ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 К.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V. № 1, 1970 Математика

А. Г. ГЮЛЬМИСАРЯН

ОБ ОБЩИХ РАЗРЫВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В цилиндрической области $G=\Omega\times(0<t<+\infty)$, $\Omega\subset R^{n+1}$ с боковой поверхностью $\partial G=\Gamma\times(0<t<+\infty)$ рассматривается параболическое уравнение второго порядка

$$A\left(x, D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t)=f(x, t) \tag{1}$$

с граничным условием на ∂G

$$B\left(x, D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t)\Big|_{\partial G}=g(x', t), \quad x'\in\Gamma \tag{2}$$

и начальным условием при $t=0$

$$u(x, 0)=\varphi_0(x). \tag{3}$$

Рассматривается случай, когда коэффициенты оператора B претерпевают разрыв вдоль некоторого многообразия $\omega_\tau=\omega\times(0<t<+\infty)$, где ω — некоторое $(n-1)$-мерное многообразие на Γ, делящее Γ на две части Γ^+ и Γ^-.

Кроме параболических задач исследуются разрывные краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, определенным образом содержащих некоторый параметр, наиболее типичным случаем которых являются задачи, получаемые из (1)—(3) с помощью преобразования Лапласа.

Целью работы является доказательство теорем существования и единственности решения в определенных пространствах функций при некоторых естественных ограничениях алгебраического характера на операторы A и B и при выполнении некоторого „условия согласованности" правых частей задачи (1)—(3).

В главе I исследуются разрывные эллиптические граничные задачи, которые уже изучались нами в [4]. Следует отметить, что результаты работы [4] не всегда позволяют осуществить переход от эллиптических задач к параболическим*. Кроме того, здесь рассматриваются несколько иные пространства функций по сравнению с [4]. Вместе с тем, методы доказательств в [4] и в настоящей работе имеют много

* См. замечание на стр. 29.

общего, и поэтому ниже в некоторых случаях подробные доказательства будут опускаться.

В главе II сначала устанавливается изоморфизм между некоторыми функциональными пространствами, осуществляемый с помощью преобразования Лапласа. Это позволяет нам затем использовать результаты главы I, относящиеся к разрывным эллиптическим задачам с параметром, для доказательства теорем о разрешимости разрывных параболических задач.

Приведем обозначения, которыми мы будем систематически пользоваться.

Обозначим через $x=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,x_{n+1})=(x'',x_n,x_{n+1})=(x',x_{n+1})$ точку $(n+1)$-мерного эвклидова пространства R^{n+1} и через $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{n+1})=(\xi'',\xi_n,\xi_{n+1})=(\xi',\xi_{n+1})$—двойственную переменную к x относительно билинейной формы $(x,\xi)=x_1\xi_1+\cdots+x_{n+1}\xi_{n+1}$.

Преобразование Фурье записывается в виде

$$\tilde{u}(\xi)=Fu(x)=\int e^{i(x,\xi)}u(x)\,dx,$$

$$u(x)=F^{-1}\tilde{u}(\xi)=(2\pi)^{-n-1}\int e^{-i(x,\xi)}\tilde{u}(\xi)\,d\xi,$$

$$\tilde{v}(\xi_0)=F_t v(t)=\int e^{it\xi_0}v(t)\,dt,$$

причем, если не указаны пределы интегрирования, то интеграл берется по всему пространству. Положим также $D^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}$,

$$D_{x_j}=-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\quad \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_{n+1}^{\alpha_{n+1}},\quad |\alpha|=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i.$$

Полупространство, определяемое неравенством $x_{n+1}>0$ $(x_{n+1}<0)$, обозначим через R_+^{n+1} (R_-^{n+1}), а неравенством $x_{n+1}\geqslant 0$ $(x_{n+1}\leqslant 0)$ — через $\overline{R}_+^{n+1}$ $(\overline{R}_-^{n+1})$.

Аналогично определяются $R_\pm^n$ и $\overline{R}_\pm^n$. Константы, используемые при доказательствах, обозначаются через $C, C_1, C_2,\cdots$, причем в каждом новом доказательстве нумерация их производится заново.

Единичный оператор обозначается через I.

Условимся также обозначать символом $A(x_0)$ дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $A(x_0)=A(x_0,D)$, а символом A^0—главную часть оператора $A(x,D)$.

I. Разрывные краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, содержащих параметр

§ 1. *Пространства функций*

1°. Пространство $H_{s,r,l}$. Пусть s, r, l, α, β — произвольные действительные числа. Через $H_s(R^{n+1})$ обозначим пространство Соболева—Слободецкого функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_s^2 = \int (1+|\xi|^2)^s \, |\tilde{u}|^2 \, d\xi. \tag{1.1}$$

Через $H_{s,r,l}(R^{n+1})$ обозначим пространство функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{s,r,l}^2 = \int (1+|\xi|^2)^s \, (1+|\xi'|^2)^r (1+|\xi''|^2)^l \, |\tilde{u}|^2 \, d\xi, \tag{1.2}$$

а через $H_{\alpha,\beta}(R^n)$—пространство функций $g(x')$ с конечной нормой

$$\|g\|_{\alpha,\beta}^2 = \int (1+|\xi'|^2)^\alpha (1+|\xi''|^2)^\beta \, d\xi'. \tag{1.3}$$

Введем пространство $\tilde{H}_s(R^{n+1})$, элементами которого являются образы Фурье элементов пространства $H_s(R^{n+1})$ с соответствующей нормой (1.1).

При изучении эллиптических уравнений, содержащих некоторый параметр q, удобно пользоваться нормами, зависящими от q. Предположим, что параметр q меняется в некотором угле Ξ: $|\arg q| \leqslant \theta$.

Введем обозначения

$$Q_1 = Q_1(\xi) = (|q|^2+|\xi|^2)^{1/2}, \quad Q_2 = Q_2(\xi') = (|q|^2+|\xi'|^2)^{1/2},$$
$$Q_3 = Q_3(\xi'') = (|q|^2+|\xi''|^2)^{1/2}.$$

В пространстве $H_s(R^{n+1})$ наряду с (1.1) введем следующую норму:

$$[u]_s^2 = \int (|q|^2+|\xi|^2)^s |\tilde{u}|^2 \, d\xi = \|Q_1^s \tilde{u}\|_0^2. \tag{1.4}$$

Аналогичным образом вводятся нормы, зависящие от параметра в пространствах $H_{s,r,l}(R^{n+1})$ и $H_{\alpha,\beta}(R^n)$:

$$[u]_{s,r,l}^2 = \int (|q|^2+|\xi|^2)^s \, (|q|^2+|\xi'|^2)^r (|q|^2+|\xi''|^2)^l \, |\tilde{u}|^2 d\xi = \|Q_1^s \, Q_2^r \, Q_3^l \tilde{u}\|_0^2, \tag{1.5}$$

$$[g(x')]_{\alpha,\beta}^2 = \int (|q|^2 + |\xi'|^2)^\alpha \, (|q|^2 + |\xi''|^2)^\beta \, |\tilde{g}|^2 \, d\xi' = \|Q_2^\alpha \, Q_3^\beta \tilde{g}\|_0^2. \tag{1.6}$$

Очевидно, что при фиксированных $q \neq 0$ нормы (1.4)—(1.6) эквивалентны нормам (1.1)—(1.3).

Через $\mathring{H}_s^+(R^{n+1})$ обозначим замкнутое подпространство функций из $H_s(R^{n+1})$, носители которых сосредоточены в $\overline{R}_+^{n+1}$. Аналогично $\mathring{H}_s^-(R^{n+1}) = \{u, u \in H_s(R^{n+1}), \operatorname{supp} u \in \overline{R}_-^{n+1}\}$. $\tilde{\mathring{H}}_s^+(R_+^{n+1})$ и $\tilde{\mathring{H}}_s^-(R_-^{n+1})$ — пространства, элементами которых являются образы Фурье пространств $\mathring{H}_s^+(R_+^{n+1})$ и $\mathring{H}_s^-(R_-^{n+1})$.

Через $H_s(R_+^{n+1})$ обозначим пространство функций $f(x)$, являющихся сужениями на R_+^{n+1} функций из $H_s(R^{n+1})$. Таким образом, лю бую функцию f из $\overset{\circ}{H}_s(R_+^{n+1})$ можно продолжить на все R^{n+1} так, что полученная функция $Lf \in H_s(R^{n+1})$ (продолжение функции f мы всегда будем обозначать через Lf).

Пусть

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t > 0 \\ 0 \text{ при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Любая функция из $H_0(R^{n+1})$ допускает разложение

$$u = \theta(x_{n+1})\, u + (1 - \theta(x_{n+1}))\, u = u_+ + u_-,$$

где $u_+ \in \overset{\circ}{H}{}_0^+(R^{n+1})$, $u_- \in \overset{\circ}{H}{}_0^-(R_-^{n+1})$. Через θ_{n+1}^+ обозначим оператор умножения на $\theta^+(x_{n+1})$

$$\theta_{n+1}^+ u = u_+.$$

Последнее равенство после преобразования Фурье переходит в следующее:

$$\Pi_{n+1}^+ \tilde{u}(\xi) = \tilde{u}_+(\xi),$$

где через Π_{n+1}^+ мы обозначили образ Фурье оператора θ_{n+1}^+.

Если $\tilde{u}(\xi) \in S$ — пространству бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при $|\xi| \to \infty$ вместе с любой из своих производных быстрее, чем любая степень $\frac{1}{|\xi|}$, то

$$\Pi_{n+1}^+ \tilde{u}(\xi) = \frac{i}{2\pi} \int \frac{\tilde{u}(\xi', \eta_{n+1})}{\xi_{n+1} + i0 - \eta_{n+1}}\, d\eta_{n+1} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\, v.p. \int \frac{\tilde{u}(\xi', \eta_{n+1})}{\xi_{n+1} - \eta_{n+1}}\, d\eta_{n+1} + \pi \tilde{u}(\xi', \xi_{n+1}). \qquad (1.7)$$

Так как оператор] θ_{n+1}^+ ограничен в $\overset{\circ}{H}_0(R^{n+1})$, то оператор Π_{n+1}^+ ограничен в $\tilde{H}_0(R^{n+1})$. На любой функции $\tilde{u} \in \tilde{H}_0(R^{n+1})$ оператор Π_{n+1}^+ понимается как результат замыкания оператора (1.7) на функциях из S. Оператор Π_{n+1}^+ ограничен в $\tilde{H}_\delta(R^{n+1})$ при $|\delta| < \frac{1}{2}$, причем

$\Pi_{n+1}^+ \tilde{H}_\delta(R_{n+1}) = \overset{\circ}{\tilde{H}}_\delta(R^{n+1})$ (см. [5]). Подробнее об операторах θ_{n+1}^+ и Π_{n+1}^+ (см. [2]). Аналогичным образом в R^n определяются операторы θ_n^+ и Π_n^+.

Очевидно, если $\tilde{u}_-(\xi) \in \overset{\circ}{\tilde{H}}{}_\delta^-(R_-^{n+1})$, то $\Pi_{n+1}^+ \tilde{u}_-(\xi) = 0$. Обозначим

$$\xi_+ = \xi_{n+1} + i\sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2},\ \xi_- = \xi_{n+1} - i\sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2}.$$

Заметим, что если $\tilde{u}_- \in \mathring{\tilde{H}}_s^-(R_-^{n+1})$, то $\xi_-^s \tilde{u}_- \in \mathring{\tilde{H}}_0^-(R_-^{n+1})$ и $\Pi_{n+1}^+ \xi_-^s \tilde{u}_- = 0$. Норму в пространстве $H_s(R_+^{n+1})$ зададим по формуле

$$[u]_s^+ = \|\Pi_{n+1}^+ \xi_-^s \widetilde{Lu}(\xi)\|_0, \tag{1.8}$$

где Lu — какое-либо продолжение $u(x)$ на все R^{n+1}, принадлежащее $H_s(R^{n+1})$. Для функции $u(x) \in H_{s,r,l}(R_+^{n+1})$ положим

$$[u]_{s,r,l}^+ = \|\Pi_{n+1}^+ \xi_-^s Q_2^r Q_3^l \widetilde{Lu}\|_0. \tag{1.9}$$

Наконец, для функции $g(x') = H_{\alpha,\beta}(R_+^n)$ определим норму следующим образом:

$$[g]_{\alpha,\beta}^+ = \|\Pi_n^+ \bar{\xi}_-^\alpha Q_3^\beta \widetilde{Lg}\|_0, \tag{1.10}$$

где $\bar{\xi}_- = \xi_n - i\sqrt{|\xi''|^2 + |q|^2}$. Нормы в пространствах $\mathring{H}_s^+$ и $\mathring{H}_{s,r,l}^+$ также задаются по формулам (1.8), (1.9).

В перечисленных пространствах используются также нормы, не зависящие от q, которые получаются из соответствующих формул при $q = 1$.

Кроме указанных пространств мы будем использовать при $s > 1/2$ пространства $H_{s,r,l}^+$, которые состоят из функций $u \in H_{s,r,l}(R_+^{n+1})$, продолженных нулем при $x_{n+1} < 0$. Норма в $H_{s,r,l}^+$ совпадает с нормой в $H_{s,r,l}(R_+^{n+1})$.

Ниже приводятся некоторые свойства введенных пространств.

Лемма 1.1. *Пусть* $u \in H_{s,r,l}(R_+^{n+1})$ и $s > \frac{1}{2}$.

Тогда

$$[\gamma_{n+1} u]_{s+r-1/2,\, l} \leqslant C[u]_{s,r,l},$$

где γ_{n+1} *— оператор сужения на гиперплоскость* $x_{n+1} = 0$.

Доказательство этой леммы проводится точно так же, как и для пространств H_s (см. [6], [7]).

Лемма 1.2. *Пусть* $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$, $u(x) \in H_{s,r,l}(R^{n+1})$. *Тогда*

$$[\varphi u]_{s,r,l} \leqslant \max|\varphi|\,[u]_{s,r,l} + C[u]_{s,r,l-1}. \tag{1.11}$$

Лемма 1.2 верна также для функций из пространства $H_{s,r,l}(R_+^{n+1})$, именно

$$[\varphi u]_{s,r,l}^+ \leqslant \max|\varphi|\,[u]_{s,r,l}^+ + C[u]_{s,r,l-1}^+. \tag{1.12}$$

Лемма 1.3. *Пусть* $\psi(x') \in C_0^\infty(R^n)$ *и* $g(x')$ *принадлежит пространству* $H_{\alpha,\beta}(R^n)$ *или* $H_{\alpha,\beta}^+$. *Тогда в соответствующих нормах*

$$[\psi g]_{\alpha,\beta} \leqslant \max|\psi|\,[g]_{\alpha,\beta} + C[g]_{\alpha,\beta-1}, \tag{1.13}$$

$$[\psi g]_{\alpha,\beta}^+ \leqslant \max|\psi|\,[g]_{\alpha,\beta}^+ + C[g]_{\alpha,\beta-1}^+.$$

Приведем доказательство леммы 1.2. Неравенства (1.12) и (1.13) доказываются аналогично.

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ и $u(x) \in H_{s,r,l}(R^{n+1})$. Обозначим $E(\xi, q) = Q_1^s Q_2^r Q_3^l$. Легко проверить, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi_l} E(\xi, q)\right| \leqslant C\, Q_1^s Q_2^r Q_3^{l-1}. \tag{1.14}$$

Далее

$$[\varphi u]_{s,r,l} = \|E(\xi, q)\,(\tilde{\varphi} * \tilde{u})\|_0 = \left\|E(\xi, q)\int \tilde{\varphi}(\xi-\eta)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta\right\|_0 =$$

$$= \left\|\int \tilde{\varphi}(\xi-\eta)\,E(\xi, q)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta\right\|_0.$$

Разложим функцию $E(\xi, q)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\xi = \eta$

$$E(\xi, q) = E(\eta, q) + \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \xi_l} E(\zeta, q)(\xi_l - \eta_l),$$

где $\zeta = \eta + \theta(\xi - \eta)$, $0 < \theta < 1$.

Таким образом

$$[\varphi u]_{s,r,l} \leqslant \left\|\int \tilde{\varphi}(\xi-\eta)\,E(\eta, q)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta\right\|_0 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n+1} \left\|\int \tilde{\varphi}(\xi-\eta)\frac{\partial}{\partial \xi_l} E(\zeta, q)(\xi_l - \eta_l)\,\tilde{u}(\eta)\,d\eta\right\|_0.$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое. Сразу видно, что

$$\|\tilde{\varphi} * E\tilde{u}\|_0 \leqslant \max|\varphi|\,[u]_{s,r,l}.$$

Оценим второе слагаемое. Обозначим

$$b_l = \tilde{\varphi}(\xi-\eta)\frac{\partial}{\partial \xi_l} E(\zeta, q)(\xi_l - \eta_l).$$

Так как $\varphi(x)$ финитна, то при любом p

$$(1 + |\xi - \eta|)^p\,|\tilde{\varphi}(\xi - \eta)| \leqslant C$$

и, таким образом

$$|b_l| \leqslant \frac{Q_1^s(\zeta)\,Q_2^r(\zeta')\,Q_3^{l-1}(\zeta'')\,|\xi_l - \eta_l|}{(1 + |\xi - \eta|)^p} \leqslant \frac{Q_1^s(\zeta)\,Q_2^r(\zeta')\,Q_3^{l-1}(\zeta'')}{(1 + |\xi - \eta|)^{p-1}}.$$

Воспользовавшись теперь известным неравенством

$$\frac{(|q|^2 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{(|q|^2 + |\eta|^2)^{\frac{k}{2}}} \leqslant C\,(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|k|}{2}},$$

справедливым при $|q| > q_0$ (C зависит от q_0 и не зависит от q), для оценок $Q_1(\zeta)$, $Q_2(\zeta')$ и $Q_3(\zeta'')$, получим

$$|b_l| < C_1 \frac{Q_1^s(\eta)\, Q_2^r(\eta')\, Q_3^{l-1}(\eta'')}{(1+|\xi-\eta|)^{p-1-|s|-|r|-|l-1|}}.$$

Отсюда при соответствующем выборе p получим

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left\| \int \tilde{\varphi}(\xi-\eta) \frac{\partial}{\partial \xi_l} E(\zeta, q)(\xi_l - \tau_l \eta_l)\, \tilde{u}(\eta)\, d\eta \right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{Q_1^s(\eta)\, Q_2^r(\eta')\, Q_3^{l-1}(\eta'')\, \tilde{u}(\eta)}{(1+|\xi-\eta|)^{p-\alpha}} \right\|_0 \leqslant C_2 \left\| \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{p-\alpha}} \right\|_{L_1} \cdot [u]_{s,r,l-1} =$$

$$= C_3 [u]_{s,r,l-1}.$$

Доказательство леммы 1.2 завершено.

Пусть $A(D)$—линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Символом оператора A назовем характеристический многочлен $A(\xi)$. Если оператор A имеет порядок α, то символ допускает оценку $|A(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^\alpha$ и, очевидно, оператор $A(D)$ является ограниченным оператором порядка α из $H_{s-\alpha,r,l}(R^{n+1})$ в $H_{s,r,l}(R^{n+1})$ (или из $H^+_{s-\alpha,r,l}$ в $H^+_{s,r,l}$) при любых s, r, l, а именно

$$\|Au\|_{s-\alpha,r,l} \leqslant C\|u\|_{s,r,l},$$

$$\|Au\|^+_{s-\alpha,r,l} \leqslant C\|u\|^+_{s,r,l}.$$

Очевидно, что дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка α, зависящий от параметра q, такой, что $|A(\xi, q)| \leqslant \leqslant C(|q|+|\xi|)^\alpha$, является ограниченным оператором порядка α, действующим в тех же пространствах. Соответствующая оценка записывается с помощью норм, зависящих от параметра

$$[Au]_{s-\alpha,r,l} \leqslant C[u]_{s,r,l}.$$

Пусть теперь A — дифференциальный оператор порядка α с переменными коэффициентами такой, что символ* $A(x, \xi, q)$ оператора A является полиномом порядка α по степеням ξ и q вида

$$A(x, \xi, q) = \sum_{|l|+j<\alpha} a_{lj}(x)\, \xi^l q^j,$$

и пусть коэффициенты $a_{lj}(x)$ имеют конечный предел при $|x| \to \infty$

$$\lim_{|x|\to\infty} a_{lj}(x) = a_{l,j}(\infty), \tag{1.15}$$

причем предполагается, что разность $a_{lj}(x) - a_{lj}(\infty)$ принадлежит пространству S.

Лемма 1.4. *Оператор $A(x, D, q)$, удовлетворяющий условию* (1.15), *ограничен из $H_{s-\alpha,r,l}(R^{n+1})$ $(H^+_{s-\alpha,r,l})$ в $H_{s,r,l}(R^{n+1})(H^+_{s,r,l})$.*

---

* В качестве символа дифференциального оператора с переменными коэффициентами берется функция, которая получается из дифференциального выражения при замене $\partial/\partial x_k$ на $-i\xi_k$.

А именно

$$[Au]_{s-\alpha, r, l} \leqslant C\,[u]_{s, r, l},$$
$$[Au]^{+}_{s-\alpha, r, l} \leqslant C\,[u]^{+}_{s, r, l}. \tag{1.16}$$

Действительно, представим оператор A в виде

$$A(x) = A(\infty) + (A(x) - A(\infty)) = A_1 + A_2.$$

Очевидно, что для оператора A_1 оценка (1.16) выполняется.

Пусть $A_2(x, \xi, q)$—символ оператора A_2. В силу (1.15) $A_2(x, \xi, q) \in S$ по переменной x. Поэтому для функции $\hat{A}_2(\xi, \eta, q) = F_{x\to\xi} A_2(x, \eta, q)$ выполнена оценка

$$|\hat{A}_2(\xi-\eta, \eta, q)| \leqslant C_1 \frac{(|q| + |\eta|)^{\alpha}}{(1+|\xi-\eta|)^{p}}$$

при любом p. Поэтому, как и при доказательстве леммы 1.2, для $u \in H_{s, r, l}(R^{n+1})$ получим

$$[A_2u]_{s-\alpha, r, l} = \|Q_1^{s-\alpha} Q_2^{r} Q_3^{l} F(A_2u)\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left\| \int \frac{Q_1^{s-\alpha} Q_2^{r} Q_3^{l} (|q| + |\eta|)^{\alpha}\, \tilde{u}(\eta)}{(1+|\xi-\eta|)^{p}}\, d\eta \right\|_0 \leqslant C_3\,[u]_{s, r, l}.$$

Лемма 1.4 доказана.

2°. Пространства с переменными индексами $H_{(s, r, l)}$. Пусть Ω — некоторая ограниченная область в R^{n+1} с границей Γ. Предполагается, что Γ является n-мерным многообразием, допускающим локальное выпрямление, т. е. Γ можно покрыть конечной системой областей

$$\{V_1, \cdots, V_N\} \tag{1.17}$$

в R^{n+1} таких, что в каждой из V_j определено гладкое невырожденное преобразование координат $x_j \to y$, в результате которого та часть Γ, которая содержится в $V_j \cap \Gamma$, переходит в часть гиперплоскости $y_{n+1} = 0$. При этом прилегающая к Γ часть области Ω оказывается в полупространстве $y_{n+1} > 0$. Введенную таким образом в каждой из областей V_j систему координат назовем локальной системой координат (л.с.к.). Кроме того, предположим, что если V_l и V_j— две координатные окрестности с локальными координатами x и y и если $V_j \cap V_l \cap \Gamma$ непусто, то в указанном пересечении

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_n} = \cdots = \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y_n} = 0, \quad \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = 1, \quad \frac{\partial x_n}{\partial y_1} = \cdots = \frac{\partial x_n}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

Пусть

$$\sum \varphi_j(x) \equiv 1, \quad \operatorname{supp} \varphi_j = U_j \tag{1.18}$$

—некоторое (достаточно мелкое) разбиение единицы в области Ω. Предполагается, что это разбиение единицы обладает следующим свойством: либо носитель $\varphi_j(x)$ не имеет общих точек с Γ, либо, если $U_j \cap \Gamma \neq 0$, то U_j целиком лежит в некотором V_k из покрытия (1.17).

Пусть ω—$(n-1)$—мерное многообразие на Γ, делящее Γ на две части Γ^+ и Γ^-; $\omega = \bar{\Gamma}^+ \cap \bar{\Gamma}^-$. Обозначим через W такую окрестность поверхности ω, что любая точка из W однозначно определяется длиной нормали, проведенной в эту точку из Γ и точкой на Γ, откуда проведена эта нормаль. Если $U_j \cap \Gamma = 0$, то в U_j оставляем исходную систему координат (т. е. за новую л.с.к. берем старую систему координат); если $U_j \cap \Gamma \neq 0$, то фиксируем такую л.с.к., в которой ось x_{n+1} совпадает с нормалью к Γ и после выпрямления Γ в пределах соответствующей области U_j уравнение Γ имеет вид $x_{n+1} = 0$. Если $U_j \cap \omega \neq 0$, то ось x_n берем совпадающей с нормалью к ω на Γ и после локального выпрямления уравнение ω в пределах соответствующей области U_j имеет вид $x_{n+1} = x_n = 0$. Обозначим через S_j оператор преобразования из исходной системы координат в л.с.к.

Пусть $s = s(x)$, $r = r(x)$ и $l = l(x)$ — непрерывные функции на $\bar{\Omega}$. Введем пространство $H_{(s,\, r,\, l)}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{(s,\, r,\, l)} = \sum_j \|S_j \varphi_j u\|^+_{s_j,\, r_j,\, l_j},$$

где $s_j = s(x_j)$, $r_j = r(x_j)$, $l_j = l(x_j)$, $x_j \in U_j$ — произвольная фиксированная точка, причем если $U_j \cap \Gamma \neq 0$, то $x_j \in \Gamma$, если $U_j \cap \omega \neq 0$, то $x_j \in \omega$, если $U_j \subset W$, но $U_j \cap W \neq 0$, то $x_j \bar{\in} W$, а плюс в обозначении нормы означает, что при $U_j \cap \Gamma \neq 0$ берется норма пространства $H_{s_j,\, r_j,\, l_j}(R^{n+1}_+)$.

В $H_{(s,\, r,\, l)}(\Omega)$ используются также нормы, зависящие от параметра

$$[u]_{(s,\, r,\, l)} = \sum_j [S_j \varphi_j u]^+_{s_j,\, r_j,\, l_j}. \tag{1.19}$$

Аналогичным образом вводятся пространства $H_{\alpha,\beta}(\Gamma^+)$ и $H_{\alpha,\beta}(\Gamma^-)$ функций $g(x')$ с нормами

$$[g]^+_{(\alpha,\, \beta)} = \sum_j [S_j \varphi_j g]^+_{\alpha_j,\, \beta_j}, \tag{1.20}$$

$$[g]^-_{(\alpha,\, \beta)} = \sum_j [S_j \varphi_j g]^-_{\alpha_j,\, \beta_j}, \tag{1.21}$$

где $\alpha_j = \alpha(x_j)$; $\beta_j = \beta(x_j)$; $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — некоторые непрерывные функции на Γ; $x_j \in \omega$, если $U_j \cap \omega \neq 0$, и $x_j \in \Gamma$ — в остальных случаях. Плюс и минус в обозначении нормы означают, что при $U_j \cap \omega \neq 0$ в соответствующих членах берется норма в пространствах $H_{\alpha_j,\, \beta_j}(R^n_+)$ или $H_{\alpha_j,\, \beta_j}(R^n_-)$. Отметим еще несколько легко проверяемых неравенств, которые понадобятся нам в дальнейшем

$$[u]_{(s-1,\, r,\, l)} \leqslant \frac{C}{|q|}[u]_{(s,\, r,\, l)}, \quad [u]_{(s,\, r,\, l-1)} \leqslant \frac{C_1}{|q|}[u]_{(s,\, r,\, l)}, \tag{1.22}$$

причем константы не зависят от функции $u(x)$ и параметра q.

Заметим также, что леммы 1.1—1.4 имеют место и для пространства $H_{(s, r, l)}$.

Следуя работе [2], мы скажем, что однородная порядка α функция $A(\xi', \xi_{n+1}, q)$ допускает однородную факторизацию по переменной ξ_{n+1}, если имеет место представление

$$A(\xi', \xi_{n+1}, q) = A_+(\xi', \xi_{n+1}, q)\, A_-(\xi', \xi_{n+1}, q),$$

где A_+ и A_- — однородны по совокупности ξ, q, $\operatorname{ord} A_+ = \varkappa$, $\operatorname{ord} A_- = \alpha - \varkappa$; $A_+ \neq 0$ при $|\xi'| + |\xi_{n+1}| + |q| > 0$, $\xi \in R^{n+1}$, $\operatorname{Im} \xi_{n+1} > 0$ и аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_{n+1} > 0$. A_- обладает аналогичными свойствами при $\operatorname{Im} \xi_{n+1} < 0$. Можно показать (так же, как и в [2])*, что если $A(\xi, q)$—однородная порядка α функция от ξ, q, $A(\xi, q) \neq 0$ при $|\xi| + |q| \neq 0$ и $A(\xi, q)$ имеет при $|\xi'| + |q| \neq 0$ непрерывные первые производные, ограниченные при $|\xi|^2 + |q|^2 = 1$, то $A(\xi, q)$ допускает и притом единственную с точностью до постоянного множителя однородную факторизацию по ξ_{n+1}.

§ 2. *Разрывная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с параметром*

Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$A(x, D, q)\, u(x) = f(x), \tag{2.1}$$

$$B_1(x, D, q)\, u(x)|_{\Gamma^+} = g_1(x'), \tag{2.2}$$

$$B_2(x, D, q)\, u(x)|_{\Gamma^-} = g_2(x'), \tag{2.3}$$

где $u(x) \equiv 0$ при $x \overline{\in} \Omega$, $\operatorname{ord} A = 2$, $\operatorname{ord} B_i = m_i\ (i = 1, 2)$. Для простоты предположим, что коэффициенты операторов A, B_1 и B_2 бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$. Относительно области Ω и границы Γ будем считать, что выполнены все условия п. 2° § 1.

Исследование задачи (2.1)—(2.3) проведем, как это обычно делается, по следующему плану. Сначала рассматривается случай однородных операторов с постоянными коэффициентами в полупространстве. В этом случае решение задачи (2.1)—(2.3) выписывается в явном виде. Далее с помощью полученных результатов в полупространстве и разбиения единицы исследуется общий случай задачи в ограниченной области.

1°. З а д а ч а в п о л у п р о с т р а н с т в е. В этом $n°$ будет рассмотрена основная вспомогательная задача в полупространстве

$$(\Omega = R^{n+1}_+,\ \Gamma = R^n,\ \Gamma^+ = R^n_+,\ \Gamma^- = R^n_-)$$

для операторов с постоянными коэффициентами:

$$A(D, q)\, u(x) = f(x), \tag{2.4}$$

* В отличие от [2] здесь рассматривается символ, содержащий параметр q, однако легко видеть, что присутствие q совершенно не влияет на все рассуждения в [2], относящиеся к факторизации.

$$B_1(D, q)\, u(x)\Big|_{\substack{x_{n+1}=0\\ x_n>0}} = g_1(x'), \tag{2.5}$$

$$B_2(D, q)\, u(x)\Big|_{\substack{x_{n+1}=0\\ x_n<0}} = g_2(x'), \tag{2.6}$$

где $u \equiv 0$ для $x_{n+1} < 0$, $\operatorname{ord} A = 2$, $\operatorname{ord} B_i = m_i$; A, B_1 и B_2—однородные операторы с постоянными коэффициентами, то есть $A(t\xi, tq) = t^2 A(\xi, q)$, $B_i(t\xi, tq) = t^{m_i} B_i(\xi, q)$, $t > 0$ $(i = 1, 2)$.

Пусть оператор $A(D, q)$ подчинен следующему условию:

Условие а). $A(\xi, q) \neq 0$ при $\xi \in R^{n+1}$, $q \in \Xi$, $|\xi| + |q| \neq 0$. Из этого условия следует, что многочлен $A(\xi, q)$ допускает факторизацию $A(\xi, q) = A_+(\xi, q) A_-(\xi, q)$ [2]. Здесь $A_\pm(\xi, q) = \xi_{n+1} \pm \lambda(\xi' q)$, где $\lambda(\xi', q)$—корень полинома $A(\xi, q)$; $\operatorname{Im} \lambda < 0$. $A_+(\xi, q)$ не обращается в нуль и аналитична при $\operatorname{Im} \xi_{n+1} > 0$, $|\xi_{n+1}| + |\xi'| + |q| > 0$.

Найдем явный вид решения задачи (2.4)—(2.6) $u(x) \in H_{s,-l,l}(R_+^{n+1})$, предполагая его существование при $f(x) \in H_{s-2,-l,l}(R_+^{n+1})$, $g_1(x') \in H_{\varkappa+\delta-m_1,l}(R_+^n)$, $g_2(x') \in H_{\varkappa+\delta-m_2,l}(R_-^n)$, где $s = \varkappa + \delta + l + \dfrac{1}{2}$, $|\delta| < \dfrac{1}{2}$, число $\varkappa$ будет определено ниже, а число l подбирается так, чтобы выполнялось условие $s > \max\{m_1 + 1/2,\ m_2 + 1/2,\ 1\}$.

Рассмотрим сначала случай, когда в (2.4) $f(x)$ тождественно равна нулю. Продолжим $g_1(x')$ на все R^n так, что $Lg_1 \in H_{\varkappa+\delta-m_1,l}(R^n)$, аналогично $Lg_2 \in H_{\varkappa+\delta-m_2,l}(R^n)$. Тогда граничные условия (2.5)—(2.6) можно записать в виде

$$B_1(D, q)\, u(x)\Big|_{x_{n+1}=0} = Lg_1(x') + v_-(x', q),$$

$$B_2(D, q)\, v(x)\Big|_{x_{n+1}=0} = Lg_2(x') + v_+(x', q),$$

где в силу наших предположений $v_+ \in \mathring{H}^+_{\varkappa+\delta-m_1,l}(R_+^n)$, $v_- \in \mathring{H}^-_{\varkappa+\delta-m_2,l}(R_-^n)$. Сделав теперь преобразование Фурье по всем переменным, получим

$$\Pi^+_{n+1} A(\xi, q)\, \tilde{u}(\xi) = 0, \tag{2.4'}$$

$$\Pi'\Pi^+_{n+1} B_1(\xi, q)\tilde{u}(\xi) = \widetilde{Lg_1}(\xi') + \tilde{v}_-(\xi', q), \tag{2.5'}$$

$$\Pi'\Pi^+_{n+1} B_2(\xi, q)\, \tilde{u}(\xi) = \widetilde{Lg_2}(\xi') + \tilde{v}_+(\xi', q), \tag{2.6'}$$

где $\tilde{u}(\xi) = Fu(x)$, а Π' — образ Фурье оператора сужения функции с R^{n+1} на R^n

$$\Pi' \tilde{u}(\xi) = \lim_{x_{n+1}\to+0} \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix_{n+1}\xi_{n+1}}\, \tilde{u}(\xi', \xi_{n+1})\, d\xi_{n+1}.$$

Общее решение уравнения (2.4′) имеет вид (см. [2])

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)}, \tag{2.7}$$

и при $x_{n+1}>0$

$$\hat{u}_+(\xi', x_{n+1})=F^{-1}_{\xi_{n+1}}\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ix_{n+1}\xi_{n+1}}\frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)}d\xi_{n+1}=$$

$$=C(\xi', q)\,e^{-ix_{n+1}\lambda(\xi', q)}.$$

Для определения $C(\xi', q)$ подставим (2.7) в граничные условия (2.5′)—(2.6′). Получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} b_1(\xi', q)\ C(\xi', q) &= \widetilde{Lg_1}(\xi')+\tilde{v}_-(\xi', q)\\ b_2(\xi', q)\ C(\xi', q) &= \widetilde{Lg_2}(\xi')+\tilde{v}_+(\xi', q)\end{aligned}\right|, \tag{2.8}$$

где

$$b_1(\xi', q)=\Pi'\Pi^+_{n+1}\frac{B_1(\xi, q)}{A_+(\xi, q)},\quad b_2(\xi', q)=\Pi'\Pi^+_{n+1}\frac{B_2(\xi, q)}{A_+(\xi, q)}.$$

Наложим теперь условия на граничные операторы B_1 и B_2.

Условие *в*). $b_i(\xi', q)\neq 0$ при $\xi'\in R^n$, $q\in\Xi$, $|\xi'|+|q|\neq 0$ $(i=1, 2)$.

Легко проверить, что функции $b_i(\xi', q)$ являются однородными функциями переменных ξ' и q и имеют непрерывные первые производные по этим переменным. Отсюда и из условия *в*) вытекает возможность факторизации функций $b_i(\xi', q)$ по ξ_n

$$b_i(\xi', q)=b_i^+(\xi', q)\,b_i^-(\xi', q).$$

Обозначим

$$\varkappa_1=\operatorname{ord} b_1^+,\quad \varkappa_2=\operatorname{ord} b_2^-,\quad \varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2. \tag{2.9}$$

Исключая $C(\xi', q)$ из уравнений (2.8), получим

$$b_1^+(b_2^+)^{-1}\tilde{v}_++b_2^-(b_1^-)^{-1}\tilde{v}_-=b_2^-(b_1^-)^{-1}\widetilde{Lg_1}-b_1^+(b_2^+)^{-1}\widetilde{Lg_2}, \tag{2.10}$$

причем в обеих частях этого неравенства все слагаемые принадлежат $\tilde{H}_\delta(R^n)$ и, следовательно, к ним можно применить оператор Π_n^+. Из (2.10) получаем

$$\tilde{v}_+(\xi', q)=\frac{b_2^+}{b_1^+}\Pi_n^+\left(\frac{b_2^-}{b_1^-}\widetilde{Lg_1}-\frac{b_1^+}{b_2^-}\widetilde{Lg_2}\right).$$

Найденная таким образом функция $\tilde{v}_+(\xi', q)$ дает единственное решение уравнения (2.10) в $\tilde{\mathring{H}}^+_{\varkappa+\delta-m_2,\, l}(R^n_+)$ (см. [2]). Таким образом

$$C(\xi', q)=\frac{\widetilde{L}\tilde{g}_2}{b_2}+\frac{\tilde{v}_+}{b_2}=\frac{1}{b_1^+b_2^-}\left(\Pi_n^+\frac{b_2^-}{b_1^-}\tilde{L}\,\tilde{g}_1+\Pi_n^-\frac{b_1^+}{b_2^+}\tilde{L}\,\tilde{g}_2\right) \tag{2.11}$$

и окончательно

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{A_+b_1^+b_2^-}\left(\Pi_n^+\frac{b_2^-}{b_1^-}\widetilde{Lg_1}+\Pi_n^-\frac{b_1^+}{b_2^+}\tilde{L}\,\tilde{g}_2\right). \tag{2.12}$$

Формула (2.12) дает нам решение задачи (2.4)—(2.6) при условии $f(x)\equiv 0$. Из (2.11) следует, что

$$[C(\xi', q)]_{x+\delta,\, l} < C\left(\left\|\frac{Q_2^{x+\delta}\, Q_3^l}{b_1^+\, b_2^-}\, \Pi_n^+ \frac{b_2^-}{b_1^-}\, \widetilde{\widetilde{Lg_1}}\right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{Q_2^{x+\delta}\, Q_3^l}{b_1^+\, b_2^-}\, \Pi_n^- \frac{b_1^+}{b_2^+}\, \widetilde{\widetilde{Lg_2}}\right\|_0\right) \leqslant C_1\left([g_1]^+_{x+\delta-m_1,\, l} + [g_2]^-_{x+\delta-m_2,\, l}\right).$$

Так же, как и в [2], можно получить, что

$$\Pi^+_{n+1} \frac{\xi_-^s}{A_+} = \Pi^+_{n+1} R(\xi, q), \ |R| \leqslant \frac{(|\xi'| + |q|)^{[s]+1}}{(|\xi_{n+1}| + |\xi'| + |q|)^{1+(1-\gamma)}},$$

$s = [s] + \gamma$, $[s]$ — целая часть s, $0 < \gamma < 1$.

Поэтому (напомним, что $s = x + \delta + l + 1/2$)

$$[u]^+_{s,-l,\, l} = \left[\frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)}\right]^+_{s,-l,\, l} = \left\|\Pi^+_{n+1} \xi_-^s\, Q_3^{-l}\, Q_3^l \frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)}\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left\|\Pi^+_{n+1} \frac{\xi_-^s}{A_+(\xi, q)}\, Q_2^{-l}\, Q_3^l\, C(\xi', q)\right\|_0 \leqslant C_3 \left\|\frac{(|\xi'| + |q|)^{[s]+1}\, Q_2^{-l}\, Q_3^l}{(|\xi_{n+1}| + |\xi'| + |q|)^{1+(1-\gamma)}} C(\xi', q)\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_4 [C(\xi', q)]_{x+\delta,\, l} < C_5 \left([g_1]^+_{x+\delta-m_1,\, l} + [g_2]^-_{x+\delta-m_2,\, l}\right). \tag{2.13}$$

С другой стороны, из (1.10) и лемм 1.1 и 1.4 легко получается оценка

$$[g_1]^+_{x+\delta-m_1,\, l} = \left\|\Pi_n^+\, \overline{\xi}_-^{x+\delta-m_1}\, Q_3^l\, \widetilde{\widetilde{L g_1}}\right\|_0 =$$

$$= \left\|\Pi_n^+\, \overline{\xi}_-^{x+\delta-m_1}\, Q_3^l\, \Pi' \Pi^+_{n+1} B_1 u\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_6 [\Pi' \Pi^+_{n+1} B_1 u]_{x+\delta-m_1,\, l} \leqslant C_7 [\Pi^+ B_1 u]^+_{s-m_1,\, -l,\, l} \leqslant C_8 [u]^+_{s,\, -l,\, l}.$$

Аналогично

$$[g_2]^-_{x+\delta-m_2,\, l} \leqslant C_9 [u]^+_{s,-l,\, l}.$$

Из двух последних неравенств и из (2.13) получаем следующую двустороннюю оценку:

$$[u]^+_{s,-l,\, l} \leqslant C_{10}\left([g_1]^+_{x+\delta-m_1,\, l} + [g_2]^-_{x+\delta-m_2,\, l}\right) \leqslant C_{11} [u]^+_{s,-l,\, l}. \tag{2.14}$$

Если же в уравнении (2.4) $f(x) \not\equiv 0$, то после преобразования Фурье и применения оператора Π^+_{n+1} уравнение (2.4) переходит в уравнение

$$\Pi^+_{n+1} A(\xi, q)\, \tilde{u}(\xi) = \Pi^+_{n+1} \widetilde{\widetilde{Lf}}(\xi). \tag{2.15}$$

Функция

$$\tilde{u}_0(\xi) = \frac{1}{A_+(\xi, q)}\, \Pi^+_{n+1} \frac{\widetilde{\widetilde{Lf}}(\xi)}{A_-(\xi, q)}$$

является частным решением уравнения (2.15). Заметим, что оператор Π^+_{n+1} применим, так как $s > 1$. Полагая

$$\tilde{u}(\xi) = \tilde{u}_0(\xi) + \tilde{w}(\xi),$$

определим $\tilde{w}(\xi)$ как решение задачи (2.4′)—(2.6′), где в правых частях вместо $\widetilde{Lg_l}(\xi)$ стоят функции

$$\tilde{h}_l(\xi')=\widetilde{Lg_l}-\Pi'\Pi^+_{n+1}B_l\frac{1}{A_+(\xi,q)}\Pi^+_{n+1}\frac{\widetilde{Lf}}{A_-(\xi,q)}.$$

Отсюда и из (2.12) находим, что решение задачи (2.4)—(2.6) имеет вид

$$\tilde{u}=\frac{1}{A_+}\Pi^+_{n+1}\frac{\widetilde{Lf}}{A_-}+\frac{1}{A_+b_1^+b_2^-}\left(\Pi_n^+\frac{b_2^-}{b_1^-}\tilde{h}_1+\Pi^-_n\frac{b_1^+}{b_2^+}h_2\right).$$

Очевидно, что

$$[u]^+_{s,-l,l}\leqslant C\left([f]^+_{s-2,-l,l}+[h_1]^+_{\varkappa+\delta-m_1,l}+[h_2]^-_{\varkappa+\delta-m_2,l}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_1\left([f]^+_{s-2,-l,l}+[g_1]^+_{\varkappa+\delta-m_1,l}+[g_2]^-_{\varkappa+\delta-m_2,l}\right).$$

Доказательство обратного неравенства

$$[f]^+_{s-2,-l,l}+[g_1]^+_{\varkappa+\delta-m_1,l}+[g_2]^-_{\varkappa+\delta-m_2,l}\leqslant C_2[u]^+_{s,-l,l}$$

легко провести, используя леммы 1.1 и 1.4.

Таким образом, при сделанных нами предположениях решение задачи (2.4)—(2.6) существует и выполнена двусторонняя априорная оценка

$$[u]^+_{s,-l,l}\leqslant C_1\left([f]^+_{s-2,-l,l}+[g_1]^+_{\varkappa+\delta-m_1,l}+\right.$$
$$\left.+[g_2]^-_{\varkappa+\delta-m_2,l}\right)\leqslant C_2[u]^+_{s,-l,l}. \qquad (2.16)$$

2°. **Задача в ограниченной области для оператора с переменными коэффициентами.** Перейдем к исследованию задачи (2.1)—(2.3) в области Ω. Наложим на операторы задачи следующие условия.

Условие А). $A^\circ(x,\xi,q)\neq 0$ при любом $\xi\in R^{n+1}$, $q\in\Xi$, $|\xi|+|q|\neq 0$.

Условие В). В каждой л.с.к.

$$b_l(x,\xi',q)=\Pi'\Pi^+_{n+1}\frac{B_l^0(x,\xi,q)}{A_+^0(x,\xi,q)}\neq 0\quad(i=1,2)$$

при $x\in\Gamma$, $\xi\in R^n$, $|\xi'|+|q|\neq 0$, где $A^\circ(x,\xi,q)=A^0_+(x,\xi,q)A^0_-(x,\xi,q)$— факторизация $A^\circ(x,\xi,q)$ по ξ_{n+1}.

Факторизация $b_l(x,\xi,q)$ по ξ_n при каждом фиксированном x при выполнении условия В) всегда возможна

$$b_l(x,\xi',q)=b_l^+(x,\xi',q)\,b_l^-(x,\xi',q).$$

Обозначим $\varkappa_1(x)=\operatorname{ord}b_1^+$, $\varkappa_2(x)=\operatorname{ord}b_2^-$. Положим

$$\varkappa(x)=\varkappa_1(x)+\varkappa_2(x). \qquad (2.17)$$

Исходя из явного вида факторизации (см. [2]), легко убедиться, что $\varkappa(x)$ — непрерывная функция. Для простоты изложения допустим, что $\varkappa(x)$ — вещественна.

Пусть $\varkappa_0(x)$ — непрерывная функция на ω такая, что

$$\max_{x\in\omega} |\varkappa_0(x) - \varkappa(x)| < \frac{1}{2}.$$

Можно, например, положить $\varkappa_0(x) = \varkappa(x) + \delta(x)$, где $|\delta(x)| < \frac{1}{2}$. Пусть $d > \max\{m_1 + 1/2,\ m_2 + 1/2,\ 1\}$. Введем непрерывную на $\overline{\Omega}$ функцию $l(x) \geqslant 0$ такую, что

$$s(x) = \varkappa_0(x) + l(x) + 1/2 \geqslant d \tag{2.18}$$

при $x \in \omega$. Продолжим $s(x)$ непрерывным образом на все $\overline{\Omega}$ с сохранением неравенства (2.18). Пусть разбиение единицы (1.18) настолько мелкое, что колебание функций $\varkappa_0(x)$, $l(x)$ и $s(x)$ в каждом из U_j меньше 1/4. Как и в § 1 введем пространства $H_{(s,-l,\,l)}(\Omega)$, $H_{(s-2,-l,\,l)}(\Omega)$, $H_{(\varkappa+\delta-m_j,\,l)}(\Gamma^{\pm})$.

Сформулируем теперь основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* A), B) и $f(x) \in H_{(s-2,-l,\,l)}(\Omega)$, $g_l(x') \in H_{(\varkappa+\delta-m_l,\,l)}(\Gamma^{\pm})$, *где* $s(x)$ *определяется из* (2.18). *Тогда при достаточно большом* $|q|$ ($|q| > q_0 > 0$) *задача* (2.1) — (2.3) *имеет единственное решение* $u(x) \in H_{(s,-l,\,l)}(\Omega)$ *и при этом выполнена двусторонняя оценка*

$$C[u]_{(s,-l,\,l)} \leqslant [f]^{+}_{(s-2,-l,\,l)} + [g_1]^{+}_{(\varkappa+\delta-m_1,\,l)} + [g_2]^{-}_{(\varkappa+\delta-m_2,\,l)} \leqslant C_1[u]_{(s,-l,\,l)}. \tag{2.19}$$

Замечание. Отметим, что можно положить $l(x) = 0$ вне W с одновременным сохранением неравенства (2.18) за счет выбора $\varkappa_0(x)$. Это означает, что решение задачи (2.1)—(2.3) вне W будет принадлежать пространству $H_{(s)}(\Omega/W)$* и может быть сколь угодно гладким (когда s велико), если правые части в (2.1)—(2.3) достаточно гладкие функции, т. е. $f(x) \in H_{(s-2)}(\Omega/W)$, $g_l(x') \in H_{(s-m_l-1/2)}(\Gamma^{\pm}/W)$. В окрестности линии разрыва ω при любом $s(x)$ решение имеет лишь порядок гладкости $\varkappa(x) + \delta(x)$.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1. Докажем сначала априорную оценку.

Определим для каждого j функцию $\psi_j(x) \in C_0^{\infty}(R^{n+1})$ такую, что $\psi_j(x) \equiv 1$ в окрестности носителя $\varphi_j(x)$ из разбиения единицы (1.17), так что $\psi_j\varphi_j = \varphi_j$ и если $U_k \cap U_j \neq 0$, то $\psi_j\varphi_k = \varphi_k$. Исследование за-

---

* Пространство $H_{(s)}$ (с одним индексом) совпадает с $H_{(s,0,0)}$ (см. стр. 11) и является обычным пространством Соболева-Слободецкого переменного порядка $s(x)$.

дачи (2.1)—(2.3) будем производить с помощью перехода к локальным системам координат так, как это было указано в 2° § 1.

Пусть теперь $U_j \cap \omega \neq 0$ (в противном случае, как это будет видно из дальнейшего, выкладки намного упрощаются). Умножая (2.1) на $\varphi_j(x)$ у переходя к л.с.к., получим $\varphi_j Au = \varphi_j f$ или

$$\varphi_j A\psi_j u = \varphi_j f.$$

Если носитель $\psi_j(x)$ достаточно мал, то можно построить такой оператор A_j, определенный на всем пространстве R^{n+1} (или R^{n+1}_+) такой, что

$$\varphi_j A\psi_j u = \varphi_j A_j \psi_j u,$$

и при этом A_j является оператором с мало изменяющимся коэффициентами.

Для этого положим

$$A_j(x) = c(x) A(x) + (1 - c(x)) A(x_j),$$

где $c(x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$, $0 \leqslant c(x) \leqslant 1$, $c(x)$ равна 1 в несколько большей области, чем $\operatorname{supp} \psi_j$, и 0 — вне этой области; $x_j \in \operatorname{supp} \psi_j$, если $\operatorname{supp} \psi_j \cap \omega \neq 0$, то $x_j \in \omega$. В дальнейшем в локальных координатах полагаем $x_j = 0$. Далее, очевидно, имеем

$$A_j \varphi_j u = \varphi_j A_j \psi_j u + A_{1j} \psi_j u,$$

где A_j — оператор порядка не выше первого. Отсюда

$$A_j \varphi_j u = \varphi_j f + A_{1j} \psi_j u.$$

Далее

$$A_j^0(0) \varphi_j u = \varphi_j f + A_{1j} \psi_j u + (A_j^0(x) - A_j(x)) \varphi_j u +$$
$$+ (A_j^0(0) - A_j^0(x)) \varphi_j u$$

или

$$A_j^0(0) \varphi_j u = \varphi_j f + A_{1j} \psi_j u + A_{2j} \gamma_j u + A_{3j} \varphi_j u = \Phi_j, \tag{2.20}$$

$x_{n+1} > 0$ в л.с.к., и $\operatorname{ord} A_{2j} \leqslant 1$, а оператор A_{3j} — оператор с мало изменяющимися коэффициентами.

Точно таким же образом в л.с.к. можно преобразовать граничные условия

$$B_{1j}^0(0) \varphi_j u \Big|_{\substack{x_{n+1}=0\\ x_n>0}} = \varphi_j g_1 + Q_{1j} \psi_j u + Q_{2j} \varphi_j u + Q_{3j} \varphi_j u \Big|_{\substack{x_{n+1}=0\\ x_n>0}} = \Psi_{1j}, \tag{2.21}$$

$$B_{2j}^0(0) \varphi_j u \Big|_{\substack{x_{n+1}=0\\ x_n<0}} = \varphi_j g_2 + P_{1j} \psi_j u + P_{2j} \varphi_j u + P_{3j} \varphi_j u \Big|_{\substack{x_{n+1}=0\\ x_n<0}} = \Psi_{2j}, \tag{2.22}$$

где $\operatorname{ord} Q_{1j} = \operatorname{ord} Q_{2j} = m_1 - 1$, $\operatorname{ord} P_{1j} = \operatorname{ord} P_{2j} = m_2 - 1$, а Q_{3j} и P_{3j} — операторы с мало изменяющимися коэффициентами порядка m_1 и m_2 соответственно.

Так как для однородных операторов с постоянными коэффициентами априорная оценка (2.19) доказана нами в 1° настоящего параграфа (см. (2.16)), то

$$[\varphi_j u]_{s_j,-l_j,l_j} \leqslant C_1 ([\Phi_j]^+_{s_j-2,-l_j,l_j} + \\ + [\Psi_{1j}]^+_{s_j+s_j-m_{1},l_j} + [\Psi_{2j}]^-_{s_j+s_j-m_{2},l_j}). \qquad (2.23)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое. В силу лемм 1.2, 1.4 и неравенств (1.22) получим

$$[\Phi_j]^+_{s_j-2,-l_j,l_j} \leqslant C_2 ([\varphi_j f]^+_{s_j-2,-l_j,l_j} + [\psi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j} + \\ + [\varphi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j} + \varepsilon [\varphi_j u]^+_{s_j,-l_j,l_j} + [\varphi_j u]^+_{s_j,-l_j,l_j-1}) \leqslant \\ \leqslant C_3 ([\varphi_j f]^+_{s_j-2,-l_j,l_j} + [\psi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j} + \\ + \left(\varepsilon + \frac{1}{|q|}\right) [\varphi_j u]^+_{s_j,-l_j,l_j}), \qquad (2.24)$$

где через ε мы обозначили максимум модуля колебаний коэффициентов операторов A_{3j}, Q_{3j} и P_{3j}. Очевидно, что с самого начала мы можем выбрать разбиение единицы настолько мелким, чтобы ε было как угодно мало.

Далее

$$[\psi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j} \leqslant \sum_k [\varphi_k \psi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j},$$

где суммирование берется по тем k, для которых $V_j \cap U_k \neq 0$. Пусть $s_j = s_k + \Delta$, $l_j = l_k + \Delta_1$*, причем разбиение единицы выбрано таким, что $\max\{|\Delta|, |\Delta_1|\} < 1/4$.

Пусть теперь $\Delta_1 > 0$. Тогда

$$[\varphi_k \psi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j} = [\varphi_k \psi_j u]^+_{s_k-1+\Delta,-l_k-\Delta_1,l_k+\Delta_1} \leqslant \\ \leqslant [\varphi_k \psi_j u]^+_{s_k-1+\Delta,-l_k-\Delta_1+\Delta_1,l_k} = [\varphi_k \psi_j u]^+_{s_k-1+\Delta,-l_k,l_k} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|q|^{1-\Delta}} [\varphi_k u]^+_{s_k,-l_k,l_k}$$

при $\Delta_1 < 0$,

$$[\varphi_k \psi_j u]^+_{s_k-1+\Delta,-l_k-\Delta_1,l_k+\Delta_1} \leqslant [\varphi_k \psi_j u]^+_{s_k-1+\Delta,-l_k-\Delta_1,l_k} \leqslant \\ \leqslant [\varphi_k u]^+_{s_k-1+\Delta-\Delta_1,-l_k,l_k} \leqslant \frac{1}{|q|^{1-\Delta+\Delta_1}} [\varphi_k u]^+_{s_k,-l_k,l_k}.$$

Таким образом, всегда

$$[\varphi_k \psi_j u]^+_{s_j-1,-l_j,l_j} \leqslant \frac{1}{|q|^{\Delta_2}} [\varphi_k u]_{s_k,-l_k,l_k}, \text{ где } \Delta_2 > 0.$$

---

* Точнее следует писать Δ_{jk} и Δ_{1jk}, однако отсутствие индексов не может вызвать недоразумений.

Отсюда и из (2.24) имеем

$$[\Phi_j]^+_{s_j-2,-l_j,\,l_j} \leqslant C_4\,([\varphi_j f]^+_{s_j-2,\,-l_j,\,l_j} +$$

$$+\sum_k \frac{1}{|q|^{\delta_k}}\,[\varphi_k u]^+_{s_k,-l_k,\,l_k} + \left(\varepsilon+\frac{1}{|q|}\right)[\varphi_j\,u]^+_{s_j,\,-l_j,\,l_j}\,). \tag{2.25}$$

Точно таким же образом (только нужно сначала применить лемму 1.1) мы получаем следующие оценки:

$$[\Psi_{1j}]^+_{\varkappa_j+s_j-m_1,\,l_j} \leqslant C_5([\varphi_j g_1]^+_{\varkappa_j+s_j-m_1,\,l_j} +$$

$$+\left(\varepsilon+\frac{1}{|q|}\right)[\varphi_j u]^+_{s_j,-l_j,\,l_j} + \sum_k \frac{1}{|q|^{\delta_k}}\,[\varphi_k u]^+_{s_k,\,-l_k,\,l_k}, \tag{2.26}$$

$$[\Psi_{2j}]^-_{\varkappa_j+s_j-m_2,\,l_j} \leqslant C_6\,([\varphi_j g_2]^-_{\varkappa_j+s_j-m_2,\,l_j} +$$

$$+\left(\varepsilon+\frac{1}{|q|}\right)[\varphi_j u]^+_{s_j,\,l_j,\,l_j} + \sum_k \frac{1}{|q|^{\delta_k}}\,[\varphi_k\,u]^+_{s_k,\,-l_k,\,l_k}. \tag{2.27}$$

Выбрав теперь $|q|$ достаточно большим: $|q|>q_0>0$ и суммируя (2.23), (2.25)–(2.27) по всем j, получим первое из неравенств (2.19). Второе из неравенств (2.19) следует из лемм 1.1 и 1.3. Априорная оценка доказана.

Доказательство существования решения мы приводить не будем. Оно проводится по такому же плану, как и в работе [4].

II. Параболические смешанные задачи

§ 3. *Пространства* $P_s(\gamma)$ *и* $E_s(\gamma)$

1°. Мы введем сейчас несколько пар пространств, необходимых нам для дальнейших рассмотрений. Эти пары пространств характеризуются тем, что для каждой пары преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм. Это позволит нам свести параболические смешанные задачи к краевым задачам для эллиптического уравнения с параметром, рассмотренным нами в главе 1.

Пусть $s\geqslant 0$ и $\gamma>0$. Пространство $P_s(\gamma)$ состоит из функций $u(t)$, заданных на всей оси R^1, равных нулю при $t<0$ и таких, что $e^{-\gamma t}u(t)\in H_s(R^1)$. Норму $u(t)$ в пространстве $P_s(\gamma)$ обозначим через $|\!|\!|u(t)|\!|\!|_s$ и положим

$$|\!|\!|u(t)|\!|\!|_s = \|e^{-\gamma t}u(t)\|_s. \tag{3.1}$$

Пространство $E_s(\gamma)$ состоит из функций $U(p)=U(\sigma+i\tau)$, заданных и голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} p>\gamma$ и обладающих свойством

$$\langle U(p)\rangle_s^2 = \sup_{\sigma>\gamma}\int |U(\sigma+i\tau)|^2\,|\sigma+i\tau|^{2s}\,d\tau < +\infty. \tag{3.2}$$

Пространства $P_s(\gamma)$ и $E_s(\gamma)$ были введены и изучены М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком в работе [1]. Там же была доказана следующая

Теорема. *Преобразование Лапласа*

$$\mathrm{L}u(t) = U(p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t)\, dt \tag{3.3}$$

при $s \geqslant 0$ *и* $\gamma > 0$ *взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство* $P_s(\gamma)$ *на пространство* $E_s(\gamma)$.

В той же работе показано, что если $U(p) \in E_s(\gamma)$, то при $\sigma \to \gamma$ $U(\sigma + i\tau)$ имеет предельные значения почти всюду на прямой $\sigma = \gamma$ и можно положить

$$< U(p) >_{s\,1}^2 = \int_{\sigma=\gamma} |U(\sigma + i\tau)|^2\, |\sigma + i\tau|^{2s}\, d\tau. \tag{3.4}$$

Введем следующие пары пространств.

Пара I. Пространство $P_{s,s/2}(\gamma, R^{n+1})$ состоит из функций $u(x, t)$, заданных при почти всех $x \in R^{n+1}$, $t \in R^1$, равных нулю при $t < 0$ и таких, что

1) при почти всех t $u(x, t) \in H_s(R^{n+1})$ по переменной x;

2) при почти всех x $u(x, t) \in P_{s/2}(\gamma)$ по переменной t;

3) $\|u(x, t)\|_{s,\, s/2} =$

$$= \int (1 + |\xi_0|^{1/2} + |\xi|)^{2s} |F_t e^{-\gamma t} u(\xi, t)|^2\, d\xi d\xi_0 < +\infty, \tag{3.5}$$

где ξ_0 — переменная, двойственная к t.

Формула (3.5) определяет норму в пространстве $P_{s,\, s/2}(\gamma, R^{n+1})$. Пространство $E_{s,\, s/2}(\gamma, R^{n+1})$ состоит из функций $U(x, p)$, заданных при почти всех x и p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$ и таких, что

1) при всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ $U(x, p) \in H_s(R^{n+1})$ по переменной x;

2) при почти всех x $U(x, p) \in E_{s/2}(\gamma)$ по переменной p;

3)

$$< U(x, p) >_{s,\, s/2}^2 = \int_{\sigma=\gamma} |U(\xi, p)|^2 (|\xi| + |p|^{1/2})^{2s}\, d\xi d\tau < +\infty. \tag{3.6}$$

Норму в $E_{s,\, s/2}(\gamma, R^{n+1})$ определим по формуле (3.6). Обозначая $p = q^2$, можно определить пространство $E_{s,\, s/2}(\gamma, R^{n+1})$ следующим образом:

Функция $U(x, p) \in E_{s,\, s/2}(\gamma, R^{n+1})$, если

1) при всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ функция $U(x, p) \in H_s(R^{n+1})$;

2) при почти всех x $U(x, p) \in E_{s/2}(\gamma)$ по переменной p;

3) при $p = q^2$ (см. (1.4))

$$<U(x, p)>^2_{s, s/2} = \int\limits_{\sigma=\gamma} [U(x, p)]^2_s \, d\tau < +\infty. \tag{3.7}$$

Легко проверить, что эти два определения эквивалентны.

Пара II. Пространство $P_{\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}}(\gamma, R^n)$ состоит из функций $g(x', t)$, равных нулю при $t<0$ и таких, что

1) при почти всех t $g(x', t) \in H_{\alpha, \beta}(R^n)$ по переменной x',

2) при почти всех x' $g(x', t) \in P_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\gamma)$ по переменной t,

3) $\|g(x', t)\|^2_{\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}} =$

$$= \int (1+|\xi_0|^{1/2}+|\xi'|)^{2\alpha}(1+|\xi_0|^{1/2}+|\xi''|)^{2\beta} |F_t e^{-\gamma t} \tilde{g}(\xi', t)|^2 d\xi d\xi_0 < +\infty. \tag{3.8}$$

Пространство $E_{\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}}(\gamma, R^n)$ состоит из функций $G(x', p)$, заданных при почти всех x' и p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$ и таких, что

1) при всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ $G(x', p) \in H_{\alpha, \beta}(R^n)$,

2) при почти всех x' $G(x', p) \in E_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\gamma)$ по переменной p,

3) при $p = q^2$ (см. (1.6))

$$<G(x', p)>^2_{\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}} = \int\limits_{\sigma=\gamma} [G(x', p)]^2_{\alpha, \beta} \, d\tau < +\infty. \tag{3.9}$$

Пара III. Пространство $P_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}}(\gamma, R^{n+1})$ состоит из функций $u(x, t)$, равных нулю при $t<0$ и таких, что

1) при почти всех t $u(x, t) \in H_{s, r, l}(R^{n+1})$ по переменной x,

2) при почти всех x $u(x, t) \in P_{\frac{s+r+l}{2}}(\gamma)$ по переменной t,

3) $\|u(x, t)\|^2_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}} =$

$$= \int (1+|\xi_0|^{1/2}+|\xi|)^{2s}(1+|\xi_0|^{1/2}+|\xi'|)^{2r}(1+|\xi_0|+|\xi''|)^{2l} |F_t e^{-\gamma t} \tilde{u}(\xi, t)|^2 d\xi dt < +\infty. \tag{3.10}$$

Пространство $E_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}}(\gamma, R^{n+1})$ состоит из функций $U(x, p)$, заданных при почти всех x и p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$ и таких, что

1) при всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ $U(x, p) \in H_{s, r, l}(R^{n+1})$,

2) при почти всех x $U(x, p) \in E_{\frac{s+r+l}{2}}(\gamma)$ по переменной p,

3) при $p = q^2$ (см. (1.5))

$$<U(x,p)>^2_{s,r,l,\frac{s+r+l}{2}} = \int\limits_{\sigma=\gamma}^{\infty} [U(x,p)]^2_{s,r,l} d\tau < +\infty. \tag{3.11}$$

Пара IV. Пространство $P_{s,\,s/2}(\gamma, R^{n+1}_{+})$ состоит из функций $u(x,t)$, являющихся сужением на R^{n+1}_{+} функций из $P_{s,\,s/2}(\gamma, R^{n+1})$ с нормой

$$\|u(x,t)\|^{+}_{s,\,s/2} = \|\Pi^{+}_{n+1}\Lambda^{s}_{-}(1+|\xi_0|)^{s/2}\tilde{u}(\xi,\xi_0)\|_0, \tag{3.12}$$

где $\Lambda_{-} = \xi_n - i\sqrt{|\xi''|^2+1}$.

Пространство $E_{s,\,s/2}(\gamma, R^{n+1}_{+})$ состоит из функций $U(x,p)$, являющихся сужением на R^{n+1}_{+} функций из $E_{s,\,s/2}(\gamma, R^{n+1})$ с нормой

$$<U(x,p)>^{+}_{s,\,s/2} = \left(\int\limits_{\sigma=\gamma}([U(x,p)]^{+}_{s})^2 d\tau\right)^{1/2}. \tag{3.13}$$

Аналогично паре IV определяются и следующие пары пространств.

Пара V. Пространство $P_{\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta}{2}}(\gamma, R^{n}_{+})$ с нормой

$$\|g(x',t)\|^{+}_{\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \|\Pi^{+}_{n}\{\xi_n - i\sqrt{|\xi''|^2+|\xi_0|+1}\}^{\alpha}(1+|\xi_0|^{1/2}+|\xi''|)^{\beta} g(\xi',\xi_0)\|_0 \tag{3.14}$$

и пространство $E_{\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta}{2}}(\gamma, R^{n}_{+})$ — с нормой

$$<G(x',p)>^{+}_{\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta}{2}} = \left(\int\limits_{\sigma=\gamma}([G(x',p)]^{+}_{\alpha,\beta})^2 d\tau\right)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Пара VI. Пространство $P_{s,r,l,\frac{s+r+l}{2}}(\gamma, R^{n+1}_{+})$ с нормой

$$\|u(x,t)\|^{+}_{s,r,l,\frac{s+r+l}{2}} =$$

$$= \|\Pi^{+}_{n+1}\{\xi_{n+1} - i\sqrt{|\xi'|^2+|\xi_0|+1}\}^{s}(1+|\xi_0|^{1/2}+|\xi'|)^{r}(1+|\xi_0|^{1/2}+$$

$$+|\xi''|)^{l}\tilde{u}(\xi,\xi_0)\|_0, \tag{3.16}$$

и пространство $E_{s,r,l,\frac{s+r+l}{2}}(\gamma, R^{n+1}_{+})$ с нормой

$$<U(x,p)>^{+}_{s,r,l,\frac{s+r+l}{2}} = \left(\int\limits_{\sigma=\gamma}([U(x,p)]^{+}_{s,r,l})^2 d\tau\right)^{1/2} \tag{3.17}$$

Заметим, что в силу теорем вложения (см., например, [6], [7]), если $s > 1/2$, то функция $u(x,t) \in P_{s,r,l,\frac{s+r+l}{2}}(\gamma, R^{n+1})$ имеет след $\gamma_{n+1} \times \times u(x,t)$ на гиперплоскости $x_{n+1}=0$, и функция $\gamma_{n+1}u(x,t)$ имеет гладкость по x' порядка $s+r-1/2$, гладкость по x'' порядка $s+r+l-1/2$, и гладкость по t порядка $\dfrac{s+r+l-1/2}{2}$.

Теорема 3.1. *Преобразование Лапласа* (3.3) *осуществляет изоморфизм в парах* I—VI*.

Докажем теорему для пары III. Пусть $u\ (x, t) \in P_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}}\ (\gamma, R^{n+1})$.

Значит $u\ (x, t) \in P_{\frac{s+r+l}{2}}\ (\gamma)$ при почти всех x. Следовательно, при этих x определена функция

$$U\ (x,\ p) = \mathrm{L}u\ (x,\ t).$$

При остальных x доопределим $U\ (x,\ p)$ произвольным образом. Вследствие теоремы, приведенной на стр. 34, $U\ (x,\ p) \in E_{\frac{s+r+l}{2}}\ (\gamma)$ и

$$\int\limits_{\sigma=\gamma} |U\ (x,\ p)|^2\ |q|^{s+r+l}\ d\tau \leqslant C_1 \int |F_t\ e^{-\gamma t}\ u\ (x,\ t)|^2\ (1+|\xi_0|^{1/2})^{s+r+l}\ d\xi_0.$$

Очевидно, что такое же неравенство верно для функций $\tilde{U}\ (\xi,\ p)$ и $\tilde{u}\ (\xi,\ t)$

$$\int\limits_{\sigma=\gamma} |\tilde{u}\ (\xi,\ p)|_\xi^2 |q|^{s+r+l}\ d\tau \leqslant C_2 \int |F_t\, e^{-\gamma t}\, \tilde{u}\ (\xi,\ t)|^2\ (1+|\xi_0|^{1/2})^{s+r+l}\ d\xi_0. \qquad (3.18)$$

Положим в (3.18) $s+r+l=0$; умножая на $(1+|\xi|)^{2s}\,(1+|\xi'|)^{2r}\ (1+|\xi''|)^{2l}$, получим

$$\int\limits_{\sigma=\gamma} |\tilde{U}\ (\xi,\ p)|^2\ (1+|\xi|)^{2s}\,(1+|\xi'|)^{2r}\,(1+|\xi''|)^{2l}\ d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int |F_t \cdot e^{-\gamma t}\ \tilde{u}\ (\xi,\ t)|^2\,(1+|\xi|)^{2s}\,(1+|\xi'|)^{2r}\,(1+|\xi''|)^{2l}\ d\xi_0. \qquad (3.19)$$

Складывая (3.18) с (3.19) и интегрируя по ξ, получим неравенство, эквивалентное следующему:

$$< U\ (x,\ p) >_{s,\ r,\ l, \frac{s+r+l}{2}} \leqslant C_4 \|u\ (x,\ t)\|_{s,\ r,\ l,\ \frac{s+r+l}{2}}. \qquad (3.20)$$

Таким образом, если $u\ (x,\ t) \in P_{s,\ r,\ l,\ \frac{s+r+l}{2}}\ (\gamma,\ R^{n+1})$, то после применения к ней преобразования Лапласа, мы получаем функцию $U\ (x,\ p)$, обладающую свойствами

$$< U\ (x,\ p) >_{s,\ r,\ l,\ \frac{s+r+l}{2}} < +\infty,\quad U\ (x,\ p) \in E_{\frac{s+r+l}{2}}\ (\gamma)$$

и при почти всех p с $\operatorname{Re} p = \gamma$

$$[U\ (x,\ p)]^2_{s,\ r,\ l} < +\infty,$$

что следует из (3.20).

---

* Утверждение теоремы о парах I и IV фактически содержится в теореме 8.1 работы [1].

Последнее неравенство можно получить и для почти всех p с $\operatorname{Re} p = \gamma$ точно таким же образом, как и для p с $\operatorname{Re} p = \gamma$. Для этого заметим, что при $U(p) \in E_s(\gamma)$

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int |U(p)|^2 |p|^{2(s+r+l)} d\tau = \int\limits_{\sigma=\gamma} |U(p)|^2 |p|^{2(s+r+l)} d\tau.$$

Пусть теперь $U(x, p) \in E_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}}(\gamma, R^{n+1})$. Это значит, что $U(x, p) \in E_{s/2}(\gamma)$ по переменной p. Тогда для почти всех x существует функция

$$u(x, t) = \mathrm{L}^{-1} U(x, p) \in P_{\frac{s+r+l}{2}}(\gamma).$$

В силу теоремы, приведенной на стр. 34

$$\int (1+|\xi_0|^{1/2})^{s+r+l} |F_t\, e^{-\gamma t} \tilde{u}(\xi, t)|^2 d\xi_0 \leqslant C_7 \int\limits_{\sigma=\gamma} |U(\xi, p)|^2 |q|^{s+r+l} d\tau. \quad (3.21)$$

Положим в (3.21) $s+r+l=0$ и умножим на

$$(1+|\xi|)^{2s} (1+|\xi'|)^{2r} (1+|\xi''|)^{2l},$$

получим

$$\int (1+|\xi|)^{2s} (1+|\xi'|)^{2r} (1+|\xi''|)^{2l} |F_t\, e^{-\gamma t} \tilde{u}(\xi, t)|^2 d\xi_0 \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \int\limits_{\sigma=\gamma} |\tilde{U}(\xi, p)|^2 (1+|\xi|)^{2s} (1+|\xi'|)^{2r} (1+|\xi''|)^{2l} d\tau. \quad (3.22)$$

Суммируя (3.21) с (3.22) и интегрируя по ξ, имеем

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}} \leqslant C_6 < U >_{s, r, l, \frac{s+r+l}{2}}. \quad (3.23)$$

Отсюда, в частности, следует, что при почти всех t

$$\|u\|_{s, r, l} < +\infty.$$

Утверждение теоремы для остальных пар доказывается аналогично.

2°. Пространства с переменными индексами. В настоящем пункте мы будем пользоваться определениями и обозначениями § 1.

Пространство $P_{\left(s, r, l, \frac{s+r+l}{2}\right)}(\gamma, \Omega)$ состоит из функций $u(x, t)$, равных нулю при $t<0$ и таких, что

1) при почти всех t $u(x, t) \in H_{(s, r, l)}(\Omega)$,

2) при почти всех x $u(x, t) \in P_{\frac{s_j+r_j+l_j}{2}}$ для всех U_j — областей покрытия (1.18),

3)

$$|\!|\!| u(x, t) |\!|\!|_{\left(s, r, l, \frac{s+r+l}{2}\right)} = \Sigma |\!|\!| S_j \varphi_j u |\!|\!|_{s, r_j, l_j, \frac{s_j+r_j+l_j}{2}} < +\infty.$$

Пространство $E_{\left(s,\, r,\, l,\, \frac{s+r+l}{2}\right)}(\gamma,\ \Omega)$ состоит из функций $U(x, p)$, заданных при почти всех x из Ω и p и таких, что

1) при всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ $U(x, p) \in H_{(s, r, l)}(\Omega)$,

2) при почти всех $x \in U_j$ $U(x, p) \in E_{\frac{s_j+r_j+l_j}{2}}(\gamma)$ для всех U_j из покрытия (1.18),

3)
$$< U(x, p) >_{\left(s,\, r,\, l,\, \frac{s+r+l}{2}\right)} = \Sigma < S_j \varphi_j U >_{s_j,\, r_j,\, l_j,\, \frac{s_j+r_j+l_j}{2}} < +\infty.$$

Аналогичным образом вводятся пространства $P_{\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}(\gamma,\ \Gamma^{\pm})$, $E_{\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}(\gamma,\ \Gamma^{\pm})$ с нормами $\|\cdot\|^{\pm}_{\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ и $<\cdot>^{\pm}_{\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

Теорема 3.2. *Утверждение теоремы* 3.1 *верно и для пространств с переменными индексами.*

Действительно, если $u \in P_{\left(s,\, r,\, l,\, \frac{s+r+l}{2}\right)}(\gamma,\ \Omega)$, то существует функция $U(x, p) = \mathrm{L}u(x, t)$, которая при почти всех $x \in U_j$ принадлежит пространству $E_{\frac{s_j+r_j+l_j}{2}}(\gamma)$. При остальных $x \in U_j$ функцию $U(x, p)$ доопределяем произвольным образом. В силу теоремы 3.1 (см. (3.20)) имеет место неравенство для норм

$$< S_j \varphi_j U >_{s_j,\, r_j,\, l_j,\, \frac{s_j+r_j+l_j}{2}} \leqslant C \| S_j \varphi_j u \|_{s_j,\, r_j,\, l_j,\, \frac{s_j+r_j+l_j}{2}}$$

и, следовательно, и для норм

$$< U >_{\left(s,\, r,\, l,\, \frac{s+r+l}{2}\right)} < C_1 \|u\|_{\left(s,\, r,\, l,\, \frac{s+r+l}{2}\right)},$$

откуда, точно так же, как и в теореме 3.1, следует принадлежность $U(x, p)$ при всех p с $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p с $\operatorname{Re} p = \gamma$ пространству $H_{(s, r, l)}(\Omega)$. Доказательство второй части теоремы проводится аналогично доказательству второй части теоремы 3.1.

Замечание. Так же, как и в работе [1], можно показать, что все пространства, введенные в настоящем параграфе, являются полными.

§ 4. *Однозначная разрешимость параболической задачи в пространствах* $P_{\left(s,\, r,\, l,\, \frac{s+r+l}{2}\right)}(\gamma,\ \Omega)$

Пусть, как в § 2, Ω — ограниченная область в R^{n+1} с границей Γ, а ω $(n-1)$-мерное многообразие на Γ, делящее Γ на две части Γ^+ и Γ^-.

Рассмотрим цилиндрическую область $G = \Omega \times (0 < t < +\infty)$, в которой задано параболическое уравнение второго порядка

$$A\left(x, D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t)=f(x, t), \tag{4.1}$$

$u(x, t) \equiv 0$ вне G.

На боковой поверхности $\partial G=\Gamma\times(0<t<+\infty)$, $\partial G^{\pm}=\Gamma^{\pm}\times(0<t<$ $<+\infty)$ зададим граничные условия

$$B_1\left(x, D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t)\Big|_{\partial G^+} = g_1(x', t), \tag{4.2}$$

$$B_2\left(x, D, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t)\Big|_{\partial G^-} = g_2(x', t), \tag{4.3}$$

где $x'\in\Gamma$, $\operatorname{ord} B_i = m_i$ $(i = 1, 2)$. Будем считать для простоты, что коэффициенты операторов A, B_1, и B_2 бесконечно дифференцируемы по x.

При $t = 0$ зададим начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi_0(x). \tag{4.4}$$

Если $\varphi_0(x)\equiv 0$, то формальное преобразование Лапласа переводит задачу (4.1)—(4.4) в следующую стационарную задачу:

$$A(x, D, p)\, U(x, p) = F(x, p), \tag{4.5}$$

$$B_1(x, D, p)\, U(x, p)|_{\Gamma^+} = G_1(x', p), \tag{4.6}$$

$$B_2(x, D, p)\, U(x, p)|_{\Gamma^-} = G_2(x', p). \tag{4.7}$$

Заметим, что в уравнениях (4.5)—(4.7) p является комплексным параметром, пробегающим правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geqslant 0$.

Обозначим $p=q^2$. Тогда параметр q будет меняться в угле $|\arg q| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Следуя терминологии М. И. Вишика и М. С. Аграновича [1], задачу (4.1)—(4.4) назовем параболической, если задача (4.5)—(4.7), в которой p заменено на q^2, удовлетворяет условиям A и B § 2. В этом случае задачу (4.5)—(4.7) назовем полуограниченной.

1°. Однозначная разрешимость задачи (4.5)—(4.7) в пространствах $E_{\left(s, r, l, \frac{s+r+l}{2}\right)}(\gamma, \Omega)$.

Теорема 4.1. *Пусть* (4.5)—(4.7)—*полуограниченная задача*, *и пусть*

$$F(x, p)\in E_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)}(\gamma, \Omega),$$

$$G(x', p)\in E_{\left(\varkappa+\delta-m_1, l, \frac{\varkappa+\delta-m_1+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^+),\quad G_2(x', p)\in$$

$$\in E_{\left(\varkappa+\delta-m_2, l, \frac{\varkappa+\delta-m_2+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^-),$$

где $s(x)$, $l(x)$, $\varkappa(x)$ *и* $\delta(x)$ *определяются по формулам* (2.17), (2.18). *Тогда при достаточно большом* $|q|$ *существует единственное ре-*

шение задачи (4.5)—(4.7) $U(x, p) \in E_{(s, -l, l, s/2)}(\gamma, \Omega)$ *и имеет место двусторонняя априорная оценка*

$$C < U(x, p) >_{(s, -l, l, s/2)} \leqslant < F >_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)} +$$

$$+ < G_1 >^{+}_{\left(\varkappa+\delta-m_1, l, \frac{\varkappa+\delta-m_1+l}{2}\right)} + \tag{4.8}$$

$$+ < G_2 >^{-}_{\left(\varkappa+\delta-m_2, l, \frac{\varkappa+\delta-m_2+l}{2}\right)} \leqslant C_1 < U(x, p) >_{(s, -l, l, s/2)} .$$

Доказательство. Докажем сначала априорную оценку.

Пусть (4.5)—(4.7)—полуограниченная задача и пусть $U(x, p) \in E_{(s, -l, l, s/2)}(\gamma, \Omega)$. Тогда при всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$ $U(x, p) \in H_{(s, -l, l)}(\Omega)$, и в силу теоремы 2.1 при достаточно большом $|q|$ ($|q| > \gamma > q_0 > 0$) для указанных p имеет место априорная оценка

$$C_2 [U(x, p)]_{(s, -l, l)} \leqslant [F]_{(s-2, -l, l)} + [G_1]^{+}_{(\varkappa+\delta-m_1, l)} +$$

$$+ [G_2]_{(\varkappa+\delta-m_2, l)} \leqslant C_3 [U(x, p)]_{(s, -l, l)}. \tag{4.9}$$

Интегрируя эти неравенства по прямой $\sigma = \gamma$, получим (4.8), откуда следует единственность решения задачи (4.5)—(4.7).

Докажем теперь существование решения. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда при достаточно большом $|q|$ ($|q| > \gamma > q_0 > 0$) существует решение задачи (4.5)—(4.7), принадлежащее пространству $H_{(s, -l, l)}(\Omega)$ при каждом p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и выполнена априорная оценка (4.9). Легко показать, что функция $U(x, p)$ голоморфна при $\operatorname{Re} p > \gamma$.

Тогда $U(x, p) \in E_{(s, -l, l, s/2)}(\gamma, \Omega)$ и теорема доказана.

2°. Однозначная разрешимость параболических задач.

Теорема 4.2. *Пусть* $\varphi_0(x) \equiv 0$ *и задача* (4.1)—(4.4) — *параболическая. Предположим, что* $f(x, t) \in P_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)}(\gamma, \Omega)$,

$$g_1(x', t) \in P_{\left(\varkappa+\delta+m_1, l, \frac{\varkappa+\delta-m_1+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^{+}), \; g_2(x', t) \in$$

$$\in P_{\left(\varkappa+\delta+m_2, l, \frac{\varkappa+\delta-m_2+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^{-}).$$

Тогда можно указать такое $\gamma > 0$, *что существует единственное решение задачи* (4.1)—(4.4) *и* $(x, t) \in P_{(s, -l, l, s/2)}(\gamma, \Omega)$ *и выполнена двусторонняя априорная оценка*

$$C \|u\|_{(s, -l, l, s/2)} \leqslant \|f\|_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)} + \|g_1\|^{+}_{\left(\varkappa+\delta-m_1, l, \frac{\varkappa+\delta-m_1+l}{2}\right)} +$$

$$+ \|g_2\|_{\left(\varkappa+\delta-m_2, l, \frac{\varkappa+\delta-m_2+l}{2}\right)} \leqslant C_1 \|u\|_{(s, -l, l, s/2)}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Сделаем в уравнениях (4.1)—(4.4) преобразование Лапласа по t. Получим задачу (4.5)—(4.7). Так как (4.1)—

(4.4) — параболическая задача, то задача (4.5) — (4.7) — полуограниченная, и существует одно и только одно решение $U(x, p) \in E_{(s,-l,l,s/2)}(\gamma, \Omega)$, причем выполнена априорная оценка (4.8). Сделав обратное преобразование Лапласа, согласно теореме 3.2 получим оценку (4.10), из которой следует единственность решения.

Из разрешимости задачи (4.5—(4.7) в $E_{(s,-l,l,s/2)}(\gamma, \Omega)$ следует разрешимость задачи (4.1)—(4.4) в $P_{(s,-l,l,s/2)}(\gamma, \Omega)$.

Из этой теоремы сразу следует *условие согласованности* с нулем:

при $\varphi_0(x) \equiv 0$ после продолжения функций $f(x, t)$, $g_1(x', t)$ $g_2(x', t)$ нулем при $t<0$ $f(x, t) \in P_{\left(s-2,-l,l,\frac{s-2}{2}\right)}(\gamma, \Omega)$, $g_l(x', t) \in$

$\in P_{\left(\varkappa+\delta-m_l,\, l,\, \frac{\varkappa+\delta-m_l+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^{\pm})$.

Замечание. При переходе от эллиптических задач к параболическим неудобно пользоваться результатами работы [4], где решение эллиптической задачи ищется в пространстве $H_{s,r}$ ($s=\varkappa_0-r-1/2$, $r<0$), ибо в этом случае, если искать решение параболической задачи в пространстве $P_{\left(\varkappa_0-r-1/2,\, r,\, \frac{\varkappa_0+1/2}{2}\right)}(\gamma, \Omega)$, где гладкость решения $u(x, t)$ по t есть $\frac{\varkappa_0+1/2}{1/2}$, то при $\frac{\varkappa_0+1/2}{1/2} \leqslant \frac{1}{2}$ решение не имеет начальных значений при $t=0$. В этом случае нужно будет накладывать ограничения на $\varkappa_0(x)$, что существенно сузит класс рассматриваемых задач. Кроме того, пространства $H_{s,r,l}$ более точно описывают гладкость решения задачи (2.1)—(2.3), чем пространства $H_{s,r}$.

Перейдем теперь к случаю $\varphi_0(x) \neq 0$. Так как в дальнейшем мы будем рассматривать решения нашей задачи при $t>0$, введем новый класс пространств.

Обозначим через $P^+_{s,-l,l,s/2}(\gamma, R^{n+1})$ функции $u(x, t)$, заданные в $R^{n+1}\times R^1_+$ и обладающие свойствами

1) при почти всех $t \in R^1_+$ $u(x, t) \in H_{(s,-l,l)}(R^{n+1})$,

2) при почти всех $x \in R^{n+1}$ $e^{-\gamma t} u(x_0, t) \in H_{s/2}(R^1_+)$,

3) $\|u\|_{s,-l,l,s/2} =$

$$= \|\Gamma_0(\xi_0 - i)^{s/2}(1+|\xi|)^s(1+|\xi'|)^r(1+|\xi''|)^l |F_t e^{-\gamma t}\widetilde{Lu}(\xi, t)\|_0 < +\infty.$$

Применяемые ниже пространства P^+ с переменными индексами вводятся аналогично.

Нас будут интересовать решения $u(x, t)$ такие, что

$$u(x, t) \in P^+_{(s,-l,l,s/2)}(\gamma, \Omega).$$

Заметим, что если $s>1$, то при $t=0$ функция $u(x, t)$ имеет начальное значение $u(x, 0)$, принадлежащее пространству $H_{(s-1,-l,l)}(\Omega)$. Поэтому мы предположим, что

$$\varphi_0(x) \in H_{(s-1,-l,l)}(\Omega), \tag{4.11}$$

$$f(x, t) \in P^{+}_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)}(\gamma, \Omega), \tag{4.12}$$

$$g_l(x', t) \in P^{+}_{\left(\varkappa+\delta-m_l, l, \frac{\varkappa+\delta-m_l+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^{\pm}). \tag{4.13}$$

Сформулируем теперь *общее условие согласованности* правых частей: в области G существует такая функция $u_0(x, t)$, что

$$u_0(x, t) \in P'_{(s, -l, l, s/2)}(\gamma, \Omega),$$

$$u_0(x, 0) = \varphi_0(x)$$

и, если

$$A\, u_0 = f_0 \text{ в } G,\ B_l u_0\Big|_{\partial G^{\pm}} = g_{l0}(x', t) \quad (i=1, 2),$$

то после продолжения функций $f - f_0$ и $g_l - g_{l0}$ нулем при $t < 0$

$$f - f_0 \in P_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)}(\gamma, \Omega),$$

$$g_l - g_{l0} \in P_{\left(\varkappa+\delta-m_l, l, \frac{\varkappa+\delta-m_l+l}{2}\right)}(\gamma, \Gamma^{\pm}).$$

Нижеследующая теорема является обобщением теоремы 4.2 на случай однородных правых частей, удовлетворяющих общему условию согласованности.

Теорема 4.3. *Пусть* (4.1)—(4.4) — *параболическая задача, и* $s = s(x)$ *является целым четным числом*. Тогда существует такое* $\gamma > 0$, *что при любых правых частях, удовлетворяющих* (4.11)—(4.13) *и общему условию согласованности, существует единственное решение* $u(x, t)$ *такое, что* $u(x, t) \in P^{+}_{(s, -l, l, s/2)}(\gamma, \Omega)$. *При этом имеет место двусторонняя априорная оценка*

$$C\, \|u\|_{(s, -l, l, s/2)} \leqslant \|f\|_{\left(s-2, -l, l, \frac{s-2}{2}\right)} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \|g_l\|_{\left(\varkappa+\delta-m_l, l, \frac{\varkappa+\delta-m_l+l}{2}\right)} + \|\varphi\|_{(s-1, -l, l)} \leqslant C_1\, \|u\|_{(s, -l, l, s/2)}.$$

Положим $v(x, t) = u(x, t) - u_0(x, t)$. Тогда для функции $v(x, t)$ получим параболическую задачу, правые части которой согласованы с нулем. По теореме 4.2 существует единственное решение такой задачи, и, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x, t),$$

получим, что $u(x, t)$ является решением нашей задачи.

Существование решения доказано. Доказательство единственности мы приводить не будем. Его можно провести так же, как и доказательство единственности решения неоднородной параболической задачи в работе [1].

3°. Нами рассмотрены также параболическая задача в конечном интервале времени и случай, когда коэффициенты операторов A и B_l зависят от t. Соответствующие результаты будут изложены нами в другом месте.

* Это всегда возможно при соответствующем выборе функции $l(x)$.

В заключение выражаю благодарность профессору М. И. Вишику за внимание к настоящей работе.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 4.IV.1969

Ա. Գ. ԳՅՈՒԼՄԻՍԱՐՅԱՆ. Երկրորդ կարգի պարաբոլիկ և պարամետրից կախված էլիպտիկ ընդհանուր խզվող եզրային խնդիրների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատության մեջ դիտարկվում են երկու դասի խնդիրներ երկրորդ կարգի գծային մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար։ Առաջին դասին վերաբերվում են ընդհանուր խզվող եզրային խնդիրներ պարամետրից կախված էլիպտիկ հավասարումների համար։

Երկրորդ դասին վերաբերվում են գծային պարաբոլիկ հավասարումների համար խառը խնդիրներ գլանային տիրույթում, որի կողմնային մակերևույթի վրա տրված են խզվող եզրային պայմաններ։

Ապացուցվում է այդ դասերին պատկանող խնդիրների լուծման գոյությունը և միակությունը համապատասխան տարածություններում։

A. G. GULMISSARIAN. *About general discontineous boundary value problems for elliptic equations with parameter and parabolic equations of the second order*
(summary)

In this paper two sorts of problems for linear second order differential equations are studied. These are the general discontineous boundary problems for elliptic equations dependent on a parameter, and the mixed problems for linear parabolic equations in cylindrical domain with discontineous conditions on the side surface existence and uniquieness of the solution of these problems in certain functional spaces are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 19, вып. 3, 1964, 58—161.
2. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН 20, вып. 3, 1965. 89—152.
3. *В. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения, УМН, 22, вып. 1, 1967, 15—76.
4. *А. Г. Гюльмисарян.* Общие разрывные граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка с параметром, Известия АН Арм.ССР, „Математика", 2, № 4, 1967, 218—234.
5. *R. T. Seely.* Regularisation of singular integral operators on compact manifold, Amer. J. Math., 83, № 2, 1961, 265—275.
6. *Л. Н. Слободецкий.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их применение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, ЛГПИ им. Герцена, Уч. зап. физ.-мат. фак., 196, 1958, 54—112.
7. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 1, 1970 Математика

Э. М. ПОГОСЯН

О КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТЕСТОВ

Введение

В работах [1]—[4] дан ряд алгоритмов построения тестов.

Поиск тестов в [1], [2], [3] связан с большим перебором, что ограничивает область применения этих алгоритмов.

В [4] с использованием результатов [3] предложены определенные способы упрощения процесса построения тестов.

В настоящей статье проводится исследование вопросов существования и построения тестов на основе некоторых их количественных характеристик.

Статья состоит из четырех параграфов.

В § 1 приведены основные определения и на основе этих определений изложен алгоритм работ [1], [2].

Объектом исследования в § 2 являются характеристические последовательности (х.п.), которые определенным образом связаны с процессом поиска тестов.

Рассматривается вопрос существования пар множеств булевых векторов с заданной х. п. Для заданной х. п. исследуется вопрос существования и построения тестов определенных длин, а также приводится формула для числа этих тестов.

Доказывается, что по х. п. невозможно в общем случае распознать наличие или отсутствие тестов определенных длин.

Устанавливается также определенная взаимосвязь между алгоритмами работ [1], [2] и [3].

В § 3 рассматриваются характеристические функции (х. ф.). На основе х. ф., с использованием принципа „включения — исключения" [5], получена формула для вычисления числа недопустимых наборов. На основе этой формулы предложен определенный алгоритм построения тестов.

В § 4 исследованы два класса множеств, для которых выражение числа недопустимых наборов имеет простое аналитическое представление, а также приведен пример определения длины минимального теста на основе изложенных методов.

Формулировки некоторых результатов настоящей статьи приведены в [6].

Автор пользуется приятной возможностью выразить благодарность своему руководителю И. Д. Заславскому за постоянное внимание к работе и за ряд существенных замечаний при работе над статьей.

§ 1. *Основные определения*

Мощность множества M будем обозначать через $\mu(M)$. Будем рассматривать пары непустых множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов таких, что $M_0 \cap M_1 = \varnothing$, $m' + m'' \leqslant 2^n$, где $m' = \mu(M_0)$, $m'' = \mu(M_1)$.

Обозначим через X систему булевых переменных $\{x_1, \cdots, x_n\}$, задающих n-мерное булево пространство.

Произвольную непустую систему переменных из X, расположенных в том же порядке, что и в X, будем называть *набором*. Набор S_2 назовем *поднабором* набора S_1, если всякая переменная из S_2 входит в S_1. Набор S_2 назовем *собственным поднабором* набора S_1, если S_2 есть поднабор S_1, отличный от S_1. Число элементов $\mu(S_1)$ в наборе S_1 будем также называть *длиной набора* S_1.

Каждый набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ задает некоторое k-мерное подпространство пространства X.

Набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ назовем *тестом* для множеств (M_0, M_1), если проекции множеств (M_0, M_1) на k-мерное пространство S_1 не пересекаются. В противном случае набор S_1 назовем *недопустимым набором* (н. н.).

Набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ назовем *тупиковым тестом* (т. т.) для множеств (M_0, M_1), если S_1 является тестом для (M_0, M_1) и ни один собственный поднабор набора S_1 не есть тест для множеств (M_0, M_1).

Набор $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ назовем *минимальным тестом* (м. т.) для множеств (M_0, M_1), если S_1 является тестом наименьшей длины из множества всех тестов для (M_0, M_1). Каждому набору $S_1 = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ сопоставим n-мерный булев вектор $a = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in \{i_1, \cdots, i_k\}, \\ 0, \text{ в противном случае; } i_1 = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Введенное соответствие является взаимно однозначным соответствием между множеством наборов и множеством булевых векторов, отличных от вектора $(0, \cdots, 0)$. Наборы S_1 и S_2 назовем *сравнимыми*, если сравнимы соответствующие булевы векторы a_1 и a_2. В противном случае наборы S_1 и S_2 назовем *несравнимыми**.

Для произвольных n-мерных булевых векторов $a_1, \cdots, a_r$ введем *r-местный оператор совпадения* φ_r. Результат применения φ_r к векторам $a_1, \cdots, a_r$, обозначаемый через $\varphi_r(a_1, \cdots, a_r)$, есть по определению подмножество всех тех переменных из множества X, для каждой из которых соответствующие значения компонент всех векторов $a_1, \cdots, a_r$ совпадают.

Кратко опишем в введенных терминах основной алгоритм построения м. т. для множеств (M_0, M_1), приведенный в работах [1], [2].

---

* Булевы векторы $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ сравнимы друг с другом, если либо $\alpha_i \geqslant \beta_i$, при $i = 1, \cdots, n$, либо $\beta_i \geqslant \alpha_i$, при $i = 1, \cdots, n$.

а. К каждой паре векторов a_i, b_j, $a_i \in M_0$, $b_j \in M_1$, $i=1,\cdots,m'$, $j=1,\cdots,m''$ применяем оператор совпадения φ_2. Множество полученных таким образом н. н. обозначим через B:

$$B = \{\varphi_2(a_i, b_j)\}, \; i=1,\cdots,m', \; j=1,\cdots,m''.$$

б. Устраним из множества B все повторения наборов, а также устраним все те наборы, каждый из которых является собственным поднабором хотя бы одного набора из B.

Множество оставшихся в B наборов, которые назовем *максимально недопустимыми наборами* (м.н.н.), обозначим через S. Очевидно наборы множества S попарно несравнимы.

в. Из м.н.н. множества S получим всевозможные различные поднаборы. Множество полученных н.н. обозначим через $\tilde{B}$.

г. Пусть $\tilde{R}$ — множество всевозможных наборов из системы

$$X = \{x_1,\cdots,x_n\}.$$

Очевидно каждый набор из множества $R' = \tilde{R}/\tilde{B}$ будет тестом для множеств (M_0, M_1).

д. Подмножество R тех наборов из R', для каждого из которых ни один собственный поднабор не принадлежит R', образует множество всех т.т. для множеств (M_0, M_1).

е. М.т. для множеств (M_0, M_1) будут наборы из R наименьшей длины.

Построение тестов на основе приведенного алгоритма делает необходимым, вообще говоря, сравнение каждого набора из множества всевозможных наборов $\tilde{R}$ с н.н. множества $\tilde{B}$, т. е. поиск тестов производится посредством полного перебора. Это обстоятельство существенно ограничивает область применения алгоритма.

Мы будем исследовать вопросы, связанные с возможностями менее громоздких алгоритмов построения тестов. В этой связи будут исследоваться свойства определенных количественных характеристик тестов.

§ 2. *Характеристические последовательности*

Дадим некоторые определения. Пусть $S = \{S_1,\cdots,S_m\}$ — некоторое множество попарно несравнимых наборов, составленных из булевых переменных $X = \{x_1,\cdots,x_n\}$ и пусть $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} S_j\right) = p$.

Разобьем множество S на непустые подмножества $\Omega_1,\cdots,\Omega_k$, где $k>1$, каждое Ω_i состоит из наборов некоторой фиксированной длины l_i, и длины наборов, входящих в различные подмножества $\Omega_1,\cdots,\Omega_k$, различны. Не нарушая общности, можно считать, что $l_1 > l_2 > \cdots > l_k$; числа $\mu(\Omega_1),\cdots,\mu(\Omega_k)$ будем обозначать через $m_1,\cdots,m_k$. Последовательность чисел $\chi = (n, p, l_1,\cdots,l_k, m_1,\cdots,m_k)$, полученных указанным образом, будем называть *характеристической последовательностью* (х.п.) *множества* S.

Каждой паре множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов однозначно соответствует множество м.н.н. $S=\{S_1,\cdots, S_m\}$. Наборы множества S попарно несравнимы. Поэтому $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots$ $\cdots, m_k)$—х.п. множества попарно несравнимых наборов S мы будем называть также х.п. множества м.н.н. S.

Х.п. χ назовем х.п. пары множеств (M_0, M_1), если χ является х.п. множества м.н.н. S.

Числовую последовательность $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$, где $k\geqslant 1$, будем называть *характеристической последовательностью* (х.п.), если

1. $n\geqslant p > l_1>l_2>\cdots>l_k>0$,

2. $m_i\neq 0$ при $i=1,\cdots, k$.

Очевидно, что каждой паре множеств (M_0, M_1) однозначно соответствует своя х.п.

Следующая теорема показывает, что при определенных условиях справедливо также и обратное утверждение.

Теорема 1. *Для произвольной х.п.* $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots$ $\cdots, m_k)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\sum_{j=1}^{k} m_j l_j\geqslant p\geqslant (l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j,\ p>l_1,$$

существуют пары множеств (M_0, M_1) *с х.п.* χ. *При этом количество таких пар не менее* $2^n\prod\limits_{i=1}^{k} C^{m_i}_{\sum\limits_{j=i}^{k} m_j}$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть* n, p — *натуральные числа,* $n\geqslant p>0$, *и пусть наборы* $S_1,\cdots, S_m$ *получены из системы булевых переменных* $X=\{x_1,\cdots, x_m\}$ *так, что* $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i\right)=p>l_1$, *где* $l_1=\max\limits_{i\in\{1,\cdots,m\}}\mu(S_i)$.

Тогда для того, чтобы наборы $S_1,\cdots, S_m$ *были м.н.н. для некоторой пары множеств* (M_0, M_1) n*-мерных булевых векторов, необходимо и достаточно, чтобы они были попарно несравнимы.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $S_1,\cdots, S_m$ — попарно несравнимые наборы, содержащие в совокупности p различных переменных. Построим множества (M_0, M_1) с м.н.н. $S_1,\cdots, S_m$. В множество M_0 включим один элемент $a=(\alpha_1,\cdots, \alpha_n)$—произвольный n-мерный булев вектор.

Векторы $b_i=(\beta_{i,1},\cdots, \beta_{i,n})$, $b_i\in M_1$, $i=1,\cdots, m$ получаем следующим построением: $\beta_{i,j}=\alpha_j$, если в наборе S_i присутствует переменная x_j и $\beta_{i,j}=\alpha_j$, если в S_i переменной x_j нет, $j=1,\cdots, n$.

Очевидно $M_0 \cap M_1 = \varnothing$ и $\varphi_2 (a, b_i) = S_i$, $i=1,\cdots, m$.

Следствие. *Можно построить не менее 2^n различных пар множеств (M_0, M_1) с множеством м.н.н. $\{S_1,\cdots, S_m\}$.*

Лемма 2. *Для произвольной х.п. $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{j=1}^{k} m_j l_j \geqslant p > (l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j,$$

из системы булевых переменных $X=\{x_1,\cdots, x_n\}$ можно построить не менее $\prod_{l=1}^{k} C^{m_l}_{\sum_{j=l}^{k} m_j}$ множеств попарно несравнимых наборов с х.п. χ.

Доказательство. Пусть Ω_1—произвольный набор длины (l_1-1) из множества X, Ω_2—произвольный собственный поднабор длины (l_2-1) набора Ω_1, и т. д., Ω_k—произвольный собственный поднабор длины (l_k-1) набора Ω_{k-1}.

Тогда положим

$S_{11} = \Omega_1 \cup \{x_{j1}\}$, $x_{j1} \in X/\Omega_1 = X_1$,

$S_{12} = \Omega_1 \cup \{x_{j2}\}$, $x_{j2} \in X_1/\{x_{j1}\} = X_2$,

. . . .

$S_{1m_1} = \Omega_1 \cup \{x_{j, m_1}\}$, $x_{j, m_1} \in X_{m_1-1}/\{x_{j, m_1-1}\}=X_{m_1}$,

$S_{21} = \Omega_2 \cup \{x_{r1}\}$, $x_{r1} \in X_{m_1}/\{x_{j, m_1}\} = X_{m_1+1}$,

$S_{2m_2} = \Omega_2 \cup \{x_{r, m_2}\}$, $x_{r, m_2} \in X_{m_1+m_2-1}/\{x_{r, m_2-1}\} = X_{m_1+m_2}$,

. . . .

$S_{k1} = \Omega_k \cup \{x_{t1}\}$, $x_{t1} \in X_{m-m_k-1}/\{x_{v, m-m_k}\} = X_{m-m_k}$,

. . . .

$S_{k, m_k} = \Omega_k \cup \{x_{t, m_k}\}$, $x_{t, m_k} \in X_{m-1}/\{x_{t, m_k-1}\} X_m$.

Построенные наборы $S_{11},\cdots, S_{1m_1},\cdots, S_{k1},\cdots, S_{k m_k}$ попарно несравнимы и имеют х.п. $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$, где $p=(l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j$. Если $\sum_{j=1}^{k} m_j l_j \geqslant p > (l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j$, то множество несравнимых наборов с х.п. χ строится в два этапа.

На первом этапе получаем наборы $S_{11},\cdots, S_{1m_1},\cdots, S_{k1},\cdots, S_{k, m_k}$ описанным выше способом. При этом $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k}\bigcup_{t=1}^{m_j} S_{j, t}\right) = (l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j$ и имеются $r=p-\left(l_1-1+\sum_{j=1}^{k} m_j\right)$ переменных из множества X, не включенных ни в один из полученных наборов, так как $n>p$.

Пусть этими переменными являются $\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_r$. На втором этапе из множества $\tilde{X}=\{\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_r)$ выделяем подмножество $Q_1=\{\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_{l_1-1}\}$ и образуем набор $S'_{12}=(S_{12}/\Omega_1)\cup Q_1$. Затем из множества $\tilde{X}/Q_1$ выделяем подмножество $Q_2 = \{\bar{x}_{l_1}, \cdots, \dot{\bar{x}}_{2(l_1-1)}\}$ и образуем набор $S'_{13} = (S_{13}/\Omega_1) \cup Q_2$, и т. д.

При построении наборов $S'_{12}, S'_{13}, \cdots, S'_{1m_1}, \cdots, S'_{k1}, \cdots, S'_{k,m_k}$ необходимо различать следующие два случая.

1 случай: $r = \sum_{j=1}^{k} (l_j - 1) m_j - (l_1 - 1)$. В этом случае из наборов $S_{12}, S_{13}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}$ указанным способом получаются наборы $S'_{12}, S'_{13}, \cdots, S'_{1m_1}, \cdots, S'_{k1}, \cdots, S'_{k,m_k}$, которые вместе с набором S_{11} образуют множество попарно несравнимых наборов с х.п. χ.

2 случай: $r < \sum_{j=1}^{k} (l_j - 1) m_j - (l_1 - 1)$. В этом случае существуют такие два последовательных набора

$$S_\alpha, S_\beta \in \{S_{12}, S_{13}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_\alpha, S_\beta, S_\delta, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}\},$$

что $S'_\alpha = (S_\alpha/\Omega_\alpha) \cup Q_\gamma$, где $\mu(Q_\gamma) = \mu(S_\alpha) - 1$,

но $\mu(Q_{\gamma+1}) = \mu\left(\widetilde{X}/\bigcup_{t=1}^{\gamma} Q_t\right) < \mu(S_\beta) - 1$.

Пусть $S_\beta = \Omega_\beta \cup \{x_\beta\}$ и Ω'_β — подмножество Ω_β, полученное после удаления из Ω_β произвольных $\mu(Q_{\gamma+1})$ переменных.

Тогда полагаем $S'_\beta = \Omega'_\beta \cup \{x_\beta\} \cup Q_{j+1}$. Очевидно, наборы $S_{11}, S'_{12}, S'_{13}, \cdots, S'_{1m_1}, \cdots, S'_\alpha, S'_\beta, S_\delta, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,mk}$ попарно несравнимы и имеют х.п. χ.

При каждом из приведенных выше построений множества попарно несравнимых наборов с х.п. χ, первые m_1 наборов $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}$ можно выбрать не менее $C^{m_1}_{\sum_{j=1}^{k} m_j}$ способами, при выбранных наборах $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}$ последующие m_2 наборов $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ можно выбрать не менее $C^{m_2}_{\sum_{j=2}^{k} m_j}$ способами, и т. д., последние m_k наборов $S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}$ наборов, при выбранных наборах $S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k-1,1}, \cdots, S_{k-1,m_{k-1}}$, можно выбрать не менее $C^{m_k}_{m_k} = 1$ способом.

Всего получаем не менее $\prod_{l=1}^{k} C^{m_l}_{\sum_{j=l}^{k} m_j}$ различных способов выбора множества наборов $\{S_{11}, \cdots, S_{1m_1}, \cdots, S_{k1}, \cdots, S_{k,m_k}\}$. Лемма доказана.

Замечание. В условиях леммы 2 верхняя оценка для p, $p \leqslant \sum_{j=1}^{k} m_j l_j$ является окончательной, чего нельзя утверждать для нижней оценки p.

В § 4 будет приведен пример такого класса х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$, что $p = l_1 + 1$, $1 < \sum_{j=1}^{k} m_j \leq l_k + 1$, и для каждой х.п. χ из этого класса можно построить множество попарно несравнимых наборов с х.п. χ.

Х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ для множеств (M_0, M_1) позволяет предсказать существование тестов определенных длин.

Легко видеть, например, что если в х.п. χ для некоторой пары (M_0, M_1) будет $n > p$, то для этой пары длина м.т. есть 1. В нижеследующей теореме рассматриваются факты аналогичного рода.

Пусть $S = \{S_1, \cdots, S_m\}$ — множество м.н.н. для (M_0, M_1) с х.п. χ, $R_j = \{S_{j1}, \cdots, S_{j, m_j}\}$, $R_j \subseteq S$, $\mu(S_{j,r}) = l_j$, $r = 1, \cdots, m_j$, $j = 1, \cdots, k$. Введем функции $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t})$, $t = 1, \cdots, v_j$, $v_j = \min(l_j + 1, m_j)$, которые определены для $p_1, \cdots, p_t \in \{1, \cdots, m_j\}$, так, что $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t}) = 1$, если существует набор длины $(l_j + 1)$, из которого можно получить поднаборы $S_{p_1}, \cdots, S_{p_t} \in R_j$, и $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t}) = 0$, в противном случае.

Теорема 2. *Для пар множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ при каждом $j \in \{1, \cdots, k\}$ существуют тесты длины $l_j + 1$.*

При этом количество $N(R_j)$ таких тестов не превосходит $m_j(n - l_j)$ и равняется

$$\bar{N}(R_j) = \sum_{p_1 \in \{1, \cdots, m_j\}} N(a_{p_1}) - \sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{1, \cdots, m_j\}, \\ p_1 \neq p_2}} N(a_{p_1}, a_{p_2}) + \cdots + (-1)^{v_j} \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_{v_j} \in \{1, \cdots, m_j\} \\ p_1 \neq \cdots \neq p_{v_j}}} N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_{v_j}}).$$

Доказательство. Рассмотрим множество $Q_j = S/R_j$, $j \in \{1, \cdots, k\}$. Через $\tilde{Q}_j$ обозначим множество всех различных н.н. длины $(l_j + 1)$, являющихся поднаборами наборов множества Q_j. Для любых наборов S_α, $S_{j,r}$, $S_\alpha \in \bar{Q}_j$, $S_{j,r} \in R_j$, набор $S_{j,r}$ не может быть поднабором набора S_α, так как в противном случае м.н.н. $S_{j,r}$ был бы поднабором некоторого м.н.н. S_γ, из которого получен набор S_α, а это противоречит определению м.н.н.

Следовательно, каждый набор $S_{j,r}$, $S_{jr} \in R_j$ является поднабором некоторого набора S_δ длины $(l_j + 1)$, который не принадлежит $\bar{Q}_j$, т. е. S_δ является тестом для множеств (M_0, M_1). В частности, множеству $\bar{Q}_j$ не могут принадлежать наборы $S_\delta = S_{j,r} \cup \{x_t\}$, где $S_{j,r} \in R_j$, $x_t \in \{x_1, \cdots, x_n\}/S_{j,r}$.

Найдем число $\bar{N}(R_j)$ всех таких различных наборов S_δ. Воспользуемся принципом „включения—исключения“, который формулируется следующим образом [5]:

Если из N объектов $N(a_1)$ обладают свойством a_1, $N(a_2)$ — свойством $a_2, \cdots$, $N(a_r)$ — свойством a_r, $N(a_1, a_2)$ — обладают как *свойством a_1, так и свойством $a_2, \cdots$, $N(a_{r-1}, a_r)$—свойствами a_{r-1} и a_r, $\cdots$, $N(a_1, \cdots, a_r)$ обладают свойствами $a_1, \cdots, a_r$, то число объектов $N(a_1', a_2', \cdots, a_r')$, не обладающих ни одним из этих свойств $a_1, \cdots, a_r$, находится по формуле*

$$N(a_1', \cdots, a_r') = N - \sum_{p_1 \in \{1, \cdots, r\}} N(a_{p_1}) + \sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{1, \cdots, r\} \\ p_1 \neq p_2}} N(a_{p_1}, a_{p_2}) - \cdots + (-1)^r N(a_1, \cdots, a_r). \tag{1}$$

В интересующем нас случае $N = \overline{N}(R_j)$, т. е. объектами нашего рассмотрения являются все различные наборы S_δ длины $(l_j + 1)$, которые получаются из наборов $S_{j,r} \in R_j$, добавлением к $S_{j,r}$ переменных $x_t \in X/S_{j,r}$.

Обозначение a_r, $r = 1, \cdots, m_j$ понимается нами как свойство быть полученным из набора $S_{j,r}$ добавлением какой-либо переменной $x_t \in X/S_{j,r}$, а a_r'—означает отсутствие этого свойства. Тогда $N(a_1', \cdots \cdots, a_r') = 0$, так как каждый рассматриваемый нами набор S_δ длины $(l_j + 1)$ обладает хотя бы одним из свойств $a_1, \cdots, a_{m_j}$. Также каждая из величин $N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_t})$, $p_1, \cdots, p_t \in \{1, \cdots, m_j\}$ равна нулю при $t > l_j + 1$, так как из одного набора длины $(l_j + 1)$ можно получить не более $(l_j + 1)$ наборов длины l_j. Учитывая эти обстоятельства, из (1) для каждого $j \in \{1, \cdots, k\}$ получаем

$$\overline{N}(R_j) = \sum_{p_1 \in \{1, \cdots, m_j\}} N(a_{p_1}) - \sum_{\substack{p_1, p_2 \in \{1, \cdots, m_j\} \\ p_1 \neq p_2}} N(a_{p_1}, a_{p_2}) + \cdots + (-1)^{v_j} \sum_{\substack{p_1, p_2, \cdots, p_{v_j} \in \{1, \cdots, m_j\} \\ p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_{v_j}}} N(a_{p_1}, \cdots, a_{p_{v_j}}),$$

где $v_j = \min(l_j + 1, m_j)$.

При этом $\overline{N}(R_j) \leqslant m_j (n - l_j)$, так как каждый набор длины l_j может быть собственным поднабором ровно $(n - l_j)$ различных наборов длины $(l_j + 1)$. Теорема доказана.

Заметим, что результат, полученный в теореме 2 работы [4], содержится в утверждении теоремы 2 для частного случая $j = k$, $m_k = 1$. Этот факт непосредственно следует из нижеследующей теоремы 3, которая устанавливает определенную взаимосвязь между алгоритмами поиска тестов работ [1], [2] и [3].

Пусть $B = \{B_{ij}\}$, $i = 1, \cdots, m'$, $j = 1, \cdots, m''$, — множество н.н. и S — множество м.н.н. для множеств (M_0, M_1), полученных согласно основному алгоритму (пункты „а“ и „б“), и пусть $P_{ij} = X/B_{ij}$, где $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Рассмотрим конъюнктивную нормальную форму (к.н.ф.) f такую, что $f = \mathop{\&}\limits_{j=1}^{m''} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{m'} (x_{ij}^1 \vee \cdots \vee x_{ij}^{l_{ij}})$, где каждая элементарная дизъюнкция $(x_{ij}^1 \vee \cdots \vee x_{ij}^{l_{ij}})$ составлена из всех булевых переменных, входящих в P_{ij}, [3], [4].

Произведем в f все поглощения вида $Y\&(YVZ)=Y$, где Y, Z — конъюнктивные члены f. В результате получим к.н.ф. $f^*=\underset{p=1}{\overset{m}{\&}}(x_{p_1}V\cdots Vx_{p,r_p})$. Обозначим через A множества $A_1,\cdots,A_m$, каждое из которых составлено из переменных соответствующего члена $x_{p1}V\cdots Vx_{p,r_p}$:

$$A_p=\{x_{p1},\cdots,x_{p,r_p}\},\ p=1,\cdots,m.$$

Теорема 3. *Множества* $\{X/A_1, X/A_2,\cdots,X/A_m\}$ *и* S *совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим множество V пар наборов $V_{ij}=(B_{ij},P_{ij})$, $B_{ij}\cup P_{ij}=X$, $i=1,\cdots,m'$, $j=1,\cdots,m''$. Доказательство теоремы очевидным образом следует из свойств, которым удовлетворяют произвольные пары наборов V_α, $V_\beta\in V$:

1. $(B_\alpha\subset B_\beta)\longleftrightarrow(P_\alpha\supset P_\beta)$.
2. $(B_\alpha=B_\beta)\longleftrightarrow(P_\alpha=P_\beta)$.

Поскольку каждая пара множеств (M_0, M_1) с х.п. $\gamma=(n,p,l_1,\cdots\cdots,l_k,m_1,\cdots,m_k)$ имеет тест длины (l_k+1), который найти сравнительно легко, было бы полезно уметь простыми средствами отличать множества (M_0, M_1) с длиной м.т., равной (l_k+1), от пар множеств (M_0, M_1) с меньшей длиной м.т.

Из нижеследующей теоремы 4 следует, что информация о длинах тестов, заключенная в х.п. γ множеств (M_0, M_1), в общем случае не достаточна для такого распознавания. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на область использования х.п.

Рассмотрим всевозможные пары непустых непересекающихся множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов при $n=1,2,\cdots$. Для каждой пары множеств (M_0, M_1) укажем множество м.н.н. S и х.п. γ. Объединим все множества м.н.н. S в множество W, а все х.п. γ — в множество U. Обозначим через W_1, W_2 подмножества W такие, что

1. Для каждого множества $S\in W_1$ длина м.т. для пары (M_0, M_1) с множеством м.н.н. S равна (l_k+1).

2. Для каждого множества $S\in W_2$ длина м.т. для пары (M_0, M_1) с множеством м.н.н. S меньше (l_k+1).

Очевидно, $W_1\cap W_2=\varnothing$, $W_1\cup W_2=W$, и по каждому множеству м.н.н. S можно однозначно определить, к какому из множеств W_1 или W_2 принадлежит S. Каждому множеству $S\in W$ соответствует х.п. $\gamma\in U$. Пусть U_1, U_2—подмножества множества U, образованные из х.п., соответствующих элементам множеств W_1, W_2. Очевидно, что $U_1\cup U_2=U$.

Теорема 4. *Множества* U_1, U_2 *удовлетворяют следующим соотношениям:*

а. $U_1\overline{\in}U_2$,

б. $U_2\overline{\in}U_1$,

в. $U_1\cap U_2\neq\varnothing$.

Доказательство. Доказательство теоремы основано на построении непустых множеств T_1, T_2, T_3, для которых выполняется

$$(T_1 \subset U_1) \& (T_1 \cap U_2) = \varnothing),$$
$$(T_2 \subset U_2) \& (T_2 \cap U_1 = \varnothing),$$
$$T_3 \subset (U_1 \cap U_2).$$

1. Множество T_1 образовано из х.п. $\chi = (n, p, l_1, m_1)$, где $n=p$, $p > l_1$, $m_1 = C_n^{l_1}$.

Рассмотрим все наборы длины l_1, полученные из системы $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Очевидно они попарно несравнимы и потому согласно лемме 1 множество пар множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi \in T_1$ непусто. Очевидно, что для множеств (M_0, M_1) с х.п. χ тестов длины l_1 и менее не существует.

2. Множество T_2 образовано из х.п. $\chi = (n, p, l_1, m_1)$, где числа p и m_1 удовлетворяют условиям

$$m_1 = C_p^{l_1}, \ 1 \leqslant m_1 < C_p^{l_1}.$$

Пусть $S_1, \cdots, S_{m_1}$—все наборы длины l_1, полученные из системы $\{x_1, \cdots, x_p\}$. Очевидно наборы $S_1, \cdots, S_{m_1}$ попарно несравнимы и множество пар множеств (M_0, M_1) с х.п. $\chi \in T_2$ и м.н.н. $S_1, \cdots, S_{m_1}$ непусто (лемма 1). Также очевидно, что длина м.т. для пар (M_0, M_1) с х.п. $\chi \in T_2$ не может быть равна (l_1+1), так как по условию $m_1 < C_n^{l_1}$, а потому существует хотя бы один тест длины l_1.

3. Множество T_3 составлено из х.п. $\chi = (n, p, l_1, l_2, m_1, m_2)$, где $n \geqslant 2l_1$, $p = n$, $l_2 > 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = C_n^{l_2} - 2C_{l_1}^{l_2}$.

Пусть χ—произвольная х.п., $\chi \in T_3$. Рассмотрим попарно несравнимые наборы S_{11}, S_{12}, $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$, полученные следующим образом. S_{11}, S_{12} — произвольные различные наборы длины l_1 из системы $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, имеющие y общих переменных, $0 \leqslant y < l_1$. Из наборов S_{11}, S_{12} образуем все $(2C_{l_1}^{l_2} - C_y^{l_2})$ различных собственных поднаборов длины l_2 и исключим их из множества всевозможных различных наборов длины l_2 системы X. Множество оставшихся наборов обозначим через P_2. Так как $(C_n^{l_2} - (2C_{l_1}^{l_2} - C_y^{l_2})) - m_2 = C_y^{l_2} \geqslant 0$, то из P_2 можно всегда выбрать наборы $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ так, чтобы наборы S_{11}, S_{12}, $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ были попарно несравнимы.

Следовательно существуют пары множеств (M_0, M_1) с м.н.н. S_{11}, S_{12}, $S_{21}, \cdots, S_{2m_2}$ (лемма 1).

Покажем, что полученные вышеуказанным способом наборы могут иметь одну и ту же х.п. χ, однако м.т. может быть как длины (l_2+1), так и меньшей длины. Это и послужит доказательством утверждения: $T_3 \subset (U_1 \cap U_2)$.

Действительно, при $y < l_2$ число всех наборов длины l_2 есть $(2C_{l_1}^{l_2} - C_y^{l_2}) + m_2 = C_n^{l_2} - C_y^{l_2} = C_n^{l_2}$ и потому длина м.т. будет равна (l_2+1). Очевидно при этом $p = n$.

Пусть $y = l_2$, тогда число всех наборов длины l_2 есть $C_n^{l_2} - 1$, и существует ровно один тест длины l_2.

Покажем, что и в этом случае $p = n$. Предположим $\mu(S_{11} \cup S_{12} \cup \cup \cdots \cup S_{2m_2}) < n$. Тогда наш единственный тест длины l_2 должен содержать хотя бы одну переменную x_α такую, что $x_\alpha \bar{\in} (S_{11} \cup S_{12} \cup S_{21} \cup \cup \cdots \cup S_{2m_2})$. Одноэлементный набор, составленный из переменной x_α есть тест, и тогда мы имеем по крайней мере $C_n^{l_2-1} > 1$ тестов длины l_2, что опровергает наше предположение. Теорема доказана.

Заметим, что построенные множества T_1, T_2, T_3 бесконечны.

Следствие. *Существуют классы* Ω_1 *и* Ω_2 *таких пар множеств* (M_0, M_1), *что если* $(M_0, M_1) \in \Omega_1$ *(соответственно,* $(M_0, M_1) \in \in \Omega_2$*), то по х.п.* χ *пары* (M_0, M_1) *возможно (соответственно, невозможно) однозначно определить: длина м.т. равна* (l_k+1) *или меньше этой величины.*

§ 3. *Характеристические функции*

Пусть $S = \{S_1, \cdots, S_m\}$—множество попарно несравнимых наборов с х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$. Определим функцию $\Pi(i_1, \cdots \cdots, i_t)$ следующим образом:

$$\Pi(i_1, \cdots, i_t) = \begin{cases} \mu(S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_t}), \text{ при } 1 \leqslant i_r \leqslant m, \ r = 1, \cdots, t, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Функцию $\Pi(i_1, \cdots, i_t)$ будем называть *характеристической функцией* (х.ф.) множества S. Приведем некоторые свойства х.ф.

1. $\Pi(i_1, \cdots, i_t)$ не зависит от порядка аргументов $i_1, \cdots, i_t$.
2. $0 \leqslant \Pi(i_1, \cdots, i_t) \leqslant l_1$.
3. $\Pi(i) \neq 0$ при $i \in \{1, \cdots, m\}$, $m \neq 0$.
4. Если $\{i_1, \cdots, i_t\} \subseteq \{j_1, \cdots, j_p\}$, где $i_1, \cdots, i_t$, $j_1, \cdots, j_p$ — произвольные натуральные числа, то $\Pi(i_1, \cdots, i_t) \geqslant \Pi(j_1, \cdots, j_p)$.
5. Если $\mu(S_{i_1}) \leqslant \mu(S_{i_2}) \leqslant \cdots \leqslant \mu(S_{i_t})$ и $t > 1$, то $\Pi(i_1, \cdots, i_t) \leqslant \leqslant \mu(S_{i_1}) - 1$.

Рассмотрим множество $S = \{S_1, \cdots, S_m\}$ попарно несравнимых наборов с х.п. $\chi = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ и х.ф. $\Pi(p_1, \cdots, p_t)$. Из каждого набора S_r, $r = 1, \cdots, m$ получим всевозможные различные поднаборы длины i, где i—произвольное натуральное число. Через $N_i(S)$ обозначим число всех различных таких наборов длины i.

Заметим, что если S—множество м.н.н. и χ — х.п. для пары (M_0, M_1), то $N_i(S)$ будет числом всех различных н.н. длины i.

Теорема 5. $N_i(S) = \sum\limits_{t=1}^{m} (-1)^{t-1} \sum\limits_{\{p_1, \cdots, p_t\} \subseteq \{1, \cdots, m\}} C^i_{\Pi(p_1, \cdots, p_t)}$, *где полагаем* $C_k^i = 0$ *при* $i > k$.

Доказательство. Используем принцип „включения — исключения“ (см. доказательство теоремы 2).

В данном случае $N = N_i(S)$, т. е. объектами нашего рассмотрения являются все различные поднаборы длины i, полученные из наборов множества S.

Обозначение a_r, $r = 1, \cdots, m$ в данном случае понимается как свойство быть поднабором набора S_r, а a'_r означает отсутствие этого свойства. Тогда $N(a'_1, \cdots, a'_m) = 0$, так как каждый рассматриваемый набор длины i получен из какого-либо набора $S_r \in S$ и потому обладает по меньшей мере свойством a_r. Учитывая, что $N(a_{p_1}, \cdots$ $\cdots, a_{p_t}) = C^i_{\Pi(p_1, \cdots, p_t)}$, $t = 1, \cdots, m$, из формулы „включения—исключения“, получим утверждение теоремы.

Теорема 6. *Для существования теста длины i для множеств (M_0, M_1) n-мерных булевых векторов необходимо и достаточно, чтобы $N_i(S) < C^i_n$, $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

Теорема 7. *Если при некоторой длине i, $i \in \{1, \cdots, n\}$. $N_i(S) = C^i_n$*, то для каждого $t < i$, $N_t(S) = C^t_n$.

Теоремы 8. *Для $t < i$, если $N_i(S) > C^i_n - C^{i-t}_{n-t}$, то теста длины t и менее не существует.*

Теоремы 6, 7, 8 легко доказать, используя результаты [4], теорему 3 и лемму 1.

В работе [4] приведен алгоритм поиска м.т. для множеств (M_0, M_1), согласно которому вначале определяется длина м.т. $i_{м.т.}$, а сам м.т. ищется уже среди тестов длины $i_{м.т.}$. Исходя из основного алгоритма, теорем 2, 5, 6, 7, 8 можно предложить следующий алгоритм построения м.т. для множеств (M_0, M_1) с х.п. $\gamma = (n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$:

а. Находим множество S м.н.н. для множеств (M_0, M_1).

б. Вычисляем длину м.т. $i_{м.т.}$. Для этого необходимо провести не более $[\log_2 l_k + 1]$ проверок условия $N_i(S) = C^i_n$. Использование теоремы 8 может уменьшить число таких проверок.

в. Определяем тесты длины $i_{м.т.}$. Для этого последовательно получаем всевозможные наборы длины $i_{м.т.}$ из $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ (такой алгоритм не трудно указать).

Каждый из полученных наборов, не являющихся поднабором ни одного набора множества S будет м.т.

В приведенном алгоритме построения м.т. для выяснения вопроса существования тестов длины i, вместо вычисления величины $N_i(S)$ и проверки условия $N_i(S) = C^i_n$ можно последовательно сравнивать каждый набор длины i с наборами из множества S, $i \in \{i_1, \cdots, i_t\}$, $t \leqslant$ $\leqslant [\log_2 l_k + 1]$.

Разнообразие алгоритмов вычисления м.т. ставит вопрос о необходимости получения точных сравнительных оценок для сложностей этих алгоритмов и требует дополнительного исследования.

§ 4. *Некоторые классы множеств*

В этом параграфе исследуются два класса множеств несравнимых наборов, для которых значение $N_l(S)$ можно представить в виде достаточно простого аналитического выражения.

Пусть $S=\{S_1,\cdots, S_m\}$—множество попарно несравнимых наборов с х.п. $\chi=(n, p, l_1,\cdots, l_k, m_1,\cdots, m_k)$ и х.ф. $\Pi(j_1,\cdots, j_r)$. Множество S назовем *„+“-множеством,* если существуют переменные $x_1,\cdots, x_m$, $x_j\in S_j$, $j=1,\cdots, m$ и перестановка $j_1,\cdots, j_m$ чисел $1,\cdots, m$ такая, что

$$S_{j_1}/\{x_{j_1}\}\subseteq S_{j_2}/\{x_{j_2}\}\subseteq\cdots\subseteq S_{j_m}/\{x_{j_m}\}.$$

Множество S назовем *„—“-множеством,* если существуют переменные $x_1,\cdots, x_m$, $x_j\overline{\in} S_j$, $j=1,\cdots, m$ и перестановка $j_1,\cdots, j_m$ чисел $1,\cdots, m$ такая, что

$$S_{j_1}\cup\{x_{j_1}\}\subseteq S_{j_2}\cup\{x_{j_2}\}\subseteq\cdots\subseteq S_{j_m}\cup\{x_{j_m}\}.$$

Приведем некоторые свойства „+“-множеств.

Свойство 1. $x_{j_1}\neq x_{j_2}\neq\cdots\neq x_{j_m}$, так как мы рассматриваем попарно несравнимые наборы.

Свойство 2. Если $\mu(S_{j_r})=\mu(S_{j_l})$, $j_r, j_l\in\{1,\cdots, m\}$, то $S_{j_r}/\{x_{j_r}\}=S_{j_l}/\{x_{j_l}\}$.

Свойство 3.

$$\Pi(j_1,\cdots, j_r)=\begin{cases}\mu(S_{j_1}), \text{ если } r=1,\ j_r\in\{1,\cdots, m\},\\ \min\mu(S_j)-1, \text{ если } r>1,\\ j\in\{j_1,\cdots, j_r\}\quad \{j_1,\cdots, j_r\}\subseteq\{1,\cdots, m\},\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Свойство 4. $p=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j\right)=(l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j=(l_1-1)+m.$

Свойство 5. $N_l(S)=C_{l_1-1}^{l}+\sum_{j=1}^{k} m_j\, C_{l_j-1}^{l-1}$.

Заметим, что построенное при доказательстве леммы 2 множество попарно несравнимых наборов при $p=(l_1-1)+\sum_{j=1}^{k} m_j$ является „+“-множеством.

Приведем некоторые свойства „—“-множеств.

Свойство 1. $x_{j_1}\neq x_{j_2}\neq\cdots\neq x_{j_m}$, так как наборы $S_1,\cdots, S_m$ попарно несравнимы.

Свойство 2. Для любых $S_{j_l}, S_{j_r}\in S$, если $\mu(S_{j_l})<\mu(S_{j_r})$, то $S_{j_l}/\{x_{j_l}\}\subset S_{j_r}\}/\{x_{j_l}\}$, и если $\mu(S_{j_l})=\mu(S_{j_r})$, то $S_{j_l}/\{x_{j_r}\}=S_{j_r}/\{x_{j_l}\}$.

Свойство 3.

$$p=\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} S_j\right)=\begin{cases} l_1+1, \text{ если } m>1,\\ l_1, \text{ если } m=1.\end{cases}$$

Действительно, $\mu(S_{j_m})=l_1$ и x_{j_m} не равно ни одному из $x_{j_1},\cdots,x_{j_{(m-1)}}$. Следовательно $x_{j_m}\overline{\in}\bigcup_{j=1}^{m-1} S_j$.

Свойство 4. Наборы $S_1,\cdots, S_m$ можно представить следующим образом:

$$S_{j_1}=\{x_{j_2}, x_{j_3},\cdots, x_{j_m}\}\cup S'_{j_1},$$

$$S_{j_2}=\{x_{j_1}, x_{j_3},\cdots, x_{j_m}\}\cup S'_{j_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{j_m}=\{x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3},\cdots, x_{j_{(m-1)}}\}\cup S'_{j_m}, \text{ где}$$

$$S'_{j_1}\subseteq S'_{j_2}\subseteq\cdots\subseteq S'_{j_m}.$$

Действительно, из определения „—“-множеств и свойства 1 следует, что для каждого $t\in\{2,\cdots, m\}$ набор S_{j_t} представим в виде

$$S_{j_t}=\{x_{j_1}, x_{j_2},\cdots, x_{j_{(t-2)}}, x_{j_{(t-1)}}\}\cup S''_{j_t}.$$

При этом переменная $x_{j_t}\in S_{j_r}$, $r\in\{1,\cdots, t-1\}$. Предположим, что для некоторого r $x_{j_t}\overline{\in} S_{j_r}$. Тогда, поскольку $S_{j_r}\subseteq S_{j_t}\cup\{x_j\}$, то и $S_{j_r}\subseteq S_{j_t}$, что противоречит несравнимости наборов S_{j_t} и S_{j_r}. Данное рассуждение, примененное последовательно к наборам $S_{j_1},\cdots$ $\cdots, S_{j_m}$, убеждает нас в справедливости свойства 4.

Свойство 5. $l_k=m-1+\mu(S'_{j_1})$, $m\leqslant l_k+1$, так как $S_{j_1}=\{x_{j_2},\cdots, x_{j_m}\}\cup S'_{j_1}$ и $\mu(S_{j_1})=l_k$.

Свойство 6.

$$\Pi(j_1,\cdots,j_r)=\begin{cases}(m-1)-(r-1)+\min\limits_{j\in\{j_1,\cdots,j_r\}}\mu(S'_j), \text{ при}\\ \varnothing\neq\{j_1,\cdots,j_r\}\subseteq\{1,\cdots,m\},\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Свойство 7.

$$N_l(S)=\sum_{j=1}^{k}\left(C^{\,l-\sum_{t=1}^{j-1} m_t}_{\,l_j-\sum_{t=1}^{j-1} m_t+1}-C^{\,l-\sum_{t=1}^{j} m_t}_{\,l_j-\sum_{t=1}^{l} m_t+1}\right),$$

где $C_r^t=0$, при $t<0$.

Действительно, согласно свойству 4 наборы „—“-множества $S=\{S_1,\cdots$ $\cdots, S_m\}$ можно представить в виде

$$S_{j_m}=\{x_{j_{(m-1)}}, x_{j_{(m-2)}},\cdots, x_{j_3}, x_{j_2}, x_{j_1}\}\cup S'_{j_m},$$

$$S_{j_{(m-1)}} = \{x_{j_m}, x_{j_{(m-2)}}, \cdots, x_{j_3}, x_{j_2}, x_{j_1}\} \cup S'_{j_{(m-1)}},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$S_{j_1} = \{x_{j_m}, x_{j_{(m-1)}}, x_{j_{(m-2)}}, \cdots, x_{j_3}, x_{j_2}\} \cup S'_{j_1},$$

где $S'_{j_m} \supseteq S'_{j_{(m-1)}} \supseteq \cdots \supseteq S'_{j_1}$.

Из набора S_{j_m} можно получить $C^i_{l_1}$ различных поднаборов длины i. Из набора $S_{j_{(m-1)}}$ можно получить C^{i-1}_{a-1} поднаборов длины i, не являющихся поднаборами S_{j_m}, где $a = \mu(S_{j_{(m-1)}})$, так как такие поднаборы должны обязательно содержать переменную x_{j_m}. Из набора $S_{j_{(m-2)}}$ можно получить C^{i-2}_{b-2} поднаборов длины i, не являющихся поднаборами S_{j_m} и $S_{j_{(m-1)}}$, где $b = \mu(S_{j_{(m-2)}})$, так как такие поднаборы обязательно должны содержать переменные x_{j_m} и $x_{j_{(m-1)}}$.

Аналогичным рассуждением получаем, что из набора S_{j_t}, $t=m-3, \cdots, 2, 1$ можно получить $C^{i-(t-1)}_{d-(t-1)}$ поднаборов длины i, не являющихся поднаборами $S_{j_{(t+1)}}, S_{j_{(t+2)}}, \cdots, S_{j_m}$, где $d = \mu(S_{j_t})$. Учитывая, что m_r наборов из S имеют одинаковую длину l_r, $r = 1, \cdots, k$, получаем

$$N_i(S) = (C^i_{l_1} + C^{i-1}_{l_1-1} + \cdots + C^{i-m_1+1}_{l_1-m_1+1}) + (C^{i-m_1}_{l_2-m_1} + C^{i-m_1-1}_{l_2-m_1-1} + \cdots + C^{i-(m_1+m_2)+1}_{l_2-(m_1+m_2)+1}) + \cdots + \Big(C^{i-\sum_{t=1}^{k-1} m_t}_{l_k-\sum_{t=1}^{k} m_t} + C^{i-\sum_{t=1}^{k-1} m_t-1}_{l_k-\sum_{t=1}^{k-1} m_t-1} + \cdots + C^{i-\sum_{t=1}^{k} m_t+1}_{l_k-\sum_{t=1}^{k} m_t+1}\Big).$$

Так как

$$C^p_v = C^p_{v+1} - C^{p-1}_v = C^p_{v+1} - (C^{p-1}_{v-1} + C^{p-2}_{v-2} + \cdots + C^{p-(u-1)}_{v-(u-1)} + C^{p-u}_{v-(u-1)}),$$

то каждое выражение

$C^{i-h}_{l_j-h} + C^{i-h-1}_{l_j-h-1} + \cdots + C^{i-h-(m_j-1)}_{i-h-(m_j-1)}$, где $j = 1, \cdots, k$, $h = \sum_{t=1}^{j-1} m_t$, если считать $p = i-h$, $v = l_j - h$, $u = m_j$, примет вид:

$$C^p_{v+1} - C^{p-u}_{v-(u-1)} = C^{i-\sum_{t=1}^{j-1} m_t}_{l_j-\sum_{t=1}^{j-1} m_t+1} - C^{i-\sum_{t=1}^{j} m_t}_{l_j-\sum_{t=1}^{j} m_t+1}.$$

После подстановки в формулу для $N_i(S)$ получаем

$$N_i(S) = \sum_{j=1}^{k} \Big(C^{i-\sum_{t=1}^{j-1} m_t}_{l_j-\sum_{t=1}^{j-1} m_t+1} - C^{i-\sum_{t=1}^{j} m_t}_{l_j-\sum_{t=1}^{j} m_t+1}\Big).$$

Теорема 9. *Для того чтобы при произвольной х.п.* $\chi=(n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots, m_k)$ *существовало „—“-множество с х.п.* χ, *необходимо и достаточно выполнение условий* $p=l_1+1$, $1<m\leqslant l_k+1$ *или* $p=l_1, m=1$, *где* $m=\sum\limits_{j=1}^{k} m_j$.

Доказательство. Необходимость следует из свойств 3 и 4 „—“-множеств. Достаточность. Если $p=l_1$, $m=1$, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай $p=l_1+1$, $1<m\leqslant l_k+1$.

Пусть $S_{j_1}, \cdots, S_{j_m}$ — всевозможные различные наборы длины $(m-1)$, полученные из произвольного набора S_j длины m в системе $X=\{x_1, \cdots, x_p\}$ такие, что

$S_{j_t} \cup \{x_{j_t}\} = S_j$, $t=1, \cdots, m$, и $X/S_j=\{x_{r_1}, \cdots, x_{r_{a_1}}\}$, где $a_1=l_1-m+1$.

Нетрудно видеть, что наборы

$$\begin{array}{l}
S_{j_1} \cup \{x_{r_1}, \cdots, x_{r_{a_1}}\}, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
S_{j_{m_1}} \cup \{x_{r_1}, \cdots, x_{r_{a_1}}\}, \\
S_{j_{(m_1+1)}} \cup \{x_{r_1}, \cdots, x_{r_{a_2}}\}, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
S_{j_{\left(\sum\limits_{t=1}^{k} m_t+1\right)}} \cup \{x_{r_1}, \cdots, x_{r_{ak}}\}, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{array}$$

$$S_{j_m} \cup \{x_{r_1}, \cdots, x_{r_{ak}}\}, \text{ где } a_v=(l_v-m+1),$$

$v=1, \cdots, k$ образуют „—“-множество с х.п. χ.

Заметим, что существует не менее $C_{l_1+1}^{m_1}$ „—“-множеств, с рассматриваемой х.п. χ.

Теорема 10. *Для х.п.* $\chi=(n, p, l_1, m_1)$, *где* $p=l_1+1$, $m_1\leqslant\leqslant l_1+1$ *каждое множество попарно несравнимых наборов с х.п.* χ *является „—“-множеством.*

Доказательство немедленно следует из того, что каждый набор длины l_1 может быть получен лишь удалением одной переменной из системы переменных $\{x_1, \cdots, x_{l+1}\}$.

Теорема 11. *Для произвольной х.п.* $\chi=(n, p, l_1, \cdots, l_k, m_1, \cdots \cdots, m_k)$, *при* $m=\sum\limits_{j=1}^{k} m_j \overline{\in}\{1, 2\}$, *одновременно не могут существовать „+“ и „—“-множества.*

Утверждение теоремы непосредственно следует из свойства 4 для „+“-множеств и свойства 3 для „—“-множеств.

Приведем пример вычисления длины м.т. на основании приведенных методов.

Пусть множества (M_0, M_1) образованы из следующих 10-мерных булевых векторов:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1.

Множество м.н.н. для (M_0, M_1):

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\},$$
$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7\}$$

образуют, как нетрудно заметить, „—"-множество с х.п. $\chi=(10, 10, 9, 7, 6, 4, 1, 1)$. $l_3=6$, поэтому тесты длины 7 существуют и м.т. имеет длину $1 \leqslant l_{\text{м.т.}} \leqslant 7$. Выражение $N_l(S)$ (см. свойство 7 для „—"-множеств) после подстановки числовых значений принимает вид

$$N_l(S) = C_{10}^l - C_6^{l-4} + C_4^{l-4} + C_3^{l-5} + C_2^{l-5} - C_1^{l-6}.$$

При $l \leqslant 4$, $N_l(S) = C_{10}^l$, так как $C_6^{l-4} = C_4^{l-4} = C_3^{l-5} = C_2^{l-5} = C_1^{l-6} = 0$. При $l=5$, $N_5(S) = C_{10}^5 - 2 < C_{10}^5$. Поэтому существуют в точности два м.т. длины 5. Это тесты $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_9\}$ и $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_{10}\}$.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 11.III.1969

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ. Ստուգիչների քանակական բնութագրիչների մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում հետազոտվում են n-չափանի բուլյան վեկտորների չհատվող բազմությունների առարկաները տարբերելու համար հատկացված ստուգիչների կառուցման հարցերը։

Նշված բազմությունների համար սահմանվում են բնութագրող հաջորդականություններ և բնութագրող ֆունկցիաներ, հետազոտվում են այդ քանակական բնութագրիչների հատկությունները, հաստատվում են նրանց օգտագործման հնարավորությունները տվյալ երկարություն ունեցող ստուգիչների կառուցման հարցերում։ Առանձնացվում են բազմությունների զույգերի երկու դաս, որոնց համար ստուգիչների գոյության հայտանիշները ընդունում են համեմատաբար պարզ անալիտիկ ձև։

E. M. POGOSIAN. *On the quantitative characteristics of the tests* (summary)

In this paper the tests for the distinction of the objects belonging to two non—intersecting sets of n-dimensional boolean vectors are investigated. The characteristic sequences and characteristic functions for such pairs of sets are defined. The properties of these quantitative characteristics of a pair of sets are investigated and the pos-

sibility of their use in the proofs of the existence for tests of given length and in the algorithms for test construction is established.

Two classes of pairs of sets are described for which the criteria of the existence of the tests have comparatively simple analytic form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. И. Журавлев.* О отделимости подмножеств n-мерного единичного куба, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 1, 1958.
2. *А. Н. Дмитриев, Ю. И. Журавлев, Ф. П. Кренделев.* О математических принципах классификации предметов и явлений, Сборник Дискретный анализ, вып. 7, 1966.
3. *И. А. Чегис, С. В. Яблонский.* Логические способы контроля работы электрических схем, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 1, 1958.
4. *Е. С. Согомонян.* Об одном подходе к задаче построения тестов, Автоматика и телемеханика, № 10, 1968.
5. *Дж. Риордан.* Введение в комбинаторный анализ, Москва, ИИЛ, 1963.
6. *Э. М. Погосян.* О нижних оценках длин минимальных тестов, ДАН АрмССР, L, № 2, 1970.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 1, 1970 Математика

Л. Ш. АГАБАБЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на гиперплоскости вырождения до сих пор рассматривалась либо при условии, что начальная гиперплоскость не касается характеристического коноида ни в одной точке ([1], [2]), либо рассматривался лишь одномерный случай (см. [3] и указанную там литературу).

В предлагаемой заметке рассматривается задача Коши для многомерного гиперболического уравнения, когда гиперплоскость вырождения по одним направлениям касается характеристического коноида, по другим—пересекает его под ненулевым углом.

Именно, в области $G_T\{0<t\leqslant T,\ x\in R_n\}$, $R_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$ изучается следующая задача Коши:

$$L[u]\equiv-u_{tt}+t^{-\alpha_i}u_{x_ix_i}+a_i\,u_{x_i}+bu_t+cu=f, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0;\ x=(x_1,\cdots,x_n), \tag{2}$$

где

$$-\infty<\alpha_i<1\ \ (i=1,2,3,\cdots,n). \tag{3}$$

(Здесь и далее, если не оговорено противное, предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть в области $\overline{G}_\tau$ выполнено неравенство*

$$a_i^2\leqslant(1-\alpha_i)\,t^{-\alpha_i-1}\ \ (i=1,2,3,\cdots,n), \tag{4}$$

и пусть, кроме того

$$\int_0^\tau\max_x\{b^2(x,t)\}\,dt<+\infty\ \ (x\in R_n), \tag{5}$$

$$\int_0^\tau\max_x\{c(x,t)\}\,t\,dt<+\infty\ \ (x\in R_n). \tag{6}$$

Тогда, если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ имеют в G_τ производные по x и t достаточно высокого порядка, то задача (1), (2) *является корректной задачей конечного порядка* (*в смысле работы* [4]).

(*Требуемый порядок гладкости зависит от коэффициентов уравнения* (1) *и легко может быть вычислен*).

1. Рассмотрим уравнение

$$L_\varepsilon[u] \equiv -u_{tt} + (t+\varepsilon)^{-\alpha_l} u_{x_l x_l} + a_l u_{x_l} + b u_t + c u = f \quad (\varepsilon > 0). \tag{7}$$

Нашей целью является получение энергетических оценок для решения однородной задачи Коши уравнения (7) с константами, не зависящими от ε. Согласно схеме работ [1], [2] это позволит доказать теорему.

Введем новую неизвестную функцию по формуле $v = u - u_p$, где

$$u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\partial^{k+2} u}{\partial t^{k+2}}\Big|_{t=0} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \quad (p > 0)$$

— известная функция. Для v получим уравнение

$$L_\varepsilon[v] = f - L_\varepsilon[u_p] \equiv F(x, t). \tag{8}$$

Умножим уравнение (8) на $(t+\varepsilon)\,w$, где $w = \int_t^\tau v(x, s)\,ds$ и проинтегрируем по области G_τ.

Введем обозначения

$$[\varphi, \psi] \equiv \int_{G_\tau} \varphi \cdot \psi \, dG; \quad (\varphi, \psi)_{t=\tau} = \int_{R_n} \varphi(x, \tau)\, \psi(x, \tau)\, dx.$$

Интегралы преобразуем интегрированием по частям, используя условия (2):

$$[v_{tt}, (t+\varepsilon)\,w] = \frac{1}{2}\,(v, (t+\varepsilon)\,v)_{t=\tau} - \frac{3}{2}\,[v, v], \tag{9}$$

$$[(t+\varepsilon)^{-\alpha_l} u_{x_l x_l}, (t+\varepsilon)\,w] = -\frac{1}{2}\,[(t+\varepsilon)^{-\alpha_l}(1-\alpha_l)\, w_{x_l}, w_{x_l}] -$$

$$-\frac{1}{2}\,((t+\varepsilon)^{-\alpha_l} w_{x_l}, w_{x_l})_{t=0}, \tag{10}$$

$$[a_l v_{x_l}, (t+\varepsilon)\,w] = -[a_{l x_l} v, (t+\varepsilon)\,w] - [a_l w_{x_l}, (t+\varepsilon)\,v], \tag{11}$$

$$[b v_t, (t+\varepsilon)\,w] = [v, (t+\varepsilon)\,b v] - [v, (b\,(t+\varepsilon))_t\, w]. \tag{12}$$

Кроме того, имеем оценку

$$|[F, (t+\varepsilon)\,w]| < \left[\frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}}, \frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}}\right]^{1/2} \{\tau^{2p+4}[v, (t+\varepsilon)^2 v]\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \tau^{2p+5} + C_2\,[v, (t+\varepsilon)\,v] \quad (C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0). \tag{13}$$

Используя неравенства

$$|[g(x, t)\, w, w]| \leqslant \mathrm{const} \cdot \tau^2\, [v, v]$$

(где $g(x, t)$ — любая интегрируемая в G_τ функция) и

$$2\,[\varphi, \psi] \leqslant [\beta\varphi, \varphi] + \left[\frac{1}{\beta}\psi, \psi\right] \quad (\beta > 0),$$

а также условия (4), (5) и (6) для оценки интегралов (9), (10), (11) и (12), получим интегральное неравенство

$$(v, (t+\varepsilon) v)_{t=\tau} \leqslant C_3 [v, v] + C_4 \tau^{2p+5}, \tag{14}$$

(C_3, $C_4 = \text{const} > 0$ и не зависят от ε).

Обращая это интегральное неравенство (см., напр., [5], стр. 376), окончательно получим

$$(v, v)_{t=\tau} \leqslant C_5$$

($C_5 = \text{const} > 0$ и не зависит от ε).

Энергетические оценки производных решения без труда могут быть получены аналогично.

2. В частном случае, когда $\alpha_l \leqslant 0$, результат п. 1 значительно слабее результатов работ [1], [2], однако здесь, по-видимому, впервые рассматривается случай совместного вырождения разного характера.

Отметим, что в случае $\alpha_l \geqslant 1$ не ясно какого типа задачу надо ставить для уравнения (1), так как в случае чистого касания характеристического коноида вводится вес, [6], а в случае пересечения под ненулевым углом накладываются ограничения лишь на коэффициенты уравнения.

Ереванский армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Потуспило 16.VI.1969

Լ. Շ. ԱՂԱԲԱԲՅԱՆ. Մի երկրորդ կարգի վերծվող հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է համասեռ Կոշու խնդրի կոռեկտությունը

$$L[u] \equiv -u_{tt} + t^{-\alpha_l} u_{x_l x_l} + a_l u_{x_l} + b u_t + C u = f$$

հավասարման համար։

L. S. AGABABIAN. *The Caushy problem for one second order vanishing hyperbolic equation* (summary)

The character of correctness of Caushy problem for

$$L[u] \equiv -u_{tt} + t^{-\alpha_l} u_{x_l x_l} + a_l u_{x_l} + b u_t + c u = f$$

hyperbolic equation is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. А. Олейник.* Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе, ДАН СССР, 1966, 169, № 3, 525—528.
2. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе, УМН, 1, 1969, 229—230.
3. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, „Наука“, М., 1966.

4. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для одномерного гиперболического уравнения произвольного порядка с данными на линии вырождения, Дифференциальные уравнения, IV, № 9, 1968, 1658—1662.
5. *А. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка, Известия АН АрмССР, „Математика", 3, №№ 4—5, 1968, 369—385.
6. *С. А. Терсенов.* К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения, Сибирск. матем. журн., 1961, 2, № 6, 1120—1143.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 1, 1970 Математика

А. В. ЕФИМОВ

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕАКТИВНЫХ J-РАСТЯГИВАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Пусть $w(\lambda)$—рациональная матрица-функция, обладающая свойствами

$$\text{(I)}\ \overline{w(\overline{\lambda})} \equiv w(\lambda),$$

$$\text{(II)}\ w^*(\lambda)\, J_1 w(\lambda) - J_1 \geqslant 0, \text{ когда } \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

$$\text{(III)}\ w'(\lambda)\, J_2\, w(\lambda) \equiv J_2,$$

$$\text{(IV)}\ w^*(\lambda)\, J_1\, w(\lambda) = J_1, \text{ когда } \operatorname{Re}\lambda = 0.$$

В статье [1] показано, что проходная матрица произвольного линейного пассивного реактивного $4n$-полюсника является рациональной и обладает свойствами (I)—(IV). В настоящей статье доказывается обратное утверждение: каждая рациональная матрица-функция $w(\lambda)$, обладающая свойствами (I)—(IV), является проходной матрицей некоторого $4n$-полюсника указанного типа. Таким образом, справедлива следующая основная теорема:

Для реализуемости матрицы-функции $w(\lambda)$ (порядка $2n$) в виде линейного пассивного реактивного $4n$-полюсника необходимо и достаточно, чтобы $w(\lambda)$ являлась рациональной матрицей-функцией и обладала свойствами (I)—(IV).

Эта теорема является аналогом известной теоремы Кауэра (см. [2]); она играет в теории J-растягивающих матриц-функций и цепных соединений многополюсников ту же роль, что теорема Кауэра в теории позитивных матриц-функций и последовательно-параллельных соединений многополюсников. Значение подобного рода теорем определяется тем, что они выделяют совокупность математических объектов, являющихся математическим эквивалентом тех или иных физических конструкций.

Доказательство второй части основной теоремы (достаточность) состоит в конструировании линейного пассивного реактивного $4n$-полюсника с наперед заданной проходной матрицей $w(\lambda)$, обладающей свойствами (I)—(IV). Построение такого $4n$-полюсника опирается на теорему статьи [3] В. П. Потапова. В соответствии с этой теоремой матрица-функция $w(\lambda)$ может быть представлена в виде произведения конечного числа простейших (примарных) матриц-функций, также обладающих свойствами (I)—(IV). С математической точки зрения структура примарных матриц весьма сложна. По расположению полюсов в комплексной плоскости различаются следующие пять типов примарных матриц-функций:

$$r(\lambda)=\begin{bmatrix} r_{11}(\lambda) & r_{12}(\lambda) \\ r_{21}(\lambda) & r_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Тип I. $r(\lambda)$ имеет четверку (простых) полюсов:

$$\lambda_0=\sigma_0+i\tau_0,\ -\lambda_0,\ \bar{\lambda}_0,\ -\bar{\lambda}_0\ (\sigma_0>0,\ \tau_0>0).$$

Блоки матрицы $r(\lambda)$ имеют вид (см. [3])

$$r_{11}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0}{\Delta_1}\left[\lambda_0\frac{(\alpha+\delta)f_1^*f_2-(\theta+\gamma)\bar{f}_1^*\bar{f}_2}{\lambda^2-\lambda_0^2}+\bar{\lambda}_0\frac{(\alpha+\delta)\bar{f}_1^*\bar{f}_2-(\bar{\theta}+\bar{\gamma})f_1^*f_2}{\lambda^2-\bar{\lambda}_0^2}\right],$$

$$r_{12}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\Delta_2}\cdot\left[\frac{(\alpha-\delta)f_1^*f_1+(\theta-\gamma)\bar{f}_1^*\bar{f}_1}{\lambda^2-\bar{\lambda}_0^2}+\frac{(\alpha-\delta)\bar{f}_1^*\bar{f}_1+(\bar{\theta}-\bar{\gamma})\bar{f}_1^*f_1}{\lambda^2-\bar{\lambda}_0^2}\right],$$

$$\lambda_{21}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\Delta_1}\left[\frac{(\alpha+\delta)f_2^*f_2-(\theta+\gamma)\bar{f}_2^*\bar{f}_2}{\lambda^2-\lambda_0^2}+\frac{(\alpha+\delta)\bar{f}_2^*\bar{f}_2-(\bar{\theta}+\bar{\gamma})\bar{f}_2^*f_2}{\lambda^2-\bar{\lambda}_0^2}\right],$$

$$r_{22}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0}{\Delta_2}\left[\lambda_0\frac{(\alpha-\delta)f_2^*f_1+(\theta-\gamma)\bar{f}_2^*\bar{f}_1}{\lambda^2-\lambda_0^2}+\bar{\lambda}_0\frac{(\alpha-\delta)\bar{f}_2^*\bar{f}_1+(\bar{\theta}-\bar{\gamma})\bar{f}_2^*f_1}{\lambda^2-\bar{\lambda}_0^2}\right],$$

где f_1 и f_2 — n-мерные строчные векторы;

$$\alpha=f_2f_1^*+\bar{f}_2\bar{f}_1^*,$$

$$\delta=\frac{\sigma_0}{i\tau_0}(f_2f_1^*-\bar{f}_2\bar{f}_1^*),$$

$$\gamma=\frac{2\sigma_0}{\bar{\lambda}_0}f_2\bar{f}_1^*;$$

скаляры α, θ, γ, δ связаны соотношениями $\alpha>|\delta|$,

$$\Delta_1=(\alpha+\delta)^2-|\theta+\gamma|^2>0,\ \Delta_2=(\alpha-\delta)^2-|\theta-\gamma|^2>0.$$

Тип II. $r(\lambda)$ имеет пару (простых) полюсов $\lambda_0=\sigma_0>0,-\lambda_0$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0^2}{\alpha+\theta}\cdot\frac{f_1^*f_2}{\lambda^2-\sigma_0^2},\ r_{12}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\alpha-\theta}\cdot\frac{f_1^*f_1}{\lambda^2-\sigma_0^2},$$

$$r_{21}(\lambda)=\frac{4\sigma_0\lambda}{\alpha+\theta}\cdot\frac{f_2^*f_2}{\lambda^2-\sigma_0^2},\ r_{22}(\lambda)=I+\frac{4\sigma_0^2}{\alpha-\theta}\cdot\frac{f_2^*f_1}{\lambda^2-\sigma_0^2},$$

где f_1, f_2 — вещественные n-мерные строчные векторы, скаляры $\alpha=2f_2f_1^*$, θ — вещественные; при этом $\alpha>|\theta|$.

Тип III. $r(\lambda)$ имеет пару простых полюсов $\lambda_0=i\tau_0\ (\tau_0>0),-\lambda_0$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda)=I+\frac{2i\tau_0}{\theta+\delta}\cdot\frac{f_1^*f_2}{\lambda^2+\tau_0^2},\ r_{12}(\lambda)=\frac{2\lambda}{\theta-\delta}\cdot\frac{f_1^*f_1}{\lambda^2+\tau_0^2},$$

$$r_{21}(\lambda)=\frac{2\lambda}{\theta+\delta}\cdot\frac{f_2^*f_2}{\lambda^2+\tau_0^2},\ r_{22}(\lambda)=I+\frac{2i\tau_0}{\theta-\delta}\cdot\frac{f_2^*f_1}{\lambda^2+\tau_0^2},$$

где f_1, f_2 — n-мерные векторы, причем $\bar{f_2} = e^{i\varphi} f_2$, $\bar{f_1} = -e^{i\varphi} \cdot f_1$, θ и $\delta = \frac{f_2 f_1}{i\tau_0}$ — вещественные скаляры, $\theta > |\delta|$.

Тип IV. $r(\lambda)$ имеет простой полюс $\lambda_0 = 0$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda) \equiv I, \; r_{12}(\lambda) = \frac{f_1^* f_1}{\theta \cdot \lambda},$$

$$r_{21}(\lambda) = \frac{f_2^* f_2}{\theta \cdot \lambda}, \; r_{22}(\lambda) \equiv I.$$

Тип V. $r(\lambda)$ имеет простой полюс $\lambda_0 = \infty$. Блоки ее имеют вид

$$r_{11}(\lambda) \equiv I, \; r_{12}(\lambda) = \theta \cdot \lambda f_1^* f_1,$$

$$r_{21}(\lambda) = \theta \cdot \lambda f_2^* f_2, \; r_{22}(\lambda) \equiv I.$$

В типах IV, V f_1, f_2 — вещественные n-мерные строчные векторы, один из которых (но не оба) равен нулю; $\theta > 0$.

При цепном соединении многополюсников соответствующие им проходные матрицы перемножаются. Поэтому для реализации матрицы $w(\lambda)$ достаточно реализовать примарные матрицы перечисленных пяти типов.

Примарные матрицы-функции являются простейшими в том смысле, что они не могут быть расщеплены в произведение двух не постоянных матриц с теми же полюсами. С физической точки зрения это означает, что примарные матрицы изображают элементарные ячейки цепной структуры реактивной цепи.

Хотя примарные матрицы и просты, реализация их все еще затруднительна. Имея целью упростить задачу, представим $r(\lambda)$ в виде

$$r(\lambda) = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\, r(\lambda)\, \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1},$$

где $\mathbf{F}$ — постоянная вещественная матрица, обладающая свойствами

$$\mathbf{F}^* J_1 \mathbf{F} = J_1, \; \mathbf{F}^* J_2 \mathbf{F} = J_2.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\mathbf{F}$ имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} T' & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}$$

и может быть реализована в виде идеального трансформатора (см. [2]). Таким образом, если $\mathbf{F}^{-1}\, r(\lambda)\, \mathbf{F}$ реализована в виде некоторого многополюсника, то $r(\lambda)$ реализуется в виде цепного соединения этого многополюсника и двух идеальных трансформаторов.

Соответствующим подбором матрицы $\mathbf{F}$ можно добиться упрощения векторов f_1 и f_2, а, следовательно, и матрицы $r(\lambda)$: в преобразованной матрице $\tilde{r}(\lambda) = \mathbf{F}^{-1}\, r(\lambda)\, \mathbf{F}$ выделяется некоторая ее субматрица-ядро, содержащее по существу всю информацию о матрице $\tilde{r}(\lambda)$. Это ядро имеет порядок 2, 4 или 6.

С физической точки зрения это означает, что элементарные ячейки цепной структуры реактивной цепи, вообще говоря, не сводятся к четырехполюснику. *Они могут представлять собой или 4-полюсник, или 8-полюсник, или 12-полюсник.*

В дальнейшем рассматриваются матрицы $\tilde{r}(\lambda)$ порядка 6, приведенные к простому виду. Вместо $\tilde{r}(\lambda)$ будем писать $r(\lambda)$.

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа *I*.

Анализ этой задачи показывает, что возможны следующие пять случаев:

1) Векторы f_1 и f_2 обладают свойством

$$\bar{f}_1 = e^{i\varphi_1}\cdot f_1, \bar{f}_2 = e^{i\varphi_2}\cdot f_2;$$

в дальнейшем такие векторы будем называть вырожденными.

Можно считать, что

$$f_1 = (z_1, 0, 0), f_2 = (z_2, 0, 0), z_1 \neq 0, z_2 \neq 0.$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи, приведенной на рис. 1.

Значения физических параметров:

$$l_1 = \frac{\Delta_1}{4\sigma_0\cdot 2\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2^2]} > 0,$$

$$C_1 = -\frac{4\sigma_0\cdot\omega^2\cdot 2\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2^2]}{\Delta_1\cdot|\lambda_0|^4\cdot\rho_{11}(0)} > 0,$$

$$l_2 = -\frac{\Delta_1\cdot|\omega^2+\lambda_0^2|^2\cdot\rho_{11}(i\omega)}{4\sigma_0\omega^2\cdot 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2^2]} > 0,$$

$$C_2 = (l_2\cdot\omega^2)^{-1},\quad n_1 = \rho_{11}(0),\quad n_2 = \rho_{11}(i\omega),$$

$$\omega^2 = -\frac{\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2^2]}{\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2^2]} > 0,$$

$\rho_{11}(\lambda)$ — левый верхний элемент матрицы $r(\lambda)$.

2) Вектор f_1—вырожденный, вектор f_2—невырожденный. Можно считать, что $f_1 = (z_1, 0, 0)$, $f_2 = (z_2, x_2, 0)$,

$$\mathrm{Im}\, z_1 \neq 0,\ \mathrm{Im}\, z_2 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ \bar{x}_2 = x_2,$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 2.

Значения физических параметров

$$l_1 = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)x_2^2-(\theta+\gamma)x_2^2]}{4\sigma_0\cdot x_2^2\cdot(z_2-\bar{z}_2)^2} > 0,$$

$$l_2 = -\frac{2\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)|z_2|^2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2^2]}{4\sigma_0\cdot x_2^2\cdot(z_2-\bar{z}_2)^2} > 0,$$

$$l = \frac{2\mathrm{Re}\,[(\alpha+\delta)\bar{z}_2x_2-(\theta+\gamma)\bar{z}_2x_2]}{4\sigma_0\cdot x_2^2\cdot(z_2-\bar{z}_2)^2},$$

$$p_1=\frac{2\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2\,[(\alpha+\delta)\,x_2^2-(\theta+\gamma)\,\bar{x}_2^2]+8\sigma_0\cdot\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0 x_2 z_1\,(z_2-\bar{z}_2)}{4\sigma_0\,x_2^2\,(z_2-\bar{z}_2)^2}>0,$$

$$p_2=\frac{2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar{z}_2^2]}{4\sigma_0\,x_2^2\,(z_2-\bar{z}_2)^2}>0,$$

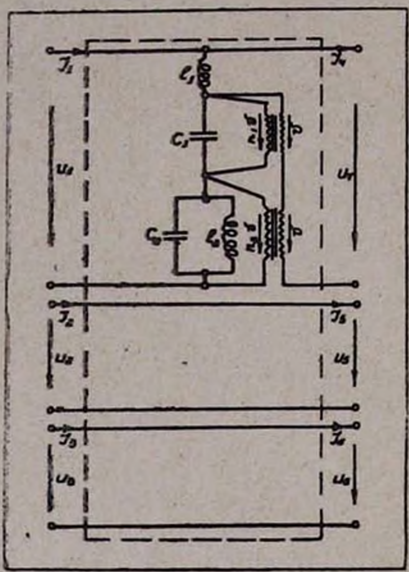

Рис. 1.

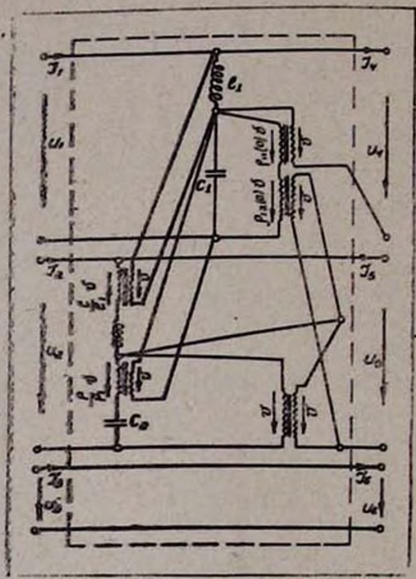

Рис. 2.

$$p=-\frac{2\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}_0^2[(\alpha+\delta)\,x_2\cdot z_2-(\theta+\gamma)\,x_2\,\bar{z}_2]}{4\sigma_0 x_2^2\,(z_2-\bar{z}_2)^2},$$

$$L=\frac{l_1 l_2-l^2}{l_1}>0,\ C_1=p_1^{-1},\quad C_2=\frac{p_1}{p_1p_2-p^2}>0;$$

$\rho_{11}(0)$, $\rho_{12}(0)$ — значения элементов матрицы $r(\lambda)$.

3) Вектор f_1—невырожденный, вектор f_2—вырожденный. Можно считать, что $f_1=(z_1,\ x_1,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ 0,\ 0)$,

$$\mathrm{Im}\ z_1\neq 0,\ \mathrm{Im}\ z_2\neq 0,\ x_1\neq 0,\ \bar{x}_1=x_1.$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 3. Значения физических параметров

$$C_1=-\frac{2\,\mathrm{Re}\,[(\alpha-\delta)\,x_1^2+(\theta-\gamma)\,\bar{x}_1^2]}{4\sigma_0\,x_1^2\,(z_1-\bar{z}_1)^2}>0,$$

$$C_2=-\frac{2\,\mathrm{Re}[(\alpha-\delta)\,|z_1|^2+(\theta-\gamma)\,\bar{z}_1^2]}{4\sigma_0\,x_1^2\,(z_1-\bar{z}_1)^2}>0,$$

$$C=\frac{2\,\mathrm{Re}\,[(\alpha-\delta)\bar{z}_1\,x_1+(\theta-\gamma)\,\bar{z}_1\,x_1]}{4\sigma_0\,x_1^2\,(z_1-\bar{z}_1)^2},$$

$$l_1=\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha-\delta)\,x_1^2+(\theta-\gamma)\,\bar x_1^2]}{4\sigma_0 x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2}+\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0 z_2\,(z_1-\bar z_1)}{(z_1-\bar z_1)^2}>0,$$

$$l_2=\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2[(\alpha-\delta)\,|z_1|^2+(\theta-\gamma)\,\bar z_1^2]}{4\sigma_0 x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2}>0,$$

$$l=-\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha-\delta)\,z_1x_1+(\theta-\gamma)\,\bar z_1x_1]}{4\sigma_0 x_1^2\,(z_1-\bar z_1)^2},$$

$$D=\frac{C_1C_2-C^2}{C_1}>0,\quad L=\frac{l_1}{l_1l_2-l^2}>0;$$

$\rho_{st}(\lambda)$ — элементы матрицы $r(\lambda)$.

4) Векторы f_1, f_2 — невырожденные, $(\operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\cdot(\operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})\neq$ $\neq(\operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\cdot(\operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})$.

Можно считать, что $f_1=(z_1,\ x_1,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ x_2,\ 0)$,

$$\operatorname{Im} z_1\neq 0,\ \operatorname{Im} z_2\neq 0,\ x_1\neq 0,\ x_2\neq 0,\ \bar x_1=x_1,\ \bar x_2=x_2;$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 4. Значения физических параметров l_1, l_2, l, L, p_1, C_1, C_2 см. случай 2). Остальные:

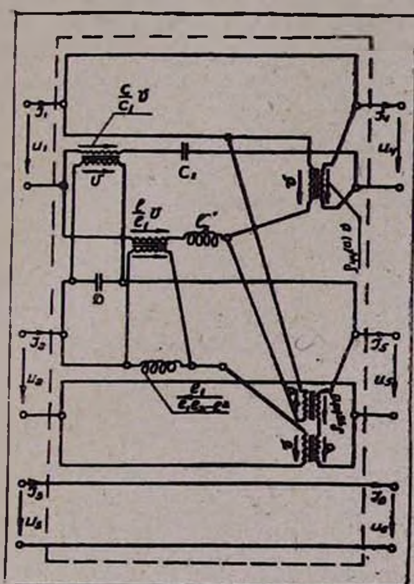

Рис. 3.

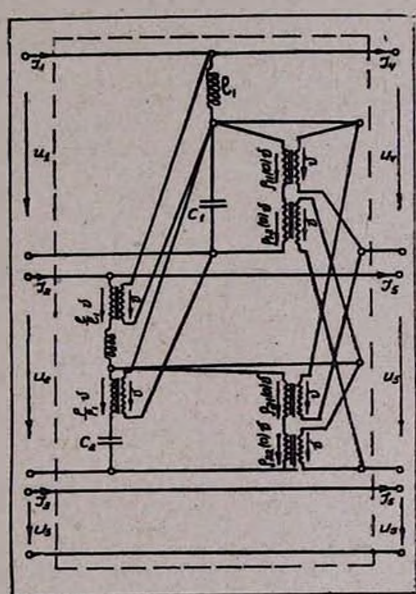

Рис. 4.

$$p_2=\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,|z_2|^2-(\theta+\gamma)\,\bar z_2^2]-8\sigma_0\operatorname{Re}\bar\lambda_0\,x_1x_2\bar z_2\,(z_2-\bar z_2)}{4\sigma_0\,x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2}>0,$$

$$p=-\frac{2\operatorname{Re}\bar\lambda_0^2\,[(\alpha+\delta)\,x_2z_2-(\theta+\gamma)\,x_2\bar z_2]-8\sigma_0\operatorname{Re}\bar\lambda_0\,x_1x_2^2\,(z_2-\bar z_2)}{4\sigma_0\,x_2^2\,(z_2-\bar z_2)^2}.$$

5) Векторы f_1, f_2 — невырожденные, $(\operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})(\operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})=$ $=(\operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Re}\overset{*}{f_1})\cdot(\operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Im}\overset{*}{f_1})\neq 0$.

Можно считать, что $f_1 = (z_1, 0, x_1)$, $f_2 = (z_2, x_2, 0)$,

$$\operatorname{Im} z_1 \neq 0,\ \operatorname{Im} z_2 \neq 0,\ x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ \bar{x}_1 = x_1,\ \bar{x}_2 = x_2.$$

$r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 5. Значения параметров см. случай 4).

Следует отметить, что *этот случай особенно труден в смысле реализации, так как цепь на рис. 5 не имеет ни матрицы сопротивления, ни матрицы проводимости.*

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа II.

Можно считать, что $f_1 = (x_1, 0, 0)$, $f_2 = (x_2, 0, 0)$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 6. Значения физических параметров

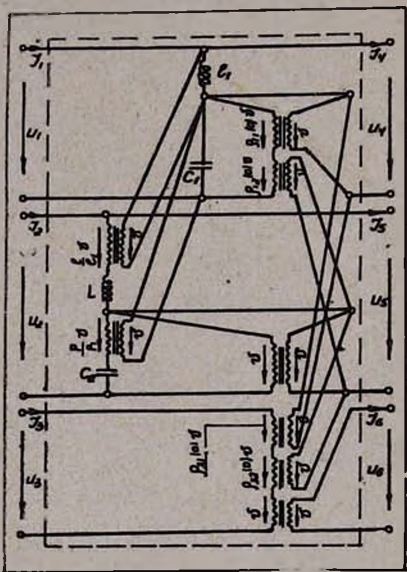

Рис. 5.

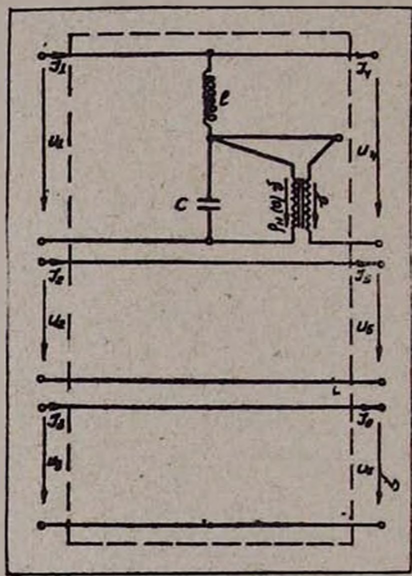

Рис. 6.

$$l = \frac{\alpha + \theta}{4\sigma_0 x_2^2},\quad C = \frac{4x_2^2}{(\alpha - \theta)\sigma_0} > 0.$$

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа III.

Возможны четыре случая.

1) $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$. Можно считать, что $f_2 = (z_2, 0, 0)$, $z_2 \neq 0$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 6. Значения физических параметров

$$l = \frac{\theta}{2|z_2|^2} > 0,\ C = \frac{2|z_2|^2}{\theta \cdot \tau_0^2} > 0,\ \rho_{11}(0) = 1.$$

2) $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$. Можно считать, что

$$f_1 = (z_1, 0, 0)\ z_1 \neq 0.$$

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 7. Значения физических параметров

$$C=\frac{\theta}{2|z_1|^2}>0,\quad l=\frac{2|z_1|^2}{\theta\cdot\tau_0^2}>0.$$

3) $f_1\neq 0$, $f_2\neq 0$; хотя бы одно из скалярных произведений

$$\operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Re}\dot{f}_1,\ \operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Im}\dot{f}_1,\ \operatorname{Im} f_2\cdot\operatorname{Re}\dot{f}_1,\ \operatorname{Re} f_2\cdot\operatorname{Im}\dot{f}_1$$

отлично от нуля.

Можно считать, что $f_1=(z_1,\ 0,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ 0,\ 0)$, $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 6.

Значения физических параметров

$$l=\frac{\theta+\delta}{2|z_2|^2}>0,\quad C=\frac{2|z_2|^2}{(\theta-\delta)\tau_0^2}>0.$$

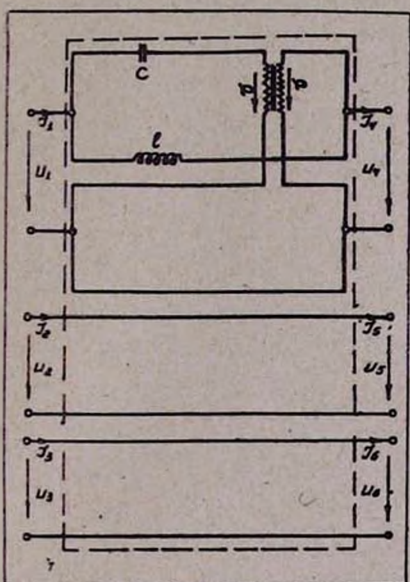

Рис. 7.

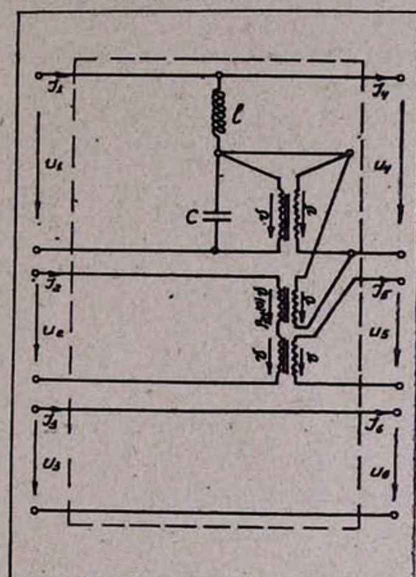

Рис. 8.

4) $f_1\neq 0$, $f_2\neq 0$; все скалярные произведения (см. случай 3)) равны нулю. Можно считать, что $f_1=(0,\ z_1,\ 0)$, $f_2=(z_2,\ 0,\ 0)$, $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 8. Значения физических параметров

$$l=\frac{\theta}{2|z_2|^2}>0,\quad C=\frac{2|z_2|^2}{\theta\cdot\tau_0^2}>0.$$

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа IV.

Возможны два случая.

1) $f_1=0$, $f_2\neq 0$; можно считать, что $f_2=(x_2,\ 0,\ 0)$, $x_2\neq 0$, $\bar{x}_2=x_2$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 9. При этом $l=\frac{\theta}{x_2^2}>0$.

2) $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$; можно считать, что $f_1 = (x_1, 0, 0)$, $x_1 \neq 0$, $\bar{x}_1 = x_1$. Матрица реализуется в виде цепи на рис. 10. При этом

$$C = \frac{\theta}{x_1^2} > 0.$$

Реализация матрицы $r(\lambda)$ типа V.

Возможны два случая.

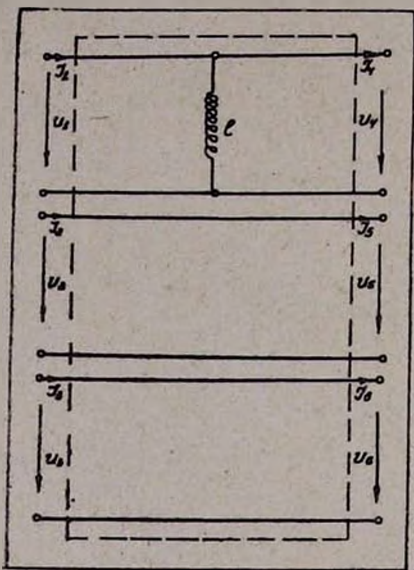

Рис. 9.

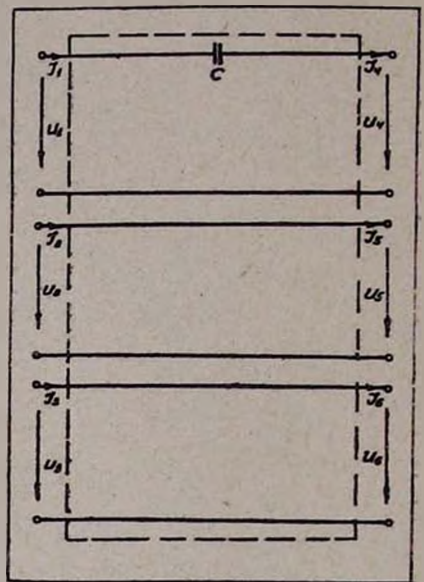

Рис. 10.

1) $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$; можно считать, что $f_2 = (x_2, 0, 0)$, $x_2 \neq 0$, $\bar{x}_2 = x_2$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 9 с заменой катушки l на конденсатор C, причем

$$C = \theta \cdot x_2^2 > 0.$$

2) $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$; можно считать, что $f_1 = (x_1, 0, 0)$, $x_1 \neq 0$, $\bar{x}_1 = x_1$.

Матрица $r(\lambda)$ реализуется в виде цепи на рис. 10 с заменой конденсатора C на катушку l, причем

$$l = \theta \cdot x_1^2 > 0.$$

Во всех случаях соответствие проходных матриц цепям проверено расчетом.

Достаточность условий (I)—(IV) для реализуемости $w(\lambda)$ доказана полностью.

Отметим, что, попутно, исчерпывающим образом описана цепная структура пассивной реактивной цепи.

Одесский педагогический институт

Поступило 19.IV.1969

Ա. Վ. ԵՖԻՄՈՎ. Ռեակտիվ J-երկարացնող մատրիցա-ֆունկցիաների իրացումը (*ամփոփում*)

Ամեն մի ռեակտիվ (այսինքն՝ (I)—(IV) հատկություններով օժտված) w(λ) *մատրիցա-ֆունկցիա կարող է իրացվել գծային պասիվ* CL-*բազմաբևեռի տեսքով, որի համար այն հանդիսանում է անցումային մատրիցա։ Բերված են էլեկտրական շղթայի պարզագույն բջիջների բոլոր հնարավոր սխեմաները։ Դրանով իսկ սպառիչ կերպով նկարագրված է ռեակտիվ շղթայի շղթայական ստրուկտուրան։*

A. V. EFIMOV. *Realisation of reactive J-stretching matrix-functions*
(summary)

Every matrix function $w(\lambda)$ with properties (I)—(IV) may be realised as a transitions matrix for a linear passive *CL*. The circuits of all simplest electric cells are attained, so that comprehensive description of structure of reactive chains may be given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Ефимов.* Об одном применении теоремы Ланжевена в теории цепей, ДАН АрмССР, 1969, XLIX, № 3, 118—123.
2. *W. Cauer.* Theorie der linearen wechselstramschaltungen, Berlin, 1954.
3. *В. П. Потапов.* Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН АрмССР, 1969, XLVIII, № 5, 257—263.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS