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{2^{r_{i'}}}{2^{r_{i'-1}}}(q-1)\leqslant p-1\leqslant\frac{2^{r_{i'}}}{2^{r_{i'-1}}}q-1 \tag{2.18}$$

и

$$\frac{a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x)}{\operatorname{mes}\sigma}\int\limits_{\sigma} Q_{m_{i'}}(t)\,dt\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\left(\frac{p-1}{2^{r_{i'}+1}}, \frac{p}{2^{r_{i'}+1}}\right),$$

$$j\in\{j: r_{i'-1}<[\nu_j]\leqslant r_{i'}\}. \tag{2.19}$$

Обозначим $\Delta'=\left[\frac{p-1}{2^{r_{i'}+1}}, \frac{p}{2^{r_{i'}+1}}\right)$. Рассмотрим следующий полином:

$$\tilde{Q}_{m_{l'}}(x)=\sum_{j=1}^{m_{l'}} a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x)-\sum_{\substack{r_{l'-1}<|\nu_j|\\ j<m_{l'}}} a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x), \tag{2.20}$$

Так как интеграл каждой функции $\chi_{\nu_j}(x)$ при $|\nu_j|>r_{l'-1}$ на интервале σ равен нулю, то из (2.20) будем иметь

$$\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma}\int\limits_{\sigma}\tilde{Q}_{m_{l'}}(x)\,dx=\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma}\int\limits_{\sigma}Q_{m_{l'}}(x)\,dx. \tag{2.21}$$

Замечая, что функция $\tilde{Q}_{m_l}(x)$ постоянна на множестве σ, получим

$$\tilde{Q}_{m_{l'}}(x)=\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma}\int\limits_{\sigma}Q_{m_{l'}}(x)\,dx. \tag{2.22}$$

Отсюда и из условия 2) леммы 2.2 следует, что

$$|Q_{m_{l'}}(x)|=\frac{1}{\operatorname{mes}\sigma}\left|\int\limits_{\sigma}Q_{m_{l'}}(x)\,dx\right|>\sup_{0<x<1}|f(x)|+1 \quad \text{при } x\in\Delta'. \tag{2.23}$$

Остается убедиться в справедливости условия 6). $Q_{m_{l'+1}}(x)$ представим в следующем виде:

$$Q_{m_{l'+1}}(x)=\sum_{\substack{j=1\\ |\nu_j|<r_{l'}}}^{m_{l'+1}} a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x)+\sum_{\substack{j=m_{l'}+1\\ |\nu_j|>r_{l'}}}^{m_{l'+1}} a_{\nu_j}\chi_{\nu_j}(x).$$

Так как во второй сумме интеграл от каждого слагаемого на интервале Δ' равен нулю, то из соотношения (2.19) имеем

$$\frac{1}{\operatorname{mes}\Delta'}\left|\int\limits_{\Delta'}Q_{m_{l'+1}}(t)\,dt\right|>Q_{m_{l'}}(x)|>\sup_{0<x<1}|f(x)|+1>\frac{1}{\operatorname{mes}\Delta'}\left|\int\limits_{\Delta'}f(t)\,dt\right|$$

при $x\in\Delta'$, что доказывает лемму 2.3.

§ 3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, состоящая из всех двоично рациональных чисел и всех тех точек, в которых последовательность $\{Q_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ не сходится к функции $f(x)$. Допустим при сделанном предположении (2.11) указаны последовательности чисел $m_{i_1}, m_{i_2},\cdots, m_{i_{n-1}}$ и интервалов $\Delta\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots$ $\cdots\supset\Delta_{n-1}$, удовлетворяющие требованиям

$$\Delta_j=\left(\frac{p_{j-1}}{2^{r_{i_j}+1}},\ \frac{p_j}{2^{r_{i_j}+1}}\right),\ x_j\overline{\in}\,\overline{\Delta}_j;\ j=1,2,\cdots,\ n-1,\ i_j+1<i_{j+1},$$

$$j=1,2,\cdots,\ n-2, \tag{3.1}$$

$$|Q_{m_{i_j}}(x)| > \sup_{0<x<1} |f(x)|+1 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_j, \; j=1, 2, \cdots, n-1, \tag{3.2}$$

$$\int_{\Delta_j} Q_{m_{i_j+1}}(x)\,dx \neq \int_{\Delta_j} f(x)\,dx, \qquad j=1\; 2, \cdots, n-1. \tag{3.3}$$

Используя соотношение (3.3) и применяя леммы 2.2 и 2.3, можно указать число m_{i_n} и интервал Δ_n такие, чтобы имели место следующие условия:

$$i_n > i_{n-1}+1, \; \Delta_{n-1} \supset \Delta_n = \left(\frac{p_n-1}{2^{r_{i_n}+1}}, \frac{p_n}{2^{r_{i_n}+1}}\right), \quad x_n \in \overline{\Delta}_n, \tag{3.4}$$

$$|Q_{m_{i_n}}(x)| > \sup_{0<x<1} |f(x)|+1 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_n, \tag{3.5}$$

$$\int_{\Delta_n} Q_{m_{i_n}+1}(x)\,dx \neq \int_{\Delta_n} f(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Продолжая процесс, получим последовательности чисел $m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots$ $\cdots, m_{i_n}, \cdots$ и интервалов $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$, которые удовлетворяют соотношениям (3.4), (3.5), (3.6). Ясно, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = x_0 \in \overline{\{x_n\}}_{n=1}^{\infty}.$$

Следовательно в точке $x = x_0$ последовательность $\{Q_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ должна сходиться к $f(x_0)$. Но с другой стороны, при всех значениях n ($n = 1, 2, \cdots$) имеем

$$|Q_{m_{i_n}}(x_0)| > \sup_{0<x<1} |f(x)|+1.$$

Полученное противоречие устанавливает справедливость теоремы 2.

Для изложения примера нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Пусть даны положительные числа* ε, M, n' *и интервал* (a, b) *с двоично рациональными концами. Можно указать полиномы по системе Хаара*

$$Q'(x) = \sum_{k=p}^{q} a_k \chi_k(x); \quad Q(x) = Q'(x) + \sum_{k=p'}^{q'} a_k \chi_k(x) \tag{3.7}$$

и попарно непересекающиеся множества E, G, F, *удовлетворяющие требованиям:*

а) $n' < p' < q' < p < q$; $a_k \chi_k(x) \equiv 0$ *при* $x \notin [a, b]$, $p' \leqslant k \leqslant q'$, $p \leqslant k \leqslant q$,

в) *каждое из множеств* E, G, F *можно представить в виде суммы конечного числа попарно непересекающихся интервалов с двоично рациональными концами*

$$\overline{E} \cup \overline{G} \cup \overline{F} = [a, b], \; E \cap G = G \cap F = E \cap F = \varnothing, \tag{3.8}$$

с) $Q'(x) + M = 0$ *при* $x \in G$,

d) $Q(x)+M=0$ *при* $x\in F$, $Q(x)+M=\text{const}>0$ *при* $x\in G$,

e) $M+Q(x)>0$ *при* $x\in E$ $\int\limits_E (M+Q(x))\,dx<\varepsilon$,

f) $\dfrac{a_k}{\max|\chi_k(x)|}<\varepsilon$ *при* $p'\leqslant k\leqslant q'$, $p\leqslant k\leqslant q$.

Доказательство. Предположим

$$a=\frac{l_2}{2^{t_2}},\ 2^{t_1}<n'\leqslant 2^{t_1+1},\ b=\frac{l_3}{2^{t_3}}, \tag{3.9}$$

где l_2, l_3, t_1, t_2, t_3 — натуральные числа.

Выберем положительное целое число t_4 так, чтобы имело место условие

$$\frac{M}{\sqrt{2^{t_4}}}<\varepsilon. \tag{3.10}$$

Обозначим $t=\max(t_1+1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)$ и рассмотрим следующие интервалы:

$$\left(a,\ a+\frac{1}{2^t}\right),\ \left(a+\frac{1}{2^t},\ a+\frac{2}{2^t}\right),\ \cdots,\ \left(a+\frac{r-1}{2^t},\ b\right). \tag{3.11}$$

Выберем натуральные числа t_5, t_6 так, чтобы имели место соотношения

$$\frac{1}{2^{t_5}}M<\frac{\varepsilon}{2r},\ t_5>t, \tag{3.12}$$

$$\frac{2^{t_5}}{2^{t_6}}\cdot M\left(\frac{e_3}{2^{t_3}}-\frac{e_2}{2^{t_2}}\right)<\frac{\varepsilon}{2},\ t_6>t_5. \tag{3.13}$$

Определим множества E_i и e_i следующим образом:

$$E_i=\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\frac{1}{2^{t_5}}\right),\ e_i=\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\frac{1}{2^{t_6}}\right),$$
$$i=1,\ 2,\cdots,\ r. \tag{3.14}$$

Обозначим через $\chi_{i,k}(x)$ $(i=1,\ 2,\cdots,\ r;\ k=1,\ 2,\cdots,\ t_6-t_5)$ ту функцию $\chi_n(x)$ системы Хаара, которая удовлетворяет условию

$$2^{t_5+k-1}+1\leqslant n\leqslant 2^{t_5+k},\ \chi_n(x)\equiv 0 \text{ при } x\overline{\in}\left[a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{t_5+k-1}}\right]. \tag{3.15}$$

Положим $\varphi_{i,l}(x)=\chi_n(x)$ $(l=1,\ 2,\cdots,\ t_5-t)$ для n, которое определяется соотношением

$$2^{t+l-1}+1\leqslant n\leqslant 2^{t+l},\ \chi_n(x)\equiv 0 \text{ при } x\overline{\in}\left[a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i-1}{2^t}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{t+l-1}}\right]. \tag{3.16}$$

Рассмотрим следующие полиномы и множества:

$$Q'(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t_6-t_5}\frac{M\sqrt{2^{k-1}}}{\sqrt{2^{t_6}}}\chi_{i,k}(x);\quad Q''(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=1}^{t_5-t}\frac{M\sqrt{2^{l-1}}}{\sqrt{2^{t}}}\varphi_{i,l}(x), \tag{3.17}$$

$$Q(x)=Q'(x)+Q''(x), \tag{3.18}$$

$$E=\bigcup_{i=1}^{r}e_i,\quad G=\bigcup_{i=1}^{r}(E_i-e_i),\quad F=\bigcup_{i=1}^{r}\left\{\left(a+\frac{i-1}{2^t},\ a+\frac{i}{2^t}\right)-E_i\right\}. \tag{3.19}$$

Требования a), b), c), d) следуют из определения полиномов $Q'(x)$, $Q(x)$ и множеств E, G, F. Легко видеть, что $\chi_{i,k}(x)>0$, $\varphi_{i,l}(x)\geqslant 0$ при $x\in E$; $i=1, 2,\cdots, r$; $k=1, 2,\cdots, t_6-t_5$; $l=1,\cdots, t_5-t$, откуда следует, что $M+Q(x)>0$ при $x\in E$. Из определения множества E будем иметь

$$\int_E (M+Q(x))\,dx=\sum_{i=1}^{r}\int_{e_i}(M+Q'(x))\,dx+\sum_{i=1}^{r}\int_{e_i}Q''(x)\,dx. \tag{3.20}$$

Так как интеграл от функции $Q'(x)$ на множестве E_i равен нулю, то используя условие c) леммы, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{e_i}(M+Q'(x))\,dx=\sum_{i=1}^{r}\int_{E_i}(M+Q'(x))\,dx=\sum_{i=1}^{r}M\operatorname{mes}E_i<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.21}$$

Нетрудно убедиться, что

$$Q''(x)=\text{const при } x\in\bigcup_{i=1}^{r}E_i \text{ и } \int_{a+\frac{i-1}{2^t}}^{a+\frac{i}{2^t}}Q''(x)\,dx=0,\quad i=1, 2,\cdots, r. \tag{3.22}$$

Отсюда используя условие d) и учитывая, что $Q'(x)\equiv 0$ при $x\in F$, получим

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{E_i}Q''(x)\,dx<\sum_{i=1}^{r}\int_{a+\frac{i-1}{2^t}}^{a+\frac{i}{2^t}}M\,dx=M(b-a)=M\left(\frac{l_3}{2^{t_4}}-\frac{l_2}{2^{t_4}}\right). \tag{3.23}$$

Отсюда, в силу соотношений (3.13) и (3.22), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{e_i}Q''(x)\,dx=\sum_{i=1}^{r}\frac{\operatorname{mes}e_i}{\operatorname{mes}E_i}\int_{E_i}Q''(x)\,dx=\frac{2^{t_4}}{2^{t_6}}\sum_{i=1}^{r}\int_{E_i}Q''(x)\,dx<$$

$$<\frac{2^{t_4}}{2^{t_6}}M\left(\frac{l_3}{2^{t_3}}-\frac{l_2}{2^{t_4}}\right)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.24}$$

Сопоставляя (3.20), (3.23) и (3.24), получим

$$\int\limits_{E} (M+Q(x))\,dx<\varepsilon.$$

Из соотношения (3.10) и в силу выбора числа t, имеем

$$\frac{M\sqrt{2^{k-1}}}{\sqrt{2^{t_i}}}:\max|\chi_{t_i,k}(x)|=\frac{M\sqrt{2^{k-1}}}{\sqrt{2^{t_i}}\sqrt{2^{t_i+k-1}}}=\frac{M}{2^{t_i}}<\frac{M}{2^{t}}<\varepsilon.$$

Тем же способом легко убедиться, что коэффициенты полинома $Q''(x)$ удовлетворяют требованиям леммы.

Приступим к изложению примера. Пусть дана последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\leqslant 1,\ \varepsilon_k>0,\ k=1,2,\cdots. \tag{3.25}$$

Положим $a_1\chi_1(x)\equiv 1$ при $x\in[0,1]$.

Пусть уже определены: последовательности множеств $E_1, E_2,\cdots, E_n$; $[0,1]=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_n$; $F_1, F_2,\cdots, F_n$, функция $f(x)$ на множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E_i\cup F_i)$ и полиномы $S_{m_1}(x)$, $S_{m_2}(x),\cdots$, $S_{m_n}(x)$, $Q_n^{\bullet}(x)$ так, что выполняются условия

$$G_n=\bigcup_{i=1}^{j_n}\left(\alpha_i,\ \alpha_i+\frac{l_i}{2^{r_i}}\right);\ \left(\alpha_i,\alpha_i+\frac{l_i}{2^{r_i}}\right)\cap\left(\alpha_j,\ \alpha_j+\frac{l_j}{2^{r_j}}\right)=\varnothing \text{ при } i\neq j, \tag{3.26}$$

где α_i — двоично рациональное число,

$$S_{m_n}(x)+Q_n^{\bullet}(x)=\sum_{k=1}^{q_n}a_k\chi_k(x)=M_n^{(i)}>0 \text{ при } x\in\left(\alpha_i,\ \alpha_i+\frac{l_i}{2^{r_i}}\right), \tag{3.27}$$

$$S_{m_n}(x)=f(x) \text{ при } x\in\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\cup F_i), \tag{3.28}$$

$$S_{m_n}(x)=0 \quad\text{при}\quad x\in G_n. \tag{3.29}$$

Полагая $M=M_n^{(i)}$, $n'=q_n'$, $\varepsilon=\frac{\varepsilon_{n+1}}{j_n}$, $(a,b)=\left(\alpha_i,\ \alpha_i+\frac{l_i}{2^{r_i}}\right)$, $(i=1,2,\cdots$ $\cdots, j_n)$, можно указать попарно непересекающиеся множества $E_{n+1}^{(i)}$, $G_{n+1}^{(i)}$, $F_{n+1}^{(i)}$ и полиномы

$$Q_{n+1}^{\prime(i)}(x) \text{ и } Q_{n+1}^{(i)}(x)=Q_{n+1}^{\prime(i)}(x)+Q_{n+1}^{\bullet(i)}(x),\ i=1,2,\cdots, j_n, \tag{3.30}$$

удовлетворяющие требованиям леммы. Обозначим $Q_{n+1}^{\bullet}(x)=\sum\limits_{i=1}^{j_n}Q_{n+1}^{\prime(i)}(x)$ и рассмотрим полином

$$S_{m_{n+1}}(x)=S_{m_n}(x)+Q_n^{\bullet}(x)+Q_{n+1}^{\prime(i)}(x),\ i=1,2,\cdots, j_n. \tag{3.31}$$

Так как $Q^{*(l)}_{n+1}(x)\equiv 0$ при $x\overline{\in}\left[a_l, \frac{l_l}{2^{r_l}}+a_l\right]$, то из соотношений (3.28), используя условия в) и с) леммы 3.1, получим

$$S_{m_{n+1}}(x)=f(x) \quad \text{при} \quad x\in\bigcup_{l=1}^{n}(E_l\cup F_l) \tag{3.32}$$

и

$$S_{m_{n+1}}(x)=0 \text{ при } x\in\bigcup_{l=1}^{l_n} G^{(l)}_{n+1}. \tag{3.33}$$

Обозначим $E_{n+1}=\bigcup_{l=1}^{l_n} E^{(l)}_{n+1}$, $F_{n+1}=\bigcup_{l=1}^{l_n} F^{(l)}_{n+1}$ и определим функцию $f(x)$ на множестве $E_{n+1}\cup F_{n+1}$ следующим образом:

$$f(x)=S_{m_{n+1}}(x)+\sum_{l=1}^{l_n} Q^{*(l)}_{n+1}(x). \tag{3.34}$$

Принимая во внимание тот факт, что $S_{m_{n+1}}(x)+Q^{*(l)}_{m_{n+1}}(x)=0$ при $x\in F^{(l)}_{n+1}$, $Q^{*(l)}_{n+1}(x)=0$ при $x\in\left[a_l, a_l+\frac{l_l}{2^{r_l}}\right]$ и используя условие е), получим

$$f(x)=0 \quad \text{при} \quad x\in F_{n+1}, \tag{3.35}$$

$$\int\limits_{E_{n+1}} f(x)\,dx=\sum_{l=1}^{l_n}\int\limits_{E^{(l)}_{n+1}} f(x)\,dx<\sum_{l=1}^{l_n}\frac{\varepsilon_{n+1}}{j_n}=\varepsilon_{n+1} \tag{3.36}$$

и что на каждом составляющем интервале множества G_{n+1} имеет место соотношение

$$S_{m_{n+1}}(x)+\sum_{l=1}^{l_n} Q^{*(l)}_{n+1}(x)=\text{const}>0. \tag{3.37}$$

Согласно требованию f) легко видеть, что коэффициенты полинома $Q^{*}_{n+1}(x)+\sum_{l=1}^{l_n} Q^{*(l)}_{n+1}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{|a_k|}{\max|\chi_k(x)|}<\frac{\varepsilon_{n+1}}{j_n}. \tag{3.38}$$

Продолжая указанный процесс, определим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}[Q_{m_n}(x)+Q^{*}_{m_n}(x)], \tag{3.39}$$

последовательности множеств

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty};\ G_0=[0,1]\supset G_1\supset\cdots\supset G_n\supset\cdots;\ \{F_n\}_{n=1}^{\infty}$$

и на множестве $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cup F_n)$ функцию $f(x)$.

Из соотношения (3.33) следует, что

$$S_{m_l}(x) = \sum_{n=1}^{l-1} [Q'_{m_n}(x) + Q^{\cdot}_{m_n}(x)] + Q'_{m_l}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Нетрудно убедиться, что на концах составляющих интервалов множества $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F_n)$ последовательность $\{S_{m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ имеет конечный предел, полагая в указанных точках

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} S_{m_l}(x)$$

и принимая

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n. \tag{3.40}$$

Легко убедиться, что справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} S_{m_n}(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in [0, 1].$$

Из (3.35), (3.36), (3.34), (3.40) имеем

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\, dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1,$$

следовательно

$$a_1 = \int_0^1 f(x)\, \chi_1(x)\, dx < 1,$$

откуда следует, что (3.39) не является рядом Фурье функции $f(x)$. Используя соотношение (3.38), легко убедиться, что коэффициенты ряда (3.39) удовлетворяют условию А), что и требовалось установить.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 17.X.1970

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Հաարի սիստեմով տեղափոխված շարքերի միակության մասին (ամփոփում)։

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե Հաարի

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} \chi_{\nu_k}(x) \tag{1}$$

տեղափոխված շարքը ինչ որ մասնական գումարների ենթահաջորդականությամբ զուգամիտում է $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիային ամենուրեք բացի գուցե հաշվելի բազմությունից, ապա (1)-ը $f(x)$-ի Ֆուրյեի շարքն է։ Ցույց է տրվում, որ ոչ սահմանափակ ֆունկցիաների դասում նշված արդյունքը ճիշտ չէ։

G. M. MOUSHEGIAN. *On the uniqueness of series by the transposed Haar systems* (summary)

It is proveo that of for the transposed series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} \chi_{\nu_k}(x) \tag{1}$$

by Haar system, some subsequence of partial sum converges to a bounded function $f(x)$ every where, with exeption of a countable set, then (1) is a Fourie series for $f(x)$. It is shown, for the class of unbounded functions the result is not true.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян* и *А. А. Талалян*. О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
2. *В. А. Скворцов*. О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частных сумм, Матем. заметки, 4, № 6, 1968, 707—714.
3. *Ф. Г. Арутюнян*. О рядах по системе Хаара, Доклады АН Арм.ССР, XII, 1966, 134—140.
4. *G. Faber*. Über die orthogonalfanktionen des Haar, Jahresericht Deutschen Math., 19, 1910, 104—112.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

В. С. АБРАМОВИЧ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕ И ТАМАРКИНА

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t)\, dt, \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

в котором $\alpha > 0$ и λ — произвольный комплексный параметр.

Через $E_\rho(z; \mu)$ будем обозначать функцию типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\rho > 0), \tag{2}$$

являющуюся, как известно, целой функцией порядка ρ при произвольном значении параметра μ [2].

Хилле и Тамаркиным [1] было установлено, что если $f(x)$ суммируема на $(0, 1)$, то интегральное уравнение (1) при любом значении параметра λ имеет в классе $L(0, 1)$ единственное решение, представимое в виде*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(\lambda (x-t)^\alpha; \alpha) f(t)\, dt, \quad x \in (0,1). \tag{3}$$

Обозначим

$$G_\alpha(x, t) = (x-t)^{\alpha-1}, \quad 0 < t < x < 1, \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

Нам удобно будет записать решение (3) с помощью той же функции типа Миттаг-Леффлера в следующей символической форме:

$$u(x) \doteq f(x) + \int_0^x \left\{ \bar{E}_{\frac{1}{\alpha}}(z; \alpha) \right\}_{z=\lambda e^\alpha} (x, t) f(t)\, dt, \quad x \in (0, 1), \tag{5}$$

полагая

$$\bar{E}_{\frac{1}{\alpha}}(z; \alpha) = z E_{\frac{1}{\alpha}}(z; \alpha); \quad G_{\alpha k}(x, t) \doteq e^{\alpha k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6}$$

В дальнейшем используем оператор, действующий из пространства $L(0, 1) \times L(0, 1)$ в $L(0, 1)$.

Пусть $g(x)$, $h(x) \in L(0, 1)$. Обозначим

---

* Другие доказательства этой формулы приводятся в [2] и [3].

$$g(x) * h(x) \equiv (g * h)(x) = \int_x^1 g\left(\frac{x}{u}\right) h(u) \frac{du}{u}, \quad x \in (0, 1), \tag{7}$$

Пользуясь теоремой Фубини, легко показать коммутативность и ассоциативность введенной операции.

В настоящей статье рассматриваются интегральные уравнения вида

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\prod\limits_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)} \int_0^x G_{\alpha; p_1, \ldots, p_n}(x, t)\, u(t)\, dt, \quad x \in (0, 1) \tag{8}$$

с положительными параметрами α; $p_1, \cdots, p_n$ и произвольным комплексным параметром λ, в которых функция $G_{\alpha; p_1, \ldots, p_n}(x, t)$ имеет вид*

$$G_{\alpha; p_1, \ldots, p_n}(x, t) = x^{\alpha - 1} \left\{ \prod_{k=1}^{n} (1 - \tau^{p_k})^{\frac{\alpha}{p_k} - 1} \right\}_{\tau = \frac{t}{x}} \quad (0 < t < x < 1). \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (1) является частным случаем уравнения (8) при $n = 1$ и дополнительно $p_1 = 1$. Как показывает доказываемая ниже теорема, решение уравнения (8) представляется формулой вида (5) с помощью обобщенной функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(z; \mu_1, \cdots, \mu_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\prod\limits_{k=1}^{n} \Gamma(\mu_k + s\rho_k^{-1})} \quad (\rho_k > 0), \tag{10}$$

являющейся целой функцией порядка $\left(\frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_n}\right)^{-1}$. Положим по аналогии с (6).

$$\bar{E}_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(z; \mu_1, \cdots, \mu_n) = zE_{\rho_1, \ldots, \rho_n}(z; \mu_1, \cdots, \mu_n); \quad G_{\alpha k; p_1, \ldots, p_n}(x, t) \doteq e^{\alpha k},$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *суммируема с квадратом на* (0 1), *то уравнение* (8) *имеет единственное решение, которое при условии* (11) *представимо в виде*

$$u(x) \doteq f(x) + p_1 \cdots p_n \int_0^x \left\{ \bar{E}_{\frac{p_1}{\alpha}, \ldots, \frac{p_n}{\alpha}}\left(z; \frac{\alpha}{p_1}, \cdots, \frac{\alpha}{p_n}\right) \right\}_{z = \frac{\lambda e^{\alpha}}{p_1 \cdots p_n}(x, t)} (x, t) \times$$
$$\times f(t)\, dt, \quad x \in (0, 1), \tag{12}$$

---

* Символом $\prod\limits_{k=1}^{n}$ обозначена $n - 1$ раз примененная операция $*$ (7).

причем

$$u(x) \in L_2(0, 1), \text{ если } \alpha \in \left(\frac{\rho_n}{2}, +\infty\right),$$

$$v(x) \in L_1(0, 1), \text{ если } \alpha \in \left[0, \frac{\rho_n}{2}\right], \tag{13}$$

где

$$\rho_n = \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)^{-1}. \tag{14}$$

В частности, при $n = p_1 = 1$ мы получаем формулу (5) (теорему Хилле — Тамаркина).

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Положим*

$$\varphi_{\alpha;\, p_1, \ldots, p_n}\left(\frac{t}{x}\right) = x^{1-\alpha} \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)} G_{\alpha;\, p_1, \ldots, p_n}(x, t) = \tag{15}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{p_k}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)} (1-\tau^{p_k})^{\frac{\alpha}{p_k}-1}\right]_{\tau = \frac{t}{x}} \quad (0<t<x<1;\ 0<\alpha;\ p_k<+\infty). \tag{16}$$

Функции $\varphi_{\alpha;\, p_1, \ldots, p_n}(\tau)$ $0<\alpha<+\infty)$ *при значениях параметра* α: α_1, α_2 *и* $\alpha_1+\alpha_1$ *связаны тождеством*

$$(\varphi_{\alpha_1;\, p_1, \ldots, p_n} * \tau^{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2;\, p_1, \ldots, p_n})(\tau) = \varphi_{\alpha_1+\alpha_2;\, p_1, \ldots, p_n}(\tau) \quad (0<\tau<1). \tag{17}$$

Доказательство. В самом деле, при $n=1$, $p_1 = p$ тождество (17) проверяется непосредственно. Имеем

$$(\varphi_{\alpha_1;\, p} * \tau^{\alpha} \varphi_{\alpha_2;\, p})(\tau) = \frac{p^2}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)} \int_x^1 u^{\alpha_1-1} \left(1-\frac{\tau^p}{u^p}\right)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} (1-u^p)^{\frac{\alpha_2}{p}-1} du =$$

$$= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)} \int_x^1 p u^{p-1} (u^p - \tau^p)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} (1-u^p)^{\frac{\alpha_2}{p}-1} du$$

и, переходя к переменной интегрирования

$$v = \frac{u^p - \tau^p}{1-\tau^p},$$

получим, что

$$(\varphi_{\alpha_1;\, p} * \tau^{\alpha} \varphi_{\alpha_2;\, p})(\tau) = \frac{p}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)} (1-\tau^p)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{p}-1} \times$$

$$\times\int_0^1 v^{\frac{\alpha_2}{p}-1}(1-v)^{\frac{\alpha_2}{p}-1}\,dv=\frac{p}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{p}\right)}(1-\tau^p)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{p}-1}\equiv\varphi_{\alpha_1+\alpha_2;\,p}(\tau).$$

Предполагая далее, что тождество (17) имеет место для некоторого $n>1$, и замечая, что

$$\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_{n+1}}(\tau)=(\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_n}*\varphi_{\alpha;\,p_{n+1}})(\tau)\quad(0<\alpha<+\infty),\tag{18}$$

а также

$$\tau^\beta\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_{n+1}}(\tau)=(\tau^\beta\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_n}*\tau^\beta\varphi_{\alpha;\,p_{n+1}})(\tau)\ (0<\alpha,\ \beta<+\infty),\tag{18'}$$

в силу предположения индукции имеем

$$\varphi_{\alpha_1+\alpha_2;\,p_1,\dots,p_{n+1}}(\tau)=(\varphi_{\alpha_1+\alpha_2;\,p_1,\dots,p_n}*\varphi_{\alpha_1+\alpha_2;\,p_{n+1}})(\tau)=$$

$$=\varphi_{\alpha_1;\,p_1,\dots,p_n}*\tau^{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2;\,p_1,\dots,p_n})*(\varphi_{\alpha_1;\,p_{n+1}}*\tau^{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2;\,p_{n+1}})(\tau)=$$

$$=(\varphi_{\alpha_1;\,p_1,\dots,p_n}*\varphi_{\alpha_1;\,p_{n+1}})*(\tau^{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2;\,p_1,\dots,p_n}*\tau^{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2;\,p_{n+1}})(\tau)=$$

$$=(\varphi_{\alpha_1;\,p_1,\dots,p_{n+1}}*\tau^{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2;\,p_1,\dots,p_{n+1}})(\tau).$$

Таким образом, тождество (17) справедливо и для $n+1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для функции* $\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_n}(\tau)$ (16) *имеет место асимптотическая формула*

$$\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_n}(\tau)=O\left((1-\tau)^{\frac{\alpha}{\rho_n}-1}\right),\ x\to1-0,\tag{19}$$

в которой

$$\rho_n=\left(\frac{1}{p_1}+\dots+\frac{1}{p_n}\right)^{-1}.\tag{20}$$

Доказательство. Имеем рекуррентное соотношение

$$\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_n}(\tau)=\frac{p_n}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)}\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_{n-1}}(\tau)*(1-\tau^{p_n})^{\frac{\alpha}{p_n}-1}=$$

$$=\frac{p_n}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)}\int_\tau^1\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_{n-1}}\left(\frac{\tau}{u}\right)(1-u^{p_n})^{\frac{\alpha}{p_n}-1}\frac{du}{u}.\tag{21}$$

Предполагая, что

$$\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_{n-1}}(\tau)=O((1-\tau)^\gamma),\ \gamma>1\ (\tau\to1-0),\tag{22}$$

с помощью соотношения (21) находим

$$\varphi_{\alpha;\,p_1,\dots,p_n}(\tau)=O\left(\int_\tau^1(u-\tau)^\gamma(1-u)^{\frac{\alpha}{p_n}-1}du\right),\ (\tau\to1-0)$$

или, после подстановки $v=\dfrac{1-u}{1-\tau}$

$$\varphi_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(\tau)=O\left(\int_0^1(1-\tau)^{\gamma+\frac{\alpha}{p_n}}(1-v)^{\gamma}\cdot v^{\frac{\alpha}{p_n}-1}\,dv=O\left((1-\tau)^{\gamma+\frac{\alpha}{p_n}}\right)\right.$$

$$(\tau\to1-0). \tag{23}$$

Учитывая теперь, что

$$\varphi_{\alpha;\,p_1}(\tau)=O\left((1-\tau)^{\frac{\alpha}{p_1}-1}\right),$$

после последовательного применения соотношений (21)—(23) ($n>2$), получим формулу (19) леммы.

Лемма 3. *Интегральный оператор*

$$G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}f(x)=\int_0^x G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x,\,t)\,f(t)\,dt \tag{24}$$

1°. *при условии* $\alpha\in\left(\frac{p_n}{2},\ +\infty\right)$ *действует в классе* $L_2(0,1)$;

2°. *если* $\alpha\in\left(0,\ \frac{p_n}{2}\right]$, *то он действует из класса* $L_2(0,1)$ *в класс* $L_1(0,1)$*.

Доказательство. Вначале заметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на $(0,1)$ и имеет логарифмическую особенность вида $O(\ln^{\gamma}x)$, $\gamma>0$ в точке $x=0$, то, как нетрудно видеть, такими же свойствами обладает функция $f(x)*(1-x^p)^{\frac{\alpha}{p}-1}$ $(0<\alpha,\ p<+\infty)$, имея в точке $x=0$ особенность вида $O(\ln^{\gamma+1}x)$.

Отсюда следует, что функция $\varphi_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(\tau)$ (16) имеет в точке $\tau=0$ особенность логарифмического характера, в промежутке (0, 1) она непрерывна, наконец, в точке $\tau=1$ ее поведение определяется формулой (19) леммы 2.

В частности, при $\alpha>\frac{p_n}{2}$ функция

$$G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x,\,t)=x^{\alpha-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)}{p_k}\,\varphi_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}\left(\frac{t}{x}\right)\quad(0<t<x<1) \tag{15'}$$

суммируема с квадратом в области $0<t<x<1$:

$$\iint\limits_{0<t<x<1}G^2_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x,\,t)\,dxdt=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)}{p_k}\right)^2\int_0^1 x^{2\alpha-2}dx\int_0^x\varphi^2_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}\times$$

---

* В случае $n=1$ даже из $L_1(0,1)$ в $L_1(0,1)$.

$$\times\left(\frac{t}{x}\right)dt=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)}{p_k}\right)^2\int_0^1 x^{2\alpha-1}dx\int_0^1\varphi^2_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(u)\,du<+\infty \qquad (25)$$

и, следовательно, для любой функции $f(x)\in L_2(0,1)$

$$\int_0^1|G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}f(x)|^2dx=\int_0^1\left\{\int_0^x G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x,t)f(t)\,dt\right\}^2dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1|f(u)|^2du\iint\limits_{0<t<x<1}G^2_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x,t)\,dxdt<+\infty,$$

т. е. $G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}f(x)\in L_2(0,1)$.

Пусть теперь $0<\alpha\leqslant\frac{p_n}{2}$ и $f(x)\in L_2(0,1)$. В этом случае

$$\int_0^1|G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}f(x)\,dx\leqslant\int_0^1 x^{\alpha-1}dx\int_0^x\varphi_{\alpha,\,p_1,\ldots,\,p_n}\left(\frac{t}{x}\right)|f(t)|\,dt=$$

$$=\int_0^1|f(t)|\,dt\int_t^1 x^{\alpha}\varphi_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dx}{x}=\int_0^1 t^{\alpha}|f(t)|\,dt\int_t^1\varphi_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x)\frac{dx}{x^{\alpha+1}}. \qquad (26)$$

Легко видеть, что функция $t^{\alpha+\delta}\int_t^1\varphi_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x)\frac{dx}{x^{\alpha+1}}$ ограничена на $[0,1]$ при любом $\delta>0$. Однако $\delta>0$ можно выбрать так, чтобы $\frac{f(t)}{t^{\delta}}\in L_1(0,1)$. Таким образом, из (26) вытекает, что $G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}f(x)\in$ $\in L_1(0,1)$.

Лемма доказана полностью.

Доказательство теоремы получим теперь непосредственным применением теории интегральных уравнений Вольтерра [4].

В самом деле, если $\alpha>\frac{p_n}{2}$, то поскольку имеет место условие (25), для резольвенты уравнения (8) имеем сходящийся при любом значении параметра λ ряд

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s K_{s+1}(x,t)\quad(0<t<x<1), \qquad (27)$$

члены которого определяются посредством рекуррентных соотношений

$$K_1(x,t)=\left[\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\alpha}{p_k}\right)\right]^{-1}G_{\alpha;\,p_1,\ldots,\,p_n}(x,t)=$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{p_1\cdots p_n}\varphi_{\alpha;\,p_1,\cdots,p_n}\left(\frac{t}{x}\right),\quad 0<t<x<1, \tag{28}$$

$$K_{s+1}(x,\,t)=\int_t^x K_s(x,\,v)\,K_1(v,\,t)\,dv=$$

$$=x\int_{t/x}^1 K_s(x,\,ux)\,K_1(ux,\,t)\,du,\quad 0<t<x<1;\ s=1,\,2,\cdots. \tag{29}$$

Покажем, что из (28), (29) следует, что

$$K_s(x,\,t)=\left[\prod_{k=1}^n p_k^{s-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha s}{p_k}\right)\right]^{-1} G_{\alpha s;\,p_1,\cdots,p_n}(x,\,t)=$$

$$=\frac{x^{\alpha s-1}}{(p_1\cdots p_n)^s}\varphi_{\alpha s;\,p_1,\cdots,p_n}\left(\frac{t}{x}\right),\ 0<t<x<1;\quad s=1,2,\cdots. \tag{30}$$

Действительно, при $s=1$ формула (30) совпадает с (28). Предполагая далее, что формула (30) имеет место для некоторого $s\geqslant1$, с помощью тождества (17) леммы 1 и соотношения (29) находим

$$K_{s+1}(x,\,t)=x\int_{t/x}^1\frac{x^{\alpha s-1}}{(p_1\cdots p_n)^s}\varphi_{\alpha s;\,p_1,\cdots,p_n}(u)\cdot\frac{x^{\alpha-1}u^{\alpha-1}}{p_1\cdots p_n}\varphi_{\alpha;\,p_1,\cdots,p_n}\left(\frac{t/x}{u}\right)\times$$

$$\times du=\frac{x^{\alpha(s+1)-1}}{(p_1\cdots p_n)^{s+1}}\left\{\varphi_{\alpha;\,p_1,\cdots,p_n}(\tau)*\left(\tau^{\alpha}\varphi_{\alpha s;\,p_1,\cdots,p_n}(\tau)\right)\right\}_{\tau=\frac{t}{x}}=$$

$$=\frac{x^{\alpha(s+1)-1}}{(p_1\cdots p_n)^{s+1}}\varphi_{\alpha(s+1);\,p_1,\cdots,p_n}\left(\frac{t}{x}\right),\quad 0<t<x<1.$$

Таким образом, формула (30) доказана для любого $s\geqslant1$ и, следовательно, решение уравнения (8) представимо равномерно сходящимся рядом Неймана

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{p_1\cdots p_n}\right)^s\frac{G_{\alpha(s+1);\,p_1,\cdots,p_n}(x,\,t)}{\prod\limits_{k=1}^n\Gamma\left(\frac{\alpha(s+1)}{p_k}\right)}f(t)\,dt,\quad x\in(0,1). \tag{31}$$

Из (31), (10) и (11), очевидно, следует формула (12) теоремы.

Отметим, что для всех достаточно больших s:

$$s>\frac{1}{2}\max(1,\,\rho_n) \tag{32}$$

с помощью неравенства Буняковского легко получим, что

$$\left|\int_0^x G_{\alpha s;\,p_1,\cdots,p_n}(x,\,t)\,f(t)\,dt\right|^2\leqslant C_{\alpha;\,p_1,\cdots,p_n}<+\infty,\quad x\in(0,1),$$

где $C_{\alpha; p_1, \ldots, p_n}$ — постоянная, зависящая лишь от параметров.

Следовательно, на характер функции $u(x)$ (31) оказывает влияние лишь конечное число первых членов ряда Неймана, которые согласно лемме 3 принадлежат либо классу $L_2(0, 1)$ $\left(\text{при } \alpha s > \frac{p_n}{2}\right)$, либо классу $L_1(0, 1)$ $\left(\text{при } 0 < \alpha s \leqslant \frac{p_n}{2}\right)$. Отсюда следуют утверждения теоремы (13).

Ростовский-на-Дону
государственный университет

Поступило 17.IX.1970

Վ. Ս. ԱԲՐԱՄՈՎԻՉ. Խիլլեի և Տամարկինի թեորեմի ընդհանրացումը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացվել է Խիլլեի և Տամարկինի հայտնի թեորեմի [1] ընդհանրացումը Վոլտերայի տիպի ինտեգրալ հավասարումների մի դասի համար։

V. S. ABRAMOVICH. *A generalisation of the Hille-Tamarkin theorem* (summary)

In the present paper a generalization of Hille-Tamarkin theorem for a class of Volterre type integral equations is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Hille, J. Tamarkin.* On the theory of linear integral equations I, Annals of Math. (2nd ser), 31, № 3, 1930, 479—528.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", 1966.
3. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, Физматгиз, т. 4, М.—Л., 1958.
4. *Ф. Трикоми.* Интегральные уравнения, ИЛ, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

И. В. КОВАЛИШИНА

АДДИТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РЕАКТИВНОЙ МАТРИЦЫ—ФУНКЦИИ

Обсуждаемые здесь вопросы тесным образом связаны с одним из основных фактов, установленных в статье [1] В. П. Потапова (теорема 4). Там рассматривается рациональная матрица-функция $w(\lambda)$, разложение которой на элементарные дроби имеет следующий вид:

$$w(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{m} \frac{2\sigma_k a_k}{\lambda - \lambda_k} \quad (\sigma_k = \operatorname{Re} \lambda_k).$$

Для того чтобы матрица-функция $w(\lambda)$ была J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси, то есть

$$(1)\quad w^*(\lambda)\, Jw(\lambda) - J \geqslant 0 \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

$$(2)\quad w^*(i\tau)\, Jw(i\tau) - J = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_k удовлетворяли неравенству

$$\text{(A)}\qquad \left\| \frac{2\sigma_k\, 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k + \lambda_j} \overset{*}{a_k} Ja_j \right\| \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, m)$$

и равенствам

$$\text{(B)}\qquad 2\sigma_j Ja_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{2\sigma_k\, 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k + \lambda_j} \overset{*}{a_k} Ja_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

Здесь J — произвольная эрмитова матрица такая, что $J^2 = I$.

Для краткости рациональную матрицу-функцию $w(\lambda)$, удовлетворяющую условиям (1), (2), назовем *элементарным множителем*.

Тем самым установлены необходимые и достаточные условия элементарности множителя для того случая, когда все полюсы $w(\lambda)$ являются *простыми*.

Естественно возникает вопрос об описании структуры элементарного множителя в общем случае без каких-либо ограничений, накладываемых на кратность полюсов.

Первым этапом решения этой задачи, по-видимому, должно быть исследование элементарного множителя, обладающего *одним* полюсом произвольной кратности

$$w_0(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} = \prod_{j=1}^{n} \left(I + \frac{2\sigma_0 P_j}{\lambda - \lambda_0} \right),\ P_j^2 = P_j,\ 2\sigma_0 P_j J \geqslant 0.$$

Сопоставляя его с элементарным множителем

$$w(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left(I + \frac{2\sigma_j P_j}{\lambda - \lambda_j} \right) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sigma_k a_k}{\lambda - \lambda_k}$$

с различными полюсами и теми же проекторами, мы видим, что $w(\lambda) \to w_0(\lambda)$ при $\lambda_j \to \lambda_0$. Так как связь между коэффициентами мультипликативных и аддитивных представлений $w(\lambda)$ и $w_0(\lambda)$ очевидна

$$a_k = \left(I + \frac{2\sigma_1 P_1}{\lambda_k - \lambda_1} \right) \left(I + \frac{2\sigma_2 P_2}{\lambda_k - \lambda_2} \right) \cdots \left(1 + \frac{2\sigma_{k-1} P_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \right) P_k \left(I + \frac{2\sigma_{k+1} P_{k+1}}{\lambda_k - \lambda_{k+1}} \right) \cdots$$

$$\cdots \left(I + \frac{2\sigma_n P_n}{\lambda_k - \lambda_n} \right) = \Bigg\{ I + \sum_{\alpha=1}^{k-1} \frac{2\sigma_\alpha P_\alpha}{\lambda_k - \lambda_\alpha} + \cdots +$$

$$+ \frac{2\sigma_1 \cdots 2\sigma_{k-1} P_1 \cdots P_{k-1}}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})} \Bigg\} P_k \Bigg\{ I + \sum_{\beta=k+1}^{n} \frac{2\sigma_\beta P_\beta}{\lambda_k - \lambda_\beta} + \cdots +$$

$$+ \frac{2\sigma_{k+1} \cdots 2\sigma_n \cdot P_{k+1} \cdots P_n}{(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_n)} \Bigg\}$$

и

$$A_{n-k} = \sum_{\substack{\alpha_1 = 1, 2, \cdots, n-(k-1), \\ \alpha_2 = \alpha_1 + 1, \alpha_1 + 2, \cdots, n-(k-2), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k = \alpha_{k-1} + 1, \alpha_{k-1} + 2, \cdots, n}} P_{\alpha_1} \cdot P_{\alpha_2} \cdots P_{\alpha_k},$$

то можно рассчитывать на получение необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять коэффициенты A_γ, путем предельного перехода в условиях (A) и (B) для $w(\lambda)$.

Заметим однако, что, несмотря на простоту ситуации, решение задачи связано с довольно сложными выкладками.

После этого уже нетрудно установить аналог условий (A) и (B) для общего случая произвольного элементарного множителя с любым набором кратных полюсов.

Наконец, соответствующие условия могут быть записаны и для произвольного реактивного элементарного множителя, то есть множителя, удовлетворяющего дополнительно условиям вещественности и симплектичности.

Полученные здесь сведения могут оказаться полезными для решения проблемы, поставленной еще В. Кауэром [2] о построении реактивной цепи по заданной передаточной функции с минимальным количеством сосредоточенных элементов и об описании всех таких цепей.

§ 1. Вспомогательные предложения

1°. Нам понадобятся несколько очевидных следствий из интерполяционной формулы Лагранжа

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda_j)} \cdot \frac{F(\lambda_j)}{\lambda-\lambda_j}.$$

Здесь $F(\lambda)$—заданная функция, λ_j—узлы интерполяции, $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\times$ $\times(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, а $P(\lambda)$—полином степени не выше „$n-1$", значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $F(\lambda)$.

1) При $F(\lambda)\equiv 1$ получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda_j)} \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_j} = 1. \tag{1}$$

2) Если $F(\lambda)$ — полином степени меньшей „$n-1$", то

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)} = 0. \tag{2}$$

3) Если $F(\lambda)$—полином степени „$n-1$":

$$F(\lambda) = a_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1},$$

то

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)} = \frac{a_0}{1}. \tag{3}$$

4) Вообще, если $F(\lambda)$—произвольная функция, то

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)} = D_{n-1}[F(\lambda)], \tag{4}$$

где $D_{n-1}[F(\lambda)]$) — разностное отношение „$n-1$" порядка:

$$D_1[F(\lambda)] = \frac{F(\lambda_2)-F(\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad D_2[F(\lambda)] = \frac{\dfrac{F(\lambda_3)-F(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2} - \dfrac{F(\lambda_3)-F(\lambda_1)}{\lambda_3-\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1}, \ldots.$$

Из последней формулы в частности вытекает, что

$$\lim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m \to \lambda_0} \sum_{j=1}^{m} \frac{F(\lambda_j)}{\varphi'(\lambda_j)} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} F(\lambda_0).$$

2°. Основную роль в дальнейшем будет играть обобщение последней формулы на случай функции двух переменных.

Пусть функция двух переменных $F(\mu, \lambda)$ аналитична в некоторой точке $M_0(\mu_0, \lambda_0)$ и точки

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p; \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$$

выбраны в окрестностях точек μ_0, λ_0 соответственно. Положим

$$\varphi_p(\mu) = (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)\cdots(\mu-\mu_p); \ \varphi_q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots$$
$$\cdots(\lambda-\lambda_q),$$

и покажем, что при

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p \to \mu_0,$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q \to \lambda_0$$

функционал

$$L(F) = \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \frac{F(\mu_s, \lambda_t)}{\varphi_p'(\mu_s)\,\varphi_q'(\lambda_t)} \to \frac{1}{(p-1)!\,q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}} F(\mu_0, \lambda_0).$$

Для вычисления функционала $L(F)$ разложим функцию $F(\mu, \lambda)$ в окрестности точки $M_0(\mu_0, \lambda_0)$ в степенной ряд

$$F(\mu,\lambda) = F(\mu_0,\lambda_0) + \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu-\mu_0) + \frac{\partial}{\partial\lambda} F(\mu_0, \lambda_0)(\lambda-\lambda_0)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu-\mu_0)^2 + 2\,\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\lambda} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu-\mu_0)(\lambda-\lambda_0) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} F(\mu_0, \lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2\right\} + \cdots + \frac{1}{k!}\left\{\frac{\partial^k}{\partial\mu^k} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu-\mu_0)^k +\right.$$
$$\left. + C_k^1 \frac{\partial^k}{\partial\mu^{k-1}\,\partial\lambda} F(\mu_0, \lambda_0)(\mu-\mu_0)^{k-1}(\lambda-\lambda_0) + \cdots + C_k^k \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} F(\mu_0, \lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^k\right\} + \cdots.$$

Функционал L на любом члене ряда имеет вид

$$L_{M,N} = \frac{1}{(M+N)!}\,C_{M+N}^N\,\frac{\partial^{M+N}}{\partial\mu^M\,\partial\lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q} \frac{(\mu_s-\mu_0)^M(\lambda_t-\lambda_0)^N}{\varphi_p'(\mu_s)\,\varphi_q'(\lambda_t)} =$$
$$= \frac{1}{(M+N)!}\,C_{M+N}^N\,\frac{\partial^{M+N}}{\partial\mu^M\,\partial\lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) \sum_{s=1}^{p} \frac{(\mu_s-\mu_0)^M}{\varphi_p'(\mu_s)} \cdot \sum_{t=1}^{q} \frac{(\lambda_t-\lambda_0)^N}{\varphi_q'(\lambda_t)}.$$

Возможными являются следующие три случая:

1) $M<p$ или $N<q$; тогда в силу (3) $L_{M,N}=0$;

2) $M=p-1$, $N=q-1$; в силу (4)

$$L_{M,N} = L_{p-1,\,q-1} = \frac{1}{(M+N)!}\,C_{M+N}^N\,\frac{\partial^{M+N}}{\partial\mu^M\,\partial\lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}} F(\mu_0, \lambda_0);$$

3) $M > p$, $N > q$.

В этом случае можно дать оценку для $L_{M,N}$ через $h = \max_s \{|\mu_s - \mu_0|\}$, $k = \max_t \{|\lambda_t - \lambda_0|\}$, а именно

$$\left|\frac{\partial^{M+N}}{\partial\mu^M\,\partial\lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0)\,\frac{C_{M+N}^N}{(M+N)!} \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q} \frac{(\mu_s-\mu_0)^M(\lambda_t-\lambda_0)^N}{\varphi_p'(\mu_s)\,\varphi_q'(\lambda_t)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{M!\,N!}\left|\frac{\partial^{M+N}}{\partial\mu^M\,\partial\lambda^N} F(\mu_0, \lambda_0)\right| C_M^{p-1}\, h^{M-p+1}\, C_N^{q-1}\, k^{N-q+1}$$

Применяя функционал L к $F(\mu, \lambda)$, получим

$$L(F)=\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{F(\mu_s,\lambda_t)}{\varphi'_p(\mu_s)\,\varphi'_q(\lambda_t)}=\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)+$$

$$+\frac{1}{(p+q-1)!}\left\{\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p+q-1}}F(\mu_0;\lambda_0)\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{(\mu_s-\mu_0)^{p+q-1}}{\varphi'_p(\mu_s)\,\varphi'_q(\lambda_t)}+\dots+\right.$$

$$+C^{q-1}_{p+q-1}\,\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{(\mu_s-\mu_0)^p}{\varphi'_p(\mu_s)}\cdot\frac{(\lambda_t-\lambda_0)^{q-1}}{\varphi'_q(\lambda_t)}+C^{q}_{p+q-1}\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}F(\mu_0,\lambda_0)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\frac{(\mu_s-\mu_0)^{p-1}}{\varphi'_p(\mu_s)}\cdot\frac{(\lambda_t-\lambda_0)^{q}}{\varphi'_q(\lambda_t)}+\dots+\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\lambda^{p+q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q}\times$$

$$\times\frac{(\lambda_t-\lambda_0)^{p+q-1}}{\varphi'_p(\mu_s)\,\varphi'_q(\lambda_t)}+\dots=\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\,\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)+R.$$

Оценим остаток ряда

$$|R|\leqslant\frac{1}{(p+q-1)!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|C^{q-1}_{p+q-1}\;C^{p-1}_{p}\,h+\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}\right|C^{q}_{p+q-1}\;C^{q-1}_{q}k\right\}+$$

$$+\frac{1}{(p+q)!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p+1}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|C^{q-1}_{p+q}\;C^{p-1}_{p+1}h^2+\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q}}\right|C^{q}_{p+q}\;C^{p-1}_{p}\,hC^{q-1}_{q}\,k+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q+1}}\right|C^{q+1}_{p+q}\;C^{p-1}_{p-1}\;C^{q-1}_{q+1}\,k^2\right\}+\dots=\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|h+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}\right|k\right\}+\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\cdot\frac{1}{2!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p+1}\,\partial\lambda^{q-1}}\right|h^2+2\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q}}\right|kh+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q+1}}\right|k^2\right\}+\dots.$$

Сопоставим мажорирующий ряд с разложением в ряд производной

$$\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu,\lambda)-\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)=\frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)\,(\mu-\mu_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q}}F(\mu_0,\lambda_0)\,(\lambda-\lambda_0)\right\}+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^{p+q}}{\partial\mu^{p+1}\,\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0)(\mu-\mu_0)^2+\right.$$

$$\left.+2\,\frac{\partial^{p+q}}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q}}F(\mu_0,\lambda_0)(\mu-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)+\frac{\partial^{p+q}}{\partial\mu^{p-1}\,\partial\lambda^{q+1}}F(\mu_0,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^2\right\}+\dots$$

и, так как производный ряд будет абсолютно сходящимся в окрестности точки $M_0(\mu_0,\lambda_0)$, то ряд

$$\frac{1}{1!}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p}\,\partial\lambda^{q-1}}\right||\mu-\mu_0|+\left|\frac{\partial^{p+q-1}F}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q}}\right||\lambda-\lambda_0|\right\}+\dots$$

становится как угодно малым при $\mu \to \mu_0$, $\lambda \to \lambda_0$. Для остатка ряда $|R|$ это означает, что $|R| < \varepsilon$ при $|\mu_s - \mu_0| < \delta$, $|\lambda_t - \lambda_0| < \delta$ $(s = 1, 2, \cdots, p;$ $t = 1, 2, \cdots, q)$.

Таким образом, показано, что

$$\lim_{\substack{\mu_s \to \mu_0 \\ \lambda_t \to \lambda_0}} \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \frac{F(\mu_s, \lambda_t)}{\varphi_p'(\mu_s)\,\varphi_q'(\lambda_t)} = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \frac{\partial^{p+q-2}}{\partial \mu^{p-1} \partial \lambda^{q-1}} F(\mu_0, \lambda_0). \quad (5)$$

3°. К вспомогательному материалу относится и следующее матричное соотношение:

пусть даны n точек $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Рассмотрим функции

$$\varphi_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

$$\varphi_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \frac{\varphi_n(\lambda)}{\lambda - \lambda_1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) = \frac{\varphi_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_{n-2}},$$

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda - \lambda_n = \frac{\varphi_2(\lambda)}{\lambda - \lambda_{n-1}}.$$

Их производные в точках $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ будут

$$\varphi_n'(\lambda_j) = (\lambda_j - \lambda_1) \cdots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_n),$$

$$\varphi_{n-1}'(\lambda_j) = (\lambda_j - \lambda_2) \cdots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_n)$$

и т. д.

Рассмотрим матрицу

$$T = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{\varphi_n'(\lambda_1)} & \dfrac{1}{\varphi_n'(\lambda_2)} & \cdots & \dfrac{1}{\varphi_n'(\lambda_n)} \\ 0 & \dfrac{1}{\varphi_{n-1}'(\lambda_2)} & \cdots & \dfrac{1}{\varphi_{n-1}'(\lambda_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\varphi_1'(\lambda_n)} \end{matrix} \right\| \quad (6)$$

и покажем, что обратной матрицей будет

$$T_1 = \left\| \begin{matrix} \varphi_{n-1}(\lambda_1) & \varphi_{n-2}(\lambda_1) \cdots \varphi_1(\lambda_1) & 1 \\ 0 & \varphi_{n-2}(\lambda_2) \cdots \varphi_1(\lambda_2) & 1 \\ 0 & 0 \quad \cdots \varphi_1(\lambda_3) & 1 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdot \cdots \cdot 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

В самом деле, пусть $T \cdot T_1 = (b_{kj})$.

Тогда при $j = k$ $b_{kk} = \varphi_{n-k}(\lambda_k) \cdot \dfrac{1}{\varphi_{n-k+1}'(\lambda_k)} = 1;$

при $j<k$, очевидно, $b_{kj}=0$;
и, наконец, при $j\geqslant k+1$ в силу [2]

$$b_{kj}=\sum_{s=k}^{n}\varphi_{n-j}(\lambda_s)\cdot\frac{1}{\varphi'_{n-k+1}(\lambda_s)}=0,$$

так как подсчет степеней дает

$$(n-k+1)-(n-j)=j+1-k\geqslant 2.$$

§ 2. Необходимые и достаточные условия элементарности

Теорема. *Для того чтобы матрица-функция* $w_0(\lambda)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda-\lambda_0)^k}$ *была элементарным множителем необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты* A_γ *удовлетворяли неравенству*

$$\text{(A)}\qquad \left\|(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{j}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JA_{j-\beta}\right\|\geqslant 0$$

$$\begin{pmatrix}k=1,2,\cdots,n\\ j=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

и равенствам

$$\text{(B)}\qquad JA_{p-1}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}A^*_{n-\alpha}JA_{p-\beta}\quad(p=1,2,\cdots,n).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $w_0(\lambda)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda-\lambda_0)^k}=\prod_{j=1}^{n}\left(I+\frac{2\sigma_0 P_j}{\lambda-\lambda_0}\right)$ является элементарным множителем, то есть удовлетворяет условиям

$$w_0^*(\lambda)\,Jw_0(\lambda)-J\geqslant 0\quad(\operatorname{Re}\lambda>0),$$

$$w_0^*(i\tau)\,Jw_0(i\tau)-J=0.$$

Из теоремы 4 [1] вытекает следующее выражение для J-формы элементарного множителя

$$w(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\left(I+\frac{2\sigma_j P_j}{\lambda-\lambda_j}\right)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sigma_k a_k}{\lambda-\lambda_k},$$

$$w^*(\lambda)\,Jw(\lambda)-J=(\lambda+\bar\lambda)\left[\frac{I}{\bar\lambda-\bar\lambda_n},\cdots,\frac{I}{\bar\lambda-\bar\lambda_j}\right]\left(\frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar\lambda_k+\lambda_n}\,a_k^*Ja_j\right)\begin{bmatrix}\frac{I}{\lambda-\lambda_1}\\ \cdots\\ \frac{I}{\lambda-\lambda_n}\end{bmatrix}.$$

Сейчас целесообразно переписать ее так

$$w^*(\lambda)\, Jw(\lambda) - J = (\lambda + \bar{\lambda}) \left[\frac{I}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_1}, \cdots, \frac{I}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_n} \right] T^* \cdot T^{*-1} \times$$

$$\times \left(\frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k + \lambda_j}\, \overset{*}{a}_k\, J a_j \right) T^{-1} \cdot T \begin{vmatrix} \dfrac{I}{\lambda - \lambda_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{I}{\lambda - \lambda_n} \end{vmatrix},$$

где матрица T имеет вид (6).

Дело в том, что при $\lambda_j \to \lambda_0$

$$T \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{I}{\lambda - \lambda_1} \\ \dfrac{I}{\lambda - \lambda_2} \\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{I}{\lambda - \lambda_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\varphi_n'(\lambda_j)} \cdot \dfrac{I}{\lambda - \lambda_j} \\ \sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{1}{\varphi_{n-1}'(\lambda_j)} \cdot \dfrac{I}{\lambda - \lambda_j} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{1}{\varphi_1'(\lambda_n)} \cdot \dfrac{I}{\lambda - \lambda_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{I}{\varphi_n(\lambda)} \\ \dfrac{I}{\varphi_{n-1}(\lambda)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{I}{\varphi_1(\lambda)} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \dfrac{I}{(\lambda - \lambda_0)^n} \\ \dfrac{I}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{I}{\lambda - \lambda_0} \end{vmatrix}$$

и мы получим нужное обрамление матрицы J-формы для $w_0(\lambda)$. Задача сводится тогда к отысканию предела матрицы

$$T^{*-1} \left(\frac{2\sigma_k 2\sigma_j}{\bar{\lambda}_k + \lambda_j}\, \overset{*}{a}_k\, J a_j \right) T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{*}{\varphi}_{n-1}(\lambda_1)\, I & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \overset{*}{\varphi}_{n-2}(\lambda_1)\, I & \overset{*}{\varphi}_{n-2}(\lambda_2)\, I & 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{*}{\varphi}_1(\lambda_1)\, I & \overset{*}{\varphi}_1(\lambda_2)\, I & \overset{*}{\varphi}_1(\lambda_3) I \cdots & 0 \\ I & I & I \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2\sigma_1 2\sigma_1}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_1}\, \overset{*}{a}_1\, J a_1 \cdots & \dfrac{2\sigma_1 2\sigma_n}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_n}\, \overset{*}{a}_1\, J a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{2\sigma_n 2\sigma_1}{\bar{\lambda}_n + \lambda_1}\, \overset{*}{a}_n\, J a_1 \cdots & \dfrac{2\sigma_n 2\sigma_n}{\bar{\lambda}_n + \lambda_n}\, \overset{*}{a}_n\, J a_n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \varphi_{n-1}(\lambda_1)\, I \cdots & \varphi_1(\lambda_1)\, I & I \\ 0 \cdots & \varphi_1(\lambda_2)\, I & I \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \cdots & 0 & I \end{pmatrix} = (b_{kj}).$$

Рассмотрим произвольный элемент этой матрицы

$$b_{kj} = [\overset{*}{\varphi}_{n-k}(\lambda_1)\, I, \cdots, \overset{*}{\varphi}_{n-k}(\lambda_k)\, I, 0, \cdots, 0] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_1}\, \overset{*}{a}_1\, J a_1 \cdots & \dfrac{4\sigma_1\sigma_n}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_n}\, \overset{*}{a}_1\, J a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{4\sigma_n\sigma_1}{\bar{\lambda}_n + \lambda_1}\, \overset{*}{a}_1\, J a_1 \cdots & \dfrac{4\sigma_1\sigma_n}{\bar{\lambda}_n + \lambda_n}\, \overset{*}{a}_n\, J a_n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{n-j}(\lambda_1)\, I \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{n-j}(\lambda_j)\, I \\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{j} \sum_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha 2\sigma_\beta\, \overset{*}{a}_\alpha\, J a_\beta\, \overset{*}{\varphi}_{n-k}(\lambda_\alpha)\, \frac{1}{\bar{\lambda}_\alpha + \lambda_\beta}\, \varphi_{n-j}(\lambda_\beta).$$

Если в этой сумме заменить a_{α} и a_{β} их выражениями

$$a_{\gamma}=\left(I+\frac{2\sigma_1 P_1}{\lambda_{\gamma}-\lambda_1}\right)\cdots\left(I+\frac{2\sigma_{\gamma-1}P_{\gamma-1}}{\lambda_{\gamma}-\lambda_{\gamma-1}}\right)P_{\gamma}\left(I+\frac{2\sigma_{\gamma+1}P_{\gamma+1}}{\lambda_{\gamma}-\lambda_{\gamma+1}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(I+\frac{2\sigma_n P_n}{\lambda_{\gamma}-\lambda_n}\right)=\left(I+\sum_{l=1}^{\gamma-1}\frac{2\sigma_l P_l}{\lambda_{\gamma}-\lambda_l}+\cdots+\frac{2\sigma_1\cdots 2\sigma_{\gamma-1}\cdot P_1\cdots P_{\gamma-1}}{(\lambda_{\gamma}-\lambda_1)\cdots(\lambda_{\gamma}-\lambda_{\gamma-1})}\right)\times$$

$$\times P_{\gamma}\left(I+\sum_{l=\gamma+1}^{n}\frac{2\sigma_l P_l}{\lambda_{\gamma}-\lambda_l}+\cdots+\frac{2\sigma_{\gamma+1}\cdots 2\sigma_n\cdot P_{\gamma+1}\cdots P_n}{(\lambda_{\gamma}-\lambda_{\gamma+1})\cdots(\lambda_{\gamma}-\lambda_n)}\right),$$

то b_{kj} представится в виде суммы произведений проекторов

$$(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J(P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q})$$

со скалярными коэффициентами.

Выберем какое-либо из таких произведений и выделим из этой суммы сумму слагаемых указанного вида. Так как произведение $P_{\alpha_1}\cdot P_{\alpha_2}\cdots P_{\alpha_p}$ войдет в состав a_{α} тогда и только тогда, когда среди его множителей присутствует P_{α}, то при суммировании следует учитывать лишь значения α, равные $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, где $\alpha_s \leqslant k$, $\alpha_{s+1}>k$.

То же относится и к суммированию по индексу β.

Таким образом, выделенная сумма имеет вид

$$2\sigma_{\alpha_1}\cdots 2\sigma_{\alpha_p}P^*_{\alpha_p}\cdots P^*_{\alpha_1}JP_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q}\cdot 2\sigma_{\beta_1}\cdots 2\sigma_{\beta_q}\sum_{\rho=1}^{s}\sum_{\tau=1}^{t}\frac{\bar{\varphi}_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi'_p(\lambda_{\alpha_\rho})}\times$$

$$\times\frac{1}{\bar{\lambda}_{\alpha_\rho}+\lambda_{\beta_\tau}}\cdot\frac{\varphi_{n-j}(\lambda_{\beta_\tau})}{\psi'_q(\lambda_{\beta_\tau})}, \qquad (*)$$

где $\psi_p(\lambda)=(\lambda-\lambda_{\alpha_1})\cdots(\lambda-\lambda_{\alpha_p})$; $\psi_q(\lambda)=(\lambda-\lambda_{\beta_1})\cdots(\lambda-\lambda_{\beta_q})$.

Однако в ней суммирование можно продолжить до p и q, так как в точках λ_{α_ρ} таких, что $\alpha_\rho>k$, $\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})=0$, и вычисление предела выражения (*) сведется к отысканию

$$\lim_{\lambda_{\alpha_\rho},\lambda_{\beta_\tau}\to\lambda_0}\sum_{\rho=1}^{p}\sum_{\tau=1}^{q}\frac{\bar{\varphi}_{n-k}(\bar{\lambda}_{\alpha_\rho})}{\bar{\psi}'_p(\bar{\lambda}_{\alpha_\rho})}\cdot\frac{1}{\bar{\lambda}_{\alpha_\rho}+\lambda_{\beta_\tau}}\cdot\frac{\varphi_{n-j}(\lambda_{\beta_\tau})}{\psi'_q(\lambda_{\beta_\tau})}.$$

Воспользуемся формулой (4, § 1)

$$\lim_{\substack{\mu_s\to\mu_0\\ \lambda_t\to\lambda_0}}\sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}\frac{F(\mu_s,\lambda_t)}{\psi'_p(\mu_s)\,\psi'_q(\lambda_t)}=\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial\mu^{p-1}\partial\lambda^{q-1}}F(\mu_0,\lambda_0),$$

рассматривая в качестве

$$F(\mu,\lambda)=\bar{\varphi}_{n-k}(\mu)\cdot\frac{1}{\mu+\lambda}\cdot\varphi_{n-j}(\lambda).$$

Несложные вычисления частной производной приводят к равенству

$$\lim_{\substack{\lambda_{\alpha_\rho}\to\lambda_0\\ \lambda_{\beta_\tau}\to\lambda_0}} \sum_{\rho=1}^{p}\sum_{\tau=1}^{q} \frac{\overline{\varphi}_{n-k}(\overline{\lambda}_{\alpha_\rho})}{\overline{\psi}'_p(\overline{\lambda}_{\alpha_\rho})}\cdot\frac{1}{\overline{\lambda}_{\alpha_\rho}+\lambda_{\beta_\tau}}\cdot\frac{\varphi_{n-j}(\lambda_{\beta_\tau})}{\psi'_q(\lambda_{\beta_\tau})} = \frac{(-1)^{p+q+k+j-2n-2}}{(2\sigma_0)^{p+q+k+j-2n-1}}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}.$$

Таким образом. скалярный коэффициент при произведении проекторов

$$(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J (P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q})$$

после перехода к пределу имеет вид

$$(2\sigma_0)^{p+q}\cdot\frac{(-1)^{p+q+k+j-2n-2}}{(2\sigma_0)^{p+q+k+j-2n-1}}\cdot\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!},$$

то есть зависит лишь от p и q, но не зависит от частных значений индексов.

Это позволяет сгруппировать всевозможные произведения проекторов

$$(P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J (P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q})$$

с одинаковыми c и q, то есть выделить в предельном значении сумму

$$(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\cdot(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\,\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\alpha_1=1,2,\cdots,n-(p-1),\\ \alpha_2=\alpha_1+1,\cdots,n-(p-2),\\ \cdots\cdots\\ \alpha_p=\alpha_{p-1}+1,\cdots,n}} (P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_p})^* J \sum_{\substack{\beta_1=1,2,\cdots,n-(q-1)\\ \beta_2=\beta_1+1,\cdots,n-(q-2)\\ \cdots\cdots\\ \beta_q=\beta_{q-1}+1,\cdots,n}} (P_{\beta_1}\cdots P_{\beta_q}) = (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\cdot(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}\,A^*_{n-p}\,JA_{n-q}.$$

Здесь уже A_{n-p}, A_{n-q} — коэффициенты аддитивного разложения $w_0(\lambda)$.

Легко видеть, что $\lim\limits_{\lambda_\alpha\to\lambda_0} b_{kj}$ представляет собой сумму таких выражений

$$b^0_{kj} = \lim b_{kj} = \sum_{p=n-k+1}^{n}\ \sum_{q=n-j+1}^{n} (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\cdot(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(p+k-n-1)!\,(q+j-n-1)!}\,A^*_{n-p}\,JA_{n-q}.$$

Вводя новые индексы суммирования

$$p+k-n=\alpha,$$

$$q+j-n=\beta,$$

где $\alpha=1,2,\cdots,k$; $\beta=1,2,\cdots,j$, окончательно получим

$$b^0_{kj} = (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{j}(-1)^{\alpha+\beta-2}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\,A^*_{k-\alpha}\,JA_{j-\beta}$$

и, следовательно, после предельного перехода неравенство (A) для $w(\lambda)$ преобразуется в неравенство

$$(A)\quad \left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} \overset{*}{A}_{k-\alpha} J A_{j-\beta} \right\| > 0$$

$(k=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n)$ для $w_0(\lambda)$.

Преобразуем далее условия (B) для $w(\lambda)$

$$2\sigma_k J a_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{2\sigma_k 2\sigma_\alpha}{\overline{\lambda}_\alpha + \lambda_k} \overset{*}{a}_\alpha J a_k \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

в соответствующие условия для $w_0(\lambda)$.

Перепишем систему (7) в матричном виде

$$[2\sigma_1 J a_1, 2\sigma_2 J a_2, \cdots, 2\sigma_n J a_n] = [I, I, \cdots, I] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{4\sigma_1\sigma_1}{\overline{\lambda}_1+\lambda_1} \overset{*}{a}_1 J a_1 \cdots & \frac{4\sigma_1\sigma_n}{\overline{\lambda}_1+\lambda_n} \overset{*}{a}_1 J a_n \\ \cdots & \cdots \\ \frac{4\sigma_n\sigma_1}{\overline{\lambda}_n+\lambda_1} \overset{*}{a}_n J a_1 \cdots & \frac{4\sigma_1\sigma_n}{\overline{\lambda}_n+\lambda_n} \overset{*}{a}_n J a_n \end{pmatrix}$$

или

$$[2\sigma_1 J a_1, \cdots, 2\sigma_n J a_n]\, T^{-1} = [I, \cdots, I]\, T^{*} \cdot T^{*-1} \left(\frac{4\sigma_k\sigma_j}{\overline{\lambda}_k+\lambda_j} \overset{*}{a}_k J a_j \right) T^{-1}.$$

Предел матрицы

$$T^{*-1} \left(\frac{4\sigma_k\sigma_j}{\overline{\lambda}_k+\lambda_j} \overset{*}{a}_k J a_j \right) T^{-1}$$

при условии $\lambda_k, \lambda_j \to \lambda_0$ известен и, так как

$$[I, I, \cdots, I]\, T^{*} = [I, I, \cdots, I] \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_n(\lambda_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_n(\lambda_2)} & \frac{1}{\overset{**}{\varphi}_{n-1}(\lambda_2)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_n(\lambda_n)} & \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_{n-1}(\lambda_n)} & \cdots & \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_1(\lambda_n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_n(\lambda_j)}, \sum_{j=2}^{n} \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_{n-1}(\lambda_j)}, \cdots, \sum_{j=n-1}^{n} \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_2(\lambda_j)}, \frac{I}{\overset{**}{\varphi}_2(\lambda_n)} \right] = [0, 0, \cdots, 0, I],$$

то остается найти

$$\lim_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} [2\sigma_1 J a_1, \cdots, 2\sigma_n J a_n]\, T^{-1} =$$

$$= \lim_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} [2\sigma_1 J a_1, \cdots, 2\sigma_n J a_n] \begin{pmatrix} \varphi_{n-1}(\lambda_1) I & \varphi_{n-2}(\lambda_1) I \cdots & \varphi_1(\lambda_1) I & I \\ 0 & \varphi_{n-2}(\lambda_2) I \cdots & \varphi_1(\lambda_2) I & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots \varphi_1(\lambda_{n-1}) I & I \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} [2\sigma_1 Ja_1 \varphi_{n-1}(\lambda_1), \sum_{\alpha=1}^{2} 2\sigma_\alpha Ja_\alpha \varphi_{n-2}(\lambda_\alpha), \cdots, \sum_{\alpha=1}^{n-1} 2\sigma_\alpha J a_\alpha \varphi_1(\lambda_\alpha),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 2\sigma_\alpha Ja_\alpha].$$

Рассмотрим $\lim\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \to \lambda_0} \sum\limits_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha Ja_\alpha \varphi_{n-k}(\lambda_\alpha)$. Если в сумме заменить a_α его выражением

$$a_\alpha = \left\{ I + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{2\sigma_\beta P_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} + \cdots + \frac{2\sigma_1 \cdots 2\sigma_{\alpha-1} \cdot P_1 \cdots P_{\alpha-1}}{(\lambda_\alpha - \lambda_1) \cdots (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1})} \right\} P_\alpha \left\{ I + \sum_{\beta=\alpha+1}^{n} \frac{2\sigma_\beta P_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{2\sigma_{\alpha+1} \cdots 2\sigma_n \cdot P_{\alpha+1} \cdots P_n}{(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) \cdots (\lambda_\alpha - \lambda_n)} \right\},$$

то она представится в виде суммы произведений проекторов $JP_{\alpha_1} \cdots \cdots P_{\alpha_p}$ со скалярными коэффициентами.

Выберем какое-либо из таких произведений и выделим из рассматриваемой суммы сумму слагаемых указанного вида.

Так как произведение $P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_p}$ войдет в состав a_α тогда и только тогда, когда среди его множителей присутствует P_α, то при суммировании следует учитывать лишь значения α, равные $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, где $\alpha_s \leqslant k$, $\alpha_{s+1} > k$.

Выбранная сумма имеет вид

$$2\sigma_{\alpha_1} \cdots 2\sigma_{\alpha_p} JP_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_p} \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})},$$

где $\psi_p(\lambda) = (\lambda - \lambda_{\alpha_1}) \cdots (\lambda - \lambda_{\alpha_p})$.

Заметим, что $\sum\limits_{\rho=1}^{s} \frac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})} = \sum\limits_{\rho=1}^{p} \frac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})}$, так как $\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho}) = 0$, если $\alpha_\rho > k$ и

$$\sum_{\rho=1}^{p} \frac{\varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})}{\psi_p'(\lambda_{\alpha_\rho})} = \begin{cases} 0, & \text{если } n-k < p-1, \\ 1, & \text{если } n-k = p-1, \\ \xrightarrow[\lambda_{\alpha_\rho} \to \lambda_0]{} \dfrac{1}{(p-1)!} \dfrac{d^{p-1} \varphi_{n-k}(\lambda_0)}{d\lambda^{p-1}} = 0, & \text{если } n-k \geqslant p, \end{cases}$$

в силу формул (2), (3), (4) § 1.

Таким образом, в сумме $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha Ja_\alpha \varphi_{n-k}(\lambda_{\alpha_\rho})$ после перехода к пределу остается лишь сумма произведений проекторов, содержащих точно $p = n-k+1$ множителей $P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_{n-k+1}}$ с одинаковыми коэффициентами $(2\sigma_0)^{n-k+1}$, и, следовательно

$$\lim_{\lambda_\alpha \to \lambda_0} \sum_{\alpha=1}^{k} 2\sigma_\alpha J a_\alpha \varphi_{n-k}(\lambda_\alpha) = (2\sigma_0)^{n-k+1} J \sum_{\substack{\alpha_1=1,2,\cdots,k,\\ \alpha_2=\alpha_1+1,\cdots,k+1,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{n-k+1}=\alpha_{n-k}+1,\cdots,n}} (P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_{n-k+1}}) =$$

$$=(2\sigma_0)^{n-k+1} JA_{n-(n-k+1)} = (2\sigma_0)^{n-k+1} JA_{k-1}.$$

Итак, условия (B) для $w_0(\lambda)$ запишутся так:

$$[(2\sigma_0)^n JA_0, \cdots, 2\sigma_0 JA_{n-1}] = [0, \cdots, 0, I] \left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+l)} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{l} (-1)^{\alpha+\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{k-\alpha} JA_{l-\beta} \right\| = \left\| (2\sigma_0)^{n+1-l} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{l} (-1)^{\alpha+\beta} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} JA_{l-\beta} \right\|$$

или

$$(2\sigma_0)^{n-p+1} JA_{p-1} = (2\sigma_0)^{n+1-p} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} \times$$

$$\times A^*_{n-\alpha} JA_{p-\beta} \quad (p=1, 2, \cdots, n).$$

то есть

$$JA_{p-1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} JA_{p-\beta} \quad (p=1, 2, \cdots, n).$$

Необходимость доказана. Достаточность.

Пусть выполнены условия

$$(A) \quad \left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+l)} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{l} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{k-\alpha} JA_{l-\beta} \right\| >$$

$$> 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n; \ l=1, 2, \cdots, n)$$

и

$$(B) \quad JA_{p-1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} (-1)^{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} A^*_{n-\alpha} JA_{p-\beta} \quad (p=1, 2, \cdots, n).$$

Составим J-форму для $w_0(\lambda) = I + \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{(2\sigma_0)^p A_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}$

$$w_0^*(\lambda) Jw_0(\lambda) - J = \left(I + \sum_{q=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^q A^*_{n-q}}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q}\right) J \left(I + \sum_{p=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^p A_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}\right) - J =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^q A^*_{n-q} J}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (2\sigma_0)^{p+q} \frac{A^*_{n-q} JA_{n-p}}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q (\lambda-\lambda_0)^p} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}.$$

Заменим в средней сумме дробь $\dfrac{1}{(\bar\lambda-\bar\lambda_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}$ суммой дробей

$$\frac{1}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}=\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(\lambda+\overline{\lambda})(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{\alpha+\beta+1}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(-1)^{q+\beta}C_{q+\beta-1}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+\sum_{\alpha=0}^{q-1}\frac{(-1)^{p+\alpha}C_{p+\alpha-1}^{\alpha}}{(2\sigma_0)^{p+\alpha}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}}.$$

Последнее равенство получается из очевидного тождества

$$\frac{1}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}=\frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2\sigma_0(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^p}-\frac{1}{2\sigma_0(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-1}(\lambda-\lambda_0)^p}-$$

$$-\frac{1}{2\sigma_0(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q(\lambda-\lambda_0)^{p-1}}.$$

Тогда

$$w_0^*(\lambda)Jw_0(\lambda)-J=\sum_{q=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^q A_{n-q}^*J}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\alpha=0}^{q-1}\frac{(-1)^{p+\alpha}C_{p+\alpha-1}^{\alpha}}{(2\sigma_0)^{p+\alpha}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}}+\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(\lambda+\overline{\lambda})(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{\alpha+\beta+1}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(-1)^{q+\beta}C_{q+\beta-1}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}\right\}+\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^pJA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}=$$

$$=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}(\lambda+\overline{\lambda})\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{\alpha+\beta+1}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}+$$

$$+\left\{\sum_{q=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^qA_{n-q}^*J}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^q}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{q-1}\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}(-1)^{p+\alpha}C_{p+\alpha-1}^{\alpha}}{(2\sigma_0)^{p+\alpha}(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}}\right\}+$$

$$+\left\{\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^pJA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A_{n-q}^*JA_{n-p}(-1)^{q+\beta}C_{q+\beta-1}^{\beta}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}\right\}.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое последней суммы:

$$1)\ \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{q-1}\sum_{\beta=0}^{p-1}(\lambda+\overline{\lambda})(2\sigma_0)^{p+q-(\alpha+\beta+1)}\cdot(-1)^{\alpha+\beta}C_{\alpha+\beta}^{\beta}\frac{A_{n-q}^*JA_{n-p}}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{q-\alpha}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=n-k+1}^{n}\sum_{p=n-j+1}^{n}\frac{(\lambda+\overline{\lambda})(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^{n-k+1}(\lambda-\lambda_0)^{n-j+1}}(-1)^{p+q+k+j-2n-2}\times$$

$$\times\frac{(p+q+k+j-2n-2)!}{(q+k-n-1)!\,(p+j-n-1)!}A_{n-q}^*JA_{n-p}=(\lambda+\overline{\lambda})\left[\frac{I}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^n},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{I}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0}\right]\left\|\sum_{q=n-k+1}^{n}\sum_{p=n-j+1}^{n}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}\times\right.$$

$$\times \frac{(-1)^{p+q+k+j-2n-2}(p+q+k+j-2n-2)!}{(q+k-n-1)!\,(p+j-n-1)!} \dot{A}^{*}_{n-q} J \dot{A}_{n-p} \Bigg\| \begin{bmatrix} \frac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n} \\ \cdot\ \cdot \\ \frac{I}{\lambda-\lambda_0} \end{bmatrix} =$$

где введены новые индексы

$$q-\alpha=n-k+1,\ p-\beta=n-j+1,\ k=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$b=n-k+1,\cdots,n;\ p=n-j+1,\cdots,n.$$

Полагая

$$n-q=k-s,\ n-p=j-t,$$

получим

$$=(\lambda+\overline{\lambda}\Big[\frac{I}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^n},\cdots,\frac{I}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0}\Big]\Bigg\|\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{j}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}(-1)^{s+t}\times$$

$$\times\frac{(s+t-2)!}{(s-1)!\,(t-1)!}A^{*}_{k-s}JA_{j-t}\Bigg\|\begin{bmatrix} \frac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n} \\ \cdot\ \cdot \\ \frac{I}{\lambda-\lambda_0} \end{bmatrix}.$$

2) $$\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{p-1}\frac{(2\sigma_0)^{p+q}A^{*}_{n-q}JA_{n-p}}{(2\sigma_0)^{q+\beta}(\lambda-\lambda_0)^{p-\beta}}(-1)^{q+\beta}C^{q-1}_{q+\beta-1}=$$

$$p-\beta=s$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{n-s}\frac{(2\sigma_0)^s A^{*}_{n-q}JA_{n-\beta-s}}{(\lambda-\lambda_0)^s}(-1)^{q+\beta}\frac{(q+\beta-1)!}{\beta!\,(q-1)!}=$$

$$\beta=\tau-1$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^p JA_{n-p}}{(\lambda-\lambda_0)^p}+\sum_{q=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{n-s+1}\frac{(2\sigma_0)^s A_{n-q}JA_{n-\tau+1-s}}{(\lambda-\lambda_0)^s}\times$$

$$\times(-1)^{q+\tau-1}\frac{(q+\tau-2)!}{(\tau-1)!\,(q-1)!}=0,$$

на основании условий (B).

Итак, окончательно

$$w_0^{*}(\lambda)Jw_0(\lambda)-J=(\lambda+\overline{\lambda})\Big[\frac{I}{(\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0)^n},\cdots,\frac{I}{\overline{\lambda}-\overline{\lambda}_0}\Big]\times$$

$$\times\Bigg\|\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{j}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+j)}(-1)^{s+t}\frac{(s+t-2)!}{(s-1)!(t-1)!}A^{*}_{k-s}JA_{j-t}\Bigg\|\begin{bmatrix} \frac{I}{(\lambda-\lambda_0)^n} \\ \cdot\ \cdot \\ \frac{I}{\lambda-\lambda_0} \end{bmatrix},$$

откуда в силу неравенства (A) следует, что

$$w_0^*(\lambda)\, J w_0(\lambda) - J > 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0),$$

$$w_0^*(\lambda)\, J w_0(\lambda) - J = 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda = 0),$$

что и требовалось доказать.

После доказанной теоремы доказательство аналогичного факта для произвольного элементарного множителя с любым набором кратных полюсов уже не представляет принципиальных трудностей. Точную формулировку условий (A) и (B) мы опускаем из-за громоздкой записи их.

Тем самым можно считать решенным вопрос о структуре *произвольной рациональной матрицы-функции* J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси.

§ 3. Реактивный множитель

Принципиальным для синтеза электрических цепей является вопрос об аддитивной структуре произвольной реактивной матрицы-функции.

И здесь для простоты ограничимся формулировкой результата для того частного случая, когда реактивная матрица-функция имеет полюсы n-го порядка только в четырех точках

$$\lambda_0,\ -\bar\lambda_0,\ \bar\lambda_0,\ -\lambda_0.$$

Нормируя ее условием $w(\infty) = I$, запишем ее разложение на простейшие дроби

$$w(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k B_{n-k}}{(\lambda + \bar\lambda_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k C_{n-k}}{(\lambda - \bar\lambda_0)^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k D_{n-k}}{(\lambda + \lambda_0)^k},$$

где

$$B_\gamma = j\bar A_\gamma\, j,\ C_\gamma = \bar A_\gamma,\ D_\gamma = j A_\gamma\, j,\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеет место

Теорема. *Для того чтобы матрица-функция*

$$w(\lambda) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k B_{n-k}}{(\lambda + \bar\lambda_0)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\sigma_0)^k C_{n-k}}{(\lambda - \bar\lambda_0)^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2\sigma_0)^k D_{n-k}}{(\lambda + \lambda_0)^k},$$

где $B_\gamma = j\bar A_\gamma j$, $C_\gamma = \bar A_\gamma$, $D_\gamma = j A_\gamma j$ *была J-несжимающей в правой полуплоскости и J-унитарной на мнимой оси необходимо и доста-*

точно, чтобы коэффициенты A_γ, B_γ, C_γ, D_γ *удовлетворяли неравенству*

$$(A)\quad \mathfrak{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}>0,$$

где

$$a_{11}=\left\| (2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JA_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{12}=\left\| (-1)^{n-i}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\left\{ A^*_{k+i-n-1}J+\sum_{\substack{p+q=2n+1-(k+i),\\ p=n-k+1,\cdots,n}} A^*_{n-p}JA_{n-q}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\alpha=1}^{k}(2\sigma_0)^{\alpha+i-n-1}A^*_{k-\alpha}J\frac{j\overline{b^{(\alpha+i-n-1)}}\overline{(\lambda_0)\,j}}{(\alpha+i-n-1)!}\right\}\right\|\begin{pmatrix}k=1,\cdots,n\\ i=1,\cdots,n\end{pmatrix},$$

$$a_{13}=\left\| \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(\overline{\lambda}_0+\overline{\lambda}_0)^{\alpha+\beta-1}}\cdot(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JC_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{14}=\left\| \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(-2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(\overline{\lambda}_0-\lambda_0)^{\alpha+\beta-1}}\cdot(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}A^*_{k-\alpha}JD_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{22}=\left\|(-2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}B^*_{k-\alpha}JB_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{23}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(-2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(-\lambda_0+\overline{\lambda}_0)^{\alpha+\beta-1}}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}B^*_{k-\alpha}JC_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{24}=\left\|\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}\frac{(-2\sigma_0)^{n-k+\alpha}(-2\sigma_0)^{n-i+\beta}}{(-\lambda_0-\lambda_0)^{\alpha+\beta-1}}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}B^*_{k-\alpha}JD_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{33}=\left\|(2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}C^*_{k-\alpha}JC_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

$$a_{34}=\left\|(-1)^{n-i}(2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\left\{ C^*_{k+i-n-1)}J+\sum_{\substack{p+q=2n+1-(k+i).\\ p=n-k-1,\cdots,n}} C^*_{n-p}JC_{n-q}+\right.\right.$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}(2\sigma_0)^{\alpha+i-n-1}C^*_{k-\alpha}\,J\,\frac{jb^{(\alpha+i-n-1)}(\lambda_0)\,j}{(\alpha+i-n-1)!}\Bigg\}\Bigg\| \quad \begin{pmatrix}k=1,2,\cdots,n;\\ i=1,2,\cdots,n\end{pmatrix};$$

$$a_{44}=\left\|(-2\sigma_0)^{2n+1-(k+i)}\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{i}(-1)^{\alpha+\beta}\frac{(\alpha+\beta-2)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}D^*_{k-\alpha}\,JD_{i-\beta}\right\|$$

$$(k=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n);$$

(*так как* $\mathfrak{M}>0$, *то*

$$a_{21}=a^*_{12},\ a_{31}=a^*_{13},\ a_{32}=a^*_{23},\ a_{41}=a^*_{14},\ a_{42}=a^*_{24},\ a_{43}=a^*_{34})$$

и равенствам

$$(B)\quad\left|\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\alpha+\beta=m}B^*_{n-\beta}\,JA_{n-\alpha}=0\quad(m=n+1,\cdots,2n),\\ \displaystyle\sum_{\alpha+\beta=m}(2\sigma_0)^{\alpha+\beta}B^*_{n-\beta}\,JA_{n-\alpha}+\sum_{\beta_1-s=m}\frac{(2\sigma_0)^{\beta_1}}{s!}\Big[B^*_{n-\beta_1}\,Jb^{(s)}(\lambda_0)+\\ \qquad\qquad+\overline{jb^{(s)*}(\lambda_0)}\,j\,JA_{n-\beta_1}\Big]=0\\ \qquad\qquad(m=1,2,\cdots,n)\end{array}\right.$$

Здесь

$$w(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^k A_{n-k}}{(\lambda-\lambda_0)^k}+b(\lambda),$$

$$b(\lambda)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2\sigma_0)^k B_{n-k}}{(\lambda+\bar{\lambda}_0)^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2\sigma_0)^k C_{n-k}}{(\lambda-\bar{\lambda}_0)^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2\sigma_0)^k D_{n-k}}{(\lambda+\lambda_0)^k}$$

является аналитической матрицей-функцией в окрестности точки λ_0 и потому разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступило 21.X.1969

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ. Կամայական ռեակտիվ մատրիցա-ֆունկցիայի ադիտիվ վերլուծությունը (*ամփոփում*)։

Հոդվածում դիտարկվում է կամայական ռացիոնալ ռեակտիվ մատրիցա-ֆունկցիայի ադիտիվ ստրուկտուրայի հարցը։ Ստացված են ռեակտիվ մատրիցա-ֆունկցիայի ադիտիվ վերլուծության գործակիցների էլեմենտարության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

I. V. KOVALISHINA. *Additive decomposition of an arbitrary reactive matrix—function* (summary)

The additive structure of an arbitrary rational reactive matrix-function is considered. The necessary and sufficient conditions of elementarity in forms of the coefficient of additive decomposition of a rational reactive matrix-function are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов*. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН АрмССР, XLIX, 1969.
2. *W. Cauer*. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Berlin, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Р. Н. ТОНОЯН

О ЕДИНИЧНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть K — некоторая контактная схема, реализующая булеву функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Рассматриваются неисправности в схеме, каждая из которых заключается в том, что один контакт схемы становится всегда замкнутым или всегда разомкнутым. При наличии неисправности схема будет реализовать, вообще говоря, другую функцию $f'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ — так называемую функцию неисправности. Пусть далее рассматривается контроль схемы путем проверки проводимости схемы на наборах $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = 0$ или 1. (Таким образом допускается испытание проводимости схемы на различных наборах и не допускается какое-либо иное вмешательство в работу схемы). При таком способе контроля мы не в состоянии различить неисправности, имеющие одинаковые функции неисправности. Предположим, что

$$\mathfrak{M} = \{f_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots$$
$$\cdots, f_s(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

суть все различные функции неисправности для контактной схемы K, а $B^n = \{\tilde{\alpha} / \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0$ или $1\}$.

Определение. Подмножество наборов $T \subseteq B^n$ называется единичным тестом для контактной схемы K, или для системы функций $\mathfrak{M}$, если для всякой пары функций $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ и $f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ из $\mathfrak{M}$ существует набор $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in T$ такой, что $f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq f_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Число наборов в T назовем длиной теста.

В работе [1] предложен общий алгоритм для нахождения минимального теста (т. е. теста минимальной длины). Однако, как указывают авторы, ввиду своей универсальности, алгоритм оказывается громоздким даже для простых случаев. Поэтому представляет интерес построение близкого к минимальному единичного теста для отдельных классов схем.

Рассмотрим линейную функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n + 1 \pmod 2$. Зная схемную реализацию и единичный тест для нее, нетрудно построить единичный тест для любой линейной функции, зависящей не более, чем от n переменных. Известно, что $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ можно реализовать при помощи контактной схемы K_n (рис. 1)

В работе [1] для контактной схемы K_n построен единичный тест длины $3n-2$. В настоящей заметке показано, что если t_n — длина минимального единичного теста для схемы K_n, то справедлива следующая

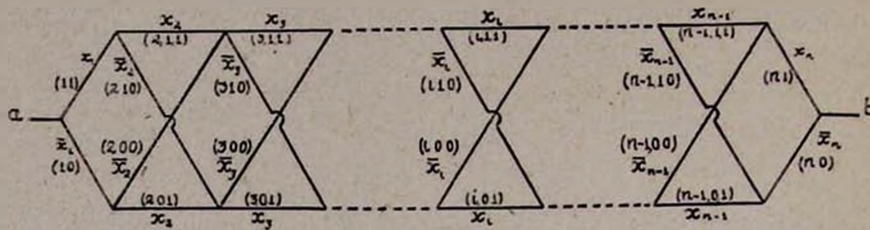

Рис. 1.

Теорема. $2]\log_2 2n[+2 \leqslant t_n \leqslant 3]\log_2 2n[+1$.

где $]a[$—наименьшее целое $\geqslant a$. При этом построен единичный тест длины $3]\log_2 2n[+1$.

Занумеруем контакты данной схемы как указано на рис. 1: горизонтальным контактам i-го блока сопоставим символы $(i11)$ и $(i01)$, а наклонным контактам—символы $(i10)$ и $(i00)$. Контактам первого и последнего блоков сопоставим соответственно (11), (10) и $(n1)$, $(n0)$.

Замыкания контактов $(i11)$ и $(i01)$ (соответственно, контактов $(i10)$ и $(i00)$) неразличимы. Обозначим через $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ проводимость схемы при замыкании контакта $(i11)$ или $(i01)$, а через $f_i'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$— проводимость при замыкании $(i10)$ или $(i00)$. Пусть далее $f_{i\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$—проводимость схемы при размыкании контакта $(i\alpha_1\alpha_2)$, где α_1, $\alpha_2=0$ или 1. Любой тест T имеет вид $T=T_з \cup T_p$, $T_з \cap T_p=\varnothing$, где T_p— тест для обнаружения ошибок размыкания, а $T_з$— тест для ошибок замыкания.

Таким образом, $t_n=t_з^n+t_p^n$, где $t_з^n$ — длина минимального теста для системы функций

$$\{f_0(x_1, \cdots, x_n), f_1(x_1 \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n);\ f_1'(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots, f_n'(x_1, \cdots, x_n)\}, \tag{1}$$

а t_p^n — длина минимального теста для системы

$$\{f_0(x_1, \cdots, x_n),\ f_{11}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{10}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_{100}(x_1, \cdots, x_n), \\ f_{101}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{110}(x_1, \cdots, x_n),\ f_{111}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_{n0}(x_1, \cdots, x_n), \\ f_{n1}(x_1, \cdots, x_n)\}.$$

Теорема 1. $]\log_2(2n+1)[\leqslant t_з^n \leqslant]\log_2 2n[+1$.

Нижняя оценка следует из определения теста: если $T=\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_s\}$— тест, то существует хотя бы $2n+1$ различных s-мерных наборов $(f_i(\tilde{\alpha}_1), f_i(\tilde{\alpha}_2), \cdots, f_i(\tilde{\alpha}_s)) \overline{\overline{def}}\ f_i(T)$, т. е. $2^s \geqslant 2n+1$.

Пусть $2^{k-1}<2n\leqslant 2^k$. Рассмотрим таблицу L порядка $k\times 2^k$, i-ый столбец которой $\tilde{\sigma}_{i3}=(0, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \cdots, \sigma_{ik})$ есть двоичное разложение числа $i-1$:

$$L = \begin{pmatrix} 000\cdots & 0 & \cdots 0 \\ 000\cdots & \sigma_{l2} & \cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 001\cdots & \sigma_{lk-1} & \cdots 1 \\ 010\cdots & \sigma_{lk} & \cdots 1 \end{pmatrix} \overline{\overline{df}} (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \cdots, \tilde{\sigma}_{2k}).$$

Определим систему векторов

$$\tilde{\gamma}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0) = (1; \tilde{\sigma}_1),$$

$$\tilde{\gamma}_2 = (0; \tilde{\sigma}_2), \ \tilde{\gamma}_3 = (0; \tilde{\sigma}_3), \cdots, \ \tilde{\gamma}_{n-2} = (0; \tilde{\sigma}_{n-2}),$$

$$\tilde{\gamma}_{n-1} = \begin{cases} (0; \tilde{\sigma}_{n-1}), \text{ если } \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \cdots + \tilde{\sigma}_{n-1} \neq (0, 0, \cdots, 0) \\ (0; \tilde{\sigma}_n) \text{— в противном случае,} \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}_n = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_{n-1}, & \text{если } n \text{ — нечетное число} \\ \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_{n-1} + (1, 1, \cdots, 1), & \text{если } n \text{ — четное число.} \end{cases}$$

(Сумма векторов берется по mod 2).

Из определения следует, что

1. $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_n + (n+1, n+1, \cdots, n+1) = (0, 0, \cdots, 0)$.

2. $\forall (1 \leqslant i \neq j \leqslant n)(\tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\gamma}_j) \& (\tilde{\gamma}_i \neq \tilde{\tilde{\gamma}}_j)$, где $\tilde{\tilde{\gamma}}_j$ — отрицание набора $\tilde{\gamma}_j$.

3. $\forall (1 \leqslant i \leqslant n) (\tilde{\gamma}_i \neq (0, 0, \cdots, 0)) \& (\tilde{\gamma}_i \neq (1, 1, \cdots, 1))$.

Пусть T' — матрица порядка $(k+1) \times n$, j-ый столбец которой есть набор $\tilde{\gamma}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, т. е. $T' = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \cdots, \tilde{\gamma}_n)$. Предположим, что $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_{k+1})$ — строки матрицы T'.

Лемма 1. *$\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_{k+1}\} = T_з$ есть единичный тест для ошибок замыкания.*

Достаточно показать, что все векторы типа (1) для $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_{k+1}$ различны. Из определения $\tilde{\gamma}_n$ следует, что $f_0(T_з) = (f_0(\tilde{\alpha}_1), f_0(\tilde{\alpha}_2), \cdots, f_0(\tilde{\alpha}_{k+1})) = (0, 0, \cdots, 0)$.

Далее, пусть $f_0(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = 0$. Легко проверить, что тогда $f_i(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \bar{\beta}_i$ и $f_i'(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \beta_i$. Следовательно, $f_i(T_з) = \tilde{\tilde{\gamma}}_i$ и $f_i'(T_з) = \tilde{\gamma}_i$. Лемма 1 следует из вышеуказанных свойств $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \cdots, \tilde{\gamma}_n$. Построенный тест имеет длину $k+1 =]\log_2 2n[+1$ и теорема 1 доказана.

Теорема 2. $]\log_2 2n[+1 \leqslant t_p^n \leqslant 2]\log_2 2n[$.

Существуют $4n-1$ функций неисправности и поэтому $t_p^n \geq \,]\log_2 2n[+1$. Для получения верхней оценки рассмотрим использованную в предыдущей теореме таблицу $L=(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \cdots, \tilde{\sigma}_{2k})$ и определим систему наборов:

$$\tilde{\delta}_1=(\tilde{\sigma}_1, \bar{\sigma}_1),\ \tilde{\delta}_2=(\tilde{\sigma}_2, \bar{\sigma}_2), \cdots, \tilde{\delta}_{n-2}=(\tilde{\sigma}_{n-2}, \bar{\sigma}_{n-2}),$$

$$\tilde{\delta}_{n-1}=\begin{cases}(\tilde{\sigma}_{n-1}, \bar{\sigma}_{n-1}), & \text{если } \tilde{\sigma}_1+\tilde{\sigma}_2+\cdots+\tilde{\sigma}_{n-1}\neq(0,0,\cdots,0)\\ (\tilde{\sigma}_n, \bar{\sigma}_n) & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_n=\begin{cases}\tilde{\delta}_1+\tilde{\delta}_2+\cdots+\tilde{\delta}_{n-1}, & \text{если } n \text{ — четное число}\\ \tilde{\delta}_1+\tilde{\delta}_2+\cdots+\tilde{\delta}_{n-1}+(1,1,\cdots,1) & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $\tilde{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2k})$ — произвольный набор из 0 и 1 длины $2k$, а $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$ — набор длины k. Через $[\tilde{\varepsilon}; \tilde{\beta}]$ обозначим набор $(\varepsilon_1\beta_1, \varepsilon_2\beta_2, \cdots, \varepsilon_k\beta_k, \bar{\varepsilon}_1\beta_{k+1}, \cdots, \bar{\varepsilon}_k\beta_{2k})$. Пусть далее $\tilde{\beta}^\alpha=(\beta_1^\alpha, \beta_2^\alpha, \cdots, \beta_{2k}^\alpha)$, где $\alpha=0, 1$ $(0^0=1'=1;\ 0'=1^0=0)$.

Лемма 2. *Для всякой пары наборов* $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$, $\tilde{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$ *и для всех номеров* i *и* j, *при* $2\leq i, j\leq n-1$ *имеет место утверждение* $(\alpha, \lambda=0, 1)$

$$([\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]=[\tilde{\omega}; \tilde{\delta}_j^\lambda])\to(i=j)\ \&\ (\alpha=\lambda).$$

В самом деле, если $[\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]=[\tilde{\omega}; \tilde{\delta}_j^\lambda]$, то для всех $1\leq l\leq k$ и $\beta=0, 1$ имеет место равенство $\varepsilon_e^\beta\delta_{ie}^\alpha=\omega_e^\beta\delta_{je}^\lambda$. Отсюда следует, что $\delta_{ie}^\alpha=\omega_e^{\varepsilon_e}\delta_{je}^\lambda$ и $\delta_{je}^\lambda=\varepsilon_e^{\omega_e}\delta_{ie}^\alpha$. Так что $\tilde{\delta}_i^\alpha=\tilde{\delta}_j^\lambda$. Но из определения наборов $\tilde{\delta}_l$ следует, что это возможно лишь при $(i=j)$ и $(\alpha=\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для всякого набора* $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k)$ *утверждение*

$$([\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]\neq\tilde{\delta}_1^\beta)\ \&\ ([\tilde{\varepsilon}; \tilde{\delta}_i^\alpha]\neq\tilde{\delta}_n^\beta)$$

выполняется при всех $1<i<n$ *и* $\alpha, \beta=0, 1$.

Так как каждый из наборов $\tilde{\delta}_1^\beta$ и $\tilde{\delta}_n^\beta$ имеет вид $(\nu_1, \cdots, \nu_k; \bar{\nu}_1, \cdots, \bar{\nu}_k)$, то достаточно показать, что $\exists l\ (1\leq l\leq k)\ (\varepsilon_e\delta_{ie}^\alpha\neq\bar{\varepsilon}_e\bar{\delta}_{ie}^\alpha)$. Предположим обратное, тогда $\forall l\ (1\leq l\leq k)\ (\varepsilon_e\delta_{ie}^\alpha=\varepsilon_e\bar{\delta}_{ie}^\alpha)$. Отсюда следует, что $\tilde{\delta}_i^\varepsilon=(1, 1, \cdots, 1)$, но при $1<i<n$ это невозможно. Лемма доказана.

Пусть T'' — матрица порядка $2k\times n$, j-ый столбец которой есть набор $\tilde{\delta}_j$ $(1\leq j\leq n)$, т. е. $T''\underset{df}{=}(\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \cdots, \tilde{\delta}_n)$. Предположим, что $\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{2k}\}$ — строки матрицы T''.

Лемма 4. $\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \cdots, \tilde{\beta}_{2k}\}=T_p$ *есть единичный тест для ошибок размыкания.*

Покажем, что наборы системы (2) различны. Из определения $\tilde{\mathfrak{z}}_n$ следует, что $f_0(T_p)=(1, 1, \cdots, 1)$. Пусть $\tilde{\beta}_e=(\beta_{e1}, \beta_{e2}, \cdots, \beta_{en})$. Определим набор $\tilde{\varepsilon}_e=(\varepsilon_{e2}, \varepsilon_{e3}, \cdots, \varepsilon_{en})$ следующим образом:

$$\varepsilon_{e2}=\beta_{e1},\ \varepsilon_{e3}=\beta_{e1}+\beta_{e2}, \cdots,\ \varepsilon_{en}=\beta_{e1}+\beta_{e2}+\cdots+\beta_{e,\,n-1}\,.$$

Тогда $\tilde{\varepsilon}_1=\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{k+1},\ \tilde{\varepsilon}_2=\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{k+2}, \cdots,\ \tilde{\varepsilon}_k=\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{2k}$.

Смысл введенного набора следующий: так как $f_0(\tilde{\beta}_e)=1$, то для набора $\tilde{\beta}_e$ существует путь, соединяющий вершины a и b контактной схемы K_n, состоящей из замкнутых контактов. $\tilde{\varepsilon}_e$ выбран так, что этот путь проходит через контакт $(i, \varepsilon_{ei}, \beta_{ei})$, $1<i\leqslant n$. Следовательно, при $1<i<n$

$$f_{i\alpha_1\alpha_2}(\beta_{e1}, \beta_{e2}, \cdots, \beta_{en})=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha_1=\varepsilon_{ei},\ \alpha_2=\beta_{ei}\\ 1 & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

т. е. $\bar{f}_{i\alpha_1\alpha_2}(\tilde{\beta}_e)=\varepsilon_{ei}^{\alpha_1}\beta_{ei}^{\alpha_2}$. Пусть $\lambda_i=(\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \cdots, \varepsilon_{ki})$, тогда ясно, что $\bar{f}_{i\alpha_1\alpha_2}(T_p)=[\tilde{\lambda}_i^{\alpha_1};\ \tilde{\delta}_i^{\alpha_2}]$. Из леммы 2 следует, что все $f_{i\alpha_1\alpha_2}(T_p)$ различны при $1<i<n$, α_1, $\alpha_2=0, 1$. Далее легко показать, что $\bar{f}_{1\alpha}(T_p)=\tilde{\delta}_1^{\alpha}$, $\bar{f}_{n\alpha}(T_p)=\tilde{\delta}_n^{\alpha}$. Отсюда и из леммы 3 вытекает, что наборы системы (2) различны. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 2 следует из доказанной леммы.

Объединяя результаты теорем 1 и 2, получим утверждение сформулированной основной теоремы: если t_n—длина минимального единичного теста для контактной схемы K_n, то

$$2]\log_2 2n[+2\leqslant t_n\leqslant 3]\log_2 2n[+1.$$

З а м е ч а н и е. Если $n=4s-1$; $s=1, 2, \cdots$, то строки матрицы $(\tilde{\mathfrak{z}}_2, \tilde{\mathfrak{z}}_3, \cdots, \tilde{\mathfrak{z}}_{n+1})$ образуют минимальный тест замыкания для функции $x_1+x_2+\cdots+x_n+n+1 \pmod 2$, причем сложность данного теста есть $\log_2 2n[$.

Ереванский государственный университет

Поступило 17.XI.1970

Ռ. Ն. ՏՈՆՈՅԱՆ. Գծային ֆունկցիաները իրականացնող կոնտակտ սխեմաների միավոր տեստերի մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ եթե t_n*-ը* n *փոփոխականից կախված գծային ֆունկցիան իրականացնող սխեմայի համար միավոր տեստի երկարությունն է, ապա*

$$3]\log_2 2n[+2\leqslant t_n\leqslant 3]\log 2n[+1,$$

որտեղ $]a[$*-ն ամենափոքր ամբողջ թիվն է, որը* $\geqslant a$*: Ընդ որում կառուցված է* $3]\log_2 2n[+1$ *երկարությամբ միավոր տեստ*

R. N. TONOJAN. ***On singular tests for contact schemes, realising linear functions*** **(summary)**

It is proved, that, if t_n is the length of minimal singular test for the schema, realising a linear Boolean function of n variables, then

$$2]\log_2 2n[+2 \leqslant t_n \leqslant 3]\log_2 2n[+1,$$

where $]a[$ is the smallest integer $\geqslant a$. The singular test of the length $3]\log_2 2n[+1$ is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Чегис* и *С. В. Яблонский*. Логические способы контроля электрических схем, Труды МИАН СССР им. Стеклова, том 51.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա VI, № 1, 1971 Математика

Л. А. ТЕР-ИСРАЕЛЯН

РАВНОМЕРНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫМИ С ОЦЕНКОЙ ИХ РОСТА

В настоящей работе рассматривается задача равномерного приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценками их роста. Вопросы аппроксимации в угле целыми функциями рассмотрены в работах М. В. Келдыша [1, 2]. В случае приближения в угле целыми функциями часто оказывается, что рост аппроксимирующей функции намного больше роста аппроксимируемых функций и, в силу теорем типа Фрагмена-Линделефа, сильно зависит от раствора угла аппроксимации. В случае же приближения мероморфными функциями их рост (в терминах роста характеристической функции) удается ограничить ростом голоморфной в угле функции, которую мы приближаем. Кроме того, оказывается, что в случае приближения мероморфными функциями задача касательного приближения сравнительно легко сводится к задаче равномерного приближения.

Результаты, полученные в настоящей работе, имеют применение в теории распределения значений мероморных функций (следствие 2).

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<\beta<2\pi$ *и* $f(z)$ *— голоморфная функция в угловой области* $\Delta_\beta=\left\{z\in\mathbb{C}\colon |\arg z|\leqslant\frac{\beta}{2}\right\}$. *Тогда для всякого* $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $q\in\left(1,\ 1+\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$ *существует мероморфная функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условиям*

1. $|f(z)-F(z)|\leqslant\varepsilon$ *для* $z\in\Delta_\alpha$, $|z|\geqslant1$;
2. $|F(z)|\leqslant\varepsilon$ *для* $z\in\overline{\mathbb{C}\setminus\Delta_\beta}$;
3. $$T(r,F)\leqslant A\left[\int_1^r\int_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau\,dt+\int_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\right.$$
$$\left.+\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln^3 r+1\right]\qquad \text{для } r\geqslant1,$$

где $T(r,F)$ *— неванлинновская характеристика* $F(z)$, $M(r)=\max\limits_{|z|<r}|f(z)|$, l *— наименьшее целое, удовлетворяющее условию* $q^{l-1}>\dfrac{1}{1-\sin\frac{\beta-\alpha}{4}}$, *а* A *не зависит от* r.

Доказательство. Сделаем следующие обозначения:

$$l_k=\left\{\zeta\in\mathbf{C}\colon \arg\zeta=\frac{\alpha+\beta}{4},\ q^k\leqslant|\zeta|\leqslant q^{k+1}\right\},$$

$$l'_k=\left\{\zeta\in\mathbf{C}\colon \arg\zeta=-\frac{\alpha+\beta}{4},\ q^k\leqslant|\zeta|\leqslant q^{k+1}\right\}\quad (k=-1,0,1,\cdots),$$

$$\Gamma_k=\left\{\zeta\in\mathbf{C}\colon\ |\zeta|=q^k,\ |\arg\zeta|\leqslant\frac{\alpha+\beta}{4}\right\}.$$

Пусть l_k ориентировано по убыванию модуля его точек, l'_k — по возрастанию, а Γ_k — по возрастанию $\arg z$ $(z\in\Gamma_k)$. Обозначим через $-l_k$, $-l'_k$ и $-\Gamma_k$ те же самые кривые, но имеющие противоположное направление. Теперь обозначим

$$\gamma=l_{-1}\cup(-\Gamma_{-1})\cup l'_{-1},\quad L_n=\bigcup_{k=0}^{n} l_k,\quad L'_n=\bigcup_{k=0}^{n} l'_k,\quad \gamma_n=L_n\cup L'_n.$$

$$V_k=\left\{z\in\mathbf{C}\colon |z-\zeta_k|<q^k\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right\},\ \text{где}\ \zeta_k=q^k e^{i\frac{\alpha+\beta}{4}},\quad (k=0,1,\cdots)$$

$$V'_k=\left\{z\in\mathbf{C}\colon |z-\zeta'_k|<q^k\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right\},\ \text{где}\ \zeta'_k=q^k e^{-i\frac{\alpha+\beta}{4}}.$$

При $\zeta\in l_k$, $z\overline{\in}V_k$ имеем следующее разложение для $\dfrac{1}{\zeta-z}$:

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}}.$$

Это разложение допустимо, так как имеем оценку

$$\left|\frac{\zeta-\zeta_k}{z-\zeta_k}\right|\leqslant\left|\frac{\zeta_{k+1}-\zeta_k}{z-\zeta_k}\right|\leqslant\frac{q^k(q-1)}{q^k\sin\frac{\beta-\alpha}{4}}=\frac{q-1}{\sin\frac{\beta-\alpha}{4}}=d<1.$$

Совершенно аналогично

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\zeta-\zeta'_k)^j}{(z-\zeta'_k)^{j+1}}\ \text{для}\ \zeta\in l'_k,\ z\overline{\in}V'_k.$$

В частности, эти разложения возможны для

$$\zeta\in l_k\ (\zeta\in l'_k)\ \text{и}\ z\in\Delta_2\cup(\overline{\mathbf{C}\setminus\Delta_3}).$$

Рассмотрим следующие последовательности функций:

$$Q_k(\zeta,z)=-\sum_{j=0}^{n_k}\frac{(\zeta-\zeta_k)^j}{(z-\zeta_k)^{j+1}},\qquad (k=0,1,\cdots)$$

$$Q'_k(\zeta,z)=-\sum_{j=0}^{n_k}\frac{(\zeta-\zeta'_k)^j}{(z-\zeta'_k)^{j+1}},$$

в которых последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ пока не определена.

Теперь определим функцию $Q(\zeta, z)$ следующим образом:

$$Q(\zeta, z) = \begin{cases} Q_k(\zeta, z) \text{ для } \zeta \in l_k \setminus \zeta_{k+1} \\ Q_k'(\zeta, z) \text{ для } \zeta \in l_k' \setminus \zeta_{k+1}'. \end{cases} \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

Для $\zeta \in l_k \setminus \zeta_{k+1}$, $z \overline{\in} V_k$ имеем оценку:

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - Q(\zeta, z) \right| \leqslant Cd^{n_k}, \text{ где } C = \frac{d}{(1-d) \sin \frac{\beta - \alpha}{4}}. \tag{1}$$

Аналогично получим

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - Q(\zeta, z) \right| \leqslant Cd^{n_k} \text{ для } \zeta \in l_k' \setminus \zeta_{k+1}', \; z \overline{\in} V_k'. \tag{1'}$$

Оценки (1) и (1′) получаются непосредственно из определения функции $Q(\zeta, z)$ и разложений для $\frac{1}{\zeta - z}$.

Рассмотрим функцию $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует рациональная функция $R_1(z)$ с полюсами на γ такая, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R_1(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ для } z \in \mathbf{C} \setminus \gamma(\eta),$$

где $\gamma(\eta)$ это η-окрестность множества γ.

η возьмем настолько малым, чтобы выполнялись условия

$$\gamma(\eta) \cap (\overline{\mathbf{C} \setminus \Delta_\beta}) = \varnothing, \; \gamma(\eta) \cap \Delta_* \cap \{z \in \mathbf{C}: |z| \geqslant 1\} = \varnothing.$$

Обозначим

$$D_{n,m} = \left\{ z \in \mathbf{C}: q^n \leqslant |z| \leqslant q^m, \; |\arg z| \leqslant \frac{\alpha + \beta}{4} \right\} \text{ для } n < m.$$

Теперь рассмотрим последовательность функций $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую следующим образом:

$$F_n(z) = R_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} f(\zeta) Q(\zeta, z) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{n+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Покажем, что возможен такой выбор последовательности $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, чтобы последовательность $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходилась на каждом компакте $K \subset \mathbf{C}$. Пусть $z \in K$. Тогда можно выбрать настолько большое n, чтобы выполнялись условия

$$K \cap D_{n,m} = \varnothing \text{ для любого } m > n \text{ и } K \cap V_n = K \cap V_n' = \varnothing.$$

Теперь, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{n+1,\, m+1}\uparrow} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

получим

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=n+1}^{m} \int\limits_{l_k \cup l'_k} |f(\zeta)|\, \left|Q(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z}\right| |d\zeta|.$$

Отсюда, применяя оценки (1) и (1′), получим

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leqslant \frac{C}{\pi} \sum_{k=n+1}^{m} \int\limits_{q^k}^{q^{k+1}} M(r)\, d^{n_k}\, dr.$$

Введя ступенчатую функцию $\tilde{n}(r) = n_k$ для $r \in [q^k, q^{k+1})$ $(k = 0, 1, \cdots)$, получим

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leqslant \frac{C}{\pi} \int\limits_{q^{n+1}}^{q^{m+1}} M(r)\, d^{\tilde{n}(r)}\, dr.$$

Теперь уже выбор $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ определится выбором функции $\tilde{n}(r)$ для $r > 1$. $\tilde{n}(r)$ определим как ступенчатую функцию, удовлетворяющую неравенству

$$M(r)\, d^{\tilde{n}(r)} \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{3Cr^2} \quad \text{для } r \geqslant 1. \tag{2}$$

Из (2) следует сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} M(r)\, d^{\tilde{n}(r)}\, dr$, причем

$$\frac{C}{\pi} \int\limits_1^{\infty} M(r)\, d^{\tilde{n}(r)}\, dr \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для удовлетворения (2) выберем $\tilde{n}(r)$ следующим образом:

$$\tilde{n}(r) = n_k = \left[\max\left\{1;\ \frac{\ln\left\{M(q^{k+1})\dfrac{Cq^{2(k+1)}}{\pi\varepsilon}\right\}}{\ln\dfrac{1}{d}} + 1\right\}\right]$$

для $r \in [q^k, q^{k+1})$ $(k = 0, 1, \cdots)$, где квадратные скобки означают целую часть находящегося в них выражения.

Очевидно

$$\tilde{n}(r) \leqslant C_1 + \frac{\ln\left\{M(rq)\dfrac{Cq^2r^2}{\pi\varepsilon}\right\}}{\ln\dfrac{1}{d}} \quad \text{для } r \geqslant 1, \tag{2'}$$

где C_1—некоторая постоянная относительно r.

При указанном выборе $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ последовательность $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно сходится на каждом компакте $K \subset \mathbf{C}$. Из самого вида функций $F_n(z)$ $(n=0, 1, \cdots)$ следует, что предельная функция $F(z)$ является мероморфной с полюсами порядка не выше n_k в точках ζ_k, ζ_k', а также имеющей общие полюсы с $R_1(z)$.

Докажем, что $F(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

Пусть сначала $z \in \Delta_k$, $|z| > 1$. Выберем n настолько большим, чтобы $z \in D_{0,n}$ и $|F(z) - F_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, учитывая,

что
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{-1,n+1}\uparrow} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$
получим

$$|F(z) - f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left|F_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{-1,n+1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_n} |f(\zeta)| \left| Q(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{C}{\pi} \int\limits_1^{\infty} M(r)\, d^{\overline{n}(r)}\, dr \leqslant \varepsilon.$$

Итак, условие 1 для функции $F(z)$ выполнено.

Пусть теперь $z \in \overline{\mathbf{C} \setminus \Delta_\beta}$. Выберем n настолько большим, чтобы $|F(z) - F_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Так как $z \overline{\in} D_{-1,n+1}$, имеем $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{-1,n+1}\uparrow} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$

Учитывая это, получим

$$|F(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left|F_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{-1,n+1}\uparrow} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant \varepsilon.$$

Итак, условие 2 для $F(z)$ также выполнено.

Перейдем к оценке неванлинновской характеристики $T(r, F) = m(r, F) + N(r, F)$ функции $F(z)$.

Сперва оценим $N(r, F) = \int\limits_0^r \frac{n(t, F)}{t}\, dt$. Обозначим через N_1 число полюсов $R_1(z)$, получим для $r > 1$

$$n(r, F) = N_1 + 2 \sum_{|\zeta_k| < r} n_k = N_1 + 2 \sum_{q^k < r} n_k = N_1 + 2 \sum_{k < \frac{\ln r}{\ln q}} n_k.$$

Применяя оценку (2′), получим

$$n(r, F) \leqslant N_1 + \left(C_1 + \frac{\ln \frac{Cq^2}{\pi \varepsilon}}{\ln \frac{1}{q}}\right)\frac{\ln r}{\ln q} + \frac{2 \ln q}{\ln \frac{1}{d}}\left(\frac{\ln r}{\ln q} + 1\right)\frac{\ln r}{\ln q} +$$

$$+ \frac{2}{\ln \frac{1}{d}} \sum_{q^k < r} \ln M(q^{k+1}).$$

Кроме того

$$\ln M(q^{k+1}) \leqslant \frac{1}{q^{k+1} - q^k} \int\limits_{q^k}^{q^{k+1}} \ln M(qt)\, dt \leqslant \frac{q}{q-1} \int\limits_{q^k}^{q^{k+1}} \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{q^k < r} \ln M(q^{k+1}) \leqslant \frac{q}{q-1} \int\limits_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt + \frac{q}{q-1} \ln M(qr).$$

Теперь для $n(r, F)$ получим оценку

$$n(r, F) \leqslant \frac{2q}{(q-1) \ln \frac{1}{d}} \left(\int\limits_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt + \ln M(qr) \right) + B_1 \ln^2 r + N_1,$$

где B_1 не зависит от r.

Учитывая, что для $t \in [q^{-1}, 1)$ $n(t, F) \leqslant N_1$, окончательно получим оценку для $N(r, F)$

$$N(r, F) \leqslant \frac{2q}{(q-1) \ln \frac{1}{d}} \left(\int\limits_1^r \int\limits_1^t \frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\, d\tau\, dt + \int\limits_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt \right) +$$

$$+ B \ln^3 r + N_1 \ln q,$$

где B не зависит от $r > 1$.

Перейдем теперь к оценке $m(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{i\theta})|\, d\theta$. Предположим, что $r \geqslant q^2$. Пусть h — то целое, для которого $r \in [q^h, q^{h+1})$. Тогда ясно, что $h > 2$, и пусть l—наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$q^{l-1} > \frac{1}{1 - \sin \frac{\beta - \alpha}{4}}.$$

Очевидно, что для такого l и $r \in [q^h, q^{h+1})$ имеем

$$re^{i\theta} \bar{\in} V_{h+l} \cup V'_{h+l}.$$

Возьмем теперь j настолько большим, чтобы выполнялось

$$|F(re^{i\theta})-F_j(re^{i\theta})|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3} \text{ и } j>h+l.$$

Тогда получим

$$|F_j(re^{i\theta})-F_{h+l}(re^{i\theta})|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

И далее

$$\ln^+|F(re^{i\theta})|\leqslant\ln^+|F_{h+l}(re^{i\theta})|+\ln 2.$$

Учитывая, что при $r\in[q^h, q^{h+1})$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_{-1,h-1}\uparrow}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,$$

получим

$$|F_{h-2}(re^{i\theta})|\leqslant\varepsilon.$$

Эта оценка возможна, потому что $re^{i\theta}\overline{\in}V_{h-2}\cup V'_{h-2}$. Отсюда

$$\ln^+|F(re^{i\theta})|\leqslant\ln^+|F_{h+l}(re^{i\theta})-F_{h-2}(re^{i\theta})|+2\ln 2.$$

Имеем

$$|F_{h+l}(re^{i\theta})-F_{h-2}(re^{i\theta})|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h-1}}|f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-re^{i\theta}}\right||d\zeta|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h+l+1}}|f(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-re^{i\theta}}\right||d\zeta|.$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h+l+1}}|f(\zeta)|\frac{1}{|\zeta-re^{i\theta}|}|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\,\frac{M(q^{h+l+1})}{q^{h+l+1}-q^{h+1}}\,q^{h+l+1}\cdot 2\pi\leqslant\frac{q^l}{q^l-1}\cdot M(q^{l+1}r), \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{h-1}}|f(\zeta)|\frac{1}{|\zeta-re^{i\theta}|}|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\,\frac{M(q^{h-1})}{q^h-q^{h-1}}\,q^{h-1}\,2\pi\leqslant\frac{1}{q-1}M(r). \tag{5}$$

Оценим $\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|.$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\setminus\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=h-1}^{h+l}\int\limits_{l_k\cup l'_k}|f(\zeta)|\,|Q(\zeta, re^{i\theta})|\,|d\zeta|.$$

При $\zeta\in l_k$ имеем

$$|Q(\zeta, re^{i\theta})|=|Q_k(\zeta, re^{i\theta})|\leqslant\sum_{j=0}^{n_k}\frac{|\zeta_{k+1}-\zeta_k|^j}{|re^{i\theta}-\zeta_k|^{j+1}}\leqslant$$

$$\leqslant (n_k+1)\left(1+\frac{|\zeta_{k+1}-\zeta_k|^{n_k}}{|re^{i\theta}-\zeta_k|^{n_k+1}}\right),$$

а при $\zeta\in l_k'$ имеем

$$|Q(\zeta, re^{i\theta})|\leqslant (n_k+1)\left(1+\frac{|\zeta_{k+1}'-\zeta_k'|^{n_k}}{|re^{i\theta}-\zeta_k'|^{n_k+1}}\right).$$

Введем функцию $\delta(re^{i\theta})$ следующим образом:

$$\delta(re^{i\theta})=\min\{\min_{h-1\leqslant k\leqslant h+l}\{|re^{i\theta}-\zeta_k|\};\ \min_{h-1\leqslant k\leqslant h+l}\{|re^{i\theta}-\zeta_k'|\}\}.$$

Отсюда для $\zeta\in l_k\cup l_k'$ получим

$$|Q(\zeta, re^{i\theta})|\leqslant (n_k+1)\left(1+q^{ln_k}\frac{r^{n_k}}{[\delta(re^{i\theta})]^{n_k+1}}\right).$$

Здесь мы использовали тот факт, что для $k\in[h-1, h+l)$ и $r\in[q^h, q^{h+1})$ имеем

$$|\zeta_{k+1}-\zeta_k|=|\zeta_{k+1}'-\zeta_k'|\leqslant q^l\cdot r.$$

Учитывая то, что для $\zeta\in\gamma_{h+l}\diagdown\gamma_{h-2}$ и $r\in[q^h, q^{h+1})$

$$|f(\zeta)|\leqslant M(q^{h+l+1})\leqslant M(q^{l+1}r),$$

$$\int\limits_{l_k\cup l_k'}|d\zeta|\leqslant 2q^l r, \text{ когда } k\in[h-1, h+l],$$

получим

$$\int\limits_{l_k\cup l_k'}|f(\zeta)|\,|Q(\zeta, re^{i\theta})|\,|d\zeta|\leqslant 2q^l(n_k+1)\,M(q^{l+1}r)\left[r+q^{ln_k}\left(\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\right)^{n_k+1}\right].$$

А так как n_k возрастает с возрастанием k, то

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\diagdown\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|\leqslant\frac{q^l(l+1)(n_{h+l}+1)\,M(q^{l+1}r)}{\pi}\times$$

$$\times\left[r+q^{ln_{h+l}}\left(\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\right)^{n_{h+l}+1}\right].$$

Отсюда получим следующую оценку:

$$\ln^+\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{h+l}\diagdown\gamma_{h-2}}f(\zeta)\,Q(\zeta, re^{i\theta})\,d\zeta\right|\leqslant\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln^+n_{h+l}+\ln r+$$

$$+n_{h+l}\,l\ln q+(n_{h+l}+1)\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}+\ln^+\frac{q^l(l+1)}{\pi}+2\ln 2.$$

Учитывая (4) и (5), получим

$$\ln^+|F(re^{i\theta})|\leqslant 3\ln^+M(q^{l+1}r)+n_{h+l}\left(l\ln q+\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}+1\right)+\ln r+$$

$$+\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}+\ln^+\frac{q^l(l+1)}{\pi}+\ln^+\frac{q^l}{q^l-1}+\ln^+\frac{1}{q-1}+2\ln 2+\ln 3. \tag{6}$$

По определению $n_{h+l}=\bar{n}(q^l r)$ для $r\in[q^h, q^{h-1})$, а используя (2'), получим

$$n_{h+l}\leqslant C_1+\frac{\ln\left\{M(q^{l+1}r)\dfrac{Cq^{2(l+1)}r^2}{\pi\varepsilon}\right\}}{\ln\dfrac{1}{d}} \quad \text{при } r\in[q^h, q^{h+1}).$$

При интегрировании (6) от 0 до 2π будет фигурировать $\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\,d\theta$.

Однако такой интеграл оценивается независимо от r (см. [3]).

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{r}{\delta(re^{i\theta})}\,d\theta\leqslant 2\ln 2\,(l+2)+\frac{1}{2}\cdot$$

Теперь с учетом вышесказанного из (6) получим

$$m(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|F(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant A''(\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln r+1) \text{ для } r\geqslant q^2,$$

где A'' не зависит от r.

Отсюда следует окончательная оценка для $m(r,F)$ при $r\geqslant 1$;

$$m(r,F)\leqslant A'(\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln r+1), \tag{7}$$

где A' не зависит от r.

Из (3) и (7) получим искомую оценку для $T(r,F)$

$$T(r,F)\leqslant A\left(\int\limits_1^r\int\limits_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau dt+\int\limits_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\ln^+M(q^{l+1}r)+\ln^2 r+1\right)$$

для $r\geqslant 1$, где A не зависит от r.

Из теоремы 1 можно вывести интересное следствие о приближении голоморфной в угле функции мероморфной с касанием в бесконечности, с оценкой роста этой мероморфной функции.

Следствие 1. *Пусть* $0<\alpha<\beta<2\pi$ *и* $f(z)$ — *голоморфная функция в угловой области* Δ_β. *Тогда для всякого* $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{\alpha}\right)$, $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $q\in\left(1, 1+\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$ *существует мероморфная функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $|f(z)-F(z)|\leqslant\varepsilon e^{-|z|^\rho}$ *для* $z\in\Delta_\alpha$, $|z|\geqslant 1$;

$$2.\ T(r, F) \leqslant A\left(\int\limits_1^r\int\limits_1^t \frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\, d\tau dt + \int\limits_1^r \frac{\ln M(q\tau)}{t}\, dt + \ln^+ M(q^{l+1} r) + r^\rho\right)$$

для $r \geqslant 1$, *где* A *не зависит от* r, *а* $T(r, F)$, $M(r)$, l *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

Доказательство. Рассмотрим функцию $e^{K_\rho z^\rho}$, где $K_\rho > 0$ пока произвольная константа. Эта функция голоморфна в некотором угле Δ_γ, где $0 < \beta < \gamma < 2\pi$, и максимум модуля ее не превышает $e^{K_\rho z^\rho}$ для $|z| \leqslant r$. Тогда по теореме 1 существует мероморфная функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям:

1. $|\omega(z) - e^{K_\rho z^\rho}| \leqslant \varepsilon$ для $z \in \Delta_\beta$, $|z| \geqslant 1$;
2. $T(r, \omega) \leqslant A' r^\rho$ для $r \geqslant 1$,

где A' не зависит от r.

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(z)\,\omega(z)$. Эта функция голоморфна в угле Δ_β и имеет в нем максимум модуля, не превышающий $M(r)\,(e^{K_\rho z^\rho} + \varepsilon)$, где $M(r)$ — максимум модуля $f(z)$ в области $\Delta_\beta \cap \{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant r\}$. Вновь применяя теорему 1, получим, что существует мероморфная функция $G(z)$, удовлетворяющая условиям:

1. $|\varphi(z) - G(z)| \leqslant \varepsilon$ для $z \in \Delta_\alpha$, $|z| \geqslant 1$;

$$2.\ T(r, G) \leqslant A''\left(\int\limits_1^r\int\limits_1^t \frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\, d\tau dt + \int\limits_1^r \frac{\ln M(qt)}{t}\, dt + \ln^+ M(q^{l+1} r) + r^\rho\right)$$

для $r \geqslant 1$, где q и l определяются, как и в теореме 1, а A'' не зависит от r.

Докажем, что искомой мероморфной функцией будет функция $F(z) = \dfrac{G(z)}{\omega(z)}$. Для $z \in \Delta_\alpha$, $|z| \geqslant 1$ имеем

$$|f(z) - F(z)| \leqslant \varepsilon\, |\omega(z)|^{-1}.$$

Кроме того, из свойств $\omega(z)$ получим

$$|\omega(z)| \geqslant e^{K_\rho \cos\left(\frac{\alpha}{2}\rho\right)|z|^\rho} - \varepsilon \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha,\ |z| \geqslant 1.$$

Теперь выберем K_ρ настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$e^{K_\rho \cos\left(\frac{\alpha}{2}\rho\right) r^\rho} - \varepsilon \geqslant e^{r^\rho} \quad \text{для } r \geqslant 1.$$

Отсюда

$$|\omega(z)| \geqslant e^{|z|^\rho} \quad \text{для } z \in \Delta_\alpha,\ |z| \geqslant 1.$$

Окончательно получим

$$|f(z)-F(z)|\leqslant \varepsilon e^{-|z|^{\rho}} \text{ для } z\in\Delta_{\alpha},\ |z|\geqslant 1.$$

Условие 2 также выполняется в силу того, что

$$T(r,F)\leqslant T(r,G)+T(r,\omega)+\text{const}.$$

Отсюда

$$T(r,F)\leqslant A\left(\int_1^r\int_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau\,dt+\int_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\ln^+ M(q^{l+1}r)+r^{\rho}\right)$$

для $r\geqslant 1$, где A не зависит от r, и следствие 1 доказано.

Замечание 1. Условие 2 теоремы 1 дает возможность обобщить эту теорему на случай нескольких непересекающахся углов вида $\Delta_{\alpha_j}=\left\{z\in\mathrm{C}:\ |\arg z-\theta_j|\leqslant\frac{\alpha_j}{2}\right\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$, если в больших непересекающихся углах Δ_{β_j} заданы голоморфные функции $f_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,n)$. Рассмотрев для каждого из этих углов мероморфную функцию $F_j(z)$, удовлетворяющую условию теоремы 1, где вместо ε берется $\frac{\varepsilon}{n}$, за искомую функцию можно взять $F(z)=\sum_{j=1}^{n}F_j(z)$.

Учитывая это замечание и повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве следствия 1 с некоторыми изменениями, получим следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $0\leqslant\theta_1<\cdots<\theta_n<2\pi$, $\Delta_{\alpha_j}=\left\{z\in\mathrm{C}:\ |\arg z-\theta_j|\leqslant\frac{\alpha_j}{2}\right\}$, $\Delta_{\beta_j}=\left\{z\in\mathrm{C}:\ |\arg z-\theta_j|\leqslant\frac{\beta_j}{2}\right\}$, *причем* $\Delta_{\alpha_j}\subset\Delta_{\beta_j}$, *где* $\bigcap_{j=1}^{n}\Delta_{\beta_j}\setminus\{0\}=\varnothing$, *и* $f_j(z)$ — *голоморфные функции в* Δ_{β_j} $(j=1,2,\cdots,n)$. *Тогда для произвольного набора чисел* $\rho_j\in\left(0,\frac{\pi}{\alpha_j}\right)$ $(j=1,2,\cdots,n)$, $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $q\in\left(1,1+\sin\frac{\delta}{2}\right)$, *где* $\delta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{\beta_j-\alpha_j}{2}\right\}$ *существует мероморфная функция* $F(z)$, *удовлетворяющая условиям*:

1. $|f_j(z)-F(z)|\leqslant\varepsilon e^{-|z|^{\rho_j}}$ *для* $z\in\Delta_{\alpha_j}$, $|z|\geqslant 1$ $(j=1,2,\cdots,n)$,

2. $$T(r,F)\leqslant A\left(\int_1^r\int_1^t\frac{\ln M(q\tau)}{\tau t}\,d\tau\,dt+\int_1^r\frac{\ln M(qt)}{t}\,dt+\ln^+ M(q^{l+1}r)+r^{\rho}\right)$$

для $r\geqslant 1$, *где* l — *наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству*

$$q^{l-1} > \frac{1}{1-\sin\frac{\delta}{2}},\ M(r) = \max_{1\le j\le n}\{M(r, f_j)\},\ \rho = \max_{1\le j\le n}\{\rho_j\},$$

а A не зависит от r.

Замечание 2. Для доказательства теоремы 2 достаточно в доказательстве следствия 1 взять за $\omega(z)$ мероморфную функцию, которая в углах $\Delta_\gamma \supset \Delta_{\beta_j}$ равномерно приближает функции $\varphi_j(z) = \exp\{e^{-i\rho_j\theta_j}\varkappa_j z^{\rho_j}\}$ ($j=1, 2, \cdots, n$). Такая функция $\omega(z)$ существует, в силу замечания 1. Аналогично, за $G(z)$ берем мероморфную функцию, равномерно приближающую в Δ_{α_j} функцию $\omega(z) f_j(z)$ ($j=1, 2, \cdots, n$).

Теперь применим теорему 2 к доказательству одной известной теоремы из теории распределения значений, которую мы сформулируем как

Следствие 2. *Пусть заданы произвольные конечные комплексные числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Тогда для всякого $0<\rho<\infty$ существует мероморфная функция $F(z)$ конечного порядка ρ и нормального типа, имеющая числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ своими дефектными значениями.*

Доказательство. Для всякого конечного $\rho>0$ существует α для которого выполняются условия:

$$\rho \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right),\quad 0 < n\alpha < 2\pi.$$

По теореме 2 существует мероморфная функция $F(z)$, удовлетворяющая условиям:

1. $|F(z) - a_j| \leqslant \varepsilon e^{-|z|^\rho}$ для $z \in \Delta_{\alpha_j}$, $|z| > 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$;

2. $T(r, F) \leqslant Ar^\rho$ для $r > 1$,

где $\Delta_{\alpha_j} = \left\{z \in \mathbf{C}\colon |\arg z - \theta_j| \leqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$, $\bigcap_{j=1}^{n} \Delta_{\alpha_j} \setminus \{0\} = \varnothing$, а A не зависит от r. Функция $F(z)$ будет искомой.

Покажем сперва, что значения $a_1, a_2, \cdots, a_n$ являются для нее дефектными.

Действительно

$$m(r, a_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|F(re^{i\theta}) - a_j|}\,d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_j-\frac{\alpha}{2}}^{\theta_j+\frac{\alpha}{2}} \ln^+ \frac{1}{|F(re^{i\theta}) - a_j|}\,d\theta.$$

Отсюда и из свойства 1. $F(z)$ для $r > 1$ получим

$$m(r, a_j) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_j-\frac{\alpha}{2}}^{\theta_j+\frac{\alpha}{2}} \ln^+ \frac{e^{r^\rho}}{\varepsilon}\,d\theta = \frac{\alpha}{2\pi}\left(r^\rho + \ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда и из свойства 2. $F(z)$ имеем для $r \geqslant 1$

$$\delta(a_j) = \lim_{r\to\infty} \frac{m(r, a_j)}{T(r, F)} \geqslant \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2\pi}\left(r^\rho + \ln\frac{1}{\varepsilon}\right)}{A r^\rho} = \frac{\alpha}{2\pi A} > 0.$$

То, что порядок $F(z)$ — ρ и тип нормален, вытекает из неравенства

$$T(r, F) = T(r, a_j) + O(1) \geqslant m(r, a_j) + O(1) \geqslant \frac{\alpha}{2\pi} r^\rho + O(1).$$

Отсюда

$$A' r^\rho \leqslant T(r, F) \leqslant A r^\rho,$$

где A' и A не зависят от r.

Из этого неравенства получим

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log T(r, F)}{\log r} = \rho,$$

$$0 < A' \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r, F)}{r^\rho} \leqslant A < +\infty.$$

Итак, следствие 2 доказано.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность моему научному руководителю Н. У. Аракеляну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.XII.1970

Լ. Ա. ՏԵՐ-ԻՍՐԱՅԵԼՅԱՆ. Անկյան մեջ հոլոմորֆ ֆունկցիաների հավասարաչափ և շոշափող մոտարկումը մերոմորֆ ֆունկցիաներով և նրանց աճի գնահատականը (*ամփոփում*)։

Հոդվածում ցույց է տրված, որ հավասարաչափ մոտարկումը անկյան մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաներով կարելի է կատարել այնպես, որ մոտարկող ֆունկցիաների կարգը և տիպը հավասար են մոտարկվող ֆունկցիաների կարգին և տիպին։ Այնուհետև դիտարկվում է մերոմորֆ ֆունկցիաներով շոշափող մոտարկման խնդիրը, որը բերվում է հավասարաչափ մոտարկման խնդրին։ Հոդվածի վերջում տրվում է արժեքների բաշխման տեսության մի հայտնի թեորեմի նոր ապացույց։

L. A. TER-ISRAJELIAN. *Uniform and tangent approximation of holomorphic in an angle functions by meromorphic functions and estimation of their growth*
(summary)

It is shown in the paper that the uniform approximation in an angle by meromorphic functions may be carried out in such a way, that the order and the type of approximating functions coincide with those for the functions being approximated. The problem of tangent approximation by meromorphic functions is also considered by reduction to the problem of uniform approximation. A new proof of a known theorem from theory of distribution of the values is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш*. О приближении голоморфных функций целыми функциями, ДАН СССР, 47, № 4, 1945, 243—245.
2. *С. Н. Мергелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122
3. *У. Хейман*. Мероморфные функции, Изд. „Мир", 1966.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S