ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Уважаемые граждане!

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ

НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР НА 1971 ГОД

«АСТРОФИЗИКА», на русском языке, периодичность—в год 4 номера, годовая подписная плата 4 рубля.

«ИСТОРИКО-ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ», периодичность — в год 4 номера, годовая подписная плата 3 рубля 20 коп.

«ДОКЛАДЫ», периодичность—в год 10 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

«ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И КЛИНИЧЕСКОЙ МЕДИЦИНЫ», периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40 коп.

«КРОВООБРАЩЕНИЕ», на русском языке, периодичность — 6 номеров в год, годовая подписная плата 1 руб. 80 к.

«ВЕСТНИК ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК», периодичность — в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность — в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *Науки о Земле,* периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ХИМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность — в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 80 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *технических* наук, периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *математика,* периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *механика,* периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *физика,* периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

Все журналы, кроме Астрофизики, издаются на армянском и русском языках, а резюме на одном из этих языков.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ:

В городских отделах, районных агентствах «Союзпечать», в пунктах приема подписки, в районных узлах и во всех отделениях связи, на предприятиях, в учреждениях, учебных заведениях, совхозах, колхозах, строительных объектах, у общественных распространителей печати.

Прием подписки с января 1971 года на все советские газеты и журналы будет производиться до 25 ноября. После указанного срока подписка будет оформляться на февраль и последующие месяцы 1971 года.

СОЮЗПЕЧАТЬ

Академик М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

Этот выпуск журнала „Математика" редакция посвящает академику МИХАИЛУ АЛЕКСЕЕВИЧУ ЛАВРЕНТЬЕВУ в связи с его семидесятилетием, желая ему крепкого здоровья и новых творческих успехов.

Воздавая должное выдающимся научным достижениям юбиляра и его громадным заслугам в деле организации науки в общегосударственном масштабе, редакция рада особо отметить большую идейную роль академика М. А. Лаврентьева в развитии математики в Армении.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ФАКТОРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В КОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ

1°. Основная теорема алгебры о разложении на линейные множители полиномов посредством их нулей была распространена на целые функции Вейерштрассом и Адамаром. Вместо конечных произведений основной теоремы алгебры, в случае целых функций, ими строились бесконечные произведения со специальными множителями, обеспечивающими их сходимость во всей конечной плоскости.

Эти ставшие классическими результаты для целых функций конечного роста имеют особенно простые и законченные формулировки (см., напр., [1], гл. VII).

Дальнейшее продвижение в этом направлении было достигнуто в работе Р. Неванлинны [2, 3], где была установлена теорема о факторизации для мероморфных на всей конечной плоскости функций с характеристикой конечного порядка роста.

Для любого натурального $q \geqslant 0$ определим первичные множители Вейерштрасса $E(z;\ q)$, положив

$$E(z;\ 0)=1-z,\quad E(z;\ q)=(1-z)\exp\left\{\sum_{j=1}^{q}\frac{z^j}{j}\right\}. \tag{1}$$

Тогда указанная теорема заключается в следующем.

Теорема А*. *Пусть $F(z)$ мероморфна в конечной плоскости с отличными от $z=0$ нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$. Предположим, что при некотором натуральном $q \geqslant 0$ выполняется одно из следующих двух условий:*

$$\lim_{R\to+\infty}\sup\frac{T(R;F)}{R^{q+1}}=0 \tag{2}$$

или

$$\lim_{R\to+\infty}\inf\frac{T(R;F)}{R^{q+1}}=0. \tag{3}$$

Тогда функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z)=z^{\lambda}e^{P_q(z)}\lim_{R\to+\infty}\frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R}E\left(\frac{z}{a_\mu};\ q\right)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R}E\left(\frac{z}{b_\nu};\ q\right)}\quad (|z|<\infty), \tag{4}$$

* См. также [4], теорему 1.9.

где $|\lambda|$ — *порядок нуля* (*при* $\lambda \geqslant 1$) *или полюса* (*при* $\lambda \leqslant -1$) *для* $F(z)$ *в точке* $z=0$, $P_q(z)$ — *некоторый полином степени* $\leqslant q$, *а предел в* (4) *берется по всем* $R \to +\infty$ *в случае* (2) *и по некоторой последовательности значений в случае* (3).

Эта теорема доказывается методом, восходящим к Р. Неванлинна [5], и заключается в том, что в условиях теоремы представляется возможным совершить предельный переход при $R \to +\infty$, а затем $q+1$-кратное интегрирование в формуле, которая получается путем $q+1$-кратного дифференцирования формулы Иенсена-Неванлинны, записанной для произвольного круга $|z|<R$.

Ввиду этого метод этот, очевидно, неприменим к мероморфным функциям бесконечного порядка роста, т. е. к функциям, для которых $T(R; F)$ ни при каком натуральном $q \geqslant 0$ не удовлетворяет условиям вида (2) или (3).

2°. Для функций, аналитических вне данного множества E ее особых точек, в частности, для функций, аналитических в круге конечного радиуса, некоторые аналоги построений Вейерштрасса и Адамара встречаются в работах Е. Пикара [6] и В. Голубева [7]. Но несколько позже в этом направлении наиболее глубокий и полный результат относительно факторизации мероморфных в круге $|z|<1$ функций был установлен Р. Неванлинной.

Как хорошо известно, определив с помощью характеристической функции $T(r; F)$ класс N как множество мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T(r; F)\} < +\infty, \tag{5}$$

Р. Неванлинна установил свою фундаментальную теорему факторизации класса N (см. [3], гл. VII).

3°. В давних работах автора [8, 9], по-видимому, была сделана первая попытка факторизации мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых характеристика $T(r; F)$ подчинена условию вида

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\, T(r; F)\, dr < +\infty \quad (0<\alpha<+\infty). \tag{6}$$

Значительно позже автор возвратился к этой проблеме в более общей постановке (см. [10], гл. IX) и, пользуясь аппаратом дробных интегро дифференциальных операторов в смысле Римана-Лиувилля $D^{-\alpha}$ $(-1< <\alpha<+\infty)$, построил теорию классов N_α $(-1<\alpha<+\infty)$, мероморфных в круге $|z|<1$ функций и установил общую теорему их факторизации в духе теоремы Р. Неванлинны, содержащую в себе эту теорему в качестве специального случая, когда параметр $\alpha=0$.

Наконец, метод и идея, лежащие в основе теории классов N_α, получили дальнейшее развитие и завершение в недавнем исследовании автора [11], где удалось построить полную теорию факторизации функций, мероморфных в круге, путем систематического применения аппарата обобщенных операторов типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$, введенных и изученных им предварительно в работе [12].

4°. Настоящая работа посвящена проблеме факторизации функций, мероморфных во всей конечной плоскости, и, как по своей идее, так и по методу, она является дальнейшим приложением и расширением идеи и метода указанного выше исследования автора. По этой причине нам необходимо привести здесь беглый обзор и формулировки некоторых основных результатов работ [11, 12], на которые нам придется существенно опираться при изложении данной статьи.

Обобщенный оператор типа Римана-Лиувилля $L^{(\omega)}$ ассоциируется с произвольной функцией $\omega(x)$ класса Ω, определяемой условиями

1) $\omega(x)$ *положительна* и *непрерывна* на $[0, 1)$, причем $\omega(0)=1$,

2) $\lim\limits_{x\to+0} \sup \{|\omega(x)-1|\cdot x^{-1}\} < +\infty$,

3) $\displaystyle\int_0^1 \omega(x)\,dx < +\infty$.

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$, $r\in(0, 1)$ оператор $L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ определяется следующим образом:

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\} \equiv -\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1 \varphi(r\cdot\tau)\,dp(\tau)\right\},\quad r\in(0, 1), \tag{7}$$

где непрерывная на $[0, 1)$ функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0)=1,\quad p(\tau)=\tau\int_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,\quad \tau\in(0,1]. \tag{8}$$

В предположении, что $\omega'(x)\in L(0, 1)$ в классе кусочно непрерывных на $[0, 1)$ функций $\varphi(r)$, оператор $L^{(\omega)}$ допускает простое представление

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\} = \omega(1)\cdot\varphi(r) - \int_0^1 \varphi(r\cdot\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau,\quad r\in(0, 1). \tag{9}$$

Применение оператора $L^{(\omega)}$ к функции вида r^λ $(\lambda>0)$ приводит к формулам

$$L^{(\omega)}\{r^\lambda\} = \Delta(\lambda)\,r^\lambda \quad (\lambda>0), \tag{10}$$

где

$$\Delta(0)=1,\quad \Delta(\lambda)=\lambda\int_0^1 \omega(x)\,x^{\lambda-1}\,dx \quad (0<\lambda<+\infty). \tag{11}$$

Последовательность положительных чисел

$$\Delta_k = \Delta(k) \quad (k=0, 1, 2, \cdots) \tag{12}$$

позволяет определить аналитическую в круге $|z|<1$ функцию

$$S(z;\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}. \tag{13}$$

Наряду с ней вводятся также функции

$$V_\omega(re^{i\varphi};\zeta)=L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\}, \tag{14}$$

$$W_\omega(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(e^{-i\theta}z;\omega)\,V_\omega(e^{i\theta};\zeta)\,d\theta\equiv$$

$$\equiv\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\right\}\frac{z^k}{\Delta_k}\quad(|z|<1,\ 0<|\zeta|\leqslant 1), \tag{15}$$

$$A_\omega(z;\zeta)\equiv\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\omega(z;\zeta)\}\quad(|z|<1,\ 0<|\zeta|\leqslant 1). \tag{16}$$

Эти функции позволяют установить целый класс формул типа Иенсена-Неванлинны, ассоциированных с произвольной функцией $\omega(x)\in\Omega$.

Справедлива следующая теорема, специальный случай которой, когда $\omega(x)\equiv 1$, приводит нас к классической формуле Иенсена-Неванлинны.

Теорема Б. *Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$, в окрестности $z=0$ имеет разложение вида*

$$F(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0)$$

и имеет нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$, отличные от $z=0$.

Тогда для любой функции $\omega(x)\in\Omega$ и для любого $\rho\ (0<\rho<1)$ справедлива формула

$$\mathrm{Log}\,F(z)=i\,\mathrm{Arg}\,c_\lambda+\lambda k_\omega+\lambda\log\frac{z}{\rho}+$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<\rho}\log A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{a_\mu}{\rho}\right)-\sum_{0<|b_\nu|<\rho}\log A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{b_\nu}{\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{i\theta}\frac{z}{\rho};\omega\right)L^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\}\,d\theta\quad(|z|<\rho), \tag{17}$$

где

$$k_\omega=\int_0^1\frac{1-\omega(x)}{x}\,dx. \tag{18}$$

Как в теории Р. Неванлинны, так и здесь общая формула (17) при $z=0$ естественным образом приводит к определению функции

$$T_\omega(r;\ F) \equiv m_\omega(r;\ F) + N_\omega(r;\ F), \tag{19}$$

названной нами ω-характеристикой, где

$$m_\omega(r; F) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\{\log|F(re^{i\vartheta})|\}\, d\vartheta,\quad L_{(+)}^{(\omega)} = \max\{L^{(\omega)},\ 0\}, \tag{20}$$

$$N_\omega(r; F) = \int_0^r \frac{n(t;\ \infty) - n(0,\ \infty)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{r}\right) dt + n(0;\ \infty)\{\log r - k_\omega\}, \tag{21}$$

а $n(t;\ \infty)$ — числовая функция полюсов $F(z)$.

Наконец, с каждой функцией $\omega(x) \in \Omega$ ассоциируется класс $N\{\omega\}$ как множества мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\{T_\omega(r;\ F)\} < +\infty. \tag{22}$$

Важное семейство функций класса $N\{\omega\}$ дается в следующей теореме.

Теорема В. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega$ *и* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$ — *произвольная последовательность комплексных чисел.*

1°. *Для сходимости бесконечного произведения*

$$B_\omega(z;\ z_k) \equiv B_\omega(z) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\omega(z;\ z_k) \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx < +\infty. \tag{24}$$

2°. *Для любого сходящегося произведения* $B_\omega(z)$ *имеем*

$$B_\omega(z) \in N\{\omega\} \text{ и } B_\omega^{-1}(z) \in N\{\omega\}. \tag{25}$$

Наконец, наиболее важные утверждения теории факторизации функций, мероморфных в круге, можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема Г. 1°. *Класс* $N\{\omega\}$ *совпадает с множеством функций, допускающих в круге* $|z|<1$ *представление вида*

$$F(z) = e^{i\gamma+\lambda k_\omega} z^\lambda \frac{B_\omega(z;\ a_\mu)}{B_\omega(z;\ b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\psi(\theta)\right\}, \tag{26}$$

где

$$\sum_{(\mu)}\int_{|a_\mu|}^{1}\omega(x)\,dx < +\infty,\quad \sum_{(\nu)}\int_{|b_\nu|}^{1}\omega(x)\,dx < +\infty, \tag{27}$$

$\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция с конечным полным изменением на $[0, 2\pi]$, $\lambda \gtrless 0$ — любое целое, γ — любое вещественное число.

2°. *Для любой мероморфной в круге $|z|<1$ функции $F(z)$ существует некоторая $\omega_F(x) \in \Omega$ такая, что $F(z) \in N\{\omega_F\}$.*

Утверждение 1° этой теоремы в специальном случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, совпадает с основной теоремой Р. Неванлинны о факторизации класса N.

5°. Как указывалось уже выше, в настоящей работе путем дальнейшего расширения и обобщения метода нашего исследования [11] приводится принципиально новый способ решения проблемы факторизации функций, мероморфных во всей конечной плоскости, и, в частности, целых функций.

С этой целью в § 1 определяется класс Ω_∞, как множество функций $\omega(x)$, подчиненных условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и не возрастает на полуоси $[0, +\infty)$, причем $\omega(0)=1$,

2) $\limsup\limits_{x \to +0} \{|\omega(x)-1|\, x^{-1}\} < +\infty$,

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty$.

Далее, для любого R $(0<R<+\infty)$ с каждой функцией $\omega(x) \in \Omega_\infty$ ассоциируется оператор $L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ в классах допустимых функций, определенных на интервале $(0, R)$.

Посредством оператора $L_R^{(\omega)}$ устанавливаются аналоги формул Коши, Шварца и Пуассона для круга $|z| < R$ (теоремы 1 и 2) и приводится обобщение теоремы Б на случай функций, мероморфных в конечной плоскости (теорема 3). На этом пути вводятся функции $C_R(z; \omega)$, $S_R(z; \omega)$, $W_\infty^{(R)}(z; \zeta)$ и $A_\infty^{(R)}(z; \zeta)$, переходящие в соответствующие вышеупомянутые функции $C(z; \omega)$, $S(z; \omega)$ и $W_\infty(z; \zeta)$ и $A_\infty(z; \zeta)$ при $R=1$.

В § 2 для мероморфной в конечной плоскости функции $F(z)$ приводится определение функций $\tilde{m}_\infty(R; F)$, $\tilde{N}_\infty(R; F)$ и $\tilde{T}_\infty(R; F)$ — аналогов тех же упомянутых выше функций, введенных для круга. Далее приводятся некоторые важные свойства и оценки для функции $\tilde{T}_\infty(R; F)$, которую мы вновь называем ω-характеристикой (теоремы 4, 5 и 6).

Наконец, в § 3 приводится определение класса $N_\infty\{\omega\}$ мероморфных в конечной плоскости функций, аналогичное определению класса $N\{\omega\}$. А именно: $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$, если

$$\sup_{0<r<+\infty} \{\tilde{T}_\infty(r; F)\} < +\infty. \tag{28}$$

В лемме 1 указывается необходимое условие для нулей $\{a_\mu\}$ и полюсов $\{b_\nu\}$, если $F(z) \in N_\infty\{\omega\}$. Эти условия должны сыграть важную роль при исследовании бесконечных произведений вида

$$\prod_{0<|a_\mu|<\infty} A_\infty^{(\omega)}(z; a_\mu), \quad \prod_{0<|b_\nu|<\infty} A_\infty^{(\omega)}(z; b_\nu). \tag{29}$$

В настоящей статье этого вопроса мы касаться не будем.

В заключение параграфа доказывается основная теорема 7 о факторизации функций классов $N_\infty\{\omega\}$ и теорема 8 о факторизации произвольных мероморфных в конечной плоскости функций. Отметим, что теорема 7, будучи по своей формулировке близкой к теореме А. Р. Неванлинны, одновременно является хотя и не полным, но довольно близким аналогом общей теоремы Г о факторизации функций, мероморфных в круге.

§ 1. Формула типа Иенсена-Неванлинны

1.1. (а) Обозначим через Ω_∞ множество функций $\omega(x)$, непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ и подчиненных следующим условиям:

1) $\omega(x)$ *положительна и не возрастает на полуоси* $[0, +\infty)$, причем $\omega(0)=1$,

2)
$$\lim_{r\to+0} \sup \{|\omega(x)-1|\, x^{-1}\} < +\infty, \tag{1.1}$$

3)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty. \tag{1.2}$$

Для любого R $(0<R<+\infty)$ определим последовательность положительных чисел $\{\Delta_n(R)\}_0^\infty$, положив

$$\Delta_0(R)=1,\ \Delta_n(R)=n\int_0^R \omega(x)\cdot x^{n-1}\,dx \quad (n=1, 2,\cdots). \tag{1.3}$$

Заметим, что поскольку $\omega(x)\leqslant\omega(0)=1$ $(0\leqslant x<+\infty)$, при $n\geqslant 1$

$$\omega(R)\cdot R^n \leqslant \Delta_n(R) \leqslant R^n,$$

будем иметь

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Delta_n(R)} = R. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что степенной ряд

$$C_R(z;\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\Delta_n(R)}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{\Delta_n(R)} \quad (|z|<R) \tag{1.5}$$

определяет функцию $C_R(z;\omega)$, аналитическую в круге $|z|<R$.

б) Пусть функция $\varphi(r)$ непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$ и обладает кусочно непрерывной производной $\varphi'(r)$, суммируемой на любом отрезке $[0, R]$ $(0<R<+\infty)$. Тогда для любой функции $\omega(x)\in\Omega_\infty$ и при любом R $(0<R<+\infty)$ на промежутке $0\leqslant r\leqslant 1$ можно определить оператор

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}\equiv\varphi_{(\omega)}(r;\ R)\equiv$$

$$\equiv\varphi(0)+r\int\limits_0^R\varphi'(r\cdot\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau. \qquad (1.6)$$

Функция $\varphi_{(\omega)}(r;\ R)$ непрерывна на промежутке $0\leqslant r\leqslant 1$ и поэтому ее значение при $r=1$

$$\varphi_\omega(R)\equiv\varphi_{(\omega)}(1;\ R)\equiv$$

$$\equiv\varphi(0)+\int\limits_0^R\varphi'(\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau \qquad (1.7)$$

непрерывна на полуоси $0\leqslant R<+\infty$.

Легко проверить, что справедливы формулы

$$L_R^{(\omega)}\{r^n\}=\Delta_n(R)\,r^n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (1.8)$$

Отметим далее, что как невозрастающая функция, $\omega(\tau)$ почти всюду на $[0,+\infty)$ обладает производной $\omega'(\tau)$, суммируемой на любом отрезке $[0,\ R]$ $(0<R<+\infty)$. Поэтому после интегрирования по частям формулы (1.6) и (1.7) могут быть записаны также в виде

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=\omega(R)\,\varphi(Rr)-$$

$$-\int\limits_0^R\varphi(r\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau\quad(0\leqslant r\leqslant 1), \qquad (1.6')$$

$$\varphi_\omega(R)=L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}|_{r=1}=\omega(R)\,\varphi(R)-$$

$$-\int\limits_0^R\varphi(\tau)\,\omega'(\tau)\,d\tau\quad(0\leqslant R<+\infty). \qquad (1.7')$$

Отметим, наконец, что еще одно представление оператора $L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ можно получить, вводя в рассмотрение функцию

$$p_R(0)=1,\ p_R(\tau)=\tau\int\limits_\tau^R\frac{\omega(x)}{x^2}\,dx\quad(0<\tau\leqslant R). \qquad (1.8')$$

Заметив, с одной стороны, что справедливо тождество

$$p_R(\tau)-\tau p_R'(\tau)=\omega(\tau)\quad(0<\tau<R),$$

из (1.6) мы имеем при $0<r\leqslant 1$

$$L^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=\varphi(0)+\int\limits_0^{Rr}\varphi'(t)\,\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt=$$

$$=\varphi(0)+\int^{Rr}\varphi'(t)\left\{p_R\left(\frac{t}{r}\right)-\frac{t}{r}\,p_R'\left(\frac{t}{r}\right)\right\}dt=$$

$$=\frac{d}{dr}\left\{r\varphi(0)+r\int_0^{Rr}\varphi'(t)\,p_R\left(\frac{t}{r}\right)dt\right\}, \tag{1.9}$$

ввиду того, что $p_R(R)=0$.

С другой стороны, интегрированием по частям получим

$$-r\int_0^R \varphi(\tau\cdot r)\,dp_R(\tau)=\varphi(0)\,r+r^2\int_0^R \varphi'(r\cdot\tau)\,p_R(\tau)\,d\tau=$$

$$=\varphi(0)\,r+r\int_0^{Rr}\varphi'(t)\,p_R\left(\frac{t}{r}\right)dt \quad (0<r\leqslant 1).$$

Отсюда и из (1.9) мы приходим к третьему представлению оператора $L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}$ и функции $\varphi_{(\omega)}(R)$, а именно

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\}=-\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^R \varphi(r\tau)\,dp_R(\tau)\right\}_{r=1} \quad (0<r\leqslant 1), \tag{1.6''}$$

$$\varphi_{(\omega)}(R)=-\left\{r\int_0^R \varphi(r\tau)\,dp_R(\tau)\right\}'_{r=1}. \tag{1.7''}$$

1.2. (a) Одно из первых приложений оператора $L_R^{(\omega)}$ — это установление аналогов классических формул Коши, Шварца и Пуассона.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1.10}$$

аналитична в круге $|z|<R_0$ $(0<R_0\leqslant+\infty)$. *Тогда для любого* R $(0<$ $<R<R_0)$ *имеем:*

1°. *Функция*

$$L_R^{(\omega)}\{f(re^{i\varphi})\}\equiv f_{(\omega)}(re^{i\varphi};\,R)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Delta_n(R)(re^{i\varphi})^n \tag{1.11}$$

аналитична в круге $|z|\leqslant 1$.

2°. *Справедливы интегральные формулы типа Коши и Шварца*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\theta}z;\,\omega)\,f_\omega(e^{i\theta};\,R)\,d\theta \quad (|z|<R), \tag{1.12}$$

$$f(z)=i\,\mathrm{Im}\,f(0)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_R(e^{-i\theta}z;\,\omega)\,\mathrm{Re}\,\{f_\omega(e^{i\theta};\,R)\}\,d\theta \quad (|z|<R), \tag{1.13}$$

где функция $C_R(z;\omega)$ *определяется из* (1.5), *а функция*

$$S_R(z;\omega)=2\,C_R(z;\omega)-1\quad=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{\Delta_n(R)}. \tag{1.14}$$

Доказательство. 1°. Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<R_0$, то, по теореме Коши-Адамара, при любом $R\in(0,R_0)$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\frac{1}{R_0}<\frac{1}{R}.$$

Поэтому, в силу (1.4)

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\sqrt[n]{\Delta_n(R)\,|a_n|}<1,$$

откуда следует, что функция, определяемая степенным рядом (1.11), аналитична по крайней мере в замкнутом единичном круге $|z|\leqslant 1$.

Наконец, ввиду определения (1.6) оператора $L_R^{(\omega)}$ и равномерной сходимости разложения

$$f'(re^{i\varphi})=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n\,r^{n-1}\,e^{in\varphi},\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

на отрезке $0\leqslant r\leqslant R$, в силу (1.8), мы получим при $|re^{i\varphi}|\leqslant 1$

$$L_R^{(\omega)}\{f(re^{i\varphi})\}=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\Delta_n(R)\,(re^{i\varphi})^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\Delta_n(R)\,(re^{i\varphi})^n\equiv f_\omega(re^{i\varphi};\,R),$$

т. е. формулу (1.11).

2°. Отметим, что разложения

$$C_R(ze^{-i\vartheta};\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ze^{-i\vartheta})^n}{\Delta_n(R)}\quad(|z|<R), \tag{1.15}$$

$$f_\omega(e^{i\vartheta};\,R)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\Delta_k(R)\,e^{ik\vartheta}$$

равномерно сходятся относительно переменной ϑ $(0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi)$, а также что

$$\delta(k;\,n)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\vartheta}e^{-in\vartheta}\,d\vartheta=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}\quad ck;\ n=0,1,2,\cdots).$$

Тогда при $|z|<R$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_R(e^{-i\vartheta}z;\,\omega)\,f_\omega(e^{i\vartheta};\,R)\,d\vartheta=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{\Delta_k(R)}{\Delta_n(R)}\,\delta(k;\,n)\,z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z),$$

т. е. формулу (1.12).

Из тех же разложений (1.15) следует далее

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\vartheta}z;\,\omega)\,\overline{f_\omega(e^{i\vartheta};\,R)\,d\vartheta}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{a}_k \frac{\Delta_n(R)}{\Delta_n(R)}\,\delta(k;\,-n)\,z^n=\bar{a}_0=\overline{f(0)}\quad(|z|<R).$$

Итак, вместе с (1.12) справедлива также формула

$$\overline{f(0)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\vartheta}z;\,\omega)\,\overline{f_\omega(e^{i\vartheta};\,R)}\,d\vartheta\quad(|z|<R).\tag{1.12'}$$

Сложением (1.12) и (1.12′) получим

$$f(z)+\operatorname{Re}f(0)-i\operatorname{Im}f(0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_R(e^{-i\vartheta}z;\,\omega)\operatorname{Re}\{f_\omega(e^{i\vartheta};\,R\}\,d\vartheta,\tag{1.16}$$

откуда при $z=0$ следует также, что

$$\operatorname{Re}f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\{f_{(\omega)}(e^{i\vartheta};\,R)\}\,d\vartheta.\tag{1.16'}$$

Наконец, из (1.16) и (1.16′) получим

$$f(z)-i\operatorname{Im}f(0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{2\,C_R(e^{-i\vartheta}z;\,\omega)-1\}\operatorname{Re}\{f_\omega(e^{i\vartheta};\,R\}\,d\vartheta,$$

т. е. формулу (1.13) теоремы.

(б) Введем в рассмотрение функцию

$$P_R(\vartheta,\,r;\,\omega)=\operatorname{Re}S_R(re^{i\vartheta};\,\omega)=$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r^k}{\Delta_k(R)}\cos k\vartheta,\tag{1.17}$$

гармоническую в круге $|z|<R$.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в круге $|z|<R_0$ $(0<R_0\leqslant+\infty)$. Тогда для любого $R\,(0<R<R_0)$ функция*

$$u_{(\omega)}(re^{i\varphi};\,R)=L_R^{(\omega)}\{u(re^{i\varphi})\}\tag{1.18}$$

гармонична в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ и справедлива формула

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_R(\varphi-\vartheta,\ r;\ \omega)\,u_{(\omega)}(e^{i\vartheta};\ R)\,d\vartheta \tag{1.19}$$

$$(0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

Доказательство. Пусть $v(z)$ — сопряженная с $u(z)$ гармоническая в круге $|z|<R_0$ функция. Тогда функция

$$f(z)=u(z)+iv(z)$$

аналитична в круге $|z|<R_0$, а при любом $R\in(0,R_0)$ функция

$$f_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R)=L_R^{(\omega)}\{f(re^{i\varphi})\}=L_R^{(\omega)}\{u(re^{i\varphi})\}+$$

$$+iL_R^{(\omega)}\{v(re^{i\varphi})\}\equiv u_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R)+i\,v_{(\omega)}(re^{i\varphi};\ R)$$

аналитична в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$.

Следовательно, согласно формуле (1.13) теоремы 1, имеет место представление

$$f(z)=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_R(e^{-i\vartheta}z;\ \omega)\,u_{(\omega)}(e^{i\vartheta};\ R)\,d\vartheta\quad(|z|<R).$$

Приравнивая вещественные части в этой формуле и имея в виду определение (1.17) функции $P_R(\vartheta,\ r;\ \omega)$, мы приходим к представлению (1.19) теоремы.

1.3. (а) Пусть $F(z)$ мероморфна на всей z плоскости, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей

$$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_\mu|\leqslant\cdots$$

$$0<|b_1|\leqslant|b_2|\leqslant\cdots\leqslant|b_\nu|\leqslant\cdots \tag{1.20}$$

с условием, что *каждый нуль или полюс записывается столько раз, какова его кратность.*

Отметим при этом, что если множество $\{a_\mu\}$ или $\{b_\nu\}$ счетно, то, очевидно, соответственно будем иметь

$$\lim_{\mu\to+\infty}|a_\mu|=+\infty\quad\text{и}\quad\lim_{\nu\to+\infty}|b_\nu|=+\infty. \tag{1.21}$$

Пусть, далее, в окрестности точки $z=0$ функция $F(z)$ имеет разложение в ряд Лорана вида

$$F(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots\quad(c_\lambda\neq 0) \tag{1.22}$$

и, таким образом, при $\lambda\neq 0$ число $|\lambda|$ равно кратности нуля (если $\lambda\geqslant 1$) или полюса (если $\lambda\leqslant -1$) в точке $z=0$.

Установим формулу, позволяющую представить функцию $F(z)$ в любом круге $|z|<R$ $(0<R<+\infty)$.

С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$W_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{R}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl\{\zeta^{-k}\int\limits_{0}^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-$$

$$-\bar{\zeta}^{k}\int\limits_{|\zeta|}^{R}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\Bigr\}\frac{z^{k}}{\Delta_{k}(R)}\quad(|z|<R,\ 0<|\zeta|<R),\tag{1.23}$$

где, как и выше

$$\Delta_{k}(R)=k\int\limits_{0}^{R}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\quad(k=1,2,\cdots).$$

Легко видеть, что при любом фиксированном ζ $(0<|\zeta|<R)$ степенной ряд (1.23) сходится в круге $|z|<R$, определяя функцию $W_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)$, аналитическую в том же круге.

Определив функции

$$A_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-W_{\infty}^{(R)}(z;\zeta)\right\},\tag{1.24}$$

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\equiv L_{R}^{(\omega)}\{\log|F(re^{i\theta})|\}|_{r=1}=$$

$$=\omega(R)\log|F(Re^{i\theta})|-\int\limits_{0}^{R}\log|F(e^{i\theta}_{\tau})|\,\omega'(\tau)\,d\tau\tag{1.25}$$

и постоянную

$$k_{R}(\omega)=\int\limits_{0}^{R}\{1-\omega(x)\}\frac{dx}{x},\tag{1.26}$$

докажем теорему.

Теорема 3. *Для любой функции* $\omega(x)\in\Omega_{\infty}$ *и для любого* R $(0<R<+\infty)$ *справедлива формула*

$$\mathrm{Log}\ F(z)=i\,\mathrm{Arg}\,C_{\lambda}+\lambda k_{R}(\omega)+\lambda\log\frac{z}{R}+$$

$$+\sum_{0<|a_{\mu}|<R}\log A_{\infty}^{(R)}(z;a_{\mu})-\sum_{0<|b_{\nu}|<R}\log A_{\infty}^{(R)}(z;b_{\nu})+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}S_{R}(e^{-i\theta}z;\omega)\,\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\,d\theta\quad(|z|<R),\tag{1.27}$$

где

$$S_{R}(z;\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Delta_{k}(R)}\,.$$

Доказательство. Заметим, что для любого $R>0$ функция $F(Rz)$ мероморфна в круге $|z|\leqslant 1$ и имеет там лишь конечное число нулей $\left\{\frac{a_\mu}{R}\right\}$ ($|a_\mu| \leqslant R$) и полюсов $\left\{\frac{b_\nu}{R}\right\}$ ($|b_\nu| \leqslant R$). Поэтому, если записать формулу (17) теоремы Б для функции $F(Rz)$, ассоциируя ее с функцией $\omega_R(x) = \omega(Rx)$, то для любого ρ ($0 < \rho < 1$) будем иметь

$$\operatorname{Log} F(Rz) = i \operatorname{Arg} C_\lambda + \lambda k(\omega_R) + \lambda \log \frac{z}{\rho} +$$

$$+ \sum_{|a_\mu| < \rho R} \log A_{\omega_R}\left(\frac{z}{\rho}; \frac{a_\mu}{\rho R}\right) - \sum_{|b_\nu| < \rho R} \log A_{\omega_R}\left(\frac{z}{\rho}; \frac{b_\nu}{\rho R}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\vartheta}\frac{z}{\rho}; \omega_R\right) L^{(\omega_R)} \{\log |F(R\rho e^{i\vartheta})|\} \, d\vartheta \quad (|z| < \rho). \tag{1.28}$$

Отметим, во-первых, что здесь

$$k(\omega_R) = \int_0^1 \frac{1 - \omega(R \cdot x)}{x} \, dx = \int_0^R \frac{1 - \omega(x)}{x} \, dx = k_R(\omega), \tag{1.29}$$

$$S(z; \omega_R) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \int_0^1 \omega(Rx) \, x^{k-1} \, dx} =$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Rz)^k}{\Delta_k(R)} = S_R(Rz; \omega) \tag{1.30}$$

согласно определению (1.14) функции $S_R(z; \omega)$.

Во-вторых, согласно формулам (15) и (16) введения имеем также

$$A_{\omega_R}(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-W_{\omega_R}(z; \zeta)\},$$

где

$$W_{\omega_R}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(Rx)}{x} \, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(Rx) \, x^{k-1} \, dx -\right.$$

$$\left. - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^1 \omega(Rx) \, x^{-k-1} \, dx \right\} \frac{z^k}{k \int_0^1 \omega(Rx) \, x^{k-1} \, dx} =$$

$$= \int_{R|\zeta|}^R \frac{\omega(x)}{x} \, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\zeta R)^{-k} \int_0^{R|\zeta|} \omega(x) \, x^{k-1} \, dx - \right.$$

$$\left. - (\bar{\zeta} R)^k \int_{R|\zeta|}^R \omega(x) \, x^{-k-1} \, dx \right\} \frac{(Rz)^k}{\Delta_k(R)}.$$

Следовательно, в силу определений (1.23) и (1.24) функций $W_\omega^{(R)}(z;\zeta)$ и $A_\omega^{(R)}(z;\zeta)$ справедливы тождества

$$W_{\omega_R}\left(\frac{z}{R};\frac{\zeta}{R}\right)\equiv W_\omega^{(R)}(z;\zeta), \tag{1.31}$$

$$A_{\omega_R}\left(\frac{z}{R};\frac{\zeta}{R}\right)\equiv A_\omega^{(R)}(z;\zeta), \tag{1.32}$$

при любых z ($|z|<R$) и ζ ($0<|\zeta|<R$).

Наконец, в-третьих, нам нужно найти явное выражение для оператора $L^{(\omega_R)}\{\log|F(R\rho e^{i\theta})|\}$, стоящего под интегральным членом тождества (1.28).

Как было отмечено во введении, оператор $L^{(\omega)}$ допускает представление (9). Поэтому будем иметь

$$L^{(\omega_R)}\{\varphi(\rho)\}=\omega_R(1)\,\varphi(\rho)-\int_0^1\varphi(\rho\tau)\,\omega_R'(\tau)\,d\tau,\quad \rho\in[0,1).$$

Но поскольку $\omega_R(x)=\omega(Rx)$, то отсюда мы получим

$$L^{(\omega_R)}\{\log|F(R\rho e^{i\theta})|\}=\omega(R)\log|F(R\rho e^{i\theta})|-$$

$$-\int_0^1\log|F(\rho Re^{i\theta}\tau)|\,R\omega'(R\tau)\,d\tau=$$

$$=\omega(R)\log|F(\rho Re^{i\theta})|-\int_0^R\log|F(\rho e^{i\theta}\tau)|\,\omega'(\tau)\,d\tau, \tag{1.33}$$

откуда следует, что

$$L^{(\omega_R)}\{\log|F(Re^{i\theta})|\}=L^{(\omega_R)}\{\log|F(\rho Re^{i\theta})|\}|_{\rho=1}=$$

$$=\omega(R)\log|F(Re^{i\theta})|-\int_0^R\log|F(e^{i\theta}\tau)|\,\omega'(\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}, \tag{1.34}$$

в силу (1.25).

Нам остается заменить в формуле (1.28) Rz на z и воспользоваться тождествами (1.29), (1.30), (1.32) и (1.34), чтобы получить формулу (1.27) теоремы.

§ 2. Определение и основные свойства ω-характеристической функции $\widetilde{T}_\omega(R;F)$

2.1. (а) Приведем сначала одну важную формулу—аналог формулы Иенсена, вытекающую из теоремы 3.

Так как $\{r^{-\lambda}|F(re^{i\theta})|\}_{r=0}=|c_\lambda|\neq 0$ и $S_R(0;\omega)=1$, то из формулы (1.27) теоремы 3 при $z=0$ следует тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\theta})|\}\, d\theta = \log|c_\lambda| + \lambda(\log R - k_R(\omega)) +$$

$$+ \sum_{0<|a_\mu|<R} W_\omega^{(R)}(0;\, a_\mu) - \sum_{0<|b_\nu|<R} W_\omega^{(R)}(0;\, b_\nu), \tag{2.1}$$

где в силу (1.23) и (1.26)

$$W_\omega^{(R)}(0;\, \zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\, dx, \quad k_R(\omega) = \int\limits_0^R \frac{1-\omega(x)}{x}\, dx. \tag{2.2}$$

Теперь, следуя Р. Неванлинне, запишем формулу (2.1) в несколько ином виде. С этой целью, во-первых, для каждого t $(0<t<+\infty)$ через $n(t;\,0)$ и $n(t;\,\infty)$ обозначим соответственно количество нулей и полюсов функции $F(z)$, лежащих в круге $|z|\leqslant t$, с условием, что каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность. Одновременно через $n(0;\,0)$ и $n(0;\,\infty)$ мы обозначим соответственно кратность нуля и полюса функции $F(z)$ в точке $z=0$.

Если в окрестности $z=0$ функция $F(z)$ имеет разложение

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \quad (c_\lambda \neq 0),$$

то очевидно, что

$$\lambda = n(0;\,0) - n(0;\,\infty). \tag{2.3}$$

С помощью введенных функций $n(t;\,0)$ и $n(t;\,\infty)$ суммы, стоящие в правой части тождества (2.1), могут быть записаны в интегральной форме. А именно, так как по (2.2)

$$\sum_{0<|a_\mu|<R} W_\omega^{(R)}(0;\, a_\mu) = \sum_{0<|a_\mu|<R} \int\limits_{|a_\mu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^R \left\{ \int\limits_t^R \frac{\omega(x)}{x}\, dx \right\} d\{n(t;\,0) - n(0;\,0)\},$$

то интегрированием по частям мы получим

$$\sum_{0<|a_\mu|<R} W_\omega^{(R)}(0;\, a_\mu) = \int\limits_0^R \frac{n(t;\,0) - n(0;\,0)}{t}\, \omega(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Аналогично получим, что

$$\sum_{0<|b_\nu|<R} W_\omega^{(R)}(0;\, b_\nu) = \int\limits_0^R \frac{n(t;\,\infty) - n(0;\,\infty)}{t}\, \omega(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Далее, принимая во внимание формулы (2.4) и (2.5), введем в рассмотрение еще две функции

$$\tilde{N}_\infty(R;\ 0) \equiv \tilde{N}_\infty\left(R; \frac{1}{F}\right) = \sum_{0<|a_\mu|<R} W_\infty^{(R)}(0;\ a_\mu) +$$

$$+ n(0;\ 0)\{\log R - k_R(\omega)\} =$$

$$= \int_0^R \frac{n(t;\ 0) - n(0;\ 0)}{t}\,\omega(t)\,dt + n(0;\ 0)\{\log R - k_R(\omega)\}, \qquad (2.6)$$

$$\tilde{N}_\infty(R;\ \infty) \equiv \tilde{N}_\infty(R;\ F) = \sum_{0<|b_\nu|<R} W_\infty^{(R)}(0;\ b_\nu) +$$

$$+ n(0;\ \infty)\{\log R - k_R(\omega)\} =$$

$$= \int_0^R \frac{n(t;\ \infty) - n(0;\ \infty)}{t}\,\omega(t)\,dt + n(0,\ \infty)\{\log R - k_R(\omega)\}. \qquad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7), в силу (2.3) следует

$$\tilde{N}_\infty\left(R; \frac{1}{F}\right) - \tilde{N}_\infty(R;\ F) = \lambda\{\log R - k_R(\omega)\} +$$

$$+ \sum_{0<|a_\mu|<R} W_\infty^{(R)}(0;\ a_\mu) - \sum_{0<|b_\nu|<R} W_\infty^{(R)}(0;\ b_\nu), \qquad (2.8)$$

ввиду чего тождество (2.1) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta =$$

$$= \log|c_\lambda| + \tilde{N}_\infty\left(R, \frac{1}{F}\right) - \tilde{N}_\infty(R;\ F). \qquad (2.1')$$

Введем, наконец, обозначение

$$\mathrm{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} = \max\{0,\ \mathrm{Log}_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\},$$

заметив, что ввиду определения (1.25) имеем

$$\mathrm{Log}_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} = \mathrm{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} - \mathrm{Log}^+_{(\infty)}\left\{\frac{1}{|F(Re^{i\vartheta})|}\right\}. \qquad (2.9)$$

Введем теперь в рассмотрение еще две функции — аналоги функций приближения Р. Неванлинны

$$\tilde{m}_\infty(R;\ \infty) \equiv \tilde{m}_\infty(R;\ F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta, \qquad (2.10)$$

$$\tilde{m}_\infty(R;\ 0) \equiv \tilde{m}_\infty\left(R; \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}^+_{(\infty)}\left\{\frac{1}{|F(Re^{i\vartheta})|}\right\}d\vartheta, \qquad (2.11)$$

заметив, что в силу (2.9) имеем

$$\tilde{m}_\infty(R;\ F) - \tilde{m}_\infty\left(R; \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}_{(\infty)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta. \qquad (2.12)$$

Формула (2.12) позволяет записать тождество (2.1') в другом виде и таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Для любой мероморфной на всей плоскости* z *функции* $F(z)$ *и при произвольном* $\omega(x)\in\Omega_\infty$ *справедливо тождество*

$$\tilde{m}_\omega(R;F)+\tilde{N}_\omega(R;F)=$$
$$=\log|c_\lambda|+\tilde{m}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)+\tilde{N}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)\ (0<R<+\infty). \qquad (2.13)$$

(б) Заметим, что, как следует из определения (1.25), при $\omega(x)\equiv1$ $(0\leqslant x<+\infty)$

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\equiv\log|F(Re^{i\vartheta})|. \qquad (2.14)$$

Поэтому в случае, когда $\omega(x)\equiv1$, определенные выше функции $\tilde{N}_\omega$ и $\tilde{m}_\omega$ переходят в известные функции, впервые введенные Р. Неванлинной. А именно, мы будем иметь

$$\tilde{N}_1\left(R;\frac{1}{F}\right)\equiv N\left(R;\frac{1}{F}\right)=\int_0^R\frac{n(t;0)-n(0,0)}{t}\,dt+n(0,0)\log R, \qquad (2.15)$$

$$\tilde{N}_1(R;F)\equiv N(R;F)=\int_0^R\frac{n(t;\infty)-n(0;\infty)}{t}\,dt+n(0,\infty)\log R,$$

а также

$$\tilde{m}_1(R;F)\equiv m(R;F)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F(Re^{i\vartheta})|\,d\vartheta,$$

$$\tilde{m}_1\left(R;\frac{1}{F}\right)\equiv m\left(R,\frac{1}{F}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|F(Re^{i\vartheta})|}\,d\vartheta. \qquad (2.16)$$

Ввиду сказанного тождество (2.13) теоремы 4 в специальном случае, когда $\omega(x)\equiv1$, принимает вид

$$m(R;F)+N(R;F)=$$
$$=\log|c_\lambda|+m\left(R;\frac{1}{F}\right)+N\left(R;\frac{1}{F}\right)\quad(0<R<+\infty), \qquad (2.17)$$

что известно под названием *соотношения равновесия*.

Это соотношение привело Р. Неванлинна к определению характеристической функции

$$T(R;F)\equiv m(R;F)+N(R;F),$$

с помощью которой оно записывается в виде

$$T(R;\ F) = \log|c_\lambda| + T\left(R;\ \frac{1}{F}\right) \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.18}$$

Поэтому тождество (2.13) теоремы 4, справедливое для произвольной функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$, естественно назвать *соотношением* ω*-равновесия*. Далее функцию

$$\tilde{T}_\omega(R;\ F) \equiv \breve{m}_\omega(R,\ F) + \breve{N}_\omega(R;\ F),$$

с помощью которой соотношение (2.13) запишется в виде

$$\tilde{T}_\omega(R;\ F) = \log|c_\lambda| + \tilde{T}_\omega\left(R;\ \frac{1}{F}\right), \tag{2.18'}$$

впредь будем называть ω*-характеристической функцией* или просто ω*-характеристикой*.

Поскольку в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, функции $\breve{m}_\omega(R;\ F)$ и $\breve{N}_\omega(R;\ F)$ переходят в известные функции $m(R;\ F)$ и $N(R;\ F)$ Р. Неванлинны, то очевидно, что

$$\{\tilde{T}_\omega(R;\ F)\}_{\omega=1} \equiv T(R,\ F) \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.19}$$

Таким образом, ω-характеристическая функция $\breve{T}_\omega(R;\ F)$ ассоциируется с произвольной функцией $\omega(x) \in \Omega_\infty$ и совпадает с характеристической функцией Р. Неванлинны $T(R;\ F)$ лишь в случае, когда $\omega(x) \equiv 1$.

Как известно, характеристика Неванлинны $T(R;\ F)$ является неубывающей функцией на полуоси $0 < R < +\infty$. Аналогичным свойством обладает и ω-характеристика $\breve{T}_\omega(R;\ F)$. Справедлива

Теорема 5. *При любой порождающей функции* $\omega(x) \in \Omega_\infty$ ω*-характеристика* $\breve{T}_\omega(R;\ F)$ *является неубывающей функцией на полуоси* $(0,\ +\infty)$.

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем, поскольку оно не отличается от доказательства теоремы 3.3 работы [11] где устанавливается аналогичное утверждение для случая функций, мероморфных в единичном круге.

(в) Докажем теорему.

Теорема 6. *Пусть* $T(R;\ F)$ *и* $\breve{T}_\omega(R;\ F)$ *суть соответственно обычная* ω*-характеристика функции* $F(z)$, *мероморфной на всей плоскости* z. *Тогда имеет место неравенство*

$$\breve{T}_\omega(R;\ F) \leqslant L_R^{(\omega)}\{T(r;\ F)\}|_{r=1} \equiv$$

$$\equiv \omega(R)\,T(R;\ F) + \int_0^R T(\tau;\ F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau \quad (0 < R < +\infty). \tag{2.20}$$

Доказательство. Поскольку функция $\omega(x) \in \Omega_*$ — неубывающая, то, очевидно, будем иметь по (1.7′)

$$L_R^{(\omega)}\{T(r;F)\}|_{r=1} = \omega(R)\,T(R;F) + \int_0^R T(\tau;F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau.$$

Поэтому нам достаточно лишь установить справедливость неравенства

$$\tilde{T}_\omega(R;F) \leqslant L_R^{(\omega)}\{T(r;F)\}|_{r=1} \equiv L_R^{(\omega)}\{m(r;F)\}|_{r=1} + L_R^{(\omega)}\{N(r;F)\}|_{r=1}. \tag{2.20′}$$

С этой целью заметим сперва, что согласно (1.25) и в силу того, что $\omega'(\tau) \leqslant 0$, имеем

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} \equiv L_R^{(\omega)}\{\log|F(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1} = \omega(R)\log|F(Re^{i\vartheta})| - \int_0^R \log|F(\tau e^{i\vartheta})|\,\omega'(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \omega(R)\log^+|F(Re^{i\vartheta})| - \int_0^R \log^+|F(\tau e^{i\vartheta})|\,\omega'(\tau)\,d\tau \equiv L_R^{(\omega)}\{\log^+|F(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства принимает лишь неотрицательные значения, то подавно имеем также

$$\mathrm{Log}^+_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\} \leqslant L_R^{(\omega)}\{\log^+|F(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1}. \tag{2.21}$$

Умножим теперь неравенство (2.21) на $\dfrac{d\vartheta}{2\pi}$ и проинтегрируем по промежутку $[0,2\pi]$. Тогда, принимая во внимание определения (2.10) и (2.16) функций $\tilde{m}_\omega(R;F)$ и $m(R;F)$, мы приходим к неравенству

$$\tilde{m}_\omega(R;F) \leqslant L_R^{(\omega)}\{m(r;F)\}|_{r=1}. \tag{2.22}$$

Докажем, что справедлива также формула

$$\tilde{N}_\omega(R;F) = L_R^{(\omega)}\{N(r;F)\}|_{r=1}, \tag{2.23}$$

откуда и из неравенства (2.22) будет следовать неравенство (2.20′), т. е. утверждение (2.20) теоремы.

С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$N_*(r;F) = \int_0^r \frac{n(t;\infty) - n(0;\infty)}{t}\,dt,$$

отметив, что по определению (2.15), функции $N(r, F)$

$$N(r, F) = N_*(r; F) + n(0; \infty)\log r$$

и поэтому при $0 < r \leqslant 1$

$$L_R^{(\omega)}\{N(r; F)\} = L_R^{(\omega)}\{N_*(r; F)\} + n(0, \infty)\, L_R^{(\omega)}\{\log r\}. \qquad (2.24)$$

Согласно определению (1.6) оператора $L_R^{(\omega)}$ при $0 < r \leqslant 1$ имеем

$$L_R^{(\omega)}\{N_*(r; F)\} = r\int_0^R \frac{n(r\tau; \infty) - n(0; \infty)}{\tau}\,\omega(\tau)\,d\tau$$

и, в частности

$$L_R^{(\omega)}\{N_*(r; F)\}|_{r=1} = \int_0^R \frac{n(\tau; \infty) - n(0; \infty)}{\tau}\,\omega(\tau)\,d\tau. \qquad (2.25)$$

Далее, легко видеть, что формулу (1.6) можно записать также в виде

$$L_R^{(\omega)}\{\varphi(r)\} = \varphi(rR) + r\int_0^R \varphi'(r\tau)\{\omega(\tau) - 1\}\,d\tau \quad (0 < r \leqslant 1).$$

Положив здесь $\varphi(r) = \log r$, мы получим

$$L_R^{(\omega)}\{\log r\} = \log(rR) + \int_0^R \frac{\omega(\tau) - 1}{\tau}\,d\tau \quad (0 < r \leqslant 1),$$

откуда, в частности, следует, что

$$\log_{(\omega)} R = L_R^{(\omega)}\{\log r\}|_{r=1} = \log R - k_\omega(R). \qquad (2.26)$$

Наконец, из (2.24), в силу (2.25) и (2.26), следует

$$L_R^{(\omega)}\{N(r; F)\}|_{r=1} = \int_0^R \frac{n(\tau; \infty) - n(0; \infty)}{\tau}\,\omega(\tau)\,d\tau +$$

$$+ n(0; \infty)\{\log R - k_R(\omega)\} \equiv \overline{N}_\omega(R; F),$$

ввиду определения (2.7) функции $\overline{N}_\omega(R; F)$.

Таким образом, формула (2.23) и, тем самым, неравенство (2.20) теоремы доказано.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

Следствие. *Если*

$$\int_0^{\infty} T(\tau; F)|\omega'(\tau)|\,d\tau < +\infty, \qquad (2.27)$$

то имеет место неравенство

$$\overline{T}_\omega(R; F) \leqslant \int_0^{+\infty} T(\tau; F)|\omega'(\tau)|\, d\tau \quad (0<R<+\infty). \tag{2.28}$$

В самом деле, отметим сначала, что поскольку функция $\omega(x) \in \Omega_\infty$ не возрастающая на $[0, +\infty)$ и

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < +\infty,$$

то, очевидно, $\omega(\tau) \downarrow +0$ при $\tau \uparrow +\infty$ и $\omega'(\tau) \leqslant 0$ $(0<\tau<+\infty)$. Поэтому будем иметь

$$\omega(R)\, T(R; F) = -T(R; F) \int_R^{+\infty} \omega'(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_R^{+\infty} T(\tau; F)\, |\omega'(\tau)|\, d\tau. \tag{2.29}$$

Из неравенства (2.20) теоремы 6, ввиду (2.29), приходим к (2.28).

В заключение отметим еще, что при условии (2.27) из (2.29) следует также, что

$$\lim_{R\to+\infty} \omega(R)\, T(R; F) = 0.$$

§ 3. Теорема факторизации

3.1. (а) В предположении, что $\omega(x) \in \Omega_\infty$, обозначим через $N_\infty\{\omega\}$ множество мероморфных на всей плоскости z функций $F(z)$, для которых ω-характеристика

$$\widetilde{T}_\omega(R; F) \equiv \widetilde{m}_\omega(R; F) + \widetilde{N}_\omega(R; F) \quad (0<R<+\infty) \tag{3.1}$$

удовлетворяет условию

$$\overline{T}_\omega(F) \equiv \sup_{0<R<+\infty} \{\widetilde{T}_\omega(R; F)\} < +\infty. \tag{3.2}$$

Поскольку, как утверждалось в теореме 5, функция $\widetilde{T}_\omega(R; F)$ не убывает на полуоси $0<R<+\infty$, то очевидно, что класс $N_\infty\{\omega\}$ может быть определен и таким образом:

$$F(z) \in N_\infty\{\omega\},$$

если

$$\overline{T}_\omega(F) \equiv \lim_{R\to+\infty} \widetilde{T}_\omega(R; F) < +\infty. \tag{3.2'}$$

Из следствия теоремы 6 непосредственно следует, что *условие*

$$\int_0^{+\infty} T(\tau;\ F)\,|\omega'(\tau)|\,d\tau < +\infty \tag{3.3}$$

достаточно для того, чтобы функция $F(z)$ *принадлежала классу* $N_\infty\{\omega\}$. Одним из простейших свойств класса $N_\infty(\omega)$ является следующее: *если*

$$F(z) \in N_\infty\{\omega\} \quad и \quad G(z) \in N_\infty\{\omega\}, \tag{3.4}$$

то имеем также

$$F(z)\,G(z) \in N_\infty\{\omega\} \quad и \quad \frac{F(z)}{G(z)} \in N_\infty\{\omega\}. \tag{3.5}$$

В самом деле, во-первых, легко видеть, что

$$\operatorname{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\theta})\,G(Re^{i\theta})|\} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Log}^+_{(\infty)}\{|F(Re^{i\theta})|\} + \operatorname{Log}^+_{(\infty)}\{|G(Re^{i\theta})|\},$$

и поэтому

$$\tilde{m}_\infty(R;\ F\cdot G) \leqslant \tilde{m}_\infty(R;\ F) + \tilde{m}_\infty(R;\ G) \quad (0 < R < +\infty). \tag{3.6}$$

Далее, поскольку очевидно

$$n_{FG}(t;\ \infty) \leqslant n_F(t;\ \infty) + n_G(t;\ \infty) \quad (0 \leqslant t < +\infty),$$

то легко видеть, что справедливо неравенство

$$\tilde{N}_\infty(R;\ F) + \tilde{N}_\infty(R;\ G) - \tilde{N}_\infty(R;\ F\cdot G) \geqslant$$
$$\geqslant \{n_F(0;\ \infty) + n_G(0;\ \infty) - n_{FG}(0;\ \infty)\}\,\varkappa_R(\omega), \tag{3.7}$$

где

$$\varkappa_R(\omega) = \log R - k_R(\omega). \tag{3.8}$$

Но выражение

$$\varkappa_R(\omega) = \int_1^R \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx$$

при $R > 1$ монотонно возрастает и стремится к конечному пределу

$$\varkappa(\omega) = \lim_{R\to+\infty} \varkappa_R(\omega) =$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx. \tag{3.9}$$

Поэтому из (3.7) и (3.9) имеем

$$\tilde{N}_\infty(R;\ FG) \leqslant \tilde{N}_\infty(R;\ F) + \tilde{N}_\infty(R;\ G) + O(1), \quad R\to\infty. \tag{3.10}$$

Наконец, из (3.6) и (3.10) следует

$$\tilde{T}_\infty(R;\ FG) \leqslant \tilde{T}(R;\ F) + \tilde{T}(R;\ G) + O(1),\ R\to\infty.$$

Следовательно, при условии (3.4) имеем также $F(z)\,G(z) \in N_\infty\{\omega\}$.

Остается отметить, что в силу соотношения равновесия (2.13')

$$\tilde{T}_\infty\left(R; \frac{1}{G}\right) = \text{const} + \tilde{T}_\infty(R; G)$$

вместе с функцией $G(z)$ классу $N_\infty\{\omega\}$ принадлежит также функция $\bar{G}(z) = \dfrac{1}{G(z)}$. Тем самым имеем также

$$\frac{F(z)}{G(z)} = F(z)\cdot\bar{G}(z) \in N_\infty\{\omega\}.$$

(б) Простейшим примером функции, входящей в класс $N_\infty\{\omega\}$ при любой порождающей функции $\omega(x)\in\Omega_\infty$, является система степеней $F_\lambda(z) = z^\lambda$ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

В самом деле, согласно формуле (2.26)

$$\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F_\lambda(Re^{i\vartheta})|\} \equiv L_R^{(\omega)}\{\log|F_\lambda(re^{i\vartheta})|\}|_{r=1} =$$

$$= \lambda L_R^{(\omega)}\{\log r\}|_{r=1} = \lambda[\log R - k_R(\omega)] = \lambda\varkappa_R(\omega).$$

Поэтому

$$\tilde{m}_\infty(F; F_\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}_{(\omega)}^{(+)}\{F_\lambda(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta =$$

$$= \max\{0, \lambda\varkappa_R(\omega)\}. \tag{3.11}$$

Далее, принимая во внимание определение (2.7) функции $\tilde{N}_\infty(R; F)$, имеем

$$\tilde{N}_\infty(R; F_\lambda) = \max\{0, -\lambda\}\,\varkappa_R(\omega). \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12), принимая во внимание (3.9), заключаем, что

$$\tilde{T}_\infty(F_\lambda) = \lim_{R\to+\infty}\tilde{T}_\infty(R; F_\lambda) < +\infty,$$

иначе говоря, $F_\lambda(z)\in N_\infty\{\omega\}$.

(в) Принадлежность функции классу $N_\infty\{\omega\}$ накладывает определенное ограничение на густоту расположения ее нулей и полюсов.

Лемма 1. *Пусть* $F(z)\in N_\infty\{\omega\}$; $\{a_\mu\}$ $(0<|a_\mu|<\infty)$ *и* $\{b_\nu\}$ $(0<|b_\nu|<+\infty)$ *суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от* $z=0$ *и пронумерованных, как обычно. Тогда*

$$\sum_{(\mu)}\int_{|a_\mu|}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx < +\infty, \quad \sum_{(\nu)}\int_{|b_\nu|}^{\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx < +\infty. \tag{3.13}$$

Доказательство. Поскольку $F(z)\in N_\infty\{\omega\}$ и $\tilde{m}_\infty(R; F) \geqslant 0$, то из (2.7) и (2.3) будем иметь

$$\bar{N}_\infty(R; F) = \sum_{|b_\nu|<R} W_\infty^{(R)}(0;\ b_\nu) + n(0;\ \infty)\,\varkappa_R(\omega) =$$

$$= \sum_{|b_\nu|<R} \int\limits_{|b_\nu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx + n(0;\ \infty)\,\varkappa_R(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \bar{T}_\infty(R, F) \leqslant \bar{T}_\infty(T) < +\infty \quad (0 < R < +\infty). \tag{3.14}$$

Далее, так как по (3.9) предел

$$\varkappa(\omega) = \lim_{R\to+\infty} \varkappa_R(\omega)$$

конечен, то из (3.14) следует также, что

$$\sup_{0<R<+\infty} \left\{ \sum_{|b_\nu|<R} \int\limits_{|b_\nu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx \right\} = \Omega_0 < +\infty. \tag{3.15}$$

Но тогда для любой пары чисел $0 < R_0 < R < +\infty$ в силу (3.15) имеем

$$\sum_{|b_\nu|<R_0} \int\limits_{|b_\nu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx \leqslant \sum_{|b_\nu|<R} \int\limits_{|b_\nu|}^{R} \frac{\omega(x)}{x}\,dx \leqslant \Omega_0.$$

Отсюда после предельного перехода при $R \to +\infty$ приходим к неравенству

$$\sum_{|b_\nu|<R_0} \int\limits_{|b_\nu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\,dx \leqslant \Omega_0 \quad (0 < R_0 < +\infty).$$

Наконец, ввиду произвольности R_0 из последнего неравенства следует конечность второй из сумм (3.13). Ввиду тождества (2.13′) аналогично заключаем о конечности первой из сумм (3.13).

(г) Для любой функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$ наряду с последовательностью

$$\Delta_0(R) = 1,\ \Delta_k(R) = k \int\limits_0^R \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{3.16}$$

введем в рассмотрение и последовательность чисел

$$\Delta_0(\infty) = 1,\ \Delta_k(\infty) = k \int\limits_0^{+\infty} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \ (k = 1, 2, \cdots), \tag{3.17}$$

заметив, что

$$\Delta_k(\infty) = \lim_{R\to+\infty} \Delta_k(R) \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.18}$$

Отметим прежде всего, что если при данном $k \geqslant 1$ $\Delta_k(\infty) < +\infty$, то числа $\Delta_k(\infty)$ допускают также представление вида

$$\Delta_k(\infty) = \int_0^{+\infty} x^k\, d\{-\omega(x)\}. \tag{3.19}$$

В самом деле, если $\Delta_k(\infty) < +\infty$, то очевидно, что существует такая последовательность $R_n \uparrow +\infty$, $n \uparrow +\infty$, что

$$\lim_{n\to+\infty} \{R_n^k\, \omega(R_n)\} = 0. \tag{3.20}$$

Но для любого R

$$k\int_0^R \omega(x)\, x^{k-1}\, dx = R^k \omega(R) + \int_0^R x^k\, d\{-\omega(x)\}, \tag{3.21}$$

причем интегралы как слева, так и справа — неубывающие функции от $R \in (0, +\infty)$.

Поэтому, положив в (3.21) $R = R_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, в силу (3.20), мы приходим к формуле (3.11).

Условимся теперь отнести функцию $\omega(x) \in \Omega_\infty$ к классу $\Omega_\infty(\infty)$, если

$$\Delta_k(\infty) < +\infty \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.22}$$

и к классу $\Omega_\infty(p)$ $(p \geqslant 0)$, если

$$\Delta_k(\infty) < +\infty \ (k = 0, 1, 2, \cdots, p) \text{ и } \Delta_k(\infty) = +\infty \ (k \geqslant p+1). \tag{3.23}$$

Выше, в § 1, посредством формул (1.5) и (1.14) для произвольной функции $\omega(x) \in \Omega_\infty$ и при любом $R > 0$ были определены функции

$$C_R(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

$$S_R(z; \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

аналитические в круге $|z| < R$.

Наряду с этими функциями введем в рассмотрение также функции

$$C_\infty(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)}, \tag{3.24}$$

$$S_\infty(z; \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)}. \tag{3.25}$$

Если $\omega(x) \in \Omega_\infty(p)$, то очевидно, что функции $C_\infty(z; \omega)$ и $S_\infty(z; \omega)$ являются полиномами степени p.

Предположим теперь, что $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$. Тогда, пользуясь представлением (3.19) последовательности $\{\Delta_k(\infty)\}_0^\infty$ и заметив, что $d\{-\omega(x)\} \geqslant 0$, для любого $z \neq 0$ и $k \geqslant 1$ имеем

$$\Delta_k(\infty) \geqslant \int_{2|z|}^{\infty} x^k\, d\{-\omega(x)\} \geqslant (2|z|)^k\, \omega(2|z|). \tag{3.25'}$$

Отсюда, ввиду произвольности z, следует

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\Delta_k(\infty)} = +\infty,$$

и, следовательно, радиус сходимости рядов (3.24) и (3.25) равен бесконечности.

Таким образом, если $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$, то $C_\infty(z; \omega)$ и $S_\infty(z; \omega)$ являются целыми трансцендентными функциями.

Лемма 2. *В любой точке $z \neq \infty$*

$$\lim_{R\to+\infty} C_R(z; \omega) = C_\infty(z; \omega), \tag{3.26}$$

$$\lim_{R\to+\infty} S_R(z; \omega) = S_\infty(z; \omega), \tag{3.27}$$

притом равномерно относительно z в любом замкнутом круге.

Доказательство. Поскольку

$$S_R(z; \omega) = 2C_R(z; \omega) - 1 \text{ и } S_\infty(z; \omega) = 2C_\infty(z; \omega) - 1,$$

то достаточно установить лишь справедливость (3.27).

Положив теперь, что $|z| \leq r$ $(0 < r < +\infty)$ и $R_0 \geq 2r$, при любом $k \geq 1$ и $R \geq R_0$ получим оценку

$$\Delta_k(R) = k\int_0^R \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \geq k\int_r^{2r} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \geq$$

$$\geq (2^k - 1)\, r^k\, \omega(2r) \geq 2^{k-1}\, r^k\, \omega(2r),$$

откуда после предельного перехода при $R\to\infty$ получим также

$$\Delta_k(\infty) \geq 2^{k-1}\, r^k\, \omega(2r).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon; r)$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(R)}\right| \leq \frac{1}{\omega(2r)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{N-1}\,\omega(2r)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (|z| \leq r,\ R \geq R_0), \tag{3.28}$$

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)}\right| \leq \frac{1}{\omega(2r)} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{N-1}\,\omega(2r)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (|z| \leq r). \tag{3.29}$$

Наконец, из (3.28) и (3.29) вытекает неравенство

$$|C_\infty(z; \omega) - C_R(z; \omega)| < \frac{2\varepsilon}{3} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{1}{\Delta_k(\infty)} - \frac{1}{\Delta_k(R)}\right| r^k \quad (|z| \leq r,\ R \geq R_0).$$

Отсюда, в силу (3.18), следует

$$|C_\infty(z;\ \omega) - C_R(z;\ \omega)| < \varepsilon \quad (|z| \leqslant r, \quad R \geqslant R_1 > R_0)$$

и, таким образом, лемма доказана.

(д) Приведем класс примеров функций $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$, когда $C_\infty(z;\ \omega)$ и $S_\infty(z;\ \omega)$ могут быть выражены через известные специальные функции.

Для произвольных значений параметров $\rho\ (0 < \rho < +\infty)$, $\mu\ (0 < \mu < +\infty)$ и $\sigma\ (0 < \sigma < +\infty)$ обозначим

$$\omega(x) = \frac{\rho\sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\sigma t^\rho}\, t^{\mu\rho - 1}\, dt, \quad x \in (0, +\infty). \tag{3.30}$$

Легко видеть, что $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$, причем

$$\Delta_k(\infty) = \int\limits_0^\infty x^k\, d\{-\omega(x)\} =$$

$$= \frac{\rho\sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma x^\rho}\, x^{k + \mu\rho - 1}\, dx = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}{\sigma^{\frac{k}{\rho}}\, \Gamma(\mu)} \quad (k \geqslant 0).$$

Отсюда следует, что

$$C_\infty(z;\ \omega) = \Gamma(\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}} z\right)^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} =$$

$$= \Gamma(\mu) \cdot E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}} z;\ \mu\right),$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \tag{3.31}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1.

Итак, для семейства функций $\omega(x) \in \Omega_\infty(\infty)$ вида (3.30) имеем

$$C_\infty(z;\ \omega) = \Gamma(\mu)\, E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}} z;\ \mu\right), \tag{3.32}$$

$$S_\infty(z;\ \omega) = 2\Gamma(\mu)\, E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}} z;\ \mu\right) - 1. \tag{3.33}$$

3.2. (а) *Докажем* теперь первую основную теорему о факторизации функций класса $N_\infty\{\omega\}$. При этом мы воспользуемся обозначениями, уже введенными нами ранее посредством формул (3.9), (1.23) и (1.24)

$$\varkappa(\omega)=\int\limits_0^1\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

$$W_\infty^{(R)}(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{R}\frac{\omega(x)}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\zeta^{-k}\int\limits_0^{|\zeta|}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-$$

$$-\bar\zeta^{k}\int\limits_{|\zeta|}^{R}\omega(x)\,x^{-k-1}\,dx\Big\}\frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

$$A_\infty^{(R)}(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\infty^{(R)}(z;\zeta)\}.$$

Теорема 7. *Пусть $F(z)\in N_\infty\{\omega\}$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ суть соответственно нули и полюсы нашей функции, отличные от нуля, пронумерованные как обычно.*

Тогда функция $F(z)$ может быть представлена в виде

$$F(z)=e^{i\alpha+\lambda\varkappa(\omega)}\,z^{\lambda}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S_\infty(e^{-i\vartheta}z;\omega)\,d\sigma(\vartheta)\right\}\times$$

$$\times\lim\frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R}A_\infty^{(R)}(z;a_\mu)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R}A_\infty^{(R)}(z;b_\nu)},\quad |z|<\infty,\tag{3.34}$$

$$\sigma(\vartheta)=\lim\int\limits_0^{\vartheta}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta,\tag{3.35}$$

где пределы (3.34) *и* (3.35) *берутся при $R\to+\infty$ по некоторой последовательности значений.*

При этом $\sigma(\vartheta)$ — функция конечного полного изменения на $[0,2\pi]$, *λ — кратность нуля (при $\lambda\geqslant 1$) или полюса (при $\lambda\leqslant -1$) в точке $z=0$ и, наконец, $\alpha=\arg\{z^{-\lambda}F(z)\}_{z=0}$.*

Доказательство. Согласно формуле (1.27) теоремы 3, для любого R $(0<R<+\infty)$ имеет место представление

$$F(z)=\exp\{i\arg c_\lambda+\lambda\varkappa_R(\omega)\}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S_R(e^{-i\vartheta}z;\omega)\,d\sigma_R(\vartheta)\right\}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<R}A_\infty^{(R)}(z;a_\mu)}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<R}A_\infty^{(R)}(z;b_\nu)}\quad(|z|<R),\tag{3.36}$$

где

$$\sigma_R(\vartheta)=\int_0^{\vartheta}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta. \tag{3.37}$$

Но легко видеть, что для любого $R>0$

$$|\sigma_R(\vartheta)|\leqslant\int_0^{2\pi}|\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(Re^{i\vartheta})|\}|\,d\vartheta=$$

$$=2\pi\left\{\tilde{m}_\omega(R;F)+\tilde{m}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)\right\},\ \vartheta\in[0,2\pi],$$

а также, что

$$\bigvee_0^{2\pi}(\sigma_R(\vartheta))\leqslant 2\pi\left\{\tilde{m}_\omega(R;F)+\tilde{m}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)\right\}.$$

Заметим, что

$$\tilde{m}_\omega(R;F)\leqslant\tilde{T}_\omega(R;F)+|\lambda|\,\varkappa_R(\omega),$$

$$\tilde{m}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)\leqslant\tilde{T}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)+|\lambda|\,\varkappa_R(\omega),$$

причем

$$\tilde{T}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)=\mathrm{const}+\tilde{T}_\omega(R;F).$$

Поэтому и в силу того, что $F(z)\in N_\omega\{\omega\}$, будем иметь

$$\sup_{0<R<+\infty}\left\{2\pi\left[\tilde{m}_\omega(R;F)+\tilde{m}_\omega\left(R;\frac{1}{F}\right)\right]\right\}=M_\omega(F)<+\infty.$$

Таким образом, для семейства функций $\{\sigma_R(\vartheta)\}$ $(0<R<+\infty)$ выполняются условия первой теоремы Хелли, а именно, для всех $R>0$

$$|\sigma_R(\vartheta)|\leqslant M_\omega(F)\quad(0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi),\ \bigvee_0^{2\pi}(\sigma_R)\leqslant M_\omega(F),$$

где $M_\omega(F)$ не зависит от R.

Следовательно, существует вещественная функция $\sigma(\vartheta)$ на $[0,2\pi]$ с конечным полным изменением и последовательность $\{R_k\}_1^\infty$ $R_k\uparrow+\infty$ такие, что в каждой точке $\vartheta\in[0,2\pi]$

$$\sigma(\vartheta)=\lim_{k\to+\infty}\sigma_{R_k}(\vartheta)=\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\vartheta}\mathrm{Log}_{(\omega)}\{|F(R_k e^{i\vartheta})|\}\,d\vartheta. \tag{3.38}$$

Отсюда и ввиду леммы 2, по второй теореме Хелли следует, что

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_{R_k}(e^{-i\vartheta}z;\ \omega)\,d\sigma_{R_k}(\vartheta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\infty(e^{-i\theta}z;\ \omega)\,d\sigma(\theta)\quad (|z|<\infty). \tag{3.39}$$

Положив, наконец, в тождестве (3.36) $R=R_k$, ввиду предельных соотношений (3.9), (3.38) и (3.39) мы приходим к утверждению теоремы.

(б) Приведем теперь теорему, дающую полное решение проблемы факторизации всего семейства функций, мероморфных на плоскости.

Пусть $F(z)$ — произвольная функция, мероморфная во всей конечной плоскости z. Тогда $\lim\limits_{r\to+\infty} T(r;F)=+\infty$ и, очевидно, существует хотя бы одна непрерывная, положительная и интегрируемая на $[0,+\infty)$ функция $h(r,F)$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} T(r;F)\,h(r;F)\,dr<+\infty. \tag{3.40}$$

В качестве такого рода функции можно брать, например, функцию

$$h(r;F)=\begin{cases}1 & 0\leqslant r\leqslant 1\\ \{(1+r)\log^2(1+r)\,T(r;F)\}^{-1}, & 1\leqslant r<+\infty.\end{cases}$$

Введем, далее, в рассмотрение функцию

$$\omega_F(x)=\frac{1}{C_0}\int_x^{+\infty} h(r;F)\,dr, \tag{3.41}$$

где $C_0=\int_0^\infty h(r,F)\,dr$, и докажем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть функция $F(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости z.*

Тогда $F(z)\in N_\infty\{\omega_F\}$ и, таким образом, допускает представление (3.34) *теоремы* 7 *с порождающей функцией $\omega_F(x)$.*

Доказательство. Легко видеть, во-первых, что $\omega_F(x)\in\Omega_\infty$. Во-первых, согласно неравенству (2.28), отмеченному в следствии теоремы 6,

$$\overline{T}_{\omega_F}(R;F)\leqslant\int_0^{+\infty} T(r;F)\,|\omega_F'(r)|\,dr\quad (0<R<+\infty),$$

откуда и из (3.40) получим

$$\sup_{0<R<+\infty}\{\overline{T}_{\omega_F}(R;F)\}<+\infty,$$

т. е. $F(z)\in N_\infty\{\omega\}$, и теорема доказана.

(в) В связи с теоремой 7 естественно возникает вопрос о ее обращении, т. е. вопрос о том, каждая ли функция вида (3.34) при условии

$$\sum_{(\mu)} \int_{|a_\mu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{(\nu)} \int_{|b_\nu|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx < +\infty \tag{3.42}$$

входит в класс $N_\infty \{\omega\}$?

Отметим, кроме того, что если ввести в рассмотрение функцию

$$W_\infty^{(-)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx -$$

$$- \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \Big\} \frac{z^k}{\Delta_k(\infty)} \quad (|z| < +\infty, \ 0 < |\zeta| < +\infty), \tag{3.43}$$

то, как и в лемме 2, нетрудно установить, что

$$\lim_{R \to +\infty} W_\infty^{(R)}(z;\zeta) = W_\infty^{(-)}(z;\zeta) \quad (|z| < +\infty, \ 0 < |\zeta| < +\infty). \tag{3.44}$$

Поэтому другой вопрос, который возникает в связи с теоремой 7, это вопрос о том, сходятся ли во всей плоскости z при условии (3.42) бесконечные произведения

$$\pi_\infty(z; a_\mu) = \prod_{\mu=1}^{\infty} A_\infty^{(-)}(z; a_\mu), \quad \pi_\infty(z; b_\nu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} A_\infty^{(-)}(z; b_\nu), \tag{3.45}$$

где

$$A_\infty^{(-)}(z;\zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-W_\infty^{(-)}(z;\zeta)\}, \tag{3.46}$$

и если да, то входят ли функции $\pi_\infty(z; a_\mu)$ и $\pi_\infty(z; b_\nu)$ в класс $N_\infty \{\omega\}$?

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20.XI.1970

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Վերջավոր հարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան. (ամփոփում)

Հոդվածում, հեղինակի [11] հետազոտությունում զարգացված մեթոդի հետագա ընդլայնման և ընդհանրացման ճանապարհով, բերվում է սկզբունքորեն նոր և ընդհանուր եղանակ ամբողջ վերջավոր հարթությունում մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացման պրոբլեմի համար։ Հիմնական 7 թեորեման ընդգրկում է մերոմորֆ ֆունկցիաներ, որոնց խարակտերիստիկներն ունեն կամայական աճ։

M. M. DŽRBAŠIAN. *Factorisation of functions, meromorphic in the finite plane* (summary)

By improving and generalizing the method, developed in (11), a new general solution for the problem of factorisation of functions, meromorphic in the finite plane is obtained. The main theorem 7 covers meromorphic functions with characteristics of arbitrary growth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, т. II, М., „Наука", 1968.
2. *R. Nevanlinna.* Zur Theorie ober meromorphen Funktionen, Acta Math., 46, 1925.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., Огиз, 1941, 226.
4. *У. Хейман.* Мероморфные функции, М., „Мир", 1966.
5. *R. Nevanlinna.* Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung, Soc. Sci. Fenn., Comment. Phys. Math., 2, Nr. 2, 1923.
6. *E. Picard.* Traitè d'Analyse, т. II, Paris, 1893, 145—148.
7. *В. В. Голубев.* Исследования по теории особых точек однозначных функций, Ученые записки государственного саратовского университета, т. I, вып. 3, 1924; а также в собрании трудов того же автора, „Однозначные аналитические функции", М., Физматгиз, 1961, 200—260.
8. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
9. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
10. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
11. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., т. 79 (121), № 4 (8), 1969, 517—615.
12. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, серия матем., 32, 1968, 1075—1111.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

Н. У. АРАКЕЛЯН

ЦЕЛЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ДЕФЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В настоящей статье приводится подробное изложение установленной автором в работе [1] теоремы о множестве дефектных значений целых функций конечного порядка. Попутно доказывается аналогичная теорема для функций, голоморфных в единичном круге.

Как показали Неванлинна [2] и Альфорс [3], каждое конечное множество комплексных чисел является множеством дефектных значений некоторой мероморфной функции. Долгое время оставался открытым вопрос о существовании мероморфных функций с бесконечным множеством дефектных значений. Полный ответ на этот вопрос дал А. А. Гольдберг [4], [5] (см. также [6]), построив мероморфные функции произвольного положительного порядка с наперед заданным конечным или счетным множеством дефектных значений. Аналогичный пример целых функций бесконечного порядка построили В. Фукс и Хейман [6].

Для целых функций *конечного* порядка ρ вопрос о количестве дефектных значений усложнялся тем обстоятельством, что число конечных асимптотических значений таких функций, в силу теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса, не превосходит $[2\rho]$. Неванлинна же считал, что дефектное значение, наподобие пикаровского исключительного значения, всегда является асимптотическим. Это было одной из причин для предположения [7], [8], что целая функция конечного порядка ρ имеет лишь конечное (и даже не более $[2\rho]+1$) число дефектных значений. В дальнейшем выяснилось [9], что дефектное значение, вообще говоря, не обязано быть асимптотическим, но с другой стороны, для случая $\rho\leqslant\dfrac{1}{2}$ гипотеза Неванлинны подтвердилась. Из одного результата Эдрея и В. Фукса следует [6], что целая функция порядка $\rho\leqslant\dfrac{1}{2}$ не может иметь конечных дефектных значений.

Оказалось, однако, что в случае $\rho>\dfrac{1}{2}$ гипотеза Неванлинны неверна [1]. Следующая теорема вместе с результатом Эдрея и В. Фукса решает, в частности, вопрос о количестве дефектных значений целых функций конечного порядка (параболический случай).

Теорема 1. *Для любого $\rho > \frac{1}{2}$ и для произвольной последовательности комплексных чисел $(a_j)_1^\infty$ существует целая функция порядка ρ и нормального типа, для которой числа a_j, $j=1, 2, \cdots$ являются дефектными.*

В гиперболическом случае имеет место

Теорема 2. *Для любого $\gamma > 0$ и для произвольной последовательности комплексных чисел $(a_j)_1^\infty$ существует аналитическая в единичном круге функция порядка γ и нормального типа, для которой числа a_j, $j=1, 2, \cdots$ являются дефектными.*

Несколько слов о методе доказательства теоремы 1. Основное отличие в построении целых функций конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений от случая мероморфных функций обусловлено тем обстоятельством, что в силу сказанного выше, числа a_j должны быть, вообще говоря, *неасимптотическими* дефектными значениями. Для преодоления этой трудности привлекаются методы теории приближений. Оказывается, что задачу построения требуемой целой функции можно свести к задаче касательного приближения целыми функциями на множествах, состоящих из бесконечного числа „островов", сгущающихся к бесконечности, с оценкой роста аппроксимирующих функций. В наших построениях существенно используются результаты М. В. Келдыша о приближении целыми и рациональными функциями с ограниченным ростом (см. леммы 3 и 4 параграфа 1).

§ 1. Аппроксимационные леммы

Начнем с двух простых лемм. Ниже $d(A, B)$ означает расстояние между множествами A и B из конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$, т. е.

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b|.$$

Кроме того, для области $\Omega \subset \mathbf{C}$ и точки $\zeta \in \mathbf{C}$ обозначим

$$d_\Omega(\zeta) = d(\{\zeta\}, \partial\Omega).$$

Лемма 1. *Пусть Ω — область в $\mathbf{C}$, $\zeta_0 \in \Omega$, функция φ голоморфна в Ω, $\varphi(\zeta_0) = 0$ и $|\varphi(\zeta)| < 1$ для всех $\zeta \in \Omega$. Тогда справедлива оценка*

$$\frac{1 + |\varphi(\zeta)|}{1 - |\varphi(\zeta)|} \leqslant \exp\left\{2\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{|dt|}{d_\Omega(t)}\right\} \quad \text{для} \quad \zeta \in \Omega, \tag{1}$$

где интегрирование можно произвести по любой спрямляемой кривой, лежащей в Ω и соединяющей точки ζ_0 и ζ.

Доказательство. Для фиксированной точки $t \in \Omega$ функция ψ_t, определяемая формулой

$$\psi_t(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{1 - \overline{\varphi(t)}\,\varphi(z)} \cdot \frac{d_\Omega(t)}{z - t},$$

аналитична в круге $\{z\in\mathbb{C}:|z-t|<d_\Omega(t)\}$ и в нем $|\psi_t(z)|\leqslant 1$.

Полагая, в частности, $z=t$, получим оценку

$$\frac{|\varphi'(t)|}{1-|\varphi(t)|^2}<\frac{1}{d_\Omega(t)}\quad \text{для } t\in\Omega. \tag{2}$$

Пусть теперь $\zeta\in\Omega$, $\varphi(\zeta)\neq 0$, $a=\dfrac{\varphi(\zeta)}{|\varphi(\zeta)|}$. С учетом (2) имеем

$$\log\frac{1+|\varphi(\zeta)|}{1-|\varphi(\zeta)|}=\log\frac{a+\varphi(\zeta)}{a-\varphi(\zeta)}=2\left|\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\varphi'(t)}{a^2-\varphi^2(t)}\,dt\right|\leqslant$$

$$<2\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{|\varphi'(t)|}{1-|\varphi(t)|^2}|dt|<2\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{|dt|}{d_\Omega(t)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, имеющая более одной граничной точки, $\zeta_0\in\Omega$, функция φ конформно и однолистно отображает Ω на единичный круг, причем $\varphi(\zeta_0)=0$. Тогда имеют место оценки*

$$|\varphi(t)|>(32)^{-1}\quad \textit{при}\quad |t-\zeta_0|=\frac{1}{2}d_\Omega(\zeta_0), \tag{3}$$

$$d_\Omega(t)>(32)^{-1}(1-|\varphi(t)|)^2 d_\Omega(\zeta_0)\quad \textit{для}\quad t\in\Omega. \tag{4}$$

Для доказательства рассмотрим следующий вариант известной теоремы Кебе о покрытии: если функция f регулярна и однолистна в круге $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ и не принимает там значения c, то

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{4}{r}|f(z_0)-c|. \tag{5}$$

Докажем теперь оценку (3). На границе области Ω возьмем точку c так, что $|c-\zeta_0|=d_\Omega(\zeta_0)$. Обратная к φ функция ψ, $\psi(0)=\zeta_0$ регулярна и однолистна в единичном круге и не принимает там значения c, поэтому в силу оценки (5) имеем

$$|\psi'(0)|\leqslant 4d_\Omega(\zeta_0),\ \text{т. е.}\ |\varphi'(\zeta_0)|\geqslant\frac{1}{4d_\Omega(\zeta_0)}. \tag{6}$$

Далее, при $r=\dfrac{1}{2}d_\Omega(\zeta_0)$ функция φ регулярна и однолистна в круге $\{z\in\mathbb{C}:|z-\zeta_0|<r\}$ и не принимает там значения $c=\varphi(t)$, если $|t-\zeta_0|=r$ Согласно (5) и (6) имеем

$$|\varphi(t)|>\frac{r}{4}|\varphi'(\zeta_0)|>\frac{r}{16\,d_\Omega(\zeta_0)},$$

что доказывает оценку (3). Для доказательства оценки (4) для любой точки $t\in\Omega$ возьмем соответствующую точку $c\in\partial\Omega$ так, что $|t-c|=$

$= d_\Omega(t)$. Полагая $\varphi(t) = z_0$, заметим, что функция ψ, обратная к φ, регулярна и однолистна в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < 1 - |z_0|\}$, поэтому в силу (5) имеем

$$d_\Omega(t) \geqslant \frac{1}{4}(1 - |z_0|)\,|\psi'(z_0)|. \tag{7}$$

Для оценки снизу величины $|\psi'(z_0)|$ заметим, что функция $\dfrac{\psi(z) - \zeta_0}{\psi'(0)}$ принадлежит известному классу S, поэтому, в силу теоремы искажения Бибербаха [10],

$$|\psi'(z_0)| \geqslant |\psi'(0)| \frac{1 - |z_0|}{(1 + |z_0|)^3} > \frac{1}{8}|\psi'(0)|(1 - |z_0|).$$

Отсюда и из (7) следует требуемая оценка (4), с учетом того, что, в силу (2)

$$|\psi'(0)| = \frac{1}{|\varphi'(\zeta_0)|} \geqslant d_\Omega(\zeta_0).$$

Лемма доказана.

Мы приступаем к формулировке и доказательству леммы, наиболее важной при доказательстве наших теорем.

Эта лемма сходна с леммой М. В. Келдыша [11] об аппроксимации ядра Коши рациональными функциями (кстати, тоже вполне достаточной для наших целей). Лемма М. В. Келдыша доказывается методом Рунге последовательного вывода полюсов. Здесь, по существу, предлагается другой способ доказательства подобных лемм.

Лемма 3. *Пусть Ω—односвязная область в* $\mathbf{C}$, *имеющая более одной граничной точки*, $\zeta, \zeta_0 \in \Omega$, *спрямляемая кривая* Γ *лежит в* Ω *и соединяет точки* ζ *и* ζ_0. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *существует рациональная функция* R_ζ *с единственным полюсом в точке* ζ_0 *такая, что*

$$\left| R_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \varepsilon \quad \text{для } z \in \mathbf{C}/\Omega, \tag{8}$$

$$|R_\zeta(z)| < \exp\left\{40\left[1 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon\, d_\Omega(\zeta_0)}\right] \exp\left[4\int_\Gamma \frac{|dt|}{d_\Omega(t)}\right]\right\},$$

когда
$$|z - \zeta_0| \geqslant d_\Omega(\zeta_0). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть функция φ конформно и однолистно отображает Ω на единичный круг, причем $\varphi(\zeta_0) = 0$. Возьмем пока произвольное натуральное число n, и искомую функцию R_ζ определим формулой

$$R_\zeta(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-\zeta_0|=r} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,\ f(t) = \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(t)}\right]^n \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \varphi(\zeta)},$$

где $0 < r < \min\,[|\zeta - \zeta_0|, |z - \zeta_0|, d_\Omega(\zeta_0)]$. Здесь интеграл, в силу аналитичности f, не зависит от r при указанном выборе r и определяет функцию, аналитическую в области $\overline{\mathbf{C}}\setminus\{\zeta_0\}$. Кроме того, полагая $r_0 = \frac{1}{2}\min\{|\zeta-\zeta_0|, d_\Omega(\zeta_0)\}$, по формуле Коши имеем

$$R_\zeta(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-\zeta_0|=r_0} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \quad \text{при } |z-\zeta_0| < r_0,$$

откуда

$$\lim_{z\to\zeta_0}(z-\zeta_0)^n R_\zeta(z) = -\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi'(\zeta_0)}\right]^{n-1} \neq 0,$$

так что R_ζ — рациональная функция с единственным полюсом порядка n в точке ζ_0.

Возьмем теперь число R, $|\varphi(\zeta)| < R < 1$, и обозначим через L_R линию уровня, на которой $|\varphi(t)| = R$. Замкнутая кривая L_R охватывает точку ζ, поэтому по теореме о вычетах для $z \in \mathbf{C}/\Omega$ имеем

$$R_\zeta(z) = \frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-\zeta_0|=r} \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Отсюда, заметив, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_R} |\varphi'(t)|\,|dt| = R,$$

и учитывая оценку (4), получим

$$\left|R_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta-z}\right| < \frac{32R}{d_\Omega(\zeta_0)(1-R)^2(R-|\varphi(\zeta)|)}\left(\frac{|\varphi(\zeta)|}{R}\right)^n \text{ для } z\in\mathbf{C}/\Omega. \qquad (10)$$

Положим в частности $R = \frac{1+|\varphi(\zeta)|}{2}$ и пусть

$$I = 2\int\limits_{\Gamma} \frac{|dt|}{d_\Omega(t)}\,.$$

Тогда, с учетом оценки (1), имеем

$$\frac{|\varphi(\zeta)|}{R} = 1 - \frac{1-|\varphi(\zeta)|}{1+|\varphi(\zeta)|} \leqslant 1 - e^{-I} < \exp(-e^{-I}),$$

$$\frac{R}{(1-R)^2(R-|\varphi(\zeta)|)} = 4\,\frac{1+|\varphi(\zeta)|}{(1-|\varphi(\zeta)|)^3} < 4e^{3I}.$$

Из этих оценок и из (10) легко следует, что для выполнения (8) достаточно выбрать число n так, чтобы

$$n < \left[3I + 6 + \log^+\frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)}\right]e^I \leqslant n+1. \qquad (11)$$

Оценим теперь рост функции R_ζ. С этой целью рассмотрим аналитическую в Ω функцию

$$\psi(t)=\left\{1-\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(t)}\right]^n\right\}\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\varphi(\zeta)}.$$

С учетом (2) для всех $t\in\Omega$ имеем оценку

$$|\psi(t)|<\frac{|\varphi'(t)|}{|\varphi(t)|^n}(1+|\varphi(t)|+\cdots+|\varphi(t)|^{n-1})\leqslant$$

$$\leqslant|\varphi(t)|^{-n}\frac{|\varphi'(t)|}{1-|\varphi(t)|}<\frac{2|\varphi(t)|^{-n}}{d_\Omega(t)}.$$

Отсюда, полагая $\alpha=\frac{1}{2}d_\Omega(\zeta_0)$, согласно (3), имеем

$$|\psi(t)|<\frac{2}{\alpha}(32)^n,\ \text{когда}\ |t-\zeta_0|=\alpha.$$

Однако легко видеть, что

$$R_\zeta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t-\zeta_0|=\alpha}\frac{\psi(t)}{t-z}\,dt,\ \text{когда}\ |z-\zeta_0|\geqslant 2\alpha,$$

так что

$$|R_\zeta(z)|\leqslant\max_{|t-\zeta_0|=\alpha}|\psi(t)|<\frac{2}{\alpha}(32)^n<\exp\left[4n+2+\log^+\frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)}\right].$$

Отсюда и из (11), учитывая оценку $\max(l,1)\leqslant e^l$, имеем

$$|R_\zeta(z)|<\exp\left\{\left[12l+26+5\log^+\frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)}\right]e^l\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{40\left[1+\log^+\frac{1}{\varepsilon d_\Omega(\zeta_0)}\right]e^{2l}\right\}.$$

Оценка (9), а с ней и лемма доказаны.

Следствие. *Пусть в условиях леммы* 3 *дополнительно дано, что*

$$d_\Omega(t)\geqslant d\quad\text{для}\quad t\in\Gamma.$$

Тогда для функции R_ζ, *удовлетворяющей условию* (8), *имеем оценку*

$$|R_\zeta(z)|<\exp\left\{40\left[1+\log^+\frac{1}{\varepsilon d}\right]\exp\frac{4\,\text{дл.}\,\Gamma}{d},\ \text{когда}\ |z-\zeta_0|\geqslant d_\Omega(\zeta_0).\quad(12)\right.$$

Лемма 4. *Пусть* $\rho>0$, $0<\alpha<\gamma<2\pi$, *функция* Γ *аналитична в угле* $\left\{z\in\mathbf{C}\colon|\arg z|<\frac{\gamma}{2}\right\}$ *и* $|F(z)|<\exp\{\text{const}\,(|z|+1)^\rho\}$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует целая функция* G, *удовлетворяющая неравенствам*

$$|F(z)-G(z)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{при}\ |\arg z|\leqslant\frac{\alpha}{2},$$

$$|G(z)| < \exp\{\mathrm{const}\,(|z|+1)^{\nu}\} \quad \text{для} \quad z \in \mathbf{C},$$

где $\nu = \max\left\{\frac{\pi}{2\pi-\gamma}, \rho\right\}$.

Эта лемма является частным случаем теоремы 3.5 М. В. Келдыша [12] о приближении голоморфных функций целыми функциями с ограниченным ростом в случае угла.

Лемма 5. *Пусть* $\frac{1}{2} < \rho \leqslant 1$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{\rho}\left(\rho - \frac{1}{2}\right)$, *функция* f *аналитична в угле* $\left\{z \in \mathbf{C}: |\arg z| \leqslant \frac{\beta}{2}\right\}$ $(\beta > \alpha)$ *и* $|f(z)| < \exp\{\mathrm{const} \times (|z|+1)^{\rho}\}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует целая функция* G_{ρ} *порядка* ρ *и нормального типа, удовлетворяющая неравенству*

$$|f(z) - G_{\rho}(z)| < \varepsilon \exp(-|z|^{\rho}) \quad \text{при} \quad |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

Доказательство. Возьмем число γ так, что

$$\gamma \leqslant \beta, \; \alpha < \gamma < \theta_0 = \frac{\pi}{\rho}\left(\rho - \frac{1}{2}\right).$$

Хорошо известно [13], что при $0 < \rho < 1$ бесконечное произведение Вейерштрасса

$$V_{\rho}(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}}\right)$$

представляет собой целую функцию порядка ρ и нормального типа такую, что при $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|V_{\rho}(re^{i\theta})|}{r^{\rho}} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \pi), \tag{14}$$

причем стремление к пределу равномерно в любом интервале $\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$, $\eta > 0$. Положим теперь

$$\omega_{\rho}(z) = \begin{cases} e^{-2z} & \text{при} \quad \rho = 1, \\ \frac{1}{p} V_{\rho}^{q}\left(ze^{-\frac{\theta_0}{2}i}\right) & \text{при} \quad \frac{1}{2} < \rho < 1, \end{cases}$$

где p и q — достаточно большие натуральные числа.

Из (14) при $\eta = \frac{\theta_0 - \gamma}{2}$ следует, что функция ω_{ρ}, имеющая порядок ρ и нормальный тип, удовлетворяет неравенству

$$\exp\{-\mathrm{const}\,(|z|+1)^{\rho}\} < |\omega_{\rho}(z)| < \exp(-|z|^{\rho}) \quad \text{при} \quad |\arg z| \leqslant \frac{\gamma}{2}. \tag{15}$$

В силу (15) и условий леммы 5, для функции $F = \frac{f}{\omega_{\rho}}$ выполняются условия леммы 4. Обозначив $G_\rho = G\cdot\omega_\rho$, получим функцию, удовлетворяющую, с учетом (15), неравенству (13). Рост функции G_ρ определяется числом $\nu = \max\left\{\frac{\pi}{2\pi-\gamma}, \rho\right\}$. В данном случае $\nu = \rho$, так как

$$\frac{\pi}{2\pi-\gamma} < \frac{\pi}{2\pi-\theta_0} = \frac{2\rho}{2\rho+1} < \rho.$$

Если порядок или тип функции G_ρ ниже требуемого, то вместо нее мы можем рассматривать функцию $G_\rho + \frac{\varepsilon}{2}\omega_\rho$.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теорем 1 и 2 состоит из нескольких пунктов. Ниже все построения мы проводим, нацеливаясь на теорему 1, а теорему 2 получаем попутно. Заметим с самого начала, что при доказательстве теоремы 1 достаточно ограничиться случаем, когда $\frac{1}{2} < \rho \leqslant 1$. В самом деле, если $\rho > 1$, то возьмем натуральное число N так, что $\rho \leqslant N \leqslant 2\rho$. Построив целую функцию $G_{\frac{\rho}{N}}$ порядка $\frac{\rho}{N}$, множество дефектных значений которой содержит множество $(a_j)_1^\infty$, мы затем можем рассматривать целую функцию G_ρ: $G_\rho(z) = G_{\frac{\rho}{N}}(z^N)$ порядка ρ с теми же дефектами.

1°—2°. *Предварительные построения.* 1°. Возьмем теперь произвольное число α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{\rho}\left(\rho - \frac{1}{2}\right)$ и последовательность $(\theta_k)_{-\infty}^{+\infty}$ такую, что $\theta_{-k} = -\theta_k$, $\theta_k \uparrow \frac{\alpha}{2}$ при $k \uparrow +\infty$. Далее пусть $0 < \varepsilon < 1$, $0 \leqslant \delta < \frac{1}{3}$, k — произвольное целое число, $\alpha_k = \min(\theta_{k+1} - \theta_k, \theta_k - \theta_{k-1})$, а n — произвольное натуральное число. Введем обозначения

$$\Delta_k(\varepsilon) = \{z \in \mathbf{C}: |\arg z - \theta_k| \leqslant \varepsilon\alpha_k\},$$

$$\sigma_n(\delta) = \{z \in \mathbf{C}: (1-\delta)\, 2^n \leqslant |z| \leqslant (1+\delta)\, 2^{n+1}\},$$

$$E_{k,n}(\varepsilon, \delta) = \Delta_k(\varepsilon) \cap \sigma_n(\delta).$$

Очевидно, что множества $E_{k,n}(\varepsilon, \delta)$ не пересекаются для разных пар (k, n) и монотонно расширяются при увеличении ε и δ.

Пусть теперь $(n_k)_1^{+\infty}$ — некоторая последовательность *четных* натуральных чисел, $n_k \uparrow +\infty$ при $k \uparrow +\infty$. Полагая $n_{-k} = n_k + 1$, рассмотрим замкнутые в $\mathbf{C}$ множества

$$E(\varepsilon, \delta) = \bigcup_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \bigcup_{m=0}^{+\infty} E_{k,\, n_k+2m}(\varepsilon, \delta).$$

Отметим следующее важное свойство множеств $E(\varepsilon, \delta)$. Пусть $\lambda_{k, r}$ означает пересечение окружности $\{z \in \mathbf{C}: |z| = r\}$ с $\Delta_k(\varepsilon)$. Тогда для любого натурального j и любого $r > 2^{n_j}$ пересечение множества $E(\varepsilon, \delta)$ с окружностью $\{z \in \mathbf{C}: |z| = r\}$ содержит дугу $\gamma_{j,r}$ длины $(2\varepsilon\alpha_j)\, r$, совпадающую либо с $\lambda_{j,r}$, либо с $\lambda_{-j,r}$. Положим далее

$$E^p_{k,n} = E_{k,n}(\varepsilon_p, \delta_p), \quad E_p = E(\varepsilon_p, \delta_p),$$

где $\varepsilon_p = \dfrac{p+1}{4}$, $\delta_p = \dfrac{p}{8}$, а p принимает только три значения $p=0, 1, 2$.

Тогда имеем

$$E^0_{k,n} \subset E^1_{k,n} \subset E^2_{k,n}, \quad E_0 \subset E_1 \subset E_2.$$

Множества E_p зависят также от последовательности (n_k). Для наложения нужных нам ограничений на последовательность (n_k) и для дальнейшего изложения полезно ввести две аналитические на множестве E_2 функции φ и ψ, полагая

$$\varphi(z) = \alpha_{|k|}, \quad \psi(z) = \exp(-\mu_k z^{\varepsilon}), \text{ когда } z \in \Delta_k(\varepsilon_2), \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

где $\mu_k = \exp\left(-\dfrac{2^{n}}{\alpha_k}\right)$, так что $\mu_{-k} = \mu_k$.

Так как равномерно на $\Delta_k(\varepsilon_2)$ $\zeta\psi(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$, а функция φ ограничена на $\Delta_k(\varepsilon_2)$, то мы можем взять последовательность (n_k) настолько быстро растущую, что выполняется условие

$$\max(|\zeta|, |\varphi(\zeta)|) < |\psi(\zeta)|^{-1} \quad \text{для } \zeta \in E_2. \tag{16}$$

При этом можно также считать, что $n_1 > 4$ и

$$\int\limits_{\partial E_2} |\zeta^{-2} d\zeta| < 1. \tag{17}$$

2°. Обозначим теперь через $l^p_{k,n}$ $(p = 1, 2;\ k = \pm 1, \pm 2, \cdots;\ n = n_k + 2m;\ m = 0, 1, 2, \cdots)$ дугу окружности $\{z \in \mathbf{C}: |z| = (1+\delta_p)\, 2^{n+1}\}$, лежащую в полуплоскости $\{z \in \mathbf{C}: (-1)^{n_k} \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и соединяющую точку $(1+\delta_p)\, 2^{n+1} e^{i\theta_k} \in E^p_{k,n}$ с точкой $-(1+\delta_p)\, 2^{n+1}$. В силу определения множеств E_p имеем, что $l^p_{k,n}$ не пересекаются с E_{p-1} и, более того

$$d(\{\partial E^p_{k,n} \cup l^p_{k,n}\}, E_{p-1}) = d(E^p_{k,n}, E_{p-1}) > (1-\delta_p)\, 2^n \sin \alpha_k (\varepsilon_p - \varepsilon_{p-1}) >$$

$$> \frac{3}{4}\, 2^n \sin \frac{\alpha_k}{4} > \alpha_k 2^{n-4}. \tag{18}$$

Пусть теперь $\zeta \in \partial E_p$, $p = 1, 2$. Определим кривую Γ^p_ζ и *односвязную* область Ω^p_ζ следующим образом: если $\zeta \in \partial E^p_{k,n}$, то через Γ^p_ζ обозначим объединение кривой $l^p_{k,n}$ с меньшей дугой границы $\partial E^p_{k,n}$, соединяющей точку ζ с точкой $(1+\delta_p)\, 2^{n+1} e^{i\theta_k}$, и положим

$$\Omega^p_\zeta = \{z \in \mathbf{C}: d(z, \Gamma_\zeta) < \alpha_k 2^{n-4}\}.$$

Теперь к области Ω_ζ и кривой Γ^p_ζ применим лемму 3, полагая еще $\zeta_0 = -(1+\delta_p)\, 2^{n+1}$, $\varepsilon = |\psi(\zeta)|^7$. Рассмотрим функцию Q_p: $Q_p(\zeta, z) =$

$= R_\zeta(z)$ для $(\zeta, z) \in \partial E_p \times \{w \in \mathbf{C}\colon \operatorname{Re} w \geqslant -1\}$, удовлетворяющую, в силу (8), неравенству

$$\left| Q_p(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < |\psi(\zeta)|^7 \text{ для } \zeta \in \partial E_p,\ z \in \mathbf{C}/D_\zeta^p, \tag{19}$$

где

$$D_\zeta^p = D_{k,n}^p = \{z \in \mathbf{C}\colon\ d(z, \partial E_{k,n}^p \cup l_{k,n}^p) < \alpha_k 2^{n-4}\}$$

при $\zeta \in \partial E_{k,n}^p$, так что $\Omega_\zeta^p \subset D_\zeta^p$. Рост функции Q_p ограничивается неравенством

$$|Q_p(\zeta, z)| < |\psi(\zeta)|^{-\frac{300}{\sqrt{\mu_k}}} \tag{20}$$

для $(\zeta, z) \in [\partial E_p \cap \Delta_k(\varepsilon_p)] \times \{w \in \mathbf{C}\colon\ \operatorname{Im} w \geqslant -1\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Это неравенство следует из (12), поскольку в нашем случае имеем

$$\exp \frac{4 \text{ дл. } \Gamma_\zeta^p}{d} < \exp \frac{4 \cdot 2^{n+4}}{\alpha_k \cdot 2^{n-4}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \text{ при } \zeta \in \partial E_{k,n}^p,$$

где

$$d = \alpha_k \cdot 2^{n-4} > 2^{11} \exp\left(-\frac{2^{11}}{\alpha_k}\right) 2^{n-4} = \mu_k 2^{n+7} > 4 \mu_k |\zeta|^p.$$

Отсюда и из оценки

$$\mu_k |\zeta|^p > \log |\psi(\zeta)|^{-1} > \log |\zeta| > \log 2^{n_1 - 1} > 1,$$

вытекающей из (16), в свою очередь следует

$$1 + \log^+ \frac{1}{\varepsilon d} < 1 + \log^+ e^{-1} |\psi(\zeta)|^{-7} = \log |\psi(\zeta)|^{-7}.$$

Замечание 1. Напомним, что $Q_p(\zeta, z)$ *аналитична* по z (и даже рациональна) при $\operatorname{Re} z \geqslant -1$ для любой фиксированной точки $\zeta \in \partial E_p$.

Замечание 2. Из определения областей D_ζ^p следует, что если ζ' и ζ'' принадлежат одной и той же компоненте границы ∂E_p, то $D_{\zeta'}^p = D_{\zeta''}^p$. Учитывая это, а также тот факт, что компоненты ∂E_p компактны и что правые части неравенств (19) и (20) не зависят от z и непрерывны по ζ, мы заключаем, что $Q_p(\zeta, z)$ можно считать кусочно постоянной по ζ, равномерно относительно z.

Замечание 3. Неравенство (18) означает, что $E_{p-1} \subset \mathbf{C}/D_\zeta^p$, так что оценка (19) выполняется для всех $z \in E_{p-1}$. Кроме того, легко видеть, что $D_\zeta^p \subset \left\{ w \in \mathbf{C}\colon |w| > \frac{1}{4} |\zeta| \right\}$, так что при $\zeta \in \partial E_p$ неравенство (19) выполняется также для всех z таких, что $\operatorname{Re} z \geqslant -1$ и $|z| \leqslant \frac{1}{4} |\zeta|$.

Замечание 4. Из определения областей $D_{k,n}^p$ легко получить, что $D_{k,n}^p \cap D_{k',n'}^p = \varnothing$ для допустимых пар (k, n) и (k', n') таких, что или $n \neq n'$ или $n = n'$, но $kk' < 0$.

3°. **Две основные леммы.** Настоящий пункт является центральным звеном в цепи доказательств теорем 1 и 2.

Лемма 6. *Существует аналитическая в полуплоскости* $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > -1\}$ *функция* ω, $|\omega(z)| < 2 \exp(|z|^\rho)$ *такая, что*

$$1 < \left|\frac{\omega(z)}{\psi(z)}\right| < 2 \quad \text{для} \quad z \in E_1. \tag{21}$$

Доказательство. Здесь и ниже при доказательстве леммы 7 мы предполагаем, что граница ∂E_p $(p = 1, 2)$ стандартным образом ориентирована, так что при обходе каждой ее компоненты $\partial E^p_{k,n}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots; n = n_k + 2m; m = 0, 1, 2, \cdots)$ внутренность соответствующей компоненты $E^p_{k,n}$ множества E_p остается слева.

Определим теперь аналитическую в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > -1\}$ функцию $\omega_{k,n}$ формулой (см. замечания 1 и 2)

$$\omega_{k,n}(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial E^2_{k,n}} [\psi(\zeta) - 1]\, Q_3(\zeta, z)\, d\zeta. \tag{22}$$

Полагая еще

$$\psi_{k,n}(z) = \begin{cases} \psi(z) & \text{для } z \in E^2_{k,n}/\partial E^2_{k,n}, \\ 1 & \text{для } z \in \mathbb{C}/E^2_{k,n}, \end{cases}$$

с учетом формулы Коши получим

$$\omega_{k,n}(z) - \psi_{k,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial E^2_{k,n}} [\psi(\zeta) - 1] \left[Q_3(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta$$

$$\text{для } z \in \mathbb{C}/\partial E^2_{k,n}.$$

Отсюда, поскольку $|\psi(\zeta) - 1| < \frac{1}{|\zeta|} + 1 < \frac{3}{2}$, с учетом (19), (16) и (17) имеем

$$|\omega_{k,n}(z) - \psi_{k,n}(z)| < \frac{1}{4} \int\limits_{\partial E^2_{k,n}} |\psi(\zeta)|^7 |d\zeta| \leqslant \frac{1}{4} \max_{\zeta \in \partial E^2_{k,n}} |\psi(\zeta)|^7 \int\limits_{\partial E^2_{k,n}} |\zeta^{-2} d\zeta| <$$

$$< \frac{1}{4} \max_{\zeta \in \partial E^2_{k,n}} |\psi(\zeta)|^5 \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}/D^2_{k,n}. \tag{23}$$

Но если $\zeta, z \in E^2_{k,n}$, то тогда

$$\cos(\rho \arg \zeta) > \cos \frac{1}{2} \alpha\varphi > \cos \frac{\pi}{2}\left(\rho - \frac{1}{2}\right) > \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Re} \zeta^\rho > 2^{-\frac{1}{2}} |\zeta|^\rho \geqslant 2^{-\frac{1}{2}} \left|\frac{z}{4}\right|^\rho > \frac{1}{5} |z|^\rho,$$

так что $|\psi(\zeta)|^5 < |\psi(z)|$. Это вместе с (23) дает нам оценку

$$\frac{3}{4} < \left| \frac{\omega_{k,n}(z)}{\psi(z)} \right| < \frac{5}{4} \quad \text{для} \quad z \in E^1_{k,n}. \tag{24}$$

Кроме того, с учетом (16) имеем также

$$\frac{1}{4} |\psi(\zeta)|^5 < \frac{1}{4|\zeta|^5} < 4^{-n} \quad \text{для} \quad \zeta \in \partial E^2_{k,n}. \tag{25}$$

Сочетая эту оценку с (23), имеем

$$|\omega_{k,n}(z) - 1| < 4^{-n} \quad \text{для} \quad z \in \mathbb{C}/(D^2_{k,n} \cup E^2_{k,n}). \tag{26}$$

Из этой оценки следует, что двойной ряд

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} [\omega_{k,\, n_k+2m}(z) - 1]$$

сходится равномерно и абсолютно на любом компакте из полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > -1\}$. Для этого достаточно заметить, что ряд

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} 4^{-n_k-2m}$$

очевидно сходится и что любой круг пересекается лишь с *конечным* числом множеств вида $D^2_{k,n} \cup E^2_{k,n}$, $n > n_k$.

Теперь искомую функцию ω определим формулой

$$\omega(z) = \frac{3}{4} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \omega_{k,\, n_k+2m}(z). \tag{27}$$

В силу сказанного выше, формула (27) определяет функцию, аналитическую по крайней мере, в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > -1\}$. В действительности ω является мероморфной в $\mathbb{C}$ функцией с полюсами, лежащими на отрицательной вещественной полуоси, однако в дальнейшем этот факт нам не понадобится.

Докажем сначала оценку (21). Пусть $z \in E_1$. Тогда существует целое число $k' \neq 0$ и натуральное число $n' = n_{k'} + 2m$, $m \geqslant 0$, такое, что $z \in E^1_{k',n'}$. Неравенство (26) будет выполняться для всех пар $(k, n) \neq (k', n')$, так как всегда $E_1 \subset \mathbb{C}/D^2_{k,n}$ (см. замечание 3). Поэтому при $(k, n) \neq (k', n')$ имеем

$$\max(|\omega_{k,n}(z)|, |\omega_{k,n}(z)|^{-1}) \leqslant 1 + \frac{|\omega_{k,n}(z) - 1|}{1 - |\omega_{k,n}(z) - 1|} <$$

$$< 1 + \frac{4^{-n}}{1 - 4^{-n}} < 1 + \frac{4}{3} 4^{-n}.$$

Отсюда, полагая $w = \frac{2}{3} \omega(z) [\omega_{k',n'}(z)]^{-1}$, учитывая оценку

$$1 + x < e^x < 1 + 3x \quad \text{при} \quad 0 < x < 1,$$

а также тот факт, что $n_{-k}=n_k+1$ для $k>0$, получим

$$\max(|w|,|w|^{-1})<\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{m=0}^{\infty}\left(1+\frac{4}{3}\cdot 4^{-n_k-m}\right)<\exp\left(\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}4^{-n_k-m}\right)<$$

$$<1+4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}4^{-n_k-m}=1+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{-n_k}}{1-4^{-n_k}}<$$

$$<1+\frac{4^2}{3}\sum_{j=n_1}^{\infty}4^{-j}=1+\frac{1}{3^2}4^{-n_1+3}<\frac{16}{15}, \tag{28}$$

так как $n_1\geqslant 4$. Оценка (21) следует теперь из (28) и (24), где $(k, n)=(k', n')$.

Для завершения доказательства леммы остается оценить рост функции ω. С этой целью заметим, что, в силу (23) и (25)

$$|\omega_{k,n}(z)|<1+4^{-n} \quad \text{для} \quad z\in C/D^2_{k,n}, \tag{29}$$

так как $|\psi_{k,n}(z)|\leqslant 1$.

Возьмем теперь произвольную точку z, $\operatorname{Re} z>-1$. Если

$$z\overline{\in}\bigcup_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty}D^2_{k,n_k+2m},$$

то тогда из (29), вполне аналогично неравенству (28), получим, что $|\omega(z)|<2$. Если же

$$z\in\bigcup_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty}D^2_{k,n_k+2m},$$

то существует такая пара (k', n'), что $z\in D^2_{k',n'}$, причем $n'=n_{k'}+2m$ и, скажем, $k'>0$. Согласно замечанию 4, неравенство (29) будет выполняться, по крайней мере, для таких пар (k, n), что или $k<0$, или $n\neq n'$. Поэтому на этот раз мы имеем оценку

$$|\omega(z)|\leqslant 2\prod_{k>1}^{n_k<n'}|\omega_{k,n'}(z)|. \tag{30}$$

Оценка величины $|\omega_{k,n'}(z)|$ сверху следует из (22), (20), (16) и (17)

$$|\omega_{k,n'}(z)|\leqslant 1+\frac{1}{2}\max_{\zeta\in\partial E^2_{k,n'}}(|\psi(\zeta)|^{-2}|Q_2(\zeta,z)|\int_{\partial E^2_{k,n'}}|\zeta^{-2}d\zeta|<$$

$$<1+\frac{1}{2}\max_{\zeta\in\partial E^2_{k,n'}}|\psi(\zeta)|^{-\frac{302}{\sqrt{\mu_k}}}\leqslant\max_{\zeta\in\partial E^2_{k,n'}}\exp(302\sqrt{\mu_k}|\zeta|^{\rho}).$$

Отсюда, учитывая, что $|\zeta|<4|z|$ при $\zeta\in D^2_{k,n'}$ и $z\in D^2_{k,n'}$, а также оценку $\sqrt{\mu_k}<2^{-10}\alpha_k$, имеем

$$|\omega_{k,n'}(z)|<\exp\left(\frac{4}{3}\alpha_k|z|^{\rho}\right).$$

Наконец, из этой оценки и из (30) окончательно получим

$$|\omega(z)|<2\exp\left(\frac{4}{3}|z|^{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\right)<2\exp(|z|^{\rho}),$$

так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(\theta_{k+1}-\theta_k)=\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{2}.$$

Лемма 6 полностью доказана.

Лемма 7. *Существует аналитическая в угле* $\left\{z\in\mathbf{C}\colon|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ *функция* f, $|f(z)|<\exp(8|z|^{\rho})$ *при* $|z|\geqslant 2^{n_1}$ *такая, что*

$$|\varphi(z)-f(z)|<\frac{1}{2}|\psi(z)|\quad \textit{для } z\in E_0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что для построенной в пункте 2° функции Q_1 имеет место оценка

$$\left|Q_1(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right|<\left|\frac{\psi(\zeta)}{\zeta}\right|^2\quad\text{при}\quad\zeta\in E_0,\tag{31}$$

справедливая для $z\in E_0$, а также при $|z|\leqslant\frac{1}{4}|\zeta|$, $\operatorname{Re}z\geqslant-1$. Это следует из (19), (16) и замечания 3. Рост функции Q_1 ограничивается, в силу (20), неравенством

$$|Q_1(\zeta,z)|<\exp\left(\frac{1}{3}|\zeta|^{\rho}\right)\quad\text{для}\quad\zeta\in\partial E_1,\ \operatorname{Re}z\geqslant-1,\tag{32}$$

так как $\sqrt{\mu_k}<2^{-10}\alpha_k<2^{-10}$.

Обозначим теперь

$$\Gamma_n=\bigcup_{(k,m)}^{n_k+2m<n}\partial E^1_{k,\,n_k+2m}\quad\text{для}\quad n\geqslant n_1,$$

так что Γ_n состоит из конечного числа замкнутых контуров и

$$\partial E_1=\bigcup_{n=n_1}^{\infty}\Gamma_n.$$

Рассмотрим последовательность (H_n) аналитических в полуплоскости $\{z\in\mathbf{C}\colon\operatorname{Re}z\geqslant-1\}$ функций, определенных формулой

$$H_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}Q_1(\zeta,z)\,d\zeta,\tag{33}$$

где ω — построенная в лемме 6 функция (см. также замечания 1 и 2). Возьмем натуральное число $N\geqslant n_1$ и пусть $|z|\leqslant 2^N$, $m>n\geqslant N+2$. Тогда z лежит вне тех компонент множества E_1, которые ограничены контуром Γ_m/Γ_n. Поэтому по теореме Коши

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m/\Gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

так как подынтегральная функция аналитична по ζ на E_1. Отсюда, учитывая (33) и считая дополнительно, что $\operatorname{Re} z\geqslant -1$, имеем

$$H_m(z)-H_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m/\Gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\left[Q_1(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta.$$

Из этой формулы, учитывая оценку

$$|z|\leqslant 2^N\leqslant 2^{n-2}<\frac{1}{4}|\zeta| \quad \text{для} \quad \zeta\in\Gamma_m/\Gamma_n,$$

в силу неравенств (31), (21), (16) и (17), получим

$$|H_m(z)-H_n(z)|<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial E_1/\Gamma_n}|\zeta^{-2}d\zeta|\to 0 \text{ при } \zeta\in\Gamma_m/\Gamma_n. \qquad (34)$$

Отсюда следует, что последовательность (H_n) сходится (равномерно на любом компакте) к некоторой функции H, аналитической в полуплоскости $\{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Re} z>-1\}$.

Вполне аналогично, учитывая формулу

$$\frac{\varphi(z)}{\omega(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z} \quad \text{для} \quad z\in E_0,\ |z|<2^n,$$

для произвольной точки $z\in E_0$ имеем оценку

$$\left|H(z)-\frac{\varphi(z)}{\omega(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|H_n(z)-\frac{\varphi(z)}{\omega(z)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\left[Q_1(\zeta,z)-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial E_1}|\zeta^{-2}|<\frac{1}{4}. \qquad (35)$$

Оценим теперь рост функции H. Возьмем произвольную точку z с условием, что $\operatorname{Re} z>-1$ и $|z|\geqslant 2^{n_1}$. Пусть $2^{N-1}\leqslant|z|<2^N$. Полагая в (34) $n=N+2$ и устремляя m к бесконечности, имеем

$$|H(z)|<|H_{N+2}(z)|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial E_1/\Gamma_{N+2}}|\zeta^{-2}d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\zeta\in\Gamma_{N+2}}\left|\frac{\zeta^2\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}Q_1(\zeta,z)\right|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{N+2}}|\zeta^{-2}d\zeta|+\int\limits_{\partial E_1/\Gamma_{N+2}}|\zeta^{-2}d\zeta|. \qquad (35')$$

Однако в силу (21) и (16)

$$\left|\frac{\zeta^2\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right|<|\psi(\zeta)|^{-1}\leqslant\exp(4\mu|\zeta|^\rho) \text{ для } \zeta\in E_1,$$

где $\mu=\max\limits_{1<k<\infty}(\mu_k)$.

С учетом этого неравенства и (32) из (35′) следует

$$|H(z)| < \max_{\zeta\in\Gamma_{N+2}} \left\{\exp\left[\left(4\mu + \frac{1}{3}\right)|\zeta|^\rho\right]\right\} \frac{1}{\pi} \int_{\partial E_1} |\zeta^{-2}\, d\zeta|.$$

Отсюда, учитывая (17) и заметив, что

$$|\zeta| \leqslant \frac{9}{8} 2^{N+3} \leqslant 18\,|z| \quad \text{для} \quad \zeta \in \Gamma_{N+2},$$

окончательно получаем (поскольку $\mu < 2^{-11}$)

$$|H(z)| < \frac{1}{2} \exp\,[(4\cdot 18\,\mu + 6)\,|z|^\rho] \leqslant \frac{1}{2} \exp\,(7\,|z|^\rho). \tag{36}$$

Полагая наконец

$$f(z) = H(z)\,\omega(z), \text{ если } \operatorname{Re} z > -1,$$

мы видим, что, согласно лемме 6 и неравенствам (35), (21) и (36), функция f удовлетворяет всем условиям леммы 7.

4°. Завершение доказательства теоремы 1 и замечания. Применим лемму 5 к построенной в лемме 7 функции f, полагая при этом $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\beta = \pi$. Мы получаем целую функцию G_ρ порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющую неравенству

$$|G_\rho(z) - \varphi(z)| < |\psi(z)| \quad \text{для} \quad z \in E_0. \tag{37}$$

Функция G_ρ является искомой целой функцией, множество дефектных значений которой содержит последовательность $(a_j)_1^\infty$. В самом деле, в силу определения множества E_0 и функции φ для любого $j = 1, 2, \cdots$ при $r \geqslant 2^{n_j}$ существует дуга $\gamma_{j,r} \subset E_0 \cap \{z \in \mathbb{C}: |z| = r\}$ (см. пункт 1°) такая, что дл. $\gamma_{j,r} = \frac{\alpha_j}{2} r$ и $\varphi(z) = a_j$ при $z \in \gamma_{j,r}$. Кроме того, так как $|\arg z| < \frac{\alpha}{2}$ при $z \in E_0$, то имеем

$$\operatorname{Re} z^\rho \geqslant |z|^\rho \cos(\rho \arg z) \geqslant |z|^\rho \cos \frac{1}{2}\rho\alpha > \frac{1}{2}|z|^\rho \quad \text{для} \quad z \in E_0.$$

Таким образом, из (37) получим

$$|G_\rho(z) - a_j| < \exp(-\mu_j \operatorname{Re} z^\rho) < \exp\left(-\frac{1}{2}\mu_j r^\rho\right) \quad \text{для} \quad z \in \gamma_{j,r},\ r \geqslant 2^{n_j}. \tag{38}$$

Отсюда в общепринятых неванлинновских обозначениях имеем

$$m(r, a_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|G_\rho(re^{i\theta}) - a_j|}\, d\theta \geqslant \frac{\alpha_j}{4\pi} \inf_{z\in\gamma_{j,r}} \log \frac{1}{|G_\rho(z) - a_j|} >$$

$$> \frac{\alpha_j \mu_j}{8\pi} r^\rho > \mu_j^2 r^\rho \quad \text{при} \quad r \geqslant 2^{n_j}. \tag{39}$$

Теперь заметим, что существует такое число σ, $0<\sigma<+\infty$, что характеристика $T(r)$ функции G_ρ удовлетворяет неравенству

$$T(r)<\sigma r^\rho \quad \text{при} \quad r>1.$$

Учитывая это, в силу (39), для величины дефекта $\delta(a_j)$ получим оценку

$$\delta(a_j)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a_j)}{T(r)}>\frac{1}{\sigma}\mu_j^2>0.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 5. Анализ построенного выше примера дает некоторые основания предполагать, что величины дефекта $\delta(a)=\delta(a, G)$ для произвольной целой функции G конечного порядка удовлетворяют условию

$$\sum_{a\in\overline{C}}\left[\log\frac{e}{\delta(a, G)}\right]^{-1}<+\infty.$$

Это условие дальше усилить нельзя, поскольку в нашем примере

$$\left[\log\frac{e}{\delta(a, G)}\right]^{-1}>\text{const}\cdot\alpha_j>0,$$

где от чисел α_j фактически требуется лишь, чтобы ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ сходился.

Замечание 6. Для того чтобы получить целую фуикцию G *бесконечного* порядка, множество дефектных значений которой содержит последовательность $(a_j)_1^\infty$, достаточно положить

$$G(z)=G_\rho(e^z),\ z\in C,$$

где G_ρ — построенная нами в теореме 1 целая функция порядка $\rho>\frac{1}{2}$.

Замечание 7. Известно [6], что для произвольной трансцендентной целой функции G имеет место „обобщенное" соотношение дефектов

$$\sum_a\delta(a, G)\leqslant 1,$$

где сумма берется по всем различным *многочленам* a. В связи с этим интересно отметить, что теорема 1 остается в силе и в том случае, когда числа a_j заменены произвольными многочленами. Доказательство сохраняет силу без всяких изменений.

5°. Доказательство теоремы 2. Пусть натуральное число N удовлетворяет неравенствам

$$\gamma+1\leqslant N<2(\gamma+1).$$

Полагая $\rho=\frac{\gamma+1}{N}$, имеем что $\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1$. Пусть G_ρ — целая функция, построенная в пункте 4° для числа ρ и последовательности $(a_j)_1^\infty$. Мы докажем, что условиям теоремы 2 удовлетворяет функция

$$F_\gamma = G_\rho \circ \lambda, \tag{40}$$

где

$$\lambda(z) = \frac{1}{(1-z)^N} \quad \text{при} \quad |z| < 1.$$

В дальнейшем мы воспользуемся обозначениями пунктов 1° и 2° (в особенности — определением множества E_0 и функций φ и ψ). Кроме того, аналогично введенным там обозначениям, положим

$$\Delta_k = \left\{ z \in \mathbf{C}: \left| \arg(1-z) + \frac{\theta_k}{N} \right| \leqslant \frac{\alpha_k}{4N} \right\},$$

$$\sigma_n = \left\{ z \in \mathbf{C}: 2^{-\frac{n+1}{N}} \leqslant |z-1| \leqslant 2^{-\frac{n}{N}} \right\},$$

$$\mathbf{E}_0 = \bigcup_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}_{k,\, n_k+2m}, \quad \text{где} \quad \mathbf{E}_{k,\, n} = \Delta_k \cap \sigma_n.$$

Множество $\mathbf{E}_0$ лежит в единичном круге. Легко видеть также, что $\lambda(\mathbf{E}_0) = E_0$. Пользуясь этим, на множестве $\mathbf{E}_0$ определим функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$, полагая $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \lambda$, $\tilde{\psi} = \psi \circ \lambda$. Тогда из (37) и (40) имеем

$$|F_\gamma(z) - \tilde{\varphi}(z)| < |\tilde{\psi}(z)| \quad \text{для} \quad z \in \mathbf{E}_0. \tag{41}$$

Возьмем теперь произвольное натуральное число j и пусть $r \in (0, 1)$. Положим

$$e_{j,r} = \mathbf{E}_0 \cap (\Delta_j \cup \Delta_{-j}) \cap \{z \in \mathbf{C}: |z| = r\},$$
$$l_{j,r} = \Delta_j \cap \{z \in \mathbf{C}: |z| = r\}.$$

Нам сначала надо оценить снизу длину $e_{j,r}$ при $r \to 1$. Заметим, что множество $e_{j,r}$ состоит из конечного числа круговых дуг, число которых может быть больше единицы даже при r сколь угодно близких к 1. Тем не менее выполняется условие

$$\text{дл. } e_{j,r} = \text{дл. } l_{j,r} \quad \text{при} \quad r \in [r_j, 1), \tag{42}$$

где число $r_j \in (0, 1)$ определяется из условия, что при $r_j \leqslant |z| < 1$ и $z \in \Delta_j$ выполняется неравенство $|z-1| \leqslant 2^{-\frac{n_j+1}{N}}$.

Равенство (42) является следствием следующего „зеркального" свойства множества $\mathbf{E}_0$: при зеркальном (относительно вещественной оси) отображении внутренность образа множества $\mathbf{E}^- = \mathbf{E}_0 \cap \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Im} z < 0\}$ лежит в дополнении к множеству $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}_0 \cap \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$. При этом объединение зеркального образа множества $\mathbf{E}^- \cap \Delta_{-j}$ с множеством $\mathbf{E}^+ \cap \Delta_j$ заполняет круговой сектор $\Delta_j \cap \{z \in \mathbf{C}: |z-1| \leqslant 2^{-\frac{n_j+1}{2}}\}$. Таким образом, вопрос сводится к оценке длины круговой дуги $l_{j,r}$. С этой целью возьмем $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и пусть $\sin\theta < r < 1$. Определим число $\beta = \beta_\theta(r) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ из условия

$$re^{i\beta} \in \{z \in \mathbf{C}\colon \arg(1-z) = -\theta\}.$$

Из треугольника с вершинами 0, 1, $re^{i\beta}$ можно усмотреть, что

$$\sin\theta = r\sin(\beta+\theta),$$

или

$$\frac{1-r}{r}\sin\theta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\theta + \frac{\beta}{2}\right),$$

откуда

$$\lim_{r\to 1}\frac{\beta_\theta(r)}{1-r} = \operatorname{tg}\theta.$$

Если стороны Δ_j образуют с полуосью $(-\infty, 1)$ острые углы θ_1 и θ_2, $\theta_1 < \theta_2$, то тогда, с учетом (42), имеем

$$\lim_{r\to 1}\frac{\text{дл. } e_{j,r}}{1-r} = \lim_{r\to 1}\frac{r}{1-r}\left[\beta_{\theta_2}(r) - \beta_{\theta_1}(r)\right] = \operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1 = c_j > 0. \tag{43}$$

Далее, легко доказать оценку

$$|\lambda(z)|^\rho = |1-z|^{-\gamma-1} \geqslant 2^{-\gamma-1}(1-|z|)^{-\gamma-1}$$

при $|z-1| < \frac{1}{4}$ и $|\arg(1-z)| \leqslant \frac{\pi}{4}$ (в частности, при $z \in \mathbf{E}_0$). С учетом этой оценки, согласно определению функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ из неравенства (41), аналогично (38) имеем

$$|F_\gamma(z) - a_j| < \exp\left[-\mu_j 2^{-\gamma-2}(1-r)^{-\gamma-1}\right] \quad \text{для} \quad z \in e_{j,r}.$$

Отсюда и из (43) для неванлинновской функции приближения m получаем оценку

$$m(r, a_j, F_\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|F_\gamma(re^{i\theta}) - a_j|}\,d\theta > \frac{\text{дл. } e_{j,r}}{2\pi r}\,\mu_j 2^{-\gamma-2}(1-r)^{-\gamma-1} >$$

$$> \frac{\tau_j}{(1-r)^\gamma} \quad \text{для} \quad r \in [R_j, 1), \tag{44}$$

где τ_j и R_j не зависят от r, $\tau_j > 0$, $R_j \in (r_j, 1)$.

Нам надо еще оценить характеристику $T(r, F_\gamma)$. Поскольку $F_\gamma = G_\rho \circ \lambda$, где G_ρ — целая функция порядка ρ и нормального типа, существует константа $\sigma > 0$ такая, что

$$|F_\gamma(z)| < \exp\{\sigma[|1-z|^{-\gamma-1} + 1]\} \quad \text{при} \quad |z| < 1.$$

Отсюда для $r \in [0, 1)$ имеем

$$T(r, F_\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F_\gamma(re^{i\theta})|\,d\theta < \sigma + \frac{\sigma}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{\gamma+1}}.$$

Однако при $\theta\in[0,\pi]$ и $r\in\left[\frac{1}{4}, 1\right)$

$$|1-re^{i\theta}|^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\theta}{2}>(1-r)^2+r\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)^2>\frac{1}{2}\left(1-r+\frac{\theta}{\pi}\right)^2,$$

так что

$$T(r, F_\gamma)<\sigma+(2^{\gamma+1}\sigma)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\theta}{(1-r+\pi^{-1}\theta)^{\gamma+1}}<\sigma+\frac{\sigma}{\gamma}2^{\gamma+1}\frac{1}{(1-r)^\gamma}.$$

Отсюда и из (44) окончательно получаем

$$\delta(a_j, F_\gamma)=\lim_{r\to1}\frac{m(r, a_j, F_\gamma)}{T(r, F_\gamma)}>\frac{\gamma}{2^{\gamma+1}\sigma}\tau_j>0.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.VII.1970.

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ. Սահմանափակ աճ ունեցող ամբողջ և անալիտիկ ֆունկցիաներ, որոնց դեֆեկտային արժեքների բազմությունը անվերջ է (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում բերվում է մանրամասն շարադրանքը [1] աշխատանքում հեղինակի ստացած այն թեորեմայի, որ ցանկացած $\rho>\frac{1}{2}$ *թվի համար գոյություն ունի* ρ *կարգի և նորմալ տիպի ամբողջ ֆունկցիա, որի դեֆեկտային արժեքների բազմությունը պարունակում է կամայական նախօրոք տված հաշվելիից ոչ ավելի բազմություն։ Զուգընթաց ապացուցվում է նման թեորեմա շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների համար։*

N. U. ARAKELIAN. *Entire and analytical functions of limited growth with infinite number of defective values* (summary)

Complete proof of the theorem announced earlier in [1] is presented. The theorem states that for each $\rho>1/2$ there exists an entire function of order ρ and of normal type the set of defective values of which contains any given countable set of complex numbers. An analogous theorem for functions golomorphic in the unit circle is also proved

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян.* Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, ДАН СССР, 170, № 5, 1966, 999—1002.
2. *R. Nevanlinna.* Uber Riemansche Flächen mit endlich vielen Vindungspunkten, Acta Math., 58, 1932, 295—373.
3. *L. Ahlfors.* Uber eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Functionen, Acta Math., 58, 1932, 375—406.
4. *А. А. Гольдберг.* О дефектах мероморфных функций, ДАН СССР, 98, 1954, 893—895.
5. *А. А. Гольдберг.* О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка, Укр. матем. ж. 11, 1959, 438—443.
6. *У. Хейман.* Мероморфные функции, Изд. „Мир", М., 1966.
7. *R. Nevanlinna.* La théoreme Picard—Borel et la theorie des functions meromorphes, Paris, 1929.

8. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
9. *Г. Виттих*. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М., 1960.
10. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. „Наука", М., 1966.
11. *С. Н. Мергелян*. О полноте систем аналитических функций, УМН, VIII, вып. 4 (56), 1953, 3—63.
12. *С. Н. Мергелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.
13. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

А. И. ПЕТРОСЯН

О ПРИБЛИЖЕНИЙ ГОЛОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПОЛИЭДРАХ ВЕЙЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ C^2

Введение

Теорема Вейля утверждает, что на полиномиальных полиэдрах Вейля в n-мерном комплексном пространстве C^n всякая функция, голоморфная в окрестности полиэдра, равномерно приближается полиномами. Возможны более сильные утверждения, относящиеся к функциям, непрерывным на компакте и голоморфным в его внутренних точках. Отметим некоторые из результатов этого рода. Для аналитических дуг возможность приближения непрерывных функций полиномами доказана Вермером [1], Е. М. Чирка обобщил этот результат на случай простых жордановых дуг с нигде не плотной проекцией [2]. Для строго псевдовыпуклых областей теорема о приближении сделана Г. М. Хенкиным [3]. Настоящая работа посвящена изучению возможности равномерной аппроксимации голоморфных функций на полиэдре Вейля. Напомним определение полиэдра. Пусть $z=(z_1, z_2,\cdots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства C^n. Область D в C^n называется аналитическим полиэдром, если существуют N функций $\chi_\alpha(z)$, $\alpha=1, 2,\cdots, N$, голоморфных в некоторой окрестности $U(\overline{D})$ замыкания $\overline{D}$ и таких, что

$$D=\{z: |\chi_\alpha(z)|<1, \ \alpha=1, 2,\cdots, N\}.$$

Аналитический полиэдр называется полиэдром Вейля, если $N\geqslant n$ и пересечение любых k, $1\leqslant k\leqslant n$ гиперповерхностей $|\chi_{\alpha_i}(z)|=1, i=1, 2,\cdots,k$ имеет размерность не выше $2n-k$. В этом случае совокупность n-мерных „ребер“

$$\sigma_{\alpha_1\cdots\alpha_n}=\{z: z\in\overline{D}, \ |\chi_{\alpha_i}(z)|=1, \ i=1,\cdots, n\},$$

ориентированных естественным образом, называется остовом полиэдра D и обозначается через $\Delta(D)$:

$$\Delta(D)=\bigcup_{\alpha_1<\cdots<\alpha_n}\sigma_{\alpha_1\cdots\alpha_n}.$$

Полиэдр называется невырожденным, если якобиан $\dfrac{\partial(\chi_{\alpha_1}\cdots\chi_{\alpha_n})}{\partial(z_1\cdots z_n)}$ на соответствующем ребре $\sigma_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ не обращается в нуль. Невырожденные полиэдры уже рассматривались в разных работах. Например, Бремерманом [4] установлено, что для таких полиэдров Вейля минимальная граница и граница Шилова алгебры функций, аналитических внутри полиэдра и непрерывных в его замыкании, совпадают с остовом. Основным результатом настоящей работы является теорема 3.1, утверждающая, что всякая функция, голоморфная в невырожденном полиэдре Вейля и непрерывная на его замыкании, равномерно аппроксимируется функциями, голоморфными в окрестности полиэдра. Заметим при этом, что класс невырожденных полиэдров является достаточно широким в том смысле, что любую область голоморфности можно аппроксимировать изнутри невырожденными полиэдрами Вейля.

В доказательстве вышеупомянутого результата использовано интегральное представление голоморфных функций, принадлежащее А. Г. Витушкину, который любезно согласился на его публикацию в этой статье. Это интегральное представление выражает значения любой непрерывной финитной функции, голоморфной внутри полиэдра Вейля, через ее значения на так называемом продолжении остова, причем ядро его аналитично, а для невырожденных полиэдров оно еще и интегрируемо в достаточно малой окрестности остова.

Для простоты и наглядности в настоящей работе рассматривается случай C^2, а общий случай будет опубликован в другой статье.

§ 1. Интегральное представление по продолжению остова

Вывод этого интегрального представления основан на формуле Вейля, которая, как известно (см., например, [5]) имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k<l}\iint\limits_{\sigma_{kl}} f(\zeta)\,D(q_k,\ q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{1.1}$$

и справедлива для любой функции, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$. Поясним приведенные здесь обозначения. q_k означает вектор, координаты которого определяются по формулам

$$q_{ki}(\zeta,\ z)=\frac{r_{ki}(\zeta,\ z)}{\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)},$$

$$i=1,\ 2;\ k=1,\cdots,\ N,$$

в которых функции $r_{ki}(\zeta,\ z)$, аналитические в области $U(\overline{D})\times U(\overline{D})$, определяются в свою очередь из разложения Хефера

$$\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)=\sum_{i=1}^{2} r_{ki}(\zeta,\ z)\cdot(\zeta_i-z_i) \tag{1.2}$$

и, наконец

$$D(q_k,\ q_l)=\begin{vmatrix} q_{k1} & q_{l1}\\ q_{k2} & q_{l2}\end{vmatrix}.$$

Определение 1. *Для заданной пары индексов* k, l построим трехмерную поверхность

$$\tilde{\sigma}_{kl} = \{z\colon |\chi_k(z)| = |\chi_l(z)| = t;\ |\chi_m(z)| \leqslant t,\ 1 \leqslant t < \infty,\ m = 1, \cdots, N\}$$

и выберем на ней ориентацию, согласованную с ориентацией σ_{kl}. Множество $\tilde{\Delta}(D) = \bigcup\limits_{k<l} \tilde{\sigma}_{kl}$ будем называть продолжением остова полиэдра D.

Замечание 1. Нам часто будут встречаться выражения типа

$$\iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2; \quad \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \cdot g \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1, d\zeta_2,$$

$z \in D$; где f — функция, непрерывная и финитная в $U(\bar{D})$; g — гладкая функция. Придадим этим выражениям смысл с помощью равенств

$$\iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2, \tag{1.3}$$

$$\iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \cdot g \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} f \cdot g \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - \tag{1.4}$$

$$- \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} f \cdot \bar{\partial} g \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

которые для гладкой f являются просто формулой Стокса. Здесь $\bar{\partial} f$ означает неаналитическую часть дифференциала df, т. е.

$$\bar{\partial} f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_2} d\bar{\zeta}_2.$$

Лемма 1.1. *Пусть D — полиэдр Вейля, f — непрерывная и финитная в $U(\bar{D})$ функция, голоморфная внутри D. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l<m} \iint\limits_{\tilde{\sigma}_{klm}} f\,[D(q_k, q_l) + D(q_l, q_m) + D(q_m, q_k)]\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

$z \in D$. Здесь $\tilde{\sigma}_{klm} = \tilde{\sigma}_{kl} \cap \tilde{\sigma}_{lm}$ имеет ориентацию, индуцированную ориентацией $\tilde{\sigma}_{kl}$.

Доказательство. Так как $\partial \tilde{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl} + \bigcup_{\substack{m=1 \\ m \neq k, l}}^{N} \bar{\sigma}_{klm}$, то (1.3) принимает вид

$$\int\int\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}}\int \bar{\partial} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \int\limits_{\sigma_{kl}}\int f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, l}}^{N} \int\limits_{\bar{\sigma}_{klm}}\int f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Суммируя это равенство по всем $k<l$ и перегруппировывая члены в получаемой при этом двойной сумме, получим утверждение леммы.

Лемма 1.2. *Сумма ядер, соответствующих „стыку" $\bar{\sigma}_{klm}$, равна нулю, т. е.*

$$D(q_k, q_l) + D(q_l, q_m) + D(q_m, q_k) \equiv 0.$$

Доказательство. В силу разложения (1.2) имеем

$$[\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)][\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)][\chi_m(\zeta) - \chi_m(z)][D(q_k, q_l) +$$
$$+ D(q_l, q_m) + D(q_m, q_k)] = [\chi_m(\zeta) - \chi_m(z)]\, D(r_k, r_l) +$$
$$+ [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]\, D(r_l, r_m) + [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)]\, D(r_m, r_k) =$$
$$= [r_{m1} D(r_k, r_l) + r_{k1} D(r_l, r_m) + r_{l1} D(r_m, r_k)](\zeta_1 - z_1) +$$
$$+ [r_{m2} D(r_k, r_l) + r_{k2} D(r_l, r_m) + r_{l2} D(r_m, r_k)](\zeta_2 - z_2) \equiv 0,$$

так как квадратные скобки являются разложениями определителей с двумя равными строками.

Из лемм 1.1 и 1.2 следует

Теорема 1.1. *Пусть D — полиэдр Вейля, f — непрерывная и финитная в $U(\bar{D})$ функция, голоморфная внутри D. Тогда справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \int\int\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}}\int \bar{\partial} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2, \quad z \in D. \tag{1.5}$$

§ 2. Оценка интеграла типа Вейля

На протяжении всего этого параграфа, кроме леммы 2.3, D означает невырожденный полиэдр Вейля в пространстве C^2, удовлетворяющий условию

а) существует окрестность $V(\bar{D})$ замыкания полиэдра D такая, что для каждой определяющей функции $\chi_i(\zeta)$, $i = 1, 2, \cdots, N$, при всех $z \in U(\bar{D})$ множество $\{\zeta: \chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = 0\} \cap V(\bar{D})$ проектируется на одну из координатных плоскостей $\zeta_{\nu_i} = 0$ $(\nu_i = 1, 2)$ однолистно.

Построим множество

$$\tilde\sigma_{kl} = \{\zeta \in \overline{D}\colon |\chi_k(\zeta)| = |\chi_l(\zeta)| = t,\ |\chi_m(\zeta)| < t,\ 1-\eta^\circ \leqslant t \leqslant 1;\ m=1,\cdots,N\}$$

и сориентируем его в соответствии с ориентацией σ_{kl}. Число η° здесь взято достаточно малым так, чтобы на $\tilde\sigma_{kl}$ якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k, \chi_l)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}$ не обращался в нуль. Объединение $\tilde\Delta(D) = \bigcup\limits_{k<l} \tilde\sigma_{kl}$ является продолжением остова полиэдра внутрь. Пусть

$$\lambda_{kl}^k = \lambda_{kl}^k(z) = \{\zeta\colon \chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = 0\} \cap \tilde\sigma_{kl}.$$

Лемма 2.1. *Пусть Φ — функция, голоморфная в D и непрерывная в $\overline{D}$; g — гладкая финитная функция, носитель которой не пересекается с множеством $\{\zeta \in D\colon |\chi_k(\zeta)| \leqslant 1-\eta^\circ,\ k=1,\cdots,N\}$. Тогда при*

$$z \in U(\overline{D}) / [\partial D \cup \tilde\Delta(D)]$$

имеет место формула

$$\sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde\sigma_{kl}} \Phi \bar\partial g \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ 2\pi i \sum_{k=1}^{N} (-1)^{\nu_k} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N} \int\limits_{\lambda_{kl}^k} \frac{\Phi g}{\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}} \cdot \frac{D(r_k, r_l)}{\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)}\, d\zeta_{3-\nu_k}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Окружим особые кривые λ_{kl}^k ε-трубкой

$$T_\varepsilon(\lambda_{kl}^k) = \{\zeta \in \tilde\sigma_{kl}\colon |\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)| \leqslant \varepsilon\}$$

с боковой поверхностью

$$B_\varepsilon(\lambda_{kl}^k) = \{\zeta \in \tilde\sigma_{kl}\colon |\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)| = \varepsilon\}.$$

К дифференциальной форме $d[\Phi g D(q_k q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2]$ на множестве $\tilde\sigma_{kl}^\varepsilon = \tilde\sigma_{kl}/[T_\varepsilon(\lambda_{kl}^k) \cup T_\varepsilon(\lambda_{kl}^l)]$ применим формулу Стокса. Это можно сделать, так как ядро $D(q_k, q_l)$ на $\tilde\sigma_{kl}^\varepsilon$ не имеет особенностей. Имеем

$$\iiint\limits_{\tilde\sigma_{kl}^\varepsilon} d[\Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2] = \iint\limits_{\partial \tilde\sigma_{kl}^\varepsilon} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2. \tag{2.2}$$

Заметим, что в силу условия $z \overline{\in} \partial D$ при достаточно малых ε

$$\partial \tilde\sigma_{kl}^\varepsilon = \sigma_{kl} + \sigma_{kl}' + B_\varepsilon(\lambda_{kl}^k) + B_\varepsilon(\lambda_{kl}^l) +$$

$$+ \bigcup_{\substack{m=1\\ m\neq k,\, l}}^{N} \{\tilde\sigma_{klm}/[T_\varepsilon(\lambda_{kl}^k) \cup T_\varepsilon(\lambda_{kl}^l)]\},$$

где

$$\sigma'_{kl} = \{\zeta \in D: |\chi_k(\zeta)| = |\chi_l(\zeta)| = 1-\eta^\circ;\ |\chi_m(\zeta)| \leqslant 1-\eta^\circ,\ m=1,\cdots,N\}$$

и

$$\tilde{\sigma}_{klm} = \tilde{\sigma}_{kl} \cap \tilde{\sigma}_{lm}.$$

Учитывая еще и аналитичность функций Φ и $D(q_k, q_l)$, из (2.2) получим

$$\iiint\limits_{\tilde{\sigma}^*_{kl}} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma'_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^l_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k,\, l}}^{N} \iint\limits_{\{\tilde{\sigma}_{klm} \setminus [T_\varepsilon(\lambda^k_{kl}) \cup T_\varepsilon(\lambda^l_{kl})]\}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1, d\zeta_2.$$

Интеграл по множеству σ'_{kl} равен нулю, благодаря условию на носитель функции g. Просуммировав это равенство по всем $k<l$ и устремив ε к нулю, получим

$$\sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \tag{2.3}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k<l} \left\{ \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^l_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \right\} +$$

$$+ \sum_{k<l} \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k,\, l}}^{N} \iint\limits_{\tilde{\sigma}_{klm}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Перегруппировав члены в двойной сумме, по лемме 1.2 заключаем, что она равна нулю. Вычислим предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Заметим, что в силу условия а) производная $\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}$ отлична от нуля в $V(\bar{D})$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l) d\zeta_1 d\zeta_2 = (-1)^{3-\nu_k} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi g D(q_k, q_l) \times$$

$$\times \frac{1}{\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}}\, d\chi_k\, d\zeta_{3-\nu_k} = (-1)^{3-\nu_k} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)|=\varepsilon} \frac{d\chi_k(\zeta)}{\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)} \times$$

$$\times \int\limits_{\left\{\substack{|\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)|=\varepsilon \\ |\chi_l(\zeta)|=|\chi_k(\zeta)|}\right\}} \frac{\Phi g}{\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}} \cdot \frac{D(r_k, r_l)\, d\zeta_{3-\nu_k}}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)} = 2\pi i (-1)^{3-\nu_k} \int\limits_{\lambda^k_{lk}} \frac{\Phi g}{\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}} \times$$

$$\times \frac{D(r_k r_l)\, d\zeta_{3-\nu_k}}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)}.$$

Итак, равенство (2.3) принимает вид

$$\sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde\sigma_{kl}} \Phi \bar\partial g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ 2\pi i \sum_{k<l} \left\{ (-1)^{3-\nu_k} \int\limits_{\lambda^k_{kl}} \frac{\Phi g}{\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}} \cdot \frac{D(r_k r_l)\, d\zeta_{3-\nu_k}}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)} + (-1)^{3-\nu_l} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\lambda^l_{kl}} \frac{\Phi g}{\dfrac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_{\nu_l}}} \cdot \frac{D(r_k r_l)\, d\zeta_{3-\nu_l}}{\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)} \right\},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2.2. *При условии* $\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)=0$ *справедливо равенство*

$$\frac{D(r_k, r_l)}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)} = (-1)^{3-\nu_k} \frac{r_{k\nu_k}(\zeta, z)}{\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k}}.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $\nu_k=1$. Имеем

$$\frac{D(r_k r_l)}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)} - \frac{r_{k1}}{\zeta_2 - z_2} = \frac{D(r_k, r_l)(\zeta_2-z_2) - r_{k1}[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)]}{[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)](\zeta_2-z_2)} =$$

$$= -\frac{r_{k2} r_{l1}(\zeta_2-z_2) + r_{k1} r_{l1}(\zeta_1-z_1)}{[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)](\zeta_2-z_2)} = -\frac{r_{l1}[\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)]}{[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)](\zeta_2-z_2)} = 0.$$

Следующая лемма, по существу, утверждает, что ядро $D(q_k, q_l)$ интегрируемо на продолжении остова полиэдра Вейля в достаточно малой окрестности точек, в которых якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k, \chi_l)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}$ отличен от нуля.

Лемма 2.3. *Пусть* D — *произвольный полиэдр Вейля,* g — *гладкая финитная функция, носитель* m *которой обладает окрестностью* $U(m)$, *в которой отображение*

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \chi_k(\zeta) \\ w_2 &= \chi_l(\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

взаимно однозначно. Тогда функция

$$\psi(z)=\iint\limits_{\tilde\sigma_{kl}}|\bar\partial g\cdot D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2|$$

ограничена на любом компакте $K\subset U(\bar D)$.

Доказательство. Пусть

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1&=\zeta_1(w)\\ \zeta_2&=\zeta_2(w)\end{aligned}\right\}$$

есть отображение, обратное (2.4). В интеграле $\psi(z)$ от переменных ζ_1, ζ_2 перейдем к переменным w_1, w_2

$$\psi(z)=\iint\limits_{\tilde\sigma_{kl}}\left|d\left\{g\,\frac{D(r_k,r_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2}{[\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)][\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)]}\right\}\right|=$$

$$=\iint\limits_{m^*\cap\tilde\sigma^*}\left|d\left\{g^*\frac{D(\overset{*}{r}_k,\overset{*}{r}_l)}{[w_1-\chi_k(z)][w_2-\chi_l(z)]}\cdot\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}{\partial(w_1,w_2)}\,dw_1dw_2\right\}\right|,$$

где $g^*(w)=g(\zeta(w))$; $\overset{*}{r}_k(w,z)=r_k(\zeta(w),z)$; $\tilde\sigma^*$ — продолжение остова единичного бицилиндра внутрь; m^* — носитель функции g^*.

Далее

$$\psi(z)\leqslant\iint\limits_{\tilde\sigma^*}\left|\frac{\partial g^*}{\partial\bar w_1}\cdot\frac{D(\overset{*}{r}_k,\overset{*}{r}_l)}{[w_1-\chi_k(r)][w_2-\chi_l(z)]}\,\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}{\partial(w_1,w_2)}\,d\bar w_1dw_1dw_2\right|+$$

$$+\iint\limits_{\tilde\sigma^*}\left|\frac{\partial g^*}{\partial\bar w_2}\cdot\frac{D(\overset{*}{r}_k,\overset{*}{r}_l)}{[w_1-\chi_k(z)][w_2-\chi_l(z)]}\,\frac{\partial(\zeta_1\,\zeta_2)}{\partial(w_1\,w_2)}\,d\bar w_2\,dw_1\,dw_2\right|\leqslant \qquad (2.5)$$

$$\leqslant C\left\{\iint\limits_{\tilde\sigma^*}\frac{|d\bar w_1\,dw_1|\cdot|dw_2|}{|w_1-\chi_k(z)|\cdot|w_2-\chi_l(z)|}+\iint\limits_{\tilde\sigma^*}\frac{|d\bar w_2\,dw_2|\cdot|dw_1|}{|w_1-\chi_k(z)|\cdot|w_2-\chi_l(z)|}\right\},$$

где

$$C=\max_{\substack{w\in m^*\\ z\in k\\ j=1,2}}\left|\frac{\partial g^*}{\partial\bar w_j}\cdot D(\overset{*}{r}_k,\overset{*}{r}_l)\cdot\frac{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}{\partial(w_1,w_2)}\right|<+\infty.$$

Покажем ограниченность, например, первого из интегралов в правой части неравенства (2.5)

$$\iint\limits_{\tilde\sigma^*}\frac{|d\bar w_1\,dw_1|\cdot|dw_2|}{|w_1-\chi_k(z)|\cdot|w_2-\chi_l(z)|}=\int\limits_{|w_1|<1}\frac{|d\bar w_1\,dw_1|}{(w_1-\chi_k(z)|}\cdot\int\limits_{|w_2|=|w_1|}\frac{|dw_2|}{|w_2-\chi_l(z)|}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|w_1|<1}\frac{|d\bar w_1\,dw_1|}{|w_1-\chi_k(z)|}\cdot\int\limits_{|w_2|=|w_1|}\frac{1}{|w_2-\chi_l(z)|}\{d\,|w_2-\chi_l(z)|+|w_2-\chi_l(z)|\times$$

$$\times d\arg(w_2-\chi_l(z))| \leqslant C' \int\limits_{|w_1|<1} \frac{\ln||w_1|-|\chi_l(z)||}{|w_1-\chi_k(z)|} |d\bar{w}_1 dw_1| + 2\pi \int\limits_{|w_1|<1} \frac{|d\bar{w}_1 dw_1|}{|w_1-\chi_k(z)|},$$

где C_1 — константа. Ограниченность правой части теперь уже очевидна. Лемма доказана.

Лемма 2.4 (основная лемма). *Пусть K — компакт в $U(\overline{D})$, Φ и g — те же, что и в лемме 2.1, кроме того, носитель т функции g удовлетворяет условию леммы 2.3. Тогда при всех $z \in K$ имеет место оценка*

$$J(z) \leqslant C \|\Phi\|_{\overline{D}}, \tag{2.6}$$

где

$$J(z) = \sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2$$

является интегралом типа Вейля от функции Φg.

Здесь $\|\Phi\|_{\overline{D}} = \max\limits_{\zeta \in \overline{D}} |\Phi(\zeta)|$.

Доказательство. Так как множество $\partial D \cup \tilde{\Delta}(D)$ нигде не плотно, то оценку (2.6) достаточно доказать для $z \in K \setminus [\partial D \cup \tilde{\Delta}(D)]$. Формула (2.1), если учесть лемму 2.2, принимает вид

$$J(z) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l) d\zeta_1 d\zeta_2 - 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} \int\limits_{\lambda_{kl}^k} \frac{\Phi g}{\frac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}} \cdot \frac{r_{k\nu_k} d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k}}$$

или, обозначив через $J_k(z)$ сумму интегралов по λ_{kl}^k ($l=1, \cdots, N$),

$$J(z) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}^k} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l) d\zeta_1 d\zeta_2 - 2\pi i \sum_{k=1}^{N} J_k(z). \tag{2.7}$$

Из леммы 2.3 следует, что для каждого тройного интеграла в равенстве (2.7) справедлива оценка

$$\left| \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}^k} \Phi \bar{\partial} g D(q_k q_l)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \right| \leqslant C_1 \|\Phi\|_{\overline{D}}, \quad z \in K. \tag{2.8}$$

Поскольку кривые λ_{kl}^k ($l=1, 2, \cdots, N$; $l \neq k$) лежат на поверхности $\{\zeta\colon \chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = 0\} \cap V(\overline{D})$, то, по условию а) они однолистно проектируются на плоскость $\zeta_{\nu_k} = 0$ в некоторые кривые γ_{kl}^k. Пусть $\zeta_{\nu_k} = \varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k})$ есть уравнение поверхности $\{\zeta\colon \chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = 0\} \cap V(\overline{D})$. Тогда каждая кривая λ_{kl}^k задается условиями

$$\begin{cases} \zeta_{\nu_k} = \varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k}) \\ |\chi_l(\zeta)| = |\chi_k(z)| \\ |\chi_m(\zeta)| \leqslant |\chi_k(z)|, \; m = 1, \cdots, N. \end{cases}$$

Перейдя в плоскость $\zeta_{\nu_k}=0$, получим условия, определяющие их проекции γ_{kl}^k:

$$\gamma_{kl}^k=\{\zeta_{3-\nu_k}:\ |Q_l(\zeta_{3-\nu_k})|=|\chi_k(z)|;\ |Q_m(\zeta_{3-\nu_k})|<\chi_k(z)\},\tag{2.9}$$

где $Q_l(\zeta_{3-\nu_k})$ получается из функции $\chi_l(\zeta_1,\zeta_2)$ подстановкой $\zeta_{\nu_k}=$ $=\varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k})$. Из (2.9) видно, что объединение $\gamma_k=\bigcup\limits_l \gamma_{kl}^k$ служит границей аналитического полиэдра D_k на плоскости $\zeta_{\nu_k}=0$

$$D_k=\{\zeta_{3-\nu_k}:\ |Q_i(\zeta_{3-\nu_k})|<|\chi_k(z)|,\ i=1,\cdots,N;\ i\neq k\}.$$

Перейдя в каждом интеграле $J_k(z)$ к переменной $\zeta_{3-\nu_k}$, получим

$$J_k(z)=\int\limits_{\gamma_k}\psi_z(\zeta_{3-\nu_k})\frac{d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k}-z_{3-\nu_k}},$$

где

$$\psi_z(\zeta_{3-\nu_k})=\Phi g\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}}\Bigg|_{\zeta_{\nu_k}=\varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k})}.$$

По формуле Коши-Грина

$$J_k(z)=2\pi i\,\psi_z(z_{3-\nu_k})-\iint\limits_{D_k}\frac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}\,\frac{d\bar\zeta_{3-\nu_k}\,d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k}-z_{3-\nu_k}},$$

если $z_{3-\nu_k}\in D_k$ и

$$J_k(z)=-\iint\limits_{D_k}\frac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}\,\frac{d\bar\zeta_{3-\nu_k}\,d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k}-z_{3-\nu_k}},$$

если $z_{3-\nu_k}\overline{\in}\,\overline{D}_k$. В обоих случаях имеем оценку

$$|J_k(z)|\leqslant 2\pi\cdot\max_{\substack{z\in K\\ \zeta_{3-\nu_k}\in\gamma_k}}|\psi_z|+\max_{\substack{z\in K\\ \zeta_{3-\nu_k}\in\gamma_k}}\left|\frac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}\right|\iint\limits_{D_k}\frac{|d\bar\zeta_{3-\nu_k}\,d\zeta_{3-\nu_k}|}{|\zeta_{3-\nu_k}-z_{3-\nu_k}|}$$

или, учитывая, что $\dfrac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}=\Phi g\dfrac{1}{\dfrac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}}\,\dfrac{\partial g}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}$,

получим

$$|J_k(z)|\leqslant C_2\|\Phi\|_{\overline{D}},\ z\in K,\tag{2.10}$$

где C_2 от z не зависит. Из (2.7), (2.8) и (2.10) следует утверждение леммы.

Замечание к лемме 2.4. Иногда под полиэдром Вейля понимают области более общего вида

$$D=\{z:\ \chi_k(z)\in B_k,\quad k=1,\cdots,N\},$$

где B_k — некоторая область на плоскости значений определяющей функции $\chi_k(z)$, граница которой является гладкой кривой. Нетрудно убедиться в том, что лемма 2.4 справедлива и для таких полиэдров.

§ 3. Приближение

В пространстве C^2 выберем систему вещественных функций $\{g_i^\delta(z)\}_{i=1}^\infty$, называемую разбиением единицы, если она удовлетворяет следующим условиям:

1° при всех i и $\delta>0$ функция $g_i^\delta(z)$ неотрицательна, бесконечно дифференцируема, финитна и ее носитель m_i^δ имеет диаметр $<\delta$;

2° пересечение любого компакта с m_i^δ не пусто лишь для конечного числа значений i;

3° $$\sum_i g_i^\delta(z)\equiv 1,\quad z\in C^2.$$

Пусть D—невырожденный полиэдр Вейля; f — непрерывная и финитная функция, голоморфная в D, причем в тех точках $\breve{\sigma}_{kl}$, в которых $f(z)\neq 0$, якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k,\chi_l)}{\partial(z_1,z_2)}$ все еще не обращается в нуль. В соответствии с данным разбиением единицы, следуя А. Г. Витушкину [6], представим функцию f в виде

$$f(z)=\sum_{i=1}^{N(\delta)} f_i^\delta(z),$$

где

$$f_i^\delta(z)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k<l}\iiint\limits_{\breve{\sigma}_{kl}}\bar{\partial}f\cdot g_i^\delta D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2.$$

В самом деле, используя формулу (1.5) и условие 3°, будем иметь

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k<l}\iiint\limits_{\breve{\sigma}_{kl}}\bar{\partial}f\left(\sum_i g_i^\delta\right)D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2=$$

$$=\sum_i\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k<l}\iiint\limits_{\breve{\sigma}_{kl}}\bar{\partial}f\cdot g_i^\delta D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2=\sum_i f_i^\delta(z).$$

Благодаря условию 2° сумма здесь на самом деле конечная.

Лемма 3.1. *При достаточно малом δ для каждого i существуют направление $a^i=(a_1^i,a_2^i)$ и число $\varepsilon_i>0$ такие, что при всех ε из интервала $(0,\varepsilon_i)$ функция $f_{i,\varepsilon}(\zeta)=f(\zeta+\varepsilon a^i)$ голоморфна в некоторой окрестности V_ε множества $\Delta(D)\cap m_i^\delta$.*

Геометрический смысл этой простой леммы заключается в том, что при малых сдвигах в определенном направлении кусочек остова $\Delta(D) \cap m_l^{\delta}$ попадает внутрь полиэдра D. Всюду в дальнейшем число δ выбрано так, чтобы лемма 3.1 была бы в силе.

Лемма 3.2. *При любом* ε *из интервала* $(0, \varepsilon_l)$ *функция*

$$\iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon} \cdot g_l^{\delta} \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2$$

голоморфна в некоторой окрестности $\overline{D}$.

Доказательство. Для $\eta > 0$ положим

$$\overline{\sigma}_{kl}^{\eta} = \{\zeta \in \overline{\sigma}_{kl} \colon |\chi_k(\zeta)| = |\chi_l(\zeta)| = t, 1 \leqslant t \leqslant \eta\},$$

и возьмем $\eta = \eta(\varepsilon)$ таким, чтобы множество $\overline{\sigma}_{kl}^{\eta} \cap m_l^{\delta}$ содержалось в окрестности V_ε предыдущей леммы. Далее

$$\iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon} \cdot g_l^{\delta} D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 =$$

$$= \iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}^{\eta}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon} \cdot g_l^{\delta} D(q_k, q_l) d\zeta_1 d\zeta_2 + \iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl} \setminus \overline{\sigma}_{kl}^{\eta}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon} \cdot g_l^{\delta} D(q_k, q_l)\, d\zeta_1\, d\zeta_2.$$

Первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю, так-так $\bar{\partial} f_{l,\varepsilon}(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \overline{\sigma}_{kl}^{\eta} \cap m_l^{\delta}$. Второе же слагаемое голоморфно в окрестности $\overline{D}$, так как интегрирование в нем фактически производится по множеству $m_l^{\delta} \cap [\overline{\sigma}_{kl} \setminus \overline{\sigma}_{kl}^{\eta}]$, которое находится от области D на положительном расстоянии. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть D — невырожденный полиэдр Вейля в пространстве C^2; f — функция, голоморфная внутри D и непрерывная в $\overline{D}$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon_1 > 0$ существует функция $F(z)$, голоморфная в некоторой окрестности $\overline{D}$ и такая, что при* $z \in \overline{D}$ $|F(z) - f(z)| < \varepsilon_1$.

Доказательство. Продолжим f до функции, непрерывной и финитной во всем пространстве C^2, причем так, чтобы в точках $\overline{\sigma}_{kl}$, в которых $f(z) \neq 0$, якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k, \chi_l)}{\partial(z_1, z_2)}$ не обращался бы в нуль. Устроим разбиение единицы и представим функцию f в виде $f = \sum\limits_{l=1}^{N(\delta)} f_l^{\delta}$.

Каждое слагаемое f_l^{δ} будем приближать функцией

$$F_l(z;\, \varepsilon) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon} \cdot g_l^{\delta} D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

которая по лемме 3.2 голоморфна в окрестности $\overline{D}$. Для того чтобы оценить разность $F_l(z;\ \varepsilon) - f_l^\delta(z)$ понадобятся некоторые построения.

На плоскости комплексного переменного w_j выделим односвязную подобласть B_j^l единичного круга так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1° $$\chi_j(m_l^\delta \cap D) \subset B_j^l,$$

2° граница B_j^l является гладкой кривой,

3° каждый из полиэдров Вейля

$$G^l = \{z:\ \chi_j^\prime(z) \in B_j^l;\ j = 1, 2, \cdots, N\}$$

удовлетворяет условию а) параграфа 2,

4° при $\varepsilon < \varepsilon_l$ (см. лемму 3.1) функции $f_{l,\varepsilon}(z)$, $i = 1, 2, \cdots$ голоморфны на $\overline{G^l}$. Условие 3° выполнимо за счет того, что полиэдр D невырожденный, а число δ можно взять сколь угодно малым. Кроме того, δ считаем выбранным так, чтобы лемма 2.3 была бы в силе. Имеем

$$F_l(z;\ \varepsilon) - f_l^\delta(z) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}} \overline{\partial}(f_{l,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k,\ q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2$$

или, учитывая, что $\partial\, \overline{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl} + \bigcup\limits_m \overline{\sigma}_{klm}$

$$F_l(z;\ \varepsilon) - f_l^\delta(z) = \sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} (f_{l,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta D(q_k q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ \sum_{k<l} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k,\, l}}^{N} \iint\limits_{\overline{\sigma}_{klm}} (f_{l,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - \qquad (3.1)$$

$$- \sum_{k<l} \iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}} (f_{l,\varepsilon} - f)\, \overline{\partial} g_l^\delta\ D(q_k,\ q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Согласно лемме 2.3 для тройных интегралов в равенстве (3.1) справедлива оценка

$$\left| \iiint\limits_{\overline{\sigma}_{kl}} (f_{l,\varepsilon} - f)\, \overline{\partial} g_l^\delta D(q_k, q_l)\, d\zeta_1\, d\zeta_2 \right| \leqslant C' \|f_{l,\varepsilon} - f\|_{\overline{D}}, \qquad (3.2)$$

$z \in D$. Пусть ω_{kl}^l — ребра, составляющие остов полиэдра G^l. Из условия 1° следует, что на множестве $(\sigma_{kl} \setminus \omega_{kl}^l) \cup (\omega_{kl}^l \setminus \sigma_{kl})$ функция g_l^δ равна нулю. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma_{kl}} (f_{l,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta D(q_k, q_l) d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\omega_{kl}^l} (f_{l,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta D\ (q_k, q_l)\, d\zeta_1\, d\zeta_2. \qquad (3.3)$$

По лемме 2.4 (см. замечание к ней)

$$\left|\sum_{k<l}\iint_{\omega_{kl}^{l}}(f_{l,\varepsilon}-f)\,g_l^{\delta}\,D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2\right|\leqslant C''\|f_{l,\varepsilon}-f\|_{\overline{D}},\tag{3.4}$$

$z\in\overline{D}$. Из (3.1), (3.2) (3.4), а также учитывая, что двойная сумма в (3.1) по лемме 1.2 равна нулю, получим

$$|F_l(z;\varepsilon)-f_l^{\delta}(z)|\leqslant C\|f_{l,\varepsilon}-f\|_{\overline{D}},\quad z\in\overline{D}$$

или

$$\left|\sum_{l=1}^{N(\delta)}F_l(z;\varepsilon)-\sum_{l=1}^{N(\delta)}f_l^{\delta}(z)\right|\leqslant\sum_{l=l}^{N(\delta)}C\|f_{l,\varepsilon}-f\|_{\overline{D}}.\tag{3.5}$$

Поскольку функция f непрерывна, ε можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{l=1}^{N(\delta)}C\ f_{l,\varepsilon}-f\|_{\overline{D}}<\varepsilon_1.\tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\left|\sum_{l=1}^{N(\delta)}F_l(z;\varepsilon)-f(z)\right|<\varepsilon_1,\quad z\in\overline{D},$$

т. е. функция $F(z)=\sum_{l=1}^{N(\delta)}F_l(z;\varepsilon)$ является искомой. Теорема доказана.

Полиэдр D называется полиномиальным, если функции $\chi_k(z)$, $k=1, 2,\cdots, N$, его определяющие, являются полиномами. Для таких полиэдров справедлива теорема Вейля (см. [5]), гласящая, что всякая функция, голоморфная в окрестности $\overline{D}$, равномерно аппроксимируется полиномами. Отсюда и из теоремы 3.1 следует

Теорема 3.2. *Пусть D— невырожденный полиномиальный полиэдр Вейля в пространстве C^2. Тогда всякая функция, голоморфная в D и непрерывная на замыкании $\overline{D}$, равномерно на $\overline{D}$ аппроксимируется полиномами.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Витушкину, под руководством которого была выполнена эта работа и Г. М. Хенкину за обсуждение статьи.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 10.III.1970

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. C^2 տարածության մեջ գտնվող Վեյլի բազմանիստերում անալիտիկ ֆունկցիաներով մոտարկման մասին (ամփոփում)

Դիցուք D-ն C^2 երկչափ կոմպլեքս տարածության մեջ ոչ էափոխված Վեյլի բազմանիստ է։ Հոդվածում ապացուցված է, որ ամեն մի ֆունկցիա, որը անալիտիկ է $\overline{D}$-ում և անընդհատ է $\overline{D}$-ում, հավասարաչափ մոտարկվում է ֆունկցիաներով, որոնք անալիտիկ են $\overline{D}$-ի շրջակայքում։

A. I. PETROSIAN. *On approximation in the space C^2 on nondegenerate Weil polyhedra* (summary)

Let D be a nondegenerate Weil polyhedron in two-dimenigional complex space. It is proved, that every holomorphic in D and continuous in $\overline{D}$ function may be uniformly approximated by functions, holomorphic in the vicinity of $\overline{D}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer*. The hull of a curve in C^n, Ann. Math., 68, 1958, 550—561.
2. *Е. М. Чирка*. Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, ДАН СССР, 167, № 1, 1966, 38—40.
3. *Г. М. Хенкин*. Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения, Мат. сб., 78, 120, № 4, 1969, 611—632.
4. *H. Bremermann*. Die Charakterisierung Rungesher Gebiete durch plurisubharmonishe Functionen, Math. Ann., 136, 1958, 173—186.
5. *В. С. Владимиров*. Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Физматгиз, 1964.
6. *А. Г. Витушкин*. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, XXII, вып. 6 (138), 1967, 141—199.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

Н. О. СИНАНЯН

ПРЕДЕЛЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПО МЕРЕ T-СРЕДНИХ ДЛЯ РЯДОВ ПО ПОЛНЫМ ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть

$$T=\|a_{mk}\| \tag{1.1}$$

—линейный регулярный метод суммирования, то есть матрица (1.1) удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{mk}|<H, \quad \text{где } H \text{ не зависит от } m, \tag{1.2}$$

$$\lim_{m\to\infty} a_{mk}=0 \quad \text{для каждого } k=1, 2, \cdots, \tag{1.3}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}=1. \tag{1.4}$$

Пусть далее

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1.5}$$

есть ряд почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \tag{1.6}$$

— его частные суммы.

Определение 1. Измеримая функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, называется верхним пределом по мере T-средних ряда (1.5), определяемых матрицей (1.1), если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}S_k(x), \quad m=1, 2,\cdots \tag{1.7}$$

сходятся по мере на отрезке $[a, b]$ к почти всюду конечным функциям, и их суммы

$$A_m(x, T)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}S_k(x), \quad m=1, 2,\cdots \tag{1.8}$$

удовлетворяют условиям:

$$\text{а}^\circ. \qquad \lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} \{E[A_m(x, T) > \varphi(x)] \cap E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

$$\text{б}^\circ. \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \operatorname{mes} \{E[A_m(x, T) > \varkappa(x)] \cap E[F(x) > \varkappa(x)]\} > 0$$

для любой измеримой функции $\varkappa(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[F(x) > \varkappa(x)] > 0$.

Определение 2. Измеримая функция $G(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, называется нижним пределом по мере T-средних ряда (1.5), определяемых матрицей (1.1), если ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k(x), \quad m=1, 2, \cdots$$

сходятся по мере на отрезке $[a, b]$ к почти всюду конечным функциям и их суммы

$$A_m(x, T) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} S_k'(x), \quad m=1, 2, \cdots$$

удовлетворяют условиям:

$$\alpha^\circ. \qquad \lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} \{E[A_m(x, T) < \varphi(x)] \cap E[\varphi(x) < G(x)]\} = 0$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$:

$$\beta^\circ. \qquad \overline{\lim_{m\to\infty}} \operatorname{mes} \{E[A_m(x, T) < \varkappa(x)] \cap E[G(x) < \varkappa(x)]\} > 0$$

для любой измеримой функции $\varkappa(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[G(x) < \varkappa(x)] > 0$.

Д. Меньшовым в работах [1] и [3] была установлена

Теорема 1. Пусть задан произвольный регулярный метод суммирования T с конечными строчками*, определяемый матрицей (1.1). Тогда для любых двух измеримых функций $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$G(x) \leqslant F(x),$$

почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ можно определить тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.9}$$

обладающий следующими свойствами:

---

* Метод суммирования T называется методом с конечными строчками, если матрица (1.1), определяющая этот метод, удовлетворяет условию

$$a_{mk} = 0 \quad (k > n(m),\ m = 1, 2, \cdots),$$

где $n(m)$ — натуральные числа, вообще зависящие от m.

1) Если

$$A_m(x, T) \quad (m=0, 1, 2, \cdots) \tag{1.10}$$

являются T-средними ряда (1.9), определяемыми матрицей (1.1), то верхний предел по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности (1.10) равен $F(x)$, а нижний предел по мере на $[-\pi, \pi]$ той же последовательности равен $G(x)$;

2)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{1.11}$$

В настоящей работе, применяя две леммы, доказанные А. А. Талаляном в работе [2] и метод, несколько отличный от метода Д. Меньшова, устанавливается следующая

Теорема 2. *Пусть заданы произвольный регулярный метод суммирования T, определяемый матрицей* (1.1) *и полная ортонормированная система функций* $\{\varphi_n(x)\}$, *определенных на* $[a, b]$. *Тогда для любых двух измеримых функций* $F(x)$ *и* $G(x)$, *удовлетворяющих условию*

$$G(x) \leqslant F(x), \tag{1.12}$$

почти всюду на сегменте $[a, b]$ *существует ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{1.13}$$

обладающий следующими свойствами:

1) *Верхний предел по мере на* $[a, b]$ *последовательности* $A_m(x, T)$, $m=1, 2, \cdots$ *T-средних ряда* (1.13) *равен* $F(x)$, *а нижний предел по мере на* $[a, b]$ *той же последовательности равен* $G(x)$;

2) *Какова бы ни была измеримая функция* $f(x)$, *определенная на* $[a, b]$ *и почти всюду на этом сегменте удовлетворяющая условию*

$$G(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x),$$

существует последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \cdots$ *такая, что*

$$\lim_{l\to\infty} A_{m_l}(x, T) = f(x)$$

почти всюду на $[a, b]$;

3)
$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0.$$

В основе доказательства теоремы 2 лежат следующие леммы (см. [2]).

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}$ — *полная ортонормированная система функций, определенных на* $[a, b]$ *и* $f(x)$ — *произвольная почти везде конечная измеримая функция, определенная на том же отрезке.*

Для любого $\varepsilon > 0$ *и целого положительного* n *можно определить множество* $e_0 \subset [a, b]$ *и действительные числа* $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_m$ *такие, что выполняются следующие условия:*

1) $\quad \mathrm{mes}\, e_0 < \varepsilon;$

2) $\quad |a_k| < \varepsilon \quad n+1 \leqslant k \leqslant m;$

3) $$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{ce_0} < \varepsilon;$$

4) $$\left\| \sum_{k=n+1}^{s} a_k \varphi_k(x) \right\|_e \leqslant \varepsilon + 2\|f(x)\|_e, \quad n+1 \leqslant s \leqslant m,$$

где e — *произвольное измеримое подмножество множества* $ce_0 = [a, b] - e_0$*.

Лемма 2. *Пусть* $F(x)$ *и* $G(x)$ — *две измеримые функции, определенные на некотором множестве* E_0 *положительной меры и удовлетворяющие неравенству*

$$G(x) < F(x)$$

почти всюду на E_0.

Тогда существует последовательность $\{f_n(x)\}$ *почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на множестве* E_0 *и обладающих следующими свойствами:*

1°. $\quad G(x) < f_n(x) < F(x)$

почти всюду на множестве E_0;

2°. *Для любой измеримой функции* $f(x)$, *удовлетворяющей неравенству*

$$G(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$$

почти всюду на E_0 *существует последовательность* $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$$

почти всюду на множестве E_0;

3°. *Для любого* $\sigma > 0$ *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{mes}\, E\,[|f_{n+1}(x) - f_n(x)| > \sigma] = 0.$$

§ 2. Доказательство теоремы 2

Обозначим

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x\colon G(x) < F(x)\}, \\ E_2 &= \{x\colon G(x) = F(x) \neq \pm\infty\}, \\ E_3 &= \{x\colon G(x) = F(x) = \pm\infty\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

---

* Обозначаем

$$\left(\int_e f^2(x)\,dx\right)^{1/2} = \|f(x)\|_e.$$

Очевидно, что множества E_1, E_2 и E_3 не пересекаются и $E_1 \cup E_2 \cup \cup E_3 = \{x: x \in [a, b], \ G(x) \leqslant F(x)\}$.

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных почти всюду на множестве E_1, для которых выполняются все условия леммы 2.

На множестве E_3 определим последовательность функций $\{\bar{f}_n(x)\}$ следующим образом:

$$\bar{f}_n(x) = \operatorname{sign}(F(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot$$

Положим

$$Q_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{при} \quad x \in E_1 \\ F(x) & \text{при} \quad x \in E_2 \\ \bar{f}_n(x) & \text{при} \quad x \in E_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Пусть последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}$, определенных на $[a, b]$, удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E[|Q_n(x) - \psi_n(x)| > \sigma] = 0, \tag{2.3}$$

где σ — произвольное положительное число.

Легко видеть, что последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}$ обладает следующими свойствами.

Для любой измеримой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$G(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$$

почти всюду на $[a, b]$ существует последовательность $n_1 < n_2 < \cdots < < n_k < \cdots$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}(x) = f(x) \tag{2.4}$$

почти всюду на $[a, b]$.

Для любого $\sigma > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes} E[|\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)| > \sigma] = 0, \tag{2.5}$$

и верхний и нижний пределы по мере последовательности $\{\psi_n(x)\}$ на $[a, b]$ равны, соответственно, $F(x)$ и $G(x)$.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \tag{2.6}$$

Применяя лемму 1, где положено $f(x) = \psi_1(x)$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $n=1$, определим множество e_1 и действительные числа $c_1, c_2, \cdots, c_{n_1}$ так, что

1) $\operatorname{mes} e_1 < \varepsilon_1$;

2) $|c_k| < \varepsilon_1$, $1 \leqslant k \leqslant n_1$;

3) $\left\| \sum_{k=1}^{n_1} c_k \varphi_k(x) - \psi_1(x) \right\|_{ce_1} < \varepsilon_1;$

4) $\left\| \sum_{k=1}^{s} c_k \varphi_k(x) \right\|_e < \varepsilon_1 + 2 \|\psi_1(x)\|_e, \ 1 \leqslant s \leqslant n_1,$

где e—произвольное измеримое подмножество множества $ce_1 = [a, b] - e_1$.

Пользуясь условиями (1.2), (1.3) и (1.4), натуральные числа i_1 и $n(i_1) > n_1$ выберем настолько большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{n_1} c_k^2\right)^{1/2} \cdot \sum_{j=1}^{n_1} |a_{i,j}| < \varepsilon_1 \quad \text{при } i > i_1, \tag{2.7}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n_1} c_k^2\right)^{1/2} \left|1 - \sum_{j=n_1+1}^{\infty} a_{i,j}\right| < \varepsilon_1 \quad \text{при } i \geqslant i_1, \tag{2.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{n_1} c_k^2\right)^{1/2} \sum_{j=n(i_1)}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon_2 && \text{при } i \leqslant i_1 \\ &\sum_{j=n(i_1)}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + 2\left\|\psi_2(x) - \sum_{k=1}^{n_1} c_k \varphi_k(x)\right\|_{[a,b]}} && \text{при } i \leqslant i_1 \end{aligned}\right| . \tag{2.9}$$

Полагая

$$c_k = 0 \quad \text{при} \quad n_1 < k \leqslant n(i_1), \tag{2.10}$$

легко видеть, что полином

$$\sum_{k=1}^{n(i_1)} c_k \varphi_k(x),$$

удовлетворяет условиям 2), 3) и 4), где $1 \leqslant s \leqslant n(i_1)$.

Предположим, что определены множества e_τ, числа i_τ, $n(i_\tau)$ и коэффициенты $c_1, \cdots, c_{n(i_1)}, \cdots, c_{n(i_{\tau-1})+1}, \cdots, c_{n_\tau}, \cdots, c_{n(i_\tau)}$.

В формулировке леммы 1 положим $f(x) = \psi_{\tau+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(i_\tau)} c_k \varphi_k(x)$, $\varepsilon = \varepsilon_{\tau+1}$, $n = n(i_\tau) + 1$ и определим множество $e_{\tau+1}$ и действительные числа $c_{n(i_\tau)+1}, \cdots, c_{n_{\tau+1}}$ так, чтобы выполнялись условия

1°. $\operatorname{mes} e_{\tau+1} < \varepsilon_{\tau+1};$

2°. $|c_k| < \varepsilon_{\tau+1}, \ n(i_\tau) < k \leqslant n_{\tau+1};$

3°. $\left\| \sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k \varphi_k(x) - \psi_{\tau+1}(x) \right\|_{ce_{\tau+1}} < \varepsilon_{\tau+1};$

4°. $\left\| \sum_{k=n(i_\tau)+1}^{s} c_k \varphi_k(x) \right\|_e \leqslant \varepsilon_{\tau+1} + 2 \left\| \psi_{\tau+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(i_\tau)} c_k \varphi_k(x) \right\|_e,$

где $n(i_\tau) < s \leqslant n_{\tau+1}$, а e—произвольное измеримое подмножество множества $ce_{\tau+1}$.

Учитывая условия (1.2), (1.3) и (1.4), выберем натуральные числа $i_{\tau+1} > i_\tau$ и $n(i_{\tau+1}) > n_{\tau+1}$ настолько большими, чтобы имели место неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k^2\right)^{1/2} \sum_{j=1}^{n_{\tau+1}} |a_{ij}| < \varepsilon_{\tau+1} \quad \text{при } i \geqslant i_{\tau+1}, \tag{2.11}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k^2\right)^{1/2} \left|1 - \sum_{j=n_{\tau+1}+1}^{\infty} a_{ij}\right| < \varepsilon_{\tau+1} \quad \text{при } i > i_{\tau+1}, \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k^2\right)^{1/2} \cdot \sum_{j=n(i_{\tau+1})}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon_{\tau+2} \quad \text{при } i \leqslant i_{\tau+1} \\ &\sum_{j=n(i_{\tau+1})}^{\infty} |a_{ij}| < \frac{\varepsilon_{\tau+2}}{\varepsilon_{\tau+2} + 2\left\|\psi_{\tau+2}(x) - \sum\limits_{k=1}^{n_{\tau+1}} c_k \varphi_k(x)\right\|_{[a,b]}} \quad \text{при } i \leqslant i_{\tau+1} \end{aligned}\right\}. \tag{2.13}$$

Полагая

$$c_k = 0 \text{ при } n_{\tau+1} < k \leqslant n(i_{\tau+1}), \tag{2.14}$$

легко видеть, что полином

$$\sum_{k=n(i_\tau)+1}^{n(i_{\tau+1})} c_k \varphi_k(x)$$

удовлетворяет условиям 2°, 3° и 4°, где $n(i_\tau)+1 \leqslant s \leqslant n(i_{\tau+1})$.

Продолжая вышеуказанный процесс бесконечно, мы определим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{2.15}$$

и натуральные числа $i_1 < i_2 < \cdots < i_\tau < \cdots$; $n_1 < n_2 < \cdots n_\tau < \cdots$; $n(i_1) < n(i_2) < \cdots < n(i_\tau) < \cdots$, удовлетворяющие условиям 1°, 2°, 3°, 4°, (2.11), (2.12), (2.13) и (2.14).

Докажем, что ряд (2.15) удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.

Сначала покажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} S_j(x), \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{2.16}$$

где $S_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} c_k \varphi_k(x)$ сходится по мере.

Пусть i — некоторое число. Выберем число τ так, чтобы $i_\tau \leqslant i < i_{\tau+1}$ (предполагаем $i_0 = 1$). Пусть далее $\nu > m > n(i_{\tau+1})$— произвольные натуральные числа. Определим r и l следующими неравенствами:

$$n(i_r)\leqslant\nu<n(i_{r+1}),\quad n(i_l)\leqslant m<n(i_{l+1}). \tag{2.17}$$

Легко видеть, что

$$\Big\|\sum_{j=m+1}^{\nu}a_{ij}S_j(x)\Big\|_{\bigcap\limits_{q=l+1}^{r+1}ce_q}\leqslant\Big\|\sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})}a_{ij}S_j(x)\Big\|_{ce_{l+1}}+$$

$$+\Big\|\sum_{j=n(i_{l+1})+1}^{n(i_r)}a_{ij}S_j(x)\Big\|_{\bigcap\limits_{q=l+2}^{r}ce_q}+\Big\|\sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu}a_{ij}S_j(x)\Big\|_{ce_{r+1}}=$$

$$=\Big\|\sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})}a_{ij}\Big(S_{n(i_l)}(x)+\sum_{k=n(i_l)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\Big)\Big\|_{ce_{l+1}}+$$

$$+\Big\|\sum_{p=l}^{r-2}\sum_{j=n(i_{p+1})+1}^{n(i_{p+2})}a_{ij}\Big(S_{n(i_{p+1})}(x)+\sum_{k=n(i_{p+1})+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\Big)\Big\|_{\bigcap\limits_{q=l+2}^{r}ce_q}+$$

$$+\Big\|\sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu}a_{ij}\Big(S_{n(i_r)}(x)+\sum_{k=n(i_r)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\Big)\Big\|_{ce_{r+1}}.$$

Далее получаем

$$\Big\|\sum_{j=m+1}^{\nu}a_{ij}S_j(x)\Big\|_{\bigcap\limits_{q=l+1}^{r+1}ce_q}\leqslant\Big\|S_{n(i_l)}(x)\Big\|_{ce_{l+1}}\sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})}|a_{ij}|+$$

$$+\sum_{j=m+1}^{n(i_{l+1})}|a_{ij}|\Big\|\sum_{k=n(i_l)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\Big\|_{ce_{l+1}}+\sum_{p=l}^{r-2}\Big\|S_{n(i_{p+1})}(x)\Big\|_{[a,b]}\sum_{j=n(i_{p+1})+1}^{n(i_{p+2})}|a_{ij}|+$$

$$+\sum_{p=l}^{r-2}\sum_{j=n(i_{p+1})+1}^{n(i_{p+2})}|a_{ij}|\Big\|\sum_{k=n(i_{p+1})+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\Big\|_{ce_{p+2}}+$$

$$+\Big\|S_{n(i_r)}(x)\Big\|_{[a,b]}\cdot\sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu}|a_{ij}|+\sum_{j=n(i_r)+1}^{\nu}|a_{ij}|\Big\|\sum_{k=n(i_r)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\Big\|_{ce_{r+1}}.$$

Из соотношений $\nu>m\geqslant n(i_{r+1})$, $i_r\leqslant i<i_{r+1}$ и из (2.17) следует, что $i<i_l$.

Отсюда, в силу 4°, (2.13) и (2.14), получаем

$$\Big\|\sum_{j=m+1}^{\nu}a_{ij}S_j(x)\Big\|_{\bigcap\limits_{q=l+1}^{r+1}ce_q}<\varepsilon_{l+1}+\Big(\varepsilon_{l+1}+2\Big\|\psi_{l+1}(x)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n(i_l)}c_k\varphi_k(x)\Big\|_{ce_{l+1}}\Big)\frac{\varepsilon_{l+1}}{\Big(\varepsilon_{l+1}+2\Big\|\psi_{l+1}(x)-\sum\limits_{k=1}^{n_l}c_k\varphi_k(x)\Big\|_{[a,b]}\Big)}+$$

$$+\sum_{p=l}^{r-2}\varepsilon_{p+2}+\sum_{p=l}^{r-2}\left[\left(\varepsilon_{p+2}+2\left\|\psi_{p+2}(x)-\sum_{k=1}^{n(l_{p+1})}c_k\varphi_k(x)\right\|_{ce_{p+2}}\right)\times\right.$$

$$\times\left.\frac{\varepsilon_{p+2}}{\left(\varepsilon_{p+2}+2\left\|\psi_{p+2}(x)-\sum\limits_{k=1}^{n_{p+1}}c_k\varphi_k(x)\right\|_{[a,\,b]}\right)}\right]+\varepsilon_{r+1}+\left(\varepsilon_{r+1}+2\left\|\psi_{r+1}(x)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{n(l_r)}c_k\varphi_k(x)\right\|_{ce_{r+1}}\right)\frac{\varepsilon_{r+1}}{\left(\varepsilon_{r+1}+2\left\|\psi_{r+1}(x)-\sum\limits_{k=1}^{n_r}c_k\varphi_k(x)\right\|_{[a,\,b]}\right)}=$$

$$=\varepsilon_{l+1}+\varepsilon_{l+1}+\sum_{p=l}^{r-2}\varepsilon_{p+2}+\sum_{p=l}^{r-2}\varepsilon_{p+2}+\varepsilon_{r+1}+\varepsilon_{r+1}=2\sum_{p=l}^{r}\varepsilon_{p+1}.$$

Таким образом, имеем

$$\left\|\sum_{j=m+1}^{v}a_{lj}S_j(x)\right\|_{\bigcap\limits_{q=l+1}^{r+1}ce_q}<2\sum_{p=l}^{r}\varepsilon_{p+1}.$$

Отсюда, учитывая (2.17), получим

$$\left\|\sum_{j=m+1}^{\infty}a_{lj}S_j(x)\right\|_{\bigcap\limits_{q=l+1}^{\infty}ce_q}<2\sum_{p=l}^{\infty}\varepsilon_{p+1}. \tag{2.18}$$

С другой стороны, согласно 1° имеем

$$\operatorname{mes}\bigcap_{q=l+1}^{\infty}ce_q\geqslant b-a-\sum_{q=l+1}^{\infty}\varepsilon_q$$

и следовательно ряд (2.16) сходится по мере.

Теперь установим, что разность $A_i(x, T)-\psi_\tau(x)$ $(i_\tau\leqslant i<i_{\tau+1})$ сходится на $[a, b]$ к нулю по мере при $\tau\to\infty$.

Учитывая (2.14), представим ряд (2.16), где $i_\tau\leqslant i<i_{\tau+1}$, $\tau=1, 2,\cdots$ $\cdots$, в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}S_j(x)=\sum_{j=1}^{n_\tau}a_{ij}S_j(x)+\sum_{j=n_\tau+1}^{\infty}a_{ij}\left(S_{n_\tau}(x)+\sum_{k=n_\tau+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_\tau}a_{ij}S_j(x)+S_{n_\tau}(x)\sum_{j=n_\tau+1}^{\infty}a_{ij}+\sum_{j=n(l_\tau)+1}^{\infty}a_{ij}\left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_\tau}a_{ij}S_j(x)+S_{n_\tau}(x)\sum_{j=n_\tau+1}^{\infty}a_{ij}+\sum_{j=n(l_\tau)+1}^{n(l_{\tau+1})}a_{ij}\left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\right)+$$

$$+\sum_{j=n(l_{\tau+1})+1}^{\infty}a_{ij}\left(\sum_{k=n(l_\tau)+1}^{j}c_k\varphi_k(x)\right). \tag{2.19}$$

Из (2.11) следует, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_\tau} a_{ij} S_j(x) \right\|_{[a,b]} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_\tau} c_k^2 \right)^{1/2} \cdot \sum_{j=1}^{n_\tau} |a_{ij}| < \varepsilon_\tau \text{ при } i \geqslant i_\tau, \qquad (2.20)$$

а из (2.12) и 3° имеем

$$\left\| S_{n_\tau}(x) \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} = \left\| S_{n_\tau}(x) \cdot \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - \psi_\tau(x) + S_{n_\tau}(x) - \right.$$

$$\left. - S_{n_\tau}(x) \right\|_{ce_\tau} \leqslant \left\| S_{n_\tau}(x) \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - S_{n_\tau}(x) \right\|_{ce_\tau} + \left\| S_{n_\tau}(x) - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| S_{n_\tau}(x) \right\|_{ce_\tau} \cdot \left| 1 - \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} \right| + \left\| S_{n_\tau}(x) - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} < 2\varepsilon_\tau \text{ при } i > i_\tau. \qquad (2.21)$$

Учитывая (2.5), для любых двух чисел $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ определим τ_0 настолько большое, чтобы при $\tau > \tau_0$ выполнялось

$$\|\psi_{\tau+1}(x) - \psi_\tau(x)\|_{E_\tau} < \varepsilon, \text{ где } E_\tau \subset [a, b], \operatorname{mes} E_\tau > b - a - \delta. \qquad (2.22)$$

Обозначая $ce_\tau \cap E_\tau \cap ce_{\tau+1} = F_\tau$, из 1° и (2.22) имеем

$$\operatorname{mes} F_\tau > b - a - \varepsilon_\tau - \varepsilon_{\tau+1} - \delta. \qquad (2.23)$$

Из 4°, (2.14), 3°, (1.2) и (2.22) получим

$$\left\| \sum_{j=n(i_\tau)+1}^{n(i_{\tau+1})} a_{ij} \left(\sum_{k=n(i_\tau)+1}^{j} c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{F_\tau} \leqslant \left(\varepsilon_{\tau+1} + 2 \left\| \psi_{\tau+1}(x) - \sum_{k=1}^{n(i_\tau)} c_k \varphi_k(x) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \psi_\tau(x) - \psi_\tau(x) \right\|_{F_\tau} \right) \cdot \sum_{j=n(i_\tau)+1}^{n(i_{\tau+1})} |a_{ij}| \leqslant \left(\varepsilon_{\tau+1} + 2 \left\| \psi_\tau(x) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{k=1}^{n_\tau} c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_\tau} \right) \sum_{j=n(i_\tau)+1}^{n(i_{\tau+1})} |a_{ij}| + 2 \left\| \psi_{\tau+1}(x) - \psi_\tau(x) \right\|_{F_\tau} \cdot \sum_{j=n(i_\tau)+1}^{n(i_{\tau+1})} |a_{ij}| <$$

$$< (\varepsilon_{\tau+1} + 2\varepsilon_\tau) H + 2\varepsilon H < 2H(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{\tau+1} + \varepsilon) \qquad (2.24)$$

при $\tau > \tau_0$ и $i_\tau \leqslant i < i_{\tau+1}$.

Учитывая (2.14), можем написать

$$\sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) = \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \left(S_{n_\tau}(x) + \sum_{k=n_\tau+1}^{j} c_k \varphi_k(x) \right) =$$

$$= S_{n_\tau}(x) \cdot \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} + \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \left(\sum_{k=n(i_\tau)+1}^{j} c_k \varphi_k(x) \right).$$

Отсюда, в силу (2.13) и (2.18), где положено $l = \tau + 1$ и $m = n(i_{\tau+1}) + 1$, имеем

$$\left\| \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \left(\sum_{k=n(i_\tau)+1}^{j} c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{\bigcap\limits_{q=\tau+1}^{\infty} ce_q} \leqslant \left\| \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} S_j(x) \right\|_{\bigcap\limits_{q=\tau+2}^{\infty} ce_q} +$$

$$+ \left\| S_{n_\tau}(x) \cdot \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \right\|_{[a,b]} < 2\sum_{p=\tau}^{\infty} \varepsilon_{p+2} + \varepsilon_{\tau+1} < 2\sum_{p=\tau}^{\infty} \varepsilon_{p+1}, \tag{2.25}$$

где $i_\tau \leqslant i < i_{\tau+1}$.

Из (2.19), (2.20), (2.21), (2.24) и (2.25) получим

$$\left\| A_i(x, T) - \psi_\tau(x) \right\|_{F_\tau \cdot \bigcap\limits_{q=\tau}^{\infty} ce_q} \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n_\tau} a_{ij} S_j(x) \right\|_{[a,b]} +$$

$$+ \left\| S_{n_\tau}(x) \cdot \sum_{j=n_\tau+1}^{\infty} a_{ij} - \psi_\tau(x) \right\|_{ce_\tau} + \left\| \sum_{j=n(i_\tau)+1}^{n(i_{\tau+1})} a_{ij} \left(\sum_{k=n(i_\tau)+1}^{j} c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{F_\tau} +$$

$$+ \left\| \sum_{j=n(i_{\tau+1})+1}^{\infty} a_{ij} \left(\sum_{k=n(i_\tau)+1}^{j} c_k \varphi_k(x) \right) \right\|_{\bigcap\limits_{q=\tau+1}^{\infty} ce_\tau} < \varepsilon_\tau + 2\varepsilon_\tau + 2H(\varepsilon_\tau +$$

$$+ \varepsilon_{\tau+1} + \varepsilon) + 2\sum_{p=\tau}^{\infty} \varepsilon_{p+1}, \text{ где } \tau > \tau_0 \text{ и } i_\tau \leqslant i < i_{\tau+1}. \tag{2.26}$$

С другой стороны, согласно 1° имеем

$$\operatorname{mes}\left(F_\tau \cdot \bigcap_{q=\tau}^{\infty} ce_q \right) > b - a - \delta - \varepsilon_\tau - \varepsilon_{\tau+1} - \sum_{q=\tau}^{\infty} \varepsilon_q;\ \tau \geqslant \tau_0 \tag{2.27}$$

и следовательно, согласно (2.6) и произвольности δ и ε, разность $A_i(x, T) - \psi_\tau(x)$ $(i_\tau \leqslant i < i_{\tau+1})$ сходится на $[a, b]$ к нулю по мере при $\tau \to \infty$.

Справедливость требований 1) и 2) теоремы 2 вытекает из (2.4) и из того, что верхний и нижний пределы по мере на $[a, b]$ последовательности $\{\psi_n(x)\}$ равны соответственно $F(x)$ и $G(x)$ и последовательность $A_i(x, T) - \psi_\tau(x)$, где $i_\tau \leqslant i < i_{\tau+1}$, сходится по мере к нулю на $[a, b]$.

Требование 3) теоремы 2 вытекает из 2° и (2.6). Тем самым теорема 2 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и за оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 25.V.1970

Ն. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. T-միջինների ըստ չափի անորոշության սահմանները լրիվ օրթոնորմալ սիստեմներով շարքերի համար (ամփոփում)

Ամեն մի ռեգուլյար գումարման մեթոդի համար, ըստ կամայական լրիվ օրթոնորմալ սիստեմի կառուցված է շարք, որի միջինների վերին և ստորին սահմանները ըստ չափի հանդիսանում են նախօրոք տրված ֆունկցիաները։

N. H. SYNANIAN. *The uncertainty bounds for mean values of series by complete orthonormal systems* (summary)

For any regular method of summation and any complete orthonormal system a series is constructed, such that the upper and lower limits of mean values of the series coincide with prescribed functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Е. Меньшов.* Пределы неопределенности по мере T-средних для тригонометрических рядов, ДАН СССР, 176, № 3, 1967, 518—521.
2. *А. А. Талалян.* Об универсальных ортогональных рядах, Известия АН АрмССР, серия физико-математических наук, XII, № 1, 1959.
3. *Д. Е. Меньшов.* Пределы неопределенности по мере T-средних тригонометрических рядов, Мат. сб., 81 (123):4, 1970, 485—524.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ТИПА ДИРИХЛЕ

Введение

Рассмотрим класс D аналитических в единичном круге функций $f(z)=\sum_1^\infty a_n z^n$, имеющих конечный интеграл Дирихле

$$\|f\|^2=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}|f'(z)|^2\,dxdy=\sum_1^\infty n\,|a_n|^2<\infty.$$

Если для класса аналитических и ограниченных в единичном круге функций можно утверждать только, что множество, где могут и не существовать радиальные предельные значения, имеет меру нуль, то для класса D можем утверждать больше. Действительно, используем следующую теорему: тригонометрический ряд $\Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $\Sigma\,(a_n^2+b_n^2)\,n<\infty$, сходится всюду, кроме, быть может, некоторого множества E, логарифмическая емкость которого нуль.

Тогда получим, что функции класса D всюду на единичной окружности имеют радиальные предельные значения, кроме, быть может, некоторого множества E, логарифмическая емкость которого нуль.

Пусть $\{z_\nu\}$ $(0<|z_\nu|<1)$—некоторая последовательность точек в единичном круге. Для того чтобы существовала аналитическая и ограниченная функция в единичном круге, удовлетворяющая условиям $f(z_\nu)=0$ и $f(0)=1$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\Sigma\,(1-|z_\nu|)$ сходился. Это условие только на последовательность $\{|z_\nu|\}$.

Для класса D ситуация меняется, необходимого и достаточного условия на $\{z_\nu\}$ не существует [1, 2]. Нас интересует следующий вопрос: когда последовательность $\{z_\nu\}$ точек единичного круга может стать множеством нулей некоторой функции $f\in D$ $(f\not\equiv 0)$?

Заметим прежде, что множество $\{z_\nu\}$ называется множеством единственности для класса D, если не существует функции $f\in D$ $(f\not\equiv 0)$, для которой $f(z_\nu)=0$.

В 1952 г. Л. Карлесон показал [2], что если

$$\sum_1^\infty\left(\frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)}\right)^{1-\varepsilon}<\infty$$

для некоторого $\varepsilon>0$, то существуют функции $f\in D$ $(f\not\equiv 0)$ и $f(z_\nu)=0$.

Им было доказано также, что есть множество единственности $\{z_\nu\}$ для класса D, удовлетворяющее условию

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)}\right)^{1+\varepsilon} < \infty.$$

Было отмечено, что в том случае, когда все $\{z_\nu\}$ лежат на одном радиусе, для существования функций $f \in D$ $(f \not\equiv 0)$ и $f(z_\nu)=0$ необходимо и достаточно условие $\Sigma(1-|z_\nu|) < \infty$.

В связи с этим замечанием интересен недавний результат Г. Каугран [3], который утверждает: существует последовательность $\{z_\nu\}$ $(0<|z_\nu|<1)$ со следующими свойствами: $\Sigma(1-|z_\nu|)<\infty$, $|z_\nu|\to 1$, не существует функции $f \in D$ $(f \not\equiv 0)$, которая обращалась бы в нуль на этой последовательности.

Результаты Л. Карлесона, совершенно другим методом, а именно, существенно опираясь на то, что пространство D—гильбертовое, уточнили А. Шапиро и А. Шильдс в 1962 году [4]. Ими доказаны следующие теоремы.

Теорема А. Если $\{z_\nu\}$—последовательность точек в единичном круге, для которой

$$\sum \frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)} < +\infty, \tag{1}$$

то существует функция $f \in D$ $(f \not\equiv 0)$, которая становится нулем на точках этой последовательности.

Теорема В. Пусть $\varphi(t)$—непрерывная функция, для которой $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ $(t>0)$. Тогда существует множество единственности $\{z_\nu\}$ для класса D, удовлетворяющее условию

$$\sum \frac{1}{-\log(1-|z_\nu|)}\,\varphi(1-|z_\nu|) < +\infty.$$

В настоящей заметке изучаются классы аналитических в единичном круге функций $D_2(\omega)$, для которых исследуются граничные свойства и выше изложенные остальные вопросы аналогичными методами. Для функций этого класса вопросы, затронутые в теореме А, решаются другим образом: в условиях, аналогичных (1), функция Бляшке оказывается принадлежит классу $D_2(\omega)$.

§ 1. Определение класса $D_2(\omega)$ и граничное свойство функций этого класса

Обозначим через Ω множество функций $\omega(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(r)$ положительна, непрерывна и неубывающая на $[0,1)$,

2) $\omega(0)=1$, $\int\limits_0^1 \omega(r)\,dr < \infty$.

Мы скажем, что аналитическая в единичном круге функция $f(z)$, для которой $f(0)=0$, принадлежит классу $D_2(\omega)$, если

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho d\rho d\vartheta < +\infty, \tag{2}$$

где

$$h(x)=\int_x^1 \omega(t)\,dt \quad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{3}$$

Пусть $f(z)=\sum\limits_1^\infty a_n z^n$, тогда условие (2) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho d\rho d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 h(\rho)\,d\rho\int_0^{2\pi}\sum_1^\infty |a_n|^2 n^2\rho^{2n-1}d\vartheta=$$

$$=\sum_1^\infty |a_n|^2 W_\omega(n),$$

где

$$W_\omega(n)=n^2\int_0^1 h(\rho)\,\rho^{2n-1}d\rho=\frac{n}{2}\int_0^1\omega(x)\,x^{2n}dx.$$

Имеем ([5], лемма 2.1)

$$c_1W_\omega(n)\leqslant n\int_{1-\frac{1}{n}}^1\omega(x)\,dx\leqslant c_2W_\omega(n).$$

Следовательно, условие (2) равносильно следующему условию:

$$\sum|a_n|^2\,nh\left(1-\frac{1}{n}\right)<\infty. \tag{2'}$$

Так как условие (2) равносильно условию (2′), то для функций класса $D_2(\omega)$ можно применить граничную теорему 1 работы [5]. Для этого приведем сначала следующие определения.

Последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_0^\infty$ называется выпуклой, если она удовлетворяет условиям:

1) $\lambda_n\geqslant\lambda_{n+1}$, $\lambda_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$,

2) $\Delta^2\lambda_n=\lambda_n-2\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}\geqslant 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

Если, кроме этого

$$\sum_0^\infty\lambda_n=+\infty,$$

то условимся говорить, что $\{\lambda_n\}_0^\infty\in R$.

Рассмотрим систему множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0,2\pi]$. Будем называть мерой μ всякую неотрицательную вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и $\mu[0, 2\pi]=1$. Мы скажем, μ сосредоточена на B, если $\mu(B)=1$.

Пусть последовательность чисел $\{\lambda_n\}_0^\infty$ выпукла, тогда ряд

$$Q(x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\cos kx$$

сходится всюду на $[0, 2\pi]$ (кроме, быть может, точек $x=0$ и $x=2\pi$) к неотрицательной суммируемой функции $Q(x)$ ([6], гл. 1).

Положим

$$Q(r, x)=\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k r^k\cos kx \quad (0\leqslant r<1,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

тогда $Q(r, x)\geqslant 0$ как пуассоновская сумма от $Q(x)$. Полагая, наконец, что множество E измеримо по Борелю и что $\mu(E)=1$, рассмотрим функцию

$$V_\mu(x, r)=\int_0^{2\pi}Q(r, x-t)\,d\mu(t)$$

и, следуя К. В. Темко [7], введем следующее

Определение. Множество E, измеримое по Борелю, имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если при некоторой мере μ, сосредоточенной на E, имеем

$$V_\mu(E;\lambda_n)=\lim_{r\to 1-0}\sup\{\max_{0<x<2\pi}V_\mu(x, r)\}<+\infty.$$

Если же для любой меры μ, сосредоточенной на E

$$V_\mu(E;\lambda_n)=+\infty,$$

считаем, что выпуклая емкость E относительно $\{\lambda_n\}$ равна нулю.

Соответственно напишем $\operatorname{cap}\{E;\lambda_n\}>0$ и $\operatorname{cap}\{E;\lambda_n\}=0$.

Хорошо известные понятия логарифмической или α-емкости можно рассматривать как частные случаи выпуклой емкости, если последовательность $\{\lambda_n\}$ подобрать подходящим образом.

Теорема 1. *Пусть $f(z)\in D_2(\omega)$.*

а) *Если функция $h(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^1\frac{dx}{h(x)}<+\infty,$$

то предел

$$\lim_{r\to 1-0}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})$$

существует для всех $\theta\in[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0, 2\pi]$, для которого

$$\operatorname{cap}\{E;\mu_n(\omega)\}=\operatorname{cap}\{E;\bar{\mu}_n(\omega)\}=0,$$

где

$$\mu_n(\omega)=\sum_{k=n}^{\infty}\left\{k^2\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}^{-1}$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

$$\bar{\mu}_n(\omega)=\sum_{k=n}^{\infty}\left\{k^2\int_{1-\frac{1}{k}}^{1}\omega(x)\,dx\right\}^{-1}.$$

б) Если $\omega(x)\in\overline{\Omega}$, т. е. $\omega(x)\in\Omega$ и

$$0<\liminf_{x\to1-0}\frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)}\leqslant\limsup_{x\to1-0}\frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)}<1, \tag{4}$$

то предел $f(e^{i\vartheta})$ существует для всех $\vartheta\in[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0,2\pi]$, для которого

$$\operatorname{cap}\{E;\lambda_n(\omega)\}=\operatorname{cap}\{E;\bar{\lambda}_n(\omega)\}=0,$$

где

$$\lambda_n(\omega)=\left\{n\int_0^1\omega(x)\,x^{n-1}dx\right\}^{-1}$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

$$\bar{\lambda}_n(\omega)=\left\{n\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\omega(x)\,dx\right\}^{-1}.$$

Последовательности $\mu_n(\omega)$, $\bar{\mu}_n(\omega)$, $\lambda_n(\omega)$ и $\bar{\lambda}_n(\omega)$ принадлежат классу R [5].

Приведем следующую общую теорему, которая доказана в книге [8].

Т е о р е м а С. Пусть $\Phi(t)\sim\sum\gamma_n e^{int}$ — некоторое ядро ($\gamma_n>0$), и E—замкнутое множество, емкость которого относительно ядра Φ равна нулю. При этих условиях существует ряд Фурье $\sum\limits_{1}^{\infty}d_n e^{int}$ такой, что

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{|d_n|^2}{\gamma_n}<\infty,$$

для которого сумма Пуассона-Абеля расходится к бесконечности для всех t, принадлежащих E.

Если применить эту теорему при $d_n=a_n$, и

$$\gamma_n=\left\{n\cdot\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\omega(x)\,dx\right\}^{-1},$$

поскольку

$$\sum |a_n|^2 n \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} \omega(x)\, dx < \infty,$$

то $f(z) \in D_2(\omega)$.

Соединяя теорему 1 и С в этом случае, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы существовала функция $f(z)$ из класса $D_2(\omega)$, которая на некотором замкнутом множестве E на окружности не имела бы радиальных предельных значений, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\operatorname{cap}\{E;\ \mu_n(\omega)\} = \operatorname{cap}\{E;\ \tilde{\mu}_n(\omega)\} = 0$

при условии

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{h(x)} < \infty.$$

2) $\operatorname{cap}\{E;\ \lambda_n(\omega)\} = \operatorname{cap}\{E;\ \tilde{\lambda}_n(\omega)\} = 0$

при условии, что $\omega(x) \in \overline{\Omega}$.

§ 2. Множество единственности для функций класса $D_2(\omega)$

Пусть множество $\{z_\nu\}$ такое, что удовлетворяется условие

$$\sum h(|z_\nu|) < \infty. \tag{5}$$

При условии (5) в работе [5] доказано, что функция Бляшке $B(z)$ принадлежит классу $D_2(\omega)$, следовательно существует функция класса $D_2(\omega)$ со множеством нулей $\{z_\nu\}$.

Если, в частности, возьмем

$$\omega(x) = \frac{x^{1+\gamma}}{(1-x)\log^{1+\gamma}(1-x)^{-1}} \quad (0 < \gamma \leqslant 1),$$

то

$$c_1 h(x) \leqslant \left[\frac{1}{-\log(1-x)}\right]^{\gamma} \leqslant c_2 h(x)$$

и условие (5) запишется в виде

$$\sum \frac{1}{\log^{\gamma}(1-|z_\nu|)^{-1}} < \infty,$$

а условие (2′)

$$\sum |a_n|^2 \frac{n}{\log^{\gamma} n} < \infty.$$

В дальнейшем, предполагая, что функция $\omega(x) \in \overline{\Omega}$, докажем, что если последовательность $\{z_\nu\}$ более „плотна“, чем допускается условием (5), то она уже может стать множеством единственности для класса $D_2(\omega)$.

Теорема 3. *Если $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, для которой $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)>0$ $(t>0)$, то существует множество единственности $\{z'_\nu\}$ для класса $D_2(\omega)$, удовлетворяющее условию*

$$\sum_1^\infty h(|z_\nu|)\,\varphi(1-|z_\nu|)<\infty. \tag{6}$$

Для $h(t)=t^{1-\alpha}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ теорема отмечена в работе [4]. Доказательство мы проведем аналогично приведенному в [4].

Пусть

$$f(z)=\sum_1^\infty a_n z^n \text{ и } g(z)=\sum_1^\infty b_n z^n$$

принадлежат классу $D_2(\omega)$.

Внутреннее произведение определяется следующим образом:

$$(f, g)=\sum_1^\infty a_n \overline{b}_n W_\omega(n),$$

что можно записать и в следующем виде:

$$(f, g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho) f'(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{g'(\rho e^{i\vartheta})}\,\rho d\rho d\vartheta.$$

При $f\equiv g$ получим

$$\|f\|^2=\sum_1^\infty |a_n|^2 W_\omega(n)<\infty.$$

Если обозначим через $K_\xi(z)$ функцию

$$K_\xi(z)=\sum_1^\infty \frac{(z\overline{\xi})^n}{W_\omega(n)},$$

то будем иметь

$$(f, K_\xi)=f(\xi)$$

для всех $f\in D_2(\omega)$ и для всех $|\xi|<1$.

Имеем также

$$\|K_\xi\|^2=(K_\xi, K_\xi)=K_\xi(\xi)=\sum_1^\infty \frac{|\xi|^{2n}}{W_\omega(n)}.$$

Обозначим через $C(\rho)$ следующую функцию:

$$C(\rho)=\sum_1^\infty \frac{\rho^n}{W_\omega(n)} \quad (0\leqslant\rho<1). \tag{7}$$

При условиях, наложенных на $\omega(x)$, в работе [5] доказано, что справедливо следующее неравенство:

$$C(\rho) \leqslant \frac{c}{h(\rho)} \quad (0 \leqslant \rho < 1). \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем через c обозначим абсолютные константы, не обязательно равные между собой.

Для доказательства теоремы 3 докажем сначала, как и в [4], следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть r — некоторое положительное число, меньшее единицы и пусть $z_1, z_2, \cdots, z_n$ — точки на окружности $|z| = r$, которые находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Если для любой $f \in D_2(\omega)$, $f(z_i) = 0$ $(i \leqslant n)$ и $f'(0) = 1$, то*

$$\|f\| \geqslant cnh(r^{2n}). \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем $z_1 = r$ (норма не меняется при вращении). Пусть $H(z)$ определяется следующим образом:

$$H = \frac{1}{n}\left(\frac{K_1}{\overline{z}_1} + \cdots + \frac{K_n}{\overline{z}_n}\right),$$

где $K_n = K_{z_n}(z)$, и следовательно $(f, H) = 0$, и

$$1 = (f, z) = (f, z - H) \leqslant \|f\| \cdot \|z - H\|. \tag{10}$$

Имеем далее

$$H(z) - z = \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{nm+1}\, r^{nm+1}}{W_\infty\,(nm+1)}$$

и следовательно

$$\|H - z\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2mn}}{m \int\limits_{1-\frac{1}{nm}}^{1} \omega(\rho)\, d\rho} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{2mn}}{m \int\limits_{1-\frac{1}{m}}^{1} \omega(\rho)\, d\rho} \leqslant \frac{c}{n} C(r^{2n}). \tag{11}$$

Согласно (8) получим из (11)

$$\|H - z\| \leqslant \frac{c}{nh(r^{2n})},$$

откуда, согласно (10), вытекает утверждение (9) леммы.

Лемма 2. *Пусть $n_k \to \infty$ — положительные целые числа, а $\delta_k \to 0$ — положительные числа, так что $n_k\delta_k \to 0$.*

Пусть $\psi(k)$ определяется так

$$\psi(k) = \frac{1}{n_k h(1 - \delta_k)}.$$

Тогда $\psi(k) \to 0$ в том случае, когда

$$\frac{1}{n_k\, h\left[(1 - \delta_k)^{n_k}\right]} \to 0.$$

Справедливость леммы очевидна, так как $1-\delta_k > (1-\delta_k)^{n_k}$ и следовательно $\frac{1}{h(1-\delta_k)} > \frac{1}{h[(1-\delta_k)^{n_k}]}$.

Теперь теорему 3 докажем так, как в работе [4]. Именно: возьмем две последовательности $\{r_k\}$ и $\{n_k\}$, где $n_k \to \infty$ — положительные целые числа и $0 < r_k < 1$, $r_k \to 1$. На окружности радиуса r_k возьмем n_k точек, равноудаленных друг от друга. Совокупность этих точек должна быть множеством единственности для класса $D_2(\omega)$.

Пусть $1-r_k = \delta_k$ и $\psi(k) = \frac{1}{n_k h(1-\delta_k)}$, где $\psi(k)$ и n_k удовлетворяют следующим условиям:

1) $\psi(k) \to 0$,

2) $n_k \delta_k \to 0$,

3) $\sum \frac{\varphi(\delta_k)}{\psi(k)} < +\infty$.

Это будет достаточно для доказательства теоремы, так как из 1) и 2) согласно леммам 1 и 2 следует, что $\{z_n\}$—множество единственности, а 3) эквивалентно условию (6).

Остается показать, что существуют $\psi(k)$ и n_k, удовлетворяющие условиям 1)—3).

Заметим, что из условия (4) имеем, что существует такое ε $(0 < \varepsilon < 1)$, что $h(x) > c(1-x)^{1-\varepsilon}$. Пусть $g(y) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, тогда $g \to 0$ при $y \to \infty$. Пусть $y_1 < y_2 < \cdots$ — целые числа такие, что $y_k > k$ и $g(y) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$ при $y > y_k$. Пусть также $n_k = E\left(k^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\right) y_k$, где $E(t)$—целая часть t и $\psi(k) = \frac{1}{k^{1-\varepsilon}}$. Имеем $\delta_k \leqslant \frac{c}{[n_k \psi(k)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}$, откуда получим $n_k \delta_k \leqslant$

$$\leqslant \frac{c n_k}{[n_k \psi(k)]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} \leqslant \frac{c \cdot k}{n_k^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} \leqslant \frac{c}{y_k} \to 0.$$

Имеем также

$$\sum \frac{\varphi(\delta_k)}{\psi(k)} \leqslant \sum \frac{g\left(\frac{1}{\delta_k}\right)}{\psi(k)} \leqslant \sum \frac{g\left[(n_k \psi(k))^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right]}{\psi(k)} \leqslant \sum \left(\frac{1}{2}\right)^k k^{1-\varepsilon} < \infty,$$

так что условие 3) также удовлетворяется. Этим завершается доказательство теоремы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступило 13.XI.1970

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Դիրիխլեի տիպի սահմանափակ ինտեգրալ ունեցող ֆունկցիաների եզրային հատկությունները և միակությունը (ամփոփում)

Դիտարկվում է միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների $D_2(\omega)$ *դասը, որոնց համար* $f(0)=0$ *և*

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho\, d\rho\, d\vartheta < \infty,$$

որտեղ $h(x)=\int_x^1 \omega(t)\,dt$, *իսկ* $\omega(r)$ *ֆունկցիան չի նվազում* $[0,1]$ *հատվածում և բավարարում է որոշակի պայմանների։*

§ 1-ում բերվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման $E\subset[0,2\pi]$ *փակ բազմության համար, որպեսզի գոյություն ունենա* $D_2(\omega)$ *դասին պատկանող ֆունկցիա, որը այդ բազմության կետերում չունենա շառավղային եզրային արժեքներ։*

§ 2-ում բերվում է թեորեմ $D_2(\omega)$ *դասի միակության բազմության մասին։*

V. S. ZAKARIAN. *Boundary properties and unique of functions with finite Dirichlet type integral* (summary)

Define $D_2(\omega)$ as the class of analytical in the unite circle functions $f(z)$, for which $f(0)=0$ and

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} h(\rho)\,|f'(\rho e^{i\vartheta})|^2\rho\, d\rho\, d\vartheta < \infty,$$

where $h(x)=\int_x^1 \omega(t)\,dt$, and $w(r)$ is nondecreasing function on $[0, 1]$, satisfying certain conditions.

In § 1 of closed sets $E\subset[0, 2\pi]$ described, such that for each E from the class there exists a function from $D_2(w)$ having no radial boundary values in the points of E.

A uniqueness theorem is proved in § 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *O. Lokki.* Über analytische Funktionen, deren Dirichlet integral endlich ist, und die in gegebenen Punkten Vorgeschriebene Werte annehmen, Ann. Acad. Sci. Fennicae, 39, 1—57, 1947.
2. *L. Carleson.* On the zeros of functions with bounded Dirichlet integral, Math. Z., 56, 1952, 289—295.
3. *A. Caughran.* Two results concerning the zeros of functions with finite Dirichlet integral, Canad. J. Math., 21, 1969, 312—316.
4. *H. Shapiro* and *A. Shields.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Z., 80, 1962, 217—229.
5. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, 34, 1970, 1260—1336.
6. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.
7. *К. В. Темко.* а) Выпуклая емкость и ряды Фурье, ДАН СССР, 110, № 6, 1956, б) О выпуклой емкости, Мат. сборник, 51 (93), № 2, 1960, 217—226.
8. *K. Pierre* and *R. Salem.* Emsembles parfaits et series trigonometriques, Paris, 1963.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1970 թ., հ. V, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика" за 1970 г., V, №№ 1—6

CONTENTS

Of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, seria „Matematika“, vol. V, №№ 1—6, 1970

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS