ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կորսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իր լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известии АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.
индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

Р. В. АМБАРЦУМЯН

МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ВЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРЯМЫХ

Введение. Метод „инвариантного вложения" в интегральной геометрии представляет собой инструмент, с помощью которого новые результаты могут быть получены даже в такой старой области исследования, каковой является теория случайных прямых на евклидовой плоскости (см. [1] и [2]) и в пространстве.

Настоящая работа, развивающая этот метод далее, состоит из трех параграфов. Результаты § 1 относятся к теории выпуклых фигур на плоскости, и основываются на некоторых утверждениях, которые, для удобства последующих ссылок, особо выделены как „леммы о парах отрезков". § 2 представляет собой полный вывод результата, анонсированного в [2]. В § 3 рассматриваются случайные прямые в трехмерном пространстве.

Несколько слов о том, как метод „инвариантного вложения", истоки которого лежат в математической физике (см. [3]) применяется в теории случайных прямых на плоскости.

Обозначим через

O — начало координат на плоскости,

$C(r;\ Q)$ — окружность радиуса r с центром в точке Q,

g — направленные прямые на плоскости,

$\mathfrak{M}$ — множество направленных прямых, пересекающих окружность $C(1;\ 0)$,

K_r — область, заключенную между $C(r+1;\ O)$ и $C(r-1;\ O)$, $r>1$.

Определим взаимно-однозначное отображение $g(\cdot)$ множества K_r во множество $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$g(Q)$ есть направленная прямая, касающаяся окружности $C(r;\ Q)$ в точке, лежащей на луче OQ, причем направление на этой касательной выбирается так, что $C(r;\ Q)$ оказывается по отношению к $g(Q)$ в правой полуплоскости.

Отображение $g(\cdot)$ индуцирует в $\mathfrak{M}$ меру μ_r, соответствующую плоской мере Лебега в K_r. Наряду с μ_r рассмотрим инвариантную (относительно евклидовых движений плоскости) меру прямых на плоскости, элемент которой равен (см. [4])

$$dg = d\varphi dp,$$

где $(\varphi,\ p)$ — полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного из O на прямую g ($p<0$, если относительно g начало координат находится в левой полуплоскости).

В действительности элемент площади dS в K_r связан с полярными координатами $(\varphi,\ p+r)$ точки Q соотношением

$$dS = (p+r)\, d\varphi dp.$$

Другими словами

$$d\mu_r = (p+r)\, dg. \tag{0.1}$$

Если на $\mathfrak{M}$ задана некоторая суммируемая функция $f(g)$, то из (0.1) следует, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} f(g)\, d\mu_r = r \iint\limits_{\mathfrak{M}} f(g)\, dg + \iint\limits_{\mathfrak{M}} f(g)\, p dg. \tag{0.2}$$

Для некоторых функций f удается расширить их область определения так, чтобы функция f стала бы определенной и на окружностях $C(r;\ Q)$, $Q \in K_r$ и выполнялось бы

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} f(g)\, d\mu_r - \iint\limits_{K_r} f(C(r;\ Q))\, dS \doteq o(r), \quad r \to \infty. \tag{0.3}$$

Если (0.3) выполняется, то из (0.2) находим

$$\iint\limits_{K_r} f(C(r;\ Q))\, dS = r \iint\limits_{\mathfrak{M}} f(g)\, dg + o(r), \quad r \to \infty. \tag{0.4}$$

Отсюда следует, что (если нижеследующий предел существует) выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{d}{dr} \iint\limits_{K_r} f(C(r;Q))\, dS = \iint\limits_{\mathfrak{M}} f(g)\, dg. \tag{0.5}$$

Если $f(g)$ не зависит от направления прямой g, то (0.5) переписывается в виде

$$\lim_{r\to\infty} \frac{d}{dr} \iint\limits_{K_r} f(C(r;\ Q))\, dS = 2 \iint\limits_{\mathfrak{M}'} f(g)\, dg, \tag{0.6}$$

где $\mathfrak{M}'$ — множество ненаправленных прямых, пересекающих $C(1;\ 0)$.

Сущность метода „инвариантного вложения“ состоит в прямом вычислении пределов, стоящих в левых частях (0.5) или (0.6), которые также выражаются в терминах прямых, с тем, чтобы получить новые представления для интегралов $\iint f(g)\, dg$. Как в работах [1] и [2] так и в настоящей работе, такое вычисление проводится по отношению к некоторым частного вида функциям $f(g)$.

§ 1. Плоские выпуклые фигуры

п. 1. Пусть a_1 и a_2 — два замкнутых прямолинейных отрезка, лежащих в $C(1;\ 0)$.

Введем множество направленных прямых $\mathfrak{M}(a_1,\ a_2)$ и множество точек $A(r)$ на плоскости следующим образом:

$$\mathfrak{M}(a_1,\ a_2) = \{g;\ g \cap a_1 \neq \varnothing,\ g \cap a_2 \neq \varnothing\}$$

$$A(r) = \{Q;\ C(r;\ Q) \cap a_1 \neq \varnothing,\ C(r;\ Q) \cap a_2 \neq \varnothing\}$$

($\varnothing$ — пустое множество). Ниже мы часто будем требовать, чтобы расположение отрезков a_1 и a_2 удовлетворяло бы условию

А. Если $g \in \mathfrak{M}(a_1,\ a_2)$, то g пересекает каждый из отрезков a_1 и a_2 в единственной точке. Другими словами, прямые, на которых лежат отрезки a_1 и a_2, не принадлежат $\mathfrak{M}$.

Обозначим через $\chi(g)$ — длину участка прямой $g \in \mathfrak{M}(a_1,\ a_2)$, заключенного между точками пересечения g с a_1 и a_2; $\chi(r;\ Q)$ — длину (меньшего) участка $C(r;\ Q)$, $Q \in A(r)$, заключенного между пересечениями $C(r;\ Q)$ с a_1 и a_2; ψ_1 и ψ_2 — углы, возникающие при пересечении $g \in \mathfrak{M}(a_1,\ a_2)$ с отрезками a_1 и a_2, лежащие в правой полуплоскости, вне выпуклого четырехугольника, натянутого на a_1 и a_2 (при выполнении А.); φ_1, φ_2 — углы, возникающие при пересечении $C(r;\ Q)$, $Q \in A(r)$ с отрезками a_1 и a_2, лежащие внутри $C(r;\ Q)$, вне выпуклого четырехугольника, натянутого на a_1 и a_2 (при выполнении А.).

Заметим, что выполнение А. обеспечивает корректность данных определений. Действительно, если А. выполняется, то при достаточно большом r, $C(r;\ Q)$, $Q \in A(r)$ имеет с каждым из отрезков a_1 и a_2 единственную точку пересечения.

В этом параграфе рассматриваются интегралы вида

$$I = \iint\limits_{\mathfrak{M}} f(\chi(g))\, dg, \quad I(r) = \iint\limits_{A(r)} f(\chi(r;\ Q))\, dS.$$

Главным аргументом в пользу введения условия А. является исключение с его помощью возможности углам ψ_1, ψ_2 и φ_1, φ_2 принимать значения, близкие к 0 или π, что дает возможность без труда обосновать в рассматриваемом случае равенство (0.3), а также операции предельных переходов под знаками интегралов, которые проделываются ниже. Не останавливаясь подробно здесь и далее на этих вопросах, сформулируем

Предложение. Если f — непрерывно дифференцируемая функция, отрезки a_1 и a_2 удовлетворяют условию А, то

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} f(\chi(g))\, d\mu_2 - \iint\limits_{K_r} f(\chi(r;\ Q))\, dS = o(r).$$

Таким образом, при выполнении А. применима техника „инвариантного вложения". Уравнение (0.5) в введенных обозначениях принимает вид

$$\lim_{r\to\infty}\frac{dI(r)}{dr}=I. \tag{1.1}$$

Наша цель теперь — непосредственное вычисление производной $\frac{d}{dr}I(r)$. Как мы убедимся, предел $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{d}{dr}I(r)$ существует. Этому вычислению предпошлем первую лемму о паре отрезков.

Пусть P_1, Q_1 — концы отрезка a_1, P_2, Q_2 — концы отрезка a_2 (см. рис. 1.1). Условимся через ω обозначать различные подмножества множества точек $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$. Обозначим через $S_\omega(r)$ площадь множества точек, такого, что если Q принадлежит этому множеству, то $\hat{C}(r;\ Q)\cap\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}=\omega$, ($\hat{C}(r;\ Q)$ — внутренность $C(r;\ Q)$).

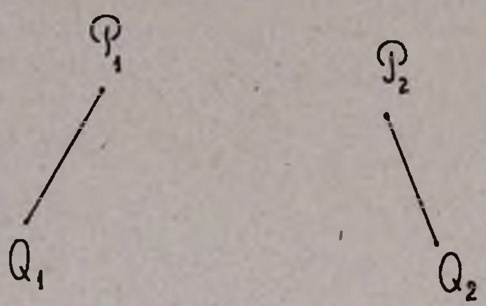

Рис. 1.1.

Под углами P_1 и P_2 будем понимать углы при соответствующих вершинах четырехугольника, натянутого на a_1 и a_2.

Лемма 1. Если отрезки a_1 и a_2 удовлетворяют условию А., то разность

$$\Delta=S_{P_1P_2}(r)-S_{Q_1Q_2}(r)$$

при достаточно больших значениях r перестает зависеть от r. Асимптотически, когда расстояние между точками P_1 и P_2 не меняется, углы P_1 и P_2 остаются постоянными, а δ_i, $i=1,\ 2$ (расстояние между точками P_i и Q_i) стремится к нулю, имеет место

$$\Delta=-\sin(P_1+P_2)\ \delta_1\delta_2+o(\delta_1\delta_2). \tag{1.2}$$

Доказательство. Обозначим через $S(\omega_1;\ \omega_2)$ площадь множества точек Q, для которых $\hat{C}(r;\ Q)\cap\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}=\omega_1$ и $K(r;\ h)\cap\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}=\omega_2$, где положено $K(r;\ h)=\hat{C}(r+h;\ Q)-\hat{C}(r;\ Q)$.

Поскольку площадь множества центров, для которых в $K(r;\ h)$ попадает больше, чем одна из точек множества $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}$ при $h\to o$ есть $o(h)$, то имеем

$$S_{P_1P_2}(r+h)=S(P_1,\ P_2;\ \varnothing)+\sum_{i=1,\,2}S(P_i;\ P_j)+o(h). \tag{1.3}$$

Здесь и далее $\varnothing$ — пустое множество; и принимается условие, что

$$j=2,\ \text{если}\ \ i=1,$$
$$1,\ \text{если}\ \ i=2.$$

Вычитая из (1.3) равенство

$$S_{P_1P_2}(r) = S(P_1,\ P_2;\ \varnothing) + \sum_{l=1,\,2} S(P_1,\ P_2;\ Q_l) + o(h) \qquad (1.4)$$

получаем, что

$$S_{P_1P_2}(r+h) - S_{P_1P_2}(r) = \sum_{l=1,\,2} S(P_l;\ P_j) - \sum_{l=1,\,2} S(P_1,\ P_2;\ Q_l) + o(h). \qquad (1.5)$$

Для того, чтобы от (1.5) перейти к дифференциальному уравнению, вводятся вероятности $\pi_\omega(r;\ G)$.

По определению случайный круг $\sigma(r;\ G)$ имеет постоянный радиус r, а его центр распределен равномерно на окружности радиуса r с центром в точке G (так что точка G с вероятностью 1 лежит на периферии этого случайного круга). Через $\pi_\omega(r;\ G)$ обозначаем вероятность события $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\} \cap \sigma(r;\ G) = \omega$.

Предельным переходом из (1.5) получаем

$$\frac{d}{dr} S_{P_1P_2}(r) = 2\pi r \sum_{l=1,\,2} \pi_{P_l}(r;\ P_j) - 2\pi r \sum_{l=1,\,2} \pi_{P_1P_2}(r;\ Q_l). \qquad (1.6)$$

Интегрируя (1.6) с учетом того, что $S_{P_1P_2}(0) = 0$, получаем

$$S_{P_1P_2}(r) = 2\pi \int_0^r u\ du \left[\sum_{l=1,\,2} \pi_{P_l}(u;\ P_j) - \sum_{l=1,\,2} \pi_{P_1P_2}(u;\ Q_l) \right]. \qquad (1.7)$$

Следующий шаг состоит в дифференцировании вероятностей $\pi_\omega(r;\ G)$ по r. Для этого внутри случайного круга $\sigma(r+h;\ G)$ выделим круг $\bar{\sigma}$ радиуса r, проходящий через G и имеющий в точке G общую с кругом $\sigma(r+h;\ G)$ касательную. Лунку, ограниченную периферии кругов $\tilde{\sigma}(r+h; G)$ и $\bar{\sigma}$, обозначим через $\bar{K}$.

Введем вероятности $\Pi_G(\omega_1;\ \omega_2)$ события, состоящего в том, что $\bar{\sigma} \cap \{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\} = \omega_1$ и $\bar{K} \cap \{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\} = \omega_2$. Пускай r_i, $i=1$, 2, 3, 4 суть радиусы окружностей, которые можно провести через всевозможные тройки точек, выбранные из $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}$. Нетрудно видеть, что для всех значений r, не совпадающих ни с одним из r_i, $i = 1, \cdots, 4$, вероятность $\Pi_G(\omega_1;\ \omega_2)$ есть величина порядка $o(h)$ при $h \to o$, если в ω_2 входит больше, чем одна точка из $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}$. Имеем поэтому для $r \neq r_i$

$$\pi_{P_l}(r+h;\ P_j) = \Pi_{P_j}(P_l;\ \varnothing) + \Pi_{P_l}(\varnothing;\ P_l) + o(h),\ i = 1,\ 2. \qquad (1.8)$$

В то же время

$$\pi_{P_l}(r;\ P_j) = \Pi_{P_j}(P_l;\ \varnothing) + \sum_{l=1,\,2} \Pi_{P_j}(P_l;\ Q_l) + o(h),\quad i = 1, 2, \qquad (1.9)$$

вместе с (1.8) это дает

$$\pi_{P_i}(r+h;\ P_j)-\pi_{P_i}(r;\ P_j)=\Pi_{P_j}(\varnothing;\ P_i)-\sum_{l=1,2}\Pi_{P_j}(P_i;\ Q_l)+$$
$$+o(h),\quad i=1,\ 2. \tag{1.10}$$

Аналогично этому для $r\neq r_l$

$$\pi_{P_1P_2}(r+h;\ Q_i)=\Pi_{Q_i}(P_1,P_2;\ \varnothing)+\sum_{l=1,2}\Pi_{Q_i}(P_l;\ P_s)+o(h),\ i=1,2. \tag{1.11}$$

Здесь положено

$$s=1,\quad \text{если}\quad l=2$$
$$2,\quad \text{если}\quad l=1$$

и в тоже время

$$\pi_{P_1P_2}(r;\ Q_i)=\Pi_{Q_i}(P_1,P_2;\ \varnothing)+\Pi_{Q_i}(P_1,\ P_2;\ Q_j),\ i=1,\ 2. \tag{1.12}$$

Вместе с (1.11) это дает

$$\pi_{P_1P_2}(r+h;\ Q_i)-\pi_{P_1P_2}(r;\ Q_i)=\sum_{l=1,2}\Pi_{Q_i}(P_l;P_s)-\Pi_{Q_i}(P_1,\ P_2;\ Q_j)+$$
$$+o(h)\quad i=1,\ 2. \tag{1.13}$$

Переходя в (1.10) и (1.13) к дифференциальным уравнениям, введем функции

$\delta_\omega(r;\ G_1,\ G_2)=0$, если пересечение ни одного из кругов радиуса r, проходящих через точки G_1 и G_2, с $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}$ не равно ω.

1 если лишь один из этих кругов пересекается с $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}$ по ω.

2 если каждый из этих кругов пересекается с $\{P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\}$ по ω.

$$\beta_\rho(r)=0,\qquad \text{если}\ \rho>2r,$$

$$=\frac{\rho}{2\pi r\sqrt{4r^2-\rho^2}},\ \text{если}\ \rho<2r.$$

Из (1.10) и (1.13) предельным переходом получаем

$$\frac{d}{dr}\pi_{P_i}(r;\ P_j)=\beta(r)\Big[\delta_\varnothing(r;\ P_1,\ P_2)-\sum_{l=1,2}\delta_{P_i}(r;\ P_j,\ Q_l)\Big],\quad i=1,\ 2 \tag{1.14}$$

и

$$\frac{d}{dr}\pi_{P_1P_2}(r;\ Q_i)=\beta(r)\Big[\sum_{l=1,2}\delta_{P_l}(r;\ Q_i,\ P_s)-\delta_{P_1P_2}(r;Q_1,Q_2)\Big], \tag{1.15}$$
$$i=1,\ 2.$$

Поскольку здесь и в дальнейшем в произведениях вида $\beta_\rho(r)\,\delta_\omega(r;\ G_1,\ G_2)$ всегда ρ есть расстояние между точками G_1 и G_2, то в таких произведениях зависимость β от ρ не указывается. Для упрощения записи β условно выносится за скобки. Уравнения (1.14) и

(1.15) справедливы для $r \neq r_i$, $i=1, \cdots, 4$. Однако вследствие непрерывности функций $\pi_\infty(r; G)$ нижеследующее интегральное равенство справедливо уже при всех значениях r

$$\pi_{P_i}(r;\ P_j) = \int\limits_0^r \beta(u)\,du \left[\delta_\varnothing(u;\ P_1, P_2) - \left[\sum_{l=1,\,2} \delta_{P_l}(u;\ P_j,\ Q_l)\right] \right], \quad i=1,\ 2, \tag{1.16}$$

$$\pi_{P_1P_2}(r;\ Q_l) = \int\limits_0^r \beta(u)\,du \left[\sum_{l=1,\,2} \delta_{P_l}(u;\ Q_l,\ P_s) - \delta_{P_1P_2}(u;\ Q_1, Q_2) \right], \quad i=1,\ 2. \tag{1.17}$$

Подстановка (1.16) и (1.17) в (1.7) дает

$$S_{P_1P_2}(r) =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^r u \int\limits_0^r \beta(v)\,dv \left[\delta_\varnothing(v;\ P_1,\ P_2) + \delta_{P_1P_2}(v;\ Q_1,\ Q_2) - \sum_{l,\,l=1,\,2} \delta_{P_l}(v;\ P_j, Q_l) \right]. \tag{1.18}$$

Изменяя в (1.18) порядок интегрирования и выполняя интегрирование по u, получаем

$$S_{P_1P_2}(r) = 2\pi \int\limits_0^r (r^2 - v^2)\,\beta(v) \Big[\delta_\varnothing(v;\ P_1, P_2) + \delta_{P_1P_2}(v;\ Q_1, Q_2) -$$

$$\sum_{l,\,l=1,\,2} \delta_{P_l}(v; P_j,\ Q_l) \Big]\,dv. \tag{1.19}$$

Присутствие кусочно-постоянного множителя под интегралами вида

$$\int\limits_0^r (r^2 - v^2)\,\beta(v)\,\delta_\infty(v;\ G_1, G_2)\,dv$$

определяет „истинные" пределы интегрирования. Для конкретности предположим, что углы P_1 и P_2 (см. рис. 1) тупые. В этом случае окружность, для которой отрезок P_1P_2 служит диаметром, не содержит точек из $[P_1P_2Q_1Q_2]$ поэтому

$$2\pi \int\limits_0^r (r^2 - v^2)\,\beta(v)\,\delta_\varnothing(v;\ P_1, P_2)\,dv = 2\pi \Bigg[\int\limits_{\frac{\rho(P_1P_2)}{2}}^{r} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\rho(P_1P_2)}{2}}^{\nu(P_1P_2)} \Bigg] (r^2 - v^2)\,\beta_{\rho(P_1P_2)}(v)\,dv. \tag{1.20}$$

Через $\nu(G_1 G_2)$ (соответственно $\mu(G_1 G_2)$ $G_1, G_2 \in \{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ обозначаем длину меньшего (соответственно большего) из радиусов двух окружностей, проходящих через G_1 и G_2, и одну из двух остающихся точек из $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$. Предполагая дополнительно, что углы Q_1 и Q_2 (см. рис. 1) острые, находим далее

$$2\pi \int_0^r (r^2 - v^2)\beta(v)\delta_{P_1P_2}(v; Q_1, Q_2)\,dv = 2\pi \left[\int_{\frac{\rho(Q_1Q_2)}{2}}^{r} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\rho(Q_1Q_2)}{2}}^{\mu(Q_1Q_2)} \right] (r^2 - v^2)\,\beta_{\rho(Q_1Q_2)}(v)\,dv, \tag{1.21}$$

$$2\pi \int_0^r (r^2 - v^2)\beta(v)\delta_{P_l}(v; Q_l, P_j)\,dv = 2\pi \left[\int_{\frac{\rho(P_jQ_l)}{2}}^{r} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\rho(P_jQ_l)}{2}}^{\nu(P_jQ_l)} \right] (r^2 - v^2)\,\beta_{\rho(P_jQ_l)}(v)\,dv. \tag{1.22}$$

Поясним, что (1.21) имеет место потому, что при достаточно малых δ_1 и δ_2 в круг с диаметром Q_1Q_2 попадают обе точки P_1 и P_2, а (1.22) — потому, что при достаточно малых δ_1 и δ_2 в круг с диаметром P_jQ_l попадает точка P_l, но не попадает точка Q_j.

Далее, символ $r(G)$ встречается только как один из пределов в интегралах от $(r^2 - v^2)\,\beta_{\rho(G_1, G_2)}(v)$; всегда под $r(G_1)$ мы будем понимать далее радиус окружности, проходящий через точки G_1, G_2 и G_3. Имеем

$$2\pi \int_0^r (r^2 - v^2)\beta(v)\delta_{P_j}(v; P_l, Q_l)\,dv =$$

$$= 0, \text{ если } r(P_j) > r(Q_j)$$

$$= 2\pi \int_{r(P_j)}^{r(Q_j)} (r^2 - v^2)\,\beta_{\rho(P_lQ_l)}(v)\,dv, \text{ если } r(P_j) < r(Q_j). \tag{1.23}$$

Итак, $S_{P_1P_2}$ равна сумме правых частей в формулах (1.20) — (1.23), взятых с надлежащим знаком.

Что касается $S_{Q_1Q_2}$, то ее выражение получается из (1.19) заменой в ней букв P на буквы Q, т. е.

$$S_{Q_1Q_2}(r)=2\pi\int_0^r (r^2-v^2)\beta(v)\Big|\,\delta_{\varnothing}(v;\;Q_1,\;Q_2)+\delta_{Q_1Q_2}(v;\;P_1P_2)-$$

$$-\sum_{l,\,l=1,\,2}\delta_{Q_l}(v;\;Q_j,\;P_l)\Big]\,dv. \qquad (1.24)$$

Поскольку мы предположили, что углы Q_1 и Q_2 острые, а δ_1 и δ_2 можно взять достаточно малыми, то в круг, для которого отрезок Q_1Q_2 служит диаметром, попадают обе точки P_1 и P_2 (это уже использовалось в формуле (1.21)); поэтому

$$2\pi\int_0^r (r^2-v^2)\beta(v)\,\delta_{\varnothing}(v;\;Q_1,Q_2)\,dv=2\pi\int_{\mu(Q_1Q_2)}^r (r^2-v^2)\,\beta_{\rho(Q_1Q_2)}(v)\,dv. \qquad (1.25)$$

Далее, в силу замечаний, сделанных к формулам (1.20) и (1.22), находим, что

$$2\pi\int_0^r (r^2-v^2)\beta(v)\,\delta_{Q_1Q_2}(v;P_1,P_2)dv=2\pi\int_{\mu(P_1P_2)}^r (r^2-v^2)\,\beta_{\rho(P_1P_2)}(v)\,dv, \qquad (1.26)$$

$$2\pi\int_0^r (r^2-v^2)\beta(v)\,\delta_{Q_l}(v;\;Q_j,\;P_l)\,dv=2\pi\int_{\mu(Q_j,\,P_l)}^r (r^2-v^2)\,\beta_{\rho(Q_j,\,P_l)}(v)dv. \qquad (1.27)$$

Наконец,

$$2\pi\int_0^r (r^2-v^2)\beta(v)\,\delta_{Q_l}(v;\;P_j,\;Q_j)\,dv=$$

$$=0,\ \text{если}\ r(Q_l)>r(P_l)$$

$$=2\pi\int_{r(Q_l)}^{r(P_l)} (r^2-v^2)\,\beta_{\rho(P_jQ_l)}(v)\,dv,\ \text{если}\ r(Q_l)<r(P_l). \qquad (1.28)$$

Итак, $S_{Q_1Q_2}(r)$ равна сумме правых частей в формулах (1.25)—(1.28), взятых с надлежащими знаками. Теперь легко усматриваем, что

$$\Delta=S_{P_1P_2}(r)-S_{Q_1Q_2}(r)=$$

$$=2\pi\left[\int_{\frac{\rho(P_1P_2)}{2}}^{\mu(P_1P_2)}+\int_{\frac{\rho(P_1P_2)}{2}}^{\nu(P_1P_2)}\right](r^2-v^2)\,\beta_{\rho(P_1P_2)}(v)\,dv+$$

$$+2\pi\left[\int_{\frac{\rho(Q_1Q_2)}{2}}^{\mu(Q_1Q_2)}+\int_{\frac{\rho(Q_1Q_2)}{2}}^{\nu(Q_1Q_2)}\right](r^2-v^2)\,\beta_{\rho(Q_1Q_2)}(v)\,dv- \qquad (1.29)$$

$$-2\pi\sum_{i=1,2}\left[\int\limits_{\frac{\rho(P_i Q_j)}{2}}^{\mu(P_i Q_j)}+\int\limits_{\frac{\rho(P_i Q_j)}{2}}^{\nu(P_i Q_j)}\right](r^2-v^2)\beta_{\rho(P_i Q_j)}(v)\,dv-$$

$$-2\pi\sum_{i=1,2}\int\limits_{r(P_i)}^{r(Q_i)}(r^2-v^2)\beta_{\rho(P_j Q_j)}(v)\,dv.$$

Мы видим, что r в верхних пределах исчезла.

Поскольку главный член при r каждой из площадей $S_{P_1P_2}(r)$ и $S_{Q_1Q_2}(r)$ пропорционален r, то коэффициент при r^2 в полученном выражении для Δ обязан обратиться в нуль. (Это можно проверить непосредственно). Кроме того, очевидно, имеется возможность избавиться от символов μ и ν, заменяя их радиусами конкретных окружностей. Получаем не зависящее от r выражение для Δ:

$$\Delta=2\pi\sum_{i=1,2}\left[\int\limits_{\frac{\rho(P_i Q_j)}{2}}^{r(P_j)}+\int\limits_{\frac{\rho(P_i Q_j)}{2}}^{r(Q_i)}\right]v^2\beta_{\rho(P_i Q_j)}(v)\,dv-$$

$$-2\pi\left[\int\limits_{\frac{\rho(P_1P_2)}{2}}^{r(Q_1)}+\int\limits_{\frac{\rho(P_1P_2)}{2}}^{r(Q_2)}\right]v^2\beta_{\rho(P_1P_2)}(v)\,dv-$$

$$-2\pi\left[\int\limits_{\frac{\rho(Q_1Q_2)}{2}}^{r(P_1)}+\int\limits_{\frac{\rho(Q_1Q_2)}{2}}^{r(P_2)}\right]v^2\beta_{\rho(Q_1Q_2)}(v)\,dv+ \tag{1.30}$$

$$+2\pi\sum_{j=1,2}\int\limits_{r(P_l)}^{r(Q_l)}v^2\beta_{\rho(P_j Q_j)}(v)\,dv.$$

Таким образом первое утверждение леммы доказано,

Заметим, что

$$\int\limits_{\frac{\rho}{2}}^{x}v^2\beta_\rho(v)\,dv=\frac{1}{8\pi}\rho\sqrt{4x^2-\rho^2}.$$

При подстановке вместо x пределов интегрирования, встречающихся в (1.30), получаем выражения вида

$$\frac{1}{8\pi}\rho(G_1G_2)\sqrt{4r^2(G_3)-\rho^2(G_1G_2)},$$

где $r(G_3)$ — радиус окружности проходящей через точки G_1, G_2, G_3.

Так как этот радиус равен $\frac{\rho(G_1G_2)}{2\sin G_3}$, где G_3 — угол, под которым виден из точки G_3 отрезок G_1G_2, то получаем, что

$$\int\limits_{\frac{\rho(G_1G_2)}{2}}^{r(G_3)} v^2\beta_{\rho(G_1G_2)}(v)dv = \frac{1}{8\pi}\rho^2(G_1G_2)|\mathrm{ctg}\, G_3|.$$

Используя это соотношение в (1.30), находим

$$\begin{gathered} L\Delta = \rho^2(P_1Q_2)[|\mathrm{ctg}\, P_2| + |\mathrm{ctg}\, Q_1|] + \rho^2(P_2,\ Q_1)[|\mathrm{ctg}\, P_1| + |\mathrm{ctg}\, Q_2|] - \\ - \rho^2(P_1P_2)[|\mathrm{ctg}\, Q_1'| + |\mathrm{ctg}\, Q_2'|] - \rho^2(Q_1Q_2)[|\mathrm{ctg}\, P_1'| + |\mathrm{ctg}\, P_2'|] + \\ + \rho^2(P_1Q_1)[|\mathrm{ctg}\, Q_2^{\bullet}| - |\mathrm{ctg}\, P_2^{\bullet}|] + \rho^2(P_2,\ Q_2)[|\mathrm{ctg}\, Q_1^{\bullet}| - |\mathrm{ctg}\, P_1^{\bullet}|]. \end{gathered} \tag{1.31}$$

В данной записи и ниже (в (1.32) и (1.33)) принято соглашение о том, что в произведениях вида

$$\rho^2(G_1G_2)|\mathrm{ctg}\, G_3|$$

G_3 всегда обозначает тот угол, под которым отрезок G_1G_2 виден из точки G_3. Отметим основные остающиеся этапы получения второго утверждения леммы 1.

Сгруппируем вместе члены в правой части (1.31), полагая

$$\Delta_{Q_1P_1Q_2} = \rho^2(P_1Q_2)|\mathrm{ctg}\, Q_1| - \rho^2(Q_1Q_2)|\mathrm{ctg}\, P_1'| + \rho^2(P_1Q_1)|\mathrm{ctg}\, Q_2^{\bullet}|, \tag{1.32}$$

$$\Delta_{Q_1P_1P_2} = \rho^2(Q_1P_2)|\mathrm{ctg}\, P_1| - \rho^2(P_1P_2)|\mathrm{ctg}\, Q_1'| - \rho^2(Q_1P_1)|\mathrm{ctg}\, P_2^{\bullet}|. \tag{1.33}$$

Выражения для $\Delta_{Q_2P_2Q_1}$ и $\Delta_{Q_2P_2P_1}$ получаем из (1.32) и (1.33) заменой в индексах единиц на двойки, и наоборот. Имеем

$$4\Delta = \Delta_{Q_1P_1Q_2} + \Delta_{Q_1P_1P_2} + \Delta_{Q_2P_2Q_1} + \Delta_{Q_2P_2P_1}.$$

Простой геометрический расчет показывает, что

$$\Delta_{Q_1P_1Q_2} = 2\rho(P_1Q_2)\sin P_1'\cdot\delta_1 + o(\delta_1)$$

$$\Delta_{Q_1P_1P_2} = -2\rho(P_1P_2)\sin P_1\cdot\delta_1 + o(\delta_1).$$

Следовательно, для того, чтобы получить второе утверждение леммы 1 остается проверить, что

$$\rho(P_1Q_2)\sin P_1' - \rho(P_1P_2)\sin P_1 = -\sin(P_1 + P_2)\delta_2 + o(\delta_2),$$

после чего лемма 1 оказывается доказанной.

п. 2. Перейдем к вычислению производной $\frac{d}{dr}I(r) = \frac{d}{dr}\iint\limits_{A(r)} \times$ $\times f(\gamma(r;\ Q))\,dS$. Выберем $h > 0$.
Положим $A(r;\ h) = A(r + h) \cap A(r)$. Введем множества

$$G_1(r;\ h) = A(r) - A(r;\ h),$$

$$G_2(r;\ h) = A(r + h) - A(r;\ h).$$

Очевидно имеем

$$I(r)=\left[\iint\limits_{A(r;h)}+\iint\limits_{G_1(r;h)}\right]f(\chi(r;\ Q))\,dS \tag{1.34}$$

$$I(r+h)=\left[\iint\limits_{A(r;h)}+\iint\limits_{G_2(r;h)}\right]f(\chi(r+h;\ Q))dS. \tag{1.35}$$

Предполагая что f имеет непрерывную производную, рассмотрим интеграл

$$\Delta_1(r;\ h)=\iint\limits_{A(r;\ h)}[f(\chi(r+h;\ Q))-f(\chi(r;\ Q))]\,dS.$$

На рис. 1.2 изображено пересечение окружности $C(r;\ Q)$ с отрезками a_1 и a_2, причем p_1 и p_2 — суть длины перпендикуляров, опущенных на (продолжения) a_1 и a_2 из точки Q.

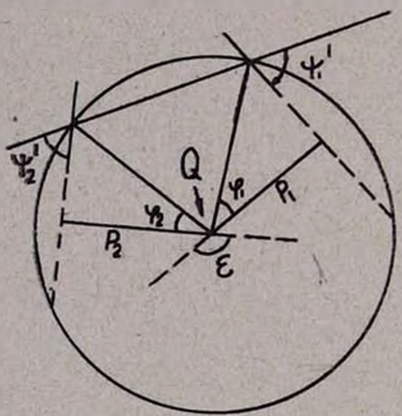

Рис. 1.2

Имеем

$$\chi(r;\ Q)=r(\varepsilon-\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\varphi_i=\arccos\frac{p_i}{r}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr}\chi(r;\ Q)=\frac{\chi(r)}{r}-\operatorname{ctg}\varphi_1-\operatorname{ctg}\varphi_2$$

$$\Delta_1(r;\ h)=h\iint\limits_{A(r)}f'(\chi(r;\ Q))\times$$

$$\times\left[\frac{\chi(r;\ Q)}{r}-\operatorname{ctg}\varphi_1-\operatorname{ctg}\varphi_2\right]dS+$$

$$+o(h)$$

поскольку распространение интеграла на все множество $A(r)$ дает ошибку порядка $o(h)$. Другими словами, имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_1}{h}=\iint\limits_{A(r)}f'(\chi(r;\ Q))\left[\frac{\chi(r;\ Q)}{r}-\operatorname{ctg}\varphi_1-\operatorname{ctg}\varphi_2\right]dS. \tag{1.36}$$

Найдем теперь предел полученного выражения при $r\to\infty$. Из того же рис. 1.2 видно, что

$$\varphi_i=\psi_i'-\alpha,\ \alpha=\frac{\chi(r;\ Q)}{2r},\quad i=1,\ 2,$$

где ψ_i', $i=1,\ 2$ углы между хордой, стягивающей точки пересечения $C(r;\ Q)$ с отрезками a_1 и a_2 и отрезками a_1 и a_2.

Разлагая котангенсы под интегралом в (1.36) по отрицательным степеням r, получаем

$$\iint\limits_{A(r)} f'(\chi(r;\ Q)) \left| \frac{\chi(r;\ Q)}{r} - \operatorname{ctg}\psi_1' - \frac{\chi(r;\ Q)}{2r\sin^2\psi_1} - \operatorname{ctg}\psi_2' - \right.$$

$$\left. - \frac{\chi(r;\ Q)}{2r\sin^2\psi_2} \right| dS + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.37}$$

Применяя равенство (0.4) по отношению к функции
$w(C(r;\ Q)) = 0,$ если $Q \in K_r - A(r)$,

$$= f'(\chi(r;\ Q))\,\chi \left| 1 - \frac{1}{2\sin^2\psi_1} - \frac{1}{2\sin^2\psi_2} \right|, \text{ если } Q \in A(r)$$

$w(g) = 0$, если $g \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}(a_1,\ a_2)$

$$= f'(\chi(g))\,\chi(g) \left| 1 - \frac{1}{2\sin^2\psi_1} - \frac{1}{2\sin^2\psi_2} \right], \text{ если } g \in \mathfrak{M}(a_1,\ a_2),$$

где ψ_1 и ψ_2 — углы, возникающие в точках пересечений g с a_1 и a_2, лежащие в правой полуплоскости, вне выпуклого многоугольника, натянутого на отрезки a_1 и a_2, (что возможно, если выполняется условие A), находим

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \iint\limits_{A(r)} f'(\chi(r;\ Q))\ \chi(r;\ Q) \left| 1 - \frac{1}{2\sin^2\psi_1} - \frac{1}{2\sin^2\psi_2} + o\left(\frac{1}{r}\right)\right| dS =$$

$$= \iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\ a_2)} f'(\chi(g))\,\chi(g) \left[1 - \frac{1}{2\sin^2\psi_1} - \frac{1}{2\sin^2\psi_2} \right] dg = \tag{1.38}$$

$$= -\frac{1}{2} \iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\ a_2)} f'(\chi)\,\chi\,[\operatorname{ctg}^2\psi_1 + \operatorname{ctg}^2\psi_2]\,dg.$$

Что касается предела при $r \to \infty$ интеграла

$$\iint\limits_{A(r)} f'(\chi(r;\ Q))[-\operatorname{ctg}\psi_1' - \operatorname{ctg}\psi_2']\,dS, \tag{1.39}$$

то для его нахождения приходится использовать лемму 1.

Пусть $P_1 \in a_1$ и $P_2 \in a_2$. Бесконечно малые участки отрезков a_1 и a_2 длины δ_1 и δ_2, соответственно примыкающие к P_1 и P_2, направим так, чтобы вместе со своими другими концами Q_1 и Q_2 они образовали бы конфигурацию, изображенную на рис. 1.1. В обозначениях леммы 1 имеем (см. рис. 1.3)

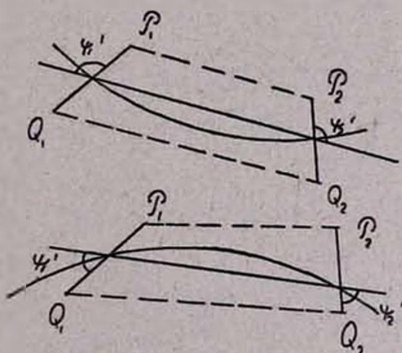

Рис. 1.3

угол $\psi_1' =$ углу P_1
угол $\psi_2' =$ углу P_2, если $Q \in S_{P_1P_2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{угол } \psi_1' = \pi - \text{углу } P_1 \\ \text{угол } \psi_2' = \pi - \text{углу } P_2\end{array}\right\}, \text{ если } Q \in S_{Q_1Q_2}.$$

Поэтому вклады в интеграл (1.39) бесконечно малых участков $S_{P_1P_2}$ и $S_{Q_1Q_2}$ равны соответственно

$$-f'(\chi(r;\ Q))\,[\operatorname{ctg} P_1 + \operatorname{ctg} P_2]\, S_{P_1P_2}$$

$$f'(\chi(r;\ Q))\,[\operatorname{ctg} P_1 + \operatorname{ctg} P_2]\, S_{Q_1Q_2}.$$

Алгебраическая сумма этих вкладов, вследствие леммы 1, равна

$$f'(\chi(r;\ Q))\,[\operatorname{ctg} P_1 + \operatorname{ctg} P_2]\,[S_{Q_1Q_2} - S_{P_1P_2}] =$$
$$= f'(\chi(r;\ Q))\,[\operatorname{ctg} P_1 + \operatorname{ctg} P_2]\sin(P_1+P_2)\,\delta_1\delta_2 =$$
$$= f'(\chi(r;\ Q))\,\frac{\sin^2(P_1+P_2)}{\sin P_1 \sin P_2}\,\delta_1\delta_2.$$

Таким образом, интеграл (1.39) оказывается равным

$$\iint f'(\chi(r;\ Q))\,\frac{\sin^2(\psi_1'+\psi_2')}{\sin\psi_1' \sin\psi_2'}\,dl_1 dl_2. \tag{1.40}$$

Здесь $dl_1 \in a_1$ и $dl_2 \in a_2$ элементы длины, а интегрирование производится по множеству $a_1 \times a_2$, и разумеется безразлично, какую именно пару углов (лежащих по одну сторону от прямой) из возникающих в точках пересечения прямой с контуром D выбирать в качестве ψ_1' и ψ_2'. Предел интеграла (1.40) при $r \to \infty$ в свою очередь равен

$$\iint f'(\chi)\,\frac{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}{\sin\psi_1 \sin\psi_2}\,dl_1 dl_2, \tag{1.41}$$

где χ — длина отрезка, соединяющего элементы dl_1 и dl_2.

В (1.41) целесообразно перейти к интегрированию по инвариантной мере прямых на плоскости с помощью формулы

$$dl_1 dl_2 = \frac{\chi}{\sin\psi_1 \sin\psi_2}\,dg$$

(последняя легко выводится, например, из теоремы Крофтона о шкивах), после чего получаем

$$\lim_{r\to\infty}\iint\limits_{A(r)} f'(\chi(r;\ Q))\,[-\operatorname{ctg}\psi_1 - \operatorname{ctg}\psi_2]\,dS =$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\, a_2)} f'(\chi)\,\chi\,\frac{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2\psi_1 \sin^2\psi_2}\,dg = \tag{1.42}$$
$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\, a_2)} f'(\chi)\,\chi\,(\operatorname{ctg}\psi_1 + \operatorname{ctg}\psi_2)^2\,dg.$$

Резюмируя (1.37), (1.38), (1.36) и (1.42), находим, что

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_1(r;\ h)}{h}=\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1\,a_2)} f'(\chi)\,\chi\operatorname{ctg}\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2\,dg. \tag{1.43}$$

Перейдем к рассмотрению разности интегралов

$$\Delta_2(r;\ h)=\iint\limits_{G_2(r;\,h)} f(\chi(r+h;\ Q))\,dS-\iint\limits_{G_1(r;h)} f(\chi(r;\ Q))\,d\,S.$$

Введем множества $F_1(r)$ и $F_2(r)$ предельные $(h\to 0)$ для $G_1(r;\ h)$ и $G_2(r;\ h)$ соответственно. Очевидно, что

$$F_1(r)=\bigcup_{i,\,j}F_1(r;\ A_{ij})$$

$$F_2(r)=\bigcup_{i,\,j}F_2(r;\ A_{ij}),$$

где через A_{ij}, $j=1,\ 2$ обозначены концы отрезка a_i, $i=1,\ 2$,

$$F_1(r;\ A_{ij})=C(r;\ A_{ij})\cap\left\{\begin{array}{l}Q;\ C(r;\ Q)\ \text{пересекает отрезок}\ a_s,\ \text{причем}\\ \text{отрезок}\ a_i\ \text{остается внутри}\\ \text{окружности}\ C(r;\ Q),\end{array}\right\}$$

$$F_2(r;\ A_{ij})=C(r;\ A_{ij})\cap\left\{\begin{array}{l}Q;\ C(r;\ Q)\ \text{пересекает отрезок}\ a_s,\ \text{причем}\\ \text{отрезок}\ a_i\ \text{остается вне окруж-}\\ \text{ности}\ C(r;\ Q).\end{array}\right\}$$

Выше принято соглашение о том, что

$$s=1,\ \text{если}\ i=2,$$
$$2,\ \text{если}\ i=1.$$

Имеем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{G(r;\,h)} f(\chi(r;\ Q))dS=h\sum_{i,\,j}\int\limits_{F_1(r;\,A_{ij})} f(\chi(r;\ Q))\,dl+o(h)\\ \iint\limits_{G_2(r;\,h)} f(\chi(r+h;\ Q))\,dS=h\sum_{i,\,j}\int\limits_{F_2(r;\,A_{ij})} f(\chi(r;\ Q))\,dl+o(h),\end{gathered} \tag{1.44}$$

где в правых частях интегрирование производится по дугам окружностей $C(r;\ A_{ij})$, а dl — элемент длины дуги. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_2(r;\ h)}{h}=\sum_{i,\,j}\Bigg[\int\limits_{F_2(r;\,A_{ij})}-\int\limits_{F_1(r;\,A_{ij})}\Bigg]f(\chi(r;\ Q))\,dl. \tag{1.45}$$

Найдем предел при $r\to\infty$ выражения, стоящего в правой части (1.45). В каждом из полученных интегралов по множествам $F_l(r;\ A_{ij})$, $l=1,\ 2$ можно перейти к интегрированию по новой переменной $\varphi=$ углу между направлением касательной к окружности $C(r;\ Q)$ в точке A_{ij} и каким-либо заданным направлением; угол отсчитывается против часовой стрелки, а направление на касательной выбирается так, что окружность $C(r;\ Q)$ остается в правой полуплоскости. При такой замене переменной

$$dl = r d\varphi.$$

Важно отметить при этом, что интервалы $\Phi_l(r;\ A_{ij})$ значений φ, отвечающие дугам $F_l(r;\ A_{ij})$, не совпадают с интервалами

$$\Phi_l(A_{ij}) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi;\ \text{направленная прямая, проходящая через } A_{ij} \text{ под углом} \\ \varphi \text{ и оставляющая } a_l \text{ в правой } (l=1) \text{ или левой } (l=2) \\ \text{полуплоскости, пересекает отрезок } a_s. \end{array} \right\}$$

Введем множества

$$\Lambda_l(r;\ A_{ij}) = \Phi_l(r;\ A_{ij}) \cap \left\{ \begin{array}{l} \varphi;\ \text{обе окружности } C(r;\ \varphi) \text{ и } C(r;\ \varphi+\pi) \\ \text{пересекают отрезок } a_s. \end{array} \right\}$$

Здесь и далее сложение углов производится по модулю 2π.

Представим $\Phi_l(r;\ A_{ij})$ в виде суммы непересекающихся интервалов

$$\Phi_l(r;\ A_{ij}) = \Lambda_l(r;\ A_{ij}) + \varepsilon_l(r;\ A_{ij}).$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{F_2(r;\ A_{ij})} - \int\limits_{F_1(r;\ A_{ij})} \right| f(\chi(r;\ Q))\, dl = \left| \int\limits_{\Lambda_2(r;\ A_{ij})} - \int\limits_{\Lambda_1(r;\ A_{ij})} + \int\limits_{\varepsilon_2(r;\ A_{ij})} - \int\limits_{\varepsilon_1(r;\ A_{ij})} \right| f \cdot r d\varphi. \tag{1.46}$$

Как нетрудно показать, мера каждого из множеств $\varepsilon_l(r;\ A_{ij})$ равна $\dfrac{z_l(A_{ij})}{r} + o(r)$, где $z_l(A_{ij})$ = стороне выпуклого четырехугольника, натянутого на точки $\{A_{ij}\}$, имеющей своим концом A_{ij}, но не совпадающей с a_l, если $l = 1$, и диагонали этого четырехугольника, проходящей через точку A_{ij}, если $l = 2$.

Так как f предполагается непрерывной, получаем

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\varepsilon_l(r;\ A_{ij})} f(\chi(r;\ \varphi))\, r d\varphi = z_l(A_{ij})\, f(z_l(A_{ij})). \tag{1.47}$$

Перейдем к нахождению предела $(r \to \infty)$ разности

$$\left[\int\limits_{\Lambda_2(r;\ A_{ij})} - \int\limits_{\Lambda_1(r;\ A_{ij})} \right] f(\chi(r;\ \varphi))\, r d\varphi. \tag{1.48}$$

Для этого в интеграле

$$\int\limits_{\Lambda_1(r;\ A_{ij})} f(\chi(r;\ \varphi)\, r d\varphi$$

сделаем замену переменной

$$\psi = \varphi + \pi.$$

Область изменения переменной ψ есть $\Lambda_2(r;\ A_{ij})$ и разность (1.48) принимает вид

$$\int\limits_{\Lambda_2(r;\ A_{ij})} [f(\chi(r;\ \varphi)) - f(\chi(r;\ \varphi+\pi))]\, r d\varphi. \tag{1.49}$$

Предположим теперь, что f непрерывно дифференцируема. Тогда

$$f(\chi(r;\ \varphi))-f(\chi(r;\ \varphi+\pi))=-f'(\rho)\frac{\rho^2\operatorname{ctg}\nu}{r}+o\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1.50}$$

где ρ — расстояние от A_{ij} до точки пересечения с a_s направленной прямой, исходящей из A_{ij} под углом φ; ν — угол с вершиной в точке пересечения названной направленной прямой с отрезками a_s, лежащий в правой полуплоскости, внутри выпуклого четырехугольника, натянутого на точки $\{A_{ij}\}$.

Зависимость величин ρ и ν от φ явно не указывается.

Учитывая, что мера разности

$$\Phi_2(A_{ij})-\Lambda_2(r;\ A_{ij})$$

при $r\to\infty$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{r}\right)$, находим, что предел интеграла (1.49) равен

$$-\int\limits_{\Phi_2(A_{ij})} f'(\rho)\,\rho^2\operatorname{ctg}\nu\,d\varphi.$$

Итак, мы нашли, что

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int\limits_{F_2(r;\,A_{ij})}-\int\limits_{F_1(r;\,A_{ij})}\right| f(\chi(r;\ Q))dl=$$

$$=z_2(A_{ij})f(z_2(A_{ij}))-z_1(A_{ij})f(z_1(A_{ij}))-\int\limits_{\Phi_2(A_{ij})} f'(\rho)\,\rho^2\operatorname{ctg}\nu\,d\varphi. \tag{1.51}$$

Полученное выражение будем называть вкладом конца A_{ij} и обозначать через R_{ij}.

Суммируя (1.51) по i и j, получаем

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_2(r;\ h)}{h}=\sum_{i,j}R_{ij}. \tag{1.52}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dr}I(r)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_1(r;\ h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_2(r;\ h)}{h},$$

то сумма правых частей в (1.43) и (1.52) дает значение $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{d}{dr}I(r)$.

Таким образом (см. формулу (1.1)) доказана вторая лемма о парах отрезков.

Лемма 2. Если прямолинейные отрезки a_1 и a_2 удовлетворяют условию А, то

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\,a_2)} f(\chi)\,dg=\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\,a_2)} f'(\chi)\,\chi\operatorname{ctg}\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2\,dg+\sum_{i,j}R_{ij}. \tag{1.53}$$

Устраняя в лемме 2 условие А, приходим еще к двум леммам о парах отрезков.

Лемма 3. Пусть отрезок a_1 неподвижен, а подвижный отрезок a_2, удовлетворяя условию А, стремится к предельному положению a_2^*. Пусть конец A_{11} лежит на прямой, проходящей через отрезок a_2^*. Тогда предел вклада R_{11} равен

$$\lim R_{11} = \int_x^y f(u)\,du,$$

где x, y, $x<y$ — расстояния концов a_2^* от A_{11}, и

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1, a_2^*)} f(\chi)\,dg = \iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1, a_2^*)} f'(\chi)\,\chi\,\mathrm{ctg}\,\psi_1\,\mathrm{ctg}\,\psi_2\,dg + \sum_{i,j\neq(1,1)} R_{ij} + \int_x^y f(u)\,du. \tag{1.54}$$

Доказательство. При стремлении отрезка a_2 к a_2^* имеем

$$\lim z_2(A_{11})\,f(z_2(A_{11})) = yf(y)$$
$$\lim z_1(A_{11})\,f(z_1(A_{11})) = xf(x).$$

Для нахождения предела интеграла

$$\int\limits_{\Phi_2(A_{11})} f'(\rho)\,\rho^2\,\mathrm{ctg}\,\nu\,d\varphi$$

удобно перейти к интегрированию вдоль отрезка a_2 с помощью соотношения

$$dl = \frac{\rho\,d\varphi}{\sin\nu}.$$

Получаем

$$\int\limits_{\Phi_2(A_{11})} f'(\rho)\,\rho^2\,\mathrm{ctg}\,\nu\,d\varphi = \int\limits_{a_2} f'(\rho)\,\rho\cos\nu\,dl.$$

При стремлении a_2 к a_2^* интеграл в правой части переходит в

$$\int\limits_{a_2^*} f'(\rho)\,\rho\,dl = \int_x^y f'(u)\,u\,du.$$

Следовательно,

$$\lim R_{11} = yf(y) - xf(x) - \int_x^y f'(u)\,du = \int_x^y f(u)\,du.$$

Вторая часть леммы следует из существования (несобственного) интеграла

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\ \overset{\bullet}{a}_2)} f'(\chi)\,\chi \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2\, dg.$$

В частности, его значение может быть вычислено переходом к интегрированию по произведению $a_1 \times \overset{\bullet}{a}_2$ с помощью соотношения

$$dl_1 dl_2 = \frac{\chi}{\sin\psi_1 \sin\psi_2}\, dg, \tag{1.55}$$

что дает

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\ \overset{\bullet}{a}_2)} f'(\chi)\,\chi \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2\, dg = 2 \iint\limits_{a_1\times \overset{\bullet}{a}_2} f'(\chi) \cos\psi_1 \cos\psi_2\, dl_1 dl_2.$$

Аналогично доказывается

Лемма 4. Пусть a_1 и a_2 — два отрезка, исходящие из точки A, не лежащие на одной прямой. Тогда

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\ a_2)} f(\chi)\, dg = \iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\ a_2)} f'(\chi)\,\chi \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2\, dg + \sum_{i=1,\,2} R_i + \int\limits_0^{s_1} f(u)\, du + \int\limits_0^{s_2} f(u)\, du. \tag{1.56}$$

Здесь R_i суть вклады концов отрезков a_1 и a_2, не совпадающих с A, s_1 и s_2 — длины отрезков.

Теперь мы в состоянии доказать наш главный результат.

Пусть D — выпуклый многоугольник, $\chi(g)$ — длина хорды, высекаемой D из g, ψ_1 и ψ_2 — углы между контуром D и прямой g, лежащие в одной полуплоскости, s_i — длины сторон многоугольника.

Теорема. Если f непрерывно дифференцируема, то

$$\iint f(\chi)\, dg = \iint f'(\chi)\,\chi \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2\, dg + \sum_i \int\limits_0^{s_i} f(u)\, du, \tag{1.57}$$

где интегралы берутся по множеству всех ненаправленных прямых, пересекающих D.

Доказательство. Пусть a — любая сторона многоугольника D, A — его вершина, не являющаяся концом отрезка a. По отношению к отрезку a в точке A определены вклады концов двух отрезков, а именно двух сторон, b_1 и b_2, многоугольника D, имеющих своими концами точку A. Эти вклады равны по модулю и противоположны по знаку.

Действительно, диагональ выпуклого четырехугольника, натянутого на a и b_1, проходящая через A, служит проходящей через A стороной выпуклого четырехугольника, натянутого на a и b_2. Кроме того, области $\Phi_2'(A)$ и $\Phi_2^{\cdot}(A)$ изменения φ, которые получаются, когда мы рассматриваем A сначала как конец отрезка b_1, а затем как конец отрезка b_2, получаются друг из друга сдвигом на π. Так как

$$\nu(\varphi+\pi)=\pi-\nu(\varphi),$$

то

$$\int\limits_{\Phi_2'(A)} f'(\rho)\rho^2 \operatorname{ctg}\nu d\varphi = -\int\limits_{\Phi_2^{\cdot}(A)} f'(\rho)\rho^2 \operatorname{ctg}\nu d\varphi.$$

Очевидно, возможно представление

$$2\iint f(\chi)\,dg=\sum_{i<j}\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_i,a_j)} f(\chi)\,dg,$$

где a_i, a_j — пара сторон многоугольника D.

Если стороны a_i и a_j не имеют общей вершины, то для интеграла $\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_i,a_j)} f(\chi)\,dg$ подставляем выражение из леммы 2, а если общая вершина имеется, — то из леммы 4. Сумма всех вкладов R вследствие сделанного выше замечания обратится в нуль. Так как каждой вершине принадлежат два интеграла вида $\int\limits_0^{s_i} f(u)\,du$ (см. лемму 4), то каждый из них встретится в сумме два раза. Наконец,

$$\sum_{i<j}\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_i,a_j)} f'(\chi)\chi\operatorname{ctg}\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2\,dg=2\iint f'(\chi)\chi\operatorname{ctg}\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2\,dg.$$

Теорема доказана.

Особенно просто выглядит предельная форма соотношения (1.57), когда предполагается, что многоугольник D аппроксимирует выпуклую фигуру, граница которой не имеет прямолинейных участков.

Как нетрудно видеть, в этом случае

$$\sum_i\int\limits_0^{s_i} f(u)\,du=f(0)\cdot H,$$

где H — длина периметра области D, и в пределе соотношение ( ) принимает вид

$$\iint f(\chi)\,dg=\iint f'(\chi)\chi\operatorname{ctg}\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2\,dg+f(0)\cdot H. \tag{1.58}$$

Обратно, нетрудно из формулы (1.58) получить соотношение для многоугольников.

С помощью формулы (1.55) в интеграле в правой части (1.58) можно перейти к интегрированию по dl_1dl_2, что дает

$$\iint f(\chi)\,dg = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\partial D)^2} f'(\chi)\cos\psi_1\cos\psi_2\,dl_1 dl_2 + f(0)\,H, \tag{1.59}$$

где $(\partial D)^2$ — квадрат границы области D. Выбор такой области интегрирования и приводит к появлению перед интегралом множителя $\frac{1}{2}$. Заметим, что эта формула универсальна в том смысле, что она справедлива и для областей, граница которых имеет прямолинейные участки. Разумеется, если при этом точки l_1 и l_2 лежат на одном таком участке, в этих точках следует полагать

$$\cos\psi_1\cos\psi_2 = 1.$$

Интересно сравнить результат (1.59) с тем, что получается, если в интеграле, стоящем в левой части (1.59), непосредственно перейти к интегрированию по $(\partial D)^2$ с помощью формулы (1.55)

$$\iint f(\chi)\,dg = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\partial D)^2} \frac{f(\chi)}{\chi}\sin\psi_1\sin\psi_2\,dl_1 dl_2. \tag{1.60}$$

Это дает следующий вариант теоремы 1.

Теорема 2. *Для любой выпуклой области D с кусочно-гладкой границей и любой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $x>0$ справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(\partial D)^2} \frac{f(\chi)}{\chi}\sin\psi_1\sin\psi_2\,dl_1 dl_2 = 2f(0)\,H + \iint\limits_{(\partial D)^2} f'(\chi)\cos\psi_1\cos\psi_2\,dl_1 dl_2. \tag{1.61}$$

В частности, если выбрать $f(x) = x^n$, $n>0$, то из (1.59) и (1.60) получаем

$$\iint \chi^n\,dg = \frac{n}{2}\iint\limits_{(\partial D)^2} \chi^{n-1}\cos\psi_1\cos\psi_2\,dl_1 dl_2$$

$$\iint \chi^n\,dg = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\partial D)^2} \chi^{n-1}\sin\psi_1\sin\psi_2\,dl_1 dl_2.$$

Помножая последнее равенство на n, складывая с первым и деля на $n+1$, получаем

$$\iint \chi^n\,dg = \frac{n}{2(n+1)}\iint\limits_{(\partial D)^2} \chi^{n-1}\,dl_1 dl_2 - \frac{n}{n+1}\iint\limits_{(\partial D)^2} \chi^{n-1}\sin^2\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\,dl_1 dl_2. \tag{1.62}$$

В более слабой форме (1.62) можно записать в виде неравенства

$$\iint \chi^n\,dg \leqslant \frac{n}{2(n+1)}\iint\limits_{(\partial D)^2} \chi^{n-1}\,dl_1 dl_2. \tag{1.63}$$

В частном случае $n=1$, учитывая известное представление для площади выпуклых фигур S

$$\pi S = \iint \chi \, dg$$

из (1.63) получаем классическое изопериметрическое неравенство

$$\pi S \leqslant \frac{1}{4} H^2. \tag{1.64}$$

Известно (см. [4]) что равенство в (1.64) достигается только в случае круга. Возвращаясь к равенству (1.62) при $n=1$, получаем следующее утверждение: Если для (почти) любой прямой $\sin^2 \frac{\psi_1-\psi_2}{2}=0$, то D является кругом. Отсюда следует, что в (1.63) равенство достигается только для окружности уже при всех $n>0$.

§ 2. Пересечение плоской кривой случайными прямыми

п. 1. Классический результат Крофтона о числе пересечений кусочно-гладкой кривой L прямыми гласит, что

$$\iint n(g)\, dg = 2L. \tag{2.1}$$

Здесь dg — (нормированная) инвариантная относительно евклидовых движений плоскости плотность прямых на плоскости, $n(g)$ — число пересечений прямой g с кривой L, L — длина кривой (см. [4]).

Равенству (2.1) придается форма вероятностного утверждения, когда рассматриваются лишь прямые, пересекающие какую-нибудь выпуклую область D, целиком содержащую (ограниченную) кривую L. Очевидно, с помощью (2.1) определяется среднее число $\bar{n}$ пересечений с L случайной прямой, пересекающей выпуклую область D. Действительно, по отношению к границе области D, (2.1) прибимает вид

$$\iint \delta(g)\, dg = U, \tag{2.2}$$

где

$$\delta(g) = 1, \text{ если } g \text{ пересекает } D$$
$$0, \text{ в противном случае,}$$

а U — периметр выпуклой области D. Делением (2.1) на U получаем

$$\bar{n} = \iint n(g)\, U^{-1} \delta(g)\, dg = 2LU^{-1}, \tag{2.3}$$

причем $U^{-1}\delta(g)$ в силу (2.2) уже является плотностью вероятности случайной прямой. В дальнейшем случайную прямую с таким распределением будем обозначать через M. Соотношение (2.3) используется в практике как основа для измерения L методом Монте-Карло (поскольку значение U следует предполагать известным), несмотря на то, что отсутствует какое-либо представление о величине присущей такому методу Монте-Карло статистической ошибки.

Действительно, хотя результаты (2.1) и (2.3) имеют столетнюю давность, мало что было известно до сих пор относительно распределения числа пересечений случайной прямой M с кривой L. Так, в ставшей классической работе Сильвестера [5] этот вопрос решен лишь для случая кривой L, представляющей собой объединение не более чем трех замкнутых выпуклых контуров на плоскости. В недавней работе Зуланке [6] изучается лишь носитель этого распределения. Отсутствие сведений хотя бы о дисперсии распределения числа пересечений существенно снижает эффективность упомянутого метода Монте-Карло.

Настоящий параграф восполняет имеющийся в этом вопросе пробел.

Метод „инвариантного вложения" приводит к нахождению распределения пересечений M с L при самых общих предположениях относительно L. Говоря о „нахождении распределения", мы имеем в виду сведение интегрирования по двумерному многообразию к интегрированию по одно и нульмерным многообразиям (в сущности задачу сводим к вычислению распределений числа пересечений с некоторых случайных касательных (см. теорему 1). В частности такой же смысл имеют равенства (2.1) и (2.2).

Сущность метода инвариантного вложения, который непосредственно применим лишь тогда, когда L является ломаной линией, изложена во введении настоящей работы.

п. 2. Итак, пусть L — замкнутая ограниченная ломаная линия. Не исключается, что L имеет самопересечения или же состоит из нескольких замкнутых кусков. Однако мы будем предполагать, что

А) точки самопересечения не являются вершинами ломаной L,

Б) никакие три вершины ломаной L не лежат на одной прямой.

Положим

$f(g) = 1$, если число пересечений прямой g с L равно k,
$\qquad 0$ — в противном случае,

$f(C(r;\ Q)) = 1$, если число пересечений $C(r;\ Q)$ с L равно k,
$\qquad 0$ — в противном случае,

(мы употребляем обозначения введения). Нетрудно проверить выполнение равенства (0.3), а это дает возможность использовать представление

$$m_k = \iint f(g)\,dg = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\frac{d}{dr}\iint\limits_{K_r} f(C(r;\ Q))\,dS. \tag{2.4}$$

Ниже находится предел, стоящий в правой части (2.4), и это дает решение задачи для ломаных. В п. 5 делается формальный предельный переход от ломаных к гладким кривым. Обоснование такого предельного перехода не представляет труда и также опускается.

Обозначим через $K(r;\ h;\ Q)$ шайбу, ограниченную окружностями $C(r+h;\ Q)$ и $C(r;\ Q)$.

Измеримые по Борелю множества точек на плоскости будем называть „событиями“.

Введем следующие события:

$A = \{Q$; каждое звено ломаной L пересекает $C(r+h;\ Q)$ и $C(r;\ Q)$ одинаковое число раз$\}$.

$B = \{Q$; в $K(r;\ h;\ Q)$ попадает ровно одна вершина ломаной L. В то же время, каждое звено L, не имеющее концом эту вершину, пересекает $C(r+h;\ Q)$ и $C(r;\ Q)$ одинаковое число раз$\}$.

$C = \{Q$; существует одно звено ломаной L, дважды пересекающее $C(r+h;\ Q)$, но не пересекающее $C(r;\ Q)$. В то же время каждое из остальных звеньев L пересекает $C(r;\ Q)$ и $C(r+h;\ Q)$ одинаковое число раз$\}$.

$D = \overline{A \cup B \cup C}$ (дополнение на плоскости к объединению событий A, B и C).

$E_k(r) = \{Q;\ C(r;\ Q)$ имеет ровно k пересечений с $L\}$.

Обозначим через $S(\cdot)$ плоскую лебегову меру событий. Кроме того, положим

$$m_k(r) = S(E_k(r)) = \iint f(C(r;\ Q))\, dS.$$

Нетрудно уяснить себе, что $S(D)$ есть величина порядка $o(h)$, $h \to 0$ для всех достаточно больших значений r.

Поскольку события A, B, C и D взаимно исключают друг друга, а их объединение дает всю плоскость, то справедливы разложения

$$m_k(r) = S(E_k(r) \cap A) + S(E_k(r) \cap B) + S(E_k(r) \cap C) + o(h) \tag{2.5}$$

и

$$m_k(r+h) = S(E_k(r+h) \cap A) + S(E_k(r+h) \cap B) + S(E_k(r+h) \cap C) + o(h), \tag{2.6}$$

где употребляются теоретико-множественные обозначения для пересечения событий (множеств на плоскости). Так как события $E_k(r) \cap A$ и $E_k(r+h) \cap A$ совпадают, то из (2.5) и (2.6) получаем

$$m_k(r+h) - m_k(r) = S(E_k(r+h) \cap B) - S(E_k(r) \cap B) + S(E_k(r+h) \cap C) - S(E_k(r) \cap C) + o(h). \tag{2.7}$$

Событие B разобьем на шесть взаимно исключающих друг друга события, B_i, $B = \bigcup_{i=1,\dots,6} B_i$, определения которых ясны из рис. 2.1 (показывая эти события, мы существенно использовали условие А), наложенное на ломаную L).

Поскольку очевидны равенства событий

$$E_k(r+h) \cap B_4 = E_k(r) \cap B_4,$$

$$E_k(r+h) \cap B_5 = E_k(r) \cap B_5,$$

а также то, что при достаточно больших значениях r, B_6 есть пустое событие, то получаем, что

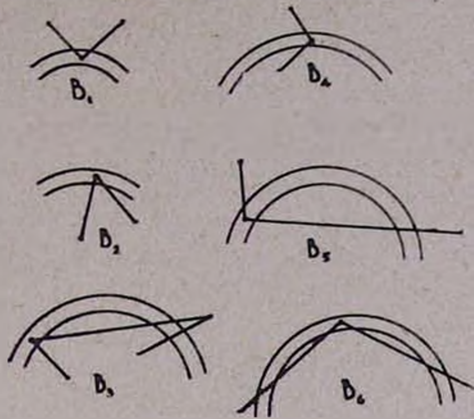

Рис. 2.1.

$$S(E_k(r+h)\cap B)-S(E_k(r)\cap B)=$$
$$=\sum_{i=1,2,3} S(E_k(r+h)\cap B_i)-S(E_k(r)\cap B_i). \qquad (2.8)$$

Далее, используя равенства

$$S(E_k(r)\cap B_i)=\sum_{j=1}^{n} S(E_k(r)\cap B_i\cap P_j)+o(h); \quad i=1,\ 2,\ 3, \qquad (2.9)$$

в котором P_j обозначает событие, которое определяется так $P_j=\{Q$а в шайбу $K(r;\ h;\ Q)$ попадает вершина $P_j\}$ и аналогичные равенств; для $E_k(r+h)$, получаем

$$S(E_k(r+h)\cap B)-S(E_k(r)\cap B)=$$
$$=\sum_{i=1,2,3}\ \sum_{j=1}^{n}[S(E_k(r+h)\cap B_i\cap P_j)-S(E_k(r)\cap B_i\cap P_j)]+o(h). \qquad (2.10)$$

Рассмотрим окружность радиуса r с центром в вершине P_j. Эта окружность служит предельным (когда $h\to 0$, а r фиксировано) событием для события P_j. Соответственно этому предельные события для событий $B_i\cap P_j$ являются дугами $\Lambda_i(r)$, $i=1,\ 2,\ 3$ на окружности $C(r;\ P_j)$ и указаны на рис. 2.2.

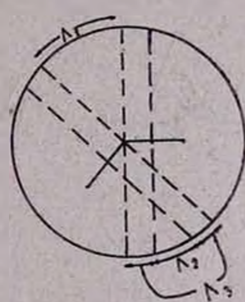

Рис. 2.2.

Будем рассматривать угловую меру, $\theta_j(\cdot)$, соответствующую линейной лебеговой мере на окружности $C(r;\ P_j)$. При этом под знаком $\theta_j(\cdot)$ всегда будет стоять некоторое множество направлений из точки P_j. Легко усматривается, что

$$S(E_k(r+h)\cap B_1\cap P_j)=rh\theta_j(E_{k-2}(r)\cap\Lambda_1(r))+o(h),$$
$$S(E_k(r)\cap B_1\cap P_j)=rh\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_1(r))+o(h), \qquad (2.11)$$
$$S(E_k(r+h)\cap B_2\cap P_j)=rh\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_2(r))+o(h),$$
$$S(E_k(r)\cap B_2\cap P_j)=rh\theta_j(E_{k-2}(r)\cap\Lambda_2(r))+o(h).$$

Разумеется, здесь при подсчете числа пересечений $C(r;\ Q)$, $Q\in C(r;P_j)$ с L мы полагали, что в точке P_j пересечений $C(r;\ Q)$ с L не происходит. Что касается величин $S(E_k(r+h)\cap B_3\cap P_j)$ и $S(E_k(r)\cap B_3\cap P_j)$, то тут возможны два случая: либо звено, одним концом которого является точка P_j, а другой конец находится вне $C(r+h)$, является звеном перегиба, либо нет. Поясним, что данное звено ломаной мы называем звеном перегиба, если два соседних с данным звеном звена лежат по разные стороны от прямой, проходящей через данное звено.

Поскольку мы будем предполагать, что ломаная L аппроксимирует кусочно-гладкую кривую, у которой мы допускаем наличие лишь конечного числа точек перегиба, то доля звеньев перегиба в общей длине ломаной мала (стремится к нулю). Поэтому условимся для упрощения записи игнорировать звенья перегиба. Это не отразится на результате.

Полагая, что звенья с вершиной в P_j суть не звенья перегиба, находим, что

$$\begin{gathered} S(E_k(r+h)\cap B_3\cap P_j) = rh\theta_j(E_{k-2}(r)\cap \Lambda_3(r)) + o(h), \\ S(E_k(r)\cap B_3\cap P_j) = rh\theta_j(E_{k-4}(r)\cap \Lambda_3(r)) + o(h). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь учитываются пересечения, всегда имеющие место вблизи точки P_j (см. рис. 2.1), и также полагается, что в точке P_j пересечений не происходит.

Перейдем к событию C. При достаточно большом r событие C можно разбить на три взаимно исключающих друг друга события C_1, C_2 и C_3, определения которых ясны из рисунка 2.3.

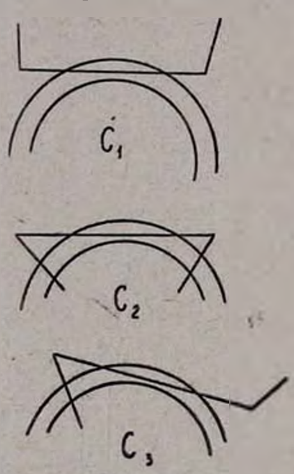

Рис. 2.3.

Очевидно, что событие C_3 имеет место тогда и только тогда, когда звено, пересекающее $C(r+h;\ Q)$ и не пересекающее $C(r;\ Q)$, является звеном перегиба. Игнорируя, согласно условию, члены, отвечающие событию C_3, получаем, что

$$\begin{gathered} S(E_k(r+h)\cap C) - S(E_k(r)\cap C) = \\ = \sum_{i=1,\,2}[S(E_k(r+h)\cap C_i) - S(E_k(r)\cap C_i)]. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Предельным (когда $h\to 0$, а r фиксировано) событием для события C служит совокупность отрезков I, в которой каждому звену ломаной L соответствует одна пара отрезков, которая может быть получена параллельным сдвигом. звена в перпендикулярных самому звену направлениях на расстояние r Если игнорировать звенья перегиба, то вся совокупность отрезков I разбивается на две совокупности I_1 и I_2, каждая из которых содержит по одному отрезку из каждой пары, причем I_1 соответствует событию C_1, а I_2 — событию C_2.

Введем линейную лебегову меру $l(\cdot)$ на I. Имеем

$$
\begin{aligned}
&S(E_k(r+h)\cap C_1)=hl(E_{k-2}(r)\cap I_1)+o(h),\\
&S(E_k(r)\cap C_1)=hl(E_k(r)\cap I_1)+o(h),\\
&S(E_k(r+h)\cap C_2)=h\cdot l(E_{k-4}(r)\cap I_2)+o(h),\\
&S(E_k(r)\cap C_2)=hl(E_{k-2}(r)\cap I_2)+o(h).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Заметим, что здесь учитываются пересечения $C(r;\ Q)$, $Q\in I$ с L, всегда имеющие место вблизи точки касания, а также считается, что точка касания не является точкой пересечения. Из формул (2.7)—(2.14) находим дифференциальные соотношения

$$
\begin{aligned}
\frac{dm_k(r)}{dr}=\;&r\sum_j[\theta_j(E_{k-2}(r)\cap\Lambda_1(r))-\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_1(r))]+\\
&+r\sum_j[\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_2(r))-\theta_j(E_{k-2}(r)\cap\Lambda_2(r))]+\\
&+r\sum_j[\theta_j(E_{k-2}(r)\cap\Lambda_3(r))-\theta_j(E_{k-4}(r)\cap\Lambda_3(r))]+\\
&+[l(E_{k-2}(r)\cap I_1)-l(E_k(r)\cap I_1)]+\\
&+[l(E_{k-4}(r)\cap I_2)-l(E_{k-2}(r)\cap I_2)].
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Для наших целей нужно выяснить асимптотическое поведение производной $\frac{dm_k(r)}{dr}$ при $r\to\infty$. Из (2.4) следует, что асимптотически должно иметь место

$$
\frac{dm_k(r)}{dr}=\alpha+o(r),
$$

где α не зависит от r. Главные члены асимптотики трех последних слагаемых справа в (2.15) получаются простой заменой участвующих в них случайных окружностей на соответствующие случайные прямые (как это сделано в § 3). Поведение при больших r первых двух слагаемых исследуем отдельно.

п. 3. Для выяснения асимптотического поведения при $r\to\infty$ величин $\theta_j(E_k(r;\ \Lambda_i(r)), i=1,2$ вторично применим технику дифференцирования по r.

Поскольку мы уже перешли к угловым мерам подмножеств на окружностях $C(r;\ P_j)$, то положение центра окружности $C(r;\ Q)$, $Q\in P_j$ естественно задавать указанием угла φ между направлением P_jQ и каким-либо фиксированным направлением. Поэтому вместо $C(r;\ Q)$, когда $Q\in C(r;\ P_j)$, будем писать $C(r;\ \varphi)$.

Лунку, ограниченную окружностями $C(r+h;\ \varphi)$ и $C(r;\ \varphi)$, обозначим через $K(r;\ h;\ \varphi)$. Введем события A, В, C и D, определения которых получаются из старых определений A, B, C и D в п. 2, заменой в них букв Q на φ. Отметим, что в силу предположения Б) в п. 2 при r достаточно большом $\theta_j(C)=0$. При разбиении события B на составляющие события B_i, $i=1,\cdots,6$, аналогичные определенным в п. 2, по той же причине оказывается, что при r достаточно больших $\theta(B_3)=0$. Попрежнему

$$E_k(r)\cap B_4 = E_k(r+h)\cap B_4,$$
$$E_k(r)\cap B_5 = E_k(r+h)\cap B_5.$$

Поэтому, аналогично предыдущему, для достаточно больших r получаем

$$\theta_j(E_k(r+h)\cap\Lambda_l(r+h)) - \theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_l(r)) =$$
$$= \sum_{s=1,\,2}[\theta_j(E_k(r+h)\cap\Lambda_l(r+h)\cap B_s) - \theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_l(r)\cap B_s)]. \quad (2.16)$$

Отметим, что множество направлений $\Lambda_1(r)$ от r не зависит, в то время как $\Lambda_2(r)$ существенно зависит от r. Вместо $\Lambda_1(r)$ будем писать далее просто Λ_1.

Закрепим индекс l за всеми теми (и только теми) из вершин ломаной, попадание которых в $K(r;\ h;\ \varphi)$, $\varphi\in\Lambda_1$, при всех достаточно больших значениях r приводит к событию B_1. Индекс m закрепим за всеми теми (и только теми) из вершин ломаной L, попадание которых в $K(r;\ h;\ \varphi)$, $\varphi\in\Lambda_1$ при всех достаточно больших r приводит к событию B_2.

Таким образом, в силу условия Б) в п. 2 с точностью до событий, вероятность которых есть $o(h)$, $h\to 0$, имеет место

$$\Lambda_1\cap B_1 = \bigcup_l P_l,\ \ \Lambda_1\cap B_2 = \bigcup_m P_m$$

(через P_k обозначено событие (множество направлений φ), состоящее в том, что вершина P_k попадает в $K(r;\ h;\ \varphi)$). Подчеркнем, что множества вершин $\{P_l\}$ и $\{P_m\}$ определяются по отношению к данной вершине P_j, и в частности, (а на самом деле для большинства вершин P_j) они бывают пусты.

Эквивалентным является следующее определение множеств $\{P_l\}$ и $\{P_m\}$.

Определение. Множество $\{P_l\}$ составляют все те и только те вершины ломаной, которые, не являясь соседними с вершиной P_j, обладают тем свойством, что участки ломаной L вблизи точек P_l и P_j находятся по одну сторону от прямой, их соединяющей; множество $\{P_m\}$ составляют вершины ломаной, которые, не являясь соседними с вершиной P_j, обладают противоположным свойством.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &B_2\cap\Lambda_2(r+h) = P_{j-1}\cup P_{j+1}\ \bigcup_l P_l,\\ &B_1\cap\Lambda_2(r+h) = \bigcup_m P_m,\\ &B_2\cap\Lambda_2(r) = \bigcup_l P_l,\\ &B_1\cap\Lambda_2(r) = \bigcup_m P_m. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Заметим, что первая строчка справедлива потому, что мы условились игнорировать звенья перегиба.

Легко видеть, что

$$\theta_j(P_s) = \frac{\rho_{js} h}{r\sqrt{4r^2 - \rho_{js}^2}} + o(h) = \beta_{ij}(r)\, h + o(h), \tag{2.18}$$

где ρ_{js} есть расстояние между точками P_j и P_s. Отсюда и из определения точек P_l и P_m находим

$$\begin{aligned}
&\theta_j(E_k(r+h) \cap \Lambda_2(r+h) \cap P_{j\pm1}) = \beta_{j,\,j\pm1}\, \delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_{j\pm1}) + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r+h) \cap \Lambda_1 \cap P_l) = \beta_{jl}\, \delta_{k-2}^{(1)}(r;\ P_j,\ P_l)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r) \cap \Lambda_1 \cap P_l) = \beta_{jl}\, \delta_k^{(1)}(r;\ P_j,\ P_l)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r+h) \cap \Lambda_1 \cap P_m) = \beta_{jm}\, \delta_k^{(1)}(r;\ P_j,\ P_m)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r) \cap \Lambda_1 \cap P_m) = \beta_{jm}\, \delta_{k-2}^{(1)}(r;\ P_j,\ P_m)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r+h) \cap \Lambda_2(r+h) \cap P_m) = \beta_{jm}\, \delta_{k-2}^{(2)}(r;\ P_j,\ P_m)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r) \cap \Lambda_2(r) \cap P_m) = \beta_{jm}\, \delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_m)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r+h) \cap \Lambda_2(r+h) \cap P_l) = \beta_{jl}\, \delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_l)\, h + o(h)\\
&\theta_j(E_k(r) \cap \Lambda_2(r) \cap P_l) = \beta_{jl}\, \delta_{k-2}^{(2)}(r;\ P_j,\ P_l)\, h + o(h),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где функции $\delta_k^{(i)}(r;\ P_l,\ P_j)$ определяются так:

$\delta^{(i)}(r;\ P_j,\ P_s) = 1$, если окружность радиуса r, проходящая через точки P_j и P_s так, что в окрестности точки P_j ломаная остается вне ($i = 1$) или внутри ($i = 2$) ее, имеет ровно k пересечений с ломаной L;

0 — в противоположном случае.

Из (2.16) — (2.19) получаем дифференциальные соотношения

$$\frac{d\theta(E_k(r) \cap \Lambda_1)}{dr} = \sum_l \beta_{jl}(r)\,[\delta_{k-2}^{(1)}(r;\ P_j,\ P_l) - \delta_k^{(1)}(r;\ P_j,\ P_l)] + \sum_m \beta_{jm}(r)\,[\delta_k^{(1)}(r;\ P_j,\ P_m) - \delta_{k-2}^{(1)}(r;\ P_j,\ P_m)]; \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta(E_k(r) \cap \Lambda_2)}{dr} = {}& \beta_{j,\,j+1}(r)\, \delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_{j+1}) + \beta_{j,\,j-1}(r)\, \delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_{j-1}) + \\
&+ \sum_l \beta_{jl}(r)\,[\delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_l) - \delta_{k-2}^{(2)}(r;\ P_j,\ P_l)] + \\
&+ \sum_m \beta_{jm}(r)\,[\delta_{k-2}^{(2)}(r;\ P_j,\ P_m) - \delta_k^{(2)}(r;\ P_j,\ P_m)].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Полагая на основании условия Б) в п. 2

$\delta_k(P_j, P_s) = \lim\limits_{r\to\infty} \delta_k^{(1)}(r;\ P_j, P_s) = \lim\limits_{r\to\infty} \delta_k^{(2)}(r;\ P_j, P_s) = 1$, если прямая, проходящая точки P_j и P_s имеет k пересечений с ломаной L;

0 — в противоположном случае,

находим из (2.20) и (2.21), что асимптотически

$$\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_1)=\text{const}-\sum_l\frac{\rho_{jl}}{2r}[\delta_{k-2}(P_j,\ P_l)-\delta_k(P_j,\ P_l)]-$$

$$-\sum_m\frac{\rho_{jm}}{2r}[\delta_k(P_j,\ P_m)-\delta_{k-2}(P_l,\ P_m)]+o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (2.22)$$

$$\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_2(r))=\text{const}-\frac{\rho_{j,\,j+1}}{2r}\delta_k(P_j,\ P_{j+1})-\frac{\rho_{j,\,j-1}}{2r}\delta_k(P_j,\ P_{j-1})-$$

$$-\sum_l\frac{\rho_{jl}}{2r}[\delta_k(P_j,\ P_l)-\delta_{k-2}(P_j,\ P_l)]-$$

$$-\sum_m\frac{\rho_{jm}}{2r}[\delta_{k-2}(P_j,\ P_m)-\delta_k(P_j,\ P_m)]+o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (2.23)$$

п. 4. Вернемся к уравнению (2.15). Введем случайную прямую T, которая, по определению, является продолжением одного из звеньев ломаной L, причем каждое из звеньев может быть выбрано с вероятностью, пропорциональной длине звена. Нетрудно устанавливается, что

$$\lim_{r\to\infty}l(E_k(r)\cap I_1)=\lim_{r\to\infty}l(E_k(r)\cap I_2)=L\cdot t_k,$$

а также, что

$$\lim_{r\to\infty}r\sum_j\theta_j(E_k(r)\cap\Lambda_3)=L\cdot t_k.$$

Здесь положено

$$t_k''=P\{T \text{ пересекает } L \text{ в } k \text{ точках}\},$$

$$L=\text{длине ломаной } L.$$

Поясним, что последнее равенство следует из того, что

$$\theta_j(\Lambda_3)=\arcsin\frac{\rho_{j,\,j+1}}{2r}+\arcsin\frac{\rho_{j,\,j-1}}{2r}.$$

Отсюда следует, что главные члены третьего и пятого слагаемых в (2.15) взаимно уничтожаются.

Распределение числа пересечений T с L появляется еще раз при подстановке (2.23) в (2.15). Действительно, при такой подстановке наличие в (2.23) члена

$$\frac{\rho_{j,\,j+1}}{2r}\delta_k(P_j,\ P_{j+1})+\frac{\rho_{j,\,j-1}}{2r}\delta_k(P_j,\ P_{j-1})$$

приводит к появлению в качестве одного из слагаемых суммы

$$\sum_j\left[\frac{\rho_{j,\,j+1}}{2}(\delta_{k-2}(P_j,\ P_{j+1})-\delta_k(P_j,\ P_{j+1}))+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho_{j,\,j-1}}{2}(\delta_{k-2}(P_j,\ P_{j-1})+\delta_k(P_j,\ P_{j-1}))\right],$$

которая, очевидно, равна величине

$$L\,(t_{k-2}-t_k).$$

Этот член в окончательном результате подстановки в (2.15) входит с коэффициентом 2, поскольку он складывается с главной частью четвертого слагаемого в (2.15).

Производя подстановку (2.22) и (2.23) в (2.15), разумеется, следует учитывать, что константы, стоящие справа в выражениях (2.22) и (2.23), совпадают, то есть что

$$\lim_{r\to\infty}\theta_j\,(E_k\,(r)\cap\Lambda_1)=\lim_{r\to\infty}\theta_j\,(E_k\,(r)\cap\Lambda_2).$$

Окончательный результат подстановки (2.22) и (2.23) в (2.15) удобно записать, используя функции

$$\psi_k=\sum_{(j,\,l)}\delta_k\,(P_j,\;P_l)\,\rho\,(P_j,\;P_l)$$

$$\varphi_k=\sum_{(j,\,m)}\delta_k\,(P_j,\;P_m)\,\rho\,(P_j,\;P_m).$$

Поясним, что в приведенном выражении для ψ_k (φ_k соответственно) суммирование производится по всем возможным различным неупорядоченным парам вершин, в окрестности которых ломаная лежит по одну (по разные соответственно) сторону от прямой, их соединяющей.

Суперпозиция разностей приводит к появлению вторых разностей. Получаем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{dm_k(r)}{dr}=2\,[2\psi_{k-2}-\psi_k-\psi_{k-4}+\varphi_k+\varphi_{k-4}-2\,\varphi_{k-2}]+2\,L\,[t_{k-2}-t_k]. \tag{2.24}$$

Из (2.24) на основании (2.4) находим

$$m_k=2\psi_{k-2}-\psi_k-\psi_{k-4}+\varphi_k+\varphi_{k-4}-2\varphi_{k-2}+2L\,[t_{k-2}-t_k]. \tag{2.25}$$

Выражение (2.25) для m_k является приближенным пока L остается ломаной линией, так как при его выводе игнорировались звенья перегиба.

п. 5. Выражение (2.25) становится все более точным, когда ломаная L приближается к кусочно-гладкой кривой, у которой имеется „мало“ точек перегиба.

Нетрудно формально проделать, а затем и обосновать предельный переход в (2.25) к кусочно-гладким кривым. Особенно простой вид результат имеет в том случае, когда L есть замкнутая гладкая кривая. Дополнительно потребуем, чтобы:

а) на L не существовало трех различных точек, касательные к L, в которых совпадают (отсутствие тройных касательных);

б) L можно было разбить на конечное число выпуклых дуг.

Сформулируем результат для таких кривых. Для этого введем три новые случайные прямые: T, W^+, W^-.

Случайная прямая T, по определению, является случайной касательной к L, причем точка касания T к L распределена равномерно вдоль L.

Заметим, что у каждой данной гладкой кривой L, удовлетворяющей б), может существовать лишь конечное число прямых, касающихся L в двух различных точках (двойные касательные). Через R_i (Q_i соответственно) обозначим все те двойные касательные, для которых кривая L локально, около точек касания, лежит по одну сторону (по разные стороны соответственно) от самой двойной касательной. Через r_i (q_i соответственно) обозначим длину отрезка между точками касания R_i (Q_i соответственно) с L.

Случайная прямая W^-, по определению, принимает положение Q_i с вероятностью, равной $q_i q^{-1}$, $q = \sum q_i$.

Случайная прямая W^+, по определению, принимает положение R_i с вероятностью, равной $r_i r^{-1}$, $r = \sum r_i$.

Обозначим через:

t_k — вероятность k пересечений случайной прямой T с L (не считая точки касания);

w_k^+ — вероятность k пересечений случайной прямой W^+ с L (не считая точек касания);

w_k^- — вероятность k пересечений случайной прямой W^- с L (не считая точек касания);

p_k — вероятность k пересечений M с L.

Теорема*. *Для всякой гладкой замкнутой ограниченной кривой L без тройных касательных, которую можно разбить на конечное число выпуклых дуг, справедливо соотношение*

$$p_k = \frac{r}{U}\left[2\, w_{k-2}^+ - w_k^+ - w_{k-4}^+\right], \qquad k > 0$$

$$-\frac{q}{U}\left[2\, w_{k-2}^- - w_k^- - w_{k-4}^-\right] + \frac{L}{U}\left[t_{k-2} - t_k\right] \tag{2.26}$$

$$p_0 = 1 - \frac{L}{U}\, t_0 - \frac{r}{U}\, w_0^+ + \frac{q}{U}\, w_0^-.$$

Вероятности с отрицательными индексами следует полагать равными нулю.

Заметим, что замкнутая кривая пересекается любой прямой в четном числе точек. Если $2N$ — максимальное число пересечений, какое может получиться при пересечении L прямыми (т. е. $p_{2N} > 0$, но $p_{2n} = 0$, если $n > N$), то очевидно, что $t_{2n} = 0$ для $n > N - 1$ и $w_{2n}^+ = w_{2n}^- = 0$ для $n > N - 2$. Учитывая это, легко находим из (2.26) математическое ожидание случайного числа ξ пересечений M с L

* Соответствующий результат для произвольных кусочно-гладких кривых может быть получен с помощью их аппроксимации кривыми, удовлетворяющими условиям теоремы.

$$\bar{n} = \sum kp_k = E\xi = \frac{2L}{U},$$

что совпадает с (2.3). Далее, положив

$$\bar{m} = \sum kt_k$$

находим второй момент распределения P_k

$$E\xi^2 = \frac{8(q-r)}{U} + 4\frac{L}{U}(\bar{m}+1).$$

Важная для вычислительных приложений дисперсия $D\xi$ таким образом равна

$$D\xi = \frac{8(q-r)}{U} + 4\frac{L}{U}(\bar{m}+1) - 4\frac{L^2}{U^2},$$

а коэффициент вариации, следовательно, имеет вид

$$D\frac{\xi}{\bar{n}} = \frac{2(q-r)U}{L^2} + \frac{U}{L}(\bar{m}+1) - 1. \qquad (2.27)$$

При оценке величины коэффициента вариации для данной L на практике важна возможность пренебречь первым членом в его выражении (2.27). Мы ограничимся замечанием, что если L есть объединение некоторого числа окружностей, то $q - r < 0$, т. е. имеет место оценка

$$D\frac{\xi}{n} < \frac{U}{L}(\bar{m}+1) - 1.$$

Представляет интерес указать более широкий класс кривых, для которых эта оценка остается в силе.

§ 3. Выпуклые тела в пространстве

В этом параграфе мы покажем, как техника, аналогичная развитой в § 1 может быть применена в теории случайных прямых в трехмерном пространстве. Такая возможность открывается, когда мы записываем элемент dJ инвариантной (относительно евклидовых преобразований пространства) меры прямых в пространстве в некоторых специально подобранных координатах.

Зафиксируем некоторую плоскость A в пространстве. Положение прямой J в пространстве становится определенным, если сначала задается положение проекции прямой J на плоскости A (об этой проекции будем говорить как о прямой γ), а затем уже в плоскости $G(\gamma)$, перпендикулярной A и проходящей через γ, задается прямая g (совпадающая с J). Первая часть задачи состоит в нахождении $F(g)$ в выражении

$$dJ = F(g)\,dg\,d\gamma, \qquad (3.1)$$

где dg и $d\gamma$ — суть элементы плоской инвариантной меры. То, что F не зависит от γ непосредственно следует из инвариантности dJ.

Для нахождения $F(g)$ поступим следующим образом:

Выберем в пространстве точку O, и пространственные прямые J будем определять, задавая сначала направление Ω нормали к плоскости $G=G(\Omega)$, проходящей через O и J, а затем задавая положение прямой g (совпадающей с J) на плоскости $G(\Omega)$. Будем искать dJ виде

$$dJ = F^*(g)\, d\Omega\, dg. \tag{3.2}$$

Для определения $F^*(g)$, в свою очередь, выберем второй центр O_1 в пространстве. Пространственные прямые J можно определять, задавая направления Ω и Ω_1 плоскостей G и G_1, проходящих через J и центры O и O_1 соответственно.

Выразим dg в (3.2) через $d\Omega_1$. Выбрав в качестве начала координат на плоскости G проекцию на нее точки O_1, и введя обычные полярные координаты (φ', p') прямых $g \in G$ относительно этого начала, находим, что

$$\varphi' = \Phi_1, \quad p' = p_1 \cos\theta_1,$$

где Φ_1 и θ_1 — азимут и широта нормали к G_1, а p_1 — длина перпендикуляра, опущенного из O_1 на J.

Следовательно

$$dg = d\varphi' dp' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -p_1 \sin\theta_1 \end{Vmatrix} d\theta_1 d\Phi_1 = p_1 \sin\theta_1 d\theta_1 d\Phi_1 = p_1 d\Omega_1.$$

Подставляя результат в (3.2), получаем

$$dJ = F^*(g)\, d\Omega\, p_1\, d\Omega_1.$$

Это выражение, в силу инвариантности dJ должно быть симметричным относительно величин без индекса и с индексом 1, что дает

$$F^*(g) = C \cdot p,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из O на J, а C — константа. Возвращаясь к (3.1), находим, что

$$dJ = C\, p\, d\Omega\, dg.$$

Константу C можно определить из условия, чтобы инвариантная мера всех прямых, пересекающих данную сферу, равнялась бы поверхности сферы, что дает

$$dJ = \frac{1}{\pi}\, p\, d\Omega\, dg. \tag{3.3}$$

Пусть K — фиксированный шар в пространстве, $\mathfrak{M} = \{J;\ J \cap K \neq \varnothing\}$ $f(J)$ — некоторая ограниченная функция, определенная на $\mathfrak{M}$. В силу (3.3)

$$\iiiint f(J)\, dJ = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Lambda} d\Omega \iint\limits_{\mathfrak{M}(\Omega)} f(g)\, p\, dg, \tag{3.4}$$

где $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M} \cap G(\Omega)$, $\Lambda = \{\Omega;\ G(\Omega) \cap K = \varnothing\}$.

Обозначим через p_2 расстояние от центра O_2 круга $K \cap G(\Omega)$ до прямой g на плоскости $G(\Omega)$. Расстояние между O и O_2 обозначим через l.

Имеем

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(\Omega)} f(g)\, p\, dg = \iint\limits_{\nabla(O)} f(g)\,[l \sin \mu \pm p_2]\, dg + \iint\limits_{\bar{\nabla}(O)} f(g)\, p\, dg. \tag{3.5}$$

Здесь μ — угол между g и прямой OO_2, и $\nabla(O) = \{g \in G(\Omega)$; полоса между двумя касательными к кругу $K \cap G(\Omega)$ параллельными g не содержит точки $O\}$.

Будем предполагать, что O удаляется в бесконечность по прямой перпендикулярной плоскости A, проходящей через центр шара K. Положим $\gamma = G(\Omega) \cap A$.

Так как плоская инвариантная мера множества $\bar{\nabla}(O)$ стремится при этом к нулю, то из (3.5) следует, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(\Omega)} f(g)\, p\, dg = l \iint\limits_{\mathfrak{M}(\Omega)} f(g) \sin \mu\, dg + o(l), \tag{3.6}$$

где μ — угол между g и направлением, перпендикулярным плоскости A.

Подставляя (3.6) в (3.4) и учитывая, что

$$l d\Omega \approx d\gamma.$$

Получаем

$$\iiiint f(J)\, dJ = \frac{1}{\pi} \iint d\gamma \iint f(g) \sin \mu\, dg. \tag{3.7}$$

Другими словами, мы нашли, что

$$dJ = \frac{1}{\pi} \sin \mu\, d\gamma\, dg,$$

т. е. $F(g) = \dfrac{1}{\pi} \sin \mu$.

Рассмотрим „плоскую" задачу вычисления методом инвариантного вложения интеграла

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1, a_2)} f(\chi(g)) \sin \mu\, dg,$$

где новым (по сравнению с § 1) обозначением является лишь μ—угол между прямой g и нулевым направлением на плоскости. В данном случае этот метод применим в следующем виде

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\,a_2)} f(\chi(g))\sin\mu\, dg = \lim_{r\to\infty}\frac{d}{dr}\iint f(\chi(r;\ Q))\sin\mu(Q)\,dJ,$$

где $\mu(Q)$ — угол между нулевым направлением и прямой, которая касается $C(r;\ Q)$ в точке пересечения $C(r;\ Q)$ с прямой OQ (см. введение).

Заметим, что $\mu(Q)$ не зависит от r, что в результате дает

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\,a_2)} f(\chi(g))\sin\mu\, dg = \iint\limits_{\mathfrak{M}(a_1,\,a_2)} f'(\chi)\,\chi\,\mathrm{ctg}\,\psi_1\,\mathrm{ctg}\,\psi_2\sin\mu\, dg + \sum_{i,\,j=1,\,2} \dot{R}_{ij},$$

где $\dot{R}_{ij}$ — вклады концов A_{ij}, происхождение которых аналогично происхождению вкладов R_{ij} в § 1. Однако, так как

$$\mu(Q_1) - \mu(Q_2) = \pm\frac{2b(\varphi,\ P)}{r} + o(r),$$

где Q_1 и Q_2 выбраны так, что $C(r;\ Q_1)$ и $C(r;\ Q_2)$ проходят через точку P и имеют в этой точке общую касательную с направлением φ, а $b(\varphi,\ P)$ есть расстояние от P до основания перпендикуляра, опущенного из O на эту касательную, то в выражении для $\dot{R}_{ij}$ входит новая функция $b(\varphi,\ P)$.

Сформулируем получаемый на этом пути результат для выпуклых многоугольников. Здесь целесообразно предположить дополнительно что $f(0) = 0$, так как это делает ненужным выписывание членов, зависящих от $b(\varphi,\ P)$.

Итак, пусть D — выпуклый многоугольник, $\chi(g)$ — длина хорды, высекаемой D из g.

Теорема. Если f непрерывно дифференцируема и $f(0) = 0$, то

$$\iint f(\chi)\sin\mu\, dg = \iint f'(\chi)\,\chi\,\mathrm{ctg}\,\psi_1\,\mathrm{ctg}\,\psi_2\sin\mu\, dg + \sum\sin\mu_i\int_0^{s_i} f(u)\,du, \tag{3.8}$$

где двойные интегралы берутся по множеству всех ненаправленных прямых, пересекающих D, μ_i — угол, который составляет i-тая сторона (длины s_i) с нулевым направлением.

Если D аппроксимирует выпуклую фигуру, граница которой не имеет прямолинейных участков, то из (3.8) получаем предельным переходом, что

$$\iint f(\chi)\sin\mu\, dg = \iint f'(\chi)\,\chi\,\mathrm{ctg}\,\psi_1\,\mathrm{ctg}\,\psi_2\sin\mu\, dg. \tag{3.9}$$

Возвращаясь к трехмерному пространству, предположим, что в нем задано выпуклое тело B, и положим $\chi(J) =$ длине хорды, высекаемой телом B из прямой J.

Предположим сначала, что плоскость A можно зафиксировать таким образом, что почти для всех (относительно инвариантной меры прямых на A) прямых γ контур пересечения $G(\delta) \cap B$ не имеет прямолинейных участков.

В таком случае в правой части равенства

$$\iiiint f(\chi(J))\, dJ = \frac{1}{\pi} \iint d\gamma \iint \sin\mu f(\chi(g))\, dg$$

внутренний интеграл можно заменить выражением из (3.9), что дает

$$\iiiint f(\chi(J))\, dJ = \frac{1}{\pi} \iint d\gamma \iint f'(\chi(g))\, \chi \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2 \sin\mu\, dg,$$

где под углом μ следует понимать угол между прямой g и направлением, перпендикулярным плоскости A. В силу общей формулы (3.7) мы приходим к тождеству

$$\iiiint f(\chi(J))\, dJ = \iiiint f'(\chi(J))\, \chi \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2\, dJ. \tag{3.10}$$

Для определенности уточним, какие углы обозначаются через ψ_1 и ψ_2 сейчас, когда рассматривается тело B в трехмерном пространстве. Введем $T_i(J)$, $i = 1, 2$ — плоскости, касательные к B в точках пересечения J с B, $G(A;\ J)$ — плоскость, проходящая через J перпендикулярна плоскости A. Теперь ψ_i есть угол между J и прямой $G(A;\ J) \cap T_i(J)$. На плоскости $G(A;\ J)$ углы ψ_i, $i = 1, 2$ лежат вне контура $G(A; J) \cap B$ в одной (по отношению к J) полуплоскости.

Отметим, что углы ψ_1 и ψ_2 зависят от ориентации плоскости A, в то время, как выбор последней ограничивается лишь требованием применимости формулы (3.10). Однако переходя с помощью соотношения

$$dJ = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\chi^2}\, dS_1\, dS_2, \tag{3.11}$$

где α_i есть острый угол между J и проекцией J на $T_i(J)$ (т. е. угол между J и плоскостью $T_i(J)$, $i = 1, 2$, dS_1 и dS_2 — элементы площади, к интегрированию по $(\partial B)^2$, получаем уже универсальную формулу

$$\iiiint f(\chi(J))\, dJ = \frac{1}{\pi} \iiiint\limits_{(\partial B)^2} f'(\chi) \operatorname{ctg}\psi_1 \operatorname{ctg}\psi_2 \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\chi}\, dS_1 dS_2, \tag{3.12}$$

верную для любого выпуклого тела B и любой ориентации плоскости A. Действительно, имеем

$$\operatorname{ctg}\psi_1 = \operatorname{ctg}\alpha_1 \quad \cos\gamma_1,$$

$$\operatorname{ctg}\psi_2 = \operatorname{ctg}\alpha_2 \quad \cos\gamma_2,$$

где γ_i есть угол между двумя полуплоскостями, исходящими из J, одна из которых содержит угол α_i, а другая — ψ_i, причем берется та пара полуплоскостей, для которых эти углы лежат вне полупространства, содержащего B (относительно $T_i(J)$). Это дает возможность переписать (3.12) в виде

$$\iiiint f(\chi(J))\,dJ = \frac{1}{\pi}\iiiint\limits_{(\partial B)^2} \frac{1}{\chi} f'(\chi) \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\gamma_1 \cos\gamma_2\, dS_1 dS_2, \tag{3.13}$$

откуда наше утверждение следует без труда.

Теперь естественно проинтегрировать (3.13) по всем возможным ориентациям плоскости A с равномерной плотностью. Получаем

$$\iiiint f(\chi(J))\,dJ = \frac{1}{4\pi^2}\iiiint\limits_{(\partial B)^2} \frac{1}{\chi} f'(\chi) \cos\alpha_1 \cos\alpha_2\, dS_1 dS_2 \iint \cos\gamma_1 \cos\gamma_2\, d\Omega. \tag{3.14}$$

Положим

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma,$$

где γ — угол между двумя полуплоскостями, исходящими из J, одна из которых содержит угол α_1 (перпендикулярна $T_1(J)$), а другая — угол α_2 (перпендикулярна $T_2(J)$), причем берется та пара полуплоскостей, для которых эти углы лежат в полупространствах (относительно $T_1(J)$ и $T_2(J)$ соответственно) не содержащих B.

Вычисляем внутренний интеграл в правой части (3.14):

$$\iint \cos\delta_1 \cos(\delta_1 + \delta)\, d\Omega = 2\int\limits_0^{2\pi} \cos\delta_1 \cos(\delta_1 + \gamma)\, d\delta_1 = 2\pi \cos\gamma.$$

Это дает

$$\iiiint f(\chi(J))\,dJ = \frac{1}{2\pi}\iiiint\limits_{(\partial B)^2} \frac{1}{\chi} f'(\chi) \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\gamma\, dS_1\, dS_2,$$

или, что то же самое

$$\iiiint f(\chi)\,dJ = \frac{1}{2\pi}\iiiint\limits_{(\partial B)^2} \frac{1}{\chi} f'(\chi) \cos\alpha_1 \cos\alpha_2\, dS_1 dS_2 -$$

$$- \frac{1}{\pi}\iiiint\limits_{(\partial B)^2} \frac{f'(\chi)}{\chi} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin^2\frac{\gamma}{2}\, dS_1\, dS_2. \tag{3.15}$$

В то же время из (3.11) непосредственно следует, что

$$\iiiint f(\chi(J))\,dJ = \frac{1}{\pi}\iiiint\limits_{(\partial B)^2} \frac{1}{\chi^2} f(\chi) \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\, dS_1 dS_2. \tag{3.16}$$

Выберем $f(\chi) = \chi^n$. Помножая (3.16) на $\frac{n}{2}$, складывая с (3.15) и деля результат на $1 + \frac{n}{2}$, получаем

$$\iiiint \chi^n dJ = \frac{n}{\pi(n+2)} \iiiint\limits_{(\partial B)^2} \chi^{n-2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, dS_1 dS_2 -$$

$$- \frac{2n}{\pi(1+n)} \iiiint\limits_{(\partial B)^2} \chi^{n-2} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin^2\frac{\gamma}{2}\, dS_1 dS_2$$

или, что то же самое

$$\iiiint \chi^n dJ = \frac{n}{\pi(n+2)} \iiiint\limits_{(\partial B)^2} \chi^{n-2} dS_1 dS_2 -$$

$$- \frac{2n}{\pi(n+2)} \iiiint\limits_{(\partial B)^2} \chi^{n-2} \left[\sin^2\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin^2\frac{\gamma}{2} \right] dS_1 dS_2. \quad (3.17)$$

Отметим, что так как α_1 и α_2 — острые углы, то вычитаемые интегралы в (3.17) неотрицательны, т. е. мы приходим к неравенствам

$$\iiiint \chi^n dJ \leqslant \frac{n}{\pi(n+2)} \iiiint\limits_{(\partial B)^2} \chi^{n-2} dS_1 dS_2, \quad (3.18)$$

которые в случае, когда B является шаром, обращаются в равенство. В частности, при $n=1$ получаем неравенство между объемом выпуклого тела B и потенциалом массы, однородным образом распределенной по его поверхности.

В заключение выпишем результат перехода в правой части тождества (3.15) к интегрированию по dJ, в предположении, что B является выпуклым многогранником. Получаем

$$\iiiint f(\chi(J))\, dJ = \frac{1}{2} \iiiint f'(\chi)\, \chi \operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_2 \cos\gamma\, dJ +$$

$$+ \sum_j \frac{1}{2\pi} \iiiint\limits_{\Delta_j} \frac{f'(d)}{d}\, dS_1 dS_2.$$

Суммирование проводится по всем граням Δ_j многогранника, а в интегралах под знаком суммы d обозначает расстояние между элементами dS_1 и $dS_2 \in \Delta_j$. Этот результат, так же как аналогичный результат имеет применения в теории случайных разбиений пространства (или плоскости) на выпуклые многогранники (многоугольники), о чем мы предполагаем написать отдельную работу.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 15.X.1969

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Ինվարիանտ ներդրման եղանակը ինտեգրալ երկրաչափության մեջ (*ամփոփում*)

Մաթեմատիկական ֆիզիկայում հայտնի «ինվարիանտ ներդրման» եղանակը կիրառվում է պատահական ուղիղների հետ կապված խնդիրներում։ §1-ում ապացուցված (1.57) ինտեգրալ նույնությունը հնարավորություն է տալիս ստանալ (1.63) անհավասարությունների դասը։ Այդ դասը որպես մասնավոր դեպք պարունակում է իզոպերիմետրիկ անհավասարությունը։

§2-ում գտնված է պատահական ուղղի և ֆիքսված հարթ կորի հատումների թվի բաշխումը։ Նույն եղանակը կիրառվում է §3-ում տարածական ուղիղների նկատմամբ։

R. V. AMBARTZUMIAN. *Invariant imbedding in the theory of random lines* (summary)

The approach, which is known in mathematical physics as „invariant imbedding" is applied in problems, involving random lines.

In § 1 the integral identity (1.57) is deduced, from which the class of inequalities (1.63) for convex plain domaines, including the classical isoperimetric inequality, followes.

In § 2 the distribution of the number of intersections of random line with fixed plane curve is found.

The technics, developed in § 1 is applied in § 3 to random lines in space, where the class of inequalities (3.18) for convex bodies is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Ambartzumian*. Random lines and planar clusters, Studia Sci. Math. Hungarica, Tomus 5, 1970.
2. *Р. В. Амбарцумян*. Пересечение сложных прямых случайными прямыми, ДАН СССР, т. 187, № 3.
3. *Bellman, Kalaba* and *Prestrud*. Invariant inbedding and radiative transfer in slabs of finite thickness, Elsevier, 1963.
4. *Wilhelm Blaschke*. Vorlesungen über Integralgeometrie, Chelsea, New York, 1949.
5. *J. J. Sylvester*. On a funicular solution of Buffons, „Problem of medle", Acta Math. 14, 1890—19, 185—205.
6. *R. Sulance*. Integralgeo metrie Ebener Kurvennetze, Acta math. Acad. Sci. Hungar, 17, 1966, 233.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

О. П. ВИНОГРАДОВ, И. П. ЦАРЕГРАДСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОИСКА

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи, связанные с оптимальным поиском плоских геометрических объектов, „случайно" распределенных в некоторой ограниченной выпуклой области. „Случайность" распределения объекта внутри области понимается в смысле, обычном в интегральной геометрии, т. е. предполагается равномерным вероятностное распределение в пространстве некоторых параметров, определяющих положение объекта в области ([1]).

Поиск производится кривой заданной длины L. Объект считается найденным, если он пересекает по меньшей мере один раз эту кривую. Оптимальность понимается в смысле получения наибольших или наименьших значений некоторых функционалов от кривых поиска.

2. Поиск „случайных" хорд

А. *Поиск хорды замкнутыми траекториями.* Сначала проанализируем обнаружение случайной хорды области G содержащимися в ней целиком траекториями C заданной длины L с началом и концом, совпадающими с некоторой точкой A границы области G. Будем предполагать, что поиск хорды осуществляется обходом области по заданной траектории C, проходимой в определенном направлении с постоянной скоростью $v = 1$. Основной характеристикой поиска ([1]) естественно считать вероятность обнаружения хорды, вычисляемую по формуле:

$$P_c = \frac{l_c}{L(G)}, \tag{1}$$

где l_c — длина выпуклой оболочки контура C, а $L(G)$ — длина границы области G.

Отсюда следует, что в смысле максимизации вероятности P_c наилучшими траекториями являются выпуклые траектории. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением совокупности выпуклых траекторий C поиска. Так как для всех них величина P_c одна и та же и равна по формуле (1) $\dfrac{L}{L(G)}$, то наряду с этой характеристикой поиска введем еще величину τ_c — время до первого обнаружения хорды при движении по траектории C. Если же обнаружения не происходит, то положим $\tau_c = \infty$.

Относительно (условного) закона распределения этой случайной величины легко доказывается

Лемма 1. Пусть в некоторой системе координат с центром в точке A выпуклый контур C задан уравнениями

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}, \quad 0 \leqslant s < L,$$

где s — длина контура C, отсчитываемая от A в направлении поиска. Тогда

$$\Phi_c(s) = P\left\{\tau_c < s \Big/ \begin{matrix}\text{обнаружение} \\ \text{произошло}\end{matrix}\right\} = \frac{s + r_c(s)}{L}, \tag{2}$$

где $r_c(s) = \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}$.

Заметим, что из этой леммы легко получить следующий результат. Предположим, что поиск по C производится таким образом, что при первом обнаружении хорды происходит возвращение в A кратчайшим (по прямой) путем. Обозначим через T_c полное время, затраченное на поиск при таком способе поиска. Как и раньше, если поиск не увенчался успехом, положим $T_c = \infty$. Тогда $\Phi_{T_c}(s) = P\{T_c < s/$обнаружение произошло$\} = \frac{s}{L}$, $0 \leqslant s \leqslant L$, т. е. закон распределения T_c не зависит от выбранной траектории C. Это утверждение является следствием нашей леммы и очевидного равенства

$$T_c = \tau_c + r_c(\tau_c). \tag{3}$$

Вернемся к нашей задаче оптимизации поиска, взяв за основу критерия оптимальности функционалы от траекторий C, связанные со случайной величиной τ_c. Пусть $d_A(G)$ — длина максимальной хорды области G, проходящей через точку A. В зависимости от соотношения между L, $L(G)$ и $d_A(G)$ возможны 3 случая:

$$1)\ 0 \leqslant L \leqslant 2d_A(G),\quad 2)\ 2d_A(G) < L < L(G),\quad 3)\ L = L(G).$$

Случай 3) неинтересен, поскольку здесь мы имеем единственную траекторию C, совпадающую с контуром области G. Рассмотрим случай 1). В качестве функционала оптимизации выберем (условную) функцию распределения $\Phi_c(s)$ и покажем, что существует такая траектория C_0, что для всех C и s, $0 \leqslant s \leqslant L$:

$$\Phi_{c_0}(s) \geqslant \Phi_c(s). \tag{4}$$

Из формулы (2), задающей $\Phi_c(s)$, следует, что поставленная задача сводится к максимизации величины $r_c(s)$ одновременно для всех s, $0 \leqslant s \leqslant L$. Легко видеть, что для $s \leqslant \frac{L}{2}$ максимальное значение $r_c(s)$ будет достигаться на прямолинейных (радиальных) участках траекторий, для которых $r_c(s) = s$. Пусть $s > \frac{L}{2}$. Положим $s = \frac{L}{2} + \Delta s$, $\Delta s > 0$. Тогда для любой траектории C

$$r_c\left(\frac{L}{2} + \Delta s\right) \leqslant \frac{L}{2} - \Delta s,$$

причем равенство достигается на прямолинейных (радиальных) участках возвращения в A. Отсюда следует, что искомым оптимальным путем C_0, удовлетворяющим соотношению (4), будет дважды проходимый прямолинейный отрезок длины $\frac{L}{2}$ с величиной

$$r_{c_0}(s) = \begin{cases} s, & s \leqslant \frac{L}{2} \\ L - s, & \frac{L}{2} < s \leqslant L. \end{cases} \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что в случае 2), когда $2d_A(G) < L < L(G)$, не существует такой траектории C_0, для которой выполняется соотношение (4) для всех s, $0 \leqslant s \leqslant L$. Поэтому, если имеется возможность выбора точки A, надо выбирать ее так, чтобы величина $d_A(G)$ была максимальной, т. е. в одном из концов диаметра $d(G)$ области G.

В этом случае в качестве функционала оптимизации мы выберем $M\tau_c$ — среднее значение момента первого обнаружения (при условии, что обнаружение произошло) и будем искать такую траекторию C_0, для которой

$$M\tau_{c_0} \leqslant M\tau_c \tag{6}$$

для всех траекторий C.

Замечание.

Интересно сравнить $M\tau_c$ для различных траекторий C в первом случае, когда $0 \leqslant L \leqslant 2d_A(G)$. Так, например, для дважды проходимого отрезка C_0 $M\tau_{c_0} = \frac{L}{4}$, а для окружности C длины L $M\tau_c = L\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right)$. Поэтому почти на 20% в принятом нами смысле выгоднее искать хорду отрезком, нежели окружностью.

Согласно равенству (2), имеем:

$$M\tau_c = \int_0^L [1 - \Phi_c(s)]\, ds = \frac{L}{2} - \frac{1}{L}\int_0^L r_c(s)\, ds. \tag{7}$$

Полученная формула (7) сводит поставленную задачу к максимизации функционала

$$\int_0^L r_c(s)\, ds, \tag{8}$$

заданного для всех выпуклых контуров C, целиком содержащихся в выпуклой области G.

Ограничимся далее случаем, когда область G есть круг, хотя проведенные ниже рассуждения леммы 2 применимы для любой выпуклой области, а не только для круга.

Назовем „секториальным“ контуром круга выпуклый контур, состоящий из двух хорд, проведенных из точки A до пересечения с окружностью, и дуги окружности между ними, не содержащей точки A. Обозначим через $r^*(s)$ соответствующий полярный радиус для этого контура (с полюсом в точке A). Тогда справедлива

Лемма 2. Для любой траектории C периметра $L (L \geqslant 4R$, где R — радиус круга G) найдется „секториальный“ контур того же периметра такой, что $r^*(s) \geqslant r_c(s)$ для всех s.

Доказательство. Пусть AB проекция контура C на диаметр круга AD. Тогда точка B является образом либо

а) одной точки N контура C, либо

б) целого отрезка N_1N_2.

Возможны следующие случаи:

1а) точка N находится на границе круга,

1б) отрезок N_1N_2 имеет общую точку (либо N_1, либо N_2) с границей круга,

2а) точка N находится внутри круга,

2б) отрезок N_1N_2 находится внутри круга.

Рассмотрим случай 1а. Хорда AN делит круг на два, вообще говоря, неравных сегмента. Для определенности предположим, что в меньшем из них содержится начальная часть контура C, имеющая длину L_1. Для $0 \leqslant s \leqslant L_1$ построим вместо этой части контура C новую траекторию C^*, состоящую из дуги окружности $\breve{NE}$ и отрезка AE, причем, длина $\breve{NE}$ + длина AE равна L_1. Покажем, что ее полярный радиус $r^*(s)$ удовлетворяет соотношению

$$r^*(s) \geqslant r_c(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant L_1. \tag{9}$$

Пусть длина отрезка AE равна s_1. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant s_1$ неравенство (9) очевидно. Если же предположить, что при некотором s_0

$$r^*(s_0) < r_c(s_0) \quad (s_1 < s_0 < L_1),$$

то, как нетрудно заметить, область, ограниченная 1) радиусом-вектором $\vec{r}_c(s_0)$ 2) частью траектории C, соединяющей конец радиуса-вектора $\vec{r}_c(s_0)$ и точку N, 3) отрезком NA, лежит внутри контура, образованного 1) радиусом $\vec{r}^*(s_0)$, 2) частью новой траектории, соединяющей конец радиуса-вектора $\vec{r}^*(s_0)$ и точку N; 3) отрезком AN.

В силу предположения $r^*(s_0) < (r_c(s_0)$ следует, что периметр второго контура больше периметра первого контура. Но известно ([2]): если одна выпуклая область содержится внутри другой, то ее периметр меньше, чем периметр области, ее содержащей. Отсюда следует, что неравенство $r^*(s_0) < r_c(s_0)$ невозможно.

Для другой части контура C, содержащейся в большем сегменте круга, доказательство можно провести следующим образом. Проведем хорду $NM \perp AD$ и построим новый контур $\bar{C}$, образованный хордой NM, частью дуги окружности $\breve{MH}$ и отрезком HA, причем, длина NM + длина $\breve{MH}$ + длина HA равна $L - L_1$. Точно также, как и в предыдущем случае можно показать, что для полярного радиуса $\bar{r}(s)$ нового контура $\bar{r}(s) > r_c(s)$ $(L - L_1 \leqslant s < L)$. Наконец, этот контур $\bar{C}$ заменим контуром C^*, состоящим из дуги $\breve{NF}$ и отрезка AF, причем, длина $\breve{NF}$ + длина AF равна $L - L_1$. Нетрудно видеть, что для этого контура каждая точка далее удалена от A, чем соответствующая (для одного и того же значения s) точка для предыдущего. Таким образом, в случае 1а) лемма доказана. Доказательство леммы в случае 1б) полностью совпадает с предыдущим доказательством. Случаи 2а) и 2б) рассматриваются, как предыдущие с незначительными изменениями. Лемма доказана.

Лемма 3. Среди всех „секториальных" контуров заданного периметра L максимум $\int\limits_0^L r_c(s)\,ds$ достигается для контура, симметричного относительно диаметра AD.

Доказательство. Рассмотрим „секториальный" контур периметра L, у которого угол между хордами, проведенными из точки A, равен 2α, а угол между биссектрисой этого угла и диаметром AD равен β. Для этого контура введем следующее обозначение

$$J(\alpha, \beta) = \int\limits_0^L r^*(s)\,ds.$$

Опуская утомительные выкладки, получим

$$J(\alpha, \beta) = 4R^2[(\sin\alpha + \cos\beta)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\beta],$$

причем, α и β связаны соотношением $\cos\alpha\cos\beta + \alpha = \frac{L}{4R}$.

Исследуя функцию $J(\alpha, \beta)$ обычными методами дифференциального исчисления, убеждаемся, что максимум достигается при $\beta = 0$, $\alpha = \alpha_0$, где α_0 определяется из уравнения

$$\alpha_0 + \cos\alpha_0 = \frac{L}{4R}.$$

Лемма доказана. Сохраняя введенные выше обозначения и резюмируя предыдущие результаты (включая результаты лемм 2 и 3) приходим к следующим выводам.

Теорема. 1°. Замкнутые траектории длины L, принадлежащие целиком области G и максимизирующие вероятность P_c обнаружения случайной хорды этой области, представляют собой множество выпуклых траекторий;

2°. В случае $0 \leqslant L \leqslant 2\,d_A(G)$ траекторией, максимизирующей для любого $s\,(0 \leqslant s \leqslant L)$ функцию распределения $\Phi_c(s)$, будет дважды проходимый отрезок длины $\frac{L}{2}$;

3°. Для круга G радиуса R и $4R \leqslant L \leqslant 2\pi R$ контуром длины L, минимизирующим среднее значение $M\tau_c$, будет симметричный „секториальный" контур.

Найденные нами оптимальные траектории поиска хорды представляют интерес с точки зрения рассмотрения некоторых других функционалов от траекторий C.

Так, например, случайная хорда делит область G на две части. Обозначим через G_1 ту часть, которая не содержит точку A. Будем интерпретировать задачу, рассмотренную выше, как поиск области G_1. Естественно предполагать, что обнаружение области G_1 происходит с большей надежностью, когда время, проведенное внутри области G_1 будет максимально возможным. Для выбора оптимальной в этой смысле траектории рассмотрим две случайные величины τ_c^+ и τ_c^- — моменты первого обнаружения хорды при обходе контура C, соответственно, против и по часовой стрелке.

Поскольку ξ_c — время пребывания в области G_1 равно

$$\xi_c = L - (\tau_c^+ + \tau_c^-),$$

то траектории, найденные выше и „минимизирующие" величину τ_c, будут „максимизировать" величину ξ_c. Отметим, что нетрудно найти функцию совместного распределения величин τ_c^+ и τ_c^-.

Б. *Поиск хорды незамкнутыми траекториями.* Рассмотрим теперь случай, когда поиск хорды, случайно расположенной в выпуклой области G, ведется по траекториям $\breve{AB}$ длины L с началом и концом на границе области G. По соображениям, приведенным в пункте А, ограничимся классом выпуклых (вогнутых) траекторий $\breve{AB}$. Легко заметить, используя формулу (1), что вероятность пересечения $\breve{AB}$ со „случайной" хордой области G будет равна величине

$$P_{\breve{AB}} = \frac{L(\breve{AB}) + z}{L(G)}, \tag{10}$$

где z — длина хорды AB, стягивающей дугу $\breve{AB}$.

Поэтому в смысле максимума вероятности оптимальными траекториями будут хорды AB длины L, если $L \leqslant d(G)$, и дуги $\breve{AB}$, совпадающие с частью контура области G и выбранные так, что хорды AB, их стягивающие, имеют максимально возможную величину z — в случае, если $L > d(G)$ (здесь, как и раньше, $d(G)$ — диаметр области G). В дальнейшем будем рассматривать только такие траектории.

Представим себе процедуру поиска такую, что по обнаружении хорды происходит возвращение кратчайшим путем (по прямой) в ближайший из концов A или B. Введем величину T — суммарное время, затраченное на поиск хорды. Тогда, очевидно,

$$T = \begin{cases} \tau + r^A(\tau) & \tau \leqslant s_0 \\ \tau + r^B(\tau) & \tau > s_0, \end{cases} \tag{11}$$

где τ — момент первого обнаружения „случайной“ хорды $r^A(s)$, $r^B(s)$ — расстояния точки $M(s)$ соответственно от начала $A(0)$ и конца $B(L)$, $0 \leqslant s \leqslant L$ и s_0 — координата точки $M_0(s_0)$ такой, что $r^A(s_0) = r^B(L - s_0)$. Из равенства (11) можно получить преобразование Лапласа величины T для $L > d(G)$ и при условии обнаружения хорды

$$\varphi_T(u) = Me^{-uT} = \int_0^{s_0} e^{-u(x + r^A(x))}\, d\Phi_c(x) + \int_{s_0}^{L} e^{-u(x + r^B(x))}\, d\Phi_c(x), \tag{12}$$

где $\Phi_c(x)$ определяется равенством (2).

Формулой (12) практически трудно воспользоваться, но для круговой области G она дает возможность вычислить через элементарные функции все моменты случайной величины T. Действительно, в случае круга радиуса R и $L > 2R$ преобразование Лапласа $\varphi_T(u)$ величины T, как легко подсчитать, преобразуется к виду:

$$\varphi_T(u) = \frac{1}{L + 2R\sin\frac{L}{2R}} \cdot \left[\frac{1}{u}\left(1 - e^{-u\left(\frac{L}{2} + 2R\sin\frac{L}{4R}\right)}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{L}{2}}^{L} e^{-u\left(x + 2R\sin\frac{L-x}{2R}\right)}\left(1 + \cos\frac{x}{2R}\right)dx\right].$$

3°. *Поиск отрезка.* Теперь рассмотрим поиск ориентированного отрезка длины l замкнутыми выпуклыми контурами C длины L. Будем предполагать, что отрезок „случайно“ распределен в некоторой области G и имеет с ней хотя бы одну общую точку. Как и раньше „случайность“ понимается в смысле, обычном в интегральной геометрии, т. е. вероятность того, что выбранная внутри G выпуклая траектория C пересечет отрезок будет равна

$$P_c = \frac{\mu(\mathfrak{M}_c)}{\mu_G}, \tag{13}$$

где $\mu(\mathfrak{M}_c)$ — кинематическая мера множества $\mathfrak{M}_c$ отрезков длины l, пересекающих контур C, а μ_G — кинематическая мера отрезков, имеющих хотя бы одну общую точку с областью G.

Известно, что $\mu_G = 2\pi F + 2 \cdot l \cdot L(G)$, где F и $L(G)$ — площадь и периметр области G соответственно. Нетрудно также показать, что

$$\mu_c = \mu(\mathfrak{M}_c) = \int\limits_{\mathfrak{M}_c^*} [\, l + \min(l, \sigma)]\, d\vec{\Pi}, \tag{14}$$

где $\vec{\Pi}(p, \varphi)$ — ориентированная прямая, на которой лежит отрезок, σ — длина хорды, отсекаемой на этой прямой контуром C, а $\mathfrak{M}_c^*$ — соответствующая область параметров p и φ.

Наша задача ставится следующим образом. Среди всех выпуклых контуров C длины L найти такой контур C_0, для которого

$$P_{c_0} > P_c.$$

Заметим, что так как в формуле (13) знаменатель не зависит от выбора C, то для решения поставленной задачи нужно минимизировать числитель. В случае, если длина отрезка l не менее диаметра $d(C)$ фигуры C, соотношение (14) приводит к известной формуле ([2]):

$$\mu_c = 2lL + 2\pi F_c. \tag{15}$$

В силу изопериметрического свойства круга отсюда следует, что для $l > d(G)$ окружность является оптимальной траекторией. Рассмотрим другой крайний случай малых $l\,(l \to 0)$. Ниже мы хотим показать, что и в этом случае окружность будет максимизировать вероятность обнаружения P_c. Используя известные результаты интегральной геометрии ([2] и [3]), кинематическую меру μ_c (14) можно преобразовать к виду:

$$\mu_c = 4\Big[l \cdot L - \int\limits_0^{2\pi} S_c(\varphi)\, d\varphi\Big], \tag{16}$$

где $S_c(\varphi)$ — площадь заштрихованной фигуры W (рис. 1), определяемой следующим построением. Проводятся две ориентировочные прямые $\vec{\Pi}(p_1, \varphi)$ направления φ таким образом, чтобы хорды $AB = A_1B_1 = l$, и одна из опорных прямых к контуру C, параллельная им; затем проводятся прямые AA_1 и BB_1 до пересечения с этой опорной прямой. Фигура, заключенная между опорной прямой, прямыми AA_1,

BB_1 и частью контура C, отсекаемого этими прямыми, та фигура W, о которой идет речь в формуле (16). Из равенств (13) и (16) выте-

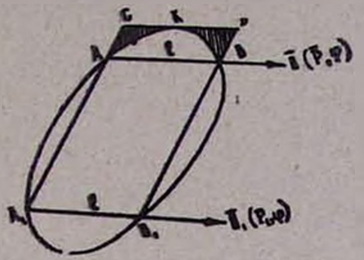

Рис. 1.

кает, что задача максимизации вероятности P_c свелась к минимизации интеграла

$$I_c = \int_0^{2\pi} S_c(\varphi)\, d\varphi. \tag{17}$$

Рассмотрим сначала класс $R[C]$ гладких кривых C с касательной во всех точках и с определенной везде кривизной $\varkappa$. Для каждого фиксированного φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ в соответствии с изложенным выше построением определяется фигура W площади $S_c(\varphi)$ и точка $K(\varphi)$ на контуре C (рис. 1). Выберем прямоугольную систему координат xKy с началом в точке K и осью x, идущей по опорной прямой CKD. Поскольку мы предполагаем, что $l \to 0$, то в этой системе координат можно задать кривую C в виде однозначной функции $y = f_c(x)$, определенной для $|x| \leqslant l$. Тогда, обозначая через x_1 и x_2 — абсциссы точек A и B $(x_1 \leqslant 0 \leqslant x_2,\ x_2 - x_1 = l)$, нетрудно получить, что

$$S_c(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} f_c(x)\, dx. \tag{18}$$

Разлагая $f_c(x)$ по формуле Маклорена и учитывая, что $f_c(0) = f_c'(0) = 0$, а $f_c''(0) = \varkappa_c(\varphi)$, где $\varkappa_c(\varphi)$ — кривизна кривой C в точке $K(\varphi)$, мы получим из равенства (18) следующее асимптотическое выражение для $S_c(\varphi)$:

$$S_c(\varphi) = \frac{1}{6} \varkappa_c(\varphi)(x_2^3 - x_1^3) + 0(l^3), \quad l \to 0,$$

которое вместе с равенством (17) очевидным образом приводит к следующему результату: для любого выпуклого контура C справедливо соотношение

$$J_c = l^3 \int_0^{2\pi} \varkappa_c(\varphi)\, \lambda_c(\varphi, l)\, d\varphi + 0(l^3), \tag{19}$$

где $\lambda_c(\varphi, l) = \dfrac{x_2^3 - x_1^3}{6l^3}$,

причем

$$J_c \geqslant \frac{l^3}{24}\int_0^{2\pi} \chi_c(\varphi)\,d\varphi + 0(l^3), \tag{20}$$

где знак равенства достигается в случае окружности.

Найдем теперь минимум функционала

$$I_c = \int_0^{2\pi} \chi_c(\varphi)\,d\varphi.$$

Прежде чем это сделать, отметим следующее обстоятельство. Зададим контур C параметрически, выбрав в качестве параметра длину дуги s, отсчитываемую от некоторой точки контура. Тогда угол φ, задающий направление касательной в каждой точке кривой, можно представить как функцию этой дуги $\varphi = \varphi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, такую, что, $\dfrac{d\varphi(s)}{ds} = k_c(s)$, где $k_c(s)$ кривизна кривой C в точке, отвечающей значению параметра s. Поэтому функционал I_c можно преобразовать к виду:

$$I_c = \int_0^L \chi_c(\varphi(s))\,d\varphi(s) = \int_0^L k_p^2(s)\,ds. \tag{21}$$

При этом для выпуклого контура C должно выполняться очевидное условие

$$\int_0^L k_c(s)\,ds = 2\pi. \tag{22}$$

Мы пришли к простейшей вариационной задаче на условный экстремум. Ее решением, дающим минимальное значение функционала (21), будет постоянная:

$$k_c(s) \equiv \text{const}\left(= \frac{2\pi}{L}\right),\ 0 \leqslant s \leqslant L. \tag{23}$$

Вместе с (20) равенство (23) утверждает асимптотическую оптимальность окружности в классе кривых C с определенной везде кривизной. Если же в некоторой точке касания $K(\varphi)$ кривизна $\chi_c(\varphi)$ не определена, формула Маклорена для функции $f_c(x)$ дает лишь представление

$$f_c(x) = \varepsilon_c(x, \varphi)\cdot x,$$

где $\varepsilon_c(x, \varphi) \to 0$, $x \to 0$. Введя $\beta_c(x) = \dfrac{\varepsilon_c(x, \varphi)}{x}$, получим $f_c(x) =$

$=\beta_c(x)\cdot x^2$, где в силу выпуклости кривой C, всегда $\beta_c(x)>0$. Поэтому, учитывая дискретный характер таких точек, можем сказать, что они не могут „улучшить“ кривую в смысле вероятности P_c ее пересечения с отрезком, — „ухудшить“ могут, — если

$$\beta_c(x)\to+\infty \qquad \text{при } x\to 0.$$

Дальнейшее ухудшение гладкости кривой C ведет к дальнейшеми „ухудшению“ кривой в смысле максимизациивероятностей P_c. Так, можно показать, что если контур C имеет m угловых точек с углами $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ между соответствующими односторонними касательными, то вероятность P_c будет равна

$$P_G=\frac{1}{\mu_G}\left[4lL-\frac{l^2}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\alpha_j}{\operatorname{tg}\alpha_j}\right)+O(l^3)\right]. \tag{24}$$

Для кривых же класса $R\{C\}$, как это следует из формул (13), (16) и (19), эта вероятность равна

$$P_c=\frac{4}{\mu_G}\left[l\cdot L-l^3\int_0^{2\pi}\chi_c(\varphi)\lambda_c(\varphi,\ l)\,d\varphi+0(l^3)\right], \tag{25}$$

где

$$\frac{1}{24}\leqslant\lambda_c(\varphi,\ l)\leqslant\frac{1}{6}.$$

В полученных формулах (24) и (25) интересно отметить следующий факт: первый член разложения определяется размером L кривой C, второй же член — ее формой, представленной соответственно параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ в (24) и $\chi_c(\varphi)$, $\lambda_c(\varphi,\ l)$ $0\leqslant\varphi<2\pi$, в (25).

Для произвольных l нам не удалось максимизировать вероятность P_c. Однако, в связи с полученными выше результатами для частных случаев „больших“ и „малых“ l, можно высказать гипотезу, что среди выпуклых контуров C длины L оптимальной будет окружность C_0, т. е. $P_{c_0}>P_c$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 2.III.1970

Օ. Գ. ՎԻՆՈԳՐԱԴՈՎ և Ի. Գ. ՑԱՐԵԳՐԱԴՍԿԻ. Երկրաչափական հավանականություններ և օպտիմալ որոնման տեսությունը (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են ուռուցիկ տիրույթներում պատահական ձևով տեղավորված օբյեկտների օպտիմալ որոնման խնդիրները։ Լարերի և ինտերվալների որոնման խնդրի համար ստացված են օպտիմալ հետագծերը։

O. P. VINOGRADOV and I. P. ZAREGRADSKI. *Geometrical probabilities in the theory of optimal search* (summary)

The problems of optimal search for geometrical objects, randomly placed in a convex domain, are discussed.

Optimal trajectories for search for chords and intervals in convex domaines are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. G. Kendall, P. A. P. Moran.* Geometrical Probability, Charles Griffin, London, 1963.
2. *Л. А. Сантало.* Введение в интегральную геометрию, М., Издательство „ИЛ", 1956.
3. *L. A. Santaló.* Sur quelques problémes de probabilités géométriques, Tohoku Math. J., 47, 1940, 159—171.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 3, 1970 Математика

ROLLO DAVIDSON

CONSTRUCTION OF LINE PROCESSES: SECOND ORDER PROPERTIES

The second-order properties of stationary processes of lines in the plane are thoroughly treated, and the problem of construction of such processes is discussed.

1. Integral geometry

Let w be an oriented line in the Euclidean plane R^2; then the standard coordinates of w are (p, θ), where $-\infty < p < \infty$ and θ is an angle. Here p is the perpendicular (signed) distance of W from some fixed origin O and θ is the angle made by this perpendicular with some fixed direction Ox. Thus:

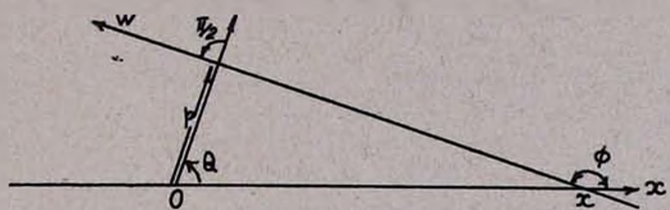

Fig. 1.

In fig. 1 $p > 0$; but if w' were parallel with w, the same distance from, and the other side of O, we would have $p(w') = -p(w)$.

Let C be the cylinder $\{(p, \theta): -\infty < p < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Then there is a biunique correspondence between the lines w in R^2 and the points w of C. C is to have the ordinary Euclidean topology, and all sets in C that we shall consider will be Borel.

Let M^* be the group of rigid motions (translations and rotations) of R^2. Then each $T^* \in M^*$ induces a motion T of C. Let us write, for each positive q, $B_q = \{(p, \theta): |p| < q\}$.

P r o p o s i t i o n 1. *Let M be the set of motions T of C as T^* runs through M^*. Then M is the group generated by the motions*

$$R_\alpha: p \to p, \ \theta \to \theta + \alpha \quad (0 \leqslant \alpha < 2\pi)$$

$$S_d: p \to p + d\cos\theta, \ \theta \to \theta \ (-\infty < d < \infty).$$

P r o o f. Immediate from the following observations:

1. R_α corresponds to rotating Ox clockwise through the angle α;
2. S_d corresponds to tanslating O a distance $-d$ along Ox;
3. The two classes of motion above generate M^*. Q. e. d.

It is to be noted that R_2 is a rotation of C, and that S_d is a *parallel shear* of C. That is, if C is slit along a generator and S_d is applied to the strip so obtained, the image of a line perpendicular to the axis of the strip is a sine curve.

P r o p o s i t i o n 2. *No translation of* C *is a member of* M.

P r o o f. Let the translation be $T=\{p \to p+q;\ \theta \to \theta\}$ $(q \neq 0)$. Without loss of generality q is positive. Then consider the band $B_{q/2}=B$ say. It is clear that $B \cap T(B)=\varnothing$. On the other hand, B is the set of lines lying within the non-zero distance $q/2$ of O; so, under any $T' \in M$, $T'(B)$ is the set of lines lying within distance $q/2$ ot some point $O' \in R^2$ Therefore, $B \cap T'(B) \neq \varnothing$, so that $T \neq T'$. Q. e. d.

P r o p o s i t i o n 3. (Crofton [4], Santalo [13]). There is, up to positive factors, a unique positive Borel measure on C invariant under M, and this measure (which we shall denote by m) can be taken to have the density $dp d\theta$.

Returning to fig. 1, we now have, for almost all (w. r. t. m) w, the representation $w=(p,\ \theta)=(x,\ \Phi)$, where $x=p\ \sec\theta$, $\Phi=\theta+\pi/2$; x is the distance of the meet of w with Ox from O, and Φ is the angle of intersection. We now have also $m(dw)=|\sin\Phi|\,dx\,d\Phi$.

2. Line-process

By a line-process Z we mean a non-negative integer-valued random. Borel measure on C, which satisfies

(I) For all positive q, $Z(B_q)$ is a. s. finite;

(II) Z has a. s. no atoms of mass greater than 1.

Thus Z corresponds to a random aggegate of lines in R^2, only finitely many of which cut any circle. We define further the conditions

(III) $E(Z^2(B_q))$ is finite for all finite positive q, and

$$\text{for all } T \in M,\ E(Z(A))=E(Z(TA));$$

$$E(Z(A)\,Z(B))=E(Z(TA)\,Z(TB)),$$

provided there is a q such that $A \cup B \subset B_q$.

(IV) Z has a. s. no parallel (or antiparallel) lines.

(V) The finite-dimensional distributions of Z are stationary under M,

$$\text{that is, } p\Big(\bigcap_{i=1}^{k}(Z(A_i)=n_i)\Big)=p\Big(\bigcap_{i=1}^{k}(Z(TA_i)=n_i)\Big) \text{ for all } k,$$

$$n_1,\cdots,\ n_k,\ A_1,\cdots,\ A_k, \text{ and } T \in M.$$

We shall study only those line-processes satisfying (I) — (IV)— these will form the class LP4; those members of LP4 satisfying also (V) will form the class LP5.

We pause to look at (IV). It will be clear throughout the paper that parallel lines are a pathology, essentially because we have a distance between them, so that we have all the complications of the theory of ordinary point processes on the line. For LP4 the theory is quite different.

Proposition 4. *Any strictly stationary line-process Z (i. e., one that satisfies (V)) has a. s. no, or infinitely many, pairs of parallel lines.*

Proof. Let the event $F =$ (There exists at least one pair of parallel lines) have positive probability. Let N be the process of points on the whole line Ox given by its intersections with those lines of Z which have at least one other line of Z parallel to them. Then N is strictly stationary (this may be verified by elementary calculations) and has at least two point in it. By Cauchy's inequality, $E_F \exp - N([-2r, 2r[) \leqslant E_F \exp - 2N([-r, r[)$ for any positive r. Using this doubling repeatedly, by bounded convergence we get $E_F \exp - N(R) \leqslant p(N([-r, r[) = 0 \mid F)$, where R is the whole real line. Since $p(\cdot \mid F)$ is a probability measure, we obtain by continuity.

$$E_F \exp - N(R) \leqslant p(N(R) = 0 \mid F) = 0,$$

by definition of F. Thus $N(R)$ is a. s. infinite given F. Q. e. d.

Note. Ryll-Nardzewski [12] states effectively this result, but the method used here appears to be useful later.

The obvious example of an LP5 is the Poisson line-process, studied e. g. by Miles [8[, [9], which has, for disjoint $A_1, \cdots, A_k$ on C,

$$p\Big(\bigcap_{i=1}^{k} (Z(A_i) = n_i)\Big) = \prod_{i=1}^{k} \{e^{-\lambda m(A_i)} (\lambda m(A_i))^{n_i}/n_i!\},$$

where λ is a non-negative constant.

We may generalize this somewhat as follows. Let Λ be any random Borel measure on C, satisfying (I) and (III) (with therein Λ for Z), and (V) if we desire to construct an LP5 rather than an LP4. Then, having sampled Λ, we put on an inhomogoneous Poisson process with local rate $\Lambda(dw)$, so that

$$p\Big(\bigcap_{i=1}^{k} (Z(A_i) = n_i)\Big) = E_\Lambda \prod_{i=1}^{k} \{e^{-\Lambda(A_i)} (\Lambda(A_i))^{n_i}/n_i!\}.$$

We shall, of course, require the satisfaction of (II) and (IV) for the resulting line-process Z; and it turns out that this inposes heavy conditions on Λ. Processes of the type just described are called *doubly stochastic Poisson* processes, and we say that they form the class dsP. The fundamental, and as yet unsolved, question is, Do there exist members of LP5 —'dsP? We shall return to this question in section 5; meanwhile we shall investigate the second-order properties of the members of LP4 with this question in mind.

3. Second-order properties

In this section, Z is arbirary in LP4. Define, for arbitrary bounded Borel sets A, B of C, $\mu(A \times B) = EZ(A)Z(B)$.

Proposition 5 (Krickeberg). μ has a unique extension to a Borel measure on $C \times C$.

Proof by countable additivity and square-summability of Z.

Theorem 1. *Every $Z \in LP4$ is second-order stationary under reflections of R^2 (equivalently, under translations of C).*

Note. This theorem, for the special case where Z possesses a second-order product-moment density, appears in my Cambridge Ph. D. thesis (1967). It was proved in full generality by Krickeberg (1969). His proof (which proceeds by disintegration of μ) is much more sophisticated and elegant than ours here, but ours is thematic.

Proof of the theorem. It is clearly only necessary to consider the particular reflection in Ox. This, T_0 say, is given by $T_0(p, \theta) = (-p, \pi-\theta)$. It is required to prove that if A, B are bounded Borel sets, then $EZ(A)Z(B) = EZ(TA)Z(TB)$; for it is easy to see that the pseudo-Haar measure on C, and hence the first-order moment measure of Z, are invariant under T_0 (and translation of the cylinder, of course). By Proposition 5, it suffices only to consider the case where A and B are congruent rectangular shields on C. That is, A has the form $[p, p+1[\times [\gamma, \delta[$ and B has a congruent form. It will be noticed that we are taking A and B to be half-open. By a rotation we may take

$$A = [p, p+1[\times[-\alpha-\beta, -\alpha[;\ B = [q, q+1[\times[\alpha, \alpha+\beta[,$$

where $0 < \beta < \pi$.

We suppose at first that there is no generator of C common to $\bar{A}$ and $\overline{B+\pi}$; equivalently, that $\max(|\alpha|, |\alpha+\beta|) < \pi/2$.

Let Q_d be the translation of C through d: $(p, \theta) \to (p+d, \theta)$. Then we at once verify that if we put $d = -(p+q+1)$, then $T_0A^\circ = Q_dB^\circ$ and $T_0B^\circ = Q_dA^\circ$, where the superscript $^\circ$ denotes that the interior is taken. Now what we shall demonstrate is stationarity under Q_d. Since the open rectangles generate the Borel sets, second-order stationarity under T_0 will follow from Proposition 5. Also it is clear that we could deduce stationarity under Q_d from that under T_0.

The idea of the proof is to approximate the effect of translation on A and B by splitting them up lengthwise and applying suitable shears to the pairs of split pieces. Define the distortion of the shear $(p, \theta) \to (p + d\cos(\theta-\alpha), \theta)$ as $|d|$; this is the maximum displacement under the shear. For any shield C (that does not encircle C), let $P(C)$ be its point furthest clockwise and with least (algebraic) p-value. For convenience, put $T = Q_d$.

Divide A and B each into $n = 2^m$ $(m \to \infty)$ congruent shields A_i, B_j, each of which has the same length, and $1/n$'th the angular width, of the original shield. Let S_{ij} be the (unique) shear such that $P(S_{ij}TA_i) = P(B_j)$ and $P(S_{ij}TB_j) = P(A_i)$. This shear exists and is unique because the angular interval subtended by $\overline{A \cup B}$ is less than π. For the same reason, there is m so large that we could adjoin shields congruent to A_i, B_j on each side of A and B, and the angular interval subtended by the union of the augmented A and B would still be less than π. Let the augmenting, extreme shields be, without loss of generality, A_0 and B_{n+1}; and let $S_{0,\,n+1}$ (which again exists by the small-angular-interval argument) be defined similarly to S_{ij}. Let the distortion of $S_{0,\,n+1}$ be δ; it is easy to see that this is at least as large as the distortion of each S_{ij}.

Now we have to consider the sets $S_{ij}TA_i\Delta B_j\,(=B_{ij}$ say) and $S_{ij}TB_j\Delta A_i$ $(=A_{ij}$. say). For we have

$$|\mu(TA\times TB)-\mu(A\times B)|=|\,EZ(A)\,Z(B)-\sum_i\sum_j EZ(TA_i)\,Z(TB_j)|$$

$$=|\sum_i\sum_j E\{Z(A_i)\,Z(B_j)-Z(S_{ij}TB_j)\,Z(S_{ij}TA_i)\}|,\text{ by stationarity}$$

$$\leqslant\sum_i\sum_j\mu(A_{ij}\times B_{ij}).$$

Now $A_{ij}\subset A_i'$, the disjoint union of two shields with least p-values those of the ends of A_i, comprising the same generators as A_i, half-open similarly to A_i (and so to A itself), and of length (each) $\beta\delta/2^m$ So

$$|\mu(TA\times TB)-\mu(A\times B)|\leqslant\sum_i\sum_j\mu(A_i'\times B_j'),$$

where the B_j', are similarly defined for B. Let $A'=\bigcup_{i=1}^{n}A_i'$, $B'=\bigcup_{j=1}^{n}B_j'$. Then $|\mu(TA\times TB)-\mu(A\times B)|\leqslant\mu(A'\times B')$. But each of A' and B' decreases to the empty set as $m\to\infty$, so the right-hand side decreases to zero. Therefore the left-hand side must vanish, and we have stationarity. in the special case where $\bar{A}$ and $\overline{B+\pi}$ have no generator in common.

In the general case, we again divide the shields A and B into n shields congruent to each other and of the same length as A and B. Then, in the previous notation, $EZ(A)\,Z(B)=E\sum_i\sum_j Z(A_i)\,Z(B_j)=$

$=E(\sum+\sum')$, say, where $\sum$ is taken over those i and j such that $\bar{A}_i$ and $\overline{B_j+\pi}$ have a generator in common, and $\sum'$ is the remainder. Now consider $\sum$. Since the sets $\bigcup_{i,j}(A_i\times B_j)$ involved in $\sum$ decrease to the line segment

$\{(w,\ w')\colon\theta'=\theta+\pi;\ p,\ p',\ \theta,\ \theta'$ lie within bounds fixed by A and $B\}$

in the product subspace $A\times B$ of $C\times C$; and since this line segment is a. s. not charged by Z (because it has a. s. no parallel lines), $\sum\to 0$ a. s.. Therefore, $\sum_i\sum_j Z(A_i)\,Z(B_j)-\sum'$ decreases to zero a. s. as $n=2^m\to\infty$. Taking expectations and using the previous result, we have the theorem. Q. e. d.

Example. If Z may charge the line $\{(w,\ w')\colon\theta'=\theta+\pi\}$, that is, Z admits antiparallel lines, Z needsnot be stationary under reflections.

For let Z_1 be a Poisson process of oriented lines. For each $w \in Z_1$ introduce w' antiparallel to, and to the right of, w, at a distance d (fixed, positive) from w. Let Z be the whole process so obtained — the *railway-line* process. Then Z satisfies all of (I) — (V) except (IV). But if we reflect Z we get pairs of antiparallel lines which lie always on each other's left, instead of on the rigt; and it follows from this that Z is not stationary under reflections, either strictly or to the second order.

We now associate to every $Z \in$ LP4 a Y-process, which will turn out to be a nonatomic random measure on the circle, second-order stationary under its rotations, and strictly stationary if Z is.

Definition: Let K^* be the class of binary-rational endpointed, clockwise half-open intervals I of the circle K. For $I \in K^*$, let $I^* \subset C$ be the shield of base I and height 1; we suppose that I^* is closed below and open above. Let T be the translation of the cylinder through height 1. Define

$$Y(I) = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{r=0}^{n} Z(T^r I^*)/(n+1).$$

This is a reasonable definition because, by Theorem 1, the sequence $Z(T^r I^*)$ is second-order stationary. By the assumption (III) on Z we have that $EY^2(K)$ is finite; and it is clear, by taking suittable subsequences of $\{n\to\infty\}$, that $Y(\cdot)$ is a monotone square — summable non-negative random set function on K^*. It is then a trivial matter to deduce, via the Riesz-Markov theorem, that we can extend Y in a unique manner to a random Borel measure on K. It is also trivial that Y inherits the stationarity (under rotations) of Z.

Proposition 6. *Y has a. s. no atoms.*

Proof. There exists a sequence $\{n_k \to \infty\}$ such that for all $I \in K^*$, Y is the a. s. limit of $\sum_{r=0}^{n} Z(T^r I^*)/(n+1)$; and so we can restrict attention to those realizations of Z for which all the a. s. limits exist (there are only countably many of them). Y can still be extended to a Borel measure on K. Suppose that Y has an atom at θ_0. It is clear that the atoms of Z not lying on the generator $\{\theta = \theta_0\}$ do not contribute, *via* the a. s. $(C, 1)$ limits, to our atom of Y. Therefore the only way there can arise an atom at θ_0 is that there be infinitely many atoms of Z on the generator $\{\theta = \theta_0\}$; but this would mean that there was in Z a whole sheet of parallel lines, which contradicts (IV). Q. e. d. We define the *intensity*, λ say, of Z, to be the mean number of points of Z in any set of m-measure 1; or equivalently, $\lambda = EZ(B_1)/4\pi$.

Theorem 2. *Given λ, the covariance measure μ of Z is deuermincd by that, ν say, of Y.*

Proof. It suffices to determine μ for congruent shields (as usual half-open) A and B of common length, a, in three cases:

(I) $\overline{I(A)} \cap \overline{I(B)} = \varnothing$; (II) $I(A) = I(B)$ or they are contiguous, but $A \cap B = \varnothing$; (III) $A = B$.

We may also, and do, demand that a be a binary rational.

In the first case we may, by shears and a translation and the limiting process used in the first part of Theorem 1, move A and B so that they coincide with the shields $a(I(A))^*$ and $a(I(B))^*$. In view of the definition of Y, and the fact that a is a binary rational, we have at once that $E\{Z(A)Z(B)\} = a^2E\{Y(I(A))Y(I(B))\}$. Using this, we may apply, in cases (II) and (III), the approximation method of the second part of the proof of Theorem 1, to obtain, in case (II), $E\{Z(A)Z(B)\} = a^2E\{Y(I(A))Y(I(B))\}$; while in case (III), $EZ^2(A) = = a^2EY^2(I(A)) + aEY(I(A)) = a^2EY^2(I(A)) + a\lambda|I(A)|$, where $|\cdot|$ is Lebesgue measure on the circle of unit radius. It follows that once we know λ, the covariance measure of Z is determined by that of its Y. Q. e. d.

C o r o l l a r y. *Given any $Z \in LP4$, there exists $Z^* \in LP4 \cap dsP$ with the same intensity and covariance measure.*

P r o o f. Given Z we have Y on K. Given Y on K construct Z^* on C as follows: the rate measure of Z^* is to be $\Lambda = Y \times l$, where is Lebesgue measure on the line; and Z^* is to be an inhomogeneous Poisson process with this rate measure. It is at once clear that Z^* satisfies (I) — (III). Further, Z^* gives rise to the same Y that we (and Z) started with, so the covariance measures of Z and Z^* are identical (by Theorem 2 and the fact that their intensities are obviously the same). Now since Y is continuous so is the rate measure of Z^*; which means that a. s. there will be no parallel lines in Z^* (contrariwise, there would be if Y did possess atoms, but it doesn't). So $Z^* \in$ LP4 (and LP5 if Z is). Q. e. d.

4. Existence of $Z \in$ LP4—dsP

P r o p o s i t i o n 7. *Let N be a pseudo-Poisson process on the linel Through each point of N put a line; the lines to have orientations independent of each other and N, and common density ∞ $\sin\Phi|$ (see fig. 1). Let Z be the line process so obtained. Then $Z \in LP4 - dsP$.*

P r o o f. By a pseudo-Poisson process we mean a strictly stationary point process on the line with stationary uncorrelated (but not independent) increments. Such processes have been constructed by Lee [6], Renyi [11] and Shepp [5]. Using the (x, Φ) representation of the lines of Z, it is easy to calculate the intensity and covariance measure of Z: on C, with the (p, θ) representation, these are $EZ(A) = \lambda m(A)$; $E\{Z(A)Z(B)\} = = \lambda m(A \cap B) + \lambda^2 m(A)m(B)$, where, if λ' is the expected number of N in interval of length 1, $\lambda' = 4\lambda$.

It is immediately clear that $Z \in$ LP4. Suppose $Z \in$ dsP. Then by Theorem 3 below, N is mixed Poisson. But a mixed Poisson process is ergodic if and only if it is the Poisson process; and the pseudo-Poison process N is ergodic but is, by construction, not Poisson. Q. e. d.

N o t e. For reasons which will appear in section 5, the Z constructed here does not belong to LP5.

Theorem 3. *Let $Z \in LP4 \cap dsP$. (I) Let Z have rate measure Λ. Then there is a version of Λ which is a product measure: $\Lambda = Y \times l$, where l is Lebesgue measure on the line. (II) If w is any line in the plane, then $N = Z \cap w$ is a mixed Poisson process; that is, there is a non-negative random variable v such that conditional on v, N is Poisson with rate v.*

Proof. We have from Theorem 2 that if A and B are congruent shields, then $E\{Z(A)\,Z(B)\} = a^2 E\{Y(I(A))\,Y\,(I(B))\} + EZ(A \cap B)$, where a is the common length of A and B. From this, and elementary calculations of the relation between the covariance measures of a doubly-stochastic Z and its rate measure Λ, we find that $E\{\Lambda(A)\Lambda(B)\} = a^2 E\{Y(I(A))\,Y(I(B))\}$. It follows at once that if A and B occupy the same generators, then $E\{\Lambda(A)\Lambda(B)\} = E\Lambda^2(A)$. Immediately, since their mean values are also the same, we have $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ a. s. Since Λ is continuous im mean square, this implies that we may choose a version of Λ that is a product measure of the form described. This proves (I).

Turning to (II), we first show that $Z \in$ dsP implies $N \in$ dsP (for the line). Now we may represent — with probability 1, by stationarity — Z on C', the (x, Φ) strip $\{-\infty < x < \infty,\ 0 < \Phi < \pi$ or $\pi < \Phi < 2\pi\}$. Further, Z is still constructed on C' by putting a random square-summable σ-finite Borel measure on C' and then putting on an inhomogeneous Poisson process with our random measure as rate. Then N is obtained from Z by mapping the point (x, Φ) down onto x. So we have the following diagram:

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\zeta"'] & Z \arrow[d, "\zeta"] \\ P \arrow[r, "\gamma'"] & N \end{tikzcd}$$

Fig. 2.

Here Λ is the rate measure of Z. γ and γ' are the operations of taking the inhomogeneous Poisson process, and ζ is the operation of integration over Φ. P is then a square-summable σ-finite Borel measure on the line; and, by considering rectangles on the strip, we see easily that the diagram is (not a. s., but in distribution) commutative. Thus N is indeed doubly-stochastic Poisson.

Clearly, N inherits the stationarity of Z; and the material motions of Z are

$(A)\ (x, \Phi) \to (x + d \tan \Phi, \Phi)$ (from translation of w perpendicular to its length);

$(B)\ (x, \Phi) \to (x + d, \Phi)$ (from translation of w along its length).

One shows, by methods similar to those of Theorem 1, that

1. If A and B are two rectangles of C' such that there is no generator common to A and B then for all real x we have $E\{Z(A)Z(B)\} = E\{Z(A)\,Z(B + x)\}$.

2. If A and B are two bands (sections transverse to its generators) of C', then for all real x we have

$$E\{Z(A)\,Z(B)\} - \lambda m(A \cap B) = E\{Z(A)\,Z(B+x)\} - \lambda m(A \cap (B+x)).$$

3. If I and J are any two intervals of the line, then for all real x we have $E\{N(I)\,N(J)\} - \lambda'|I \cap J| = E\{N(I)\,N(J+x)\} - \lambda'|I \cap (J+x)|$.

It is clear that 3. is an immediate deduction from 2., and that 2. will follow, under (IV), from 1. by the approximation method of the last part of the proof of Theorem 1. Again 1. may be proved using the motions (A) and (B) and the methods of the first part of the proof of Theorem 1.

Now that we have 3., we may apply the proof of (I) of the present Theorem to conclude that the measure P is such that for any two congruent intervals I and J on the line, $P(I) = P(J)$ a. s.. Consequently, P is a random multiple of Lebesgue measure, which is equivalent to saying that N is mixed Poisson. Q. e. d.

After this analysis there are two problems outstanding:

1. To find what restrictions are imposed on a random measure (second-order stationary on the line, say) by niceness of its covariance measure.

2. To characterize analytically the covariance measures of LP4′s (see Theorem 2). The first problem is of considerable interest in its own right but is not on the theme of this paper; we treat the second. First we observe that this problem is equivalent, by Theorem 2, to characterizing covariance measures of square-summable second-order stationary nonatomic random measures Y on the circle K.

Theorem 4. (I). *μ (on K) is the kernel measure of the covariance measure of such a Y if and only if $\mu = \alpha\mu'$, $\alpha > 0$ a constant, where μ' has no atoms and lies in the convex set D' of probability measures generated by the set Sqp' of squared probability measures without atoms on K. (A probability measure is called squared if it is of the form $\nu * \nu^*$, where $\nu^*(I) = \nu(-I)$ and ν is itself a probability measure.)*

(II). *Let $Z \in LP4$. Then there exists $Z^* \in LP5 \cap dsP$ having the same intensity and covariance measure, and Z^* is got as follows:*

(a) *take a certain random non-atomic probability measure on K;*

(b) *put an independent uniform rotation on this measure—call the result Y_0;*

(c) *take a random variable Λ, independent of the previous choices — Λ may take values 0 and Λ_0, with probabilities q and $p = 1 - q$;*

(d) *set $Y = \Lambda Y_0$, and let Z^* be the doubly-stochastic Poisson process with rate measure $Y \times l$.*

Before going through the proof, we observe that this theorem raises the question, When is a probability measure on K in D'?; and we naturally push this question back one stage, by asking When is a probability measure squared? Neither of these questions has been answered (so, far as I know), even for the more famous (but possibly more difficult) case where the measures are on the line. For that case, we may make the following remarks. Let p be a probability measure on the line and let f be its characteristic function. That p lie in the convex hull of the set of squared probability measures it is necessary that f be real and non-negative; and if p possesses atoms, one of them must be at the origin. p will lie in the convex hull in question if f has the form $f=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ (any real ch. f.), and p will be a squared measure if f is real and infinitely divisible, or if f is the square of a Polya characteristic function.

Proof of the theorem. We start with a Z and so also with its Y, which has a random Fourier sequence (F. S.) $\{b_n\}$ say: $b_n=\int e^{in\theta}\, Y(d\theta)$. We see at once that $E(b_0)=\lambda$, the intensity ot the process, whereas $E(b_n)=0$ for $n\neq 0$. Let M be the covariance measure of Y. Then by second-order stationarity of Y we may disintegrate M as $M=\mu\times\varkappa$, where $\varkappa$ is proportional to Lebesgue measure on K and μ is the kernel measure, also on K. Now we define the Fourier double sequence $\{a_{m,n}\}$ of M: $a_{m,n}=\int e^{in\theta-im\Phi}\, M(d(\theta,\Phi))$

$$=\int e^{in\theta-im\Phi}\, Y(d\theta)\, Y(d\Phi)=E(b_n\bar{b}_m).$$

Then, using the disintegration of M, it is clear that $a_{m,n}$ vanishes unless $m=n$, when we have $a_{n,n}=E(|b_n|^2)=a_n(\mu)$, say. For by the disintegration we have also $a_{n,n}=\int e^{in\psi}\,\mu(d\psi)$.

We now have obvious conditions on λ, viz. that $\lambda^2\leqslant a_0$ and $\lambda>0$ if $a_0>0$. We shall see later that these are the only relations between λ and the F. S. of μ.

Let L be the set of all totally finite non-negative measures on K; let Lp be the set of those of L whose total mass is 1. Let $Sq\subset L$ be the set of squared measures in L (the 'square roots' also lying in L), and let $Sqp=Sq\cap Lp$. We give L the topology of ordinary convergence of the F. S. 's. To put a prime (′) on any of these spaces is to restrict attention to the continuous measures in it. Let D be the closed convex hull of Sqp in L, and let D' be the closed convex hull of Sqp' in L' with the relative topology.

First we observe that $\mu\in L'$. For a. s. $Y\in L'$. Consequently, by the standard criterion for continuity of a measure on K, we have that $(C, 1)$ $\lim |b_n|^2=0$ a. s. Since Y is square-summable we may take expectations and interchange the limit and the expectation, to get $(C, 1)\lim a_n(\mu)=0$. Since all the a's are non-negative, we find that $(C, 1)\lim |a_n(\mu)|^2=0$ which means that μ is continuous.

We may suppose that μ is not the zero measure (which corresponds to a null process, so that the theorem is trivial). Let then $\mu' = \mu/a_0(\mu)$; then $\mu' \in Lp'$. Also, by the representation of the F. S. of μ, we have that $\mu' = \int\limits_{m \in Sq'} m p_0(dm)$, where p_0 is some probability measure on the Borel subsets of Sq' (which is itself a Borel subset of $[0, \infty[\times \times Sqp$, the latter being a compact metric spase); and $a_0(\mu') = = \int\limits_{m \in Sq'} a_0(m) p_0(dm) = 1$.

Now p_0 is not concentrated on the null measure z. Let its atom there then be a, $0 \leqslant a < 1$. Define p_1 on the Borel sets of Sq' by

$$p_1(A) = p_0((1-a)A - \{z\})/(1-a).$$

Then we have $\mu' = \int\limits_{m \in Sq' - \{z\}} m p_1(dm)$, and

$$\int\limits_{Sq'-\{z\}} a_0(m) p_1(dm) = (1-a)^{-1} \int\limits_{Sq'-\{z\}} a_0(m) p_0(d(1-a)m) = (1-a)^{-1}(1-a) = 1.$$

Now define p on Sqp' by, if $A \subset Sqp'$ (so that $A \times]0, \infty[\subset Sq'$),

$$p(A) = \int\limits_{A \times]0, \infty[} a_0(m) p_1(dm).$$

It is clear from the properties of p_1 just proved that p is a probability measure. We assert that $\mu' = \int\limits_{Sqp'} m^* p(dm^*)$. To show this we have to prove that for all n, $a_n(\mu') = \int\limits_{Sqp'} a_n(m^*) p(dm^*)$. But the right-hand side of this equals $\int\limits_{Sq'} a_n(m^*) a_0(m) p_1(dm)$, where m^* is m scaled to a probability; $= \int\limits_{Sq'} a_n(m) p_1(dm)$, by the definition of F. S. and the relations of m^* and m; $= a_n(\mu')$ by properties of p_1.
So we have exhibited μ' as a probability mixture of elements of Sqp'. It follows at once that $\mu' \in D'$.

We have now proved the first part of Theorem 4 (I). We shall now prove its (II) and the last part of (I) simultaneously. By the first part of (I), starting from any $Z \in$ LP4 we end up with a λ, an a_0 and a μ', such that λ and a_0 satisfy the conditions given earlier. So now let us start with λ and a_0 satisfying those conditions, and $\mu' \in D'$.

Since $\mu' \in D'$, μ' also lies in D, the closed convex hull of Sqp in Lp, so that D is compact. Therefore (see e. g. Phelps [10]) there exists a probability measure h on Sqp representing μ'. But if h puts positive mass on $Sqp - Sqp'$, μ' would have an atom at $\theta = 0$. Thus h must be concentrated on Sqp, that is, μ' is a probability mixture of elements $\nu * \nu^*$ of Sqp'. Thus we may sample, with respect to h, a probability measure $\nu \in Lp'$. We may then rotate it uniformly round K, obtaining a random strictly stationary probability measure Y_0 on K.

Now we have to deal with λ and a_0. Consider a random variable Λ taking the two values Λ_0 and 0 with probabilities p and $q = 1 - p$ respectivety. Then $E\Lambda = p\Lambda_0$; $E\Lambda^2 = p\Lambda_0^2$. So if we dilate Y_0 by Λ, we obtain $E(\Lambda Y_0(K)) = p\Lambda_0$; $E(\Lambda Y_0(K))^2 = p\Lambda_0^2$, since Y_0 has to be a probability measure and we assume that Λ and Y_0 are independent. Because of the conditions $\lambda^2 \leqslant a_0$, $\lambda > 0$ if $a_0 > 0$, we can solve the equations $p\Lambda_0 = \lambda$, $p\Lambda_0^2 = a_0$ for $\Lambda_0 > 0$ and the probability p, so that $\Lambda_0 = a_0/\lambda$ and $p = \lambda^2/a_0$. (If a_0 or λ vanishes they both do and we may take $\Lambda_0 = 0$, $p = 1$). Then if we put $Y = \Lambda Y_0$, we have $EY(K) = \lambda$, $EY^2(K) = a_0$; and in fact the kernel measure of the covariance measure of Y is, as desired, $a_0\mu' = \mu$. For the kernel measure of the covariance measure of Y_0, given ν, is computed as $\nu * \nu^*$; and then we take averages. Now if we put on Z^* as the doubly-stochastic Poisson process rate $Y \times 1$, $Z^* \in$LP5 and has the same intensity and covariance measure as Z. Q. e. d.

5. The big problem

Do there exist elements of LP5 — dsP?

The relevance of the previous work to this is that it might have been possible to prove that the covariance measures of the class dsP did not exhaust those of $LP5$. Howerer, as we have shown, this is not the case (it is the case for point processes on the line: see, e. g.., Bartlott [2]).

How might one try to construct elements of LP5?

1. By taking a point process on a fixed line and putting lines through its points.

2. By taking a stationary point process in the plane and putting lines through its points.

3. By tinkering with a Poisson line process.

We first look at 1. Clearly this is the general method of construction; but how are we to put the lines through the points of the point-pro-cess (which we call N, ano which has, of course, to be strictly stationary under shifts of the line)?

Proposition 7. *Let $Z \in LP5$ be constructed hy method 1, where the lines are put through the points with orientations independent of each other and N, and with a common continuous density. Then N is mixed Poisson and $Z \in dsP$.*

P r o o f. That N is mixed Poisson may be deduced from the work of Breiman [3], as strengthened by Thedéen [14]. It is easy to modify their work to show the following: Let N be a spatially strictly stationary summable process of cars (points) on a road (line), with velocities independent of each other and the positions on the cars and having a common density which is a. e. continuous and bounded on compacta. Then letting N_t be the process of cars as observed at time $t > 0$ $(N_0 = N)$, N_t converges in laws of finite-dimensional distributions to a mixed Poisson process as $t \to \infty$.

Applying this to our N, and observing that Z has to be stationary under translations of the fixed line through distances t perpendicular to its lengh, N (which is summable because Z is) must be mixed Poisson. By construction, then, $Z \in$ dsP. Q. e. d.

It is thus difficult to see how we should assign the orientations to the points of N to obtain a $Z \in -$LP5; and dsP this is as far as I have been able to take method 1. But in any case, we have the following condition on N:

P r o p o s i t i o n 8. *N has a second-order product-moment density which is a constant.*

P r o o f. The second-order product-moment density is defined (see Bartlett [1] by $g(x, y) = \lim EN(I)\,N(J)/|I||J|$, where I and J are congruent intervals with centres, and shrinking down to, x and y respectively $(x \neq y)$. (Of course if g turns out to exist and be a constant it can be defined for $x = y$ by continuity.) But from Theorem 3 (II) we know that so soon as I and J are so small that they are disjoint, the numerator of the limit in the definition of $g(x, y)$ is a constant times the product of the lengths of I and J. It is thus clear that $g(x, y)$ exists for N and is a constant. Now admittedly Theorem 3 (II) only applies to $Z \in$ dsP, but by Theorem 2 the covariance behaviour of these Z exhausts that of all $Z \in$ LP4, and so also that of all $Z \in$ LP5. Q. e. d.

We now turn to method 2. Let $(P, T) = \{x_i, \theta_i\}$ be a marked point process (in the sense of Matthes [7]) in the plane, the x_i being the points of P and the θ_i being the orientations assigned to them. We identify $Z \in$LP5 with (P, T) by constructing Z with lines going through the x_i with the orientations θ_i. We assume that (P, T) is strictly stationary under the rigid motions of the plane; in which case P is also stationary under these motions. Now P has to be locally square-summable, otherwise Z would certainly not be square-summable (consider those lines whose parent points lie in a convex compact region of non-square-summability of P). Consequently P is *well-distributed* in the sense of Goldman [5]. We assume throughout that P has a. s. infinitely many points.

P r o p o s i t i o n 9. *If T is a process of uniform orientations independent of each other and P, then Z puts a. s. infinitely many lines through each circle.*

Proof. Let the circle be of radius $r > 0$ and centre the origin O. Let the points of P lie at distances $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \cdots$ from O. Then, by P's being well-distributed, there exist positive constants (conditional on P) h and $k < h$ such that for all n, $|n^{-\frac{1}{2}} r_n - h| < k$.

Now the probability that the line whose parent point lies at a distance $d > r$ from 0 will pass through our circle is $(1/\pi) \sin^{-1}(r/d) \sim \sim (r/\pi d)$ as $d \to \infty$. But the incidences of different lines on our circle are independent; so we may apply the divergence case of the Borel-Cantelli lemmas, with

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/\pi) \sin^{-1}(r/r_n) > H. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \text{ for some } H = H(h, k) > 0$$

$$= \infty,$$

so that infinitely many of the lines of Z hit our circle. Q. e. d.

Now we look at the general case. It is clear, by simple addition, that the mean number of lines cutting any circle is infinite, so that method 2 cannot yield an LP4. But the problem of whether the actual number cutting any circle is infinite (even with positive probability) is of independent interest. We might proceed as follows:

The problem for the circle is clearly equivalent to that for a finite nonempty line segment, J say, forming part of some line w (say) in the plane. We divide the process Z up into sub-processes Z_n consisting of those lines of Z whose parent points lie between the distances n (inclusive) and $n+1$ (exclusive) from w. Those lines of Z whose parent points lie below (at negative distances from) w are from now on disregarded; if we can do without them so much the better. Then each Z_n is a marked point point process $\{x_i, y_i, \theta_i\}$ stationary under shifts of x, where x_i is the abscissa along w, y_i is the ordinate (lying in $[0, 1[$), and θ_i is the orientation assigned. Further, the Z_n have identical (but of course not independent) distributions. Let X, X_n be the Z-, Z_n-charges of J; let $Y_n = \sum_{r=0}^{n-1} X_r$. Then for all $t > 0$ $E \exp - -tX = \lim_{n\to\infty} E \exp - t Y_n = \lim_{n\to\infty} E \exp - t \sum_{r=0}^{n-1} X_r \leqslant \lim_{n\to\infty} (\prod_{r=0}^{n-1} E \exp - ntX_r)^{1/n}$, by repeated use of Hölder's inequality.

Now since all the X's are non-negative integers, we have

$$p(X_r = 0) = p_r \text{ (say)} \leqslant E \exp - ntX_r \leqslant p_r + \exp - nt. \text{ So}$$

$$E \exp - tX \leqslant \lim_{n\to\infty} (\prod_{r=0}^{n-1} (p_r + \exp - nt))^{1/n}.$$

Suppose that (and here is the gap) we have $p_r \leqslant 1 - c$ $(c > 0)$ uniformly in r; then the formula above gives

$$E \exp - tX \leqslant \lim_{n \to \infty} ((1 - c + \exp - nt))^{1/n}$$

$$\to 1 - c, \text{ independent of } t > 0.$$

It would follow at once, from the discontinuity of the Laplace-Stieltjes transform at the origin, that X was infinite with the positive probability c.

Now observe the point where there was the gap. In fact we do not there need that p_r should be bounded away from unity; it is sufficient that $\{p_r\} \to 0$ as $r \to \infty$, that is, that the X_r do not converge to zero in probability. Of course in the case discussed in Proposition 7 we actually have convergence of the p_r to a non-zero limit; and there are other cases, e. g. when equal orientations are permitted, where we can bridge the gap. Even in the general case the result required appears likely enough; even more so, when we consider a very slightly modified version of the problem in different terms. We omit the ordinates y_i from the marked point processes Z_n. Then Z_0 may be regarded as an array of cars on a road at time zero, spatially stationary and with a stationary array of speeds which remain constant in time. Z_n is then the same process of cars observed at time n, at least in distribution; and X_n is the number of cars in a fixed interval J of road at time n. Or we may take X_n to be the number of cars that pass a fixed observer between times n and $n+1$; one does not thereby change the problem of whether X_n converges to zero in probability.

Turning now to method 3, an obvious way of constructing non-doubly-stochastic Poisson processes in R^1 or R^2 is to take a Poisson process and then modify it in some way. For example, one may attach new points to the old ones. or to selected clusters of old ones; or subtract points from clusters, or change the geometry of clusters. and so on. Now the first of these methods only works because of the compactness of the group of rotations about the 'old point', so that we can make a coordinate-free stationary assignment of the new points to the old. With lines that have to be skew, this cannot be done. For clusters, the situation is vaguer, but the general trouble is that any line will appear in infinitely many clusters, so that if we are deleting lines independently from each cluster they will all disappear. On the other hand, if we are adding lines, it seems that clusters may be associated with points of R^2, and then — since these points will form a stationary process — the troubles of method 2 arise.

Thus we think at the moment that dsP does exhaust LP5. If this is so, of course, we may use Miles results' on distributions associated with the Poisson process to get expressions for the same distributions associated with any $Z \in$ LP5. For example, let ρ be the experimental intensity of Z: $\rho = \lim_{r \to \infty} Z(B_r)/4\pi r$. Let δ be the diameter of the incircle of a random polygon; then $\delta\rho$ has an exponential distribution with mean 2 (see [8]).

I am greatly indebted to Professor D. G. Kendall for proposing to me the topic of line-processes; and to Professor K. Krickeberg for his interest in the problems discussed here, leading to the decisive first proof of Theorem 1. Also I am very grateful to them and to Dr F. Papangelou for many fruitful conversations.

Trinity College, Cambridge, England Поступило 20.XII.1969

ՌՈԼԼՈ ԴԱՎԻԴՍՈՆ. Ուղիղների պատահական դաշտերի երկրորդ կարգի հատկությունները *(ամփոփում)*

Ապացուցված է մի շարք թեորեմներ հարթության վրա թույլ և ուժեղ իմաստով ստացիոնար ուղիղների դաշտերի մասին։ Հատուկ ուշադրություն է դարձվում ստացիոնար դաշտերի դասերի և այսպես կոչված կրկնակի ստոխաստիկ Պուասոնյան դաշտերի միջև եղած առնչությունները պարզաբանելու վրա։ Քննարկված է հետևյալ խնդիրը, որի լուծումը դեռևս գտնված չէ՝ գոյություն ունի արդյոք ուղիղների ուժեղ իմաստով ստացիոնար դաշտ, որը չի հանդիսանում կրկնակի ստոխաստիկ պուասոնյան դաշտ։

Р. ДАВИДСОН. *Построение полей случайных прямых и их свойства второго порядка* (резюме)

Доказан ряд теорем о стационарных в слабом и сильном смысле полях прямых на плоскости. Особое внимание уделяется выяснению соотношений между классами стационарных полей и классами так называемых дважды стохастических пуассоновских полей. Обсуждается задача, решение которой еще не найдено: существует ли стационарное в сильном смысле поле прямых, не являющееся дважды стохастическим пуассоновским полем.

REFERENCES

1. *M. S. Bartlett*. An introduction to stochastic processes, Cambridge, University Press, 1966.
2. *M. S. Bartlett*. The spectral analysis of point processes. J. Roy. Statist. Soc. (B), 25, 1963, 264 — 296.
3. *L. Breiman*. The Poisson tendency in traffic distrbution, Ann. Math. Statist, 34, 1963, 308 — 311.
4. *M. W. Crofton*, article „Probability" in Encyclopaedia Britannica, 9th edition, 1885, vol. XXI.
5. *J. R. Goldman*. Stochastic point precesses: limit theorems, Ann. Math. Statist. 38, 1967, 771 — 779; appendix by L. Shepp.
6. *P. M. Lee*. Some examples of infinitely divisible point processes, Studia Sci. Math-Hungarica 3, 1968, 219—224.
7. *K. Matthes*. Stationäre zufällige Punktfolgen I. Jahresbericht der D. M. V., 66. 1963, 66 — 79.
8. *R. E. Miles*. Random polygons determined by random lines in a plane, I, II. Proc. Nat. Acad. Sci. 52, 1964, (4) 901—907 and (5) 1157 — 1160.
9. *R. E. Miles*. Poisson flats in Euclidean space, To appear in Advances in Applied Probability.
10. *R. R. Phelps*. Lectures on Choquet's theorem, Princeton, Van Nostrand, 1966.
11. *A. Rényi*. Remarks on the Poisson process, Studia Sci., Math, Hungarica 2, 1967, 119—123.
12. *C. Ryll-Nardzewski*. Remarks on processes of calls, Proc. 4th. Berkeley symposium, vol. 2., University of California Press, 1961.
13. *L. A. Santaló*. Introduction to integral geometry, Act. Sci. Ind. 1198, Paris, Hermann, 1953.
14. *T. Thedéen*. A note on the Poisson tendency in traffic distribution, Ann. Math., Stutist., 35, 1964, 1823—1824.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

KLAUS HORNEFFER

EINE CROFTONFORMEL UND DER SATZ VON STOKES

Einleitung

Die Cauchy—Crofton—Formel der klassischen Integralgeometrie drückt den k-dimensionalen Inhalt einer orientierten k-demensionalen Untermannigfaltigkeit des R^n durch ein Integral über die Anzahl der Schnittpunkte mit $(n-k)$-dimensionalen affinen Teilräumen aus. Ist T das positive normierte k-Tangentialfeld der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit N, τ ihr Volumenelement, $G(n, n-k)$ die Mannigfaltigkeit der affinen orientierten $(n-k)$ — dimensionalen Teilräume des R^n, μ ein passend normiertes invariantes Maß auf $G(n, n-k)$, so kann die Cauchy—Crofton—Formel in der Form

$$\int\limits_N \tau = \int\limits_{G(n,\, n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \langle T, \tau \rangle_p \, \mu(dg) \tag{1}$$

geschrieben werden. Hierbei ist also $\langle T, \tau \rangle = 1$.

In dieser Arbeit wird eine Crofton—Formel behandelt, die sich von (1) in zweierlei Hinsicht unterscheidet. Zunächst bleibt die Gleichung (1) offenbar auch dann sinnvoll, falls man unter τ nicht das Volumenelement von N, sondern eine beliebige Differentialform k-ten Grades auf N (oder auf R^n) versteht. Weiter wird das k — Tangentialfeld T von N durch einen gewissen k — Normalenvektor des affinen Teilraums g ersetzt. Man erhält so eine neue Croftonformel für Integrale von Differentialformen über C^1 — Untermannigfaltigkeiten des R^n.

Mit Hilfe dieser Croftonformel wird ein integral-geometrischer Beweis des Satzes von Stokes gegeben. Dabei wird nur vorausgesetzt, daß die Untermannigfaltigkeit N von der Klasse C^1 ist und daß die Differentialform auf einer Umgebung von N definiert und dort ebenfalls C^1 ist. Die Darstellung des Integrals einer Differentialform mit Hilfe unserer Croftonformel gestattet es, den Satz von Stokes auf den Satz von Fubini zurückzuführen.

Durch einen Ausdruck ähnlich dem in unserer Croftonformel hat *Maak* ([4]) eine allgemeine Definition der Integrals einer Differentialform gegeben, für die der Satz von Stokes gilt. Als Integrationsbereiche führte er dabei gewisse Systeme von Teilmengen des R^n ein, die die für diese Definition benötigten Eigenschaften aufweisen. Absicht der vorliegenden Arbeit war es dagegen, die Tragweite eines solchen Vorgehens für differenzierbare Untermannigfaltigkeiten zu untersuchen. Das läuft gerade auf die Croftonformel und einen integral-geometrischen Beweis der Stokesformel hinaus.

§ 1. Dichte für k-Ebenen

Die Croftonformel, deren Beweis wir anstreben, ersetzt das Integral einer Differentialform über eine k — dimensionale Untermannigfaltigkeit des R^n durch ein Integral auf dem Raum der $(n-k)$-dimensionalen affinen Teilräume. Wir erläutern daher zunächst die hierfür benötigte Dichte.

Es sei E ein n-dimensionaler affiner orientierter euklidischer Punktraum. Unter einer k-Ebene in E verstehen wir für $0 < k < n$ einen orientierten k-dimensionalen affinen Teilraum von E. Eine o-Ebene sei ein Punkt von E, eine n-Ebene der Raum E selbst. Die Menge der k-Ebenen in E bezeichnen wir mit $G(E, k)$. Ist E der orientierte R^n, so schreiben wir kurz $G(n, k)$.

Auf $G(E, k)$ operiert die Bewegungsgruppe von E transitiv und effektiv; $G(E, k)$ kann mit dem homogenen Raum

$$\frac{iSO(n)}{iSO(k) \times SO(n-k)},$$

identifiziert werden und ist daher eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $(k+1)(n-k)$.

Unter einer Dichte auf einer n-dimensionalen C^r — Mannigfaltigkeit M $(r > 1)$ verstehen wir eine reelle Funktion auf dem Bündel $\overset{n}{\tau} M$ der n-Tangentialvektoren,

$$\rho: \overset{n}{\tau} M \to R,$$

mit $\rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v)$ für $\lambda \in R$. Ist ω eine Differentialform vom Grade n auf der Mannigfaltigkeit M, so wird eine (nicht-negative) Dichte $|\omega|$ definiert durch

$$|\omega|(v) := |\langle v, \omega \rangle| = |\omega(v)|.$$

Die in der klassischen Integralgeometrie betrachteten Dichten werden in der Regel auf diese Weise durch Differentialformen definiert.

Um eine bezüglich der Bewegungsgruppe von E invariante Dichte auf $G(E, k)$ explizit anzugeben, ist es zweckmäßig, folgendermaßen vorzugehen. Es sei für $0 < k < n$ $S_k(\mathsf{E})$ die Menge der normierten zerlegbaren k-Vektoren des Vektorraums E von E. $S_0(\mathsf{E})$ enthalte nur die Zahl 1, $S_n(\mathsf{E})$ nur den positiven normierten n-Vektor von E.

Ordnet man einem Element $e \in S_k(\mathsf{E})$ denjenigen k — dimensionalen Vektorraum zu, dessen Elemente die Gleichung

$$x \wedge e = 0$$

erfüllen und dessen Orientierung durch den k-Vektor e bestimmt ist, so liefert diese Abbildung eine Bijektion von $S_k(\mathfrak{E})$ auf die Grassmannmannigfaltigkeit der orientierten k-dimensionalen Teilvektorräume von $\mathfrak{E}$. Sie ist ein Isomorphismus der homogenen Räume der speziellen orthogonalen Gruppe von $\mathfrak{E}$. $S_k(\mathfrak{E})$ ist insbesondere eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$. Die Abbildung π,

$$\begin{array}{c} E \times S_k(\mathfrak{E}) \\ \downarrow \pi \\ G(E, k), \end{array}$$

$\pi(p, e) := p + \bar{e}$, die dem Paar (p, e) die k-Ebene durch p zuordnet, deren zugehöriger orientierter Vektorraum $\bar{e}$ durch e gegeben ist, definiert ein affines G^{ω} — Bündel über $G(E, k)$ (zum Begriff des affinen Bündels vgl. z. B. [2], S. 293). Das zugehörige Vektorraumbündel hat als Faser über $g \in G(E, k)$ gerade den Vektorraum von g. Die Projektion π ist mit den Operationen der Bewegungsgruppe von E verträglich.

Als homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt $S_k(\mathfrak{E})$ eine bezüglich der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(\mathfrak{E})$ invariante Dichte, die durch das Volumenelement $\nu_{\mathfrak{E}, k}$ definiert werden kann. Identifiziert man für $0 < k < n$ die Mannigfaltigkeit $S_k(\mathfrak{E})$ mit

$$\frac{SO(n)}{SO(k) \times SO(n-k)}$$

und bildet ω_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ die natürliche Basis der Maurer—Cartan — Formen von $SO(n)$, so gilt mit der Projektion $\pi_{\mathfrak{E}}$,

$$\begin{array}{c} SO(n) \\ \downarrow \pi_{\mathfrak{E}} \\ S_k(\mathfrak{E}), \end{array}$$

die Gleichung

$$\overset{*}{\pi}_{\mathfrak{E}} \nu_{\mathfrak{E}, k} = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}.$$

Auf $E \times S_k(\mathfrak{E})$ existiert eine kanonische Differentialform vom Grade $n-k$. Sei nämlich $(p, e) \in E \times S_k(\mathfrak{E})$. Dann existieren natürliche Vektorraumisomorphismen

$$\overset{n-k}{\tau}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathfrak{E})) \simeq \overset{n-k}{\bigwedge}(\mathfrak{E}_p E \oplus \tau_e S_k(\mathfrak{E}))$$

$$\simeq \bigoplus_{r=0}^{n-k} (\overset{n-k-r}{\bigwedge} \tau_p E \odot \overset{r}{\bigwedge} \tau_e S_k(\mathfrak{E})) = \bigoplus_{r=0}^{n-k} (\overset{n-k-r}{\tau_p} E \odot \overset{r}{\tau_e} S_k(\mathfrak{E}))$$

Die Projektion auf die erste Komponente bildet ein Element von $\overset{n-k}{\tau}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathfrak{E}))$ ab auf ein Element von $\overset{n-k}{\tau_p} E \simeq \overset{n-k}{\bigwedge} \mathfrak{E}$.

Ist T der positive normierte n-Vektor aus $\overset{n}{\bigwedge}\mathfrak{E}$ und bezeichnet $(\,|\,)$ die Metrik von $\mathfrak{E}$, so ist der $*$-Operator definiert durch $(* x|y) = (T|x \wedge y)$. Mit der Abbildung

$$\bigwedge^{n-k} \epsilon \to R,$$
$$v \mapsto (*^{-1} v|e),$$

erhalten wir schließlich eine R-lineare Abbildung

$$a_{E,k}|_{(p,e)}: \bigwedge^{n-k} \tau_{(p,e)}(E \times S_k(\epsilon)) \to R.$$

Offenbar ist $\alpha_{E,k}$ eine C^∞— Differentialform vom Grad $n-k$ au $E \times S_k(\epsilon)$.

Mittels der auf $E \times S_k(\epsilon)$ zurücktransportierten $k(n-k)$-Form $\nu_{\epsilon,k}$ definieren wir

$$\tilde{\Omega}_{E,k}: = \alpha_{E,k} \wedge \overset{*}{pr_2} \nu_{\epsilon,k},$$

Man sieht leicht, daß $\tilde{\Omega}_{E,k}$ invariant bezüglich der Bewegungsgruppe $iSO(E)$ und projizierbar (wahlinvariant) ist; es existiert daher genau eine C^∞-Differentialform $\Omega_{E,k}$ auf $G(E, k)$ mit

$$\pi^* \Omega_{E,k} = \tilde{\Omega}_{E,k}.$$

Durch $\mu_{E,k}: = |\Omega_{E,k}|$ wird dann eine invariante Dichte auf $G(E, k)$ definiert. Für $\mu_{R^n,k}$ schreiben wir kurz $\mu_{n,k}$, analog $\nu_{n,k}$ und $\Omega_{n,k}$.

Wir bemerken noch, daß die Definition von $\Omega_{E,k}$ funktoriell ist. Ist u: $E \to F$ ein Isomorphismus der orientierten euklidischen Räume, so induziert u einen Diffeomorphismus $G(E, k) \to G(F, k)$, der $\Omega_{F,k}$ in $\Omega_{E,k}$ überführt.

§ 2. Die Croftonformel

Für den Beweis unserer Croftonformel benötigen wir den Satz über die Transformation eines Integrals für den Fall, daß die Abbildung der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeiten kein globaler Diffeomorphismus ist. Wir formulieren ihn in folgender Weise.

Satz 2.1. Seien N eine kompakte C^1— Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand, M eine parakompakte C^1— Mannigfaltigkeit mit dim $M =$ dim N, $\varphi: N \to M$ eine C^1— Abbilidung, ρ eine Dichte auf M, f eine Funktion auf N derart, daß $f \overset{*}{\varphi}\rho$ über N integrierbar ist. Sei für $q \in \varphi(N)$

$$F(q): = \sum_{p \in \varphi^{-1}(\{q\})} f(p).$$

Dann ist $F\rho$ über $\varphi(N)$ integrierbar und es gilt

$$\int_N f \overset{*}{\varphi}\rho = \int_{\varphi(N)} F\rho.$$

Beweis. Der Satz wird auf die entsprechende lokale Aussage im R^n zurückgeführt, die man etwa in [3], S· 243 findet. Man kann sie auch leicht aus dem gewöhnlichen Transformationssatz für C^1 — Diffeomorphismen herleiten. Mit Hilfe von Partitionen der Eins überträgt man die lokale Aussage auf den Fall, daß φ ein C^1 — Abbildung φ: $N \to M$ für $\dim N = \dim M = n$ mit Rang $\varphi = n$ in ganz N ist.

Ist diese zusätzliche Voraussetzung nicht erfüllt, kann man so schließen. Für kritische Punkte $p \in N$ ist $\dot{\varphi}\mathfrak{p}|_p = 0$. Die regulären Punkte bilden eine offene Untermannigfaltigkeit N_0 von N, auf der also Rang $\varphi = n$ ist. Also gilt

$$\int_N f\,\dot{\varphi}\mathfrak{p} = \int_{N_0} f\,\dot{\varphi}\mathfrak{p} = \int_{\varphi(N_0)} F\mathfrak{p}.$$

Nach dem Satz von Sard ([5], S. 47) bilden die kritischen Werte von φ eine Nullmenge, daher ist $\int_{\varphi(N_0)} F\mathfrak{p} = \int_{\varphi(N)} F\mathfrak{p}$, q. e. d.

Definition 2.2. Sei N eine orientierte k-dimensionale C^1—Untermannigfaltigkeit des R^n, und T ihr positives normiertes k-Tangentialfeld. Für $g \in G(n, n-k)$ sei $V(g)$ das positive k-Normalenfeld auf g, m. a. W. ist $g = p + \bar{e}$, so sei $V(g) = *e$. Sei die Abbildung

$$\varepsilon: N \times G(n, n-k) \to \{-1, 0, +1\}$$

erklärt durch

$$(p, g) \mapsto \operatorname{sgn}\ (V(g) \mid T_p).$$

Durch $\varepsilon(p, g)$ wird der Punkt $p \in g \cap N$ orientiert, falls g nicht tangential zu N in p ist. Allgemeiner sei die Orientierung eines Durchschnitts $h \cap N$ für $h \in G(n, p)$ durch folgende Vorschrift festgelegt. Das innere Produkt zwischen r- und s-Vektoren des euklidischen Vektorraums $\mathfrak{E}$ mit der Metrik $(\,|\,)$ wird definiert durch

$$(x|y \,\lrcorner\, z) = (x \wedge y|z) \quad \text{und} \quad (z \,\llcorner\, y|x) = (z|y \wedge x)$$

für $x \in \overset{s-r}{\bigwedge}\mathfrak{E}, y \in \overset{r}{\bigwedge}\mathfrak{E}, z \in \overset{s}{\bigwedge}\mathfrak{E}$. Diese Definition überträgt sich sofort auf k-Vektorfelder und Differentialformen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Für fast alle $h \in G(n, l)$ ist $h \cap N$ leer oder eine $(k+l-n)$—dimensionale Untermannigfaltigkeit von M (Diese keineswegs triviale Aussage kann man z. B. mittels des Satzes von Sard zeigen.). Sei für ein festes h das letztere der Fall. Dann ist $\dim\ (h \cap \tau_p N) = k + l - n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für das k-Tangentialfeld T von N gilt $V_p(h) \,\lrcorner\, T_p \neq 0$ (vgl. [1], S. 112). Man kann daher eine Orientierung von $h \cap N$ dadurch definieren, daß man das $(k+l-n)$—Vektorfeld $V(h) \,\lrcorner\, T$ positiv nennt.

Wir bezeichnen mit $O_{n,k}$ das Volumen der orientierten Grassmannmannigfaltigkeit $S_k(R^n)$. Dann ist $O_{n,1} = O_n$ das Volumen der $(n-1)$-Sphäre in R^n und allgemeiner für $1 < k < n$

$$O_{n,k} = \frac{O_n \cdot O_{n-1} \cdots O_{n-k+1}}{O_2 O_3 \cdots O_k}.$$

Damit lautet unsere Groftonformel:

Satz 2.3. Es sei N eine orientierte kompakte k-dimensionale C^1 — Untermannigfaltigkeit des R^n mit oder ohne Rand. Ist ω eine C^r — Differentialform ($r > 0$) vom Grad k in R^n, so gilt

$$\int_N \omega = \frac{\binom{n}{k}}{O_{n,k}} \int_{G(n,\,n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,\, g) < V(g),\, \omega >_p \mu_{n,\,n-k}(dg).$$

Beweis. Sei $\tilde{N} := \{(p,\, g) \mid p \in g \cap N,\ g \in G(n,\, n-k)\}$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & N\times S_{n-k}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "(\iota,\mathrm{id})"] \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[d] & \mathbb{R}^n\times S_{n-k}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\pi"] & S_{n-k}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "*"] \\
N & \tilde{N} \arrow[l, "pr_1"] \arrow[r, "pr_2"'] & G(n,n-k) \arrow[r, "V"'] \arrow[ur, "\gamma"'] & S_k(\mathbb{R}^n)
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung π: $(p,\, e) \mapsto p + \bar{e}$ wurde auf S. 3 definiert; da $*$ invertierbar ist, ist $\gamma := \overset{-1}{*} \circ V$ erklärt; ι ist die Einbettung $N \hookrightarrow R^n$.

Es existiert nun genau eine Abbildung

$$\Psi: N \times S_{n-k}(R^n) \to \tilde{N},$$

so daß alle Teildigaramme kommutativ sind. Offenbar muß dazu

$$\Psi(p,\, e) = (p,\, p + \bar{e})$$

sein. Ψ ist eine Bijektion. Denn sei für $(p,\, g) \in \tilde{N}$

$$\chi(p,\, g) := (p,\, \gamma(g))$$

gesetzt. Dann ist $\Psi \circ \chi(p,\, g) = (p,\, p + \overline{\gamma(g)}) = (p,\, g)$, da $p + \overline{\gamma(g)}$ diejenige k-Ebene durch p ist, deren orientierter Vektorraum gerade durch $\gamma(g)$ bestimmt ist. Außerdem ist $\chi \circ \Psi\ (p,\, e) = (p + \bar{e})) = (p,\, e)$.

Wir können daher $\tilde{N}$ zu einer C^1 — Mannigfaltigkeit machen, indem wir verlangen, daß Ψ ein Diffeomorphismus sein soll. Dann sind auch die Abbildungen pr_1 und pr_2 auf $\tilde{N}$ stetig differenzierbar. Außerdem ist dim $\tilde{N} =$ dim $N +$ dim $S_{n-k}(R^n) = k + k(n-k) = k(n-k+1) =$ dim $G(n,n-k)$.

Die Funktion $\varepsilon < V,\, \omega >$ ist auf $N \times G(n,\, n-k)$, also auch auf $\tilde{N}$ erklärt, außerdem fast überall stetig. Wir können daher das Integral

$$I := \int_{\tilde{N}} \varepsilon < V,\, \omega > pr_2^* \mu = \int_{\Psi(N \times S_{n-k}(R^n))} \varepsilon < V,\, \omega > pr_2^* \mu$$

betrachten, wobei $\mu = \mu_{n,\, n-k}$ gesetzt ist. Der gewöhnliche Transformationssatz liefert

$$I = \int\limits_{N \times S_{n-k}(R^n)} (\varepsilon < V,\ \omega >) \circ \Psi \cdot \Psi^* pr_2^* \mu.$$

Es ist $(\varepsilon < V,\ \omega >) \circ \Psi (p,\ e) = \operatorname{sgn} (*\ e | T_p) < *e,\ \omega_p >$. Andererseits ist

$$\Psi^* pr_2^* \mu = (\iota,\ id)^* \pi^* \mu = |\,(\iota, id)^* \bar{\Omega}| = |(\iota,\ id)^* \alpha \wedge pr_2^* \nu|$$

$$\text{und } < v,\ (\iota,\ id)^* \alpha_{(p,\, e)} > = < (\iota,\ id)_{*(p,\, e)}\, v,\ \alpha_{(p,\, e)} >$$

$$= << v,\ pr_1^* \tau_p > T_p,\ \alpha_{(p,\, e)} > = < v,\ pr_1^* \tau_p > (T_p |\ *^{-1} e)$$

$$= < v,\ (*^{-1} e | T_p)\, pr_1^* \tau_p > \text{ nach § 1, S. 3,}$$

falls τ das Volumenelement von N bezeichnet. Also folgt

$$\Psi^* pr_2^*|_{(p,\, e)} = |(*^{-1} e | T_p))| \cdot |pr_1^* \tau \wedge pr_2^* \nu|_{(p,\, e)}$$

und damit

$$I = \int\limits_{N \times S_{n-k}(R^n)} (*\ e | T_p) < *\ e,\ \omega_p > \tau(dp)\, \nu(de)$$

und mittels des Satzes von Fubini

$$I = \int\limits_N \tau \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} (*\ e | T) < *\ e,\ \omega > \nu(de).$$

Um das Integral über $S_{n-k}(R^n)$ auszuwerten, betrachten wir die Abbildung

$$b:\ \overset{k}{\wedge} R^n \times \overset{k}{\wedge} R^n \to R$$

$$b(x,\ y) = \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} (*\ e | x)\, (*\ e | y)\, \nu(de).$$

b ist eine symmetrische Bilinearform, die invariant bezüglich $SO(n)$ ist, da ν es ist. Also ist $b(x,\ y) = c\,(x | y)$ mit einer Konstanten c, für die

$$c = \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} (*\ e | z)^2 \nu(de)$$

für irgendeinen normierten k-Vektor z gilt. Setzen wir für z nacheinander die Vektoren einer orthnonormierten Basis von $\overset{k}{\wedge} R^n$ ein, so folgt-

$$c = \frac{1}{\binom{n}{k}} \int\limits_{S_{n-k}(R^n)} \nu = \frac{O_{n,\, n-k}}{\binom{n}{k}} = \frac{O_{n,\, k}}{\binom{r}{k}}.$$

Wir erhalten

$$I = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}} \int_{\tilde N} \tau < T, \omega > = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}} \int_{\tilde N} \omega,$$

da $\tau \odot T$ auf N den Einsoperator darstellt.

Wenden wir den Transformationssatz 2.1 auf die Abbildung pr_2: $\tilde N \to G(n, n-k)$ an, so erhalten wir sofort die Aussage des Satzes. q. e. d.

§ 3. Dichte für inzidierende k- und l-Ebenen

Wesentliches Hilfsmittel für den integralgeometrischen Beweis der Stokesformel ist die Mannigfaltigkeit inzidierender k- und l-Ebenen und ihre invariante Dichte.

Ist E ein orientierter euklidischer Punktraum, dim $E = n$, $0 \leqslant k \leqslant \leqslant l \leqslant n$, so sei

$$G(E, k, l) := \{(g, h) \mid g \in G(E, k),\ h \in G(E, l),\ g \subset h\}.$$

Auf $G(E, k, l)$ operiert die Bewegungsgruppe $iSO(E)$ transitiv; $G(E, k, l)$ kann mit dem homogenen Raum

$$\frac{iSO(n)}{iSO(k) \times SO(l-k) \times SO(n-l)}.$$

identifiziert werden und ist damit eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $(l+1)(n-l) + (k+1)(l-k)$. Invariante Dichten auf $G(E, k, l)$ lassen sich leicht beschreiben, indem man $G(E, k, l)$ als Faserbündel über $G(E, k)$ bzw. $G(E, l)$ betrachet.

Es ist

$$\begin{array}{c} G(E, k, l) \\ \downarrow pr_1 \\ G(E, k) \end{array}$$

ein C^∞ — Faserbündel mit typischer Faser $S_{l-k}(R^{n-k})$ und Strukturgruppe $SO(n-k)$, außerdem ist die Bündelstruktur mit der Operation von $iSO(n, k)$ verträglich. Auf $S_{l-k}(R^{n-k})$ haben wir die bezüglich $SO(n-k)$ invariante $(l-k)(n-l)$ — Form $\nu_{n-k,\, l-k}$ (das Volumenelement) und auf dem Basisraum $G(E, k)$ die unter $iSO(E)$ invariante $(k+1)(n-k)$— Form $\mu_{E,k}$. Da $\nu_{n-k,\, l-k}$ invariant ist, existiert genau eine Dichte $\mu_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$, derart daß eine lokale Trivialisierung

$$pr_1^{-1}\, U \to U \times S_{l-k}(R^{n-k})$$

eines differenzierbaren Bündelatlas das Produkt der Dichten $\mu_{E,k}$ und $|\nu_{n-k,\, l-k}|$ in $\mu_{E,k,l}$ überfürht. $\mu_{E,k,l}$ ist dann invariant unter $iSO(n)$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir eine invariante Dichte $\mu_{E,k,l}$, falls wir das Bündel

$$\begin{array}{c} G(E, k, l) \\ \downarrow pr_2 \\ G(E, l) \end{array}$$

betrachten. Die typische Faser ist hier $G(l, k)$, die Strukturgruppe $iSO\,(l)$. Die Dichten $\mu_{l,k}$ auf $G(l, k)$ und $\mu_{E,l}$ auf $G(E, p)$ definieren eine invariante Dichte $\mu'_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$.

Als homogener Raum kann $G(E, k, l)$ bis auf einen konstanten Faktor höchstens eine invariante Dichte besitzen; es ist also $\mu'_{E,k,l} = \mu_{E,k,l} \cdot c$ mit einer Konstanten $c > 0$. Wir zeigen in § 5, daß diese Konstante 1 ist.

Für die Integration auf $G(E, k, l)$ bezüglich $\mu_{E,k,l}$ gilt ein Satz von Fubini. Denn in einer lokalen Produktdarstellung von $G(E, k, l)$ ist $\mu_{E,k,l}$ ein Produktmaß. Man kann sogar $G(E, k, l)$ bis auf eine Nullmenge als Produkt $G(E, k) \times S_{l-k}(R^{n-k})$ bzw. $G(E, l) \times G(l, k)$ schreiben. Es gilt daher der

Satz 3.1 Es sei f eine integrierbare Funktion auf $G(E, k, l)$. Für $g \in G(E, k)$ sei der zum Vektorraum von g senkrechte komplementär orientierte Vektorraum mit $g^{\perp}$ bezeichnet und für $e \in S_{l-k}(g^{\perp})$ sei $h(e)$ der von g und e aufgespannte orientierte affine Teilraum aus $G(E, l)$. Dann ist

$$\int\limits_{G(E,k,l)} f(g, h)\,\mu_{E,k,l}(d(g, h)) =$$

$$= \int\limits_{G(E,k)} \Bigg(\int\limits_{S_{l-k}(g^{\perp})} f(g, h(e))\,\nu_{g^{\perp},\,l-k}(de) \Bigg) \mu_{E,k}(dg) =$$

$$= \int\limits_{G(E,l)} \Bigg(\int\limits_{G(h,k)} f(g, h)\,\mu_{h,k}(dg) \Bigg) \mu_{E,l}(dh).$$

§ 4. Integralgeometrischer Beweis der Stokesformel

Um die allgemeine Stokesformel zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß das Integral einer Differentialform über den Rand ∂N einer $(k+1)$—dimensionalen C^1 — Untermannigfaltigkeit N des R^n in ein Integral über den Raum $G(n, n-k-1, n-k) := G(R^n, n-k-1, n-k)$ übergeführt werden kann. Der Rand ∂N der Untermannigfaltigkeit N werde dabei wie üblich so orientiert, daß gilt: Ist w ein positiver k — Tangentialvektor von N in p, v ein äußerer Tangentialvektor von N in p, so ist $v \wedge w$ ein positiver $(k+1)$ — Tangentialvektor von N in p. Ist $h \in G(n, k)$, $g \in G(n, l)$, $l < k$, so bezeichne $V^h(g)$ das in h zu g totalsenkrechte normierte konstante $(k-p)$ — Vektorfeld in R^n. Speziell ist also $V^{R^n}(g) = V(g)$.

Satz 4. 1. Es sei $0 \leqslant k < n$. Ist N eine kompakte orientierte $(k+1)$ — dimensionale C^1—Untermannigfaltigkeit von R^n mit orientiertem Rand ∂N; ist ω eine C^1 — Differentialform k-ten Grades auf R^n, so gilt

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{G(n,\,n-k-1,\,n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,\,g)\; V_p^h(g) \langle V(h),\,\omega\rangle \mu_{n,\,n-k,\,m-k}(d\,(g,\,h)).$$

Beweis. Nach Satz 2.3 gilt

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}}{O_{n,k}} \int_{G(n,\,n-k)} \sum_{p \in h \cap \partial N} \varepsilon(p,\,h) \langle V(h),\,\omega\rangle_p\, \mu_{n,\,n-k}(dh).$$

Nun gibt $p \mapsto \varepsilon(p,\,h)$ gerade eie Orientierung von $h \cap \partial N = \partial(h \cap N)$ falls $h \cap N$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von N ist. Für fast alle $h \in G(n,\,n-k)$ gilt daher

$$\sum_{p \in h \cap \partial N} \varepsilon(p,\,h) \langle V(h),\,\omega\rangle_p = \int_{h \cap N} d\iota^* \langle V(h),\,\omega\rangle,$$

falls $\iota\colon h \cap N \longrightarrow R^n$ die Einbettung bedeutet.

Wiederum nach Satz 2.3 gilt

$$\int_{h \cap N} d\iota^* \langle V(h),\,\omega\rangle = \frac{n-k}{O_{n-k}} \int_{G(h,\,n-k-1)} \sum_{p \in g \cap (h \cap N)} \varepsilon^h(p,\,h)\, V_p^h(g) \langle V(h),\,\omega\rangle (dg).$$

Hierin ist $\varepsilon^h(p,\,h) = \operatorname{sgn}(V^h(g)|S)_p$, wenn S positives normiertes Tangentialfeld von $h \cap N$ ist. Dies ist aber gerade $V(h) \lrcorner T$, also ist $\varepsilon^h(p,\,g) = \operatorname{sgn}(V^h(g) \wedge V(h)|T)_p$.

Nun ist $V^h(g) \wedge V(h) = V(g)$. Denn sei $g = p + \bar{e}$, $h = p + \bar{f}$. Dann ist $V(g) = * e$, $V(h) = * f$ und $V^h(g) = f \llcorner e$. Da $g \subset h$ ist, gilt $(f \llcorner e) \wedge * f = *((f \llcorner e) \lrcorner f) = * e$ (vgl. [1], S. 108, 109). Also ist $\varepsilon^h(p,\,g) = \operatorname{sgn}(V(g)|T)_p = \varepsilon(p,\,g)$.

Wir erhalten also

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{G(n,\,n-k)} \mu_{n,\,n-k}(dh) \int_{G(h,\,n-k-1)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,g)\, V_p^h(g) \langle V(h),\omega\rangle \mu_{h,\,n-k-1}(dg).$$

Nach 3.1. ergibt der Satz von Fubini, angewandt auf das Faserbündel $G(n,\,n-k-1,\,n-k) \xrightarrow{pr_2} G(n,\,n-k)$

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{G(n,\,n-k-1,\,n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,g)\, V_p^h(g) \langle V(h),\omega\rangle \mu_{n,\,n-k-1,\,n-k}(d\,(g,\,h)).$$

q. e. d.

Um das Integral auf $G(n,\,n-k-1,\,n-k)$ in ein Integral auf N umzuformen, betrachten wir das Faserbündel $G(n,\,n-k-1,\,n-k) \xrightarrow{pr_1} G(n,\,n-k-1)$. Da $V(h) = V(g) \llcorner V^h(g)$ ist, folgt mit Satz 3.1 und Satz 4. 1

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k}\,O_{n-k}} \int_{O(n,\,n-k-1)} \sum_{p \in g \cap N} s(p,g)\,\mu_{n,\,n-k-1}(dg) \int_{S_1(g^\perp)} e\langle V(g) \llcorner e, \omega\rangle\, \nu_{g^\perp,1}(de).$$

Hierin ist $g^\perp$ der zum Vektorraum von g komplementäre Vektorraum und $e \in g^\perp$ ist mit dem konstanten Vektorfeld, das e auf R^n definiert, identifiziert. Nach Satz 2.3 ist

$$\int_N d\omega = \frac{\binom{n}{k+1}}{O_{n,\,k+1}} \int_{O(n,\,n-k-1)} \sum_{p \in g \cap N} s(p,\,g) \langle V(g),\, d\omega\rangle_p\, \mu_{n,\,n-k-1}(dg).$$

Falls wir noch zeigen, daß mit einer Konstanten c gilt

$$\langle V(g),\, d\omega\rangle = c \int_{S_1(g^\perp)} e\langle V(g) \llcorner e,\ \omega\rangle\, \nu_{g^\perp,1}(de),$$

ist die Stokesformel bewiesen. Hierbei muß

$$c = \frac{\binom{n}{k}\ (n-k)}{O_{n,\,k}\,O_{n-k}}\ \frac{O_{n,\,k+1}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{O_{k+1}}$$

sein. Wir beweisen dazu das folgende

L e m m a 4.2. Es sei ω eine C^1 — Differentialform $(n-1)$-ten Grades in R^n, S^{n-1} die $(n-1)$ — Sphäre in R^n, O_n ihr $(n-1)$ — dimensionales Volumen, ν ihr Volumenelement. Ist $W \in \tilde{\bigwedge} R^n$, so gilt

$$\frac{n}{O_n}\int_{S^{n-1}} e\langle W \llcorner e,\ \omega\rangle\, \nu(de) = \langle W,\ d\omega\rangle.$$

B e w e i s. Sei τ das Volumenelement des R^n. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\langle W,\ \tau\rangle = 1$ ist. Dann lautet die Behauptung

$$\frac{n}{O_n}\int_{S^{n-1}} e\langle * e,\ \omega\rangle \nu(de) = * d\omega.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi:\ \omega \mapsto \frac{n}{O_n}\Big(\int_{S^{n-1}} e\langle *e, \omega\rangle\, \nu(\mathrm{de})\Big)\tau.$$

φ ordnet jeder C^1 — Differentialform $(n-1)$ — ten Grades eine C^0-Form n-ten Grades zu. Offenbar ist φ R-linear. Ist f eine C^1 — Funktion, so gilt

$$\varphi(f\omega) = f\varphi(\omega) + \frac{n}{O_n}\Big(\int_{S^{n-1}} \langle e,\ df\rangle \langle *\ e, \omega\rangle\, \nu(de)\Big)\tau.$$

Wie beim Beweis des Satzes 2.3 ergibt sich, daß für $x,\ y \in R^n$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} (e|x)\,(e|y)\,\nu(de) = \frac{O_n}{n}\,(x|y).$$

Da $(df|\,*^{-1}\omega)\,\tau = (*\,df|\omega)\,\tau = (W \llcorner df|\omega)\tau = (W|df\wedge\omega)\,\tau = df\wedge\omega$ ist, folgt

$$\varphi(f\varphi) = f\varphi(\omega) + df\wedge\omega. \tag{1}$$

Für $\omega^i = dx^1\wedge\cdots\wedge dx^i\cdots\wedge dx^n$ ist

$$\langle *\,e,\omega^i\rangle = \langle e,\ *^{-1}\omega^i\rangle = \langle e,\ (-1)^{i-1}dx^i\rangle = (-1)^{i-1}(e|\mathfrak{n}_i),$$

also konstant. Daher ist

$$\varphi(\omega^i) = o. \tag{2}$$

Die einzige R-lineare Abbildung von $(n$-1)-Formen auf n-Formen, die (1) und (2) erfüllt, ist die äußere Differentiation. Daher ist $\varphi(\omega) = r\omega$. q. e. d.

Damit ist der Beweis der Stokesformel vollendet, falls wir noch zeigen, daß die Dichten $\mu_{E,\,k,\,l}$ und $\mu'_{E,\,k,\,l}$ auf $G(E,\,k,\,l)$ tatsächlich übereinstimmen, wie wir oben behauptet haben. Das soll im nächsten Paragraphen geschehen. Wir stellen die Voraussetzungen, unter denen die Stokesformel bewiesen wurde, noch einmal zusammen.

S a t z 4.3. Es sei N eine orientierte $(k+1)$-dimensionale C^1—Untermannigfaltigkeit des R^n, ∂N ihr orientierter Rand. Ist ω eine C^1-Differentialform vom Grade k auf R^n, so gilt die Stokesformel

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega.$$

§ 5. Vergleich der Dichten auf $G(E,\,k,\,l)$

Will man den Satz benutzen, daß auf einem homogenen Raum höchstens ein invariantes Maß existiert, so kann man, um die Gleichheit der Dichten $\mu_{E,\,k,\,l}$ und $\mu'_{E,\,k,\,l}$ zu zeigen, folgendermaßen vorgehen. Setzt man nur voraus, daß mit einer Konstanten $c>0$ gilt $\mu_{E,\,k,\,l} = c\cdot\mu'_{E,\,k,\,l}$, so liefert die integralgeometrische Methode des § 4 die Stokesformer nur bis auf die Konstante c. Diese kann man aus einer speziellen Situation (etwa durch Integration über eine Sphäre) zu 1 bestimmen.

Wir wollen jedoch den allgemeinen Satz vermeiden und die Gleichheit der beiden Dichten direkt zeigen. Sei dazu zunächst $V_n(\mathfrak{E})$ die Stiefel—Mannigfaltigkeit der positiven orthonormierten n-Beine von $\mathfrak{E}$. Wir betrachten das Bündel

$$\begin{array}{c} E\times V_n(\mathfrak{E}) \\ \downarrow \pi' \\ E\times S_k(\mathfrak{E}) \end{array}$$

mit $\pi'(p, e_1, \cdots, e_n) := (p, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k)$. π' ist mit der Operation der Bewegungsgruppe von E verträglich. $E \times V_n(\mathfrak{E})$ kann mit der Bewegungsgruppe $iSO(n)$ identifiziert werden. Überträgt man die natürliche Basis der Maurer—Cartan—Formen von $iSO(n)$ auf $E \times V_n(\mathfrak{E})$, so erhält man invariante Differentialformen ω_{ij}, die wie folgt definiert werden können. Es sei f_i diejenige Abbildung $E \times V_n(\mathfrak{E}) \to \mathfrak{E}$, die dem Element $(p, e_1, \cdots, e_n)$ den Vektor e_i zuordnet. Dann ist

$$\omega_{ij} = (df_i | f_j), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n,$$
$$\omega_{0j} = (dpr_1 | f_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Hilfssatz 5.1. Sei $\widetilde{\Omega}_{E,k}$ die kanonische $(k+1)(n-k)$ — Form auf $E \times S_k(\mathfrak{E})$. Dann gilt

$$\pi'^* \widetilde{\Omega}_{E,k} = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}.$$

Beweis. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \times V_n(\mathfrak{E}) & \xrightarrow{pr_2} & V_n(\mathfrak{E}) \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow \\ E \times S_k(\mathfrak{E}) & \xrightarrow{pr_2} & S_k(\mathfrak{E}) \end{array}$$

kommutiert, folgt aus der Definition von $\nu_{\mathfrak{E},k}$

$$\pi'^* pr_2^* \nu_{\mathfrak{E},k} = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij} \qquad \text{(vgl. S. 3).}$$

Wir müssen daher noch $\pi'^* \alpha_{E,k} = \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{0j}$ zeigen.

Sei dazu $v = v_{k+1} \wedge \cdots \wedge v_n$ ein zerlegbarer $(n-k)$ — Tangentialvektor von $E \times V_n(\mathfrak{E})$ im Punkt $(p, e_1, \cdots, e_n)$. Dann ist

$$\langle v, \pi'^* \alpha_{E,k} \rangle = \langle \pi'_* v, \alpha_{E,k} \rangle = (pr_{1*} \pi'_* v | *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k)) =$$
$$= (pr_{1*} v_{k+1} \wedge \cdots \wedge pr_{1*} v_n | *(e_1 \cdots e_k)) =$$
$$= (v_{k+1}(pr_1) \wedge \cdots \wedge v_n(pr_1) | e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n) =$$
$$= \det\, (v_{k+i}(pr_1) | e_{k+j}) =$$
$$= \det \langle v_{k+i}, (dpr_1 | e_{k+j}) \rangle =$$
$$= \langle v, \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{0j} \rangle. \text{ q. e. d.}$$

Wir betrachten jetzt die Bündel

$$\begin{array}{ccc} G(E, k, l) & \text{und} & E \times V_n(\mathfrak{E}) \\ \downarrow {\scriptstyle pr_1} & & \downarrow {\scriptstyle \pi''} \\ G(E, k) & & G(E, k, l) \end{array}$$

mit $\pi''(p, e_1, \cdots, e_n) := (p + \overline{e_1 \wedge \cdots \wedge e_k},\ p + \overline{e_1 \wedge \cdots \wedge e_l})$.

Die Dichte $\mu_{E,k,l}$ ist folgendermaßen definiert. Ist

$$\rho : pr_1^{-1} U \to U \times S_{l-k}(\mathbf{R}^{n-k})$$

eine lokale Trivialisierung eines differenzierbaren Bündelatlas von $G(E, k, l)$ über der offenen Menge $U \subset G(E, k)$, so gilt dort

$$\mu_{E,k,l} = |\rho^* (pr_1^* \Omega_{E,k} \wedge pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k})|.$$

Wir behaupten

Hilfssatz 5.2. Es ist

$$(\pi'')^* \rho^* (pr_1^* \Omega_{E,k} \wedge pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k}) = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij} \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij}.$$

Beweis. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \times V_n(\mathfrak{E}) & \xrightarrow{\pi'} & E \times S_k(\mathfrak{E}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G(E, k, l) & \xrightarrow[pr_1]{} & G(E, k) \end{array}$$

Da $pr_1 \circ \rho \circ \pi'' = pr \circ \pi'' = \pi \circ \pi'$ ist, folgt

$$(\pi'')^* \rho^* pr_1^* \Omega_{E,k} = (\pi')^* \tilde{\Omega}_{E,k} = \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij} \text{ über } U.$$

Sei $g \in U$ und F_g die Faser über g in $E \times V_n(\mathfrak{E})$. Dann ist $F_g = g \times V_k(g) \times V_{n-k}(g^\perp)$. Sei ι_g die Einbettung $F_g \hookrightarrow E \times V_n(\mathfrak{E})$. Es genügt dann zu zeigen, daß $(\pi'')^* \rho^* pr_2^* \nu_{n-k,\, l-k}$ und $\bigwedge_{i=k+1}^{l} \bigwedge_{j=l+1}^{n} \omega_{ij}$, eingeshränkt auf F_g, übereinstimmen. Denn die Differentialform $\bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}$ ist projizierbar, verschwindet also auf vertikalen Vektoren, und ihr Grad stimmt mit der Dimension des Basisraums $G(E, k)$ überein. Wir haben folgende Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} F_g & \xrightarrow{\iota_g} & E \times V_n(\mathfrak{E}) \\ {\scriptstyle pr_3}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi''} \\ V_{n-k}(g^\perp) & & G(E, k, l) \supset pr_1^{-1} U \\ \downarrow & & \Big|\,{\scriptstyle \rho} \\ S_{l-k}(g^\perp) & & \Big| \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{l-k}(R^{n-k}) & \xleftarrow[pr_2]{} & U \times S_{l-k}(R^{n-k}). \end{array}$$

Es gibt einen Isomorphismus $g^\perp \to \mathbf{R}^{n-k}$, der einen Diffeomorphismus $u_g \colon S_{l-k}(g^\perp) \to S_{l-k}(\mathbf{R}^{n-k})$ induziert, welcher das Diagramm kommutativ macht. Daher ist

$$\iota_g^*(\pi'')^*\rho^* pr_2^*\nu_{n-k,\,l-k} = \iota_g^* \bigwedge_{i=k+1}^{l}\bigwedge_{j=l+1}^{n}\omega_{ij}. \quad \text{q. e. d.}$$

Wir behandeln jetzt auf ähnliche Weise die Dichte $\mu'_{E,\,k,\,l}$, die mit der Bündelstruktur

$$\begin{array}{c} G(E,k,l) \\ \big\downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ G(E,l) \end{array}$$

definiert ist. Ist

$$\rho\colon pr_2^{-1}U \to U\times G(l,k)$$

eine lokale Trivialisierung eines differenzierbaren Bündelatlas von $G(E,k,l)$ über $U\subset G(E,l)$, so ist dort

$$\mu'_{E,\,k,\,l} = |\rho^*(pr_1^*\Omega_{E,\,l}\wedge pr_2^*\Omega_{l,\,k}|).$$

Hilfssatz 5. 3. Es ist

$$(\pi'')^*\rho^*(pr_1^*\Omega_{E,\,l}\wedge pr_2^*\Omega_{l,\,k}) = \bigwedge_{i=0}^{l}\bigwedge_{j=l+1}^{n}\omega_{ij}\wedge\bigwedge_{i=0}^{k}\bigwedge_{l=k+1}^{l}\omega_{ij}.$$

Beweis. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E\times V_n(\epsilon) & \xrightarrow{\pi'} & E\times S_l(\epsilon) \\ {\scriptstyle\pi''}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ G(E,k,l) & \xrightarrow[pr_2]{\hspace{2em}} & G(E,l) \end{array}$$

entnehmen wir zunächst $(\pi'')^*\rho^* pr_1^*\Omega_{E,\,l} = (\pi')^*\tilde{\Omega}_{E,\,l} = \bigwedge_{i=0}^{l}\bigwedge_{j=l+1}^{n}\omega_{ij}$ über U. Wie oben genügt es jetzt, einzusehen, daß $(\pi'')^*\rho^* pr_2^*\Omega_{l,\,k}$ und $\bigwedge_{i=0}^{k}\bigwedge_{j=k+1}^{l}\omega_{ij}$ auf vertikalen Vektoren übereinstimmen.

Ist $h\in U$ und F_h die Faser über h in $E\times V_n(\epsilon)$, so ist $F_h = h\times V_l(h)\times V_{n-l}(h^\perp)$. Sei ι_h die Einbettung $F_h\hookrightarrow E\times V_n(\epsilon)$. Wir haben nun folgende Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} F_h & \xrightarrow{\iota_h} & E\times V_n(\epsilon) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi''} \\ h\times V_l(h) & & G(E,k,l)\supset pr_2^{-1}U \\ \downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ G(h,k) & & \\ \downarrow & & \\ G(l,k) & \xleftarrow[pr_2]{\hspace{3em}} & U\times G(l,k) \end{array}$$

Mit einem Isomorphismus $h \to \mathbf{R}^l$, der einen passenden Diffeomorphismus u_h: $G(h, k) \to G(l, k)$ liefert, folgt dann die Behauptung. q. e. d.

Satz 5.4. Die Dichten $\mu_{E, k, l}$ und $\mu'_{E, k, l}$ auf $G(E, k, l)$ stimmen überein.

Beweis. Die Dichten $\mu_{E, k, l}$ und $\mu'_{E, k, l}$ sind durch Differentialformen auf $G(E, k, l)$ definiert, deren Liftungen nach $E \times V_n(s)$ bis auf ein Vorzeichen übereinstimmen. Daher ist $\mu_{E, k, l} = \mu'_{E, k, l}$. q. e. d.

Wir haben in Satz 2.3 das Volumen $O_{n, k}$ der orientierten Grassmannmannigfaltigkeit $S_k(\mathrm{R}^n)$ benutzt. Man braucht jedoch die Kenntnis von $O_{n, k}$ nicht vorauszusetzen. Denn der Beweis der Stokesformel liefert (vgl. S. 11) die Gleichung

$$O_{n, k+1} = O_{n, k} \frac{O_{n-k}}{O_{k+1}}. \tag{5.5}$$

Dafür wird nur die Gültigkeit der Stokesformel in einem Spezialfall benötigt. Aus (5.5). folgt sofort für $1 < k < n$

$$O_{n, k} = \frac{O_n \cdots O_{n-k+1}}{O_2 \cdots O_k}.$$

Mathematisches Institut der
Universität Göttingen

Поступило 5.X.1969

Կ. ԽՈՐՆԵՖՖԵՐ. Կրոֆտոնի բանաձևը և Ստոքսի թեորեմը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացված է Կրոֆտոնի կլասիկ (1) բանաձևի անալոգը ենթաբազմաձևությունների դիֆերենցիալ ֆորմերի ինտեգրալների համար։ Այդ արդյունքի օգնությամբ տրվում է Ստոքսի բանաձևի ինտեգրալ-երկրաչափական ապացույց։

К. ХОРНЕФФЕР. *Формула Крофтона и теорема Стокса*

В работе получен аналог классической формулы Крофтона (1) для интегралов от дифференциальных форм по C^1 — подмногообразиям в R^n. С помощью этого результата дается интегрально-геометрическое доказательство формулы Стокса.

LITERATUR

1. *Bourbaki N.* Eléments de mathématique, Algèbre, Chap. III. Paris, 1958.
2. *Dombrowski H. D., u. Horneffer K.* Die Differentialgeometrie des Galileischen Relativitätsprinzips. Math. Zeitschr. 86 (1964), 291—311.
3. *Federer H.* Geometric Measure Theory. Berlin—Heidelberg—New York, 1969.
4. *Maak K.* Oberflächenintegral und Stokesformel im gewöhnlichen Raume. Math. Ann. 116 (1939), 574—597.
5. *Sternberg S.* Lectures on Differential Geometry. Prentice—Hall, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

KLAUS KRICKEBERG

INVARIANCE PROPERTIES OF THE CORRELATION MEASURE OF LINE PROCESSES

Given a group L which acts continuously on a space Y, and the space Γ of the resulting equivalence classes of Y, the representation of an L — invariant measure ν on Y in the form $\nu = \int\limits_{\Gamma} \nu_{\gamma} \varkappa (d\gamma)$ with L — invariant measures ν_{γ} concentrated on the respective equivalence classes is used to study the invariance of ν under various other transformations V of Y not belonging to L. The main application concerns the case $Y = X \times X$ there X is the space of all oriented lines in the plane R^2, L the group of all transformations of Y induced by Euclidean motions of R^2, ν the covariance measure of a second order stationary line process z in R^2, i. e. $\nu(A_1 \times A_2) = E(z(A_1) z(A_2))$ for all Borel subsets A_1 and A_2 of R^2, and V a map of one of the following types: the transformation of Y induced by a reflexion in R^2, or by the change of the orientation of all lines, or by a "translation" within X. It is assumed that z has almost surely no antipallel lines.

The invariance of ν under reflexions had been proved by R. Davidson (unpublished) by a different method under the assumption that z has almost surely no parallel or antiparallel lines, and ν is absolutely continuous in $Y - \{(w, w): w \in X\}$ relative to the product méasure of the invariant measure in X. This latter assumption was eliminated in his paper appearing in this same volume.

Introduction

The invariance under reflexions of the correlation measure of a second order stationary line process in the plane with no parallel or antiparallel lines was proved by R. Davidson in his unpublished thesis under the assumption that the correllation measure has a density relative to the relevant integral geometric measure outside the diagonal [5; see also 6]. The purpose of this note if to show how this result can be obtained in full generality from the familiar theory of the disintegration of measures. The method obtained here works in similar cases as well.

I am very much indebted to R. Davidson for making available to me his thesis and for many stimulating discussions, to D. Kendall and the British Council for arranging our first encounter, and to U. Krause for a remark which influenced the organization of the paper.

§ 1. Images of disintegrated measures

Let Y be a locally compact space which has a countable base, and ν a positive Radon measure on Y. Consider an equivalence relation $\sim$ in Y and assume that $\sim$ is ν — measurable. We can then select a locally compact space Γ with a countable base and a ν — measurable map r of Y onto Γ such that $x \sim y$ if and only if $r(x) = r(y)$; in fact, the existence of such a pair Γ, r is necessary and sufficient for the ν — measurability of $\sim$ [3, § 3, n° 4]. For any $\gamma \in \Gamma$ we denote the equivalence class in Y described by γ, i. e. $r^{-1}\{\gamma\}$, by Y_γ. We know [3, § 3, n° 2] that there is a pseudo-image of ν under r; by definition this is a positive Radon measure $\varkappa$ on Γ such that a subset Δ of Γ is a $\varkappa$ — null set if and only if $r^{-1}\Delta$ is a ν — null set. For fixed $\varkappa$ there exists by [3, § 3, n° 3] a scalarly $\varkappa$ — integrable family of positive measures $(\nu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ on Y with the property that ν_γ is carried by Y_γ for any $\gamma \in \Gamma$, and

$$\nu = \int_\Gamma \nu_\gamma \varkappa(d\gamma). \tag{1.1}$$

If $\varkappa'$ stands for any other pseudo-image ot ν under r and $(\nu'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ for any scalarly $\varkappa'$ — integrable family of positive Radon measures on Y such that ν'_γ is also carried by Y_γ and $\nu = \int_\Gamma \nu_\gamma \varkappa(d\gamma)$, then we have $\nu_\gamma = \rho(\gamma)\nu'_\gamma$ for $\varkappa$ — almost all γ where $\rho = d\varkappa'/d\varkappa$ denotes the Radon-Nikodym derivative of $\varkappa'$ with respact to $\varkappa$.

Next let V be a map of Y into itself which is measurable and proper with respect to ν. This amounts to the fact that $V^{-1}K$ is ν — integrable for every compact subset K of Y, and it suffices to require this for all elements K of a base of Y consisting of compact sets [2, § 6, n°1]. For fixed K the set $V^{-1}K$ will be ν_γ — integrable for $\varkappa$—almost all γ [2, § 3, n° 3], hence for $\varkappa$—almost all γ the map V will be measurable and proper with respect to ν_γ, too. We now assume that there is a $\varkappa$—measurable and $\varkappa$—proper bijective map v of Γ onto itself with the property that $VY_\gamma \subseteq Y_{v(\gamma)}$ for $\varkappa$—almost all γ, and that the image $\varkappa'$ of $\varkappa$ under v has the same null sets as $\varkappa$. Thus $\varkappa'$ is a pseudo-image of ν under r.

Let ν' be the image of ν and $\nu'_{v(\gamma)}$ the image of ν_γ under V. Taking any contunuous function f on Y with a compact carrier we have by (1.1):

$$\nu'(f) = \nu(f \circ V) = \int_\Gamma \nu_\gamma(f \circ V)\varkappa(d\gamma) = \int_\Gamma \nu'_{v(\gamma)}(f)\varkappa(d\gamma) = \int_\Gamma \nu'_\gamma(f)\varkappa'(d\gamma),$$

hence

$$\nu' = \int_\Gamma \nu'_\gamma \varkappa'(d\gamma). \tag{1.2}$$

Here, $(\nu'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ is a scalarly $\varkappa'$-integrable family of Radon measures on Y, and ν'_γ is carried by Y.

Consider an analogous ν-measurable and ν-proper map W of Y into itself and a $\varkappa$-measurable and $\varkappa$-proper bijective map w of Γ onto itself with the property that $WY_\gamma \subset Y_{w(\gamma)}$ for $\varkappa$-almost all γ, and that the image $\varkappa''$ of $\varkappa$ under w has the same null sets as $\varkappa$. Let ν'' be the image of ν and $\nu''_{w(\gamma)}$ the image of ν_γ under W, and set $\rho = d\varkappa/d\varkappa''$. Then (1. 2) implies immediately

Theorem 1. *The images ν' and ν'' of ν under V and W, respectively, coincide if and only if $\nu''_\gamma = \rho(\gamma)\nu'_\gamma$ for $\varkappa$-almost all γ.*

Recall that ν is said to be invariant under V if $\nu' = \nu$. Taking for W the identity we obtain

Corollary 1. *Under the assumptions made on V before, ν is invariant under V if and only if $\nu_\gamma = \rho(\gamma)\nu'_\gamma$ for $\varkappa$-almost all γ where $\rho = d\varkappa'/d\varkappa$. In particular, assuming one of the conditions "$\nu_\gamma = \nu'_\gamma$ for $\varkappa$-almost all γ" and "$\varkappa = \varkappa'$" to be satisfied, the other one is necessary and sufficient for the invariance of ν under V.*

Specializing once more to the case where v is the identical map of Γ we get

Corollary 2. *Suppose that $VY_\gamma \subset Y_\gamma$ for $\varkappa$-almost all γ. Then ν is invariant under V if and only if ν_γ is invariant under V for $\varkappa$-almost all γ.*

We now turn to the case where the equivalence relation is defined by a group **L** of transformations of Y, i. e., $x \sim y$ if and only if $Tx = y$ for some $T \in \mathbf{L}$. We are also going to change slightly our point of view by directing our attention not only to a single measure ν but rather to the set of all measures invariant under **L**. Thus let **L** be a locally compact group with a countable base which acts continuously on Y [1, § 2, n° 4].

We assume that there exists a locally compact space Γ with a countable base and a map r of Y onto Γ such that $x \sim y$ if and only if $r(x) = r(y)$, and such that a subset Δ of Γ is borelian if and only if $r^{-1}(\Delta)$ is borelian in Y. Note that if the quotient space $Y/\sim$ is separated in the quotient topology, we may take this space for Γ and the canonic mapping of Y onto Γ for r [1, § 2, n° 4 and § 4, n° 5]; however in the main application we have in mind, the quotient topology will not be separated. Under the preceding assumption, given any positive Radon measure ν on Y, the map r is ν-measurable, and every $T \in \mathbf{L}$, being a homeomorphism of Y, is ν-measurable and ν-proper. Each Y_γ is a Borel set in Y.

A positive Radon measure ν on Y is said to be **L**-invariant if it is invariant under every $T \in \mathbf{L}$. By corollary 2 of theorem 1, every **L**-invariant measure ν has a representation (1.1) with some positive Radon measure $\varkappa$ on Γ where, given $T \in \mathbf{L}$, the measure ν_γ is concentrated on

Y_γ and invariant under T for $\varkappa$-almost all γ. This amounts to $\nu_\gamma f = \nu_\gamma(f \circ T)$ for $\varkappa$-almost all γ and every continuous functions f on Y with a compact carrier. Since $\nu_\gamma(f \circ T)$ is, for fixed f of this kind, a continuous function of $T \in \mathbf{L}$ [4, § 1, n° 1] and $\mathbf{L}$ contains a countable dense set, we find that, for $\varkappa$-almost all γ, the measure ν_γ is invariant under $\mathbf{L}$. Conversely, having selected any positive Radon measure $\varkappa$ on Γ and a scalarly $\varkappa$-integrable family $(\nu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ of measures on Y such that, for $\varkappa$-almost all γ, ν_γ is concentrated on Y_γ and invariant under $\mathbf{L}$, the measure ν defined by (1.1) is invariant under $\mathbf{L}$.

We have thus obtained a kind of survey on all $\mathbf{L}$-invariant measures on Y. This survey will turn out especially simple and useful if we make the following assumption: for every γ there is, up to a non-negative factor, one and only one $\mathbf{L}$-invariant positive Radon measure τ_γ concentrated on Y_γ. Then, unless $\tau_\gamma = 0$, every nonempty subset of Y_γ has a positive τ_γ-measure.

We assume that there exists a non-negative bounded borelian function h on Y with the following properties: for any $\gamma \in \Gamma$, the set $Y_\gamma \cap \{h > 0\}$ contains a non-empty subset which is open in Y_γ; for every compact subset Δ of Γ, the set $r^{-1}(\Delta) \cap$ carrier (h) is relatively compact. This assumption will obviously be satisfied in the later examples. Then $0 < \tau_\gamma(h) < \infty$ for every γ for which $\tau_\gamma \neq 0$, and by renormalizing τ_γ we can assume that for every γ we have $\tau_\gamma(h) = 1$ or $\tau_\gamma(h) = 0$. The set $\{x : x \in Y, \tau_{r(x)} = 0\}$ is null for every $\mathbf{L}$-invariant measure on Y, and could as well be discarged.

Now let ν be an $\mathbf{L}$-invariant positive Radon measure on Y, and $\varkappa$ a pseudo-image of ν under r. Starting with the decomposition (1.1) we find for $\varkappa$-almost all γ a number $\rho(\gamma) \geq 0$ such that $\nu_\gamma = \rho(\gamma)\tau_\gamma$. Given any compact subset Δ of Γ the function $g(x) = h(x)\, 1_\Delta(r(x))$ is ν-integrable with

$$\nu(g) = \int_\Gamma \nu_\gamma(g)\, \varkappa(d\gamma) = \int_\Gamma \tau_\gamma(h)\, \rho(\gamma)\, \varkappa d\gamma)$$

where $\tau_\gamma(h) = 1$ for $\varkappa$-almost all γ. Hence ρ is a locally $\varkappa$-integrable function on Γ, and the measure $\varkappa' = \rho\varkappa$ is a pseudoimage of ν under r. Writing again $\varkappa$ instead of $\varkappa'$ we obtain the decomposition

$$\nu = \int_\Gamma \tau_\gamma \varkappa(d\gamma) \tag{1.3}$$

where $\varkappa$ is unique. Conversely, given any positve Radon measure $\varkappa$ on Γ such that the family $(\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ is scalarly $\varkappa$-integrable, the measure ν defined by (1.3) is $\mathbf{L}$-invariant. Thus we have

Theorem 2. *Under the assumptions made on* $\mathbf{L}$ *before, the formula (1.3) yields a one-to-one correspondence between* $\mathbf{L}$*-invariant measures* ν *on* Y *and measures* $\varkappa$ *on* Γ *such that* $(\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *is scalarly* $\varkappa$*-integrable.*

Combining this with corollary 1 of theorem 1 we get the

Corollary. *Suppose that the preceding assumptions on* L *are satisfied. Let V be a homeomorphism of Y which induces a bijective transformation v of Γ such that $VY_{\gamma} = Y_{v(\gamma)}$ for every γ, or in other words $r \circ V = v \circ r$. Then v and v^{-1} are borelian. Suppose in addition that for every γ, the measure $\tau_{v(\gamma)}$ is the image of τ_γ under V, and let ν be an* L*-invariant measure represented in the form (1.3). Then an* L*-invariant measure ν on Y represented in the form (1.3) is invariant under V if and only if the corresponding measure $\varkappa$ on Γ is invariant under v.*

In fact, the assertion that v and v^{-1} are borelian follows immediately from our assumptions on r; hence v and v^{-1} are $\varkappa$-measurable for every Radon measure $\varkappa$ on Γ. To apply the corollary 1 of theorem 1 in the case where ν is invariart under L we need to know that v is $\varkappa$-proper and preserves $\varkappa$-null sets. The first statement results easily from the formula $\varkappa(\Delta) = \nu(h \cdot 1_{\gamma^{-1}(\Delta)})$ where Δ is any Borel set in Γ; this leads, by the way, directly to the ν-invariance of $\varkappa$. The second statement holds even if V is only assumed to preserve ν-null sets.

An important type of mappings to which the preceding corollary applies is the following one: let V be a homeomorphism of Y such that $VTV^{-1} \in$ L for every $T \in$ L. Then $y \sim y'$ entails indeed $Vy \sim Vy'$, and hence there is a bijective transformation v of Γ such that $r \circ V = v \circ r$.

Consider next the particular case where V commutes with every T of L, let ν_γ be any L-invariant positive Radon measure concentrated on Y_γ, and $\nu'_{v(\gamma)}$ its image under V. Then for every $T \in$ L and every continuous function f on Y with a compact carrier we have

$$\nu'_{v(\gamma)}(f \circ T) = \nu_\gamma(f \circ T \circ V) = \nu_\gamma(f \circ V \circ T) = \nu_\gamma(f \circ V) = \nu'_{v(\gamma)}(f),$$

i. e. $\nu'_{v(\gamma)}$ is also L-invariant. Thus, assuming that for every γ there exists, up to a factor, only one L-invariant positive Radon measure concentrated on Y_γ we find that $\nu'_{v(\gamma)}$ is a multiple of $\nu_{v(\gamma)}$. This shows that our hypothesis $\tau'_{v(\gamma)} = \tau_{v(\gamma)}$ is not an unrealistic one; it is, in fact, only a hypothesis regarding the normalization of the τ_γ's. If the normalizing function h is itself V-invariant, we get

$$\tau'_{v(\gamma)}(h) = \tau_\gamma(h \circ V) = \tau_\gamma(h) = 1$$

unless $\tau_\gamma = 0$, hence automatically $\tau'_{v(\gamma)} = \tau_{v(\gamma)}$. Given a finite group of homeomorphisms $V_1, \cdots, V_n$ of Y which commute with every $T \in$ L, we can always choose h so as to be invariant under every V_i by replacing it by $\sum_{i=1}^{n} h \circ V_i$. In particular, h can be chosen V-invariant if V is periodic.

§ 2. A particular case: a diagonal group in a product space

Let X be a locally compact space with a countable base, and $\mathbf{M}$ a locally compact group with a countable base which acts continuously on X. We fix a posiuive integer k and define Y to be the product space X^k. For $\mathbf{L}$ we take the group of all transformations of the form $(x_1, \cdots, x_k) \to (T_0 x_1, \cdots, T_0 x_k)$ where $T_0 \in \mathbf{M}$. Then $\mathbf{L}$ acts continuously on Y and has a countable base, the topology of $\mathbf{L}$ being given in the obvious way by that of $\mathbf{M}$.

As before we assume that we have a locally compact space Γ with a countable base and a map r of Y onto Γ which "represent" $Y/\sim$ in the sense previously defined.

An example of a homeomorphism V which commutes with every $T \in \mathbf{L}$ is given by

$$V(x_1, \cdots, x_k) = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$$

where $i_1, \cdots, i_k$ is a fixed permutation of the numbers $1, \cdots, k$. We can choose the normalizing function h to be invariant under every mapping of this kind.

Another type of mappings are the diagonal ones:

$$V(x_1, \cdots, x_k) = (V_0 x_1, \cdots, V_0 x_k)$$

where V_0 is a homeomorphism of X such that $T_0 \in \mathbf{M}$ implies $V_0 T_0 V_0^{-1} \in \mathbf{M}$. Obviously $T \in \mathbf{L}$ implies $VTV^{-1} \in \mathbf{L}$. If V_0 commutes with every $T_0 \in \mathbf{M}$, V commutes with every $T \in \mathbf{L}$, and if V_0 is periodic, V is periodic. Applying the corollary of theorem 2 we obtain

P r o p o s i t i o n 1. *Let V be any transformation of Y of the kind described before, and v the corresponding tranformation of Γ. Suppose that for every γ there is, up to a factor, one and only one $\mathbf{L}$-invariant positive Radon measure τ_γ concentrated on Y_γ, ane that $\tau_{v(\gamma)}$ is the image of τ_γ under V. Then an $\mathbf{L}$-invariant measure ν on Y represented by (1.3) is invariant under V if and only if the corresponding measure $\varkappa$ on Γ is invariant under v.*

§ 3. Mixed moments of random measures

We start with a space X, a positive integer k, and a group $\mathbf{M}$ as in § 2. We denote by $\mathbf{B}(X)$ the sigma-ring of all Borel sets, and by $\mathbf{B}_0(X)$ the set of all relatively compact Borel sets of X. In addition we take a probability space $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ to be kept fixed once for all, and let E stand for "expectation". As usual we mean by a positive random measure on X a map z of $\mathbf{B}(X)$ into the set of all non-negative extended real-valued random variables with the following property: if (A_n) is a sequence of dusjoint sets of $\mathbf{B}(X)$ and $A = \bigcup_n A_n$, then we have

$z(A)=\sum_n z(A_n)$ almost surely. Since $z(A_n)\geqslant 0$ it suffices to require only stochastic convergence.

The random measure z is said to be locally finite if $z(A)<\infty$ almost surely for any $A\in\mathbf{B}_0(X)$. It is called locally of k'th order if $E(z(A)^k)<\infty$ whenever $A\in\mathbf{B}_0(X)$. Assuming this the mixed moments of k'th order of the random variables $z(A_1),\cdots, z(A_k)$ exist for arbitrary sets $A_1,\cdots, A_k$ in $\mathbf{B}_0(X)$. The function

$$\nu(A_1\times\cdots\times A_k)=E\left(\prod_{l=2}^{k} z(A_l)\right) \tag{3.1}$$

defined on the semi-ring S of all sets of the form $A_1\times\cdots\times A_k$ where $A_l\in B_0(X)$, is additive, and it follows from Fatou's lemma that $\nu(B)=\lim_{n\to\infty}\nu(B_n)$ for any increasing or decreasing sequence (B_n) in S which converges to a set B in S. We can then show in the usual way [7, p. 56] that $\nu(B)=\sum_n\nu(B_n)$ if (B_n) is a sequence of disjoint sets in S, and $B=\bigcup_n B_n\in$S. Hence [7, § 2] ν can be uniquely extended to a positive Radon measure in $Y=X^k$ which will again be denoted by ν.

The measure ν is symmetric, i. e. invariant under any "permutation of the axes" of the type W studied in § 2. Of course, not every symmetric measure arises in this way as shown by the measure in the space $Y=\{0, 1\}^2$ which consists of two unit masses at the points (0, 1) and (1, 0).

The random measure z is called stationary to the k'th order if it is locally of k'th order, and

$$E\left(\prod_{l=1}^{l} z(TA_l)\right)=E\left(\prod_{l=1}^{l} z(A_l)\right)$$

for any $l\leqslant k$, any sets $A_1,\cdots, A_l\in\mathbf{B}_0(X)$ and any $T\in\mathbf{M}$. In this case, ν is invariant under L as well as under any permutation of the axes, and is thus subject to proposition 1 of § 2.

Given a random measure z of k'th order and a set $B\in\mathbf{B}(Y)$ we agree to say that almost surely there are no k-tuples in B if $\nu(B)=0$. This can be justified as follows. Suppose we are given a version of z. By this we mean a non-negative function of $A\in\mathbf{B}(X)$ and $\omega\in\Omega$ which coincides, for each fixed A, almost surely with $z(A)$, and which is a measure on $\mathbf{B}(X)$ as a function of A for almost all fixed ω. To save letters we are going to denote a particular version again by z so that $z(A;\ \omega)$ is the value of that version for the set A and the outcome ω. For fixed ω, let $\nu(\cdot;\ \omega)$ be the product measure in Y defined by $\nu(A_1\times\cdots\times A_k;\ \omega)=z(A_1;\ \omega)\times\cdots\times z(A_k;\ \omega)$ if $A_1,\cdots, A_k\in\mathbf{B}_0(X)$. Then for every $B\in\mathbf{B}(Y)$ we have

$$\nu(B)=\int_\Omega \nu(B;\ \omega)\,P(d\omega). \tag{3.2}$$

In fact by (3.1) this formula is true if B has the form $A_1 \times \cdots \times A_k$ where $A_i \in \mathbf{B}_0(X)$, and hence is generally true. Loosely speaking, ν is the "mixture", with respect to P, of all measures $\nu(\cdot; \omega)$ where ω runs through Ω. It follows that $\nu(B) = 0$ if and only if $\nu(B; \omega) = 0$ for almost all ω.

By a point process in X we mean a positive random measure z with the property that, for every $A \in \mathbf{B}_0(X)$, $z(A)$ takes almost surely only integral values. In terms of a particular version, the phrase "There are almost surely no k-tuples in B" can then be described in the following way which makes it intuitively clear: for almost all ω, there is no $(x_1, \cdots, x_k) \in B$ such that $z(\{x_1\}; \omega) > 0, \cdots, z(\{x_k\}; \omega) < 0$.

§ 4. An example

Take for X the set of all oriented lines in the oriented Euclidean plane R^2. We parametrize X in the usual way [8]: having chosen a fixed origin o and a fixed axis w_0 through o, an oriented line w will cut w_0 at a point s and at an angle $\vartheta + \pi/2$. We then describe w by the pair (p, ϑ) where $p = s \cos \vartheta$ is the positive or negative distance of w from o. If w is parallel or antiparallel to w_0 we have $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ or $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, respectively, and the sign of the distance p is determined by continuity, e. g. positive if w is antiparallel to w_0 and lies on the "left bank" of w_0. Thus $-\infty < p < \infty$ and $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$; topologically, X is simply the infinite two-dimensional cylinder $R \times S$ where S is the circle.

Let $\mathbf{M}$ be the group acting on X induced by the Euclidean motions of the plane. Explicitly, if S is the motion

$$(\xi \cdot \eta) \to (\xi \cos \vartheta_0 - \eta \sin \vartheta_0 + \xi_0, \ \xi \sin \vartheta_0 + \eta \cos \vartheta_0 + \eta_0)$$

of R^2, taking for o the origin and for w_0 the first axis of coordinates the induced map of X becomes

$$(p, \vartheta) \to (p + \xi_0 \cos (\vartheta + \vartheta_0) + \eta_0 \sin (\vartheta + \vartheta_0), \ \vartheta + \vartheta_0),$$

and determines S uniquely. Under its natural topology obtained in this way, $\mathbf{M}$ is homeomorphic to the group of the Euclidean motions of R^2, and to $R \times R \times S$. Its action on X is continuous.

Denote by Y the product space X^2, and accordingly by $\mathbf{L}$ the group of all transformations of Y of the form $(w_1, w_2) \to (Tw_1, Tw_2)$ where $T \in \mathbf{M}$. There are then five types of equivalence classes of Y with respect to $\mathbf{L}$ which we are going to describe in terms of a partition of Γ into five sets $\{\delta\}$, $\{\alpha\}$, Γ_+, Γ_-, and Γ_0:

$\{\delta\}$: The set of all double lines (w, w), i. e. the diagonal in Y, forms one equivalence class which we will represent by a point δ of Γ.

$\{\alpha\}$: Likewise, the set of all pairs of coincident lines with opposite directions $(p, \vartheta), (-p, \vartheta + \pi))$ forms one equivalence class which we will represent by a point α of Γ.

Γ_+: Suppose that w_1 and w_2 are parallel and unequal, say $w_1 = (p, \vartheta)$ and $w_2 = (p + \gamma, \vartheta)$ where $\gamma \neq 0$. Note that „parallel" in this sense implies „equidirected", and the distance γ between w_1 and w_2 is taken as positive if w_2 lies on the right bank of w_1. Then $(w_1, w_2) \sim (w_1', w_2')$ if and only if w_1' and w_2' are also parallel with the same distance γ, i. e. $w_1' = (p', \vartheta')$ and $w_2' = (p' + \gamma, \vartheta')$. Hence we may take γ to represent the equivalence class which contains (w_1, w_2), and the part Γ_+ of Γ corresponding to the classes of pairs of unequal parallel lines is the real line minus the origin $R - \{0\}$. Γ_-: Suppose that w_1 and w_2 are antiparallel and non-coincident, say $w_1 = (p, \vartheta)$ and $w_2 = (\gamma - p, \vartheta + \pi)$ where $\gamma \neq 0$. Then $(w_1, w_2) \sim (w_1', w_2')$ if and only if w_1' and w_2' are also antiparallel with the same distance γ. Hence we may again take γ to represent the equivalence class which contains (w_1, w_2), and the part Γ_- of Γ corresponding to the classes of pairs of antiparallel and non-coincident lines is equal to $R - \{0\}$.

Γ_0: Suppose that w_1 and w_2 are neither parallel nor antiparallel and form the angle γ, say $w_1 = (p_1, \vartheta)$ and $w_2 = (p_2, \vartheta + \gamma)$, where γ is not an integral multiple of π. Then $(w_1, w_2) \sim (w_1', w_2')$ if and only if w_1' and w_2' form the same angle γ, i. e. $w_1' = (p_1', \vartheta')$ and $w_2' = (p_2', \vartheta' + \gamma)$. Hence we may take γ to represent the equivalence class which contains (w_1, w_2), and the part Γ_0 corresponding to the classes of pairs of neither parallel nor antiparallel lines is equal to the union of the two disjoint open intervals $0 < \gamma < \pi$ and $\pi < \gamma < 2\pi$.

The representation space $\Gamma = \{\delta\} \cup \{\alpha\} \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$ is not separated in its quotient topology because the intersection of Γ_0 with any two neighbourhoods of any two points of Γ_+, or any two points of Γ_-, is never empty. We will, however, endow Γ with a finer topology, to be called the "natural" one, which makes it locally compact with a countable base. To this end we use the ordinary topologies of Γ_+, Γ_-, and Γ_0 given by their description in terms of $R - \{0\}$, $R - \{0\}$, and $]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, respectively, and let Γ_+, Γ_-, and Γ_0 be open in Γ. A basis of neighbourhoods of δ is to consist of the following sets: any union of δ with intervals $]-\varepsilon, 0[$ and $]0, \varepsilon[$ of Γ_+ and intervals $]0, \varepsilon[$ and $]2\pi - \varepsilon, 2\pi[$ of Γ_0 where $\varepsilon > 0$. Similary a typical neighbourhood of α consists of a union of α with intervals $]-\varepsilon, 0[$ and $]0, \varepsilon[$ of Γ_- and intervals $]\pi - \varepsilon, \pi[$ and $]\pi, \pi + \varepsilon[$ of Γ_0. Briefly, Γ is a circle with two lines brazed to it at apposite points.

Although the canonical map r of Y onto Γ is no longer continuous with respect to the natural topology of Γ, it has a continuous restriction to each of the five Borel sets $r^{-1}\{\delta\}$, $r^{-1}\{\alpha\}$, $r^{-1}(\Gamma_+)$, $r^{-1}(\Gamma_-)$, and $r^{-1}(\Gamma_0)$. Hence r is borelian, i. e. $r^{-1}(\Delta)$ is a Borel set for every Borel set Δ in Γ. On the other hand, r is open in the natural topology since this topology is finer than the quotient topology. It follows that Δ is a Borel set if $r^{-1}(\Delta)$ is.

Next we look at the action of L in the various equivalence classes Y_γ. Each class Y_γ with $\gamma = \delta$, $\gamma = \alpha$, $\gamma \in \Gamma_+$ or $\gamma \in \Gamma_-$ can be mapped homeomorphically onto X by the projection $(w_1, w_2) \to w_1$. The action of L on Y_γ is hereby carried into the action of M on X. It is well known [8, § 2] that there exists one and, up to a positive factor, only one non-vanishing positive Radon measure on X which is invariant under M, namely, $|dp\,d\vartheta|$. The corresponding measure on Y concentrated on Y will be denoted by τ_γ.

Suppose that $\gamma \in \Gamma_0$. In this case the map $((p_1, \vartheta), (p_2, \vartheta + \gamma)) \to$ $\to (\xi, \eta, \vartheta)$ where

$$\xi = (\sin \gamma)^{-1} (p_1 \sin (\vartheta + \gamma) - p_2 \sin \vartheta),$$

$$\eta = (\sin \gamma)^{-1} (p_2 \cos \vartheta - p_1 \cos (\vartheta + \gamma)),$$

is a homeomorphism of Y_γ onto the space $R \times R \times S$; the point (ξ, η) is the intersection of the lines (p_1, ϑ) and $(p_2, \vartheta + \gamma)$. Hence the action of L on Y_γ is carried by this map into the action on $R \times R \times S$ of the group of all transformations

$$(\xi, \eta, \vartheta) \to (\xi \cos \vartheta_0 - \eta \sin \vartheta_0 + \xi_0, \ \xi \sin \vartheta_0 + \eta \cos \vartheta_0 + \eta_0, \ \vartheta + \vartheta_0)$$

where $(\xi_0, \eta_0, \vartheta_0)$ runs through $R \times R \times S$. Again it is well known [8, § 5] that there exists one and, np to a positive factor, only one non-vanishing positive Radon measure on $R \times R \times S$ which is invariant under this group, namely, the so-called kinematic measure $|d\xi d\eta d\vartheta| =$ $= |\sin \gamma|^{-1} \, |dp_1 dp_2 d\vartheta|$. The corresponding measure on Y concentrated on Y_γ will be denoted by τ_γ.

It follows now from theorem 2 that a positive Radon measure ν in Y is invariant under L if and only if it admits a disintegration (1.3) where $\varkappa$ is a positive Radon measure on Γ.

Next we consider various other transformations of Y. As before, let W be the permutation of the axes: $(w_1, w_2) \to (w_2, w_1)$. The subsequent maps have the form

$$V_i: (w_1, w_2) \to (V_{i0} w_1, \ V_{0i} w_2)$$

where the transformation V_{i0} of X for $i = 1, 2, 3$ does not belong to M.

V_{10}: The transformation of X induced by a reflexion at a fixed line in the plane R^2, e. g. by the reflexion at the axis w_0, i. e.

$$(p, \vartheta) \to (-p, \pi - \vartheta).$$

V_{20}: Change of the orientation of all lines, i. e. $(p, \vartheta) \to (-p, \vartheta + \pi)$.

V_{30}: Translation of the cylinder X, i. e. $(p, \vartheta) \to (p + p_0, \vartheta)$, p_0 fixed, $\neq 0$.

An elementary geometric reasoning shows that the group of transformations of X generated by M and any maps of two given types V_{i0} does not contain a map of the remaining type. An alternative proof will be given below.

Obviously $T_0 \in$ M entails $V_{i0} T_0 V_{i0}^{-1} \in$ M. Accordingly, let w and v_i, $i = 1, 2, 3$, be the transformations of Γ with the property that

$r \circ W = w \circ r$ and $r \circ V_i = v_i \circ r$ for $i = 1, 2, 3$. It is easy to describe w and every v_i explicitly if we represent Γ_+, Γ_-, and Γ_0 as above by the spaces $R - \{0\}$, $R - \{0\}$, and $]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$, respectively:

$$w(\delta) = \delta;\ w(\alpha) = \alpha;\ w(\gamma) = -\gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_+;$$

$$w(\gamma) = \gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_-;\ w(\gamma) = 2\pi - \gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma.$$

$$v_1(\delta) = \delta;\ v_1(\alpha) = \alpha;\ v_1(\gamma) = -\gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_+;$$

$$v_1(\gamma) = -\gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_-;\ v_1(\gamma) = 2\pi - \gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_0.$$

$$v_2(\delta) = \delta;\ v_2(\alpha) = \alpha;\ v_2(\gamma) = -\gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_+;$$

$$v_2(\gamma) = -\gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_-;\ v_2(\gamma) = \gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_0.$$

$$v_3(\delta) = \delta;\ v_3(\alpha) = 2p_0 \text{ in } \Gamma_-;\ v_3(\gamma) = \gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_+;$$

$$v_3(\gamma) = \gamma + 2p_0 \text{ if } \gamma \in \Gamma_- \text{ and } \gamma + 2p_0 \neq 0,$$

$$v_3(\gamma) = \alpha \text{ if } \gamma = -2p_0 \in \Gamma_-;$$

$$v_3(\gamma) = \gamma \text{ if } \gamma \in \Gamma_0.$$

By looking at the changes of the orientation of $\Gamma_+ \cup \{\delta\}, \Gamma_- \cup \{\alpha\}$ and $\Gamma_0 \cup \cup \{\delta\} \cup \{\alpha\}$ under these maps we see in the first place that the group of transformations of Y generated by **L** and any maps of three given types out of the types W, V_1, V_2. and V_3 does not contain a map of the remaining type.

Moreover, by the definition of τ_γ the image of τ_γ under W or V_i is the measure $\tau_{w(\gamma)}$ or $\tau_{v_i(\gamma)}$, respectively. Hence by the corollary of theorem 2, an **L**—invariant measure ν on Y written in the form (1.3) is invariant under W or V_i if and only if the corresponding measure $\varkappa$ is invariant under w or v_i, respectively. In applying this we will make use of the following trivial remark: suppose we have two bijective borelian transformations v and v' of with a borelian inverse and a decomposition of Γ into two sets Γ_e and Γ_g which are invariant under both v and v' and such that v' is the identity on Γ_e and coincides $\varkappa$—almost everywhere with v on Γ_g. Then if $\varkappa$ is invariant under v, it is also invariant under v'.

Finally, let z be a positive random measure on X which is stationary to the second order, let ν be its covariance measure defined by $\nu(A_1 \times A_2) = \mathbf{E}(z(A_1)\, z(A_2))$, and let $\varkappa$ be the corresponding measure on Γ. Then ν is invariant under W, hence $\varkappa$ is invariant under w. Therefore, using the terminology introduced at the end of the preceding chapter and recalling that $\varkappa(\Delta) = 0$ is tantamount to $\nu(r^{-1}\Delta) = 0$ we find that:

ν is invariant under reflexions at fixed lines in the plane and under the change of the orientation of all lines if almost surely there are no pairs of antiparallel, non-coincident lines, i. e. $\varkappa(\Gamma_-) = 0$;

ν is invariant under translations of the cylinder X if almost surely there are no antiparallel (coincident or non-coincident) lines, i. e. $\varkappa(\Gamma_{-} \cup \{\alpha\})=0$.

Institut für Angewandte Mathematic
Universität Heidelberg

Поступила 10.XI.1969

Կ. ԿՐԻԿԵԲԵՐԳ. Ուղիղների դաշտի կոռելյացիոն չափի ինվարիանտության հատկությունները *(ամփոփում)*

Հարթության վրա ուղիղների երկրորդ կարգի ստացիոնար դաշտերի կոռելյացիոն չափի ինվարիանտությունը անդրադարձումների նկատմամբ ապացուցված է Ռ. Դավիդսոնի կողմից կոռելյացիոն խտության գոյության դեպքում [5]—[6]։

Ներկա աշխատանքում այդ արդյունքը ապացուցված է ամենաընդհանուր դեպքում չափերի վերածման տեսության օգնությամբ։

К. КРИККЕБЕРГ. *Свойства инвариантности корреляционной меры полей прямых* (резюме)

Инвариатность относительно отражений корреляционной меры второго порядка стационарных полей прямых на плоскости была доказана Р. Давидсоном в предположении существования корреляционой плотности (см. [5], [6]). В настоящей работе этот результат доказан во всей общности с помощью теории разложения мер.

LITERATURE

1. *N. Bourbaki*, Topologie générale. Chap. 3: Groupes topologiques (Actual. scientifiques et industrielles 1143). 3 ième éd. Paris: Hermann 1960.
2. *N. Bourbaki*, Intégration. Chap. 5: Intégration des mesures. (Actual. scientifiques et industrielles 1244). 2 ième éd. Paris: Hermann 1967.
3. *N. Bourbaki*, Intégration. Chap. 6: Intégration vectorielle. (Actual. scientifiques et industrielles 1281). Paris: Hermann 1960.
4. *N. Bourbaki*, Intégration. Chap. 7: Mesure de Haar (Actual. scientifiques et industrielles 1306). Paris: Hermann 1963.
5. *R. Davidson*, Stochastic processes of flats and exchangeability. Thesis, Part 2. University of Cambridge, England, 1967.
6. *R. Davidson*, Constrection of line processes second order properties. This vol.
7. *K. Krickoberg*, Wahrscheinlickeitstheories. Stuttgart: Teubner 1963.
8. *L. A. Santalò*, Introduction to Integral Geometry. (Actual. scientifiques et industrielles 1198). Paris: Hermann 1953.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

R. E. MILES

A SYNOPSIS OF 'POISSON FLATS IN EUCLIDEAN SPACES'

The Australian National University, Canberra

Abstract. Homogeneous isotropic Poisson s-flats in Euclidean d-dimensional space E^d $(0 \leqslant s < d)$ are defined as a natural generalisation of the standard linear Poisson process, for which $s=0, d=1$. Invariant densities of integral geometry enter naturally into the ergodic theory of n-subsets of s — flats in such systems. A wide class of ergodic gamma-type probability distributions, in a sense dual to the Poisson distributions for numbers of hits, is derived. Extensions of the theory to more general systems incorporating mixtures, anisotropy, and associated cylinder sets are discussed, and mention is made of the fundamental role of the anisotropic case as a local limit when random s — dimensional varieties are superposed in E^d. Finally, the ergodic probability distributions of several associated random tessellations of convex polytopes are investigated.

Introduction. The present paper is based on two lectures given by the author at the Symposium on Integral Geometry and Geometrical Probability held at Oberwolfach in June, 1969. The main object then was to present, within the limits of a paper of reasonable length, a wide-ranging account of Poisson flats in Euculidean spaces. Emphasis was placed on the underlying connection with integral geometry, and on the wide range of possible random geometric models encompassed by such a structure. As inevitable costs of such an ambitious project, the material was somewhat selective with few examples being included, full proofs were for the most part omitted, and questions of rigour were glossed over or even ignored. This paper has much the same defects, but on the other hand it is hoped it offers a relatively effortless and illuminating introduction to this area of random geometry.

Much of the material relating to the random tessellations determined by Poisson hyperplanes is taken from the author's unpublished Ph. D. thesis [13], while Theorem 2 was announced in [14]. Specialised accounts of the planar cases $s=0$, $d=2$ and $s=1$, $d=2$ are to be found in Miles [15, 17]. The author is preparing a series of papers in which the contents of the present paper are developed in full detail. The first of these is [16].

Preliminaries. First we introduce the Poisson and gamma probability distributions which are of fundamental importance in this work.

The Poisson distribution with parameter (= its expectation = its variance) λ has p.m.f.

$$p_i = e^{-\lambda}\lambda^i/i! \qquad (i = 0, 1, \cdots). \tag{1}$$

The family of gamma distributions $\Gamma_\theta(\nu, \lambda)$ (θ, λ, ν all >0) has p.d.f.

$$f(x) = \theta\lambda^{\nu/\theta} x^{\nu-1} e^{-\lambda x^\theta}/\Gamma\left(\frac{\nu}{\theta}\right) \quad (x > 0). \tag{2}$$

and kth order moment

$$\mu_k = \left\{\Gamma\left(\frac{\nu+k}{\theta}\right)/\Gamma\left(\frac{\nu}{\theta}\right)\right\}\lambda^{-k/\theta} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

If ν/θ is a positive integer, then the d.f. of $\Gamma_\theta(\nu, \lambda)$ is

$$F(x) = q\left\{\frac{\nu}{\theta} - 1, \lambda x^\theta\right\} \quad (x \geqslant 0), \tag{4}$$

where the tails of the Poisson (λ) distribution given by (1) are defined by

$$p\{i, \lambda\} = 1 - q\{i, \lambda\} = e^{-\lambda}\{1 + \cdots + (\lambda^i/i!)\}. \tag{5}$$

The cases $\theta = 1$ and $\theta = 1$, $\nu = 1$ yield the standard gamma distribution $\Gamma(\nu, \lambda)$ of index ν and parameter λ, and the exponential distribution of parameter λ, respectively.

The random systems we consider lie in E^d, in which $x, y, \cdots$ are points and o the origin ($d = 1, 2, \cdots$). The notation $|\cdots|$ is used for the modulus of a real number, the length of a vector, full dimensional Lebesgue measure, and for determinants; the interpretation will be apparent from the context. The *ball* $|x| \leqslant q$ of centre 0 and radius q is denoted by Q_q; then its boundary ∂Q_q is the *sphere* $|x| = q$. The volume d-cotent $|Q_q|$ of Q_q is $\upsilon_d q^d$, where $\upsilon_d \equiv \pi^{d/2}/\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)$; the surface $(d-1)$—content $|\partial Q_q|$ of Q_q is $\sigma_d q^{d-1}$, where $\sigma_d \equiv$ $\equiv 2\pi^{d/2}/\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$. The weighted linear sum of the subsets $X_i \subset E^d$ with weights λ_i $(1 \leqslant i < n)$ is

$$\sum_i^n \lambda_i X_i = \left\{\sum_i^n \lambda_i x_i : x_i \in X_i, \ 1 < i < n\right\}. \tag{6}$$

We abbreviate '$X \cap Y \neq \varnothing$' to '$X \uparrow Y$', in words '*X hits Y*'. The range space of a variable$\cdots$ is often denoted by $[\cdots]$, while the subset comprising the single point$\cdots$ is $\{\cdots\}$. Finally, $\{x_*\}$ is shorthand for $\{x_i\}$ over the full range of i.

§ 1. Theory

An *s-flat* is the translate $J_s = \{x\} + J_{s(0)}$ of an s-dimensional linear subspace, or *s-subspace*, $J_{s(0)}$ in E^d ($0 \leqslant s < d$). Examples:

—s: $0\sim$ point, $1\sim$ line, $2\sim$ plane, $3\sim$ (ordinary) space, $\cdots$, $d-1\sim$ $\sim$ hyperplane. Thus, for a system of random s — flats in E^d, there are six cases of practical importance, viz. $0<s<d\leqslant 3$; and ten if 'time' is included. Since an s-subspace in E^d has $s(d-s)$ degrees of freedom, an s-flat has $(s+1)(d-s)$ degrees of freedom and hence may be parametrized by a point $b\in[b]\subset E^{(s+1)(d-s)}$. This parametrization is trivial when $s=0$. An s-flat hitting $X\subset E^d$ is termed an *s-secant* of X. Thus an arbitrary probability distribution concentrated on

$$B_x\equiv\{b: J_s(b)\uparrow X\subset E^d\} \tag{7}$$

(supposed measurable) 'is' the distribution of a randoms-secant of X.

Suppose, for each measurable subset B of $[b]$, $\int_B f(b)\ db$ is invariant with respecf to the group of Euclidean motions in E^d; that is, $\int_B f(b)\,db=\int_{B'} f(b')\ db'$ for all such motions. The existence and uniqueness, up to a contsant factor, of f is ensured by the general theory. See, for example, Santaló [21; Part III] or Nachbin [18; Chapter III]. According to Nachbin (Example 6, pp. 143—4), the s-flats of E^d form a locally compact homogeneous space under the Euclidean group, on which there is an invariant measure, unique up to a constant factor. We describe $f(b)$ as the *invariant density* in B with respect to the parametrization b, and $E(B)=\int_B f(b)\ db$ as the corresponding *invariant measure*. An explicit form of the nivariant density was first given by Blaschke, in a short monograph [2] which marked the birth of integral geometry as such; see also Petkantschin [19] and Santaló [21; § 24]. Suppose $u_1,\cdots,u_d$ are orthonormal vectors in E^d; $J_{s(0)}$ is spanned by $u_1,\cdots,u_s$; dO^s represents an $(s—1)$-dimensional volume element of the s-dimensional unit sphere with centre o throngh $u_1,\cdots,u_s$ (dO^d, which may be equated with 'du', is often written below simply as dO); and dx^{d-s} represents a $(d—s)$-dimensional volume element of the orthogonal complement of $J_{s(0)}$. In terms of these quantities, we have the intuitively apparent and convenient exterior differential relation

$$f(b)\ db=dJ_s/\int dJ_{s(0)}=dJ_{s(0)}dx^{d-s}/\int dJ_{s(0)} \tag{8}$$

where

$$dJ_{s(0)}\ dO^s\cdots dO^1=dO^d\cdots dO^{d-s+1} \tag{9}$$

(dO^1 represents the 'volume element' of a measure concentrating unit mass on both ± 1), which implies

$$\int dJ_{s(0)}=\sigma_d\cdots\sigma_{d-s+1}/\sigma_s\cdots\sigma_1. \tag{10}$$

Apart from the constant factor $\int dJ_{s(0)}$, this is the form given by Santaló [22]. Examples: —$s=0$: $f(x)=1$; $s=d-1$: if, in polar coordinates, (p, u) is the foot of the perpendicular from 0 to the hyperplane, then $f(p, u)=2/\sigma_d$, the corresponding element being $(2/\sigma_d)\,dp\,d0$. Integrating (8) over B_X, and defining X_{d-s} to be the orthogonal projection of X onto the orthogonal complement of $J_{s(0)}$, we obtain

$$F(B_X)=\int |X_{d-s}|\,dJ_{s(0)}/\int dJ_{s(0)}=M_{d-s}\{X\}, \tag{11}$$

the *mean* $(d-s)$*-projection* of X. Examples (see [16; §2, 3]): — $-M_d\{X\}=|X|$; for convex X, $M_{d-1}\{X\}=\left\{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)/2\pi^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\right\}|\partial X|$; $M_0\{X\}=1$. For $0<M_{d-s}\{X\}<\infty$, the p.d.f.

$$f_X(b)=\begin{cases} f(b)/M_{d-s}\{X\} & (b\in B_X)\\ 0 & (b\bar{\in} B_X)\end{cases} \tag{12}$$

determines a *uniform isotropic* (random) *s-secant of X*. Such secants possess rather natural properties. Thus, if J_s is a uniform isotropic s-secant of X, then

(i) $P(J_s\uparrow Y\subset X)=M_{d-s}\{Y\}/M_{d-s}\{X\}$, *independent of the 'position' of Y within X*;

(ii) given $J_s\uparrow Y\subset X$, then J_s is uniform isotropic in Y; further,

(iii) given that the flat of intersection of independent uniform isotropic secants in X hits X, this flat is a uniform isotropic secant of X of appropriate dimension.

Consider the random system comprising N independent uniform isotropic s-secants of X. The distribution of $\#_Y$, the number of secants hitting $Y\subset X$, is binomial $(N, M_{d-s}\{Y\}/M_{d-s}\{X\})$. As N, $M_{d-s}\{X\}$ both $\to\infty$ in such a way that $N/M_{d-s}\{X\}\to\rho$, the distribution of $\#_Y$ tends to Poisson $(\rho M_{d-s}\{Y\})$, in the usual way. *This and the relation* (II) *suggest the consideration of the stochastic flat process* $\mathfrak{M}(\rho; s, d)$ *in* E^d *corrseponding to the (inhomogeneous) Poisson point process in* $[b]$ *of intensity* $\rho f(b)$. This definition ensures that $\mathfrak{M}(\rho; s, d)$ is stochastically invariant with respect to Euclidean motions. Thus it is both *homogeneous* (sometimes described as 'strict stationarity'), i. e. stochastically invariant under translations; and *isotropic*, i. e. stochastically invariant under rotations. Accordingly, we describe $\mathfrak{M}(\rho; s, d)$ as *the isotropic homogeneous Poisson s-flat process of intensity* ρ *in* E^d. Immediate from (II) and the Poisson structure is

Theorem 1. *The number* $\#_X$ *of s-flats os* $\mathfrak{M}(\rho; s, d)$ *hitting* $X\subset E^d$ *has a Poisson* $(\rho M_{d-s}\{X\})$ *distribution. Further, given that* $\#_X=N$, *these* N *s-secants of X are independent uniform random s-secants of X.* It is left to the reader to derive the p.g.f. of the multivariate Poisson distribution of $(\# X(1), \cdots, \# X(m))$ for arbitrary $X(i) \subset E^d$. Examples: $\mathfrak{M}(\rho; 0,1)$ is the standard linear Poisson point process, and $\mathfrak{M}(\rho; 0, d)$ the corresponding d-dimensional point process. For clarity, the 0-flats of $\mathfrak{M}(\rho; 0, d)$ are termed particles. Since a hyperplane partitions E^d into two separated half-spaces, $\mathfrak{M}(\rho; d-1, d)$ (which includes $\mathfrak{M}(\rho; 0, 1)$) has the effect of partitioning E^d into a tessellation P of random convex polytopes (see § 3). (Thus a 1-dimensional convex polytope is an interval). The intensity ρ is also characterized as the mean s-content of s-flat of $\mathfrak{M}(\rho; s, d)$ per unit volume in E^d. We now state two of the fundamental properties of isotropic Poisson flat systems.

Independent Superposition. If $\mathfrak{M}(\rho_1; s, d), \cdots, \mathfrak{M}(\rho_m; s, d)$ are independent, then $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{M}(\rho_i; s, d)$ is a $\mathfrak{M}\left(\sum_{i=1}^{m} \rho_i; s, d\right)$.

Arbitrary Section. If J_t is an arbitrary t-flat in E^d $(d-s \leqslant t < d)$, then $J_t \cap \mathfrak{M}(\rho; s, d)$ is a $\mathfrak{M}(\rho'; s+t-d, t)$, where

$$\rho' = \left\{ \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+t-d+1}{2}\right) \right\} \rho. \tag{13}$$

Henceforth, since ρ is mostly fixed, 'ρ' is usually omitted from '$\mathfrak{M}(\rho; s, d)$'.

In this paragraph we forget $\mathfrak{M}(s, d)$ for the moment, and return to the integral geometry of s-flats in E^d. An *n-figure* of s-flats is defined to be an ordered set of n distinct s-flats (an un-ordered such set is termed an *n-set*). Parametrically,

$$c = (b_1, \cdots, b_n) \in [c] \subset E^{n(s+1)(d-s)}. \tag{14}$$

The corresponding invariant density in $[c]$ is clearly

$$f(c) = \prod_{i}^{n} f(b_i) \qquad (c \in [c]). \tag{15}$$

However, we shall use instead a special 'structural' parametrization $\bar{c}$ of an n-figure, best illustrated by an example. Taking $s=0$, $d=2$, and $b = (x, y)$, set

$$\left| \begin{array}{ll} (x_1, y_1) = (x, y) & \\ (x_2, y_2) = (x + l \cos \theta, y + l \sin \theta) & \\ (x_i, y_i) = (x + \lambda_i l \cos \overline{\theta+\Phi_i}, y + \lambda_i l \sin \overline{\theta+\Phi_i}) & (3 \leqslant i \leqslant n). \end{array} \right. \tag{16}$$

Then

$$\bar{c} = (\underbrace{x, y}_{\text{location}}; \underbrace{\theta}_{\text{orientation}}; \underbrace{l}_{\text{scale}}; \underbrace{\lambda_3, \Phi_3, \cdots, \lambda_n, \Phi_n}_{\text{shape}}) \tag{17}$$

is structural, the components contributing to the four elements of structure of the n-figure being indicated. Since in this case $f(c) = 1$,

$$\tilde{f}(\tilde{c}) = \left|\frac{\partial c}{\partial \tilde{c}}\right| f(c) = l^{2n-3} \prod_{3}^{n} \lambda_i. \tag{18}$$

For general (s, d), the intersection of the n component s-flats of an n-figure is in general an $\{ns-(n-1)d\}$—flat. Attention is here restricted to the case in which this flat is either void or at most a point, i. e. $n > d/(d-s)$. Then a *centre* $z \in E^d$ specifying the location of the n-figure can be defined, and we may write $\tilde{c} = (z, \alpha)$. Thus $z = (x, y)$ in (17). Clearly the invariant density factorises to give $\tilde{f}(\tilde{c}) = 1 \cdot f(\alpha)$. For $n > d/(d-s)$, there is in general a unique non-degenerate sphere hitting all n component s-flats an of minimal radius—the *minimal sphere* of the n-figure. In the minimal sphere has radius l, then we may write $\alpha = (l, \beta)$, in which the $\{n(s+1)(d-s)-(d+1)\}$-tuple β specifies *shape* and *orientation*. The 'characteristic length' l determines the *scale* of the n-figure. The reader should envisage the sequential construction of an n-figure by (i) z; (ii) β; (iii) l. Finally, integral geometric argument, which for reasons of space must be omitted, serves to generalise (18) to

$$\tilde{f}(\tilde{c}) = 1 \cdot f(\alpha) = 1 \cdot f(l, \beta) = l^{n(d-s)-(d+1)} f(1, \beta), \tag{19}$$

where $f(l, \beta) \equiv [f(1, \beta)]_{l=1}$.

Now re-consider $\mathfrak{M}(s, d)$. Define $\mathfrak{M}_n(s, d)$ to be the aggeregate of n-figures generated by $\mathfrak{M}(s, d)$ $(n=1, 2, \cdots)$. Thus each n-set consisting of members of $\mathfrak{M}(s, d)$ gives rise to $n!$ members of $\mathfrak{M}_n(s, d)$, and $\mathfrak{M}_n(s, d)$ may be regarded as a stochastic point process in $[c]$ or $[\tilde{c}]$. The a.s. (almost sure) countability of the members of $\mathfrak{M}(s, d)$ implies the same property for $\mathfrak{M}_n(s, d)$. Define $H_n\{X, \delta\alpha\}$ to be the number of members of $\mathfrak{M}_n(s, d)$ with centre $z \in X \subset E^d$ and with α—value lying in the notionally small $\{n(s+1)(d-s)-d\}$-dimensional interval '$\delta\alpha$' in $[\alpha]$ with opposite vertices α and $\alpha + \delta\alpha$. In addition to its normal meaning as an increment in α, $\delta\alpha$ is also used for the above-mentioned interval and the $\{n(s+1)(d-s)-d\}$-content of this interval; the interpretation intended will be apparent from the context. The corresponding normalized 'empiric average' is

$$h_q = H_n\{Q_q, \delta\alpha\}/|Q_q|. \tag{20}$$

Then

$$E(h_q) = |Q_q|^{-1} E \int_{Q_q} H_n\{dz, \delta\alpha\} = |Q_q|^{-1} \int_{Q_q} EH_n\{dz, \delta\alpha\}. \tag{21}$$

Appealing to the extreme 'Poisson' independence, and the relation $f(c)\,dc = \tilde{f}(\tilde{c})\,d\tilde{c}$, we have

$$E[H_n\{dz, \delta\alpha\}^k] = \rho^n f(\alpha)\, dz\, \delta\alpha\, \{1+0(\delta\alpha)\} \tag{22}$$

for an arbitrary positive integer k. Combining (21) and (22) with $k=1$ and applying the homogeneity of $\mathfrak{M}(s, d)$, we obtain

$$E(h_q) = \rho^n f(\alpha)\, \delta\alpha \,\{1 + 0(\delta\alpha)\}. \tag{23}$$

Henceforth, for brevity, factors like $\{1+0(\delta\alpha)\}$ are usually omitted. Similarly,

$$\operatorname{Var} h_q = |Q_q|^{-1} \int\limits_{Q_q}\int\limits_{Q_q} [E\{H_n(dx, \delta\alpha)\, H_n(dy, \delta\alpha)\} - EH_n(dx, \delta\alpha)\, EH_n(dy, \delta\alpha)]$$

$$\equiv |Q_q|^{-1} \int\limits_{Q_q}\int\limits_{Q_q} g(x-y, \delta\alpha)\, dx\, dy, \tag{24}$$

say. Now g is zero except on a subset S of $Q_q \times Q_q$, where $|S|/|Q_q| \to \to a(\delta\alpha) < \infty$ as $q \to \infty$. Further, application of Schwartz's Inequality and (22) with $k=2$ shows that $g \leqslant b(\delta\alpha) < \infty$ on S. It follows that $\operatorname{Var} h_q \to 0$ as $q \to \infty$, and so $h_q \underset{m.s.}{\to} \rho^n f(\alpha)\, \delta\alpha$, a constant, as $q \to \infty$. But, since $\mathfrak{M}(s, d)$ is homogeneous, Wiener's d-parameter ergodic theorem [30; Theorem II″] applies, giving $h_q \underset{a.s.}{\to}$ a random variable, h say, as $q \to \infty$. Since m.s. and a.s. limits coincide (=in probability limit), we have $h_q \underset{a.s.}{\to} \rho^n f(\alpha)\, \delta\alpha$ as $q \underset{a.s.}{\to} \infty$. In fact, more generally

$$H_n\{X, \delta\alpha\}/|X| \underset{a.s.}{\to} \rho^n f(\alpha)\, \delta\alpha\, \{1+0(\delta\alpha)\} \tag{25}$$

as $X \to \infty$, where $X = X_q = qX_1$, X_1 is a bounded region of E^d containing o with $|X_1| > 0$, and $X \to \infty$ is equivalent to $q \to \infty$. The significance of (25) is emphasised by

$$H_n\{X\delta\alpha_1\}/H_n\{X, \delta\alpha_2\} \underset{a.s.}{\to} f(\alpha_1)\, \delta\alpha_1\, \{1+0(\delta\alpha_1)\}/f(\alpha_2)\, \delta\alpha_2\, \{1+0(\delta\alpha_2)\} \tag{26}$$

as $|X| \to \infty$. *That is, $f(\alpha)$ is moreover the (a.s.) ergodic density of α for $\mathfrak{M}_n(s, d)$.* Ergodic densities, like invariant densities, are only defined up to a constant factor. It may be said that the ergodic density $f(\alpha)$ is the 'quotient' of the invariant density by the uniform density of the centre: $f(\alpha) = \bar{f}(c)/f(z)$. Factorization of the ergodic density for disjoint sets of components of α means that these sets are ergodically independent (providing also, of course, that the joint range is the corresponding product range, as is usually the case). Thus l and β are ergodically independent. The ergodic density of l is not normalizable over its full range $[0, \infty)$, although it may of course be normalized over a truncated range. Generally speaking, as in (18), the orientation components of β are normalizable, whereas the shape components are not.

We now show the ergodic density $l^{n(d-s)-(d+1)}$ may be normalized into an ergodic probability density in a rather natural manner. Consider a mapping

$$\alpha \to Y(\alpha) \subset E^d \tag{27}$$

where $Y(\alpha)$ may possibly be $\varnothing$, and it is supposed (writing, for brevity, $M(\alpha)$ for $M_{d-s}\{Y(\alpha)\}$):

(i) $M(\alpha)$ exists and is finite on $[\alpha]$;

(ii) $M(\alpha)$ and, in a suitable sense, $Y(\alpha)$ itself are continuous in $[\alpha]$, except possibly on sub-varieties of $[\alpha]$;

(iii) $A \equiv \{\alpha$: $M(\alpha)$ is positive and continuous$\}$ has positive Lebesgue measure in $[\alpha]$.

The corresponding mapping

$$\bar{c} = (z, \alpha) \to \{z\} + Y(\alpha) \tag{28}$$

is *translation invariant*. We shall be concerned with the aggregate

$$\mathbf{Y}_n = \{\{z\} + Y(\alpha);\ (z, \alpha): \in \mathfrak{M}_n(s, d)\} \tag{29}$$

of random 'associated sets' generated by $\mathfrak{M}_n(s, d)$. Now define, for $\alpha \in A$, $H_n^{(m)}\{X, \delta\alpha\}$ to be the number of the $H_n(X, \delta\alpha)$ members of $\mathfrak{M}_n(s, d)$ with centre in X and α-value in $\delta\alpha$, whose associated set is hit by exactly m s-flats of $\mathfrak{M}(s, d)$, *excluding the m component s-flats*. Finally, write $\mathfrak{M}_n^{(m)}(s, d)$, $\mathbf{Y}_n^{(m)}$ for the corresponding sub-aggregates of $\mathfrak{M}(s, d)$, $\mathbf{Y}_n$.

The preceding ergodic theory may be repeated, utilising the extreme Poisson independence properties of $\mathfrak{M}(s, d)$, the assumed continuity of $Y(\alpha)$, and Theorem 1, to show that

$$H_n^{(m)}\{X, \delta\alpha\}/H_n\{X, \delta\alpha\} \xrightarrow[a.s.]{} (\rho M(\alpha))^m\, e^{-\rho M(\alpha)}/m! \quad (\alpha \in A) \tag{30}$$

as $|X| \to \infty$. Thus the ergodic density of $\mathfrak{M}_n^{(m)}(s, d)$ is

$$f^{(m)}(\alpha) = f(\alpha)\, M(\alpha)\, e^{-\rho M(\alpha)} \qquad (\alpha \in A). \tag{31}$$

The exponential factor clearly has a powerful effect rendering normalizable hitherto non-normalizable ergodic densities.

In applications, $Y(\alpha)$ is usually *homothetically invariant* in A, i. e.

$$Y(\alpha) = Y(l, \beta) = l\,Y(1, \beta), \tag{32}$$

which implies

$$M(\alpha) = l^{d-s}\, M(1, \beta). \tag{33}$$

In this case, we may substitute $M(\alpha)$ for l in (19) and (31), i. e. $(l, \beta) = \alpha \to \alpha' = (M, \beta)$. There results.

$$\frac{H_n^{(m)}\{X, \delta(M, \beta)\}}{|X|} \xrightarrow[a.s.]{} \underbrace{\underbrace{\frac{\rho^{m+n}}{m!(d-s)}\, \frac{f(1, \beta)}{M(1, \beta)^{n-d/(d-s)}}}_{f^{(m)}(\beta)}\ \underbrace{M^{m+n-1-\frac{d}{d-s}}\, e^{-\rho M}}_{f^{(m)}(M)}}_{f^{(m)}(M, \beta)}\ \delta M \delta\beta \tag{34}$$

Thus M and β are ergodically independent, with densities as indicated.

The ergodic distribution of β is in general rather complex, but on the other hand we have

Theorem 2. *In the homothetically invariant case, the ergodic distribution of the mean projections M_{d-s} of the members of $\mathbf{Y}_n^{(m)}$, given any 'meaningful' condition on β, and thus in particular no condition, is* $\Gamma\left(m+n-\dfrac{d}{d-s}, \rho\right)$. Theorem 2 yields a wide class of distributions corresponding to varying choices of s, d, $Y(\alpha)$ and conditions on β. Note that Theorems 1 and 2 are in a sense dual, since they give respectively $P(\#|M_{d-s})$ and $P(M|_{d-s}|\#)$. In fact, Theorem 2 follows heuristically from the Bayes' relation

$$P(M_{d-s}|m, n) \propto P(M_{d-s}|n)\, P(m|M_{d-s}, n)$$

Examples of Theorem 2:- $(s, d)=$

(0,1): the total lengths of sets of n consecutive inter-particle intervals are $\Gamma(n, \rho)$;

(0,2): the areas of the 'empty' convex n-gons with particle vertices are $\Gamma(n-1, \rho)$;

(1,2): the in-radii of the polygons of the random tessellation $\mathbf{P}$ are exponential (2ρ);

(1,2): the perimeters of the n-gons of $\mathbf{P}$ are $\Gamma(n-2, \rho/\pi)$.

The reader is advised to verify these examples and perhaps construct others of his own. Note that, in applications of Theorem 2, $Y(\alpha)$ is usually *order invariant*, i. e. has the same value for all $n!$ n-figures corresponding to each n-set.

§ 2. Generalisations

We now consider three distinct generalisations of $\mathfrak{M}(s, d)$, which may all be simultaneously incorporated. As moreover s and d are arbitrary, a rather wide class of possible random models results.

1°. *Mixtures*. The *mixture*

$$\mathfrak{M}(\rho_0, \cdots, \rho_{d-1}; d) = \bigcup_{s=0}^{d-1} \mathfrak{M}(\rho_s; s, d),$$

where the $\mathfrak{M}(\rho_s; s, d)$ are supposed independent. Theorem 1 generalises trivially, as do the results in § 1 regarding independent superpositions and arbitrary sections. More interesting now is an n—figure, which comprises n_s s-flats $(0 \leqslant s < d;\ \Sigma_{s=0}^{d-1} n_s = n)$. Varga [27] gave invariant densities (which he termed 'Crofton formulae') for some such mixed n-figures in E^2 and E^3. The n component flats intersect in a $[\Sigma_s(sn_s)-(n-1)d]$-flat, and there is a characteristic length l when $\Sigma_s(d-s)n_s > d$. The invariant/ergodic density is

$$f(l, \beta) = l^{\Sigma_s (d-s) n_s - (d+1)} f(1, \beta). \tag{36}$$

Since in general $M_1\{Y(\alpha)\}, \cdots, M_d\{Y(\alpha)\}$ are not simply inter-related, there is no satisfactory extension of Theorem 2. However, an important exception is the choice of $Y(\alpha)$ as a ball, in which case $M_{d-s}=\varepsilon_{d-s}\times\times r^{d-s}$ $(0\leqslant s\leqslant d,\ r=\text{radius})$. For example, the locally maximal empty balls in the interstices between the members of $\mathfrak{M}(\rho_0,\cdots,\rho_{d-1};\ d)$ are 'tangential' to exactly $d+1$ flats; the radii of such balls touching n_s s-flats; $(0\leqslant s<d,\ \Sigma_s n_s=d+1)$ has ergodic p.d.f.

$$f(r)\,\alpha\, r^{\Sigma_s (d-s)\,n_s-(d+1)}\exp\left[-\Sigma_s\ \rho_s\varepsilon_{d-s}r^{d-s}\right], \tag{37}$$

a generalised gamma distribution. The radius distribution for the entire class of locally maximal empty balls is a weighted sum of distributions (37); the weights being

$$W(n_*)=\int_{\substack{\text{locally}\\ \text{maximal}}}\ \lim_{|X|\to\infty}\left[H_{\{n_*\}}\{X,\ \delta r d\beta\}/|X|\right]. \tag{38}$$

Clearly $W(n_*)=\prod_s \rho_s^{n_s}$.

2° *Anisotropy*. Since a point has no orientation, this extension is lonly possible for $1\leqslant s<d$. Parametrizing an s-subspace by the $s\,(d-s)$ tuple a, we have $b=(a,\ x^{d-s})$. Consider the anisotropic analogue

$$\hat{F}(db)=\Theta(da)\,dx^{d-s} \tag{39}$$

of (8), in which Θ is a general probability measure on [a]. The important property preserved from § 1 is that $\hat{F}(B)$ is invariant under transations. The analogue of (11) is

$$\hat{F}(B_X)=\int|X_{d-s}(a)|\,\Theta(da)\equiv\hat{M}_{n-s}\{X\}. \tag{40}$$

A *uniform* Θ (random) *s-secant of* X has probability element $\hat{F}(db)/\hat{M}_{d-s}\{X\}$ $(b\in B_X)$. $\mathfrak{M}(\rho;\ s,\ d;\ \Theta)$ is now defined in the natural way, $\#_X$ having a Poisson $(\rho\hat{M}_{d-s}\{X\})$ distribution (Theorem 1). The independent superposition

$$\bigcup_i \mathfrak{M}(\rho_i;\ s,\ d;\ \Theta_i)=\mathfrak{M}(\sum_i\rho_i;\ s,\ d;\ \sum_i\rho_i\,\Theta_i/\sum_i\rho_i), \tag{41}$$

and in general the section $J_t\cap\mathfrak{M}(\rho;\ s,\ d;\ \Theta)$ is a $\mathfrak{M}(\rho';\ s+t-d,\ t;\Theta')$. One difference from the isotropic case should be noted. In $\mathfrak{M}(s,\ d)$, almost surely no two s-flats are parallel. But here, if a_0 is an atom of Θ, then a 'fraction' (in an ergodic sense) $\Theta(\{a_0\})$ of the members of $\mathfrak{M}(s,\ d;\ \Theta)$ have orientation a_0. The translational invariance means that $\mathfrak{M}(s,\ d;\ \Theta)$ is homogeneous, and so admits an ergodic theory. Turning to n-figures, the 'nth product' of (39) admits a similar decomposition to that in (19), in the sense that the independent $l^{n(d-s)-(d+1)}$ density carries over. Consequently Theorem 2 extends, $\Gamma\left(m+n-\dfrac{d}{d-s},\ \rho\right)$ now being the ergodic distribution of $\hat{M}_{d-s}$ for $\mathbf{Y}_n^{(m)}$ in the homothetically invariant case. In particular, since $\hat{M}_i\{\zeta_q\} = M_i\{Q_q\}$, ergodic 'ball' distributions are unchanged. Thus (37) extends unchanged when 1° and 2° are combined.

It emerges from § 1 that the isotropic $\mathfrak{M}(s, d)$ is fundamental in the sense of integral geometry; on the other hand, $\mathfrak{M}(s, d; \Theta)$ is of fundamental importance as a *local limit*, as we now explain. Suppose V_0 is a movable smooth s-dimensional variety in E^d, whose position is determined by a centre $z \in E^d$ and a d-frame $\{u_1, \cdots, u_d\}$ of orthonormal vectors emanating from z, fixed with respect to V_0. Randomising by giving (z, u_*) thd distribution $D(z, u_*)$ furnishes the *random image* V of V_0. We suppse $D(z|u_*)$ is continuous for all $\{u_*\}$ for which it is defined, and set

$$Y = \{x \in E^d: 0 < \lim_{q \to 0} q^{s-d} P\{V \uparrow \{x\} + Q_q\} < \infty\}. \tag{42}$$

Consider n independent random images $V^1, \cdots, V^N$ of V_0. It may be shown that, under the above conditions, the local limit of the system in the neighbourhood of $x \in Y$ as $N \to \infty$, under the local dilation $(y-x)' = N(y-x)$ at x, is $\mathfrak{M}(\rho_x; s, d; \Theta_x)$. Both ρ_x and Θ_x depend on V_0 and D, as well as x.

Suppose that z is independent of $\{u_*\}$ and is uniform over some region R of E^d. Then, assuming edge effects near ∂R have been eliminated, the local limit is the same at all points of R. If, moreover, $\{u_*\}$ is uniform (i. e. normalized Haar measure on the d-dimensional rotation group) then the local limit is $\mathfrak{M}(s, d)$. The conditions for the local limit at x to be $\mathfrak{M}(\rho_x; s, d; \Theta_x)$ may be widened by, for instance, sampling the s-varieties from some distribution, and allowing them a certain degree of mutual dependence. Actually, $\mathfrak{M}(0, d)$ is equally fundamental as a local limit, having been discussed by Goldman [8].

3° *Cylinders*. For each member J_s of $\mathfrak{M}(s, d)$, associate a random set W_{d-s} in the $(d-s)$-subspace orthogonal to J_s, the association being stochastically invariant with respect to translations of J_s. Consider the system of cylinder sets

$$\mathbf{C} = \{J_s + W_{d-s}: J_s \in \mathfrak{M}(s, d)\}. \tag{43}$$

The case $s = 0$ has been considered by Takács [26] and Giger and Hadwiger [5], amongst others. If the W_{d-s} are independently and identically distributed, then the number of cylinders containing $x \in E^d$ has a Poisson $(\rho E|W_{d-s}|)$ distribution. It is then an ergodic result that the 'fraction of E^d' which is i-covered (in the sense of the limiting fraction of Q_q as $q \to \infty$) is

$$p_i = (\rho E|W_{d-s}|)^i \exp[-\rho E|W_{d-s}|]/i! \qquad (i = 0, 1, \cdots). \tag{44}$$

If the random sets W_{d-s} are almost surely convex, then mutual intersection probabilities of the members of $\mathbf{C}$ hitting arbitrary fixed convex sets of E^d may be investigated by means of iteration of the complete system of kinematic formulae of integral geometry — see Streit [25]. This technique serves also to generalise Theorem 1 when, moreover, X itself is convex. Clearly independent superpositions and arbitrary sections yield corresponding Poisson cylinder systems, but equally clearly Theorem 2 does not extend. We conclude § 2 by exploring a special case of 3°.

Coverage and concentration. Consider N arbitrary subsets of a set X in a general space. Suppose $x \in X$ lies in $H(x)$ of these subsets, and define

$$\underline{H}_X = \min_{x \in X} H(x), \; \overline{H}_X = \max_{x \in X} H(x). \tag{45}$$

That is, the least—and most-covered regions of X are respectively $\underline{H}_X$ and $\overline{H}_X$— covered. Alternatively, $\underline{H}_X$ and $\overline{H}_X$ determine the overall *coverage* of X by the subsets, and the maximal *concentration* of the subsets in X, respectively. If the subsets are random, then we should like to know the jount p.m.f. of $(\underline{H}_X, \overline{H}_X)$.

Poisson discs. We now sketch the derivation of asymptotic probabilities of coverage and concentration for the special case of C in which discs of fixed radius r are centred at each particle of $\mathfrak{M}$ (0,2).

(i) *Coverage.* A disc in E^2 is a *loc. max.*$^{(j-1)}$ disc with respect to $\mathfrak{M}$ (0,2) if it contains $j+2$ particles, 3 of which lie in its perimeter circle in the form of an acute—angled triangle. Ignoring edge effects, which may be shown to be of negligible importance as $|X| \to \infty$, it is a geometrical identity that $\underline{H} > j$ iff every loc. max.$^{(j-1)}$ disc with centre in X has radius $< r$. Write $H^{(j-1)}\{X, \delta r\}$ for the number of loc. max.$^{(j-1)}$ discs with centre in X and radius in $(r, r+\delta r)$. By a specialisation of the theory of § 1, it may be shown [17; § 13] that, as $|X| \to \infty$,

$$H^{(j-1)}\{X, \delta r\}/|X| \underset{a.s.}{\to} 2\rho\,(\pi\rho)^{j+1} r^{2j+1} e^{-\pi\rho r^2}\,\delta r/(j-l)! \quad (j=1, 2, \cdots). \tag{46}$$

Thus, asymptotically as $|X| \to \infty$, the aggregate of loc. max.$^{(j-1)}$ radii in X 'behaves like 'an independent sample of size $j\rho|X|$ from a $\Gamma_2(2j+2, \pi\rho)$ distribution. Falsely assuming such behaviour we should have, for arbitrary positive θ,

$$P(\underline{H}_X > j) = (1 - p\{j, \pi\rho r^2\})^{j\rho|X|} \to e^{-\theta} \tag{47}$$

as $|X| \to \infty$, provided $j\rho|X|\,p\{j, \pi\rho r^2\} = \theta$. This suggests

$$P(\underline{H}_X > j) \sim \exp\left[-j\rho|X|\,e^{-\pi\rho r^2}\left\{1 + \cdots + \frac{(\pi\rho r^2)^j}{j!}\right\}\right] \quad (j=0,1,\cdots) \tag{48}$$

as $|X| \to \infty$. In fact, a rigorous *spatial* investigation of the homogeneous stochastic point process of loc. max.$^{(j-1)}$ centres and their associated radii shows that our 'dependent sampling' is 'asymptotically sufficiently independent' for $\sup_{r>0}|$(left side—right side) in (48)$| \to 0$ as $|X| \to \infty$. The main argument is similar to that of Watson [28]. The formula (48) with $j=1$ appears to be quite accurate even when $\rho|X|$ is as small as 100—see Gilbert [7; p. 330] for the results of a computer simulation.

(ii) *Concentration.* Since the method applying here may be regarded as the dual of that of (i), we give even sketchier details. A disc in E^2 is a *loc. min.*$_{(k-1)}$ disc with respect to $\mathfrak{M}$ (0,2) if it contains $k+1$ particles, 2 of which lie in the perimeter circle at the ends of a diameter. Ignoring edge effects, $\overline{H}_X \leqslant k$ iff every loc. min.$_{(k-1)}$ and loc. max.$^{(k-2)}$ disc with centre in X has radius $>r$. Write $H_{(k-1)}\{X, \delta r\}$ for the total number of either of these types with radius in $(r, r+\delta r)$. Further specialisation of § 1 [17; § 13] shows that, as $|X| \to \infty$,

$$H_{(k-1)}\{X, \delta r\}/|X| \underset{a.s.}{\rightarrow} 2(k+1)\rho(\pi\rho)^k r^{2k-1} e^{-\pi\rho r^2}\delta r/(k-1)! \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{49}$$

Thus $H_{(k-1)}\{X, \delta r\}$ approximates to a $(k+1)\rho|X|$—sample from a $\Gamma_2(2k, \pi\rho)$ distribution. In analogy with (47),

$$P(\overline{H}_X \leqslant k) = (1 - q\{k-1, \pi\rho\})^{(k+1)\rho|X|}, \tag{50}$$

suggesting

$$P(\overline{H}_X \leqslant k) \sim \exp\left[-(k+1)\rho|X|e^{-\pi\rho r^2}\left\{\frac{(\pi\rho r^2)^k}{k!} + \cdots\right\}\right] \quad (k=1,2,\cdots). \tag{51}$$

This is in fact true in the same sense as (48), and with a similar justification.

These results generalise to higher dimensions. For Poisson spheres in E^3,

$$\begin{cases} P(H_X \geqslant j) \sim \exp[-(3\pi^2/32)\, j\,(j+1)\,\rho|X|\,p\{j+1,\ 4\pi\rho r^3/3\}] \\ P(\overline{H}_X \leqslant k) \sim \exp[-\{4+(3/8)(\pi^2+16)(k-1)+(3\pi^2/32)(k-1)(k-2)\}\times \\ \qquad \times \rho|X|\,q\,\{k-1, 4\pi\rho r^3/3\}]. \end{cases} \tag{52}$$

It is hoped (48), (51) and (52) may prove useful in statistical applications; for instance, in testing the hypothesis of independent uniformity for point process data. A corresponding pair of formulae for general d may be derived. The interesting derivation utilises relations (66) and (67) below together with iteration of the general kinematic formulae for spaces of constant curvature, given by Santaló [23]. Incidentally, this iteration implies Wendel's [29] formula giving the probability that N independent isotropic random hemispheres on a sphere in E^d completely cover that sphere ($N=2, 3, \cdots$).

§ 3. Random Tessellations

A *tessellation* in E^d is defined to be an aggregate of convex polytopes which cover E^d without overlapping. (Henceforth we omit 'convex', since all polytopes considered are in fact convex). In this final section we investigate certain natural random tessellations generated by homogeneous Poisson flat systems.

But first consider a general random tessellation T in E^d for which a probability space with all necessary regularity properties has been established. Our examples are all of this type, since each depends in a simple way upon its underlying $\mathfrak{M}(s, d)$. A natural desirable property of T is homogeneity, i. e. stochastic invariance under translations. This is implied by isotropy, i. e. stochastic invariance under rotations. Note that arbitrary sections by a flat are random tessellations with corresponding properties. For a polytope T, let $Z=(Z_1, \cdots, Z_m)$ be a partial (or even complete) *description* of its Euclidean invariant properties. For us, important possible components of Z are $\{M_*\}$; $\{N_*\}$, where N_s is the number of s-facets (s-dimensional polytope facets) in ∂T; $\{L_*\}$, where L_s is the sum of the s-contents of the N_s s-facets; and I, the in-radius. It is convenient to write $V\equiv L_d\,(=M_d)$, $S\equiv L_{d-1}$ and $N\equiv N_0\,(=L_0)$. The polytope T is the convex hull of its set of N 0-facets or vertices. The standard reference on convex polytopes is Grünbaum [9].

We now sketch the general procedure required to establish ergodic distributions for T. Suppose Z is an arbitrary description, and that Z' is a 'particular value' in $[Z]$. Define H_q to be the number of polytopes of T 'within' Q_q, and $H_q(Z')$ to be the number of these for which $Z_i \leqslant Z_i'$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. We write "'within'" here on the supposition that edge effects due to polytopes which hit ∂Q_q may be shown by *ad hoc* means to be of negligible importance as $q \to \infty$. The homogeneity of T implies the homogeneity of stochastic processes ot the type $\{Y(x)\}$ $(x \in E^d)$, where $Y(x)$ is the value of the description Y for the polytope Tx of T containing x. The homogeneity allows the application of Wiener's d—parameter ergodic theorem [30; Theorem 11″] to the empiric averages $\int_{Q_q} Y(x)\,dx/|Q_q|$ of such processes. Such application to $Y_1(x)=1/V(x)$ and $Y_2(x)=K_{Z'}(x)/V(x)$, where the indicator random variable $K_{Z'}(x)$ indicates the event $[Z_i(x) \leqslant Z_i' \,(1 \leqslant i \leqslant m)]$ ensures the existence of the almost sure limits H, $H(Z')$ of $H_q/|Q_q|$, $H_q(Z')/|Q_q|$, respectively, as $q \to \infty$. In the important metrically transitive case these limits, which are in general random, degenerate to constants. However, although in practice metrical transitivity is difficult to prove directly, the demonstration of the 'asymptotic independence of T in distant localities of E^d', a sort of d-dimensional mixing condition, suffices to ensure the constancy of H and $H(Z')$. Then

$$H_q(Z')/H_q \underset{a.s.}{\to} H(Z')/H \equiv F(Z'), \tag{53}$$

the value of the *ergodic d.f. of Z for* T at the particular value Z'.

The general problem is the determination of $F(Z)$ for the important and natural descriptions Z. Write $G(Z)$ for the usually well-defined d.f. of Z for the polytope containing an arbitrary point of E^d, e.g. T_0. A by-product of the above ergodic theory is the basic relation

$$F(dV, dZ) = G(dV, dZ)/V \int V^{-1} G(dV), \tag{54}$$

which may be derived heuristically by regarding, on account of homogeneity, the origin o to be a 'random point in E^d'. This relation is important, if only because G is usually more accessible than F. Another way of expressing (54) is to say that T_0 is a 'Vf' polytope, where f represents the 'density' (i.e. combined p.m.f./p.d.f.) of F. Then a 'random polytope of T' is an 'f' polytope. Another *re*-assuring by-product of the ergodic theory is that the empiric mean of scalar Z (the quotient of the empiric averages of $Y_3(x) = Z(x)/V(x)$ and $Y_1(x)$) converges to the ergodic mean:

$$E_q(Z) \underset{a.s.}{\to} E(Z) = \int Z F(dZ) \quad \text{as } q \to \infty. \tag{55}$$

Example: For $d=2$, $E(N) = 2\chi/(\chi-2)$ where χ is the mean number of sides meeting at each vertex of T (for further details, see Matschinski [11] and Miles [17; § 10]).

The random tessellation **P**. Let us combine the elements 2°, 3° in the case $s = d-1$. Suppose (b, w) represents the *hyperslab* containing all points of E^d whose perpendicular distance from the hyperplane b is at most w; b, w are its *mid-hyperplane* and *semi-thickness*, respectively. Let Φ be a general probability distribution in (a, w) for which $E(w) < \infty$ and the marginal distribution of a is Θ. Generate in the usual way the system $\mathfrak{M}(\rho; d-1, d; \Phi)$ of hyperslabs. Thus its members are $\{(p_i, u_i, w_i)\}(i=1, 2, \cdots)$, where

(i) the perpendiculars $\{p_i\}$ from o to the mid-hyperplanes constitute a $\mathfrak{M}(0, 1)$ of intensity 2ρ on $[0, \infty)$;

(ii) independently of (i), $\{(u_i, w_i)\}$ are independently sampled from Φ. Write $\mathbf{P}^+$ for the aggregate of polytope interstices between these hyperslabs. The system of mid—hyperplanes, which constitutes a $\mathfrak{M}(\rho; d-1, d; \Theta)$, has the effect of partitioning E^d into a random tessellation, **P** say. (Clearly, for $\mathbf{P}^+$ and **P** to exist, it is necessary that Θ be not 'too degenerate'). Using Grünbaum's [9] terminology, almost surely every polytope of $\mathbf{P}^+$ and **P** is simple, i. e. each s-facet lies in the intersection of $d-s$ (d—1)-facets $(0 \leqslant s < d)$. Further, each s-facet of **P** lies in the boundaries of 2^{d-s} members of **P** $(0 \leqslant s < d)$. Now, given that o is not covered by any member of $\mathfrak{M}(d-1, d; \Phi)$, let T_0^+ be the member of $\mathbf{P}^+$ containing it. It may be shown that T_0^+ (under this condition) and T_0 (with no conditions imposed) have the same stochastic construction. Consequently, since (54) applies to both $\mathbf{P}^+$ and **P**, *the ergodic distributions of* $\mathbf{P}^+$ *and* **P** *are* *identical*! Thus, for example, Theorem 2 and 2° imply that, for P^+, the ergodic distribution of I is exponential (2ρ), and the conditional ergodic distribution of $\hat{M}_{d-s}$ given N_{d-s} is $\Gamma(N_{d-s}-d, \rho)$.

Although attention is restricted henceforth to P generated by $\mathfrak{M}(d-1, d)$, it should be borne in mind that the following results apply equally to associated P^+. The invariant density element for a hyperplane in E^d is $f(h)\, db = (2/\sigma_d)\, dp\, d0$. Hence the invariant density element for a d-figure of hyperplanes is $(2/\sigma_d)^d \prod_1^d dp_i\, d0_i$. If z is their common point, then $p_i = z.u_i\, (1 \leqslant i \leqslant d)$, and so

$$\left|\frac{\partial p_*}{\partial z}\right| = \text{modulus of } |u_1 \cdots u_d| \equiv \Lambda_d(u_*) \tag{56}$$

say, the d-content of the parallelotope with edges $\{u_*\}$. Thus the invariant density element is alternatively $(2/\sigma_d)^d \Lambda_d(u_*)\, dz \prod_1^d d0_i$, from which it follows that the ergodic p.d.f. of $\{u_*\}$ at the vertices of P is

$$\Phi(u_*) = \Lambda_d(u_*) / \int \Lambda_d(u_*)\, d0_1 \cdots d0_d. \tag{57}$$

The invariant density for a $(d+1)$-figure of hyperplanes is $(2/\sigma_d)^{d+1} \prod_0^d dp_i\, d0_i$. Write y, I for the in-centre and in-radius of the simplex so formed. Define $u_i' = \pm u_i$ so that the feet of the perpendiculars from y to the hyperplanes are $\{y + Iu_*'\}$. Then $|p_i| = y.u_i' + I\, (0 \leqslant i \leqslant d)$, and so

$$\left|\frac{\partial p_*}{\partial (y, I)}\right| = \text{modulus of} \begin{vmatrix} 1 \cdots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ u_0' \cdots u_d' \end{vmatrix} \equiv \nabla_d(u_*') \tag{58}$$

say, which is d! times the d-content $\nabla_d(u_*')$ of the simplex with vertices at the points $u_i' \in \partial Q_1$. Thus the invariant density element is alternatively $(2/\sigma_d)^{d+1} \nabla_d(u_*')\, dy\, dI \prod_0^d d0_i$, from which it follows that the in-simplices of P have ergodic p.d.f.

$$f(I, u_*) = 2\rho\, e^{-2\rho I} \cdot \nabla_d(u_*) / \int_K \nabla_d(u_*)\, d0_0 \cdots d0_d \tag{59}$$

restricted to $K = \{\{u_*\}$: there is no hemisphere of ∂Q_1 containing all the $u_i\}$. An 'f' polytope may be constructed about its in-centre by means of (59), the remaining $[N_{d-1} - (d+1)]$ $(d-1)$-facets being determined by a $\mathfrak{M}(d-1, d)$ restricted so that none of its members hit the already determined in-ball. Actually, the joint orientation densities of (57) and (59) extend to the anisotropic case upon weighting by $\prod \Theta(du_i)$.

Suppose v is an arbitrary unit vector. Almost surely the relation 'extreme point of a polytope in the direction v' sets up a (1,1) correspondence between the vertices and the members of P. Hence, since each vertex is almost surely a vertex of 2^d polytopes, it is clear that

$E(N)=2^d$. This essentially geometrical property extends to the anisotropic case. The stochastic construction of an 'f' polytope with respect to its 'extreme v point' is clear:

(i) construct $\mathfrak{M}(d-1, d)$;

(ii) independently construct d random hyperplanes through 0 with joint distribution (57) and, of the 2^d convex polyiopal cones into which E^d is thereby partitioned, let C_0 be the a.s. unique one having 0 as extreme v point;

(iii) $T_0 \cap C_0$ is then an 'f' polytope.

Given the 2^d cones *up to a random rotation* (normalised Haar measure), they do not have equal chances of being C_0. Define the polar angle of the convex cone C (apex o) to be the angle of the convex polar cone $C^p = \{x^p : x^p \cdot x > 0, \text{ all } x \in C\}$. Then the chance a given one of these cones is selected as C_0 in the random rotation is proportional to its polar angle. For example, when $d=2$, the angle at a vertex have common p.d.f. $\frac{1}{2}\sin\theta$, whereas the polygon angles at its extreme v point has p.d.f. $\{1-(\theta/\pi)\}\sin\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

Denote the t-facets of a polytope T by $T_{i,t}$, $(1 \leqslant i \leqslant N_t)$. Denote the mean s-projection of $T_{i,t}$, *with respect to the t-flat containing it*, by $M_{s,t}\{T_{i,t}\}$, and define

$$Y_{s,t}\{T\} = \sum_{i=1}^{N_t} M_{s,t}\{T_{i,t}\} \quad (0 \leqslant s < t \leqslant d). \tag{60}$$

Then the edge elements of the triangular array $\{\mathbf{Y}_{s,t}\}$ are

$$Y_{s,s} = L_s,\ Y_{s,d} = M_s,\ Y_{0,s} = N_s \quad (0 \leqslant s \leqslant d). \tag{61}$$

Miles [13] has shown that, for $\mathbf{P}$ with respect to $\mathfrak{M}(\rho;\, d-1, d)$,

$$E(Y_{s,t}) = \left\{2^{d+s-t}\binom{d}{t}\Gamma\left(\frac{t}{2}+1\right)/\Gamma\left(\frac{t-s}{2}+1\right)\right\}\left\{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\rho\right\}^s$$
$$(0 \leqslant s \leqslant t < d), \tag{62}$$

and

$$E(L_r L_s) = \frac{2^d \pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\rho}\right\}^{r+s}\sum_{i=\max(r,s)}^{d}\binom{d}{i}\left(\frac{\pi}{2}\right)^i \times$$
$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}(i)_r\,(i)_s \quad (0 \leqslant r \leqslant s \leqslant d). \tag{63}$$

The first and second order ergodic moments (62) and (63) allow the variance-covariance matrix of $(L_0, \cdots, L_d)$, and thus in particular (N, S, V), to be evaluated. The moments $E(N_*)$ in (62) may be obtained by a limiting process from a result of Cover and Efron [4;Theorem 1′].

Note that, for the mixture $\mathfrak{M}(\rho_0, \rho_{d-1}; d)$,

$$P\,(\text{a 'random polygon of } \mathbf{P}\text{' contains no particles}) = \int_0^\infty e^{-\rho_0 V}\, dF_{\rho_{d-1}}(V), \tag{64}$$

the Laplace—Stieltjes transform of the ergodic d.f. of V for $\mathbf{P}$. This offers a possible combinatorial method of investigating this perhaps most important ergodic distribution of $\mathbf{P}$.

See [15] for a more detailed discussion of the planar case, and [24] for the generalisation of this to the hyperbolic plane.

The random tessellations $\mathbf{V}$, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}'_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *generated by* $\mathfrak{M}(0, d)$. $\mathbf{V}$: Label the particles of $\mathfrak{M}(0, d)$ by y_*; for example, y_i might be the ith nearest particle to o $(i = 1, 2, \cdots)$.

$$T_i = \{x \in E^d\colon |x - y_i| \leqslant |x - y_j|,\ j \neq i\} \tag{65}$$

is almost surely a simple polytope, and $\mathbf{V} = \{T_*\}$ is a random tessellation—the *Voronoi* tessellation generated by $\mathfrak{M}(0, d)$ (see Rogers [20; Chapter 7]). Each s-facet lies in the s-flat of points which are equidistant from a set of $d - s+1$ particles. Thus, unlike $\mathbf{P}$, each s-facet lies in the boundaries of $d - s + 1$ members of $\mathbf{V}$. In the 'practical' cases $d = 2$, 3, the first order ergodic moments of V, S and $\{N_*\}$ were determined by Meijering [12], while Gilbert [6] evaluated the second order moments of V by computer calculation of definite integrals.

Blaschke [3] and Petkantschin [19] independently obtained the form

$$dx_0 \cdots dx_s = \nabla_s (x_*)^{d-s}\, dJ_s\, dx_0^s \cdots dx_s^s \tag{66}$$

of the density of $(s+1)$-figures of points in E^d. Here $\nabla_s(x_*)$ is $s!$ times the s-content $\Delta_s(x_*)$ of the s-simplex with vertices $\{x_*\}$, J_s is the s-flat containing $\{x_*\}$, and $\{x_*^s\}$ are the coordinates of these points with respect to J_s. This served as the basis of a study by Kingman [10] of the random s-flat containing $s+1$ independent uniform random points of a convex body in E^d; in particular, he solved Sylvester's classical problem for a d-ball. In fact, by means of (66), all the moments $E(\Delta_s^k)$ of the s-content Δ_s of the simplicial convex hull of an $(s+1)$-sample from certain spherically symmetric d-dimensional probability distributions (and distributions obtained by affine transformation from such distributions) may be determined; the $s+1$ sample points may even be dependent, but full spherical symmetry in E^d must be preserved. For example, if $x_1, \cdots, x_{r+s}$ $(r > 0,\ s > 0,\ 2 \leqslant r+s \leqslant d+1)$ are independent, $x_1, \cdots, x_r$ and $x_{r+1}, \cdots, x_{s+r}$ being uniformly distributed in Q_q and ∂Q_q, respectively, then

$$E(\Delta^k_{r+s-1}) = \frac{q^{r+s-1}}{(r+s-1)!} \frac{\Gamma\left(\frac{(r+s)(d+k)}{2} - s + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{(r+s)(d+k)-k}{2} - s + 1\right)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{d+k}{2}+1\right)} \right\}^r \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+k}{2}\right)} \right\}^s \prod_{i=d-r-s+2}^{d} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{k+i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)} \right\}. \tag{67}$$

Again, if $x_0, \cdots, x_s$ is an independent $(s+1)$-sample from the general d-dimensional normal distribution $N(\mu, \Sigma)$, then

$$E(\Delta^k_s) = \{(s+1)^{1/2} (2|\Sigma|^{1/d})^{s/2}/s!\}^k \prod_{i=d-s+1}^{d} \left\{ \Gamma\left(\frac{k+i}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{i}{2}\right) \right\}, \quad (1 \leqslant s < d). \tag{68}$$

A useful variant of (66) is

$$dx_1 \cdots dx_s = \Lambda_s(x_*)^{d-s} \, dJ_{s(0)} \, dx_1^s \cdots dx_s^s \tag{69}$$

in which $\Lambda_s(x_*)$ is the s-content of the parallelotope with sides $\{x_*\}$, $J_{s(0)}$ is the s-subspace spanning $\{x_*\}$, and $\{x^s_*\}$ are the coordinates of these points with respect to $J_{s(0)}$. Using (69), it may similarly be proved that, if $\{x_*\}$ is an s-sample from $N(\mu, \Sigma)$, $(s+1)^{1/2}$ times the s-content of the simplicial convex hull of o and $\{x_*\}$ also has the moments (68). Although this latter result is well-known, (68) itself seems new. Of course (see, for example, Anderson [1; § 7.5]) the distribution is also the distribution of the 'generalised sample variance' common of a $(d+1)$-sample from an s-dimensional normal distribution. The distributions of Δ_1 and Δ_2 in (68) are khown. They are $\Gamma_2(d, 1/4|\Sigma|^{1/d})$ and $\Gamma(d-1, 2/\sqrt{3}\,|\Sigma|^{1/d})$ respectively.

We shall now show that

$$dx_0 \cdots dx_d = R^{d^2-1} \nabla_d(u_*) \, dz \, dR \, d0_0 \cdots d0_d, \tag{70}$$

where z, R are the circum-centre and circum-radius of $\{x_*\}$: $x_i = z + Ru_i$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$. If the foot of the perpendicular from 0 to the hyperplane (p_i, u_i) is x_i, then

$$dx_0 \cdots dx_d = \prod_{i=0}^{p} p_i^{d-1} \, dp_i \, d0_i \qquad \text{which, by (58)} \tag{71}$$

$$= \prod_{i=0}^{d} p_i(y, I, u_*)^{d-1} \, d0_i \cdot \Delta_d(u_*) \, dy \, dI$$

where y, I are the in-centre and in-radius, respectively, of the simplex formed by $\{(p_*, u_*)\}$,

$$\equiv \Phi(y, I, u_*) \, dy \, dI \prod_{i=0}^{d} d0_i,$$

say. But clearly

$$dx_0 \cdots dx_d = \psi(R,\, u_*)\; dz\, dR \prod_{i=0}^{d} d0_i, \tag{72}$$

for some function ψ, since z must be uniform and independent of (R, u_*). Now $y=0$ iff $z=0$, in which case $l=R$. Moreover, $dy=dz$ and $dl=dR$ at $y=z=0$. (This may be demonstrated geometrically in the case in which an arbitrary p_i is adjusted by dp_i, leaving the remaining p_i and all the u_i fixed. It follows that it is also true when all the p_i are adjusted by dp_i together.) Hence, by (71) and (72),

$$\psi(R,\, u_*) = \Phi(0,\, R,\, u_*) = R^{d^2-1}\, \nabla_d(u_*), \tag{73}$$

which completes the derivation of (70)

Combining (66) and (70), we obtain

$$dx_0 \cdots dx_s = \nabla_s\, (u_*^s)^{d-s+1}\, R^{ds-1}\, dz dJ_{s(0)}\, dR\, d0_0^s \cdots d0_s^s, \tag{74}$$

where z, R are the circum-centre and circum-radius of $\{x_*\}$ in the s-flat $\{z\} + J_{s(0)}$ containing these points. This relation, assisted by (67), is tailor-made for the determination of the ergodic moments

$$E(L_s) = \frac{2^{d-s+1}\pi^{\frac{d-s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{d^2-ds+s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{d-s+\frac{s}{d}} \Gamma\left(d-s+\frac{s}{d}\right)}{(d-s)!\; d\, \Gamma\left(\frac{d^2-ds+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-s} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \rho^{s/d}} \qquad (0 \leqslant s \leqslant d) \tag{75}$$

of V.

D: Each vertex of V is the circum-centre of a set of $d+1$ particles of $\mathfrak{M}(0, d)$, the convex hull of which is a simplex. The aggregate of such random simplices is a tessellation—the *Delaunay* tessellation D (for a verification, see Rogers [20; Chapter 8]). On account of (70), the ergodic p.d.f. of D

$$f(R;\, u_0, \cdots, u_d) = e^{-\rho\varepsilon_d R^d}\, R^{d^2-1}\, \Delta_d(u_*). \tag{76}$$

Thus R is independent of $\{u_*\}$ and has a $\Gamma_d(d^2, \rho\varepsilon_d)$ distribution. By means of (76), the formula $V = R^d \Delta_d(u_*)$ and the moments (67), we obtain all the ergodic moments

$$E(V^k) = \\ = \frac{(d+k-1)!\, \Gamma\left(\frac{d^2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d^2+dk+k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k+1} \prod_{i=2}^{d+1} \left\{\Gamma\left(\frac{k+i}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\right\}}{(d-1)!\, \Gamma\left(\frac{d^2+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d^2+dk}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+k+1}{2}\right)^{d+1} \left(2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} \rho\right)^k} \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{77}$$

of V for D. For $d=1$, $\mathbf{D} \equiv \mathbf{P}$ and V is exponential (ρ).

$\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}_n$ $(n=1, 2, \cdots)$: An arbitrary point of E^d almost surely possesses a set of n nearest particles; the points possessing the same set of n nearest particles form a simple polytope; the aggregate of such polytopes is defined to be $\mathbf{V}_n$. The random tessellation $\mathbf{V}_n$ is rather similar to $\mathbf{V}\equiv\mathbf{V}_1$, in that each s—facet is a facet of d—$s+1$ polytopes of $\mathbf{V}_n$. In fact, (74) implies that the joient orientation p.d.f. of the $d-s+1$ particles equidistant from an s—facet of $\mathbf{V}_n$ is given by

$$f\,(u_0^{d-s}, \cdots, u_{d-s}^{d-s}) = \nabla_{d-s}\,(u_*^{d-s})^{s+1} \qquad (0 \leqslant s \leqslant d-2) \tag{78}$$

The joint orientation of the $\binom{d-s+1}{2}$ $(d-1)$-facets meeting at this s-facet may in theory be deduced from (78).

Taking into account the *order* of the n nearest particles, we obtain $\dot{\mathbf{V}}_n$, a 'refinement', of, and more complex than, $\mathbf{V}_n$. In fact, denoting the union of polytope boundaries of a tessellation $\mathbf{T}$ by $\partial\mathbf{T}$, we have

$$\partial\dot{V}_n = \partial\mathbf{V}_1 \cup \cdots \cup \partial\mathbf{V}_n. \tag{79}$$

It may be shown that the local limit (see § 2) as $n \to \infty$ of $\dot{\mathbf{V}}_n$ at an arbitrary point of E^d is $\mathbf{P}$ with respect to $\mathfrak{M}\,(\rho_n;\, d-1,\, d)$, where

$$\rho_n = \left\{ 2^{3d-1}\, d!\, \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)^{2-\frac{1}{d}} \Big/ \pi^{1/2}\,(2d)! \right\} \rho^{1/d}\, n^{2-\frac{1}{d}}. \tag{80}$$

The values of each of $E(V)$, $E(S)$ and $E(N)$ in the case $d=2$ are given in [17; § 10].

Dept. of statistics, R.S.S.S.,
Canberra, Australia

Поступило 15.X. 1969

Ռ. Ե. ՄԱՅԼՍ. Հարթությունների պուասոնյան դաշտեր էվկլիդյան տարածություններում *(ամփոփում)*

E^d-ում s-հարթությունների համասեռ իզոտրոպ պուասոնյան դաշտերը սահմանվում են որպես ուղղի վրա (s=0, d=1) ստանդարտ պուասոնյան պրոցեսի բնական ընդհանրացումներ։ Դիտարկվում է s-հարթությունների n-ենթաբազմությունների էրգոդիկ տեսությունը այդպիսի դաշտերում։ Դուրս է բերվում Γ տիպի բաշխումների մի լայն դաս։

Այդ տեսության այլ ընդհանրացումների թվում դիտարկվում են որոշ պատահական մոզաիկաներ ուռուցիկ պոլիտոպներից։

Р. Е. МАЙЛС. *Пуассоновские поля плоскостей в евклидовых пространствах* (резюме)

Однородные изотропные пуассоновские поля s-плоскостей в E^d определяются как естественные обобщения стандартного пуассоновского процесса на прямой ($s=0$, $d=1$). Рассматривается эргодическая теория n-подмножеств s — плоскостей в таких полях. Выводится широкий класс распределений типа Г.

В числе других обобщений этой теории рассматриваются некоторые случайные мозаики из выпуклых политопов.

REFERENCES

1. *T. W. Anderson, An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, New York, 1958.
2. *W. Blaschke*, Integralgeometrie 1. Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n. Hermann, Paris (Act, Sci. Indust. № 252) 1935.
3. *W. Blaschke*, Integralgeometrie 2, Zu Ergebnissen von M. W. Crofton. Bull. Math, Soc. Roumaine des Sci. 37 3--11, (1935).
4. *T. M. Cover* and *B. Efron*, Geometrical pbobability and random points on a hypersphere. Ann. Math. Statist. 38 1967, 213 –220.
5. *H. Giger* and *H. Hadwiger*, Über Treffzahlwahrscheinlichkeiten im Eikörperfeld. Z. Wahrscheinlichleitstheorie verw. Geb. 10, 1968, 329—334.
6. *E. N. Gilbert*, Random subdivisions of space into crystals. Ann. Math. Statist. 33, 1962, 958—972.
7. *E. N. Gilbert*, The probability of covering a sphere with N circular caps. Biometrika 52, 1965, 323—330.
8. *J. R. Goldman*, Stochastic point processes: limit theorem, Ann. Math. Statist. 38, 1967, 771—779.
9. *B. Grünbaum, Convex Polytopes* Wiley, New York, 1967.
10. *J. F. C. Kingman*, (to appear) Random secants of a convex body. J. Appl. Prob.
11. *M. Matschinski*, Considérations statistiques sur les polygones et les polyèdres' Pybl. Inst. Stat. Univ. Paris 3, 1954, 179—201.
12. *J. L. Meijering*, Interface area, edge length, and number of vertices in crystal aggregates with random nycleation. Philips Ros. Rep. 8 1953 270—290.
13. *R. E. Miles*. Random polytopes: the generalisation to n dimensions of the intervals of the interval, of a Poisson process. Ph. D. Thesis. Cambridge Univ., 1961,
14. *R. F. Miles*, (1964). A wide class of distributions in Geometrical Probability (abstract) Ann. Math. Statist. 35 1407.
15. *R. E. Miles*, (1964) Random polygons determined by random lines in a plane. Proc. Nat. Acad. Sci. 52 901—907; 11 1157—1160.
16. *R. E. Miles*, (1969) Poisson flats in Euclidean spaces. Part 1: A finite number of random uniform flats. Adv. Appl. Prob. 1.
17. *R. E. Miles*, (1969). On the homogeneous planar Poisson point process. Mathematical Biosciences.
18. *L. Nachbin*, (1965). *The Haar Integral*. van Nostrand, Princeton.
19. *B. Petkantschin*, (1936). Integralgeometrie 6. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n—dimensionalen Raum. Abh. Math. Seminar Hamburg 11 249—310.
20. *C. A. Rogers*, (1964) *Packing and Covering*. Cambridge U.P. (Math. Tract № 54).
21. *L. A. Santaló*, (1953) *Introduction to Integral Geometry*, Hermann, Paris (Act. Sci. Indust. № 1198).
22. *L. A. Santaló*, (1955) Sur la mesure des espaces lineares qui coupent un corps convexe et problemes qui s'y rattachent. Colloque sur les questions de réalité en géométrie, Liège 177—190. Georges Thone, Liège; Masson et Cie, Paris.
23. *L. A. Santaló*, (1962) Sobre la formula fundamental cinematica de la geometria integral en espacios de curvatura constante. Mathematicae Notae 18 79—94.
24. *L. A. Santaló*, (1966) Valores medios para poligonos formados por rectas al azar en el plano hiperbolico, Universidad Nacionbl de Tucuman, Revista Ser. A 16 29—43.
25. *F. Streit*, (to appear) On multiple integral geometric integrals and their applications to probability theory, Canadian J. Math.
26. *L. Takács*, (1958) On the probability distributinn of the measure of the union of random sets placed in a Euclidean space. Ann. Univ. Sci. Budapest., Eötvös Sect. Math. 1 89—95.

27. *O. Varga*, (1935) Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum. Math. Z. 40 387—405.

28. *G. S. Watson*, (1954) Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes. Ann. Math. Statist. 25 798—800.

29. *J. G. Wendel*, (1962) A problem in geometric probability. Math. Scand. 11 109—111.

30. *N. Wiener*, (1939). The Ergodic. Theorem. Duke Math. J, 5 1—18.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

L. A. SANTALO

MEAN VALUES AND CURVATURES

We divide this exposition into two parts. Part 1 refers to the mean value of the Euler—Poincaré characteristic of the intersection of two convex hypersufaces in E_4. Part 11 deals with the definition of q-th total absolute curvatures of a compact n-dimensional variety imbedded in euclidean space of $n+N$ dimensions, extending some results given in [10].

I. On convex bodies in E_4

1. Introduction. Let K be a convex body in 4-dimensional euclidean space E_4 and let W_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) be its Minkowski's *Quermass integrale* (see for instance Bonnesen—Fenchel [1]). Recall that

$$\begin{aligned} W_0 &= V = \text{volume of } K \\ 4W_1 &= F = \text{area of } \partial K \\ W_4 &= \pi^2/2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

and, if K has sufficiently smooth boundary, we have also

$$4W_2 = M_1 = \text{first mean curvature} = \frac{1}{3}\int_{\partial K}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)d\sigma$$

$$4W_3 = M_2 = 2 \text{ th mean curvature} = \frac{1}{3}\int_{\partial K}\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_1R_3}+\frac{1}{R_2R_3}\right)d\sigma \tag{1.2}$$

where R_i are the principal radii of curvature and $d\sigma$ is the element of area of ∂K.

For instance, if $K=$ sphere of radius r, we have

$$V=\frac{1}{2}\pi^2r^4, \quad F=2\pi^2r^3, \quad M_1=2\pi^2r^2, \quad M_2=2\pi^2r. \tag{1.3}$$

We will use throughout the invariants V, F, M_1, M_2 because they have a more geometrical meaning; however we do not assume smoothness to ∂K, so that as definition of M_1, M_2 we take $M_1=4W_2$, $M_2=4W_3$.

The invariants V, F, M_1, M_2 are not independent. They are related by certain inequalities which may be written in the following symmetrical form (following Hadwiger [6]).

$$W_\alpha^{\beta-\gamma}\, W_\beta^{\gamma-\alpha}\, W_\gamma^{\alpha-\beta} \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant 4. \tag{1.4}$$

In explicit form and using the invariants V, F, M_1, M_2 the inequalities (1.4) give the following non-independent inequalities

$$F^2 > 4VM_1, \quad F^3 \geqslant 16\, V^2 M_2, \quad F^4 \geqslant 128\, \pi^2 V^3,$$

$$M_1^3 > 4\, VM_2, \quad M_1^2 \geqslant 2\, \pi^3 V, \quad M_2^4 \geqslant 32\, \pi^6 V,$$

$$M_1^2 > FM_2, \quad M_1^3 > 2\, \pi^2 F^2, \quad M_2^3 > 4\, \pi^4 F,$$

$$M_2^2 \geqslant 2\, \pi^2 M_1.$$

We will represent throughout the paper by O_i the volume of the i-dimensional unit sphere, that is

$$O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)} \tag{1.6}$$

or instance

$$O_0 = 2, \; O_1 = 2\pi, \; O_2 = 4\pi, \; O_3 = 2\pi^2, \; O_4 = \frac{8}{3}\pi^2, \; O_5 = \pi^3. \tag{1.7}$$

2. Mean value of $\chi\,(\partial K \cap g\partial K)$. Let G be the group of isometries of E_4. For any $g \in G$ we represent by $g\partial K$ the image of ∂K by the isometry g. Let dg denote the invariant volume element of G (=kinematic density for E_4). Assume the convex body K fixed and consider the intersections $\partial K \cap g\partial K$, $g \in G$. Then, Federer [5] and Chern [2] have proved the following integral formula

$$\int_G \chi\,(\partial K \cap g\partial K)\; dg = 64\, \pi^2 F M_2 \tag{2.1}$$

where $\chi\,(\partial K \cap g\partial K)$ denote the Euler—Poincaré characteristic of the surface $\partial K \cap g\partial K$.

On the other side, the so-called fundamental kinematic formula of integral geometry, gives

$$\int_{K \cap gK \neq \varnothing} dg = 8\pi^2 \left(4\pi^2 V + 2\, FM_2 + \frac{3}{2}\, M_1^2 \right) \tag{2.2}$$

Therefore the expected value of $\chi\,(\partial K \cap g\partial K)$ is

$$E\,(\chi\,(\partial K \cap g\partial K)) = \frac{8\, F\, M_2}{4\pi^2 V + 2FM_2 + \frac{3}{2}\, M_1^2}. \tag{2.3}$$

Notice that, being K convex, the intersections $\partial K \cap g\partial K$ are closed orientable surfaces. Thus the possible values of χ are, either $\chi = 2, 4, 6, \cdots$ or $\chi = 0, -2, -4, -5, \cdots$ If K is an euclidean sphere, obvionsly we have $E\,(\chi) = 2$.

Conjecture. *For all convex sets K of E_4 the inequality*

$$E(\chi(\partial K \cap g\partial K)) \leqslant 2 \tag{2.4}$$

holds good, equality for the euclidean sphere.

Putting

$$\Delta = 8\pi^2 V + 3M_1^2 - 4FM_2 \tag{2.5}$$

the conjecture is equivalent to prove that $\Delta > 0$. For the euclidean sphere, accrding to (1.3) we have $\Delta = 0$.

In support of this conjecture we will prove it for rectangular parallelepipeds. Let a, b, c, d be the sides of a rectangular parallelepiped in E_4 and assume

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \tag{2.6}$$

It is known that (Hadwiger [6])

$$V = abcd, \quad F = 2\,(abc + abd + acd + bcd),$$

$$M_1 = \frac{2}{3}\pi\,(ab+ac+ad+bc+bd+cd), \quad M_2 = \frac{4}{3}\pi\,(a+b+c+d).$$

With these values we verify the identity

$$\frac{3}{4\pi}\Delta = (4-\pi)[a^2c^2 + a^2(c-b)^2 + b^2(c-a)^2 + a^2(d-b)^2$$

$$+ c^2(d-a)^2 + b^2(b-c)^2 + c^2(d-b)^2] + (18\pi - 56)\,abcd$$

$$+ (4\pi - 12)\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + (8-2\pi)[(b-a)\,acd +$$

$$+ (c-b)\,abd + (d-c)\,acb] + (4-\pi)\,d^2\,[(2A^2 - B^2)$$

$$(a^2 + b^2) + (Ac - Ba)^2 + (Ac - Bb)^2],$$

where $A^2 = (3\pi - 8)/(8 - 2\pi)$, $B^2 = (8 - 2\pi)/(3\pi - 8)$.

Since all terms are positive, we have $\Delta > 0$.

For an ellipsoid of revolution whose semiaxes are a, a, a, λa we have (Hadwiger [6])

$$V = \frac{\pi}{2}\lambda a^4, \quad F = 2\pi^2\lambda^2 a^3\, F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2;\ 1-\lambda^2\right),$$

$$M_1 = 2\pi^2\lambda^3 a^2\, F\left(\frac{5}{2}, 1, 2;\ 1-\lambda^2\right), \tag{2.7}$$

$$M_2 = 2\pi^2\lambda^4 a\, F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2;\ 1-\lambda^2\right)$$

where F denotes the hypergeometric function. In this case the conjecture writes

$$1 + 3\lambda^5 F_1^2 - 4\lambda^5\, F_{1/2}\, F_{3/2} > 0 \tag{2.8}$$

where

$$F_{1/2} = F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}.\ 2;\ 1-\lambda^2\right),$$

$$F_1 = F\left(\frac{5}{2}, 1, 2;\ 1-\lambda^2\right),$$

$$F_{3/2} = F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2;\ 1-\lambda^2\right).$$

I do not know if (2.8) holds for all values of λ.

II. Absolute total curvatures of compact manifolds immersed in euclidean space

1. Introduction. In this section we extend and complete the contents of [10]. We shall first state some known formulas which will be used in the sequel.

Let L_h be a h-dimensional linear subspace in the $(n+N)$-dimensional euclidean space E_{n+N}. We will call it, simply, a h-space. Let $L_h(0)$ be a h-space in E_{n+N} through a fixed point 0. The set of all oriented $L_h(0)$ constitute the Grassman manifold $G_{h,\,n+N-h}$. We shall represent by $dL_h(0)$ the element of volume of $G_{h,\,n+N-h}$, which is the same thing as the density for oriented h-spaces through 0. The expression of $dL_h(0)$ is well known, but we will recall it briefly for completeness (see [9], [2]).

Let $(O;\ e_1, e_2, \cdots, e_{n+N})$ be an orthonormal frame in E_{n+N} of origin O. In the space of all orthonormal frames of origin O we define the differential forms

$$\omega_{im} = -\omega_{mi} = e_m\, de_i. \tag{1.1}$$

Assuming $L_h(O)$ spanned by the unit vectors $e_1, e_2, \cdots, e_h$, then

$$dL_h(O) = \Lambda\omega_{im} \tag{1.2}$$

where the right side is the exterior product of the forms ω_{im} over the range of indices

$$i = 1, 2, \cdots, h;\quad m = h+1,\ h+2, \cdots,\ n+N.$$

The $(n+N-h)$ – space $L_{n+N-h}(O)$ orthogonal to $L_h(O)$ is spanned by $e_{h+1}, \cdots, e_{n+N}$ and (1.2) gives the duality

$$dL_h(O) = dL_{n+N-h}(O) \tag{1.3}$$

The measure of the set of all oriented $L_h(0)$ (= volume of the Grassman manifold $G_{h,\,n+N-h}$) may be computed directly from (1.2) (see [9]). or applying that it is the quotient space $SO(n+N)/SO(h)\times \times SO(n+N-h)$ (see [2]). The result is

$$\int_{G_{h,\,n+N-h}} dL_h(O) = \frac{O_{n+N-1}\, O_{n+N-2} \cdots O_{n+N-h}}{O_1 O_2 \cdots O_{h-1}} \tag{1.4}$$

$$= \frac{O_h O_{h+1} \cdots O_{n+N-1}}{O_1 O_2 \cdots O_{n+N-h-1}}$$

where O_i is the area of the i-dimensional unit sphere (1, (1.6)).

Another known integral formula which we will use is the following.

Consider the unit sphere $\sum_{n+N-1}$ of dimension $n+N-1$ of center O. Let V^s be a s-dimensional variety in $\sum_{n+N-1}$. Let $\mu_{s+h-n-N}(V^s \cap L_h)$ be the $(s+h-n-N)$—dimensional measure of the variety $V^s \cap L_h(O)$ of dimension $s+h-(n+N)$ and let $\mu_s(V^s)$ be the s-dimensional measure of V^s (all these measures considered as measures of subvarieties of the euclidean space E_{n+N}). Then

$$\int_{O_{h,\, n+N-h}} \mu_{s+h-n-N}(V^s \cap L_h(O))\, dL_h(O) =$$

$$= \frac{O_{n+N-h}\, O_{n+N-h+1} \cdots O_{n+N-1}\, O_{h+s-n-N}}{O_1 O_2 \cdots O_{h-1}\, O_s} \mu_s(V^s) \tag{1.5}$$

Note that this formula assumes the h-spaces L_h oriented (see [8]). In particular, if $s=1$ an $h=n+N-1$ that is, for a curve V^1 of ength U we have

$$\int_{O_{n+N-1,\, 1}} \nu\, dL_{n+N-1}(O) = \frac{2\, O_{n+N-1}}{O_1} U \tag{1.6}$$

where ν is the number of points of the intersection $V^1 \cap L_{n+N-1}(0)$.

2. Defintions. Let X^n be a compact n-dimensional differentiable manifold (without boundary) of class C^∞ in E_{n+N}. To each point $\in X^n$ we attach the ρ-space $T^{(q)}(p)$ spanned by the vectors

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n};\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}; \ldots;\ \frac{\partial^q}{\partial x_1^q}, \ldots, \frac{\partial^q}{\partial x_n^q} \tag{21}$$

which we will call the q—th tangent fibre over p. Its dimension is

$$\rho(n, q) = \sum_{i=1}^{q} \binom{n+i-1}{i} \tag{2.2}$$

Assuming

$$1 \leqslant r \leqslant n+N-1, \quad \rho \leqslant n+N-1 \tag{2.3}$$

we define the r-th total absolute curvature of order q of X^n as follows:

a) *Case* $1 \leqslant r \leqslant \rho$. Let O be a fixed point of E_{n+N} and consider a $(n+N-r)$-space $L_{n+N-r}(O)$. Let Γ_r be the set of all r-spaces L_r of E_{n+N} which are contained in some of the fibres $T^{(q)}(p)$, $p \in X^n$, pass through p, and are orthogonal to $L_{n+N-r}(O)$. The intersection $\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O)$ will be a compact variety in $L_{n+N-r}(O)$ whose dimension δ we shall compute in the next section. Let $\mu(\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O))$ be the measure of this variety as subvariety of the euclidean space

$L_{n+N-r}(O)$; if $\delta = 0$, then μ means the number of intersection points of Γ_r and $L_{n+N-r}(O)$.

Then we define the r-th total absolute curvature of order q of $X^n \subset E_{n+N}$ as the mean value of the measures μ for all $L_{n+N-r}(0)$, that is, according to (1.4)

$$K_r^{(q)}(X^n) = \frac{O_1 O_2 \cdots O_{n+N-r-1}}{O_r O_{r+1} \cdots O_{n+N-1}} \int_{G_{n+N-r,\, r}} \mu(\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O))\, dL_{n+N-r}(O). \tag{2.4}$$

The coefficient of the right side may be substituted by

$$O_1 O_2 \cdots O_{r-1} / O_{n+N-r} \cdots O_{n+N-1}.$$

b) *Case* $\rho \leqslant r \leqslant n+N-1$. Instead of the set of L_r which *are contained* in some $T^{(q)}(p)$ we consider now the set of L_r which *contain* some $T^{(q)}(p)$, $p \in X^n$, and are orthogonal to $L_{n+N-r}(O)$. As before we represent this set by Γ_r and the r-th total absolute curvature of order q of $X^n \subset E_{n+N}$ is defined by the same mean value (2.4).

3. Properties. We proceed now to compute the dimension of $\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(0)$.

a) *Case* $1 \leqslant r \leqslant \rho$. The set of all $L_r \subset E_{n+N}$ is the Grassman manifold $G_{r+1,\, n+N-r}$ whose dimension is $(r+1)(n+N-r)$. The set of all L_r which are contained in $T^{(q)}(p)$ and pass through p is the Grassman manifold $G_{r,\, \rho-r}$ of dimension $r(\rho-r)$; therefore the set of all L_r which are contained in some $T^{(q)}(p)$, $p \in X^n$, has dimension $r(\rho-r)+n$. On the other side, the set of all $L_r \subset E_{n+N}$ which are orthogonal to $L_{n+N-r}(O)$ has dimension $n+N-r$. Consequently, the intersection of both sets, as sets of points of $G_{r+1,\, n+N-r}$, has dimension

$$r(\rho-r)+n+n+N-r-(r+1)(n+N-r) = r\rho+n-r(n+N).$$

Since to each L_r orthogonal to $L_{n+N-r}(0)$ corresponds one and only one intersection point with this linear space, the preceding dimension coincide with the dimension δ of $\Gamma_r \cap L_{n+N-r}$, that is,

$$\delta = \dim(\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(0)) = r\rho+n-r(n+N).$$

Hence, in order that $K_r^{(q)}(X^n) \neq 0$, it is necessary and sufficient that

$$r\rho+n \geqslant r(n+N) \tag{3.1}$$

b) *Case* $\rho \leqslant r \leqslant n+N-1$. The set of all $L_r \subset E_{n+N}$ which contain a fixed L_ρ, constitute the Grassman manifold $G_{r+\rho,\, n+N-r}$ and therefore the dimension of the set of all L_r which contain some $T^{(q)}(p)$, $p \in X^n$, is $(r-\rho)(n+N-r)+n$. The remainder dimensions are the same as in the case a), so that the dimension of the set of all L_r which contain some $T^{(q)}(p)$, $p \in X^n$, and are orthogonal to $L_{n+N-r}(O)$ is

$$(r-\rho)(n+N-r)+n+n+N-r-(r+1)(n+N-r) = r\rho+n-\rho(n+N)$$

that is

$$\delta = \dim\left(\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O)\right) = \rho r + n - \rho(n+N)$$

In order that $K_r^{(q)}(X^n) \neq 0$, it is necessary and sufficient that

$$\rho r + n > \rho(n+N). \tag{3.2}$$

Of course, to (3.1) and (3.2) we must add the relations (2.3).

The most interesting cases correspond to $\delta = 0$, for which the measure μ in (2.4) is a positive integer and the total absolute curvature is invariant under similitudes. In this case the set of points $p \in X^n$ for which L_r contains or is contained in $T^{(q)}(p)$ can be divided according to the index of p, and we get different curvatures as those defined by Kuiper for the case $q=1$, $r=n+N-1$ [7]. We will not go into details here.

4. Examples.

4.1. Curves, $n=1$. For $n=1$ the condition (3.1) writes

$$1 > r + r(N-\rho)$$

and since $\rho \leqslant N$ the only possibility is $\rho = N$, $r=1$, which gives $\delta=0$. The corresponding curvature $K_1^{(N)}(X^1)$ is

$$K_1^{(N)}(X^1) = \frac{1}{O_N} \int\limits_{G_{N,1}} \nu_1 \, dL_N(0) \tag{4.1}$$

where ν_1 is the number of lines in E_{n+N} orthogonal to $L_N(0)$ which are contained in some N—th tangent fiber of the curve X^1. Notice that $G_{N,1}$ is the unit sphere $\sum_N$ and $dL_N(0)$ is the element of area of this sphere in consequence of the duality (1.3). If $e_1, e_2, \cdots, e_{N+1}$ are the principal normals of X^1 then the formula (1.6) says that the right side of (4.1) is equal to the length of the spherical curve $e_{N+1}(s)$ (s=arc length of X^1) up to the factor $1/\pi$. That is, if $\varkappa_N$ is the N-th curvature of X^1 (see, for instance, Eisenhart [4], p. 107) we have

$$K_1^{(N)}(X^1) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{X^1} |\varkappa_N| \, ds. \tag{4.2}$$

For the case of curves in E_3, $N=2$, $\varkappa_N$ is the torsion of the curve and $K_1^{(2)}$ is up to the factor π^{-1}, the *absolute total torsion* of X^1.

The condition (3.2) gives $1 > \rho + \rho(N-r)$ and since $r \leqslant N$, this condition implies $\rho=1$, $r=N$. We have the curvature

$$K_N^{(1)}(X^1) = \frac{1}{O_N} \int\limits_{G_{1,N}} \nu_N \, dL_1(O), \tag{4.3}$$

where ν_N is the number of hyperplanes L_N of E_{N+1} orthogonal to $L_1(O)$ which contain some tangent line of X^1. The same formula (1.6) gives now that the right side of (4.3) is equal to the length of the curve $e_1(s)$ (=spherical tangential image of X^1), up to the factor $1/\pi$. Therefore, if $\varkappa_1$ is the first curvature of X^1, (4.3) writes

$$K_N^{(1)}(X^1) = \frac{1}{\pi}\int_{X^1} |\varkappa_1|\, ds. \tag{4.4}$$

Notice that for each direction $L_1(O)$ there are at least two hyperplanes orthogonal to $L_1(O)$ which contain a tangent line of X^1 (the hyperplanes which separate the hyperplanes which have common point with X^1 of those which do not have such common point). Therefore the mean value $K_N^{(1)}$ is $\geqslant 2$ and (4.4) gives the classical Fenchel's inequality

$$\int_{X^1} |\varkappa_1|\, ds \geqslant 2\pi. \tag{4.5}$$

If the curve X^1 has at least 4 hyperplanes orthogonal to an arbitrary direction $L_1(0)$ which contain a tangent line of X^1 (as it happens for instance for knotted curves in E_3), the mean value $K_N^{(1)}(X)$ will be $\geqslant 4$, and we have the Fary's inequality

$$\int_{X^1} |\varkappa_1|\, ds \geqslant 4\pi \tag{4.6}$$

4.2 Surfaces, $n=2$.

1. *Total absolute curvatures of order* 1. We have $n=2$, $\rho=2$ and condition (3.1) writes $2 \geqslant rN$. Therefore the possible cases are $r=1$, $N=1$; $r=2$, $N=1$ and $r=1$, $N=2$. For $2 \leqslant r \leqslant N+1$, condition (3.2) gives $r \geqslant N+1$ and therefore the only possible case is $r=N+1$.

a) Case $r=1$, $N=1$. Surfaces in E_3. Having into account that $G_{2,1}$ is the unit sphere $\sum_2$, the curvature (2.4) writes

$$K_1^{(1)}(X^2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_2} \lambda\, dL_2(0) \tag{4,7}$$

where λ is the length of the curve in the plane $L_2(O)$ generated by the intersections of $L_2(O)$ with the lines of E_3 which are tangent to X^2 and are orthogonal to $L_2(O)$. If H denotes the mean curvature of X^2 and $d\sigma$ denotes the element of area of X^2, it is known that (4.7) is equivalent to the *total absolute mean curvature*

$$K_1^{(1)}(X^2) = \frac{1}{2}\int_{X^2} |H|\, d\sigma. \tag{4.8}$$

b) Case $r=2$, $N=1$. Surface $X^2 \subset E_3$. The Grassman manifold $G_{1,2}$ is the unit sphere $\sum_2$ and (2.4) can be written

$$K_2^{(1)}(X^2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_2} \nu_2\, dL_1(0) \tag{4.9}$$

where ν_3 is the number of planes in E_3 which are tangent to X^2 and are orthogonal to the line $L_1(O)$. If K denotes the Gaussian curvature of X^2, since $dL_1(O)$ is the element of area on $\sum_2$, it is easy to see that (4.9) is equivalent, up to a constant factor, to the *total absolute Gaussian curvature* of X^2, that is

$$K_2^{(1)}(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_{X^2}|K|\,d\sigma. \tag{4.10}$$

c) *Case* $r=1$, $N=2$. Surfaces $X^2\subset E_4$. In this case, writting $\sum_3$ = unit 3-dimensional sphere, instead of $G_{3,1}$, we have

$$K_1^{(1)}(X^2)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\Sigma_3}\nu_1\,dL_3(0) \tag{4.11}$$

where ν_1 is the number of tangent lines to X^2 which are orthogonal to the hyperplane $L_3(0)$. Properties of this total absolute curvature it seems to be not known. A geometrical interpretation was given in [10].

d) *Case* $r=N+1$. Surfaces $X^2\subset E_{N+2}$. According to (2.4) we have the following curvature

$$K_{N+1}^{(1)}(X^2)=\frac{1}{O_{N+1}}\int_{\Sigma_N}\nu_{N+1}\,dL_1(O) \tag{4.12}$$

where ν_{N+1} is the number of hyperplanes of E_{N+2} which are tangent to X^2 and are orthogonal to the line $L_1(O)$ and $\sum_N$ denotes the N-dimensional unit sphere. Up to a constant factor this curvature coincides with the *curvature of Chern—Lashof* [3]. Since obviously $\nu_{N+1}\geq 2$ we have the inequality $K_{N+1}^{(1)}\geq 2$, with the equality sign only if X^2 is a convex surface contained in a linear subspace L_3 of E_4.

For $N=2$, X^2 is a surface imbedded in E_4 and the curvature (4.12) is a kind of dual af the curvature (4.11) (see [10].

2. *Total absolute curvatures of order* $q=2$. We have $n=2$, $p=5$ and the inequalities (3.1) and (3.2) say that the only possible cases are: a) $r=1$, $N=4$; b) $r=2$, $N=4$; c) $r=1$, $N=5$.

a) *Case* $r=1$, $N=4$. Surface X^2 in E_6. The Grassman manifold $G_{5,1}$ is the unit sphere $\sum_5$ and (2.4) can be written

$$K_1^{(2)}(X^2)=\frac{1}{O_5}\int_{\Sigma_5}\lambda\,dL_5(O) \tag{4.13}$$

where λ is the length of the curve in $L_5(O)$ generated by the intersections of $L_5(O)$ with the lines of E_6 which are orthogonal to $L_5(O)$ and belong to some of the 2-th tangent fibres of X^2.

b) *Case* $r=2$, $N=4$. Surface X^2 in E_6. We have

$$K_2^{(2)}(X^2)=\frac{O_1}{O_4O_5}\int_{G_{4,2}}\nu_2\,dL_4(O) \tag{4.14}$$

where ν_2 is the number of 2-spaces of E_6 which are orthogonal to $L_4(O)$ and are contained in some 2-th tangent fibre of X^2.

c) Case $r=1$, $N=5$. Surfaces X^2 in E_7.

We have

$$K_1^{(2)}(X^2)=\frac{1}{O_6}\int\limits_{\Omega_6} \nu_1\, dL_6\,(O) \tag{4.13}$$

where ν_1 is the number of lines of E_7 which are contained in some 2-th tangent fibre of X^2 and are orthogonal to $L_6\,(O)$.

The expression of these absolute total curvatures of order 2 by means of differential invariants of X^2 is not known.

Buenos Aires, Argentina Поступило 5.X.1969

Լ. Ա. ՍԱՆՏԱԼՈ. Միջին արժեքներ և կորություն *(ամփոփում)*

Հոդվածի առաջին մասում առաջ է քաշվում (2.4) անհավասարության իրավացիության հիպոթեզը $K \subset E_4$ և gK (g-ն E_4-ում իզոմետրիայի ձևափոխություն է) բազմությունների մակերևույթների հատման էյլերյան խարակտերիստիկի միջին արժեքի համար։ Այդ հիպոթեզը ստուգվում է, երբ K-ն զուգահեռանիստ է։

Երկրորդ մասը նվիրված է E_{n+N}-ում խորասուզված n չափանի կոմպակտ դիֆերենցելի բազմաձևության r-րդ q կարգի լրիվ բացարձակ կորության սահմանմանը։

Л. А. САНТАЛО. *Средние значения и кривизны* (резюме)

В первой части статьи выдвигается гипотеза о справедливости неравенства (2.4) для среднего значения эйлеровой характеристики пересечения поверхностей множеств $K \subset E_4$ и gK (g—преобразование изомерии в E_4). Эта гипотеза проверяется, когда K есть параллелепипед.

Вторая часть посвящена определению r-той полной абсолютной кривизны порядка q погруженного в E_{n+N} компактного дифференцируемого n-мерного многообразия.

BIBLIOGRAPHY

1. *T. Bonnesen, W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper, Erg. der Mathematik, Berlin, 1934.
2. *S. S. Chern*, On the kinematic Formula in Integral Geometry, J. of Math. and Mechanic, 16, 1966, 101—118.
3. *S. S. Chern, R. K. Lashof*, On the total curvature of immersed manifolds, Am. J. Math. 79, 1957, 306—318.
4. *L. P. Eisenhart*, Riemannian Geometry, Princeton, 19, 1949.
5. *H. Federer*, Curvature Measures, Trans. Am. Math. Soc. 93, 1959, 418—491.
6. *H. Hadwiger*, Vorlesungen über Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie, Springer, Berlin, 1957.
7. *N. Kuiper*, Der Satz von Gauss—Bonnet fur Abbildungen in E^N und damit verwandte Probleme, Jahr. Deutsch. Math. Ver. 69, 1967, 77—88.
8. *L. A. Santaló*, Geometria integral en espacios de curvatura constante, Publicaciones Com. Energia Atómica, Serie Matem. Buenos Aires, 1952.
9. *L. A. Santaló*, Sur la mesure des éspaces linéaires qui coupent un corps convexe et problemes que s'y rattachent, Colloque sur les questions de réalité en Géométrie, Liege, 1955, 177—190.
10. *L. A. Santaló*, Curvaturas absolutas totales de variedades contenidas en un espacio euclidiano, Coloquio de Geometria Diferencial, Santiago de Compostela (Espana), octubre 1967, 29—38.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա V, № 3, 1970 Математика

HERBERT ZIEZOLD

ÜBER DIE ECKENANZAHL ZUFÄLLIGER KONVEXER POLYGONE

§ 1. Einleitung

In den Arbeiten [2], [3] und [4] betrachten A. Rényi und R. Sulanke zufällige konvexe Polygone, die in [2] und [3] gleich der konvexen Hülle von n zufälligen Punkten (der euklidischen Ebene) sind, in [4] aber gleich demjenigen von n zufälligen Geraden erzeugten Polygon, das einen ausgezeichneten Punkt, zum Beispiel den Ursprung enthält. Sie erhalten in ihren asymptotischen Formeln für den Erwartungswert der Eckenanzahl der zufälligen konvexen Polygone in [2] und [4] bei analogen Wahrscheinlichkeitsverteilungen in erster Näherung im wesentlichen dasselbe Ergebnis. Diese Tatsache führte mich dazu, die Ergebnisse der Arbeit [4] mit Hilfe einer Korrelation direkt in Aussagen über die konvexe Hülle von n zufälligen Punkten zu transformieren, wie im Abschnitt 2.5 dieser Arbeit ausgeführt ist. Danach waren die Sätze des § 3 naheliegend, die zusammen mit dem Dualitätssatz erklären, warum sich in den Arbeiten [2] und [4] für entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieselben Anfangsglieder der asymptotischen Formeln ergeben müssen.

§ 2. Der Dualitätssatz

2.1 *Die Abbildung* $\varkappa$. Diejenige Abbildung. die jedem Punkt (x_0, x_1, x_2) eines zweidimensionalen, reellen, projektiven Raumes Π^2 die Gerade mit denselben projektiven Koordinaten zuordnet, ist bekanntlich eine Korrelation (G. Pickert [1], S. 309f.). Bezeichnen wir diese Abbildung mit χ!

Es seien j und j' Einbettungen des zweidimensionalen, euklidischen Raumes R^2 in den Π^2, definiert durch $j(x_1, x_2)=(1, x_1, x_2)$ bzw. $j'(x_1, x_2)=(-1, x_1, x_2)$. Diese Einbettungen induzieren Abbildungen des R^2 auf die Geraden des π^2 (ausschließlich der uneigentlichen Geraden), die wir mit denselben Symbolen j bzw. j' bezeichnen.

Im folgenden werden wir die Abbildung $\varkappa := (j')^{-1}\circ\chi\circ j\,|R^2-\{0\}$ betrachten. Sie bildet $R^2-\{0\}$ auf die Menge derjenigen Geraden des R^2 ab, die nicht durch den Ursprung 0 gehen. Für $(x_1, x_2)\in R^2-\{0\}$ lautet die die Gerade $\varkappa(x_1, x_2)$ definierende Gleichung

$$x_1z_1+x_2z_2=1.$$

Die zugehörigen, sich aus der Hesseschen Normalform ergebenden Geradenkoordinaten p, φ sind

$$p(x_1, x_2)=(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}$$

$$\varphi(x_1, x_2)=\begin{cases}\operatorname{Arccot}\frac{x_1}{x_2} & \text{für } x_2>0\\ \pi+\operatorname{Arccot}\frac{x_1}{x_2} & \text{für } x_2<0.\end{cases}$$

2.2 *Transformation des Lebesgue—bzw. des euklidisch invarianten Geradenmaßes.* Identifizieren wir die Geraden mit ihren Koordinatenpaaren (p, φ), so ist also $\varkappa$ eine Abbildung von $R^2-\{0\}$ auf $]0, \infty[\times[0, 2\pi[$. Da $\varkappa$ und $\varkappa^{-1}$ stetig sind, in $]0, \infty[\times[0, 2\pi[$ sei die übliche Topologie (Oberfläche eines Zylinders!) betrachtet, sind sie meßbar und es gelten die Transformationsformeln

$$dx_1dx_2=p^{-3}dpd\varphi \tag{1}$$

$$dpd\varphi=(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{3}{2}}dx_1\,dx_2. \tag{2}$$

2.3 *Abbildung konvexer Bereiche.* Mit $H(g)$ oder auch $H(p, \varphi)$, $0<p$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, bezeichnen wir diejenige abgeschlossene Halbebene, die von g berandet wird und den Ursprung enthält.

Elementare Uberlegungen zeigen, daß eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Menge K (bzw. $K-\{0\}$, wenn $0\in K$) auf die Menge aller Geraden abgebildet wird, die die Menge

$$K^\circ=\bigcap_{(x_1, x_2)\in K-\{0\}}H(\varkappa(x_1, x_2))\cup\bigcap_{(x_1, x_2)\in K-\{0\}}H(\varkappa(x_1, x_2))^c \tag{3}$$

nicht schneiden, einschließlich der Tangenten.

Enthält K den Ursprung in seinem Innern, so gilt

$$K^\circ=\bigcap_{(x_1, x_2)\in K-\{0\}}H(\varkappa(x_1, x_2)) \tag{4}$$

und K° ist eine beschränkte, konvexe, abgeschlossene Menge, die ebenfalls den Ursprung in ihrem Innern enthält. Ist obendrein K ein r—Eck, so ist auch K° ein r—Eck und es gilt

$$K^\circ=\bigcap_{l=1}^{r}H(\varkappa(A_l)). \tag{5}$$

wobei $A_1,\cdots, A_r$ die Ecken von K bedeuten.

Liegt der Ursprung auf dem Rand oder gar außerhalb von K, so ist K° unbeschränkt. Da eine geeignete projektive Abbildung diese Menge unter Berücksichtigung der uneigentlichen Punkte in eine konvexe Menge des R^2 abbildet, nenne ich K° einen projektiv konvexen Bereich. Ist obendrein K ein r—Eck, $r\geqslant 3$, so ist K° ein projektiv konvexes r—Eck (Abb. 1) und es gilt

$$K^\circ=\bigcap_{l=1}^{r}H(\varkappa(A_l))\cup\bigcap_{l=1}^{r}H(\varkappa(A_l))^c. \tag{6}$$

In der Theorie der topologischen Vektorräume nennt man K°, falls $0 \in K$, die zu K polare Menge bezüglich der skalaren Multiplikation $x_1 z_1 + x_2 z_2$.

2.4 *Der Dualitätssatz für die Eckenanzahl zufälliger konvexer Polygone.* Wir betrachten nur Wahrscheinlichkeiten, die totalstetig bezüglich des Lebesgue—bzw. des euklidisch invarianten Geradenmaßes sind.

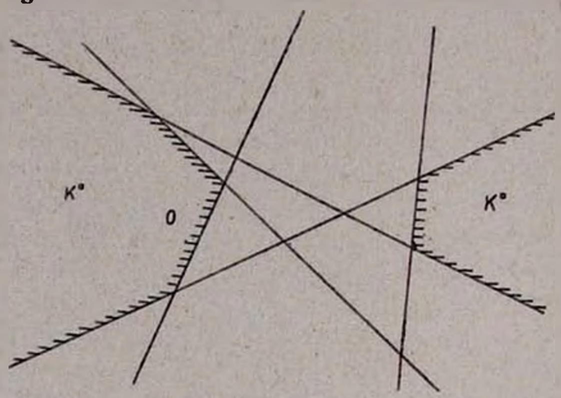

Abb. 1.

Es bezeichne $\Pi(Q_1, \cdots Q_n)$ die konvexe Hülle der n Punkte $Q_i \in R^2$, $i=1, \cdots, n$, und $\tilde{\Pi}(g_1, \cdots, g_n)$ (bzw. $\tilde{\Pi}^*(g_1, \cdots, g_n)$) das von den n Geraden g_i, $0 \notin g_i$. $i=1, \cdots, n$, erzeugte, konvexe (bzw. projektiv konvexe) Polygon, das den Ursprung enthält, *d. h.*

$$\tilde{\Pi}(g_1, \cdots, g_n) = \bigcap_{i=1}^{n} H(g_i) \tag{7}$$

$$\tilde{\Pi}^*(g_1, \cdots, g_n) = \bigcap_{i=1}^{r} H(g_i) \cup \bigcap_{i=1}^{r} H(g_i)^c. \tag{8}$$

Die Eckenanzahlen dieser Polygone bezeichnen wir entsprechend mit

$$X_n(Q_1, \cdots, Q_n),\ \tilde{X}(g_1, \cdots, g_n),\ \tilde{X}_n^*(g_1, \cdots, g_n).$$

Aus den Uberlegungen des vorigen Abschnitts folgt unmittelbar, daß $\pi(Q_1, \cdots, Q_n)^{\circ}$ identisch ist mit $\tilde{\pi}^*(\varkappa(Q_1), \cdots, \varkappa(Q_n))$, und daher gilt $X_n = \tilde{X}_n^* \circ (\varkappa^n)$. Damit folgt

$$E_{p^n} X_n = E_{(p_{\varkappa^{-1}})^n} \tilde{X}_n^*. \tag{9}$$

d. h. der

Satz: Der Erwartungswert der Eckenanzahl der konvexen Hülle von n unabhängigen, nach P verteilten Punkten ist gleich dem Erwartungswert der Eckenanzahl des (eventuell projektiv) konvexen Polygons, das von n unabhängigen nach $P\varkappa^{-1}$ verteilten Geraden erzeugt wird.

Renyi und Sulanke betrachten in [4] den Erwartungswert von $\tilde{X}_n$ statt $E\tilde{X}_n^*$. Daher zeigen wir noch das

Korollar: Die im R^2 definierte Wahrscheinlichkeit P besitze mindestens drei Dichtepunkte, deren konvexe Hülle der Ursprung im Innern enthält. Dann existiert ein positives $\gamma < 1$, so daß

$$E_{P^n} X_n = E_{(P_\varkappa-1)^n} \tilde{X}_n + 0(\gamma^n), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Beweis: Wegen (9) ist nur die Existenz eines positiven $\gamma < 1$ zu zeigen, so daß

$$E_{(P_\varkappa-1)^n} (\tilde{X}_n^* - \tilde{X}_n) = 0(\gamma^n), \; n \to \infty.$$

$\tilde{X}_n (g_1, \cdots, g_n)$ ist nur für unbeschränkte Polygone $\bar{\Pi}(g_1, \cdots, g_n)$ von $\tilde{X}_n^* (g_1, \cdots, g_n)$ verschieden. $\bar{\Pi}(\varkappa(Q_1), \cdots, \varkappa(Q_n))$ ist aber nur dann unbeschränkt, wenn $0 \bar{\in} \operatorname{int} \Pi (Q_1, \cdots, Q_n)$ (int-interior of-Inneres von). Also folgt unter Berücksichtigung von

$$0 < \tilde{X}_n \leqslant \tilde{X}_n^* \leqslant n$$

$$0 \leqslant E_{(P_\varkappa-1)^n} (\tilde{X}_n^* - \tilde{X}_n) \leqslant n P^n \{0 \bar{\in} \operatorname{int} \Pi (Q_1, \cdots, Q_n)\}.$$

Es seien D_1, D_2, D_3 drei verschiedene Dichtepunkte von P, deren konvexe Hülle den Ursprung im Innern enthält. Dann gibt es hinreichend kleine Umgebungen U_1, U_2, U_3 von D_1, D_2, D_3, so daß aus $(Q', Q'', Q''') \in U_1 \times U_2 \times U_3$ folgt $0 \in \operatorname{int} \Pi (Q', Q'', Q''')$. Da D_1, D_2 und D_3 Dichtepunkte sind, ist $\alpha = \min \{P(U_1), P(U_2), P(U_3)\} > 0$.

Aus $0 \bar{\in} \operatorname{int} \Pi (Q_1, \cdots, Q_n)$ folgt, daß in wenigstens einer der dre Umgebungen U_1, U_2, U_3 keiner der Punkte Q_i liegt. Also

$$E_{(P_\varkappa-1)^n} (\tilde{X}_n^* - \tilde{X}_n) \leqslant n \sum_{k=1}^{3} P^n \{Q_i \bar{\in} U_k, \; i = 1, \cdots, n\} \leqslant 3n (1-\alpha)^n$$

und hieraus folgt die Behauptung.

2.5 *Anwendung des Dualitätssatzes.* Mittels des eben bewiesenen Satzes lassen sich nun die Ergebnisse von Renyi und Sulanke in [2] und [4] dualisieren. Wir betrachten hier nur ein Beispiel, das den folgenden Paragraphen motivieren soll.

Es sei B ein beschränktes, konvexes, abgeschlossenes r—Eck mit Umfang b, das den Ursprung in seinem Innern enthält, G sei ein beschränktes, konvexes Gebiet mit Umfang l, das B enthält, und $\tilde{P}$ sei die bedingte Wahrscheinlichkeit bezüglich des euklidisch invarianten Geradenmaßes in der Menge aller Geraden, die Q aber nicht B schneiden. Wir wollen diese Geradenmenge mit Ω bezeichnen. Renyi und Sulanke haben in [4] gezeigt, daß

$$E_{\tilde{P}^n} \tilde{X}_n = \frac{2}{3} r \log n + 0(1), \; n \to \infty. \tag{11}$$

Aus 2.3 folgt leicht, daß das Urbild von Ω vermöge $\varkappa$ die Differenzmenge $B^\circ - G^\circ$ der zu B bzw. G polaren Mengen B° und G° ist.

Bezeichnet $1_{B^\circ - G^\circ}$ die Indikatorfunktion zu $B^\circ - G^\circ$, zo gilt wegen $\tilde{P}(d(p, \varphi)) = \frac{1_{\Omega}(p, \varphi)}{l-b} dp d\varphi$ und (2) für $P = \tilde{P}\chi$

$$P(d(x_1, x_2)) = \frac{1_{B^\circ - G^\circ}(x_1, x_2)}{(l-b)(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} dx_1 dx_2. \qquad (12)$$

Aus (11) und dem Korollar zum Dualitätssatz, angewandt auf $P = \bar{P}\chi$, folgt demnach, daß für die durch (12) gegebene Wahrscheinlichkeit P ebenfalls

$$E_{pn} X_n = \frac{2}{3} r \log n + 0(1), \quad n \to \infty.$$

Man erhält demnach also dasselbe Ergebnis wie für den Fall der bedingten Wahrscheinlichkeit in B', bzw. in einem beliebigen beschränkten, konvexen r—Eck, bezüglich des Lebesguemaßes (Renyi und Sulanke [2]). Dies führte mich zu den allgemeineren Sätzen des folgenden Paragraphen.

§ 3. Verallgemeinerung von Ergebnissen von Renyi und Sulanke

3.1 *Zufällige konvexe Polygone in einem r Eck.*

Satz: Es sei K ein beschränktes, konvexes r—Eck und P eine Wahrscheinlichkeit auf K mit einer Dichte f, die den folgenden Bedingungen genüge:

(i) Es gibt eine im Innern von K enthaltene, kompakte Menge C, derart daß f in $K - C$ beschränkt ist.

(ii) f ist in den Eckpunkten $A_1, \cdots, A_r$ von K stetig und nimmt dort positive Werte an, d. h.

$$\lim_{\substack{Q \to A_i \\ Q \in K}} f(Q) = f(A_i) > 0, \quad i = 1, \cdots, r.$$

Dann gilt für den Erwartungswert der Eckenanzahl X_n des von n unabhängigen, nach P verteilten Punkten $Q_1, \cdots, Q_n$ erzeugten Polygons $\Pi(Q_1, \cdots, Q_n)$

$$EX_n \sim \frac{2}{3} r \log n, \quad n \to \infty, \qquad (13)$$

d. h. $\lim_{n \to \infty} \frac{EX_n}{\frac{2}{3} r \log n} = 1$; log bedeutet den natürlichen Logarithmus.

Für $f = \frac{1}{F} 1_K$, F-Flächeninhalt von K, erhält man als Spezialfall den entsprechenden Satz in der Arbeit [2] von Renyi und Sulanke, während sich für $f = (1-b)^{-1} (x_1^2 + x_2^2)^{-3/2} 1_{B^\circ - G^\circ}$, B° und G° seien wie in 2.5 die zu B bzw. G polaren Mengen, der entsprechende Satz in [4] ergibt. Allerdings muß hier betont werden, daß in diesen speziellen Sätzen die asymptotische Entwicklung von EX_n noch mehr Glieder umfaßt als in unserm allgemeinen Fall.

Beweis des Satzes: Wir folgen im wesentlichen dem Gedankengang von Renyi und Sulanke in [2].

Es sei für $1 \leq i < j \leq n$ $\varepsilon_{ij}(Q_1, \cdots, Q_n)=1$, falls $\overline{Q_i Q_j}$ eine Seite von $\Pi(Q_1, \cdots, Q_n)$ ist, andernfalls 0. Damit gilt fast sicher

$$X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon_{ij} \tag{14}$$

und also

$$EX_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} E\varepsilon_{ij}. \tag{15}$$

Wegen der Invarianz der Produktwahrsheinlichkeit P^n unter Permutationen der Q_i und wegen der Existenz von Permutationen τ_{ij} mit $\varepsilon_{ij} \circ \tau_{ij} = \varepsilon_{12}$ gilt $E\varepsilon_{ij} = E\varepsilon_{12}$, $1 \leq i < j \leq n$, und also

$$EX_n = \binom{n}{2} E\varepsilon_{12}. \tag{16}$$

Es sei C gemäß der Voraussetzung (1) des Satzes gewählt, δ' sei der Abstand von C zum Rand ∂K. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der Ursprung 0 in C liegt. Wir bezeichnen für $Q_1 \neq Q_2$ mit $g(Q_1, Q_2)$ die Gerade durch Q_1 und Q_2 mit $H(Q_1, Q_2)$ die abgeschlossene Halbebene, die von $g(Q_1, Q_2)$ berandet wird und 0 enthält.

$\varepsilon_{12}(Q_1, \cdots, Q_n)$ ist genau dann von Null verschieden, wenn die Punkte $Q_3, \cdots, Q_n$ entweder alle in $H(Q_1, Q_2)$ oder alle im Komplement $H(Q_1, Q_2)^c$ liegen. Daher ergibt die Integration über $Q_3 \cdots, Q_n$

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint \left(P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} + (1 - P(H(Q_1, Q_2)))^{n-2}\right) P(dQ_1)\, P(dQ_2). \tag{17}$$

Da jede Halbebene $H(Q_1, Q_2)$ die δ'—Umgebung mindestens eines Eckpunktes von K enthält und jede dieser Umgebungen aufgrund der Voraussetzung (ii) des Satzes eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt, existiert ein $\alpha_1 > 0$ mit

$$P(H(Q_1, Q_2)) > \alpha_1, \text{ für alle } (Q_1, Q_2) \in K \times K. \tag{18}$$

Hiermit folgt für ein beliebiges positives $\alpha_2 < \alpha_1$

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint P(H(Q_1, Q_2))^{n-2}\, P(dQ_1)\, P(dQ_2) + o((1-\alpha_2)^n), \ n \to \infty.$$

Zur Auswertung des ersten Summanden zerlegen wir den Integrationsbereich wie folgt:

Es bezeichne a_i die Länge der Seite $\overline{A_i A_{i+1}}$, $i=1, \cdots, r$, $A_{r+1} = A_1$ usw. Ferner sei $\delta'' > 0$ so klein, daß aus $|A_i Q| < \delta''$, $Q \in K$, folgt

$|f(A_i)-f(Q)|<\frac{1}{2}f(A_i)$. Wir setzen $\gamma=\frac{1}{2}\min\{\delta', \delta'', a_1, \cdots, a_r\}$. Mit A_i' (bzw. A_i'') bezeichnen wir denjenigen Punkt auf $\overline{A_{i-1}A_i}$ (bzw. $\overline{A_iA_{i+1}}$), der den Abstand γ von A_i hat (Abb. 2). Für $i=1,\cdots,r$ definieren wir:

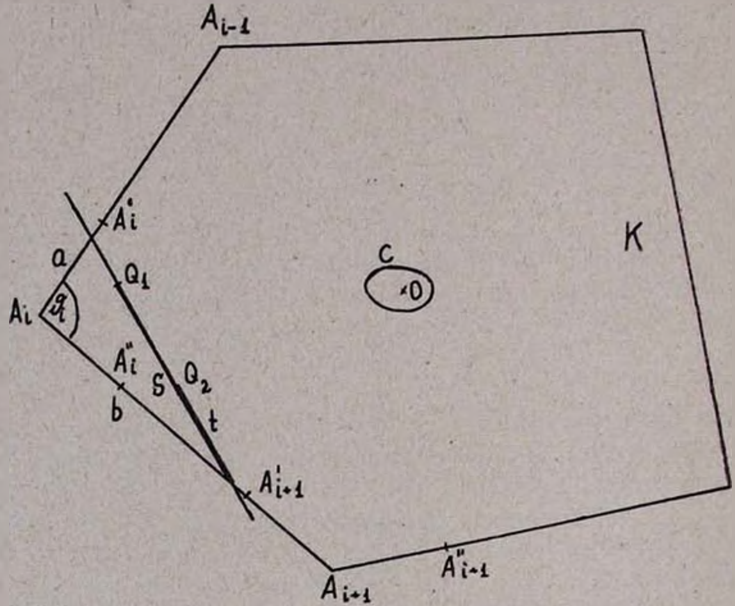

Abb. 2.

$$C_i=\{(Q_1, Q_2)\in K\times K: g(Q_1, Q_2) \text{ trifft } \overline{A_iA_i'} \text{ und } \overline{A_iA_{i+1}} \text{ oder } \overline{A_{i-1}A_i} \text{ und } \overline{A_iA_i''}\}$$

$$D_i=\{(Q_1, Q_2)\in K\times K: g(Q_1, Q_2) \text{ trifft } \overline{A_iA_i'} \text{ und } \overline{A_{i+1}A_{i+1}'}\}.$$

Für ein Punktepaar $(Q_1, Q_2)\in K\times K-\sum_{i=1}^{r}(C_i\cup D_i)$ gilt aufgrund elementarer Überlegungen $P(H(Q_1, Q_2))>1-\alpha_3'$, wobei $\alpha_3'=\min_{i=1,\cdots,r}P(\Pi(A_i, A_i', A_i''))>0$. Daher folgt für ein beliebiges positives $\alpha_3<\min\{\alpha_2, \alpha_3'\}$ aus (19)

$$EX_n=\binom{n}{2}\sum_{i=1}^{r}\iint_{C_i}P(H(Q_1, Q_2))^{n-2}P(dQ_1)P(dQ_2)+$$

$$+\binom{n}{2}\sum_{i=1}^{r}\iint_{D_i}P(H(Q_1, Q_2))^{n-2}P(dQ_1)P(dQ_2)+o((1-\alpha_3)^n),\ n\to\infty. \quad (20)$$

Wir untersuchen zunächst die Integrale über C_i, $i=1,\cdots,r$. Bei vorgegebenem i sei für $Q_1\neq Q_2$ a (bzw. b, s, t) der Abstand des

Schnittpunktes von $g(Q_1, Q_2)$ mit $\overline{A_l A_{l-1}}$ (bzw $\overline{A_l A_{l+1}}$) von A_l (bzw. A_l, Q_1, Q_2) (Abb. 2). Jedem $(Q_1, Q_2) \in C_l$ ist so eindeutig ein Quadrupel (a, b, s, t) zugeordnet, das wir mit $T(Q_1, Q_2)$ oder auch $T(x_1, y_1, x_2, y_2)$ bezeichnen. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ergibt sich zu

$$\frac{\partial (x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial (a, b, s, t)} = \frac{ab\,(t-s) \sin^2 \vartheta_l}{l^3},$$

wobei ϑ_l der Winkel bei A_l bedeutet und $l=(a^2+b^2-2\,ab\cos\vartheta_l)^{1/2}$. Setzen wir schließlich noch $\bar{f}(x_1, y_1, x_2, y_2)=f(x_1, y_1)\,f(x_2, y_2)$, so folgt

$$\iint_{C_l} P(H(x_1, y_1, x_2, y_2))^{n-2} f(x_1, y_1)\,f(x_2, y_2)\,dx_1dy_1dx_2dy_2 =$$

$$= \iint_{T(C_l)} P(H(T^{-1}(a, b, s, t)))^{n-2} \bar{f} \circ T^{-1}(a, b, s, t) \frac{ab\,|t-s| \sin^2 \vartheta_l}{l^3}\, dadbdsdt$$

$$= \iint_{\substack{[0,\gamma]\times[0,a_l] \\ \cup[\gamma,a_{l-1}]\times[0,\gamma]}} P(H'(a, b))^{n-2} \frac{ab\sin^2\vartheta_l}{l^3} \int_0^l \int_0^l \bar{f} \circ T^{-1}(a, b, s, t)|t-s|\, dsdtdadb$$

wobei wir $H'(a, b) = H(T^{-1}(a, b, s, t))$ setzen können, da diese Halbebenen von s und t unabhängig sind.

Wir setzen kürzehalber $\eta = f(A_l)$ und wählen zu positivem $\varepsilon \leqslant \frac{\eta}{2}$ ein positives $\delta \leqslant \gamma$, so daß aus $|QA_l| < \delta$, $Q \in K$, folgt $|\eta - f(Q)| < \varepsilon$. Wir zerlegen in (21) die Integration über a und b folgendermaßen

$$I = \int_0^{\gamma}\int_0^{a_l} + \int_{\gamma}^{a_{l-1}}\int_0^{\gamma} = \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} + \int_0^{\delta}\int_{\delta}^{\gamma} + \int_{\delta}^{a_{l-1}}\int_0^{\gamma} + \int_0^{\gamma}\int_{\gamma}^{a_l} \tag{22}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Zunächst schätzen wir I_1 ab.

Für $a \leqslant \delta$, $b \leqslant \delta$ gilt $P(H'(a, b)) \leqslant 1 - \frac{\eta-\varepsilon}{2} ab\sin\vartheta_l$ und $f \circ T^{-1}(a, b, s, t) \leqslant (\eta+\varepsilon)^2$, also folgt unter Beachtung von $\int_0^l\int_0^l |t-s|\, dsdt = \frac{1}{3} l^3$

$$I_1 < \int_0^{\delta}\int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\eta-\varepsilon}{2}\, ab\sin\vartheta_l\right)^{n-2} (\eta+E)^2 \frac{ab}{3} \sin^2\vartheta_l\, dadb =$$

$$= \left(\frac{\gamma+\varepsilon}{\eta-\varepsilon}\right)^2 \frac{4}{3} \int_0^{x_0}\int_0^{y_0} (1-xy)^{n-2}\, xydxdy,$$

wobei $x_0 = y_0 = \delta \left(\frac{\eta-\varepsilon}{2} \sin\vartheta_l\right)^{1/2}$.

Analog zeigt man

$$I_1 \geqslant \left(\frac{\eta-\varepsilon}{\eta+\varepsilon}\right)^2 \frac{4}{3} \int_0^{x_0^{\bullet}} \int_0^{y_0^{\bullet}} (1-xy)^{n-2} xy\,dx\,dy,$$

wobei $x_0^{\bullet} = y_0^{\bullet} = \delta\left(\frac{\eta+\varepsilon}{2} \sin \vartheta_l\right)^{1/2}$.

Nach Ausführung der Integration folgt asymptotische Beziehung

$$\left(\frac{\eta-\varepsilon}{\eta+\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2}{3} \log n + 0(1)\right) \leqslant \binom{n}{2} I_1 \leqslant \left(\frac{\eta+\varepsilon}{\eta-\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2}{3} \log n + 0(1)\right),$$

$$n \to \infty. \tag{23}$$

Darin sind die beiden Terme 0 (1) von ε abhängig und werden unendlich groß, wenn ε gegen 0 strebt.

Um I_2, I_3 und I_4 abzuschätzen, sei $d = \max\{a_{l-1}, a_l\}$ gesetzt und $L = \sup\limits_{Q \in K-C} f(Q)$. Aufgrund der Voraussetzung (i) ist $L < \infty$. Elementargeometrische Betrachtungen zeigen, daß für alle Punktepaare. die zum Integrationsbereich von I_2, I_3 und I_4 gehören, gilt

$$1 - P(H'(a, b)) > \frac{\eta}{2} \frac{ab \sin \vartheta_l}{2} \frac{\gamma}{d}.$$

Damit folgt zum Beispiel für I_2

$$I_2 \leqslant \int_0^{\delta} \int_{\gamma}^{\gamma} \left(1 - \frac{\eta\gamma}{4d} ab \sin\vartheta_l\right)^{n-2} L^2 \frac{ab}{3} \sin^2 \vartheta_l\,da\,db$$

$$= \frac{16}{3} \left(\frac{Ld}{\eta\gamma}\right)^2 \int_0^{\delta c} \int_{\delta c}^{\gamma c} (1-xy)^{n-2} xy\,dx\,dy, \quad c = \left(\frac{\eta\gamma \sin \vartheta_l}{4d}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\, 0(1), \quad n \to \infty,$$

das heißt

$$\binom{n}{2} I_2 \leqslant 0(1), \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Analog ergeben sich dieselben asymptotischen Beziehungen für I_3 und I_4.

Diese Ergebnisse zusammenfassend folgt also für $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ ebenfalls die Beziehung (23), also

$$\left(\frac{\eta-\varepsilon}{\eta+\varepsilon}\right)^2 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2} I}{\frac{2}{3}\log n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2} I}{\frac{2}{3}\log n} \leqslant \left(\frac{\eta+\varepsilon}{\eta-\varepsilon}\right)^2$$

Da dies für jedes positive $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$ gilt und I nicht von ε abhängt, folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2} I}{\frac{2}{3}\log n} = 1,$$

das heißt

$$\binom{n}{2} \iint_{C_l} P(H(Q_1, Q_2))^{n-2}\, P(dQ_1)\, P(dQ_2) \sim \frac{2}{3} \log n, \quad n \to \infty. \tag{25}$$

Somit sind in (20) nur noch die Integrale über D_l abzuschätzen. Für diese erhält man mit Methoden, die den obigen bis auf geringfügige Modifikationen analog sind,

$$\binom{n}{2} \iint_{D_l} P(H(Q_1, Q_2))^{n-2}\, P(dQ_1)\, P(dQ_2) \leqslant 0\,(1), \quad n \to \infty. \tag{26}$$

(20), (25) und (26) haben zur Folge

$$EX_n \sim \frac{2}{3}\, r \log n, \quad n \to \infty.$$

was zu beweisen war.

3.2 *Zufällige konvexe Polygone in einem konvexen Bereich mit glattem Rand.* Analog zum vorigen Satz lassen sich aus dem folgenden Satz die entsprechenden Spezialfälle in den Arbeiten [2] und [4] von Reny und Sulanke ableiten. Man hat sich im wesentlichen nur zu überlegen, wie die Krümmung unter der Korrelation $\varkappa$ transformiert wird (siehe 3.3).

Satz: Es sei K ein beschränkter, konvexer Bereich, dessen Rand ∂K eine stetige und überall positive Krümmung k besitzt. Ferner sei auf K eine Wahrscheinlichkeit P mit einer Dichte f gegeben, die in den Randpunkten von K stetig und positiv ist. Dann gilt mit $f_0(s) = f(Q(s))$, $Q(s)$ sei der zum Bogenparameter s, $0 \leqslant s \leqslant l$, l=Umfang von K, gehörende Randpunkt von K,

$$EX_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^l (f_0(s)\, k(s))^{1/3}\, ds\; n^{1/3}, \quad n \to \infty. \tag{27}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder voraussetzen, daß der Ursprung 0 im Innern von K liegt. Zudem kann die Herleitung der Gleichung (17) im vorigen Beweis wörtlich übernommen werden. Wegen $\alpha_1 = \inf_{Q_1, Q_2} P(H(Q_1, Q_2)) > 0$ folgt hieraus für ein beliebiges positives $\alpha_2 < \alpha_1$

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint P(H(Q_1, Q_2))^{n-2} P(dQ_1) P(dQ_2) + 0((1-\alpha_2)^n), \quad n \to \infty. \tag{28}$$

Die Funktionaldeterminante der durch das Gleiuchungssystem

$$\begin{aligned} x_i &= p \cos \varphi - t_i \sin \varphi \\ y_i &= p \sin \varphi - t_i \cos \varphi \end{aligned} \quad i = 1, 2$$

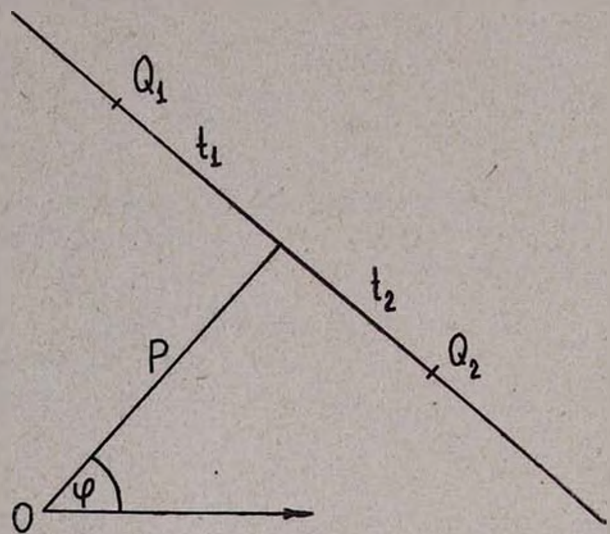

Abb. 3.

definierten Transformation $(Q_1, Q_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = T(p, \varphi, t_1, t_2)$ ist gleich $t_2 - t_1$. Also

$$EX_n = \binom{n}{2} \iint P(H'(p, \varphi))^{n-2} \iint \bar{f} \circ T(p, \varphi, t_1, t_2) |t_1 - t_2|\, dt_1\, dt_2 + $$
$$+ o((1-\alpha_2)^n, \quad n \to \infty, \tag{29}$$

wobei wieder $\bar{f}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_1) f(x_2, y_2)$ und $H'(p, \varphi) = H(T(p, \varphi, t_1, t_2))$ gesetzt sei.

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt

$$\beta = \inf_{0<s<1} f_0(s) > 0 \text{ und } r_M = \sup_{0<s<1} \frac{1}{k(s)} < \infty.$$

Wir wählen ein positives $\beta < \varepsilon$. zu einem solchen ε existiert ein $\delta > 0$, so daß für Punkte $Q \in \partial K$ und $Q' \in K$ mit $|QQ'| < \delta$ gilt $|f(Q) - f(Q')| < \varepsilon$.

Es sei $p(\varphi)$ die Stützfunktion von K, $g(p(\varphi), \varphi)$ also die Tangente an K mit zweiter Koordinate φ, und $Q(\varphi)$ sei der Berührungspunkt dieser Tangente. Ferner bezeichne $S(r, \varphi)$ denjenigen Kreis mit Radius $r > 0$, der die Gerade $g(p(\varphi), \varphi)$ im Punkt $Q(\varphi)$ berührt und einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Innern von K besitzt. $M(r, \varphi)$ sei sein Mittelpunkt (Abb. 4), Für $p(\varphi)-\frac{\delta^2}{2r_M}\leqslant p\leqslant p(\varphi)$ ist die Sehne $g(p,\varphi)\cap K$ enthalten in der Sehne $g(p,\varphi)\cap S(r_M,\varphi)$ und daher haben die Punkte der ersteren Sehne alle einen Abstand kleiner als δ von $Q(\varphi)$.

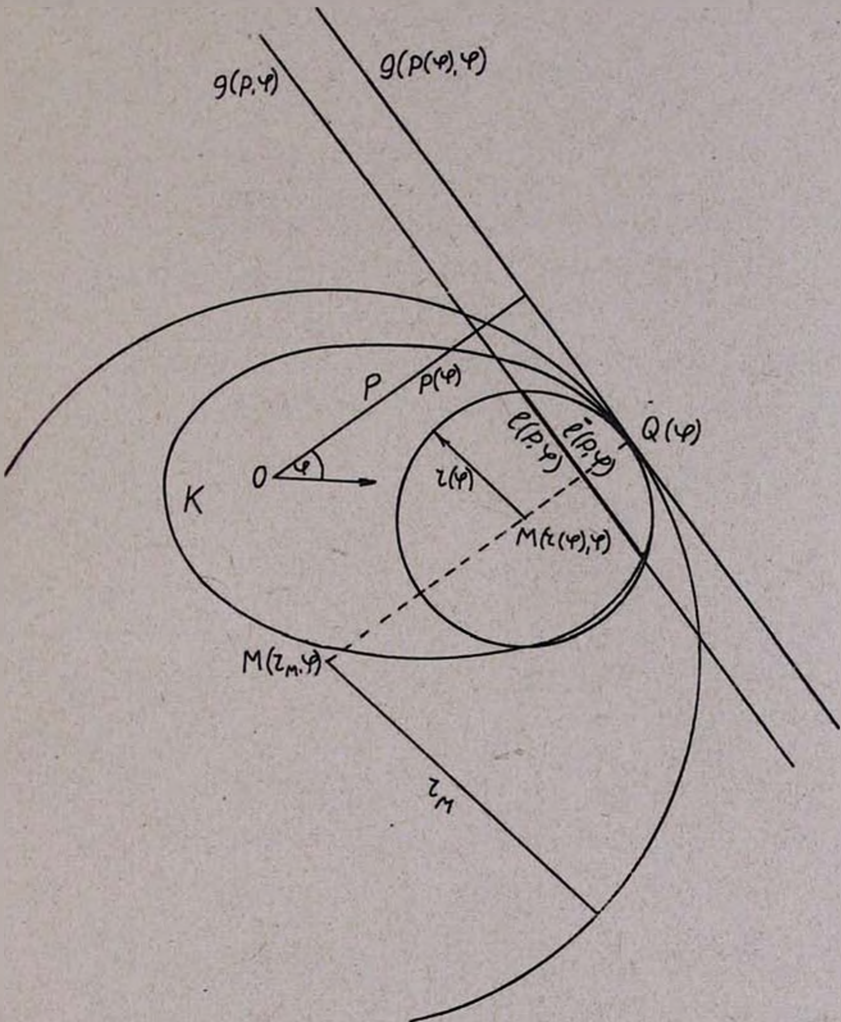

Abb. 4.

Setzen wir schließlich noch $l(p,\varphi)$ für die Länge der Sehne $g(p,\varphi)\cap K$ und $F(p,\varphi)$ für den Flächeninhalt von $H(p,\varphi)^{c}\cap K$, so erhalten wir aus (29) für ein genügend klein gewähltes $\alpha_3>0$ für $n\to\infty$

$$\binom{n}{2}\int_0^{2\pi}(f(Q(\varphi))-\varepsilon)^2\int_{p(\varphi)-\frac{\delta^2}{2r_M}}^{p(\varphi)}(1-F(p,\varphi)(f(Q(\varphi))+\varepsilon))^{n-2}\times\frac{l(p,\varphi)^3}{3}dpd\varphi+$$

$$+o((1-\alpha_3)^n)$$

$$\leq EX_n \leq \tag{30}$$

$$\binom{n}{2}\int_0^{2\pi}(f(Q(\varphi))+\varepsilon)^2\int_{p(\varphi)-\frac{\delta^2}{2r_M}}^{p(\varphi)}(1-F(p,\varphi))(f(Q(\varphi))-\varepsilon))^{n-2}\times$$

$$\times\frac{l(p,\varphi)^3}{3}dpd\varphi+o((1-\alpha_3)^n)$$

Vergleich der Größen F (p, φ) und $l(p, \varphi)$ mit den entsprechenden Größen $\bar{F}(p, \varphi)$ und $\bar{l}(p, \varphi)$ des Krümmungskreises $S(r(\varphi), \varphi)$ führt mittels elementaren differentialgeometrisehen Mathoden zu

$$l-\bar{l}=o((p(\varphi)-p)^{1/2}),\ F-\bar{F}=o((p(\varphi)-p)^{3/2}), \tag{31}$$
$$\text{für } (p(\varphi)-p)\to 0,$$

gleichgradig für alle $\varphi\in[0, 2\pi[$. Führt man den Zentriwinkel ψ ein, unter dem die Sehne $\bar{l}(p, \varphi)$ vom Krümmungsmittelpunkt $M(r(\varphi), \varphi)$ aus erscheint, so folgt

$$\bar{l}=2r(\varphi)\sin\frac{\psi}{2},\ \bar{F}=\frac{1}{2}(\psi-\sin\psi)\,r(\varphi)^2$$

und gleichgradig für alle $\varphi\in[0,2\pi[$

$$p(\varphi)-p=r(\varphi)\left(1-\cos\frac{\psi}{2}\right)=0(\psi^2),\ \text{für } \psi\to 0,$$

also

$$l-\bar{l}=o(\psi),\ F-\bar{F}=o(\psi^3),\ \text{für } \psi\to 0. \tag{32}$$

Wegen $dp=-\frac{1}{2}r(\varphi)\sin\frac{\psi}{2}d\psi$ folgt zum Beispiel für den letzteren Term der obigen Beziehung (30) für hinreichend kleine $\psi_0>0$ und $\alpha_4>0$

$$\binom{n}{2}\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(f(Q(\varphi))+\varepsilon)^2\int_0^{\psi_0}\left(1-\frac{\psi^3}{12}r(\varphi)^2(f(Q(\varphi))-\varepsilon)+o(\psi^3)\right)^{n-2}\times$$

$$\times\frac{1}{4}(r(\varphi)^4\psi^4+o(\psi^4))\,d\psi d\varphi$$

$$+o((1-\alpha_4)^n),\ n\to\infty. \tag{33}$$

Darin gelten die Beziehungen $o(\psi^3)$ und $o(\psi^4)$ wieder hleichgradig in φ. Wir substituieren im Integral

$$I_n(\varphi)=\int_0^{\psi_0}\left(1-\frac{\psi^3}{12}r(\varphi)^2(f(Q(\varphi))-\varepsilon)+o(\psi^3)\right)^{n-2}(\psi^4-o(\psi^4))\,d\psi$$

$$\frac{\psi^3}{12} r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon) = \frac{x}{n}$$ und erhalten mit

$$X(\varphi) = \frac{\psi_0^3}{12} r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon)$$

$$I_n(\varphi) = \int_0^{nX(\varphi)} \left(1 - \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-2} \left(\frac{12}{nr(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon)}\right)^{5/3} \frac{x^{2/3}}{3} (1 + o(1))\, dx$$

also

$$n^{5/3} I_n(\varphi) = \frac{1}{3} \left(\frac{12}{r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon)}\right)^{5/3} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} 1_{[0,\, nX(\varphi)]}(x) \left(1 - \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-2} x^{2/3} (1 + o(1))\, dx.$$

ψ_0 können wir nachträglich noch so klein wählen, daß für $x \leqslant nX(\varphi)$ gilt $\left|o\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1x}{2n}$. Danach ist der Integrand kleiner als const. $e^{-x/2} x^{2/3}$ Da dies integrierbar ist, läßt sich der Lebesguesche Satz aus der Maßtheorie anwenden:

$$n^{5/3} I_n(\varphi) \to \frac{1}{3} \left(\frac{12}{r(\varphi)^2 (f(Q(\varphi)) - \varepsilon)}\right)^{5/3} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2/3}\, dx, \quad n \to \infty.$$

Dies gilt wieder gleichgradig für alle φ, so daß also (33) übergeht in

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \int_0^{2\pi} r(\varphi)^{2/3} \frac{(f(Q(\varphi)) + \varepsilon)^2}{(f(Q(\varphi)) - \varepsilon)^{5/3}}\, d\varphi\, n^{1/3} + o(n^{1/3}), \quad n \to \infty.$$

Hiermit und mit (30) folgt

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} \frac{EX_n}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^{2\pi} f(Q(\varphi))^{1/3} r(\varphi)^{2/3}\, d\varphi\, n^{1/3}} \leqslant \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{5/3}}.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, kann die rechte Seite durch 1 ersetzt werden.

Analog folgt, daß der liminf größer als 1 ist und also gilt unter Beachtung von $d\varphi = k(s)\, ds$ und $r(\varphi(s)) = \frac{1}{k(s)}$

$$EX_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^{l} f_0(s)^{1/3} k(s)^{1/3}\, ds\, n^{1/3}, \quad n \to \infty,$$

was zu beweisen war.

3.3 *Dualisierung.* Mittels des Korollars zum Dualitätssatz lassen sich die eben bewiesenen Sätze dualisieren. Wir wollen nur den zweiten Fall näher ausführen.

Satz: Es sei $\tilde{K}$ ein beschränktes, konvexes Gebiet, dessen Rand eine stetige und überall positive Krümmung $\tilde{k}$ besitzt, und Ω sei die Menge der Geraden, die $\tilde{K}$ nicht scheiden. Auf Ω sei eine Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}$ mit einer Dichte $\tilde{f}$ bezüglich des euklidisch invarianten Geradenmaßes definiert. $\tilde{f}$ sei in den Randgeraden von Ω, d. h. in den Tangenten an $\tilde{K}$, stetig und positiv. Mit $\tilde{f}_0(s)$ bezeichnen wir den Wert von $\tilde{f}$ für diejenige Tangente an $\tilde{K}$ deren Berührungspunkt die Bogenkoordinate s besitzt. Dann gilt für die Eckenanzahl $\tilde{X}_n$ des von n unabhängigen, nach $\tilde{P}$ verteilten Geraden erzeugten Polygons, das $\tilde{K}$ enthält,

$$E\tilde{X}_n \sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^{\tilde{l}} \tilde{f}_0(s)^{1/3}\, \tilde{k}(s)^{2/3}\, ds\, n^{1/3}, \quad n \to \infty. \tag{34}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $0 \in \tilde{K}$ angenommen werden. Die Dichte der auf $K = \varkappa^{-1}(\Omega)$ definierten Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}\varkappa$ ist gemäß 2.2 gegeben durch $f(x_1, x_2) = \tilde{f} \circ \varkappa\,(x_1, x_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}$ und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes in 3.2, insbesondere ist K ein beschränkter, konvexer Bereich, dessen Rand eine stetige Krümmung k besitzt. Aufgrund des Satzes in 3.2 uud des Korollars zum Dualitätssatz gilt für genügend kleine, positive γ

$$E_{\tilde{P}} \tilde{X}_n = E_{\tilde{P}\varkappa} X_n + o\left((1-\gamma)^n\right) \tag{35}$$

$$\sim \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \int_0^{l} f_0(\sigma)^{1/3}\, k(\sigma)^{1/3}\, d\sigma\, n^{1/3}, \quad n \to \infty.$$

Bedeutet $p(\varphi)$ die Stützfunktion von $\tilde{K}$, so sind die Polarkoordinaten der Randpunkte von K gegeben durch $\left(\varphi, \frac{1}{p(\varphi)}\right)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, die Ableitung der Bogenlänge nach φ ist in diesen Punkten also

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \left(\frac{1}{p(\varphi)^2} + \frac{p'(\varphi)^2}{p(\varphi)^4}\right)^{1/2}$$

und die Krümmung

$$k(\sigma(\varphi)) = \frac{p(\varphi)^3 (p(\varphi) + p''(\varphi))}{(p(\varphi)^2 + p'(\varphi)^2)^{3/2}}.$$

Also läßt sich das in (35) auftretende Integral folgendermaßen umwandeln

$$\int_0^l f_0(\sigma)^{1/3} k(\sigma)^{1/3} d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\tilde{f}_0(s(\varphi))\, p(\varphi)^3)^{1/3} \left(\frac{p(\varphi)^3 (p(\varphi) + p''(\varphi))}{(p(\varphi)^2 + p'(\varphi)^2)^{3/2}} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{p(\varphi)^2} + \frac{p'(\varphi)^2}{p(\varphi)^4} \right)^{1/2} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \tilde{f}_0(s(\varphi))^{1/3} (p(\varphi) + p''(\varphi))^{1/3} d\varphi$$

$$= \int_0^{\tilde{l}} \tilde{f}_0(s)^{1/3} \tilde{k}(s)^{2/3} ds,$$

womit bereits alles bewiesen ist.

Für $\tilde{f}_0 = \dfrac{1}{l-b}$ folgt aus (34) das entsprechende Ergebnis von Renyli und Sulanke in [4].

Institut für Angewandte Mathematic
Universität Heidelberg

Поступило 10.X.1970

Հ. ՑԻՑՈԼԴ. Պատահական ուռուցիկ բազմանկյունների գագաթների քանակի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում դիտարկվում են պատահական ուռուցիկ բազմանկյունների կառուցման երկու եղանակներ։ Պատահական ուռուցիկ բազմանկյունը սահմանվում է որպես ա) հարթության վրա անկախ ձևով գցած n *կետերի ուռուցիկ թաղանթ, կամ բ) սկզբնակետը պարունակող բազմանկյուն, որը ստացված է հարթության* n *պատահական ուղիղների հատումից։*

Առաջարկված է երկակիության մի թեորեմ, որը թույլատրում է ա) բազմանկյունների կողմերի միջին թվի ասիմպտոտական բանաձևերից ստանալու արդյունքներ բ) բազմանկյունների համար և հակառակը։ Էապես ընդհանրացված են [2], [3] *և* [4] *աշխատանքների արդյունքները։*

Г. ЦИЦОЛЬД. *О числе вершин случайных выпуклых многоугольников*
(резюме)

В работе рассматриваются два способа построения случайных выпуклых многоугольников. Случайный выпуклый многоугольник определяется как а) выпуклая оболочка n точек, независимо брошенных на плоскость или б) содержащий начало координат многоугольник, порожденный пересечением n случайных прямых на плоскости.

Предложена теорема дуальности, которая позволяет из асимптотических формул для среднего числа сторон многоугольников а) получать результаты для многоугольников б), и наоборот. Значительно обобщены результаты работ [2], [3] и [4].

LITERATUR

1. *G. Pickert.* Analytische Geometrie. 4. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1961.
2. A. *Renyi*, und *R. Sulanke.* Uber die konvexe Hülle von *n* zufälligen gewählten Punkten I. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 2 (1963), 75—84.
3. A. *Renyi* und *R. Sulanke.* Uber die konvexe Hülle von *n* zufällig gewählten Punkten II. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 3 (1964), 138—147.
4. *A. Renyi*, und *R. Sulanke.* Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 9 (1968), 146—157.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS