ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 50 կ.
ЦЕНА 50 к.

индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

О РАДИАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Введение

Как известно [1], класс функций ограниченного вида N, введенный Р. Неванлинна, обладает следующими важными свойствами:

а) если $F(z) \in N$, то предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\theta}) \tag{1}$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0,2\pi]$ линейной меры нуль;

б) для каждого значения a ряд $\sum\limits_{1}^{\infty}(1-r_\nu(a))$ сходится, где $r_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, \cdots$ означают модули нулей функции $F(z) - a$.

В исследованиях М. М. Джрбашяна [2], [3] были введены новые классы $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ определялся посредством α-характеристики $T_\alpha(r, F) = m_\alpha(r, F) + N_\alpha(r, F)$ как множество тех мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T_\alpha(r, F)\} < +\infty.$$

При этом функции $m_\alpha(r, F)$, $N_\alpha(r, F)$ и $T_\alpha(r, F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r, F)$, $N(r, F)$ и $T(r, F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha = 0$, так что класс N_0 совпадает с классом N.

Вместе с тем, важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1} \subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha \subset N_0 = N \qquad (-1<\alpha<0). \tag{2}$$

Пусть $D^{-\alpha}$ — оператор интегрирования (при $0<\alpha<\infty$) или дифференцирования (при $-1<\alpha<0$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке, т. е.

$$D^{-\alpha}\varphi(r) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt \qquad (0<\alpha<\infty)$$

и

$$D^{-\alpha}\varphi(r) \equiv \frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\varphi(r) \qquad (-1<\alpha<0),$$

и пусть

$$D^{-\alpha}\varphi(r)|_{\alpha=0} = \varphi(r), \quad D^{-\alpha}_{(+)}\varphi(r) = \max\{D^{-\alpha}\varphi(r), 0\}.$$

Обозначим через A_α класс *аналитических* в единичном круге функций $f(z)$, входящих в N_α. Таким образом, для функций класса A_α имеем

$$\sup_{0<r<1} T_\alpha(r, F) = \sup_{0<r<1}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} D^{-\alpha}_{(+)}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\} < +\infty. \tag{3}$$

Из (2) очевидным образом следует, что

$$A_\alpha \subset N \qquad (-1<\alpha<0). \tag{4}$$

Далее известно, что класс A_α $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих в круге $|z|<1$ представление вида

$$f(z) = e^{i\gamma+\lambda k_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}, \tag{5}$$

где

$$B_\alpha(z, a_\mu) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-W_\alpha(z, a_\mu)}$$

сходящееся произведение типа Бляшке, и при $|z|<1$ и $|\zeta|<1$ положено

$$W_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,V_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)\,d\theta,$$

$$V_\alpha(re^{i\theta}, \zeta) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|1-\frac{re^{i\psi}}{\zeta}\right|,$$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\},$$

$\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi, \pi]$, $\lambda>0$ — произвольное целое число, γ — произвольное вещественное число, а $K_\alpha = \alpha\sum_1^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$ ([3], стр. 655).

Замечание 1. Отметим, что из $f(z)\in A_\alpha$ следует, что

$$\sum_1^{\infty}(1-|a_k|)^{1+\alpha} < +\infty, \tag{6}$$

где a_k — нули функции $f(z)$.

Обозначим через A_α^* множество тех функций из A_α, в представлении (5) которых функция $\psi(\gamma)$ не возрастающая, т. е. множество функций, имеющих представление вида

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda K_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z)\, d\psi(\theta)\right\},\ d\psi(\theta)\geqslant 0. \tag{7}$$

Так как при $-1<\alpha<0$ имеем $\operatorname{Re} S_\alpha(z)>0$, а также [4]

$$|B_\alpha(z, a_\mu)| \leqslant |B_0(z, a_\mu)|<1 \quad (|z|<1), \tag{8}$$

то легко убедиться в справедливости следующих двух замечаний:

Замечание 2. Если $f(z)\in A_\alpha^*$ $(-1<\alpha<0)$, то

$$|f(z)|\leqslant 1,\ |z|<1.$$

Замечание 3. Любую функцию класса N_α $(-1<\alpha<0)$ можно представить как частное двух функций класса A_α^*.

Приведем одно хорошо известное определение [5], которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть E — ограниченное борелево множество на комплексной плоскости и γ $(0<\gamma<2)$ — фиксированное число. Если существует такое положительное распределение масс μ на E, что $\mu(E)=1$ и интеграл

$$\int_E \frac{d\mu(\zeta)}{|z-\zeta|^\gamma}$$

равномерно ограничен для всех z, то говорят, что множество E имеет положительную γ-емкость, в противном случае говорят, что γ-емкость множества E равна нулю и пишут $C_\gamma(E)=0$. Отметим, что если γ-емкость некоторого компактного множества E равна нулю, то всякая h-хаусдорфова мера множества E также равна нулю, если функция меры $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_0 \frac{h(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr<+\infty.$$

В связи со свойством (4) классов A_α и свойствами а) и б) класса N естественно возникают две задачи.

1. Охарактеризовать в зависимости от параметра α то исключительное множество, где для функций класса A_α^* $(-1<\alpha<0)$ предел (1) не существует.

Решение этой задачи дается следующей теоремой, доказанной в работе [4].

Теорема А. Если $F(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$, то предел

$$F(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0} F(re^{i\theta})$$

существует для любого $\gamma\in[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E\subset[0, 2\pi]$, γ-емкость которого (где γ — любое число из интервала $(1+\alpha, 1)$) равна нулю.

2. Густота нулей произвольной функции класса A_α^* характеризуется условием (6). Что можно сказать о густоте произвольных a-точек ($|a|<1$) функций этого класса?

В § 1 настоящей работы доказывается теорема о конечности радиальной вариации функций класса A_α^*, откуда, в частности, будет вытекать и результат теоремы А для классов A_α^* и, согласно замечанию 3, и для классов N_α.

Теорема 6, доказанная в § 2, решает вопрос о распределении a-точек функций класса A_α^*.

§ 1. Радиальные изменения функций класса A_α^*

Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D, имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\varphi}$, если радиус с концом в $e^{i\varphi}$ отображается посредством этой функции на спрямляемую кривую. Ясно, что в данной точке из конечности радиального изменения вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

Заметим сразу, что из теоремы 2 работы [6] и теоремы 2 работы [7] следует

Теорема 1. *При* $-1<\alpha<0$ *и*

$$\sum_{1}^{\infty}(1-|a_k|)^{1+\alpha}<+\infty$$

функция $B_\alpha(z, a_\mu)$ *всюду на единичной окружности имеет конечное радиальное изменение, кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, $(1+\alpha)$*—емкость которого равна нулю.*

Следовательно, если обозначим

$$V(B_\alpha, \vartheta)=\int_0^1 |B'_\alpha(re^{i\vartheta}, a_\mu)|\,dr,$$

то теорема 1 утверждает, что $V(B_\alpha, \vartheta)<+\infty$ для всех ϑ, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset[0,2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть интегрируемая на* $[0,1]$ *функция* $\omega(r)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1\frac{\omega(r)}{1-r}\,dr<\infty,\quad 0\leqslant\omega(r)\leqslant 1.$$

Тогда, если $f(z)\in A_\alpha^*$ $(-1<\alpha<0)$, *то*

$$\int_0^1 \omega(r)|f'(re^{i\varphi})|\,dr < +\infty,$$

кроме, быть может, некоторого множества E, $(1+\alpha)$*-емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Пусть $f(z)\in A_\alpha^*$ $(-1<\alpha<0)$, тогда согласно (7) имеем

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda K_\alpha}\, z^\lambda B_\alpha(z, a_\mu)\cdot f_1(z),$$

где

$$f_1(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\},\quad d\psi(\vartheta)\geqslant 0. \tag{9}$$

Дифференцируя $f(z)$, получим

$$f'(z)=[e^{i\gamma+\lambda K_\alpha}\, z^\lambda B_\alpha(z,a_\mu)]'\, f_1(z)+[e^{i\gamma+\lambda K_\alpha}\, z^\lambda B_\alpha(z,a_\mu)]\, f_1'(z).$$

Имея в виду (8) и неравенство $|f_1(z)|\leqslant 1$ при $|z|<1$, получим оценку

$$|f'(z)|\leqslant c\lambda+|B_\alpha'(z,a_\mu)|+|f_1'(z)|. \tag{10}$$

Из оценки (10) ясно, что для доказательства теоремы надо показать, что вне некоторого множества $E\subset[0,2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю, следующие два интеграла конечны:

$$V_\omega(B_\alpha,\vartheta)=\int_0^1 \omega(r)\,|B_\alpha'(re^{i\vartheta},a_\mu)|\,dr$$

и

$$V_\omega(f_1,\vartheta)=\int_0^1 \omega(r)\,|f_1'(re^{i\vartheta})|\,dr.$$

Так как $V_\omega(B_\alpha,\vartheta)\leqslant V(B_\alpha,\vartheta)$, то из теоремы 1 заключаем, что $V_\omega(B_\alpha,\vartheta)<+\infty$ для всех ϑ, кроме, быть может, некоторого множества E, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Для оценки $V_\omega(f_1,\vartheta)$ заметим, что из представления (9) следует, что

$$|f_1'(re^{i\varphi})|\leqslant c\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{2+\alpha}}.$$

Возьмем теперь произвольное замкнутое борелево множество $E\subset[0,2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого положительна. Согласно определению тогда существует такое положительное распределение единичной массы μ на E, для которого функция

$$U(r,\vartheta)=\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(\varphi)}{|1-re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}}$$

остается равномерно ограниченной по ϑ при $r\to 1-0$.

Следовательно, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} V_\omega (f_1, \vartheta)\, d\mu(\vartheta) = \int_0^{2\pi} d\mu(\vartheta) \int_0^1 \omega(r)\, |f_1'(re^{i\vartheta})|\, dr \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^1 \omega(r) dr \int_0^{2\pi} d\mu(\vartheta) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi(\varphi)}{|1-re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{2+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^1 \frac{\omega(r)}{1-r} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\varphi) \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1-re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}} < \infty. \tag{11}$$

Отсюда вытекает, что ни на каком множестве E с положительной $(1+\alpha)$-емкостью функция $V_\omega(f_1, \vartheta)$ не может стать бесконечностью, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Доказанная теорема устанавливает ограниченность радиальной вариации при наличии некоторого веса $\omega(r)$. Заметим однако, что аналогичным образом можно доказать ограниченность радиальной вариации функции класса A_α^*, правда уже на более редком множестве. Именно, имеет место

Теорема 3. *Если* $f(z) \in A_\alpha^*$ $(-1 < \alpha < 0)$, *то*

$$V(f, \vartheta) = \int_0^1 |f'(re^{i\vartheta})|\, dr < +\infty,$$

кроме, быть может, некоторого множества E, *γ-емкость которого равна нулю, где γ—любое число из интервала* $(1+\alpha, 1)$.

Доказательство проводится так же, как и в теореме 2, но вместо оценок (11) надо воспользоваться следующими оценками:

$$\int_0^{2\pi} V(f_1, \vartheta)\, d\mu(\vartheta) = \int_0^{2\pi} d\mu(\vartheta) \int_0^1 |f_1'(re^{i\vartheta})|\, dr \leqslant c \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\varphi) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1-re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{2+\alpha}} \leqslant \int_0^1 \frac{dr}{(1-r)^{2+\alpha-\gamma}} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(\varphi) \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1-re^{i(\vartheta-\varphi)}|^{\gamma}} < +\infty.$$

Заметим, что, как уже было отмечено, из теоремы 3 вытекает, что радиальные предельные значения функции $f(z) \in A_\alpha^*$ (и следовательно, согласно замечанию 3, любой функции класса N_α) могут не существовать только на множестве E, γ-емкость которого равна нулю, где $\gamma \in (1+\alpha, 1)$—произвольное число.

§ 2. Распределение значений функции класса A_α^*

Предположим, что функция $w(z) \in A_\alpha^*$. Нас интересует следующий вопрос: при каких условиях функция $w(z) - \zeta$, $|\zeta| < 1$ будет принадлежать некоторому классу A_β, где $\alpha \leqslant \beta < 1$? С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$V_\alpha(w(z), \zeta) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |w(re^{i\varphi}) - \zeta|.$$

Используя ход рассуждений, приведенный в работе [3], мы установим интегральное представление для функции $V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \zeta)$.

Пусть функция $w(z)$ принимает значение C в точке $z = ce^{i\varphi}$ и пусть $a < c < b$. Предположим, что $w(te^{i\varphi}) - C$ как функция от t в интервале $[a, b]$ не обращается в нуль при $t \neq c$.

Тогда

$$\text{V.p. Re} \int_a^b \frac{dw(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - C} = \lim_{\varepsilon \to 0} \text{Re} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dw}{w - C} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dw}{w - C} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\log \left| \frac{w((c-\varepsilon)e^{i\varphi}) - C}{w(ae^{i\varphi}) - C} \right| + \log \left| \frac{w(be^{i\varphi}) - C}{w((c+\varepsilon)e^{i\varphi}) - C} \right| \right],$$

откуда следует, что

$$\text{V.p. Re} \int_a^b \frac{dw(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - C} = \log \left| \frac{w(be^{i\varphi}) - C}{w(ae^{i\varphi}) - C} \right|. \tag{12}$$

Предположим теперь, что функция $\psi(x) \in L(a, b)$ и в некоторой окрестности $(c - \delta, c + \delta)$ точки $x = c$ удовлетворяет условию Гельдера $|\psi(x) - \psi(c)| \leqslant A|x - c|^\lambda$, где $A > 0$ и λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ — постоянные.

В этих условиях очевидно имеем

$$\text{Re} \frac{\psi(t) - \psi(c)}{w(te^{i\varphi}) - C} w'(te^{i\varphi}) \in L(a, b)$$

и следовательно, применяя (12), получаем формулу

$$\text{V.p. Re} \int_a^b \frac{\psi(t)\, dw(te^{i\varphi})}{w(te^{i\varphi}) - C} = \text{Re} \int_a^b \frac{\psi(t) - \psi(c)}{w(te^{i\varphi}) - C} dw(te^{i\varphi}) +$$

$$+ \varphi(c) \log \left| \frac{w(be^{i\varphi}) - C}{w(ae^{i\varphi}) - C} \right|. \tag{13}$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1. *При любых фиксированных* r $(0 \leqslant r < 1)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ *и* ζ $(0 < |\zeta| < 1)$ *справедливы формулы*

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \zeta) = \text{Re} \frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi})}{\zeta - w(rte^{i\varphi})} dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \log |\zeta - w(0)|, \quad 0 < \alpha < +\infty, \tag{14}$$

$$V_\alpha(w\,(re^{i\varphi}),\varsigma)=\operatorname{Re}\frac{re^{i\varphi}}{\Gamma\,(1+\alpha)}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^\alpha\,w'\,(rte^{i\varphi})}{\varsigma-w\,(rte^{i\varphi})}\,dt,\quad -1<\alpha<0,\qquad(15)$$

причем в случае, когда на луче φ $w\,(rte^{i\varphi})=\varsigma$, *то интегралы в формулах* (14) *и* (15) *следует понимать в смысле главного значения.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $0<\alpha<\infty$. По определению имеем

$$\mathrm{V}_\alpha\,(w\,(re^{i\varphi}),\varsigma)=\frac{1}{\Gamma\,(\alpha)}r^{-\alpha}\int\limits_0^r(r-t)^{\alpha-1}\log|\varsigma-w\,(te^{i\varphi})|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\,(\alpha)}\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha-1}\log|\varsigma-w\,(rte^{i\varphi})|\,dt.\qquad(16)$$

Если на луче φ $w\,(rte^{i\varphi})\neq\zeta$, то с помощью интегрирования по частям из (16) получим

$$V_\alpha(w\,(re^{i\varphi}),\varsigma)=-\frac{1}{\Gamma\,(1+\alpha)}\operatorname{Re}\int\limits_0^1\log\,(\varsigma-w\,(rte^{i\varphi}))\,d\,(1-t)^\alpha=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\,(1+\alpha)}\log|\varsigma-w\,(0)|+\operatorname{Re}\frac{re^{i\varphi}}{\Gamma\,(1+\alpha)}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^\alpha\,w'\,(rte^{i\varphi})}{\zeta-w\,(rte^{i\varphi})}\,dt.$$

Если на луче $\arg z=\varphi$ есть такая точка, где $w\,(z)=\varsigma$, то интеграл следует понимать в смысле главного значения. Пусть $w\,(a_1\,re^{i\varphi})=\varsigma$ $(0<a_1<1)$ и a_1—единственное значение t из интервала $(0,1)$, где $w\,(tre^{i\varphi})=\varsigma$.

Тогда из (16) имеем

$$V_\alpha\,(w\,(re^{i\varphi}),\varsigma)=\lim_{\varepsilon\to0}\Bigg[\frac{1}{\Gamma\,(\alpha)}\int\limits_0^{a_1-\varepsilon}(1-t)^{\alpha-1}\log|\varsigma-w\,(rte^{i\varphi})|\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma\,(\alpha)}\int\limits_{a_1+\varepsilon}^1(1-t)^{\alpha-1}\log|\varsigma-w\,(rte^{i\varphi})|\,dt\Bigg]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\,[(1-a_1-\varepsilon)^\alpha\log|\varsigma-w\,((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})]-$$

$$-(1-a_1+\varepsilon)^\alpha\log|\varsigma-w\,((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|]+\frac{1}{\Gamma\,(1+\alpha)}\log|\varsigma-w\,(0)|+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Re}\frac{1}{\Gamma\,(1+\alpha)}\Bigg[\int\limits_0^{a_1-\varepsilon}\frac{(1-t)^\alpha\,w'\,(rte^{i\varphi})\,re^{i\varphi}}{\varsigma-w\,(rte^{i\varphi})}\,dt+$$

$$+\int\limits_{a_1+\varepsilon}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}\,w'(rte^{i\varphi})\,re^{i\varphi}}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt\Bigg]. \qquad (17)$$

Так как имеем

$$(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})|-(1-a_1+\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|=$$

$$=[\log|\varsigma-w((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})|-\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|]\,(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}-$$

$$-[(1-a_1+\varepsilon)^{\alpha}-(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}]\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|,$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[(1-a_1-\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1+\varepsilon)\,re^{i\varphi})|-$$

$$-(1-a_1+\varepsilon)^{\alpha}\log|\varsigma-w((a_1-\varepsilon)\,re^{i\varphi})|\Bigg\}=0.$$

Таким образом, из (17) мы получаем

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=\mathrm{V.p.}\,\frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}\,w'(rte^{i\varphi})}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\log|\varsigma-w(0)|,$$

что эквивалентно формуле (14) леммы для рассматриваемого нами случая.

Если на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ есть конечное число значений $0<a_1<a_2<\cdots<a_n<1$, для которых $w(a_k\,re^{i\varphi})=\varsigma$, то для каждого a_k мы должны выбирать $\varepsilon_k>0$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$, и главное значение интеграла понимать в известном смысле.

Рассмотрим теперь случай $-1<\alpha<0$. Тогда по определению имеем

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\{D^{-(1+\alpha)}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\}=$$

$$=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\{r^{1+\alpha}V_{1+\alpha}(re^{i\varphi},\varsigma)\}.$$

Так как $1+\alpha>0$, то из формулы (14) получим

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\Bigg\{\mathrm{Re}\,\frac{r^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{1+\alpha}\,w'(rte^{i\varphi})re^{i\varphi}}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt\Bigg\}. \qquad (18)$$

При этом, если на радиусе φ $w(re^{i\varphi})=\varsigma$, то интеграл следует понимать в смысле главного значения.

Если на луче φ $w(re^{i\varphi})\neq\varsigma$, то из (18) имеем

$$V_{\alpha}(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\Bigg\{\mathrm{Re}\,\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_{0}^{r}\frac{(r-t)^{1+\alpha}\,w'(te^{i\varphi})\,e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dt\Bigg\}=$$

$$=r^{-\alpha}\operatorname{Re}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha w'(te^{i\varphi})e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dt=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{re^{i\varphi}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\frac{(1-t)^\alpha w'(rte^{i\varphi})}{\varsigma-w(rte^{i\varphi})}dt.$$

Если же имеются значения t такие, что $w(tre^{i\varphi})=\varsigma$, то формула (13) принимает следующий вид:

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=r^{-\alpha}\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\Gamma(2+\alpha)}\left[\text{V.p.}\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^{1+\alpha}w'(te^{i\varphi})e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dt\right]\right\}.$$

Тогда, согласно формуле (13), получим

$$\text{V.p.}\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^{1+\alpha}w'(te^{i\varphi})e^{i\varphi}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dt=\text{V.p.}\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^{1+\alpha}dw(te^{i\varphi})}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}=$$

$$=\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^{1+\alpha}-(r-c)^{1+\alpha}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dw(te^{i\varphi})+(r-c)^{1+\alpha}\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|.$$

Поэтому мы можем функцию V_α переписать в следующем виде:

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}),\varsigma)=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{d}{dr}\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^{1+\alpha}-(r-c)^{1+\alpha}}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dw(te^{i\varphi})+$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{d}{dr}\left\{(r-c)^{1+\alpha}\log\left|\frac{w(re)^{i\varphi}-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|\right\}=$$

$$=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\operatorname{Re}\frac{-(r-c)^{1+\alpha}w'(re^{i\varphi})e^{i\varphi}}{\varsigma-w(re^{i\varphi})}+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha-(r-c)^\alpha}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dw(te^{i\varphi})+\frac{r^{-\alpha}(r-c)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|+$$

$$+\operatorname{Re}\frac{r^{-\alpha}(r-c)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\frac{w'(re^{i\varphi})e^{i\varphi}}{w(re^{i\varphi})-\varsigma}=\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha-(r-c)^\alpha}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dw(te^{i\varphi})+\frac{r^{-\alpha}(r-c)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|. \tag{19}$$

С другой стороны, имеем также

$$\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha-(r-c)^\alpha}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}dw(te^{i\varphi})=\text{V.p.}\operatorname{Re}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha w'(te^{i\varphi})e^{i\varphi}dt}{\varsigma-w(te^{i\varphi})}-$$

$$-(r-c)^\alpha\log\left|\frac{w(re^{i\varphi})-\varsigma}{w(0)-\varsigma}\right|. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$V_\alpha(w(re^{i\varphi}), \varsigma) = \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \text{ V.p. Re} \int_0^r \frac{(r-t)^\alpha w'(te^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{\varsigma - w(te^{i\varphi})} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \text{ V.p. Re} \int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha w'(rxe^{i\varphi}) re^{i\varphi}}{\varsigma - w(rxe^{i\varphi})} dx,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Интеграл*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1 - re^{i\varphi}|^\beta}$$

допускает оценки

$$J \leqslant \begin{cases} \dfrac{c}{(1-r)^{\beta-1}}, & \beta > 1 \\ c \ln \dfrac{1}{1-r}, & \beta = 1, \end{cases}$$

где c — *абсолютная константа, зависящая только от* β.

Действительно, имеем при $0 < \varphi \leqslant \pi$

$$|1 - re^{i\varphi}| = \left[(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right]^{1/2} \geqslant \left[(1-r)^2 + r\frac{4}{\pi^2}\varphi^2\right]^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant c(1 - r + \varphi).$$

Следовательно

$$J \leqslant c \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-r+\varphi)^\beta},$$

откуда и следует справедливость утверждения леммы.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если* $w(z) \in \overset{*}{A}_\alpha$, $-1 < \alpha < 0$, *то для любого* β *из интервала* $(\alpha, 0)$ *функция* $w(z) - \varsigma$ *принадлежит классу* A_β *для всех* ς $(|\varsigma| < 1)$, *кроме, быть может, некоторого множества* E *значений* ς, $\gamma = 1 -$ *емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Пусть $w(z) \in \overset{*}{A}_\alpha$, тогда из представления (7) и неравенства (10) имеем

$$|w'(z)| \leqslant \lambda + |B'_\alpha(z, a_\mu)| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S'_\alpha(e^{-i\theta} z)| \, d\psi(\theta),$$

откуда согласно лемме 1 получим

$$|V_\beta(w(re^{i\varphi}), \varsigma)| \leqslant \frac{r\lambda}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^1 \frac{(1-t)^\beta dt}{|\varsigma - w(rte^{i\varphi})|} +$$

$$+\frac{r}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta |B'_\alpha(rte^{i\varphi},a_\mu)|}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}dt+$$

$$+\frac{r}{2\pi\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}\int_{-\pi}^{\pi}|S'_\alpha(e^{-i\theta}rte^{i\varphi})|\,d\psi(\theta). \tag{21}$$

Для того чтобы показать, что функция $w(z)-\varsigma$ принадлежит классу A_β, согласно (3) достаточно доказать равномерную ограниченность интеграла

$$\int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\beta}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\,d\varphi \tag{22}$$

для $r\in(0,1)$. Но согласно (21) имеем

$$\int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\beta}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\frac{r\lambda}{\Gamma(1+\beta)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(1-t)^\beta dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}+$$

$$+\frac{r}{\Gamma(1+\beta)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(1-t)^\beta|B'_\alpha(rte^{i\varphi})|\,dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}+\frac{r}{2\pi\Gamma(1+\beta)}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(1-t)^\beta dt}{|\varsigma-w(rte^{i\varphi})|}\int_{-\pi}^{\pi}|S'_\alpha(e^{-i\theta}rte^{i\varphi})|\,d\psi(\theta)=J_1(\varsigma)+J_2(\varsigma)+J_3(\varsigma). \tag{23}$$

Пусть γ = 1-емкость множества E положительна, тогда найдется такое положительное распределение единичной массы на E, что

$$\int_E\frac{d\mu(\varsigma)}{|\varsigma-w|}<\text{const} \tag{24}$$

равномерно для всех w.

Если мы покажем, что на всем множестве E интеграл (22) не может быть бесконечностью, то теорема будет доказана.

Действительно, имеем

$$\int_E d\mu(\varsigma)\int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\beta}\log|\varsigma-w(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\int_E J_1(\varsigma)\,d\mu(\varsigma)+\int_E J_2(\varsigma)\,d\mu(\varsigma)+$$

$$+\int_E J_3(\varsigma)\,d\mu(\varsigma)=A_1+A_2+A_3. \tag{25}$$

Из неравенства (24) и из того, что $\beta\in(\alpha,0)$, $\alpha>-1$, очевидным образом следует ограниченность интеграла A_1.

Перейдем к оценке интеграла A_2. Известно [6], что

$$|B'_\alpha(re^{i\varphi})| \leqslant \frac{c}{|1-re^{-i\varphi}|^{2+\alpha}}.$$

Подставляя эту оценку в значение I_2, получим, что

$$A_2 \leqslant c \int_0^1 (1-t)^\beta \, dt \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1-re^{i\varphi}|^{2+\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - w(re^{i\varphi})|}. \tag{26}$$

Согласно (24) и лемме 2 из (26) следует

$$A_2 \leqslant c \int_0^1 \frac{(1-t)^\beta}{(1-rt)^{1+\alpha}} \, dt < \mathrm{const},$$

так как $\beta \in (\alpha, 0)$.

Остается оценить интеграл A_3. Поскольку очевидно

$$|S'_\alpha(z)| \leqslant \frac{c}{|1-z|^{2+\alpha}},$$

то интеграл A_3 оценивается так же, как A_2.

Таким образом, из (25) имеем

$$\int_E d\mu(\zeta) \int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\beta} \log|\zeta - w(re^{i\varphi})| \, d\varphi < \mathrm{const},$$

что и доказывает теорему.

Из теоремы 4 и свойства (6) классов A_β непосредственно следует результат, который мы сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 5. *Если* $w(z) \in A^*_\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$ *и* $\beta \in (\alpha, 0)$ — *любое число, то ряд*

$$\sum_1^\infty (1 - r_\nu(a))^{1+\beta}$$

сходится для всех a $(|a| < 1)$, *кроме, быть может, некоторого множества* E *значений* a, $\gamma = 1$-*емкость которого равна нулю.*

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 23.IV.1969

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ. Միավոր շրջանում անալիտիկ և սահմանափակ ֆունկցիաների մի դասի շառավղային փոփոխությունը և արմատների բաշխումը *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի աշխատանքներում [2], [3] *ներմուծված էին միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նոր դասեր* N_α *և ստացված էին այդ դասերի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացումները։*

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ այդ դասի անալիտիկ և սահմանափակ ֆունկցիաները, երբ $-1<\alpha<0$ *ամենուրեք միավոր շառավղով շրջանագծի վրա ունեն վերջավոր շառավղային փոփոխություն, բացի գուցե մի* E *բազմությունից, որի* γ *ունակությունը զերո է, որտեղ* γ*-ն կամայական թիվ է* $(1+\alpha, 1)$ *ինտերվալից։*

N_α *դասի անալիտիկ և սահմանափակ ֆունկցիաների որոշ* A^*_α *ենթադասի համար ապացուցվում է նաև թեորեմ, այդ ենթադասի ֆունկցիաների* a*—կետերի բաշխման մասին։*

V. S. ZAKARIAN. *On radial variation and distribution of the values of a class of analytical and bounded functions* (summary)

It is proved in the paper that bounded analytical functions from N_α (a class introduced by Djrbashian in [2], [3]) everywhere in the unit circle display finite radial variance, with exception, may be, of a set of vanishing γ—capacity, $\gamma \in (1+\alpha, 1)$ being chosen arbitrarily. A theorem on distribution of a-points of functions from a subclass $A_\alpha^* \subset N_\alpha$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
2. *М. М. Джрбашян*. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
3. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966, гл. IX.
4. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, „Математика“, 2, № 5, 1967, 275—294.
5. *L. Carleson*. On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Thesis University of Uppsala, 1950.
6. *В. С. Захарян*. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения B_α, Изв АН АрмССР, „Математика“, 3, № 1, 1968, 38—51.
7. *В. С. Захарян*. О радиальных предельных значениях функции B_α, Изв. АН АрмССР, „Математика“, 3, №№ 4—5, 1968, 287—300.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

P. GAUTHIER

TANGENTIAL APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS AND FUNCTIONS HOLOMORPHIC IN A DISC

For $0 < R \leqslant +\infty$, let $D = (|z| < R)$. A subset E of D will be called a set of tangential approximation provided that for each function f continuous on E and holomorphic in the interior E° of E, and each positive continuous function $\varepsilon(r)$, $0 < r < R$, there exists a function g holomorphic in D satisfying

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(|z|),\ z \in E.$$

Carleman's classical theorem [3] states that the real axis is a set of tangential approximation. Arakelian [1] later generalized Carleman's theorem, showing that E is a set of tangential approximation if in addition to satisfying certain necessary conditions, E has an empty interior. In this paper we will state three conditions, two already known, which a set E must satisfy if it is to be a set of tangential approximation. We will also generalize Arakelian's theorem showing that there are also certain sets with unbounded interior which are sets of tangential approximation.

We denote the one-point compactification of D by $D^* = D \cup \{\infty\}$. For $E \subset D$, let $CE = D^* - E$, and let E' denote the (relative) closure of E in D. ∂E will denote the boundary of E in D. Finally if $\{E_n\}$ is a sequence of sets in D, we denote by $\limsup E_n$ the set of all points $z \in D^*$ such that each neighborhood of z meets infinitely many of the sets E_n.

The present research was supported by a grant from the National Research Council of Canada. I wish to thank Professor W.H.J. Fuchs for his suggestions and encouragement.

1°. **Arakelian's theorem on uniform approximation.** We state some conditions that a set E in D may or may not satisfy.

(I) E is relatively closed in D.

(II) CE is connected to ∞; i. e. for each neighborhood N of ∞, there is a neighborhood M of ∞ $(M \subset N)$, such that each $z \in CE \cap M$ can be connected to ∞ by an arc $\gamma(z)$ in $CE \cap N$.

A subset E of D will be called a set of uniform approximation provided that for each function f holomorphic on E° and continuous on E, and each $\varepsilon > 0$, there is a function g holomorphic in D, such that

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon,\ z \in E.$$

Theorem 1 (Arakelian [1] and [2]). *A subset $E \subset D$ is a set of uniform approximation if and only if it satisfies (I) and (II).*

Since any set of tangential approximation is a fortiori a set of uniform approximation, conditions (I) and (II) are necessary if a set is to be a set of tangential approximation. In the next section we will state a third necessary condition.

2°. Uniqueness and tangential approximation. A set $E \subset D$, other than D, is a set of uniqueness if there exists a positive continuous function $\lambda(r)$, $0 < r < R$, such that for any f meromorphic in D, if f satisfies

$$|f(z)| < \lambda(|z|), \quad z \in E, \tag{1}$$

then $f(z) \equiv 0$. The notions of uniqueness and tangential approximation are closely related, as the following theorem bears out.

Theorem 2. *If E is a set of uniqueness, then E is not a set of tangential approximation.*

Proof. Let $\lambda(r)$, $0 \leqslant r < R$, be a positive continuous function such that, if f is meromorphic in D and satisfies (1), then $f(z) \equiv 0$.

We consider two cases.

Case 1: Suppose that $F(z) \equiv 0$ is the only function holomorphic in E° and continuous on E such that F satisfies (1). In this case let f be a function holomorphic in E but not in D (such a function exists). If E is a set of tangential approximation, then there is a function g holomorphic in D such that $f-g$ satisfies (1). Setting $F=f-g$, we see that $f \equiv g$ which is a contradiction. Hence E is not a set of tangential approximation.

Case 2: Suppose there exists $F(z) \not\equiv 0$, holomorphic in E° and continuous on E, such that F satisfies (1). Choose $z_0 \in E$ such that $F(z_0) \neq 0$, and let $\varepsilon(r) > 0$ be a continuous function satisfying

$$\varepsilon(|z_0|) < |F(z_0)|/2, \quad \varepsilon(|z|) < \lambda(|z|) - |F(z)|.$$

If E is a set of tangential approximation, then there is a g holomorphic in D such that

$$|F(z) - g(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in E.$$

Then g satisfies (1) and so $g(z) \equiv 0$. On the other hand $|g(z_0)| > 0$, which is a contradiction. Thus E cannot be a set of tangential approximation, and the proof is complete.

Although a set of uniqueness E cannot be a set of tangential approximation, it is still conceivable that a least some functions (but not all), holomorphic on E° and continuous on E, can be tangentially approximated by functions holomorphic in D. However in this case it is easily seen that sufficiently precise approximations on E must be unique.

The question arises as to whether being a set of uniqueness is simply the negation of being a set of tangential approximation, but this is not the case. For if E is any bounded set for which CE is not connected, then E is neither a set of uniqueness nor a set of tangential approximation. However it may be that a set E is a set of tangential approximation if and only if it is not a set of uniqueness and satisfies (I) and (II). Such a result would be of purely theoretical interest, for it appears very difficult to determine which sets are sets of uniqueness. The next theorem is a step in this direction. To formulate this theorem we introduce a condition which a set $E \subset D$ may or may not satisfy. A set $E \subset D$ is said to satisfy condition A if for each r, $0 < r < R$, there is an r', $r < r' < R$, such that no component of the interior of E meets both $(|z| = r)$ and $(|z| = r')$.

Theorem 3. *If $E \subset D$ and E fails to satisfy condition A, then E is a set of uniqueness.*

Proof. Since E fails to satisfy condition A, there is an r_0, $0 < r_0 < R$, and a sequence $\{r_n\}$, $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < R$, with $r_n \to R$, and there are (not necessarily distinct) components $\{E_n\}$ of the interior of E such that for each n, E_n meets both $(|z| = r_0)$ and $(|z| = r_n)$. For each n let G_n be a Jordan domain with boundary Γ_n such that $G_n \subset E_n$ and both $\Gamma_n \cap (|z| \leqslant r_0)$ and $\Gamma_n \cap (r_n \leqslant |z|)$ are non-degenerate arcs. We set

$$\lambda(r) = M_n, \quad r_{n-1} < r \leqslant r_n, \tag{2}$$

where M_n will soon be specified. For each $n > 2$, let K_n be an arc in G_n which connects $(|z| = r_1)$ to $(|z| = r_2)$. By the two constants theorem here exist constants $\mu(n)$ and $\nu(n)$ such that if $f(z)$ is holomorphic in G_n and satisfies

$$|f(z)| \leqslant n, \quad z \in \Gamma_n \cap (|z| < r_{n-1}), \tag{3}$$

and

$$|f(z)| \leqslant M_n, \quad z \in \Gamma_n \cap (r_{n-1} \leqslant |z|), \tag{4}$$

then

$$|f(z)| \leqslant n^{\mu(n)} M_n^{\nu(n)}, \quad z \in K_n. \tag{5}$$

Choose M_n so that if $f(z)$ satisfies (5), then

$$|f(z)| < 1/n, \quad z \in K_n. \tag{6}$$

We may also assume that $\{M_n\}$ are decreasing and positive.

Now suppose $f(z)$ is meromorphic in D and satisfies (1), with $\lambda(r)$ given by (2). Choose N so large that $M_N < N$, and set

$$M = \sup\{|f(z)| : |z| \leqslant r_N, \ z \in E\}.$$

Then if $n > N$, M, I claim that $f(z)$ satisfies (6). For by (1) and (2), $f(z)$ satisfies (4); and for $n > N$, M we have that for $z \in E$

$$|f(z)| \leqslant M_N < N < n, \text{ for } |z| \geqslant r_N,$$

and

$$|f(z)| \leqslant M < n, \text{ for } |z| \leqslant r_N.$$

Hence $f(z)$ satisfies (3) also. Since $f(z)$ satisfies (3) and (4), it satisfies (5) and therefore (6). Since each K_n is an arc connecting $(|z| = r_1)$ to $(|z| = r_2)$, it follows from (6) that $f(z) \equiv 0$, and the proof is complete.

3°. Conditions sufficient for tangential approximation. Arakelian (2, theorem 2) has shown that if a subset E of D satisfies (I) and (II), and if E has an empty interior, then E is a set of tangential approximation. The following condition relaxes the requirement that the interior of E be empty.

(III) Let $\{E_n\}$ be the components of E°. Then $\bar{E}_n \cap \bar{E}_m$ contains at most one point for $n \neq m$, and

$$\lim\sup E_n \subset \{\infty\}.$$

We now come to our principal result.

Theorem 4. *If $E \subset D$ satisfies conditions* (I), (II) *and* (III), *then E is a set of tangential approximation.*

Proof. Suppose $f(z)$ is a function continuous on E and holomorphic on E°, and let $\varepsilon(r)$, $0 < r < R$, be a continuous positive function which we may assume to be decreasing. For each r, $0 < r < R$, we may choose r^*, $r < r^* < R$, so that if $z \in CE \cap (|z| > r^*)$, then z can be connected to ∞ by an arc $\gamma(z)$ in $CE \cap (|z| > r)$. We may also assume by (III) that no E_n meets both $(|z| = r)$ and $(|z| = r^*)$.

Fix r, and set $A = (|z| \leqslant r)$. Let B consist of those z in $CE \cap CA$ which can only be arcwise connected to ∞ by arcs which meet A. Set $H = A \cup B'$, and let $E_{r(1)}, E_{r(2)}, \cdots, E_{r(a)}$ be the components of E° whose closures meet H. They are finite in number by (III). Now set

$$D_r = H \cup \bar{E}_{r(1)} \cup \bar{E}_{r(2)} \cup \cdots \cup \bar{E}_{r(a)}.$$

We show that CD_r is connected. First of all, $CD_r \cap CE$ is connected because each point in $CD_r \cap CE$ can be connected to ∞ by an arc in $CD_r \cap CE$.

Now let $z \in CD_r \cap E$, and suppose first that z is a boundary point of E. Let $U(z)$ be a disc about z which does not meet D_r. Then $U(z)$ connects z to $CD_r \cap CE$ outside of D_r,

Suppose now that z is an interior point of E, and let $E(z)$ be the component of the interior of E which contains z. By the first part of (III), there is a point z_0 in the boundary of $E(z)$ which is contained in no $\bar{E}_{r(k)}$, $k = 1, 2, \cdots, a$. Thus there is a neighborhood V of z_0 which meet no $\bar{E}_{r(k)}$. Since z is not in D_r, we may also assume that V does not meet B, and hence V does not intersect D_r. Thus V connects $E(z)$ to $CE \cap CD_r$ outside of D_r. It follows that z can be connected to $CE \cap CD_r$ by an arc in CD_r. Since $CE \cap CD_r$ is connected, it follows that CD_r is also connected.

Choose $0 < r_0 < r_1 < \cdots < r_n < R$, $r_n \to R$, such that each r_n is an $(r_{n-1})^*$. For $r = r_n$, let $D_n = D_r$ and

$$F_n = D_{n-1} \cup [E \cap (D_n - D_{n-1})], \ n = 1, 2, \cdots.$$

CF_n is connected since

$$CF_n = CD_{n-1} \cap C[E \cap (D_n - D_{n-1})] = (CD_{n-1} \cap CE) \cup CD_n.$$

Set $D_0=D_r$ with $r=r_0$, and set $F_0=E\cap D_0$. Then F_0 is closed and CF_0 is connected.

Set $f_0(z)=f(z)$, $z\in F_0$. By Mergelian's theorem [4], there is a polynomial P_0 such that

$$|f_0(z)-P_0(z)|<\frac{\varepsilon(r_{0+2})}{2^{0+5}},\ z\in F_0.$$

We wish to define P_n for $n=1,2,\cdots$, but first we must study the structure of

$$E^{\circ\prime}\cap(D_n-D_{n-1}). \tag{7}$$

There are only finitely many components of E° which meet D_n. If G is such a component and $G\cap D_n$ is not empty, then G is contained in D_n. Hence the components of

$$E_0\cap(D_n-D_{n-1}).$$

are a finite number of the components of E°, and each component of (7) is made up of finitely many E_n with at least part of their boundaries and perhaps part of the boundary of D_n. Suppose such a component K has the property that K' meets D_{n-1} in two points p, q. Since K' does not meet H, there is a Jordan domain J containing K such that no point of B' is inside J. Let z_1, z_2 be points inside J and in CE. Let β be an arc from z_1 to z_2 in J which separates K' so that p and q are in different components. Since z_1 and z_2 are in $CE\cap CB$ there is an arc γ in CE from z_1 to z_2 so that γ is in CB.

Since D^* is homeomorphic to the Riemann sphere, $\sigma=\gamma\cup\beta$ is a Jordan curve which separates D_{n-1} since p and q are separated by σ. Moreover σ does not meet D_{n-1}, and so D_{n-1} is not connected, which is a contradiction. Thus K' cannot meet D_{n-1} in more than one point.

Now set $D_{-1}=\varnothing$, $P_{-1}=P_0$, and suppose that polynomials P_j have been defined for $j=0,1,2,\cdots,n-1$, and

$$|f(z)-P_j(z)|<\begin{cases}\dfrac{\varepsilon(r_{j+1})}{2^{j+1}}, & z\in E\cap(D_j-D_{j-1}),\\[2ex] \dfrac{\varepsilon(r_{j+2})}{2^{j+4}}, & z\in E\cap\partial D_j,\end{cases}$$

and

$$|P_j(z)-P_{j-1}(z)|<\frac{\varepsilon(r_{j+2})}{2^{j+5}},\ z\in D_{j-1}.$$

We will now define P_n. First set

$$f_n(z)=P_{n-1}(z),\ z\in D_{n-1}. \tag{8}$$

Let K_k, $k=1,2,\cdots,b$ be the components of (7) for which K_k' meets D_{n-1}, and let p_k be the unique point in this intersection, $k=1,2,\cdots,b$. Let $h(\zeta)=z$ be a conformal map of $(|\zeta|<1)$ onto S^2-D_{n-1}, where S^2 is the Riemann sphere. We may suppose that $h(1)=P_1$, and we write

$\zeta_k = \exp(i\theta_k)$, where $h(\zeta_k) = p_k$. There is an s, $0 < s < 1$, such tha
if $|\zeta| > s$, then $h(\zeta) \notin D_n$, and

$$|P_{n-1}(h(\zeta)) - f(h(\zeta))| < \frac{\varepsilon(r_{n+1})}{2^{n+2}},$$

whenever $h(\zeta) \in E$. Let

$$M = \sup |P_{n-1}(h(\zeta)) - f(h(\zeta))|,$$

where the sup is taken over all $|\zeta| < 1$ for which $h(\zeta)$ is in $E \cap D_{n}$
Choose j so large that if $|\zeta| < s$, then

$$|\zeta|^j < \frac{\varepsilon(r_{n+2})}{2^{n+5}} \frac{1}{M}.$$

We now set

$$f_n(z) = f(z) + [\exp(-i\theta_k)\, h^{-1}(z)]^j\, [P_{n-1}(z) - f(z)],\ z \in K_k'.$$

This agrees with (8) on the intersection of K_k' and D_{n-1}. Moreover f
is continuous on

$$D_{n-1} \cup [\bigcup_{k=1}^{b} K_k],$$

and holomorphic on the interior, and satisfies

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon(r_{n+1})}{2^{n+2}}, \tag{9}$$

on $K_1' \cup K_2' \cup \cdots \cup K_b'$, and

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon(r_{n+2})}{2^{n+5}}, \tag{10}$$

on the intersection of this same set with the boundary of D_n. We no
set $f_n(z) = f(z)$ in the remaining portion of (7). The function f_n is no
continuously defined on all of (7); it is holomorphic at interior point
and satisfies (9) and (10), on (7) and on (7) intersected with ∂D_n re
pectively.

Set $f_n(z) = f(z) + H(z)$.

Then

$$|H(z)| < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(r_{n+2})}{2^{n+5}}, & z \in \partial D_n \cap E^{\circ\prime} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon(r_{n+1})}{2^{n+2}}, & z \in E^{\circ\prime} \cap (D_n - D_{n-1})'. \end{cases} \tag{11}$$

Since the first inequality holds on a closed su[illegible]e of the norm
space $\partial D_n \cap E$, we may by Tietze's theorem extend $H(z)$ continuous
to all of $\partial D_n \cap E$ in such a way that the first inequality is still vali
Applying Tietze's theorem again we now extend $H(z)$ continously s
that the second inequality in (11) holds on all of $E \cap (D_n - D_{n-1})'$.

The function f_n is now continuously defined on all of F_n, is hol
morphic on the interior, and satisfies (9) and (10), on $E \cap (D_n - D_{n-}$

and $\partial D_n \cap E$ respectively. By Mergelian's theorem [4] there is a polynomial P_n such that

$$|f_n(z) - P_n(z)| < \frac{\varepsilon(r_{n+2})}{2^{n+5}}, \ z \in F_n.$$

Hence

$$|f(z) - P_n(z)| < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(r_{n+1})}{2^{n+1}} & z \in E \cap (D_n - D_{n-1}), \\ \dfrac{\varepsilon(r_{n+2})}{2^{n+4}}, & z \in E \cap \partial D_n, \end{cases}$$

and $|P_n(z) - P_{n-1}(z)| < \dfrac{\varepsilon(r_{n+2})}{2^{n+6}}, \ z \in D_{n-1}.$

For many of the preceeding notions which depended on n, we omitted n from the index for simplicity of notation.

By induction now we may define P_n for all n, and it is easily checked that P_n converges to a function g holomorphic in D. If $z \in E$, there is an N such that $z \in D_N - D_{N-1}$. We have

$$|f(z) - g(z)| \leqslant |f(z) - P_N(z)| + \sum_{j=N+1}^{n} |P_j(z) - P_{j-1}(z)| + |P_n(z) - g(z)|,$$

for any $n > N$. By choosing n sufficiently large, the last term can be made as small as desired, and so it follows that

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(|z|), \ z \in E.$$

This completes the proof.

The above theorem makes it possible to approximate on a large class of sets. For example, if

$$E = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n \cup \cdots,$$

where $\{D_n\}$ is a chain of tangent discs whose centers tend to the boundary of D along a radius, then E is a set of tangential approximation.

In theorem 4 we assumed that

$$\limsup E_n \subset (\infty) \tag{12}$$

in order to simplify the topological arguments. The proof seems to indicate that condition (12) is too strong. For example the proof can be modified to show that if E is of the form

$$E = \{z : |\mathrm{Im}\ z| \leqslant \Phi(\mathrm{Re}\ z)\},$$

where Φ is a continuous function on $-\infty < x < +\infty$ whose positive zeros and whose negative zeros are unbounded, then E is a set of tangential approximation, even though E may fail to satisfy (12). It is not clear to the author how to replace (12) by a weaker condition which not only works but is interesting.

As an application of theorem 4, we have the following generalization of the theorem of Carleman [3]. The result is also a consequence of Arakelian's theorem (2, theorem 3).

C o r o l l a r y. Suppose E is a (relatively) closed set in D, and E is the union of a nowhere dense set of radii; let $f(z)$ be continuous on E; and let $\varepsilon(r)$ be a positive, continuous function on $0<r<R$. Then there is a function g holomorphic in D such that

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon(|z|),\ z\in E.$$

In particular, it follows that a holomorphic function can tend uniformaly to ∞ faster than any prescribed speed on a closed nowhere dense set of radii. Moreover a holomorphic function can tend uniformly to zero on a closed nowhere dense set of radii faster than any prescribed speed without being identically zero. This generalizes a result of Schnitzer and Seidel [5].

Université de Montréal
Received 20.VI.1969

Պ. Մ. ԳՈԹԻԵ. Շոշափումային մոտավորություն ամբողջ ֆունկցիաներով և ֆունկցիաներով, որոնք հոլոմորֆ են շրջանում *(ամփոփում)*

Դիցուք $D=(|z|<R)$, $0<R<\infty$: *Հետազոտվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում* $E\subset D$ *բազմությունը հանդիսանում է շոշափումային մոտավորության բազմություն։ Այդ կապակցությամբ ապացուցվում է, որ միակության բազմությունը շոշափումային մոտավորության բազմություն չէ (թեորեմա 2) և եթե E-ն չի բավարարում A պայմանին, ապա նա միակության բազմություն է (թեորեմա 3)։ Այսպիսով, I, II և A պայմանները անհրաժեշտ են, իսկ I, II և III պայմանները՝ բավարար (թեորեմա 4), որպեսզի E-ն լինի շոշափումային մոտավորության բազմություն։*

П. М. ГОТЬЕ. *Касательное приближение целыми функциями и функциями, голоморфными в круге* (резюме)

Пусть $D=(|z|<R)$, $0<R<\infty$. Изучаются те условия, при которых множество $E\subset D$ является множеством касательного приближения. В связи с этим доказывается, что множество единственности не является множеством касательного приближения (теорема 2) и что если E не удовлетворяет условию A, то E—множество единственности (теорема 3). Таким образом, условия I, II и A необходимы, чтобы E было множеством касательного приближения.

R E F E R E N C E S

1. *N. U. Arakelian*. Uniform approximation on closed sets by entire functions, Izv. Akad. Nauk., S.S.S.R., Ser. Mat., 28, n° 5, 1964, 1187—1206.
2. *N. U. Arakelian*. Uniform and tangential approximation with analytic functions, Izv. Akad. Nauk Armenian SSR, Ser. Mat., 3, n° 4—5, 1968, 273—286.
3. *T. Carleman*. Sur un théorème de Weierstrass, Arkiv for Mathematik, Astranomi Och Fisik, Bd. 20, n° 4, 1927, 1—5.
4. *S. N. Mergelian*. Uniform approximations of functions of a complex variable, Uspehi Matem. Nauk. (N. S.) 7, n° 2, (48), 1952, 31—122.
5. *F. Schnitzer* and *W. Seidel*. On the rate with which a holomorphic function in a disk can tend radially to zero, Proceeding of Nat. Acad. Sci. USA, 57, n° 4, 1967 876—877.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

А. А. ШАГИНЯН

О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНУТРИ СФЕРЫ

Введение

Пусть S — сфера радиуса единица в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Точка $a \in S$ называется точкой неопределенности (ambiguous point) [1, 4] функции f, определенной в шаре int S, если существуют два пути $l_{a;\,r_1}$ и $l_{a;\,r_2}$, лежащие в int S и оканчивающиеся в этой точке, вдоль которых f имеет асимптотические значения r_1 и r_2 соответственно, где r_1 и r_2 отличные друг от друга действительные числа.

В работе [1] Г. Пиранян доказал, что можно построить непрерывную в шаре int S функцию, для которой все точки S являются точками неопределенности.

Несуществование функции в круге с аналогичным поведением у граничной окружности следует из более раннего результата Ф. Бейджмила [2, 4] о том, что любая комплекснозначная в круге функция может иметь не более чем счетное множество точек неопределенности на граничной окружности.

В дальнейшем Ф. Бейджмил [3] доказал, существенно используя вышеуказанный результат Г. Пираняна, что можно построить гармоническую в int S функцию h такую, что для всякого числа $r \in R^1$ и всякой точки $a \in S$ существует путь $l_{a;\,r} \subset$ int S, оканчивающийся в точке a, вдоль которого h имеет асимптотическое значение r.

В этих работах не оцениваются скорости роста построенных функций у S.

Настоящая работа посвящена доказательству следующего утверждения.

Теорема. *Существует гармоническая в* int S *функция* H *такая, что для любой точки* $a \in S$ *и любого отрезка* $[A;\,B]$ *(который может быть неограниченным как с одной, так и с другой стороны или превращаться в точку при* $A = B$ *) существует спрямляемый путь* $l_{a;\,[A;\,B]} \subset$ int S, *оканчивающийся в* a, *ортогональный к* S *в точке* a, *по которому предельное множество* [4] *функции* H *равно* $[A;\,B]$, *т. е.*

$$C_{l_{a;[A;\,B]}}(H) = [A;\,B].$$

Кроме того, эту функцию можно построить таким образом, что-

бы внутри сферы S_i *радиуса* $1-\frac{1}{2^i}$, *концентрической с* S, *было* $|H(P)|\leqslant \exp\{\exp\cdots\{\exp \mathrm{const}\}\}$, *где количество* $\exp$ *равно* $2i$, *а* const — *абсолютная постоянная.*

Замечание 1. Вышеуказанный результат Ф. Бейджмила [3] следует из нашей теоремы при $A=B=r$.

Замечание 2. Пути $l_{a;[A;B]}$ можно выбрать таким образом, чтобы $H: l_{a;[A;B]}\to [A; B]$, т. е. значения H на $l_{a;[A;B]}$ не выходят за пределы отрезка $[A; B]$.

Замечание 3. Условие теоремы, налагаемое на предельное множество быть отрезком, необходимо, так как предельное множество любой действительной непрерывной функции по любому пути является отрезком.

Замечание 4. Пусть λ—произвольная гладкая дуга, касательная к отрезку PQ в точке P. Вращая λ вокруг PQ, получим некоторое коническое острие K (рис. 1).

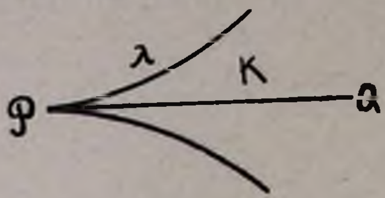

Рис. 1.

Утверждается, что функцию H можно построить таким образом, чтобы она обладала указанным в теореме предельным поведением внутри любого наперед заданного острия K_a, т. е. вышеуказанные пути $l_{a;[A;B]}\subset \mathrm{int}\, K_a$, где K_a—острие K с вершиной в точке a и осью, направленной по радиусу S в этой точке. Однако в этом случае указанное в теореме ограничение на скорость роста H может не иметь места.

Физическая интерпретация. Если рассмотреть указанную в теореме функцию H как стационарное решение уравнения теплопроводности (в общем случае стационарное скалярное поле), то придем к следующей физической интерпретации полученного результата.

Пусть в центре шара имеется множество частиц $\{M\}$, каждая из которых имеет определенную тепловыносливость, которая определяется отрезком $[A; B]$, зависящим от M: при температуре в пределах $A<t\leqslant B$ частица M существует, при t вне $[A; B]$ частица M разрушается.

Утверждается, что существует такой стационарный тепловой режим внутри шара, который позволяет вывести любую частицу M без ее разрушения из центра к произвольной точке на сфере так, чтобы любая другая частица M' с иной выносливостью $[A'; B']$, не выносящая хотя бы некоторые температуры из $[A; B]$, т. е. $[A'; B']/[A; B]\neq\varnothing$, следующая за M по тому же пути, разрушилась.

При этом допускается теплоизоляция частиц внутри любой (зависящей от частицы) сферы, концентрической с S и лежащей строго внутри нее, таким образом при движении к точке $a\in S$, начиная с некоторого момента, M обязательно лишается теплоизоляции.

§ 1. Пусть S_i $i=1;\ 2;\cdots$ — концентрические с S сферы

$$\operatorname{rad} S_i=\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^i}\cdot$$

На первом этапе наших конструкций мы будем строить внутри сферы S некоторое древоподобное образование, крона которого сильно разветвляется при переходе от каждой сферы S_i к соседней S_{i+1}, и становится сколько угодно плотной при $i\to\infty$.

При этом для достижения требуемых результатов нам надо будет эти конструкции проводить по определенной методике, позволяющей оценивать густоту упомянутой кроны на каждой сфере, приводящей в итоге к оценке роста строящейся гармонической функции при приближении к сфере S.

Вначале мы построим некоторую сеть a-точек на сферах S_i с намерением провести в дальнейшем ветви строящегося древа через эти точки.

Для этого впишем в S_1 тетраэдр с гранями параллельно координатным осям, будем строить определенную совокупность a-точек на гранях этого тетраэдра и радиальным проектированием получим нужные нам a-точки на соответствующих сферах S_i.

Обозначим грани тетраэдра через $M^1_{k^1}$, где $K^1=1;\cdots;6$. Возьмем одну из этих граней $M^1_{k^1}$ (см. рис. 2), обозначим ее центр через $a^1_{k^1}$.

Радиальным проектированием квадратов $M^1_{k^1}$ и точек $a^1_{k^1}$ получим на сфере S_1 шесть криволинейных квадратов $N^1_{k^1}$ и их центры $a^1_{k^1}$.

Разделим теперь каждый из квадратов $M^1_{k^1}$ на четыре равных квадрата и обозначим их через $M^2_{k^1;\,k^2}$ $K^1=1;\cdots;6$, $K^2=1;\ 2;\ 3;\ 4$. Каждый квадрат $M^2_{k^1;\,k^2}$, в свою очередь, делим на четыре равные части, и обозначаем полученные квадраты через $M^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$, здесь индексы K^1; K^2; i^1_2 пробегают независимо значения $k^1=1;\cdots$ $\cdots;6$, $k^2=1;\cdots;4$, $i^1_2=1;\cdots;4$. Полученные квадраты $M^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$ и их центры $a^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$ радиальным проектированием переносим на сферу S_2. Таким образом, на сфере S_2 получатся квадраты $N^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$ и их центры $a^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$.

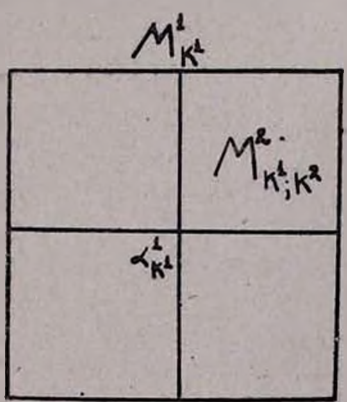

Рис. 2.

Квадраты $M^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$ и соответственно их образы $N^{2;\,i^1_2}_{k^1;\,k^2}$ на сфере S_2 будем называть квадратами второго ранга.

Разделим теперь каждый из квадратов $M^2_{k^1;\,k^2}$ на четыре части и обозначим полученные квадраты через $M^3_{k^1;\,k^2;\,k^3}$, $k^1=1;\cdots,6$, $k^3=1;\cdots;4$,

$k^3=1;\cdots;4$. Каждый из этих квадратов, в свою очередь, делим на $4\cdot m_2$ частей, где m_2 — число $a^{2;\,i_2^1}_{k^1;\,k^2}$ точек внутри $N^2_{k^1;\,k^2}$. Обозначим полученные квадраты через $M^{3;\,i_3^1}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$, $i_3^1=1;\cdots;4m_2$; эти последние квадраты также разделим теперь уже на m_2 частей и обозначим их через $M^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$, где

$$\begin{aligned} &k^1=1;\cdots;6, \quad i_3^1=1;\cdots;4m_2,\\ &k^2=1;\cdots;4,\\ &k^3=1;\cdots;4, \quad i_3^2=1;\cdots;m_2. \end{aligned}$$

Квадраты $M^3_{k^1;\,k^2;\,k^3}$, $M^{3;\,i_3^1}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$ и $M^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$ будем называть соответственно квадратами первого, второго и третьего рангов при третьем разбиении.

Радиальным проектированием на сферу S_3 получим криволинейные квадраты всех трех рангов на S_3

$$N^3_{k^1;\,k^2;\,k^3},\ N^{3;\,i_3^1}_{k^1;\,k^2;\,k^3}\ \text{и}\ N^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}.$$

Обозначим центры квадратов $M^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$ через $a^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$, а центры квадратов $N^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$ на сфере S_3 через $a^{3;\,i_3^1;\,i_3^2}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$. Продолжая таким образом дальше, допустим, что уже построены квадраты трех рангов $(n-1)$-го разбиения на тетраэдре:

$$M^{n-1}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}},\ M^{n-1;\,i_{n-1}^1}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}\ \text{и}\ M^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$$

$a^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}^2}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$ — центр квадрата $M^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}^2}_{k^1;\,k^2;\ldots;\,k^{n-1}}$.

Радиальным проектированием на сфере S_{n-1} получены криволинейные квадраты

$$N^{n-1}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}},\ N^{n-1;\,i_{n-1}^1}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}},\quad N^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}^2}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$$

и точки $a^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}^2}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$ — центры квадратов $N^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}^2}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$.

Построения, связанные с n-ым разбиением, проведем следующим образом. Обозначим через m_{n-1} число $a^{n-1;\,i_{n-1}^1;\,i_{n-1}^2}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$ точек на $N^{n-1}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$. Разбиваем каждый из квадратов $M^{n-1}_{k^1;\ldots;\,k^{n-1}}$ на 4 части, и обозначаем через $M^n_{k^1;\ldots;\,k^n}$, это—квадраты первого ранга n-го разбиения. Деля каждый из этих квадратов на 4 m_{n-1} частей, получим квадраты второго ранга $M^{n;\,i_n^1}_{k^1;\ldots;\,k^n}$, а разбивая эти последние на m_{n-1} частей, получим квадраты третьего ранга $M^{n;\,i_n^1;\,i_n^2}_{k^1;\ldots;\,k^n}$, центры которых обозначим $a^{n;\,i_n^1;\,i_n}_{k^1;\ldots;\,k^n}$.

Радиально проектируя эти образования на S_n, получим соответствующие криволинейные квадраты и $a^{n;\, i^1_n;\, i^2_n}_{k^1;\cdots;\, k^n}$ — точки на сфере S_n. Будем считать этот процесс бесконечно продолженным.

Таким образом, получим бесконечное множество a-точек, расположенных на концентрических сферах S_n. На следующем шагу наших построений мы сконструируем некоторое тело, проходящее через a-точки, и определим на ее оси некоторую непрерывную функцию f, обладающую асимптотическими свойствами искомой гармонической функции H: для всякой точки $a \in S$ и отрезка $[A;\, B]$ существует путь $l_{a;\,[A;B]}$, составленный из ветвей этой оси L такой, что

$$C_{l_{a;\,[A;\,B]}}(f) = [A;\, B].$$

Параллельно с введенной нумерацией a и α-точек нам нужно будет ввести также единую нумерацию для этих точек, входящих в квадраты первого ранга.

Пусть $ABCD$ (рис. 3)—квадрат, соответствующий некоторому набору значений индексов $k^1;\cdots;\, k^n$. Условно наименьшие квадраты на этом рисунке будем считать квадратами третьего ранга, и пусть $a^{n;\, i^1_n;\, i^2_n}_{k^1;\cdots;\, k^n}$-точки в центрах этих квадратов. Перенумеруем α-точки по строкам, начиная с верхнего правого угла A, в порядке, указанном на рисунке. α-точки при таком расположении обозначим $\alpha^{n;\,(j_n)}_{k^1;\cdots;\, k^n}$, где, при заданном наборе значений $k^1;\cdots;\, k^n$ j_n пробегает значения $1;\, 2;\cdots;\, m_n = 4\cdot m^2_{n-1}$. Аналогичная нумерация вводится для a-точек на сфере S_n.

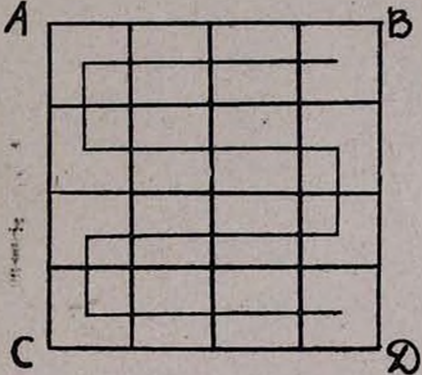

Рис. 3.

Заметим, наконец, что α-точки, как и a-точки, полученные на всех этапах наших разбиений, различны.

§ 2. Перенумеруем совокупность всех рациональных чисел, расположив их в последовательность $p_1;\, p_2;\, \cdots;\, p_n;\cdots$.

Положим $f\,(a^{n-1;\, i^1_{n-1};\, i^2_{n-1}}_{k^1;\cdots;\, k^{n-1}}) = p_{i^1_{n-1}}$, т. е. припишем функции f во всех точках третьего ранга, окружающих точку второго ранга $a^{n-1;\, i^1_{n-1}}_{k^1;\cdots;\, k^{n-1}}$, одно и то же рациональное значение $p_{i^1_{n-1}}$ (рац. число с номером i^1_{n-1}).

Таким образом, при переходе от сферы S_{n-1} к S_n новые квадраты первого ранга будут уменьшаться, число a-точек второго ранга будет возрастать и в этих точках функция f будет принимать больше рациональных значений, чем в a-точках предыдущей сферы, с повторением значений, полученных ранее.

Для построения упомянутого выше древоподобного тела покажем предварительно схему соединения его ветвей и лишь после укажем их форму и расположение.

Схема древа будет такой, что оно соединит каждую точку $a^{n-1;\,(j_{n-1})}_{k^1;\cdots;k^{n-1}}$ со всеми точками $a^{n;\,i_n^1;\,j_{n-1}}_{k^1;\cdots;k^n}$ при $k^{n+1}=1;\cdots;4$, $i_n^1=1;2;\cdots;4\,m_{n-1}$.

Таким образом, начиная с шести a-точек сферы S_1, переходя от одной сферы к другой, мы получим систему дуг, напоминающую скелет дерева, так как, двигаясь по любым построенным ветвям, мы имеем возможность идти к внешней сфере S, не проходя дважды через одну и ту же точку.

Уточним несколько форму соединяющих дуг и будем нанизывать на них кусочно призматические трубки, что и приведет к некоторому односвязному объемному телу, во всем подобному дереву. Некоторое уточнение формы соединяющих ветвей нам нужно для определенных количественных оценок, необходимых для дальнейших построений.

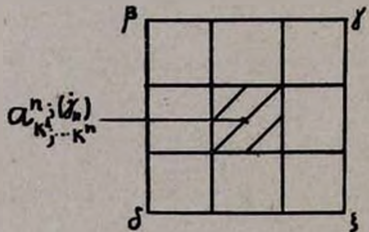

Рис. 4.

Обозначим через $S^{m_{n-1}}_{n-1}$ сферу радиуса $\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Проведем между S_{n-1} и $S^{m_{n-1}}_{n-1}$ концентрические к ним сферы $S^1_{n-1};\cdots;S^{m_{n-1}-1}_{n-1}$ радиусов $\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{k}{m_{n-1}}\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$, $k=1;\ 2;\cdots;\ m_{n-1}-1$, разбивающие слой между S_{n-1} и $S^{m_{n-1}}_{n-1}$ на m_{n-1} слоев равной толщины $\dfrac{1}{m_{n-1}\cdot 2^{n+1}}$.

Пусть $\beta\gamma\delta\xi$—одна из ячеек третьего ранга $N^{n;\,i_n^1;\,i_n^2}_{k^1;\cdots;k^n}$ на сфере S_n; центр этой ячейки—точка $a^{n;\,(j_n)}_{k^1;\cdots;k^n}$.

Разбиваем эту ячейку на девять равных квадратов и центральную заштрихованную часть проектируем на все промежуточные сферы S^k_{n-1}, $k=1;\cdots;m_{n-1}$. То же самое производим со всеми ячейками третьего ранга внутри квадрата первого ранга $N^n_{k^1;\cdots;k^n}$. Таким образом, на каждой промежуточной сфере получим такие заштрихованные квадраты, число которых равно $16\cdot m^2_{n-1}$. Эти квадраты будем называть **запретными**. Возьмем также ячейки такой же величины с центрами в точках $a^{n-1;\,(j_{n-1})}_{k^1;\cdots;k^{n-1}}$. Эти ячейки назовем **опорными**. Проекции опорных квадратов на те же промежуточные сферы также будем называть **запретными**.

Пользуясь нумерацией (j_{n-1}) точек a в $N^{n-1}_{k^1;\dots;k^{n-1}}$, возведем радиальным проектированием на опорном квадрате, содержащем a-точку, соответствующую значению $j_{n-1}=1$, призматическую трубку до сферы S^1_{n-1}.

Отметим на S^1_{n-1} те запретные квадраты, проекции которых содержат точки сферы S_n, которые должны быть соединены с точкой $a^{n-1;(j_{n-1})}_{k^1;\dots;k^{n-1}}$ согласно вышеприведённой схеме. От части построенной нами трубочки между S_{n-1} и S^1_{n-1} протянем в слое между S_{n-1} и S^1_{n-1} криволинейные призматические трубочки между запретными ячейками к соответствующим отмеченным ячейкам, с которыми она должна быть соединена по указанной схеме. Дойдя до указанных ячеек, продолжим от них трубочки до соответствующих квадратов на S_n уже радиальным проектированием. Таким образом, точка $a^{n-1;(j_{n-1})}_{k^1;\dots;k^{n-1}}$ при $(j_{n-1})=1$ будет соединена со всеми соответствующими ей точками на сфере S_n трубчатыми ветвями, которые имеют радиальные куски между S_{n-1}; S^1_{n-1} и S^1_{n-1}; S, соединенные между собой кусочно призматическими трубками в слое S_{n-1}; S^1_{n-1}, проложенными в проходах между запретными квадратами.

Аналогично прокладываем кусочно призматическую трубку от опорного квадрата на S_{n-1}, содержащего точку $a^{n-1;(j_{n-1})}_{k^1;\dots;k^{n-1}}$, где $(j_{n-1})=2$, к соответствующим ей точкам на сфере S_n, радиальными кусками от S_{n-1} до S^2_{n-1} и от S^2_{n-1} до S_n, соединенными друг с другом трубками, проложенными в слое S^1_{n-1} в проходах между остальными запретными квадратами. Построенные таким образом трубки соединяют $a^{n-1;(j_{n-1})}_{k^1;\dots;k^{n-1}}$ — точки с соответствующими им точками на сфере S_n, идя по радиальному направлению до определенной промежуточной сферы, где, разветвляясь в сферическом слое, заканчиваются в конце радиальной трубкой. Ветви полученного трубчатого тела соприкасаются друг с другом. Сузив его наполовину вокруг системы осевых линий (скелета), которую обозначим L, получим трубчатое тело, уже лишенное этого недостатка. Обозначим разветвленную трубчатую поверхность, полученную из последнего сглаживанием, через T.

Каждая точка $a^{n-1;\,i^1_{n-1};\,i^2_{n-1}}_{k^1;\dots;k^{n-1}}$ сферы S_{n-1} соединяется при помощи ветвей L с $4\cdot 4\cdot m_{n-1}$ соответствующими ей точками в квадратах второго ранга. Пусть $a^{i^1_n;\,i^2_n}_{k^1;\dots;k^n}$ — одна из этих точек.

Мы намеревались построить на L непрерывную функцию со значениями $f(a^{n;\,i^1_n;\,i^2_n}_{k^1;\dots;k^n})=p_{i^1_n}$, где $p_{i^1_n}-i^1_n=\varepsilon$—рациональное число с указанными асимптотическими свойствами. Для этого возьмем ветвь L, соединяющую указанные точки $a^{n-1;\, t^1_{n-1};\, t^2_{n-1}}_{k^1;\dots;\,k^{n-1}}$ и $a^{n;\, t^1_n;\, t^2_n}_{k^1;\dots;\,k^n}$, f продол-жим на эту ветвь линейным интерполированием значений $p_{t^1_{n-1}}$ и $p_{t^1_n}$ в этих точках так, чтобы на радиальной части этой ветви, лежащей выше соответствующего сферического слоя ветвления, f изменялась линейно, а на нижних ветвях, перпендикулярных радиусу, и ниже до S_{n-1} оставалась постоянной.

Покажем теперь, что L и построенная на ней функция f обладают в окрестности сферы S асимптотическими свойствами, о которых говорилось в § 1, т. е. для любой точки $a \in S$ и любого отрезка $[A;\, B]$ можно выбрать из ветвей L спрямляемый путь $l_{a;\,[A;B]}$, идущий из центра сферы к точке a такой, что $l_{a;[A;B]}$ перпендикулярна к сфере в точке a и предельная совокупность значений функции при движении по пути $l_{a;\,[A;B]}$ к точке a совпадает с $[A;\, B]$,

$$C_{l_{a;\,[A;\,B]}}(f) = [A;\, B].$$

Итак, пусть $a \in S$ и задан отрезок $[A;\, B]$. Укажем как выбирать путь $l_{a;\,[A;B]}$ из L.

Допустим, что радиальная проекция точки a на S_1 попадает в $N^1_{k^1_0}$, где k^1_0 — определенное значение k^1. Первым отрезком $l_{a;[A;\,B]}$ будем считать радиус, идущий от центра шара к точке $a^1_{k^1_0}$. Если проекция* a на S_2 попадет в $N^2_{k^1_0;\,k^2_0}$, где k^2_0 — некоторое численное значение k^2, то точкой пересечения $l_{a;\,[A;B]}$ с S_2 берем ту из a-точек, пусть это будет $a^{2;\,(j^0_2)}_{k^1_0;\,k^2_0}$, в которой значение f наиболее близко к A.

Вторым отрезком дуги $l_{a;\,[A;B]}$ считаем ту дугу из L, которая соединяет выбранные нами точки $a^1_{k^1_0}$ и $a^{2;\,(j^0_2)}_{k^1_0;\,k^2_0}$.

Пусть проекция точки a на сфере S_3 попадает в $N^3_{k^1_0;\,k^2_0;\,k^3_0}$; за точку пересечения $l_{a;\,[A;B]} \cap S_3$ берем ту из точек $a^{3;\,(j_3)}_{k^1;\,k^2;\,k^3}$, в которой значение f наиболее близко к B; пусть это будет точка $a^{3;\,(j^0_3)}_{k^1_0;\,k^2_0;\,k^3_0}$. Третьим отрезком дуги $l_{a;\,[A;B]}$ будем считать ту дугу из L, которая соединяет $a^{2;\,(j^0_2)}_{k^1_0;\,k^2_0}$ с $a^{3;\,(j^0_3)}_{k^1_0;\,k^2_0;\,k^3_0}$. Продолжая таким образом дальше, допустим, что проекция точки на сферу S_n попадает в некоторый квадрат $N^n_{k^1_0;\dots;\,k^n_0}$. Если n четно, то берем за точку пересечения $l_{a;\,[A;B]}$ с S_n ближайшую к этой проекции $a^{n;\,(j_n)}_{k^1_0;\dots;\,k^n_0}$ — точку сферы S_n, где значение f наиболее близко к A, если n нечетно, то берем ближайшую к проекции a-точ-

* Речь идет о радиальных проекциях точки.

ку, где f наиболее близка к B. Пусть выбранная точка будет $a^{n;\,(f_n^*)}_{k_0^1;\dots;k_0^n}$.

За n-ый отрезок дуги $l_{a;\,[A;B]}$ примем дугу из L, соединяющую $a^{n-1;\,(f^0_{n-1})}_{k_0^1;\dots;k_0^{n-1}}$ с $a^{n;\,(f^0_n)}_{k_0^1;\dots;k_0^n}$.

Выбранные таким образом отрезки дуг из L составят вместе спрямляемую кривую $l_{a;\,[A;B]}$ с началом в центре сферы и с концом в a. Благодаря тому, что в начальных и концевых точках выбранных отрезков этой кривой f соответственно близка к числам A и B, а между этими точками принимает всевозможные промежуточные значения, то $[A; B]$ есть предельное множество значений f вдоль пути $l_{a;\,[A;B]}$, т. е.

$$C_{l_{a;\,[A;B]}}(f) = [A;\ B].$$

Сравнение размеров квадрата первого ранга на S_n с расстоянием S_n до S показывает, что $l_{a;\,[A;B]}$ перпендикулярна к S в точке a.

§ 3. Обозначим через q_n число точек пересечения L с S_n, т. е число a-точек на S_n. Легко подсчитать, что

$$q_n = 6\cdot 4^{n-2}\cdot 4^{2^n}. \tag{1}$$

Для дальнейших построений ветви T неудобны тем, что на сферических поверхностях, диаметры трубок T вдоль L недостаточно тонки. Поэтому сузим T вдоль L таким образом, чтобы у полученной трубки T_1 компоненты σ_i^n пересечения $\operatorname{int} T_1 \cap S_n$ имели

$$\operatorname{mes}\sigma_i^n = \frac{1}{(q_n)^n}\,. \tag{2}$$

Во всех радиальных частях линии L перенесем значения функции f с L на T_1 по перпендикулярам к L. А в частях L, находящихся на сферах либо в узловых точках, f постоянна. Будем переносить эти постоянные значения на части T_1, охватывающие эти части L.

Таким образом, на T_1 будет определена функция f^1.

Очевидно функция f^1 вдоль трубок, охватывающих пути $l_{a;\,[A;B]}$, обладает теми же асимптотическими свойствами, что и f вдоль нее.

Лемма 1. *Существует решение задачи Дирихле в* $\operatorname{int} T_1$ *по граничным значениям* f_1.

Доказательство. Пусть $P \in \operatorname{int} T_1$. Обозначим через M_i $\max|f(Q)|$ при $Q \in \operatorname{int} S_i \cap L$ (см. рис. 4).

В установленном ранее соответствии рациональных чисел и точек можно это соответствие установить так, чтобы было

$$M_i < i. \tag{3}$$

Для этого достаточно будет некоторые рациональные числа использовать повторно.

Возьмем часть поверхности T_1, отсекаемую сферой S_i, обозначим эту часть через T_1^i:

$$T_1^i = T_1 \cap \operatorname{int} S_i.$$

Поверхность T^i упирается в S_i некоторыми прямоугольниками σ_n^i. Решим в области $\operatorname{int} T_1^i$, ограниченной поверхностью T_1^i и прямоугольниками σ_n^i задачу Дирихле, беря граничную функцию, равную нулю на прямоугольниках σ_n^i и равную f^1 на T_1^i.

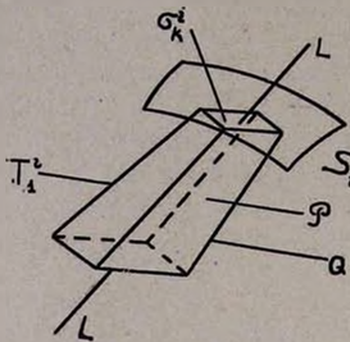

Рис. 5.

Это решение представится в виде

$$f_i(P) = \\ = \int\limits_{Q \in T_1^i} f^1(Q)\, d\omega\,(P; \alpha(Q); \operatorname{int} T_1^i), \tag{4}$$

где Q — переменная точка на поверхности T_1^i, $\alpha(Q)$ — локальный параметр, ω — гармоническая мера элемента поверхности, покрывающего точку Q в области $\operatorname{int} T_1^i$.

Решая задачу Дирихле для областей $\operatorname{int} T_1^i$, при всевозможных значениях i получим последовательность гармонических функций $\{f_i\}$. Докажем, что последовательность $\{f_i\}$ сходится в любой фиксированной области Ω внутри T_1.

Предположим i настолько большим, чтобы Ω находилась строго внутри T_1^i. Считая $j > i$, оценим $|f_j(P) - f_i(P)|$ при $P \in \Omega$. Получим

$$|f_j(P) - f_i(P)| = \Big| \int\limits_{Q \in T_1^j} f^1(Q)\, d\omega\,(P; \alpha(Q); \operatorname{int} T_1^j) - \\ - \int\limits_{Q \in T_1^i} f^1(Q)\, d\omega\,(P; \alpha(Q); \operatorname{int} T_1^i)\Big|. \tag{5}$$

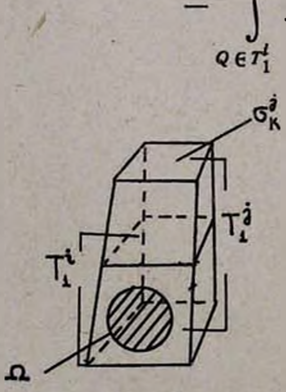

Рис. 6.

На рис. 6 условно на одной призме указаны взаимоотношения величин T_1^i, T_1^j, Ω и σ^i, σ^j, где через σ_i обозначена совокупность квадратов, высекаемых T_1 на S_i.

Для $P \in \Omega$, очевидно, можно представить первый интеграл в (5) в виде

$$\int\limits_{Q \in T_1^i} f^1(Q)\, d\omega\,(P; \alpha(Q); \operatorname{int} T_1^i) + \\ + \int\limits_{Q \in \sigma^j} f_j(Q)\, d\omega\,(P; \alpha(Q); \operatorname{int} T_1^i).$$

Поэтому

$$|f_i(P)-f_j(P)|=\Big|\int\limits_{Q\in\sigma^i} f_j(Q)\,d\omega(P;\alpha(Q);\operatorname{int} T_1^i)\Big|. \tag{6}$$

Оценим $|f_j(Q)|$ при $Q\in\sigma^i$.

При этих значениях Q имеем

$$|f_j(Q)|=\Big|\int\limits_{L\in T_1^j} f^1(L)\,d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} T_1^j)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\sum_{k=i}^{j-1}\int\limits_{L\in T_1^{k+1}/T_1^k} f^1(L)\,d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} T_1^j)\Big|+$$

$$+\Big|\int\limits_{L\in T_1^i} f^1(L)\,d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} T_1^j)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant i+\sum_{k=i}^{j-1}(k+1)\int\limits_{L\in T_1^{k+1}/T_1^k} d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} T_1^j). \tag{7}$$

По принципу расширения области Карлемана

$$\int\limits_{L\in T_1^{k+1}/T_1^k} d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} T_1^j)\leqslant\int\limits_{L\in\sigma^k} d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} S_k).$$

Воспользовавшись представлением Пуассона решения задачи Дирихле в шаре, получим

$$\int\limits_{L\in\sigma^k} d\omega(Q;\alpha(L);\operatorname{int} S_k)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\cdot\operatorname{rad} S_k}\cdot\int\limits_{L\in\sigma^k}\frac{\operatorname{rad}^2 S_k-\rho^2(Q;O)}{\rho^3(Q;L)}\,dS_L=$$

$$=\frac{1}{4\pi\operatorname{rad} S_k}\cdot\int\limits_{L\in\sigma^k}\frac{(\operatorname{rad} S_k-\rho(Q;O))(\operatorname{rad} S_k+\rho(Q;O))}{\rho^3(Q;L)}\,dS_L<$$

$$<C\cdot\frac{\operatorname{mes}\sigma^k}{\rho^2(Q;L)}. \tag{8}$$

Последнее неравенство следует из того, что $\operatorname{rad} S_k-\rho(Q;O)<$ $<\rho(Q;L)$.

Таким образом, при $Q\in\sigma^i$

$$|f_j(Q)|\leqslant i+C\cdot\sum_{k=i}^{j-1}(k+1)\cdot\frac{\operatorname{mes}\sigma^k}{\rho^2(Q;S_k)}, \tag{9}$$

что следует из (7) и (8).

Сумма, фигурирующая в (9), сходится из-за большой скорости убывания mes σ^k, обеспечиваемой неравенством (2): следовательно

$$|f_j(Q)| < C\cdot i \quad \text{при} \quad Q \in \sigma^l. \tag{10}$$

Подставляя в (6) оценку (10), получим

$$|f_i(P) - f_j(P)| \leqslant C\cdot i \int\limits_{Q\in\sigma^l} d\omega\,(P;\, \alpha(Q);\, \text{int } T_1^l).$$

Воспользовавшись такими же рассуждениями, как при получении неравенства (8), получим

$$|f_i(P) - f_j(P)| \leqslant C\cdot i\cdot \frac{\text{mes } \sigma^l}{\rho^2(P;\, S_i)}.$$

Так как $\rho(P;\, S_i)$ ограничено снизу, а mes $\sigma^l \to 0$ в соответствии с (2), то выполняется критерий Коши сходимости последовательности $f_i(P)$ равномерно в области Ω.

Функция $f^1(P) = \lim f_i(P)$ является решением вышеуказанной задачи Дирихле в области int T_1.

§ 4. Лемма 2. *$|f^1(P) - f(P)| \to 0$ при стремлении P к S по L.*

Доказательство. Оценим $|f^1(P) - f(P)|$, когда P находится на части L между S_{l+1} и S_l.

Обозначим через $\omega_l(\delta)$ модуль непрерывности функции $f^1(Q)$ на множестве T_1^{l+2}/T_1^{l-1}, $\omega_l(\delta) = C\cdot(i+1)\cdot\delta\cdot 2^{l+2}$, так как отрезок, на котором $f^1(Q)$ изменяется линейно, меньше, чем на $2(i+2)$, не короче, чем $\dfrac{1}{2\cdot 2^{l+2}}$.

Для того чтобы $\omega_l(\delta) = \dfrac{1}{i+1}$, достаточно брать

$$\delta = C\cdot\frac{1}{(i+2)^2\cdot 2^{l+2}}. \tag{1}$$

Имеем

$$f^1(P) - f(P) = f^1(P) - f^1(Q_0), \tag{2}$$

где $Q_0 \in T_1$ — некоторый прообраз точки P при проектировании $T_1 \to L$, при помощи которой была построена функция f^1.

Имеем

$$f^1(P) = \int\limits_{Q\in\partial G} f^1(Q)\, d\omega\,(P;\, \alpha(Q);\, G), \tag{3}$$

где G — компонента int T_1^{l+1}/int T_1^l, содержащая точку P.

Кроме того

$$f_1(Q_0) = \int\limits_{Q\in\partial G} f^1(Q_0)\, d\omega\,(P;\, \alpha(Q);\, G), \tag{4}$$

так как гармоническая функция с постоянными граничными значениями—постоянна.

Воспользовавшись (2), (3) и (4), получим

$$|f^1(P) - f(P)| = |f^1(P) - f^1(Q_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{Q\in\partial G} |f^1(Q) - f^1(Q_0)|\, d\omega\,(P;\ \alpha(Q);\ G) \leqslant \tag{5}$$

$$\leqslant \int_{Q\in\delta(Q_0)} |f^1(Q) - f^1(Q_0)|\, d\omega\,(P;\ \alpha(Q);\ G) +$$

$$+ \int_{Q\in\partial G/\delta(Q_0)} |f^1(Q) - f^1(Q_0)|\, d\omega\,(P;\ \alpha(Q);\ G),$$

где $\delta(Q_0)$ — сумма δ-окрестностей всех прообразов P на T_1.

Из-за выбора δ по (1)

$$\int_{Q\in\delta(Q_0)} |f^1(Q) - f^1(Q_0)|\, d\omega\,(P;\ \alpha(Q);\ G) \leqslant \frac{1}{i+1}, \tag{6}$$

а

$$\int_{Q\in\partial G/\delta(Q_0)} |f^1(Q) - f^1(Q_0)|\, d\omega\,(P;\ \alpha(Q);\ G) \leqslant C\cdot\frac{(i+2)\cdot m_{i+2}\cdot \operatorname{mes}\sigma_j^{i-1}}{\delta^2(Q_0)} =$$

$$= C\cdot(i+2)\cdot \operatorname{mes}\cdot\sigma_j^{i-1}\cdot(2^{i+2}\cdot(i+2)^2)^2\cdot m_{i+2}. \tag{7}$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что $\operatorname{mes}\{\partial G/\delta(Q_0)\} \leqslant C\cdot \operatorname{mes}\sigma_j^{i-1}\cdot m_{i+2}$, а расстояние от P до $\{\partial G/\delta(Q_0)\}$ больше чем $\delta(Q_0)$. Правая часть неравенства (7) стремится к нулю при $i\to\infty$.

Воспользовавшись этим и (5), (6), получим, что

$$|f^1(P) - f(P)| \to 0 \text{ при } P\to S \text{ по } L.$$

Таким образом, $f^1(P)$ на L обладает таким же асимптотическим поведением, что и $f(P)$ на L.

§ 5. Обозначим через T_2 сглаженную трубку, получающуюся из T_1 сжатием вдвое.

Лемма 3. *Для* $f^1(P)$ *при* $P\in \operatorname{int} T_2$ *имеет место формула Грина*

$$f^1(P) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_{Q\in T_2}\left\{f^1(Q)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right\} dS_Q. \tag{1}$$

Доказательство. Для $f^i(P)$ при $P\in \operatorname{int} T_2^{i-1}$ верна формула Грина

$$f^1(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{Q\in T_2}\left\{f^1(Q)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right\} dS_Q +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Q\in\sigma^{2;\,i}}\left\{f^1(Q)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{r_{PQ}}\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right\}dS_Q, \tag{2}$$

где $\sigma^{2;\,i}=\operatorname{int} T_2\cap S_i$.

Для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что второй интеграл в (2) стремится к нулю при $i\to\infty$ и неизменном P.

1°. Докажем, что $\int\limits_{Q\in\sigma^{2;\,i}}|f^1(Q)|\,dS_Q\to 0$ при $i\to\infty$.

Из (10) § 3 имеем при этих значениях Q $|f^1(Q)|<C\cdot i$, следовательно

$$\int\limits_{Q\in\sigma^{2;\,i}}|f^1(Q)|\,dS_Q\leqslant C\cdot i\cdot \operatorname{mes}\sigma^{2;\,i},$$

а последнее выражение стремится к нулю, в силу (2) § 3.

2°. Покажем, что $\int\limits_{Q\in\sigma^{2;\,i}}\left|\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right|dS_Q\to 0.$

Воспользовавшись (10) § 3 и оценками производных гармонических функций в центре шара, получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right|_{Q\in\sigma^{2;\,i}}\leqslant C\cdot\frac{i}{\sqrt{\operatorname{mes}\sigma_k^{2;\,i}}},$$

отсюда

$$\int\limits_{Q\in\sigma^{2;\,i}}\left|\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right|dS_Q\leqslant C\cdot\frac{i}{\sqrt{\operatorname{mes}\sigma_k^{2;\,i}}}\cdot\operatorname{mes}\sigma^{2;\,i}.$$

Стремление последнего выражения к нулю следует из тех же соображений.

Так как при фиксированном P $\frac{1}{r_{PQ}}$ и $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}$ равномерно ограничены, то из 1° и 2° следует стремление второго интеграла в (2) к нулю.

Таким образом, лемма 3 доказана.

§ 6. В § 4 мы показали, что решение задачи Дирихле $f^1(P)$ в $\operatorname{int} T_1$ приближает с касанием $f(P)$ на L и, следовательно, обладает нужным нам граничным поведением у S. В следующем параграфе мы будем приближать с касанием $f_1(P)$ на L, производя вывод полюсов в формуле Грина, которой представляется $f_1(P)$ в $\operatorname{int} T_2$, в силу § 5. Для этого нам понадобятся гармонические в $\operatorname{int} S$ функции, приближающие с касанием $\frac{1}{r_{PQ}}$ при фиксированных $Q\in T_2$ и стремлении P к S по L, кроме того, будет приближаться производная $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}$ функции $\dfrac{1}{r_{PQ}}$ по P, по направлению к нормали к T_2 в точке Q. Эти функции $H_Q(P)$ и $\check{H}_Q(P)$ будут построены нами в этом параграфе. Кроме указанных свойств они будут еще измеримы по Q при фиксированных P и будут обладать свойством интегрируемости по Q.

Кроме того, будут получены некоторые оценки роста этих функций.

Функции $H_Q(P)$ мы будем строить в виде суммы $\sum_{i=1}^{\infty} H_Q^i(P)$, отдельные слагаемые которой гармоничны в int S.

1°. Построение $H_Q^1(P)$. Обозначим через T_3 трубку, получаемую из T_2 сужением наполовину. Далее мы будем пользоваться методом вывода полюсов М. В. Келдыша ([6], стр. 15). С его помощью построим гармонические по P в int S функции $H_Q(P)$, $Q \in T_2$, приближающие с точностью $\frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{1}{2^2}\,\frac{1}{PQ}$ в int $T_4^{0;2} = \text{int}\, T_3 \cap \text{int}\, S_2$. Из соображений непрерывности следует, что $H_Q^1(P)$ можно считать кусочно постоянной, измеримой по Q. Полюса Q будем выводить через int $S^0 / \{\text{int}\, T_2 \cap \text{int}\, S_3\}$ на концентрическую с S сферу S^c радиуса два по некоторым кривым $l_Q = \{Q(s)\colon\ Q(0) = Q;\ Q(\tau_Q) \in S^0\}$.

Имеет место оценка ([6], стр. 15)

$$\max_{P\in \text{int} S} |H_Q^1(P)| \leqslant C_1 \cdot \exp\left\{ C_1 \cdot \left[1 + \ln \frac{2}{\rho(0)\cdot\varepsilon_1}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[(1+\alpha)\cdot \int_0^{\tau_Q} \frac{dt}{\rho(t)}\right]\right\},$$

где τ_Q — длина кривой l_Q, а $\rho(t)$ — расстояние от точки $Q(t)$ до int $T_3 \cap \text{int}\, S_2$; так как $\rho(t) > \frac{1}{8}\,\text{rad}\,\sigma_i^2$, где σ_i^2 — некоторая компонента int $T_1 \cap S_2$, а τ_Q равномерно ограничена величиной τ при всех $Q \in T_2$, то

$$\max_{P\in \text{int}\, S} |H_Q^1(P)| \leqslant C_1 \cdot \exp\left\{\frac{2^4\cdot C_1}{\varepsilon_1 \cdot \text{rad}\,\sigma_i^2} \cdot \exp\left\{(1+\alpha)\,\frac{2^4 \cdot C_1 \cdot \tau}{\text{rad}\,\sigma_i^2}\right\}\right\}. \tag{1}$$

Положим $C_0 = 2^{10}\cdot \Pi \cdot (1+\alpha)\cdot \tau \cdot \max\{C;\ C_1;\ 1\}$, где С — константа, участвующая в неравенствах до § 5, C_1 — константа из леммы ([6], стр. 15), а Π — площадь T_1. Обозначим также $M_1 = C_0 \cdot \exp\{C_0 \exp C_0\}$.

2°. Построение $H_Q^2(P)$. Обозначим через S_1^0 сферу, равноудаленную от S_1 и S_2, концентрическую с ними. Гладкую, усеченную, разветвленную трубчатую поверхность $T_4^{1;4}$ определим следующими условиями:

$$\operatorname{int} T_4^{1;4} \cap \operatorname{int} S_1 = \operatorname{int} S_1; \; T_4^{1;4} \cap S_1 = T_3 \cap S_1,$$

а между S_1 и S_1^0 она гладко сужается, оставаясь внутри T_3 и имея осью L так, что

$$\operatorname{mes}\{\operatorname{int} T_4^{1;4} \cap S_1^0\} = \frac{1}{C_0 \cdot M_1} \tag{2}$$

и с такой толщиной продолжается до S_4, где и заканчивается.

Обозначим через $H_Q^{1;4}(P)$ решение задачи Дирихле в $\operatorname{int} T_4^{1;4}$ по граничным значениям: нуль на $T_4^{1;4} \cap \operatorname{int} S_1^0$ и $\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P)$ — на $T_4^{1;4}/\operatorname{int} S_1^0$. Пусть $P \in \operatorname{int} T_4^{1;4} \cap \{\operatorname{int} S_4 / \operatorname{int} S_1^0\}$. $\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P)$ гармоничны по P при фиксированных $Q \in T_2$.

В компоненте указанного множества, содержащей P, это выражение меньше решения задачи Дирихле в этой компоненте по граничным условиям: $\frac{8}{\operatorname{rad} \sigma_i^2} + \max\limits_{P \in \operatorname{int} S} |H_Q^1(P)|$ на нижнем основании и нуль — на остальной части границы.

Следовательно, воспользовавшись принципом максимума и оценками § 3, для гармонической меры получим

$$\max_{P \in \operatorname{int} T_4^{1;4} \cap \{\operatorname{int} S_3/\operatorname{int} S_1\}} \left| \frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \frac{\max H_Q^1(P)| + \dfrac{8}{\operatorname{rad} \sigma^2}}{(\operatorname{rad} S_2 - \operatorname{rad} S_1^0)^2} \cdot \operatorname{mes}\{\operatorname{int} T_4^{1;4} \cap S_1^0\} <$$

$$\leqslant C \cdot \frac{M_1}{(\operatorname{rad} S_2 - \operatorname{rad} S_1^0)^2} \cdot \frac{1}{C_0 \cdot M_1} < \frac{1}{2^4}. \tag{3}$$

Последнее неравенство получилось в силу определения C_0, а предпоследнее—при помощи (2) и (1).

Так как $H_Q^{1;4}(P)$ гармонична в $\operatorname{int} T_4^{1;4} \cap \operatorname{int} S_1^0$ на всех частях границы этого множества, кроме частей на S_1^0, равна нулю, а там меньше $\frac{8}{\operatorname{rad} \sigma_i^2} + \max\limits_{P \in \operatorname{int} S} |H_Q^1(P)|$, то, воспользовавшись такими же рассуждениями, как выше, получим

$$|H_Q^{1;4}(P)|_{P \in \operatorname{int} S} \leqslant C \cdot \frac{M_1}{(\operatorname{rad} S_1^0 - \operatorname{rad} S_1)^2} \cdot \frac{1}{C_0 \cdot M_1} < \frac{1}{2^4}. \tag{4}$$

И, наконец, воспользуемся тем, что $\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P)$ гармонична в $\operatorname{int} T_4^{1;4} \cap \{\operatorname{int} S_2/\operatorname{int} S_1\}$; на основаниях этого множества, лежащих на S_1, $\left|\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P)\right| < \frac{1}{2^2}$, а также $\left|H_Q^{1;4}(P)\right| \leqslant \frac{1}{2^4}$, в силу (4), следовательно на них

$$\left|\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P)\right| \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} < \frac{1}{2},$$

а на верхних основаниях, в силу (3), это выражение меньше $\frac{1}{2^4}$.

Таким образом, в $\operatorname{int} T_4^{1;4} \cap \{\operatorname{int} S_2 / \operatorname{int} S_1\}$

$$\left|\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - H_Q^{1;4}(P)\right| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5}$$

так как на остальных частях указанного множества это выражение меньше ε_1.

Обозначим через ${}^*T_4^{1;4}$ гладкую трубчатую поверхность, лежащую в $T_4^{1;4}$ и подобную ей так, что ширина щели между ними равна половине наименьшей толщины $T_4^{1;4}$. Напишем формулу Грина в области $\operatorname{int} {}^*T_4^{1;4}$ для функции $H_Q^{1;4}(P)$ (Q — считается фиксированным на T_2)

$$H_Q^{1;4}(P) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{L \in T_4^{1;4}} \left\{ H_Q^{1;4}(L) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}} - \frac{1}{r_{LP}} \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{1;4}(P) \right\} dS_L. \tag{6}$$

По лемме, ([6], стр. 15) существуют гармонические по P в $\operatorname{int} S$ функции $\tilde{H}_L^{1;3}(P)$ и $\tilde{\tilde{H}}_L^{1;3}(P)$, приближающие с точностью $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^4 \cdot (C_0 \cdot M_1)^2}$ соответственно $\frac{1}{r_{LP}}$ и $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}}$ в $\operatorname{int} {}^*T_4^{1;3} = \operatorname{int} {}^*T_4^{1;4} \cap \operatorname{int} S_3$. Из соображений непрерывности можно считать, что среди них только конечное число различных.

Обозначим

$$H_Q^2(P) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int\limits_{L \in T_4^{1;4}} \left\{ H_Q^{1;4}(L) \cdot \tilde{\tilde{H}}_L^{1;3}(P) - \right.$$

$$\left. - \tilde{H}_L^{1;3}(P) \cdot \frac{\partial}{\partial n} H_L^{1;4}(P) \right\} dS_L, \tag{7}$$

H_Q^2 гармонична по P в $\operatorname{int} S$.

Из (6) и (7) следует, что при $P \in \operatorname{int} {}^*T_4^{1;3}$

$$|H_Q^2(P) - H_Q^{1;4}(P)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int\limits_{L \in T_4^{1;4}} \left\{ |H_Q^{1;4}(L)| \cdot \left|\tilde{\tilde{H}}_L^{1;3}(P) - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial}{\partial n} H_Q^{1;4}(L)\right| \cdot \left|\tilde{H}_L^{1;3}(P) - \frac{1}{r_{LP}}\right| \right\} \cdot dS_L \leqslant$$

$$\leqslant \Pi\cdot\{M_1\cdot\varepsilon_2+2\cdot\tilde{\varepsilon}_2\cdot C_0\cdot M_1^2\}. \tag{8}$$

Оценим теперь $\max\limits_{P\in \operatorname{int} S}|H_Q^2(P)|$.

По лемме ([6], стр. 15) имеем

$$\max_{P\in \operatorname{int} S}|\tilde{H}_L^{1;3}(P)|;\ \max_{P\in \operatorname{int} S}|\tilde{H}_L^{1;3}(P)|\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\exp\left\{\frac{2C}{\tilde{\varepsilon}_2}\cdot q_4\cdot\sqrt{C_0\cdot M_1}\cdot\exp q_4\cdot C_0\cdot\sqrt{C_0\cdot M_1}\right\}, \tag{9}$$

что получается подстановкой (2) и использованием того, что радиус пропорционален квадратному корню из площади. Воспользовавшись (7), (9) и значением $\tilde{\varepsilon}_2$, получим

$$\max_{P\in \operatorname{int} S}|H_Q^2(P)|\leqslant\Pi\cdot\left\{\max|H_Q^{1;4}(P)|\cdot\max|\tilde{H}_L^{1;3}(P)|+\right.$$

$$\left.+\max|\tilde{H}_L^{1;3}(P)|\cdot\frac{\max|H_L^{1;4}(P)|}{\operatorname{rad}{}^*\sigma^{1;3}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\Pi\cdot\{M_1\cdot 2\cdot M_1\cdot\sqrt{C_0\cdot M_1}\cdot q_4\}\cdot C\cdot\exp\{2C\cdot 2^4\cdot(C_0\cdot M_1)^2\times$$

$$\times q_4\cdot\sqrt{C_0\cdot M_1}\cdot\exp q_4\cdot C_0\sqrt{C_0\cdot M_1}\}\leqslant\exp\{\exp M_1\}, \tag{10}$$

так как M_1 достаточно велико. Положим $M_2=\exp\{\exp M_1\}$.

Окончательно в этом пункте мы получили гармонические в $\operatorname{int} S$ функции $H_Q^2(P)$ со следующими свойствами:

а) в $\operatorname{int}{}^*T_4^{1;3}\cap\{\operatorname{int} S_2/\operatorname{int} S_1\}$

$$\left|\frac{1}{r_{PQ}}-H_Q^1(P)-H_Q^2(P)\right|\leqslant\left|\frac{1}{r_{PQ}}-H_Q^1(P)-H_Q^{1;4}(P)\right|+$$

$$+|H_Q^{1;4}(P)-H_Q^2(P)|\leqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^9}<\frac{1}{2}=\varepsilon_1;$$

б) в $\operatorname{int}{}^*T_4^{1;3}\cap\operatorname{int} S_1$

$$|H_Q^2(P)|<|H_Q^2(P)-H_Q^{1;4}(P)|+|H_Q^{1;4}(P)|\leqslant\frac{1}{2^2}=\varepsilon_2;$$

в) в $\operatorname{int}{}^*T_4^{1;3}\cap\{\operatorname{int} S_3/\operatorname{int} S_2\}$

$$\left|\frac{1}{r_{PQ}}-H_Q^1(P)-H_Q^2(P)\right|<\left|\frac{1}{r_{PQ}}-H_Q^1(P)-H_Q^{1;4}(P)\right|+$$

$$+|H_Q^2(P)-H_Q^{1;4}(P)|<\frac{1}{2^2}=\varepsilon_2$$

и

$$\max_{P\in \operatorname{int} S}|H_Q^2(P)|\leqslant\exp(\exp M_1). \tag{11}$$

В 1° мы заметили, что $H_Q^1(P)$ можно считать кусочно постоянной функцией Q. Аналогично можно считать, что $H_Q^2(P)$ удовлетворяет условиям (а), (б), (в), (11) и является кусочно постоянной функцией Q.

$n°$. Построение $H_Q^n(P)$. Это построение будет аналогично 2°. Обозначим через S_{n-1}^0 сферу, расположённую между S_{n-1} и S_n и равноудаленную от них.

Сейчас роль $T_4^{1;\,4}$ играет поверхность $T_{n+2}^{n-1;\,n+2}$, построенная следующим образом: $\operatorname{int} T_{n+2}^{n-1;\,n+2} \cap S_{n-1} = \operatorname{int} {}^*T_{n+1}^{n-2;\,n} \cap \operatorname{int} S_{n-1}$. Между S_{n-1} и S_{n-1}^0 она сужается внутри ${}^*T_{n+1}^{n-2;\,n}$ так, что

$$\operatorname{mes}\{\operatorname{int} T_{n+2}^{n-1;\,n+2} \cap S_{n-1}^0\} = \frac{1}{C_0 \cdot M_{n-1}} \tag{12}$$

и с такой толщиной продолжается до S_{n+2}, имея осью L.

Обозначим через $H_Q^{n-1;\,n+2}$ решение задачи Дирихле в $\operatorname{int} T_{n+2}^{n-1;\,n+2}$ по граничным условиям: нуль на $T_{n+2}^{n-1;\,n+2} \cap \operatorname{int} S_{n-1}^0$

и $\dfrac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \cdots - H_Q^{n-1}(P)$ на $T_{n+2}^{n-1;\,n+2} / \operatorname{int} S_{n-1}^0$.

Повторяя рассуждения, проведенные в 2°, получим

$$\max_{P \in \operatorname{int} S_{n-1}} |H_Q^{n-1;\,n+2}(P)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+1}} \tag{13}$$

и

$$\left|\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P) - \cdots - H_Q^{n-1;\,n+2}(P)\right| < \frac{1}{2^{n+1}} \tag{14}$$

в $\{\operatorname{int} S_{n+1} / \operatorname{int} S_n\}$. Далее строим трубку ${}^*T_{n+2}^{n-1;\,n+1}$, лежащую внутри $T_{n+2}^{n-1;\,n+2}$ и удаленную от нее на половину ее наименьшей толщины $\dfrac{1}{2}\operatorname{rad} \sigma_l^{n-1;\,n+2}$.

Запишем формулу Грина в области $\operatorname{int} T_{n+2}^{n-1;\,n+2}$ для $H_Q^{n-1;\,n+2}(P)$:

$$H_Q^{n-1;\,n+2}(P) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{L \in T_{n+2}^{n-1;\,n+2}} \left\{ H_Q^{n-1;\,n+2}(L) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{LP}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_{LP}} \frac{\partial}{\partial n} H_Q^{n-1;\,n+2}(L) \right\} dS_L. \tag{15}$$

По лемме ([6], стр. 15) существуют гармонические в $\operatorname{int} S$ по P функции $\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)$ и $\bar{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)$, приближающие с точностью

$$\bar{\varepsilon}_n = \frac{1}{(C_0 \cdot M_{n-1})^4} \tag{16}$$

$\left.\dfrac{1}{r}\right|_{LP}$ и $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r_{LP}}$ в $\operatorname{int} {}^*T_{n+2}^{n-1;\,n+1}$.

Определим

$$H_Q^n(P)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int\limits_{L\in T_{n+2}^{n-1;\,n+2}}\Big\{H_Q^{n-1;\,n+1}(L)\cdot\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)-$$

$$-\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)\frac{\partial}{\partial n}H_Q^{n-1;\,n+2}(L)\Big\}dS_L. \tag{17}$$

$H_Q^n(P)$ гармонична в int S по P.

При $P\in\operatorname{int}{}^*T_{n+2}^{n-1;\,n+1}$, в силу (15), (16) и (17)

$$|H_Q^n(P)-H_Q^{n-1;\,n+2}(P)|\leqslant\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L\in T_{n+2}^{n-1;\,n+2}}\Big\{\Big|H_Q^{n-1;\,n+2}(L)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{LP}}-\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)\Big]\Big|+\Big|\frac{\partial}{\partial n}H_Q^{n-1;\,n+2}(L)\times$$

$$\times\Big[\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)-\frac{1}{r_{LP}}\Big]\Big|\Big\}dS_L\leqslant\Pi\cdot\Big\{(M_1+\cdots+M_{n-1})\times$$

$$\times\Big(1+\frac{1}{\operatorname{rad}\sigma_l^{n-1;\,n+2}}\Big)\Big\}\bar{\varepsilon}_n\ll\frac{1}{2^{n+2}}, \tag{18}$$

ввиду быстрого роста M_k.

Таким образом, выполняются условия

а) при $P\in\operatorname{int}S_{n-1}$, $|H_Q^n(P)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$;

б) при $P\in\operatorname{int}S_n/\operatorname{int}S_{n-1}$

$$\Big|\frac{1}{r_{PQ}}-H_Q^1(P)-\cdots-H_Q^n(P)\Big|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}};$$

в) при $P\in\operatorname{int}S_{n+1}/\operatorname{int}S_n$

$$\Big|\frac{1}{r_{PQ}}-H_Q^1(P)-\cdots-H_Q^n(P)\Big|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

По лемме (6, стр. 15) имеем

$$\max_{P\in\operatorname{int}S}|\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)|;\ \max|\tilde{H}_L^{n-1;\,n+2}(P)|\leqslant$$

$$\leqslant C_0\cdot\exp\Big\{\frac{C_0}{\bar{\varepsilon}_n\cdot\operatorname{rad}\sigma_l^{n-1;\,n+2}}\cdot\exp\frac{C_0}{\operatorname{rad}\sigma_l^{n-1;\,n+2}}\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant C_0\cdot\exp\{C_0\cdot(C_0\cdot M_{n-1})^2\cdot q_{n-1}\cdot\sqrt{C_0\cdot M_{n-1}}\cdot\exp q_{n-1}\cdot C_0\cdot\sqrt{C_0\cdot M_{n-1}}\}. \tag{19}$$

Подстановка (19) в (17) дает

$$\max_{P\in\operatorname{int}S}|H_Q^n(P)|\leqslant\Pi\cdot\frac{M_{n-1}}{\operatorname{rad}\sigma_l^{n-1;\,n+2}}\cdot C_0\cdot\exp\{q_{n-1}\cdot C_0\times$$

$$< \gamma (C_0\cdot M_{n-1})^2\cdot\sqrt{C_0\cdot M_{n-1}}\cdot \exp q_{n-1}\cdot C_0\cdot\sqrt{C_0\cdot M_{n-1}} \ll \exp\{\exp M_{n-1}\}, \quad (20)$$

так как M_{n-1} существенно велико.

Так как $H_Q^1(P),\cdots, H_Q^{n-1}(P)$ кусочно непрерывные функции Q, то из соображений непрерывности из $H_Q^n(P)$ можно выбрать счетное число функций так, чтобы удовлетворялись (а), (б), (в) и (20). Таким образом, $H_Q^n(P)$ также можно считать кусочно постоянной функцией.

Ряд $\sum_1^\infty H_Q^n(P)$ сходится внутри любой сферы S_l, так как в силу условия (а)

$$\max_{P\in \operatorname{int} S} |H_Q^{l+n}(P)| \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot$$

Функция $H_Q(P)$ как сумма равномерно сходящегося ряда гармонических функций является гармонической функцией [8]. Так как каждая $H_Q^l(P)$ является измеримой функцией Q, то $H_Q(P)$ также является измеримой функцией Q [9].

Покажем, что $\left|H_Q(P)-\frac{1}{r_{PQ}}\right| \to 0$ при стремлении P к S по L.

Действительно, при $P\in L\cap\{\operatorname{int} S_{n+1}/\operatorname{int} S_n\}$, в силу (а), (б), (в)

$$|H_Q^{n+2+l}(P)| \leqslant \frac{1}{2^{n+2+l}},\quad \left|\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P)-\cdots-H_Q^{n+1}(P)\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

и следовательно

$$\left|H_Q(P)-\frac{1}{r_{PQ}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{r_{PQ}} - H_Q^1(P)-\cdots-H_Q^{n+1}(P)\right| +$$

$$+ |H_Q^{n+2}(P)| + \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot \quad (21)$$

Совершенно так же, как мы приблизили $\frac{1}{r_{PQ}}$, мы можем приблизить $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}$ с касанием у S функцией $\check{H}_Q(P)$, гармонической в $\operatorname{int} S$.

Для $H_Q(P)$ и $\hat{H}_Q(P)$ имеют место неравенства

$$\max_{P\in \operatorname{int} S_l} |H_Q(P)|;\ \max_{P\in \operatorname{int} S_l} |\check{H}_Q(P)| < \exp\{\exp\{\cdots \exp \mathrm{const}\}\}, \quad (22)$$

где число exp возрастает как $2l$; это следует из (20) и аналогичного неравенства для $\check{H}_Q^n(P)$, так как в силу (а) в $\sum_1^\infty H_Q^n(P)$ члены H_Q^{l+1+k} малы в $\operatorname{int} S_l$, а

$$\max_{P\in \operatorname{int} S_l} |H_Q^1(P)| + \cdots + \max_{P\in \operatorname{int} S_l} |H_Q^{l+1}(P)| < M_{l+2}.$$

§ 7. В этом параграфе мы построим функцию $H(P)$, о которой говорится в основной теореме работы. Она будет гармоничной в $\operatorname{int} S$, приближать с касанием $f(P)$ на L и, следовательно, будет удовлетворять условиям теоремы.

Определим

$$H(P)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{Q\in T_1}[f^1(Q)\check{H}_Q(P)-H_Q(P)\cdot\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)]dS_Q,$$

где $f^1(Q)$, $H_Q(P)$ и $\check{H}_Q(P)$ — измеримые функции Q. Интеграл сходится равномерно, так как в любой точке $P\in L$ $H_Q(P)$ и $\check{H}_Q(P)$ ограничены равномерно по Q, так как приближают $\frac{1}{r_{PQ}}$ и $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}$, которые ограничены, а интегралы $\int\limits_{Q\in T_1}|f^1(Q)|\,dS_Q$ и $\int\limits_{Q\in T_1}\left|\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right|dS_Q$ сходятся, как показано в §§ 5, 6. $H(P)$ является гармонической функцией в $\operatorname{int} S$.

Лемма 4. $|H(P)-f^1(P)|\to 0$ *при стремлении* P *к* S *по* L.

Доказательство. Действительно, пусть $P\in L$, тогда

$$|H(P)-f^1(P)|=\frac{1}{4\pi}\left|\int\limits_{Q\in T_1}\left\{f^1(Q)\cdot\left\{\check{H}_Q(P)-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}\right\}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\left\{H_Q(P)-\frac{1}{r_{PQ}}\right\}\right\}dS_Q\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{Q\in T_1}\left|H_Q(P)-\frac{1}{r_{PQ}}\right|\cdot\int\limits_{Q\in T_1}\left|\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right|dS_Q+$$

$$+\max_{Q\in T_1}\left|\check{H}_Q(P)-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}\right|\cdot\int\limits_{Q\in T_1}|f^1(Q)|\,dS_Q.$$

Но так как

$$\max_{Q\in T_1}\left|H_Q(P)-\frac{1}{r_{PQ}}\right|\to 0 \quad\text{и}\quad \max_{Q\in T_1}\left|\check{H}_Q(P)-\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{PQ}}\right|\to 0$$

при стремлении P к S по L, то лемма доказана.

Таким образом, $H(P)$ удовлетворяет всем условиям основной теоремы. Оценим рост $H(P)$ у S.

$$\max_{P\in\operatorname{int}S_i}|H(P)|<\max_{P\in\operatorname{int}S_i}\{|H_Q(P)|;|\check{H}_Q(P)|\}\cdot\int\limits_{Q\in T_1}\{|f^1(Q)|+$$

$$+\left|\frac{\partial}{\partial n}f^1(Q)\right|\}dS_Q<\exp\,[\exp\cdots\{\exp\,\mathrm{const}\}],\tag{23}$$

где число exp равно $2i$, в силу (22).

Замечание. Если брать достаточно много a-точек на сферах S_l и достаточно тонкие трубки T, то все предыдущее остается в силе и, следовательно, можно строить функцию, гармоническую в $\operatorname{int} S$ с таким же поведением, как $H(P)$, но уже внутри произвольного наперед заданного острия, о чем говорилось во введении.

В заключение, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю чл.-корр. АН СССР С. Н. Мергеляну за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский
государственный университет

Поступило 10.VI.1969

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Սֆերայի ներսում հարմոնիկ ֆունկցիաների սահմանային բազմությունների մասին (*ամփոփում*)

Նշանակենք S-*ով* R^3 *եռաչափ էվկլիդյան տարածության միավոր սֆերան։*

Աշխատանքը նվիրված է հետևյալ արդյունքի ապացուցմանը.

Թեորեմ. Գոյություն ունի int S *գնդում որոշված այնպիսի հարմոնիկ ֆունկցիա* H(P), *որ յուրաքանչյուր* $a \in S$ *կետի և* $[A;B]$ *հատվածի համար գոյություն ունի ուղղելի,* a *կետում* S-*ին ուղղահայաց* $l_a; [A;B]$ *կոր, որով*

$$C_{l_{a;[A;B]}}(H) = [A; B],$$

որտեղ $C_{l_\gamma}(f)$-l_γ *կորի վրա* f *ֆունկցիայի ընդունած արժեքների սահմանային բազմությունն է։*

Այդ $H(P)$ *ֆունկցիան կարելի է կառուցել այնպես, որ* S-*ի հետ համակենտրոն* $1-\frac{1}{2^i}$ *շառավիղներով սֆերաների ներսում տեղի ունենան հետևյալ անհավասարությունները համապատասխանաբար*

$$|H(P)| < \exp\{\exp\cdots\{\exp \text{const}\}\},$$

որտեղ exp-*երի քանակը հավասար է* 2i, *իսկ* const- *աբսոլյուտ հաստատուն է։*

A. A. SHAHINIAN. *On the cluster sets of harmonic in a sphere functions* (summary)

Let S be the unit sphere in Euclid space R^3.

Theorem. There exists harmonic in the interior of S function $H(P)$ such that for every point $a \in S$ and every segment $[A; B]$, a strickbar path $l_a; [A; B]$ orthogonal to S in a does exist, such that

$$C_{l_{a;[A;B]}}(H) = [A; B],$$

where C is the cluster set of the function f along l_γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. Pirantan*. Ambiguous points of a functions continuous inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, No. 2, 1957.
2. *F. Bagemihl*. Curvilinear cluster sets of a arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 41, 1955.
3. *F. Bagemihl*. Ambiguous points of a function harmonic inside a sphere, The Mich. Math. Jour., 4, No. 2, 1957.

4. *Носиро*. Предельные множества, ИЛ, 1963.
5. С. *Н. Мергелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.
6. *С. Н. Мергелян*. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши, УМН, XI, вып. 5 (71), 1956, 3—26.
7. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
8. *Р. Курант*. Уравнения с частными производными, „Мир", 1964.
9. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, ОГИЗ, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

Б. И. ОРЕХОВ, М. Г. ХАПЛАНОВ

О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗОВАННЫХ РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА

Известно, что полиномы Лежандра образуют базис в пространстве функций, аналитических в любом фиксированном эллипсе с фокусами в точках -1 и 1 (К. Нейман, 1862 г., см. [1], стр. 138), а функции Бесселя целых порядков—в любом круге с центром в начале координат (К. Нейман, 1867 г., см. [1], стр. 215). Метод К. Неймана Фольк [2] применил для установления базисности системы решений уравнения

$$p_0(z)\, y'' + p_1(z)\, y' + p_2(z)\, y + \lambda^2 y = 0 \tag{1}$$

с полиномиальными коэффициентами в определенных некоторым образом областях, содержащих только два простых корня коэффициента $p_0(z)$. В настоящей статье получены некоторые новые обобщения.

Пусть в уравнении (1) $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$—функции, аналитические в области D. Известно, что замена переменных

$$t = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}, \tag{2}$$

$$y(z) = u(t)\, \gamma(z),\quad \gamma(z) = [p_0(z)]^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)}\, d\tau\right] \tag{3}$$

(интегрирование ведется по пути, соединяющему точки z_0 и z, лежащему в области D и не проходящему через корни функции $p_0(z)$) приводит уравнение (1) к виду

$$u''(t) + [T(z) + \lambda^2]\, u(t) = 0; \tag{4}$$

здесь $T(z)$—дробь, у которой знаменатель равен $[p_0(z)]^2$, а числитель есть полином от $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z)$ и их производных не выше 2-го порядка; в уравнении (4) под z в $T(z)$, очевидно, мыслится $z = \Phi(t)$—обращение интеграла (2).

Условимся через L обозначать гладкие замкнутые простые контуры, обходящие один раз против часовой стрелки фиксированные $2l$ корня—и никакие другие—функции $p_0(z)$ (с учетом их кратности). Через $D(L_1, L_2)$ будем обозначать двусвязную область, ограниченную двумя непересекающимися контурами L_1 и L_2; в силу определения кривых L в области $D(L_1, L_2)$ нет ни одного корня функции $p_0(z)$. Пусть $D(L_1, L_2;\ a_1, a_2)$ есть односвязная область, получаемая из $D(L_1, L_2)$ с помощью разреза из точки $a_1 \in L_1$ в точку $a_2 \in L_2$; будем при этом предполагать, что линии L пересекают разрез (a_1, a_2) только в одной точке. Обозначая через c точку пересечения кривой L с разрезом (a_1, a_2), будем под $L(c, c')$ понимать кривую L от точки c на одном краю разреза до точки c' на другом краю, включая концы c и c', пробегаемую против часовой стрелки.

Рассмотрим преобразование (2) в области $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$, предполагая, что путь интегрирования от z_0 до z лежит в этой области. Интеграл не зависит от выбора пути интегрирования и выражает однозначную в области $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ функцию

$$t = \psi(z) \equiv \int_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}. \tag{2}$$

Однако функция $\psi(z)$, $z \in D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ не обязательно однолистна, и потому образ G области D, получаемый отображением (2), может быть многолистной областью. Область G ограничена дугой A_1A_2 — образом одного края разреза (a_1, a_2), дугой $A_1' A_2'$ — образом другого края, и дугами $A_1 A_2'$ и $A_2 A_2'$ — образами контуров $L_1(c_1, c_1')$ и $L_2(c_2, c_2')$. Очевидно дуга $A_1' A_2'$ получается из A_1A_2 сдвигом на вектор η, где

$$\eta = \int_{L} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}. \tag{5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется

Условие А: Область $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ такова, что $\eta \neq 0$, и существует кривая $L_0(c, c') \in D(L_1, L_2; a_1, a_2)$, которая функцией $t = \psi(z)$ взаимно однозначно отображается в вектор $\eta = CC'$, где C — образ точки c, C' — точки c'.

Докажем лемму.

Лемма. *При выполнении условия А в области $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ можно выбрать такую подобласть $\tilde{D}(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2; a_1, a_2)$, содержащую кривую L_0, которая функцией $t = \psi(z)$ отображается в некоторую область $\tilde{G}$ взаимно однозначно.*

Предположим противное. Пусть в любой подобласти $\tilde{D}$, содержащей кривую L_0, функция $\psi(z)$ не однолистна, и пусть $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ — две кривые, лежащие по разные стороны от L_0. Область $D^{(1)} = D(L_1^{(1)}, L_2^{(1)}; a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$ отображается, согласно предположению, в $G^{(1)}$ не однолистно. Следовательно, в $D^{(1)}$ есть точки z_1 и z_1' такие, что $\psi(z_1) = \psi(z_1')$, $z_1 \neq z_1'$. Обе точки z_1 и z_1' не могут лежать на L_0, так как L_0 переходит в CC' взаимно однозначно.

Возьмем подобласть $D^{(2)} = D(L_1^{(2)}, L_2^{(2)}; a_1^{(2)}, a_2^{(2)})$ области $D^{(1)}$ такую, что в ней не лежит ни одна из точек z_1 и z_1' — в том случае, когда ни z_1, ни z_1' не лежат на L_0, а в противном случае пусть в $D^{(2)}$ не лежит точка, находящаяся вне L_0.

Согласно предположению $D^{(2)}$ также переходит в свой образ $G^{(2)}$ не однолистно. Следовательно, в $D^{(2)}$ имеются точки z_2 и z_2', $z_2 \neq z_2'$ такие, что $\psi(z_2) = \psi(z_2')$. Продолжая так рассуждать, получим бесконечную последовательность областей $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}, \cdots$, вложенных друг в друга; всегда можно выбрать их так, что они стягиваются к кривой L_0. В каждой области $D^{(k)}$ имеются точки z_k и z_k', $z_k \neq z_k'$ такие, что $\psi(z_k) = \psi(z_k')$. Выберем подпоследовательность индексов $k_1, k_2, \cdots$ такую, что существуют пределы $z_{k_j} \to \zeta$, $z_{k_j}' \to \zeta'$. Очевидно точки ζ и ζ' лежат на L_0. Из $\psi(z_{k_j}) = \psi(z_{k_j}')$, перейдя к пределу, найдем $\psi(\zeta) = \psi(\zeta')$.

В том случае, когда $\zeta \neq \zeta'$, приходим к противоречию с условием A. Если же $\zeta = \zeta'$, то приходим к выводу, что отображение $t = \psi(z)$ не однолистно в точке ζ, а это противоречит тому, что $\psi'(\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{p_0(\zeta)}} \neq 0$. Лемма доказана.

В образе $\widetilde{G}$ подобласти $\widetilde{D}$ лежит вектор CC'. Проведем в $\widetilde{G}$ параллельно CC' два вектора C_1C_1' и C_2C_2' по обе стороны от CC', и пусть $L_1^{(0)}$ и $L_2^{(0)}$ их прообразы в $\widetilde{D}$, расположенные по обе стороны от L_0. Область $D^{(0)} = D(L_1^{(0)}, L_2^{(0)}; a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$ взаимно однозначно отображается в $G^{(0)}$, ограниченную двумя векторами C_1C_1' и C_2C_2' и дугами C_1C_2 и $C_1'C_2'$, из которых вторая получается из первой сдвигом на вектор η. Приготовим бесконечное множество областей $D^{(0)}$ и склеим их по разрезам (a_1, a_2) в одну бесконечнолистную риманову поверхность ϑ_0. Функция $t = \psi(z)$ преобразует ее в бесконечную полосу Γ_0, образованную из $G^{(0)}$ сдвигами на векторы $k\eta$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Полосу Γ_0 можно мыслить образованной сдвигами на $k\eta$ прямоугольника, тогда прообразы его сторон, перпендикулярных к вектору η, являются краями разрезов (a_1, a_2). Наконец, еще одно упрощение: если вместо преобразования (2) взять такое

$$t = \frac{\pi}{\eta} \int_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}}, \tag{2'}$$

то получим полосу, параллельную действительной оси, а длина прямоугольника, образа одного листа римановой поверхности ϑ, будет равна π; при этом вместо уравнения (4) получим аналогичное ему.

Итак, при выполнении условия A, не ограничивая общности исследования, можно считать, что

$$\int_L \frac{d\tau}{\sqrt{p_0(\tau)}} = \pi,$$

и область $D(L_1, L_2; a_1, a_2)$ взаимно однозначно отображается в прямоугольник G, у которого длина стороны, параллельной вещественной оси плоскости t, равна π.

Функция $t = \psi(z)$ в области D имеет обратную $z = \Phi(t)$, аналитическую в области G. Прямоугольник G и его сдвиги на $k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$ являются образами отдельных листов римановой поверхности ϑ над областью D. Следовательно, можно распространить функцию $t = \psi(z)$ на риманову поверхность ϑ. Тогда она осуществляет взаимно однозначное отображение ϑ на бесконечную полосу Γ. В дальнейшем под линиями L будем понимать лишь прообразы прямых $\operatorname{Im} t = \text{const}$.

Перейдем к исследованию решений уравнения (1), аналитических в двусвязной области $D(L_1, L_2)$. Согласно равенству (3) решение имеет вид $y(z) = u(t) \cdot \gamma(z)$. Функция $\gamma(z)$ в области $D(L_1, L_2)$ дифференцируема, но не однозначна. Действительно, обозначим через ν сумму вычетов функции $\dfrac{p_1(z)}{p_0(z)}$ относительно $2l$ корней функции $p_0(z)$, лежащих внутри контура L. Тогда $\gamma(z)|_L$ — значение $\gamma(z)$ после обхода контура L равно

$$\gamma(z)|_L = \gamma(z) \cdot \frac{1}{\mu},$$

где $\dfrac{1}{\mu} = \exp[\pi i(l - \nu)]$.

Когда в плоскости z переменная z описывает контур L, то в плоскости t переменная t пробегает отрезок длиной π, параллельный действительной оси. Следовательно, для того чтобы функция $y(z)$ была однозначной: $y(z)|_L = y(z)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$u(t + \pi) = \mu u(t). \tag{6}$$

Так как в области $D(L_1, L_2)$ функция $\gamma(z) \neq 0$, то вместо того, чтобы искать аналитическое в $D(L_1, L_2)$ решение уравнения (1), можно искать аналитическое в полосе $\beta_1 < \operatorname{Im} t < \beta_2$ решение уравнения (4), удовлетворяющее условию (6), поскольку из дифференцируемости решения $y(z)$ следует дифференцируемость функции $u(t)$, и наоборот.

Очевидно, если такое решение $u(t)$ существует, то оно является также решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} u''(t) + \{T[\Phi(t)] + \lambda^2\} u(t) = 0, \\ u(\pi + i\beta) = \mu u(i\beta), \\ u'(\pi + i\beta) = \mu u'(i\beta), \ t = s + i\beta, \end{gathered} \tag{7}$$

поставленной на любой прямой $\beta = \text{const}$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$.

Обратно, если решение краевой задачи (7) существует, то оно не зависит от того, на какой прямой $\beta = \text{const}$ задача решена, причем решение $u(t)$ есть аналитическая функция в полосе $\beta_1 < \operatorname{Im} t < \beta_2$, удовлетворяющая в ней условию (6). Действительно, возьмем в полосе произвольную точку t_0 и, применив метод последовательных приближений, найдем два линейно независимых решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$u_1(t_0)=1, \quad u_1'(t_0)=0; \quad u_2(t_0)=0, \quad u_2'(t_0)=1.$$

Из аналитичности функции $T[\Phi(t)]$ легко заключить, что решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ также аналитические. Предположим, что удалось константы c_1 и c_2 в общем интеграле $u(t)=c_1u_1(t)+c_2u_2(t)$ подобрать так, чтобы получить решение краевой задачи (7) на некоторой прямой $\beta=\mathrm{const}$. В таком случае из краевых условий заключаем, что для аналитической в полосе функции $u(t)$ в фиксированной точке $t=i\beta$ выполняются условия

$$u(t+\pi)-\mu u(t)\Big|_{t=i\beta}=0,$$

$$u'(t+\pi)-\mu u'(t)\Big|_{t=i\beta}=0.$$

Обращаясь к дифференциальному уравнению для $u(t)$, легко получить $u''(t+\pi)-\mu u''(t)|_{t=i\beta}=0$. Продифференцировав обе части дифференциального уравнения, найдем: $u'''(t+\pi)-\mu u'''(t)|_{t=i\beta}=0$. Продолжая так рассуждать, получим, что для любого $k=0, 1, 2, \cdots$

$$u^{(k)}(t+\pi)-\mu u^{(k)}(t)\Big|_{t=i\beta}=0.$$

Следовательно, из теоремы единственности вытекает, что $u(t+\pi)-\mu u(t)=0$ во всей полосе $\beta_1<\operatorname{Im} t<\beta_2$. Итак, решение краевой задачи на одной прямой будет решением и на любой другой прямой $\beta=\mathrm{const}$.

Ниже будем пользоваться результатами и обозначениями XII главы книги [3]. Легко проверить, что краевые условия (7) удовлетворяют неравенству $A_{23}-A_{14}\neq 0$ (но $A_{24}=0$). Поскольку в цитированной книге интересующие нас результаты формулируются для случая $A_{24}\neq 0$, то укажем соответствующие нашему случаю изменения. Именно, выполнив вычисления, аналогичные приведенным в книге, получим, что функция Грина в нашем случае равна

$$\Gamma(s,\xi,\rho^2)=\frac{M(s,\xi,\rho^2)}{\omega(\rho)}, \text{ где } \omega(\rho)=4\mu i\rho\cos\pi\rho-2i(\mu^2+1)\rho,$$

$$M(s,\xi,\rho^2)=\begin{cases}2\mu i\sin\rho(\pi-\xi+s)-2i\sin\rho(s-\xi), & \text{для } s\leqslant\xi\\ 2\mu i\sin\rho(\pi-s+\xi)-2i\mu^2\sin\rho(\xi-s), & \text{для } s>\xi.\end{cases}$$

Корнями уравнения $\omega(\rho)=0$ являются числа $\rho_m=2m\pm(l-\nu)$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Функция $\sigma_m(s)$, равная по определению

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\left(\int_0^\pi \Gamma(s,\xi,\rho^2)f(\xi)\,d\xi\right)\rho\,d\rho$$

и вычисленная с помощью теории вычетов, примет вид

$$\sigma_m(s)=\exp\left[i(\nu-l)s\right]\cdot s_m(s),$$

где $s_m(s)$ обозначает частную сумму ряда Фурье функции $f(s)\exp\times$ $\times[i(l-\nu)s]$ на отрезке $0\leqslant s\leqslant\pi$:

$$s_m(s)=\sum_{k=0}^{m} a_k\cos 2ks+b_k\sin as,\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[i(l-\nu)\xi]f(\xi)\,d\xi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[i(l-\nu)\xi]f(\xi)\cos 2k\xi\,d\xi,$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[i(l-\nu)\xi]f(\xi)\sin 2k\xi\,d\xi.$$

Согласно теореме 3.1, существует функция Грина G задачи (7) и, согласно теореме 3.2, последовательность $\{S_m(s)\}$:

$$S_m(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\left(\int_0^{\pi}G(s,\xi,\rho^2)f(\xi)\,d\xi\right)\rho d\rho$$

равно сходится на отрезке $[0,\pi]$ с последовательностью $\sigma_m(s)$.

Чтобы перейти к теоремам о разложении рассмотрим сопряженную к (7) краевую задачу:

$$\begin{gathered}v''(t)+\overline{\{T[\Phi(t)]+\lambda^2\}}\,v(t)=0,\\ v(\pi+i\beta)=\frac{1}{\overline{\mu}}\,v(i\beta),\\ v'(\pi+i\beta)=\frac{1}{\overline{\mu}}\,v'(i\beta).\end{gathered}\tag{8}$$

Она аналогична (7) с заменой μ на $\frac{1}{\overline{\mu}}$, но не для $v(t)$, а для $\overline{v(\bar{t})}$.

Следовательно, если существует решение краевой задачи (8) на какой-нибудь прямой $\beta=\mathrm{const}$, то комплексно сопряженная к нему функция является аналитической в полосе $\beta_1<\mathrm{Im}\,t<\beta_2$ и не зависит от того, на какой прямой рассматривается краевая задача.

Сделаем теперь дополнительное к условию A предположение:

Условие Б. Предполагается, что все полюсы функции Грина задачи (7) простые.

Это позволяет применить теоремы 5.1 и 5.2 книги [3] и мы приходим к следующим выводам:

1. Краевые задачи (7) и (8), рассмотренные на какой-нибудь прямой $\beta=\mathrm{const}$, имеют счетные последовательности собственных чисел

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\cdots;\ \overline{\lambda_1^2},\ \overline{\lambda_2^2},\ \overline{\lambda_3^2},\ \cdots$$

и биортогональные системы собственных функций

$$u_1(t),\ u_2(t),\ u_3(t), \cdots$$
$$v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t), \cdots,\quad t = s + i\beta.$$

2. Всякая непрерывная на отрезке $0 \leqslant s \leqslant \pi$ функция $f(t)$ такая, что $f(t) \exp[i(l-\nu)t]$ представима равномерно сходящимся рядом Фурье, может быть разложена в равномерно сходящийся на нем ряд по собственным функциям задачи (7):

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j(t), \text{ где } a_j = \int_0^{\pi} f(t)\,\overline{v_j(t)}\,dt,\ t = s + i\beta. \tag{9}$$

Возьмем функцию $\varphi(t)$, аналитическую в полосе $\beta_1 < \operatorname{Im} t < \beta_2$ и удовлетворяющую в ней условию $\varphi(t+\pi) = \mu\varphi(t)$, $\mu = \exp[\pi i(\nu - l)]$. Функция $\varphi(t)\exp[i(l-\nu)t] = \Phi(t)$ π — периодическая и потому представима на любой прямой $\beta = \text{const}$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$ равномерно сходящимся рядом Фурье. Следовательно, функция $\varphi(t)$ может быть разложена в ряд (9), равномерно сходящийся на каждой прямой $\beta = \text{const}$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$. Докажем, что фактически разложение равномерно сходится в любом прямоугольнике Q: $0 \leqslant s \leqslant \pi$, $\beta_1' \leqslant \beta \leqslant \beta_2'$, где $\beta_1 < \beta_1' < \beta_2' < \beta_2$.

Рассмотрим ряд Фурье функции $\Phi(t)$ на какой-нибудь прямой $\beta = \text{const}$. Согласно теореме Лебега ([4], стр. 193),

$$|s_m(t) - \Phi(t)| \leqslant (3 + \ln m)\,E_m,$$

где E_m — наилучшее приближение функции $\Phi(t)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше m. Согласно теореме Джексона для всякой непрерывной с периодом 2π функции справедлива оценка

$$E_m < 12\,\omega\left(\frac{1}{m}\right),\quad ([4],\ \text{стр. } 117),$$

где ω — модуль непрерывности функции. На отрезке $0 \leqslant s \leqslant \pi$, $\beta = \text{const}$ возьмем две произвольные точки $s_1 + i\beta$ и $s_2 + i\beta$. Имеем

$$\Phi(s_2 + i\beta) - \Phi(s_1 + i\beta) = \int_{s_1 + i\beta}^{s_2 + i\beta} \Phi'(t)\,dt.$$

Обозначая через $M_1 = \max\limits_{t \in Q} |\Phi'(t)|$, получим

$$|\Phi(s_2 + i\beta) - \Phi(s_1 + i\beta)| \leqslant M_1 |s_1 - s_2|.$$

Таким образом, функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию Липшица с общей константой M_1 для всех прямых $\beta = \text{const}$, $\beta_1' \leqslant \beta \leqslant \beta_2'$. Итак, окончательно, для частных сумм $s_m(t)$ ряда Фурье получим следующую оценку, справедливую на всех прямых $\beta = \text{const}$, $\beta_1' \leqslant \beta \leqslant \beta_2'$:

$$|s_m(t) - \Phi(t)| \leqslant (3 + \ln m)\,12\,M_1 \frac{1}{m}.$$

Обозначим $M = \max\limits_{t \in Q} |\Phi(t)|$. Тогда

$$|s_m(t)| < M + \frac{12\,M_1\,(3 + \ln m)}{m}.$$

Отсюда следует, что $s_m(t)$ ограничены для всех m и $t \in Q$ одной константой.

Пользуясь обозначениями из [3], имеем для частных сумм ряда (9)

$$|S_m(t)| \leqslant |s_m(t)| + |\sigma_m(t) - s_m(t)| + |S_m(t) - \sigma_m(t)|.$$

Если проследить за доказательством теоремы 3.2 из [3], то можно убедиться, что приведенная там оценка для $|s_m(t) - \sigma_m(t)|$ может быть сделана независящей от того, на какой прямой $\beta = \mathrm{const}$, $\beta_1' \leqslant \beta < \beta_2'$, мы производим оценки.

Окончательно заключаем, что суммы $S_m(t)$ ограничены для всех m и $t \in Q$ одной константой, и, следовательно, по теореме Витали ряд (9) сходится равномерно в Q.

Остается перейти к разложению функций, аналитических в двусвязной области $D(L_1, L_2)$. Пусть $f(z)$ такая функция. Образуем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \frac{f[\Phi(t)]}{\gamma[\Phi(t)]}.$$

Очевидно она аналитическая в полосе $\beta_1 < \mathrm{Im}\, t < \beta_2$ и удовлетворяет условию $\varphi(t + \pi) = \mu\varphi(t)$. Следовательно, справедливо разложение (9). Переходя к переменной z, получим

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j(t)\,\gamma(z),$$

где t определяется равенством (2′).

Заметим, что согласно (3) произведение $u_j(t)\,\gamma(z)$ есть решение уравнения (1), аналитическое в области $D(L_1, L_2)$ и соответствующее собственному числу $\lambda^2 = \lambda_j^2$. Окончательно получим

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, y_j(z), \tag{10}$$

где, согласно (9), после замены (2′) коэффициент a_j выражается так: $a_j = \int\limits_{L} f(z)\,\overline{v_j(t)}\,\frac{dz}{\gamma(z)\sqrt{p_0(z)}}$. Нетрудно убедиться, что функция $x_j(z) = \frac{\overline{v_j(t)}}{\gamma(z)\sqrt{p_0(z)}}$, аналитическая в $D(L_1, L_2)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$p_0(z)\,y'' + [2p_0'(z)\, p_1(z)]\,y' + [p_0''(z) - p_1'(z) + p_2(z)]\,y + \lambda_j^2 y = 0. \tag{11}$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов a_j разложения (10) необходимо знать аналитические в $D(L_1, L_2)$ решения $x_j(z)$ дифференциального уравнения (11). Полезно отметить, что функции $x_j(z)$ можно выразить через решения дифференциального уравнения (1). Именно, сделав замену

$$x_j(z) = N(z)\,X_j(z),\ \text{где}\ N(z) = \frac{1}{p_0(z)} \exp\left[\int_{z_0}^{z} \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)}\,d\tau\right], \tag{12}$$

можно убедиться, что $X_j(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при $\lambda^2 = \lambda_j^2$. Так как в равенстве (12) левая часть аналитическая в $D(L_1, L_2)$ функция, а $N(z)$ при обходе контура L один раз против часовой стрелки помножается на $\exp[2\pi i\nu]$, то $X_j(z)$ такое решение дифференциального уравнения (1), которое после обхода контура L один раз против часовой стрелки умножается на $\exp[-2\pi i\nu]$.

Таким образом, нами получена

Теорема. *При выполнении условий А и Б существуют:*
1) *счетная последовательность чисел*

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2, \cdots,$$

2) *соответствующая последовательность аналитических в двусвязной области* $D(L_1, L_2)$ *решений при* $\lambda^2 = \lambda_j^2$, $j = 1, 2, \cdots$ *уравнения* (1):

$$y_1(z),\ y_2(z),\ y_3(z), \cdots,$$

3) *последовательность решений уравнения* (1) *при* $\lambda^2 = \lambda_j^2$, $j = 1, 2, \cdots$

$$X_1(z),\ X_2(z),\ X_3(z), \cdots$$

такая, что системы $\{y_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{N(z)\,X_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ *биортогональны на любом контуре* L.

Кроме того, всякую аналитическую в области $D(L_1, L_2)$ *функцию* $f(z)$ *можно разложить, и притом единственным способом, в равномерно сходящийся в области ряд*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j(z),\quad a_j = \int_L f(z)\,N(z)\,X_j(z)\,dz.$$

* * *

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\,y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\,z]\,y' + \left[\lambda^2 - \frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\right] y = 0, \tag{13}$$

где α и β — произвольные комплексные числа такие, что $\alpha+\beta$ не равно целому числу.

Переход на плоскость t осуществляется в этом случае с помощью следующей замены переменных:

$$t = \frac{1}{2} \arcsin z,\quad y(z) = u(t)\,(1+z)^{-\frac{1+2\beta}{4}}\,(1-z)^{-\frac{1+2\alpha}{4}}.$$

Нетрудно видеть, что условие A выполняется. Действительно, $\eta=2\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=2\pi$, а в качестве контуров L следует взять произвольные эллипсы с фокусами в точках -1 и 1 — образы прямых, параллельных действительной оси плоскости t при отображении $z=\sin 2t$.

Проверим выполнение условия $Б$. Полюсы функции Грина являются собственными числами краевой задачи

$$u''(t)+\left[\frac{1-2\alpha^2-2\beta^2+2(\beta^2-\alpha^2)\sin 2t}{\cos^2 2t}+\rho^2\right]u(t)=0,$$

$$u'(\pi)=\exp\left[\pi i(1+\alpha+\beta)\right]u'(0), \tag{14}$$

$$u(\pi)=\exp\left[\pi i(1+\alpha+\beta)\right]u(0),$$

где $\rho^2=4\lambda^2$.

Легко убедиться, что они являются корнями уравнения

$$\cos\pi\rho-\cos\pi(\alpha+\beta+1)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)=0. \tag{15}$$

Отсюда получаем асимптотические значения для собственных чисел

$$\rho_j'=2j+1+\alpha+\beta+\varepsilon_j',\quad \rho_j''=2j-1-\alpha-\beta+\varepsilon_j'', \tag{16}$$

$$\varepsilon_j',\ \varepsilon_j''\to 0 \quad \text{при } j\to\infty.$$

Собственные числа можно найти также, исходя из другого соображения. Это будут такие значения параметра λ^2, при которых уравнение (13) имеет однозначное решение в окрестности бесконечно удаленной точки. Для исследования характера решения в ее окрестности в уравнении (13) сделаем замену переменной $z=\frac{1}{z_1}$ и для полученного уравнения

$$z_1^2(z_1^2-1)y''+\left[2z_1^3+(\alpha-\beta)z_1^2+(\alpha+\beta)z_1\right]y'+\left[\lambda^2-\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\right]y=0 \tag{17}$$

будем искать решение, аналитическое в окрестности начала координат, в виде ряда

$$y(z_1)=z_1^{\gamma}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k z_1^k\right]. \tag{18}$$

Подставляя (18) в дифференциальное уравнение (17) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z_1, получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов a_k и, так называемое, определяющее уравнение для показателя γ:

$$\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta+1)+\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}-\lambda^2=0.$$

Корни его равны:

$$\gamma_1=\frac{\alpha+\beta+1}{2}+\lambda,\quad \gamma_2=\frac{\alpha+\beta+1}{2}-\lambda.$$

Поскольку решение (18) будет однозначным в окрестности точки $z_1=0$ только при γ равном целому числу, то отсюда следует, что

$$\lambda_j^2=\left(j-\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2,$$

где $j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$.

Так как $\rho^2=4\lambda^2$, то

$$\rho_j=2j\pm(\alpha+\beta+1),\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots.$$

Сравнивая эти значения с ранее полученными асимптотическими значениями (16), заключаем, что все числа $\varepsilon_j=\varepsilon_j'=0$. Следовательно, фактически уравнение (15) имеет вид

$$\cos\pi\rho-\cos\pi(\alpha+\beta+1)=0. \tag{19}$$

Поскольку $\alpha+\beta$ отлично от целого числа, то $\rho_j=2j+\alpha+\beta+1$, $j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ являются простыми корнями уравнения (19). Итак, полюсы функции Грина задачи (14) простые.

Мы получили счетную последовательность собственных чисел $\lambda_j^2=\left(j-\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2$, $j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$, при каждом λ_j^2 уравнение (13) имеет два линейно независимых решения, из которых одно, соответствующее показателю $\gamma_1=j$, $j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ является аналитической функцией $y_j(z)$, а второе, соответствующее показателю $\gamma_2=-j+(\alpha+\beta+1)$, $j=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ — будет многозначной функцией $X_j(z)$.

Для коэффициентов $a_k^{(j)}$ функции

$$y_j(z)=z^j\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}a_k^j z_1^j\right],\ z=\frac{1}{z_1}$$

получается следующая рекуррентная формула:

$$a_k^{(j)}k(\alpha+\beta+1-k-2j)+a_{k-1}^{(j)}(\alpha-\beta)(j+k-1)+$$
$$+a_{k-2}^{(j)}(j+k-2)(j+k-1)=0. \tag{20}$$

При $j=0,\ -1,\ -2,\cdots$ получаем, что $y_j(z)$ есть полином—j-ой степени относительно z, так как из (20) следует, что $a_{-j+1}^{(j)}, a_{-j+2}^{(j)}$ равны нулю. Следовательно, с точностью до постоянных множителей, получили известные полиномы Якоби $p_j^{(\alpha,\beta)}(z)$ (см., например, [5]). Функции же $X_j(z)$ являются функциями Якоби второго рода $Q_j^{(\alpha,\beta)}(z)$.

При $j=1,\ 2,\ 3,\cdots$, собственная функция $y_j(z)=\frac{1}{z^j}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(j)}\frac{1}{z^k}\right]$ аналитическая вне отрезка $[-1,\ 1]$; в этом случае нам удобнее найти не $X_j(z)$, а $x_j(z)=N(z)X_j(z)$.

Функция $x_j(z)$, согласно общей теории, является аналитическим в эллиптическом кольце решением дифференциального уравнения (11), которое в настоящем случае имеет вид

$$(1-z^2)\,y''+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)\,z]\,y'+\left[\alpha+\beta-\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}+\lambda_j^2\right]y=0. \quad (21)$$

Решение $x_j(z)$ мы будем отыскивать таким же образом, как и $y_j(z)$: сделаем замену переменной $z=\frac{1}{z_1}$ и для полученного уравнения

$$z_1^2\,(z_1^2-1)\,y''+[2z_1^3+(\beta-\alpha)\,z_1^2-(\alpha+\beta)\,z_1]\,y'+$$
$$+\left[\alpha+\beta-\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}+\lambda_j^2\right]y=0 \quad (22)$$

будем искать решение, аналитическое в окрестности начала координат.

Таким образом, получим $x_j(z)=z_1^{-j+1}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k^{(j)}\,z_1^k\right]$, $z=\frac{1}{z_1}$, где $b_k^{(j)}$ вычисляются с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$b_k^{(j)}\,k\,(2j-1-k-\alpha-\beta)+b_{k-1}^{(j)}\,(\beta-\alpha)(k-j)+b_{k-2}^{(j)}(k-1-j)(k-j)=$$
$$=0,\ j=1,\,2,\,3,\cdots.$$

Нетрудно видеть, что $x_j(z)$ является полиномом $j-1$ степени относительно z.

Итак, если $f(z)$—функция, аналитическая в эллиптическом кольце, образованном софокусными эллипсами, с фокусами ± 1, то ее можно разложить единственным образом в равномерно сходящийся в этом кольце ряд

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\,P_j^{(\alpha,\beta)}(z)+\sum_{j=1}^{\infty}B_j\,y_j(z),$$

где

$$A_j=\int\limits_L f(z)\,(z-1)^\alpha\,(z+1)^\beta\,Q_j^{(\alpha,\beta)}(z)\,dz,$$

$$B_j=\int\limits_L f(z)\,x_j(z)\,dz,$$

где в качестве контура L можно взять эллипс с фокусами ± 1, лежащий в области аналитичности $f(z)$, а $(z-1)^\alpha\,(z+1)^\beta$ играет роль $N(z)$ в формуле (12).

Если же $f(z)$ аналитична всюду внутри эллипса с фокусами ± 1, то очевидно $B_j=0$, и мы получим разложение аналитической функции в ряд по полиномам Якоби. Аналогично получается разложение функции $f(z)$, аналитической вне отрезка $[-1,\ 1]$.

Можно рассматривать дифференциальное уравнение (21) как исходное и получить аналогичные результаты. Например, для функции $f(z)$, аналитической вне отрезка $[-1, 1]$ и обращающейся в нуль на бесконечности, получим

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j N(z) Q_j^{(\alpha, \beta)}(z), \quad C_j = \int_L f(z) P_j^{(\alpha, \beta)}(z) \, dz.$$

Этот результат пересекается с указанным в книге [5]. Именно в ней приведены вышеуказанные разложения для произвольных действительных значений $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Ростовский государственный
университет

Поступило 1.VII. 1968

Բ. Ի. ՕՐԵԽՈՎ, Մ. Գ. ԽԱՊԼԱՆՈՎ. Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներով առաջացած անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության բազիսների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում բերված են պայմաններ, որոնց դեպքում $p_0(z) y'' + p_1(z) y' + p_2(z) y + \lambda^2 y = 0$ *դիֆերենցիալ հավասարումը ունի* $p_0(z)$*-ի զրոները չպարունակող ինչ-որ մի երկկապ տիրույթում անալիտիկ սեփական ֆունկցիաների սիստեմ, որոնք բազիս են կազմում այդ տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության մեջ։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ Յակոբիի բազմանդամները կամայական կոմպլեքս* α*-ի և* β*-ի համար, որոնց* $\alpha+\beta$ *գումարը ամբողջ չէ կազմում են բազիս* ± 1 *ֆոկուսները ունեցող ակամայական ֆիքսած էլիպսում անալիտիկ ֆունկցիաների տարածության մեջ։ Այս արդյունքը հայտնի էր կամայական* $\alpha > -1$ *և* $\beta > -1$ *իրական թվերի համար։*

B. I. ORECHOV and M. G. KCHAPLANOV. *On the bases in the spaces of analytical functions formed by the solutions of the differential equation of the second order* (summary)

The conditions are pointed out under which the equation

$$p_0(z) y'' + p_1(z) y' + p_2(z) y + \lambda^2 y = 0$$

possesses a system of eigenfunctions which are analytical in a doubly-connected, free from the zeroes of $p_0(z)$ domain, the system itself constituting a basis in the space of the functions, analytical in the domain. In particular, Jakoby polinomials for arbitrary complex α and β, such that $\alpha+\beta$ is not an integer are shown to constitute a basis in the space of functions, analytical in every fixed ellipce, with foci in ± 1. This result was known previously for every real $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Г. Уиттекер, Дж. Ватсон.* Курс современного анализа, ч. II, издание 2, М. 1963.
2. *O. Volk.* Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen, Math. Ann., 86, 1922, 296—316.
3. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1958.
4. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
5. *Г. Сегё.* Ортогональные многочлены, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 5, 1969 Математика

В. И. БЕЛЫЙ

О ПРИБЛИЖЕНИИ КВАЗИГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Введение

Отправной точкой исследований, которые приведены ниже, послужило аналитическое определение квазигладких функций, оказавшееся удобным в теории приближения функций комплексного переменного. Классическое определение, введенное А. Зигмундом [7] для функций действительного переменного, носит геометрический характер: говорят, что функция $f(x)$, заданная в промежутке $[a, b]$ или $(-\infty, \infty)$, является квазигладкой, если для любых двух точек x_1, x_2 области определения выполнено условие

$$\left|f(x_1)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f(x_2)\right|\leqslant K|x_2-x_1|, \tag{1}$$

где K — константа, зависящая только от f. Класс Z всех таких функций называют классом А. Зигмунда. Оказалось, что с точки зрения тригонометрических рядов и теории приближения функций он является более естественным предельным классом для гельдеровских классов H^α при $\alpha\to 1$, чем H^1. Хорошо известны фундаментальные результаты о приближении полиномами функций классов H^α, W^rH^α, Z, W^rZ; в разное время они были получены Д. Джексоном, С. Н. Бернштейном, Валле-Пуссеном, А. Зигмундом,—для периодических функций,— С. М. Никольским, А. Ф. Тиманом, В. К. Дзядыком — в непериодическом случае.

В 1959—1963 годах В. К. Дзядык [1—3] доказал прямые и обратные теоремы о приближении аналитических функций, удовлетворяющих условиям Гельдера в областях с углами, т. е. дал полную конструктивную характеристику аналогов классов H^α, W^rH^α (r — целое $\alpha\in(0, 1)$) для функций комплексного переменного. При этом для оценки полиномиальных приближений функции $f(z)$, определенной в области G с кусочно гладкой границей C применялись функции $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$, выражающие расстояние от точки $z\in C$ до n-й линии уровня (образа окружности радиуса $1+\dfrac{1}{n}$ при конформном отображении внешности единичного круга на внешность C, переводящем ∞ в ∞). Сохраняя за классом аналитических функций, имеющих r-ю производную ($r\geqslant 0$, целое), удовлетворяющую в области $\overline{G}$ условию Гельдера порядка α, $\alpha\in[0, 1]$, обозначение W^rH^α, имеем, что для принадлежности $f(z)$ классу W^rH^α, $\alpha\in(0,1)$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом натуральном n существовал многочлен $P_n(z)$ степени не выше n, удовлетворяющий условию

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r+\alpha},\ z\in C, \tag{II}$$

где A — не зависящая от n и z константа.

Данный результат В. К. Дзяды а полностью аналогичен конструктивной характеристике классов W^rH^α действительной области для значений $\alpha\in(0,1)$. При $\alpha=1$ прямая теорема имеет место, но не может быть обращена даже для периодических функций. Место классов W^rH^1 $(r=0,1,\cdots)$ в действительной области занимают классы W^rZ, более естественные с точки зрения возможности приближения их полиномами. Следовало ожидать, что для функций, заданных в областях с углами, вместо функций классов W^rH^1 $(r=0,1,\cdots)$ также должны стоять функции, r-я производная которых удовлетворяет условию (1), однако до последнего времени этот вопрос, поставленный В. К. Дзядыком в 1963 году, оставался открытым.

Первое возникающее при этом препятствие заключается в геометричности условия (1). В областях с кусочно гладкой границей (а тем более на произвольных континуумах) из принадлежности области точек z_1 и z_2 не вытекает принадлежность ей точки $\dfrac{z_1+z_2}{2}$. Чтобы обойти эту трудность В. К. Дзядык и Д. М. Галан [9] при исследовании областей с гладкой границей требовали выполнения условия (1) только для тех точек z_1 и z_2, которые принадлежат области вместе с отрезком, их соединяющим.

Основной результат настоящей статьи дает полный положительный ответ на поставленный вопрос с помощью аналитического определения квазигладкости, введенного в § 2. Обозначая класс функций, квазигладких в смысле этого определения, через $\tilde{Z}$, для областей G типа (D) (см. § 3), т. е. при тех же предположениях относительно области, что и в работе В. К. Дзядыка [3], доказываем теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в области G типа (D), принадлежала классу $W^r\tilde{Z}$ типа А. Зигмунда $(r\geqslant 0$, целое), необходимо и достаточно, чтобы при каждом натуральном n нашелся многочлен $P_n(z)$ порядка не выше n такой, что при всех z на границе C области G выполняется неравенство*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant M[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r+1}, \tag{III}$$

где M не зависит от z и n.

В § 6 данной статьи доказывается, что классы W^rZ $(r>0$, целое) функций, квазигладких в смысле определения, принятого в работе

В. К. Дзядыка и Галана [9], эквивалентны классам $W^r\tilde{Z}$ в областях типа (D) и на $[a, b]$. Два следствия вытекают из этого утверждения: конструктивная характеристика классов $W^r Z$ в областях типа (D) и справедливость теоремы I для $[a, b]$.

§ 2. Классы $\tilde{Z}$ типа А. Зигмунда

Рассмотрим такой континуум E со связным дополнением, две произвольные точки которого можно соединить спрямляемой жордановой дугой $l \subset E$. Фиксируем на границе ∂E произвольную точку k и осуществим разрез от точки k до $+\infty$ вдоль кривой, не имеющей общих точек с E. Для всякой непрерывной на E и аналитической во внутренних точках E функции $f(z)$ формулы

$$\left.\begin{aligned} f^{(0)}(z) &= D_z^{(0)}(f;\,k) = f(z) \\ f^{(-\gamma)}(z) &= D_z^{(-\gamma)}(f;\,k) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_{\breve{kz}} (z-\varsigma)^{\gamma-1} f(\varsigma)\, d\varsigma \ (\gamma>0) \\ f^{(\gamma)}(z) &= D_z^{(\gamma)}(f;\,k) = \frac{d^{[\gamma]+1}}{dz^{[\gamma]+1}}\, f^{(\gamma-[\gamma]-1)}(z) \end{aligned}\right\}, \qquad (2.1)$$

в которых интегрирование ведется по произвольной спрямляемой дуге $\breve{kz} \subset E$, не делающей внутри E витков вокруг z, а $(z-\varsigma)^{\gamma-1}$—однозначная ветвь функции $\varphi(\varsigma) = e^{(\gamma-1)\,Ln\,(z-\varsigma)}$, полученная по непрерывности вдоль $\breve{kz}$ из главного значения функции $e^{(\gamma-1)\,Ln\,(z-k)}$,—определяют интегродифференциальные операторы произвольного порядка от функции $f(z)$ (см. [4])*.

Можно показать [10], что значение $D_z^{(\gamma)}(f;\,k)$, если оно существует, не зависит от дуги $\breve{kz} \subset E$.

Обозначим через $W_0^\gamma H^\alpha$ класс функций, непрерывных на E и аналитических внутри E, для которых при некотором $k \in \partial E$

$$f^{(\gamma)}(k) = D_z^{(\gamma)}(f;\,k)\big|_{z=k} = 0 \quad \text{и} \quad f^{(\gamma)}(z) \in H^\alpha,$$
$$0 < \alpha \leqslant 1, \quad \text{при} \quad z \in E.$$

При целых значениях γ функции известного класса $W^\gamma H^\alpha$ могут отличаться от функций класса $W_0^\gamma H^\alpha$ только многочленом порядка γ.

Определение. *Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит на E классу $\tilde{Z}$ типа А. Зигмунда, если она представима в виде*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \qquad (2.2)$$

где $f_1(z), f_2(z) \in W_0^\alpha H^{1-\alpha}$ при некотором $\alpha \in (0,1)$.

---

* При $z = k$ полагают $f^{(-\gamma)}(k) = \lim\limits_{z\to k} f^{(-\gamma)}(z)$.

Класс функций, имеющих r-ю производную (r-натуральное), принадлежащую $\tilde{Z}$, будем обозначать $W^r\tilde{Z}$. Нетрудно заметить, что класс $\tilde{Z}$ существенно шире любого класса $W_0^\alpha H^{1-\alpha}$. Например: $f(z) \equiv \text{const} \in \tilde{Z}$, но $f(z) \overline{\in} W_0^\alpha H^{1-\alpha}$ ни при каком $\alpha \in (0,1)$, если $\text{const} \neq 0$.

Как известно [7], для 2π-периодических квазигладких функций $f(x)$ при всяком $\alpha \in (0,1)$ производная Вейля $f^{(\alpha)}(x) \in H^{1-\alpha}$. Обратное утверждение также справедливо. Таким образом, приведенное выше определение является естественным обобщением квазигладкости. В частности, когда E—отрезок $[0, \pi]$, $\tilde{Z} \sim Z$ (см. § 6).

§ 3. Области типа (D). Некоторые леммы

Пусть G—область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой C, которая составлена конечным числом дуг с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка z_j внутренние углы $\alpha_j\pi$, $0 < \alpha_j \leqslant 1$ ($j=1, 2, \cdots, m$). Обозначим через $\psi(w)$ функцию, конформно отображающую внешность единичного круга на внешность $\overline{G}$ и нормированную условием $\psi(\infty) = \infty$. Если в окрестности каждой точки $w_j = \psi^{-}(z_j)$ ($j = 1, 2, \cdots, m$) $\psi(w)$ представима в виде

$$\psi(w) = \lambda(w)(w - w_j)^{2-\alpha_j} + \psi(w_j), \tag{3.1}$$

где $\lambda(w)$ — дважды непрерывно дифференцируема вдоль C и $\lambda(w_j) \neq 0$, то будем называть G областью типа (D).

Методика исследования вопросов, связанных с приближением полиномами в областях типа (D), детально разработана В. К. Дзядыком [1—3]; в значительной степени эти методы применены в настоящей работе.

Лемма 1. *Пусть в области G типа (D) задана аналитическая функция $f(z)$, которая в $\overline{G}$ имеет дробную производную $f^{(\alpha)}(z)$ порядка $\alpha \in (0, 1)$ с начальной точкой $k \in C$, удовлетворяющую при каких-либо $r > 0$ и натуральном n неравенству*

$$|f^{(\alpha)}(z)| < A_1 [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^r, \quad z \in C. \tag{3.2}$$

Тогда функция

$$F_j(z) = \frac{[f(z) - f(z_j)] \prod\limits_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq j}}^{m} (z - z_\lambda)^l}{\left[\frac{1}{n} \prod\limits_{\lambda=1}^{m} \left(z - z_\lambda - \frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)^{\frac{1-\alpha_\lambda}{2-\alpha_\lambda}}\right]^r} = [f(z) - f(z_j)] \frac{\Phi_j(z)}{\Phi(z)},$$

где θ_λ выбраны так, что точки $z_\lambda + \dfrac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}$ лежат на биссектрисах *углов z_k вне области G, при $l > \frac{r}{2} + 1$ удовлетворяет равномерно по $z \in C$ условию*

$$|F_j(z+\Delta z) - F_j(z)| \leqslant A_2 |\Delta z|^{\alpha} + \frac{A_3 |\Delta z|^{\alpha}}{u^{r-1+\alpha} \, [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r-1+\alpha}}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть точка z принадлежит окрестности $U(z_j)$ точки стыка z_j. Тогда

$$|F_j(z+\Delta z) - F_j(z)| <$$

$$< \left|\frac{\Phi_j(z+\Delta z)}{\Phi(z+\Delta z)}\right| \cdot |f(z+\Delta z) - f(z)| + |f(z) - f(z_j)| \left|\frac{\Phi_j(z+\Delta z)}{\Phi(z+\Delta z)} - \frac{\Phi_j(z)}{\Phi(z)}\right|. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание, что при $z \in U(z_j)$

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \asymp \frac{1}{n}\left(|z - z_j| + \frac{1}{n^{2-\alpha_j}}\right)^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}} \tag{3.5}$$

(см. [1]), после несложных преобразований получим

$$|F_j(z+\Delta z) - F_j(z)| \leqslant \frac{A_4 |f(z+\Delta z) - f(z)|}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r} +$$

$$+ |f(z) - f(z_j)| \left\{ \frac{A_5 |\Delta z| \left|z - z_j - \frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}\right|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}r - 1}}{n^r [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \, \rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r} + \frac{A_6 |\Delta z|}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r} \right\}. \tag{3.6}$$

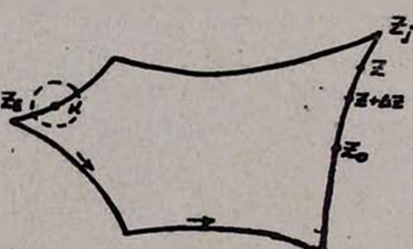

Рис. 1.

Взаимное расположение точек k, z, $z+\Delta z$ и z_j можно не ограничивая общности считать таким, как на рис. 1. Обозначим $C^{\varepsilon}(k)$ множество точек $\{z \in C;\ |z-k| > \varepsilon\}$, и исследуем случай, когда z, $z+\Delta z \in C^{\varepsilon}_{-}(k)$ при $\varepsilon = \rho_{1+\frac{1}{n}}(k)$. Из ограниченности $f^{(\alpha)}(z)$ на C следует (см. [4], стр. 105), что

$$f(z) = D_z^{-\alpha}[D_z^{\alpha}(f;\ k);\ k].$$

Поэтому

$$|f(z+\Delta z)-f(z)|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{k}^{z+\Delta z} f^{(\alpha)}(\zeta)(z+\Delta z-\zeta)^{\alpha-1}\,d\zeta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{k}^{z} f^{(\alpha)}(\zeta)(z-\zeta)^{\alpha-1}\,d\zeta\,\right| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} f^{(\alpha)}(\zeta)(z+\Delta z-\zeta)^{\alpha-1}\,d\zeta\right|+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{k}^{z}[(z+\Delta z-\zeta)^{\alpha-1}-(z-\zeta)^{\alpha-1}]\,f^{(\alpha)}(\zeta)\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_7|\Delta z|^{\alpha}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^{r}+\left|\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_{k}^{z_\varepsilon} f^{(\alpha)}(\zeta)\,d\zeta\int_{z}^{z+\Delta z}(u-\zeta)^{\alpha-2}\,du\right|+$$

$$+\left|\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_{z_\varepsilon}^{z+\Delta z} f^{(\alpha)}(\zeta)\int_{z}^{z+\Delta z}(u-\zeta)^{\alpha-2}du\right|=A_7\,|\Delta z|^{\alpha}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^{r}+$$

$$+|J_1|+|J_2|. \tag{3.7}$$

Интегралы в неравенстве (3.7) вычисляются вдоль C в положительном направлении, точка z_ε выбрана из условия $|z_\varepsilon-k|=\varepsilon$ (см. рис. 1). Так как при $\zeta\in\breve{kz_\varepsilon}$ $\rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)\asymp\rho_{1+\frac{1}{n}}(k)$ (это следует из свойств функции $\rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)$ в областях типа (D), см. [1]), то в силу соотношений (3.2) и (3.5) получим

$$|J_1|\leqslant A_8\,|\Delta z|\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(k)]^{r+1}\leqslant\frac{A_9\,|\Delta z|}{n^{r+1}}. \tag{3.8}$$

Чтобы оценить $|J_2|$ зафиксируем на пути интегрирования точку z_0 так, что все точки дуги $\breve{z_0z}$ имеют ближайшей точкой стыка z_j.

$$|J_2|\leqslant A_{10}\int_{z_\varepsilon}^{z+\Delta z}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)]^{r}\,|d\zeta|\int_{z}^{z+\Delta z}|u-\zeta|^{\alpha-2}\,|du|=A_{10}\int_{z}^{z+\Delta z}|du|\times$$

$$\times\int_{z_\varepsilon}^{z_0}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)]^{r}\,|u-\zeta|^{\alpha-2}\,|d\zeta|+A_{10}\int_{z}^{z+\Delta z}|du|\int_{z_0}^{z+\Delta z}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)]^{r}\,|u-\zeta|^{\alpha-2}\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_{11}}{n^{r}}|\Delta z|+A_{12}\int_{z}^{z+\Delta z}|du|\int_{z_0}^{z+\Delta z}\left[\left(\frac{1}{n}|u-z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}+\frac{1}{n^{2-\alpha_j}}\right)^{r}+\frac{1}{n^{r}}|u-\zeta|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}\right]\times$$

$$\times|u-\zeta|^{\alpha-2}|d\zeta|\leqslant\frac{A_{13}}{n^{r}}|\Delta z|+\frac{A_{14}}{n^{r}}|z+\Delta z-z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}|\Delta z|^{\alpha}+A_{15}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^{r}\,|\Delta z|^{\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{13}}{n^r}|\Delta z| + A_{16}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r|\Delta z|^\alpha. \tag{3.9}$$

В случае, когда хотя бы одна из точек z, $z+\Delta z$ не принадлежит $C^\varepsilon(k)$, $\varepsilon=\rho_{1+\frac{1}{n}}(k)$, справедлива оценка

$$|f(z)-f(z+\Delta z)| \leqslant \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_z^{z+\Delta z} f^{(\alpha)}(\zeta)(z+\Delta z-\zeta)^{\alpha-1}\,d\zeta\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_k^{z+\Delta z} f^{(\alpha)}(\zeta)\left[(z+\Delta z-\zeta]^{\alpha-1}-(z-\zeta)^{\alpha-1}\right]d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_{17}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r|\Delta z|^\alpha. \tag{3.10}$$

Учитывая соотношение (3.5) и неравенства (3.7—3.10), в итоге имеем

$$|f(z+\Delta z)-f(z)| \leqslant \frac{A_{18}}{n^r}|\Delta z| + A_{19}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r|\Delta z|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{18}}{n^{r-1+\alpha}}\left(\frac{1}{n}|z+\Delta z-z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}\right)^{1-\alpha}|\Delta z|^\alpha + A_{19}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r|\Delta z|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant A_{19}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r|\Delta z|^\alpha + \frac{A_{20}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^{1-\alpha}}{n^{r-1+\alpha}}|\Delta z|^\alpha. \tag{3.11}$$

При рассматриваемом взаимном расположении точек k, z, $z+\Delta z$ и z_j дальнейшие вычисления упрощаются, если учесть, что

$$\frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)}{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)} \leqslant \text{const} \tag{3.12}$$

и

$$\left|z-z_j-\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}\right| \geqslant A_{21}\left(|z-z_j|+\frac{1}{n^{2-\alpha_j}}\right) \geqslant A_{21}|z-z_j|. \tag{3.13}$$

Применяя оценку (3.11) в неравенстве (3.6) к точкам z, $z+\Delta z$ и z_j, z, получим

$$|F_j(z+\Delta z)-F_j(z)| < A_4A_{19}|\Delta z|^\alpha + \frac{A_4A_{20}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^{r-1+\alpha}} +$$

$$+\frac{A_5A_{19}\left(|z+\Delta z-z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}\right)^{(1-\alpha)\frac{2-\alpha_j}{1-\alpha_j}}\cdot\left|z-z_j-\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}\right|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}\left[r-(1-\alpha)\frac{2-\alpha_j}{1-\alpha_j}\right]}|\Delta z|^\alpha}{A_{21}^\alpha n^r\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)\right]^r}+$$

$$+\left(A_6A_{19}|z-z_j|^\alpha+\frac{A_8A_{20}|z-z_j|^\alpha}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}}\right)|\Delta z|+$$

$$+\frac{A_5A_{20}\left(|z+\Delta z-z_j|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}\right)^{(1-\alpha)\frac{2-\alpha_j}{1-\alpha_j}}\cdot\left|z-z_j-\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}\right|^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}\left[r-(1-\alpha)\frac{2-\alpha_j}{1-\alpha_j}\right]}|\Delta z|^\alpha}{A_{21}^\alpha n^{2r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)\right]^r}\leqslant$$

$$\leqslant A_{22}|\Delta z|^\alpha+\frac{A_{23}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}}+$$

$$+\frac{A_5A_{19}A_{24}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)\right]^{(1-\alpha)\frac{2-\alpha_j}{1-\alpha_j}}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-(1-\alpha)\frac{2-\alpha_j}{1-\alpha_j}}}{A_{21}^\alpha\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)\right]^r}\cdot|\Delta z|^\alpha+$$

$$+\frac{A_5A_{20}A_{23}|\Delta z|^\alpha}{A_{21}^\alpha n^{r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}}\leqslant A_{24}|\Delta z|^\alpha+\frac{A_{25}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}}. \tag{3.14}$$

Нетрудно убедиться, что при других вариантах взаимного расположения точек k, z, $z+\Delta z$ и z_j оценка (3.14) сохраняется с точностью до констант A_{24} и A_{25}, не зависящих от n и z.

II. Пусть точка z принадлежит окрестности $U(z_i)$ точки стыка $z_i\ (i\neq j)$. Тогда в силу (3.4), (3.5) и (3.11) получим

$$|F_j(z+\Delta z)-F_j(z)|\leqslant A_{26}|\Delta z|^\alpha+\frac{A_{27}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}}+$$

$$+|f(z)-f(z_j)|\cdot\left\{\frac{|z-z_i|^b\,|\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)|}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)\right]^r}+\frac{|\Phi_j(z+\Delta z)-\Phi_j(z)|}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^r}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_{26}|\Delta z|^\alpha+\frac{A_{27}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r-1+\alpha}}+\left|\int_k^z f^{(\alpha)}(\zeta)\left[(z-\zeta)^{\alpha-2}-(z_j-\zeta)^{\alpha-1}\right]d\zeta\right.+$$

$$+\left.\int_z^{z_j}f^{(\alpha)}(\zeta)(z_j-\zeta)^{\alpha-1}\,d\zeta\right|\left\{\frac{A_{29}|\Delta z|\,|z-z_i|^l\left|z-z_i-\frac{e^{i\theta_i}}{n^{2-\alpha_i}}\right|^{\frac{1-\alpha_i}{2-\alpha_i}-1}}{n^r\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\cdot\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)\right]^r}+\right.$$

$$+\frac{A_{30}|z-z_l|^l}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r}+\frac{A_{31}(|\Delta z|\,|z-z_l|^{l-1}+|\Delta z|^l}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant A_{26}|\Delta z|^\alpha+\frac{A_{27}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r-1+\alpha}}+\frac{A_{32}|\Delta z|\,|z-z_l|^{l-1}}{n^r[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r}+$$

$$+A_{33}|\Delta z|+\frac{A_{31}A_{34}([\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^r+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r)\,|\Delta z|}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z+\Delta z)]^r}\leqslant$$

$$\leqslant A_{35}|\Delta z|^\alpha+\frac{A_{36}|\Delta z|^\alpha}{n^{r-1+\alpha}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r-1+\alpha}}.$$

Лемма полностью доказана.

Следствие. *При $r=1-\alpha$ справедливо соотношение*

$$|F_j(z)|=O(|z-z_j|^\alpha). \tag{3.15}$$

Лемма 2. *Если функция $f(z)$ аналитична в области G типа (D), непрерывна на $\overline{G}$ и принадлежит классу H^α, $\alpha\in(0,1)$ на границе C области G, причем в некоторой точке $k\in C$ $f(k)=0$, то при всяком натуральном n найдется многочлен $P_n(z)$ степени не выше n, для которого k является корнем и*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_{37}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^\alpha,\ z\in C, \tag{3.16}$$

где A_{37}—постоянная, не зависящая от z и n.

Как недавно показано в работе [8] для функций $f(z)$ в условиях леммы 2 существует многочлен $P_n(z)$, удовлетворяющий условию (3.16) и интерполирующий функцию в точках стыка. Лемма 2 является следствием этого результата.

Нижеследующее утверждение будет доказано для множеств типа (A^{**}) (см. [1]), более общего типа, чем области типа (D).

Лемма 3. *Пусть на границе C множества типа (A^{**}) многочлен степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(z)|\leqslant A_{38}\frac{|z-k|^\alpha+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^\alpha}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^\beta}, \tag{3.17}$$

где α и β—действительные неотрицательные числа, $k\in C$—фиксированная начальная точка. Тогда

I) *для всех $\tilde{z}\in C_R$ при $R\leqslant 1+\frac{1}{n}$ имеет место неравенство*

$$|P_n(\bar{z})| \leqslant A_{39} \frac{|\bar{z}-k|^{\alpha} + [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\beta}}, \tag{3.18}$$

где $z \in C$ — *точка, прообраз которой в отображении* $z=\psi(w)$ *лежит на одном радиусе с прообразом точки* $\bar{z}$; A_{39} *не зависит от* $\bar{z}$ *и* n;

2) *если* $\beta=0$, *то при всяком натуральном* q *и* $z \in C$

$$|P_n^{(q)}(z)| \leqslant A_{40} \frac{|z-k|^{\alpha} + [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{q}}. \tag{3.19}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)\left\{\psi\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right|-z\right\}^{\beta}}{\left\{\psi\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right|-k\right\}^{\alpha}[\varphi(z)]^{n+\beta}}.$$

$\Phi(z)$ аналитична вне G и $\lim_{z\to\infty}\Phi(z)=0$, поэтому, применяя к ней принцип максимума и учитывая известные свойства функции $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ (см. [1]), получим для $z \in G$

$$|\Phi(z)| \leqslant \max_{z\in C}|\Phi(z)| \leqslant A_{41} \times$$

$$\times \max_{z\in C} \frac{\{|z-k|^{\alpha}+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}\}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\beta}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\beta}\left|\psi\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right|-k\right|^{\alpha}\cdot 1^{n+\beta}} < A_{42}.$$

Отсюда во всех точках $\bar{z} \in C_R$, $R \leqslant 1+\frac{1}{n}$ будем иметь

$$|P_n(\bar{z})| \leqslant A_{43} \frac{\left|\psi\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(\bar{z})\right]-k\right|^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\beta}} \leqslant A_{44} \frac{|\tilde{z}-k|^{\alpha}+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\beta}}.$$

Неравенство (3.17) доказано.

2) Пусть $q>\alpha$. Тогда в силу (3.18)

$$|P_n^{(q)}(z)| = \left|\frac{q!}{2\pi i}\int_{C_{1+\frac{1}{n}}}\frac{P_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{q+1}}d\zeta\right| \leqslant \frac{2A_{39}}{2\pi}\int_{C_{1+\frac{1}{n}}}\frac{|\zeta-k|^{\alpha}}{|\zeta-z|^{q+1}}|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant A_{45} \int\limits_{C_{1+\frac{1}{n}}} \frac{|\zeta - z|^{\alpha} + |z-k|^{\alpha}}{|\zeta - z|^{q+1}} |d\zeta| \leqslant A_{45} \int\limits_{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{1+q-\alpha}} +$$

$$+ A_{45} |z-k|^{\alpha} \int\limits_{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{q+1}} = A_{45} \frac{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha} + |z-k|^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{q}}. \tag{3.20}$$

Пусть $q \leqslant \alpha$. Как показано в [1] для произвольной точки $z \in C$ можно найти точку $\check{z}$ и окружность $\gamma_{\check{z}}$ с центром в $\check{z}$ такие, что

а) $|\check{z} - z| < \rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$;

б) радиус $\gamma_{\check{z}}$ равен $A_{46}\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ $(A_{46} > 0)$;

в) $\gamma_{\check{z}}$ содержится в полосе между C и $C_{1+\frac{1}{n}}$.

Тогда при всяком натуральном j в силу свойств $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ и (3.18) будем иметь

$$|P_n^{(j)}(\check{z})| = \left| \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\check{z}}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - \check{z})^{j+1}} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{39}A_{46}\, j!\, \rho_{1+\frac{1}{n}}(z)}{A_{46}^{j+1} [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{j+1}} [[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha} + |z-k|^{\alpha}] =$$

$$= A_{47} \frac{|z-k|^{\alpha} + [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{j}}.$$

Применяя это неравенство, в силу (3.17) и (3.20) получим

$$P_n^{([\alpha])}(z) = \int\limits_{\check{z}}^{z} P_n^{([\alpha]+1)}(\zeta)\, d\zeta + P_n^{([\alpha])}(\check{z}),$$

$$|P_n^{([\alpha])}(z)| \leqslant A_{48} \frac{|z-k|^{\alpha} + [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{[\alpha]+1}} \int\limits_{\check{z}}^{z} |d\zeta| + A_{47} \frac{|z-k|^{\alpha} + [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{[\alpha]}} =$$

$$= A_{49}\frac{|z-k|^{\alpha}+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{[\alpha]}},$$

$$|P_n^{([\alpha]-1)}(z)|\leqslant\left|\int_{\overset{*}{z}}^{z}P_n^{([\alpha])}(\zeta)\,d\zeta+P_n^{([\alpha]-1)}(\overset{*}{z})\right|\leqslant A_{49}^{*}\frac{|z-k|^{\alpha}+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{[\alpha]-1}},$$

. . . .

$$|P_n^{(q)}(z)|\leqslant\left|\int_{\overset{*}{z}}^{z}P_n^{(q+1)}(\zeta)\,d\zeta+P_n^{(q)}(\overset{*}{z})\right|\leqslant A_{49}^{*}\frac{|z-k|^{\alpha}+[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}}{[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{q}}.$$

Из последнего неравенства и (3.20) следует (3.19).

Лемма 4. *Если функция $f(z)$ аналитична в области G типа (D), непрерывна на $\overline{G}$ и принадлежит классу H^{α}, $\alpha\in(0,1)$ на границе C области G, причем в некоторой точке $k\in C$ $f(k)=0$, то при всяком натуральном n найдется такая функция $\chi_n(z)$ вида*

$$\chi_n(z)=P_n(z)(z-k)^{1-\alpha},$$

где $P_n(z)$ — многочлен степени не выше n, что при всех $z\in C$

$$|f(z)-\chi_n(z)|\leqslant A_{50}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha} \tag{3.21}$$

(A_{50} не зависит от z и n).

Доказательство. Пусть n—четное. По лемме 2 существует многочлен $Q(z)$ степени не выше $\frac{n}{2}$, удовлетворяющий условиям:

$$Q(k)=0,$$

$$|f(z)-Q(z)|\leqslant A_{51}\,[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha}. \tag{3.22}$$

Представим $Q(z)$ в виде

$$Q(z)=P(z)(z-k)=\chi_{\frac{n}{2}-1}(z)(z-k)^{\alpha},$$

где $P(z)$ — многочлен степени не выше $\frac{n}{2}-1$. Учитывая, что $(z-k)^{\alpha}\in\in H^{\alpha}$ на $\overline{G}$, найдем многочлен $P_1(z)$ степени не выше $\frac{n}{2}+1$ такой, что

$$|(z-k)^{\alpha}-P_1(z)|\leqslant A_{52}\,[\rho_{1+\frac{2}{n+2}}(z)]^{\alpha},\ z\in C. \tag{3.23}$$

Убедимся теперь в равномерной по n и $z \in \overline{G}$ ограниченности функции $\chi_{\frac{n}{2}-1}(z)$. Поскольку при $z \in C$

$$|Q(z)| \leqslant |f(z)| + A_{51}[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha} \leqslant A_{51}'|z-k|^{\alpha} + A_{51}[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha}, \tag{3.24}$$

причем функция в правой части положительна, то в силу леммы 3

$$|Q'(z)| \leqslant \frac{A_{51}'|z-k|^{\alpha} + A_{51}[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha}}{\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)}. \tag{3.25}$$

Если $|z-k| \geqslant \rho_{1+\frac{2}{n}}(z)$, то в силу (3.24) получим

$$|\chi_{\frac{n}{2}-1}(z)| = \left|\frac{Q(z)}{(z-k)^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{A_{51}'|z-k|^{\alpha} + A_{51}[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha}}{|z-k|^{\alpha}} \leqslant A_{53}.$$

Пусть $|z-k| \leqslant \rho_{1+\frac{2}{n}}(z)$. Тогда, используя известные свойства функции $\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)$ (см. [1]), для всех $\zeta \in \breve{kz}$ получим

$$\rho_{1+\frac{2}{n}}(\zeta) \asymp \rho_{1+\frac{2}{n}}(z),$$

и поэтому, в силу (3.25), имеем

$$|\chi_{\frac{n}{2}-1}(z)| = \left|\frac{Q(z)}{(z-k)^{\alpha}}\right| = \frac{\left|\int\limits_{\breve{kz}} Q'(\zeta)\,d\zeta\right|}{|z-k|^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant A_{54}\frac{[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha-1}\int\limits_{\breve{kz}}|d\zeta|}{|z-k|^{\alpha}} < A_{55}.$$

Положим

$$\chi_n(z) = \chi_{\frac{n}{2}-1}(z)\,P_1(z).$$

В результате, учитывая равномерную ограниченность функции $\chi_{\frac{n}{2}-1}(z)$ на C и соотношения (3.22), (3.23) и (3.5), находим

$$|f(z)-\gamma_n(z)|\leqslant A_{51}\,[\rho_{1+\frac{2}{n}}(z)]^{\alpha}+|\gamma_{\frac{n}{2}-1}(z)|\cdot|(z-k)^{\alpha}-P_1(z)|\leqslant$$

$$\leqslant A_{56}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\alpha}.$$

Доказательство леммы для нечетных n аналогично.

Лемма 5. *Если для некоторого многочлена $P_n(z)$ степени не выше n, заданного в области G типа (D), при всех $z\in C$ имеет место неравенство*

$$|P_n(z)|\leqslant|z-z_j|^{\alpha}+\frac{1}{n^{(2-\alpha_j)\alpha}},\quad \alpha\in(0,1],\tag{3.26}$$

то

$$\left|P_n\left(z_j+\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}\right)\right|\leqslant\frac{A_{57}}{n^{(2-\alpha_j)\alpha}},\tag{3.27}$$

где θ_j $(j=1,2,\cdots,m)$ те же, что и в лемме 1.

При $\alpha=1$ данная лемма принадлежит В. К. Дзядыку [3]. Доказательство для $\alpha\in(0,1)$ совершенно аналогично.

Лемма 6. *Любые две точки z' и z'' границы C области G типа (D) можно соединить принадлежащей $\overline{G}$ ломаной линией, длина l которой не превосходит $A_{58}|z'-z''|$, число звеньев не больше некоторого N, а углы t удовлетворяют условию*

$$0<A_{59}\leqslant t\leqslant A_{60}<2\pi,$$

где A_{58}, A_{59}, A_{60}, N зависят только от области G.

Доказательство. Составляющие границу C дуги имеют непрерывную кривизну. Поэтому существует $r_0>0$ такое, что окружность радиуса r_0 можно „прокатить“ по внутренней и внешней стороне каждой из этих дуг. Очевидно достаточно убедиться в справедливости леммы в

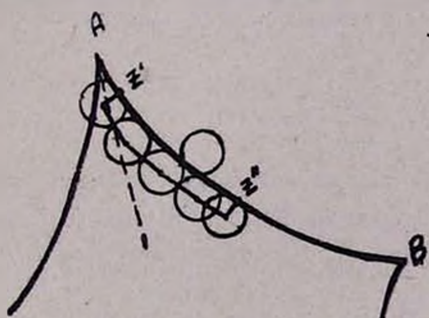

Рис. 2.

случае, когда z' и z'' принадлежат одной из дуг границы, например, дуге AB (см. рис. 2). Укажем метод построения требуемой ломаной.

Пусть $z', z''\in\overset{\frown}{AB}$. Из определения области типа (D) следует, что существуют фиксированные окрестности угловых точек $\mathfrak{M}(z_j)$

$(j=1, 2, \cdots, m)$, в которых биссектрисы углов полностью принадлежат $\overline{G}$. Обозначим через ρ наименьшее из расстояний между дугами $C/\bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{M}(z_j)$ и выберем число r из условия

$$r=\begin{cases} \min\{r_0, \rho\}, & \text{если} \quad |z'-z''|>2r_0 \\ \min\left\{\dfrac{|z'-z''|}{2}, \rho\right\}, & \text{если} \quad |z'-z''|<2r_0. \end{cases}$$

Построим цепь окружностей радиуса r (см. рис. 2), первая из которых касается C в точке z' и обращена внутрь области, вторая касается C и первой окружности и т. д., пока не получим окружность, пересекающуюся окружностью радиуса r, касательной к C в точке z''. Покажем, что ломаная, соединяющая точки z' и z'' и состоящая из радиусов, проведенных в эти точки из центров первой и последней окружностей и отрезков, соединяющих центры окружностей, будет искомой в том случае, когда она полностью принадлежит $\overline{G}$. Действительно, поскольку $r<r_0$, то расстояние между точками касания двух соседних окружностей к дуге будет $>r$ и число окружностей в цепи не превосходит $\dfrac{\text{дл.}\,\widetilde{z'z''}}{r}+2$, а число звеньев ломаной не больше, чем

$$\frac{\text{дл.}\,\widetilde{z'z''}}{r}+4\leqslant\frac{A_{61}|z'-z''|}{r}+4<\text{const}=N(G).$$

Следовательно

$$l\leqslant\left(\frac{A_{61}|z'-z''|}{r}+4\right)\cdot 2r<2A_{61}|z'-z''|+8r<A_{58}|z'-z''|.$$

Из способа построения ломаной легко видеть, что ее углы t удовлетворяют условию

$$\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{5}{3}\pi.$$

Осталось заметить, что построенная ломаная может выходить за пределы $\overline{G}$ только в одной из $\mathfrak{M}(z_j)$. В этом случае достаточно заменить часть этой ломаной на отсекаемый ею отрезок биссектрисы угла z_j.

§ 4. Прямая теорема о приближении функций классов типа А. Зигмунда

Т е о р е м а 2. *Если функция $f(z)$ принадлежит в области G типа (D) классу $W^r\widetilde{Z}$ ($r>0$, целое), то при каждом $n=1, 2, \cdots$ существует многочлен $P_n(z)$ степени не выше n, удовлетворяющий на границе C области G условию*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_{62}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r+1}. \tag{4.1}$$

Доказательство. I. Убедимся в справедливости теоремы для $r=0$. Пусть $f(z)\in\widetilde{Z}$. Достаточно рассмотреть случай, когда $f(z)\in W_0^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}}$, ибо по доказанному в [5], в областях типа (D) классы $W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$ и $W_0^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}}$ эквивалентны.

Применяя лемму 4, по натуральному числу n найдем функцию $\chi_n(z)$ вида

$$\chi_n(z)=\sigma_n(z)(z-k)^{\frac{1}{2}}$$

(где $\sigma_n(z)$ — многочлен степени не выше n), удовлетворяющую условию

$$|f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(z)-\chi_n(z)|\leqslant A_{63}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\frac{1}{2}},\quad z\in C. \tag{4.2}$$

Введем m вспомогательных функций (по числу точек стыка)

$$F_j(z)=\frac{D_z^{-\frac{1}{2}}\{[f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(z)-\chi_n(z)];\ k\}\Big|_{z_j}^{z}}{\left[\frac{1}{n}\prod_{\lambda=1}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)^{\frac{1-\alpha_\lambda}{2-\alpha_\lambda}}\right]^{\frac{1}{2}}}\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}(z-z_\lambda)^2. \tag{4.3}$$

Используя обозначения предыдущего раздела, представим функции $F_j(z)$ в виде

$$F_j(z)=\frac{f(z)\Phi_j(z)-\tilde{\sigma}_n(z)}{\Phi(z)}\quad (j=1,\ 2,\cdots,\ m), \tag{4.4}$$

где $\tilde{\sigma}_n(z)$ — многочлен порядка не выше $n+2m-1$. Согласно леммы 1 при всех $j=1,\ 2,\cdots,\ m$

$$F_j(z)\in H^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя прямую теорему В. К. Дзядыка [3], найдем такие многочлены $U_n(z;\ j)$ степени не выше n, чтобы при всех $z\in C$ и $j=1,\ 2,\cdots,m$

$$|F_j(z)-U_n(z;\ j)|\leqslant A_{64}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Положим

$$\overline{U}_n(z;\ j)=U_n(z;\ j)-U_n\left(z_j+\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}};\ j\right)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\frac{z-z_\lambda}{z_j+\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}-z_\lambda}. \tag{4.6}$$

На основании (3.5) и леммы 5 можно утверждать, что а) $\overline{U}_n(z;\ j)$ приближает функцию $F_j(z)$ с тем же порядком точности, что и $U_n(z;\ j)$;

б)
$$\overline{U}_n\left(z_j+\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}};\ j\right)=0. \tag{4.7}$$

Следовательно

$$\overline{U}_n(z;\ j)=\left(z-z_j-\frac{e^{i\theta_j}}{n^{2-\alpha_j}}\right)\breve{U}_n(z;\ j), \tag{4.8}$$

где $\breve{U}_n(z;\ j)$ — многочлен степени не выше $n-1$, и учитывая (3.5), будем иметь

$$\left|f(z)\,\Phi_j(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)-\tilde{\sigma}_n(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)-\right.$$

$$\left.-\overline{U}_n(z;\ j)\,\Phi(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)\right|\leqslant A_{65}\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z). \tag{4.9}$$

Обозначим многочлен $\tilde{\sigma}_n(z)\prod\limits_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\dfrac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)$ через $\check{\sigma}_n(z)$. Нам потребуется следующий результат, содержащийся в статье [3]: при всяком натуральном n для функции $n^{\frac{1}{2}}\,\Phi(z)$ найдется многочлен $\check{P}_n(z)$ степени не выше n такой, что при всех $z\in C$

$$\left|n^{\frac{1}{2}}\,\Phi(z)-\check{P}_n(z)\right|\leqslant A_{66}\cdot\frac{1}{n}\prod_{\lambda=1}^{m}\left(|z-z_\lambda|+\frac{1}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)^{\frac{1-\alpha_\lambda}{2(2-\alpha_\lambda)}-\frac{1}{2-\alpha_\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant A_{67}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\prod_{\lambda=1}^{m}\left(|z-z_\lambda|+\frac{1}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)^{-\frac{\alpha_\lambda}{2(2-\alpha_\lambda)}}. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) следует существование многочлена $\overline{P}_n(z;\ j)$, удовлетворяющего условию

$$\left|f(z)\,\Phi_j(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)-\overline{P}_n(z;\ j)\right|\leqslant A_{68}\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)+A_{69}\Bigg(\left(|z-z_j|-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^{2-\alpha_j}}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(|z-z_\lambda|+\frac{1}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n}\prod_{\lambda=1}^{m}\left(|z-z_\lambda|+\frac{1}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)^{-\frac{\alpha_\lambda}{2(2-\alpha_\lambda)}}\leqslant$$

$$\leqslant A_{68}\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)+A_{70}\left(|z-z_l|+\frac{1}{n^{2-\alpha_l}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha_l}{2(2-\alpha_l)}+\frac{1}{2-\alpha_l}}\leqslant A_{71}\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z), \tag{4.11}$$

где $\alpha_i\pi$ — раствор угла, ближайшего к точке z. Как доказано в [2] можно найти m многочленов $\pi_j(z)$ $(j=1, 2,\cdots, m)$, степени которых не зависят от n, таких, что

$$\sum_{j=1}^{m}\Phi_j(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)\pi_j(z)\equiv 1.$$

Полагая

$$P_n(z)=\sum_{j=1}^{m}\overline{P}_n(z;\,j)\,\pi_j(z),$$

получим

$$|f(z)-P_n(z)|=\left|\sum_{j=1}^{m}f(z)\,\Phi_j(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{m}\left(z-z_\lambda-\frac{e^{i\theta_\lambda}}{n^{2-\alpha_\lambda}}\right)\pi_j(z)-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\overline{P}_n(z;\,j)\,\pi_j(z)\right|\leqslant A_{72}\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z).$$

Для $r=0$ теорема доказана.

II. Случай произвольных целых $r>0$ сводится к рассмотренному с помощью математической индукции. Чтобы убедиться в этом достаточно почти дословно повторить доказательство прямых теорем В. К. Дзядыка [3] для классов W^rH^α. Теорема доказана полностью.

§ 5. Обратные теоремы о приближении функций типа А. Зигмунда

Теорема 2 предыдущего раздела показывает, что функции классов типа А. Зигмунда могут быть приближены в областях типа (D) со скоростью, характерной для классов А. Зигмунда. Цель исследования, приведенного в данном параграфе состоит в том, чтобы показать, что классы $W^r\overline{Z}$ являются наиболее широкими классами функций, имеющих такую скорость приближения. Таким образом, будет доказана теорема, обратная к теореме 2 и, следовательно, получена конструктивная характеристика классов типа А. Зигмунда.

Попутно нам потребуется следующий результат об одновременной аппроксимации функций и их производных полиномами.

Теорема 3. *Если для аналитической в области G типа (D) функции $f(z)$ и произвольного натурального n найдется такой полином $P_n(z)$, что на границе C области G выполняется неравенство*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_{73}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r+1}, \tag{5.1}$$

где $r\geqslant 0$ — целое, A_{73} не зависит от z и n, то для всех $k=1, 2,\cdots, r$ справедлива оценка

$$|f^{(k)}(z)-P_n^{(k)}(z)|\leqslant A_{74}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r-k+1}, \tag{5.2}$$

где A_{74} также не зависит от z и n.

Доказательство этого факта для отрезка $[-1,1]$ дано в работе [6]. Неравенства В. К. Дзядыка для производных от многочленов в областях типа (D) (см. [1]) позволяют совершенно аналогично доказать теорему 3.

Классический метод получения обратных теорем основан на использовании оценок производных от многочленов. Чтобы применить этот метод для установления обратной теоремы о приближении функций классов $W^r\tilde{Z}$ потребуется лемма.

Лемма 7. *Пусть C—отрезок $[-1,1]$ или граница области G типа (D). Если при всех $z\in C$ некоторый многочлен $P_n(z)$ степени не выше n удовлетворяет условию*

$$|P_n(z)|\leqslant\rho_{1+\frac{1}{n}}(z), \tag{5.3}$$

и в начальной точке $k\in C$ $P_n(k)=0$, то при всяком γ, не нарушающем условия

$$1>\gamma>\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}, \tag{5.4}$$

где $\alpha_0=\min\limits_{j=1,2,\dots,m}\{\alpha_j\}$, имеет место неравенство

$$|P_n^{(\gamma)}(z)|\leqslant A_{75}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{1-\gamma}, \tag{5.5}$$

причем в окрестности точки k неравенство (5.5) имеет место при всех $\gamma<1$.

Лемма следует из более общего результата автора (см. [5], стр. 13).

Теорема 4. *Если функция $f(z)$, аналитическая в области G типа (D) может быть приближена полиномами $P_n(z)$ степени не выше n так, что при $z\in C$ и произвольном натуральном n*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_{76}\,[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r+1}, \tag{5.6}$$

то $f(z)$ непрерывна на $\overline{G}$ и принадлежит классу $W^r\tilde{Z}$.

Доказательство. В силу теоремы 3 можно утверждать, что при каждом натуральном n

$$|f^{(r)}(z)-P_n^{(r)}(z)|\leqslant A_{77}\,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z). \tag{5.7}$$

Покажем, что $f^{(r)}(z)=F_1(z)+F_2(z)$, где

$$F_1(z)\in W_0^{\alpha}H^{1-\alpha};\ F_2(z)\in W_0^{\alpha}H^{1-\alpha}\ \text{при}\ z\in\overline{G}.$$

Для этого зафиксируем на границе C две произвольные точки k и k', $k \neq k'$ и положим

$$F_1(z) = \frac{(z-k)\, f^{(r)}(z)}{k'-k}; \quad F_2(z) = \frac{(k'-z)\, f^{(r)}(z)}{k'-k}.$$

Убедимся, что $F_1(z) \in W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$ с начальной точкой k. (Аналогично $F_2(z) \in W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$ с начальной точкой k'). Вследствие (5.7) можно утверждать, что при каждом натуральном n найдется полином $Q_n(z)$ такой, что при $z \in C$

$$|F_1(z) - Q_n(z)| \leqslant A_{78}\, \rho_{1+\frac{1}{n}}(z). \tag{5.8}$$

Применяя обратные теоремы автора [5] о приближении функций, имеющих дробную производную в классах Гельдера, заключаем, что

$$F_1(z) \in W^{\alpha} H^{1-\alpha} \quad \text{при любом } \alpha \in (0,1)$$

на всякой замкнутой дуге $\Gamma \subset C$, не содержащей точки k, например, на $C^{\delta}(k)$, где $\delta > 0$—достаточно малое фиксированное число. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $F_1(z)$ принадлежит $W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$ на дуге $E_\delta = E_\delta\{z;\ z \in C / C^{\delta}(k)\}$. Покажем это в предположении, что точка k не является угловой (для угловой точки рассуждения аналогичны, но более громоздки).

Обозначим $q_n(z) = Q_n(z) - Q_n(k)$. Число $\delta > 0$ всегда можно выбрать настолько малым, что ввиду (5.8) и (3.5) последовательность $\{q_n(z)\}$ будет обладать свойствами

$$q_n(k) = 0; \ n = 1, 2, \cdots; \tag{5.9}$$

$$|F_1(z) - q_n(z)| \leqslant A_{78}\, \rho_{1+\frac{1}{n}}(z), \ z \in E_\delta, \tag{5.10}$$

где A_{78} не зависит от n и z. Представляя $F_1(z)$ на E_δ в виде ряда

$$F^{(r)}(z) = q_{n_0}(z) + \sum_{l=1}^{\infty} [q_{n_l}(z) - q_{n_{l-1}}(z)], \tag{5.11}$$

где $\{n_l\}$ выбрана из условия

$$\frac{1}{2^{l+1}} < \rho_{1+\frac{1}{n_l}}(k) \leqslant \frac{1}{2^l},$$

и проводя почленное дробное дифференцирование правой части (5.11), получим ряд

$$q_{n_0}^{(\alpha)}(z) + \sum_{l=1}^{\infty} [q_{n_l}^{(\alpha)}(z) - q_{n_{l-1}}^{(\alpha)}(z)]. \tag{5.12}$$

С помощью леммы 7 убеждаемся, что ряд (5.12) мажорируется рядом $A_{79} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l\varepsilon}}$ и потому равномерно по $z \neq k$ сходится к функции $\varphi(z) = D_z^{\alpha}(F_1(z);\ k)$. При $z = k$ сумма ряда (5.12) равна 0 и

$$\varphi(k) = \lim_{\substack{z\to k\\ z\in C}} \frac{\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_a^z (z-\zeta)^{-\alpha} F_1(\zeta)\, d\zeta}{z-k} = 0,$$

ибо $F_1(z) = O(|z-k|)$.

Итак, при $z\in E_\delta$

$$\varphi(z) = q_{n_0}^{(\alpha)}(z) + \sum_{l=1}^{\infty} [q_{n_l}^{(\alpha)}(z) - q_{n_{l-1}}^{(\alpha)}(z)]. \tag{5.13}$$

Введем обозначения

$$q_{n_0}(z) - q'_{n_0}(k)(z-k) = U_{n_0}(z);$$

$$q_{n_l}(z) - q_{n_{l-1}}(z) - [q'_{n_l}(k) - q'_{n_{l-1}}(k)]\,(z-k) = U_{n_l}(z)$$

$$(i = 1, 2, \cdots).$$

Принимая во внимание, что

$$D_z^{(\alpha)}[(z-k)^n; k] = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}(z-k)^{n-\alpha}, \tag{5.14}$$

для любых двух точек z_1 и $z_2\in E_\delta$, вследствие (5.13), получим

$$\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = U_{n_0}^{(\alpha)}(z_2) - U_{n_0}^{(\alpha)}(z_1) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, q'_{n_{l_0}}(k)[(z_2-k)^{1-\alpha} -$$

$$-(z_1-k)^{1-\alpha}] + \sum_{l=1}^{l_0}[U_{n_l}^{(\alpha)}(z_2) - U_{n_l}^{(\alpha)}(z_1)] +$$

$$+\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\{[q_{n_l}^{(\alpha)}(z) - q_{n_{l-1}}^{(\alpha)}(z)]_{z_1}^{z_2}\}, \tag{5.15}$$

где n_{l_0} выбрано из условия

$$\rho_{1+\frac{1}{n_{l_0+1}}}(k) < |z_1 - z_2| \leqslant \rho_{1+\frac{1}{n_{l_0}}}(k). \tag{5.16}$$

Леммы 3 и 7 позволяют, исходя из (5.10), установить следующие оценки:

$$|q'_{n_{l_0}}(z)| \leqslant A_{80}\frac{|z-k| + \rho_{1+\frac{1}{n_{l_0}}}(z)}{\rho_{1+\frac{1}{n_{l_0}}}(z)};$$

$$|q'_{n_{l_0}}(k)| \leqslant A_{80};$$

$$|q_{n_l}^{(\alpha)}(z) - q_{n_{l-1}}^{(\alpha)}(z)| \leqslant A_{81}\,[\rho_{1+\frac{1}{n_l}}(z)]^{1-\alpha} \asymp [\rho_{1+\frac{1}{n_l}}(k)]^{1-\alpha};$$

$$|U'_{n_l}(z)| \leqslant |q'_{n_l}(z) - q'_{n_{l-1}}(z)| + |q'_{n_l}(k) - q'_{n_{l-1}}(k)| \leqslant A_{82};$$

$$|U_{n_l}^{(\alpha+1)}(z)| = |D_z^{(\alpha)}[U'_{n_l}(z);\ k]| \leqslant \frac{A_{83}}{[\rho_{1+\frac{1}{n_l}}(k)]^{\alpha}}.$$

Используя их, в результате будем иметь

$$|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| < A_{84}|z_2 - z_1| + \frac{A_{80}A_{85}}{\Gamma(1-\alpha)}|z_2 - z_1|^{1-\alpha} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l_0}\left|\int_{z_1}^{z_2} U_{n_l}^{(\alpha+1)}(\zeta)\,d\zeta\right| + A_{85}\sum_{l=l_0+1}^{\infty}[\rho_{1+\frac{1}{n_l}}(k)]^{1-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant A_{86}|z_2 - z_1|^{1-\alpha} + A_{83}\sum_{l=1}^{l_0}\int_{z_1}^{z_2}\frac{|d\zeta|}{[\rho_{1+\frac{1}{n_l}}(k)]^{\alpha}} + A_{85}\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^{l(1-\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant A_{86}|z_2 - z_1|^{1-\alpha} + A_{87}|z_2 - z_1|\cdot\sum_{l=1}^{l_0}2^{(l+1)\alpha} + \frac{A_{85}2^{1-\alpha}}{2^{l_0(1-\alpha)}(2^{1-\alpha}-1)} \leqslant$$

$$\leqslant A_{88}|z_2 - z_1|^{1-\alpha}.$$

Таким образом, при $z \in E_\varepsilon$ $F_1(z) \in W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$. Теорема полностью доказана.

Замечание. *Ввиду того, что лемма* 7 *и соотношение* (3.5) *имеют место и для отрезка* $[-1,1]$, *утверждение теоремы* 4 *будет справедливо также для отрезка* $[-1,1]$.

§ 6. Связь с геометрическим определением квазигладкости

Геометрическим будем называть определение квазигладкости с помощью неравенства (1) введения. При этом для функций комплексного переменного, заданных в областях с гладкой и кусочно гладкой границей можно требовать выполнения неравенства (1) только для таких точек z_1 и z_2, которые принадлежат области вместе с отрезком, их соединяющим (см. [9]). Сохраняя за классами функций, квазигладких в смысле геометрического определения обозначение $\bar{Z}$, исследуем связь между классами Z и $\bar{Z}$ на отрезке $[0, \pi]$ и в областях типа (D).

Теорема 5. *Для того чтобы* $f(x) \in Z$ *на* $[0, \pi]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) \in \bar{Z}$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in Z$ на $[0, \pi]$. Это значит, что

$$|\Delta_h^2 f(x)| = |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant K|h| \tag{6.1}$$

для всех точек $x \in [0, \pi]$ таких, что $x \pm h \in [0, \pi]$, причем K не зависит от x и h. Возьмем $x = 0$ в качестве начальной точки дробного дифференцирования. Очевидно, в том, что $f(x) \in \bar{Z}$ достаточно убедиться только для таких функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию

$$f(x) = O(x). \tag{6.2}$$

(В противном случае $f(x) = \frac{x}{\pi} f(x) + \frac{\pi - x}{\pi} f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и вместо $f(x)$ можно рассмотреть $f_1(x)$ с начальной точкой $x=0$ и $f_2(x)$ с начальной точкой $x=\pi$, $f_2(x) = O(\pi - x)$). Кроме того, будем считать, что $f(\pi)=0$, ибо неравенство (6.1) не нарушится при вычитании линейной функции. Продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на $[\pi, 2\pi]$ и далее 2π-периодически на всю ось, сохраняя за ней прежнее обозначение. Известно [10], что полученная в результате продолжения функция будет удовлетворять неравенству (6.1) с константой $5K$, то есть является квазигладкой периодической функцией. По теореме А. Зигмунда [7] при всяком $\alpha \in (0, 1)$ дробная производная в смысле Вейля принадлежит $H^{1-\alpha}$:

$$(v)\, f^{(\alpha)}(x) \in H^{1-\alpha}. \tag{6.3}$$

Для $x \in (0,2\pi)$ справедливо следующее тождество (см. [11], стр. 202):

$$(v) f_{(1-\alpha)}(x) = D_x^{(\alpha-1)}(f; 0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, r_{1-\alpha}(x-t)\, dt, \tag{6.4}$$

где

$$r_{1-\alpha}(x) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{n\to\infty} \left\{(x+2\pi)^{-\alpha} + \cdots + (x+2\pi n)^{-\alpha} - (2\pi)^{-\alpha}\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right\} \tag{6.5}$$

— бесконечно дифференцируемая на $(0,2\pi)$ функция. В результате дифференцирования тождества (6.4) получим при $x \in (0,2\pi)$

$$D_x^{(\alpha)}(f; 0) = (v)\, f^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{d}{dx}\left[r_{1-\alpha}(x-t)\right] dt =$$

$$= (v)\, f^{(\alpha)}(x) + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{2\pi} f(t)(x-t+2\pi)^{-\alpha-1}\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, R(x-t)\, dt, \tag{6.6}$$

где $R(x)$ — функция, бесконечно дифференцируемая при всех $x > -2\pi$. Так как при $x > -2\pi$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, R(x-t)\, dt \in H^1 \subset H^{1-\alpha},$$

то чтобы убедиться, что $D_x^{(\alpha)}(f; 0) \in H^{1-\alpha}$ на $(0,2\pi)$, достаточно проверить соотношение

$$\int_0^{2\pi} f(t)(x-t+2\pi)^{-\alpha-1}\, dt \in H^{1-\alpha},$$

[н]емедленно вытекающее из (6.2). Осталось заметить, что из $f(x)\in Z$ [н]а $[0,\pi]$ следует при достаточно малом фиксированном $\varepsilon>0$ $f(x)\in H^{1-\varepsilon}$ [и] $D_x^{(\alpha)}(f;0)=f^{(\alpha)}(x)\in H^{1-\varepsilon-\alpha}$, то есть $f^{(\alpha)}(x)$ — непрерывная на $[0,\pi]$ [ф]ункция. Поэтому из $f^{(\alpha)}(x)\in H^{1-\alpha}$ на $(0,\pi]$ вытекает $f^{(\alpha)}(x)\in H^{1-\alpha}$ на [[]0,π]. Необходимость доказана.

Пусть $f(x)\in \widetilde{Z}$ на $[0,\pi]$. Тогда

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\text{ где } f_1(x)\in W_0^\alpha H^{1-\alpha},\ f_2(x)\in W_0^\alpha H^{1-\alpha}$$

[п]ри некотором $\alpha\in(0,1)$ и, быть может, с разными начальными точками. [Н]е ограничивая общности, можно считать начальной для $f_1(x)$ точку [x] $=0$. Имеем

$$|f_1(x)|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f_1^{(\alpha)}(t)\,dt\right|\leqslant A_{89}\,x\left|\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{1-\alpha}du\right|=O(x).$$

[В]ведем функцию

$$F(x)=f_1(x)-\frac{f_1(\pi)}{\pi}x$$

[и] продолжим ее нечетным образом через точку π на $[\pi,2\pi]$ и далее [2]π-периодически на всю ось, сохраняя прежнее обозначение для полу[ч]енной функции. Нетрудно проверить, что $F(x)\in W_0^\alpha H^{1-\alpha}$ на $[0,2\pi]$ [и] $F(x)=O(x)$. В силу тождества (6.6) при $x\in(0,2\pi)$

$$(v)\,F^{(\alpha)}(x)=D_x^{(\alpha)}(F;0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\frac{d}{dx}\left[r_{1-\alpha}(x-t)\right]dt. \tag{6.7}$$

Интеграл в правой части (6.7), как было показано выше (см. (6.6)), принадлежит $H^{1-\alpha}$ на $(0,2\pi)$. Следовательно, $(v)\,F^{(\alpha)}(x)\in H^{1-\alpha}$ на $(0,2\pi)$. По теореме А. Зигмунда [11], $F(x)\in Z$ на $(0,2\pi)$. Но функция $F(x)$ непрерывна на $[0,2\pi]$, откуда вытекает, что $F(x)\in Z$ на $[0,2\pi]$ и $f_1(z)\in Z$. Аналогично $f_2(x)\in Z$.

Следствие 1. *На сегменте* $[0,\pi]$ *классы* W^rZ *и* $W^r\widetilde{Z}$ *эквивалентны.*

Следствие 2. *Теорема* 1 *имеет место также для* $[-1,1]$.

Лемма 8. *Пусть G — область типа (D), $k\in C$ — некоторая фиксированная точка границы; $\overline{ab}$ — отрезок, принадлежащий $\overline{G}$, $\breve{ka}\in\overline{G}$ — не пересекающая $\overline{ab}$ спрямляемая дуга без витков вокруг $\overline{ab}$; $f(z)$ — аналитическая в G и непрерывная на G функция, удовлетворяющая условиям*

$$|f(z)|\leqslant A_{90}\,|z-k|;\quad |f(z)|\leqslant A_{91}\,|z-a|, \tag{6.8}$$

где константы A_{90}, A_{91} не зависят от точек k и a. Тогда функция

$$U(z) = \int\limits_{\breve{ka}} (z-\zeta)^{-\alpha-1} f(\zeta)\, d\zeta, \quad \alpha \in (0,1) \tag{6.9}$$

принадлежит на $\overline{ab}$ *классу* $A_{92}H^{1-\alpha}$, *где* A_{92} *не зависит от* $\overline{ab}$.

Доказательство. Значение функции $U(z)$ не зависит от того по какой дуге $\breve{ka}$, удовлетворяющей условиям леммы, ведется интегрирование. В области типа (D) $\breve{ka}$ можно выбрать так, чтобы она вместе с $\breve{ab}$ образовывала дугу, удовлетворяющую для любых двух точек t' и t'' условию

$$\int\limits_{\breve{t't''}} |dz| \leqslant A_{93}\, |t'-t''| \quad (\breve{t't''} \subset \breve{ka} \cup \overline{ab}), \tag{6.10}$$

где A_{93} зависит только от области G. Поэтому будем считать $\breve{ka}$ именно такой дугой. Пусть z', $z'' \in \overline{ab}$, $z' \in \overline{az''}$. Покажем, что

$$|U(z') - U(z'')| \leqslant A_{93}\, |z'-z''|^{1-\alpha} \tag{6.11}$$

для наиболее сложного случая, когда $|z'-a| < |z'-z''|$. Введем обозначения: $E_1 = \{\zeta \in \breve{ka};\ |\zeta - a| \leqslant |z'-a|\}$; $E_2 = \{\zeta \in \breve{ka};\ |z'-a| < |\zeta - a| \leqslant |z'-z''|\}$; $E_3 = \{\zeta \in \breve{ka};\ |\zeta - a| > |z'-z''|\}$. Тогда в силу (6.8) и (6.10) имеем

$$|U(z'')) - U(z')| = \left| \int\limits_{\breve{ka}} f(\zeta)\left[(z''-\zeta)^{-\alpha-1} - (z'-\zeta)^{-\alpha-1}\right] d\zeta \right| <$$

$$< A_{91}(\alpha+2) \int\limits_{\breve{ka}} |\zeta - a|\, |d\zeta| \int\limits_{z'}^{z''} |u-\zeta|^{-\alpha-2}\, |du| \leqslant$$

$$\leqslant A_{91}(\alpha+2)\left[\int\limits_{E_1} \frac{A_{94}|\zeta - a|}{|\zeta - z'|^{\alpha+1}} |d\zeta| + \int\limits_{E_2} \frac{A_{95}\,|d\zeta|}{|\zeta - a|^{\alpha}} + \int\limits_{z'}^{z''} |du| \int\limits_{E_3} \frac{A_{96}\,|d\zeta|}{|z'-\zeta|^{\alpha+1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant A_{97} \int\limits_{E_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z'|^{\alpha}} + A_{98}\,|z'-z''|^{1-\alpha} \leqslant A_{92}\,|z'-z''|^{1-\alpha}.$$

В остальных случаях при $|z'-a| > |z'-z''|$; $a=k$; $b=k$ рассуждения упрощаются. Лемма доказана.

Теорема 6. *Для того чтобы* $f(z) \in W^r \tilde{Z}$ *в области* G *типа* (D), *необходимо и достаточно, чтобы* $f(z) \in W^r Z$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\overline{G}$ не содержит начала координат, и рассмотреть только случай $r=1$.

Пусть $f(z) \in \tilde{Z}$. Как следует из определения класса $\tilde{Z}$ достаточно рассмотреть $f(z) \in W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$ при некотором $\alpha \in (0,1)$ и начальной точке $k \in C$. Докажем, что для всякого отрезка $\overline{z_1 z_2} \subset \overline{G}$ имеет место неравенство

$$|f(z_1) - 2f\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + f(z_2)| \leqslant A_{99} \left|\frac{z_1-z_2}{2}\right|. \tag{6.12}$$

Очевидно, что неравенство (6.12) нетривиально только для достаточно близких точек z_1 и z_2. Обозначим через k_1 и k_2 корни квадратного трехчлена

$$u^2 + (z_1 + z_2) u + (z_1 - z_2 + z_1 z_2). \tag{6.13}$$

В легко проверяемом тождестве

$$1 \equiv (z - z_1) \left| \frac{k_2 - z_2 - 1}{(k_1 - z_1)(k_2 - z_2)} \right| + (z - z_2) \left| \frac{k_1 - z_1 + 1}{(k_1 - z_1)(k_2 - z_2)} \right| \tag{6.14}$$

при условии, что 0 не принадлежит $\overline{G}$, выражения в квадратных скобках ограничены равномерно по всем $z_1, z_2 \in \overline{G}$. Используя (6.14), получим

$$f(z) = \frac{k_2 - z_2 - 1}{(k_1 - z_1)(k_2 - z_2)} (z - z_1) f(z) + \frac{k_1 - z_1 + 1}{(k_1 - z_1)(k_2 - z_2)} (z - z_2) f(z) =$$

$$= F_1(z) + F_2(z). \tag{6.15}$$

Функция $F_i(z)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $$|F_i(z)| \leqslant A_{100} |z - z_i|, \quad i = 1, 2, \tag{6.16}$$

где A_{100} не зависит от z_1 и z_2.

2) $F_i(z) \in W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$ $(i=1, 2)$ с начальной точкой k. При $z \in \overline{z_1 z_2}$, $i = 1, 2$

$$D_z^{(\alpha)}[F_i(z); z_i] = D_z^{(\alpha)}[F_i; k] - \frac{d}{dz} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_k^{z_i} (z - \zeta)^{-\alpha} F_i(\zeta) \, d\zeta =$$

$$= D_z^{(\alpha)}[F_i; k] + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_k^{z_i} (z - \zeta)^{-\alpha-1} F_i(\zeta) \, d\zeta, \tag{6.17}$$

причем интегрирование ведется по любой спрямляемой дуге $\breve{kz_i} \subset \overline{G}$, не делающей витков вокруг $\overline{z_1 z_2}$. В силу свойства 2) и леммы 8, а также тождества (6.17), заключаем: $D_z^{(\alpha)}[F_i; z_i] \in KH^{1-\alpha}$ на $\overline{z_1 z_2}$, причем K не зависит от z_1 и z_2. Одновременно из (6.16) вытекает, что $D_z^{(\alpha)}[F_i(z); z_i]$ обращается в 0 в точке z_i $(i = 1, 2)$. Следовательно, $F_i(z) \in W_0^{\alpha} H^{1-\alpha}$ с начальной точкой z_i при $z \in \overline{z_1 z_2}$.

Рассмотрим на $[0, \pi]$ вспомогательные функции

$$\Phi_i(x) = F_i\left(z_i + \frac{z_2 - z_1}{\pi} x\right), \quad i=1, 2.$$

Так как

$$\Phi_l^{(\alpha)}(x) = D_x^{(\alpha)}[\Phi_l(x); 0] = \frac{(z_2-z_1)^\alpha}{\pi^\alpha} D_z^{(\alpha)}[F_l(z); z_l], \tag{6.18}$$

то при $x', x'' \in [0,\pi]$

$$|\Phi_l^{(\alpha)}(x'') - \Phi_l^{(\alpha)}(x')| = \left| \frac{(z_1-z_2)^\alpha}{\pi^\alpha} \left[F_l^{(\alpha)}\left(z_l + \frac{z_2-z_1}{\pi} x''\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - F_l^{(\alpha)}\left(z_l + \frac{z_2-z_1}{\pi} x'\right)\right]\right| \leqslant \frac{|z_1-z_2|^\alpha}{\pi^\alpha} \cdot K \left|\frac{(z_2-z_1)(x''-x')}{\pi}\right|^{1-\alpha} =$$

$$= \frac{K}{\pi} |z_2-z_1| \, |x'-x''|^\alpha.$$

Таким образом, $\Phi_l^{(\alpha)}(x)$ принадлежит классу $H^{1-\alpha}$ на $[0,\pi]$ с константой $\frac{K}{\pi}|z_2-z_1|$, то есть $\Phi_l(x)$ принадлежит классу $W_0^\alpha H^{1-\alpha}$ с константой $\frac{K}{\pi}|z_2-z_1|$. Тогда по теореме 5 $\Phi_l(x) \in Z$ на $[0,\pi]$ с константой $\frac{K_1K}{\pi}|z_2-z_1|$, где K_1 не зависит от z_1 и z_2. Следовательно

$$\left|\Phi_l(x') - 2\Phi_l\left(\frac{x'+x''}{2}\right) + \Phi_l(x'')\right| \leqslant \frac{KK_1}{\pi}|z_2-z_1| \left|\frac{x'-x''}{2}\right|. \tag{6.19}$$

Полагая в (6.19) $x'=0$, $x''=\pi$, получим

$$\left|F_l(z_1) - 2F_l\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + F_l(z_2)\right| \leqslant K_1K \left|\frac{z_2-z_1}{2}\right|,$$

откуда, в силу (6.15), следует (6.12). Необходимость установлена.

Пусть теперь $f(z) \in Z$ в области G типа (D). Возьмем две произвольные фиксированные точки: $k \in C$ и $k' \in C$, $k \neq k'$. Учитывая, что $f(z) \in Z$ нетрудно представить ее в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad \text{где} \quad f_1(z) \in Z;\ f_2(z) \in Z;\ f_1(z) = O(|z-k|);$$

$f_2(z) = O(|z-k|)$, можно заранее предполагать, что $f(z) = O(|z-k|)$ при некотором $k \in C$. Рассмотрим две произвольные точки $z_1 \in \overline{G}$ и $z_2 \in \overline{G}$. Предположим сначала, что отрезок $\overline{z_1z_2}$ принадлежит $\overline{G}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(z)$ в одной из точек z_1 или z_2 обращается в нуль, например, $f(z_1) = 0$, причем

$$|f(z)| \leqslant A_{101}|z-z_1|. \tag{6.20}$$

(В противном случае достаточно воспользоваться тождеством (6.14) для представления $f(z)$ в виде суммы двух требуемых функций). Если соединить точки k и z_1 жордановой спрямляемой дугой $\overset{\frown}{kz_1}$, не делающей витков вокруг $\overline{z_1z_2}$, то

$$D_z^{(\alpha)}[f(z);\ k] = -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\smile kz_1}(z-\zeta)^{-\alpha-1}f(\zeta)\,d\zeta +$$

$$+D_z^{(\alpha)}[f(z);\ z_1], \tag{6.21}$$

причем интеграл в правой части (6.21) в силу леммы 8 и (6.20) принадлежит на $\overline{z_1 z_2}$ классу $W_0^\alpha H^{1-\alpha}$ с некоторой постоянной, не зависящей от $\overline{z_1 z_2}$. Убедимся, что $D_z^{(\alpha)}[f(z);\ z_1]$ принадлежит $H^{1-\alpha}$ на $\overline{z_1 z_2}$. Действительно, пусть $z', z'' \in \overline{z_1 z_2}$. Поскольку $f(z) \in Z$, то

$$\left| f(z') - 2f\left(\frac{z'+z''}{2}\right) + f(z'')\right| \leqslant K\frac{|z'-z''|}{2}, \tag{6.22}$$

следовательно вспомогательная функция

$$\Phi_1(x) = f\left| z_1 + \frac{(z_2-z_1)}{\pi}x \right|$$

принадлежит на $[0,\pi]$ классу Z с константой $\frac{K|z_2-z_1|}{\pi}$. По теореме 5 $\Phi_1(x)$ принадлежит на $[0,\pi]$ классу $\tilde{Z}$ и, даже более того, классу $W_0^\alpha H^{1-\alpha}$ с константой $\frac{KK_1|z_2-z_1|}{\pi}$

$$|\Phi_1^{(\alpha)}(x') - \Phi_1^{(\alpha)}(x'')| \leqslant \frac{KK_1|z_2-z_1|}{\pi}|x'-x''|^{1-\alpha}.$$

Отсюда в силу (6.18) для $D_z^{(\alpha)}(f;\ z_1)$ имеем

$$|[D_z^{(\alpha)}(f;\ z_1)]_{z'}^{z''}| = \left|\frac{\pi^\alpha}{(z_2-z_1)^\alpha}[\Phi_1^{(\alpha)}(x') - \Phi_1^{(\alpha)}(x'')]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{KK_1|z_2-z_1|^{1-\alpha}}{\pi^{1-\alpha}}|x'-x''|^{1-\alpha}.$$

Полагая $x'=0$; $x''=\pi$, получим

$$|[D_z^{(\alpha)}(f;\ z_1)]_{z_1}^{z_2}| \leqslant KK_1|z_2-z_1|^{1-\alpha}.$$

Эта оценка вместе с тождеством (6.21) доказывает, что

$$|[D_z^{(\alpha)}[f(z);\ k]]_{z_1}^{z_2}| \leqslant A_{102}|z_1-z_2|^{1-\alpha} \tag{6.23}$$

для всех таких точек z_1, z_2, которые принадлежат области $\overline{G}$ вместе с отрезком, их соединяющим. Осталось заметить, что общий случай расположения точек z_1 и z_2 сводится к рассмотренному, ибо по лемме 6 любые две точки z_1 и z_2 области G типа (D) можно соединить в $\overline{G}$ ломаной, длина которой не превосходит $A_{58}|z_1-z_2|$, а число звеньев не более некоторого $N = N(G)$. Таким образом, $f(z) \in W_0^\alpha H^{1-\alpha} \subset \tilde{Z}$ в области $\overline{G}$.

В качестве следствия доказанной теоремы приведем конструктивную характеристику функций, квазигладких в смысле геометрического определения.

Теорема 7. *Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая в области G типа (D) принадлежала классу А. Зигмунда $W^r Z$ ($r>0$, целое), необходимо и достаточно, чтобы при всяком натуральном n нашелся многочлен $P_n(z)$ порядка не выше n такой, что при всех z на границе C области G выполнялось неравенство*

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant M[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{r+1},$$

где M не зависит от z и n.

Автор выражает глубокую признательность профессору В. К. Дзядыку за ценные советы и полезное обсуждение вопроса.

Донецкий вычислительный центр
АН УССР

Поступило 29.I.1969

Վ. Ի. ԲԵԼԻ. Կոմպլեքս փոփոխականի քվազիողորկ ֆունկցիաների մոտավորության մասին (*ամփոփում*)

Կոմպլեքս տիրույթում կոտորակային կարգի ինտեգրոդիֆերենցիալ օպերատորների օգնությամբ ներմուծվում է քվազիողորկ ֆունկցիաների անալիտիկ սահմանում։ Նշանակենք $W^r Z$-ով ($r>0$ ամբողջ է) r կարգի քվազիողորկ ածանցյալներ ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների դասերը։

Լրիվ լուծված են $W^r Z$ դասերի ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկման ուղիղ և հակադարձ խնդիրները կտոր առ կտոր ողորկ եզր և π-ն չգերազանցող անկյուններ ունեցող տիրույթի համար։ Ապացուցված է նաև անալիտիկ սահմանման լրիվ համարժեքությունը դասական սահմանմանը $[-\pi, \pi]$-ի համար և երկրաչափական սահմանմանը՝ կտոր առ կտոր ողորկ եզրով տիրույթների համար։ Որպես այս արդյունքների հետևանք ստացված է ըստ երկրաչափական և դասական սահմանումների քվազիողորկ ֆունկցիաների դասերի կառուցվածքային բնութագիրը։

V. I. BELY. *On the approximation of the quasi-smooth functions of complex variable* (summary)

An analitic definition of quasi-smooth functions is introduced by virtue of the fractional integro-differentiation in the complex domain. Let $W^r Z$ ($r>0$, integer) are the classes of analitic functions, which have quasi-smooth derivative of the r-th order. In this article the direct and indirect problems of the polinomial approximation are solved for functions from $W^r Z$. For the region with piece weis smooth boundary and the angles $<\pi$. Complete equivalence of the analitic definition to the classical one for $[-\pi, \pi]$ and to the geometrical one for the regions with the piece weis smooth boundary is also proved. As a corollary constructive characteristic of classes of functions, which are quasi-smooth in the sense of the geometrical and classical definitions is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык*. О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 1959, 697—736.
2. *В. К. Дзядык*. К вопросу о приближении непрерывных функций в областях с углами и о проблеме С. М. Никольского, I, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 6, 1962, 797—823.
3. *В. К. Дзядык*. К вопросу о приближении непрерывных функций, II, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 5, 1963, 1135—1164.
4. *W. E. Sewell*. Generalized derivatives and approximation by polinomials, Trans. Amer. Math. Soc., 41, № 1, 1937, 84—121.
5. *В. И. Белый*. Вопросы приближения функций некоторых классов в комплексной области, I, УМЖ, XVII, № 1, 1965, 3—17.
6. *С. А. Теляковский*. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами. Матем. сб., 70, № 2, 1966, 252—266.
7. *A. Zygmund*. Smooth function, Duce math. journ., 12, № 1, 1945, 47—76.
8. *А. И. Швай*. Улучшение порядка приближения функций, заданных в областях с углами, в окрестностях угловых точек, УМЖ, 19, № 4, 1967, 80—86.
9. *В. К. Дзядык, Д. М. Галан*. О приближении аналитических функций в областях с гладкой границей, УМЖ, XVII, № 1, 1965, 26—38.
10. *В. К. Дзядык*. Дальнейшее усиление теоремы Джексона о приближении обыкновенными многочленами непрерывных функций, ДАН СССР, 121, 1958, 403—406.
11. *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, т. II, М, 1965.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В нашей статье „О расслоении классов однолистных функций" (т. IV, № 4, 1969) при определении класса S_0^* (стр. 299) упущено условие $f(0)=0$, $f'(0)=1$, которое неявно использовано при доказательстве теоремы 2.

М. ДЖРБАШЯН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS