ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН
Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ ЦЕНА 50 Կ. к.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, tthe date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name he title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

К. А. АБГАРЯН

ОДНО ФОРМАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. В статье указывается метод формального преобразования системы дифференциальных уравнений

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t$ (ε — параметр),

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k A_k(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k B_k(\tau),$$
$$\det A_0(\tau) \neq 0 \quad (\tau \in [0, L]),$$

к системе, состоящей из несвязанных друг с другом линейных дифференциальных уравнений первого или более высокого порядка.

В принципе, такое преобразование можно было бы осуществить путем предварительного расщепления системы (1) на некоторое число независимых подсистем линейных дифференциальных уравнений первого порядка, используя известные методы формального расщепления систем вида (1)*, с последующим приведением каждой подсистемы к одному линейному дифференциальному уравнению соответствующего порядка. Способ, который предлагается ниже, позволяет непосредственно преобразовать систему (1) к расщепленной системе отдельных линейных дифференциальных уравнений.

2°. В этом пункте приводятся некоторые результаты теории матриц и линейных операторов в несколько своеобразной интерпретации, подчиненной интересам последующих разделов. Сформулированные здесь же леммы, легко следуют из общей теории, изложенной, например, в [3], но эти леммы содержат в себе ту информацию и в такой форме, в какой это необходимо для последующих разделов статьи. Расщепление системы (1) связано с возможностью разложения матрицы $U(\tau) = A_0^{-1}(\tau)\, B_0(\tau)$ на составляющие и с некоторыми свойствами матриц, участвующих в этом разложении.

---

* Расщеплению системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка на независимые подсистемы уравнений первого порядка посвящено большое количество работ. По этому вопросу см., например, монографии С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля, Л. Д. Николенко „Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений“, Киев, „Наукова думка“, 1966 г. и В. Вазова „Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений“, Москва, „Мир“, 1968 г., которые, кстати, содержат обширные библиографии, а также цитируемую ниже статью автора [2].

Пусть собственные числа матрицы U (порядка n) разбиты на p групп $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_k^{(\sigma)}$ $\left(\sigma = 1, \cdots, p; \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ так, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)}(\tau) - \lambda_j^{(s)}(\tau)| > c > 0 \tag{2}$$

$$(\sigma \neq s;\ i = 1, \cdots, k_\sigma;\ j = 1, \cdots, k_s;\ \tau \in [0, L]).$$

Тогда (см. [1, 2]) могут быть построены матрицы $K_\sigma(\tau)$, $\Lambda_\sigma(\tau)$, $M_\sigma(\tau)$ типа соответственно $n \times k_\sigma$, $k_\sigma \times k_\sigma$, $k_\sigma \times n$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$, дифференцируемые по τ столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица $U(\tau)$, такие, что

$$U = \sum_{\sigma=1}^{p} U_\sigma,\quad U_\sigma = K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma, \tag{3}$$

$$M_\sigma K_s = \begin{cases} E_{k_\sigma} & (s = \sigma), \\ 0 & (s \neq \sigma) \end{cases} \tag{4}$$

(E_r — единичная матрица порядка r).

Собственными числами каждой матрицы Λ_σ служат собственные числа матрицы U, включенные в соответствующую группу σ.

Матрицы $P_\sigma = K_\sigma M_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ являются проекционными $(P_\sigma^2 = P_\sigma)$ и обладают свойствами

$$P_\sigma P_s = 0\ (\sigma \neq s),\ \sum_{\sigma=1}^{p} P_\sigma = E_n,\ P_\sigma U = UP_\sigma = U_\sigma, \tag{5}$$

$$P_\sigma U_s = U_s P_\sigma = 0 \quad (s \neq \sigma).$$

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение n-мерное векторное пространство $\mathbf{R}$ и действующие в нем линейные операторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$, которым в некотором базисе $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_n$ отвечают соответственно матрицы U, P_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$. Эти операторы и матрицы связаны соотношениями

$$\mathbf{UE} = \mathbf{E}U,\ \mathbf{P}_\sigma \mathbf{E} = \mathbf{E}P_\sigma\ (\sigma = 1, \cdots, p), \tag{6}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_n)$.

Операторы $\mathbf{P}_\sigma$ являются проекционными, и для любого $\mathbf{g}$ из $\mathbf{R}$, как это следует из (5),

$$\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_s \mathbf{g} = 0 \quad (s \neq \sigma),\ \sum_{\sigma=1}^{p} \mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} = \mathbf{g}.$$

В соответствии с последними соотношениями пространство $\mathbf{R}$ расщепляется на p подпространств:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \cdots + \mathbf{R}_p,\ \mathbf{R}_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{R} \quad (\sigma = 1, \cdots, n).$$

Эти подпространства инвариантны относительно оператора $\mathbf{U}$. Действительно, пусть, например, $\mathbf{g} \in \mathbf{R}_\sigma$. Тогда, используя равенства (5) и (6) и учитывая, что вектор $\mathbf{g}$, как и любой другой вектор из R, можно представить в виде $\mathbf{g} = \mathbf{E}g$, где g — столбцевая матрица, составленная из координат вектора g в базисе $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_n$, последовательно получим

$$\mathbf{U}g = \mathbf{U}\mathbf{P}_\sigma \mathbf{E}g = \mathbf{E}UP_\sigma g = \mathbf{E}P_\sigma Ug = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{U}\mathbf{E}g \in \mathbf{R}_\sigma.$$

Следующая лемма устанавливает связь между аннулирующими многочленами* подпространств $\mathbf{R}_\sigma$ и матриц Λ_σ в разложении (3).

Лемма 1. *Всякий аннулирующий многочлен подпространства* $\mathbf{R}_\sigma$ *является аннулирующим многочленом и для матрицы* Λ_σ; *и обратно, всякий аннулирующий многочлен матрицы* Λ_σ *является аннулирующим многочленом и для подпространства* $\mathbf{R}_\sigma$.

Доказательство. Пусть $\varphi_\sigma(\lambda)$ — некоторый многочлен от λ. Учитывая, что $U^k P_\sigma = K_\sigma \Lambda_\sigma^k M_\sigma$, для любого вектора $\mathbf{g}$ из $\mathbf{R}$ будем иметь

$$\varphi_\sigma(\mathbf{U})\,\mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} = \varphi_\sigma(\mathbf{U})\,\mathbf{P}_\sigma \mathbf{E}g = \mathbf{E}\,\varphi_\sigma(U)\,P_\sigma g = \mathbf{E}\,K_\sigma \varphi_\sigma(\Lambda_\sigma)\,M_\sigma g. \qquad (7)$$

Если $\varphi_\sigma(\lambda)$ — аннулирующий многочлен подпространства $\mathbf{R}_\sigma$, то

$$\varphi_\sigma(\mathbf{U})\,\mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} = 0 \quad (\mathbf{g} \in \mathbf{R}), \qquad (8)$$

и, значит, согласно равенству (7)

$$\mathbf{E}K_\sigma\,\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma)\,M_\sigma\,g = 0.$$

Но последнее равенство может выполняться для любого $\mathbf{g}$ из $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0. \qquad (9)$$

Поэтому $\varphi_\sigma(\lambda)$ является аннулирующим многочленом матрицы Λ_σ.

И обратно, если $\varphi_\sigma(\lambda)$ — аннулирующий многочлен матрицы Λ_σ, то имеет место равенство (9) и, в силу (7), равенство (8) для любого вектора $\mathbf{P}_\sigma \mathbf{g} \in \mathbf{R}_\sigma$ $(\mathbf{g} \in \mathbf{R})$.

Следствие. Минимальные аннулирующие многочлены подпространства $\mathbf{R}_\sigma$ и матрицы Λ_σ совпадают.

Далее, если k_σ-мерное подпространство $\mathbf{R}_\sigma$-циклическое относительно оператора $\mathbf{U}$, а $\mathbf{n} = \mathbf{E}e$—порождающий вектор этого подпространства, то система векторов $\mathbf{n}, \mathbf{U}\mathbf{n}, \cdots, \mathbf{U}^{k_\sigma-1}\mathbf{n}$ линейно независима. Линейно независимой является также система столбцевых матриц $e, Ue, \cdots, U^{k_\sigma-1}e$. Можно показать, что существует такая матрица a_σ типа $k_\sigma \times 1$, что система $a_\sigma, \Lambda_\sigma a_\sigma, \cdots, \Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} a_\sigma$ также линейно независима. Более того, справедлива следующая

Лемма 2. *Для того чтобы* k_σ*-мерное подпространство* $\mathbf{R}_\sigma$, *инвариантное относительно оператора* $\mathbf{U}$, *было циклическим необходимо и достаточно существование столбцевой матрицы* a_σ *типа* $k_\sigma \times 1$, *которой отвечает линейно независимая система столбцевых матриц*

$$a_\sigma,\ \Lambda_\sigma a_\sigma, \cdots, \Lambda_\sigma^{k_\sigma-1} a_\sigma. \qquad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$H = (U^{k_\sigma-1}e \quad U^{k_\sigma-2}e \cdots Ue \quad e) \quad (e = P_\sigma e).$$

---

* Терминология, принятая в этом пункте, соответствует книге [3].

Используя разложение (3) и учитывая, что $M_s e = M_s P_\sigma e = 0$ $(s \neq \sigma)$, эту матрицу можно представить в виде

$$H = K_\sigma H_\sigma, \tag{11}$$

где

$$H_\sigma = (\Lambda_\sigma^{k_\sigma - 1} M_\sigma e \, \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} M_\sigma e \cdots \Lambda_\sigma M_\sigma e \quad M_\sigma e)$$

—квадратная матрица порядка k_σ.

Матрицы H и H_σ имеют один и тот же ранг, так как матрица K_σ состоит из линейно независимых столбцов. Используя это обстоятельство, лемма легко доказывается.

Необходимость. Пусть $\mathbf{R}_\sigma$ — циклическое подпространство, а $\mathbf{n} = \mathbf{E}e$ — его порождающий вектор. Тогда столбцы матрицы H линейно независимы. Значит линейно независимы и столбцы матрицы H_σ. Если принять

$$a_\sigma = M_\sigma e, \tag{12}$$

то, очевидно, система (10) также будет линейно независимой.

Достаточность. Допустим, что система (10), где a_σ — некоторая матрица типа $k_\sigma \times 1$, линейно независима. Тогда столбцы матрицы H также будут линейно независимыми, если в качестве e принять какое-нибудь ненулевое решение матричного уравнения (12). Ясно, что такое решение всегда существует и соответствующий вектор $\mathbf{n} = \mathbf{E}e$ принадлежит подпространству $\mathbf{R}_\sigma$. Значит k_σ-мерное инвариантное подпространство $\mathbf{R}_\sigma$ является циклическим. Лемма доказана.

3°. Теорема. *Пусть на сегменте* $[0, L]$ а) *матрицы* $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ *имеют производные по* τ *всех порядков*; б) *собственные числа матрицы* $U = A_0^{-1} B_0$ *разбиты на* p *групп при условии* (2) *и* в) *соответствующие этим группам инвариантные подпространства* $\mathbf{R}_1, \cdots, \mathbf{R}_p$ *являются циклическими подпространствами* n*-мерного пространства* $\mathbf{R}$. *Тогда формальное решение уравнения* (1) *может быть представлено в виде*

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \left[\tilde{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \tilde{\xi}_{2\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 2} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 2}} + \cdots + \tilde{\xi}_{k_\sigma \sigma}(\tau, \varepsilon) q_\sigma \right], \tag{13}$$

где q_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ — *скалярные функции, удовлетворяющие уравнениям*

$$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}} + \tilde{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{d^{k_\sigma - 1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma - 1}} + \cdots + \tilde{\alpha}_{k_\sigma - 1 \sigma}(\tau, \varepsilon) \frac{dq_\sigma}{dt} + \tilde{\alpha}_{k_\sigma}(\tau, \varepsilon) = 0 \tag{14}$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, p),$$

а $\tilde{\xi}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon)$, $\tilde{\alpha}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon)$ — *соответственно столбцевые матрицы и скалярные функции, представляемые формальными рядами*

$$\tilde{\xi}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_{j\sigma}^{[k]}(\tau), \quad \tilde{\alpha}_{j\sigma}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_{j\sigma}^{[k]}(\tau). \tag{15}$$

Доказательство. Подставим выражение (13) в (1), исключив

$\frac{d^{k_\sigma} q_\sigma}{dt^{k_\sigma}}$ — с помощью (14), и приравняем коэффициенты при q_σ, $\frac{dq_\sigma}{dt}$, $\cdots$

$\cdots$, $\frac{d^{k_\sigma-1} q_\sigma}{dt^{k_\sigma-1}}$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$. Получим

$$A\left(\varepsilon \frac{d\widetilde{\xi}_{j\sigma}}{d\tau} - \widetilde{\alpha}_{j\sigma}\widetilde{\xi}_{1\sigma} + \widetilde{\xi}_{j+1\sigma}\right) = \widetilde{B}\xi_{j\sigma} \tag{16}$$

$$(j = 1, \cdots, k_\sigma;\ \sigma = 1, \cdots, p;\ \widetilde{\xi}_{k_\sigma+1\sigma} \equiv 0).$$

Подставляя далее в (16) разложения матриц A и B по степеням ε и формальные ряды (15), получим, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε

$$\begin{aligned} &\xi_{j+1\sigma}^{[0]} = U\xi_{j\sigma}^{[0]} + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]}, \\ &\xi_{j+1\sigma}^{[1]} = U\xi_{j\sigma}^{[1]} + \alpha_{j\sigma}^{[1]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[1]} + d_{j\sigma}^{[0]}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\xi_{j+1\sigma}^{[k]} = U\xi_{j\sigma}^{[k]} + \alpha_{j\sigma}^{[k]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k]} + d_{j\sigma}^{[k-1]}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \tag{17}$$

$$(j = 1, \cdots, k_\sigma;\ \xi_{k_\sigma+1\sigma}^{[k]} \equiv 0).$$

Здесь

$$d_{j\sigma}^{[0]} = A_0^{-1}\,[B_1\,\xi_{j\sigma}^{[0]} + A_1\,(\alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} - \xi_{j+1\sigma}^{[0]})] - \frac{d\xi_{j\sigma}^{[0]}}{d\tau},$$

$$d_{j\sigma}^{[1]} = A_0^{-1}\Big[B_1\,\xi_{j\sigma}^{[1]} + B_2\,\xi_{j\sigma}^{[0]} + A_2\,(\alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} - \xi_{j+1\sigma}^{[0]}) +$$

$$A_1\left(\alpha_{j\sigma}^{[1]}\,\xi_{1\sigma}^{[\sigma]} + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\xi_{1\sigma}^{[1]} - \xi_{j+1\sigma}^{[1]} - \frac{d\xi_{j\sigma}^{[0]}}{d\tau}\right)\Big] + \alpha_{j\sigma}^{[1]}\,\xi_{1\sigma}^{[1]} - \frac{d\xi_{j\sigma}^{[1]}}{d\tau},$$

и вообще

$$d_{j\sigma}^{[k-1]} = A_0^{-1}\Big[B_1\,\xi_{j\sigma}^{[k-1]} + \cdots + B_k\,\xi_{j\sigma}^{[0]} + A_k\,(\alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} - \xi_{j+1\sigma}^{[0]}) +$$

$$+ A_{k-1}\left(\alpha_{j\sigma}^{[1]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[1]} - \xi_{j+1\sigma}^{[1]} - \frac{d\xi_{j\sigma}^{[0]}}{d\tau}\right) + \cdots$$

$$\cdots + A_1\left(\alpha_{j\sigma}^{[k-1]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]} + \cdots + \alpha_{j\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[k-1]} - \xi_{j+1\sigma}^{[k-1]} - \frac{d\xi_{j\sigma}^{[k-2]}}{d\tau}\right)\Big] +$$

$$+ \alpha_{j\sigma}^{[k-1]}\,\xi_{1\sigma}^{[1]} + \cdots + \alpha_{j\sigma}^{[1]}\,\xi_{1\sigma}^{[k-1]} - \frac{d\xi_{j\sigma}^{[k-1]}}{d\tau}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при соответствующем выборе членов рядов (15), матричные соотношения (17) выполняются тождественно.

Первое соотношение (17) в развернутом виде представляется так:

$$\begin{aligned} &\xi_{2\sigma}^{[0]} = U\xi_{1\sigma}^{[0]} + \alpha_{1\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]}, \\ &\xi_{3\sigma}^{[0]} = U\,\xi_{2\sigma}^{[0]} + \alpha_{2\sigma}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\xi_{k_\sigma}^{[0]} = U\xi_{k_\sigma-1\sigma}^{[0]} + \alpha_{k_\sigma-1}^{[0]}\,\xi_{1\sigma}^{[0]}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$0 = U\xi^{[0]}_{k_\sigma\sigma} + \alpha^{[0]}_{k_\sigma\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma}.$$

Равенства (18) умножим слева соответственно на $U^{k_\sigma-1}$, $U^{k_\sigma-2}, \cdots$ $\cdots$, U, E_n и сложим. Получим

$$(U^{k_\sigma} + \alpha^{[0]}_{1\sigma}\,U^{k_\sigma-1} + \cdots + \alpha^{[0]}_{k_\sigma-1\sigma}\,U + \alpha^{[0]}_{k_\sigma\sigma}\,E_n)\,\xi^{[0]}_{1\sigma} = 0. \tag{19}$$

Заменив последнее равенство системы (18) равенством (19), далее вместо этой системы будем рассматривать эквивалентную ей систему

$$\varphi_\sigma(U)\,\xi^{[0]}_{1\sigma} = 0, \tag{20}$$

$$\xi^{[0]}_{j+1\sigma} = U\xi^{[0]}_{j\sigma} + \alpha^{[0]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} \quad (j = 1,\ 2, \cdots, k_\sigma - 1),$$

где

$$\varphi_\sigma(\lambda) = \lambda^{k_\sigma} + \alpha^{[0]}_{1\sigma}\,\lambda^{k_\sigma-1} + \cdots + \alpha^{[0]}_{k_\sigma-1\sigma}\,\lambda + \alpha^{[0]}_{k_\sigma\sigma}.$$

Тем же путем преобразуем $k+1$-ое соотношение (17), которое в развернутом виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi^{[k]}_{2\sigma} &= U\xi^{[k]}_{1\sigma} + \alpha^{[k]}_{1\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{1\sigma}\,\xi^{[k]}_{1\sigma} + d^{[k-1]}_{1\sigma},\\
\xi^{[k]}_{3\sigma} &= U\,\xi^{[k]}_{2\sigma} + \alpha^{[k]}_{2\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{2\sigma}\,\xi^{[k]}_{1\sigma} + d^{[k-1]}_{2\sigma},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\xi^{[k]}_{k_\sigma\sigma} &= U\xi^{[k]}_{k_\sigma-1\sigma} + \alpha^{[k]}_{k_\sigma-1\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{k_\sigma-1\sigma}\,\xi^{[k]}_{1\sigma} + d^{[k-1]}_{k_\sigma-1\sigma},\\
0 &= U\,\xi^{[k]}_{k_\sigma\sigma} + \alpha^{[k]}_{k_\sigma\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{k_\sigma\sigma}\,\xi^{[k]}_{1\sigma} + d^{[k-1]}_{k_\sigma\sigma}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Умножим эти равенства слева соответственно на $U^{k_\sigma-1}$, $U^{k_\sigma-2}, \cdots$ $\cdots$, U, E_n и сложим. Будем иметь

$$(U^{k_\sigma} + \alpha^{[0]}_{1\sigma}\,U^{k_\sigma-1} + \alpha^{[0]}_{2\sigma}\,U^{k_\sigma-2} + \cdots + \alpha^{[0]}_{k_\sigma-1\sigma}\,U + \alpha^{[0]}_{k_\sigma\sigma}\,E_n)\,\xi^{[k]}_{1\sigma} =$$
$$= -(\alpha^{[k]}_{1\sigma}\,U^{k_\sigma-1} + \alpha^{[k]}_{2\sigma}\,U^{k_\sigma-2} + \cdots + \alpha^{[k]}_{k_\sigma-1\sigma}U + \alpha^{[k]}_{k_\sigma\sigma}\,E_n)\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + D^{[k-1]}_\sigma,$$

где

$$D^{[k-1]}_\sigma = -\sum_{\nu=1}^{k_\sigma} U^{k_\sigma-\nu}d_{\nu\sigma}.$$

Таким образом, вместо системы (21) можем рассматривать эквивалентную ей систему

$$\varphi_\sigma(U)\,\xi^{[k]}_{1\sigma} = -(\alpha^{[k]}_{1\sigma}\,U^{k_\sigma-1} + \alpha^{[k]}_{2\sigma}\,U^{k_\sigma]-2} + \cdots + \alpha^{[k]}_{k_\sigma-1}\,U + \alpha^{[k]}_{k_\sigma\sigma}\,E_n)\,\xi^{[0]}_{1\sigma} +$$
$$+ D^{[k-1]}_\sigma, \quad \xi^{[k]}_{j+1\sigma} = U\xi^{[k]}_{j\sigma} + \alpha^{[k]}_{j\sigma}\,\xi^{[0]}_{1\sigma} + \alpha^{[0]}_{1\sigma}\,\xi^{[k]}_{1\sigma} + d^{[k-1]}_{j\sigma} \tag{22}$$
$$(j = 1,\ 2, \cdots, k_\sigma - 1).$$

Покажем, как, используя полученные соотношения, построить члены рядов (15).

Положим

$$\xi^{[0]}_{1\sigma} = K_\sigma a_\sigma, \tag{23}$$

где a_σ — некоторая столбцевая матрица типа $k_\sigma \times 1$. Тогда первое равенство (20) с помощью (3) и (4) можно преобразовать к виду

$$K_\sigma \varphi_\sigma (\Lambda_\sigma)\, a_\sigma = 0. \tag{24}$$

Так как инвариантное подпространство R_σ, соответствующее группе σ собственных чисел матрицы U—циклическое, то минимальный аннулирующий многочлен этого подпространства является многочленом степени K_σ, коэффиценты которого определяются по формулам Вьета:

$$\psi_\sigma(\lambda) = \lambda^{k_\sigma} + \alpha_{1\sigma} \lambda^{k_\sigma - 1} + \cdots + \alpha_{k_\sigma - 1\sigma} \lambda + \alpha_{k_\sigma \sigma},$$

$$\alpha_{1\sigma} = -(\lambda_1^{(\sigma)} + \cdots + \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}),$$

$$\alpha_{2\sigma} = \lambda_1^{(\sigma)} \lambda_2^{(\sigma)} + \cdots + \lambda_{k_\sigma - 1}^{(\sigma)} \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{k_\sigma \sigma} = (-1)^{k_\sigma} \lambda_1^{(\sigma)} \cdot \cdots \cdot \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}.$$

Примем

$$\alpha_{j\sigma}^{[0]} \equiv \alpha_{j\sigma}.$$

Тогда $\varphi_\sigma(\lambda) \equiv \psi_\sigma(\lambda)$ и, значит, согласно лемме 1 $\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) = \psi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0$. В этих условиях равенство (24) выполняется тождественно.

Допустим ,что уже найдены $\xi_{j\sigma}^{[l]}$, $\alpha_{j\sigma}^{[l]}$ $(j = 1, \cdots, k_\sigma;\ i = 0, 1, \cdots, k-1)$. Определим $\xi_{j\sigma}^{[k]}$, $\alpha_{j\sigma}^{[k]}$ $(j = 1, \cdots, k_\sigma)$.

Пользуясь равенствами (3) и (23) и введя в рассмотрение блочные матрицы

$$K = (K_1 \cdots K_p),\ \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix},$$

первое равенство (22) можно представить в виде

$$K \varphi_\sigma (\Lambda) M \xi_{1\sigma}^{[k]} = -K_\sigma (\alpha_{1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} + \cdots$$
$$+ \alpha_{k_\sigma - 1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma \sigma}^{[k]} E_{k_\sigma})\, a_\sigma + D_\sigma^{[k-1]}.$$

Отсюда

$$\varphi_\sigma (\Lambda)\, Q_\sigma^{[k]} = -MK_\sigma (\alpha_{1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{[k_\sigma - 1]} + \alpha_{2\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} + \cdots \tag{25}$$
$$+ \alpha_{k_\sigma - 1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma \sigma}^{[k]} E_{k_\sigma})\, a_\sigma + MD_\sigma^{[k-1]}.$$

Здесь

$$Q_\sigma^{[k]} = M \xi_{1\sigma}^{[k]} = \begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ Q_{p\sigma}^{[k]} \end{pmatrix},\quad Q_{s\sigma}^{[k]} = M_s \xi_{1\sigma}^{[k]}. \tag{26}$$

Равенство (25) распадается на p независимых матричных равенств

$$\varphi_\sigma (\Lambda_s)\, Q_{s\sigma}^{[k]} = -M_s K_\sigma (\alpha_{1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 1} + \alpha_{2\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma^{k_\sigma - 2} + \cdots$$
$$+ \alpha_{k_\sigma - 1\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + \alpha_{k_\sigma \sigma}^{[k]} E_{k_\sigma})\, a_\sigma + M_s D_\sigma^{[k-1]} \quad (s = 1, \cdots, p). \tag{27}$$

При $s \neq \sigma$ $M_s K_\sigma = 0$, а $\varphi_\sigma(\Lambda_s)$, в силу условия (2),—невырожденная матрица. Поэтому

$$Q^{[k]}_{s\sigma} = \varphi^{-1}_\sigma(\Lambda_s)\, M_s D^{[k-1]}_\sigma \qquad (s \neq \sigma). \tag{28}$$

При $s = \sigma$ $M_\sigma K_\sigma = E_{k_\sigma}$, а $\varphi_\sigma(\Lambda_\sigma) = 0$. Поэтому

$$(\alpha^{[k]}_{1\sigma}\Lambda^{k_\sigma-1}_\sigma + \alpha^{[k]}_{2\sigma}\Lambda^{k_\sigma-2}_\sigma + \cdots + \alpha^{[k]}_{k_\sigma-1\sigma}\Lambda_\sigma + \alpha^{[k]}_{k_\sigma\sigma}E_{k_\sigma})\, a_\sigma = M_\sigma D^{[k-1]}_\sigma$$

или

$$H_\sigma \alpha^{[k]}_\sigma = M_\sigma D^{[k-1]}_\sigma, \tag{29}$$

где

$$H_\sigma = (\Lambda^{k_\sigma-1}_\sigma a_\sigma \Lambda^{k_\sigma-2}_\sigma a_\sigma \cdots a_\sigma), \qquad \alpha^{[k]}_\sigma = \begin{pmatrix} \alpha^{[k]}_{1\sigma} \\ \vdots \\ \alpha^{[k]}_{k_\sigma\sigma} \end{pmatrix}.$$

Так как подпространство R_σ — циклическое, то согласно лемме 2 при соответствующем выборе столбцевой матрицы a_σ, столбцы матрицы H_σ будут линейно независимы. Пусть a_σ выбрана из этого условия и столбцы матрицы H линейно независимы. Тогда H_σ как квадратная матрица с линейно независимыми столбцами — невырожденная матрица. Учитывая это, из (29) находим

$$\alpha^{[k]}_\sigma = H^{-1}_\sigma M_\sigma D^{[k-1]}_\sigma \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{30}$$

Неопределенной осталась лишь субматрица $Q^{[k]}_{\sigma\sigma}$ матрицы $Q^{[k]}_\sigma$. Из вышеизложенного ясно, что в качестве $Q^{[k]}_{\sigma\sigma}$ может быть взята произвольная нужное число раз дифференцируемая квадратная матрица порядка k_σ. В частности, можно принять $Q^{[k]}_{\sigma\sigma} = 0$.

Зная $Q^{[k]}_\sigma$, легко получить $\xi^{[k]}_{1\sigma}$ по формуле

$$\xi^{[k]}_{1\sigma} = K Q^{[k]}_\sigma. \tag{31}$$

Остальные столбцевые матрицы $\xi^{[k]}_{j\sigma}$ $(j = 2, 3, \cdots, k_\sigma)$ определяются соответствующими равенствами (22).

Итак, указанным путем можно последовательно определить члены рядов (15), с помощью которых представляется формальное решение уравнения (1) в форме (13), (14). Теорема доказана.

Ниже рассмотрим некоторые частные случаи.

4°. Случай простых собственных чисел матрицы U. Если в промежутке $[0, L]$ все собственные числа матрицы U остаются простыми, то, оставляя в каждой группе по одному собственному числу, будем иметь

$$|\lambda_\sigma(\tau) - \lambda_s(\tau)| \geqslant c > 0 \quad (s \neq \sigma;\ s, \sigma = 1, \cdots, n).$$

В соответствии с теоремой п. 3 решение системы (1) может быть представлено равенствами

$$x = \sum_{\sigma=1}^{n} \bar{\xi}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma, \quad \frac{dq_\sigma}{dt} + \bar{\alpha}_{1\sigma}(\tau, \varepsilon)\, q_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1, \cdots, n).$$

В формуле (23) в данном случае a_σ—скалярная величина. Положив $a_\sigma = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$, будем иметь

$$\xi_{\sigma}^{[0]} = K_{\sigma} \quad (\sigma = 1, \cdots, n).$$

Далее, так как теперь $\varphi_{\sigma}(\lambda) = \lambda - \lambda_{\sigma}$, то

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{\sigma}} M_s D_{\sigma}^{[k-1]} \quad (s \neq \sigma; \quad k = 1, 2, \cdots),$$

и

$$\xi_{\sigma}^{[k]} = \sum_{s \neq \sigma} \frac{P_s}{\lambda_s - \lambda_{\sigma}} D_{\sigma}^{[k-1]} + K_{\sigma} Q_{\sigma\sigma}^{[k]}.$$

Наконец $\lambda_{1\sigma}^{[0]} = -\lambda_{\sigma}$ и, поскольку $H_{\sigma} = a_{\sigma} = 1$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$, $\alpha_{\sigma}^{[k]} = = M_{\sigma} D_{\sigma}^{[k-1]}$.

5°. **Система уравнений с постоянными коэффициентами.** Если коэффициенты системы (1) не зависят от τ, то изложенный метод приводит к точному расщеплению системы (1) на независимые линейные дифференциальные уравнения меньшего порядка. Действительно, рассматривая систему

$$A \frac{dx}{dt} = Bx, \tag{32}$$

где A и B — постоянные матрицы порядка n $(\det A \neq 0)$, будем иметь следующее.

В данном случае $U = A^{-1}B$ — постоянная матрица с постоянными собственными числами. Поэтому K, Λ, M — также постоянные матрицы. Следовательно постоянными будут и величины исходного приближения $a_{j\sigma}^{[0]}$ и $\xi_{j\sigma}^{[0]}$. Учитывая это и полагая $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$ $(\sigma = 1, \cdots, p;\ k = 1, 2, \cdots \cdots)$, из (28) и (30) последовательно при $k = 1, 2, \cdots$ получим

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = 0, \quad \xi_{j\sigma}^{[k]} = 0, \alpha_{j\sigma}^{[k]} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Таким образом

$$\tilde{\xi}_{j\sigma} = \xi_{j\sigma}^{[0]}, \quad \tilde{a}_{j\sigma} = \alpha_{j\sigma}^{[0]} = \alpha_{j\sigma} \quad (\sigma = 1, \cdots, p;\ j = 1, \cdots, k_{\sigma}),$$

и поэтому решение системы (32) представляется в виде

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \left(\xi_{1\sigma}^{[0]} \frac{d^{k_{\sigma}-1} q_{\sigma}}{dt^{k_{\sigma}-1}} + \xi_{2\sigma}^{[0]} \frac{d^{k_{\sigma}-2} q_{\sigma}}{dt^{k_{\sigma}-2}} + \cdots + \xi_{k_{\sigma}\sigma}^{[0]} q_{\sigma} \right), \tag{33}$$

$$\frac{d^{k_{\sigma}} q_{\sigma}}{dt^{k_{\sigma}}} + \alpha_{1\sigma} \frac{d^{k_{\sigma}-1} q_{\sigma}}{dt^{k_{\sigma}-1}} + \cdots + \alpha_{k_{\sigma}-1\sigma} \frac{dq_{\sigma}}{dt} + \alpha_{k_{\sigma}\sigma} q_{\sigma} = 0. \tag{34}$$

Как видим, в данном случае преобразование (33) приводит к точному расщеплению системы (32) на независимые линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (34).

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 15.II.1969

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ. Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի մի ֆորմալ ձևափոխություն *(ամփոփում)*

Հոդվածում նկարագրվում է մի ձևական պրոցես, որը առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը բերում է ճեղքված տեսքի։

Ի տարբերություն ճեղքման հայտնի մեթոդներից այստեղ բերվում է մի մեթոդ, որը հնարավորություն է տալիս դիտարկվող սիստեմը բերել առաջին կամ ավելի բարձր կարգի իրարից անկախ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի, ընդ որում դրանցից յուրաքանչյուրը համապատասխանում է նախնական սիստեմի գործակիցների մատրիցի սեփական արժեքների մի որևէ մեկուսացված խմբի։

K. A. ABGARIAN. *A formal transformation of the system of linear differential equations* (summary)

A process of transforming the system of linear differential equations at the first order to the splitted form is described. In contrast with the known methods of splitting of such systems the method proposed here permits to transform the system considered to a system of independent linear differential equations of the first or higher order corresponding to isolated groups of eigenvalues of the matrix of coefficients of the original system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. А. Абгарян.* Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.
2. *К. А. Абгарян.* Метод асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнений, Известия АН АрмССР, серия „Математика", 1, № 2, 1966.
3. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, Москва, „Наука", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

Ф. Н. ГАЛСТЯН

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Рассмотрим величину $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k 2^{-k}$, где x_k $(k = 1, 2, \cdots)$ —независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения—1, 0, 1. Положим $p(x_k = -1) = pr$, $p(x_k = 0) = q$ и $p(x_k = 1) = ps$, где p, q, r и s такие вероятности, что $p + q = 1$ $r + s = 1$. В работе исследовано распределение, предельное для $L(s_n)$ при $n \to \infty$. Случай $r = 0$ рассмотрен Феллером [4], где установлена сингулярность предельного распределения при $pq(p - q) \neq 0$. Однако Феллер замечает, что точного представления для функции предельного распределения практически не существует. Тем не менее, в данной работе удалось найти очень простое представление для предельной функции распределения величины S_n в общем случае. Кроме того, получен простой алгорифм, позволяющий вычислить значение функции распределения в любой двоично-рациональной точке.

Ввиду того, что $|x_k 2^{-k}| \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(x_k 2^{-k}) = Ex_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} D(x_k 2^{-k}) = Dx_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} < \infty,$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$ сходится п.н. [2]. Из п.н. сходимости вытекает сходимость законов распределения $L(s_n)$ в основном.

Функцию распределения и характеристическую функцию предельного распределения обозначим соответственно через $F(x)$ и $f(t)$.

Характеристическая функция случайной величины $x_k 2^{-k}$ равна $q + pre^{-it2^{-k}} + pse^{it2^{-k}}$, следовательно

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (q + pre^{-it2^{-k}} + pse^{it2^{-k}}). \tag{1}$$

При исследовании предельного распределения нам понадобятся следующие известные леммы [1].

Лемма 1. Пусть Φ_n—последовательность чисто разрывных функций распределения и последовательность сверток $F_n = \Phi_1 * \Phi_2 * \cdots$

$\ldots * \Phi_n$ сходится к функции распределения F при $n \to \infty$. Тогда F — или чисто разрывное, или сингулярное, или абсолютно непрерывное распределение.

Лемма 2. В условиях леммы 1 для непрерывности F необходимо и достаточно, чтобы $\prod_{k=1}^{\infty} d_k = 0$, где

$$d_k = \max_x [\Phi_k(x+0) - \Phi_k(x-0)].$$

Доказательство следующей теоремы основывается на этих леммах.

Теорема 1. 1°. *Если* $p(p-q)[q+rs|r-s|] \neq 0$, *то распределение* $F(x)$ *сингулярно.*

2°. *При* $p=q$, $F(x)$ *является композицией следующих трех распределений: равномерного в* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *несобственного, сосредоточенного в точке* $-\frac{1}{2}$ *и распределения с характеристической функцией* $\prod_{k=1}^{\infty}(r+se^{it2^{-k}})$.

3°. *При* $p=1$, $r=s$ — *равномерное распределение в* $(-1, 1)$.

4°. *При* $p=0$ — *несобственное распределение, сосредоточенное в точке* 0.

5°. *При* $p=1$, $r=0$ — *несобственное распределение, сосредоточенное в точке* 1.

6°. *При* $p=1$, $s=0$ — *несобственное распределение, сосредоточенное в точке* -1.

Доказательство. Из соотношения (1) после элементарных преобразований для любого целого m находим

$$|f(2\pi 2^m)|^2 = |f(2\pi)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty}(1-4pq\sin^2 \pi 2^{-k} - 4p^2 rs \sin^2 2\pi 2^{-k}).$$

Нетрудно установить, что в условиях 1° все множители этого произведения строго положительны. Кроме того

$$\sum_{k=1}^{\infty}(4pq\sin^2 \pi 2^{-k} + 4p^2 rs \sin^2 2\pi 2^{-k}) < \infty.$$

Поэтому, обозначив $2\pi \cdot 2^m = t^m$, получим

$$\lim_{m\to\infty} |f(t_m)| > 0, \text{ следовательно } \overline{\lim_{t\to\infty}} |f(t)| > 0.$$

Из последнего соотношения и из теоремы Римана-Лебега следует, что распределение F не является абсолютно непрерывным.

В условиях 1° $d_k = \max(q, pr, ps) < 1$, следовательно, $\prod_{k=1}^{\infty} d_k = 0$ и по лемме 2 F—непрерывное распределение. Но согласно лемме 1 F не может быть смесью. Пункт 1° теоремы доказан.

Если $p=q=\frac{1}{2}$, то

$$f(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(1+re^{-it2^{-k}}+se^{it2^{-k}})=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{-it2^{-k-1}}+e^{it2^{-k-1}})(re^{-it2^{-k-1}}+se^{it2^{-k-1}})=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\cos t2^{-k-1}e^{-it2^{-k-1}}(r+se^{it2^{-k}})=$$

$$=\frac{2\sin 2^{-1}t}{t}e^{-i2^{-1}t}\prod_{k=1}^{\infty}(r+se^{it2^{-k}}),$$

откуда следует 2°.

Отложим на некоторое время исследование закона распределения $\Phi(x)$, соответствующего характеристической функции

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{\infty}(r+se^{it2^{-k}}).$$

Заметим однако, что по этому закону распределена рассмотренная Феллером величина $\sum_{k=1}^{\infty}y_k2^{-k}$, где y_k—независимые величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностями r и s соответственно.

При $p=1$, $r=s$ имеем

$$f(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{-it2^{-k}}+e^{it2^{-k}})=\prod_{k=1}^{\infty}\cos t2^{-k}=\frac{\sin t}{t},$$

что доказывает пункт 3°.

Пункты 4°, 5°, 6° очевидным образом следуют из выражения для $f(t)$ (1).

Следствие. Распределение $\Phi(x)$ при $rs(r-s)\neq 0$ является сингулярным, при $r=0$ — несобственным, сосредоточенным в точке 1, при $r=1$—несобственным, сосредоточенным в точке 0, при $r=s$—равномерным в (0,1).

Для доказательства первых трех утверждений достаточно заметить, что $\varphi(t)$ получится из $f(t)$, если в последнем заменить p на s, q—на r, r—на 0 и s—на 1. Последнее утверждение проверяется непосредственно

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(1+e^{it2^{-k}})=e^{it2^{-1}}\prod_{k=1}^{\infty}\cos t2^{-k-1}=\frac{e^{it}-1}{it}.$$

Теорема 2. *Если* $p(q+rs)\neq 0$, *то* $F(x)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$F(x)=qF(2x)+psF(2x-1)+prF(2x+1)$$

и может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда по функциям Уолша. Начальные моменты α_n *распределения* $F(x)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\alpha_n=\frac{p}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\,[s+(-1)^{n-k}r]\,\alpha_k,\quad n=1,\,2,\cdots.$$

Доказательство. В (1), заменив t на $2t$, получим

$$f(2t)=\prod_{k=1}^{\infty}(q+pre^{-it2^{-k+1}}+pse^{it2^{-k+1}})=$$

$$=(q+pre^{-it}+pse^{it})\prod_{k=1}^{\infty}(q+pre^{-it2^{-k}}+pse^{it2^{-k}})=$$

$$=(q+pre^{-it}+pse^{it})\,f(t).$$

Таким образом, характеристическая функция предельного распределения удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(2t)=(q+pre^{-it}+pse^{it})\,f(t). \tag{2}$$

Случайная величина $s=$ п.н. $\lim s_n$ распределена в $[-1,\,1]$, следовательно $f(t)$ бесконечно дифференцируема. Поэтому для любого целого n из соотношения (2) имеем

$$2^nf^{(n)}(2t)=(q+pre^{-it}+pse^{it})f^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,[(-i)^kpre^{-it}+i^kpse^{it}]\,f^{(n-k)}(t).$$

Подставив $t=0$ и учитывая соотношения $f^{(k)}_{(0)}=i^k\alpha_k$, $\alpha_0=1$, получим

$$2^n\,i^n\,\alpha_n=i^n\,\alpha_n+p\sum_{k=1}^{n}C_n^k\,[(-1)^kr+s]\,i^n\,\alpha_{n-k},$$

или

$$\alpha_n=\frac{p}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\,[s+(-1)^{n-k}r]\,\alpha_k,\quad n=1,\,2,\cdots. \tag{3}$$

Умножая обе части (2) на $\dfrac{1-e^{-2itx}}{2\pi it}$ и интегрируя в промежутке $(-\infty,\,+\infty)$ (интегралы понимаются в смысле главного значения), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-2itx}}{2it}\,f(2t)\,d(2t)=\frac{q}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-2itx}}{it}\,f(t)\,dt+$$

$$+\frac{pr}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-it}-e^{-it(2x+1)}}{it}\,f(t)dt+\frac{ps}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-it(2x-1)}}{it}\,f(t)\,dt.$$

Так как $p(q+rs)\neq 0$, то по лемме 2 F непрерывна, поэтому имеем

$$F(x)-F(0)=q\,[F(2x)-F(0)]+pr\,[F(2x+1)-F(1)]+$$
$$+ps\,[F(2x-1)-F(-1)].$$

Однако $F(x)=0$ при $x\leqslant -1$ и $F(x)=1$ при $x>1$. Поэтому

$$F(x)=qF(2x)+prF(2x+1)+psF(2x-1)+pF(0)-pr,$$

при $x=1$ отсюда получим $pF(0)-pr=0$, следовательно

$$F(x)=qF(2x)+psF(2x-1)+prF(2x+1). \tag{4}$$

В силу замечания, сделанного при доказательстве следствия теоремы 1, из (2), (3) и (4) вытекает, что функция распределения $\Phi(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(x)=r\Phi(2x)+s\Phi(2x-1), \tag{5}$$

$\varphi(t)$—уравнению

$$\varphi(2t)=(r+se^{it})\,\varphi(t),$$

а начальные моменты μ_n распределения $\Phi(x)$—соотношениям

$$\mu_n=\frac{s}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\mu_k\,. \tag{6}$$

Соотношения (3) и (6) позволяют вычислить α_n и μ_n для любого n.

При помощи (3) можно вычислить значение $F(x)$ в любой двоично-рациональной точке. Для этого достаточно подставить в (4) вместо x последовательно $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{7}{8}, \cdots$ и учесть, что $F(x)=0$ при $x\leqslant -1$ и $F(x)=1$ при $x>1$.

В частности отсюда вытекает, что (4) имеет единственное непрерывное решение, удовлетворяющее указанным условиям.

Приступим к решению функциональных уравнений (4) и (5). Известно (см. [3]), что ортонормальные в $[0, 1]$ функции Уолша удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_{n+1}^{2k-1}(x)=\begin{cases}\varphi_n^k(2x), & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ (-1)^{k+1}\varphi_n^k(2x-1), & \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi_{n+1}^{2k}(x)=\begin{cases}\varphi_n^k(2x), & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ (-1)^k\varphi_n^k(2x-1), & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}\quad (n>2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}).$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$F(x)=a_0+a_1\varphi_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}a_n^k\varphi_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right),\ -1<x<1. \tag{8}$$

При $-1 < x < -\frac{1}{2}$ (4) обратится в следующее:

$$F(x) = prF(2x+1).$$

Заменив F разложением (8), получим

$$a_0 + a_1\varphi_1\left(\frac{x+1}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right) = pr\left[a_0 + a_1\varphi_1(x+1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k(x+1)\right].$$

Воспользовавшись соотношениями (7), после несложных преобразований находим

$$a_0 + a_1 + a_2^1 + a_2^2 + (a_3^1 + a_3^2 + a^3 + a_3^4)\,\varphi_1(2x+2) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n+2}^{4k-3} + a_{n+2}^{4k-2} + a_{n+2}^{4k-1} + a_{n+2}^{4k})\,\varphi_n^k(2x+2) =$$

$$= pr\left[a_0 + a_1 + (a_2^1 + a_2^2)\,\varphi_1(2x+2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n+1}^{2k-1} + a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x+2)\right].$$

В рассматриваемом случае $0 < 2x+2 < 1$, поэтому, приравняв коэффициенты при одинаковых функциях Уолша, получим

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 + a_2^1 + a_2^2 = pr\,(a_0 + a_1)\\
&a_3^1 + a_3^2 + a_3^3 + a_3^4 = pr\,(a_2^1 + a_2^2)\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&a_{n+2}^{4k-3} + a_{n+2}^{4k-2} + a_{n+2}^{4k-1} + a_{n+2}^{4k} = pr\,(a_{n+1}^{2k-1} + a_{n+1}^{2k})\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned} \qquad (9)$$

$$n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}.$$

При $-\frac{1}{2} < x < 0$ уравнение (4) примет вид

$$F(x) = qF(2x) + prF(2x+1).$$

Заменив F разложением (8) и произведя аналогичные преобразования, получим

$$a_0 + a_1 - a_2^1 - a_2^2 - (a_3^1 + a_3^2 - a_3^3 - a_3^4)\,\varphi_1(2x+1) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n+2}^{4k-3} + a_{n+2}^{4k-2} - a_{n+2}^{4k-1} - a_{n+2}^{4k})(-1)^{k+1}\,\varphi_n^k(2x+1) =$$

$$= q\Big[a_0 + a_1 + (a_2^1 + a_2^2)\,\varphi_1(2x+1) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (a_{n+1}^{2k-1} + a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x+1)\Big] +$$

$$+ pr\Big[a_0 - a_1 - (a_2^1 - a_2^2)\,\varphi_1(2x+1) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-1)^{k+1} (a_{n+1}^{2k-1} - a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x+1)\Big].$$

Имея ввиду, что $0 < 2x+1 < 1$, находим

$$\begin{array}{c}
a_0 + a_1 - a_2^1 - a_2^2 = q\,(a_0 + a_1) + pr\,(a_0 - a_1) \\
a_3^1 + a_3^2 - a_3^3 - a_3^4 = -q\,(a_2^1 + a_2^2) + pr\,(a_2^1 - a_2^2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n+2}^{4k-3} + a_{n+2}^{4k-2} - a_{n+2}^{4k-1} - a_{n+2}^{4k} = (-1)^{k+1} q\,(a_{n+1}^{2k-1} + a_{n+1}^{2k}) + pr\,(a_{n+1}^{2k-1} - a_{n+1}^{2k}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \tag{10}$$

$$n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}.$$

Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то из (4) получим

$$F(x) = qF(2x) + psF(2x-1) + pr$$

или

$$a_0 + a_1\varphi_1\left(\frac{x+1}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right) = pr + q\Big[a_0 + a_1\varphi_1\left(x + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(x + \frac{1}{2}\right)\Big] + ps\Big[a_0 + a_1\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k(x)\Big].$$

Воспользовавшись (7), будем иметь

$$a_0 - a_1 - a_2^1 + a_2^2 + (a_3^1 - a_3^2 - a_3^3 + a_3^4)\,\varphi_1(2x) +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{n+2}^{4k-3}-a_{n+2}^{4k-2}-a_{n+2}^{4k-1}+a_{n+2}^{4k})\,\varphi_n^k(2x)=$$

$$=pr+q\Big[a_0-a_1-(a_2^1-a_2^2)\,\varphi_1(2x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x)\Big]+$$

$$+ps\Big[a_0+a_1+(a_2^1+a_2^2)\,\varphi_1(2x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(a_{n+1}^{2k-1}+a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x)\Big].$$

В данном случае $0<2x<1$, следовательно

$$\begin{array}{l}
a_0-a_1-a_2^1+a_2^2=pr+q\,(a_0-a_1)+ps\,(a_0+a_1)\\
a_3^1-a_3^2-a_3^3+a_3^4=-q\,(a_2^1-a_2^2)+ps\,(a_2^1+a_2^2)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\qquad\qquad(11)\\
a_{n+2}^{4k-3}-a_{n+2}^{4k-2}-a_{n+2}^{4k-1}+a_{n+2}^{4k}=(-1)^{k+1}q\,(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})+ps\,(a_{n+1}^{2k-1}+a_{n+1}^{2k})\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Заметив, что при $\frac{1}{2}<x<1$ (4) обращается в

$$F(x)=q+pr+psF(2x-1)$$

и воспользовавшись стандартным приемом, получим

$$a_0-a_1+a_2^1-a_2^2-(a_3^1-a_3^2+a_3^3-a_3^4)\,\varphi_1(2x-1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+2}^{4k-3}-a_{n+2}^{4k-2}+a_{n+2}^{4k-1}-a_{n+2}^{4k})\,\varphi_n^k(2x-1)=q+pr+$$

$$+ps\Big[a_0-a_1-(a_2^1-a_2^2)\,\varphi_1(2x-1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(a_{n+1}^{2k-1}-a_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x-1)\Big].$$

Отсюда, учитывая, что $0<2x-1<1$, находим

$$
\begin{gathered}
a_0 - a_1 + a_2^1 - a_2^2 = q + pr + ps\,(a_0 - a_1) \\
a_3^1 - a_3^2 + a_3^3 - a_3^4 = ps\,(a_2^1 - a_2^2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (12) \\
a_{n+2}^{4k-3} - a_{n+2}^{4k-2} + a_{n+2}^{4k-1} - a_{n+2}^{4k} = ps\,(a_{n+1}^{2k-1} - a_{n+1}^{2k}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n > 2, \; 1 \leqslant k < 2^{n-1}.
\end{gathered}
$$

После несложных преобразований уравнения (9), (10), (11) и (12) можно привести к следующему виду, удобному для последовательного нахождения коэффициентов a_n^k:

$$
\begin{gathered}
a_0 = \frac{q + 2pr}{2}, \quad a_1 = \frac{2p\,(r - s)\,a_0 - q - 2pr}{2\,(1 + p)}, \quad a_2^1 = \frac{2p(r - s)a_1 - 2qa_0 + q}{4}, \\
a_2^2 = \frac{2\,(p - q)\,a_1 - q}{4}, \quad a_3^1 = \frac{(p - q)\,a_2^1}{2}, \quad a_3^2 = \frac{p\,(r - s)\,a_2^1 - qa_2^2}{2}, \\
a_3^3 = \frac{qa_2^1 + p\,(r - s)\,a_2^2}{2}, \quad a_3^4 = \frac{1}{2}\,a_2^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (13) \\
a_{n+1}^{4k-3} = a_n^{2k-1}\,\frac{p + (-1)^{k+1}\,q}{2}, \quad a_{n+1}^{4k-2} = a_n^{2k-1}\,\frac{p\,(r - s)}{2} + a_n^{2k}\,\frac{(-1)^{k+1}\,q}{2}, \\
a_{n+1}^{4k-1} = a_n^{2k-1}\,\frac{(-1)^k\,q}{2} + a_n^{2k}\,\frac{p\,(r - s)}{2}, \quad a_{n+1}^{4k} = a_n^{2k}\,\frac{p + (-1)^k\,q}{2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n > 3, \; 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-2}.
\end{gathered}
$$

Предположим сначала, что $rs \neq 0$, тогда из (13) получим

$$
|a_{n+1}^{4k-3}| < \frac{1}{2}\,|a_n^{2k-1}|, \quad |a_{n+1}^{4k-2}| < \frac{p\,|r - s|}{2}\,|a_n^{2k-1}| + \frac{q}{2}\,|a_n^{2k}|,
$$

$$|a_{n+1}^{4k-1}| \leqslant \frac{q}{2}\,|a_n^{2k-1}| + \frac{p\,|r-s|}{2}\,|a_n^{2k}|,\ |a_{n+1}^{4k}| \leqslant \frac{1}{2}\,|a_n^{2k}|,$$

$$n \geqslant 3,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^{n-2}.$$

Отсюда следует, что

$$|a_{n+1}^{4k-3}| + |a_{n+1}^{4k-2}| + |a_{n+1}^{4k-1}| + |a_{n+1}^{4k}| \leqslant (|a_n^{2k-1}| + |a_n^{2k}|)\,\frac{1+q+p\,|r-s|}{2}.$$

Если $rs \neq 0$, то $|r-s| < 1$, следовательно

$$0 < \alpha = \frac{1+q+p\,|r-s|}{2} < 1.$$

Поэтому, суммируя полученное неравенство по k от 1 до 2^{n-2}, получим

$$\sum_{k=1}^{2^n} |a_{n+1}^k| \leqslant \alpha \sum_{k=1}^{2^n-1} |a_n^k| \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{2^n} |a_{n+1}^k| \leqslant \alpha^{n+1}\cdot c.$$

Последнее неравенство с учетом того, что $|\varphi_n^k(x)| \leqslant 1$, устанавливает равномерную сходимость (8). Кроме того отсюда следует, что (8) сходится абсолютно.

Из способа нахождения коэффициентов разложения (8) следует, что функция $F(x)$, которая равна сумме этого ряда в $(-1, 1)$ и обращается в 0 и 1 соответственно при $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x < +\infty$, удовлетворяет уравнению (4) при всех x, кроме, быть может, точек $-\frac{1}{2}$, 0 и $\frac{1}{2}$. Докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (4) и в этих точках. Положим

$$A_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_n^k,\ D_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} (-1)^{k+1} a_n^k,\ n \geqslant 2,$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} (-1)^{k+1} (a_n^{2k-1} + a_n^{2k}),\ C_n = \sum_{k=1}^{2^n-2} (-1)^{k+1} (a_n^{2k-1} - a_n^{2k}),\ n \geqslant 3,$$

$$E_n = \sum_{k=1}^{2^n-3} (-1)^{k+1} (a_n^{4k-3} + a_n^{4k-2}),\ R_n = \sum_{k=1}^{2^n-3} (-1)^{k+1} (a_n^{4k-3} - a_n^{4k-2}),\ n \geqslant 4.$$

При помощи (9), (10), (11) и (12) можно установить, что

$$A_{n+1} = prA_n,\quad n \geqslant 2,$$

$$D_{n+1} = psD_n,\quad n \geqslant 2,$$

$$B_{n+1} = qB_n + prD_n,\quad n \geqslant 3,$$

$$C_{n+1} = qC_n + psA_n,\quad n \geqslant 3,$$

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}\,pr\,(B_n + C_n) + \frac{1}{2}\,qA_n,\ n \geqslant 3,$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{2} ps (B_n + C_n) + \frac{1}{2} qD_n, \quad n \geqslant 3,$$

причем

$$A_2 = \frac{pr (pr - 1)(q + 2pr)}{1 + p}, \quad D_2 = \frac{ps (ps - 1)(q + 2pr - 2)}{1 + p},$$

$$B_3 = prD_2 - qA_2, \quad C_3 = psA_2 - qD_2.$$

Решив систему разностных уравнений, получим

$$A_n = (pr)^{n-2} A_2, \quad D_n = (ps)^{n-2} D_2, \quad n \geqslant 3,$$

$$B_n = q^{n-3} B_3 + p^2 rs q^{n-4} D_2 \sum_{k=0}^{n-4} \left(\frac{ps}{q}\right)^k, \quad n \geqslant 4,$$

$$C_n = q^{n-3} C_3 + p^2 rs\, q^{n-4} A_2 \sum_{k=0}^{n-4} \left(\frac{pr}{q}\right)^k, \quad n \geqslant 4.$$

Воспользовавшись определением функций Уолша, найдем

$$F(0) = a_0 + a_1 \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 - a_2^1 + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (B_n + C_n),$$

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = a_0 + a_1 \varphi_1\left(\frac{1}{4}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{1}{4}\right) = a_0 + a_1 - \frac{A_3 + B_3}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} E_n,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 + a_1 \varphi_1\left(\frac{3}{4}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k \varphi_n^k\left(\frac{3}{4}\right) = a_0 - a_1 -$$

$$- \frac{C_3 + D_3}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} R_n.$$

Отсюда после несложных упрощений имеем

$$F(0) = r, \quad F\left(-\frac{1}{2}\right) = pr^2. \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = ps^2,$$

после чего справедливость доказываемого утверждения устанавливается непосредственной подстановкой в (4).

Для установления единственности найденного решения достаточно доказать, что $F(x)$ непрерывна. Непрерывность F в двоично-иррациональных точках промежутка $(-1, 1)$ следует из непрерывности функций Уолша в этих точках и из равномерной сходимости (8).

Рассмотрим точки $x = -1$ и $x = 1$. Легко заметить, что

$$F(-1+0) = a_0 + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^k = a_0 + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n = a_0 + a_1 + \frac{A_2}{1 - pr} = 0.$$

Аналогично $- F(1-0) = a_0 - a_1 +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (-1)^{k+1} a_n^k = a_0 - a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} D_n = a_0 - a_1 + \frac{D_2}{1 - ps} = 1.$$

Установив, таким образом, непрерывность F в точках -1 и 1, устремим в (4) x последовательно к 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{3}{8}$, $\pm\frac{5}{8}$, $\pm\frac{7}{8}, \cdots$ и обнаружим непрерывность F в любой двоично-рациональной точке.

Рассмотрим теперь случай $rs=0$. Из (1) заключаем, что законы распределений, соответствующие $r=0$ и $s=0$, являются сопряженными. Следовательно, можно ограничиться решением уравнения

$$F(x) = qF(2x) + pF(2x-1), \tag{14}$$

которое имеет такой же вид, что и (5). Заметив, что в рассматриваемом случае $F(x)=0$ при $x \leqslant 0$ и $F(x)=1$ при $x > 1$, будем искать решение (14) в виде

$$F(x) = b_0 + b_1\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(x),\ 0 < x < 1. \tag{15}$$

Определим коэффициенты этого разложения. Для этого рассмотрим сначала уравнение (14) при $0 < x < \frac{1}{2}$. В этом случае имеем

$$F(x) = qF(2x).$$

Подставив сюда вместо F разложение (15), получим

$$b_0 + b_1\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(x) = q\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(2x)\right].$$

Учитывая рекуррентные соотношения между функциями Уолша (7), находим

$$b_0 + b_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-2}} (b_n^{2k-1} + b_n^{2k})\varphi_{n-1}^k(2x) = q\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(2x)\right].$$

Выделив из суммы в левой части член, соответствующий $n=2$, и заменив в оставшейся сумме n на $n+1$, получим

$$b_0 + b_1 + (b_2^1 + b_2^2)\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (b_{n+1}^{2k-1} + b_{n+1}^{2k})\varphi_n^k(2x) =$$

$$= q\left[b_0 + b_1\varphi_1(2x) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} b_n^k \varphi_n^k(2x)\right].$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях Уолша (так как $0 < 2x < 1$), получим

$$\begin{gathered} b_0 + b_1 = qb_0 \\ b_2^1 + b_2^2 = qb_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered} \tag{16}$$

. . . .

. . . .

$$b_{n+1}^{2k-1}+b_{n+1}^{2k}=qb_n^k$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (14) при $\frac{1}{2}<x<1$. В этом случае

$$F(x)=pF(2x-1)+q.$$

Подставив сюда вместо F разложение (15) и произведя аналогичные преобразования, получим

$$b_0-b_1-(b_2^1-b_2^2)\,\varphi_1(2x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(-1)^{k+1}(b_{n+1}^{2k-1}-b_{n+1}^{2k})\,\varphi_n^k(2x-1)=$$

$$=q+p\left[b_0+b_1\varphi_1(2x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}b_n^k\varphi_n^k(2x-1)\right].$$

Учитывая, что $0<2x-1<1$, находим

$$b_0-b_1=pb_0+q$$

$$b_2^1-b_2^2=-pb_1$$

. . . .

. . . .

. . . . (17)

$$b_{n+1}^{2k-1}-b_{n+1}^{2k}=(-1)^{k+1}pb_n^k$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Уравнения (16) и (17) позволяют вычислить все коэффициенты b_n^k), именно

$$b_0=q,\ b_1=-pq,$$

$$b_2^1=pq\frac{p-q}{2},\ b_2^2=-\frac{pq}{2},$$

. . . .

. . . . (18)

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$b_{n+1}^{2k-1}=b_n^k\frac{q+(-1)^{k+1}p}{2},\quad b_{n+1}^{2k}=b_n^k\frac{q+(-1)^kp}{2},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$n\geqslant 2,\ 1\leqslant k\leqslant 2^{n-1}.$$

Из (18) имеем

$$|b_{n+1}^{2k-1}|=\frac{|q+(-1)^{k+1}p|}{2}|b_n^k|,\quad |b_{n+1}^{2k}|=\frac{|b+(-1)^kp|}{2}|b_n^k|.$$

Отсюда

$$|b_{n+1}^{2k-1}|+|b_{n+1}^{2k}|=|b_n^k|\frac{|q+(-1)^{k+1}p|+|q+(-1)^kp|}{2}=|b_n^k|\max(q,\ p)|.$$

Суммируя по k от 1 до 2^{n-1}, получим

$$\sum_{k=1}^{2^n}|b_{n+1}^k|=\max(q,\ p)\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|b_n^k|=\beta\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|b_n^k|,$$

или

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|b_n^k|\leqslant\beta^n c_1.$$

Так как $r=0$, то из условия теоремы вытекает, что $pq\neq 0$, поэтому $0<\beta=\max(q,\ p)<1$. Отсюда следует равномерная сходимость (15).

Единственность найденного решения устанавливается тем же способом, что и при $rs\neq 0$. Теорема доказана.

Заметим, что для получения решения уравнения (5) при $rs\neq 0$ достаточно в (15) заменить p и q на s и r, соответственно.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Г. А. Амбарцумян за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 11.XI.1968

Ֆ. Ն. ԳԱԼՍՏՅԱՆ. Մի սահմանային բաշխման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ստացված է ֆունկցիոնալ հավասարում $\sum_{k=1}^{\infty}x_k2^{-k}$ *պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի համար, որտեղ* x_k $(k=1,2,\cdots)$*-ն -1,0 և 1 հնարավոր արժեքներով և* pr, q *ու* ps *համապատասխան հավանականություններով անկախ պատահական մեծություններ են։ Այդ հավասարման լուծումը ներկայացված է հավասարաչափ զուգամետ Ուոլշի շարքի տեսքով։*

F. N. GALSTIAN. *On a limit distribution* (summary)

A functional equation is derived for the distribution function of random variable $\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$, where x_k $(k=1, 2,\cdots)$ are identically distributed, and purely discontinuous random variables, with common distribution function with jumps pr at $x=-1$, q at $x=0$ and ps at $x=1$. The solution of this equation is presented as uniformly converging Walsh— Fourier series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. G. Essen.* Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace-Gaussian law., Acta Math., 77, 1945, 1—125.
2. *М. Лоэв.* Теория вероятностей, 1962, 251.
3. *I. L. Walsh.* A closed set of normal orthogonal functions, American Mathematical Society, 1922.
4. *В. Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, 1967, 178.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

Л. Б. ГРАЙФЕР

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОЧНЫХ И ПОЛУТОЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА ОТКРЫТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M—открытое ориентируемое n-мерное дифференцируемое многообразие с римановой метрикой [4]. Как и для римановых поверхностей [2] назовем $(n—1)$-мерный компактный цикл γ на M разделяющим, если $M—\gamma$ состоит из двух непересекающихся компонент. Тогда назовем исчерпание многообразия M относительно компактными n-мерными подмногообразиями V с гладкой $(n—1)$-мерной границей ∂V каноническим, если каждый контур границы является разделяющим $(n—1)$-мерным циклом на M и ограничивает одну из компонент $M — V$.

Как и в [3] обозначим через Γ гильбертово пространство действительных дифференциальных форм на M с конечной нормой $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi) = \int\limits_M \varphi \wedge * \varphi < \infty$, через Γ^1-плотное в Γ подпространство форм класса C^∞, через Γ^1_e, Γ^1_c, Γ^1_R — подмножества Γ^1, состоящие соответственно из точных $(\varphi = d\psi)$,замкнутых $(d\varphi = 0)$ и гармонических в смысле Ходжа $(d\varphi = 0,\ \delta\varphi = 0)$ форм на M, $\Gamma^1_{he} = \Gamma^1_h \cap \Gamma^1_e$, Γ_x—замыкание Γ^1_x в Γ, Γ^*_x—множество форм вида $* \varphi$, где $\varphi \in \Gamma_x$. Для форм на V обозначим через Γ^1_0 подмножество, состоящее из форм Γ^1, обращающихся в 0 вдоль ∂V, тогда $\Gamma^1_{c0} = \Gamma^1_c \cap \Gamma^1_0$, $\Gamma^1_{h0} = \Gamma^1_h \cap \Gamma^1_{c0}$ и $d\Psi \in \Gamma^1_{e0}$, если $\Psi \in \Gamma^1_0$. Гармонической функцией на M назовем функцию u, удовлетворяющую обобщенному уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

которое с помощью операторов d и δ приводится к виду

$$\delta d u = 0.$$

Используемые выше операторы $d, \delta, \Delta, *$ определены в [4]. Там же доказана регулярность гармонических форм: $\Gamma_h = \Gamma^*_h = \Gamma^1_h$ ([4], § 29).

Отнесем к классу полуточных форм ${}_{n-1}\Gamma^1_{se}$ на V $(n-1)$-мерные однородные формы из Γ^1_c с нулевыми периодами вдоль контуров ∂V. Покажем, что ${}_{n-1}\Gamma^1_{se}$— ортогональное дополнение к ${}_1\Gamma^{1*}_{c0} \cap {}_1\Gamma^{1*}_e$, где ${}_1\Gamma^1_{c0}$ и ${}_1\Gamma^1_e$ — пространства пфаффовых форм, а ${}_1\Gamma^1_{c0} \cap {}_1\Gamma^1_e$ представляет собой пространство дифференциалов функций ψ с постоянными значениями на контурах ∂V. Пусть $\varphi \in {}_{n-1}\Gamma^1_{se}$ и $* d\psi \in {}_1\Gamma^{1*}_{c0}$, тогда

$$(\varphi, *d\Psi) = \int\limits_{v} \varphi\Lambda* * d\psi = (-1)^{n-1}\int\limits_{v} \varphi\Lambda d\psi =$$

$$= \int\limits_{v} d\psi\Lambda\varphi = \int\limits_{\partial v} \Psi\Lambda\varphi + \int\limits_{v} \psi\Lambda d\varphi = 0, \tag{1}$$

значит ${}_1\Gamma^{1*}_{c0} \cap {}_1\Gamma^{1*}_{e} \perp {}_{n-1}\Gamma^{1}_{se}$.

Пусть $\varphi\perp({}_1\Gamma^{1*}_{c0}\cap{}_1\Gamma^{1*}_{e})$, тогда $\varphi\perp{}_1\Gamma^{1*}_{e0}$, так как $\Gamma^{1}_{e0}\subset\Gamma^{1}_{c0}\cap\Gamma^{1}_{e}$, отсюда в силу (1)

$$\int\limits_{v} \psi\Lambda d\varphi = 0,$$

но $deg\ \varphi = n-1$, поэтому $\int\limits_{v} \psi\Lambda d\varphi = \int\limits_{v} \psi\cdot\alpha d\sigma$, где ψ и α — функции, а $d\sigma$ — элемент объема V. Существование на V разбиения единицы [4] и произвол в выборе ψ позволяют заключить, что $\alpha = 0$, т. е. $d\varphi$. Если же взять ψ, равную 1 на одном из контуров dV и 0—на остальных, то из (1) следует, что φ имеет нулевые периоды относительно всех граничных контуров, следовательно $\varphi\in{}_{n-1}\Gamma^{1}_{se}$.

Пременим этот результат к гармоническим формам. Пусть ${}_{n-1}\Gamma_{hse} = \Gamma_h \cap {}_{n-1}\Gamma^{1}_{se}$. Тогда ${}_{n-1}\Gamma_{hse}$ является ортогональным дополнением к пространству ${}_1\overset{*}{\Gamma}_{he0} = {}_1\overset{*}{\Gamma}_{h0} \cap {}_1\overset{*}{\Gamma}_{he}$. Пространство ${}_1\Gamma_{he0}$ представляет собой пространство дифференциалов гармонических функций с постоянными значениями на контурах ∂V, являющихся линейными комбинациями гармонических мер на V, равных 1 на одном из контуров ∂V и 0—на остальных.

Определим классы ${}_{n-1}\Gamma_{hse}$ и ${}_1\Gamma_{hm}$ на M. Отнесем к классу ${}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$ гармонические формы с нулевыми периодами вдоль всех разделяющих $(n-1)$-мерных циклов на M. Отметим, что всякий разделяющий цикл $\gamma\in M$ гомологичен контурам границы V из исчерпания M. При таком определении ограничение формы $\omega\in{}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$ на V принадлежит классу ${}_{n-1}\Gamma_{hse}(V)$. К классу ${}_1\Gamma_{hm}(M)$ отнесем те формы на M, которые можно аппроксимировать в среднем по исчерпанию формами из ${}_1\Gamma_{he0}(V)$. Покажем, что при таком определении классов справедлив следующий результат:

Теорема 1. *Пространства ${}_{n-1}\Gamma_{hse}$ и ${}_1\overset{*}{\Gamma}_{hm}(M)$ являются ортогональными дополнениями в ${}_{n-1}\Gamma_h(M)$.*

Пусть $\delta\in{}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$, $\omega\in{}_1\Gamma_{hm}(M)$, тогда $\delta\in{}_{n-1}\Gamma_{hse}(V)$, следовательно, если ω_{hmv} — ограничение формы ω на V, то $(\delta, *\omega_{hmv}) = 0$ и $(\delta, *\omega)_v = (\delta, *\omega - *\omega_{hmv})$, откуда $(\delta, *\omega) = 0$ и $\delta\perp\omega$. Пусть $\omega\perp{}_{n-1}\overset{*}{\Gamma}_{hse}(M)$, $\omega\in{}_1\Gamma_h$. Обозначим через ω_{he0} проекцию ω на ${}_1\Gamma_{he0}(V)$, тогда $\omega - \omega_{he0}\in\overset{*}{\Gamma}_{hse}(V)$ и для $V\subset V'$

$$\omega_{he0} - \omega_{he0} \in {}_{n-1}\overset{*}{\Gamma}_{hse}(V).$$

Но отсюда $\omega_{he0} - \omega'_{he0} \perp \omega_{he0}$, следовательно

$$\|\omega_{he0} - \omega'_{he0}\|^2_v = \|\omega'_{he0}\|^2_v - \|\omega_{he0}\|^2_v \leqslant \|\omega'_{he0}\|^2_{v'} - \|\omega_{he0}\|^2_v.$$

Но $\|\omega_{he0}\|_v$ имеет конечный предел при $V \to M$ и $\|\omega_{he0} - \omega'_{he0}\|_{v_0} \to 0$, когда V и V' приближаются к M независимо друг от друга. Тогда по теореме Рисса-Фишера [5] существует $\omega_{hm} = \lim\limits_{v \to M} \omega_{he0}$ в смысле сходимости в среднем, т. е. $\omega_{hm} \in {}_1\Gamma_{hm}(M)$. Но тогда

$$\omega - \omega_{hm} \in {}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse}(M), \quad \omega_{hm} \perp {}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse}(M)$$

по доказанному выше и $\omega \perp {}_{n-1}\Gamma_{hse}(M)$ по предположению. Следовательно $\omega = \omega_{hm}$, а ${}_1\Gamma_{hm}$ —ортогональное дополнение к ${}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse}$. По своему определению ${}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse}$ замкнуто, поэтому ${}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse}$ также будет ортогональным дополнением к ${}_1\Gamma_{hm}$.

Из доказанной теоремы следует, что ортогональные разложения

$${}_{n-1}\Gamma_h = {}_{n-1}\Gamma_{hse} \dot{+} {}_1\overset{\bullet}{\Gamma}_{hm} \quad \text{и} \quad {}_1\Gamma_h = {}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse} \dot{+} {}_1\Gamma_{hm}$$

можно было бы взять за определение класса ${}_1\Gamma_{hm}(M)$. Из такого определения следовало бы, что ${}_1\Gamma_{hm}(M)$ состоит из форм, допускающих аппроксимацию в среднем формами из ${}_1\Gamma_{he0}$.

Отметим, что рассмотренные выше свойства точных и полуточных форм аналогичны свойствам соответствующих дифференциалов на римановых поверхностях [1], [2].

Укажем на связь классов точных и полуточных форм с одним классом открытых многообразий, являющимся аналогом класса O_{KD} (класса Сарио) римановых поверхностей [6]. Для дифференциальной формы ω на M норма Дирихле имеет вид

$$D(\omega) = (d\omega, d\omega) + (\delta\omega, \delta\omega).$$

Учитывая тот факт, что оператор δ понижает степень формы на единицу, для функции u получим

$$D(u) = (du, du) = \int\limits_M du \wedge * du.$$

Отнесем к классу O_{KD} такие многообразия M, на которых нет отличной от постоянной гармонической функции u с конечной нормой Дирихле и нулевым сопряженным периодом вдоль всякого разделяющего $(n-1)$-мерного цикла γ на M.

Теорема 2. *$M \in O_{KD}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1. ${}_1\Gamma_{he} \cap {}_{n-1}\overset{\bullet}{\Gamma}_{hse} = \{0\}$;
2. ${}_1\Gamma_{he} = {}_1\Gamma_{hm}$.

Необходимость и достаточность условия 1 следует из того, что класс ${}_1\Gamma_{he}$ состоит из дифференциалов гармонических функций. Действительно, если $\varphi = d\psi \in {}_1\Gamma_{he}$, то $\delta\varphi = \delta d\psi = 0$. Тогда справедливость утверждения 2 вытекает из разложения

$$ {}_1\Gamma_{he} = {}_1\Gamma_{he} \cap {}_{n-1}\Gamma^*_{hse} + {}_1\Gamma_{hm}, $$

которое является следствием теоремы 1.

Пользуюсь случаем поблагодарить Л. И. Волковыского и С. Я. Гусмана за внимание к настоящей работе.

Пермский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило 10.VIII.1968

Լ. Բ. ԳՐԻՖԵՐ. Բաց բազմաձևություններում ճշգրիտ և կիսաճշգրիտ դիֆերենցիալ ձևերի մի քանի հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում են բաց բազմաձևությունների վրա ճշգրիտ և կիսաճշգրիտ դիֆերենցիալ ձևերի մի քանի հատկություններ, որոնք հանդիսանում են Լարս Ալֆորսի կողմից ուսումնասիրված Ռիմանի բաց մակերևույթների վրա վերջավոր նորմայով դիֆերենցիալների հատկությունների անալոգը։ Այդպիսի ձևերի օգնությամբ տրվում է բազմաձևության O_{KD} դասին պատկանելու հայտանիշը։

L. B. GRIFER. *On some properties of exact and semiexact differential forms on the open manifolds* (summary)

Some properties of exact and semiexact differential forms on the open manifolds in nanlogy with differentials properties of the bounded norms on the open Riemann surface studied by L. V. Ahlfors are examined. These forms give the criteria for belonging of these manifolds to O_{KD} class.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. V. Ahlfors.* The method of orthogonal decomposition for differentials on open Riemann surfaces, Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. AI, 249/7, 1958.
2. *L. V. Ahlfors* and *L. Sario.* Riemann surfaces, Princeton, 1960.
3. *С. Я. Гусман.* Формы Шоттки-Альфорса и некоторые экстремальные задачи на дифференцируемых многообразиях, ДАН СССР, 170, № 2, 1966.
4. *Ж. де Рам.* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
5. *Ф. Рисс* и *Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М. 1954.
6. *L. Sario.* Contribution to the theory of Riemann surfaces, Princeton, 1953, 63—76.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

В. С. КОРОЛЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

В настоящей работе рассматривается банахово пространство H_n^2 $(n>0)$ аналитических функций $f(z)$ таких, что

$$f^{(n)}\in H_n^2.$$

Норма пространства H_n^2 вводится таким образом

$$\|f\|_{H_n^2}=\max_{0<k<n}\|f^{(k)}\|_{H^2}=\max_{0<k<n}\sup_{0<r<1}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f^{(k)}(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}.$$

Оказывается, что при $n\geqslant 1$ пространство H_n^2 является банаховой алгеброй [1] относительно обычного умножения. Попутно мы рассматриваем банаховы алгебры $A_n\subset H_n^2$, состоящие из функций $f(z)$, для которых $f^{(n)}(z)$ непрерывна в круге $|z|\leqslant 1$.

Главным результатом работы является описание некоторых идеалов алгебры H_n^2 и выяснение связи между этими идеалами и внутренними функциями.

Как известно, впервые заметил подобную связь Берлинг [2, 3] для пространства H^2 (так как H^2 не является алгеброй относительно обычного умножения, то вместо идеалов здесь рассматриваются подпространства H^2, инвариантные относительно умножения на z). Именно Берлинг установил теорему:

Теорема. *Существует взаимно однозначное соответствие между всеми подпространствами H^2, инвариантными относительно умножения на z и всеми внутренними функциями, т. е. функциями вида*

$$G(z)=B(z)\cdot\exp\left\{-\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\mu(\theta)\right\},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке, $d\mu(\theta)$ — положительная сингулярная мера на окружности $e^{i\theta}$ $(0<\theta\leqslant 2\pi)$. Точнее, всякое инвариантное подпространство $S\subset H^2$ состоит из функций $f\in H^2$, для которых внутренняя функция $G(z)$ является делителем.

Как известно, каждая функция $f\in H^2$ допускает каноническую факторизацию

$$f(z) = G(z)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta+i\gamma\right\},$$

где $G(z)$ — внутренняя функция. Говорят, что внутренняя функция $G_1(z)$ делит $f(z)$, если $G(z)/G_1(z)$ является ограниченной функцией в круге $|z|<1$.

Результат, аналогичный приведенной теореме Берлинга для алгебры A всех функций, регулярных в круге $|z|<1$ и непрерывных в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, также был известен Берлингу, однако он этого результата не опубликовал. Поэтому описание всех замкнутых идеалов алгебры A обычно связывают с именем Рудина, который опубликовал соответствующий результат в 1957 г. [4].

Главной трудностью при установлении структуры идеалов алгебры H_n^2 является выяснение возможности деления данной функции $f\in H_n^2$ на ее внутреннюю часть $G(z)$ так, чтобы отношение $f(z)/G(z)$ (называемое внешней частью $f(z)$) также принадлежало пространству H_n^2. Мы опираемся на следующую теорему [5]:

Теорема. *Пусть* $f\in H_n^2$, *а внутренняя функция вида*

$$G(z) = B(z)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{e^{i\theta_k}+z}{e^{i\theta_k}-z}\right\}\left(a_k>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty\right)$$

является делителем $f(z)$. *Тогда отношение* $f_1(z)=f(z)/G(z)$ *также принадлежит пространству* H_n^2, *причем*

$$\|f_1^{(k)}\|_{H^2}\leqslant\|f^{(k)}\|_{H^2}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

§ 1. Пространство H_n^2

Определение 1. *Пространство* H_n^2 $(n>0)$ — *класс аналитических функций* $f(z)$, *регулярных в единичном круге* $|z|=1$ *и таких, что* $f^{(n)}\in H_n^2$, *с нормой*

$$\|f\|_{H_n^2}=\max_{0<k<n}\|f^{(k)}\|_{H^2}=\max_{0\leqslant k<n}\sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi}|f^{(k)}(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

При $n=0$ получаем классическое пространство $H_0^2=H^2$. Полнота H_n^2 следует непосредственно из определения нормы. Норма (1.1) эквивалентна норме

$$\|f\|_{H_n^2}^{*}=\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty}|c_i|^2\,(i+1)^{2n}}, \tag{1.2}$$

где $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}c_iz^i$ $(|z|<1)$.

Для пространства H^2_n справедлива легко доказываемая

Теорема 1. *Если* $f \in H^2_n$ $(n > 0)$, *то* $f^{(k)}(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ *непрерывно продолжимы на круг* $|z| \leqslant 1$; *при этом*

$$\max_{\substack{|z| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} |f^{(k)}(z)| \leqslant C \|f\|_{H^2_n}, \tag{1.3}$$

где константа C *зависит только от* n.

Определение 2. *Класс функций* $f(z)$ $(|z| \leqslant 1)$, *регулярных в круге* $|z| < 1$ *и таких, что* $f^{(n)} \in A$ *с нормой*

$$\|f\|_{A_n} = \max_{\substack{|z| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} |f^{(k)}(z)| \quad (n > 0) \tag{1.4}$$

будем называть пространством A_n $(n > 0)$.

Очевидно $A_0 = A$, $A_n \subset H^2_n$. Полнота A_n следует из определения нормы. Кроме того, из теоремы 1 получаем

$$H^2_n \subset A_{n-1} \text{ и } \|f\|_{A_{n-1}} \leqslant \|f\|_{H^2_n} \quad (n > 1). \tag{1.5}$$

Из классических теорем аппроксимации следует, что множество $\{1, z, z^2, \cdots, z^n, \cdots\}$ фундаментально в пространствах H^2_n и A_n $(n > 0)$.

§ 2. Алгебры H^2_n, A_n

Теорема 2. *Если* $f, g \in H^2_n$ $(n > 1)$, *то* $f \cdot g \in H^2_n$. *При этом*

$$\|f \cdot g\|_{H^2_n} < C \|f\|_{H^2_n} \cdot \|g\|_{H^2_n}, \tag{2.1}$$

где C *зависит только от* n.

Другими словами H^2_n $(n > 1)$ — банахова алгебра с еденицей $f(z) \equiv 1$.

Доказательство: Если $f \cdot g \in H^2_n$, то

$$[f(z) \cdot g(z)]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)}(z) \cdot g^{(i)}(z) \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Так как по крайней мере одно из чисел i, $k - i$ меньше n, то, в силу теоремы 1, $f^{(k-1)} \cdot g^{(i)} \in H^2$ и

$$\|f^{(k-i)} g^{(i)}\|_{H^2} \leqslant C_1 \|f\|_{H^2_n} \cdot \|g\|_{H^2_n} \; (i = 0, 1, \cdots k, \; k = 0, 1, \cdots, n),$$

где C_1 зависит от k и i. Поэтому справедливо (2.1), где C зависит только от n.

Еще проще доказывается

Теорема 3. *Если* $f, g \in A_n$ $(n \geqslant 0)$, *то* $f \cdot g \in A_n$, *причем*

$$\|fg\|_{A_n} \leqslant C \|f\|_{A_n} \cdot \|g\|_{A_n}.$$

Другими словами, пространство A_n $(n > 0)$ является банаховой алгеброй. Из § 1 следует, что алгебры A_n $(n > 0)$ и H^2_n $(n > 1)$

имеют одну образующую z.

Примечание: пространство H^2 не является алгеброй относительно обычного умножения.

§ 3. Идеалы алгебры H_n^2 $(n\geqslant 1)$

Теорема 4. *Пространство максимальных идеалов алгебры H_n^2 $(n\geqslant 1)$ гомеоморфно замкнутому кругу $|z|\leqslant 1$.*

Доказательство. Алгебра H_n^2 $(n\geqslant 1)$ является алгеброй с одной образующей. Пусть $F(f)$ $(f\in H_n^2)$ — мультипликативный функционал, причем $F(z)=z_0$. Легко видеть, что $|z_0|\leqslant 1$. В самом деле, если бы $|z_0|>1$, то $|F(z^m)|=|z_0|^m$ возрастало бы при $m\to\infty$ со скоростью геометрической прогрессии, в то время как

$$\|z^m\|_{H_n^2}=O(m^n)\quad(m\to\infty).$$

Так как функционал $F(f)$ ограничен, то $F(f)|\leqslant C\|f\|_{H_n^2}$; в частности

$$|F(z^m)|=|z_0|^m\leqslant C\|z^m\|_{H_n^2}\leqslant C_1 m^n,$$

что приводит к противоречию. Поэтому для любого полинома $P(z)$ имеем $F(P)=P(z_0)$ и, следовательно

$$F(f)=f(z_0)\quad(f\in H_n^2).$$

Аналогичную теорему можно доказать и для алгебры A_n.

Переходим теперь к описанию других замкнутых идеалов алгебры H_n^2.

Определение 1. Пусть $K_0\supset K_1\supset\cdots\supset K_{n-1}$ — замкнутые множества на окружности $|z|=1$, а $G(z)$ — внутренняя функция. Обозначим через $I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}$ множество функций $f\in H_n^2$, удовлетворяющих условиям

1) $f(z)=f'(z)=f''(z)=\cdots=f^{(i)}(z)=0$ $(z\in K_i,\ i=0,1,\cdots,n-1)$;

2) $G(z)$ делит $f(z)$.

Теорема 5. *$I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}$ — замкнутый идеал (быть может, тривиальный).*

Доказательство. Из (1.5) следует, что

$$I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}$$

— замкнутое подпространство H_n^2, так как всякий предельный элемент в метрике H_n^2 является также предельным элементом в метрике A_{n-1} и удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 1. Кроме того $z\cdot I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}\subset I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}$. Следовательно $I\{G(z);\ K_0,\ K_1,\cdots,\ K_{n-1}\}$ — замкнутый идеал.

Примечание: если идеал не тривиальный, то множество K_0

удовлетворяет условию Берлинга-Карлесона. Как известно [6], это условие заключается в следующем:

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty,$$

где $\varphi(t)$ — мера замкнутого множества точек на окружности $|z|=1$, расстояние которых от множества K_0 не превышает t $(t>0)$.

Это условие, как показано в работе [6], эквивалентно такому условию: пусть $\{\delta_n\}$—последовательность длин дополнительных интервалов множества K_0, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \log \frac{1}{\delta_n} < \infty, \ \text{mes}\ K_0=0.$$

Вопрос о том является ли всякий замкнутый идеал I алгебры H_n^2 идеалом $I\{G(z);\ K_0,\ K_1, \cdots,\ K_{n-1}\}$ остается открытым. (Как известно, для пространства H^2 ответ на аналогичный вопрос положительный [3]; при этом роль идеалов играют инвариантные подпространства пространства H^2).

Однако для главных идеалов, т. е. замкнутых идеалов, порожденных одним элементом $f \in H_n^2$, в случае, когда множества $K_0,\ K_1, \cdots,\ K_{n-1}$ совпадают $(K_0 = K_{n-1} = K)$ и K состоит из конечного числа точек*, справедлива

Теорема 6. *Пусть $f(z)$— произвольная функция из H_n^2 такая, что*

$$f(e^{i\theta_k}) = f'(e^{i\theta_k}) = \cdots = f^{(n-1)}(e^{i\theta_k}) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

и

$$f(e^{i\theta}) \neq 0 \quad (\theta \neq \theta_k,\ k = 1, 2, \cdots, m).$$

Пусть каноническая факторизация $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = B(z)\, S(z)\, F(z),$$

где $B(z)$—произведение Бляшке, а

$$S(z) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m} a_k \frac{e^{i\theta_k}+z}{e^{i\theta_k}-z}\right\} \quad (a_k>0).$$

Тогда замкнутый идеал I_f, порожденный функцией $f(z)$ (т. е. множество fH_n^2) совпадает с идеалом $I_n\{G(z);\ K\}$, где

$$K = \{e^{i\theta_k}\}_1^m, \quad G(z) = B(z) \cdot S(z).$$

Доказательство. Для упрощения изложения рассмотрим случай, когда $n=1$, $m=1$, т. е. когда $f \in H_1^2$, множество K состоит из одной точки $e^{i\theta_1}$. Наметим сначала идею доказательства.

---

* В этом случае идеал $I\{G(z);\ K_0, \cdots,\ K_{n-1}\}$ будем кратко обозначать $I_n\{G(z);\ K\}$.

Пусть $g(z)$—произвольная функция из $I_1[G(z); K]$. Представим $g(z)$ в виде $g(z) = G(z) \cdot g_1(z)$.

В силу результата, установленного в работе [5] (см. введение)

$$g_1 \in H_1^2 \quad \text{и} \quad \|g_1\|_{H_1^2} \leqslant \|g\|_{H_1^2}.$$

Аналогично, $f(z) = G(z)\, F(z)$, где $F(z)$—внешняя функция:

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta + i\gamma\right\}, \quad F \in H_1^2.$$

Далее

$$g(z) = f(z) \cdot [F(z)]^{-1} g_1(z).$$

Если бы функция $[F(z)]^{-1}$ принадлежала пространству H_1^2, то из последнего равенства следовало бы $g \in I_f$. Но так как в действительности $[F(z)]^{-1}$ не принадлежит H_1^2, то мы строим некоторую аппроксимацию этой функции:

$$\varphi_{\varepsilon,\alpha} = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta - i\gamma\right\} \times$$

$$\times \Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1-\varepsilon)}) \cdot \Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1+\varepsilon)}) \quad (\alpha > 0),$$

где

$$\Phi_\alpha(z) = \left(\frac{z-1}{z-(\alpha+1)}\right)^2 \quad (\alpha > 0).$$

Доказывается, что $\varphi_{\varepsilon,\alpha} \in H_1^2$ $(\varepsilon > 0,\ \alpha > 0)$, откуда следует $f \cdot \varphi_{\varepsilon\alpha} \times g \in I_f$. Переходя к пределу в метрике H_1^2 сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $\alpha \to 0$ и производя попутно необходимые оценки, мы получаем $g \in I_f$*.

Переходим теперь к подробному изложению доказательства теоремы 6. Пусть C обозначает окружность $|z| = 1$, $\tau_\varepsilon (\varepsilon > 0)$—дугу этой окружности $\theta_1 - \varepsilon < \arg z < \theta_1 + \varepsilon$.

Введем следующие обозначения:

$$F_{C/\tau_\varepsilon}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta + i\gamma\right\};$$

$$F_{\tau_\varepsilon}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta\right\};$$

$$\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) = \Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1-\varepsilon)}) \cdot \Phi_\alpha(ze^{-i(\theta_1+\varepsilon)}),$$

$$\varphi_{\varepsilon,\alpha}(z) = F_{C/\tau_\varepsilon}^{-1}(z) \cdot \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) \quad (\varepsilon, \alpha > 0).$$

---

* Аналогичная идея впервые была применена Т. Карлеманом ([7], стр. 107—109) для доказательства известной теоремы, относящейся к алгебре A.

Докажем, что $\varphi_{\varepsilon,\alpha} \in H_1^2$ или, что то же самое, $\varphi'_{\varepsilon,\alpha} \in H^2$.
Пусть $z = \rho e^{it}$ $(0 < \rho < 1)$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} |\varphi_{\varepsilon\alpha}(\rho e^{it})|^2\, dt = \int\limits_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} |\varphi_{\varepsilon\alpha}(\rho e^{it})|^2\, dt + \int\limits_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} |\varphi_{\varepsilon,\alpha}(\rho e^{it})|^2\, dt. \tag{3.1}$$

1. Рассмотрим первый интеграл правой части (3.1). Оценим $\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)$ при $|\theta_1 - t| < \varepsilon$ $(z = \rho e^{it},\ \rho < 1)$, т. е. $\dfrac{z}{|z|} \in \tau_\varepsilon$.

$$\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z) = -F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z) \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2} \log |f(e^{i\theta})|\, d\theta \cdot \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z) +$$

$$+ F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z) \cdot \Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z) = L_1(z) + L_2(z). \tag{3.2}$$

Очевидно $L_2(z)$—регулярная и ограниченная функция в круге $|z| < 1$, т. е.

$$|L_2(z)| \leqslant M \quad (|z| < 1). \tag{3.3}$$

Имеем

$$|L_1(z)| \leqslant |F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)| \frac{M_2}{\rho^2(z)} \frac{|z - e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2\, |z - e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2}{|z - (1+\alpha)\, e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2\, |z - (1+\alpha)\, e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2},$$

где

$$M_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})|\, d\theta, \quad \rho(z) = \min_{e^{i\theta} \in C/\tau_\varepsilon} |z - e^{i\theta}|.$$

Так как $\dfrac{z}{|z|} \in \tau_\varepsilon$, а $e^{i\theta} \in C/\tau_\varepsilon$, то, очевидно

$$\rho(z) = \min \{|z - e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|;\ |z - e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|\}.$$

Для определенности положим, что $\rho(z) = |z - e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|$. Тогда

$$|L_1(z)| \leqslant |F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)| \frac{4M_2}{\alpha^4} \leqslant C < \infty. \tag{3.4}$$

В самом деле, функция $F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)$ ограничена в круге $|z| < 1$, так как пользуясь известными свойствами интеграла Пуассона, находим

$$|F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)| = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \int\limits_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log |f(e^{i\theta})|\, d\theta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max \{1, \max_{\theta_1+\varepsilon < \theta < 2\pi+\theta_1-\varepsilon} |f(e^{i\theta})|^{-1}\}.$$

В силу (3.3) и (3.4) имеем

$$\sup_{0<\rho<1} \int\limits_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} |\varphi(\rho e^{it})|^2\, dt < \infty. \tag{3.5}$$

Таким образом, первый интеграл правой части (3.1) равномерно ограничен при $0<\rho<1$.

II. Рассмотрим теперь второй интеграл правой части (3.1). Оценим $\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)$ при $\frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon$, предварительно представив $\varphi_{\varepsilon,\alpha}(z)$ в виде

$$\varphi_{\varepsilon\alpha}(z)=F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot F^{-1}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon\alpha}(z).$$

Тогда

$$\varphi'_{\varepsilon\alpha}(z)=-\frac{F'(z)}{[F(z)]^2}\cdot F_{\tau_\varepsilon}(z)\,\Phi_{\varepsilon\alpha}(z)+\frac{1}{\pi}\frac{F_{\tau_\varepsilon}(z)}{F(z)}\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\times$$

$$\times\int\limits_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta+\frac{F_{\tau_\varepsilon}(z)}{F(z)}\cdot\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z).$$

Так как функция $F(z)$, будучи непрерывной, не обращается в нуль на замкнутом множестве $\left\{z\colon |z|\leqslant 1,\ \frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon\right\}$, то

$$\min_{\substack{|z|<1\\ \frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon}}|F(z)|=\delta>0.$$

Функции $F_{\tau_\varepsilon}(z)$, $\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)$, $\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z)$ регулярны и ограничены в круге $z|<1$.

Отсюда

$$|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)|\leqslant\frac{|F'(z)|}{\delta^2}\cdot M_3+\frac{M_4}{\delta\rho_1^2(z)}\,\frac{|z-e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2}{|z-(1+\alpha)\,e^{i(\theta_1-\varepsilon)}|^2}\times$$

$$\times\frac{|z-e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2}{|z-(1+\alpha)\,e^{i(\theta_1+\varepsilon)}|^2}+\frac{M_2}{\delta},$$

где $\rho_1(z)=\min\limits_{e^{i\theta}\in\tau_\varepsilon}|z-e^{i\theta}|$.

Повторяя все ранее сказанное о $\rho(z)$, но применительно к $\rho_1(z)$, находим

$$|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(z)|\leqslant\frac{|F'(z)|}{\delta^2}\,M_3+\frac{M_6}{\delta\alpha^4}+\frac{M_5}{\delta}\quad\left(\frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon\right).\tag{3.6}$$

Следовательно

$$\sup_{0<\rho<1}\int\limits_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}|\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt<\infty.\tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7) ясно, что

$$\sup_{0<\rho<1}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi'_{\varepsilon,\alpha}(\rho e^{it})|^2\,dt<\infty.$$

Следовательно $\varphi_{\varepsilon,\alpha}\in H_1^2$.

Функция $K(z)=f(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)$ принадлежит идеалу I_f. Так как $g_1\in H_1^2$, то функция $K(z)\cdot g_1(z)$ также принадлежит I_f.

Далее

$$f(z)=G(z)\cdot F(z),\quad g(z)=G(z)\,g_1(z).$$

Поэтому

$$K(z)\cdot g_1(z) = F(z)\cdot\varphi_{\varepsilon,\alpha}(z)\, g(z) = F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot g(z).$$

Обозначим

$$\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) = F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)$$

и докажем, что $\Psi_{\varepsilon,\alpha}\in H_1^2$,

причем

$$\|\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) - \Phi_\alpha^2(z e^{-i\theta_1})\|_{H_1^2}\to 0 \tag{3.8}$$

при $\varepsilon\to 0$ и каждом фиксированном $\alpha>0$.

а) Очевидно при каждом $d>0$

$$\sup_{\varepsilon>0,\,|z|<1}|\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z)|<\infty,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) = \Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta}).$$

Отсюда следует, что

$$\|\Psi_{\varepsilon,\alpha}(z) - [\Phi_\alpha(ze^{-i\theta_1})]^2\|_{H^2}\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

б) Аналогичное соотношение докажем и для производной

$$\Psi'_{\varepsilon,\alpha}(z) = F'_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)+F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z).$$

Легко проверяется, как и выше, что

$$\|F_{\tau_\varepsilon}(z)\,\Phi'_{\varepsilon,\alpha}(z) - [\Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta_1})]'\|_{H^2}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0. \tag{3.9}$$

Докажем теперь, что

$$\infty > \|\Phi_{\varepsilon,\alpha}\cdot F'_{\tau_\varepsilon}\|_{H^2}\to 0\quad\text{при } \varepsilon\to 0. \tag{3.10}$$

Так как

$$\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\,F'_{\tau_\varepsilon}(z) = \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot E_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta =$$

$$= \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot[F(z)\cdot F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)]' = \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\,[F'(z)\cdot F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z) -$$

$$-F(z)\,F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta] =$$

$$=\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\left[F'(z)\cdot F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(z) - F_{\tau_\varepsilon}(z)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi+\theta_1-\varepsilon}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}\log|f(e^{i\theta})|\,d\theta\right],$$

то, разбивая круг $|z|<1$ на два сектора $\frac{z}{|z|}\in\tau_\varepsilon$ и $\frac{z}{|z|}\in C/\tau_\varepsilon$ и повторяя рассуждения, приведенные выше (см. пункты I и II), мы легко убедимся, что функция $\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\tau_\varepsilon}(z)$ принадлежит пространству H^2, а ее граничные значения на окружности $z=e^{it}$ удовлетворяют оценкам (следует при этом принять во внимание, что $|F^{-1}_{C/\tau_\varepsilon}(e^{it})|=1$, если $e^{it}\in\tau_\varepsilon$):

а) Если $z=e^{it}\overline{\in}\tau_\varepsilon$, то

$$|\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\gamma_\varepsilon}(z)|\leqslant M,$$

где M не зависит от ε.

б) Если $z=e^{it}\in\gamma_\varepsilon$, то почти везде

$$|\Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\gamma_\varepsilon}(z)|\leqslant M_1|F'(z)|+C, \tag{3.11}$$

где M_1 и C не зависят от ε.

Таким образом

$$|\Phi_{\varepsilon,\alpha}(e^{it})\,F_{\gamma_\varepsilon}(e^{it})\leqslant \max\{C,\,M\}+M_1\,|F'(e^{it})| \quad (\textit{п. в.}).$$

Так как в каждой точке окружности $|z|=1$ $(z\neq e^{i\theta_1})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \Phi_{\varepsilon,\alpha}(z)\cdot F'_{\gamma_\varepsilon}(z)=0,$$

то, в силу известной теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега при наличии мажоранты, мы получаем соотношение (3.10). Из (3.9) и (3.10) следует (3.8). Так как $g\in H_1^2$, то

$$\|g\varphi_{\varepsilon,\alpha}(z)-g\Phi^2(ze^{-i\theta_1})\|_{H_1^2}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Обозначим

$$g_\alpha(z)=g(z)\,\Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta_1}).$$

Из доказанного следует, что $g_\alpha\in I_f$. Покажем, что

$$\|g_\alpha(z)-g(z)\|_{H_1^2}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \tag{3.12}$$

а) Так как

$$|g_\alpha(z)\leqslant|g(z)| \text{ и } \lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(z)=g(z),$$

то

$$\|g_\alpha(z)-g(z)\|_{H^1}\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \tag{3.13}$$

б)

$$g'_\alpha(z)=g'(z)\,\Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta_1})-4g(z)\,[\Phi_\alpha(ze^{-i\theta_1})]^{3/2}\frac{\alpha e^{i\theta_1}}{[z-(1+\alpha)\,e^{i\theta_1}]^2}\,.$$

Очевидно $\|g'(z)\,\Phi_\alpha^2(ze^{-i\theta_1})-g'(z)\|_{H^1}\to 0$ $(\alpha\to 0)$. Так как $|\Phi_\alpha(z)|<1$ $(|z|\leqslant 1,\ \alpha>0)$, то остается доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{2\pi}|g(e^{it})|^2\frac{\alpha^2\,dt}{|e^{it}-(1+\alpha)\,e^{i\theta_1}|^4}=0. \tag{3.14}$$

Произведя замену $t-\theta=\tau$, интеграл (3.14) перепишем так:

$$\alpha^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2\,d\tau}{|e^{i\tau}-(1+\alpha)|^4}\,.$$

Покажем, что

$$g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})=o\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}\right)\ (\tau\to 0).$$

В самом деле, согласно неравенству Коши-Буняковского

$$|g(e^{i\theta_1}e^{i\tau})| < \int_0^\tau |g'(e^{i\theta_1}e^{i\tau})|\,d\tau \leqslant \sqrt{\int_0^\tau |g'(e^{i\theta_1}e^{i\tau})|^2\,d\tau}\,[\tau]^{1/2},$$

$$g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau}) = o\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}\right)\quad(\tau\to 0).$$

Следовательно

$$\varphi(\tau) = \frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2}{|\tau|} \leqslant M \text{ и } \lim_{\tau\to 0}\varphi(\tau) = 0. \tag{3.15}$$

Далее

$$|e^{i\tau}-(1+\alpha)| = \sqrt{1+(1+\alpha)^2-2(1+\alpha)\cos\tau} = \sqrt{4(1+\alpha)\sin^2\frac{\tau}{2}+\alpha^2}.$$

Использовав неравенство

$$\frac{\tau}{\pi} \leqslant \sin\frac{\tau}{2} < \frac{\tau}{2}\quad(0\leqslant\tau\leqslant\pi),$$

получим

$$\alpha^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|g(e^{i\theta_1}e^{i\tau})|^2\,d\tau}{\left[4(1+\alpha)\sin^2\frac{\tau}{2}+\alpha^2\right]^2} \leqslant \alpha^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2\,d\varepsilon}{\left(\frac{4}{\pi^2}\tau^2+\alpha^2\right)^2} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\frac{|\tau|}{\alpha}\,\frac{|g(e^{i\theta_1}\cdot e^{i\tau})|^2}{|\tau|}\cdot\frac{d\tau}{\alpha}}{\left[\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^2+1\right]^2} = \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{|\tau|\,\varphi(\alpha\tau)\,d\tau}{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\tau^2\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|\,\varphi(\alpha\tau)}{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\tau^2\right)^2}\,d\tau.$$

В силу (3.15) последний интеграл стремится к нулю при $\alpha\to 0$.

Таким образом, соотношение (3.14), а вместе с ним и (3.12) выполняются. Из всего сказанного следует, что

$$g(z)\in I_f.$$

Для случая произвольного $n>1$ доказательство совершенно аналогично, только вместо функции $\Phi_\alpha(z)$ надо взять функцию $\Phi_\alpha^n(z)$. Теорема 6 доказана.

Черкасский ОТФ Киевского
инженерно-строительного института

Поступило 17.III.1969

Վ. Ս. ԿՈՐՈԼԵՎԻՉ. Անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի Բանախի ալգեբրաներ *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում են $|z| < 1$ շրջանում անալիտիկ այնպիսի ֆունկցիաների $H_n^2 (n > 0)$ Բանախի տարածությունները, որոնց $f^{(n)}(z) \in H^2$. H_n^2 տարածությունում նորման սահմանվում է այսպես՝

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0 \leq k \leq n} \{\|f^{(k)}(z)\|_{H^2}\}.$$

Միաժամանակ դիտարկվում են $A_n \subset H_n^2$ բանախի տարածությունները, որոնք կազմված են այնպիսի $f(z)$ ֆունկցիաներից, որոնց համար $f^{(n)}(z)$-ը անընդհատ է $|z| \leq 1$ — ում։

Ցույց է տրված, որ $H_n^2 (n > 1)$ ինչպես նաև $A_n (n > 0)$ տարածությունները հանդիսանում են բանախի տարածություններ սովորական արտադրյալով։ Հիմնական արդյունքը կայանում է H_n^2 — ի որոշ փակ իդեալների, հատկապես միակ էլեմենտով առաջացած իդեալներ (այսպես կոչված գլխավոր իդեալների) նկարագրելում։ Քննարկվում է H_n^2 — ի փակ իդեալների և «ներքին ֆունկցիաների» միջև եղած կապը։

V. S. KOROLEVITCH. *Some banach algebras of analytic functions* (summary)

Banach spaces H_n^2 $(n > 0)$ consisting of analytic functions $f(z)(|z| < 1)$ such that $f^{(n)}(z) \in H^2$ are studied. The norm in the space H_n^2 is defined as follows

$$\|f\|_{H_n^2} = \max_{0 < k < n} \{\|f^{(k)}(z)\|_{H^2}\}.$$

ncidentally under consideration are the Banach spaces $A_n \subset H_n^2$ consisting of functions $f(z)$ such that $f^{(n)}(z)$ is continuous in $|z| < 1$.

The spaces H_n^2 $(n > 1)$ as well as A_n $(n > 0)$ are shown to be banach algebras with usual multiplication.

The principal result is the description of some closed ideals of H_n^2 especially those generated by a single element, the so-called main ideals. The connection between the closed ideals of H_n^2 and „inner“ functions is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов.* Коммутативные нормированные кольца, Москва, Изд. Ф.—М. лит., 1960.
2. *A. Beurling.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math., 81, № 3—4, 1949, 239—255.
3. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, Москва. ИИЛ, 1963.
4. *W. Rudin.* The closed ideals in an Algebra of continuous functions, Can. J. Math., 9, № 3, 1957, 426—434.
5. *Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич.* О функциях, регулярных в круге и гладких на его границе, Математические заметки, 7, вып. 2, 1970, 165—172.
6. *L. Carleson.* Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta Math., 87, № 3—4, 1952, 325—345.
7. *T. Carleman.* Les fonctions quasi-analytiques, Paris, 1926, 107—109.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

Г. Л. ЛУНЦ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С РОСТОМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Для того чтобы целая функция $f(z)$ целого порядка ρ была функцией вполне регулярного роста по отношению к уточненному порядку $\rho(r)$, необходимо и достаточно, как показал Б. Я. Левин [1], чтобы множество ее нулей $\{\lambda_n\}$ было правильно распределенным, то есть чтобы 1) существовала угловая плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ при показателе $\rho(r)$, 2) существовал предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{L(r)}\left(c+\sum_{|\lambda_n|<r}\lambda_n^{-\rho}\right), \tag{1}$$

где $L(r)=r^{\rho(r)-\rho}$, а c — некоторая постоянная. Известно также [1], что если $F(\varphi)$ — функция распределения угловой плотности и множество $\{\lambda_n\}$ правильно распределено, то

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi}\,dF(\varphi)=0. \tag{2}$$

Б. Я. Левин высказал недавно предположение, что *если существует угловая плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ и выполнено условие* (2), *то можно так дополнить последовательность $\{\lambda_n\}$ последовательностью с нулевой плотностью, что пополненная последовательность окажется правильно распределенной*. В настоящей статье это предположение будет доказано (в несколько усиленной формулировке).

1°. Пусть сначала $\rho(r)=\rho$. В этом случае существование предела (1) равносильно существованию предела

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{|\lambda_n|<r}\lambda_n^{-\rho}. \tag{3}$$

Последовательность $\{\lambda_n\}$ будем всегда предполагать занумерованной в порядке неубывания модулей ее членов. Существование угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ означает, что для любых ψ_1, ψ_2, не принадлежащих некоторому исключительному счетному множеству

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}}=F(\psi_2)-F(\psi_1)=\Delta(\psi_1,\psi_2),$$

где $\{\lambda_{n_k}\}$—та подпоследовательность $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg\lambda_{n_k}\in\in[\psi_1,\psi_2]$. Здесь $F(\psi)$ — некоторая неубывающая функция (функция распределения угловой плотности).

Выберем разбиение интервала $[0, 2\pi]$ точками $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q$ ($\theta_0 = 0$, $\theta_q = 2\pi$). Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, если значения $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q$ — не исключительные, то существует такое $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что при $k > k_0$

$$\frac{\Delta_j - \varepsilon}{k} < |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho} < \frac{\Delta_j + \varepsilon}{k}, \tag{4}$$

где $\Delta_j = \Delta(\theta_{j-1}, \theta_j)$, а $\{\lambda_{n_{jk}}\}$ — та подпоследовательность из $\{\lambda_n\}$, для точек которой $\arg \lambda_{n_{jk}} \in [\theta_{j-1}, \theta_j)$, и

$$\frac{D - \varepsilon}{k} < |\lambda_k|^{-\rho} < \frac{D + \varepsilon}{k}, \tag{5}$$

где $D = \sum\limits_{j=1}^{q} \Delta_j = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}$ — плотность последовательности $\{|\lambda_n|\}$. Будем считать, что $D \neq 0$, так как при $D = 0$ доказываемое утверждение тривиально: достаточно дополнить последовательность $\{\lambda_n\}$ последовательностью $\{e^{\frac{\pi i}{\rho}} \lambda_n\}$.

Пусть теперь m_{ji}, n_i ($i = 1, 2$) — число членов последовательности $\{\lambda_{n_{jk}}\}$, соответственно $\{\lambda_n\}$, попавших в круг $|z| \leqslant R_i$ ($R_2 > R_1$). Из (4), (5) и того факта, что $\sum\limits_{n=p_1}^{p_2} \frac{1}{n} - \ln \frac{p_2}{p_1} = o(1)$ при $p_1 \to \infty$ и $p_2 > p_1$, следует, что при любом $\varepsilon > 0$ и $R_1 > R(\varepsilon)$

$$(\Delta_j - \varepsilon) \ln \frac{m_{j_2}}{m_{j_1}} \leqslant \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho} \leqslant (\Delta_j + \varepsilon) \ln \frac{m_{j_2}}{m_{j_1}}, \tag{6}$$

$$(D - \varepsilon) \ln \frac{n_2}{n_1} \leqslant \sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho} \leqslant (D + \varepsilon) \ln \frac{n_2}{n_1}. \tag{7}$$

С другой стороны

$$\frac{\Delta_j - \varepsilon}{\Delta + \varepsilon} < \frac{m_{ji}}{n_i} < \frac{\Delta_j + \varepsilon}{D - \varepsilon} \qquad (i = 1, 2),$$

и если $\Delta_j \neq 0$, то $(1 - \varepsilon_1)\frac{n_2}{n_1} < \frac{m_{j2}}{m_{j1}} < (1 + \varepsilon_1)\frac{n_2}{n_1}$. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ при достаточно большом R_1. Поэтому при $\Delta_j \neq 0$, если $\frac{R_2}{R_1} > \beta > 1$ (следовательно и $\frac{n_2}{n_1} \geqslant \beta' > 1$, если R_1 достаточно велико) с помощью (6) и (7) получим

$$\lim_{n_1 \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\Delta_j}{D}, \tag{8}$$

то есть

$$\frac{\sum\limits_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_j}|^{-\rho}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\Delta_j}{D} + o(1). \tag{8'}$$

Это равенство справедливо и при $\Delta_j = 0$. Действительно, пусть $\Delta_j = 0$. Дополним последовательность $\{\lambda_n\}$ какой-либо последовательностью с плотностью $\eta > 0$ и расположенной в угле $\theta_{j-1} \leqslant \arg z < \theta_j$. Тогда для пополненной последовательности будет иметь место равенство вида (8), причем его правая часть будет равна $\frac{\eta}{D+\eta}$. В то же время величина, стоящая под знаком предела в левой части (8) при таком пополнении последовательности $\{\lambda_n\}$ может только увеличиться (к числителю и к знаменателю прибавляется одно и то же положительное число, причем числитель меньше знаменателя). Ввиду произвольности η отсюда следует, что для данной последовательности правая часть (8) равна нулю.

Пусть $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$ $(0 \leqslant \varphi_n < 2\pi)$, тогда $\lambda_{n_{jk}}^{-\rho} = |\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho} e^{-i\rho\varphi_{n_{jk}}}$ и при $\breve{\varphi}_j \in [\theta_{j-1}, \theta_j)$

$$\left| \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho} e^{-i\rho\breve{\varphi}_j} - \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} \lambda_{n_{jn}}^{-\rho} \right| = \left| \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho} (e^{-i\rho\breve{\varphi}_j} - e^{-i\rho\varphi_{n_{jk}}}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant A\delta \sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho}, \tag{9}$$

где δ — диаметр разбиения интервала $[0, 2\pi]$, а A — постоянная, зависящая только от ρ. Умножая обе части равенства (8′) на $e^{-i\rho\breve{\varphi}_j}$, суммируя по всем j $(j = 1, \cdots, q)$ и пользуясь (9), получим при больших n_2

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} - \sum_{j=1}^{q} \frac{\Delta_j}{D} e^{-i\rho\breve{\varphi}_j} \right| < A_1\delta + o(1)$$

(A_1 — постоянная, не зависящая от δ). Но так как δ произвольно, то это означает, что

$$\lim_{n_2\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n'}^{n_2} \lambda_k^{-\rho}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{1}{D} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi}\, dF(\varphi) \tag{10}$$

и, в силу условия (2),

$$\left|\sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho}\right| = o\left(\sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho}\right). \tag{11}$$

Полезно заметить, что из равенства (10), справедливого при $\frac{n_2}{n_1} \geqslant \beta > 1$, следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{-\rho}}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{1}{D}\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi}\, dF(\varphi). \tag{12}$$

Действительно, выбрав любое $\varepsilon > 0$ и некоторое $\beta > 1$, подберем такое N, что

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=N}^{n} \lambda_k^{-\rho}}{\sum\limits_{k=N}^{n} |\lambda_k|^{-\rho}} - A\right| < \varepsilon$$

при $n \geqslant N\beta$, где $A = \frac{1}{D}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi}\, dF(\varphi)$.

Тогда при $n \geqslant N\beta$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{-\rho}}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N-1} \lambda_k^{-\rho} + \sum\limits_{k=N}^{n} \lambda_k^{-\rho}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1} |\lambda_k|^{-\rho} + \sum\limits_{k=N}^{n} |\lambda_k|^{-\rho}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N-1} \lambda_k^{-\rho} + [A+\alpha(n)]\sum\limits_{k=N}^{n} |\lambda_k|^{-\rho}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1} |\lambda_k|^{-\rho} + \sum\limits_{k=N}^{n} |\lambda_k|^{-\rho}} \sim A + \alpha(n)$$

при $n \to \infty$, где $|\alpha(n)| < \varepsilon$, если $n \geqslant N\beta$. Но это и означает, что равенство (12) справедливо.

Переходим к построению дополнительной последовательности. Выбираем любые целые $h \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 2$ и строим вектор $\lambda_1^{-\rho} + \lambda_2^{-\rho} + \cdots + \lambda_h^{-\rho} = \Lambda_0 e^{i\psi_0}$, после чего дополняем последовательность $\{\lambda_n\}$ числами $\mu_1, \cdots, \mu_{p_0}$, выбранными так, что

$$|\mu_1| = \cdots = |\mu_{p_0}| = |\lambda_h|,\ \arg\mu_1 = \cdots = \arg\mu_{p_0} = -\frac{\psi_0+\pi}{\rho},$$

$$p_0|\lambda_h|^{-\rho} \leqslant \Lambda_0 < (p_0+1)\ |\lambda_h|^{-\rho}.$$

Очевидно, что если $\Lambda_0 e^{i\psi_0} + \mu_1^{-\rho} + \cdots + \mu_{p_0}^{-\rho} = \eta_0 e^{i\psi_0}$, то $\eta_0 < |\lambda_h|^{-\rho}$ (возможно, что $p_0 = 0$, это соответствует случаю, когда $\Lambda_0 < |\lambda_h|^{-\rho}$). Теперь строим вектор $\eta_0 e^{i\psi_0} + \lambda_{h+1}^{-\rho} + \cdots + \lambda_{\alpha h}^{-\rho} = \Lambda_1 e^{i\psi_1}$ и дополняем последовательность $\{\lambda_n\}$ числами $\mu_{p_0+1}, \cdots, \mu_{p_1}$ такими, что $|\mu_{p_0+1}| = \cdots = |\mu_{p_1}| = |\lambda_{\alpha h}|$,

$$\arg\mu_{p_0+1} = \cdots = \arg\mu_{p_1} = -\frac{\psi_1+\pi}{\rho},\ (p_1-p_0)\,|\lambda_{\alpha h}|^{-\rho} \leqslant \Lambda_1 < (p_1-p_0+1)|\lambda_{\alpha h}|^{-\rho},$$

Очевидно, что если $\sum\limits_{n=1}^{\alpha h} \lambda_n^{-\rho} + \sum\limits_{n=1}^{p_1} \mu_n^{-\rho} = \eta_1 e^{i\psi_1}$, то $\eta_1 < |\lambda_{\alpha h}|^{-\rho}$. Вообще, после того, как построен вектор $\sum\limits_{n=1}^{\alpha^m h} \lambda_n^{-\rho} + \sum\limits_{n=1}^{p_{m-1}} \mu_n^{-\rho} = \Lambda_m e^{i\psi_m}$, добавляем к последовательности $\{\lambda_n\}$ члены $\mu_{p_{m-1}+1}, \cdots, \mu_{p_m}$ такие, что

$$|\mu_{p_{m-1}+1}| = \cdots = |\mu_{p_m}| = |\lambda_{\alpha^m h}|, \ \arg \mu_{p_{m-1}+1} = \cdots = \arg \mu_{p_m} = -\frac{\psi_m + \pi}{\rho},$$

$$(p_m - p_{m-1}) |\lambda_{\alpha^m h}| \leqslant \Lambda_m < (p_m - p_{m-1} + 1) |\lambda_{\alpha^m h}|,$$

после чего

$$\sum_{n=1}^{\alpha^m h} \lambda_n^{-\rho} + \sum_{n=1}^{p_m} \mu_n^{-\rho} = \eta_m e^{i\psi_m}, \quad \eta_m < |\lambda_{\alpha^m h}|^{-\rho}. \tag{13}$$

Докажем, что если $\{\nu_n\} = \{\lambda_n\} \cup \{\mu_n\}$ (последовательность $\{\nu_n\}$ занумерована в порядке неубывания модулей ее членов), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-\rho}$ сходится и сумма его равна нулю.

Из построения очевидно, что стремятся к нулю частные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-\rho}$ с номерами $n_m = \alpha^m h + p_m$. Предположим, что существует такое $\gamma > 0$ и такая бесконечная последовательность индексов $\{q_l\}$, что

$$\left|\sum_{n=1}^{q_l} \nu_n^{-\rho}\right| > \gamma. \tag{14}$$

Достаточно рассмотреть такие q_l, для которых

$$n_{m_l} = \alpha^{m_l} h + p_{m_l} < q_l \leqslant \alpha^{m_l+1} h + p_{m_l} = \tilde{q}_l,$$

так как, по построению, при $\alpha^{m_l+1} h + p_{m_l} < r \leqslant \alpha^{m_l+1} h + p_{m_l+1}$ всегда $\left|\sum\limits_{n=1}^{r} \nu_n^{-\rho}\right| < \left|\sum\limits_{n=1}^{\tilde{q}_l} \nu_n^{-\rho}\right|$. Из (13) и (14) следует, что для любого ε, $0 < \varepsilon < \gamma$, при $l > l(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{n=n_{m_l}+1}^{q_l} \nu_n^{-\rho}\right| = \left|\sum_{n=\alpha^{m_l}h+1}^{q_l'} \lambda_n^{-\rho}\right| > \gamma - \varepsilon > 0, \tag{15}$$

где $\alpha^{m_l} h < q_l' \leqslant \alpha^{m_l+1} h$ и, тем более, $\sum\limits_{h=\alpha^{m_l}h+1}^{q_l'} |\lambda_n|^{-\rho} > \gamma - \varepsilon$. Так как $|\lambda_n|^{-\rho} \sim \frac{D}{n}$ при большом n, то последнее неравенство означает, что

$\ln q_l - \ln(\alpha^{m_l} h) > \frac{\gamma}{D} - \varepsilon_1$ при любом $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно большом l,

то есть $\frac{q_l}{\alpha^{m_l} h} > e^{\frac{\gamma}{D} - \varepsilon_1} > 1$. А так как

$$\sum_{n=\alpha^{m_l} h+1}^{\alpha^{m_l+1} h} |\lambda_n|^{-\rho} \sim D \ln \alpha = O(1),$$

то из (11) следует, что $\left| \sum_{n=\alpha^{m_l} h+1}^{\alpha^{m_l+1} h} \lambda_n^{-\rho} \right| = o(1)$, а это противоречит (15).

Итак, доказано, что $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-\rho} = 0$.

Докажем, наконец, что плотность последовательности $\{\mu_n\}$ равна нулю. Очевидно, что

$$\frac{(\alpha^m - \alpha^{m-1}) h}{|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho} \leqslant \sum_{n=\alpha^{m-1} h+1}^{\alpha^m h} |\lambda_n|^{-\rho} \leqslant \frac{(\alpha^m - \alpha^{m-1}) h}{|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|^\rho},$$

а так как $\left| \frac{\lambda_{\alpha^m h}}{\lambda_{\alpha^{m-1} h}} \right| \sim \alpha$, то отношение $\frac{\alpha^m - \alpha^{m-1}}{|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho} : \sum_{h=\alpha^{m-1} h+1}^{\alpha^m h} |\lambda_n|^{-\rho}$ ограничено снизу и сверху положительными константами, не зависящими от m. По построению и из (11) следует, что

$$\frac{p_m - p_{m-1}}{|\mu_{p_m}|^\rho} = o\left(\sum_{n=\alpha^{m-1} h+1}^{\alpha^m h} |\lambda_n|^{-\rho} \right) = o\left(\frac{\alpha^m - \alpha^{m-1}}{|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho} \right),$$

но $|\lambda_{\alpha^m h}| = |\mu_{p_m}|$ и, таким образом, $p_m - p_{m-1} = o(\alpha^m - \alpha^{m-1})$. Взяв любое $\varepsilon > 0$, выберем такое $M = M(\varepsilon)$, что $p_m - p_{m-1} < \varepsilon(\alpha^m - \alpha^{m-1})$ при $m > M$. Тогда

$$\frac{p_m}{\alpha^m} = \frac{p_0 + (p_1 - p_0) + \cdots + (p_M - p_{M-1}) + (p_{M+1} - p_M) + \cdots + (p_m - p_{m-1})}{1 + (\alpha - 1) + \cdots + (\alpha^M - \alpha^{M-1}) + (\alpha^{M+1} - \alpha^M) + \cdots + (\alpha^m - \alpha^{m-1})} <$$

$$< \frac{C_M + \varepsilon(\alpha^m - \alpha^M)}{C'_M + (\alpha^m - \alpha^M)} \to \varepsilon$$

при $m \to \infty$ (C_M и C'_M не зависят от m). Ввиду произвольности ε это значит, что $p_m = o(\alpha^m)$, а так как $|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho \sim \frac{\alpha^m h}{D}$, то $p_m = o(|\lambda_{\alpha^m h}|^\rho) = o(|\mu_{p_m}|^\rho)$.

Таким образом, $\lim_{m \to \infty} \frac{p_m + 1}{|\mu_{p_m+1}|^\rho} = 0$, а так как $\mu_{p_m+1} = \cdots = \mu_{p_{m+1}}$, то это и означает, что $\lim_{k \to \infty} \frac{k}{|\mu_k|^\rho} = 0$, то есть что плотность последовательности $\{\mu_n\}$ равна нулю. Итак, в случае когда $\rho(r) > \rho$, утверждение полностью доказано.

Замечание. Построенная нами последовательность $\{\mu_n\}$ состоит из групп одинаковых членов. Однако легко так изменить построение, чтобы все члены последовательности $\{\mu_n\}$ были различны. Поступим следующим образом. Если те два члена последовательности $\{\lambda_n\}$, между которыми вставлена группа членов последовательности $\{\mu_n\}$ не одинаковы по модулю: $|\lambda_{\alpha m_h}| < |\lambda_{\alpha m_{h+1}}|$, то полагаем $|\lambda_{\alpha m_n}| < <|\mu_{p_{m-1}+1}| < \cdots < |\mu_{p_m}| < |\lambda_{\alpha m_{h+1}}|$. Если же $|\lambda_{\alpha m_h}| = |\lambda_{\alpha m_{h+1}}| = \cdots = =|\lambda_{\alpha m_{h+r-1}}| < \lambda_{\alpha m_{h+r}}|$, то соответствующую группу членов последовательности $\{\mu_n\}$ вставляем между $\lambda_{\alpha m_{h+r-1}}$ и $\lambda_{\alpha m_{h+r}}$. При таком построении все члены последовательности $\{\mu_n\}$ различны и не совпадают также с членами последовательности $\{\lambda_n\}$. Для обоснования такого построения не требуется никаких существенных изменений в рассуждениях, так как число членов последовательности $\{\lambda_n\}$ на одной и той же окружности большим быть не может: если n — номер первого члена последовательности $\{\lambda_n\}$, попавшего на окружность $|z| = R$, то число членов этой последовательности с модулем R есть $o(n)$. Противоположное допущение противоречило бы существованию угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ (и даже плотности последовательности $\{|\lambda_n|\}$).

2°. Пусть теперь $\rho(r)$—уточненный порядок: $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, $|\rho'(r)| = = o\left(\frac{1}{r\ln r}\right)$ и $F(\psi)$ — функция распределения угловой плотности последовательности $\{\lambda_n\}$ при показателе $\rho(r)$, то есть для всех ψ_1, ψ_2, не принадлежащих некоторому исключительному счетному множеству,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho(|\lambda_{n_k}|)}} = F(\psi_2) - F(\psi_1) = \Delta(\psi_1, \psi_2),$$

где $\{\lambda_{n_k}\}$ — та подпоследовательность из $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg\lambda_{n_k} \in [\psi_1, \psi_2)$. Плотность $D = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_{n_k}|)}}$ последовательности $\{|\lambda_n|\}$ будем считать отличной от нуля (при $D = 0$ доказываемое утверждение тривиально — достаточно дополнить последовательность последовательностью $\{e^{\frac{\pi i}{\rho}}\lambda_n\}$). Пусть по-прежнему интервал $[0, 2\pi]$ разбит точками $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q$ ($\theta_0 = 0$, $\theta_q = 2\pi$) и $\{\lambda_{n_{jk}}\}$ — та подпоследовательность из $\{\lambda_n\}$, для членов которой $\arg\lambda_{n_{jk}} \in [\theta_{j-1}, \theta_j)$. Повторяя выкладки и рассуждения из п. 1° (с заменой $|\lambda_n|^{-\rho}$ на $|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}$ и $|\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho}$ на $|\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}$), мы придем, при условии, что $\frac{n_2}{n_1} > \beta > 1$, к равенству

$$\lim_{n_1\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jn}}|)}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}} = \frac{\Delta_j}{D}. \tag{16}$$

Здесь $\Delta_j = \Delta(\theta_{j-1}, \theta_j)$, а m_{ji}, n_i $(i=1, 2)$ имеют тот же смысл, что и в п. 1°. Пусть $\lambda_n = |\lambda_n|\, e^{i\varphi_n}$, $\lambda_n^{\rho(|\lambda_n|)} = |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}\, e^{i\rho(|\lambda_n|)\varphi_n}$ $(0 \leqslant \varphi_n < 2\pi)$. Выберем внутри каждого интервала (θ_{j-1}, θ_j) $(j=1, \cdots, q)$ точку $\tilde{\varphi}_j$ и к диаметру δ разбиения интервала $[0, 2\pi]$ и произвольному $\varepsilon > 0$ подберем такое $N(\delta, \varepsilon)$, что при $n_1 < N$ и $k > m_{j1}$ для всех j $(j=1, \cdots, q)$

$$|(\tilde{\varphi}_j - \varphi_{n_{jn}})\, \rho(|\lambda_{n_{jn}}|)| < \rho\delta, \quad |\rho(|\lambda_{n_{jn}}|) - \rho| < \varepsilon \tag{17}$$

(при некоторых j подпоследовательность из $\{\lambda_{n_{jk}}\}$, для членов которой $k > m_{j1}$ может оказаться пустой). Тогда при $k > m_{j1}$

$$|\exp[-i\rho(|\lambda_{n_{jn}}|)\, \tilde{\varphi}_j] - \exp[-i\rho(|\lambda_{n_{jn}}|)\, \varphi_{n_{jn}}]| < A\delta,$$

где A — постоянная, не зависящая от δ и

$$\left|\sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} \left[|\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho(|\lambda_{jn}|)}\, e^{-i\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)\tilde{\varphi}_j} - \lambda_{n_{jk}}^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}\right]\right| < A\delta \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}. \tag{18}$$

Произведя в левой и правой частях (18) суммирование от $j=1$ до $j=q$, будем иметь при $n_1 > N$

$$\left|\sum_{j=1}^{q} \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}\, e^{-i\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)\tilde{\varphi}_j} - \sum_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}\right| < A\delta \sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(\lambda_k|)}. \tag{19}$$

С другой стороны, с учетом (17) при $n_1 > N$ получим

$$\left|\sum_{k=m_{j_1}}^{m_{j_2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)} \left(e^{-i\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)\tilde{\varphi}_j} - e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j}\right)\right| < \bar{A}\varepsilon \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jn}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}, \tag{20}$$

где $\bar{A}$ не зависит от ε и j. Суммируя обе части (20) от $j=1$ до $j=q$, будем иметь

$$\left|\sum_{j=1}^{q} \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}\, e^{-i\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)\tilde{\varphi}_j} - \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-i\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}\, e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j}\right| <$$

$$< \bar{A}\varepsilon \sum_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}. \tag{21}$$

Деля обе части неравенств (19) и (21) на $\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}$ и сравнивая между собой полученные неравенства, будем иметь

$$\left|\sum_{j=1}^{q} \frac{\sum\limits_{k=m_{j1}}^{m_{j2}} |\lambda_{n_{jk}}|^{-\rho(|\lambda_{n_{jk}}|)}\, e^{-i\rho\tilde{\varphi}_j}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}} - \frac{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} \lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} |\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}}\right| < A\delta + \bar{A}\varepsilon.$$

Теперь из равенства (16) следует, что при заданном разбиении

$$\left|\sum_{j=1}^{q}\frac{\Delta_j}{D}e^{-l\rho\tilde{\varphi}_j}-\frac{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2}\lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2}|\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}}\right|<A\delta+\overline{A}\varepsilon+o(1).$$

Так как ε произвольно, то это означает, что если $\frac{n_2}{n_1}>\beta>1$, то

$$\lim_{n_1\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2}\lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}}{\sum\limits_{k=n_1}^{n_2}|\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}}=\frac{1}{D}\int\limits_0^{2\pi}e^{-l\rho\varphi}\,dF(\varphi).$$

Отсюда следует, что если выполнено условие (2), то

$$\left|\sum_{k=n_1}^{n_2}\lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}\right|=o\left(\sum_{k=n_1}^{n_2}|\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}\right). \tag{22}$$

Заметим, что равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^{-\rho(|\lambda_k|)}}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)}}=\frac{1}{D}\int\limits_0^{2\pi}e^{-l\rho\varphi}\,dF(\varphi),$$

аналогичное равенству (12), также, как нетрудно показать, имеет место.

Последовательность $\{\mu_n\}$ выберем в точности так, как в п. 1°, пользуясь, как и в п. 1, точным порядком ρ, а не уточненным $\rho(r)$). Положим, далее, как и в п. 1, $\{\nu_n\}=\{\lambda_n\}\cup\{\mu_n\}$ и покажем, что последовательность $\{M_n\}=\left\{\frac{1}{L(|\nu_n|)}\sum\limits_{k=1}^{n}\nu_k^{-\rho}\right\}$, где $L(r)=r^{\rho(r)-\rho}$ сходится (к нулю).

Если $n=n_m=\alpha^m h+p_m$ $(m=1, 2,\cdots)$, то очевидно, что $M_n\to 0$ при $m\to\infty$. Действительно, по построению $\left|\sum\limits_{k=1}^{n_m}\nu_k^{-\rho}\right|<|\lambda_{\alpha^m h}|^{-\rho}$, $|\nu_{n_m}|=$ $=|\lambda_{\alpha^m h}|$ и, следовательно, $|M_{n_m}|<|\lambda_{\alpha^m h}|^{-\rho(|\lambda_{\alpha^m h}|)}\to 0$ при $m\to\infty$. Для того чтобы доказать, что вообще $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=0$, достаточно рассмотреть лишь такие значения n, для которых

$$\alpha^{m-1}h+p_{m-1}<n\leqslant\alpha^m h+p_{m-1}\quad(m=1, 2,\cdots), \tag{23}$$

так как по построению

$$L(|\nu_{\alpha^m h+p_{m-}}|)=L(|\nu_{\alpha^m h+p_{m-1}+1}|)=\cdots=L(|\nu_{\alpha^m h+p_m}|)=L(|\lambda_{\alpha^m h}|)$$

и

$$\left|\sum_{p=1}^{\alpha^m h+p_{m-1}+l} \nu_p^{-\rho}\right| < \left|\sum_{p=1}^{\alpha^m h+p_{m-1}} \nu_p^{-\rho}\right|$$

при $0 < l \leqslant p_m - p_{m-1}$; следовательно при $\alpha^m h + p_{m-1} < n \leqslant \alpha^m h + p_m$ имеем $|M_n| < |M_{\alpha^m h+p_{m-1}}|$.

Дальше мы будем пользоваться следующим свойством функции $L(r)$ (см. [1]): если A — конечная постоянная, то на отрезке $1 \leqslant k \leqslant A$ равномерно $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{L(kr)}{L(r)} = 1$ (k может зависеть от r). Допустим, что существует такое $\gamma > 0$ и такое бесконечное множество значений n из интервалов вида (23), для которых $|M_n| > \gamma$. При $n = n_{m-1} = \alpha^{m-1} h + p_{m-1}$ имеем

$$M_n = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|)} \sum_{p=1}^{\alpha^{m-1} h+p_{m-1}} \nu_p^{-\rho} \to 0,$$

если $m \to \infty$, как уже было доказано. Пусть $n = n' = \alpha^{m-1} h + p_{m-1} + l$ и

$$M_{n'} = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)} \sum_{p=1}^{\alpha^{m-1} h+p_{m-1}+l} \nu_p^{-\rho},$$

где $1 \leqslant l \leqslant (\alpha^m - \alpha^{m-1})\, h$. В соответствии с указанным выше свойством функции $L(r)$ имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|)} = 1$, так как $1 \leqslant \frac{|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|}{|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|} < (\alpha + \eta)^{\frac{1}{\rho}}$ ($\eta \to 0$ при $m \to \infty$) и поэтому

$$\tilde{M}_{n'} = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)} \sum_{p=1}^{\alpha^{m-1} h+p_{m-1}} \nu_p^{-\rho} = \frac{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h}|)}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)}\, M_{n_{m-1}} \to 0 \qquad (24)$$

при $m \to \infty$. Имеем далее

$$R = M_{n'} - \tilde{M}_{n'} = \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)} \sum_{p=\alpha^{m-1} h}^{\alpha^{m-1} h+l} \lambda_p^{-\rho} =$$

$$= \frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)} \sum_{p=\alpha^{m-1} h}^{\alpha^{m-1} h+l} |\lambda_p|^{-\rho}\, e^{-i\rho\varphi_p}. \qquad (25)$$

Для всех p, $\alpha^{m-1} h \leqslant p \leqslant \alpha^m h$ равномерно $\frac{L(|\lambda_{\alpha^{m-1} h+l}|)}{L(|\lambda_p|)} \to 1$. Поэтому каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших m и всех $p \in [\alpha^{m-1} h,\ \alpha^m h]$ имеем

$$\frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1}h+l}|)} < (1+\varepsilon)\,\frac{1}{L(|\lambda_p|)}. \tag{26}$$

Внося в правой части (25) под знак суммы множитель $\frac{1}{L(|\lambda_{\alpha^{m-1}h+l}|)}$ и пользуясь (26), получим

$$|R| < (1+\varepsilon)\left|\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)}\, e^{-l\rho\varphi_p}\right|.$$

С другой стороны, при достаточно больших m

$$\left|\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)}\, e^{-l\rho\varphi_p} - \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)}\, e^{-l\rho(|\lambda_p|)\varphi_p}\right| <$$

$$< A\varepsilon \sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} < A'\varepsilon$$

(A, A' — постоянные) и поэтому

$$|R| < (1+\varepsilon')\left|\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} \lambda_p^{-\rho(|\lambda_p|)}\right| \tag{27}$$

($\varepsilon' > 0$ — любое, m достаточно велико). Так как было предположено, что для бесконечного множества значений m и соответствующих l имеет место неравенство $|M_n| > \gamma$ (n—из интервала вида (23)), то для этих же значений m и l при некотором $\delta > 0$ имеем, с учетом (24), $|R| > \gamma - \delta > 0$. Из (27) поэтому следует, что

$$\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} \geqslant \left|\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} \lambda_p^{-\rho\,|(\lambda_p|)}\right| > \gamma' > 0.$$

Но $\sum\limits_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)} \sim D\ln\frac{\alpha^{m-1}h+l}{\alpha^{m-1}h}$, следовательно при достаточно малом $\delta' > 0$ и большом m

$$D\ln\frac{\alpha^{m-1}h+l}{\alpha^{m-1}h} > \gamma' - \delta' > 0, \quad \frac{\alpha^{m-1}h+l}{\alpha^{m-1}h} > e^{\frac{\gamma'-\delta'}{D}} > 1.$$

Но на основании (22) отсюда следует, что

$$\left|\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} \lambda_p^{-\rho(|\lambda_p|)}\right| = o\left(\sum_{p=\alpha^{m-1}h}^{\alpha^{m-1}h+l} |\lambda_p|^{-\rho(|\lambda_p|)}\right) = o\,(1).$$

Теперь из (27) получим $\lim\limits_{m\to\infty} R = \lim\limits_{m\to\infty} M_{n'} = 0$. Мы пришли к противоречию, которое доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$. Остается показать, что плотность последовательности $\{\mu_n\}$ равна нулю не только при показателе ρ, но и при показателе, соответствующем любому уточненному порядку $\rho(r)$.

В п. 1 было доказано, что $p_m = o(\alpha^m)$, следовательно

$$p_m = o\left(|\lambda_{\alpha m_k}|^{\rho(|\lambda_{\alpha m_k}|)}\right) = o\left(|\mu_{p_m}|^{\rho(|\mu_{p_m}|)}\right),$$

то есть $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{p_m}{|\mu_{p_m}|^{\rho(|\mu_{p_m}|)}} = 0$. Но $\mu_{p_{m-1}+1} = \mu_{p_{m-1}+2} = \cdots = \mu_{p_m}$ и поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{q}{|\mu_q|^{\rho(|\mu_q|)}} = 0$ при $p_{m-1} < q \leqslant p_m$. На этом доказательство заканчивается.

Доказанное нами утверждение — несколько более сильное, чем сформулированное в начале статьи. Во-первых, для пополненной последовательности в случае точного порядка ρ не только существует предел вида (3), но имеет место сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n^{-\rho}$. Во-вторых, нигде не использовалось то обстоятельство, что число ρ — целое. В третьих, и это нам кажется существенным, дополнительная последовательность определяется только точным порядком ρ и не зависит от выбора уточненного порядка.

Заметим, наконец, что доказательство того факта, что для последовательности $\{\nu_n\}$ существует предел (3) (соответственно (1)), основано только на свойстве последовательности $\{\lambda_n\}$, выраженном равенствами (11), (22), которые следуют из существования угловой плотности и выполнения условия (2), но могут, как нетрудно видеть, иметь место и в случае, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ не имеет угловой плотности.

Московский институт химического
машиностроения

Поступило 22. X. 1969

Գ. Լ. ԼՈՒՆՑ. Ամբողջ կարգի ամբողջ ֆունկցիաների աճի հետ կապված մի թեորեմի մասին *(ամփոփում)*

Ապացուցվում է Բ. Յա. Լևինի հիպոթեզը՝ եթե $\{\lambda_n\}$ *հաջորդականությունը ունի անկյունային խտություն* $\rho(r)$ *ցուցիչի դեպքում,* $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)=\rho$, ρ*-ն ամբողջ թիվ է և*

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi}\, dF(\varphi) = 0,$$

որտեղ $F(\varphi)$*-ն անկյունային խտության բաշխման ֆունկցիան է, ապա* $\{\lambda_n\}$ *հաջորդականությունը կարելի է այնպես լրացնել մի զրոյական խտություն ունեցող հաջորդականությամբ, որ այն դառնա կանոնավոր բաշխված։*

G. L. LUNTS. *On a theorem connected with the growth of entire functions of entire order* (summary)

A hypothesis of B. Y. Levin is proved: if the sequence $\{\lambda_n\}$ has an angular density with an exponent $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, ρ — integer, and

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i\rho\varphi}\, dF(\varphi) = 0,$$

where $F(\varphi)$ is the distribution function of angular density, then it is possible to supplement the sequence $\{\lambda_n\}$ with a sequence having zero density in such a way, that it transforms to a regularly distributed sequence.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, №4, 1970 Математика

Д. Г. САНИКИДЗЕ

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ КВАДРАТУРНЫМИ СУММАМИ

При решении многих важных прикладных задач возникает необходимость вычисления сингуляриых интегралов вида

$$S(f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\,dt\ \ (-1\leqslant x\leqslant 1), \tag{1}$$

$$S^*(f;\ x)=\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt\ \ (-1<x<1), \tag{2}$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши. Для существования их в этом смысле достаточно, например, требовать, чтобы функция f удовлетворяла на заданном отрезке условию Гельдера.

В настоящей заметке для интегралов $(1-2)$ изучаются квадратурные процессы

$$S(f;\ x)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\,U_{n-1}(x)-1}{x-x_k^{(n)}}\,f(x_k^{(n)}), \tag{3}$$

$$S^*(f;\ x)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{(-1)^{k-1}}{n}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\left[H_{n-1}(x)+T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x}\right]-A_k^{(n)}}{x-x_k^{(n)}}\,f(x_k^{(n)}), \tag{4}$$

где

$$T_n(x)=\cos n\arccos x,\ \ U_{n-1}(x)=\frac{\sin n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ \ (k=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

$$A_k^{(n)}=\frac{2}{n}\left[1-2\sum_{r=1}^{\frac{m}{2}}\frac{1}{4r^2-1}\cos\frac{r(2k-1)}{n}\pi\right]\left(m=\begin{cases}n-1, & n\text{—нечетное},\\ n-2, & n\text{—четное}\end{cases}\right),$$

$$H_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}.$$

Формулы (3), (4) являются точными [1], когда f представляет произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

Ниже получены некоторые равномерные оценки ошибки указанных квадратурных формул, дающие, по-видимому, основание считать, что формулы эти представляют достаточно эффективное средство приближения с точки зрения доставляемой ими точности.

Обозначим через $R_n(f; x)$ и $R_n^*(f; x)$, соответственно, остаточные члены формул (3) и (4). Пусть $[-\xi, \xi]$ $(0 < \xi < 1)$ — произвольный отрезок, содержащийся в $(-1, +1)$. Под $f \in KH_m^{(\alpha)}$ будем подразумевать, что функция f имеет на отрезке $[-1, +1]$ m-ую $(m > 0)$ производную, удовлетворяющую условию Гельдера с константой K и показателем α.

Теорема. *Если* $f \in KH_m^{(\alpha)}$ $(m > 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$, *то при* $n = 2, 3, \cdots$ *справедливы неравенства*

$$\max_{x \in [-\xi, \xi]} |R_n(f; x)| \leqslant (A_1 + A_2 \ln n) \frac{1}{(n-1)^{m+2}},$$

$$\max_{x \in [-\xi, \xi]} |R_n^*(f; x)| \leqslant (A_1^* + A_2^* \ln n + A_3^* \ln^2 n) \frac{1}{(n-1)^{m+\alpha}},$$

где A_1, A_2, A_1^*, A_2^*, A_3^* *— не зависящие от n константы, известным образом определяемые через* K.

Сформулированная теорема утверждает, в частности, сходимость квадратурных процессов (3) и (4) для функций из класса Гельдера с любым показателем $0 < \alpha < 1$.

Доказательство теоремы в значительной степени основано на утверждениях, формулируемых ниже в виде лемм.

Лемма 1. *Если алгебраический многочлен* $Q_{n-1}(x)$ *степени* $\leqslant n-1$ *удовлетворяет в точках* $x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ *неравенству*

$$|Q_{n-1}(x_k^{(n)})| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1 - x_k^{(n)2}}} \quad (A = \mathrm{const}),$$

то в любой точке $x \in (-1, +1)$ *для этого многочлена верна оценка*

$$|Q_{n-1}(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} \left(8 + \frac{2}{\pi} |T_n(x)| \ln n\right).$$

Доказательство. Ввиду того, что степень рассматриваемого многочлена не превосходит $n-1$, его можно представить посредством интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного по указанным в лемме узлам

$$Q_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} T_n(x)}{x - x_k^{(n)}} \sqrt{1 - x_k^{(n)2}}\, Q_{n-1}(x_k^{(n)}).$$

Отсюда по условию леммы имеем

$$|Q_{n-1}(x)| \leqslant \frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right|.$$

Полагая $x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$, $\vartheta_k^{(n)}=\frac{2k-1}{2n}\pi$, заметим прежде всего, что

$$\frac{1}{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\frac{\cos n\vartheta-\cos n\vartheta_k^{(n)}}{\cos\vartheta-\cos\vartheta_k^{(n)}}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{\sin\frac{n(\vartheta-\vartheta_k^{(n)})}{2}\sin\frac{n(\vartheta+\vartheta_k^{(n)})}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_k^{(n)}}{2}\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}} \leqslant \frac{\sin\vartheta+\sin\vartheta_k^{(n)}}{\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}} = \frac{2\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}\cos\frac{\vartheta-\vartheta_k^{(n)}}{2}}{\sin\vartheta\sin\frac{\vartheta+\vartheta_k^{(n)}}{2}} \leqslant \frac{2}{\sin\vartheta}.$$

Значит

$$\frac{1}{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5}$$

Предположим теперь, что $\vartheta_m^{(n)}<\vartheta<\vartheta_{m+1}^{(n)}$ $(1\leqslant m\leqslant n-1)$ и займемся оценкой выражения

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right| = \frac{|\cos n\vartheta|}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta} +$$

$$+\frac{|\cos n\vartheta|}{n}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{\cos\vartheta-\cos\vartheta_k^{(n)}}.$$

Обе суммы, стоящие в правой части, оцениваются одинаковым образом, поэтому для определенности займемся оценкой суммы

$$\frac{|\cos n\vartheta|}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta} + \frac{|\cos n\vartheta|}{\cos\vartheta_{m-1}^{(n)}-\cos\vartheta} + \frac{|\cos n\vartheta|}{\cos\vartheta_m^{(n)}-\cos\vartheta}.$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\cos\tau-\cos\vartheta}, \quad \vartheta_k^{(n)}\leqslant\tau\leqslant\vartheta_{k+1}^{(n)}.$$

$$(k=1, 2, \cdots, m-2).$$

Отсюда, интегрируя обе части и суммируя, находим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m-2}\int_{\vartheta_k^{(n)}}^{\vartheta_{k+1}^{(n)}}\frac{d\tau}{\cos\tau-\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\vartheta_1^{(n)}}^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} \frac{d\tau}{\cos\tau-\cos\vartheta} < \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} \frac{d\tau}{\cos\tau-\cos\vartheta}. \tag{6}$$

Но

$$\int\limits_{0}^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} \frac{d\tau}{\cos\tau-\cos\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\sin\frac{\vartheta+\tau}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\tau}{2}}\Bigg|_0^{\vartheta_{m-1}^{(n)}} = \frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{1}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2}}. \tag{7}$$

Учитывая, что $\sin\frac{\vartheta-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2} > \sin\frac{\vartheta_m^{(n)}-\vartheta_{m-1}^{(n)}}{2} = \sin\frac{\pi}{2n}$ и $\sin\tau > \frac{2}{\pi}\tau$ при $0\leqslant\tau\leqslant\frac{\pi}{2}$, на основании (5), (6) и (7) получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{|T_n(x)|}{\pi\sqrt{1-x^2}}\ln n.$$

Аналогичная оценка имеет место и для второй суммы. Лемма доказана.

Пусть $P_n(t)$ — многочлен степени n, осуществляющий наилучшее приближение функции $f\in KH_m^{(\alpha)}$ в равномерной метрике

$$\max_{t\in[-1,\,+1]} |f(t)-P_n(t)| \leqslant \frac{C}{n^{m+\alpha}},\quad C=\mathrm{const}.$$

Обозначим далее

$$M_\eta(f;\,\beta) = \sup_{x',\,x''\in[-\eta,\,\eta]} \frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\beta},$$

где β — произвольное положительное число, меньшее α, а $[-\eta,\,\eta]$ $(0<\eta<1)$ — некоторый отрезок, содержащийся в $(-1,\,+1)$.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$M_\eta(f-P_n;\,\beta) \leqslant \frac{C_1}{n^{m+\alpha-\beta}}, \tag{8}$$

где C_1 — константа, зависящая от C, α, m, η.

Доказательство*. Положим

$$\Delta_{xh}(f-P_n) = |f(x+h)-P_n(x+h)-[f(x)-P_n(x)]|$$

при любых $x,\ x+h\in[-\eta,\,\eta]$. Без ограничения общности можно считать, что $0<h\leqslant 2\eta$.

---

* Приведенное здесь доказательство в определенной степени аналогично указанному в [2].

Предположим сначала, что $h > \frac{\eta}{n}$. В этом случае

$$\Delta_{xh} \leqslant 2 \max_{t} |f(t) - P_n(t)| \leqslant \frac{2C}{n^{m+\alpha}} = \frac{2Cn^{-\beta}}{n^{m+\alpha-\beta}} < \frac{2C\,\eta^{-\beta} h^{\beta}}{n^{m+\alpha-\beta}}. \qquad (9)$$

Пусть теперь $h \leqslant \frac{\eta}{n}$. Как известно [3]

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x), \quad V_k(x) = P_{2^k n}(x) - P_{2^{k-1} n}(x).$$

Далее обозначим $N_k = \max\limits_{x \in [-1,\,+1]} |V_k(x)|$. Тогда на основании тождества

$$V_k(x) = [P_{2^k n}(x) - f(x)] - [P_{2^{k-1} n}(x) - f(x)]$$

можно написать

$$N_k \leqslant \frac{C}{(2^k n)^{m+\alpha}} + \frac{C}{(2^{k-1} n)^{m+\alpha}} = \frac{(1 + 2^{-m-\alpha})}{(2^{k-1} n)^{m+\alpha}}.$$

К правой части равенства

$$\Delta_{xh} = \left| \sum_{k=1}^{\infty} [V_k(x+h) - V_k(x)] \right|$$

применим теорему Лагранжа о среднем значении. Тогда

$$\Delta_{xh} \leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} |V_k'(x + \vartheta_k h)|, \quad 0 < \vartheta_k < 1. \qquad (10)$$

Ввиду того, что степень $V_k(x)$ равна $2^k n$, в силу (10) и неравенства С. Н. Бернштейна [4] можно написать

$$\Delta_{xh} \leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k n N_k}{\sqrt{1-(x+\vartheta_k h)^2}} \leqslant \frac{2C(1+2^{-m-\alpha})\,nh}{\sqrt{1-\eta^2}\; n^{m+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(m+\alpha-1)}}.$$

Рассмотрим теперь два случая: $m \geqslant 1$ и $m = 0$. Предположим сначала, что $m \geqslant 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(m+\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - 2^{1-m-\alpha}}$$

и, следовательно

$$\Delta_{xh} \leqslant \frac{2C(1+2^{-m-\alpha})\,nh}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-2^{1-m-\alpha})\,n^{m+\alpha}}. \qquad (11)$$

Но, ввиду того, что $nh < (nh)^{\beta}$, из (11) следует

$$\Delta_{xh} \leqslant \frac{2C(1+2^{-m-\alpha})\,h^{\beta}}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-2^{1-m-\alpha})\,n^{m+\alpha-\beta}}. \qquad (12)$$

Пусть теперь $m=0$. Очевидно, что

$$\Delta_{xh} \leqslant |f(x+h) - f(x)| + |P_n(x+h) - P_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant Kh^{\alpha}+h\max_{x\in[-\eta,\,\eta]}|P_n'(x)|. \tag{13}$$

Для оценки $|P_n'(x)|$ на основании неравенства (4.8) из [3] можно получить неравенство

$$\max_{x\in[-\eta,\,\eta]}|P_n'(x)|<\frac{C_2}{\sqrt{1-\eta^2}\,n^{\alpha-1}}, \tag{14}$$

где константа C_2 может быть известным образом выражена через C. Учитывая далее, что

$$h^{\alpha}=h^{\beta}h^{\alpha-\beta}\leqslant\frac{\eta^{\alpha-\beta}h^{\beta}}{n^{\alpha-\beta}},\quad\frac{nh}{n^{\alpha}}<\frac{(nh)^{\beta}}{n^{\alpha}}=\frac{h^{\beta}}{n^{\alpha-\beta}},$$

в силу (13) и (14) получим

$$\Delta_{xh}\leqslant\frac{C_3h^{\beta}}{n^{\alpha-\beta}},\quad C_3=\eta^{\alpha-\beta}K+\frac{C_2}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{15}$$

Объединяя (9), (12) и (15), получим (8), причем можно положить

$$C_1=\max\left\{\frac{2C\eta^{-\alpha}(1+2^{-m-\alpha})}{\sqrt{1-\eta^2}\,(1-2^{1-m-\alpha})},\ K+\frac{C_2}{\sqrt{1-\eta^2}}\right\}.$$

Для дальнейших рассуждений важную роль играет оценка величин

$$\lambda_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|\beta_{k,n}(x)|,\quad\lambda_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}|\beta_{k,n}^*(x)|,$$

где

$$\beta_{k,n}(x)=\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^{(n)^2}}\,U_{n-1}(x)-1}{n\left(x-x_k^{(n)}\right)},$$

$$\beta_{k,n}^*(x)=\frac{\dfrac{(-1)^{k-1}}{n}\sqrt{1-x_k^{(n)^2}}\left[H_{n-1}(x)+T_n(x)\ln\dfrac{1-x}{1+x}\right]-A_k^{(n)}}{x-x_k^{(n)}}.$$

Укажем сначала оценку для $\lambda_n(x)$. Легко видеть, что

$$\beta_{\nu,n}\left(x_\nu^{(n)}\right)=\frac{x_\nu^{(n)}}{n\left(1-x_\nu^{(n)^2}\right)}\ (\nu=1,2,\cdots,n),$$

$$\beta_{\nu,n}\left(x_i^{(n)}\right)=\frac{(-1)^{\nu+i}\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}-\sqrt{1-x_i^{(n)^2}}}{n\left(x_i^{(n)}-x_\nu^{(n)}\right)\sqrt{1-x_i^{(n)^2}}}\ (i=1,2,\cdots,n;\ i\neq\nu).$$

Так что

$$|\beta_{\nu,n}\left(x_\nu^{(n)}\right)|\leqslant\frac{1}{n\left(1-x_\nu^{(n)^2}\right)}=\frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}\sin\dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}\sin\dfrac{\pi}{2n}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-x_\nu^{(n)^2}}}. \tag{16}$$

Для оценки $\beta_{\nu,n}(x_i^{(n)})$ $(i\neq\nu)$ заметим, что

$$\frac{\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}}{n|x_i^{(n)}-x_\nu^{(n)}|}=\frac{\sin\frac{2\nu-1}{2n}\pi}{2n\left|\sin\frac{i-\nu}{2n}\pi\right|\left|\sin\frac{i+\nu-1}{2n}\pi\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sin\frac{2\nu-1}{2n}\pi+\sin\frac{2i-1}{2n}\pi}{2n\left|\sin\frac{i-\nu}{2n}\pi\right|\left|\sin\frac{i+\nu-1}{2n}\pi\right|}=\frac{\sin\frac{i+\nu-1}{2n}\pi\cos\frac{\nu-1}{2n}\pi}{n\left|\sin\frac{i-\nu}{2n}\pi\right|\left|\sin\frac{i+\nu-1}{2n}\pi\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n\left|\sin\frac{i-\nu}{2n}\pi\right|}\leqslant\frac{1}{|i-\nu|}\leqslant 1\ (i\neq\nu). \tag{17}$$

Аналогично

$$\frac{\sqrt{1-x_i^{(n)2}}}{n(x_\nu^{(n)}-x_i^{(n)})}\leqslant 1 \tag{18}$$

при любом i, отличном от ν. Из (16), (17) и (18) следует неравенство

$$|\beta_{k,n}(x_j^{(n)})|\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-x_j^{(n)2}}}\ (j=1,2,\cdots,n)],$$

откуда, в силу леммы 1, получаем

$$|\beta_{k,n}(x)|\leqslant\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\left(4+\frac{1}{\pi}|T_n(x)|\ln n\right)\ (-1<x<1). \tag{19}$$

Положив теперь $x=\cos\vartheta$ $(0<\vartheta<\pi)$, $\vartheta_k^{(n)}=\frac{2k-1}{2n}\pi$, $\vartheta_m^{(n)}\leqslant\vartheta<$ $<\vartheta_{m+1}^{(n)}$ $(1\leqslant m\leqslant n-1)$, можно написать

$$\lambda_n(x)\leqslant|\sigma_n^{(1)}(x)|+|\sigma_n^{(2)}(x)|,$$

где

$$\sigma_n^{(1)}(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{(-1)^{k-1}\sin\vartheta_k^{(n)}\sin n\vartheta-\sin\vartheta}{\sin\vartheta(\cos\vartheta-\cos\vartheta_k^{(n)})}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\sin n\vartheta|}{n\sin\vartheta}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{|(-1)^{m-2}\sin\vartheta_{m-1}^{(n)}\sin n\vartheta-\sin\vartheta|}{\sin\vartheta(\cos\vartheta_{m-1}^{(n)}-\cos\vartheta)}+\frac{1}{n}\frac{|(-1)^{m-1}\sin\vartheta_m^{(n)}\sin n\vartheta-\sin\vartheta|}{\sin\vartheta(\sin\vartheta_m^{(n)}-\cos\vartheta)}, \tag{20}$$

а $\sigma_n^{(2)}(x)$ содержит сумму остальных членов, начиная с $k=m+1$.

Согласно (19) сумма последних двух слагаемых в (20) не превосходит

$$\frac{8}{\sin\vartheta}\left(4+\frac{1}{\pi}|\cos n\vartheta|\ln n\right).$$

Кроме того, в силу известного неравенства [4]

$$\frac{|\sin n\vartheta|}{n\sin\vartheta}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\vartheta_k^{(n)}}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta}\leqslant\frac{2|\sin n\vartheta|}{\pi\sin\vartheta}\ln n.$$

Далее на основании рассуждений, применяемых в доказательстве леммы 1, находим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{1}{\cos\vartheta_k^{(n)}-\cos\vartheta}\leqslant\frac{1}{\pi\,\mathrm{sni}\,\vartheta}\ln n.$$

Аналогичные неравенства мы получим и при оценке $\sigma_n^{(2)}(x)$. Окончательно будем иметь

$$\lambda_n(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-x^3}}\left|32+\frac{1}{\pi}(8|T_n(x)|+2\sqrt{1-x^2}\,|U_n(x)|+1)\ln n\right|$$

$$(-1<x<1).$$

Из полученного следует, что на любом отрезке вида $[-\xi,\xi]$ $(0<\xi<1)$ справедлива равномерная оценка

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}\lambda_n(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(32+\frac{11}{\pi}\ln n\right)\cdot \tag{21}$$

Рассмотрим теперь сумму

$$\lambda_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}|\beta_{k,n}^*(x)|.$$

Так как [4]

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right|\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\leqslant 8+\frac{4}{\pi}|T_n(x)|\ln n,$$

то достаточно получить оценку выражения

$$\nu_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|\delta_{k,n}(x)|,$$

где

$$\delta_{k,n}(x)=\frac{\dfrac{(-1)^{k-1}}{n}\sqrt{1-x_k^{(n)2}}\,H_{n-1}(x)-A_k^{(n)}}{x-x_k^{(n)}}\quad(A_k^{(n)}>0,\ k=1,2,\cdots,n).$$

Очевидно, что $A_k^{(n)}\leqslant\frac{4}{n}(k=1,2,\cdots,n)$. Поэтому, пользуясь применяемыми при доказательстве леммы 1 рассуждениями, получим

$$|H_{n-1}(x)|\leqslant\frac{32}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{8}{\pi}\frac{|T_n(x)|}{\sqrt{1-x^2}}\ln n\quad(-1<x<1).$$

Так что

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}|H_{n-1}(x)|\leqslant\frac{8}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(4+\frac{1}{\pi}\ln n\right)\cdot$$

Далее, как легко видеть

$$\delta_{\nu,n}(x_\nu^{(n)}) = \frac{A_\nu^{(n)} x_\nu^{(n)}}{2(1-x_\nu^{(n)2})} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq\nu}}^{n} \frac{A_p^{(n)}}{x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}},$$

$$\delta_{\nu,n}(x_i^{(n)}) = \frac{(-1)^{\nu+i}\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}\,A_i^{(n)} - \sqrt{1-x_i^{(n)2}}\,A_\nu^{(n)}}{(x_i^{(n)} - x_\nu^{(n)})\sqrt{1-x_i^{(n)2}}} \quad (i \neq \nu).$$

$\delta_{\nu,n}(x_i^{(n)})$ оценивается точно так же, как и $\beta_{\nu,n}(x_i^{(n)})$. В результате будем иметь

$$|\delta_{\nu,n}(x_i^{(n)})| \leqslant \frac{8}{\sqrt{1-x_i^{(n)2}}} \quad (i \neq \nu). \tag{22}$$

Укажем теперь оценку для $\delta_{\nu,n}(x_\nu^{(n)})$. Рассмотрим для этого суммы

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|}, \quad \sum_{p=\nu+1}^{n} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|},$$

причем, если $\nu = 1$, то отсутствует первая, а если $\nu = n$, то вторая сумма.

Имеем

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} < \frac{4}{n}\sum_{p=1}^{\nu-2} \frac{1}{x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}} + \frac{4}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|},$$

причем на основании (6) и (7)

$$\frac{4}{n}\sum_{p=1}^{\nu-2} \frac{1}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} \leqslant \frac{1}{\pi \sin \vartheta_\nu^{(n)}} \ln \frac{1}{\sin \dfrac{\vartheta_\nu^{(n)} - \vartheta_{\nu-1}^{(n)}}{2}} =$$

$$= \frac{4}{\pi \sin \vartheta_\nu^{(n)}} \ln \frac{1}{\sin \dfrac{\pi}{2n}} < \frac{4}{\pi \sin \vartheta_\nu^{(n)}} \ln n.$$

Следовательно

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} \leqslant \frac{4}{\pi\sqrt{1 - x_\nu^{(n)2}}} \ln n + \frac{4}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|}.$$

Для оценки последнего слагаемого в правой части полученного неравенства заметим, что

$$\frac{1}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|} = \frac{1}{n\sqrt{1-x_\nu^{(n)2}}} \frac{\sin \dfrac{2\nu-1}{2n}\pi}{|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\sqrt{1 - x_\nu^{(n)2}}} \frac{\sin \dfrac{2\nu-1}{2n}\pi + \sin \dfrac{2\nu-3}{2n}\pi}{2 \sin \dfrac{\pi}{2n} \sin \dfrac{\nu-1}{n}\pi}.$$

Воспользовавшись формулой для суммы синусов и часто применяемым выше неравенством $\sin\frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}$, получаем

$$\frac{1}{n|x_\nu^{(n)} - x_{\nu-1}^{(n)}|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x_\nu^{(n)^2}}}\cdot$$

Таким образом

$$\sum_{p=1}^{\nu-1} \frac{A_p^{(n)}}{|x_\nu^{(n)} - x_p^{(n)}|} \leqslant \frac{4}{\sqrt{1 - x_\nu^{(n)^2}}}\left(1 + \frac{1}{\pi}\ln n\right)\cdot$$

Такая же оценка имеет место и для второй суммы.

Заметив, наконец, что

$$\left|\frac{A_\nu^{(n)}\, x_\nu^{(n)}}{2\,(1 - x_\nu^{(n)^2})}\right| \leqslant \frac{2}{n\sqrt{1 - x_\nu^{(n)^2}}\,\sin\frac{2\nu - 1}{2n}\,\pi} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1 - x_\nu^{(n)^2}}},$$

получим

$$|\delta_{\nu,\,n}(x_\nu^{(n)})| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1 - x_\nu^{(n)^2}}}\left(5 + \frac{4}{\pi}\ln n\right)\cdot \tag{23}$$

Используя оценки (22) и (23), в силу леммы 1 будем иметь

$$|\delta_{k,\,n}(x)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\left[20 + \frac{1}{\pi}(16 + 5|\,T_n(x)|)\ln n + \frac{4}{\pi^2}|T_n(x)|\ln^2 n\right]$$

$$(-1 < x < 1),$$

откуда

$$\max_{x \in [-\xi,\,\xi]} |\delta_{k,\,n}(x)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(20 + \frac{21}{\pi}\ln n + \frac{4}{\pi^2}\ln^2 n\right)\cdot$$

Поступая точно так же, как это было сделано при получении (21) и используя указанные выше оценки для $H_{n-1}(x)$ и $\delta_{k,\,n}(x)$, можно получить оценку

$$\max_{x \in]-\xi,\xi]} \nu_n(x) \leqslant \frac{8}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(40 + \frac{59}{\pi}\ln n + \frac{12}{\pi^2}\ln^2 n\right)\cdot$$

Следовательно

$$\max_{x \in [-\xi,\,\xi]} \lambda_n^*(x) \leqslant \frac{8}{\sqrt{1 - \xi^2}}\left(40 + \frac{59}{\pi}\ln n + \frac{12}{\pi^2}\ln^2 n\right) +$$

$$+ \left(8 + \frac{4}{\pi}\ln n\right)\ln\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\cdot \tag{24}$$

Рассмотрим теперь интеграл*

---

* Здесь учтено, что

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(t - x)\sqrt{1 - t^2}} = 0 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

$$S(f-P_{n-1};\ x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(t)-P_{n-1}(t)-[f(x)-P_{n-1}(x)]}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}^{1},$$

где $P_{n-1}(t)$ — указанный в лемме 2 многочлен степени $n-1$.

При любых $x\in[-\xi,\ \xi]$ и $n=2,\ 3,\cdots$ в первом интеграле t не превосходит по абсолютной величине $\frac{\xi+1}{2}$. Поэтому можно написать

$$|S(f-P_{n-1};\ x)|\leqslant\frac{1}{\pi}M_{\frac{\xi+1}{2}}(f-P_{n-1};\ \beta)\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|^{1-\beta}\sqrt{1-t^2}}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\max_t|f(t)-P_{n-1}(t)|\left[\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}+\int\limits_{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}^{1}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}\right],\quad(25)$$

где $0<\beta<\alpha$, а $M_{\frac{\xi+1}{2}}(f-P_{n-1};\ \beta)$ — принятое в лемме 2 обозначение.

Оценим интегралы, входящие в (25). Имеем

$$\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|^{1-\beta}\sqrt{1-t^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}}\int\limits_{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}^{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|^{1-\beta}}=$$

$$=\frac{2^{1-\beta}(1-\xi)^{\beta}}{\beta\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}(n-1)^{\beta}}.$$

Далее, так как $\sin(1+\xi)\frac{\pi}{4}>\frac{1+\xi}{2}>\left|x-\frac{1-\xi}{2n-2}\right|$, то можно написать

$$\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}=-\int\limits_{-1}^{-\sin(1+\xi)\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}-$$

$$-\int\limits_{-\sin\frac{1+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}=-\int\limits_{-1}^{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}-\int\limits_{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}.\quad(26)$$

Заменой $t = \cos\varphi$, $x = \cos\vartheta$ первый интеграл правой части (26) приводится к виду

$$-\int\limits_{\frac{3+\xi}{4}\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\vartheta+\frac{3+\xi}{4}\pi\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)} \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)}\quad\left(\frac{3+\xi}{4}\pi>\vartheta\right),$$

причем, ввиду $0<\vartheta<\pi$, ясно, что $\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta<\pi$ и поэтому

$$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)>\frac{1}{\pi}\left(\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta\right)\cdot$$

Следовательно

$$-\int\limits_{\frac{3+\xi}{4}\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi-\cos\vartheta}\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\frac{3+\xi}{4}\pi-\vartheta}\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\frac{3+\xi}{4}\pi-\arccos(-\xi)}=$$

$$=\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\arccos\xi-\frac{1-\xi}{4}\pi} < \frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}-\frac{1-\xi}{4}\pi}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{1-\xi-\frac{1-\xi}{4}\pi}=\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\pi}{(1-\xi)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot$$

Что же касается второго интеграла, то он легко оценивается следующим образом:

$$-\int\limits_{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{3+\xi}{4}\pi}}\int\limits_{\cos\frac{3+\xi}{4}\pi}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{t-x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin\frac{3+\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{1-\xi}{2n-2}-\ln\cos\frac{3+\xi}{4}\pi\right)\leqslant\frac{1}{\sin\frac{3+\xi}{4}\pi}\ln\frac{2n-2}{1-\xi}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\ln\frac{2n-2}{1-\xi}\cdot$$

На основании полученных неравенств и (26) можно написать

$$\int\limits_{-1}^{x-\frac{1-\xi}{2n-2}}\frac{dt}{|t-x|\sqrt{1-t^2}}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\ln n\right).$$

Точно таким же образом можно получить оценку

$$\int\limits_{x+\frac{1-\xi}{2n-2}}^{1} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\ln n\right).$$

Объединяя указанные оценки и используя лемму 2, получим, что при $n=2, 3, \cdots$

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}|S(f-P_{n-1};x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\left[\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{4C}{\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\left(\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\ln n\right)\right]\frac{1}{(n-1)^{m+\alpha}}. \tag{27}$$

Аналогичным образом для $S^*(f-P_{n-1};x)$ получим

$$\max_{x\in[-\xi,\xi]}|S^*(f-P_{n-1};x)| \leqslant \left[\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta}+C\left(4\ln\frac{2}{1-\xi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+4\ln n\right)\right]\frac{1}{(n-1)^{m+\alpha}}. \tag{28}$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что остаточные члены формул (3) и (4) в указанных выше обозначениях могут быть представлены соответственно в виде

$$R_n(f;x)=S(f-P_{n-1};x)-\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,n}(x)[f(x_k^{(n)})-P_{n-1}(x_k^{(n)})],$$

$$R_n^*(f;x)=S^*(f-P_{n-1};x)-\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,n}^*(x)[f(x_k^{(n)})-P_{n-1}(x_k^{(n)})].$$

Отсюда на основании оценок (21), (24), (27), (28) следует теорема, причем

$$A_1=\frac{64C}{\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{4C}{\pi\sin\frac{1-\xi}{4}\pi}\ln\frac{2\pi}{(1-\xi)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta\pi\sqrt{1-\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2}},$$

$$A_2=\frac{22C}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}+\frac{4C}{\pi\sin\frac{1-\xi}{4}\pi},$$

$$A_1^*=4C\ln\frac{2}{1-\xi}+\frac{320C}{\sqrt{1-\xi^2}}+9C\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+\frac{2^{1-\beta}C_1(1-\xi)^\beta}{\beta},$$

$$A_2^*=4C+\frac{4C}{\pi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}+\frac{472C}{\pi\sqrt{1-\xi^2}},\quad A_\xi^*=\frac{96C}{\pi^2\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Таким образом, доказанная теорема дает как оценку порядка приближения, так и оценки констант*, входящих в порядок. Тем самым она доставляет возможность найти фактическую оценку ошибки приближения заданными квадратурными формулами при любом фиксированном числе узлов.

Вычислительный центр
АН Грузинской ССР

Поступило 17.VII.1969

Ջ. Գ. ՍԱՆԻԿԻՁԵ. Որոշ սինգուլյար օպերատորների քառակուսացման գումարներով մոտարկելու կարգի մասին *(ամփոփում)*

Քառակուսացման (3) և (4) բանաձևերի համար նշվում են մոտարկման գնահատականներ, երբ ֆունկցիան [-1, 1]-ի վրա ունի m *կարգի ածանցյալ* ($m > 0$)*, որը նշված հատվածի վրա բավարարում է Հելդերի պայմանին։*

D. G. SANIKIDSE. *On the order of approximation of some singular operators by quadrature sums* (summary)

Estimates of approximation for the quadrature formulae (3) and (4) are obtained. The function f is assumed to posess derivative or order m ($m > 0$) on the segment [—1, +1] satisfying Helder condition on the mentioned segment.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. Г. Саникидзе*. О сходимости квадратурного процесса для некоторых сингулярных интегралов, Журн. вычисл. матем. и матем., физики, № 1, 1970.
2. *А. И. Каландия*. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости, Матем. сб., 42 (84), № 2, 1957.
3. *С. Б. Стечкин*. О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 3, 1951.
4. *И. П. Натансон*. Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949, 169—540.

---

* Напомним, что константа C известным образом выражается через постоянную Гельдера K.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 4, 1970 Математика

В. А. ЧЕРНЕЦКИЙ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Пусть D — конечная $(m+1)$-связная область, ограниченная контуром Ляпунова L, состоящим из кривой L_0, охватывающей кривые $L_1, L_2, \cdots, L_m$. Предполагаем, что начало координат принадлежит области D.

Через $\omega(z, L_k)$, $k=0, 1, \cdots, m$ обозначим гармонические меры граничных кривых L_k относительно области D [1], а через $D_0^-, \cdots, D_m^-$ — дополнение области $D+L$ до полной плоскости. Пусть $\alpha(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}\omega(t, L_k)\times$ $\times\alpha_k(t)$ — гомеоморфизм контура L на себя, причем $\alpha_k(t)$-отображает контур L_k на себя, изменяя ориентацию, и удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $\alpha_k[\alpha_k(t)]\equiv t$ (условие Карлемана);

2) функция $\dot{\alpha}_k(t)$—H-непрерывна.

Пусть $G(t)\neq 0$ и $g(t)$ — заданные на L H-непрерывные функции. Задана еще функция $A(z)$, непрерывная на всей плоскости за исключением дискретного ряда точек, в которых не существует предела функции $A(z)$, но $A(z)$ ограничена, и конечного числа линий разрыва первого рода. В окрестности бесконечно удаленной точки $A(z)$ допускает оценку

$$|A(z)|\leqslant\frac{M}{|z|^{\beta}},\ M>0,\ \beta>1.$$

Требуется найти регулярное в D решение уравнения [2] (обобщенную аналитическую функцию — о.а.ф.)

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=A(z)\overline{U}, \tag{1}$$

удовлетворяющее на контуре L условию

$$U^+[\alpha(t)]=G(t)\,U^+(t)+g(t). \tag{2}$$

Интерес представляет лишь тот случай, когда выполнены условия [3, 4]

$$G(t)\,G[\alpha(t)]\equiv 1,\ G[\alpha(t)]\,g(t)+g[\alpha(t)]\equiv 0. \tag{3}$$

Для ограниченной односвязной области решение задачи Карлемана в классе аналитических функций дано Д. А. Квеселава [3], в классе о.а.ф. эта задача рассматривалась Хоу Цзун И [5] и полностью решена в работе Г. С. Литвинчука и Н. Т. Мишнякова [6]. Для неограниченной односвязной области краевая задача Карлемана как в классе аналитических, так и в классе о.а.ф. исследована в работах Г. С. Литвинчука [4, 7].

В настоящей работе дается решение краевой задачи (2) для многосвязной области в классе о.а.ф. Используется метод конформного склеивания, впервые примененный Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе к исследованию задачи Газемана [8], при помощи которого задача (2) сводится к задаче Римана на разомкнутом контуре, состоящем из $m+1$ гладких разомкнутых кривых.

§ 2. Вывод интегрального представления

Лемма 1. *Функция* $\Phi(z)$, *однозначная и аналитическая в* D, *H-непрерывная в* D, *может быть представлена в виде*

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + \int\limits_{L} \omega(\tau, L_m)\,\varphi(\tau)\,[1 + |\alpha'(\tau)|]\, d\sigma, \tag{4}$$

где плотность $\varphi(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(t) + \varphi[\alpha(t)] = \sum_{k=1}^{m} c_k \omega(t, L_k), \tag{5}$$

здесь c_k, $k = 1, \cdots, m-1$ —*произвольные постоянные, а* c_m —*определяется по* $\Phi(z)$ *единственным образом, причем плотность* $\varphi(t)$ *определяется с точностью до слагаемого вида* $\sum\limits_{k=1}^{m-1} \mu_k\, \omega(t, L_k)$, *где* μ_k — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Считая, что функция $\Phi(z)$ задана, воспользуемся формулой (4) для нахождения плотности, удовлетворяющей условию (5).

Используя формулы Сохоцкого, условие Карлемана, получим

$$\Phi^{-}[\alpha(t)] + \Phi^{-}(t) = \Phi^{+}[\alpha(t)] + \Phi^{+}(t) - 2\sum_{k=1}^{m} c_k\, \omega(t, L_k) \tag{6}$$

— краевое условие задач Карлемана для областей $D_0^-, \cdots, D_m^-$. Для областей $D_1^-, \cdots, D_m^-$ задачи (6) безусловно разрешимы [3], и решение каждой из них единственно, если зафиксировать C_k, $k = 1, \cdots, m$. Для области D_0^- задача (6) безусловно разрешима, если искать решение, ограниченное на бесконечности; при этом $\Phi^-_{(\infty)} = \mu_0$ однозначно определяется условиями задачи. Определив $\Phi^-(z)$, по формуле Сохоцкого найдем плотность $\varphi_0(t)$, удовлетворяющую условию (5), причем плотность будет определена единственным образом, если задать систему постоянных c_k, $k = 1, \cdots, m$. Следовательно $\varphi_0(t)$ определяется по $\Phi(z)$ с точностью до произвольной постоянной на каждом внутреннем контуре L_k, $k = 1, \cdots, m$.

Итак, мы показали, что для $\Phi(z)$ справедливо интегральное представление

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_0(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\mu_0. \tag{7}$$

Чтобы из (7) получить формулу (4) возьмем новую плотность

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)+\lambda_m\,\omega(t,\ L_m), \tag{8}$$

где λ_m — некоторая комплексная постоянная. Подставив $\varphi(t)$ в правую часть равенства (4) и приравняв второе слагаемое μ_0; получим

$$\lambda_m=\frac{\int\limits_L \omega(\tau,\ L_m)\,\varphi_0(\tau)\,[1+|\alpha'(\tau)|]\,d\sigma-\mu_0}{2\ \text{дл.}\ L_m}. \tag{9}$$

Таким образом, взяв в качестве плотности функцию (8), где λ_m определена формулой (9), получим интегральное представление (4), где плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

§ 3. Построение склеивающей функции

Лемма 2. *Общим решением задачи*

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^+(t) \tag{10}$$

является произвольная постоянная.

Доказательство. Воспользовавшись представлением (4), задачу (10) сводим к интегральному уравнению

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=0. \tag{11}$$

Каждому решению уравнения (11), удовлетворяющему условию (5), соответствует некоторое решение задачи (10). Поэтому число решений задачи (10) конечно. Если предположить, что задача (10) имеет решение $\Phi(z)$, отличное от постоянной, то функции $\{\Phi(z)\}^k$, $k=1,\ 2,\cdots$ также будут решениями задачи (10); они линейно независимы и их счетное число. Поэтому $\Phi(z)\equiv C$, и лемма доказана.

Легко показать далее, что функции $\omega(t,\ L_1),\cdots,\omega(t,\ L_m)$ являются собственными функциями уравнения (11), удовлетворяющими дополнительному условию. Функциям $\omega(t,\ L_k)$, $k=1,\cdots,\ m-1$ соответствует тривиальное решение задачи (10), а функции $\omega(t,\ L_m)$ — комплексная постоянная. Отсюда видно, что уравнение (11) имеет m решений, а функции $\omega(t,\ L_k)$, $k=1,\cdots,\ m$ образуют его фундаментальную систему решений.

Рассмотрим уравнение

$$\psi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\psi(\tau)\,d\tau=0, \tag{12}$$

сопряженное к уравнению (11).

Лемма 3. *Для фундаментальной системы решений уравнения* (12) $\psi_1(t), \cdots, \psi_m(t)$ *выполняется условие*

$$\psi_k(t)+\psi_k[\alpha(t)]\alpha'(t)=0,\ k=1,\cdots,m. \qquad (13)$$

Доказательство. Легко убедиться, что если $\psi_*(t)$ — решение уравнения (12), то функция $\psi_*[\alpha(t)]\alpha'(t)$ тоже является решением этого уравнения. Так как уравнение (12) имеет m собственных функций, то

$$\psi[\alpha(t)]\alpha'(t)=A\psi(t), \qquad (14)$$

где

$$\psi(t)=\{\psi_1(t),\cdots,\psi_m(t)\},$$
$$\psi[\alpha(t)]=\{\psi_1[\alpha(t)],\cdots,\psi_m[\alpha(t)]\}$$

— вектор-функции, $A=\|Q_{ij}\|_1^m$ — невырожденная квадратная числовая матрица порядка m.

Из неразрешимости задачи

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^+(t)+C^*,$$

где C — постоянная, следует, что

$$\int\limits_L \psi_k(t)\,dt,\ k=1,\cdots,m.$$

Проинтегрируем (14) по контуру L, получаем $A=-E$, где E — единичная матрица. Свойство (13) доказано.

Отсюда следует безусловная разрешимость задачи [4]

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^+(t)+g(t)\ \ (g(t)+g[\alpha(t)]\equiv 0). \qquad (15)$$

Теорема 1. *В области D существует однолистная функция $\omega(z)$, аналитическая в D, за исключением точки $z=0$, где $\omega(z)$ имеет простой полюс, удовлетворяющая на L условию склеивания*

$$\omega^+[\alpha(t)]=\omega^+(t). \qquad (16)$$

Кроме того, линия склеивания состоит из $m+1$ простых разомкнутых контуров Ляпунова $\Gamma_0,\cdots,\Gamma_m$, заданных уравнением

$$w=\omega^+(t),\quad t\in L.$$

Доказательство следует из разрешимости (15), если $g(t)= =\frac{1}{t}-\frac{1}{\alpha(t)}$. Положим $\omega(z)=\frac{1}{z}+\Phi(z),\ z\in D$. Тогда для $t\in L$ $\omega^+(t)$ удовлетворяет (16). Нетрудно показать, что $\omega(z)$ — однолистна и контурные значения ее имеют H-непрерывную производную.

§4. Сведение задачи Карлемана к задаче Римана

Гомеоморфизм $\alpha(t)$ на каждом из контуров L_k, $k=0,\cdots,m$ имеет по две неподвижные точки a_k и b_k, которые делят L_k на две непале-

---

* Не выполнено (3).

гающие дуги L_k^1 и L_k^2. Точки L_k^1 предшествуют точке b_k при положительном обходе контура L_k, а точки L_k^2 следуют за ней.

В силу теоремы 1 функция $\omega(z)$ отображает область D на плоскость Ω с разрезами $\Gamma_k = \omega^+(L_k) = \omega^+(L_k^1) = \omega^+(L_k^2)$, $k = 0, \cdots, m$, являющимися простыми гладкими разомкнутыми кривыми с концами $A_k = \omega^+(a_k)$, $B_k = \omega^+(b_k)$ (на концах гладкость предполагается односторонней). Положительный обход на Γ_k устанавливаем от A_k к B_k.

Через $z(\omega)$ обозначим обратную к $\omega(z)$ функцию. Тогда для $z(\omega)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} z^+(w) = t, \quad z^-(w) = \alpha(t), \quad w \in \Gamma_k, \quad t \in L_k^1; \\ z^+(w) = \alpha(t), \quad z^-(w) = t, \quad w \in \Gamma_k, \quad t \in L_k^2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Введем функцию $V(\omega)$ равенством

$$V(\omega) = U[z(\omega)]. \tag{18}$$

Тогда $V(\omega)$ — регулярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial \overline{\omega}} = \left\{ A[z(\omega)] \overline{\left(\frac{dz}{d\omega}\right)} \right\} \overline{V}. \tag{19}$$

При этом в окрестности бесконечно удаленной точки $A[z(\omega)]\overline{\left(\frac{dz}{d\omega}\right)}$ допускает оценку

$$\left| \left\{ A[z(\omega)] \overline{\left(\frac{dz}{d\omega}\right)} \right\} \right| \leqslant \frac{M_0}{|\omega|^2}, \quad M_0 > 0,$$

так как $A[z(\infty)] = A(0)$ — конечное число, $z(\omega)$ на бесконечности имеет нуль первого порядка, а $\frac{dz}{d\omega}$ имеет нуль второго порядка.

Определим на Γ функции $H_\pm(w)$ и $h_\pm(w)$, полагая

$$H_+(w) = G[z^+(w)] = G(t), \quad h_+(w) = g[z^+(w)] = g(t), \quad t \in L_k^1;$$

$$H_-(w) = G[z^-(w)] = G(t), \quad h_-(w) = g[z^-(w)] = g(t), \quad t \in L_k^2,$$

$$k = 0, \cdots, m.$$

Очевидно, что для функций $H_\pm(w)$ и $h_\pm(w)$, в силу (3) выполняются тождества

$$H_+(w)\,H_-(w) \equiv 1, \quad h_+(w)\,H_-(w) + h_-(w) \equiv 0. \tag{20}$$

Для функций $V^\pm(w)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} V^+(w) = U^+[z^+(w)] = U^+(t) \\ V^-(w) = U^+[z^-(w)] = U^+[\alpha(t)] \end{aligned}\right\} w \in \Gamma_k, \; t \in L_k^1;$$

$$V^+(w) = U^+[\alpha(t)], \quad V^-(w) = U^+(t), \quad w \in \Gamma_k, \quad t \in L_k^2.$$

Краевое условие (2) в новых обозначениях запишется в виде двух краевых условий

$$\begin{aligned} V^-(w) = H_+(w)\,V^+(w) + h_+(w), \\ V^+(w) = H_-(w)\,V^-(w) + h_-(w). \end{aligned} \tag{21}$$

В силу условий (20) обе задачи оказываются тождественными.

Таким образом, задача (2) сведена к равносильной ей задаче Римана (21) на разомкнутом контуре Γ, состоящем из $m+1$ простых гладких разомкнутых кривых. Причем решение (21) ищется ограниченное на бесконечности, так как $V(\infty)=U(0)$ — конечное, вообще говоря не равное нулю число, а также ограниченное вблизи концов, так как это соответствует ограниченности функции $U(z)$ вблизи неподвижных точек гомеоморфизма $\alpha(t)$.

§ 5. Анализ разрешимости краевой задачи Карлемана

Дополним контур Γ произвольными кривыми $\Gamma_0', \cdots, \Gamma_m'$ так, чтобы получилась одна гладкая замкнутая жорданова кривая C $(C = =\Gamma_0+\Gamma_0'+\cdots+\Gamma_m+\Gamma_m')$. Тогда задачу (21) можно рассматривать как задачу на замкнутом контуре

$$V^{+}(w)=H(w)\,V^{-}(w)+h(w), \tag{22}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &H(w)=H_{-}(w),\ h(w)=h_{-}(w) \text{ на } \Gamma_k,\\ &H(w)=1,\ h(w)=0 \text{ на } \Gamma_k',\ k=0,\cdots,m. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Функции $H(w)$ и $h(w)$ H-непрерывны на C, за исключением концов A_k и B_k, $k=0,\cdots,m$, где они, вообще говоря, имеют разрывы I-го рода; $H(w)\neq 0$ на C. Точки, предшествующие точке A_k при положительном обходе контура C, будем считать левой окрестностью этой точки, а точки, следующие за ней, —правой. Левый и правый пределы в точке A_k будем обозначать, как обычно, $H(A_k-0)$ и $H(A_k+0)$ (вообще говоря $H(A_k-0)\neq H(A_k+0)$). То же относится и к точке B_k, $k=0,\cdots,m$. Пусть $\varkappa_k=\operatorname{Ind} G(t)|_{L_k}$, $k=0,\cdots,m$. Тогда $\operatorname{Ind} H(w)|_{\Gamma_k}=-\dfrac{\varkappa_k}{2}$. Через $\varkappa_k'$ во всем дальнейшем мы будем обозначать $\dfrac{\varkappa_k}{2}$, когда $\varkappa_k$ — четное число, и $\dfrac{\varkappa_k+1}{2}$, когда $\varkappa_k$ — нечетное число.

Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. $\varkappa_k=2\varkappa_k'$ — четное число. Тогда функция $G(t)$ пусть принимает значение -1 в обеих неподвижных точках. Такие же значения будет принимать и функция $H(w)$ в точках A_k и B_k. Положим $H(A_k)=-1=e^{-i\pi}$, $H(B_k)=-1=e^{-i\pi-i2\varkappa_k'\pi}$. Значение аргумента θ в начальной точке A_k контура Γ_k (в данном случае $\theta=-\pi$) уславливаемся брать в пределах $-2\pi<\theta\leqslant 0$, так как решение ограничено в точке A_k. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &H(A_k-0)=1,\ H(A_k+0)=H(A_k)=e^{-i\pi},\\ &H(B_k-0)=e^{-i(2\varkappa_k'+1)\pi},\ H(B_k+0)=1,\\ &\frac{H(A_k-0)}{H(A_k+0)}=e^{i\pi},\quad \frac{H(B_k-0)}{H(B_k+0)}=e^{-i(2\varkappa_k'+1)\pi}. \end{aligned}\right| \tag{24}$$

Положим

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln e^{i\pi} = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_k' = \frac{1}{2\pi i} \ln e^{-i(2\varkappa_k'+1)\pi} = -\frac{2\varkappa_k'+1}{2} - \nu_k = \frac{1}{2},$$

где ν_k — целое число, которое определяется как [9], [10]

$$\nu_k = E\left[-\frac{2\varkappa_k'+1}{2}\right] = -\varkappa_k' - 1, \tag{25}$$

для решений, ограниченных в точке B_k.

Случай 2. $\varkappa_k = 2\varkappa_k'$, $G(a_k) = G(b_k) = +1$.

$$\left.\begin{aligned} & H(A_k+0) = H(A_k) = 1, \\ & H(B_k-0) = H(B_k) = e^{-i2\varkappa_k'\pi}, \\ & \frac{H(A_k-0)}{H(A_k+0)} = 1, \quad \frac{H(B_k-0)}{H(B_k+0)} = e^{-i2\varkappa_k'\pi}, \\ & \gamma_k = 0, \quad \gamma_k' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

так как

$$\nu_k = E[-\varkappa_k'] = -\varkappa_k'. \tag{27}$$

Случай 3′. $\varkappa_k = 2\varkappa_k' - 1$, $G(a_k) = 1$, $G(b_k) = -1$.

$$\left.\begin{aligned} & H(A_k+0) = H(A_k) = 1, \\ & H(B_k-0) = H(B_k) = -1 = e^{-i(2\varkappa_k'-1)\pi}, \\ & \frac{H(A_k-0)}{H(A_k+0)} = 1, \quad \frac{H(B_k-0)}{H(B_k+0)} = e^{-i(2\varkappa_k'-1)\pi}, \\ & \gamma_k = 0, \quad \gamma_k' = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\nu_k = E\left[\frac{2\varkappa_k'-1}{2}\right] = -\varkappa_k'. \tag{29}$$

Случай 3″. $\varkappa_k = 2\varkappa_k' - 1$, $G(a_k) = -1$, $G(b_k) = +1$.

$$\left.\begin{aligned} & H(A_k+0) = H(A_k) = e^{-i\pi}, \\ & H(B_k-0) = H(B_k) = e^{-i2\varkappa_k'\pi}, \\ & \frac{H(A_k-0)}{H(A_k+0)} = e^{i\pi} \quad \frac{H(B_k-0)}{H(B_k+0)} = e^{-i2\varkappa_k'\pi}, \\ & \gamma_k = \frac{1}{2}, \quad \gamma_k' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\nu_k = E[-\varkappa_k'] = -\varkappa_k'. \tag{31}$$

Нетрудно заметить, что числа ν_k вычисляются во всех случаях по формуле

$$\nu_k = -\frac{\varkappa_k + m_k^-}{2}, \tag{32}$$

где $\varkappa_k = \operatorname{Ind} G(t)|_{L_k}$, m_k^- — число неподвижных точек сдвига $\alpha_k(t)$, в которых $G(t) = -1$, $k=0, \cdots, m$.

Индекс соответствующей задачи Римана представляется формулой

$$\nu = \sum_{k=0}^{m} \nu_k = \sum_{k=0}^{m} -\frac{\varkappa_k + m_k^-}{2} = -\frac{\varkappa + m_-}{2}, \tag{33}$$

где $m_- = \sum_{k=0}^{m} m_k^-$ — число неподвижных точек сдвига $\alpha(t)$, в которых $G(t) = -1$, $\varkappa = \sum_{k=0}^{m} \varkappa_k = \operatorname{Ind} G(t)|_L$.

Решение задачи Римана на разомкнутом контуре в классе о.а.ф. дано Л. Г. Михайловым [11]. Учитывая установленную в [11] аналогию задачи Римана в классе аналитических и о.а.ф., из формул общего решения задачи (21) ([11], стр. 64; [9], стр. 255 и 83; [10], стр. 475 и 79) и из того, что $H_-(w) = \pm 1$ на концах, следует, что

$$V^+(A_k + 0) = V^-(A_k + 0), \; V^+(B_k - 0) = V^-(B_k - 0).$$

Доопределяя $V^\pm(w)$ в точках A_k и B_k по непрерывности, мы придадим смысл краевому условию (21) на концах, что соответствует выполнению граничного условия (2) в неподвижных точках гомеоморфизма $\alpha(t)$. Отсюда следует, что решение задачи Карлемана — функция $U(z) = V[\omega(z)]$ H-непрерывна в $\overline{D}$.

Опираясь на теорию задачи Римана на разомкнутом контуре в классе о.а.ф. [11], сформулируем результат для задачи Карлемана для $(m+1)$-связной области.

Теорема 2. *Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)|_L$, l — число решений однородной задачи* (2), *m_- — число неподвижных точек гомеоморфизма $\alpha(t)$, в которых $G(t) = -1$.*

Тогда

1) *если $\varkappa \leqslant -m_-$, то однородная задача Карлемана в классе о.а.ф. имеет*

$$l = 2 - \varkappa - m_-$$

линейно независимых решений (линейных комбинаций с вещественными коэффициентами), а общее решение неоднородной задачи линейно зависит от $2 - \varkappa - m_-$ произвольных вещественных постоянных;

2) *если $\varkappa > -m_-$, то $l = 0$, а для разрешимости неоднородной задачи Карлемана необходимо и достаточно выполнение*

$$p=\frac{\varkappa+m_{-}}{2}-1$$

условий.

В случае $m=0$ получается результат работы Г. С. Литвинчука и Н. Т. Мишнякова [6].

Автор признателен Э. И. Зверовичу и Г. С. Литвинчуку за полезное обсуждение работы.

Одесский государственный университет

Поступило 15.IV.1969

Վ. Ա. ՉԵՐՆԵՑԿԻ. Կառլեմանի եզրային խնդիրը բազմակապ տիրույթի համար ընդհանրացված անալիտիկ ֆունկցիաների դասում *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է Կառլեմանի եզրային խնդիրը առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտական սիստեմի համար։ Լուծումը տրվում է վերջավոր բազմակապ տիրույթի համար։

W. A. CHERNETZKII. *Carleman boundary problem for poly-connected domains in the class of generalised analytic functions*.(summary)

Carleman boundary problem for a system of the first order differential equations of elliptic type is considered. The solution is found in the case of finite, poly-connected domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М., ИЛ, 1941.
2. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, М., Физматгиз, 1959.
3. *Д. А. Квеселава.* Некоторые граничные задачи теории функций, Труды Тбилисского матем. института, 16, 1948, 39—80.
4. *Г. С. Литвинчук.* О некоторых краевых задачах Римана со смещениями, Изв. вузов, Матем., 6 (25), 1961, 71—81.
5. *Хоу Цзун И.* Краевая задача Карлемана для эллиптических систем уравнений первого порядка „Scienta Sinica", 12, № 8, 1963, 1237.
6. *Г. С. Литвинчук* и *Н. Т. Мишняков.* Краевая задача Карлемана для ограниченной области в классе обобщенных аналитических функций, Изв. АН Армянской ССР, Матем., 2, № 1, 1967, 52—56.
7. *Г. С. Литвинчук.* Об одной краевой задаче с обратным сдвигом в классе обобщенных аналитических функций, Сиб. матем. журн., 3, № 2, 1962, 223—228.
8. *Г. Ф. Манджавидзе* и *Б. В. Хведелидзе.* О задаче Римана-Привалова с непрерывными коэффициентами, ДАН СССР, 123, № 5, 1958, 791—794.
9. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., ОГИЗ, 1946.
10. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
11. *Л. Г. Михайлов.* Краевая задача типа задачи Римана для дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения, Ученые записки Таджикского госуниверситета, 10, 1957, 64.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS