ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը ЦЕНА 50 կ. к. индекс 77735

Уважаемые граждане!

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ

НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР НА 1971 ГОД

«АСТРОФИЗИКА», на русском языке, периодичность—в год 4 номера, годовая подписная плата 4 рубля.

«ИСТОРИКО-ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ», периодичность — в год 4 номера, годовая подписная плата 3 рубля 20 коп.

«ДОКЛАДЫ», периодичность—в год 10 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

«ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И КЛИНИЧЕСКОЙ МЕДИЦИНЫ», периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40 коп.

«КРОВООБРАЩЕНИЕ», на русском языке, периодичность — 6 номеров в год, годовая подписная плата 1 руб. 80 к.

«ВЕСТНИК ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК», периодичность — в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность — в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 20 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *Науки о Земле*, периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ХИМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АРМЕНИИ», периодичность — в год 12 номеров, годовая подписная плата 4 руб. 80 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *технических* наук, периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 2 руб. 40 коп.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *математика*, периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *механика*, периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 руб.

«ИЗВЕСТИЯ», серия *физика*, периодичность — в год 6 номеров, годовая подписная плата 3 рубля.

Все журналы, кроме Астрофизики, издаются на армянском и русском языках, а резюме на одном из этих языков.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ:

В городских отделах, районных агентствах «Союзпечать», в пунктах приема подписки, в районных узлах и во всех отделениях связи, на предприятиях, в учреждениях, учебных заведениях, совхозах, колхозах, строительных объектах, у общественных распространителей печати.

Прием подписки с января 1971 года на все советские газеты и журналы будет производиться до 25 ноября. После указанного срока подписка будет оформляться на февраль и последующие месяцы 1971 года.

СОЮЗПЕЧАТЬ

ՀԱՅ ԺՈՂՈՎՐԴԻ ՓԱՌԱՊԱՆԾ ՀՈԲԵԼՅԱՆԸ

Այս տարի նոյեմբերի 29-ին հայ ժողովուրդը տոնում է Սովետական կարգերի հաստատման 50-րդ տարեդարձը։

Երկար ու ձիգ դարերի ընթացքում հայ ժողովրդի մաքառումների ու պայքարի անհատնում աղդակն է եղել ինքնուրույն պետականության ստեղծումը։ Հազարամյակներ շարունակ ժողովուրդը կենաց ու մահու կռիվ է մղել պահպանելու իր գոյությունը, իր հնամյա մշակույթը, իր ճարտարապետական կոթողներն ու մագաղաթները, իր լեզուն ու երգը։ Նրա հանճարով, համառ աշխատանքով ու անվեհերությամբ ստեղծածն ու կառուցածը միշտ վտանգի է ենթարկվել ներխուժող, ավերող ու թրատող բռնակալների կողմից։

Հոկտեմբերյան Սոցիալիստական հեղափոխության շնորհիվ հայ ժողովուրդը արդեն կես դար է ինչ նվաճել է իր իսկական վերածնության ռեալ հնարավորությունը։ Իրականացան նրա դարավոր երազները— այսօր նա ունի իր պետականությունը։ Սովետական միության հանրապետությունների համակարգում, ռուս ժողովրդի օգնությամբ Սովետական Հայաստանը մեկընդմիշտ անառիկ դարձավ ոսոխների վայրագությունների առաջ։

Ընդամենը 50-տարում արմատական վերափոխումներ կատարվեցին հայ ժողովրդի պատմական ճակատագրում։ Վերակերտվեցին, նոր ծնունդ ու կյանք առան Հայաստանի բազմաթիվ քաղաքներ, երբեմնի տնայնագործ արհեստագործությանը փոխարինեց զորեղ արդյունաբերությունը, աճեց, ձևավորվեց և ամրացավ բանվոր դասակարգը ու տեխնիկական մտավորականությունը, կոռ ու բեգյարից հեծող հայ գյուղացիությունը սկսեց վարել առաջավոր տնտեսություններ, հիմնովին փոխվեց հայ բանվորի ու գյուղացու կենցաղը։

Այս վիթխարի տեղաշարժերի շարքում աննախընթաց վերելքի է հասել նաև գիտությունը։ Միայն սովետական կարգերի օրոք հայ ժողովուրդը ունեցավ իր համալսարանն ու Ակադեմիան։

Մեր երիտասարդությունը այժմ իր հայրենի հողում կարող է ձեռք բերել հարյուրավոր մասնագիտություններ։ Հանրապետությունը խիտ պատած է դպրոցների, բուհերի և տեխնիկումների ցանցով։

Անցած 50 տարիների ստեղծագործ աշխատանքի պայմաններում հայ ժողովուրդը գիտության, տեխնիկայի և մշակույթի շատ բնագավառներում դուրս եկավ լայն, միջազգային ասպարեզ։

Բնական գիտությունների շարքում մեզ մոտ ծաղկում ապրեցին նաև մաթեմատիկական գիտությունները։ Հայկական մաթեմատիկական դպրոցը, կոմպլեքս և իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության, դիֆերենցիալ հավասարումների և ֆունկցիոնալ անալիզի բնագավառներում արժանի ճանաչում է գտել ինչպես Սովետական միությունում, այնպես էլ նրա սահմաններից դուրս։

Մշակութային, գիտական ավանդություններով հարուստ մեր հինավուրց ժողովուրդը լիցքավորված նոր եռանդով ընթանում է մարդկության առաջընթացի ուղիով։

Հայ ժողովրդի ամբողջ պատմության տրամաբանությունից ու փիլիսոփայությունից է բխում այն երջանիկ գիտակցությունը, որ Սովետական Հայաստանի 50-ամյակը դա մեր ժողովրդի մեծ ու նվիրական տոնն է։

СЛАВНЫЙ ЮБИЛЕЙ АРМЯНСКОГО НАРОДА

29 ноября этого года армянский народ празднует 50-ую годовщину со дня установления Советской власти в Армении.

Армянский народ в своей многовековой борьбе всегда стремился обрести собственную государственность. Тысячелетия народ вел борьбу за свою независимость, за сохранение своей древней культуры, архитектурных памятников и свитков, языка и музыки.

Всему, что было создано гением и трудом народа, грозила постоянная опасность со стороны чужеземных насильников, вторгавшихся в страну и предававших все огню и мечу.

Благодаря Октябрьской социалистической революции, армянский народ вот уже полвека как приобрел реальную возможность подлинного возрождения.

Осуществилась его вековая мечта—сегодня он имеет государственность .С помощью русского народа, Советская Армения—в семье братских республик—стала неприступна для самых лютых ее врагов.

В исторической судьбе армянского народа—всего лишь за пятьдесят лет—произошли коренные перемены. Возродились, обрели новую жизнь многочисленные города, выросла могучая промышленность, окреп рабочий класс, сформировалась техническая интеллигенция. В корне преобразился быт армянского рабочего и крестьянина..

Одним из могущественных сдвигов в жизни армянского народа является невиданный подъем в науке. Только при советской власти армянский народ основал университет и Академию наук.

Ныне наша молодежь может получить любую специальность в родной республике, пронизанной сетью школ, техникумов и вузов.

Прошедшее пятидесятилетие дало армянскому народу возможность проявить себя на широкой международной арене,—во многих областях науки, техники и культуры.

В Армении наряду с другими естественными науками переживает расцвет и математика.

Армянская математическая школа в области теории функции комплексного и действительного переменного, а также дифференциальных уравнений и функционального анализа, получила достойное признание как в Советском Союзе, так и за его пределами.

Обогощенный традициями в науке и культуре наш народ движется по пути прогресса.

Анализ исторических судеб армян приводит к сознанию того, что 50-летие Советской Армении—это большой и священный праздник для армянского народа.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

Ф. А. ТАЛАЛЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО НЕКОТОРЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

§ 1. Введение

В теории тригонометрических рядов существует гипотеза, сформулированная впервые П. Л. Ульяновым (см. [1], стр. 24), заключающаяся в следующем:

А) Пусть $|a_n| < M$ и $|b_n| < M$, $n = 1, 2, \cdots$ (или $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$). Если для некоторой возрастающей последовательности $\{N_k\}$

$$\lim_{k \to \infty} S_{N_k}(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [0, 1],$$

где

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$.

До сих пор не доказано и не опровергнуто следующее более слабое утверждение:

В) Существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_k\}$ такая, что для любой ограниченной (или сходящейся к нулю) последовательности $\{a_n, b_n\}$ из

$$\lim_{m \to \infty} S_{N_{k_m}}(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [0, 1],$$

где $\{k_m\}$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, следует $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$.

Как показали Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалян (см. [2], стр. 1404), для системы Уолша утверждение В) справедливо при условии, что коэффициенты рассматриваемого ряда стремятся к нулю, при этом в качестве последовательности $\{N_k\}$ можно взять $\{2^k\}$.

Для общих ортонормированных систем утверждения А) и В), вообще говоря, неверны. Более того, Г. М. Мушегяном и Р. И. Овсепяном ([3]) доказана следующая

Теорема I. На отрезке [0,1] существует ортонормированная, полная в $L[0,1]$ система $\{\Psi_n(x)\}$ непрерывных, ограниченных в совокупности функций, такая, что существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x),$$

удовлетворяющий условиям

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x) = 0 \quad \text{всюду на } [0,1],$$

в) $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \infty; \quad b_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln n}}\right).$$

Что касается вопроса для каких подсистем

$$\{\cos n_k x, \ \sin n_k x\}$$

тригонометрической системы справедливы утверждения А) или В), то в этом направлении имеются положительные результаты, относящиеся лишь к лакунарным и близким к ним системам, причем они получаются как следствия из более сильных теорем.

Из известной теоремы Зигмунда (см. [4], стр. 684) следует, что если последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию B_2*, то из сходимости почти всюду к нулю некоторой подпоследовательности частных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

следует $a_k = b_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots$.

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система непрерывных функций, определенных на* $[0,1]$, $\{\mu_k\}$ — *произвольная последовательность натуральных чисел и* $N_j = \sum_{k=1}^{j} \mu_k$, $j = 1, 2, \cdots$. *Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{\nu_k\}$ *такая, что*

1) $\nu_k + \mu_k < \nu_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$;

2) *подсистема* $\{\varphi_{n_k}(x)\} \equiv \{\varphi_{\nu_k+i}(x), \ k = 1, 2, \cdots; \ i = 1, 2, \cdots, \mu_k\}$ *системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *обладает тем свойством, что если* $\{a_k\}$ — *ограниченная последовательность действительных чисел и некоторая последовательность частных сумм*

$$S_{N_{j_m}}(x) = \sum_{k=1}^{N_{j_m}} a_k \varphi_{n_k}(x) \tag{1.1}$$

ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}(x) \tag{1.2}$$

---

* Последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию B_2, если любое натуральное число n можно лишь ограниченным числом способов представить в виде $n = n_k + n_j$ или $n = n_k - n_j$.

сходится к нулю всюду на $[0,1]$ *за исключением не более чем счетного множества, то* $a_k = 0$, $k=1, 2, \cdots$. *Более того, если последовательность* (1.1) *сходится к суммируемой функции* $f(x)$ *всюду на* $[0,1]$ *за исключением не более чем счетного множества, то ряд* (1.2) *является рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\varphi_{n_k}(x)\}$.

Заметим, что в том частном случае, когда система $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с тригонометрической системой, наша теорема позволяет указать подсистемы тригонометрической системы, для которых справедливо утверждение B) и которые не лакунарны и, более того, не удовлетворяют условию B_2. Отметим еще, что метод доказательства дает (в случае тригонометрической системы) эффективный способ нахождения последовательности $\{\nu_k\}$ по заданной последовательности $\{\mu_k\}$.

Доказательству теоремы 1 посвящен § 2.

В § 3 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ — *ограниченная измеримая функция на* $[0,1]$, *и ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{1.3}$$

удовлетворяет следующим условиям:

a) *для любого* $x \in [0,1]$ *имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x)} = 0, \tag{1.4}$$

где $\{n_k\}$ — *возрастающая последовательность всех номеров* n, *для которых* $\chi_n(x) \neq 0$.

b) *для каждого* $x \in [0,1]$, *за исключением не более чем счетного множества, существует (зависящая от* x*) возрастающая последовательность натуральных чисел* $n_k(x)$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k(x)}(x) = f(x), \tag{1.5}$$

где

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \chi_n(x). \tag{1.6}$$

Тогда ряд (1.3) *является рядом Фурье—Хаара функции* $f(x)$, *т. е.*

$$a_n = \int_0^1 f(x)\,\chi_n(x)\,dx; \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

Эта теорема является усилением теоремы Арутюняна—Талаляна (см. ниже, теорема II, § 2), в том частном случае, когда функция $f(x)$ ограничена.

Далее в § 3 сформулированы два следствия из теоремы 2, являющиеся усилениями частных случаев нашей теоремы 1 и теоремы

Арутюняна—Талаляна ([2], теорема 4) о единственности рядов по системе Уолша.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Мы будем пользоваться следующей теоремой, доказанной Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном (см. [2], стр. 1395).

Теорема II. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n (x), \tag{*}$$

где $\{\chi_n (x)\}$ — система Хаара, обладает свойствами:

1) Некоторая последовательность $\{S_{N_j} (x)\}$ частных сумм ряда (*) сходится к суммируемой функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$, кроме, быть может, счетного множества точек;

2) Для любой точки $x \in [0,1]$ $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x)} = 0$, где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < < \cdots$ суть все те номера n, для которых $\chi_n (x) \neq 0$. Тогда ряд (*) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара.

Далее, чтобы не усложнять записи, мы рассмотрим тот случай, когда $\{N_{j_m}\}$ совпадает с $\{N_j\}$. Если в приводимых ниже рассуждениях все j снабдить индексом m, то мы получим доказательство общего случая.

Обозначим

$$c_m^{(n)} = \int_0^1 \varphi_n (x) \chi_m (x)\, dx, \quad m = 0, 1, \cdots; \; n = 1, 2, \cdots.$$

Имеем

$$\lim_{m\to\infty} c_m^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} c_m^{(n)} = 0, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{2.2}$$

Кроме того, в силу нормированности функций $\varphi_n (x)$, имеем

$$|c_m^{(n)}| \leqslant 1, \; m = 0, 1, 2, \cdots; \; n = 1, 2, \cdots. \tag{2.3}$$

Возьмем две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_k\}$, удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} \mu_k \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{2.4}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \eta_k < \infty. \tag{2.5}$$

Перейдем к построению последовательности $\{\nu_k\}$.

Пусть t — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{2^{t-1}}}<1.$$

Возьмем ν_1 настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$|c_m^{(\nu_1+i)}|<\eta_{i1},\ i=1,\ 2,\cdots,\ \mu_1,\ m\leqslant 2^t-1.$$

Выбор числа ν_1 возможен, в силу (2.2).

После того, как ν_1 выбрано, выберем строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_r^{(1)}\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$p_1^{(1)}=t,$$

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{2^{p_2^{(1)}-1}}}<\frac{1}{2},$$

$$|c_m^{(\nu_1+i)}|<\eta_{i1},\ i=1,\ 2,\cdots,\ \mu_1,\ m\geqslant 2^{p_2^{(1)}},$$

$$\left|\varphi_{\nu_1+i}(x)-\sum_{m=0}^{2^{p_r^{(1)}}-1} c_m^{(\nu_1+i)}\chi_m(x)\right|<\varepsilon_r,$$

$$r=2,\ 3,\cdots;\ i=1,\ 2,\cdots,\ \mu_1,\ x\in[0,\ 1].$$

Выбор последовательности $\{p_r^{(1)}\}$ возможен в силу (2.1) и в силу того, что ряд Фурье—Хаара непрерывной функции сходится к ней равномерно.

Далее возьмем ν_2 настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\nu_1+\mu_1<\nu_2$$

и

$$\sqrt{2^{p_2^{(1)}-1}}\sum_{m=0}^{2^{p_2^{(1)}}-1}|c_m^{(\nu_2+i)}|<\eta_{i2},\ i=1,\ 2,\cdots,\ \mu_2.$$

Зафиксировав ν_2, выберем подпоследовательность $\{p_r^{(2)}\}$ последовательности $\{p_r^{(1)}\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$p_1^{(2)}=p_2^{(1)},$$

$$\frac{\mu_3}{\sqrt{2^{p_2^{(2)}-1}}}<\frac{1}{3},$$

$$|c_m^{(\nu_2+i)}|<\eta_{i2},\ i=1,\ 2,\cdots,\ \mu_k,\ m\geqslant 2^{p_2^{(2)}},$$

$$\left|\varphi_{\nu_1+i}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_r^{(2)}}-1} c_m^{(\nu_1+i)} \chi_m(x)\right| < \varepsilon_r,$$

$$r = 2, 3, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, \mu_2,\ x \in [0, 1].$$

Допустим построены число ν_{k-1} и последовательности $\{p_r^{(s-1)}\}$, $s = 2, 3, \cdots, k$, причем

$$\frac{\mu_k}{\sqrt{2^{p_2^{(k-1)}-1}}} < \frac{1}{k}.$$

Возьмем ν_k настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\nu_{k-1} + \mu_{k-1} < \nu_k$$

и

$$\sqrt{2^{p_s^{(s-1)}-1}} \sum_{m=0}^{2^{p_s^{(s-1)}}-1} |c_m^{(\nu_k+i)}| < \eta_k,\ s = 2, 3, \cdots, k; \quad i=1, 2, \cdots, \mu_k.$$

После того, как ν_k выбрано, выберем подпоследовательность $\{p_r^{(k)}\}$ последовательности $\{p_r^{(k-1)}\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$p_1^{(k)} = p_2^{(k-1)},$$

$$\frac{\mu_{k+1}}{\sqrt{2^{p_2^{(k)}-1}}} < \frac{1}{k+1},$$

$$|c_m^{(\nu_k+i)}| < \eta_k,\ i=1, 2, \cdots, \mu_k,\ m > 2^{p_2^{(k)}},$$

$$\left|\varphi_{\nu_k+i}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_r^{(k)}}-1} c_m^{(\nu_k+i)} \chi_m(x)\right| < \varepsilon_r,$$

$$r = 2, 3, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, \mu_k,\ x \in [0, 1].$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательности $\{\nu_k\}$ и $\{p_r^{(k)}\}$, где при любом $k > 1$ $\{p_r^{(k)}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{p_r^{(k-1)}\}$ и при этом выполняются следующие условия:

$$\nu_{k-1} + \mu_{k-1} < \nu_k,\ k = 2, 3, \cdots, \tag{2.6}$$

$$p_1^{(k)} = p_2^{(k-1)},\ k = 2, 3, \cdots, \tag{2.7}$$

$$\frac{\mu_k}{\sqrt{2^{p_1^{(k)}-1}}} < \frac{1}{k},\ k = 1, 2, \cdots, \tag{2.8}$$

$$\sqrt{2^{p_s^{(s-1)}}-1}\sum_{m=0}^{2^{p_s^{(s-1)}}-1}|c_m^{(\nu_k+i)}|<\eta_k, \tag{2.9}$$

$$k=2,3,\cdots;\ s=2,3,\cdots,k;\ i=1,2,\cdots,\mu_k,$$

$$|c_m^{(\nu_k+i)}|<\eta_k,\ k=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,\mu_k,\ m>2^{p_2^{(k)}}, \tag{2.10}$$

$$\left|\varphi_{\nu_k+i}(x)-\sum_{m=0}^{2^{p_r^{(k)}}-1}c_m^{(\nu_k+i)}\chi_m(x)\right|<\varepsilon_r, \tag{2.11}$$

$$k=1,2,\cdots;\ r=2,3,\cdots;\ i=1,2,\cdots,\mu_k;\ x\in[0,1].$$

Замечание. Из (2.7), (2.9) и (2.10) следует, что при фиксированном k неравенства

$$|c_m^{(\nu_k+i)}|<\eta_k,\ i=1,2,\cdots,\mu_k \tag{2.12}$$

могут не выполняться только при тех значениях m, которые удовлетворяют условию

$$2^{p_1^{(k)}}\leqslant m\leqslant 2^{p_2^{(k)}}-1. \tag{2.13}$$

С другой стороны, из (2.7) следует, что любое m удовлетворяет неравенству (2.13) только при одном значении k. Таким образом, при любом фиксированном m неравенства (2.12) могут не выполняться только при одном значении k.

Докажем, что система $\{\varphi_{\nu_k+i}(x),\ k=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,\mu_k\}$ удовлетворяет утверждению теоремы.

Пусть

$$|a_{\nu_k+i}|<M,\ k=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,\mu_k \tag{2.14}$$

и

$$\lim_{j\to\infty}S_{N_j}(x)=f(x) \tag{2.15}$$

для всех $x\in[0,1]$ за исключением не более чем счетного множества, где

$$S_{N_j}(x)=\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{\mu_k}a_{\nu_k+i}\,\varphi_{\nu_k+i}(x)$$

и $f(x)$ — суммируемая функция.

Нам нужно доказать, что из (2.14) и (2.15) следует

$$a_{\nu_k+i}=\int_0^1\varphi_{\nu_k+i}(x)f(x)\,dx,\ k=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,\mu_k. \tag{2.16}$$

Рассмотрим следующий ряд по системе Хаара:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \chi_m(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l}\, c_m^{(\nu_k+l)}\right)\chi_m(x). \tag{2.17}$$

Оценим коэффициенты b_m ряда (2.17).

В силу приведенного выше замечания для любого фиксированного m неравенства (2.12) выполняются для всех значений k за исключением не более чем одного. Если обозначить это исключительное значение через $k(m)$, то в силу (2.13) будем иметь

$$2^{p_1^{(k(m))}} \leqslant m \leqslant 2^{p_2^{(k(m))}} - 1. \tag{2.18}$$

Отсюда, с учетом (2.3) и (2.14), получим

$$|b_m| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l}\, c_m^{(\nu_k+l)}\right| \leqslant M\left(\sum_{l=1}^{\mu_{k(m)}} |c_m^{(\nu_{k(m)}+l)}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k\neq k(m)}\sum_{l=1}^{\mu_k} |c_m^{(\nu_k+l)}|\right) < M\left(\mu_{k(m)} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\eta_k\right). \tag{2.19}$$

Из этой оценки следует, что ряд (2.17) удовлетворяет условию 2) теоремы 2.

Действительно, пусть x_0—произвольная точка отрезка $[0,1]$ и $\chi_m(x_0)\neq 0$. Из определения функций Хаара и в силу (2.18) имеем

$$|\chi_m(x_0)| > \frac{1}{2}\sqrt{2^{p_1^{(k(m))}-1}}. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) получим

$$\frac{|b_m|}{|\chi_m(x_0)|} < \frac{2M\left(\mu_{k(m)} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k\eta_k\right)}{\sqrt{2^{p_1^{(k(m))}-1}}}. \tag{2.21}$$

Очевидно $k(m)\to\infty$ при $m\to\infty$, поэтому из (2.21) и (2.8) следует, что

$$\frac{|b_m|}{|\chi_m(x_0)|}\to 0 \text{ при } m\to\infty,\ \chi_m(x_0)\neq 0,$$

что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы нам нужно показать еще, что

$$\lim_{j\to\infty}\left|S_{N_j}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} b_m\chi_m(x)\right| = 0 \tag{2.22}$$

равномерно на $[0,1]$.

Применяя последовательно (2.14), (2.11), (2.9), (2.4) и (2.5), получим

$$\left| S_{N_j}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} b_m \chi_m(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l} \varphi_{\nu_k+l}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l} c_m^{(\nu_k+l)} \right) \chi_m(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l} \varphi_{\nu_k+l}(x) - \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} c_m^{(\nu_k+l)} \chi_m(x) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu_k} a_{\nu_k+l} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} c_m^{(\nu_k+l)} \chi_m(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{\mu_k} \left| \varphi_{\nu_k+l}(x) - \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} c_m^{(\nu_k+l)} \chi_m(x) \right| +$$

$$+ M \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu_k} \sqrt{2^{p_{j+1}^{(j)}-1}} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} |c_m^{(\nu_k+l)}| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{\mu_k} \varepsilon_{j+1} + M \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu_k} \eta_k =$$

$$= M \left(\varepsilon_{j+1} \sum_{k=1}^{j} \mu_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} \mu_k \eta_k \right) \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

Из (2.15) и (2.22) следует, что

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} b_m \chi_m(x) = f(x) \tag{2.23}$$

для всех $x \in [0,1]$, за исключением не более чем счетного множества.

Из (2.23), в силу теоремы 2, получаем, что ряд (2.17) является рядом Фурье функции $f(x)$ по системе Хаара, откуда, в свою очередь, следует

$$\lim_{j \to \infty} \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^{2^{p_{j+1}^{(j)}}-1} b_m \chi_m(x) - f(x) \right| dx = 0. \tag{2.24}$$

Из (2.22) и (2.24) получим

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^1 |S_{N_j}(x)-f(x)|\,dx=0. \tag{2.25}$$

В силу непрерывности функций $\varphi_n(x)$ из (2.25) получим

$$a_{\nu_k+l}=\int_0^1 \varphi_{\nu_k+l}(x)\,f(x)\,dx,$$

что и требовалось.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Сначала введем некоторые обозначения.

Для любого натурального числа $n\geqslant 2$ обозначим через $l(n)$ натуральное число, определяемое из соотношений

$$n=2^{l(n)}+m,\ 0\leqslant m<2^{l(n)}. \tag{3.1}$$

Тогда будем иметь

$$\max \chi_n(x)=\sqrt{2^{l(n)}}. \tag{3.2}$$

Далее обозначим

$$\Delta_n^+=\begin{cases}\{x: a_n\chi_n(x)=|a_n|\sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n\neq 0\\ \{x:\chi_n(x)=\sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n=0\end{cases}$$

$$\Delta_n^-=\begin{cases}\{x: a_n\chi_n(x)=-|a_n|\sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n\neq 0\\ \{x:\chi_n(x)=-\sqrt{2^{l(n)}}\}, & \text{если } a_n=0.\end{cases}$$

Наконец, пусть $\overline{\Delta_n^+}$ и $\overline{\Delta_n^-}$ будут замыканиями множеств Δ_n^+ и Δ_n^- соответственно.

Лемма. *Пусть при некотором* n_0

$$S_{n_0}(x)\geqslant C>0 \text{ при } x\in\Delta_{n_0}^+. \tag{3.3}$$

Тогда какова бы ни была точка $t\in[0,1]$ *можно найти натуральное число* $p>n_0$ *такое, что*

a) $t\in\overline{\Delta_p^+},\ \overline{\Delta_p^+}\subset\overline{\Delta_{n_0}^+}$,

b) $S_n(x)\geqslant C$ *при* $x\in\Delta_p^+$ и $n_0\leqslant n\leqslant p$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность интервалов $\Delta_{n_k}^+$, определенных следующими условиями

$$\Delta_{n_k}^+\subset\Delta_{n_{k-1}}^+,\ m\,\Delta_{n_k}^+=\frac{1}{2}\,m\Delta_{n_{k-1}}^+;\ k=1,2,\cdots.$$

Очевидно последовательность n_k возрастающая.

Докажем, что найдется сколь угодно большое натуральное $m\geqslant 2$ такое, что

$$|a_{n_m}| \sqrt{2^{l(n_m)}} \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}} \cdot \tag{3.4}$$

Сначала докажем существование хотя бы одного $m \geqslant 2$, для которого выполняется (3.4). Действительно, если бы такого m не существовало то, во-первых, нашлось бы наименьшее натуральное $i_0 \geqslant 1$, для которого

$$a_{n_{i_0}} \neq 0 \tag{3.5}$$

и, кроме того, при произвольном $m \geqslant i_0+1$ выполнялись бы неравенства

$$|a_{n_i}| \sqrt{2^{l(n_i)}} > \sum_{k=1}^{i-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}} =$$

$$= \sum_{k=i_0}^{i-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}}; \ i=i_0+1, \cdots, m. \tag{3.6}$$

Тогда из неравенств (3.6) мы получим

$$|a_{n_m}| \sqrt{2^{l(n_m)}} \geqslant 2^{m-i_0-1} |a_{n_{i_0}}| \sqrt{2^{l(n_{i_0})}} \text{ при всех } m \geqslant i_0+1. \tag{3.7}$$

С другой стороны, из построения интервалов $\Delta^+_{n_m}$ видно, что

$$l(n_m) = l(n_{i_0}) + m - i_0. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) получаем

$$\frac{|a_{n_m}|}{\sqrt{2^{l(n_m)}}} > 2^{-\frac{1}{2} l(n_{i_0}) + i_0 - 1} |a_{n_{i_0}}| \text{ при } m \geqslant i_0+1. \tag{3.9}$$

В силу (3.5) из (3.9) следует, что в точке x_0, являющейся пересечением всех отрезков $\bar{\Delta}^+_{n_k}$, нарушается условие (1.4). Если x_0 — двоично-иррациональная точка—это очевидно. Если же x_0 - двоично-рациональная, то, начиная с некоторого номера K, x_0 будет общим концом отрезков $\bar{\Delta}^+_{n_k}$, $k \geqslant K$ и по определению функций Хаара будем иметь

$$|\chi_{n_k}(x_0)| = \frac{1}{2} \sqrt{2^{l(n_k)}} \quad \text{при } k \geqslant K,$$

откуда, в силу (3.5) и (3.9), видно, что в точке x_0 нарушается условие (1.4). Полученное противоречие доказывает существование натурального числа $m \geqslant 2$, для которого имеет место (3.4).

Теперь докажем, что число m может быть выбрано сколь угодно большим. Действительно, пусть $N \geqslant 1$—произвольное натуральное число. Заменив в предыдущих рассуждениях n_1 на n_N, найдем число $m \geqslant N+1$, для которого

$$|a_{n_m}| \sqrt{2^{l(n_m)}} \leqslant \sum_{k=N}^{m-1} |a_{n_k}| \sqrt{2^{l(n_k)}}.$$

Следовательно для этого m имеет место и (3.4).

Теперь очевидно, что число $m > 2$ можно выбрать так, чтобы вместе с (3.4) выполнялось и

$$t \overline{\in} \bar{\Delta}^{+}_{n_m} \cap \bar{\Delta}^{-}_{n_m}. \tag{3.10}$$

Определим натуральное число p из условий

1) $$m\Delta_p^{+} = \frac{1}{2} m\Delta_m^{+};$$

2) Δ_p^{+} лежит на том из отрезков $\bar{\Delta}_{n_m}$ и $\bar{\Delta}^{-}_{n_m}$, который не содержит t.

Очевидно при таком выборе p утверждение а) леммы будет выполняться.

Далее имеем

$$a_n \chi_n(x) \geqslant 0 \text{ при } x \in \Delta_p^{+} \text{ и } n_0 < n \leqslant p, \ n \neq n_m, \tag{3.11}$$

$$|a_{n_m} \chi_{n_m}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} a_{n_k} \chi_{n_k}(x) \text{ при } x \in \Delta_p^{+}. \tag{3.12}$$

Из (3.3), (3.11) и (3.12) следует

$$S_n(x) > C \text{ при } x \in \Delta_p^{+} \text{ и } n_0 < n \leqslant p.$$

Таким образом, для выбранного p выполняются оба утверждения леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Функция $f(x)$ предполагалась ограниченной. Можно считать, что

$$|f(x)| \leqslant 1, \ x \in [0,1]. \tag{3.13}$$

Пусть

$$b_n = \int_0^1 f(x) \chi_n(x)\, dx; \ n = 0, 1, \cdots \tag{3.14}$$

и

$$S_m^{*}(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n \chi_n(x); \ m = 0, 1, \cdots. \tag{3.15}$$

Тогда как известно

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{*}(x) = f(x) \qquad \text{почти всюду,} \tag{3.16}$$

и в силу (3.13)

$$|S_n^{*}(x)| \leqslant 1, \ x \in [0,1]; \ n = 0, 1, \cdots. \tag{3.17}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x), \tag{3.18}$$

где

$$c_n = a_n - b_n; \ n = 0, 1, \cdots. \tag{3.19}$$

Обозначим через $S_n^{''}(x)$ частные суммы ряда (3.18).

Рассмотрим два возможных случая.

1) Частные суммы $S_n^{''}(x)$ ограничены в совокупности на [0,1].

В этом случае ряд (3.18) является рядом Фурье некоторой функции $F(x)$ из L_2 и

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{''}(x) = F(x) \qquad \text{почти всюду.} \tag{3.20}$$

С другой стороны, в силу (3.19), имеем

$$S_n^{''}(x) = S_n(x) - S_n^{'}(x). \tag{3.21}$$

Отсюда, в силу условия b) теоремы 2 и (3.16), получаем

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k(x)}^{''}(x) = 0 \qquad \text{почти всюду.} \tag{3.22}$$

Из (3.20) и (3.22) следует

$$F(x) = 0 \qquad \text{почти всюду.} \tag{3.23}$$

Так как ряд (3.18) есть ряд Фурье функции $F(x)$, то из (3.23) следует

$$c_n = 0;\ n = 0,\ 1, \cdots,$$

откуда

$$a_n = b_n = \int_0^1 f(x)\,\chi_n(x)\,dx;\ n=0,\ 1, \cdots.$$

2) Частные суммы $S_n^{''}(x)$ не ограничены в совокупности.

Тогда найдутся двоично-иррациональная точка $x \in [0,1]$ и натуральное число n_0 такие, что

$$|S_{n_0}^{''}(x)| > 3.$$

Отсюда, в силу (3.17) и (3.21), получим

$$|S_{n_0}(x)| > 2. \tag{3.24}$$

Из (3.24) следует, что в рассматриваемой точке x выполняется одно из неравенств

$$S_{n_0}(x) > 2 \text{ или } S_{n_0}(x) < -2.$$

Случай, когда выполняется второе из этих неравенств, сводится к случаю, когда выполняется первое. Для этого нужно вместо ряда (1.3) рассматривать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} - a_n \chi_n(x).$$

Итак пусть выполняется первое неравенство

$$S_{n_0}(x) > 2. \tag{3.25}$$

Так как x—двоично-иррациональная точка, то из (3.25) следует

$$S_{n_0}(x) > 2 \text{ при } x \in \Delta_{n_0}^{-}. \tag{3.26}$$

Занумеруем в последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ все двоично-рациональные точки и все точки, в которых не выполняется условие (1.5).

Из (3.26) с применением леммы при $t=x_1$ следует существование натурального числа $p_1>n_0$ такого, что

1) $x_1 \overline{\in} \overline{\Delta}^+_{p_1}$, $\overline{\Delta}^+_{p_1} \subset \overline{\Delta}^+_{n_0}$;

2) $S_n(x)>2$ при $x \in \Delta^+_{p_1}$ и $n_0 \leqslant n \leqslant p_1$.

Далее, применяя лемму при $n_0=p_1$, $C=2$ и $t=x_2$, мы найдем число $p_2>p_1$ такое, что

1) $x_2 \overline{\in} \overline{\Delta}^+_{p_2}$, $\overline{\Delta}^+_{p_2} \subset \overline{\Delta}^+_{p_1}$;

2) $S_n(x)>2$ при $x \in \Delta^+_{p_2}$ и $p_1 \leqslant n \leqslant p_2$.

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$, удовлетворяющую условиям

$$n_0<p_1<p_2<\cdots, \tag{3.27}$$

$$x_k \overline{\in} \overline{\Delta}^+_{p_k}, \ \overline{\Delta}^+_{p_k} \subset \overline{\Delta}^+_{p_{k-1}}; \ k=1, 2, \cdots; \ (p_0=n_0) \tag{3.28}$$

и

$$S_n(x)>2 \quad \text{при} \quad x \in \Delta^+_{p_k}, \ n_0 \leqslant n \leqslant p_k, \ k=1, 2, \cdots. \tag{3.29}$$

Так как в последовательности $\{x_n\}$ участвуют все двоично-рациональные точки, то из (3.28) следует, что пересечение всех отрезков $\overline{\Delta}^+_{p_k}$ состоит из двоично-иррациональной точки x_0, отличной от всех x_n, $n=1, 2, \cdots$. Будучи двоично-иррациональной точка x_0 принадлежит и всем интервалам $\Delta^+_{p_k}$. Тогда, в силу (3.27) и (3.29), будем иметь

$$S_n(x_0)>2 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant n_0,$$

которое противоречит условию b) теоремы 2 и (3.13).

Таким образом, второй случай, т. е. случай, когда частные суммы $S_n^*(x)$ не ограничены в совокупности, не может выполняться. Теорема 2 доказана.

Заметим, что для тригонометрической системы предложение типа теоремы 2 не справедливо.

Именно, К. Тандори [5] построил ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{3.30}$$

удовлетворяющий условиям

1) $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ при $k \to \infty$;

2) для любого x

$$\underline{\lim}\, S_n(x)=-\infty, \ \overline{\lim}\, S_n(x)=+\infty,$$

где $S_n(x)$ — частные суммы ряда (3.30).

Из условий 1) и 2) следует, что в любой точке x некоторая последовательность частных сумм ряда (3.30) сходится к нулю.

Следующие две теоремы являются непосредственными следствиями теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$—*ортонормированная система непрерывных функций, определенных на* $[0,1]$, $\{\mu_k\}$—*произвольная последовательность натуральных чисел и* $N_j = \sum_{k=1}^{j} \mu_k$, $j=1, 2, \cdots$. *Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{\nu_k\}$ *такая, что*

1) $\nu_k + \mu_k < \nu_{k+1}$; $k = 1, 2, \cdots$;

2) *Подсистема* $\{\varphi_{n_k}(x)\} \equiv \{\varphi_{\nu_k+i}(x);\ k=1, 2, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, \mu_k\}$ *системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *обладает тем свойством, что если* $\{a_k\}$ —*ограниченная последовательность действительных чисел, и для каждого* $x \in [0,1]$ *за исключением не более чем счетного множества, существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $j_m(x)$ *такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} S_{N_{j_m(x)}}(x) = f(x),$$

где $S_m(x)$ — *частные суммы ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}(x) \tag{3.31}$$

и $f(x)$ — *ограниченная измеримая функция, то ряд* (3.31) *является рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\varphi_{n_k}(x)\}$.

Эта теорема получается из теоремы 2 с помощью тех же рассуждений, которые применялись при выводе теоремы 1 из теоремы II.

Теорема 4. *Пусть* $f(x)$—*ограниченная измеримая функция на* $[0,1]$, *и ряд по системе Уолша*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n w_n(x) \tag{3.32}$$

удовлетворяет условиям

a)
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \tag{3.33}$$

b) *для любого* $x \in [0,1]$, *за исключением не более чем счетного множества, существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $m_k(x)$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{2m_k(x)}(x) = f(x), \tag{3.34}$$

где

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} b_n w_n(x). \tag{3.35}$$

Тогда ряд (3.32) *является рядом Фурье—Уолша функции* $f(x)$.

Доказательство. Как известно (см. [6], стр. 155) всюду на $[0,1]$, за исключением двоично-рациональных точек, выполняются равенства

$$w_0(x)=\chi_0(x),\quad w_1(x)=\chi_1(x),$$

$$w_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^{l(n)}}}\sum_{i=2^{l(n)}}^{2^{l(n)+1}-1} a_i^{(n)}\chi_i(x),\quad n\geqslant 2, \tag{3.36}$$

где

$$|a_i^{(n)}|=1;\ n=2,3,\cdots;\ 2^{l(n)}\leqslant i\leqslant 2^{l(n)+1}-1. \tag{3.37}$$

Рассмотрим ряд

$$b_0w_0(x)+b_1w_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m w_m(x)\right]. \tag{3.38}$$

В силу равенств (3.36) при любом $N\geqslant 1$ имеем во всех двоично-иррациональных точках

$$b_0w_0(x)+b_1w_1(x)+\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m w_m(x)\right]=$$

$$=b_0\chi_0(x)+b_1\chi_1(x)+\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} a_i^{(m)}\chi_i(x)\right]=$$

$$=b_0\chi_0(x)+b_1\chi_1(x)+\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m a_i^{(m)}\right)\chi_i(x)\right]=$$

$$=b_0\chi_0(x)+b_1\chi_1(x)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} a_i\chi_i(x), \tag{3.39}$$

где

$$a_i=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{m=2^n}^{2^{n+1}-1} b_m a_i^{(m)}\quad \text{при}\quad 2^n\leqslant i\leqslant 2^{n+1}-1. \tag{3.40}$$

Докажем, что ряд по системе Хаара

$$b_0\chi_0(x)+b_1\chi_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^n}^{2^{n+1}-1} a_i\chi_i(x) \tag{3.41}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Действительно, из условия b) теоремы 4 следует, что в любой точке $x\in[0,1]$, за исключением не более чем счетного множества, некоторая последовательность частных сумм ряда (3.38) сходится к $f(x)$. Тогда, так как в силу (8) ряды (3.38) и (3.41) имеют одинаковые частные суммы, то то же самое имеет место для ряда (3.41). Таким образом, для ряда (3.41) выполняется условие b) теоремы 2. Проверим выполнение условия a).

Из (3.40) и (3.37) имеем при $2^n \leqslant i \leqslant 2^{n+1}-1$

$$\frac{|a_i|}{\max \gamma_i(x)} = \frac{|a_i|}{\sqrt{2^n}} \leqslant \max \{|b_m| : 2^n \leqslant m \leqslant 2^{n+1}-1\}.$$

Отсюда, в силу (3.33), получим

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|a_i|}{\max \gamma_i(x)} = 0,$$

которое является более сильным, чем условие а) теоремы 2.

Согласно теореме 2 ряд (3.41) является рядом Фурье—Хаара функции $f(x)$, поэтому (см. [6], стр. 143) ряд (3.41) сходится к $f(x)$ в метрике $L[0,1]$. Тогда из (3.39) следует, что ряд (3.38) тоже сходится к $f(x)$ в метрике $L[0,1]$, т. е. (см. обозначение (3.35)

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^1 |\sigma_{2^N}(x) - f(x)|\, dx = 0. \tag{3.42}$$

Так как $|w_n(x)| \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, то при $2^N > n$ имеем

$$|a_n - \int_0^1 f(x)\, w_n(x)\, dx| = |\int_0^1 \sigma_{2^N}(x)\, w_n(x)\, dx -$$

$$- \int_0^1 f(x)\, w_n(x)\, dx| \leqslant \int_0^1 |\sigma_{2^N}(x) - f(x)|\, dx,$$

откуда, в силу (3.42)

$$a_n = \int_0^1 f(x)\, w_n(x)\, dx,$$

что и требовалось. Теорема 4 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 25.VI.1970

Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Որոշ օրթոգոնալ սիստեմներով գրված շարքերի միակության մասին (*ամփոփում*)

Ապացուցված է թեորեմ, որի համաձայն անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած յուրաքանչյուր օրթոնորմալ սիստեմից կարելի է անջատել ենթասիստեմ, որով գրված շարքերը օժտված են միակության որոշակի հատկությամբ։ Եռանկյունաչափական սիստեմի դեպքում այդ թեորեմը հնարավորություն է տալիս նշել լակունար սիստեմներից տարբեր ենթասիստեմներ, որոնք օժտված են միակության նշված հատկությամբ։ Ապացուցված են նաև, որոշ միակության թեորեմներ Հաարի և Ուոլշի շարքերի վերաբերյալ։

F. A. TALALIAN. *On uniqueness of the series by certain orthogonal systems* (summary)

A theorem is proved, according to which from any orthonormal system of continuous functions a subsystem may be chosen, the series by which possess certain uniqueness properties. In the case of trigonometric ssystem the theorem permits to point out nonlacunar subsystems, possessing the uniqueness property. Some uniqueness theorems for the series by the Haar and Walsh systems are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, вып. 1, 1964, 3—69.
2. *Ф. Г. Арутюнян* и *А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, серия матем., 28, 6, 1964, 1391—1408.
3. *Г. М. Мушегян* и *Р. И. Овсепян.* О единственности ортогональных рядов, Изв. АН АрмССР, „Математика", IV, № 4, 1969, 259—266.
4. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
5. *K. Tandori.* Über ein Problem von S. B. Stetschkin, Acta. Sci. Math., 26, 1—2, 1965, 75—78.
6. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛОВ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗАЦИИ В АЛГЕБРАХ РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ

Введем следующие обозначения:

1. U_R — открытый круг с центром в нуле и радиуса R.
2. $U = U_1$ — открытый единичный круг.
3. $H(U)$ — множество всех функций, аналитических в U.
4. Пусть ρ и σ—положительные числа. Символом X_ρ^σ обозначим множество

$$\left\{ f \in H(U),\ f: \|f\|_\rho^\sigma = \sup_{z \in U} |f(z)| \exp\left(-\frac{\sigma}{(1-|z|)^\rho}\right) < +\infty \right\}.$$

5. $$X_\rho^\infty = \bigcup_{\sigma>0} X_\rho^\sigma.$$

6. $$X_{\rho+0} = \bigcap_{\varepsilon>0} X_{\rho+\varepsilon}^1.$$

В этой статье мы установим, что факторизация М. М. Джрбашяна, предложенная им в [1], хорошо приспособлена к изучению алгебры $X_{\rho+0}$ $(\rho \geqslant 1)$. Мы дадим полное описание замкнутых идеалов алгебры $X_{\rho+0}$, снабженной естественной топологией. Кроме того, мы покажем, что свойства нулей функции класса X_ρ^∞ $(\rho > 1)$ существенно отличаются от свойств нулей целых функций порядка ρ.

§ 1. Вспомогательные сведения

В этом параграфе формулируются применяемые ниже теоремы Линдена и Картрайт.

Теорема А. (Линден, [4]). Пусть f регулярна в $\overline{U}_R$, $f(0)=1$, и, кроме того, пусть $1<\beta\leqslant 2$. Тогда существует число $r_0=r_0(\beta)<R$ такое, что

$$n(\zeta, h, f) \leqslant K(\beta, \delta)(R-r)^{-\beta}\left\{\int_0^R M(t, \log^+|f|)(R-t)^{\beta-1}\,dt + M(r_0, \log|f|)\right\},$$

где

$$|\zeta| = r < R,\ h = \delta(R-r),\ 0<\delta<\frac{1}{6},$$

$K(\delta, \beta)$—положительное число, $n(\zeta, h, f)$ — число нулей функции f в круге $|\zeta - z| < h$,

$$M(t, \log^+|f|) = \sup_{|z|=t} \log^+|f(z)|.$$

Теорема Б. (Линден, [3]). Пусть для заданного значения $\theta \in [0, 2\pi)$ $S_{h,k}$ обозначает область

$$\{1-2^{-k} < |z| < 1-2^{-k-1};\ 2^{-k}\cdot 2\pi h < \theta - \arg z < 2\pi(h+1)2^{-k}\},$$

где h и k — целые числа такие, что $k>0$,

$$-2^{k-1} \leqslant h \leqslant 2^{k-1}-1.$$

Предположим, что k_0 и ρ—положительные числа, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек круга U такая, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство $|a_n| > 1-2^{-k_0}$, и для любого $\theta \in [0, 2\pi)$ существует не более $c2^{k\rho}$ точек a_n, в каждой из областей $S_{h,k}$ при $k>k_0$. Пусть S—любое целое число, большее $\rho-1$ при $\rho>1$ и равное нулю при $\rho \leqslant 1$. Тогда функция P, заданная равенством

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n(a_n-z)}{1-\bar{a}_n z} \exp\left(\sum_{r=1}^{s+1} \frac{1}{r}\left(\frac{1-|a_n|^2}{1-\bar{a}_n z}\right)^r\right),$$

аналитична в U и принадлежит X_ρ^∞.

Теорема В. Пусть P—произведение, построенное в теореме Б. Тогда при любом $\varepsilon>0$ и достаточно большом n существует число

$$r_n \in \left[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$$

такое, что

$$\log|P(r_n e^{i\theta})| \geqslant -\frac{1}{(1-r_n)^{\rho+\varepsilon}},\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Теорема В следует из результатов работ [3], [5].

Теорема Г. (Картрайт, [6]).

Пусть функция φ аналитична в U и $u = \operatorname{Re}\varphi$, пусть далее $\varphi(0) > 0$. Если

$$u(z) \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}} \quad (z \in U),$$

то при всех $z \in U$ выполняются неравенства

(а) $$|\varphi(z)| \leqslant \frac{K(\alpha)}{(1-|z|)}, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

(б) $$|\varphi|(z)| \leqslant \frac{K}{(1-|z|)} \log^2\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad \text{при} \quad \alpha = 1,$$

(в) $$|\varphi(z)| \leqslant \frac{K(\alpha)}{(1-|z|)^{\alpha}}, \quad \text{при} \quad 1 < \alpha < +\infty,$$

где $K(\alpha)$—положительные постоянные, зависящие только от α.

§ 2. О факторизации М. М. Джрбашяна

Пусть $f\in H(U)$ и

$$T_f(r)=\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta \quad (0<r<1).$$

Множество функций $f\in H(U)$, для которых

$$\int_0^1(1-r)^\alpha\, T_f(r)\,dr<+\infty,$$

$-1<\alpha<+\infty$ обозначим через A_α^*.

М. М. Джрбашян в работе [1] нашел каноническое представление этих классов при $-1<\alpha<+\infty$.

Пусть k — неотрицательная целочисленная функция, заданная в U такая, что множество $\{z\in U: k(z)>0\}$ не имеет точки сгущения в U. Такую функцию k мы будем называть дивизором. Символом π_k^α мы будем обозначать произведение М. М. Джрбашяна (см. [1]) такое, что

$$N(\pi_k^\alpha)=\{z\in U: k(z)>0\},$$

причем кратность нуля в точке z равна $k(z)$, где $N(f)$ есть множество нулей функции f. Каждой функции $f\in H(U)$ соответствует дивизор k_f, определяемый так: $k_f(z)$ равняется кратности нуля $z\in U$ для функции f.

М. М. Джрбашян доказал (см. [1]), что каждую функцию $f\in A_\alpha^*$ можно представить в следующем виде:

$$f(z)=\frac{k_\alpha}{c_\lambda}\,z^\lambda\pi_{k_f}^\alpha(z)\exp g_\alpha^f(z)\quad (z\in U), \tag{1}$$

где

$$g_\alpha^f(z)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\log|f(\rho e^{i\theta})|\,\rho\,d\theta\,d\rho}{(1-\rho e^{-i\theta}z)^{\alpha+2}}\quad (z\in U),$$

$$k_\alpha=\exp\left[\lambda(\alpha+1)\int_0^1(1-\rho^2)^\alpha\log\frac{1}{\rho}\,d\rho\right],$$

c_λ — коэффициент при z^λ в разложении f в ряд Маклорена. Произведение $\pi_{k_f}^\alpha$ определяется так

$$\pi_{k_f}^\alpha=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left[-U_\alpha(z,z_k)\right]\quad (z\in U), \tag{2}$$

где

$$U_\alpha(z,\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\rho\,d\theta\,d\rho}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}, \tag{3}$$

а $\{z_k\}$ — расположенное в последовательность множество $N(f)$, каждый элемент z множества $N(f)$ встречается в этой последовательности $k_f(z)$ раз.

При исследовании замкнутых идеалов в алгебре $X_{\rho+0}$ (см. ниже) возникает следующий вопрос:

Пусть $f\in X_{\rho+0}$, и пусть α таково, что $f\in X^*_\alpha$ (например, $\alpha>\rho-1$), тогда в силу (1)

$$f=\frac{k_\alpha}{c_\lambda}z^\lambda\pi^\alpha_{k_f}\exp g^f_\alpha.$$

Принадлежит ли функции $\exp g^f_\alpha$, $\exp[-g^f_\alpha]$ множеству $X_{\rho+0}$? Кроме того, сам по себе интересен и такой вопрос, возникающий в связи с тем, что при любых α', α таких, что $\alpha'<\alpha$ выполняется включение $A^*_{\alpha'}\subset A^*_\alpha$ и, тем самым, каждая функция, принадлежащая $A^*_{\alpha'}$, имеет новое представление вида (1) в A^{*}_α. Каков рост сомножителей $\pi^\alpha_{k_f}$, $\pi^{\alpha'}_{k_f}$, g^f_α, $g^f_{\alpha'}$, участвующих в разных представлениях одной и той же функции? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. *Пусть* $f\in X^*_\rho$ $(\rho>1)$ *и* $\alpha>\rho-1$. *Тогда*

$$|\pi^\alpha_{k_f}(z)|+|\exp(g^f_\alpha(z))|\leqslant\exp\left|\frac{c}{(1-|z|)^\rho}\log^2\frac{1}{1-|z|}\right|\quad(z\in U).\tag{4}$$

Если же $f\in X_{\rho+0}$, *то* $\pi^\alpha_{k_f}$, $\exp g^f_\alpha$, $\exp[-g^f_\alpha]$ *также принадлежат* $X_{\rho+0}$, *где* c — *некоторое положительное число, независимое от* $z\in U$.

Сначала докажем лемму.

Лемма. *Пусть* k — *дивизор такой, что множество* $\{z\in U: k(z)>0\}$ *удовлетворяет условию теоремы Б. Если* P — *произведение, фигурирующее в теореме Б*

$$N(P)=\{z\in U: k(z)>0\},$$

то

$$|g^P_\alpha(z)|\leqslant\frac{c_0}{(1-|z|)^\rho}\log^2\frac{1}{(1-|z|)}\quad(z\in U)\tag{5}$$

для любого $\alpha>\rho-1$ (c_k, $k=0,1,2,\cdots$ — *абсолютные постоянные*).

Доказательство. Пусть P — произведение, о котором говорится в теореме Б. Так как $P\in A^*_\alpha$ при $\alpha>\rho-1$, то по теореме М. М. Джрбашяна (см. [1]) для P имеем представление

$$P=\pi^\alpha_P\exp g^P_\alpha.\tag{6}$$

Нужно оценить последний сомножитель*

$$g^P_\alpha(z)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\log|P(\rho e^{i\theta})|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\theta d\rho=$$

---

* Возможность почленного интегрирования вытекает из следующих ниже оценок.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2)^\alpha \Big[\log \Big| 1 - \frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \Big| +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{s+1} \frac{1}{l} \Big(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k \rho e^{i\theta}} \Big)^l \Big] \cdot \frac{\rho d\theta d\rho}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{l=1}^{s+1} \frac{1}{l} \Big(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} \Big)^l + \log \frac{|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z} +$$

$$+ \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log \Big| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k} \Big| \rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \Big]. \tag{7}$$

Равенства понимаются с точностью до $2\pi n i$, где n—целое число.

Мы воспользовались теоремой XIII_1 работы [1]. Оценим

$$g_\zeta(z) \stackrel{def}{=} \sum_{l=1}^{s+1} \frac{1}{l} \Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z} \Big)^l + \log \frac{|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z} +$$

$$+ \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log \Big| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \Big| \rho \, d\theta d\rho}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}. \tag{8}$$

Из [1] имеем

$$U_\alpha(z, \zeta) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \log \Big| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \Big| \rho \, d\theta d\rho}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} =$$

$$= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt +$$

$$+ \sum \frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+k)} \Big(\int_0^{|\zeta|^2} (1-t)^{\alpha+1} t^{k-1} dt \Big) \Big(\frac{z}{\zeta} \Big)^k.$$

Легко видеть, что

$$U_\alpha(z, \zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt -$$

$$- \int_0^{|\zeta|^2} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} \Bigg[\frac{1}{\Big(1 - \frac{tz}{\zeta}\Big)^{\alpha+2}} - 1 \Bigg] dt. \tag{9}$$

Пусть

$$\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}\, z}\right| < \frac{1}{8}. \tag{10}$$

Тогда очевидно $z \neq \zeta$ и при $t \in [0, 1]$

$$\frac{tz}{\zeta} \neq 1.$$

Действительно, если $|z| < |\zeta|$, то $\frac{tz}{\zeta} \neq 1$ при $t \in [0,1]$.

Если же $|z| > |\zeta|$, то из равенства $tz = \zeta$ следовало бы, что $\arg z = \arg \zeta$ и

$$\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}\, z}\right| = \frac{1-|\zeta|^2}{1-|\zeta|\,|z|} > 1,$$

что противоречит (10).

Поэтому

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1\right]dt$$

существует.

Следовательно при условии (10) можно записать следующее равенство:

$$U_\alpha(z, \zeta) + \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\, dt -$$

$$- \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1\right]dt +$$

$$+ \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1\right]dt =$$

$$= \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\, \frac{dt}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} - 1\right]dt.$$

Но при $|z| < |\zeta|$ непосредственное разложение последнего интеграла в степенной ряд показывает, что он совпадает с $\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)$.

Предыдущие рассуждения показывают, что при условии (10) $\frac{z}{\zeta}$ не может принимать вещественных значений, больших единицы. В силу аналитичности интеграла относительно $\frac{z}{\zeta}$, получаем, что он равен $\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)$ (при условии (10)).

Итак, при условии (10)

$$g_\zeta(z)=\sum_{l=1}^{s+1}\frac{1}{l}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^l+\log\frac{|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}+$$

$$+\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}=$$

$$=\sum_{l=1}^{s+1}\frac{1}{l}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^l+\log\left(1-\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)+$$

$$+\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}. \tag{11}$$

Ясно, что

$$\left|\sum_{l=1}^{s+1}\frac{1}{l}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^l+\log\left(1-\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right|^{s+2}\cdot\sum_{k=s+2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 8^k}$$

при условии (10).

Остается оценить интеграл

$$\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}.$$

Сделаем замену переменной, полагая

$$1-t=\tau(1-|\zeta|^2).$$

Тогда оцениваемый интеграл по модулю превратится в

$$\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+2}}{|1-\bar\zeta z|^{\alpha+2}}\left|\int_0^1\frac{\tau^{\alpha+1}\zeta^{\alpha+2}\,d\tau}{(1-\tau(1-|\zeta|^2))\left(\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}+\frac{z\tau(1-|\zeta|^2)}{1-\bar\zeta z}\right)^{\alpha+2}}\right|.$$

Оценим снизу знаменатель подынтегральной дроби.

Имеем

$$1-\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\right|^2=\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar\zeta z|^2}\leqslant 2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4},$$

то есть

$$\left|\frac{\zeta-z}{1-\zeta z}\right| > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Но так как

$$\left|\frac{\zeta z\,(1-|\zeta|^2)}{1-\bar{\zeta}z}\right| \leqslant \frac{1}{8},$$

то знаменатель не меньше положительного числа, не зависящего от ζ и z при условии (10) и $|\zeta| \geqslant \frac{1}{2}$.

Следовательно при условии (10) имеем

$$|g_{\zeta}(z)| \leqslant c_1 \left(\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right|^{s+2} + \left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right|^{\alpha+2}\right). \tag{12}$$

Переходим к тому случаю, когда

$$\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta} z|} > \frac{1}{8}. \tag{13}$$

Мы будем пользоваться формулой (8).

Очевидно можно написать

$$|g_{\zeta}(z)| \leqslant \left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right|^{s+2} \Bigg((s+2)\, 8^{s+2} + 8^{s+2} \log \frac{1}{1-|z|} +$$

$$+ 8^{s+2} \cdot \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \left| \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2) \log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\, \rho\, d\rho\, d\theta \right| \Bigg),$$

то есть

$$|g_{\zeta}(z)| \leqslant c_2 \left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right|^{s+2} \Bigg\{ 1 + \log \frac{1}{1-|z|} +$$

$$+ \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right| \frac{\rho\, d\theta\, d\rho}{1-2|z|\rho \cos\overline{\theta-\varphi} + |z|^2 \rho^2} \Bigg\},$$

где $\varphi = \arg z$.

А при $|\zeta| > \frac{1}{2}$, $0 \leqslant \rho < 1$ справедливо неравенство

$$\left|\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right| \leqslant -\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| + 2\log 3.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right| \rho\, d\theta\, d\rho}{1-2|z|\rho \cos\overline{\theta-\varphi} + |z|^2 \rho^2} =$$

$$= O\left(\log \frac{1}{1-|z|}\right) - \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| \rho d\theta d\rho}{1 - 2|z|\rho\cos(\theta - \varphi) + |z|^2\rho^2}.$$

Легко видеть, что

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{1-|z|^2\rho^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| \cdot (1-|z|^2\rho^2)\rho d\rho d\theta}{1 - 2|z|\rho\cos(\theta - \varphi) + |z|^2\rho^2}\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{1-|z|^2\rho^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right| \frac{e^{i\theta} + z\rho}{e^{i\theta} - z\rho}\, d\theta\right| =$$

$$= O\left(\int_0^1 \frac{\rho}{1-\rho^2|z|^2} \log \frac{1}{1-\rho|z|}\, d\rho\right) = O\left(\log^2 \frac{1}{1-|z|}\right).$$

В этом можно убедиться, разлагая подынтегральное выражение в ряд. Следовательно имеем

$$|g_\zeta(z)| \leqslant c_3 \left(\log^2 \frac{1}{1-|z|}\right) \left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right|^{s+2} \tag{14}$$

при условии (13).

Из (12) и (14) следует

$$|g_\zeta(z)| \leqslant c \left(\log^2 \frac{1}{1-|z|}\right) \cdot \left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z}\right|^{\gamma+2} \left(z, \zeta \in U, |\zeta| > \frac{1}{2}\right),$$

где $\gamma = \min(\alpha, s)$.

Поэтому получаем

$$|g_\alpha^P(z)| \leqslant c_4 \left(\log^2 \frac{1}{1-|z|^2}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right)^{\gamma+2} (z \in U). \tag{15}$$

Но из оценок работы [3] следует, что последняя сумма не больше $\frac{c_5}{(1-|z|)^\rho}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Непосредственно из леммы и из (6) (где $k = k_f$) следует оценка (4) для $\pi_{k_f}^\alpha$, (см. теорему Б). Далее заметим, что

$$\pi_{k_f}^\alpha = P \exp(-g_\alpha^P).$$

По предыдущей лемме

$$|\exp(-g_\alpha^P)| \geqslant \exp\left[-\frac{c_4}{(1-|z|)^\rho} \log^2 \frac{1}{1-|z|}\right].$$

В силу известных оценок снизу для P, полученных в [5], (см. также [3]), имеем оценку (4) для $\exp g_\alpha^P$.

Пусть $f \in X_{\rho,0}$, тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $c_f(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(z)| \leqslant \exp \frac{c_f(\varepsilon)}{(1-|z|)^{\rho+\varepsilon}}.$$

Из теоремы В мы заключаем, что при любом n в интервале $\left[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ содержится число r_n такое, что

$$|\pi^{\alpha}_{k_f}(z)| \geqslant \exp\left(-\frac{\text{const}}{(1-r_n)^{\rho+1}}\right)$$

при всех z, равных по модулю r_n.

Поэтому

$$|\exp g^f_{\alpha}(z)| = |f(z)\,(\pi^{\alpha}_{k_f}(z))^{-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\frac{c}{(1-|z|)^{\rho+\varepsilon}} \quad (|z| = r_n,\ n = 1, 2, \cdots).$$

Рассуждая теперь так же, как в [3], § 4 получаем, что

$$|\exp g^f_{\alpha}(z)| \leqslant \exp\frac{c}{(1-|z|)^{\rho+\varepsilon}}$$

при всех $z \in U$.

Из теоремы Г следует теперь, что и

при всех $z \in U$ $\quad |\exp - g^f_{\alpha}(z)| \leqslant \exp\dfrac{c(\rho, \varepsilon)}{(1-|z|)^{\rho+\varepsilon}}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что представление М. М. Джрбашяна A^*_{α} можно рассматривать как некоторый аналог представления Адамара (см. [10]) для целых функций конечного порядка.

В монографии М. М. Джрбашяна [2] исследован другой способ факторизации растущих функций, который приводит к параметрическому представлению важных функциональных классов.

Этот способ факторизации не обладает свойством, описанным в теореме 1: произведение типа Бляшке (см. [2]), участвующее в факторизации функции класса $X_{\rho+0}$, может не принадлежать этому классу.

§ 3. О замкнутых идеалах в алгебре $X_{\rho+0}$

Введем в $X_{\rho+0}$ топологию проективного предела банаховых пространств $X^1_{\rho+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Тогда $X_{\rho+0}$ превращается в топологическую алгебру относительно поточечного умножения и сложения. Опишем все замкнутые идеалы в этой алгебре.

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма. *Если множество* $\{z \in U : k(z) > 0\}$ *удовлетворяет условию теоремы Б с* $\rho \to \rho+\varepsilon$ *при любом* $\varepsilon>0$, *начиная с некоторого* $k_0>0$, *то при подходящем выборе* α (*например*, $\alpha > \rho-1$)

$$X_{\rho+0} - \lim_{r\to 1-0} \frac{\pi^{\alpha}_{k}}{\pi^{\alpha}_{k_r}} = 1, \tag{16}$$

где

$$k_r(z) = \begin{cases} k(z), & \text{если } z \in U_r \\ 0, & \text{если } z \in U/U_r \end{cases}$$

(имеется в виду топология пространства $X_{\rho+0}$*).*

Доказательство. Заметим, что из теоремы 1 следует

$$\frac{\pi_k^{\alpha}}{\pi_{k_r}^{\alpha}} \in X^1_{\rho+\varepsilon},\ 0<r<1$$

и ограничено в $X'_{\rho+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon>0$. И кроме того, имеем

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{\pi_k^{\alpha}}{\pi_{k_r}^{\alpha}}(z)=1\ (z\in U), \tag{17}$$

так как π_k^{α} сходится в U.

Но ввиду вполне непрерывности оператора вложения из $X^1_{\rho+\varepsilon} \to X^1_{\rho+2\varepsilon}$ (см. [9]), заключаем, что (17) имеет место в $X^1_{\rho+2\varepsilon}$. Так как ε — любое положительное число, то лемма доказана.

Пусть J—идеал в $X_{\rho+0}$, через k_J обозначим дивизор, определенный следующим образом:

$$k_J = \inf_{f\in J} k_f. \tag{18}$$

Если k — дивизор, то через J_k будем обозначать множество

$$\{f\in X_{\rho+0} : k_f \geqslant k_J\}.$$

Теорема 2. *Пусть J—замкнутый идеал в алгебре* $X_{\rho+0}$ $(\rho\geqslant 1)$ *Тогда*

1. $J=\{f\in X_{\rho+0} : k_f \geqslant k_J\}$;

2. *Пусть k—дивизор ($k\not\equiv 0$) такой, что множество* $\{z\in U : k(z)>0\}$ *удовлетворяет условию теоремы Б с* $\rho\to\rho+\varepsilon$ *при любом положительном* $\varepsilon>0$, *начиная с некоторого* k_0. *Тогда множество*

$$\{f\in X_{\rho+0},\ f : k_f \geqslant k\}$$

есть нетривиальный (отличный от $\{0\}$*) замкнутый идеал в* $X_{\rho+0}$;

3. *Всякий замкнутый идеал в* $X_{\rho+0}$ *— главный, точнее, если* J *— замкнутый идеал в* $X_{\rho+0}$, *то существует* $\alpha>0$ *такое, что*

$$J=\pi_{k_J}^{\alpha} X_{\rho+0}.$$

Доказательство. Легко видеть, что J_{k_J} является замкнутым идеалом в $X_{\rho+0}$, где k_J определяется по (18). Чтобы доказать равенство $J=J_{k_J}$ достаточно установить включение $J_{k_J}\subset J$, так как обратное включение очевидно. Если $f\in J$, то $\pi_{k_f}^{\alpha}\in J$.

Действительно $f=\pi_{k_f}^{\alpha}\exp g_{\alpha}^f$ (см. теорему 1), где

$$\exp g_{\alpha}^f,\ \exp(-g_{\alpha}^f)\in X_{\rho+0}.$$

Значит
$$\pi^{\alpha}_{k_f} = f \exp(-g'_{\alpha}) \in J.$$

Согласно лемме
$$X_{\rho+0} - \lim_{r\to 1-0} \frac{\pi^{\alpha}_{k_f}}{\pi^{\alpha}_{k_f,\, r}} \Phi = \Phi$$

для любого
$$\Phi \in X_{\rho+0}.$$

Докажем, что если
$$\Phi \in J_{k_J}, \quad \text{то} \quad \frac{\pi^{\alpha}_{k_f}}{\pi^{\alpha}_{k_f,\, r}} \Phi \in J.$$

Для этого достаточно установить, что если z_0 такая точка, в которой $k_f(z_0) - k_J(z_0) > 0$, то
$$\frac{\pi^{\alpha}_{k_f}}{\pi^{\alpha}_{z_0}} \in J,$$

где
$$\pi^{\alpha}_{z_0} = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \exp\left[-U_{\alpha}(z, z_0)\right]$$

(см. формулу (3)).

Пусть $h \in J$, $h(z_0) \neq 0$* и
$$\Phi_1(z) = \frac{h(z_0) - h(z)}{\pi^{\alpha}_{z_0}(z)},$$
$$(z \in U)$$
$$\Phi_2(z) = \frac{\pi^{\alpha}_{k_f}}{\pi^{\alpha}_{z_0}}(z).$$

Функции Φ_1, $\Phi_2 \in X_{\rho+0}$, поэтому $\pi^{\alpha}_{k_f}\Phi_1 + h\Phi_2 \in J$.

Так как
$$\frac{h(z_0)\, \pi^{\alpha}_{k_f}}{\pi^{\alpha}_{z_0}} = \Phi_1 \pi^{\alpha}_{k_f} + \Phi_2 h \to \frac{\pi^{\alpha}_{k_f}}{\pi^{\alpha}_{z_0}} \in J,$$

то мы получаем утверждение 1. Утверждение 2 очевидно, а утверждение 3 следует из утверждения 1 и теоремы 1. Доказательство завершено.

Замечание 1. Пусть J -замкнутый идеал в $X_{\rho+0}$ $(\rho > 1)$, тогда следующие утверждения равносильны:

1. $J \neq \{0\}$.

---

* Случай простого нуля функции h. Аналогичным образом рассматривается и случай кратного нуля.

2. Множество $\{z \in U, z : k_J(z) > 0\}$ удовлетворяет условию теоремы Б при $\rho \to \rho + \varepsilon$ для любого положительного ε, начиная с некоторого k_0.

Замечание 2. Докажем, что теорема 2 не справедлива при $0 \leqslant \rho < 1$. Действительно, пусть

$$S(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$$

и $0 \leqslant \rho < 1$, тогда легко видеть, что замыкание идеала

$$J = S X_{\rho+0}$$

является нетривиальным идеалом в $X_{\rho+0}$ (см. [7], § 6), и в то же время $k_J(z) \equiv 0$ $(z \in U)$.

§ 4. О нулях функций класса X_ρ^∞ $(\rho > 1)$

Символом $N(f)$ мы будем обозначать множество всех нулей функции f. Как известно, в классе E_ρ^∞ всех целых функций порядка не выше ρ и нормального типа возможен следующий феномен: подмножества множества $N(f)$ ни при какой $g \in E_\rho^\infty$ не представимы в виде $N(g)$.

Действительно, если ρ—целое число, а $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ записано в виде последовательности множества $N(f)$ $(|a_1| \leqslant |a_2|, \cdots)$, то

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \left| \sum_{|a_k| < r} a_k^{-\rho} \right| < +\infty,$$

тогда как, вообще говоря

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k|^{-\rho} = +\infty,$$

(см. [10]).

Этот факт играет важную роль при исследовании идеалов в алгебрах целых функций (см. [8]).

Мы покажем, что для функций класса X_ρ^∞ $(\rho > 1)$ только что отмеченное явление невозможно.

Теорема 3. *Если $f \in X_\rho^\infty$ $(\rho > 1)$ и E — любое подмножество множества $N(f)$, то существует функция $\varphi \in X_\rho^\infty$ такая, что $N(\varphi) = E$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0) = 1$.

Положим

$$\beta = \min\left\{2, \frac{1}{2}(1+\rho)\right\}, \text{ и заметим, что } \beta \in (0).$$

Существует число c такое, что

$$M(t, \log^+ |f|) \leqslant \frac{c}{(1-t)^\rho} \quad (t \in [0,1)).$$

Поэтому

$$\int_0^R M(t, \log^+ |f|)(R-t)^{\beta-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^R \frac{(R-t)^{\beta-1}}{(1-t)^{\rho}}\, dt < C\int_0^R \frac{dt}{(1-t)^{\rho-\beta+1}} \leqslant \frac{C}{(1-R)^{\rho-\beta}}.$$

Пусть $\zeta \in U$, $|\zeta| = r$. Полагая $R = \frac{1}{2}(1+r)$, получаем (см. теорему А)

$$n(\zeta, h, f) \leqslant C(\rho, \delta)\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\left((1-r)^{\beta-\rho} + M(r_0 \log^+ |f|)\right) \leqslant \frac{C_1(\delta\rho)}{(1-r)^{\rho}}.$$

Положим $\delta = \frac{1}{8}$. Тогда последнее неравенство приобретает вид

$$n(\zeta, h, f) \leqslant \frac{K}{(1-r)^{\rho}}. \tag{19}$$

Каждое множество $S_{h,k}$ можно покрыть не зависящим от h и k конечным числом кружков радиуса $\frac{1}{16\, 2^k}$, к которым применима оценка (19). Поэтому число нулей функции f в множестве $S_{h,k}$ не превосходит const $2^{k\rho}$.

Остальное следует из теоремы Б.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю В. П. Хавину за постановку задачи и внимание к работе и Н. К. Никольскому, ответом на вопрос которого служит § 4.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 3.IV.1970

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Փակ իդեալների նկարագրումը և ֆակտորիզացիայի մի քանի հարցեր միավոր շրջանում անալիտիկ աճող ֆունկցիաների ալգեբրաներում (*ամփոփում*)

Դիցուք $X_{\rho+0}$ բոլոր այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք անալիտիկ են միավոր U շրջանում և բավարարում են հետևյալ պայմանին

$$|f(z)| \leqslant C_{f,\varepsilon} \exp\frac{1}{(1-|z|)^{\rho+\varepsilon}} \quad (z \in U)$$

ցանկացած դրական ε-ի համար։

Ապացուցված է, որ Մ. Մ. Ջրբաշյանի ֆակտորիզացիան, որը բերված է [1] հոդվածում չավ հարմարված է $X_{\rho+0}$ դասի ուսումնասիրությանը։ Այդ թեորեման օգտագործվում է $X_{\rho+0}$-ում փակ իդեալների նկարագրման հարցում, որտեղ $X_{\rho+0}$ դիտված է որպես տոպոլոգիական ալգեբրա։ Բացի այդ ապացուցված է, որ X_ρ-ին պատկանող ֆունկցիաների զրոների բնույթը խիստ տարբերվում է ρ կարգի և նորմալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների զրոների բնույթից։ Այստեղ X_ρ^∞-ն այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք անալիտիկ են U-ում և բավարարում են հետևյալ պայմանին

$$|f(z)| \leqslant \exp\frac{C}{(1-|z|)^{\rho}} \quad (z \in U)$$

C—ն որևէ թիվ է $(0, +\infty)$—ինտերվալից։

F. A. SHAMOYAN. *The description of closed ideals and some questions of factorisation in algebras of growing functions analytical in a disc* (summary)

Let $X_{\rho+0}$ be the class of all functions f analytical in the unit disc U of the complex plane satisfying the following condition:

$$|f(z)| \leqslant C_{f,\varepsilon} \exp \frac{1}{(1-|z|)^{\rho+\varepsilon}} \quad (z \in U),$$

for arbitrary positive ε. In investigation of the class the factorisation theorem proposed by M. M. Džrbašian in [1] theorem leads to the complete description of closed ideals in $X_{\rho+0}$ considered as a topological algebra. It is also shown that the properties of zeros of functions belonging to X_{ρ}^{∞} differ from properties of zeros of entire functions with corresponding rate of growth, when X_{ρ}^{∞} is the class of all functions f analytical in U satisfying the condition

$$|f(z)| \leqslant \exp \frac{C}{(1-|z|)^{\rho}}$$

or some $C \in (0, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Армянской ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, М., „Наука", 1966.
3. *C. N. Linden.* The representations of regular functions, Journ. London Math. Soc. 39, № 153, 1964, 19—30.
4. *C. N. Linden.* The minimum modulus of functions regular and finite order in the unit circle, Quart. Journ. of Math. (Oxford), № 7, № 27, 1956, 196—216.
5. *M. Tsuji.* Canonical product of the meromorfic functions in unit circle, Journ. Math. Soc. Jap., 8, № 1, 1956, 7—19.
6. *M. L. Cartwright.* On analytic functions regular in unit circle, Quar. J. Math. (Oxford), № 16, 1933.
7. *H. S. Shapiro.* Weighted polinomial aproximation and boundary behaviour of analytic functions, „Современные проблемы теории аналитических функций, 326—335, М., „Наука", 1966.
8. *Н. К. Никольский.* Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций, Сиб. мат. журн., № 1, 1968, 211—215.
9. *Ф. А. Шамоян.* О замкнутых идеалах в одной алгебре растущих аналитических функций, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", IV, № 4, 1969, 267—277.
10. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ, Г. С. ЦЕЙТИН

КРИТЕРИЙ СПРЯМЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Как было показано в [1], для конструктивной спрямляемости конструктивной кривой необходимо, чтобы обе ее компоненты были функциями конструктивно ограниченной вариации, однако это условие не достаточно для конструктивной спрямляемости кривой*. Во время доклада об этих результатах на семинаре в МГУ А. А. Марков высказал следующее предположение: для спрямляемости конструктивной кривой необходимо и достаточно, чтобы компоненты всех конгруэнтных ей кривых были функциями ограниченной вариации. В настоящей статье мы дадим доказательство этого предположения А. А. Маркова.

Будем пользоваться терминологией и обозначениями из [1]. В частности, если фиксирована функция f и кривые K и K_1, определенные на $\alpha\Delta\beta$, то через W и W^* обозначаются алгорифмы, которые перерабатывают всякое дробление $\alpha_0 * \alpha_1 * \cdots * \alpha_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$ соответственно в FR-числа

$$\sum_{l=0}^{h-1} |f(\alpha_{l+1}) - f(\alpha_l)|$$

и

$$\sum_{l=0}^{h-1} \sqrt{(K^{\xi}(\alpha_{l+1}) - K^{\xi}(\alpha_l))^2 + (K^{\eta}(\alpha_{l+1}) - K^{\eta}(\alpha_l))^2}\,;$$

через W_1^* будет обозначаться алгорифм, определяемый так же, как W^*, с заменой K на K_1.

Термины, связанные с конструктивным интегрированием по Риману, понимаются так же, как в [2] и [3]. Будем говорить, что функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$, является *линейной комбинацией* функций g и h, заданных на $\alpha\Delta\beta$, если потенциально осуществимы такие FR-числа u и v, что при любом $x \in \alpha\Delta\beta$

$$f(x) \mathrel{=\!\!\!\cdot} u \cdot g(x) + v \cdot h(x).$$

Теорема. *Кривая K, заданная на $\alpha\Delta\beta$, спрямляема в том и только в том случае, когда любая линейная комбинация ее компонент является функцией ограниченной вариации; в этом случае длина кривой K равна*

---

* В дальнейшем прилагательное „конструктивный“ в терминах, относящихся к конструктивному анализу, часто будет опускаться.

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi \left| \mathop{\mathrm{V}}_{t=\alpha}^{t=\beta} \left(K^\xi(t)\cdot\cos\varphi + K^\eta(t)\cdot\sin\varphi\right)\right| d\varphi. \tag{1}$$

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Пусть F есть конструктивная последовательность функций, определенных на $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что эта последовательность *равностепенно непрерывна* на $\alpha\Delta\beta$, если

$$\forall n \exists m \forall kxy\, (x,\, y \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |x-y| < 2^{-m} \supset |F_k(x) - F_k(y)| < 2^{-n}).$$

Лемма 1. *Пусть F есть конструктивная последовательность функций, равностепенно непрерывная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть конструктивная функция f, определенная на $\alpha\Delta\beta$, такова, что при любом $x \in \alpha\Delta\beta$*

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x). \tag{2}$$

Тогда функция f равномерно непрерывна на $\alpha\Delta\beta$, и последовательность F сходится к f равномерно.

Доказательство. Докажем вначале равномерную непрерывность f. Пусть n — произвольное натуральное число. Пользуясь равностепенной непрерывностью F, построим натуральное число m такое, что

$$\forall kxy\, (x,\, y \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |x-y| < 2^{-m} \supset |F_k(x) - F_k(y)| < 2^{-n-1}).$$

Тогда, ввиду (2), для любых x и y, принадлежащих $\alpha\Delta\beta$ и таких, что $|x-y| < 2^{-m}$, будет

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2^{-n-1} < 2^{-n};$$

таким образом, мы показали, что

$$\forall n \exists m \forall xy\, (x,\, y \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |x-y| < 2^{-m} \supset |f(x) - f(y)| < 2^{-n}),$$

т. е. f равномерно непрерывна на $\alpha\Delta\beta$.

Теперь докажем равномерную сходимость F к f. Пусть n — произвольное натуральное число. Построим натуральное число l такое, что

$$\forall kxy\, (x,\, y \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |x-y| < 2^{-l} \supset |F_k(x) - F_k(y)| < 2^{-n-2}),$$

и, кроме того

$$\forall xy\, (x,\, y \in \alpha\Delta\beta \,\&\, |x-y| < 2^{-l} \supset |f(x) - f(y)| < 2^{-n-2}).$$

Далее, построим натуральное число k такое, что

$$\frac{\beta-\alpha}{k} < 2^{-l},$$

FR-числа $u_0,\, u_1, \cdots,\, u_k$ такие, что

$$u_i = \alpha + \frac{i}{k}\cdot(\beta-\alpha) \quad (0 \leqslant i \leqslant k),$$

и, наконец, пользуясь соотношением (2), построим натуральное число m такое, что для всякого i от 0 до k и для всякого $j > m$

$$|F_j(u_i) - f(u_i)| < 2^{-n-2}.$$

Пусть теперь x — произвольное FR-число, принадлежащее $\alpha\Delta\beta$. Построим натуральное число i такое, что

$$|x - u_i| < 2^{-i}.$$

Тогда при всяком $j > m$ будем иметь

$$|F_j(x) - f(x)| \leqslant |F_j(x) - F_j(u_i)| +$$
$$+ |F_j(u_i) - f(u_i)| + |f(u_i) - f(x)| <$$
$$< 2^{-n-2} + 2^{-n-2} + 2^{-n-2} < 2^{-n}.$$

Таким образом

$$\forall n \exists m \forall j x\ (x \in \alpha\Delta\beta \ \&\ j \geqslant m \supset |F_j(x) - f(x)| < 2^{-n}).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых FR чисел u и v

$$\int_0^{\pi} |u \cdot \cos\varphi + v \cdot \sin\varphi|\, d\varphi = 2 \cdot \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Доказательство. Если $u^2 + v^2 = 0$, то $u = v = 0$, и требуемое утверждение устанавливается немедленно. Если $u^2 + v^2 \neq 0$, то можно построить такое FR-число φ_0, что

$$u = \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \cos\varphi_0,$$
$$v = \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sin\varphi_0,$$

откуда

$$\int_0^{\pi} |u \cdot \cos\varphi + v \cdot \sin\varphi|\, d\varphi = \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \int_0^{\pi} |\cos(\varphi - \varphi_0)|\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \int_0^{\pi} |\cos\varphi|\, d\varphi = 2 \cdot \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Таким образом, требуемое равенство справедливо как в случае $u^2 + v^2 = 0$, так и в случае $u^2 + v^2 \neq 0$; следовательно, имеет место двойное отрицание этого равенства, а значит и само равенство.

Доказательство теоремы. Необходимость. Предположим, что кривая K спрямляема. Пусть u и v — какие-либо FR-числа, и пусть функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$, такова, что при любом $x \in \alpha\Delta\beta$

$$f(x) = u \cdot K^{\xi}(x) + v \cdot K^{\eta}(x).$$

Построим кривую K_1 такую, что при любом $x \in \alpha\Delta\beta$

$$K_1^{\xi}(x) = u \cdot K^{\xi}(x) + v \cdot K^{\eta}(x),$$
$$K_1^{\eta}(x) = -v \cdot K^{\xi}(x) + u \cdot K^{\eta}(x).$$

Легко проверить, что для любого дробления P сегмента $\alpha\Delta\beta$

$$W_1^*(P)=\sqrt{u^2+v^2}\cdot W^*(P),$$

а потому, ввиду спрямляемости кривой K, кривая K_1 также спрямляема; но тогда, на основании теоремы 1 из [1], функция K_1^ξ, а значит и f, является функцией ограниченной вариации на $\alpha\Delta\beta$.

Достаточность. Пусть любая линейная комбинация K^ξ и K^η есть функция ограниченной вариации на $\alpha\Delta\beta$. Покажем, что в этом случае кривая K имеет длину, выражающуюся формулой (1).

Из нашего предположения следует, в частности, что K^ξ и K^η суть функции ограниченной вариации; обозначим их вариации через V_ξ и V_η. Пользуясь леммой {1} из [4], легко построить алгорифм J, перерабатывающий всякое FR-число φ в запись функции, которая по всякому FR-числу $t\in\alpha\Delta\beta$ выдает FR-число

$$\cos\varphi\cdot K^\xi(t)+\sin\varphi\cdot K^\eta(t).$$

В дальнейшем вместо „функция, запись которой есть $J(\varphi)$“ мы будем говорить просто „функция J_φ“.

Согласно предположению, для всякого FR-числа φ функция J_φ есть функция ограниченной вариации на $\alpha\Delta\beta$. Таким образом, потенциально осуществим алгорифм, который по всякому φ выдает вариацию функции J_φ. Построим такой алгорифм и обозначим его через h. Мы будем употреблять следующие сокращенные обозначения из [1]:

$$x_i^{(n)}=\alpha+\frac{i}{2^n}\cdot(\beta-\alpha);$$

$$\Delta_n K_i^\xi=K^\xi(x_{i+1}^{(n)})-K^\xi(x_i^{(n)});$$

$$\Delta_n K_i^\eta=K^\eta(x_{i+1}^{(n)})-K^\eta(x_i^{(n)}).$$

Построим конструктивную последовательность H функций, определенных на $0\Delta\pi$, такую, что для любого натурального числа n и любого FR-числа $\varphi\in 0\Delta\pi$

$$H_n(\varphi)=\sum_{i=0}^{2^n-1}|\cos\varphi\cdot\Delta_n K_i^\xi+\sin\varphi\cdot\Delta_n K_i^\eta|.$$

Согласно лемме 4 из [1], при любом φ, принадлежащем $0\Delta\pi$, имеем

$$H_n(\varphi)\underset{n\to\infty}{\to}h(\varphi). \tag{3}$$

Далее при любых φ_1 и φ_2, принадлежащих $0\Delta\pi$, и при любом натуральном n

$$|H_n(\varphi_2)-H_n(\varphi_1)|=\Big|\sum_{i=0}^{2^n-1}|\cos\varphi_2\cdot\Delta_n K_i^\xi+$$

$$+\sin\varphi_2\cdot\Delta_n K_i^\eta|-\sum_{i=0}^{2^n-1}|\cos\varphi_1\cdot\Delta_n K_i^\xi+\sin\varphi_1\cdot\Delta_n K_i^\eta|\Big|<$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{2^n-1} \left|(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)\cdot\Delta_n K_l^{\xi} + (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\cdot\Delta_n K_l^{\eta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_2-\varphi_1|\cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} (|\Delta_n K_l^{\xi}| + |\Delta_n K_l^{\eta}|) \leqslant |\varphi_2-\varphi_1|\cdot(V_{\xi} + V_{\eta}).$$

Таким образом, последовательность H равностепенно непрерывна на $0\Delta\pi$, а потому, ввиду (3), получаем на основании леммы 1, что функция h равномерно непрерывна, и H равномерно сходится на $0\Delta\pi$ к h. Следовательно функции H_n и h интегрируемы по Риману на $0\Delta\pi$, и

$$\int_0^{\pi} H_n(\varphi)\, d\varphi \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^{\pi} h(\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

С другой стороны, пользуясь леммой 2, получаем для любого натурального n:

$$\int_0^{\pi} H_n(\varphi)\, d\varphi = \sum_{l=0}^{2^n-1} \int_0^{\pi} |\cos\varphi\cdot\Delta_n K_l^{\xi} + \sin\varphi\cdot\Delta_n K_l^{\eta}|\, d\varphi =$$

$$= 2\cdot \sum_{l=0}^{2^n-1} \sqrt{(\Delta_n K_l^{\xi})^2 + (\Delta_n K_l^{\eta})^2} = 2\cdot W^*(T(n)), \tag{5}$$

где T есть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное n в дробление $x_0^{(n)} * x_1^{(n)} * \cdots * x_{2^n}^{(n)}$. Из (4) и (5) на основании леммы 5 из [1] следует, что кривая K спрямляема, и FR-число $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} h(\varphi)\, d\varphi$ является ее длиной. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для того, чтобы кривая K, заданная на $\alpha\Delta\beta$, была спрямляема, необходимо и достаточно, чтобы для любых FR-чисел u и v, удовлетворяющих условию $u^2 + v^2 = 1$, функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$ и такая, что*

$$\forall t\,(t \in \alpha\Delta\beta \supset f(x) \doteq u\cdot K^{\xi}(t) + v\cdot K^{\eta}(t)),$$

была функцией ограниченной вариации.

В самом деле, необходимость приведенного условия немедленно следует из теоремы; достаточность его фактически установлена в процессе доказательства теоремы, так как там мы использовали ограниченность вариации лишь таких линейных комбинаций K^{ξ} и K^{η}, у которых сумма квадратов коэффициентов есть 1.

Будем говорить, что кривая K_1, заданная на сегменте $\alpha\Delta\beta$, *конгруэнтна* кривой K, заданной на том же сегменте, если потенциально осуществимы такие FR-числа φ, C, D, что при любом $t \in \alpha\Delta\beta$

$$K_1^{\xi}(t) = K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi + C;$$

$$k_1^{\eta}(t) = -K^{\xi}(t)\cdot\sin\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\cos\varphi + D.$$

Следствие 2. *Для того, чтобы кривая K, заданная на $\alpha\Delta^{\beta}$, была спрямляема, необходимо и достаточно, чтобы компоненты всех кривых, конгруэнтных K, были функциями ограниченной вариации.*

Следствие 3. Если кривая K, заданная на $\alpha\Delta^{\beta}$, равномерно дифференцируема, то ее длина равна

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(K^{\xi\prime}(t))^2+(K^{\eta\prime}(t))^2}\,dt.$$

Доказательство немедленно следует из формулы (1) и леммы 2 на основании равенства

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}} f = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(t)|\,dt,$$

справедливого для любой равномерно дифференцируемой функции (см. [2], теорема 4); возможность перемены порядка интегрирований легко устанавливается, исходя из равномерной непрерывности подынтегральной функции.

Отметим в заключение, что формула (1), выражающая длину кривой через вариации линейных комбинаций ее компонент, может быть доказана аналогичным способом также в рамках классического анализа. Авторы не встречали подобной формулы в литературе по классическому анализу.

Вычислительный центр АН Армянской ССР и
Ереванского государственного университета
Вычислительный центр Ленинградского
государственного университета

Поступило 25.VI.1970

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ, Գ. Ս. ՑԵՅՏԻՆ. Կոնստրուկտիվ ճարթ կորերի ուղղելիության հայտանիշը (ամփոփում)

Ապացուցվում է, որ կոնստրուկտիվ կորը կոնստրուկտիվորեն ուղղելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա բաղադրիչների բոլոր գծային կապակցությունները ունեն կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ վարիացիաներ։ $\alpha \leq t \leq \beta$ միջակայքում որոշված K կորի երկարությունը արտահայտվում է նրա K^{ξ} և K^{η} բաղադրիչների գծային կապակցությունների վարիացիաների միջոցով հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$L = \frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\pi}\left[\overset{t=\beta}{\underset{t=\alpha}{\mathrm{V}}}\left(K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi\right)\right| d\varphi,$$

որը տեղի ունի նաև դասական անալիզում։

I. D. ZASLAVSKY, G. S. TSEYTIN. *Rectifiability criterion for constructive planar curves* (summary)

The following theorem is proved: the constructive curve is constructively rectifiable if and only if all linear combinations of its components are functions of constructively bounded variation. The length of the curve K with components K^{ξ} and K^{η} defined on the segment $\alpha \leq t \leq \beta$ can be expressed in terms of these linear combinations and their variations by means of the formula

$$L = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \left| \overset{\beta}{\underset{t=\alpha}{\mathrm{V}}} \left(K^{\xi}(t)\cdot\cos\varphi + K^{\eta}(t)\cdot\sin\varphi\right) \right| d\varphi,$$

which holds also in classical analysis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Д. Заславский*. О спрямляемости конструктивных плоских кривых, Известия АН АрмССР, „Математика", 2, № 2, 69—82, 1967.
2. *И. Д. Заславский*. О дифференцируемости и интегрировании конструктивных функций, ДАН СССР, 156, № 1, 1964, 25—27.
3. *Б. А. Кушнер*. Некоторые массовые проблемы, связанные с интегрированием конструктивных функций, Диссертация, Москва, МГУ, 1967.
4. *Г. С. Цейтин*. Об алгорифмических операторах в конструктивных метрических пространствах, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXVII, 295—361, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ $\psi(x+\alpha)-b(x)\psi(x)=g(x)$

Рассматривается функциональное уравнение $\psi(x+\alpha)-b(x)\psi(x)=g(x)$, $-\infty<x<\infty$, где $\psi(x)$, $g(x)$, $b(x)$—периодические с периодом 2π функции, равносильное следующему уравнению на окружности

$$(A\varphi)(t)\equiv\varphi(te^{i\alpha})-a(t)\varphi(t)=f(t),\ |t|=1. \quad (1)$$

Уравнение (1) изучается в винеровском кольце W и $a(t)\in W$, хотя получаемые ниже результаты легко переносятся и на другие естественные классы, например, гельдеровские классы H^λ, классы дифференцируемых функций и др.

К уравнению (1) приводится дискретное уравнение типа свертки

$$\varphi_n-e^{-i\alpha n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{n-k}\varphi_k=g_n,\ n=0,\ \pm1,\cdots \quad (2)$$

с осциллирующим на бесконечности коэффициентом, $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\in l_1$.

Важный частный случай уравнения (1), когда $a(t)=1$, давно привлекал внимание многих авторов, особенно в последнее время в связи с проблемами „малых знаменателей" в задачах небесной механики (см. [5]—[8]). В этих работах впервые А. Винтнер, а позже В. И. Арнольд и Ю. Мозер применили теоретико-числовые [4] методы для получения достаточных условий существования достаточно гладких (или даже аналитических) решений уравнения (1) при $a(t)\equiv1$.

Обширный класс функциональных уравнений со сдвигом карлемановского типа, содержащих в частности (1) при $\frac{\alpha}{2\pi}$ рациональном, рассматривался в работах [1]—[2] в классах гельдеровских функций. (Там же приведена подробная библиография работ по уравнениям со сдвигом). Полученное в [1]—[2] условие нетеровости в применении к (1) имеет вид

$$\sigma(t)\equiv1-a(t)\ a(te^{i\alpha})\cdots a(te^{i\alpha(m-1)})\neq0,\ |t|=1, \quad (3)$$

где $\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{r}{m}$ $(r,\ m)=1$. Очевидно, условие (3) необходимо и достаточно для обратимости оператора A (как в классах H^λ, так и в кольце W).

Наиболее интересными в теории уравнения (1) с нашей точки зрения являются случаи сдвига „бесконечного порядка" $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right.$ — иррациональное $\Big)$ и тождественного вырождения функции $\sigma(t)$: $\sigma(t) \equiv 0$, $|t|=1$ при рациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$. Исследованию этих случаев и посвящена настоящая статья. Мы увидим, в частности, что оператор A в указанных случаях, вообще говоря, не нетеров, причем в первом случае — за счет незамкнутости образа $A(W)$, во втором — за счет бесконечной d-характеристики ($\alpha_A = \infty$, $\beta_A = \infty$).

Отметим, что Ф. Д. Гаховым [3] было показано, что аналогичное явление — бесконечная d-характеристика в случае вырождения имеет место для сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

В настоящей работе существенно используется идея „факторизации со сдвигом“ функции винеровского кольца.

Определение. Пусть $a(t) \in W$. „Факторизацией со сдвигом $te^{i\alpha}$“ функции $a(t)$ назовем представление ее в виде

$$a(t) = \frac{v(te^{i\alpha})}{v(t)}, \tag{4}$$

где $v(t) \in W$ и $v(t) \neq 0$, $|t|=1$.

Очевидно, условия $a(t) \neq 0$ и $\operatorname{ind} a(t) = 0$ являются необходимыми для факторизации (4).

1. Уравнение (1) в случае иррационального $\frac{\alpha}{2\pi}$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi(te^{i\alpha}) - a(t)\varphi(t) = 0, \quad |t| = 1. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Лемма. *Пусть* $|t_0| = 1$. *Если* $\frac{\alpha}{2\pi}$ — *иррационально, то множество* $\{t_0 e^{i\alpha n}\}_{n=0}^{\infty}$ *плотно на единичной окружности* (*см.* [7]).

Следствие. Нетривиальное решение уравнения (5) (если оно существует) отлично от нуля всюду на единичной окружности.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (5) *имело при иррациональном* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы*

1) $a(t) \neq 0$, $|t| = 1$,

2) $\operatorname{ind} a(t) = 0$,

3) $\frac{1}{2\pi\alpha} \int\limits_{|t|=1} \frac{\operatorname{Ln} a(t)}{t} dt$ — *целое* (*положительное, отрицательное или нуль*) *хотя бы для одного выбора ветви* $\operatorname{Ln} a(t)$,

$$4)\ \left\{\frac{1}{e^{i\alpha k}-1}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln a(t)}{t^{k+1}}\,dt\right\}_{k=\pm1,\,\pm2,\cdots}\in l_1.$$

При выполнении этих условий уравнение (5) *имеет одно (линейно независимое) решение**.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(t)$—нетривиальное решение уравнения (5). Если $a(t_0)=0$, то согласно (5) $\varphi(t_0 e^{i\alpha})=0$, что невозможно в силу следствия из леммы. Поэтому необходимо $a(t)\neq0$, $|t|=1$. Условие $\operatorname{ind} a(t)=0$ очевидно.

Обозначим $\varkappa=\operatorname{ind}\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)=t^{-\varkappa}\varphi(t)$. Тогда (5) примет вид $\tilde{\varphi}(te^{i\alpha})=e^{-i\alpha\varkappa}\,a(t)\,\tilde{\varphi}(t)$, что равносильно равенству

$$\ln\tilde{\varphi}(te^{i\alpha})-\ln\tilde{\varphi}(t)=-i\alpha\varkappa+2\pi ip+\ln a(t),\tag{6}$$

где p — целое пока не определенное число.

Так как $\ln\tilde{\varphi}(t)$, $\ln a(t)\in W$, то положив

$$\ln\tilde{\varphi}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k t^k,\quad \ln a(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k t^k,$$

получаем систему

$$\gamma_k(e^{i\alpha k}-1)=\begin{cases}-i\alpha\varkappa+2\pi pi+\eta_0, & k=0\\ \eta_k, & k=\pm1,\pm2,\cdots.\end{cases}\tag{7}$$

Отсюда необходимо вытекает, что

$$2\pi pi-i\alpha\varkappa+\eta_0=0,\tag{8}$$

$$\{\eta_k(e^{i\alpha k}-1)^{-1}\}_{k=\pm1,\,\pm2,\cdots}\in l_1,$$

что совпадает с условиями 3)—4), при этом ветвь логарифма в 3) определяется равенством $\ln a(t)=\ln a(t)-2\pi pi$. Отметим, что из (8) числа p и $\varkappa$ определяются однозначно вследствие иррациональности $\frac{\alpha}{2\pi}$.

Достаточность. Пусть условия 1)—4) выполнены. Тогда система (7), а с нею и уравнения (6) и (5) разрешимы. Единственное решение имеет вид

$$\varphi(t)=ct^{\varkappa}e^{\gamma(t)},$$

где

$$\gamma(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{e^{i\alpha k}-1}\left(\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\ln a(\tau)}{\tau^{k+1}}\,d\tau\right)t^k,$$

---

* В силу иррациональности $\frac{\alpha}{2\pi}$ условие 3) теоремы может быть выполнено лишь для одной ветви $\ln a(t)$. Что касается условия 4), то оно, очевидно, не зависит от выбора ветви.

$$\varkappa = -\frac{1}{2\pi\alpha}\int\limits_{|t|=1}\frac{\ln a(t)}{t}\,dt$$

при выборе ветви согласно условию (8), c—произвольная постоянная. Теорема доказана.

Отметим частный случай, когда $a(t) = a = \mathrm{const}$. Тогда, в силу теоремы 1, нетривиальное решение существует лишь при $a = e^{i\alpha n}$, $n = 0, \pm 1, \cdots$.

Перейдем к исследованию неоднородного уравнения (1) при $\frac{\alpha}{2\pi}$ иррациональном. Заметим для этого, что непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Для того чтобы функция $a(t)$ допускала „факторизацию со сдвигом“ (4) при иррациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1)—4) теоремы 1. При выполнении этих условий функция $v(t)$ в (4) определяется единственным образом (с точностью до постоянного множителя): $v(t) = t^{\varkappa} e^{\gamma(t)}$.*

Следствие показывает, что при выполнении условий 1)—4) теоремы неоднородное уравнение (1) может быть исследовано до конца. Действительно, представляя $a(t)$ в виде (4), имеем

$$\frac{\varphi(te^{i\alpha})}{v(te^{i\alpha})} - \frac{\varphi(t)}{v(t)} = \frac{f(t)}{v(te^{i\alpha})}.$$

Обозначив

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{v(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{v(t\,e^{i\alpha})},$$

получим „задачу о скачке“ $\psi(te^{i\alpha}) - \psi(t) = g(t)$. Нетрудно видеть, что необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$g_0 = 0, \quad \left\{\frac{g_n}{e^{i\alpha n} - 1}\right\}_{n=\pm 1, \pm 2, \cdots} \in l_1,$$

где $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g_k t^k = g(t)$. Второе из этих условий показывает, что образ оператора A не замкнут в W. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)—4) теоремы 1. Для того чтобы неоднородное уравнение (1) было разрешимо в W необходимо и достаточно, чтобы*

1) $$\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)}{tv(te^{i\alpha})}\,dt = 0,$$

2) $$\left\{(e^{i\alpha n} - 1)^{-1}\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}\,v(te^{i\alpha})}\right\}_{n=\pm 1, \pm 2, \cdots} \in l_1,$$

где $v(t)$ — *решение задачи* (4). *При выполнении этих условий решение задачи* (1) *имеет вид*

$$\varphi(t) = cv(t) + v(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{e^{i\alpha n} - 1} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau^{n+1} v(\tau e^{i\alpha})}. \tag{9}$$

Заметим, что условие 1) теоремы 2 представляет собой условие ортогональности $(f, \psi) = \int\limits_{|t|=1} f(t)\,\psi(t)\,dt = 0$ единственному нулю $\psi(t)$ транспонированного оператора

$$(A^{\tau}\psi)(t) = e^{-i\alpha}\,\psi(te^{-i\alpha}) - a(t)\,\psi(t).$$

Следуя идеям, использованным в работах [5]—[8], получим для $f(t)$ достаточные условия, при которых уравнение (1) имеет решение.

Известно, что почти все иррациональные числа медленно приближаются рациональными. Именно, имеет место следующий факт ([5]—[6]). Пусть $\varepsilon > 0$, почти для всех $\omega \in [0, 2\pi]$ существует постоянная $K = K(\omega)$ такая, что $\left|\omega - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{n^{2+\varepsilon}}$ для любых целых m и n. Класс таких ω содержит, в частности, все алгебраические иррациональные числа (см. [9], стр. 262). Отсюда вытекает ([6], стр. 30), что ряды вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{g_n}{e^{i\alpha n} - 1}$$

сходятся абсолютно для почти всех α, если только

$$g_n = O\left(\frac{1}{|n|^{1+\delta}}\right), \ \delta > \varepsilon > 0.$$

Следовательно, условие 2) теоремы 2 будет выполнено, если, например, функция $\frac{f(t)}{v(t\,e^{i\alpha})}$ имеет вторую ограниченную производную. Мы приходим к следующему выводу.

Пусть $\frac{\alpha}{2\pi}$ — *алгебраическое иррациональное число (или трансцендентное число, медленно приближаемое рациональными). Если функция* $\frac{f(t)}{v(t\,e^{i\alpha})}$ *имеет ограниченную вторую производную и среднее значение этой функции по окружности* $|t| = 1$ *равно нулю, то для* $a(t)$, *удовлетворяющих условиям* 1)—4) *теоремы 1 уравнение* (1) *разрешимо и его общее решение имеет вид* (9).

2. Случай вырождения $\sigma(t)$ при рациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$

Предполагаем, что $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{m}$ рационально, $(r, m) = 1$ и $\sigma(t) \equiv 0$, т. е.

$$a(t)\,a(te^{i\alpha})\cdots a(te^{i\alpha(m-1)})\equiv 1,\ |t|=1. \tag{10}$$

Из представления (10) следует, что

$$a(t)\neq 0,\ |t|=1 \text{ и } \operatorname{ind} a(t)=0.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Для того чтобы при рациональном* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *функция* $a(t)$ *допускала „факторизацию со сдвигом"* (4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (10).

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Из (10) следует, что существует точка t_0 такая, что $a(t_0)=1$. Выберем ветвь $\ln a(t)$ так, чтобы $\ln a(t_0)=0$. Обозначим $\ln a(t)=b(t)=$ $=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k t^k \in W$. Нетрудно видеть, что при указанном выборе ветви справедливо соотношение

$$b(t)+b(te^{i\alpha})+\cdots+b(te^{i\alpha(m-1)})\equiv 0$$

или

$$b_k(1+e^{i\alpha k}+\cdots+e^{i\alpha(m-1)k})=0,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots.$$

Отсюда следует, что $b_k=0$ для k, кратных m. Но тогда разрешима в l_1 система

$$u_k(e^{i\alpha k}-1)=b_k,\ k=0,\ \pm 1,\cdots,$$

а, следовательно, разрешимо в W уравнение

$$u(te^{i\alpha})-u(t)=b(t),\ u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k t^k,$$

при этом $u_k=b_k(e^{i\alpha k}-1)^{-1}$ для $k\neq lm$, $l=0, \pm 1,\cdots$ и u_k выбирается произвольно при k кратном m, лишь бы $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|u_k|<\infty$. Введем функцию $v(t)=e^{u(t)}$. Очевидно, $v(t)\in W$ и $v(t)\neq 0$, $|t|=1$. Функция $v(t)$ и есть решение задачи „факторизации со сдвигом".

Замечание. В отличие от факторизации при иррациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$, решение которой $v(t)$ определялось единственным образом, факторизация при рациональном $\frac{\alpha}{2\pi}$ имеет бесчисленное множество решений. При этом функцию $v(t)$ всегда можно найти с любым наперед заданным индексом (за счет подбора u_k при $k=lm$, $l=0, \pm 1,\cdots$). Например, положив $|u_0|>2\sum_{j\neq lm}|b_j|\,|1-e^{i\alpha j}|^{-1}$ и $u_k=0$ для $k=\pm m, \pm 2m,\cdots$, получим $\operatorname{ind} v(t)=0$.

Переходим к исследованию уравнения (1). При выполнении условия (10) представим функцию $a(t)$ в виде (4), что возможно согласно теореме 3.

Имеем

$$\frac{\varphi(te^{i\alpha})}{v(te^{i\alpha})}-\frac{\varphi(t)}{v(t)}=\frac{f(te^{i\alpha})}{v(te^{i\alpha})},\ |t|=1.$$

Обозначив, как и в п° 1

$$\frac{\varphi(t)}{v(t)}=\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k t^k,\ \frac{f(t)}{v(t\,e^{i\alpha})}=g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k t^k,$$

приходим к системе $\psi_k(e^{i\alpha k}-1)=g_k$, $k=0, \pm1,\cdots$, откуда $\psi_k=(e^{i\alpha k}-1)^{-1}g_k$ при $k\neq jm$, $j=0, \pm1,\cdots$, и ψ_k произвольно при k, кратных m, если выполнены необходимые и достаточные условия разрешимости: $g_k=0$, $k=0, \pm m,\cdots$. Тем самым получена следующая

Теорема 4. *Оператор A нормально разрешим в кольце W и оба его дефектные числа бесконечны. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $A\varphi=f$ имеют вид*

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{f(t)\,dt}{t^{k+1}v(te^{i\alpha})}=0,\ k=0,\ \pm m,\ \pm2m,\cdots.$$

При выполнении этих условий решение уравнения имеет вид

$$\varphi(t)=v(t)\left[\sum_{k\neq0,\pm m,\cdots}\left(\frac{g_k}{e^{i\alpha k}-1}\right)t^k+\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_j t^{mj}\right],$$

где $\{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность из l_1.

Замечание. Аналог теоремы 4 имеет место для дискретного уравнения (2) в пространствах l_p, $1\leqslant p<\infty$ и c_0.

Ростовский государственный
университет

Поступило 11.VI.1970

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ, Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. $\psi(x+\alpha)-b(x)\psi(x)=g(x)$ *ֆունկցիոնալ հավասարման մասին (ամփոփում)*

$(A\varphi)(t)\equiv\varphi(te^{i\alpha})-a(t)\varphi(t)=f(t), |t|=1$ *ֆունկցիոնալ հավասարումը դիտարկվում է այն դեպքերում, երբ* $\frac{\alpha}{2\pi}$*-ն իռացիոնալ է կամ* $\frac{\alpha}{2\pi}$*-ն այնպիսի ռացիոնալ թիվ է, որ վերոհիշյալ հավասարման սիմվոլը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝*

$$\sigma(t)\equiv1-a(t)\,a(te^{i\alpha})\cdots a(te^{i\alpha(m-1)})\equiv0,\ \frac{\alpha}{2\pi}=\frac{r}{m},\ |t|=1.$$

Ցույց է տրվում, որ երկու դեպքերում էլ օպերատորը նետերյան չէ։ Առաջին դեպքում A օպերատորը ունի անվերջ α-խարակտերիստիկա, երկրորդ դեպքում՝ ոչ-փակ պատկեր։ Ուսումնասիրությունները հենվում են $a(t)=\frac{v(te^{i\alpha})}{v(t)}$ *— ի «ֆակտորիզացիայի» վրա։ Եթե $a(t)$-ն ֆակտորիզացվում է, ապա ոչ-ինքնահամալուծ հավասարումը լուծվում է մինչև վերջ։*

N. K. KARAPETIANTS, S. G. SAMKO. *On a functional equation* $\psi(x+a) - b(x)\psi(x) = g(x)$ (summary)

A functional equation $(A\varphi)(t) \equiv \varphi(te^{i\alpha}) - a(t)\varphi(t) = f(t)$, $|t| = 1$, is considered in the case $\sigma(t) = 1 - a(t)\, a(te^{i\alpha}) \cdots a(te^{i\alpha(m-1)}) \equiv 0$, $|t| = 1$, if $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{m}$ is rational and in the case of irrational $\frac{\alpha}{2\pi}$. It is shown that in the both cases the operator A is not uotherian. In the first case the operator has an infinite L-characteristic, in the second case it has an unclosed image. The investigation is based on the „factorisation" of $a(t) > \frac{v(te^{i\alpha})}{v(t)}$. If $a(t)$ my be factorised, the nonhomogeneous equation permits complete solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Литвинчук.* Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными, ИАН СССР, сер. матем., 31, № 3, 1967, 563—586.
2. *Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН, XXIII, 3, 1968, 68—121.
3. *Ф. Д. Гахов.* Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши, Диф. уравнения, 1966, II, № 4, 1966, 533—543.
4. *А. Я. Хинчин.* Цепные дроби, М., 1935.
5. *A. Wintner.* The linear difference equations of first order for angular variables, Duke Math. Journ., 12, № 3, 1945, 445—449.
6. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 1, 1961, 21—86.
7. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движений в классической и небесной механике, УМН, XVIII, вып. 6 (114), 1963, 91—192.
8. *Ю. Мозер.* О кривых, инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь, Сб. переводов Математика, 6:5, 1962, 51—67.
9. *А. А. Бухштаб.* Теория чисел, Учпедгиз, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 5, 1970 Математика

В. П. ГРОМОВ

К ТЕОРИИ КРАТНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

§ 1. Введение

В последние десятилетия в различных областях комплексного анализа все чаще и чаще появляются кратные последовательности полиномов Дирихле, а также и кратные ряды Дирихле. Так, например, одним из основных достижений интенсивно развивающейся общей теории дифференциальных уравнений в частных производных является доказательство аппроксимационных теорем для однородных линейных уравнений как конечного так и бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Эти теоремы показывают, что решения таких уравнений могут быть представлены в виде предела последовательности полиномов Дирихле вида

$$\Sigma\, d(z)\, e^{(\lambda,\, z)},$$

где (λ) — нули характеристической функции уравнения, а $d(z)$ — многочлены (см. [1], [2]).

В работах [3], [4] изучались кратные последовательности полиномов Дирихле. Там, в частности, устанавливается, что если такая последовательность равномерно сходится в „достаточно большой" области, то предельной функции ставится в соответствие единственным образом кратный ряд Дирихле.

Наконец, в последние годы появились работы [5], [6], посвященные вопросам представления функций многих комплексных переменных, голоморфных в тех или иных областях, посредством кратных рядов Дирихле.

На фоне этих работ естественно появляется необходимость в построении общей теории кратных рядов Дирихле.

Настоящая работа посвящена исследованию кратных рядов Дирихле в случае положительных показателей $\{\lambda_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n_1 + \cdots + n_p \to \infty} \frac{\ln (n_1 + \cdots + n_p)}{\lambda_{n_1}^{(1)} + \cdots + \lambda_{n_p}^{(p)}} = 0.$$

Здесь, в частности, указывается естественный геометрический подход к определению понятия гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости и систем сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле. Устанавливается аналитическое соотношение, связывающее системы сопряженных абсцисс сходимости, коэффициентов и показателей ряда, и представляющее собой необходимое и достаточное условие того, чтобы система вещественных чисел являлась системой сопряженных абсцисс сходимости. Дается полная геометрическая характеристика гиперповерхностей сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле.

§ 2. Кратные ряды Дирихле

Пусть

$$\{\lambda_n^{(i)}\},\ 0 < \lambda_1^{(i)} < \lambda_2^{(i)} < \cdots \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

— последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\ln |n|}{|\lambda_{(n)}|} = 0, \tag{1}$$

где $|n| = n_1 + \cdots + n_p$, $|\lambda_{(n)}| = \lambda_{n_1}^{(1)} + \cdots + \lambda_{n_p}^{(p)}$.

Рассмотрим ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{(n)} d_{(n)}\, e^{(\lambda_{(n)},\, z)}. \tag{2}$$

Здесь $d_{(n)}$ — комплексные числа, $(n) = (n_1, \cdots, n_p)$, $n_i = 1, 2, \cdots$; $(i = 1, 2, \cdots, p)$; $(z) = (z_1, \cdots, z_p) \in c^p$, $(\lambda_{(n)}, z) = \lambda_{n_1}^{(1)} z_1 + \cdots + \lambda_{n_p}^{(p)} z_p$.

Лемма Абеля. Пусть

$$|d_{(n)}\, e^{(\lambda_{(n)},\, z^0)}| < M\ (n_1, \cdots, n_p = 1, 2, \cdots),$$

где $(z^0) = (z_1^0, \cdots, z_p^0) \in c^p$.
Тогда ряд (2) сходится абсолютно в области

$$Q\colon \{\mathrm{Re}\,(z_i) < \mathrm{Re}\,(z_i^0)\ (i = 1, 2, \cdots, p)\}.$$

На любом компакте $K \in Q$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть $(z) \in Q$, тогда

$$|d_{(n)}\, e^{(\lambda_{(n)},\, z)}| \leqslant M \exp\{(\lambda_{(n)},\ \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Re}\,(z^0))\} \leqslant M e^{-\delta|\lambda_{(n)}|},$$

где $\delta = \min(\delta_1, \cdots, \delta_p)$, $\delta_i = \mathrm{Re}\,(z_i^0) - \mathrm{Re}\,(z_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$.

Из этого неравенства в силу (1) вытекают все утверждения леммы.

Определение 1. Множество $D \in C^p$ называется областью сходимости ряда Дирихле (2), если ряд сходится абсолютно в окрестности каждой точки $(z) \in D$.

В p-мерном вещественном пространстве R^p определим множество B всех тех точек $(x) = (x_1, \cdots, x_p)$, координаты которых являются абсциссами точек абсолютной сходимости ряда (2).

Исходя из определения B и леммы Абеля, получаем следующие свойства множества B.

1) Если имеется хотя бы одна точка $(z) \in c^p$, в которой члены ряда (2) по модулю ограничены, то множество B непусто.

2) Множество B—октантообразно, т. е., если $(x') = (x_1', \cdots, x_p') \in B$, то B принадлежит весь гипероктант $\{x_i < x_i'\ (i = 1, 2, \cdots, p)\}$.

3) Множество B^0, состоящее из всех внутренних точек множества B, также непусто.

4) Множество B является выпуклым множеством.

Свойства 1), 2) и 3) непосредственно следуют из определения множества B. Докажем свойство 4).

Если $\mathbf{A} \geqslant 0$, $\mathbf{B} \geqslant 0$ и $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, то

$$\mathbf{A}^{\theta} \mathbf{B}^{1-\theta} \leqslant (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\theta} (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{1-\theta} = \mathbf{A}+\mathbf{B}.$$

Пусть теперь (x') и $(x'') \in B$, тогда

$$|d_{(n)}|\, e^{(\lambda(n),\, x'\theta + x''(1-\theta))} = [\,|d_{(n)}|\, e^{(\lambda(n), x')}]^{\theta} [|d_{(n)}|\, e^{(\lambda(n), x'')}]^{1-\theta} \leqslant$$

$$\leqslant |d_{(n)}|\, e^{(\lambda(n), x')}) + |d_{(n)}|\, e^{(\lambda(n), x'')}.$$

Следовательно, вместе с двумя точками (x') и (x'') множеству B принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Обозначим через G — множество точек $(x) \in R^p$, координаты $(x_1, \cdots, x_p)$ которых представляют собой абсциссы точек $(z) \in c^p$, в которых члены ряда (2) ограничены по модулю. Очевидно, что $B^0 \subset G$. Кроме этого из леммы Абеля следует, что $B^0 = G^0$, где G^0 — множество внутренних точек множества G.

Итак B — выпуклая октантообразная область. Совокупность граничных точек области B^0 образует некоторую выпуклую гиперповерхность θ, которая делит все пространство R^p на две части. Одной принадлежат точки $(x_1, \cdots, x_p) \in B^0$, являющиеся совокупностью абсцисс координат точек $(z) \in c^p$ абсолютной сходимости ряда (2). Другой принадлежат точки $(x_1, \cdots, x_p) \notin B$, координаты которых являются абсциссами координат точек $(z) \in c^p$, в которых ряд (2) не сходится (абсолютно); в этих точках члены ряда (2) по модулю неограничены.

Поверхность θ назовем гиперповерхностью сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле (2).

Координаты $(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_p)$ точек поверхности сопряженных абсцисс сходимости ряда обладают следующим свойством: если $(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_p) \in \theta$, то в области

$$Q_1\colon \{\operatorname{Re}(z_i) < \overline{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p)\}$$

ряд (2) сходится абсолютно, и ни в одной точке области

$$Q_2\colon \{\operatorname{Re}(z_i) > \overline{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p)\}$$

он не сходится (абсолютно).

Систему вещественных чисел $(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_p)$, обладающую таким свойством, будем называть системой сопряженных абсцисс сходимости ряда (2). Таким образом, координаты каждой точки $(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_p)$ гиперповерхности θ представляют собой систему сопряжённых абсцисс сходимости ряда Дирихле.

З а м е ч а н и е 1. Понятие гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле в менее общей форме и на основании другого (негеометрического) подхода, вводилось нами ранее в работах [3], [4], [7].

Введенное выше понятие гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле и ее свойства позволяют сформулировать следующее предложение, характеризующее область сходимости ряда Дирихле.

Теорема 1. *Областью сходимости ряда Дирихле* (2) *является выпуклая трубчатая область* $T_B = B^0 + iR^p$, *основание которой представляет собой выпуклое октантообразное множество, граница* 0 *(гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда) которого обладает свойством: если* $(\bar{x}) = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p) \in 0$, *то ряд* (2) *сходится абсолютно в области* $\{\mathrm{Re}\,(z_i) < \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \cdots, p)\}$ *и расходится в области* $\{\mathrm{Re}\,(z_i) > \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \cdots, p)\}$.

Замечание 2. Из определения систем сопряженных абсцисс сходимости ряда вытекает наличие функциональной зависимости $\chi[\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p] = 0$ между ними. Полагая в этом соотношении $\mathrm{Re}\,(z_i) = \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \cdots, p)$, мы получим уравнение $\chi[\mathrm{Re}\,(z_1), \cdots, \mathrm{Re}\,(z_p)] = 0$, определяющее границу области сходимости T_B ряда (2).

Определение 2. Верхние грани значений $\bar{x}_i$ — величины X_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$, назовем максимальными абсциссами сходимости ряда (2).

Очевидно гиперпризма $\{\mathrm{Re}\,(z_i) < X_i \ (i = 1, 2, \cdots, p)\}$ является наименьшей, содержащей область сходимости ряда (2).

Заметим, что гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда (2) может содержать лучи, параллельные координатным осям. В этом случае среди сопряженных абсцисс сходимости в системе $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$ может быть число, например $\bar{x}_i$, обладающее свойством: при замене $\bar{x}_i$ на большее рассматриваемая система перестает быть системой сопряженных абсцисс сходимости. Число $\bar{x}_i$, обладающее таким свойством, назовем крайнесопряженной абсциссой в данной системе $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$.

Определение 3. Если в системе $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p) \in 0$ каждое $\bar{x}_i$ является крайнесопряженной абсциссой, то такую систему назовем системой крайнесопряженных абсцисс сходимости ряда (2).

Замечание 3. Здесь и ниже рассматривается только абсолютная сходимость рядов Дирихле. Понятие расходимости в точке эквивалентно тому, что в этой точке ряд абсолютно не сходится.

Имеется тесная связь между коэффициентами, показателями и системами сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле. Эта связь устанавливается следующим предложением, являющимся одним из основных в теории кратных рядов Дирихле.

Теорема 2. *Для того чтобы система вещественных чисел* $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$ *являлась системой сопряженных абсцисс сходимости ряда* (2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{|n| \to \infty}} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$ — система сопряженных абсцисс сходимости ряда (2), тогда для $x_i < \bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(\alpha, \lambda_{(n)})}$$

сходится и, следовательно

$$|d_{(n)}| < \exp\{-(\alpha, \lambda_{(n)})\}, \quad n_1 + \cdots + n_p > N_1(\alpha).$$

Поэтому

$$|d_{(n)}| e^{(\bar{x}, \lambda_{(n)})} < \exp\{(\bar{x} - \alpha, \lambda_{(n)})\} < e^{\delta |\lambda_{(n)}|},$$

где $(\bar{x} - \alpha, \lambda_{(n)}) = (\bar{x}_1 - \alpha_1)\lambda_{n_1}^{(1)} + \cdots + (\bar{x}_p - \alpha_p)\lambda_{n_p}^{(p)}$,

$$\delta = \max\{\delta_1, \cdots, \delta_p\}, \quad \delta_i = \bar{x}_i - \alpha_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p).$$

Отсюда

$$\frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < \delta, \quad n_1 + \cdots + n_p > N(\delta).$$

Так как числа $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, p)$ можно выбирать как угодно близкими к числам $\bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, то

$$A = \overline{\lim_{|n| \to \infty}} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} \leqslant 0.$$

Покажем, что A меньше нуля быть не может. Действительно, пусть $A < 0$, тогда для достаточно малого $q > 0$ такого, что $A < -q < 0$, имеем

$$\frac{\ln |d_{(n)}| + (\bar{x}, \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < -q, \quad n_1 + \cdots + n_p > N(q).$$

Отсюда

$$d_{(n)} e^{(\bar{x} + \varepsilon, \lambda_{(n)})} < e^{-\varepsilon |\lambda_{(n)}|},$$

$$\varepsilon = \frac{q}{2}, \quad n_1 + \cdots + n_p > N(\varepsilon).$$

Из этого неравенства в силу (1) следует, что ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)} \exp\{(\bar{x} + \varepsilon, \lambda_{(n)})\}$$

сходится. Но это невозможно, так как $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$ — система сопряженных абсцисс сходимости ряда (2). Значит наше предположение, что $A < 0$, неверно. Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что если система чисел $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$ удовлетворяет условию (3), то ряд (2) сходится абсолютно в области

$$Q_1: \{\operatorname{Re}(z_i) < \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p)\}$$

и расходится в каждой точке области

$$Q_2: \{\operatorname{Re}(z_i) > \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p)\}.$$

Пусть $(z)\in Q_1$, положим

$$\bar{x}_i - \operatorname{Re}(z_i) = 2\delta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p),$$

$$\delta = \min(\delta_1, \cdots, \delta_p).$$

Согласно (3) имеем

$$|d_{(n)}|\, e^{(\bar{x},\, \lambda(n))} < e^{\varepsilon |\lambda(n)|}, \quad n_1 + \cdots + n_p > N(\delta).$$

Отсюда, принимая во внимание (1), получаем что

$$|d_{(n)}\, e^{(z,\, \lambda(n))}| < \exp\{-(\lambda_{(n)}, \bar{x} - \operatorname{Re}(z) + \delta)\} <$$

$$< e^{-\varepsilon |\lambda(n)|} < e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}\ln|n|} = \frac{1}{|n|^{p+1}},$$

$$|n| = n_1 + \cdots + n_p > N_0,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\delta}{p+1}(\lambda_{(n)},\ x - \operatorname{Re}(z) + \delta) = \sum_{l=1}^{p} \lambda_{n_l}^{(l)}\, [\bar{x}_l - \operatorname{Re}(z_l) + \delta].$$

Следовательно, ряд (2) сходится абсолютно в области Q_1.

Пусть теперь $(z)\in Q_2$, положим

$$\delta_l = \operatorname{Re}(z_l) - \bar{x}_l \quad (i = 1, 2, \cdots, p), \quad \delta = \min(\delta_1, \cdots, \delta_p).$$

В силу условий теоремы существует подпоследовательность $(\tilde{n}) = (\tilde{n}_1, \cdots, \tilde{n}_p)$ такая, что

$$d_{(\tilde{n})}\, e^{(\bar{x},\, \lambda_{(\tilde{n})})} > e^{-\delta|\lambda_{(\tilde{n})}|}.$$

Отсюда

$$|d_{(\tilde{n})}\, e^{(z,\, \lambda_{(\tilde{n})})}| > \exp\{(\lambda_{(\tilde{n})},\ \operatorname{Re}(z) - \bar{x} - \delta)\} \geqslant 1.$$

Из этого неравенства заключаем, что ряд (2) в области Q_2 не сходится. Теорема доказана полностью.

Приведем некоторые примеры.

1° Областью сходимости ряда

$$\sum_{(n)} \exp(n,\ z)$$

является трубчатая область $\{\operatorname{Re}(z_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)\}$. Граница гипероктанта $\{x_i < 0 \ (i = 1, 2, \cdots, p)\}$ представляет собой гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости ряда.

Формула (3) очевидна для каждой системы $\{\bar{x}_i \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, p)\}$, в которой хотя бы одно из чисел $\bar{x}_l$ равно нулю. Система $(0, 0, \cdots, 0)$ — единственная система крайнесопряженных абсцисс сходимости ряда.

2° Область сходимости ряда

$$\sum_{(n)} e^{-n_1} e^{-n_2^2} \cdots e^{-n_p^2} e^{(n,z)}$$

определяется условием: $\mathrm{Re}\,(z_i) < 1$.

Уравнение $x_1 = 1$ $(z_1 = x_1 + iy_1)$ определяет гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости. Формула (3)

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{n_1(\bar{x}_1 - 1) + n_2(\bar{x}_2 - n_2) + \cdots + n_p(\bar{x}_p - n_p)}{n_1 + \cdots + n_p} = 0$$

очевидно, справедлива для каждой системы вида $(1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_p)$, $-\infty < \bar{x}_i < +\infty$ $(i = 2, 3, \cdots, p)$.

Отметим, что рассматриваемый ряд не имеет систем крайнесопряженных абсцисс сходимости.

3°. Рассмотрим последовательность точек $\{\lambda_n^{(1)}, \cdots, \lambda_n^{(p)}\} \in R^p$, $n = 1, 2, \cdots$ с положительными координатами $\lambda_n^{(i)}$, удовлетворяющими условиям

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n^{(1)} + \cdots + \lambda_n^{(p)}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(i)}}{\lambda_n^{(k)}} = \tau_i \leqslant 1 \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, p).$$

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n^{(1)} z_1} \cdots e^{\lambda_n^{(p)} z_p}.$$

Системы сопряженных абсцисс сходимости этого ряда, согласно теореме 2, определяются формулой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |d_n| + \bar{x}_1 \lambda_n^{(1)} + \cdots + \bar{x}_p \lambda_n^{(p)}}{\lambda_n^{(1)} + \cdots + \lambda_n^{(p)}} = 0.$$

Это соотношение, в силу условий (4), представляет собой гиперплоскость

$$\tau_1 \bar{x}_1 + \cdots + \tau_p \bar{x}_p + c = 0, \quad c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |d_n|}{\lambda_n^{(k)}}, \tag{5}$$

которая является гиперплоскостью сопряженных абсцисс сходимости нашего ряда

Каждая точка $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_p)$ гиперплоскости (5) представляет собой систему крайнесопряженных абсцисс сходимости ряда. Выражение $\tau_1 \mathrm{Re}\,(z_1) + \cdots + \tau_p \mathrm{Re}\,(z_p) + c = 0$ определяет собой границу области сходимости ряда.

Теорема 2, устанавливающая связь между коэффициентами, показателями и сопряженными абсциссами сходимости, позволяет также найти основные характеристические свойства гиперповерхности сопряженных абсцисс сходимости ряда Дирихле. Именно справедлива

Теорема 3. *Пусть θ — некоторая гиперповерхность в R^p. Чтобы θ была гиперповерхностью сопряженных абсцисс сходимости* *ряда Дирихле вида* (2), *необходимо и достаточно чтобы она представляла собой границу выпуклой октантообразной области.*

Доказательство. Необходимость. Пусть θ — гиперповерхность сопряженных абсцисс сходимости некоторого ряда Дирихле вида (2), и пусть $(x_1', \cdots, x_p')$ и $(x_1'', \cdots, x_p'')$ — внутренние точки той области B, для которой θ является границей. Тогда

$$\overline{\lim_{|n| \to \infty}} \frac{\ln |d_{(n)}| + (x', \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < 0,$$

$$\overline{\lim_{|n| \to \infty}} \frac{\ln |d_{(n)}| + (x'', \lambda_{(n)})}{|\lambda_{(n)}|} < 0.$$

Умножая первое неравенство на ν, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, а второе — на $1 - \nu$ и складывая их, получим

$$\overline{\lim_{|n| \to \infty}} \frac{\ln |d_{(n)}| + (\lambda_{(n)}, \nu x' + (1 - \nu) x'')}{|\lambda_{(n)}|} < 0.$$

Это рассуждение показывает, что вместе с двумя точками множества B ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки, т. е. множество B представляет собой выпуклую область. Октантообразность множества B следует из свойств ряда Дирихле. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть θ является границей некоторой выпуклой октантообразной области $B \subset R^p$. Рассмотрим опорную функцию области B.

$$H_B(\alpha) = H_B(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) = \sup_{(x_1, \cdots, x_p) \in B} (x_1 \cos \alpha_1 + \cdots + x_p \cos \alpha_p).$$

Здесь $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ — углы, образованные выбранным лучом и осями координат. Не снижая общности, предположим, что точка $(0, 0, \cdots, 0) \in B$. Гиперповерхность θ, как граница выпуклой октантообразной области B, определяется в этом случае значениями функции $H_B(\alpha)$ при

$$\alpha_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, p).$$

Построим ряд

$$\sum_{(n)} d_{(n)} e^{(z, n)},$$

где

$$d_{(n)} = \exp \{-H_B(\alpha_1^{(n_1)}, \cdots, \alpha_p^{(n_p)}) \sqrt{\|n\|}\},$$

$$\alpha_i^{(n_i)} = \arccos \frac{n_i}{\sqrt{\|n\|}} \quad (i = 1, 2, \cdots, p), \quad \|n\| = n_1^2 + \cdots + n_p^2.$$

Нетрудно видеть, что ряд сходится абсолютно в некоторой трубчатой области, содержащей точку $(0, 0, \cdots, 0)$.

Из определения опорной функции области вытекает, что для каждой точки $(\bar{x}) \in 0$

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{\ln|d_{(n)}| + (\bar{x}, n)}{|n|} = \overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{(\bar{x}, n) - H_B(\alpha_1^{(n_1)}, \cdots, \alpha_p^{(n_p)}) \sqrt{|n|}}{|n|} =$$

$$= \overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{\bar{x}_1 (\cos \alpha_1^{(n_1)} + \cdots + \bar{x}_p \cos \alpha_p^{(n_p)} - H_B(\alpha_1^{(n_1)}, \cdots, \alpha_n^{(n_p)})}{\cos \alpha_1^{(n_1)} + \cdots + \cos \alpha_p^{(n_p)}} \leqslant 0. \qquad (6)$$

Так как $H_B(\alpha)$ — опорная функция выпуклой области, то для каждой точки $(\bar{x}) \in 0$ найдется такое направление $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, что

$$\bar{x}_1 \cos \alpha_1 + \cdots + \bar{x}_p \cos \alpha_p = H_B(\alpha).$$

Образуем такую последовательность векторов $(n_1, \cdots, n_p)$, что $\alpha_i^{(n_i)} \to \alpha_i$ для всех $i = 1, 2, \cdots, p$. Это, очевидно, всегда возможно*.

Так как опорная функция $H_B(\alpha)$ непрерывна, то для указанной последовательности векторов $(n_1, \cdots, n_p)$ будем иметь

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\bar{x}_1 \cos \alpha_1^{(n_1)} + \cdots + \bar{x}_p \cos \alpha_p^{(n_p)} - H_B(\alpha_1^{(n_1)}, \cdots, \alpha_p^{(n_p)})}{\cos \alpha_1^{(n_1)} + \cdots + \cos \alpha_p^{(n_p)}} = 0.$$

Отсюда и из неравенства [6] следует, что для точек $(\bar{x}) \in \theta$

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}} \frac{\ln|d_{(n)}| + \bar{x}_1 n_1 + \cdots + \bar{x}_p n_p}{n_1 + \cdots + n_p} = 0.$$

Теорема доказана полностью.

Московский энергетический институт

Поступило 20.X-1969

Վ. Պ. ԳՐՈՄՈՎ. Դիրիխլեյի կրկնակի շարքերի մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքը նվիրված է դրական ցուցիչներով Դիրիխլեյի կրկնակի շարքերին։ Մասնավորապես տրվում է երկրաչափական բնական մոտեցում հարակից զուգամիտության աբսցիսների հիպերմակերևույթի և հարակից զուգամիտության աբսցիսների սիստեմների սահմանման ժամանակ։ Ստացված է անալիտիկ կապ հարակից զուգամիտության աբսցիսների սիստեմների, գործակիցների և ցուցիչների միջև։ Լրիվ բնութագրված է, թե երբ իրական թվերի սիստեմը հանդիսանա Դիրիխլեյի շարքի հարակից զուգամիտության աբսցիսների սիստեմ։ Տրվում է Դիրիխլեյի շարքերի հարակից զուգամիտության աբսցիսների հիպերմակերևույթների երկրաչափական բնութագրումը։

V. P. GROMOV. *On the theory of multiple Dirichlet series* (summary)

We consider multiple Dirichlet series and derive a relation, which defines the surface of conjugate abscissas of convergence of the series. A complete geometrical characterisation of the surface of conjugate abscissas of convergence is proposed.

---

* В эту схему может не укладываться только случай, когда 0 —гиперплоскость. Но для этого случая ряд Дирихле легко строится непосредственно, см. пример 3°.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B. Malgrange.* Existence et approximation des solutions des éguations aux derivees particlles et des éguations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6, 1955—1956, 271.
2. *A. Martineau.* Equations differentielles d'ordre infini, Bull. Soc. math. France, 95, 1967, 109—154.
3. *В. П. Громов.* Ряды полиномов Дирихле многих комплексных переменных, ДАН СССР, 173, № 5, 1967, 999—1001.
4. *В. П. Громов.* О последовательностях полиномов Дирихле, Докл. научно-техн. конференции по итогам научно-исслед. работ за 1968—69 г., МЭИ, секц. матем., 1969, 18—25.
5. *В. П. Громов.* О представлении произвольных функций двух комплексных переменных двойными функциональными рядами типа рядов Дирихле, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 1968, 621—632.
6. *В. П. Громов.* О представлении целых функций двух комплексных переменных функциональными рядами типа рядов Дирихле, Изв. АН СССР, сер. матем., 1969.
7. *В. П. Громов.* Кратные ряды Дирихле, Сиб. мат. журнал, X, № 3, 1969, 522—536.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS