ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 6, 1969 Математика

И. О. ХАЧАТРЯН

О ВЕСОВОЙ ПОЛНОТЕ МНОГОЧЛЕНОВ

В работе [1] Т. Холл исследовал следующий вопрос.

Пусть на комплексной плоскости задано счетное точечное множество E: $\{z_n\}$ и на этом множестве определеча произвольная функция $\varphi(z_n) = A_n \geqslant 1$ такая, что $\lim\limits_{n \to +\infty} [|z_n|^k : \varphi(z_n)] = 0$, $k=0, 1, 2, \cdots$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{M}$ всех полиномов $p(z)$, которые на множестве $\{z_n\}$ мажорируются функцией $\varphi(z_n)$, т. е.

$$|p(z_n)| \leqslant A_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Обозначим

$$\psi(z) = \sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)|.$$

Ставился вопрос: при каких условиях для данной точки $z \overline{\in} E$ $\psi(z) = +\infty$? Т. Холлом показано, что если дополнительное множество замыкания $\overline{E}$ обозначим через ΣD_k, где каждое D_k—открытое и связное множество, то в каждой области D_k либо $\psi(z) = +\infty$, либо $\ln \psi(z)$—непрерывная и субгармоническая функция. При некоторых предположениях относительно расположения множества E на плоскости им были указаны достаточные условия для тождества $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \overline{\in} E$. Приведем один из его результатов.

Теорема (Т. Холл). Пусть все точки z_n расположены в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant -1$. Тогда условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{c_k}} = +\infty,$$

где $c_k = \sup \dfrac{|z_n|^k}{A_n} = \sup \dfrac{|z_n|^k}{\varphi(z_n)}$, влечет $\psi(z) = +\infty$, $z \overline{\in} E$.

Эта теорема имеет довольно общий характер в том смысле, что здесь не предполагаются определенная плотность множества $\{z_n\}$ и регулярность роста функции $\varphi(z)$. Однако отметим, что вследствие этой общности, она не гибко реагирует на плотность и распределение точек z_n на плоскости. Например, если в качестве множества E взять множество $\{\pm n^2\}$, а $\varphi(z) = \exp 2|z|^{1/2}$, то будем иметь $c_k = k^{2k} e^{-2k}$ и следовательно условие Т. Холла не выполняется, хотя в этом случае, как мы убедимся ниже, $\psi(z) \equiv +\infty$ $z \overline{\in} E$.

В настоящей заметке, предполагая, что функция $\varphi(z)=\varphi(|z|)$ имеет нормальный рост и что $\lim|z_n|=+\infty$, устанавливается связь между плотностью множества $\{z_n\}$ и ростом функции φ, обеспечивающая выполнение тождества $\psi(z)\equiv+\infty$, $z\overline{\in}E$. При этом существенную роль будет играть критерий С. Н. Мергеляна, состоящий в том, что *тождество* $\psi(z)\equiv+\infty$, $z\overline{\in}E$ *эквивалентно полноте многочленов в весовом пространстве* $C_{\frac{\varphi(t)}{1+|t|}}$ [2].

Далее в заметке устанавливается теорема об одновременной весовой аппроксимации непрерывных функций многочленами на лучах комплексной плоскости и на данном дискретном множестве точек, удаляющихся в бесконечность.

1°. Перейдем к изложению нашего результата.

Теорема 1. *Пусть точечное множество* $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям*

1. $\lim|z_n|=+\infty$;

2. *Существует стремящаяся к бесконечности последовательность концентрических колец* $K_{r_n', r_n''}$: $r_n'<|z|<r_n''$ *с центром в начале координат, не содержащих точек множества* E *и таких, что* $r_n''-r_n'\geqslant\delta>0$.

Пусть на множестве E *определена нормально возрастающая функция* $\varphi(z)$

$$\varphi(z)=\varphi(|z|)=\exp p(r)=\exp\int_1^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt,\quad \omega(t)\uparrow+\infty,\quad r=|z|. \qquad (*)$$

Пусть далее $n(t)$ *означает число точек* z_n, *попадающих в круг* $|z|\leqslant t$, *и, наконец,*

$$N(r)=\int_1^r\frac{n(t)}{t}\,dt.$$

Тогда условие

$$\lim_{r\to+\infty}[N(r)-p(r)+2\ln r]=-\infty \qquad (1)$$

влечет

$$\psi(z)\equiv+\infty,\quad z\overline{\in}E.$$

Доказательство. Согласно критерию С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что полиномы составляют всюду плотное множество в пространстве $C_{\frac{\varphi}{1+|t|}}$, то есть доказать, что любой линейный функционал, обращающийся в нуль на многочленах, есть тождественный нуль. Пусть F—произвольный такой функционал: $F[t^k]=0$, $k=0,1,2,\cdots$. Тогда будем иметь также

$$F[(t^k - z^k)(t-z)^{-1}] = 0, \quad t \in E, \; z \overline{\in} E \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

или

$$F\left[\frac{t^k}{t-z}\right] = z^k F\left[\frac{1}{t-z}\right], \; k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Обозначая через $V(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right]$ и замечая, что согласно *общему виду* линейного функционала в $C_{\frac{\varphi}{1+|t|}}(E)$

$$F\left[\frac{t^k}{t-z}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z_n^k (1+|z_n|)}{(z_n - z)\varphi(z_n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty,$$

будем иметь

$$|V(z)| \leqslant \frac{1}{|z|^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+|z_n|)\,|a_n|}{|z_n - z|} \frac{|z_n|^k}{\varphi(z_n)}. \tag{2}$$

Обозначая через

$$c_k = \sup_{n \geqslant 1} \frac{|z_n|^k}{\varphi(z_n)}$$

и замечая, что $\frac{1+|z_n|}{|z_n - z|} \leqslant \frac{|z|}{\delta}$ при $z \in K_{r'_m, r''_m}$, из (2) получим

$$|V(z)| \leqslant \frac{c_k}{|z|^k} \frac{|z|}{\delta} \sum |a_n| \leqslant C \frac{|z|}{\delta} \frac{c_k}{|z|^k}, \quad z \in K_{r'_m, r''_m}. \tag{3}$$

Левая часть неравенства (3) не зависит от k, следовательно

$$|V(z)| \leqslant c_1 \cdot |z| \cdot \inf_k \frac{c_k}{|z|^k} = \frac{c_1 \cdot |z|}{T(|z|)}, \quad z \in K_{r'_m, r''_m}, \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

где $T(r)$ — функция Островского:

$$T(r) = \sup_k \frac{r^k}{c_k}.$$

Покажем, что

$$T(r) > \frac{1}{r} \exp p(r). \tag{5}$$

С этой целью на плоскости xoy, $x = \ln r$ рассмотрим ломаную $y = \sup_n (n \ln r - \ln c_n)$, которая представляет график функции $y = \ln T(r)$, рассматриваемой как функцию от $\ln r$. Эта ломаная подпирает график функции $y = p(r)$ (как функция от $\ln r$) и очевидно, что

$$\left|\frac{d \ln T(r)}{d \ln r} - \frac{dp(r)}{d \ln r}\right| \leqslant 1,$$

поэтому

$$\ln T(r) > p(r) - \ln r.$$

Из (4) и (5) следует оценка

$$|V(z)| \leqslant c_1 |z|^2 e^{-p(|z|)}, \quad z \in K_{r_m', r_m''}, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{6}$$

Функция

$$V(z) \equiv F\left[\frac{1}{t-z}\right] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|z_n|}{(z_n-z)\,\varphi(z_n)}$$

мероморфна во всей плоскости и множество ее полюсов включается в множество E. Покажем, что из (1) и (6) следует, что $F(z) \equiv 0$. В самом деле, в противном случае применяя формулу Иенсена к функции $V(z)$, получим

$$\int_1^r \frac{n(t)}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|V(re^{i\theta})|\,d\theta > O(1)$$

или, беря $r = r_m = \frac{1}{2}(r_m' + r_m'')$ и учитывая оценку (6), будем иметь

$$N(r_m) + 2\ln r_m - p(r_m) > O(1), \quad m = 1, 2, \cdots,$$

что противоречит условию (1) теоремы. Таким образом, $F(z) \equiv 0$, т. е. $a_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$, и следовательно функционал $F \equiv 0$, Теорема 1 доказана. Отметим следующее очевидное

Следствие. Если $n(t) \leqslant (1-\varepsilon)\,\omega(t)$, $\varepsilon > 0$, то $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \in E$, или, другими словами, система полиномов полна в $C_{\frac{\varphi}{1+|t|}}(E)$.

Следующая теорема дает некоторое представление о точности приведенного следствия.

Теорема 2. *Пусть заданная весовая функция* $\varphi(r)$ *имеет вид*

$$\varphi(r) = \exp\left[\int_1^r \frac{\omega(t)\,dt}{t} + 1\right] = \exp r^{\rho(r)}, \tag{7}$$

где $\rho(r)$ — *некоторый уточненный порядок и* $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho > 0$. *Для данного* $\varepsilon > 0$ *можно построить такое дискретное точечное множество* $E = \{z_n\}$, *функция плотности которого удовлетворяет неравенству*

$$n(r) < (1+\varepsilon)\,\omega(r), \quad r > r_0, \tag{8}$$

однако $\psi(z) < +\infty$ *во всей плоскости.*

Доказательство. Возьмем натуральное число $m > \rho$ так, чтобы

$$\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{4m} < \sqrt{1+\varepsilon}\,\frac{\pi\rho}{4m}. \tag{9}$$

На луче $\arg z = 0$ возьмем точечное множество $\{x_n\}$, $0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots$, плотность которого при показателе $r^{\rho(r)}$ равна $\frac{1}{\pi}\sqrt{1+\varepsilon} \times \operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{4m}$, т. е.

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{n_1(r)}{r^{\rho(r)}}=\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{4m},$$

где $n_1(r)$ означает число точек x_k в интервале $[0, r]$. Теперь в качестве требуемого множества E возьмем множество $\left\{\bigcup_{j=1}^{4m} x_n e^{i\frac{\pi}{2m}j}\right\}$. Функция плотности множества E вследствие условия (9) удовлетворяет неравенству

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{n(r)}{r^{\rho(r)}}=4m\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{4m}<(1+\varepsilon)\rho. \tag{10}$$

Из (7) имеем

$$\omega(r)=r\left[r^{\rho(r)}\right]'=r^{\rho(r)}\left[\rho(r)+r\rho'(r)\ln r\right]=$$

$$=\rho r^{\rho(r)}\left[\frac{\rho(r)}{\rho}+\frac{1}{\rho}r\rho'(r)\ln r\right]=\rho r^{\rho(r)}\cdot\psi(r)\ \ (\lim_{r\to+\infty}\psi(r)=1). \tag{11}$$

Из (11) и (10) следует, что плотность множества E удовлетворяет неравенству (8).

Теперь докажем, что полиномы, имеющие мажоранту (7) на E, составляют нормальное семейство на плоскости. С этой целью рассмотрим каноническую функцию $f(z)$ множества E и ее индикатор $H_f(\vartheta)$. Предполагая, что ρ—нецелое число, по формуле ([3], стр. 120) для индикатора $H_f(\vartheta)$ при $0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2m}$ будем иметь

$$H_f(\vartheta)=\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sin\pi\rho}\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{4m}\sum_{j=1}^{4m}\cos\rho\left(\frac{\pi}{2m}j-\vartheta-\pi\right)=$$

$$=\sqrt{1+\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{4m}\frac{\cos\rho\left(\vartheta-\frac{\pi}{4m}\right)}{\sin\frac{\pi\rho}{4m}}=\sqrt{1+\varepsilon}\frac{\cos\rho\left(\vartheta-\frac{\pi}{4m}\right)}{\cos\rho\frac{\pi}{4m}}. \tag{12}$$

Легко видеть, что при целом ρ это равенство также сохраняется.

Из (12) имеем, что при $0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2m}$ $H_f(\vartheta)>0$.

Учитывая симметричное расположение корней целой функции $f(z)$, будем иметь

$$H_f(\vartheta)>0,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi, \tag{13}$$

$$H_f\left(\frac{\pi}{2m}j\right)=\sqrt{1+\varepsilon},\ j=1,2,\cdots,4m.$$

Так как для любого многочлена $p(z)$ имеем $H_p(\vartheta)\equiv 0<H_f(\vartheta)$, то можно применить теорему Б. Я. Левина о представлении целой функции интерполяционным рядом Лагранжа [3]

$$p(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(z_n)f(z)}{f'(z_n)(z-z_n)}. \tag{14}$$

Далее, учитывая асимптотическое равенство [3]

$$\ln |f'(z_n)| \approx \sqrt{1+\varepsilon}\, |z_n|^{\rho(|z_n|)},$$

из (14) получим, что если $p \in \mathfrak{M}$, то

$$|p(0)| \leqslant |f(0)| \cdot \sum \frac{|p(z_n)|}{|f'(z_n)| \cdot |z_n|} < c \sum \frac{1}{|z_n|} e^{|z_n|^{\rho(|z_n|)}(1-\sqrt{1+\varepsilon})} < c_1, \tag{15}$$

где c_1 — константа, не зависящая от полинома $p \in \mathfrak{M}$.

Из (15) следует, что $\psi(0) < +\infty$. Согласно цитированному в начале заметки свойству $\psi(z)$ имеем $\psi(z) < +\infty$. Теорема 2 доказана.

В заключение этого пункта приведем одно применение теоремы 1 в вопросе квазианалитичности специальных классов бесконечно дифференцируемых функций, введенных Б. Я. Левиным*.

Пусть имеем пространство $C_\varphi(-\infty, +\infty)$. Возьмем произвольный функционал F из сопряженного пространства и рассмотрим функцию

$$f(x) = F[e^{itx}] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{d\sigma(t)}{\varphi_1(t)}, \tag{16}$$

где $\varphi_1(t) = \lim\limits_{\delta \to 0} \inf\limits_{|t-\tau|<\delta} \varphi(\tau)$.

Нетрудно проверить, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на оси $-\infty < x < +\infty$. Если теперь функционал F будет пробегать все сопряженное пространство, то формулой (16) определится некоторый класс бесконечно дифференцируемых на оси $(-\infty, +\infty)$ функций, который мы обозначим через Λ_φ. Класс Λ_φ назовем квазианалитическим, если для двух произвольных функций $f_1(x), f_2(x) \in \Lambda_\varphi$ из условий

$$f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad x_0 \in (-\infty, +\infty)$$

вытекает, что $f_1(x) \equiv f_2(x)$.

Имеет место следующая основная

Теорема (Б. Я. Левин). Класс Λ_φ будет квазианалитическим тогда и только тогда, когда полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$.

Отметим, что в этой теореме не делается никаких предположений о регулярности роста функции φ.

Беря в частности функцию φ в виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} +\infty, & n < |t| < n+1 \\ \exp p(n), & |t| = n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

где $p(r) = \int_1^r t^{-1}\, \omega(t)\, dt$, $\omega(t) \uparrow +\infty$, и замечая, что в этом случае

* Результаты Б. Я. Левина по весовым приближениям и их применениям не опубликованы. Они приведены в его спец. курсе, прочитанном им в 1957/58 уч. году в Харьковском государственном университете.

полнота полиномов в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$ эквивалентна расходимости интеграла

$$\int_1^\infty \frac{p(r)}{r^2}\,dr, \tag{17}$$

получим известную теорему Валле-Пуссена [4] о квазианалитичности класса функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \sum_0^\infty e^{-p(n)}\,[a_n \cos nx + b_n \sin nx], \quad \sum_0^\infty(|a_n| + |b_n|) < +\infty. \tag{18}$$

Предположим теперь, что интеграл (17) сходится, то есть класс (18) не является квазианалитическим, и поставим вопрос о нахождении нетривиальных квазианалитических подклассов неквазианалитического класса (18). Ответ на этот вопрос, как обычно [4], дается в терминах плотности отличных от нуля коэффициентов a_n, b_n.

Возьмем произвольную последовательность целых чисел $0 \leqslant n_1 < < n_2 < \cdots < n_k \cdots$, и рассмотрим следующий подкласс $\Lambda_\varphi(n_k)$ класса (18):

$$f(x) = \sum e^{-p(n_k)}(a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x), \qquad \sum(|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < +\infty. \tag{19}$$

Следующее утверждение является непосредственным применением следствия теоремы 1 и теоремы Б. Я. Левина.

Теорема 3. *Если функция плотности* $n_1(t)$ *множества* $\{n_k\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$n_1(t) < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\omega(t), \quad \varepsilon > 0,$$

то подкласс $\Lambda_\varphi(n_k)$ — *квазианалитический.*

Пусть теперь $\{n_k^{(\alpha)}\}$ — зависящая от параметра α возрастающая последовательность целых чисел. Обозначим через $n_\alpha(t)$ функцию плотности множества $\{n_k^{(\alpha)}\}$ и рассмотрим теоретикомножественную сумму классов $\Lambda_\varphi(n_k^{(\alpha)})$:

$$\Lambda_\varphi = \bigcup \Lambda_\varphi(n_k^{(\alpha)}).$$

Отметим, что это не линейное множество.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и для всех рассматриваемых значений параметра* α

$$n_\alpha(t) \leqslant \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\omega(t),$$

то класс Λ_φ — *квазианалитический.*

2°. **Одновременная аппроксимация на лучах и на данном дискретном множестве точек комплексной плоскости.** Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}$ полиномов $p(z)$, мажорирующихся на вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ и на данном множестве $E=\{z_n\}$ функцией $\varphi(x)$ и значениями $\varphi(|z_n|)$ соответственно, т. е.

$$|p(x)| \leqslant \varphi(x), \quad |p(z_n)| \leqslant \varphi(|z_n|). \tag{20}$$

Приведем достаточное условие для того, чтобы соответствующий функционал

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad z \neq z_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{21}$$

Мы предположим, что $\lim |z_n| = +\infty$, а плотность точек множества E, лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, будем характеризовать функцией $\nu_1(t)$ $(\nu_2(t))$—числом точек z_n, $\operatorname{Im} z_n > 0$ $(\operatorname{Im} z_n < 0)$, попадающих в область $\left|z - i\frac{t}{2}\right| < \frac{t}{2}$ $\left(\left|z + i\frac{t}{2}\right| < \frac{t}{2}\right)$, $|z| \leqslant 1$.

Теорема 5. *Предположим, что существует последовательность луночек*

$$L_{r_n', r_n''}: \left|z - i\frac{r_n''}{2}\right| < \frac{r_n''}{2}, \quad \left|z - i\frac{r_n'}{2}\right| \geqslant \frac{r_n'}{2}, \quad \inf\,(r_n'' - r_n') > \delta > 0$$

в верхней полуплоскости и такая же (но возможно другая) последовательность луночек в нижней полуплоскости, не содержащих точек множества E.

Если функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ нормально возрастающая, т. е. представляется в виде (*), то из (20) *и из условий*

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\int_1^r \frac{\nu_1(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}} p(r\sin\theta)\,\frac{d\theta}{r\sin^2\theta}\right] = -\infty, \tag{22}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\int_1^r \frac{\nu_2(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}} p(r\sin\theta)\,\frac{d\theta}{r\sin^2\theta}\right] = -\infty \tag{23}$$

следует тождество (21).

Доказательство. Согласно критерию С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi[(-\infty, +\infty) \cup E]$, т. е. надо доказать, что произвольный линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на степенях t^n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, есть тождественный нуль. Пусть F—произвольный такой функционал: $F[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Тогда, как и в предыдущем пункте, обозначая через $V(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right]$, получим

$$z^k V(z) = F\left[\frac{t^k}{t-z}\right]. \tag{24}$$

Из общего вида линейного функционала в $C_\varphi[(-\infty, +\infty)\cup E]$ имеем

$$F\left[\frac{t^k}{t-z}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^k}{t-z}\,\frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n^k}{z_n-z}\,\frac{a_n}{\varphi(z_n)},\tag{25}$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, а $\Sigma|a_n|<+\infty$. Обозначая через $c_k=\sup\dfrac{r^k}{\varphi(r)}$, из (24) и (25) получим оценку

$$|V(z)|\leqslant \text{const}\,\frac{c_k}{|z|^k\,\delta(z)},\tag{26}$$

где $\delta(z)$ — расстояние точки z до множества $(-\infty, +\infty)\cup E$.

Из (26), как в предыдущем пункте, получим

$$|V(z)|\leqslant\frac{c}{\delta(z)}\,e^{-p(|z|)}.$$

Беря теперь z на дуге $\left|z-i\dfrac{r_m'+r_m''}{2}\right|=\dfrac{r_m'+r_m''}{2}$, $|z|\geqslant 1$ и при этом замечая, что $\delta(z)\geqslant\dfrac{c}{|z|^2}$, будем иметь

$$|V(z)|\leqslant c\,|z|^3\,e^{-p(|z|)},\quad \left|z-i\,\frac{r_m'-r_m''}{2}\right|=\frac{r_m'+r_m''}{2},\ |z|\geqslant 1,\ m=1,2,\cdots.\tag{27}$$

Функция

$$V(z)=F\left[\frac{1}{t-z}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{(t-z)\,\varphi(t)}+\sum\frac{a_n}{(z_n-z)\,\varphi(z_n)}\tag{28}$$

мероморфна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ с возможными полюсами в точках $z=z_n$, $\operatorname{Im} z_n>0$. Докажем, что $V(z)\equiv 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. В самом деле, в противном случае, применяя к $V(z)$ формулу Б. Я. Левина [5, 6], будем иметь

$$\int_1^r\frac{\nu_1(t)}{t^2}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}}\ln|V(r\sin\vartheta\,e^{i\vartheta})|\,\frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta}>O(1).\tag{29}$$

Из (29) и (27), имея в виду, что

$$\int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}}\frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta}=O(1),\qquad \int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}}\ln(r^3\sin^3\vartheta)\,\frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta}=O(1),$$

получим

2°. Одновременная аппроксимация на лучах и на данном дискретном множестве точек комплексной плоскости. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}$ полиномов $p(z)$, мажорирующихся на вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ и на данном множестве $E=\{z_n\}$ функцией $\varphi(x)$ и значениями $\varphi(|z_n|)$ соответственно, т. е.

$$|p(x)| \leqslant \varphi(x), \quad |p(z_n)| \leqslant \varphi(|z_n|). \tag{20}$$

Приведем достаточное условие для того, чтобы соответствующий функционал

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad z \neq z_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{21}$$

Мы предположим, что $\lim |z_n| = +\infty$, а плотность точек множества E, лежащих в верхней (нижней) полуплоскости, будем характеризовать функцией $\nu_1(t)$ $(\nu_2(t))$—числом точек z_n, $\operatorname{Im} z_n > 0$ $(\operatorname{Im} z_n < 0)$, попадающих в область $\left|z - i\frac{t}{2}\right| \leqslant \frac{t}{2}$ $\left(\left|z + i\frac{t}{2}\right| \leqslant \frac{t}{2}\right)$, $|z| \leqslant 1$.

Теорема 5. *Предположим, что существует последовательность луночек*

$$L_{r_n', r_n}: \left|z - i\frac{r_n'}{2}\right| \leqslant \frac{r_n'}{2}, \quad \left|z - i\frac{r_n}{2}\right| \geqslant \frac{r_n}{2}, \quad \inf\,(r_n' - r_n) \geqslant \delta > 0$$

в верхней полуплоскости и такая же (но возможно другая) последовательность луночек в нижней полуплоскости, не содержащих точек множества E.

Если функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ нормально возрастающая, т. е. представляется в виде (*), *то из* (20) *и из условий*

$$\lim_{r\to+\infty} \left[\int_1^r \frac{\nu_1(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin\frac{1}{r}} p(r\sin\vartheta)\,\frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta} \right] = -\infty, \tag{22}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \left[\int_1^r \frac{\nu_2(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin\frac{1}{r}} p(r\sin\vartheta)\,\frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta} \right] = -\infty \tag{23}$$

следует тождество (21).

Доказательство. Согласно критерию С. Н. Мергеляна достаточно доказать, что полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi[(-\infty, +\infty) \cup E]$, т. е. надо доказать, что произвольный линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на степенях t^n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, есть тождественный нуль. Пусть F—произвольный такой функционал: $F[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2. \cdots$. Тогда, как и в предыдущем пункте, обозначая через $V(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right]$, получим

$$z^k V(z) = F\left[\frac{t^k}{t-z}\right]. \tag{24}$$

Из общего вида линейного функционала в $C_\varphi[(-\infty, +\infty) \cup E]$ имеем

$$F\left[\frac{t^k}{t-z}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k}{t-z} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^k}{z_n - z} \frac{a_n}{\varphi(z_n)}, \tag{25}$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, а $\Sigma|a_n| < +\infty$. Обозначая через $c_k = \sup \dfrac{r^k}{\varphi(r)}$, из (24) и (25) получим оценку

$$|V(z)| \leqslant \text{const} \frac{c_k}{|z|^k \delta(z)}, \tag{26}$$

где $\delta(z)$ — расстояние точки z до множества $(-\infty, +\infty) \cup E$.

Из (26), как в предыдущем пункте, получим

$$|V(z)| \leqslant \frac{c}{\delta(z)} e^{-p(|z|)}.$$

Беря теперь z на дуге $\left|z - i\dfrac{r'_m + r''_m}{2}\right| = \dfrac{r'_m + r''_m}{2}$, $|z| \geqslant 1$ и при этом замечая, что $\delta(z) \geqslant \dfrac{c}{|z|^2}$, будем иметь

$$|V(z)| \leqslant c|z|^3 e^{-p(|z|)}, \quad \left|z - i\frac{r'_m - r''_m}{2}\right| = \frac{r'_m + r''_m}{2}, \quad |z| \geqslant 1, \quad m = 1, 2, \cdots. \tag{27}$$

Функция

$$V(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{(t-z)\varphi(t)} + \sum \frac{a_n}{(z_n - z)\varphi(z_n)} \tag{28}$$

мероморфна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с возможными полюсами в точках $z = z_n$, $\operatorname{Im} z_n > 0$. Докажем, что $V(z) \equiv 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. В самом деле, в противном случае, применяя к $V(z)$ формулу Б. Я. Левина [5, 6], будем иметь

$$\int_1^r \frac{\nu_1(t)}{t^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin\frac{1}{r}} \ln|V(r \sin\vartheta\, e^{i\vartheta})| \frac{d\vartheta}{r \sin^2\vartheta} > O(1). \tag{29}$$

Из (29) и (27), имея в виду, что

$$\int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin\frac{1}{r}} \frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta} = O(1), \qquad \int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi - \arcsin\frac{1}{r}} \ln(r^3 \sin^3\vartheta) \frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta} = O(1),$$

получим

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\left|\int_1^r \frac{\nu_1(t)}{t^2}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{r}} p(r\sin\vartheta)\frac{d\vartheta}{r\sin^2\vartheta} > C > -\infty,\right.$$

что противоречит условию (22). Таким образом, $V(z)\equiv 0$, $\operatorname{Im} z>0$. Аналогично доказывается, что $V(z)\equiv 0$, $\operatorname{Im} z<0$. Тогда из (28) следует, что $a_n=0$, $n=1, 2,\cdots$ и $d\sigma(t)\equiv 0$, $-\infty<t<+\infty$, т. е. $F\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Известно [7], [8], что если функция $\varphi(t)=\varphi(|t|)=\exp p(t)$ — нормально возрастающая, то необходимым и достаточным условием полноты полиномов в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$ является расходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{p(r)}{1+r^2}dr$$

(достаточность этого условия следует также из теоремы 5). Отсюда следует, что если вес $\varphi(t)$ обеспечивает полноту полиномов в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$, то любая ее положительная степень $\varphi^\alpha(t)=\exp\alpha p(t)$ также обеспечивает полноту полиномов в соответствующем пространстве $C_{\varphi^\alpha}(-\infty, +\infty)$. Это означает, что на свойство полноты многочленов константа α не имеет влияния. Из теоремы 5 следует, что если к множеству $(-\infty, +\infty)$ присоединить еще дискретное множество $\{z_n\}$, то полнота полиномов в $C_{\varphi^\alpha}[(-\infty, +\infty)\cup\{z_n\}]$, вообще говоря, зависит от параметра $\alpha>0$.

Используя теорему единственности для мероморфных в угловой области функций, можно получить достаточное условие для одновременной весовой аппроксимации на лучах в комплексной области и на данном дискретном множестве точек. Мы приведем без доказательства теорему для того случая, когда аппроксимация совершается на координатных осях и на дискретном множестве $\{z_n\}$.

Теорема 6. *Пусть множество* $\{z_n\}$ *удовлетворяет условиям*

1. $\lim|z_n|=+\infty$;

2. $\inf \operatorname{Re} z_n, \inf \operatorname{Im} z_n\geqslant\delta>0$;

3. *В каждом угле* $j\frac{\pi}{2}<\arg z<(j+1)\frac{\pi}{2}$, $j=0, 1, 2, 3$ *существует последовательность четверть колец* $\dot r_{n,j}<|z|<\dot r_{n,j}$, *не содержащих точек множества* $\{z_n\}$ *и таких, что* $\inf(\dot r_{n,j}-r_{n,j})=\delta_j>0$ $(i=0, 1, 2, 3)$. *Тогда из условий*

$$\lim_{r\to+\infty}\Bigg[\sum_{\substack{1<|z_k|<r\\ j\frac{\pi}{2}<\alpha_k<(j+1)\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{1}{|z|_k^2}-\frac{|z_k|^2}{r^4}\right)|\sin 2\alpha_k|-\frac{4}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{r^4}\right)\frac{p(t)}{t^2}\,dt-$$

$$-\frac{4}{\pi r^2}\,p(r)\Bigg]=-\infty,\quad \alpha_k=\arg z_k,\ j=0,1,2,3$$

следует, что полиномы всюду плотны в $C_\varphi[(-\infty,+\infty)\cup(-i\infty,+i\infty)\cup\{z_n\}]$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Б. Я. Левину за обсуждение и ценные указания.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 28.VII.1969

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բազմանդամների կշռային լրիվության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում քննարկված է բազմանդամների լրիվության հարցը $C_\varphi(E)$ *տարածությունում, որտեղ* E*-ն կոմպլեքս հարթության* $\{z_n\}$ *կետային բազմություն է, և* $\lim|z_n|=+\infty$, *իսկ* $\varphi(z)=\varphi(|z|)$ *ֆունկցիան նորմալ աճող է, այսինքն ներկայացվում է հետևյալ տեսքով*

$$\varphi(z)=\exp p(r)=\exp\int_1^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt,\quad \omega(t)\uparrow+\infty,\ |z|=r.$$

Ապացուցվում է մի թեորեմ, որից հետևում է, որ եթե որևէ $\varepsilon>0$ *թվի համար* $\{z_n\}$ *բազմության* $n(t)$ *ֆունկցիան բավարարում է* $n(t)\leqslant(1-r)\,\omega(t)$ *պայմանին, ապա բազմանդամները ամենուրեք խիտ են* $C_\varphi(E)$*-ում։*

Բերվում է մի կիրառություն անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների մի դասի քվազիանալիտիկության հարցում։

Դիտարկված է նաև առանցքի և տված կետային բազմության վրա միաժամանակյա կշռային մոտավորության հարցը։

I. H. KCHACHATRIAN. *On the weight completness of polynoms* (summary)

The polynoms in the space $C_\varphi(E)$ are investigated. Here E is a discret set $\{z_n\}$ on the complex plain with $\lim|z_n|=+\infty$, and the function $\varphi(z)=\varphi(|z|)$ is normally increasing, that is

$$\varphi(z)=\exp p(r)=\exp\int_1^r\frac{\omega(t)}{t}\,dt,\ \omega(t)\uparrow+\infty,\ |z|=r.$$

It is proved, that if for some $\varepsilon>0$ the density function $n(t)$ of the set $\{z_n\}$ satisfies the condition

$$n(t)\leqslant(1-r)\,\omega(t),$$

then polynoms are everywhere dence in $C_\varphi(E)$.

The simultaineous approximation on the axis and on the given discret set is also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. Hall.* On polynomials bounded at an infinity of points, Uppsala, 1950.
2. *С. Н. Мергелян.* Весовые приближения многочленами, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
3. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Москва, 1956.
4. *S. Mandelbrojt.* Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Paris, 1935.
5. *Б. Я. Левин.* О функциях, голоморфных в полуплоскости, Труды Одесского державного ун-та, 3, 1941, 5—14.
6. *Б. Я. Левин* и *И. В. Островский.* О зависимости роста целой функции от расположения нулей ее производных, Сиб. мат. жур., 1, № 3, 1960, 427—45.
7. *М. М. Джрбашян.* Некоторые вопросы теории взвешенно- полиномиальных приближений в комплексной области, Мат. сб., 36, вып. 3, 1955, 353—440.
8. *А. Л. Шагинян.* О полноте семейств аналитических функций в комплексной области, Сообщения Института мат. и мех. АН АрмССР, вып. 1, 1947.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 6, 1969 Математика

В. С. АБРАМОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ КЛАССАХ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Обобщая характеристику Р. Неванлинны, М. М. Джрбашян [1] ввел следующую α-характеристику $T_\alpha(r; F)$ мероморфной функции $F(z)$ $(-1<\alpha<\infty)$

$$T_\alpha(r; F)=\frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|\,d\theta+$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^r\frac{(r-t)^\alpha}{t}\,[n(t;\infty)-n(0;\infty)]\,dt+\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\left[\ln r-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right]\ (0<r<1). \tag{0.1}$$

Здесь

$$D_{(+)}^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|=\max\{D^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|,\ 0\},$$

причем $D^{-\alpha}$ — оператор интегрирования (при $0<\alpha<\infty$) или дифференцирования (при $-1<\alpha<0$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке*; $n(t;\infty)$ — число полюсов функции $F(z)$, лежащих в круге $|z|\leqslant t$ $(0<t<1)$ и $n(0;\infty)$ — кратность полюса в точке $z=0$.

При $\alpha=0$ естественно принять $D^{-\alpha}f(t)\equiv f(t)$; при этом α-характеристика переходит в неванлинновскую функцию $T(r; F)$.

В связи с α-характеристикой М. М. Джрбашяном были введены и изучены классы мероморфных функций N_α $(-1<\alpha<\infty)$:

$$F(z)\in N_\alpha,\ \text{если}\ T_\alpha(F)=\sup_{0<r<1}\{T_\alpha(r; F)\}<+\infty. \tag{0.2}$$

При $\alpha=0$ класс N_α совпадает с известным классом N мероморфных функций с ограниченной характеристикой Р. Неванлинны [2].

В [1] показывается, что $\{N_\alpha\}$ $(-1<\alpha<\infty)$ представляет собой семейство вложенных классов, т. е. $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$, если $\alpha_1<\alpha_2$. Кроме того, установлены следующие важные теоремы.

Теорема А. Класс N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций, которые в $|z|<1$ допускают представление вида

---

* [1], стр. 567.

$$F(z)=z^{\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;\,a_\mu)}{B_\alpha(z;\,b_\nu)}\exp\left\{i\gamma+\lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+\alpha)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}. \tag{0.3}$$

Здесь

$$S_\alpha(e^{-i\theta}z)=\Gamma\,(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{0.4}$$

$B_\alpha(z;\,a_\mu)$, $B_\alpha(z;\,b_\nu)$ — сходящиеся произведения, построенные М. М. Джрбашяном*, с нулями, отличными от $z=0$, соответственно в точках $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$, пронумерованных в порядке неубывания модулей (каждый нуль или полюс повторяется в соответствующей последовательности столько раз, какова его кратность); $\psi(\theta)$ — вещественная на $[-\pi,\,\pi]$ функция с конечным полным изменением, λ — любое целое, а γ — любое вещественное число.

Теорема В. Если $F(z)\in N_\alpha$ $(0\leqslant\alpha<\infty)$ и, следовательно, имеет место представление (0.3), то почти всюду на единичной окружности $\zeta=e^{i\theta}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ существует предел

$$\lim_{r\to1-0}D^{-\alpha}\ln|F(re^{i\theta})|=\psi'(\theta)\in L\,(-\pi,\,\pi). \tag{0.5}$$

В доказательстве теоремы B существенно используется следующее граничное свойство сходящегося произведения $B_\alpha(z;\,z_k)$: если $\alpha\in[0,+\infty)$, то почти для всех $\varphi\in[-\pi,\,\pi]$**

$$\lim_{r\to1-0}D^{-\alpha}\ln|B_\alpha(re^{i\varphi};\,z_k)|=0. \tag{0.6}$$

Отметим еще, что произведения $B_\alpha(z;\,a_\mu)$ и $B_\alpha(z;\,b_\nu)$ сходятся, притом равномерно и абсолютно, тогда и только тогда, когда их нули удовлетворяют соответственно условиям

$$\sum_\mu(1-|a_\mu|)^{1+\alpha}<+\infty,\ \sum_\nu(1-|b_\nu|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{0.7}$$

так что, если функция $F(z)$ принадлежит классу N_α, то, как это следует из теоремы А, для ее нулей и полюсов выполнены условия (0.7).

Пусть теперь обратно, нули и полюсы $F(z)$ подчинены условиям (0,7). При этом будем говорить, что $F(z)$ принадлежит *классу* $\mathbf{A}_\alpha$. Для изучения строения класса $\mathbf{A}_\alpha$ с точки зрения параметрического представления входящих в него функций введем в рассмотрение следующую функцию:

$$k_\alpha(z;\,\ln F)=\ln\left\{z^{-\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;\,b_\nu)}{B_\alpha(z;\,a_\mu)}\,F(z)\right\},\ |z|<1, \tag{0.8}$$

которую назовем *аналитическим ядром логарифма* $F(z)$ *порядка* α.

* [1], стр. 622.

** В. С. Захаряном [9] это свойство распространено на случай $\alpha\in(-1,0)$.

Из (0.8) имеем представление

$$F(z) = z^{\lambda} \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} e^{k_\alpha(z; \ln F)}, \tag{0.9}$$

причем из параметрического представления (0.3) класса N_α следует, что

$$z^{\lambda} \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \in N_\alpha. \tag{0.10}$$

Кроме того, из (0.3) легко усмотреть, что если $f(z) \in N_\alpha$ и $g(z) \in N_\alpha$, то имеем также

$$f(z)\, g(z) \in N_\alpha, \ \frac{f(z)}{g(z)} \in N_\alpha. \tag{0.11}$$

Из (0.9)—(0.11) следует, что для того чтобы $F(z) \in N_\alpha$, необходимо и достаточно условие

$$\exp k_\alpha(z; \ln F) \in N_\alpha. \tag{0.12}$$

В свою очередь, согласно (0.1) и (0.2), это означает, что

$$T_\alpha(\exp k_\alpha) = \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{r^{-\alpha}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \operatorname{Re} k_\alpha(re^{i\theta}; \ln F)\, d\theta \right\} < +\infty. \tag{0.13}$$

Таким образом, аналитическое ядро логарифма $F(z)$, удовлетворяющее условию (0.13), по теореме А может быть представлено в виде

$$k_\alpha(z; \ln F) = i\gamma + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}} - 1 \right\} \times$$

$$\times\, d\psi(\theta), \ |z| < 1, \tag{0.14}$$

где $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[-\pi, \pi]$ с конечным полным изменением, λ — некоторое целое, а γ — некоторое вещественное число.

Пусть

$$k_\alpha(z; \ln F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < 1). \tag{0.15}$$

Обозначим

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\, r^k. \tag{0.16}$$

Если $F(z) \in N_\alpha$, то, как это видно из представления (0.14), функции $k_\alpha(z; \ln F)$, существует такое число $B > 0$, что

$$\|k_\alpha\|_r < \frac{B}{(1-r)^{1+\alpha}} \quad (r < 1), \tag{0.17}$$

т. е. в этом случае $\|k_\alpha\|_r$, рассматриваемая как функция от r, имеет не более чем степенной рост. Между тем, можно показать, что какова бы ни была монотонно возрастающая положительная функция $h(r)$, растущая как угодно быстро при $z \to 1-0$, существует мероморфная функция $F(z) \in \mathbf{A}_*$, для которой аналитическое ядро логарифма $F(z)$ удовлетворяет условию

$$\|k_\alpha\|_r > h(r), \quad r_0 < r < 1. \tag{0.18}$$

В самом деле, существует, очевидно, такая монотонно возрастающая числовая последовательность $\{\lambda_n\}_2^\infty$, $\lambda_n > n$, что

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lambda_n} > h\left(\frac{n}{n+1}\right). \tag{0.19}$$

Рассмотрим мероморфную функцию с аналитическим ядром логарифма, заданным лакунарным рядом

$$k_\alpha(z; \ln F) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} z\right)^{\lambda_n}, \quad |z| < 1.$$

Пусть $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогда для некоторого $k \geqslant 2$, $\frac{k-1}{k} \leqslant r \leqslant \frac{k}{k+1}$, и, согласно (0.19),

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} r\right)^{\lambda_n} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{k-1}{k}\right)^{\lambda_n} > \left(\frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k}\right)^{\lambda_n} >$$

$$> h\left(\frac{k}{k+1}\right) \geqslant h(r), \quad \frac{1}{2} \leqslant r < 1.$$

Пусть теперь задана некоторая возрастающая положительная функция $h(r)$. В связи со сказанным выше возникает вопрос, существует ли такой оператор G, с помощью которого аналитические ядра, имеющие рост $O(h(r))$, могли бы быть представлены в виде

$$k_\alpha(z; \ln F) = C + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^{-1} \left\{ \frac{2}{(1-e^{-i\theta} z)^{1+\alpha}} - 1 \right\} d\psi(\theta) \quad (|z| < 1) \tag{0.20}$$

(где по-прежнему $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[-\pi, \pi]$ конечной вариации, C — некоторая константа), так что соответствующий класс $N_{\alpha, G}$, ассоциированный с оператором G, имел бы параметрическое представление вида

$$F(z) = z^\lambda \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \exp\left\{ C + \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^{-1} \left\{ \frac{2}{(1-e^{-i\theta} z)^{1+\alpha}} - 1 \right\} d\psi(\theta) \right\} \tag{0.21}$$

и характеризовался бы, с другой стороны, также ограниченностью некоторой обобщенной характеристики $T_{\alpha, G}(r; F)$?

Положительному решению этого вопроса посвящена настоящая статья*. Кроме того, оператор G будет построен таким образом, что

---

* Как стало известно автору применением обобщенных операторов типа Римана-Лиувилля [7] М. М. Джрбашяном построена полная теория параметризации мероморфных в круге функций произвольно большого роста и с произвольным распределением их нулей и полюсов.

для класса $N_{\alpha, 0}$ $(-1 < \alpha < \infty)$ будет справедлив также аналог теоремы B; более того, аналог свойства (0.6) сходящегося произведения $B_\alpha(z; z_k)$ будет иметь место в усиленной формулировке, а именно: *всюду* на единичной окружности $\zeta = e^{i\varphi}$ при $\alpha \in (-1, +\infty)$

$$\lim_{r \to 1-0} D^{-\alpha} \operatorname{Re} G \ln B_\alpha (re^{i\varphi}; z_k) = 0, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{0.22}$$

Будет доказана также теорема о представлении общего класса $\mathbf{A}_\alpha(-1 < < \alpha < \infty)$.

§ 1. Некоторые специальные классы функций и операторы

Рассмотрим некоторый класс комплексных функций вещественного переменного, который назовем классом $\mathfrak{M}_R$.

Определение. Функция $\varphi(r) \in \mathfrak{M}_R$ в том и только в том случае, если существует конечная или счетная монотонно возрастающая последовательность чисел, зависящая от $\varphi(r)$,

$$\{r_n\}_\varphi \subset [0, R], \; r_0 = 0, \; r_n \uparrow R \quad (n \to \infty) \tag{1.1}$$

такая, что в каждом интервале (r_n, r_{n+1}) $(n = 0, 1, \cdots)$ имеет место разложение с комплексными коэффициентами

$$\varphi(r) = A_n \ln r + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k, n} r^k, \; r_n < r < r_{n+1}, \; n = 0, 1, \cdots. \tag{1.2}$$

Отметим, что если $\varphi_1(r) \in \mathfrak{M}_R$ и $\varphi_2(r) \in \mathfrak{M}_R$, то и

$$\varphi_1(r) + \varphi_2(r) \in \mathfrak{M}_R, \tag{1.3}$$

причем

$$\{r_n\}_{\varphi_1 + \varphi_2} = \{r_n\}_{\varphi_1} \cup \{r_n\}_{\varphi_2} \tag{1.4}$$

(предполагается при этом, что последовательность $\{r_n\}_{\varphi_1 + \varphi_2}$ расположена в порядке возрастания радиусов).

Пусть теперь задана некоторая последовательность *отличных от* 0 комплексных чисел

$$\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^\infty, \tag{1.5}$$

удовлетворяющих условию

$$\lim_{k \to \infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}} = 1, \tag{1.6}$$

причем $\varkappa_0$ будем предполагать *вещественным*.

Введем в рассмотрение ассоциированный с этой последовательностью оператор $\mathbf{G}_\varkappa$ $(\mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R)$, который функции $\varphi(r)$ (1.2) ставит в соответствие функцию из $\mathfrak{M}_R$, имеющую следующие разложения в интервалах (r_n, r_{n+1}), $n = 0, 1, \cdots$:

$$G_{\varkappa}\,\varphi(r)=\varkappa_0\,(A_n\ln r+a_{0,\,n})+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,\,n}\,\varkappa_k\,r^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k,\,n}\,\overline{\varkappa_k}\,r^{-k}\;(r_n<r<r_{n+1}),\tag{1.7}$$

так что $\{r_n\}_\varphi=\{r_n\}_{G_\varkappa\varphi}$.

Введенный оператор $G_\varkappa$, очевидно, аддитивен и однороден.

Числа $\varkappa_k$ будем называть *коэффициентами оператора* $G_\varkappa$.

Условимся также в следующих обозначениях. Если дана последовательность (1.5), то через $\frac{1}{\varkappa}$ будем обозначать последовательность $\left\{\frac{1}{\varkappa_k}\right\}_0^\infty$; если имеем две последовательности $\varkappa_1=\{\varkappa_k^{(1)}\}_0^\infty$ и $\varkappa_2=\{\varkappa_k^{(2)}\}_0^\infty$, то через $\varkappa_1\varkappa_2$ будем обозначать последовательность $\{\varkappa_k^{(1)}\,\varkappa_k^{(2)}\}_0^\infty$; наконец, через 1 будем обозначать стационарную последовательность $\{1, 1,\cdots \cdots 1,\cdots\}$, с которой ассоциируется тождественный оператор $G_1=I$.

Отметим, что непосредственно из определения (1.7) вытекает следующее групповое свойство. Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$—суть последовательности коэффициентов операторов $G_{\varkappa_1}$ и $G_{\varkappa_2}$, то

$$G_{\varkappa_1}G_{\varkappa_2}=G_{\varkappa_2}G_{\varkappa_1}=G_{\varkappa_1\varkappa_2},\tag{1.8}$$

и, в частности,

$$G_\varkappa\,G_{\frac{1}{\varkappa}}=G_1.\tag{1.9}$$

Рассмотрим, далее, оператор

$$G_{\varkappa,\,\alpha}=D^{-\alpha}\,\mathrm{Re}\,G_\varkappa\qquad(-1<\alpha<+\infty),\tag{1.10}$$

где $D^{-\alpha}$ — упомянутый выше оператор интегрирования $(0<\alpha<\infty)$ или дифференцирования $(-1<\alpha<0)$ в смысле Римана-Лиувилля. При этом потребуем дополнительно абсолютной сходимости ряда, составленного из коэффициентов оператора $G_\varkappa$, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\varkappa_k|<\infty.\tag{1.11}$$

Если оператор $G_{\varkappa,\,\alpha}$ применим к функции $\varphi(re^{i\theta})$ при каждом $\theta\in[-\pi,\pi]$, то наряду с записью $G_{\varkappa,\,\alpha}\varphi(re^{i\theta})$, мы будем употреблять также запись $G_{\varkappa,\,\alpha}\varphi(z)$.

Пусть $f(z)$—аналитическая в $|z|<R$ функция. Тогда, так как

$$D^{-\alpha}\left\{\frac{r^k}{\Gamma(1+k)}\right\}=\frac{r^{k+\alpha}}{\Gamma(1+k+\alpha)},\tag{1.12}$$

то, если обозначим

$$a=\left\{\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\right\}_0^\infty,\tag{1.13}$$

будем, очевидно, иметь

$$r^{-\alpha}\,D^{-\alpha}f(re^{i\varphi})=G_a f(re^{i\varphi}),\;r<1,\;-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi\tag{1.14}$$

и, следовательно, согласно (1.8) и (1.10)

$$r^{-\alpha}\, G_{\varkappa,\alpha} f(z) = \operatorname{Re} G_{\alpha\varkappa} f(z) \quad (r=|z|<1). \tag{1.15}$$

Отметим еще важную формулу, которую мы часто будем использовать. Именно, согласно лемме 9.2 [1], для любого α $(-1<\alpha<\infty)$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} \ln r = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\ln r - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}\right]. \tag{1.16}$$

Отсюда и из (1.7) следует, что

$$r^{-\alpha}\, G_{\varkappa,\alpha} \ln r = \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\ln r - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}\right]. \tag{1.17}$$

§ 2. Формулы типа Йенсена-Неванлинны

а) Введем в рассмотрение следующую аналитическую в $|z|<1$ функцию:

$$S_{\alpha\varkappa}(z) \equiv G_{\frac{1}{\alpha\varkappa}}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa_0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{\varkappa_k \Gamma(1+k)} z^k \quad (|z|<1). \tag{2.1}$$

Заметим, что согласно (1.9) и (1.10)

$$r^{-\alpha}\, G_{\varkappa,\alpha} S_{\alpha\varkappa}(re^{i\varphi}) \equiv P(\varphi;\, r) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2} \quad (r<1,\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi). \tag{2.2}$$

Пользуясь биномиальным разложением, из (2.1) имеем также

$$S_{\alpha\varkappa}(z) = G_{\frac{1}{\alpha\varkappa}}\left(\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right). \tag{2.3}$$

Пусть $f(z)$ — аналитическая в круге $|z|<R$ функция и $\rho\in(0,\, R)$. Для функции $G_{\alpha\varkappa} f(z)$ также, очевидно, аналитической в $|z|<R$, запишем формулу Шварца. Имеем

$$G_{\alpha\varkappa} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}}{1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}} \operatorname{Re} G_{\alpha\varkappa} f(\rho e^{i\theta})\, d\theta + i\,\frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)} \operatorname{Im} f(0),\ |z|<\rho. \tag{2.4}$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор $G_{\frac{1}{\alpha\varkappa}}$. Тогда, в силу (1.9), (2.1) и (1.15), получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha\varkappa}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right) \rho^{-\alpha}\, G_{\varkappa,\alpha} f(\rho e^{i\theta})\, d\theta + i \operatorname{Im} f(0),\ |z|<\rho. \tag{2.5}$$

Полученное интегральное представление назовем *формулой типа Шварца*.

б) Для любых значений параметров ρ $(0<\rho\leqslant 1)$, ζ $(0<|\zeta|\leqslant\rho)$ обозначим

$$u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z;\,\zeta) = r^{-\alpha}\, G_{\varkappa,\alpha}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) - W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{\zeta}{\rho}\right)\right\} \quad (r=|z|<\rho,\ |z|\neq|\zeta|), \tag{2.6}$$

где

$$W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\frac{\zeta}{\rho}\right)=\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^k\int\limits_0^{|\zeta|/\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^k\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}\left(\frac{z}{\rho}\right)^k\quad(|z|<\rho)\tag{2.7}$$

—аналитическая функция в круге $|z|<\rho$*.

Докажем следующие утверждения.

Лемма 1. 1°. *Функция* $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)(-1<\alpha<\infty)$ *является гармонической в круге* $|z|<|\zeta|$ *и непрерывной всюду в замкнутом круге* $|z|\leqslant\rho$ *после соответствующего доопределения ее значений по окружности* $|z|=|\zeta|$, *причем всюду в* $|z|\leqslant\rho$ *при* $0<h\leqslant\frac{|\zeta|}{\rho}\leqslant1$, $-1<\alpha<$ $<\infty$ *имеет место неравенство*

$$|u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)\,h}\left(|\varkappa_0|+3\sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|\right)\left(1-\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{\alpha+1}.\tag{2.8}$$

2°. *Для любых* $\varphi,\gamma\in[-\pi,\pi]$ *справедливы тождества*

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\rho e^{i\gamma})\equiv0,\quad|z|<\rho,\tag{2.9}$$

$$\lim_{r\to\rho-0}u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta)\equiv0,\quad0<|\zeta|<\rho.\tag{2.10}$$

3°. *При условии* $0\leqslant\alpha<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|<\frac{|\varkappa_0|}{2}$ *функция* $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)$ *является в кольце* $|\zeta|<|z|<\rho$ *субгармонической, если* $\varkappa_0>0$ *и супергармонической, если* $\varkappa_0<0$, *причем всюду в* $|z|\leqslant\rho$

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)\leqslant0,\ \text{если}\ \varkappa_0>0,$$

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)\geqslant0,\ \text{если}\ \varkappa_0<0.\tag{2.11}$$

Доказательство. 1°—2°. В соответствии с (1.7) имеем

$$G_\varkappa\ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)=\begin{cases}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\varkappa_k}{k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k, & |z|<|\zeta|\leqslant\rho,\\ \varkappa_0\ln\left(-\frac{z}{\zeta}\right)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{\varkappa}_k}{k}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k, & |z|>|\zeta|>0.\end{cases}\tag{2.12}$$

Обозначим

* Функция (2.7) введена М. М. Джрбашяном (см. [1], стр 598).

$$J_0(r;\zeta)=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<|\zeta|\\ \ln\dfrac{r}{|\zeta|}, & |\zeta|<r\leqslant\rho\end{cases};\quad J_k(r;\zeta)=\begin{cases}-\dfrac{r^k}{k\zeta^k}, & 0\leqslant r<|\zeta|\\ -\dfrac{\bar\zeta^k}{kr^k}, & |\zeta|<r<\rho\end{cases}\quad k=1,2,\cdots, \tag{2.13}$$

Тогда (2.12) принимает вид ($z=re^{i\varphi}$)

$$\operatorname{Re} G_\alpha \ln\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)=\varkappa_0 J_0(r;\zeta)+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k e^{ik\varphi}J_k(r;\zeta)\quad (|z|<\rho,\ |z|\neq|\zeta|). \tag{2.14}$$

С другой стороны, можно показать, что при $|\zeta|<r\leqslant\rho$ $(-1<\alpha<\infty)$*

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_0(r;\zeta)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_k(r;\zeta)=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\left(\frac{r}{\zeta}\right)^k\int_0^{|\zeta|/r}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\bar\zeta}{r}\right)^k\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\},\quad k=1,2,\cdots. \tag{2.15}$$

Заметив еще, что при $0\leqslant r<|\zeta|$

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_0(r;\zeta)=0,\quad r^{-\alpha}D^{-\alpha}J_k(r;\zeta)=-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\cdot\frac{r^k}{\zeta^k},\quad k=1,2,\cdots, \tag{2.16}$$

из (2.6)—(2.7), (2.14)—(1.16) после некоторых преобразований легко получим

$$u^{(\rho)}_{z,\alpha}(z;\zeta)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k\int_{|\zeta|/\rho}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+\right.\\[2ex] \qquad\left.+\left(\dfrac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\}\cos(k\varphi+\gamma_k),\quad |z|<|\zeta|\leqslant\rho,\\[2ex] -\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+\right.\\[2ex] \qquad\left.+\left(\dfrac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx-\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^k\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\,dx\right\}\cos(k\varphi+\gamma_k),\end{cases} \tag{2.17}$$

* См. [1], стр. 589—592.

$$0 < |\zeta| < |z| < \rho,$$

где $\gamma_k = \arg(\varkappa_k \bar{\zeta}^k)$, $k = 1, 2, \cdots$; $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Доопределим в соответствии с полученным разложением функцию $u^{(\rho)}_{\varkappa, \alpha}(z; \zeta)$ на окружности $|z| = |\zeta|$ следующим образом:

$$u^{(\rho)}_{\varkappa, \alpha}(|\zeta| e^{i\varphi}; \zeta) = -\frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{2k} \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}} dx \right\} \cos(k\varphi + \gamma_k). \qquad (2.18)$$

Непосредственно из определения (2.6) следует гармоничность функции $u^{(\rho)}_{\varkappa, \alpha}(z; \zeta)$ в круге $|z| < |\zeta|$. Кроме того, ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k|$, а также оценок

$$\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \leqslant \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx; \left(\frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{2k} \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \ k = 1, 2, \cdots, \qquad (2.19)$$

ряд (2.18) сходится равномерно на окружности $z = |\zeta| e^{i\varphi}$, и, следовательно, чтобы убедиться в непрерывности функции $u^{(\rho)}_{\varkappa, \alpha}(z; \zeta)$ всюду в круге $|z| \leqslant \rho$, достаточно доказать оценку (2.8) и тождество (2.10).

Заметив, что при $k > 1$

$$\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \leqslant \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \left(\frac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \qquad (2.20)$$

$$\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^k \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}} dx \leqslant \int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx,$$

а также, что при условии $0 < h \leqslant \frac{|\zeta|}{\rho} \leqslant 1$

$$\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \leqslant \frac{1}{(\alpha+1)h} \left(1 - \frac{|\zeta|}{\rho}\right)^{\alpha+1}, \qquad (2.21)$$

из (2.17)—(2.18) всюду в кольце $|\zeta| \leqslant |z| \leqslant \rho$ получим требуемую оценку (2.8). Из полученной оценки следует также, что в (2.17) возможен почленный переход к пределу при $r \to \rho - 0$*, который приводит к тождеству (2.10). Наконец, (2.9) непосредственно следует из (2.17).

3°. В кольце $|\zeta| < |z| < \rho$ рассмотрим выражение

$$\Delta u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta).$$

Из (2.17) непосредственным подсчетом находим

$$\Delta u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta) = \frac{\alpha|\zeta|}{\Gamma(1+\alpha)r^3}\left(1-\frac{|\zeta|}{r}\right)^{\alpha-1}\left[\varkappa_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k \cos k(\varphi+\gamma_k)\right],$$

и при условии $0<\alpha<\infty, \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k| < \frac{|\varkappa_0|}{2}$ всюду в кольце $|\zeta|<|z|<\rho$, очевидно, имеем

$$\Delta u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta) > 0, \text{ если } \varkappa_0>0,$$

$$\Delta u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\zeta) \leqslant 0, \text{ если } \varkappa_0<0,$$

что означает соответственно субгармоничность (при $\varkappa_0>0$) и супергармоничность (при $\varkappa_0<0$) функции $u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)$ в кольце $|\zeta|<|z|<\rho$. При этом согласно (2.18), (2.19) на окружности $|z|=|\zeta|$ имеем

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(|\zeta|e^{i\varphi};\zeta) + \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx, \text{ если } \varkappa_0>0,$$

$$u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(|\zeta|e^{i\varphi};\zeta) + \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \geqslant -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varkappa_k|}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx, \text{ если } \varkappa_0<0,$$

---

* Мы используем следующее простое предложение. Пусть имеем мажорируемый ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x, y)$ в области $a<x<b, c<y<d$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} f_k(x,y)=f_k(b,y), k=1, 2,\cdots$ равномерно по y, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(b, y)$ сходится равномерно на $[c, d]$. Тогда равномерно на $[c, d]$ $\lim\limits_{x\to b-0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(b, y)$.

откуда, ввиду (2.10), следует (2.11). Лемма, таким образом, доказана полностью.

в) Пусть $F(z)$—мероморфная в $|z|<1$ функция с нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$, отличными от $z=0$, пронумерованными так, что их модули не убывают, со следующим разложением в окрестности точки $z=0$:

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \quad (c_\lambda \neq 0), \tag{2.22}$$

причем $|\lambda|$ очевидно—кратность нуля ($\lambda>0$) или полюса ($\lambda \leqslant -1$) в точке $z=0$.

Нетрудно видеть, что функция $\ln F(re^{i\theta})$ при каждом $\theta \in [-\pi, \pi]$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$, причем

$$\{r_n\}_{\ln F} = \{|a_\mu|\} \cup \{|b_\nu|\}, \tag{2.23}$$

так как в кольцах $r_n<|z|<r_{n+1}$, $n=0, 1, \cdots$, свободных от нулей и полюсов $F(z)$ имеет место разложение $\dfrac{F'(z)}{F(z)}$ в ряд Лорана.

В [1] доказывается следующее существенное обобщение формулы Йенсена-Неванлинны для $-1<\alpha<+\infty$ $(0<\rho<1)$:

$$\ln F(z) = i \arg c_\lambda + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \lambda \ln \frac{z}{\rho} + \sum_{0<|a_\mu|<\rho} \times$$

$$\times \ln\left\{\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{a_\mu}{\rho}\right)}\right\} - \sum_{0<|b_\nu|<\rho} \ln\left\{\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{b_\nu}{\rho}\right)}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\dfrac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}} - 1\right) \{\rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})|\}\, d\theta \quad (|z|<\rho). \tag{2.24}$$

Пусть $\rho<\rho_0<1$, $[\rho, \rho_0) \cap \{r_n\}_{\ln F} = \varnothing$. Рассматривая функцию

$$f_\rho(z) = z^{-\lambda} \frac{\prod\limits_{0<|b_\nu|<\rho} \left(1-\dfrac{z}{b_\nu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{b_\nu}{\rho}\right)}}{\prod\limits_{0<|a_\mu|<\rho} \left(1-\dfrac{z}{a_\mu}\right) e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\, \frac{a_\mu}{\rho}\right)}} \cdot F(z) \tag{2.25}$$

и применяя для ее логарифма, голоморфного в круге $|z|<\rho_0$, формулу типа Шварца (2.5), мы, учитывая легко проверяемые соотношения (см. (1.17))

$$\operatorname{Im} \ln f_\rho(0) = \arg c_\lambda, \tag{2.26}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha x}\left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho}\right) \mathrm{G}_{x,\alpha} \ln(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \ln \rho - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}, \tag{2.27}$$

также тождество (2.10), получим, наряду с (2.24), следующую формулу:

$$\ln F(z) = i\arg c_\lambda + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \lambda \ln \frac{z}{\rho} + \sum_{0<|a_\mu|<\rho} \ln\left\{\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\,\frac{a_\mu}{\rho}\right)}\right\} - \sum_{0<|b_\nu|<\rho} \ln\left\{\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{-W_\alpha\left(\frac{z}{\rho};\,\frac{b_\nu}{\rho}\right)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha\varkappa}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)\rho^{-\alpha}\, \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta \quad (|z|<\rho). \qquad (2.28)$$

Далее, применяя правило Лопиталя, нетрудно вычислить, что

$$\lim_{|\zeta|\to 0}\left\{\left(\frac{r}{|\zeta|}\right)^k \int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r} (1-x)^\alpha x^{k-1}\, dx + \left(\frac{r|\zeta|}{\rho^2}\right)^k \int_{|\zeta|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\, dx -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{|\zeta|}{r}\right)^k \int_{|\zeta|/r}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}}\, dx\right\} = 0, \quad k=1,\, 2, \cdots. \qquad (2.29)$$

Кроме того, имеем

$$-\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx = \ln\frac{r}{\rho} + \int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r} \frac{(1-(1-x)^\alpha}{x}\, dx,$$

и, поскольку второе слагаемое в правой части этого равенства, очевидно, стремится к нулю при $|\zeta|\to 0$, то

$$\lim_{|\zeta|\to 0}\left[-\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx\right] = \ln\frac{r}{\rho}. \qquad (2.30)$$

Принимая во внимание (2.29) и (2.30), из (2.17) легко получим

$$\lim_{|\zeta|\to 0} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta) = \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)} \ln\frac{r}{\rho}. \qquad (2.31)$$

Теперь, если применить к обеим частям (2.28) операцию $r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ учесть (2.2) и (2.31), а также смысл λ, получим формулу $(r,\rho\,\overline{\in}\,\{r_n\}_{\ln F})$:

$$r^{-\alpha}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(re^{i\varphi}) = \sum_{0<|a_\mu|<\rho} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\, a_\mu) - \sum_{0<|b_\nu|<\rho} u^{(\rho)}_{\varkappa,\alpha}(re^{i\varphi};\, b_\nu) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P\left(\varphi-\theta;\,\frac{r}{\rho}\right)\rho^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta \qquad (2.32)$$

$$(r<\rho;\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi),$$

причем в суммах уже учтены слагаемые, соответствующие возможном нулю или полюсу в точке $z=0$.

Из сравнения (2.24) и (2.28), считая пока $\rho \overline{\in} \{r_n\}_{\ln F}$, получае следующее интегральное тождество ($-1<\alpha<\infty$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha\varkappa}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right) \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right)\times$$

$$\times D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta, \quad |z|<\rho, \tag{2.33}$$

из которого следуют формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \varkappa_s \int_{-\pi}^{\pi} e^{-is\theta} D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})| d\theta, \quad s=0,1,\cdots; 0<\rho\leqslant 1 \tag{2.34}$$

г) Лемма 2. *Функцию* $r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(z)$, $-1<\alpha<\infty$ *можно до определить в круге* $|z|<\rho$ $(0<\rho\leqslant 1)$ *так, чтобы она была непре рывна в этом круге, за исключением разве лишь точки* $z=0$.

Доказательство. Применяя к обеим частям тождества (2.33) операцию $r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ и учитывая (2.2), имеем ($\rho \overline{\in} \{r_n\}_{\ln F}$, $z=re^{i\varphi}$):

$$\int_{-\pi}^{\pi} P\left(\varphi-\theta; \frac{r}{\rho}\right) \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\left\{\frac{2}{\left((1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right\}\times$$

$$\times D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \quad (|z|<\rho). \tag{2.35}$$

Поэтому из (2.32) получаем представление

$$r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha} \ln F(z) = \frac{\lambda\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)} \ln\frac{r}{\rho} + \sum_{0<|a_\mu|<\rho} u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z; a_\mu) -$$

$$- \sum_{0<|b_\nu|<\rho} u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z; b_\nu) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\left\{\frac{2}{\left(1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)^{1+\alpha}}-1\right\} D^{-\alpha} \ln |F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \quad (|z|<\rho). \tag{2.36}$$

Интеграл в правой части полученного тождества является, очевидно гармонической функцией в круге $|z|<\rho$; суммы же $\sum_{0<|a_\mu|<\rho} u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z; a_\mu)$ $\sum_{0<|b_\nu|<\rho} u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z; b_\nu)$ по лемме 1 могут быть доопределены по непрерыв ности. Таким образом, оператор $r^{-\alpha} \mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ при любом α, $-1<\alpha<\infty$ „сглаживает“ логарифмические особенности функции $\ln F(z)$. Коэффи иенты Фурье функции $r^{-\alpha} G_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\varphi})$ могут быть вычислены по ормулам (2.34).

В силу доказанной леммы формула (2.28) без труда может быть аспространена по непрерывности и на исключительные значения $\{r_n\}_{\ln F}$. В самом деле, функция $r^{-\alpha} G_{\varkappa,\alpha} \ln F(re^{i\varphi})$ непрерывна, в частности, по r в окрестности любой точки $r_n \in \{r_n\}_{\ln F}$ и, следовательно, интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_{\varkappa\alpha}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)\rho^{-\alpha} G_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta$ является непрерывной ункцией по ρ в окрестности любой точки $r_n \in \{r_n\}_{\ln F}$. Значит обе чати тождества (2.28) непрерывны по ρ в окрестности r_n (при этом евая часть есть const (ρ)) и совпадают в этой окрестности. Отсюда ледует, что (2.28) справедливо и в самой точке $\rho = r_n \in \{r_n\}_{\ln F}$.

То же относится к формулам (2.32)—(2.34).

д) Положим в (2.28) $z=0$. Тогда, замечая, что $[\ln F(z) - \lambda \ln z]_{z=0} = \ln c_\lambda$, $S_{\varkappa\alpha}(0) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa_0}$, получим следующую формулу $(0<\rho<1)$:

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi\varkappa_0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\rho^{-\alpha} G_{\varkappa,\alpha} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \ln|c_\lambda| + \lambda\left(\ln\rho - \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right) +$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<\rho} W_\alpha\left(0; \frac{a_\mu}{\rho}\right) - \sum_{0<|b_\nu|<\rho} W_\alpha\left(0; \frac{b_\nu}{\rho}\right), \tag{2.37}$$

где согласно (2.7)

$$W_\alpha(0;\zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx.$$

§ 3. $\varkappa$, α-характеристики

Пусть $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ $(0<t<1)$—соответственно число нулей a_μ и полюсов b_ν функции $F(z)$ в круге $|z|\leqslant t$; $n(0;0)$ и $n(0;\infty)$—соответственно кратность нуля или полюса в точке $z=0$.

Отметим, что в соответствии с разложением (2.22)

$$\lambda = n(0;0) - n(0;\infty). \tag{3.1}$$

Рассмотрим функции, введенные М. М. Джрбашяном [1] $(-1<\alpha<+\infty)$:

$$N_\alpha(\rho;0) \equiv N_\alpha\left(\rho;\frac{1}{F}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{0<|a_\mu|<\rho} W_\alpha\left(0;\frac{a_\mu}{\rho}\right) +$$

$$+\frac{n(0;0)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\ln\rho - \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right], \tag{3.2}$$

$$N_\alpha(\rho;\infty)\equiv N_\alpha(\rho;F)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{0<|b_\nu|<\rho}W_\alpha\left(0;\frac{b_\nu}{\rho}\right)+$$

$$+\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\left|\ln\rho-\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}\right|, \tag{3.3}$$

а также следующие функции:

$$m_{\varkappa,\alpha}(\rho;0)\equiv m_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{-}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{3.4}$$

$$m_{\varkappa,\alpha}(\rho;\infty)\equiv m_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{3.5}$$

здесь

$$\mathbf{G}^{-}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})=\max(-\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta}),0), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})=\max(\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta}),0), \tag{3.7}$$

так что, очевидно

$$m_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)-m_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)=\frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho e^{i\theta})\,d\theta. \tag{3.8}$$

Функцию

$$T_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)=\begin{cases}m_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)+N_\alpha(\rho;F), & \varkappa_0>0\\ -m_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)+N_\alpha(\rho;F), & \varkappa_0<0\end{cases}\quad(0<\rho<1) \tag{3.9}$$

назовем $\varkappa$, *α-характеристикой.*

Из (3.1)—(3.3), (3.8) и (3.9) следует, что формула (2.37) § 2 (д
может быть записана в виде

$$T_{\varkappa,\alpha}(\rho;F)=T_{\varkappa,\alpha}\left(\rho;\frac{1}{F}\right)+\frac{\ln|c_\lambda|}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{3.10}$$

Полученное соотношение будем называть *соотношением $\varkappa$, α-равнове сия* для мероморфных функций.

С помощью $\varkappa$, α-характеристики (3.9) мы выделяем из всей сово купности мероморфных в $|z|<1$ функций те из них, для которых вы полнено условие

$$T_{\varkappa,\alpha}(F)=\sup_{0<r<1}T_{\varkappa,\alpha}(r;F)<+\infty. \tag{3.11}$$

Ниже (§ 5) будет показано, что множество таких функций, кото рое мы назовем *классом* $N_{\varkappa,\alpha}$, не зависит от конечного числа первы членов последовательности $\varkappa$, и потому, не ограничивая общности, дл $\varkappa$, α-характеристики мы можем считать выполненным условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k|<\frac{|\varkappa_0|}{2}. \tag{3.12}$$

Опираясь на лемму 1 (пункт 3°), формулу (2.32), а также соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(re^{i\varphi};\zeta)d\varphi=\begin{cases}-\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx, & r\leqslant|\zeta|\leqslant\rho\\ -\dfrac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{|\zeta|/\rho}^{|\zeta|/r}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x}\,dx, & 0<|\zeta|<r<\rho,\end{cases}\tag{3.13}$$

которое непосредственно вытекает из (2.17)—(2.18), и проводя рассуждения, совершенно аналогичные тем, которые приведены в [1] при доказательстве теоремы 9.3, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\alpha\in[0,\infty)$, *то* $\varkappa$, α*-характеристика* $T_{\varkappa,\alpha}(r;F)$ *любой мероморфной функции* $F(z)$ *не убывает на интервале* (0,1).

§ 4. Некоторые свойства произведений $B_\alpha(z;z_k)$, связанные с операторами $G_{\varkappa,\alpha}$

Прежде всего докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого сходящегося произведения*

$$B_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;z_k)}\quad(|z|<1),\ -1<\alpha<\infty)\tag{4.1}$$

равномерно всюду на $[-\pi,\pi]$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{r\to1-0}G_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(re^{i\varphi},z_k)=0,\quad \varphi\in[-\pi,\pi].\tag{4.2}$$

Доказательство. Обозначим

$$[u_{\varkappa,\alpha}^{(\rho)}(z;\zeta)]_{\rho=1}\equiv u_{\varkappa,\alpha}(z;\zeta)\quad(0<|\zeta|\leqslant1;\ |z|<1).\tag{4.3}$$

Предварительно докажем тождество ($z=re^{i\varphi}$)

$$r^{-\alpha}G_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(z;z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{\varkappa,\alpha}(z;z_k)\quad(|z|<1).\tag{4.4}$$

С этой целью заметим, что согласно оценке (2.8), ряд в правой части (4.4) мажорируется в круге $|z|<1$ числовым рядом

$$\left(\frac{3}{\Gamma(2+\alpha)|z_1|}\sum_{n=0}^{\infty}|\varkappa_n|\right)\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\quad(|z_1|<|z_2|<\cdots),\tag{4.5}$$

сходящимся ввиду сходимости произведения (4.1).

Рассмотрим круг $|z|\leqslant t$, $0<t<1$. Существует такой номер N_t, что

$$|z_k|>t,\ k>N_t.$$

Обозначим

$$a_{km}=\frac{1}{z_k^m}\int_{|z_k|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{m-1}dx+\bar z_k^m\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}}{x^{m+1}}dx,\ k,m=1,2,\cdots.\tag{4.6}$$

Тогда нетрудно видеть, что из (2.7) (при $\rho = 1$) в круге $|z| < t$ следует разложение

$$\ln\left[\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}\right] = -\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx - $$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+m)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+m)}a_{km}\,z^m, \quad k \geqslant N_t. \tag{4.7}$$

Ввиду равномерной сходимости произведения (4.1) согласно (4.7) имеем

$$\ln B_\alpha(z;\, z_k) = \sum_{k=1}^{N_t-1}\ln\left[\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\,z_k)}\right] - \sum_{k=N_t}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+m)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+m)}\left(\sum_{k=N_t}^{\infty}a_{km}\right)z^m,\ |z| \leqslant t. \tag{4.8}$$

Отсюда следует, что

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(z;\, z_k) = \sum_{k=1}^{N_t-1}u_{\varkappa,\alpha}(z;\, z_k) - \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=N_t}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{3}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varkappa_m}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\sum_{k=N_t}^{\infty}a_{km}\right)z^m,\quad |z| \leqslant t. \tag{4.9}$$

С другой стороны, из (2.6), (2.7), (2.14), (2.16) (при $\rho = 1$; $\zeta = z_k$, $k \geqslant N_t$) с учетом обозначения (4.6) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_{\varkappa,\alpha}(z;\, z_k) = \sum_{k=1}^{N_t-1}u_{\varkappa,\alpha}(z;\, z_k) - \frac{\varkappa_0}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{k=N_t}^{\infty}\int\limits_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx +$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{k=N_t}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varkappa_m}{\Gamma(1+\alpha)}a_{km}\,z^m\right),\quad |z| \leqslant 1. \tag{4.10}$$

Теперь в силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{\varkappa,\alpha}(z;\, z_k)$ из сравнения (4.9) и (4.10) следует, что тождество (4.4) справедливо в круге $|z| \leqslant t$ и, следовательно, ввиду произвольности t, $0 < t < 1$, всюду в круге $|z| < 1$.

Однако поскольку для ряда (4.4) существует мажорантный числовой ряд (4.5), в правой части (4.4) возможен почленный переход к пределу при $r \to 1-0$*, и предельное соотношение (4.2) следует из тождества (2.10) леммы 1. Тем самым теорема доказана.

---

* См. сноску на стр. 421.

Известны следующие важные свойства произведений $B_\alpha(z; z_k)$ [1]:

$$\text{а)} \qquad \lim_{r\to 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} D^{-\alpha} \ln |B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)|\, d\varphi = 0 \quad (-1<\alpha<\infty), \tag{4.11}$$

$$\text{б)} \qquad D^{-\alpha} \ln |B_\alpha(z; z_k)| \leqslant 0 \quad (|z|<1;\ 0\leqslant \alpha<\infty),$$

которые при $0\leqslant \alpha<\infty$, как показано Г. Г. Геворкяном [3], являются характерными для этих произведений. Другие характерные свойства произведений $B_\alpha(z; z_k)$, связанные с операторами $\mathrm{G}_{x,\alpha}$, выявляет следующая

Теорема 3. *Если для данного α $(-1<\alpha<\infty)$ аналитическая в круге $|z|<1$ функция $F(z)$ удовлетворяет условиям*

$$\text{а)} \qquad \lim_{r\to 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_{x,\alpha} \ln F(re^{i\varphi})\, d\varphi = 0,$$

$$\text{б)} \qquad \mathrm{G}_{x,\alpha} \ln F(z) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \text{б}') \qquad \mathrm{G}_{x,\alpha} \ln F(z) > 0, \tag{4.12}$$

то ее можно представить в виде

$$F(z) = z^\lambda B_\alpha(z; z_k) \exp\left\{ i\gamma + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} \right\}, \tag{4.13}$$

где $\lambda \geqslant 0$—целое, γ—вещественное число, $\{z_k\}$ — последовательность нулей $F(z)$, отличных от $z=0$, в круге $|z|<1$ $(|z_1|<|z_2|<\cdots)$.

Доказательство. В силу условия а) из (2.37) следует, что существует конечный предел

$$A = \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{k=1}^{n(\rho;0)-n(0;0)} \int_{|z_k|/\rho}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{\alpha+1} \sum_{k=1}^{n(r;0)-n(0;0)} \left(1-\frac{|z_k|}{r}\right)^{1+\alpha}$$

$$(\forall r,\ 0<r<1). \tag{4.14}$$

Пусть $N>0$ — произвольное целое число. Тогда при $n(r;0)-n(0;0)>N$ $(r_0<r<1)$* из (4.14) следует, что

$$\sum_{k=1}^{N} \left(1-\frac{|z_k|}{r}\right)^{1+\alpha} \leqslant A(1+\alpha).$$

Переходя здесь к пределу при $r\to 1-0$, имеем

$$\sum_{k=1}^{N} (1-|z_k|)^{1+\alpha} \leqslant A(1+\alpha),$$

и, так как N произвольно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{1+\alpha}$ сходится. Но тогда

---

* Предполагается, что множество нулей $F(z)$ бесконечно. В противном случае доказательство проводим, начиная с представления (4.15).

сходится произведение $B_\alpha(z; z_k)$ и, следовательно, справедливо представление

$$F(z) = z^\lambda B_\alpha(z; z_k)\, e^{\varphi(z)}, \tag{4.15}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — целое число, $\varphi(z)$ — аналитическая в круге $|z|<1$ функция. Из (4.15) и условия б) теоремы следует, что $(z = re^{i\varphi})$:

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(z) \leqslant \frac{\lambda x_0}{\Gamma(1+\alpha)}\,\alpha \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)} - \frac{\lambda x_0}{\Gamma(1+\alpha)}\ln r - r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{x,\alpha}\ln B_\alpha(z; z_k),$$

откуда согласно предыдущей теореме по $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_0$ такое, что при $r_0 < |z| < 1$

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(z) \leqslant \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)} + \varepsilon.$$

Но в силу гармоничности функции $\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(z)$ последнее неравенство распространяется на весь круг $|z|<1$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то всюду в $|z|<1$

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(z) \leqslant \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}. \tag{4.16}$$

С другой стороны, из (4.11) а) и (2.34) (при $s=0$) имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\mathbf{G}_{x,\alpha}\ln B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)\,d\varphi = 0. \tag{4.17}$$

Это вместе с условием а) (4.12) и представлением (4.15), в силу теоремы о среднем, дает

$$[r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(z)]_{z=0} = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(re^{i\varphi})\,d\varphi = \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Следовательно, ввиду (4.16), по принципу максимума

$$r^{-\alpha}\,\mathbf{G}_{x,\alpha}\varphi(z) \equiv \frac{\lambda x_0 \alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}. \tag{4.18}$$

Записав для $\varphi(z)$ формулу типа Шварца (2.5) и учитывая (4.18), будем иметь

$$\varphi(z) \equiv \lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)} + i\gamma, \quad \gamma = \operatorname{Im}\varphi(0). \tag{4.19}$$

Из (4.15) и (4.19) следует представление (4.13) теоремы.

Совершенно ясно, что в условиях а), б′) теорема сохраняет силу.

В связи с доказанной теоремой отметим, что при дополнительном условии $0 \leqslant \alpha < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < \frac{|x_0|}{2}$, в силу неравенств (2.11), леммы 1 и тождества (4.4), *любое* сходящееся произведение $B_\alpha(z; z_k)$

удовлетворяет условиям а)—б), если $\varkappa_0>0$, и а), б′), если $\varkappa_0<0$, и, следовательно, в этом случае эти свойства будут *характерными* для произведений $B_\alpha(z; z_k)$*.

Обратим также внимание на то, что в доказательстве мы существенно опирались на установленное выше предельное соотношение (4.2). Аналогичное свойство (0.6) произведений $B_\alpha(z; z_k)$ не могло быть эффективно использовано в доказательстве теоремы Г. Г. Геворкяна [3], так как оно имеет место лишь почти всюду.

Наконец, докажем важное свойство $\varkappa$, α-характеристики произведения $B_\alpha(z; z_k)$.

Теорема 4. *Какова бы ни была последовательность $\varkappa$, удовлетворяющая условиям (1.6), (1.11), любое сходящееся произведение $B_\alpha(z; z_k)$ принадлежит классу $N_{\varkappa,\alpha}(-1<\alpha<\infty)$, или*

$$\sup_{0<r<1} T_{\varkappa,\alpha}(r; B_\alpha)<+\infty. \tag{4.20}$$

Таким образом, если через $\mathbf{B}_\alpha$ обозначим множество всех сходящихся произведений $B_\alpha(z; z_k)$ при фиксированном α $(-1<\alpha<+\infty)$, то справедливо включение

$$\mathbf{B}_\alpha\subset\bigcap_{\varkappa} N_{\varkappa,\alpha}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Из мажорируемости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{\varkappa,\alpha}(z; z_k)$ числовым рядом (4.5) и тождества (4.4) следует, что

$$r^{-\alpha}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(z; z_k)\leqslant\frac{3\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\varkappa_n|}{\Gamma(2+\alpha)|z_1|}\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\quad(|z_1|<|z_2|<\cdots),$$

и так как $N_\alpha(r; B_\alpha)\equiv 0$, то при $\varkappa_0>0$

$$\sup_{0<r<1} T_{\varkappa,\alpha}(r; B_\alpha)=\sup_{0<r<1} m_{\varkappa,\alpha}(r; B_\alpha)=$$

$$=\sup_{0<r<1}\frac{r^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ln B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)\,d\theta<\infty.$$

Случай $\varkappa_0<0$ рассматривается аналогично.

§ 5. Параметрическое представление классов $N_{\varkappa,\alpha}$ $(-1<\alpha<\infty)$ и некоторые их свойства

Теперь мы в состоянии доказать теорему о параметрическом представлении рассматриваемых нами классов $N_{\varkappa,\alpha}$. Напомним, что через $N_{\varkappa,\alpha}$ обозначен класс функций, удовлетворяющих условию (3.11).

Теорема 5. *Класс $N_{\varkappa,\alpha}$ $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций $F(z)$, которые в круге $|z|<1$ допускают представление вида*

* Более точно, для функций вида (4.13).

$$F(z) = z^{\lambda} \frac{B_{\alpha}(z; a_{\mu})}{B_{\alpha}(z; b_{\nu})} \exp\left\{ i\gamma + \lambda\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha x}(e^{-i\theta} z)\, d\psi(\theta) \right\}, \tag{5.1}$$

где

$$S_{\alpha x}(z) = \mathrm{G}_{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{x_0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{x_k \Gamma(1+k)} z^k \ (|z|<1),$$

$B_{\alpha}(z; a_{\mu})$, $B_{\alpha}(z; b_{\nu})$ — *сходящиеся произведения вида* (4.1), $\psi(\theta)$ — *вещественная функция на* $[-\pi, \pi]$ *с конечным полным изменением*, λ — *целое*, γ — *вещественное число*.

Сформулированная теорема является полным аналогом теоремы А, причем последнюю можно рассматривать дополнением к ней при $x_k = 1$, $k = 0, 1, \cdots$. При этом теорема 5 формально переходит в теорему А, однако последовательность $x = 1$ исключена из наших рассмотрений при построении классов $N_{x, \alpha}$.

Поскольку в предыдущих параграфах были установлены все необходимые утверждения, позволяющие провести доказательство теоремы 5 в точности по той же схеме, которая была реализована в монографии [1] применительно к классам $N_{\alpha}(-1<\alpha<\infty)$, мы лишь наметим его без подробного изложения.

Предварительно доказываются следующие вспомогательные предложения*.

1°. Если $f(z) \in N_{x, \alpha}$ и $g(z) \in N_{x, \alpha}$, то также

$$f(z)\, g(z) \in N_{x, \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{f(z)}{g(z)} \in N_{x, \alpha}.$$

2°. При любом целом λ, $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$z^{\lambda} \in N_{x, \alpha}.$$

3°. Если $F(z) \in N_{x, \alpha}$ и $\{a_{\mu}\}$, $\{b_{\nu}\}$ — соответственно последовательности нулей и полюсов $F(z)$, то необходимо

$$\sum_{\mu} (1 - |a_{\mu}|)^{1+\alpha} < \infty, \quad \sum_{\nu} (1 - |b_{\nu}|)^{1+\alpha} < \infty. \tag{5.2}$$

Используя предложения 1°—2° и теорему 4, убедимся, что функция $F(z)$, допускающая представление (5.1), принадлежит классу $N_{x, \alpha}$. Затем, используя лемму 9.16 [1], формулу (2.28), а также две известные теоремы Хелли (6), с помощью тех же рассуждений, которые проведены в [1] при доказательстве теоремы 9.9, установим представление (5.1) для любой функции $F(z) \in N_{x, \alpha}$.

Кроме того, попутно показывается, что существует такая последовательность $0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_k < \cdots$, $\rho_k \uparrow 1$, зависящая от $F(z)$, что в каждой точке $\theta \in [-\pi, \pi]$, за исключением не более, чем счетно

---

* Ср. [1], стр. 637—638 и 641 (лемма 9.17).

-о множества, функция $\psi(\theta)$ определяется по $F(z)$ *единственным образом* с точностью до аддитивной постоянной по формуле

$$\psi(\theta)=\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\theta}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(\rho_k e^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{5.3}$$

Отметим еще, что из определения (1.10) оператора $\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}$ и из свойств оператора $D^{-\alpha}$ для любых α_1, α_2, $-1<\alpha_1<\alpha_2\leqslant 0$ или $0\leqslant\alpha_1<<\alpha_2<\infty$*, имеем

$$\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha_2}\ln F(z)=D^{-(\alpha_2-\alpha_1)}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha_1}\ln F(z). \tag{5.4}$$

Поэтому с помощью дословно тех же рассуждений, которые приведены в [1], стр. 610—611 и стр. 635, убедимся, что при $-1<\alpha_1<\alpha_2<\infty$

$$N_{\varkappa,\alpha_1}\subset N_{\varkappa,\alpha_2}. \tag{5.5}$$

Далее, из теорем 5 и 2 легко может быть получен аналог теоремы В. Именно, имеет место

Теорема 6. *Если $F(z)\in N_{\varkappa,\alpha}$, $\alpha\in(-1,\infty)$, то всюду равномерно на* $[-\pi,\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0}\left|\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(re^{i\varphi})-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\varphi-\theta;r)\,d\psi(\theta)\right|=0,\ \varphi\in[-\pi,\pi] \tag{5.6}$$

и, следовательно, почти всюду на $[-\pi,\pi]$ [4]

$$\lim_{r\to 1-0}\mathbf{G}_{\varkappa,\alpha}\ln F(re^{i\varphi})=\psi'(\varphi), \tag{5.7}$$

где функция $\psi(\varphi)$ с ограниченным изменением определяется формулой (5.3)**.

В заключение сделаем одно важное замечание.

Пусть $F(z)\in\mathbf{A}_\alpha$, т. е. нули $\{a_\mu\}$ и полюсы $\{b_\nu\}$ $F(z)$ удовлетворяют условиям (5.2). Тогда сходятся произведения $B_\alpha(z;a_\mu)$, $B_\alpha(z;b_\nu)$ и, следовательно, по теореме 5 функции $F(z)$ и $\exp k_\alpha(z;\ln F)$ (см. (0.8)) принадлежат или нет классу $N_{\varkappa,\alpha}$ одновременно. Другими словами, $F(z)\in N_{\varkappa,\alpha}$ в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\begin{aligned}
T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha)&=\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{+}_{\varkappa,\alpha}\ k_\alpha(re^{i\theta};\ln F)\,d\theta<+\infty,\ \text{если }\varkappa_0>0,\\
T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha)&=\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{G}^{-}_{\varkappa,\alpha}\ k_\alpha(re^{i\theta};\ln F)\,d\theta<+\infty,\ \text{если }\varkappa_0<0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

---

* См. [1], стр. 567 и 610.

** Может быть перенесен также ряд других результатов, изложенных в [1], стр. 649—660, которые мы здесь не приводим.

Пусть

$$\varkappa = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \cdots\}, \tilde{\varkappa} = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_3, \cdots\}, \varkappa_0 > 0,$$

так как согласно (3.4)

$$-m_{\varkappa, \alpha}\left(r; \frac{1}{F}\right) = m_{\tilde{\varkappa}, \alpha}\left(r; \frac{1}{F}\right),$$

то (см. (3.9))

$$T_{\varkappa, \alpha}(r; F) - T_{\tilde{\varkappa}, \alpha}(r; F) = m_{\varkappa, \alpha}(r; F) - m_{\varkappa, \alpha}\left(r; \frac{1}{F}\right) =$$

$$= \frac{r^{-\alpha}}{2\pi\varkappa_0} \int_{-\pi}^{\pi} G_{\varkappa, \alpha} \ln F(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Однако в силу условия (5.2) и (2.37) последний интеграл ограничен при $r \to 1-0$ и, следовательно,

$$N_{\varkappa, \alpha} = N_{\tilde{\varkappa}, \alpha},$$

т. е. класс $N_{\varkappa, \alpha}$ при изменении знака $\varkappa_0$ на противоположный не изменяется. Заметив это, из условия (5.8) при $\varkappa_0 > 0$ легко вывести, что если $M_n(z)$—многочлен произвольной степени n, то функции $\exp k_\alpha(z; \ln F)$ и $\exp[k_\alpha(z; \ln F) + M_n(z)]$ принадлежат или нет классу $N_{\varkappa, \alpha}$ одновременно. Это равносильно тому, что класс $N_{\varkappa, \alpha}$ не изменится, если изменить произвольное конечное множество чисел в последовательности $\varkappa$ (сохраняя лишь условия, при которых рассматривались классы $N_{\varkappa, \alpha}$: $\varkappa_k \neq 0$, $k = 0, 1, \cdots$; $\varkappa_0$ вещественно).

§ 6. Теоремы о функциях с быстро растущими аналитическими ядрами логарифмов

Вначале докажем одно общее предложение о представлении класса $\mathbf{A}_\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$.

Теорема 7. *Для любой функции $F(z) \in \mathbf{A}_\alpha$ существует такая числовая последовательность*

$$\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^\infty \left(\lim_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}} = 1,\ \sum_{k=1}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty\right),$$

что $F(z)$ принадлежит классу $N_{\varkappa, \alpha}$.

Таким образом, справедливо представление

$$\mathbf{A}_\alpha = \bigcup N_{\varkappa, \alpha}. \tag{6.1}$$

Доказательство. В самом деле, пусть

$$k_\alpha(z; \ln F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < 1). \tag{6.2}$$

Положим

$$\varkappa_k = \frac{1}{(k+1)^2 \max\left(1, |c_k| \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\right)}, \quad k=0, 1, \cdots. \qquad (6.3)$$

Тогда, очевидно, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varkappa_k < +\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} (\varkappa_k)^{\frac{1}{k}} = 1$ (так как $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leqslant 1$).

Из (6.2) и (6.3) имеем

$$|r^{-\alpha} G_{\varkappa, \alpha} k_\alpha (z; \ln F)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{c_k \cdot \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}}{\max\left(1, |c_k| \dfrac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\right)} \right| \leqslant \frac{\pi^2}{6},$$

а тогда, ввиду (5.8)

$$T_{\varkappa, \alpha}(\exp k_\alpha) < +\infty,$$

т. е. $F(z) \in N_{\varkappa, \alpha}$ ч. т. д.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос, поставленный нами в начале статьи.

Теорема 8. *Пусть на* $[0,1)$ *задана непрерывная, положительная, монотонно возрастающая функция* $h(r)$, $\lim\limits_{r\to 1-0} h(r) = +\infty$. *Каким бы ни был рост* $h(r)$ *при* $r \to 1-0$ *существует такая числовая последовательность* $\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^{\infty} \left(\lim\limits_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}} = 1, \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty \right)$, *что любая функция* $F(z) \in A_\alpha$, *удовлетворяющая условию*

$$\|k_\alpha\|_r \leqslant h(r) \quad (r_0 < r < 1), \qquad (6.4)$$

принадлежит классу $N_{\varkappa, \alpha}$.

Доказательство. Пусть функция $k_\alpha(z; \ln F)$ задана рядом (6.2). Тогда

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k \quad (r < 1). \qquad (6.5)$$

Из (6.4) и (6.5) следует, что

$$|c_k| < \frac{h(r)}{r^{k+1}}, \quad k=0, 1, \cdots; \ r_0 < r < 1, \qquad (6.6)$$

так как по условию $h(r)$—непрерывная монотонная функция на $[0,1)$, то на $[h(0), +\infty)$ существует обратная функция $h^{-1}(x)$, также непрерывная и монотонная, причем $h^{-1}(x) \uparrow 1$ $(x \to +\infty)$. Считая без ущерба для общности $h(0) < 1$, положим

$$\varkappa_k = \frac{\Gamma(1+k+\alpha)}{\Gamma(1+k)} \cdot \frac{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}}{(k+1)^3}, \quad k=0, 1, \cdots, \qquad (6.7)$$

тогда, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty}(\varkappa_k)^{\frac{1}{k}}=1$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varkappa_k<+\infty$. Кроме того, так как $h^{-1}(k)>r_0$ при $k>k_0$, то из (6.6) при $r=h^{-1}(k+1)$, $k>k_0$, следует, что

$$\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\,\varkappa_k|c_k|<\frac{1}{(k+1)^2},\ k>k_0,$$

и, следовательно

$$|r^{-\alpha}\,G_{\varkappa,\alpha}\,k_\alpha(z;\ln F)|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\varkappa_k c_k z^k\right|<B<+\infty$$

($B=\mathrm{const}$), а тогда согласно (5.8) $T_{\varkappa,\alpha}(\exp k_\alpha)<+\infty$, т. е. $F(z)\in N_{\varkappa,\alpha}$.

В связи с доказанной теоремой будем говорить, что класс $N_{\varkappa,\alpha}$ порожден функцией $h(r)$, если $\{\varkappa_k\}_0^\infty$ является последовательностью (6.7) и обозначать его также через $N_\alpha\{h(r)\}$.

Отметим, что ввиду оценки (0.17), справедливой для функций класса N_α, из теоремы 8 следует, например, строгое включение

$$N_\alpha\subset N_\alpha\{e^{\frac{1}{1-r}}\}. \tag{6.8}$$

Пусть на интервале (0,1) задана функция $g(r)$ в виде ряда

$$g(r)=\frac{1}{1-r}\sum_{k=0}^{\infty}g_k r^k,\ g_k\geqslant 0\ (0<r<1). \tag{6.9}$$

При этом $g(r)$ является, очевидно, непрерывной монотонно возрастающей функцией. Пусть еще задана функция $h(r)$, также непрерывная, положительная и монотонно возрастающая.

В условиях следующей теоремы мы можем судить о взаимоотношении классов $N_\alpha\{g(r)\}$ и $N_\alpha\{h(r)\}$

Т е о р е м а 9. *Если имеют место соотношения*

$$\frac{(k+1)^3}{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}}\leqslant g_k,\ k=0,1,\cdots, \tag{6.10}$$

то справедливо строгое включение

$$N_\alpha\{h(r)\}\subset N_\alpha\{g(r)\}. \tag{6.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(z)\in N_\alpha\{h(r)\}$. Тогда из представления (5.1) теоремы 5 следует, что

$$k_\alpha(z;\ln F)=i\gamma+\lambda\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa_0}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\varkappa_k\ \Gamma(1+k)}z^k e^{-ik\theta}\Big)\,d\psi(\theta)\ (|z|<1), \tag{6.12}$$

причем $\{\varkappa_k\}_0^\infty$ является последовательностью (6.7).

Учитывая, что $\psi(\theta)$ — функция конечной вариации на $[-\pi, \pi]$, из (6.12) и (6.7) без труда найдем, что

$$\|k_\alpha\|_r < M_F \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}} r^k, \tag{6.13}$$

где M_F — некоторая константа, зависящая от $F(z)$.

Найдем далее такое r_0, что $M_F < \frac{1}{1-r}$ при $r_0 < r < 1$; тогда из (6.13), (6.10), (6.9)

$$\|k_\alpha\|_r < g(r) \quad (r_0 < r < 1)$$

и по предыдущей теореме $F(z) \in N_\alpha[g(z)]$, т. е. включение (6.11) доказано.

Покажем, что доказанное включение строгое. С этой целью обратим внимание на то, что функция

$$F_0(z) = \exp\left\{\frac{i}{1-z}\right\} \tag{6.14}$$

не принадлежит неванлинновскому классу N функций с ограниченной характеристикой, т. е.

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left[\exp\left\{\frac{i}{1-re^{i\varphi}}\right\}\right] d\varphi = +\infty^*. \tag{6.15}$$

Отсюда следует, что

$$F_1(z) = \exp\left\{ i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3 z^k}{[h^{-1}(k+1)]^{k+1}} \right\} \overline{\in} N_\alpha\{h(r)\},$$

поскольку из (6.7) и (6.15)

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G^+_{\lambda,\alpha}\, k_\alpha(re^{i\varphi}; \ln F_1)\, d\varphi = +\infty.$$

Однако $F_1(z) \in N_\alpha\{g(r)\}$, так как ввиду (6.10) и (6.9)

$$\|k_\alpha\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3 r^k}{[g^{-1}(k+1)]^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g_k r^k \leqslant g(r) \quad (0<r<1).$$

Этим теорема полностью доказана.

Легко видеть, что если условия (6.10) выполняются, начиная лишь с некоторого места, заключение (6.11) доказанной теоремы остается в силе.

В заключение в качестве одного из приложений приведем, по-видимому, новый результат, касающийся поведения линий уровня широкого класса гармонических в круге функций.

---

* См. [5], стр. 478.

Теорема 10. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z|<1) \tag{6.16}$$

— аналитическая в круге $|z|<1$ *функция, причем* $c_k \neq 0$, $k=0, 1, \cdots$, *и сходится числовой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|c_k|}<+\infty. \tag{6.17}$$

Тогда, если

$$u(z)=\operatorname{Re} f(z), \tag{6.18}$$

то для любых $C\,(-\infty<C<+\infty)$, $\rho\,(0<\rho<1)$ *множество*

$$D=\{z: u(z)=C\} \cap \{z: \rho<|z|<1\} \tag{6.19}$$

не пусто.

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем. что $\operatorname{Re} c_0 \neq 0$ и $\operatorname{Im} c_0 \neq 0$ (в противном случае мы рассмотрели бы функцию $f(z)+1$ или $f(z)+i$). Поскольку тогда любая функция $f(z)-C$ $(-\infty<C<+\infty)$ удовлетворяет всем условиям теоремы, то достаточно доказать утверждение лишь для линии

$$u(z)=0. \tag{6.20}$$

Так как в силу сходимости ряда (6.17) $|c_k|>1$, $k>k_0$, то

$$\lim_{k\to\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}}=1.$$

Положим

$$\varkappa_0=\frac{1}{\operatorname{Re} c_0}, \quad \varkappa_k=\frac{2}{c_k}, \quad k=1, 2, \cdots. \tag{6.21}$$

Так как при этом $\lim\limits_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}}=1$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|<\infty$, то можем рассмотреть класс $N_{\varkappa,0}$. Покажем, что функция $F_0(z)$ (6.14) принадлежит $N_{\varkappa,0}$. Действительно

$$|G_{\varkappa,0}\, k_0\,(z;\, \ln F)|=|\,i\sum_{k=0}^{\infty} \varkappa_k z^k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|<+\infty,$$

и, следовательно

$$T_{\varkappa,0}(\exp k_0) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|<+\infty.$$

Учитывая теперь, что согласно (6.16) и (6.21)

$$S_{\varkappa,0}(z)=\frac{1}{\varkappa_0}+2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\varkappa_k}=\operatorname{Re} c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \equiv f(z)-i \operatorname{Im} c_0,$$

по теореме 5 имеем для $F(z)$ следующее представление:

$$F_0(z)=e^{i\gamma}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(e^{-i\theta}z)-i\,\mathrm{Im}\,c_0]\,d\psi(\theta)\right\}\quad(|z|<1).\quad(6.22)$$

Предполагая, что утверждение теоремы не имеет места, мы должны принять, что при некотором r_0 $(0<r_0<1)$ линия (6.20) не пересекается с кольцом $r_0<|z|<1$, и, следовательно, $u(z)$ в этом кольце сохраняет определенный знак. Предположим для определенности

$$u(z)>0\quad(r_0<|z|<1).\qquad(6.23)$$

Пусть далее $\psi(\theta)=\psi_1(\theta)-\psi_2(\theta)$, где ψ_j $(j=1,2)$ — неубывающие ограниченные функции на $[-\pi,\pi]$ [6].

Положим

$$F_1(z)=e^{i\gamma}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(e^{-i\theta}z)-i\,\mathrm{Im}\,c_0]\,d\psi_2(\theta)\right\},$$

$$F_2(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(e^{-i\theta}z)-i\,\mathrm{Im}\,c_0]\,d\psi_1(\theta)\right\}.$$

Тогда согласно (6.22)

$$F_0(z)=\frac{F_1(z)}{F_2(z)}\quad(|z|<1).\qquad(6.24)$$

Но ввиду (6.23), очевидно, $|F_1(z)|<1$, $|F_2(z)|<1$ в кольце $r_0<|z|<1$, а значит, по принципу максимума и всюду в круге $|z|<1$. Но тогда по теореме Р. Неванлинны [2] $F_0(z)$ принадлежит неванлинновскому классу N функций с ограниченной характеристикой. Между тем, как мы уже отмечали (6.15), $F_0(z)\overline{\in}N$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что рассматривая функцию $f_1(z)=if(z)$, получим тот же результат для функции $v(z)=\mathrm{Im}\,f(z)$.

В качестве примеров функций, относительно которых заключение теоремы справедливо, можно привести функции

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(1-z)^3}\right\},\quad \mathrm{Re}\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^3}\right\},\quad \mathrm{Re}\exp\,\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^3}\right\},\ \cdots.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну и профессору М. Г. Хапланову за внимание к данной работе и ценные замечания.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступило 12.V.1969

Վ. Ս. ԱԲՐԱՄՈՎԻՉ. Շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշ նոր դասերի մասին (*ամփոփում*)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [1] *մենագրության մեջ առաջին անգամ դիտարկվել են մերոմորֆ ֆունկցիաների* N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ *կարևոր դասերը՝*

$$F(z)\in N_\alpha,\ \text{եթե}\ \sup T_\alpha(r;F)<+\infty,\qquad(1)$$

որտեղ $T_\alpha(r;F)$*-ը* $F(z)$ *մերոմորֆ ֆունկցիայի* α *խարակտերիստիկան է և հանդիսանում* է Նևանլիննայի $T(r; F)$ խարակտերիստիկայի բնական ընդհանրացումը։ Իրականացված է այդ դասերի պարամետրիզացիան, որում էական դեր են խաղում Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ներմուծված $B_\alpha(z; z_k)$ արտադրյալները, որոնք հանդիսանում են Բլյաշկեի $B(z; z_k)$ արտադրյալները ընդորում $B_\alpha(z; z_k)|_{\alpha=0} = B(z; z_k)$։

Ներկա հոդվածում ստացված է մերոմորֆ ֆունկցիաների նոր $N_{\varkappa,\alpha}$ դասերի պարամետրիզացիան։ Այդ դասերը ասոցացվում են $\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$ պարամետրի և

$$\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty, \quad \lim_{k\to\infty} |\varkappa_k|^{\frac{1}{k}} = 1, \quad \operatorname{Im} \varkappa_0 = 0 \tag{2}$$

տեսքի հաջորդականությունների հետ և բնութագրվում են $T_{\varkappa,\alpha}(r; F)$ $\varkappa, \alpha$-խարակտերիստիկայի սահմանափակությամբ՝

$$F(z) \in N_{\varkappa,\alpha} \text{ եթե } \sup_{0<r<1} T_{\varkappa,\alpha}(r, F) < +\infty: \tag{3}$$

Այս նպատակով կառուցված են (2) տեսքի հաջորդականությունների հետ ասոցացված հատուկ օպերատորներ։

V. S. ABRAMOVICH. *On some classes of functions meromorphic in circle*
(summary)

In the M. M. Džrbašian's monograph [1] important classes of meromorphic functions N_α $(-1 < \alpha < \infty)$ were considered for the first time

$$F(z) \in N_\alpha, \text{ if } \sup_{0<r<1} \quad T_\alpha(r; F) < +\infty \tag{1}$$

$T_\alpha(r; F)$ —is the α—characteristic of the meromorphic function $F(z)$ which is natyra generalization of Nevanlinna's characteristic $T(r; F)$. In the parametric representation of these classes the products $B_\alpha(z; z_k)$ introduced by M. M. Džrbašian in the above mentioned monograph are essential. These products are natural generalization of Blashke's products $B(z; z_k)$, with

$$B_\alpha(z; z_k)/_{\alpha=0} \equiv B(z; z_k).$$

In the present article paramstrization of the new classes of meromorphic functi ons $N_{\varkappa,\alpha}$) associated with the parameter $\alpha(-1 < \alpha < \infty)$ and sequences of the form

$$\varkappa = \{\varkappa_k\}_0^\infty, \ \sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k| < \infty, \ \lim_{k\to\infty} \varkappa_k^{\frac{1}{k}} = 1, \ \operatorname{Im} \varkappa_0 = 0 \tag{2}$$

i s given. These classes possess bounded $\varkappa$, α — characteristic $T_{\varkappa,\alpha}(r; F)$

$$F(z) \in N_{\varkappa,\alpha}, \text{if} \sup_{0<r<1} T_{\varkappa,\alpha}(r; F) < +\infty. \tag{3}$$

For this purpose operators of special kind, associated with sequences (2) were constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Издательство „Наука", 1966.
2. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
3. *Г. Г. Геворкян*. О сходящихся последовательностях произведений $B_\alpha(z)$, Известия АН АрмССР, „Математика", 2, № 4, 1967, 235—249.
4. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

5. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.
6. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
7. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Известия АН СССР, серия матем., № 5, 1968, 1075—1111.
8. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб., № 8, 1969.
9. *В. С. Захарян.* О радиальных предельных значениях функции B_α, Известия АН АрмССР, „Математика", 3, №№ 4—5, 1968, 287—300.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 6, 1969 Математика

А. Г. РАММ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ОБЛАСТЯХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ*

Введение

В работах Е. Титчмарша [1] и Б. М. Левитана [2] изучены спектр и разложение по собственным функциям оператора Шредингера с растущим потенциалом, рассматриваемого во всем пространстве. В настоящей работе аналогичные вопросы изучаются в области с бесконечной границей.

Статья состоит из четырех параграфов. В § 1 с помощью метода, использованного в работах [1], [3], показано, что собственные числа и собственные функции оператора Шредингера в области могут быть получены с помощью предельного перехода из собственных чисел и собственных функций некоторой вспомогательной задачи во всем пространстве. В § 2 изучено поведение резольвентного ядра оператора Лапласа задачи Дирихле для области D при больших значениях спектрального параметра, и на этой основе изучена асимптотика при $\lambda \to +\infty$ функции $N(\lambda)$ числа собственных значений, не превосходящих λ. В § 3 сделаны замечания о сходимости разложения по собственным функциям. В § 4 результаты перенесены на случай других краевых задач.

Оказывается, что в то время как спектральный анализ оператора Шредингера с убывающим потенциалом в областях с бесконечной границей доставляет значительные трудности, преодоленные лишь в сравнительно узком классе областей [4], в случае растущего потенциала удается провести такой анализ в широком классе областей с бесконечной границей.

§ 1. Построение собственных чисел и собственных функций

Всюду в этой статье мы рассматриваем случай, когда

$$\lim_{|x|\to\infty} q(x) = +\infty,\ q(x) > 1,\ x = (x_1, x_2, x_3). \tag{1.1}$$

---

* Часть результатов этой работы анонсирована в работе [12].

)казывается, что при предположении (1) можно провести спектраль-ный анализ оператора Шредингера в гораздо более широком классе бластей с бесконечными границами, чем это было сделано в [4].

Рассмотрим задачу

$$Lu - \lambda u = (-\Delta + q(x) - \lambda) u = 0 \quad \text{в } D, \tag{1.2}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.3}$$

де $D \subset E_3$ — бесконечная область с границей Г.

Относительно области сделаем следующее предположение.

I. Поверхность Г является ляпуновской в сфере Σ_R, где $R>0$ — роизвольное число.

Здесь не требуется равномерная ограниченность постоянных Ляунова на всей поверхности, но в следующем параграфе она понадо-ится.

Предположение 1 используется, в основном, при интегрировании ю частям.

Для поверхности Г, удовлетворяющей сделанным ограничениям, потенциала, удовлетворяющего условию (1), верна

Лемма 1.1. *Оператор L_0, определенный дифференциальным ыражением (2) на множестве дважды непрерывно дифференцируе-ых функций, удовлетворяющих условию* (3) *и финитных около есконечности, является симметричным в $L_2(D)$ оператором, имею-щим нулевые индексы дефекта. Его замыкание L есть самосопря-женный оператор, совпадающий с расширением оператора L_0 по Фридрихсу.*

Доказательства требует лишь утверждение о нулевых индексах ефекта. Повторяя рассуждения леммы 1 из работы [10], мы придем заключению, что для любой функции такой, что $v(x) \subset L_2(D)$, $Lv(x) \subset L_2(D)$ выполнено включение $\nabla v \subset L_2(D)$. Требуемое утвержде-ние будет доказано, если мы установим симметричность оператора L а $D(L^*)$, что эквивалентно соотношению

$$\varliminf_{r \to \infty} \int\limits_{|s|=r,\, s \subset D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0 \tag{1.4}$$

для любых двух функций u, v из $D(L^*)$. Но если $u \subset D(L^*)$, то $u \subset L_2(D)$, $Lu \subset L_2(D)$, следовательно, в силу сказанного выше, $\nabla u \subset$ $\subset L_2(D)$. Отсюда вытекает соотношение (4). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Спектр оператора L дискретен.*

Доказательство. В силу известной леммы Реллиха ([5], стр. 622) достаточно проверить, что оператор вложения $W_{H_L \to L_2(D)}$ вполне непрерывен. Здесь H_L — пространство, получающееся попол-нением множества $D(L)$ в метрике $\|u\|^2_{H_L} = \int\limits_D [|\nabla u|^2 + q(x)|u|^2]\, dx$. Рассмотрим единичную сферу в H_L. Это множество компактно в $L_2(K_R)$ при любом R. Через K_R обозначена часть шара $|x| \leqslant R$, лежащая в D. Выберем диагональным процессом последовательность $\{u_n\}$, сходящуюся в $L_2(K_R)$ при любом R. Покажем, что эта последовательность сходится в $L_2(D)$. Имеем

$$\|u_n - u_m\|_{L_2(D)} \leqslant \|u_n - u_m\|_{L_2(K_R)} + \|u_n\|_{L_2(D/K_R)} + \|u_m\|_{L_2(D/K_R)}. \quad (1.5)$$

Далее

$$\|u_n\|^2_{L_2(D/K_R)} = \int\limits_{|x|>R,\, x\subset D} |u_n|^2\, dx \leqslant \frac{1}{\min\limits_{|x|>R} q(x)} \int\limits_{|x|>R} q(x)|u_n|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\min\limits_{|x|>R} q(x)} \underset{R\to\infty}{\to} 0. \quad (1.6)$$

Выберем R достаточно большим и зафиксируем его.

После этого выберем n, m достаточно большими. Тогда, в силу сходимости последовательности $\{u_n\}$ в $L_2(K_R)$ и формулы (6), мы убедимся в том, что правая часть равенства (5) сделается сколь угодно малой. Лемма доказана.

Обозначим через λ_n, $\psi_n(x)$ соответственно собственные значения и собственные функции оператора L. Покажем, что они могут быть получены с помощью предельного перехода из следующей вспомогательной задачи для всего пространства:

$$(L_a - \lambda)\, u \equiv (-\Delta + p(x) + a(x) - \lambda)\, u_a = 0 \text{ в } E_3, \quad (1.7)$$

где

$$a(x) = \begin{cases} 0 & x \subset D \\ a & x \subset \Omega, \end{cases} \quad a = \text{const} > 0, \quad \Omega = E_3/D, \quad (1.8)$$

$$p(x) = \begin{cases} q(x) & x \subset D \\ f(r) & x \subset \Omega, \end{cases} \quad f(r) = \max_{|x|=r,\, x\subset D} |q(x)|. \quad (1.9)$$

Определение функции $p(x)$ и условие (1) влечет за собой дискретность спектра оператора (7). Обозначим его собственные числа через $\lambda_n(a)$, а соответствующие собственные функции — через $\psi_{n,a}(x)$. Если устремить $a \to \infty$, то следует ожидать, что существуют

$$\lim_{a\to\infty} \lambda_n(a) = \lambda_{n,\infty}, \quad (1.10)$$

$$\lim_{a\to\infty} \psi_{n,a}(x) = \begin{cases} \psi_{n,\infty}(x), & x \subset D \\ 0, & x \subset \Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

и, кроме того,

$$\psi_{n,\infty}|_{x\subset\Gamma} = 0. \quad (1.12)$$

Мы покажем, что $\psi_{n,\infty}(x) = \psi_n(x)$, $\lambda_{n,\infty} = \lambda_n$.

Поскольку $D[L_a] \supset D[L]$, причем $(L_a u, u) = (Lu, u)$, если $u \subset D[L]$, то из вариационного принципа вытекает, что при возрастании a числа $\lambda_n(a)$ возрастают, причем

$$\lambda_n(a) \leqslant \lambda_n. \quad (1.13)$$

Поэтому существует предел (10). Покажем, что существует предел (11), и что числа $\lambda_{n,\infty}$, $\psi_{n,\infty}(x)$ являются собственными числами и собственными функциями задачи (2)—(3). Для функции $\psi_{n,a}(x)$ верна формула

$$\int_{E_3} |\nabla\psi_{n,a}(x)|^2\,dx + \int_D q(x)|\psi_{n,a}(x)|^2\,dx + \int_\Omega f(r)\,|\psi_{n,a}(x)|^2\,dx +$$

$$+ a\int_\Omega |\psi_{n,a}(x)|^2\,dx = \lambda_n(a). \qquad (1.14)$$

Из этой формулы, неравенства (13) и компактности оператора вложения $W(H_L \to L_2(E_3))$ следует, что существует предел в смысле сходимости в $L_2(E_3)$

$$\lim_{a\to\infty} \psi_{n,a}(x) = \psi_{n,\infty}(x), \qquad (1.15)$$

где a пробегает некоторую последовательность значений. Возможно, что у последовательности $\{\psi_{n,a}(x)\}$ имеется несколько предельных точек. Любую из них мы обозначим через $\psi_{n,\infty}(x)$. Важно заметить, что этих предельных точек может быть лишь конечное число (ввиду компактности вложения $W_{H_L\to L_2(D)}$), и все они являются собственными функциями задачи (2)—(3). Докажем последнее. Из формул (13), (14) получаем

$$\int_\Omega |\psi_{n,a}(x)|^2\,dx < \frac{\lambda_n}{a}\cdot \qquad (1.16)$$

Отсюда следует, что

$$\int |\psi_{n,\infty}(x)|^2\,dx = 0 \qquad (1.17)$$

для любой предельной точки последовательности $\{\psi_{n,a}(x)\}$. Как обычно ([1], стр. 397) из соотношений (10), (15) и уравнения

$$(-\Delta + p(x) + a(x) - \lambda_{n,a})\,\psi_{n,a} = 0 \text{ в } E_3 \qquad (1.18)$$

следует, что

$$(-\Delta + q(x) - \lambda_{n,\infty})\,\psi_{n,\infty} = 0 \text{ в } D. \qquad (1.19)$$

В любой ограниченной подобласти $\widetilde{D}$ области D имеет место соотношение (15) в смысле сходимости в $W_2^2(\widetilde{D})$. Это следует из неравенства

$$\|u\|_{W_2^2(\widetilde{D})} < C(\widetilde{D}, \widetilde{D}_1)\|\Delta u\|_{L_2(\widetilde{D}_1)}, \quad \widetilde{D}\subset\widetilde{D}_1. \qquad (1.20)$$

Осталось проверить, что функция $\psi_{n,\infty}(x)$ удовлетворяет условию (3). Из формулы (14) и сказанного выше следует неравенство

$$\int\limits_{E_3} |\nabla \psi_{n,\infty}|^2 \, dx < \lambda_n. \tag{1.21}$$

Отсюда, из формулы (17) и теорем вложения вытекает граничное условие (3), понимаемое в смысле

$$\lim_{\tilde{\Gamma} \to \Gamma} \int\limits_{\tilde{\Gamma}} |\psi_{n,\infty}(s)|^2 \, ds = 0, \tag{1.22}$$

где $\tilde{\Gamma}$ — произвольный кусок гладкой поверхности $\tilde{\Gamma}$, приближающийся к поверхности Γ. Осталось немногое добавить, чтобы доказать теорему.

Теорема 1.1. *Пусть потенциал $q(x)$ и область D удовлетворяют наложенным в начале § 1 ограничениям. Тогда задача (2)—(3) определяет самосопряженный в $L_2(D)$ оператор L с дискретным спектром, имеющим точку сгущения лишь на бесконечности. Все собственные числа и собственные функции оператора L могут быть получены с помощью предельного перехода (10)—(11) из собственных чисел и собственных функций вспомогательной задачи (7) для всего пространства.*

Доказательство. Выше было доказано, что числа $\lambda_{n,\infty}$ и функции $\psi_{n,\infty}(x)$ являются собственными числами и собственными функциями оператора L. Поэтому достаточно доказать, что все собственные числа и собственные функции оператора L могут быть получены из формул (10)—(11). Для этого достаточно установить полноту системы функций $\{\psi_{n,\infty}(x)\}$ в $L_2(D)$. Пусть $g(x)$—произвольная гладкая финитная в области D функция.

В силу равенства Парсеваля

$$\|g\|^2_{L_2(D)} = \sum_{n=1}^{\infty} |(g, \psi_{n,a})|^2. \tag{1.23}$$

Переходя к пределу при $a \to \infty$ в первых N слагаемых равенства (23) и используя оценку

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |(g, \psi_{n,a})|^2 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|(Lg, \psi_{n,a})|^2}{\lambda^2_{n,a}} \leqslant \frac{\|Lg\|_{L_2(D)}}{\lambda^2_{N,a}} \underset{N\to\infty}{\to} 0, \tag{1.24}$$

равномерную по $a > 1$, мы получаем равенство

$$\|g\|^2_{L_2(D)} = \sum_{n=1}^{\infty} |(g, \psi_{n,\infty})|^2 \tag{1.25}$$

для любой $g \subset D(L)$. Поскольку множество $D(L)$ плотно в $L_2(D)$ равенство (25) имеет место для любого $g \subset L_2(D)$. Приведенное рассуждение аналогично изложенному в [1] (стр. 129). Теорема 1 доказана.

§ 2. Асимптотика собственных чисел

Обозначим через $N(\lambda)$ число собственных значений задачи (1.2)—(1.3), не превосходящих λ. Поставим задачу о нахождении асимптотического поведения функции $N(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$. Эвристический метод получения результата заключается в следующем. Асимптотика функции $N_a(\lambda)$ для задачи (7) во всем пространстве известна [1], [2]:

$$N_a(\lambda)\sim\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{a(x)+p(x)<\lambda}(\lambda-p(x)-a(x))^{3/2}\,dx,\quad \lambda\to\infty. \tag{2.1}$$

При $a=\infty$ формально получаем

$$N(\lambda)\sim\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\{x;\,x\subset D,\,q(x)<\lambda\}}[\lambda-q(x)]^{3/2}\,dx,\quad \lambda\to\infty. \tag{2.2}$$

Строгое оправдание приведенных соображений, по-видимому, не представляется возможным. Поэтому мы используем схему рассуждений, развитую Е. Титчмаршем [1] и Б. М. Левитаном [2] для случая $D=E_3$. Близким вопросам для случая $D=E_3$ посвящены работы [6], [7].

Сделаем нужные для дальнейшего предположения относительно области D. Будем предполагать выполненными ограничение 1 из § 1 и следующие ограничения:

II. Поверхность Γ — ляпуновская. Постоянные Ляпунова равномерно ограничены, когда центр сферы Ляпунова пробегает всю поверхность Γ.

III. $$\sup_{s_0\subset\Gamma}\operatorname{mes}\{s:\ s\subset\Gamma,\ \delta\leqslant R\leqslant|s-s_0|\leqslant R+1\}<Ce^{aR}, \tag{2.3}$$

где $a>0$, $c>0$, $R>0$ — произвольные постоянные, $\delta>0$ — радиус сферы Ляпунова для поверхности Γ.

IV. $$\operatorname{mes}\{x:\ x\subset D,\ |x|=r,\ \rho(x,\Gamma)\leqslant\varepsilon\}\leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon\operatorname{mes}\{x:\ x\subset D,\ |x|=r,\ \rho(x,\Gamma)\geqslant\varepsilon\}\ \text{для почти всех}\ r, \tag{2.3'}$$

где C — абсолютная постоянная, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ — достаточно мало, ε_0 — фиксированное число, $\rho(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ.

Условия III, IV представляются мало стеснительными. Из приводимого ниже доказательства лемм 1—3 станет ясно каким образом они используются.

Предварительно следует изучить свойства функции Грина оператора Лапласа в области D

$$(-\Delta+\mu^2)\,G(x,y,\mu)=\delta(x-y),\quad \mu>0, \tag{2.4}$$

$$G(x,y,\mu)|_{x\subset\Gamma}=0. \tag{2.5}$$

Из принципа максимума вытекает оценка

$$0\leqslant G(x,y,\mu)\leqslant\frac{e^{-\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|},\quad x,y\subset D+\Gamma. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения* I, II, III *относительно области* D. *Тогда имеет место оценка*

$$G(x, y, \mu) = \frac{e^{-\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|}(1+o(1)), \quad \mu \to +\infty, \tag{2.7}$$

где оценка выполняется равномерно относительно x *и* y, *меняющихся в любой строго внутренней подобласти области* D, *причем* $|x-y| \leqslant \frac{1}{2}\max[\rho(y, \Gamma), \rho(x, \Gamma)]$, *где* $\rho(y, \Gamma)$*—расстояние от точки* y *до границы* Γ.

Доказательство. Существование функции Грина доказывается точно так же, как это сделано в работах [1], [4].

Рассмотрим тождество

$$G(x, y, \mu) = \frac{e^{-\mu|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \int_\Gamma \frac{e^{-\mu|x-s|}}{4\pi|x-s|}\frac{\partial G(s, y, \mu)}{\partial n}ds. \tag{2.8}$$

Функция

$$b(s, y, \mu) \equiv \frac{\partial G(s, y, \mu)}{\partial n} \tag{2.9}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{2}I + T_\mu\right)b = \frac{b}{2} + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_{s_0}}\frac{e^{-\mu|s-s_0|}}{4\pi|s-s_0|}b(s)ds = \frac{\partial}{\partial n_{s_0}}\frac{e^{-\mu|s_0-y|}}{4\pi|s_0-y|}. \tag{2.10}$$

Будем рассматривать точку $y \subset D$, $\rho(y, \Gamma) > 0$ как параметр, а уравнение (10)—как уравнение в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций. Проверим, что при $\mu \to \infty$ норма оператора T_μ в $C(\Gamma)$ стремится к нулю. Имеем

$$\sup_{\|u\|_{C(\Gamma)} \leqslant 1}\max_{s_0 \subset \Gamma}|T_\mu u| \leqslant \max_{s_0 \subset \Gamma}\int_\Gamma\left|\frac{\partial}{\partial n_{s_0}}\frac{e^{-\mu|s_0-s|}}{4\pi|s_0-s|}\right|ds \leqslant \max_{s_0 \subset \Gamma}\int_{|s-s_0|<\delta}\left|\frac{\partial}{\partial n_{s_0}} \times \right.$$

$$\left.\times\frac{e^{-\mu|s_0-s|}}{4\pi|s_0-s|}\right|ds + \max_{s_0 \subset \Gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\delta+n \leqslant |s-s_0| \leqslant \delta+n+1}\left|\frac{\partial}{\partial n_{s_0}}\frac{e^{-\mu|s_0-s|}}{4\pi|s_0-s|}\right|ds = J_1 + J_2. \tag{2.11}$$

Оценим J_2 с помощью условия III

$$J_2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}C_\delta\int_{\delta+n \leqslant |s-s_0| \leqslant \delta+n+1}e^{-\mu(\delta+n)}ds \leqslant$$

$$\leqslant C_\delta\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\mu(\delta+n)}\operatorname{mes}\{s: s \subset \Gamma, \delta+n \leqslant |s-s_0| \leqslant \delta+n+1\} \leqslant$$

$$\leqslant C_\delta e^{-\mu\delta+a\delta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(\mu-a)n}. \tag{2.12}$$

Отсюда следует, что при $\mu \to \infty$

$$J_2 = O(e^{-\mu\delta}). \tag{2.13}$$

Оценим J_1

$$J_1 \leqslant \max_{s_0 \subset \Gamma} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|s-s_0|<\delta} \left| \mu \frac{e^{-\mu|s-s_0|}}{|s-s_0|} + \frac{e^{-\mu|s-s_0|}}{|s-s_0|^2} \right| |\cos(n_{s_0}, r_{ss_0})| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s_0 \subset \Gamma} C \int\limits_0^\delta \left(\mu e^{-\mu r} + \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) r^\alpha \, dr \leqslant \frac{C}{\mu^\alpha}, \quad \mu \to \infty, \tag{2.14}$$

где $0 < \alpha < 1$ — показатель Ляпунова, участвующий в оценке

$$|\cos(n_{s_0}, r_{ss_0})| \leqslant C r^\alpha_{ss_0}. \tag{2.15}$$

Таким образом доказано, что

$$\|T_\mu\| < \frac{C}{\mu^\alpha}, \quad \mu \to \infty. \tag{2.16}$$

Следовательно, уравнение (10) однозначно разрешимо методом итераций при достаточно большом μ. Поэтому

$$\max_{s \subset \Gamma} |b(s, y, \mu)| \leqslant C \max_{s \subset \Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{-\mu|s-y|}}{4\pi|s-y|} \right| \leqslant \frac{C\mu e^{-\mu\rho(y,\Gamma)}}{\min[\rho(y,\Gamma), \rho^2(y,\Gamma)]}. \tag{2.17}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\rho(y, \Gamma) \geqslant \rho(x, \Gamma)$.

Из соотношения (8) следует

$$4\pi G(x, y, \mu) e^{\mu|x-y|} \cdot |x-y| = 1 + \int\limits_\Gamma \frac{|x-y|}{|x-s|} e^{\mu(|x-y|-|x-s|)} b(s, y, \mu) \, ds = 1 + J. \tag{2.18}$$

Используя оценки (16), (17), получаем

$$J \leqslant \frac{C\mu|x-y|}{\min[\rho(y,\Gamma), \rho^2(y,\Gamma)]} \int\limits_\Gamma \frac{e^{-\mu|x-s|+\mu|x-y|-\mu\rho(y,\Gamma)}}{|x-s|} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\mu e^{-\frac{\mu}{2}\rho(y,\Gamma)} |x-y|}{\min[\rho^2(y,\Gamma), \rho^3(y,\Gamma)]} \int\limits_\Gamma e^{-\mu|x-s|} \, ds. \tag{2.19}$$

Здесь мы использовали неравенства

$$|x-y| \leqslant \frac{\rho(y,\Gamma)}{2}; \quad \frac{\rho(y,\Gamma)}{2} \leqslant \rho(x,\Gamma) \leqslant \rho(y,\Gamma). \tag{2.20}$$

Пусть точка $s_0 \subset \Gamma$ такова, что $|x-s_0| = \rho(x, \Gamma)$. Тогда

$$\int\limits_\Gamma e^{-\mu|x-s|} ds \leqslant \int\limits_{|s-s_0|<\rho(y,\Gamma)} e^{-\mu|x-s|} ds + \int\limits_{|s-s_0|>\rho(y,\Gamma)} e^{-\mu|x-s|} ds = J_1 + J_2. \tag{2.21}$$

Чтобы оценить J_1 примем во внимание неравенства

$$\frac{|x-s|}{|s-s_0|} > \frac{|x-s_0|}{|s-s_0|} > \frac{\rho(y,\Gamma)}{2\rho(y,\Gamma)} > \frac{1}{2} \text{ при } |s-s_0| \leqslant \rho(y,\Gamma). \tag{2.22}$$

Поэтому

$$J_1 \leqslant \int\limits_{|s-s_0|<\delta} e^{-\mu|x-s|}ds + \int\limits_{\delta<|s-s_0|<\rho(y,\Gamma)} e^{-\mu|s-s_0|\cdot\frac{|x-s|}{|s-s_0|}}ds \leqslant C_\delta e^{-\mu\rho(x,\Gamma)} +$$

$$+ \int\limits_{\delta<|s_0-s|<\rho(y,\Gamma)} e^{-\frac{\mu}{2}|s-s_0|}ds \leqslant C_\delta e^{-\frac{\mu}{2}\rho(y,\Gamma)} + C_\delta e^{-\frac{\mu\delta}{2}}. \tag{2.23}$$

Так как $|x-s| \geqslant |s-s_0| - |x-s_0|$, то

$$J_2 \leqslant e^{\mu|x-s_0|} \int\limits_{|s-s_0|\geqslant\rho(y,\Gamma)} e^{-\mu|s-s_0|}ds \leqslant Ce^{\mu\rho(x,\Gamma)-\mu\rho(y,\Gamma)} \leqslant C. \tag{2.24}$$

Оценки (19), (23), (24) приводят к неравенству

$$J \leqslant \frac{C\mu e^{-\frac{\mu}{2}\rho(y,\Gamma)}}{\min[\rho(y,\Gamma), \rho^2(y,\Gamma)]}. \tag{2.25}$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим через D_ε множество точек $y \subset D$ таких, что

$$\rho(y,\Gamma) \geqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.26}$$

Через Δ_ε обозначим множество точек D/D_ε.

Лемма 2.2. *В условиях леммы 1 равномерно относительно $y \subset D_\varepsilon$ имеет место соотношение*

$$\lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_D G^2(x,y,\varkappa)\,dx = \frac{1}{8\pi}, \tag{2.27}$$

где

$$\varkappa \equiv \sqrt{\mu^2 + q(y)}, \tag{2.28}$$

а относительно $q(y)$ предполагается выполненным условие (1.1).

Доказательство. Если в оценке (25) заменить μ на $\varkappa$ и воспользоваться условием (26), то получим

$$J \leqslant C\frac{\varkappa e^{-\frac{\varepsilon\varkappa}{2}}}{\min[\varepsilon, \varepsilon^2]} \underset{\mu\to\infty}{\to} 0. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_{|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}} G^2(x,y,\varkappa)\,dx = \lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_{|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}} \frac{e^{-2\varkappa|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2}(1+o(1))\,dx =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty} \frac{\varkappa}{16\pi^2} \int\limits_{|z|<\frac{\varepsilon}{2}} \frac{e^{-2\varkappa|z|}}{|z|^2}\, dz = \lim_{\mu\to\infty} \varkappa\, \frac{1-e^{-\varepsilon\varkappa}}{8\pi\varkappa} = \frac{1}{8\pi}. \tag{2.30}$$

лее

$$\lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dx = \lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_{|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}} G^2(x, y, \varkappa)\, dx +$$

$$+ \lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_{|x-y|\geq\frac{\varepsilon}{2}} G^2(x, y, \varkappa)\, dx = \frac{1}{8\pi} + I. \tag{2.31}$$

спользуя оценку (6), получаем

$$0 \leqslant I \leqslant \lim_{\mu\to\infty} \varkappa \int\limits_{|x-y|\geq\frac{\varepsilon}{2}} \frac{e^{-2\varkappa|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2}\, dx \leqslant \lim_{\mu\to\infty} Ce^{-\varkappa\varepsilon} = 0. \tag{2.32}$$

з формул (31), (32) вытекает утверждение (27) леммы 2.

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия* I, II, III, IV и, кроме ого

$$\max_{|y|=r,\ y\subset D} q(y) \leqslant \gamma \min_{|y|=r,\ y\subset D} q(y) \equiv \gamma \check{q}(r), \tag{2.33}$$

е постоянная $\gamma>1$ *не зависит от* r. *Тогда при* $\mu\to\infty$

$$\int\limits_D\int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dxdy \sim \frac{1}{8\pi}\int\limits_D \frac{dy}{\varkappa}. \tag{2.34}$$

Доказательство. Составим дробь

$$\frac{\int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dxdy}{\frac{1}{8\pi}\int\limits_D \frac{dy}{\varkappa}} = \frac{\int\limits_{D_\varepsilon} dy \int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dx + \int\limits_{\Delta_\varepsilon} dy \int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dx}{\frac{1}{8\pi}\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{dy}{\varkappa} + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{dy}{\varkappa}}. \tag{2.35}$$

силу леммы 2

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\int\limits_{D_\varepsilon} dy \int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dx}{\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{dy}{8\pi\varkappa}} = 1. \tag{2.36}$$

Поэтому для доказательства леммы 3 достаточно проверить, что по любому малому числу $\omega>0$ можно найти $\varepsilon>0$ сразу для всех μ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\int\limits_{\Delta_\varepsilon} dy \int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dx}{\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{dy}{8\pi\varkappa}} < \omega, \tag{2.37}$$

$$\frac{\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{dy}{8\pi\varkappa}}{\int\limits_{D_\varepsilon} \frac{dy}{8\pi\varkappa}} < \omega. \tag{2.38}$$

Из оценки

$$\int\limits_D G^2(x, y, \varkappa)\, dx \leqslant \int\limits_D \frac{e^{-2\varkappa|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2} dx \leqslant \frac{c}{\varkappa} \tag{2.39}$$

вытекает, что из неравенства (38) следует соотношение (37). Докаже неравенство (38). Обозначим часть сферы Σ_r радиуса r, лежащую Δ_ε, через $\sigma_\varepsilon(r)$, лежащую в D_ε — через $\Sigma_\varepsilon(r)$. Имеем

$$\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{dy}{\varkappa} = \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{\sigma_\varepsilon(r)} \frac{d\sigma}{\sqrt{\mu^2+q(y)}} \leqslant \int\limits_0^\infty dr \frac{\operatorname{mes}\sigma_\varepsilon(r)}{\sqrt{\mu^2+\overset{\vee}{q}(r)}} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{dr \operatorname{mes}\Sigma_\varepsilon(r)}{\sqrt{\mu^2+\overset{\vee}{q}(r)}} \leqslant C\varepsilon \int\limits_0^\infty dr \int\limits_{\Sigma_\varepsilon(r)} \frac{d\Sigma}{\sqrt{\mu^2+\frac{q(y)}{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon\sqrt{\gamma} \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{\mu^2\gamma+q(y)}} \leqslant C\varepsilon\sqrt{\gamma} \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{\mu^2+q(y)}}. \tag{2.40}$$

Здесь было использовано неравенство (33) и учтено, что $\gamma>1$. Кроме того, было использовано неравенство

$$\operatorname{mes}\sigma_\varepsilon(r) \leqslant C\varepsilon \operatorname{mes}\Sigma_\varepsilon(r), \tag{2.41}$$

которое непосредственно вытекает из условия (2.3).

Теперь получены все утверждения, нужные для изучения асимптотики функции $N(\lambda)$ методом. Т. Карлемана—Е. Титчмарша — Б. М. Левитана.

Сделаем помимо (1.1) следующие предположения о потенциале [1], [2]:

$$q(x) < Ce^{c|x|},\ C>0,\ c>0, \tag{2.42}$$

$$|q(x)-q(y)| < C\, q^\alpha(x)|x-y|, \text{ при } |x-y| \leqslant 1;\ 0<\alpha\leqslant\lambda/2, \tag{2.43}$$

$$|q(y)| < C\, e^{\frac{1}{2}|x-y|\sqrt{q(x)}}, \text{ при } |x-y| \geqslant 1, \tag{2.44}$$

$$\int_D \frac{dx}{\sqrt{q(x)}} < \infty. \qquad (2.45)$$

тметим, что в работе [2] показано как условие (45) можно ослабить, менив условием

$$\int_D \frac{dx}{q^A(x)} < \infty, \quad A > 0. \qquad (2.46)$$

режде всего установим формулу

$$\frac{\psi_n(y)}{\lambda_n + \mu^2} = \int G(x, y, \varkappa)\, \psi_i(x)\, dx -$$

$$-\frac{1}{\lambda_n + \mu^2} \int [q(y) - q(x)]\, G(x, y, \varkappa)\, \psi_n(x)\, dx \equiv a_n + b_n, \qquad (2.47)$$

де $\varkappa$ определено формулой (28), а интегралы без обозначения пределов интегрирования здесь и ниже берутся по D. Через $\psi_n(y)$, λ_n обозначены собственные функции и собственные числа оператора задачи ..2)—(1.3). Поскольку $\psi_n(x) \subset L_2(D)$ верна формула

$$\psi_n(y) = \int [\varkappa^2 + \lambda_n - q(x)]\, D(x, y, \varkappa)\, \psi_n(x)\, dx, \qquad (2.48)$$

з которой непосредственно вытекает равенство (47). Теперь можно оказать теорему, следуя, в основном, схеме, развитой в работах [1], 2] для случая $D = E_3$. Ниже всюду предполагаются выполненными словия I—IV на область и условия (1.1), (33), (42)—(45)—на потенциал.

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \qquad (2.49)$$

Доказательство. Из равенства (47) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(y)}{(\lambda_n + \mu^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2). \qquad (2.50)$$

Используя равенство Парсеваля и оценку (6) имеем

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\, dy = \int dy \int G^2(x, y, \varkappa)\, dx \leqslant C \int dy \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\varkappa r}}{r^2}\, r^2\, dr \leqslant C \int \frac{dy}{\varkappa}. \qquad (2.51)$$

Далее

$$b_n = \frac{1}{\lambda_n + \mu^2} \int\limits_{x \subset D,\, |x-y|<1} [q(y) - q(x)]\, G(x, y, \varkappa)\, \psi_n(x)\, dx +$$

$$+ \frac{q(y)}{\lambda_n + \mu^2} \int\limits_{x \subset D,\, |x-y|>1} G(x, y, \varkappa)\, \psi_n(x)\, dx - \frac{1}{\lambda_n + \mu^2} \times$$

$$\times \int\limits_{x \in D,\, |x-y|>1} q(x)\, G(x, y, \varkappa)\, \psi_n(x)\, dx = b_{n,1} + b_{n,2} + b_{n,3}. \qquad (2.52)$$

Используя неравенство (43) и принимая во внимание элементарное неравенство

$$\max_{r>0} r^{3-\varepsilon} e^{-r} < \infty \quad \text{при } 0 \leqslant \varepsilon < 3, \qquad (2.53)$$

получаем

$$\int b_{n1}^2 dy \leqslant \frac{c}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy q^{2\alpha}(y) \Big\{ \int\limits_{|x-y|<1} e^{-\varkappa|x-y|} |\psi_n(x)| dx \Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \cdot \int dy \frac{q^{2\alpha}(y)}{\varkappa^{6-2\varepsilon}} \Big\{ \int\limits_{|x-y|<1} \frac{|\psi_n(x)|\, dx}{|x-y|^{3-\varepsilon}} \Big\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int \frac{dy}{[\mu^2+q(y)]^{3-\varepsilon-2\alpha}} \iint\limits_{|z|<1,\,|z'|<1} dz dz' \frac{|\psi_n(z+y)\, \psi_n(z'+y)|}{|z|^{3-\varepsilon} |z'|^{3-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\mu^{2(\varepsilon-3+2\alpha)}}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int\limits_{|z|<1} \int\limits_{|z'|<1} \frac{d|z|\, d|z'|}{|z|^{1-\varepsilon}|z'|^{1-\varepsilon}} \int |\psi_n(z+y)\, \psi_n(z'+y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{\mu^{2(\varepsilon-3+2\alpha)}}{(\lambda_n+\mu^2)^2}. \qquad (2.54)$$

Следовательно

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1}^2\, dy \leqslant C\mu^{2(\varepsilon-3+2\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n+\mu^2)^2}. \qquad (2.55)$$

Далее

$$\int b_{n,2}^2\, dy \leqslant \frac{1}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy q^2(y) \Big| \int\limits_{|x-y|>1} \frac{e^{-\varkappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} |\psi_n(x)|\, dx \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy\, q^2(y) \int\limits_{|x-y|>1} \frac{e^{-2\varkappa|x-y|}}{|x-y|^2} dx \leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy q^2(y) \frac{e^{-2\varkappa}}{\varkappa} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ce^{-\sqrt{\mu^2}}}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy \frac{q^2(y)\, e^{-\sqrt{\mu^2+q(y)}}}{\sqrt{\mu^2+q(y)}} \leqslant \frac{Ce^{-\mu}}{(\lambda_n+\mu^2)^2}. \qquad (2.56)$$

Используя оценку (44), выводим

$$\int b_{n,3}^2\, dy \leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy \Big[\int\limits_{|x-y|>1} \frac{e^{-\varkappa|x-y|}}{|x-y|} |\psi_n(x)|\, e^{\frac{1}{2}|x-y|\sqrt{q(y)}} dx \Big]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy \int\limits_{|x-y|>1} \frac{e^{-2\left(\varkappa-\frac{1}{2}\sqrt{q(y)}\right)|x-y|}}{|x-y|^2} dx \leqslant \qquad (2.57)$$

$$\leqslant \frac{C}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int dy \frac{e^{-2\left(\varkappa-\frac{1}{2}\sqrt{q(y)}\right)}}{\varkappa-\frac{1}{2}\sqrt{q(y)}} \leqslant \frac{Ce^{-\mu}}{(\lambda_n+\mu^2)^2} \int \frac{dy}{\sqrt{q(y)}} \leqslant \frac{Ce^{-\mu}}{(\lambda_n+\mu^2)^2}.$$

оценок (55)—(57) и неравенства

$$(b_{n,1}+b_{n,2}+b_{n,3})^2 \leqslant C\,(b^2_{n,1}+b^2_{n,2}+b^2_{n,3})$$

лучаем

$$\int\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\,dy+o\,(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n+\mu^2)^2}\quad \text{при } \mu\to\infty. \tag{2.58}$$

. формул (50), (51), (58) вытекает неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n+\mu^2)^2}<\infty. \tag{2.59}$$

сюда непосредственно следует утверждение (49) теоремы 1.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 1 *имеет место формула*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n+\eta)^2}\sim\frac{1}{8\pi}\int\frac{dx}{\sqrt{q(x)+\eta}}\quad \eta\to+\infty. \tag{2.60}$$

Доказательство. При $\eta=\mu^2\to\infty$, используя утверждение 4) леммы 3, получаем вместо неравенства (51) равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,dy=\int dy\int G^2\,(x, y, \varkappa)\,dx\sim\frac{1}{8\pi}\int\frac{dy}{\sqrt{q\,(y)+\eta}},\quad \eta\to+\infty. \tag{2.61}$$

з оценок (51) и (58) следует, что

$$\int\sum_{n=1}^{\infty}(2a_nb_n+b_n^2)\,dy\leqslant o(1)\int\frac{dx}{\sqrt{q\,(x)+\eta}},\quad \eta\to+\infty. \tag{2.62}$$

тсюда и из формулы (61) следует утверждение (60) теоремы 2.

Чтобы получить из формулы (60) асимптотику функции $N\,(\lambda)$ спользуемся теоремой.

Теорема 2.3. (М. В. Келдыш [8]). Пусть $\varphi\,(\lambda)$ и $\psi\,(\lambda)$—положильные возрастающие функции, определенные для положительных $\varphi\,(\lambda)$ дифференцируема; $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi\,(\lambda)=\infty$ и для достаточно больших λ

$$\beta_1\varphi\,(\lambda)<\lambda\varphi'\,(\lambda)<\beta_2\varphi\,(\lambda), \tag{2.63}$$

е β_1, β_2—положительные постоянные.

Пусть

$$f\,(\mu)=\int_0^{\infty}\frac{d\varphi\,(\lambda)}{(\lambda+\mu)^m},\quad g(\mu)=\int_0^{\infty}\frac{d\psi\,(\lambda)}{(\lambda+\mu)^m},\quad m>\beta_2+1. \tag{2.64}$$

сли $g\,(\mu)\sim f\,(\mu)$ при $\mu\to+\infty$, то $\psi\,(\lambda)\sim\varphi\,(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$.

Положим

$$\sigma\,(\lambda)=\text{mes}\,\{x\colon x\subset D,\ q\,(x)<\lambda\}, \tag{2.65}$$

$$\varphi\,(\lambda)=\int_0^{\lambda}(\lambda-t)^{3/2}\,d\sigma\,(t). \tag{2.66}$$

Допустим, что потенциал $q(x)$ таков, что условие (63) выполнен
Для этого достаточно, чтобы функция

$$\sigma(t)=\int_0^t d\sigma(s)=\int\limits_{\{x:\,q(x)<t,\,x\subset D\}} dx \tag{2.67}$$

для достаточно больших t удовлетворяла условию

$$\sigma(t)<C\sigma\left(\frac{t}{2}\right). \tag{2.68}$$

Действительно, в этом случае имеем

$$\varphi(t)=\int_0^t (t-v)^{3/2}\,d\sigma(v)>\int_0^{t/2}(t-v)^{3/2}\,d\sigma(v)>t^{3/2}\int_0^{t/2}d\sigma(v)=$$

$$=t^{3/2}\,\sigma\left(\frac{t}{2}\right)>Ct^{3/2}\,\sigma(t)>Ct\int_0^t (t-v)^{1/2}\,d\sigma(v)=Ct\varphi'(t). \tag{2.69}$$

Тем самым доказано правое неравенство (63). Левое неравенство (63) вытекает непосредственно из определения (66) функции $\varphi(\lambda)$.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и услови* (63), *где* $\varphi(\lambda)$ *определена формулой* (66). *Тогда имеет место фор мула* (2):

Доказательство. Мы имеем

$$\int_0^\infty \frac{dN(t)}{(t+\mu)^2}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\lambda_n+\mu)^2}. \tag{2.70}$$

Запишем формулу (60) в виде

$$\int_0^\infty \frac{dN(t)}{(t+\mu)^2}\sim\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t+\mu}},\quad \mu\to\infty. \tag{2.71}$$

Преобразуем правую часть формулы (71) к виду, удобному для применения теоремы 3

$$\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t+\mu}}=\frac{1}{6\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{(t+\mu)^3}, \tag{2.72}$$

где

$$d\varphi(t)=d_t\int_0^t (t-s)^{3/2}\,d\sigma(s)=\frac{3}{2}\,dt\int_0^t (t-s)^{1/2}\,d\sigma(s). \tag{2.73}$$

Действительно

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{(t+\mu)^2}=\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{dt\int_0^t (t-s)^{1/2}\,d\sigma(s)}{(t+\mu)^2}=\frac{3}{2}\int_0^\infty d\sigma(s)\int_s^\infty \frac{(t-s)^{1/2}\,dt}{(t+\mu)^2}=$$

$$\frac{3}{2}\int_0^\infty d\sigma(s)\int_0^\infty \frac{\sqrt{v}\,dv}{(v+s+\mu)^2}=\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{d\sigma(s)}{\sqrt{s+\mu}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}\,du}{(1+u)^2}=\frac{3\pi}{4}\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t+\mu}},\tag{2.74}$$

о совпадает с формулой (72).

Из формул (71), (72) и теоремы 3 вытекает утверждение теоре- 4 — формула (2).

Замечание 2.1. Если область D содержит конус K_0 сколь ›дно малого, но фиксированного раствора, и если при достаточно ›льших r выполнено неравенство

$$ar^k<q(x)<Ar^k;\ r=|x|,\ k>6,\ A>0,\ a>0,\tag{2.75}$$

условие (68) выполнено.

Доказательство. Мы имеем

$$\sigma(t)=\text{mes}\,\{x:\ x\subset D,\ q(x)<t\}\leqslant \text{mes}\left\{x:\ x\subset E_3,\ r\leqslant\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{3}\pi\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{k}}.\tag{2.76}$$

›оме того

$$\sigma(t)\geqslant \text{mes}\left\{x:\ x\subset k_0,\quad r\leqslant\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}\geqslant C\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{3}{k}},\tag{2.77}$$

е постоянная C определяется раствором конуса K_0.

Следовательно

$$C_1t^{\frac{3}{k}}<\sigma(t)<C_2t^{\frac{3}{k}},\tag{2.78}$$

условие (68) выполнено.

Можно показать, что условие (68) будет выполнено, если имеет сто оценка (75), а граница области D содержится между параболо- ами

$$z=a_1(x^2+y^2)^p;\ z=a_2(x^2+y^2)^p,\quad 0<a_1<a_2,\ p>\frac{1}{2}.\tag{2.79}$$

спользуя методы работы [2] и результаты лемм 1—3, можно полу- ить формулу

$$N_\tau(\lambda)\sim\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\{x:\ x\subset D,\ q(x)<\lambda\}} q^\tau(x)\,[\lambda-q(x)]^{3/2}dx,\ \lambda\to+\infty,\tag{2.80}$$

(е

$$N_\tau(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}a_n^{(\tau)};\ a_n^{(\tau)}\equiv\int q^\tau(x)\,\psi_n^2(x)\,dx.\tag{2.81}$$

›ормула (2) получается из формулы (80) при $\tau=0$.

§ 3. Разложение по собственным функциям

Из результатов § 1 вытекает, что для любой функции $f(x) \subset L_2(D)$ в смысле сходимости в среднем имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad (3.$$

где

$$C_n = \int f(x) \overline{\psi_n(x)}\, dx. \quad (3.$$

Формула (1) представляет собою другую форму записи соотношен

$$f = \int_0^{\infty} dE_t f, \quad (3.$$

где E_t — разложение единицы оператора L задачи (1.2)—(1.3). Дл самосопряженного оператора L с точечным спектром ядро спектрал ной функции имеет вид

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \psi_n(x) \overline{\psi_n(y)}, \quad (3.$$

где λ_n, $\psi_n(x)$—собственные числа и собственные функции оператора Дробную степень положительного оператора L определяют формулой

$$L^{\alpha} f = \int_0^{\infty} t^{\alpha} dE_t f. \quad (3.$$

Выберем число $\alpha > 0$ так, чтобы оператор вложения из пространст $W_2^{2\alpha}(D)$ в $C(D)$ был бы ограничен. Например, можно взять $\alpha = 1$, есл $D \subset E_3$. Если $f \subset D(L)$, то

$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n \psi_n(x), \quad (3.$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |C_n|^2 < \infty. \quad (3.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $f \subset D(L)$. Тогда формула* (1) *имеет ме сто в каждой точке $x \subset D$. Ряд* (1) *сходится к $f(x)$ равномерно от носительно x, меняющегося в любой ограниченной части области D*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [9], что для любых ограничен ных областей D_1 и $D_2 \subset D_1$ верно неравенство

$$\|u\|_{W_2^2(D_2)} \leqslant C(D_1, D_2) \|Lu\|_{L_2(D_1)}, \quad (3.8$$

где L—положительно определенный эллиптический оператор второг порядка, который в нашем случае определен выражением (1.2). П условию теоремы и согласно неравенству (8) ряд (1) сходится к функции $f(x)$ в смысле сходимости в $W_2^2(\bar{D})$, где $\bar{D}$— любая ограниченная подобласть области D. В силу теоремы вложения С. Л. Соболева ряд (1) равномерно сходится в $\bar{D}$. Теорема доказана.

Можно было бы исследовать суммируемость ряда (1) к функции $f(x)$ методом (R, λ, α) нормальных средних М. Рисса, но мы не будем останавливаться на этом вопросе. В случае $D=E_3$ такое исследование проведено в работе [2].

§ 4. Оценки функции Грина и асимптотическое распределение собственных чисел для второй и третьей краевых задач

В этом параграфе результаты § 2 переносятся на случай краевых условий второго и третьего рода. Сделанные относительно области D предположения I—IV, а также предположения (1.1), (2.33), (2.42)—(2.45) о потенциале $q(x)$ считаем выполненными. Рассмотрим уравнение (1.2) с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(s)\,u|_\Gamma=0, \tag{4.1}$$

где n—внешняя нормаль к границе Γ, $\sigma(s)\geqslant 0$ — непрерывная на Γ функция. При $\sigma\equiv 0$ условие (1) называется вторым, в противном случае—третьим. В силу вариационного принципа собственные числа $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(3)}$, $\lambda_n^{(2)}$ соответственно первой, третьей и второй краевых задач связаны неравенством: $\lambda_n^{(1)}\geqslant\lambda_n^{(3)}\geqslant\lambda_n^{(2)}$.

Введем обозначение $N^{(i)}(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_n^{(i)}<\lambda}1$. Тогда $N^{(1)}(\lambda)\leqslant N^{(3)}(\lambda)\leqslant N^{(2)}_{(\lambda)}$. Если для функции $N^{(2)}_{(\lambda)}$ будет доказана формула (2.2), то, ввиду того, что $N^{(1)}(\lambda)=N(\lambda)$, формула (2.2) будет доказана для всех функций $N^{(i)}(\lambda)$, $i=1, 2, 3$. В дальнейшем будем обозначать функции $N^{(1)}(\lambda)$ и $N^{(2)}(\lambda)$ через $N(\lambda)$ и $M(\lambda)$, собственные числа $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$— через λ_n, μ_n. Чтобы доказать формулу (2.2) для функции $M(\lambda)$ понадобятся, как и в § 2, оценки функции Грина задачи

$$(-\Delta+\mu^2)\,G(x, y, \mu)=\delta(x-y) \text{ в } D, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Gamma=0. \tag{4.2}$$

Мы не предполагаем, что симметричный в $L_2(D)$ оператор, заданный дифференциальным выражением $-\Delta+q(x)$ на дважды дифференцируемых в области D функциях, удовлетворяющих граничному условию (2) и финитных около бесконечности, имеет нулевые индексы дефекта. Это значит, что не предполагается единственность функции Грина соответствующей краевой задачи ([1], стр. 73).

Изложенные ниже результаты верны для любого самосопряженного расширения определенного выше симметричного оператора. Заметим, что предполагая область D принадлежащей классу, введенному в [4, а, б], повторяя рассуждения, приведенные в [10] (теорема 1) и пользуясь ограниченностью снизу потенциала $q(x)$, можно доказать единственность функции Грина оператора Шредингера второй краевой задачи. Нужные для дальнейшего оценки функции G собраны в теореме.

Теорема 4.1. *При сделанных относительно области и потенциала предположениях имеют место оценки:*

$$|G(x, y, \mu)| \leqslant C \frac{\exp\{-\beta\mu|x-y|\}}{|x-y|}, \quad x, y \subset \overline{D}, \tag{4.3}$$

где $0<\beta<1$ *можно взять сколь угодно близким к* 1;

$$G(x, y, \mu) = \frac{\exp\{-\mu|x-y|\}}{4\pi|x-y|}\{1+r(y, \mu)\}, \quad \mu \to +\infty, \tag{4.4}$$

где $|x-y| \leqslant \frac{1}{2}\max[\rho(y), \rho(x)]$, $\rho(y)$ — *расстояние от точки* y *до границы* Γ, *через* $r(y, \mu)$ *здесь и ниже обозначена функция, допускающая оценку*

$$r(y, \mu) = O(\mu\rho^{-2}(y)\exp\{-\mu\gamma\rho(y)\}, \ y \subset D, \ \mu \to +\infty.$$

Далее

$$\int_D G^2(x, y, \mu)\,dx = \frac{1}{8\pi\mu}(1+r(y, \mu)), \quad \mu \to +\infty, \tag{4.5}$$

$$\int_D dy \int_D G^2(x, y, \varkappa)\,dx = \int_D \frac{dy}{8\pi\varkappa}\{1+o(\mu^{-\gamma_1})\}, \quad \mu \to +\infty, \tag{4.6}$$

где $\varkappa^2 = \mu^2 + q(y)$, $\gamma_1 > 0$.

Для любого натурального $p>0$ *верно соотношение*

$$\frac{\partial^p G(x, y, \mu)}{(\partial\mu^2)^p} = \frac{\partial^p}{(\partial\mu^2)^p}\frac{\exp\{-\mu|x-y|\}}{4\pi|x-y|}\{1+r_1(y, \mu)\}, \quad \mu \to +\infty, \tag{4.7}$$

где

$$r_1(y, \mu) = O(\mu^{2p-1}\rho^{-p+1}(y)\exp\{-\delta\mu\rho(y)\}), \quad \delta > 0,$$

$$|x-y| \leqslant \frac{1}{2}\max[\rho(y), \rho(x)].$$

Доказательство. Для функции Грина первой краевой задачи оценка (2.6) вытекала из принципа максимума.

В условиях теоремы 1 нужно использовать интегральные уравнения, чтобы доказать оценку (3). Рассмотрим уравнение

$$G(x, y, \mu) = \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{4\pi|x-y|} - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s}\frac{\exp(-\mu|x-s|)}{4\pi|x-s|} \text{ в } ds, \tag{4.8}$$

где функция

$$b \equiv G(s, y, \mu) \tag{4.9}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{2} I + T_\mu\right) b = b_0. \tag{4.10}$$

Здесь

$$T_\mu b = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{\exp(-\mu|s-s_0|)}{4\pi|s-s_0|} b(s)\, ds; \quad b_0 = \frac{\exp(-\mu|s-y|)}{4\pi|s-y|}. \tag{4.11}$$

Чтобы доказать оценку (3) достаточно проверить, что интеграл J в правой части равенства (8) удовлетворяет этой оценке. Допустим доказанной оценку

$$|b(s, y, \mu)| < C\frac{\exp(-\beta\mu|s-y|)}{|s-y|}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{4.12}$$

Тогда

$$|x-y| \exp(\beta\mu|x-y|) J \leqslant C \int_\Gamma \exp\{-\mu[|x-s| + \beta|s-y| - \beta|x-y|]\} \times$$

$$\times \frac{|x-y|}{|s-y|} |\cos(n_s, r_{xs})| \left(\frac{\mu}{|x-s|} + \frac{1}{|x-y|^2}\right) ds \leqslant C \int_\Gamma \exp\{-(1-\beta)\mu|x-$$

$$-s|\} \cdot \max\left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|};\right.$$

$$\left.\frac{\mu}{|s-y|} + \frac{1}{|s-y|\cdot|x-s|}\right) |\cos(n_s, r_{xs})|\, ds \leqslant C, \tag{4.13}$$

где α — показатель Ляпунова поверхности Г.

Здесь было использовано неравенство

$$|x-y| \leqslant |x-s| + |s-y| \leqslant 2\max\{|x-y|; |s-y|\} \tag{4.14}$$

и оценки, аналогичные оценкам (2.20)—(2.25).

Например

$$\int_\Gamma \frac{\exp\{-\varepsilon\mu|x-s|\}}{|x-s|^2} |\cos(n_s, r_{xs})|\, ds \leqslant \frac{1}{\rho^2(x)} \int_\Gamma \exp(-\varepsilon\mu|x-s|) ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\mu\rho(x)\right\}}{\rho^2(x)} \int_\Gamma \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\mu|x-s|\right\} ds \leqslant C\rho^{-2}(x) \exp \times$$

$$\times \left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\mu\rho(x)\right\}. \tag{4.15}$$

Здесь $\varepsilon = 1 - \beta > 0$. Таким образом, оценка (13) доказана для $\rho(x) \geqslant \delta$. Пусть $\rho(x) < \delta$. Оценим интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \exp(-\varepsilon\mu|x-s|)\frac{|x-y|}{|s-y|}\left(\frac{1}{|x-s|^2}+\frac{\mu}{|x-s|}\right)|\cos(n_s, r_{xs})|\,ds =$$

$$= \int\limits_{|x-s|>\delta} + \int\limits_{|x-s|<\delta} = J_1 + J_2.$$

Интеграл J_1 оценивается как интеграл в формуле (15). Оценим J_2, пользуясь неравенством (14)

$$J_2 \leqslant \int\limits_{|x-s|<\delta} ds\,|\cos(n_s, r_{xs})| \max\left(\frac{1}{|x-s|^2}+\frac{\mu}{|x-s|};\ \frac{1}{|x-s|\cdot|s-y|}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{|s-y|}\right)\exp(-\varepsilon\mu|x-s|) \leqslant \int\limits_{|x-s|<\delta} \exp(-\varepsilon\mu|x-s|)\,|\cos(n_s, r_{xs})| \times$$

$$\times\left(\frac{1}{|x-s|^2}+\frac{\mu}{|x-s|}+\frac{\mu}{|s-y|}+\frac{1}{|x-s|\cdot|s-y|}\right)ds = I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Имеем

$$I_1 \leqslant \int\limits_{|x-s|<\delta} \frac{|\cos(n_s, r_{xs})|}{|x-s|^2}\,ds \leqslant C.$$

Здесь C—вариация телесного угла, под которым из точки x видна часть поверхности Г, характеризуемая неравенством $|x-s|\leqslant\delta$. Так как поверхность удовлетворяет условию II из § 2, то C не зависит от x.

Обозначим черз s_0 ближайшую к x точку поверхности Г, $\rho(s_0, x) = \rho(x)$. При достаточно малом δ и при $|x-s|<\delta$ для поверхности Ляпунова верно неравенство: $0 < C_1 \leqslant \frac{|x-s|^2}{|x-s_0|^2+|s-s_0|^2} \leqslant C_2$, где C_1 и C_2 — положительные постоянные, зависящие от констант Ляпунова для поверхности Г и от числа δ, причем $C_1, C_2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 1$.

Поэтому

$$I_2 \leqslant C\mu\int\limits_0^\delta \exp\{-\varepsilon\mu C_1\sqrt{\rho^2-\rho^2(x)}\}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho^2(x)}} \leqslant C\mu \times$$

$$\times\int\limits_0^\delta \exp(-\varepsilon\mu C_1\rho)\,d\rho \leqslant C.$$

В силу свойства II из § 7.2 оценочные постоянные не зависят от x. Аналогично оцениваются интегралы I_3, I_4. Собирая оценки, приходим к неравенству $J_1+J_2\leqslant C$. Отсюда и из (15) вытекает оценка (13).

Докажем теперь неравенство (12). Для этого исследуем уравнение (10) в пространстве C_y непрерывных функций с нормой

$$\|b\| = \sup_{s\in\Gamma} |s-y|\exp(\beta\mu|s-y|)\,|b(s)|. \tag{4.16}$$

Свободный член в уравнении (10) имеет конечную норму в C_y. Проверим, что оператор T_μ в этом уравнении есть оператор с малым ядром когда $\mu \to +\infty$. Пусть $b \subset C_y$. Имеем

$$\|T_\mu b\| < C\|b\| \cdot \max_{s \subset \Gamma} |s-y| \exp(\beta\mu|s-y|) \int_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial n_t} \frac{\exp(-\mu|s-t|)}{4\pi|s-t|}\right| \times$$

$$\times \frac{\exp(-\beta\mu|t-y|)}{|t-y|}\, dt \leqslant C\|b\| \max_{s \subset \Gamma} \int_\Gamma \frac{|s-y|}{|t-y|} \exp\{-(1-\beta)\mu|s-t|\} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{|s-t|^{2-\alpha}} + \frac{\mu}{|s-t|^{1-\alpha}}\right) ds \leqslant C\|b\|\, O(\mu^{-\alpha}), \quad \mu \to +\infty. \tag{4.17}$$

Последнее неравенство аналогично (13)*. Из сказанного вытекает справедливость оценки (12).

Неравенство (3) полностью доказано. Чтобы доказать соотношение (4) будем исходить из равенства

$$4\pi|x-y| \exp(\mu|x-y|)\, G(x, y, \mu) = 1 + \int_\Gamma |x-y| \exp(\mu[|x-y| - |x-s|]) \times$$

$$\times \left(\frac{\mu}{|x-s|} + \frac{1}{|x-s|^2}\right) \cos(n_s, r_{xs})\, b(s, y, \mu)\, ds = 1 + J. \tag{4.18}$$

Без ограничения общности положим, что $\rho(x) \leqslant \rho(y)$.

Используя оценки

$$|x-y| \leqslant \frac{1}{2} \max[\rho(x), \rho(y)] \leqslant \frac{\rho(y)}{2}; \quad \frac{\rho(y)}{2} \leqslant \rho(x) \leqslant \rho(y), \tag{4.19}$$

получаем

$$J \leqslant C \int_\Gamma \frac{|x-y|}{|s-y|} \exp\{\mu[|x-y| - |x-s| - \beta|s-y|]\} \cdot \left(\frac{1}{|x-s|^2} + \frac{\mu}{|x-s|}\right) \times$$

$$\times |\cos(n_s, r_{xs})|\, ds \leqslant C \exp\left\{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mu\rho(y)\right\} \int_\Gamma \exp(-\mu|x-s|)\left(\frac{1}{|x-s|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{|s-x|}\right) |\cos(n_s, r_{xs})|\, ds \leqslant C\mu \exp\left\{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mu\rho(y)\right\} \rho^{-2}(x) =$$

$$= r(y, \mu), \quad \gamma = \beta - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1. \tag{4.20}$$

Так как β можно взять сколь угодно близким к 1, то $\gamma < \frac{1}{2}$ можно

---

* Если $\inf\limits_{s \subset \Gamma,\, x,\, y \subset D} [|x-s| + |s-y| - |x-y|] > 0$, $\operatorname{mes} \Gamma < \infty$, то в приведенных рассуждениях можно считать $\beta = 1$. Это, например, случай выпуклой области с конечной границей.

считать сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$. Оценка (4) доказана. Заметим, что она равномерна относительно x, удовлетворяющего неравенствам (19).

Далее имеем

$$\int_D G^2(x, y, \mu)\,dx = \left\{ \int_{|x-y|<\frac{\rho(y)}{2}} + \int_{|x-y|>\frac{\rho(y)}{2}} \right\} G^2(x, y, \mu)\,dx =$$

$$= \int_{|x-y|<\frac{\rho(y)}{2}} dx\, \frac{\exp(-2\mu|x-y|)}{16\pi^2|x-y|^2}(1+r(y,\mu)) + O(\exp\{-2\beta\mu\rho(y)\}\cdot\rho^{-2}(y)) =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu}\{1+r(y,\mu)\}, \quad \mu\to+\infty. \tag{4.21}$$

Докажем оценку (6).

Имеем

$$\int_U dy \int_D G^2(x, y, \varkappa)\,dx = \left(\int_{\Delta_\varepsilon} + \int_{D_\varepsilon}\right) dy \int_D G^2(x, y, \varkappa)\,dx = J_1 + J_2. \tag{4.22}$$

Здесь Δ_ε и D_ε имеют тот же смысл, что и в § 2.

В силу оценки (5) верно равенство

$$J_2 = \int_{D_\varepsilon} \frac{dy}{8\pi\varkappa}(1+r(y,\mu)), \quad \mu\to+\infty. \tag{4.23}$$

Положим $\varepsilon = \mu^{-\sigma}$, $0<\sigma<1$. Тогда, повторяя оценку (2.40), получим

$$J_1 \leqslant \int_{\Delta_\varepsilon} dy \int_D \frac{\exp(-2\beta\varkappa|x-y|)}{16\pi^2|x-y|^2}\,dx \leqslant C\int_{\Delta_\varepsilon}\frac{dy}{\varkappa} \leqslant \frac{C}{\mu^\sigma}\int_{D_\varepsilon}\frac{dy}{\varkappa}. \tag{4.24}$$

Из двух последних оценок следует равенство (6). Достаточно заметить, что при $y\subset D_\varepsilon$, $\rho(y) > \mu^{-\sigma}$, поэтому остаточный член $r_1(y,\mu)$ в формуле (23) допускает оценку

$$r(y,\mu) = O\left(\mu\frac{\exp(-\mu\cdot\mu^{-\sigma})}{\mu^{-2\sigma}}\right) = O\left(\frac{1}{\mu^\sigma}\right), \quad \mu\to+\infty. \tag{4.25}$$

Чтобы доказать формулу (7) продифференцируем равенство (8) p раз по μ^2:

$$\frac{\partial^p G}{(\partial\mu^2)^p} = \frac{\partial^p}{(\partial\mu^2)^p}\frac{\exp(-\mu|x-y|)}{4\pi|x-y|} + \sum_{k=0}^{p} C_{kp}\int ds\,\frac{\partial^{p-k} b(s,y,\mu)}{(\partial\mu^2)^{p-k}} \times$$

$$\times \frac{\partial^k}{(\partial\mu^2)^k}\frac{\partial}{\partial n_s}\frac{e^{-\mu|x-s|}}{|x-s|}, \tag{4.26}$$

где C_{kp} — постоянные, точное значение которых нас не интересует. Оценим интеграл

$$J_{kp}=\left|\frac{\partial^p}{(\partial\mu^2)^p}\frac{\exp(-\mu|x-y|)}{|x-y|}\right|^{-1}\int\limits_\Gamma\frac{\partial^k}{(\partial\mu^2)^k}\frac{\partial}{\partial n_s}\frac{\exp(-\mu|x-s|)}{|x-s|}\times$$

$$\times\frac{\partial^{p-k}b(s,y,\mu)}{(\partial\mu^2)^{p-k}}ds. \qquad (4.27)$$

Функция

$$\frac{\partial^p}{(\partial\mu^2)^p}\frac{\exp(-\mu|x-y|)}{|x-y|}=\sum_{l=0}^{p-1}C_l\frac{|x-y|^{p-l-1}}{\mu^{p-l}}\exp(-\mu|x-y|).$$

Поэтому

$$J_{kp}<C\frac{\exp(\mu|x-y|)\mu^{2p-1}}{|x-y|^{p-1}}\int\limits_\Gamma\exp(-\mu|x-s|)\max[1,|x-s|^{k-2}]\times$$

$$\times\exp(-\beta\mu\rho(y))ds=O\Big(\exp\{-\beta\mu\rho(y)+\frac{1}{2}\mu\rho(y)-(1-\varepsilon)\mu\rho(x)\}\cdot\mu^{2p-1}\times$$

$$\times\frac{\max[\rho^{k-2}(x),1]}{|x-y|^{p-1}}\int\limits_\Gamma\exp\{-\varepsilon\mu|x-s|\}ds\Big)=$$

$$=O\Big(\frac{\mu^{2p-1}}{|x-y|^{p-1}}\exp\{-\gamma\mu\rho(y)\}\Big),\quad\mu\to+\infty, \qquad (4.28)$$

где $\gamma=\beta-\frac{1}{2}>0$, $\varepsilon>0$. Здесь были использованы неравенства (19) и следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial^k}{(\partial\mu^2)^k}b(s,y,\mu)\right|=O(\exp\{-\beta\mu|s-y|\}),$$

которая получается из рассмотрения уравнения (10) аналогично тому, как была получена выше оценка (12).

Так же как и в § 2 на основе результатов теоремы 1 доказывается

Теорема 4.2. *В условиях теоремы 2.4 справедливы утверждения теорем 2.1—2.4, в которых следует заменить $N(\lambda)$ на $M(\lambda)$, λ_n на μ_n.*

Замечание 4.1. В работе [11] получена равномерная по α асимптотика функции $N(\lambda)$ для задачи (1.2)—(1.3) в случае, когда потенциал зависит от параметра $q(x)=q(x;\alpha)$, где α—параметр, меняющийся на некотором возможно некомпактном множестве, которое для простоты письма предположим совпадающим с полуосью $[\alpha_0,\infty)$, а область D есть конечная область с ляпуновской границей Г. Предполагалось, что $q(x;\alpha)$—вещественная функция, $q(x;\alpha)>1$ и равномерно относительно $x\subset\bar D$ выполнено неравенство

$$\lim_{\alpha\to\infty}q(x;\alpha)=+\infty. \qquad (4.29)$$

Схема получения результата работы [11] без существенных изменений проходит для случая области с бесконечной границей, удовлетворяющей ограничениям I—IV, указанным в §§ 1—2. Необходимые оценки функции Грина даны в теореме 4.1.

Ленинградский институтточной
механики и оптики

Поступило 4.II.1969

Ա. Գ. ՌԱՄՄ Անվերջ եզրով տիրույթներում աճող պոտենցիալ ունեցող Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաներով վերլուծության և սեփական արժեքների ասիմպտոտական վարքը

(ամփոփում)

$D \subset E_3$ տիրույթում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը՝

$$\mathrm{L}u = (-\Lambda + q(x) - \lambda)\, u = 0 \quad D\text{-ում} \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial D} = 0 \text{ կամ } \frac{\partial u}{\partial n}\, \sigma(s)u\Big|_{\partial D} = 0, \quad \sigma(s) > 0: \tag{2}$$

$q(x)$ ֆունկցիան իրական է և $q(x) > 1$, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} q(x) = +\infty$. Տիրույթի ∂D եզրը ենթադրվում է Լյապունովյան, Լյապունովի հաստատունները հավասարաչափ սահմանափակ են։ $q(x)$-ի և ∂D-ի մասին որոշ լրացուցիչ ենթադրությունների դեպքում ապացուցվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{1}{6\pi^3} \int\limits_{\{x : x \subset D,\ q(x) < \lambda\}} [\lambda - q(x)]^{3/2} dx, \quad \lambda \to +\infty, \tag{3}$$

որտեղ λ_n-երը (1)-(2) խնդրի սեփական թվերն են։ L օպերատորի սեփական թվերը և սեփական ֆունկցիաները ստացված են ամբողջ տարածության մեջ մի օժանդակ խնդրի սեփական թվերից և սեփական ֆունկցիաներից։

A. G. RAMM. *Asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunction decomposition of Shredinger operator with increasing potential in the domaines with infinite boundary* (summary)

For $D \supset E_3$ the following problem is considered:

$$Lu = (-\Delta + q(x) - \lambda)\, u = 0 \text{ in } D \tag{1}$$

and

$$u|_{\partial D} = 0 \text{ or } \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(s)\, u|_{\partial D} = 0, \ \sigma(s) \geqslant 0. \tag{2}$$

$q(x)$ is assumed to be real, $q(x) > 0$, $\lim\limits_{|x| \to \infty} q(x) = +\infty$. The boundary ∂D is assumed to be of Ljapunof's type, the constants of Ljapunof being uniformly bounded. Under some additional restrictions on q and ∂D the formula

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{1}{6\pi^3} \int\limits_{\{x : x \subset D,\ q(x) < \lambda\}} [\lambda - q(x)]^{3/2}\, dx, \ \lambda \to +\infty \tag{3}$$

is established, where λ_n are the eigenfunctions of (1)—(2) problem.

The eigenvalues and eigenfunctions of L are obtained from those for certain auxillary problem in the whole space.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Титчмарш.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. II, И.И.Л., М., 1961.
2. *Б. М. Левитан.* Об асимптотическом поведении функции Грина и разложении по собственным функциям уравнения Шредингера, Мат. сб., 41, 1957, 439—458.
3. *А. Г. Рамм.* Об одном методе решения задачи Дирихле в бесконечных областях, Известия ВУЗ-ов, серия матем., № 5, 1965, 124—127.
4. *А. Г. Рамм.* а) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, ДАН СССР, 152, № 2, 1963, 282—285.
   б) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, Мат. сб., 66, № 3, (108), 1965, 321—343.
5. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. 5, Физматгиз, М., 1959.
6. *D. Ray.* On spectra of second-order differential operators, Frans. Amer. Math. Soc., 77, 1954, 299—321.
7. *А. Г. Костюченко.* Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов, ДАН СССР, 158, 1, 1964, 41—44.
8. *М. В. Келдыш.* Об одной тауберовой теореме, Труды МИАН, 38, 1951, 77—86.
9. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
10. *А. Г. Рамм.* Об отсутствии положительного дискретного спектра у оператора Лапласа задачи Дирихле в некоторых бесконечных областях, Вестник ЛГУ, № 13, 1964, 153—156; поправка в 1. 1, 1966, 176.
11. *Б. М. Левитан, А. Г. Рамм.* Асимптотическое поведение собственных значений в случае, когда потенциал зависит от параметра, Матем. заметки, 1, 5, 1967, 595—604.
12. *А. Г. Рамм.* Асимптотическое распределение собственных значений оператора Шредингера с растущим потенциалом в областях с бесконечной границей, ДАН СССР, 183, № 4, 1968, 780—783.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 6, 1969 Математика

А. М. БАДАЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ

1°. В монографии М. М. Джрбашяна [1] построена теория классов N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в единичном круге функций.

Основным аппаратом этой теории является естественное обобщение формулы Иенсена-Неванлинны для мероморфных в круге $|z|<R$ функций. Напомним эту формулу и определение класса N_α.

Пусть функция $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<R\leqslant+\infty$, а $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ — соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей, причем каждый нуль или полюс записывается столько раз, какова его кратность. Тогда для любых $\rho\in(0, R)$ и α $(-1<\alpha<+\infty)$ имеет место формула

$$F(z)=e^{i\arg c_\lambda+\lambda k_\alpha}\left(\frac{z}{\rho}\right)^\lambda\frac{\prod\limits_{0<|a_\mu|<\rho}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-w_\alpha^{(\rho)}(z;\,a_\mu)}}{\prod\limits_{0<|b_\nu|<\rho}\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{-w_\alpha^{(\rho)}(z;\,b_\nu)}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}\right)[\rho^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|F(\rho e^{i\theta})|]\,d\theta\right\}\qquad(|z|<\rho),\quad(1)$$

где λ и c_λ определяются из разложения функции $F(z)$ в окрестности точки $z=0$

$$F(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\cdots,\qquad c_\lambda\neq0,$$

$$w_\alpha^{(\rho)}(z;\,\zeta)=\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}\left\{\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\int\limits_0^{\frac{|\zeta|}{\rho}}(1-x)^\alpha\times\right.$$

$$\left.\times x^{n-1}dx-\left(\frac{\bar\zeta}{\rho}\right)^n\int\limits_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-n-1}dx\right\},\quad(2)$$

$$S_\alpha\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\theta}\right)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{\left(1-\frac{z}{\rho}e^{-i\theta}\right)^{1+\alpha}}-1\right\}=$$

$$=\Gamma(1+\alpha)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)}\left(\frac{ze^{-i\theta}}{\rho}\right)^k$$

и, наконец,

$$k_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Формула (1) при $z=0$ приводит к определению α-характеристической функции

$$T_\alpha(\rho;\ F)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho^{-\alpha}D_{(\rho)}^{-\alpha}\log|F(\rho e^{i\theta})|\,d\theta+$$

$$+\frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\rho\frac{(\rho-t)^\alpha}{t}[n(t;\ \infty)-n(0;\ \infty)]\,dt+$$

$$+\frac{n(0;\ \infty)}{\Gamma(1+\alpha)}[\log\rho-k_\alpha]\equiv m_\alpha(\rho;\ F)+N_\alpha(\rho;\ F),\tag{3}$$

где $D^{-\alpha}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля.

Наконец, класс N_α определяется как множество мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<\rho<1}\{T_\alpha(\rho;\ F)\}<+\infty.\tag{4}$$

Одним из основных результатов М. М. Джрбашяна является следующая теорема о факторизации класса N_α.

Теорема. Класс $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций, которые в круге $|z|<1$ допускают представление вида

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda\frac{B_\alpha(z;\ a_\mu)}{B_\alpha(z;\ b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\alpha(ze^{-i\theta})\,d\psi(\theta)\right\},\tag{5}$$

где $B_\alpha(z;\ a_\mu)$ и $B_\alpha(z;\ b_\nu)$ — сходящиеся произведения типа Бляшке, $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[-\pi,\ \pi]$ с конечным полным изменением, λ — любое целое, а γ — любое вещественное число и

$$k_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

2°. В настоящей работе вводятся классы $U_\sigma(0<\sigma<+\infty)$ мероморфных на всей плоскости функций и устанавливается теорема об их факторизации.

Класс U_σ $(0<\sigma<+\infty)$ определяется как множество мероморфных на всей плоскости z функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<\rho<+\infty}\{\Gamma(1+\sigma\rho)\,T_{\sigma\rho}(\rho;F)\}<+\infty,$$

где $T_{\sigma\rho}(\rho; F)$ — значение α-характеристической функции $T_\alpha(\rho)$ при $\alpha=\sigma\rho$.

Теорема о факторизации класса U_σ устанавливается путем предельного перехода в представлении (1).

Автор выражает искреннюю благодарность проф. М. М. Джрбашяну за постановку задачи и советы при ее решении.

1. Построение специальных целых функций с заданным распределением нулей

1.1. Введем в рассмотрение целую функцию

$$E_\sigma(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-Q_\sigma(z;\zeta)} \tag{1.1}$$

$$(0<|\zeta|<+\infty,\ 0<\sigma<+\infty),$$

где

$$Q_\sigma(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma z)^n}{n!}\left\{\zeta^{-n}\int\limits_{\zeta}^{|\zeta|}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt-\bar{\zeta}^{n}\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{-n-1}\,dt\right\}. \tag{1.2}$$

Докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ *пронумерована в порядке возрастания модулей*

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_k|\leqslant\cdots \tag{1.3}$$

и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|}<+\infty. \tag{1.4}$$

Тогда бесконечное произведение

$$K_\sigma(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}E_\sigma(z;z_k) \tag{1.5}$$

сходится равномерно и абсолютно в каждом замкнутом круге $|z|\leqslant r<+\infty$ *и представляет целую функцию в плоскости* $|z|<+\infty$ *с нулями* $\{z_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Отметим, что функцию $Q_\sigma(z;\zeta)$ можно записать в виде

$$Q_\sigma(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma z)^n}{n!}\left\{\zeta^{-n}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt-\right.$$

$$\left.-\zeta^{-n}\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt-\bar{\zeta}^n\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{-n-1}\,dt\right\}$$

и, поскольку

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt=\frac{(n-1)!}{\sigma^n},$$

то имеет место

$$Q_\sigma(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma z)^n}{n!}\zeta^{-n}\frac{(n-1)!}{\sigma^n}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma z)^n}{n!}\left\{\zeta^{-n}\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt+\bar{\zeta}^n\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{-n-1}\,dt\right\}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n\zeta^{-n}}{n}-\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt+$$

$$+\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma z\zeta^{-1}t)^n}{n!}\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt+\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma z\bar{\zeta}t^{-1})^n}{n!}\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n\zeta^{-n}}{n}-\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt+\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)}}{t}\,dt+\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{\frac{\sigma z\bar{\zeta}}{t}}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt.$$

Полагая далее, что $|z|<|\zeta|$, будем иметь

$$Q_\sigma(z;\zeta)=\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)-\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt+\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)}\frac{dt}{t}+$$

$$+\int\limits_{|\cdot|}^{\infty}e^{\frac{\sigma z\bar{\zeta}}{t}}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt\equiv\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+P_\sigma(z;\zeta),$$

и окончательно из (1.1) получим

$$E_\sigma(z;\zeta)=e^{-P_\sigma(z;\zeta)}\qquad(|z|<|\zeta|).\tag{1.6}$$

Теперь оценим функцию $P_\sigma(z;\zeta)$

$$|P_\sigma(z;\,\zeta)| \leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|} + \int\limits_{|\zeta|}^{\infty} |e^{-\sigma t\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)}|\,\frac{dt}{t} + \int\limits_{|\zeta|}^{\infty} |e^{\frac{\sigma z\bar{\zeta}}{t}}|\,\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|} + \frac{e^{-\sigma|\zeta|(1-|z|\,|\zeta|^{-1})}}{\sigma|\zeta|(1-|z|\,|\zeta|^{-1})} + \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|}\,e^{\sigma|z|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|}\left\{1 + \frac{e^{\sigma r}}{(1-r|\zeta|^{-1})} + e^{\sigma r}\right\} \qquad (|z| \leqslant r < |\zeta|).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{|\zeta|\to+\infty}} \frac{|P_\sigma(z;\,\zeta)|}{|\zeta|^{-1}e^{-\sigma|\zeta|}} \leqslant \varphi(r), \qquad \varphi(r) = \frac{1+2e^{\sigma r}}{\sigma},$$

но тогда имеем также

$$\overline{\lim_{|\zeta|\to+\infty}} \frac{1-|E_\sigma(z;\,\zeta)|}{|\zeta|^{-1}e^{-\sigma|\zeta|}} = \overline{\lim_{|\zeta|\to+\infty}} \frac{1-e^{-\operatorname{Re}P_\sigma(z;\,\zeta)}}{|\zeta|^{-1}e^{-\sigma|\zeta|}} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{|\zeta|\to+\infty}} \frac{1-e^{-|P_\sigma(z;\,\zeta)|}}{|\zeta|^{-1}e^{-\sigma|\zeta|}} \leqslant \varphi(r) \qquad (|z| \leqslant r).$$

Это неравенство означает, что при условии (1.4) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{1-|E_\sigma(z;\,z_k)|\}$$

сходится равномерно в каждом круге $|z| \leqslant r$, что эквивалентно утверждениям теоремы.

Отметим, наконец, что условие (1.4) не только достаточно, но и необходимо для сходимости произведения $K_\sigma(z;\,z_k)$.

В самом деле, если произведение $K_\sigma(z;\,z_k)$ сходится, то

$$K_\sigma(0;\,z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} E_\sigma(0;\,z_k) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} Q_\sigma(0;\,z_k)\right\} = c_0 > 0. \qquad (1.7)$$

Но

$$Q_\sigma(0;\,\zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x}\,dx,$$

причем нетрудно убедиться, что

$$\lim_{|\zeta|\to+\infty} \frac{Q_\sigma(0;\,\zeta)}{\{e^{-\sigma|\zeta|}|\zeta|^{-1}\}} = \sigma.$$

И поэтому при $|z| \geqslant R_0$ имеем

$$Q_\sigma(0;\,\zeta) \geqslant \frac{\sigma}{2}\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}. \qquad (1.8)$$

Наконец, из (1.7) и (1.8) следует, что вместе с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} Q_\sigma(0; z_k)$ сходится также ряд (1.4).

1.2. Установим теперь одно глобальное граничное свойство функции $K_\sigma(z; z_k)$ при $z \to \infty$.

Теорема 2. *Для любого сходящегося произведения* $K_\sigma(z; z_k)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\Gamma(1+\sigma\rho)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log|K_\sigma(\rho e^{i\theta}; \zeta)|\} d\theta = 0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Пусть

$$K_\sigma(z; \zeta) = c_0 + c_1 z^2 + \cdots \qquad (|z| < +\infty),$$

тогда имеем

$$c_0 = K_\sigma(0; z_k) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} Q_\sigma(0; z_k)\right\}, \tag{1.10}$$

где

$$Q_\sigma(0; z_k) = \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx.$$

Запишем формулу (2.34) ([1], стр. 605) для функции $K_\sigma(z; z_k)$, заметив, что в нашем случае $\lambda = 0$, $\alpha = \sigma\rho$,

$$\frac{\Gamma(1+\sigma\rho)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log|K_\sigma(\rho e^{i\theta}; z_k)|\} d\theta = \log|c_0| +$$

$$+ \sum_{0<|z_k|<\rho} w_{\sigma\rho}\left(0; \frac{z_k}{\rho}\right), \tag{1.11}$$

где

$$w_{\sigma\rho}\left(0; \frac{\zeta}{\rho}\right) = \int_{\frac{|\zeta|}{\rho}}^{1} \frac{(1-x)^{\sigma\rho}}{x} dx.$$

Таким образом, из (1.10) и (1.11) получим соотношение

$$\frac{\Gamma(1+\sigma\rho)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log|K_\sigma(\rho e^{i\theta}; z_k)|\} d\theta =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx + \sum_{0<|z_k|<\rho} \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx \qquad (0<\rho<+\infty).$$

Отметим, что на основании неравенства $\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} \leqslant e^{-\sigma x}$ $(0 \leqslant x \leqslant \rho)$,

имеем

$$\int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx \leqslant \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \leqslant \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx \leqslant \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{\sigma|z_k|},$$

причем ввиду сходимости произведения $K_\sigma(z; z_k)$ сходится также и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|} < +\infty.$$

Теперь для данного фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $\rho_0 = \rho_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $\rho > \rho_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$\sum_{\rho_0 < |z_k| < \rho} \int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx \leqslant \sum_{\rho_0 < |z_k| < +\infty} \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем далее $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon) \geqslant \rho_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\left|\sum_{|z_k| < \rho_0} \left\{\int_{|z_k|}^{\rho} \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x} dx - \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\rho_1 < \rho < +\infty).$$

Таким образом, при $\rho > \rho_1(\varepsilon)$ будем иметь

$$\left|\frac{\Gamma(1+\sigma\rho)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\rho^{-\sigma\rho} D^{-\sigma\rho} \log|K_\sigma(\rho e^{i\theta}; \zeta)|\} d\theta\right| < \varepsilon,$$

что эквивалентно утверждению (1.9) теоремы.

1.3. С помощью некоторых вспомогательных лемм установим еще одно важное свойство функции $K_\sigma(z; \zeta)$.

Пусть $K_\sigma(z; z_k)$ — некоторые сходящиеся произведения

$$K_\sigma(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right) e^{-Q_\sigma(z; z_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} E_\sigma(z; z_k).$$

Обозначим

$$D_{\sigma_1}(re^{i\varphi}; \zeta) = \Gamma(1+\sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log|E_\sigma(re^{i\varphi}; \zeta)|, \qquad (1.12)$$

и докажем лемму.

Лемма 1. *Для любого $\sigma_1 > \sigma > 0$ имеет место интегральное представление*

$$D_{\sigma}(re^{i\varphi};\zeta) = -r^{-\sigma_1 r}\operatorname{Re} e^{i(\varphi-\arg\zeta)}\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\int_0^r \frac{e^{\sigma x e^{i(\varphi-\arg\zeta)}}}{1-\dfrac{xe^{i\varphi}}{\zeta}}(r-x)^{\sigma_1 r}\,dx -$$

$$-\operatorname{Re}\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r}\int_{|\zeta|}^{\infty}\left\{\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r-1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi}\bar\zeta}{t}}\,dx\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt. \qquad (1.13)$$

Доказательство. Заметим, что

$$r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}\log|E_\sigma(re^{i\varphi};\zeta)| = r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right| -$$

$$-r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}\operatorname{Re} Q_\sigma(re^{i\varphi};\zeta).$$

Очевидно, что

$$r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right| = -\operatorname{Re}\frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\int_0^r \frac{\dfrac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1-\dfrac{te^{i\varphi}}{\zeta}}(r-t)^{\sigma_1 r}\,dt,$$

$$\operatorname{Re} r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}Q_\sigma(re^{i\varphi};\zeta) = \operatorname{Re}\frac{1}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\int_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt -$$

$$-\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma re^{i\varphi})^n}{\Gamma(1+\sigma_1 r+n)}\left\{\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt + \bar\zeta^n\int_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t-n-1}\,dt\right\},$$

и следовательно

$$r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}\log|E_\sigma(re^{i\varphi};\zeta)| = -\operatorname{Re}\frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\int_0^r\frac{\dfrac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1-\dfrac{te^{i\varphi}}{\zeta}}(r-t)^{\sigma_1 r}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\int_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sigma re^{i\varphi})^n}{\Gamma(1+\sigma_1 r+n)}\left\{\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt -\right.$$

$$\left.-\bar\zeta^n\int_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma t}t^{-n-1}\,dt\right\} = -\operatorname{Re}\frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\int_0^r\frac{\dfrac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1-\dfrac{te^{i\varphi}}{\zeta}}(r-t)^{\sigma_1 r}dt -$$

$$-\operatorname{Re}\int_{|\zeta|}^{\infty}E_1\left(\frac{\sigma re^{i\varphi}\bar\zeta}{t};\ 1+\sigma_1 r\right)\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt +$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^{|\zeta|}\left\{E_1\left(\frac{\sigma re^{i\varphi}t}{\zeta};\ 1+\sigma_1 r\right)-\frac{1}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt, \qquad (1.14)$$

где
$$E_1(z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k)} \tag{1.15}$$

—известная функция типа Миттаг-Леффлера порядка $\rho=1$. Но нетрудно убедиться, что справедливы тождества

$$E_1\left(\frac{\sigma re^{i\varphi}t}{\zeta};\ 1+\sigma_1 r\right)-\frac{1}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}=E_1\left(\frac{\sigma re^{i\varphi}t}{\zeta};\ 2+\sigma_1 r\right)\frac{\sigma re^{i\varphi}t}{\zeta}=$$

$$=\frac{r^{-(1+\sigma_1 r)}}{\Gamma(1+\sigma_1 r)}\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r}e^{\frac{\sigma txe^{i\varphi}}{\zeta}}\,dx$$

и

$$E_1\left(\frac{\sigma re^{i\varphi}\bar\zeta}{t};\ 1+\sigma_1 r\right)=\frac{r^{-\sigma_1 r}}{\Gamma(\sigma_1 r)}\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r-1}e^{\frac{\sigma xe^{i\varphi}\bar\zeta}{t}}\,dx,$$

с помощью которых из (1.14) приходим к интегральному представлению

$$D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\ \zeta)=\Gamma(1+\sigma_1 r)r^{-\sigma_1 r}D^{-\sigma_1 r}\log|E_\sigma(re^{i\varphi};\ \zeta)|=$$

$$=-r^{-\sigma_1 r}\operatorname{Re}\int_0^r\frac{\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1-\frac{te^{i\varphi}}{\zeta}}(r-t)^{\sigma_1 r}dt+$$

$$+\operatorname{Re}\frac{r^{-\sigma_1 r}}{\zeta}\sigma e^{i\varphi}\int_0^{|\zeta|}\left\{\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r}e^{\frac{\sigma txe^{i\varphi}}{s}}dx\right\}e^{-\sigma t}dt-$$

$$-\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r}\operatorname{Re}\int_{|\zeta|}^{\infty}\left\{\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r-1}e^{\frac{\sigma xe^{i\varphi}\bar\zeta}{\zeta}}dx\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}dt\equiv J_1+J_2+J_3. \tag{1.16}$$

Из выражения для J_2 получим

$$J_2=\operatorname{Re}\frac{r^{-\sigma_1 r}\sigma e^{i\varphi}}{\zeta}\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r}\left\{\int_0^{|\zeta|}e^{-\sigma t\left(1-\frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}\right)}dt\right\}dx=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{r^{-\sigma_1 r}}{|\zeta|}e^{i(\varphi-\arg\zeta)}\int_0^r\frac{1-e^{-\sigma|\zeta|\left(1-\frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}\right)}}{1-\frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}}(r-x)^{\sigma_1 r}dx=$$

$$=-J_1-\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}r^{-\sigma_1 r}\operatorname{Re}e^{i(\varphi-\arg\zeta)}\int_0^r\frac{e^{\sigma xe^{i(\varphi-\arg\zeta)}}}{1-\frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}}(r-x)^{\sigma_1 r}dx. \tag{1.17}$$

Остается только подставить значение J_2 из (1.17) в (1.16), чтобы получить формулу (1.13) леммы.

Лемма 2. *Для любого* $\sigma_1 > \sigma$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\zeta)|\,d\varphi \leqslant \frac{2+\sigma_1}{\sigma_1-\sigma}\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}. \tag{1.18}$$

Доказательство. В предыдущей лемме была получена формула (1.13)

$$D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\zeta) = -r^{-\sigma_1 r}\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\operatorname{Re} e^{i(\varphi-\arg\zeta)}\int_0^r \frac{e^{\sigma x e^{i(\varphi-\arg\zeta)}}}{1-\dfrac{xe^{i\varphi}}{\zeta}}(r-x)^{\sigma_1 r}\,dx =$$

$$= -\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r}\operatorname{Re}\int_{|\zeta|}^{\infty}\left\{\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r-1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi}\bar\zeta}{t}}\,dx\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt \equiv J_2^* + J_3.$$

Теперь необходимо оценить интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\zeta)|\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |J_2^*(re^{i\varphi};\zeta)|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |J_3(re^{i\varphi};\zeta)|\,d\varphi. \tag{1.19}$$

Во первых, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |J_2(re^{i\varphi};\zeta)|\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r}\operatorname{Re}\int_{|\zeta|}^{\infty}\left\{\int_0^r (r-x)^{\sigma_1 r-1} e^{\frac{\sigma x e^{i\varphi}\bar\zeta}{t}}\,dx\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt\right|d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{|\zeta|}^{\infty}\left[\int_0^r\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma_1 r-1} e^{\frac{\sigma x|\zeta|}{t}}\,dx\right]\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt\right\}d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|\zeta|}^{\infty}\left[1+\sigma\int_0^r\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma_1 r} e^{\frac{\sigma x|\zeta|}{t}}\,dx\right]\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt <$$

$$\leqslant \int_{|\zeta|}^{\infty}\left\{1+\sigma\int_0^{\infty} e^{-(\sigma_1-\sigma)x}\,dx\right\}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt \leqslant \frac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma}\int_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt. \tag{1.20}$$

Во-вторых заметив, что

$$|J_2^*(re^{i\varphi};\zeta)| \leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\int\limits_0^r \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)x}}{\left|1-\frac{xe^{i\varphi}}{\zeta}\right|}dx = \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\int\limits_{|0|}^r \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)x}}{\left|1-\frac{xe^{i\gamma}}{|\zeta|}\right|}dx,$$

где $\gamma = \varphi - \arg\zeta$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|J_2^*(re^{i\varphi};\zeta)|d\varphi \leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\int\limits_0^r e^{-(\sigma_1-\sigma)x}dx\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left|1-\frac{xe^{i\gamma}}{|\zeta|}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\int\limits_0^r \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)x}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{|\zeta|^2}}}dx \leqslant \frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\cdot|\zeta|\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{|1-x^2|}}dx \equiv J_4\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}. \tag{1.21}$$

Здесь

$$J_4 = |\zeta|\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{|1-x^2|}}dx \leqslant |\zeta|\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{|1-x|}}dx =$$

$$= |\zeta|\int\limits_0^1 \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{1-x}}dx + |\zeta|\int\limits_1^\infty \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{x-1}}dx = J_4' + J_4''. \tag{1.22}$$

Перейдем к оценке слагаемых J_4' и J_4''.

$$J_4' = |\zeta|\int\limits_0^1 \frac{e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|x}}{\sqrt{1-x}}dx = 2|\zeta|\int\limits_0^1 e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|(1-t^2)}dt \leqslant$$

$$\leqslant 2|\zeta|\int\limits_0^1 e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|(1-t)}dt = 2|\zeta|e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|}\int\limits_0^1 e^{(\sigma_1-\sigma)|\zeta|t}dt = \frac{2(1-e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|})}{\sigma_1-\sigma}. \tag{1.23}$$

Аналогично получим

$$J_4'' \leqslant \frac{2}{\sigma_1-\sigma}e^{-(\sigma_1-\sigma)|\zeta|}. \tag{1.24}$$

Из (1.22), (1.23) и (1.24) придем к оценке

$$J_4 \leqslant J_4' + J_4'' \leqslant \frac{2}{\sigma_1-\sigma}. \tag{1.25}$$

Наконец, из (1.21) и (1.25) следует

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|J_2^*(re^{i\varphi};\zeta)|d\varphi \leqslant \frac{2}{\sigma_1-\sigma}\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|},$$

откуда и из (1.20) придем к утверждению леммы.

Лемма 3. *Для каждого сходящегося произведения* $K_\sigma(z; z_k)$

$$\sup_{0<r<+\infty} \{\Gamma(1+\sigma_1 r)\, T_{\sigma_1 r}(r;\ K_\sigma(z;\ z_k))\} < +\infty. \tag{1.26}$$

Доказательство. Из определения функции

$$K_\sigma(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-Q_\sigma(z;\ z_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} E_\sigma(z;\ z_k)$$

имеем

$$\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log|K_\sigma(re^{i\varphi};\ z_k)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \{\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log|E_\sigma(re^{i\varphi};\ z_k)|\} = \sum_{k=1}^{\infty} D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\ z_k).$$

Следовательно

$$\left|\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log|K_\sigma(re^{i\varphi};\ z_k)|\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\ z_k)|$$
$$(0<r<+\infty).$$

Отсюда на основании неравенства (1.18) леммы 2 следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log|K_\sigma(re^{i\varphi};\ z_k)|\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_{\sigma_1}(re^{i\varphi};\ z_k)|\, d\varphi \leqslant \frac{2+\sigma_1}{\sigma_1-\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|} < +\infty.$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от r, то лемма доказана.

2. Класс U_σ и его представление

Обозначим через U_σ множество мероморфных на всей плоскости z функций, для которых при данном $\sigma > 0$

$$\sup_{0<\rho<+\infty} \{\Gamma(1+\sigma\rho)\, T_{\sigma\rho}(\rho;\ F)\} < +\infty, \tag{2.1}$$

где $T_{\sigma\rho}(\rho;\ F)$ — значение α-характеристической функции $T_\alpha(\rho;\ F)$ при $\alpha = \sigma\rho$.

2.1. Пусть $\{a_\mu\}$ $(0<|a_\mu|<+\infty)$ и $\{b_\nu\}$ $(0<|b_\nu|<+\infty)$ — последовательности комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей.

Предположим, что выполняются условия

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|a_\mu|}}{|a_\mu|} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|b_\nu|}}{|b_\nu|} < +\infty, \tag{2.2}$$

где $\sigma\,(0<\sigma<+\infty)$ — фиксированное число.

Полагая далее, что $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция конечного изменения на $[0, 2\pi]$, образуем функцию

$$F(z) = Cz^{\lambda} \frac{K_\sigma(z;\ a_\mu)}{K_\sigma(z;\ b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2e^{\sigma z e^{-i\theta}}-1)\,d\psi(\theta)\right\} \tag{2.3}$$

$$(|z| < +\infty).$$

Нетрудно убедиться, что $F(z)$ — мероморфная на всей плоскости функция.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 3. 1°. *Если $F(z) \in U_\sigma$, то она допускает представление вида (2.3), где C — постоянная, $K_\sigma(z;\ \zeta)$ — сходящееся произведение.*

2°. *Каждая функция $F(z)$ вида (2.3) при любом $\sigma_1 > \sigma > 0$ принадлежит классу U_{σ_1}.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 4. *Если $\psi(\theta)$ — вещественная функция конечного изменения на $[0, 2\pi]$, то целая функция*

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2e^{\sigma z e^{-i\theta}}-1)\,d\psi(\theta)\right\} \qquad (\sigma > 0)$$

принадлежит классу U_{σ_1} при любом $\sigma_1 > \sigma > 0$.

Доказательство. Очевидно, что $f(z)$ — целая функция. Докажем теперь, что при любом $\sigma_1 > \sigma$ $f(z) \in U_{\sigma_1}$, т. е. докажем, что

$$\sup_{0<r<+\infty}\left\{\int_0^{2\pi}|\Gamma(1+\sigma_1 r) r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r}\log|f(re^{i\varphi})||\,d\varphi\right\} < +\infty.$$

Заметим, что

$$\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r}\left\{\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}(2e^{\sigma r e^{i(\varphi-\theta)}}-1)\,d\psi(\theta)\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\left[\sigma_1\int_0^r\left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r-1} e^{\sigma t e^{i(\varphi-\theta)}}\,dt - 1\right]d\psi(\theta),$$

откуда

$$\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r}\log|f(re^{i\varphi})| =$$

$$= \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sigma_1\int_0^r\left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r-1} e^{\sigma t e^{i(\varphi-\theta)}}\,dt - 1\right]d\psi(\theta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sigma_1\int_0^r\left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r-\theta} e^{\sigma t\cos(\varphi-\theta)}\,dt + 1\right]d\psi(\theta). \tag{2.4}$$

На основании неравенства

$$\left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r} \leqslant e^{-\sigma_1 t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant r)$$

оценим интеграл

$$\sigma_1 \int_0^r \left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r-1} e^{\sigma t \cos(\varphi-\theta)}\, dt \leqslant \int_0^r \left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r-1} e^{\sigma t} dt =$$

$$= 1+\sigma \int_0^r \left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r} e^{\sigma t} dt < 1+\sigma \int_0^r e^{-(\sigma_1-\sigma)t} dt < \frac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma}. \qquad (2.5)$$

Согласно (2.4) и (2.5) окончательно получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\Gamma(1+\sigma_1 r)\, r^{-\sigma_1 r} D^{-\sigma_1 r} \log|f(re^{i\varphi})|\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_1 \left[\int_0^r \left(1-\frac{t}{r}\right)^{\sigma_1 r-1} e^{\sigma t \cos(\varphi-\theta)}\, dt\right] d\psi(\theta)\right| d\varphi + c_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_0 \sigma_1}{\sigma_1-\sigma} + c_0 < +\infty, \qquad (2.6)$$

где

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi(\theta).$$

Этим и завершается доказательство леммы, так как правая часть в (2.6) не зависит от r.

Лемма 5. *Справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\lim_{\rho\to+\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma\rho}{n(n+\sigma\rho)} - \log\rho\right\} = \int_0^1 \frac{1-e^{-\sigma x}}{x}\, dx - \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x}\, dx \equiv \varkappa_0. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Заметив, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma\rho}{n(n+\sigma\rho)} = \int_0^1 \frac{1-x^{\sigma\rho}}{1-x}\, dx \quad \text{и} \quad \log\rho = \int_1^{\rho} \frac{dx}{x},$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma\rho}{n(n+\sigma\rho)} - \log\rho = \int_0^1 \frac{1-x^{\sigma\rho}}{1-x}\, dx - \int_1^{\rho} \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{\sigma\rho}}{x}\, dx -$$

$$-\int_1^\rho \frac{dx}{x} = \int_0^{1/\rho} \frac{1-(1-x)^{\sigma\rho}}{x}\,dx + \int_{1/\rho}^1 \frac{1-(1-x)^{\sigma\rho}}{x}\,dx - \int_1^\rho \frac{dx}{x} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x}\,dx + \int_1^\rho \frac{1-\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}-1}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x}\,dx - \int_1^\rho \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x}\,dx.$$

Легко видеть, что под знаками последних двух интегралов допустим предельный переход.

Таким образом, приходим к соотношению (2.7).

Лемма 6. *Справедлива следующая предельная формула*

$$\lim_{\rho\to+\infty} w_{\sigma\rho}^{(\rho)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^\infty \frac{e^{-\sigma t}}{t}\,dt -$$

$$-\sum_{n=1}^\infty \frac{(\sigma z)^n}{n!}\left\{\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma t}t^{n-1}\,dt - \bar\zeta^n \int_{|\zeta|}^\infty e^{-\sigma t}t^{-n-1}\,dt\right\} \equiv Q_\sigma(z;\zeta), \quad (2.8)$$

где $w_{\sigma\rho}^{(\rho)}(z;\zeta)$ *определяется по формуле (2) при* $\alpha=\sigma\rho$:

$$w_{\sigma\rho}^{(\rho)}(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^\rho \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x}\,dx -$$

$$-\sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(1+\sigma\rho+n)}{\Gamma(1+\sigma\rho)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\left\{\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} X^{n-1}\,dx -\right.$$

$$\left.-\bar\zeta^n \int_{|\zeta|}^\rho \left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho} X^{-n-1}\,dx\right\} \qquad (|z|\leqslant r<\rho). \quad (2.9)$$

Доказательство. Предельное соотношение

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{|\zeta|}^\rho \frac{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}}{x}\,dx = \int_{|\zeta|}^\infty \frac{e^{-\sigma x}}{x}\,dx \quad (2.10)$$

устанавливается без труда.

Далее, пользуясь формулой Стирлинга

$$\Gamma(1+x) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}, \qquad x\to+\infty,$$

без труда приходим к следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\rho\to+\infty}\left\{\frac{\rho^{-n}\Gamma(1+\sigma\rho+n)}{\Gamma(1+\sigma\rho)}\left[\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}X^{n-1}\,dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.\bar\zeta^{n}\int_{|\zeta|}^{\rho}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}x^{-n-1}\,dx\right]\right\}=\sigma^n\left\{\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}e^{-\sigma x}x^{n-1}\,dx-\bar\zeta^{n}\int_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma x}x^{-n-1}\,dx\right\}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

Поэтому для доказательства предельного соотношения (2.8) леммы достаточно убедиться в том, что в разложении (2.9) полученный предельный переход при $\rho\to+\infty$ допустим. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда (2.9) относительно параметра $(0<\rho<+\infty)$.

Действительно, при $|z|\leqslant r$

$$\left|\frac{\Gamma(1+\sigma\rho+n)}{\Gamma(1+\sigma\rho)\Gamma(1+n)}\left\{\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}x^{n-1}\,dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bar\zeta^{n}\int_{|\zeta|}^{\rho}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}x^{-n-1}dx\right\}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right|\leqslant\frac{\Gamma(1+\sigma\rho+n)}{\Gamma(1+\sigma\rho)\Gamma(1+n)}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\times$$

$$\times\left\{|\zeta|^{-n}|\zeta|^{n-1}\int_0^{|\zeta|}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}dx+|\zeta|^n|\zeta|^{-n-1}\int_{|\zeta|}^{\rho}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}dx\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(1+\sigma\rho+n)}{\Gamma(1+\sigma\rho)\Gamma(1+n)}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\frac{1}{|\zeta|}\int_0^{\rho}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma\rho}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(\sigma\rho+n)^{\sigma\rho+n+\frac{1}{2}}e^{-\sigma\rho-n}}{(\sigma\rho)^{\sigma\rho+\frac{1}{2}}e^{-\sigma\rho}(\sigma\rho)^n\Gamma(1+n)}\cdot\frac{(\sigma r)^n}{\sigma|\zeta|}\leqslant c(\sigma;\ |\zeta|)\,\frac{(\sigma r)^n}{n!}\cdot$$

Это значит, что наш ряд (2.9) мажорируется рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma r)^n}{n!}$, который не зависит от ρ, и, тем самым, в нем почленный предельный переход допустим.

Лемма 7. *Пусть последовательность комплекснкх чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma|z_k|}}{|z_k|^{\frac{1}{2}}}<+\infty. \tag{2.11}$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty}\prod_{|z_k|<r<+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-Q_\sigma(z;\,z_k)}\equiv K_\sigma(z;\,z_k)\qquad(|z|<+\infty).\quad(2.1$$

Доказательство. Заметим, что при условии (2.11) произв... дение $K_\sigma(z;\,z_k)$ сходится на всей плоскости z, за исключением пос... довательности точек $\{z_k\}_1^\infty$, и представляет целую функцию.

Предполагая, что $|z|\leqslant\rho<r_0<r<+\infty$, обозначим

$$B_{\sigma r}^{(r_0,\,r)}(z;\,z_k)=\prod_{r_0<|z_k|<r}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)},$$

$$B_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)=\prod_{|z_k|<r<+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)}.$$

Тогда, очевидно, что

$$B_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)=B_{\sigma r}^{(r_0,\,r)}(z;\,z_k)\cdot\prod_{|z_k|\leqslant r_0}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)}.$$

Но согласно лемме 6

$$\lim_{r\to+\infty}w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)=Q_\sigma(z;\,z_k)\qquad(k=1,\,2,\,\cdots)\qquad(2.13$$

и поэтому

$$\lim_{r\to+\infty}\prod_{|z_k|<r_0}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,z_k)}=\prod_{|z_k|<r_0}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-Q_\sigma(z;\,z_k)}\qquad(2.13'$$

$$(|z|<+\infty).$$

Запишем формулу (3.10), установленную в работе [1] (стр. 624) для значения $\alpha=\sigma\rho$:

$$A_{\sigma r}^{(r)}(z;\,\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-w_{\sigma r}^{(r)}(z;\,\zeta)}=e^{-\omega_{\sigma r}^{(r)}(z;\,\zeta)}\qquad(|z|<|\zeta|\leqslant r),$$

где

$$\omega_{\sigma r}^{(r)}(z;\,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{r}\left\{\frac{1}{\left(1-\dfrac{zx}{\zeta r}\right)^{1+\sigma r}}+\frac{1}{\left(1-\dfrac{z\bar\zeta}{rx}\right)^{1+\sigma r}}-1\right\}\frac{\left(1-\dfrac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}\,dx$$

и поэтому

$$|\omega_{\sigma r}^{(r)}(z;\zeta)|\leqslant\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}\cdot\frac{dx}{\left(1-\left|\frac{z}{\zeta}\right|\cdot\frac{x}{r}\right)^{1+\sigma r}}+$$

$$+\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}\cdot\frac{dx}{\left(1-\frac{|z||\zeta|}{rx}\right)^{1+\sigma r}}+$$

$$+\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}dx\equiv A_1+A_2+A_3. \qquad (2.14)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (2.14), полагая, что $|z|\leqslant\rho<r_0<|\zeta|\leqslant r$:

$$A_1=\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}\,\frac{dx}{\left(1-\left|\frac{z}{\zeta}\right|\frac{x}{r}\right)^{1+\sigma r}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|\zeta|\left(1-\left|\frac{z}{\zeta}\right|\right)}\int\limits_{|\zeta|}^{r}\left(\frac{1-\frac{x}{r}}{1-\frac{|z|x}{|\zeta|r}}\right)^{\sigma r}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|\zeta|\left(1-\left|\frac{z}{\zeta}\right|\right)}\int\limits_{|\zeta|}^{r}\left[1-\frac{x}{r}\left(1-\frac{|z|}{|\zeta|}\right)\right]^{\sigma r}dx.$$

На основании неравенства

$$(1-x)\leqslant e^{-x}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

получим оценку для A_1

$$A_1\leqslant\frac{1}{|\zeta|\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)}\int\limits_{|\zeta|}^{r}e^{-\sigma x\left(1-\frac{|z|}{|\zeta|}\right)}dx\leqslant\frac{1}{|\zeta|\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)}\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}e^{-\sigma x\left(1-\frac{|z|}{|\zeta|}\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma|\zeta|\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)}\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|+\sigma|z|}}{\left(1-\frac{|z|}{|\zeta|}\right)}\leqslant\frac{e^{\sigma\rho}}{\sigma\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)^2}\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}. \qquad (2.15)$$

Далее, так как

$$A_2=\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}\cdot\frac{dx}{\left(1-\frac{|z\zeta|}{rx}\right)^{1+\sigma r}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|\zeta|\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)^{1+\sigma r}}\int\limits_{|\zeta|}^{r}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}dx,$$

то, в силу неравенства

$$\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^{\sigma r}>\frac{1}{2}e^{-\sigma\rho}\qquad(r\geqslant r_1),$$

будем иметь

$$A_2\leqslant\frac{2e^{\sigma r}}{|\zeta|\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)}\cdot\frac{\left(1-\frac{|\zeta|}{r}\right)^{\sigma r}}{\sigma}\leqslant\frac{2e^{\sigma\rho}}{\sigma\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)}\cdot\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\qquad(r\geqslant r_1). \tag{2.16}$$

Наконец, очевидно, что

$$A_3=\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x}dx\leqslant\int\limits_{|\zeta|}^{r}\frac{e^{-\sigma x}}{x}dx\leqslant\int\limits_{|\zeta|}^{\infty}\frac{e^{-\sigma x}}{x}dx\leqslant\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|}. \tag{2.17}$$

Из оценок (2.14), (2.15), (2.16) и (2.17) окончательно получим

$$|\omega_{\sigma r}^{(r)}(z;\zeta)|\leqslant\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{\sigma|\zeta|}\left\{1+\frac{e^{\sigma\rho}}{\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)^2}+\frac{2e^{\sigma\rho}}{\left(1-\frac{\rho}{r_0}\right)}\right\}\equiv$$

$$\equiv\varkappa(\rho;r_0)\frac{e^{-\sigma|\zeta|}}{|\zeta|}\qquad(r\geqslant r_1). \tag{2.18}$$

Так как правая часть в (2.18) не зависит от r, то, ввиду сходимости рядов (2.11) и (2.13), существует предел

$$\lim_{r\to+\infty}B_{\sigma r}^{(r_0,r)}(z;z_k)=\prod_{r_0<|z_k|<+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-Q_\sigma(z;z_k)}. \tag{2.19}$$

И, наконец, из (2.13′) и (2.19) вытекает предельное соотношение (2.12) леммы.

Лемма 8. *Если функция $F(z)$ принадлежит классу U_σ и если $\{a_\mu\}_1^\infty$ и $\{b_\nu\}_1^\infty$ — соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$, то*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|a_\mu|}}{|a_\mu|} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|b_\nu|}}{|b_\nu|} < +\infty.$$

Доказательство. Так как $F(z) \in U_\sigma$, то

$$\sup_{0<r<+\infty} \{\Gamma(1+\sigma r)[m_{\sigma r}(r;\infty) + N_{\sigma r}(r;\infty)]\} = T_\sigma(F) < +\infty.$$

определению (3)

$$(1+\sigma r) N_{\sigma r}(r;\infty) = \sum_{0<|b_\nu|<r} \int_{|b_\nu|}^{r} \frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx + n(0;\infty)\{\log r - K_{\sigma r}\}. \tag{2.20}$$

лемме 5 второе слагаемое в правой части (2.20) имеет предел $\varkappa_0$, первое слагаемое монотонно возрастает вместе с r и ограничено ерху. Следовательно существует предел

$$\lim_{r\to+\infty} \left\{ \sum_{0<|b_\nu|<r} \int_{|b_\nu|}^{r} \frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx \right\} < +\infty. \tag{2.21}$$

огда для фиксированного $r_0 > 0$ можно записать цепочку неравенств

$$\sum_{0<|b_\nu|<r_0} \int_{|b_\nu|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx = \lim_{r\to+\infty} \sum_{0<|b_\nu|<r_0} \int_{|b_\nu|}^{r} \frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx <$$

$$< \lim_{r\to+\infty} \sum_{0<|b_\nu|<r} \int_{|b_\nu|}^{r} \frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\sigma r}}{x} dx < +\infty,$$

куда, ввиду произвольности r_0, вытекает сходимость ряда

$$\sum_{0<|b_\nu|<+\infty} \int_{|b_\nu|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx < +\infty,$$

о эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{0<|b_\nu|<+\infty} \frac{e^{-\sigma|b_\nu|}}{|b_\nu|} < +\infty.$$

налогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma|a_\mu|}}{|a_\mu|} < +\infty,$$

иду того, что

$$T_{\sigma r}(r;\ F) = m_{\sigma r}(r;\ 0) + N_{\sigma r}(r;\ 0) + \log|c_\lambda|.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.

1°. Пусть функция $F(z)$ мероморфна на всей плоскости и $F(z)\in U_\sigma$. Напишем для нее формулу (1) введения, справедливую для произвольной мероморфной в круге $|z|<\rho$ функции, и при любом $\alpha\,(-1<\alpha<$ $<+\infty)$

$$F(z) = e^{i\arg c_\lambda}\, e^{\lambda\left[\sum\limits_1^\infty \frac{\alpha}{n(n+\alpha)} - \log\rho\right]} z^\lambda \frac{B_\alpha^{(\rho)}(z;\ a_\mu)}{B_\alpha^{(\rho)}(z;\ b_\nu)}\times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{2}{\left(1-\frac{z}{\rho}e^{-i\theta}\right)^{1+\alpha}} - 1\right]\Gamma(1+\alpha)\,\rho^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|F(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\right\}. \tag{2.22}$$

Из условия $F(z)\in U_\sigma$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\Gamma(1+\sigma\rho)\rho^{-\sigma\rho}D^{-\sigma\rho}\log|F(\rho e^{i\theta})|\right|d\theta = m_{\sigma\rho}(\rho;\ F) + m_{\sigma\rho}\left(\rho;\ \frac{1}{F}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2T_\sigma(F)<+\infty \qquad (0<\rho<+\infty).$$

Обозначим через

$$\Psi_\rho(\theta) = \int\limits_0^\theta \Gamma(1+\sigma\rho)\,\rho^{-\sigma\rho}D^{-\sigma\rho}\log|F(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi \qquad (0<\rho<+\infty),$$

получим семейство функций $\{\Psi_\rho(\theta)\}$, полное изменение которых ограничено

$$\mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}(\Psi_\rho(\theta)) \leqslant \int\limits_0^{2\pi}\left|\Gamma(1+\sigma\rho)\,\rho^{-\sigma\rho}D^{-\sigma\rho}\log|F(\rho e^{i\theta})|\right|d\theta\leqslant 2T_\sigma(F)<+\infty$$

По первой теореме Хелли существует функция $\psi(\theta)$ с конечным изменением на $[0,\ 2\pi]$ и такая последовательность

$$0<\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_n<\cdots\to\infty,$$

что для любого $\theta\in[0,\ 2\pi]$

$$\psi(\theta) = \lim_{n\to\infty}\psi_{\rho_n}(\theta) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\theta \Gamma(1+\sigma\rho_n)\,\rho_n^{-\sigma\rho_n}D^{-\sigma\rho_n}\log|F(\rho_n e^{i\theta})|\,d\theta.$$

В формуле (2.22) зафиксируем z, а вместо ρ возьмем ρ_n и положим $\alpha=\sigma\rho_n$. Имея в виду леммы 7 и 5 и пользуясь второй теоремой Хелли, перейдем к пределу в (2.22) при $n\to\infty$. В результате мы получим

$$F(z)=e^{i\arg c_\lambda+\gamma_0}\,z^\lambda\,\frac{K_\sigma(z;\,a_\nu)}{K_\sigma(z;\,b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2e^{\sigma z e^{-i\theta}}-1)\,d\psi(\theta)\right\}.$$

2'. Для доказательства второй части теоремы покажем, что для ждой функции $F(z)$ вида (2.3)

$$T_{\sigma_1}(F)=\sup_{0<r<+\infty}\{\Gamma(1+\sigma_1 r)\,T_{\sigma_1 r}(r;\,F)\}<+\infty.$$

трудно убедиться, что если $f(z)\in U_{\sigma_1}$ и $g(z)\in U_{\sigma_1}$, то $f(z)\cdot g(z)\in U_{\sigma}$ $f(z)/g(z)\in U_{\sigma_1}$.

Проверим, что $z^\lambda\in U_{\sigma_1}$ для любого $\sigma_1>0$

$$\sup_{0<r<+\infty}|\Gamma(1+\sigma_1 r)\,T_{\sigma_1 r}(r;\,z^\lambda)|=$$

$$=\sup_{0<r<+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma(1+\sigma_1 r)\,r^{-\sigma_1 r}D_{(+)}^{-\sigma_1 r}\log|re^{i\varphi}|^\lambda\,d\varphi\right\}<+\infty,$$

$$1+\sigma_1 r)\,T_{\sigma_1 r}(r;\,z^\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\Gamma(1+\sigma_1 r)}{\Gamma(\sigma_1 r)}\,r^{-\sigma_1 r}\int_0^r(r-t)^{\sigma_1 r-1}\log t^\lambda\,dt\right\}^+d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\lambda\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r}\int_0^r(r-t)^{\sigma_1 r-1}|\log t|\,dt\leqslant\lambda\sigma_1 r^{1-\sigma_1 r}\int_0^r(r-t)^{\sigma_1 r-1}\,t\,dt=$$

$$=\lambda r^{-\sigma_1 r}\int_0^r(r-t)^{\sigma_1 r}\,dt=\frac{\lambda r}{\sigma_1 r+1}\leqslant\frac{\lambda}{\sigma_1}<+\infty.$$

На основании вышесказанного и лемм 3 и 4 заключаем, что $(z)\in U_{\sigma_1}$ при любом $\sigma_1>\sigma$.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 14. VII.1969

.. Մ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ. Հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաների մի դասի ներկայացման մասին
(ամփոփում)

Մ. Մ. Ջրբաշյանի (1) մոնոգրաֆիայում կառուցված և ուսումնասիրված է միավոր անում մերոմորֆ ֆունկցիաների N_α $(-1<\alpha<+\infty)$ դասերը և ստացված է այդ դասերի րամետրական ներկայացումը։

Ներկա աշխատանքում կառուցված է ամբողջ հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկ-անների U_σ $(0<\sigma<+\infty)$ դաս և այդ դասի համար ստացված է ֆակտորիզացման թեորեմ։ դասը սահմանվում է որպես հարթության մեջ մերոմորֆ այն բոլոր $F(z)$ ֆունկցիա-ի բազմությունը որոնց համար

$$\sup_{0<\rho<+\infty}|\Gamma(1+\sigma\rho)\,T_{\sigma\rho}(\rho;\,F)|<+\infty,$$

եղ $T_{\sigma\rho}(\rho;\,F)$-ը Մ. Մ. Ջրբաշյանի $T_\alpha(\rho;\,F)$ խարակտերիստիկ ֆունկցիայի արժեքն պարամետրի $\sigma\rho$ արժեքի համար։

Դասի համար ֆակտորիզացման թեորեմը ապացուցվում է N_σ դասի (1) ներկայացմ
մեջ սահմանային անցման միջոցով:

A. M. BADALIAN. *On the representation of a class of functions meromorp on the whole plane* (summary)

In the present paper the classes $U_\sigma (0 < \sigma < \infty)$ of meromorphic on the wh plane function are: Introduced and a theorem on their factorisation is proved.

The class U_σ $(0 < \sigma < \infty)$ is defined as the set of all meromorphic on the wh plane function for which

$$\sup_{0 < \rho < \infty} \{\Gamma (1 + \sigma\rho)\, T_{\sigma\rho} (\rho; F)\} < \infty$$

where $T_{\sigma\rho} (\rho; F)$ is the value of M. M. Džrbašians α-characteristic function $T_\alpha (\rho;$ at $\alpha = \sigma\rho$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в ко лексной области, гл. IX, М., „Наука", 1966.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1969 թ., հ. 4, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“ за 1969 г., т. IV, №№ 1—6

CONTENTS

Of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, seria „Matematika", Vol. IV, № 1—6, 1969

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS