

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐՐԱՇԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԶԱՆԴՐՅԱՆ

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ՔԱԼԱԼՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Ր. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն զրամբեռնագրված, երկու օրինակով, Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումների հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկության, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում: Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզեր շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով:

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, զրբերի համար նշվում է՝ հեղինակը, զրբի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

7. Հոդվածի մեթոման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շարադրվել մեթոման պատճառների պարզաբանումով:

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН

А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссии по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DՋՐԲԱՏԻԱՆ

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

М. М. ДЖРБАШЯН

О РАССЛОЕНИИ КЛАССОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье предлагается метод расслоения известных классов S^* и S однолистных функций. С каждой неубывающей и ограниченной на $[0,1]$ функцией $\sigma(t)$, удовлетворяющей некоторым условиям нормировки, ставятся в соответствие классы однолистных функций $S_\sigma \subset S^*$ и $S_\sigma \subset S$ и устанавливается ряд теорем о структурном представлении, о покрытии и росте коэффициентов и, наконец, устанавливаются некоторые точные оценки для функций этих классов.

§ 1. Классы звездообразных функций

1. (а) Всюду в дальнейшем будем полагать, что $\sigma(t)$ — произвольная неубывающая ограниченная функция, подчиненная условиям:

$$1) \quad \sigma(0) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{\sigma(t-0) + \sigma(t+0)}{2} \quad (0 < t < 1),$$

$$2) \quad \int_0^1 d\sigma(t) = \sigma(1) - \sigma(0) = \sigma(1) = 1, \quad (1.1)$$

$$3) \quad \int_r^1 d\sigma(t) > 0 \quad \text{для любого } r \quad (0 < r < 1).$$

Введем в рассмотрение моменты дифференциального веса $d\sigma(t)$

$$\mu_k = \int_0^1 t^k d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.2)$$

заметив, что

$$\mu_0 = 1, \quad 0 < \mu_k \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

Заметим, что для любой функции $\sigma(t)$ имеет место неравенство

$$\sigma(t) \geq \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases},$$

поскольку $\sigma(t) \geq \sigma_0(0) = 0 = \sigma_0(t)$ при $0 \leq t < 1$ и $\sigma(1) = 1 = \sigma_0(1)$. Неравенства (1.3) точные, переходящие в равенства лишь в том случае, когда функция $\sigma(t)$ имеет единственную точку роста в точке $t=1$, т. е. когда

$$\sigma(t) \equiv \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 1, & t = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Это следует из единственности решения проблемы моментов Хаусдорфа [1] для правильных интегральных весов.

Убедимся теперь, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\mu_k} = 1. \quad (1.5)$$

В самом деле, во-первых, из (1.3) имеем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\mu_k} \leq 1. \quad (1.5')$$

Далее из свойства 3) функции $\sigma(t)$ следует неравенство

$$\mu_k > \int_r^1 t^k d\sigma(t) \geq r^k \int_r^1 d\sigma(t) > 0 \quad (0 < r < 1)$$

и поэтому неравенство

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\mu_k} > 1. \quad (1.5'')$$

Из (1.5') и (1.5'') приходим к соотношению (1.5). Ввиду (1.5) степенной ряд

$$S_\sigma(z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k \quad (1.6)$$

имеет единичный радиус сходимости и определяет функцию $S_\sigma(z)$, аналитическую в круге $|z| < 1$.

Лемма 1. 1°. Функция $S_\sigma(z)$ допускает интегральное представление

$$S_\sigma(z) = \int_0^1 \frac{1+zt}{1-zt} d\sigma(t) \quad (|z| < 1). \quad (1.7)$$

2°. Справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} S_\sigma(z) > 0 \quad (|z| < 1). \quad (1.8)$$

Доказательство. 1°. Пользуясь определением (1.2) чисел μ_k и свойством 2) функции $\sigma(t)$, разложение (1.6) функции $S_\sigma(z)$ запишем в виде

$$S_\sigma(z) = \int_0^1 d\sigma(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 t^k d\sigma(t) \right\} z^k.$$

Поменяв здесь порядок суммирования и интегрирования, мы получим представление (1.7)

$$S_z(z) = \int_0^1 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (zt)^k \right\} d\sigma(t) = \int_0^1 \frac{1+zt}{1-zt} d\sigma(t).$$

2°. Из (1.7) имеем

$$\operatorname{Re} S_z(re^{i\varphi}) = \int_0^1 \frac{1-r^2t^2}{1-2rt\cos\varphi+r^2t^2} d\sigma(t). \quad (1.9)$$

Но поскольку очевидно

$$\frac{1-r^2t^2}{1-2rt\cos\varphi+r^2t^2} > 0 \quad (0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1),$$

то из (1.9) следует неравенство (1.8).

(6) Через C_σ обозначим множество аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(zt) d\sigma(t), \quad (1.10)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция, аналитическая в круге $|z| < 1$, для которой

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \geq 0 \quad (|z| < 1). \quad (1.11)$$

Таким образом, очевидно, что если $f(z) \in C_\sigma$, то имеем также

$$\operatorname{Re} f(z) \geq 0 \quad (|z| < 1).$$

Справедлива следующая общая теорема, содержащая в специальном случае (1.4), когда

$$S_\sigma(z) \equiv S(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad (1.12)$$

известную теорему Герглотца.

Теорема 1. Класс C_σ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\sigma(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \quad (|z| < 1), \quad (1.13)$$

где $\psi(\theta)$ — произвольная неубывающая ограниченная функция на $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Покажем, во-первых, что любая функция вида (1.13) входит в класс C_σ . С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-i\theta} z}{1-e^{-i\theta} z} d\psi(\theta) \quad (|z| < 1),$$

аналитическую в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющую условию (1.11), поскольку

$$\operatorname{Re} \frac{1 + e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} > 0 \quad (|z| < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

и $d\psi(\theta) \geq i0$.

Подставляя теперь значение функции $S_\sigma(z)$ из (1.7) в (1.12), мы получим

$$\begin{aligned} f(z) &= i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{1 + ze^{-i\theta} t}{1 - ze^{-i\theta} t} d\sigma(t) \right\} d\psi(\theta) = \\ &= i \operatorname{Im} f(0) + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta} t}{1 - ze^{-i\theta} t} d\psi(\theta) \right\} d\sigma(t) = \int_0^1 \varphi(zt) d\sigma(t). \end{aligned}$$

Отсюда по определению следует, что $f(z) \in C_0^*$, так как функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (1.11).

Обратно, полагая теперь, что функция $f(z)$ из класса C_0^* , покажем, что она допускает представление вида (1.13). По условию функция $f(z)$ допускает представление вида (1.10) с помощью некоторой функции $\varphi(z)$, подчиненной условию (1.11).

Но тогда согласно теореме Герглотца [2] функция $\varphi(z)$ допускает представление вида

$$\varphi(z) = i \operatorname{Im} \varphi(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta} z}{1 - e^{-i\theta} z} d\psi(\theta) \quad (|z| < 1), \quad (1.14)$$

где $\psi(\theta)$ — некоторая неубывающая и ограниченная на $[0, 2\pi]$ функция.

Подставляя значение функции $\varphi(z)$ из (1.14) в правую часть формулы (1.10), мы получим

$$\begin{aligned} f(z) &= i \operatorname{Im} \varphi(0) + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta} zt}{1 - e^{-i\theta} zt} d\psi(\theta) \right\} d\sigma(t) = \\ &= i \operatorname{Im} \varphi(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{1 + e^{-i\theta} zt}{1 - e^{-i\theta} zt} d\sigma(t) \right\} d\psi(\theta). \end{aligned}$$

Отсюда в силу формулы (1.7) следует требуемое представление (1.13), так как очевидно

$$f(0) = \varphi(0) \int_0^1 d\sigma(t) = \varphi(0).$$

1.2. (а) Напомним сначала общеизвестные определения классов S и S^* функций, однолистных и звездообразных в круге $|z| < 1$ [3].

Класс S — это множество аналитических в круге $|z| < 1$ функций, подчиненных условиям

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(z_1) \neq f(z_2) \quad \text{при} \quad z_1 \neq z_2, \\ 2) \quad & f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Класс S^* — это подмножество функций $f(z)$ из класса S , подчиненных дополнительному условию

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1). \quad (1.16)$$

(6) Как и в пункте 1.1 будем полагать, что $\sigma(t)$ — неубывающая и ограниченная на $[0, 1]$ функция, подчиненная условиям (1.1).

Обозначим через S_σ^* множество аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых $zf'(z)/f(z) \in C_\sigma$.

Иначе говоря, $f(z) \in S_\sigma^*$, если имеет место интегральная формула вида

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^1 \varphi(zt) d\sigma(t), \quad (1.17)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, для которой $\operatorname{Re} \varphi(z) \geq 0$ ($|z| < 1$).

Из самого определения ясно, что имеет место включение

$$S_\sigma^* \subset S_{\sigma_1}, \quad (1.18)$$

причем в специальном случае, когда функция $\sigma(t)$ имеет вид (1.4), очевидно, что классы S_σ^* и S^* просто тождественны.

Построим теперь важный пример функции, входящей в класс S_σ^* .

С этой целью, заметив сначала, что в силу (1.5)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\frac{\mu_k}{k}} = 1,$$

введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_\sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{k} z^k, \quad (1.19)$$

аналитическую в круге $|z| < 1$.

Пользуясь представлением (1.2) последовательности чисел $\{\mu_k\}_1^\infty$, легко заключаем, что функция $\Phi_\sigma(z)$ допускает также интегральное представление

$$\Phi_\sigma(z) = - \int_0^1 \log(1-zt) d\sigma(t) \quad (|z| < 1). \quad (1.20)$$

В специальном случае, когда функция $\sigma(t)$ имеет вид (1.4), очевидно будем иметь

$$\Phi_{\sigma}(z) = -\log(1-z). \quad (1.20')$$

С помощью функции $\Phi_{\sigma}(z)$ определим, наконец, функцию

$$K_{\sigma}(z) = z \exp \{2\Phi_{\sigma}(z)\} = z \exp \left\{ -2 \int_0^1 \log(1-zt) d\sigma(t) \right\}, \quad (1.21)$$

аналитическую в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(0) &= 0, \quad K'_{\sigma}(0) = 1, \\ K_{\sigma}(z) &\neq 0 \quad (0 < |z| < 1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Заметим еще, что в специальном случае, когда $\sigma(t) \equiv \sigma_0(t)$,

$$K_{\sigma_0}(z) = \frac{z}{(1-z)^3}.$$

Лемма 2. Для любого $\theta_0 \in [0, 2\pi]$

$$e^{i\theta_0} K_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z) \in S_{\sigma}^*. \quad (1.23)$$

Доказательство. Поскольку

$$f_{\sigma}(z; \theta_0) \equiv e^{i\theta_0} K_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z) = z \exp \{2\Phi_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z)\},$$

то

$$\frac{zf'_{\sigma}(z; \theta_0)}{f_{\sigma}(z; \theta_0)} = 1 + 2ze^{-i\theta_0} \Phi'_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(e^{-i\theta_0} z) z^k = S_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z), \quad (1.24)$$

в силу определений (1.19) и (1.6) функций $\Phi_{\sigma}(z)$ и $S_{\sigma}(z)$.

Из (1.24) согласно лемме 1 следует представление

$$\frac{zf'_{\sigma}(z; \theta_0)}{f_{\sigma}(z; \theta_0)} = \int_0^1 \frac{1 + ze^{-i\theta_0} t}{1 - ze^{-i\theta_0} t} d\sigma(t) = S_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z)$$

и, тем самым, наше утверждение (1.23), так как

$$\operatorname{Re} S_{\sigma}(e^{-i\theta_0} z) > 0 \quad (|z| < 1).$$

(в) Структурное представление всего класса S_{σ}^* дается следующей теоремой.

Теорема 2. Класс S_{σ}^* совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = z \exp \left\{ 2 \int_0^{2\pi} \Phi_{\sigma}(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \right\} \quad (|z| < 1), \quad (1.25)$$

где $\mu(\theta)$ — произвольная неубывающая и ограниченная функция на $[0, 2\pi]$ с полным изменением

$$\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1. \quad (1.26)$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса S_* . Это означает, что $zf'(z)/f(z) \in C_*$. Но так как $f(0)=0$ и $f'(0)=1$, то очевидно

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}_{z=0} = \operatorname{Im} \{1\} = 0.$$

Поэтому согласно теореме 1 мы должны иметь представление вида

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_*(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \quad (|z| < 1), \quad (1.27)$$

где $\psi(\theta)$ — некоторая неубывающая и ограниченная на $[0, 2\pi]$ функция.

Кроме того, поскольку $S_*(0)=1$ и $\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\}_{z=0} = 1$, то мы должны иметь также

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi(\theta) = 1.$$

Поэтому наше представление (1.27) можно записать также в виде

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} S_*(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \quad (|z| < 1), \quad (1.27')$$

где $\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \psi(\theta)$ — неубывающая и ограниченная на $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условию (1.26) теоремы. Ввиду этого из (1.27') следует

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 = \int_0^{2\pi} \{S_*(e^{-i\theta} z) - 1\} d\mu(\theta). \quad (1.27'')$$

Заметим далее, что в силу (1.6) и (1.15)

$$\begin{aligned} \int_0^z \{S_*(z) - 1\} \frac{dz}{z} &= 2 \int_0^z \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(e^{-i\theta} z)^k \right\} \frac{dz}{z} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{k} (e^{-i\theta} z)^k = 2\Phi_*(e^{-i\theta} z) \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

Поэтому, разделив (1.27'') на z и интегрируя по z вдоль любого пути, лежащего в круге $|z| < 1$ и соединяющего точки 0 и z ($|z| < 1$), получим, что

$$\log \frac{f(z)}{z} \Big|_0^z = 2 \int_0^{2\pi} \Phi_*(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \quad (|z| < 1).$$

Отсюда и следует, что наша функция $f(z) \in S_*$ допускает требуемое теоремой представление (1.25), если учесть, что

$$\left\{ \frac{f(z)}{z} \right\}_{z=0} = f'(0) = 1.$$

Докажем теперь обратное, что любая функция $f(z)$ вида (1.25) входит в класс S_* .

В самом деле, из (1.25) следует, что

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \exp \left\{ 2 \int_0^{2\pi} \Phi_\sigma(0) d\mu(\theta) \right\} = e^2 = 1.$$

Далее отсюда же следует, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + 2z \int_0^{2\pi} \Phi'_\sigma(e^{-i\theta} z) e^{-i\theta} d\mu(\theta)$$

и так как согласно (1.24)

$$1 + 2ze^{-i\theta} \Phi'_\sigma(e^{-i\theta} z) = S_\sigma(e^{-i\theta} z),$$

то в силу (1.26)

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} S_\sigma(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta). \quad (1.28)$$

Наконец, подставляя в (1.28) значение (1.7) функции $S_\sigma(z)$, получим

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{1+e^{-i\theta} zt}{1-e^{-i\theta} zt} d\sigma(t) \right\} d\mu(\theta) = \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-i\theta} zt}{1-e^{-i\theta} zt} d\mu(\theta) \right\} d\sigma(t),$$

причем очевидно, что функция

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-i\theta} z}{1-e^{-i\theta} z} d\mu(\theta)$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \varphi(z) > 0 \quad (|z| < 1).$$

Таким образом, имеем представление

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^1 \varphi(zt) d\sigma(t),$$

а это означает, что $f(z) \in S_*$.

Доказанная теорема в специальном случае, когда функция $\sigma(t) = \sigma_0(t)$, содержит в себе известную теорему (см. [3], стр. 507) о

том, что класс S^* совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = z \exp \left\{ -2 \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \right\}, \quad (1.25')$$

где

$$d\mu(\theta) \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1.$$

1.3. В этом пункте мы приведем некоторые приложения теоремы 2 об оценках роста функций класса S^* и роста коэффициентов их разложений в ряд Маклорена.

(а) Теорема 3. Если $f(z) \in S^*$, то справедливы точные оценки

$$|z| \exp \{2\Phi_0(-|z|)\} \leq |f(z)| \leq |z| \exp \{2\Phi_0(|z|)\} \quad (|z| < 1). \quad (1.29)$$

Доказательство. Заметим, что при $|z| < 1$ и $0 \leq t \leq 1$

$$\log \frac{1}{1 + |z|t} \leq \log \frac{1}{|1 - zt|} \leq \log \frac{1}{1 - |z|t}. \quad (1.30)$$

Поскольку согласно формуле (1.20)

$$\operatorname{Re} \Phi_0(e^{-i\theta} z) = \int_0^1 \log \frac{1}{|1 - e^{-i\theta} zt|} d\sigma(t),$$

причем $d\sigma(t) \geq 0$, то в силу (1.30) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \Phi_0(-|z|) &= \int_0^1 \log \frac{1}{1 + |z|t} d\sigma(t) \leq \operatorname{Re} \Phi_0(e^{-i\theta} z) \leq \\ &\leq \int_0^1 \log \frac{1}{1 - |z|t} d\sigma(t) = \Phi_0(|z|) \quad (|z| < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Отсюда и из представления (1.25) теоремы 2 следуют требуемые неравенства (1.29) в силу условия (1.26).

Наконец отметим, что наши неравенства (1.29) точные, так как они переходят в равенства для функции вида $e^{i\theta_0} K_\sigma(e^{-i\theta_0} z)$ при $z = -|z|e^{i\theta_0}$ или при $z = |z|e^{i\theta_0}$.

Отметим также, что в специальном случае, когда $\sigma(t) \equiv \sigma_0(t)$, неравенства (1.29) принимают вид

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \quad (|z| < 1)$$

и справедливы не только для функций класса S^* , но и для всего класса S .

Теорема 4. Если $f(z) \in S_\sigma$, то круг $|w| < r_\sigma$ (но не всегда больший), где

$$r_\sigma = \exp \{2\Phi_\sigma(-1)\} = \exp \left\{ -2 \int_0^1 \log(1+t) dt \right\} \geq \frac{1}{4}, \quad (1.31)$$

целиком покрывается образом круга $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$.

В случае, если $f(z)$ есть функция вида $f_0(z) = e^{i\theta_0} K_\sigma(e^{-i\theta_0} z)$, на окружности $|w| = r_\sigma$ имеются точки, не принадлежащие образу круга $|z| < 1$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(G)$ есть граница образа G круга $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$.

Предположим, что значение c не принимается функцией $f(z)$, т. е. $c \notin G$. Обозначим через γ_c отрезок $0 \leq |w| \leq |c|$ луча $\arg w = \arg c$. Поскольку $f(0) = 0$ и $f(z) \neq c$, то, положив

$$\gamma_c(G) = \gamma_c \cap G \text{ и } R = \sup_{z \in \gamma_c(G)} \{|f(z)|\},$$

можно утверждать, что

$$\zeta = R e^{i \arg c} \in \Gamma(G).$$

Тогда очевидно будем иметь

$$|c| > |\zeta|. \quad (1.32)$$

С другой стороны, так как $\zeta \in \Gamma(G)$, то существует последовательность точек $\{z_n\}_1^\infty$ ($0 < |z_n| < 1$) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = \zeta. \quad (1.32')$$

Теперь отметим, что из неравенства слева в (1.32) мы имеем

$$|f(z_n)| \geq |z_n| \exp \{2\Phi_\sigma(-|z_n|)\} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow +\infty$, в силу (1.32) и (1.32') получим

$$|c| > |\zeta| \geq \exp \{2\Phi_\sigma(-1)\}.$$

Это значит, что любая точка c , не принадлежащая образу G круга $|z| < 1$, при отображении $w = f(z)$ лежит в области $|w| > r_\sigma$. Иначе говоря, круг $|w| < r_\sigma$ всегда покрывается областью G .

Теорема доказана, если заметим, что по (2.21)

$$|f_0(-e^{i\theta_0})| = |K_\sigma(-1)| = \exp \{2\Phi_\sigma(-1)\} = r_\sigma.$$

(6) В начале статьи было отмечено, что для любой функции $\tau(t)$, подчиненной условиям (1.1), последовательность ее моментов

$$\mu_k \equiv \mu_k(\sigma) = \int_0^1 t^k d\sigma(t) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 < \mu_k(\sigma) \leq 1 \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

причем все они переходят в равенства лишь в том случае, когда

$$\sigma(t) \equiv \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Таким образом, для любой функции $\sigma(t)$

$$\mu_k(\sigma) \leq \mu_k(\sigma_0) = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.33)$$

Но имеет место более общее утверждение.

Лемма 3. Пусть функции $\sigma_j(t)$ ($j=1, 2$) кроме (1.1) подчинены также условию

$$\sigma_1(t) \leq \sigma_2(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (1.34)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\mu_k(\sigma_2) \leq \mu_k(\sigma_1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.35)$$

переходящие в равенства лишь в том случае, когда

$$\sigma_2(t) \equiv \sigma_1(t).$$

Доказательство. В самом деле, замечая, что при $k \geq 1$

$$\mu_k(\sigma) = 1 - k \int_0^1 \sigma(t)^{k-1} dt,$$

очевидно будем иметь

$$\mu_k(\sigma_1) - \mu_k(\sigma_2) = k \int_0^1 [\sigma_2(t) - \sigma_1(t)] t^{k-1} dt \geq 0.$$

При этом равенство

$$\int_0^1 [\sigma_2(t) - \sigma_1(t)] t^{k-1} dt = 0$$

хотя бы при одном $k \geq 1$ очевидно возможно лишь в том случае, когда $\sigma_2(t) \equiv \sigma_1(t)$.

(в) Аналитическая в круге $|z| < 1$ функция

$$K_\sigma(z) = z \exp \{2\Phi_\sigma(z)\}$$

имеет разложение вида

$$K_\sigma(z) = z + \gamma_2(\sigma) z^2 + \dots + \gamma_p(\sigma) z^p + \dots. \quad (1.36)$$

Поскольку

$$\Phi_\sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\sigma)}{k} z^k,$$

то разложение (1.36) может быть получено из двойного ряда

$$K_\sigma(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\sigma)}{K} z^{k1} \right\}^n \quad (1.36')$$

путем перегруппировки его членов, содержащих множители $\{z^p\}$ ($p=1, 2, \dots$).

Поскольку все коэффициенты разложения $\Phi_\sigma(z)$ положительны, то очевидно, что все коэффициенты $\{\gamma_p(\sigma)\}_1^\infty$ разложения функции $K_\sigma(z) \in S_\sigma^+$ также положительны $\gamma_p(\sigma) > 0$ ($p=2, 3, \dots$).

Теорема 5. Если функции $\sigma_j(t)$ ($j=1, 2$) таковы, что

$$\sigma_1(t) \leq \sigma_2(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1.37)$$

то

$$\gamma_p(\sigma_2) \leq \gamma_p(\sigma_1) \quad (p=2, 3, \dots). \quad (1.38)$$

При этом неравенства (1.38) могут переходить в равенства лишь в том случае, когда

$$\sigma_2(t) \equiv \sigma_1(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Доказательство. Для вычисления коэффициента $\gamma_p(\sigma)$ ($p \geq 2$) разложения (1.36) нам следует подсчитать коэффициент при z^p в двойном ряду (1.36'). Но легко видеть, что для этого достаточно лишь подсчитать коэффициент при z^{p-1} в двойной сумме

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{2^n z^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mu_k(\sigma)}{k} z^{k-1} \right\}^n. \quad (1.39)$$

Отсюда следует, что коэффициент $\gamma_p(\sigma)$ является некоторой линейной формой с неотрицательными коэффициентами от переменных $\{\mu_1^{j_1}(\sigma) \mu_2^{j_2}(\sigma) \dots \mu_{p-1}^{j_{p-1}}(\sigma)\}$ вида

$$\begin{aligned} \gamma_p(\sigma) &= \frac{2}{p-1} \mu_{p-1}(\sigma) + \\ &+ \sum_{0 < j_1 < p-2} \dots \sum_{0 < j_{p-2} < p-2} C(j_1, \dots, j_{p-2}) \mu_1^{j_1}(\sigma) \dots \mu_{p-2}^{j_{p-2}}(\sigma). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Поскольку согласно лемме 3 $\mu_k(\sigma_2) \leq \mu_k(\sigma_1)$ ($k \geq 1$), то сравнение соответствующих линейных форм для $\gamma_p(\sigma_1)$ и $\gamma_p(\sigma_2)$ приводит нас к неравенствам (1.38) теоремы, так как эти формы имеют одинаковые неотрицательные коэффициенты.

По той же причине, если

$$\gamma_p(\sigma_1) = \gamma_p(\sigma_2) \quad (p=2, 3, \dots), \quad (1.41)$$

то последовательным сравнением соответствующих линейных форм (1.40) мы приходим к заключению, что равенства (1.41) эквивалентны равенствам

$$\mu_k(\sigma_1) = \mu_k(\sigma_2) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Наконец, согласно лемме 3 последние равенства эквивалентны тождеству (1.38).

Из теоремы 5 непосредственно следует

Теорема 6. Справедливы неравенства

$$0 < \gamma_p(\sigma) \leq p \quad (p=2, 3, \dots), \quad (1.42)$$

которые могут переходить в равенства лишь для функции вида $\sigma_0(t)$, или, что то же самое, для функции

$$K_{\sigma_0}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

В самом деле, сначала заметим, что $\mu_k(\sigma_0) = 1$ ($k=1, 2, \dots$) и что согласно лемме 3 $\mu_k(\sigma) = 1$ ($k=1, 2, \dots$) лишь в том случае, когда $\sigma(t) \equiv \sigma_0(t)$. Но в этом случае, согласно (1.20'),

$$\Phi_{\sigma_0}(z) = -\log(1-z)$$

и таким образом

$$K_{\sigma_0}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Но поскольку функция $K_{\sigma_0}(z)$ имеет разложение вида

$$K_{\sigma_0}(z) = z + 2z^2 + \dots + pz^p + \dots,$$

то $\gamma_p(\sigma_0) = p$ ($p \geq 2$), и утверждения теоремы следуют из теоремы 5, если заметить, что для любой функции $\sigma(t)$

$$\sigma(t) \geq \sigma_0(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

(г) Докажем, наконец, теорему об оценке коэффициентов разложения функций для всего класса S_σ^* .

Теорема 7. Для функций класса S_σ^*

$$f(z) = z + a_1 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots \quad (1.43)$$

имеют место точные оценки

$$|a_p| \leq \gamma_p(\sigma) \quad (p=2, 3, \dots). \quad (1.44)$$

Доказательство. Согласно теореме 2 функция $f(z)$ допускает представление вида

$$f(z) = z \exp \left\{ 2 \int_0^{2\pi} \Phi_\sigma(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \right\} \quad (|z| < 1), \quad (1.45)$$

где

$$d\mu(\theta) \geq 0, \quad \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1.$$

Но принимая во внимание определение (1.19) функции $\Phi_\sigma(z)$, мы получим

$$\int_0^{2\pi} \Phi_\sigma(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k c_k}{k} z^k,$$

где

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\mu(\theta) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Отсюда и из (1.45) следует, что функция $f(z)$ допускает следующее разложение в двойной ряд:

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k c_k}{k} z^{k-1} \right\}^n, \quad (1.46)$$

абсолютно сходящееся внутри единичного круга.

Повторю путем перегруппировки членов двойного ряда (1.46) по возрастающим степеням z мы, очевидно, получим разложение (1.43).

Рассуждением, аналогичным тому, что было приведено в ходе доказательства теоремы 5, мы приходим к заключению, что коэффициент a_p допускает представление вида

$$a_p = \frac{2}{p-1} \mu_{p-1} c_{p-1} + \\ + \sum_{0 < j_1 < p-2} \cdots \sum_{0 < j_{p-2} < p-2} c(j_1, \dots, j_{p-2}) (\mu_1 c_1)^{j_1} \cdots (\mu_{p-2} c_{p-2})^{j_{p-2}}, \quad (1.47)$$

где коэффициенты $c(j_1, \dots, j_{p-2}) \geq 0$ те же, что и в формуле (1.40), представляющей $\gamma_p(\sigma)$.

Но так как

$$|c_k| \leq \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1 \quad (k=1, 2, \dots),$$

то из (1.40) и (1.47) непосредственно следует неравенство (1.44) при любом $p \geq 2$.

Наконец что неравенства (1.44) точные показывает пример функции $K_\sigma(z) \in S_\sigma^*$, либо любой функции вида

$$e^{i\theta_0} K_\sigma(e^{-i\theta_0} z) = z + \gamma_2(\sigma) e^{-i\theta_0} z^2 + \cdots + \gamma_p(\sigma) e^{-i(p-1)\theta_0} z^p + \cdots$$

(д) В заключение приведем явные формулы для первых трех коэффициентов $\gamma_2(\sigma)$, $\gamma_3(\sigma)$ и $\gamma_4(\sigma)$ разложения (1.36) функции $K_\sigma(z)$, которые непосредственно следуют из того, что $\gamma_p(z)$ есть коэффициент при z^{p-1} в сумме (1.39):

$$\gamma_2(\sigma) = 2\mu_1(\sigma), \\ \gamma_3(\sigma) = \mu_2(\sigma) + 2\mu_1^2(\sigma), \\ \gamma_4(\sigma) = \frac{2}{3} \mu_3(\sigma) + 2\mu_1(\sigma) \mu_2(\sigma) + \frac{4}{3} \mu_1^3(\sigma). \quad (1.48)$$

§ 2. Классы однолистных функций

2.1. В настоящем параграфе, как и раньше, под $\sigma(t)$ будем подразумевать произвольную неубывающую и ограниченную на $[0, 1]$ функцию, подчиненную условиям (1.1).

(а) Предположим, что функция $\varphi(z)$ — из класса S и, таким образом, имеет разложение вида

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots \quad (|z| < 1). \quad (2.1)$$

Тогда функция

$$\log \frac{\varphi(z)}{z} = \log (1 + a_2 z + \dots + a_p z^{p-1} + \dots)$$

аналитична в круге $|z| < 1$ и допускает разложение

$$\log \frac{\varphi(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k z^k \quad (|z| < 1), \quad (2.2)$$

где, как легко видеть, $l_1 = a_2$.

Следовательно, если ввести в рассмотрение функцию

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^1 \log \frac{\varphi(zt)}{zt} d\sigma(t) \right\} \quad (|z| < 1), \quad (2.3)$$

то она допускает представление вида

$$f(z) = z \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l_k \mu_k z^k \right\} \quad (|z| < 1), \quad (2.4)$$

где

$$l_1 = a_2, \quad \mu_k = \int_0^1 t^k d\sigma(t) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Из (2.4), в частности, следует, что наша функция $f(z)$ удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и, таким образом, она допускает разложение вида (2.1)

$$f(z) = z + b_2 z^2 + \dots + b_p z^p + \dots \quad (|z| < 1). \quad (2.6)$$

В согласии с отмеченным обстоятельством класс S_0 однолистных в круге $|z| < 1$ функций определим таким образом:

Функция $f(z) \in S$ из класса S_0 , если она допускает представление вида (2.3), где $\varphi(z)$ — некоторая другая функция из класса S .

Отметим, что в специальном случае, когда

$$\sigma(t) \equiv \sigma_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

классы S_0 и S просто совпадают, поскольку тогда требуемое представление (2.1) имеет место, если положить $\varphi(z) \equiv f(z)$.

(6) Что в случае произвольной функции $\sigma(t)$ класс S_0 не пуст, видно из следующей теоремы.

Теорема 8. *Имеет место включение*

$$S_0^* \subset S_0. \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in S_0^*$ и, таким образом, согласно теореме 2 имеет место представление вида

$$f(z) = z \exp \left\{ 2 \int_0^{2\pi} \Phi_\sigma(e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \right\} \quad (|z| < 1), \quad (2.8')$$

где

$$\Phi_\sigma(z) = - \int_0^1 \log(1 - zt) d\sigma(t),$$

и

$$d\mu(\theta) > 0, \quad \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1. \quad (2.9)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(z) = z \exp \left\{ -2 \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-i\theta} z) d\mu(\theta) \right\}, \quad (2.10)$$

аналитическую в круге $|z| < 1$ и входящую в класс S^* звездообразных функций согласно хорошо известной теореме, специального случая теоремы 2, когда $\sigma(t) \equiv \sigma_0(t)$.

Из (2.8) и (2.9) легко следует, что формулу (2.8) можно записать также в виде (2.3). Это и значит, что $f(z) \in S_*$ и, тем самым, включение (2.8) справедливо.

2.2. (а) Теорема 3'. Если $f(z) \in S_*$, то справедливы точные оценки

$$|z| \exp \{2\Phi_\sigma(-|z|)\} \leq |f(z)| \leq |z| \exp \{2\Phi_\sigma(|z|)\} \quad (|z| < 1). \quad (2.11)$$

Доказательство. Функция $f(z) \in S_*$ допускает представление

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^1 \log \frac{\varphi(zt)}{zt} d\sigma(t) \right\} \quad (|z| < 1),$$

где $\varphi(z) \in S$.

Но, как известно [3], для функций класса S и, в частности, для функции $\varphi(z)$ справедливы оценки

$$\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq |\varphi(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad (|z| < 1).$$

Поскольку $d\sigma(t) > 0$, то отсюда следуют также оценки

$$\int_0^1 \log \left| \frac{\varphi(zt)}{zt} \right| d\sigma(t) > -2 \int_0^1 \log(1 + |z|t) d\sigma(t) = 2\Phi_\sigma(-|z|), \quad (2.12)$$

$$\int_0^1 \log \left| \frac{\varphi(zt)}{zt} \right| d\sigma(t) \leq -2 \int_0^1 \log(1 - |z|t) d\sigma(t) = 2\Phi_\sigma(|z|).$$

Наконец, так как

$$|f(z)| = |z| \exp \left\{ \int_0^1 \log \left| \frac{\varphi(zt)}{zt} \right| d\sigma(t) \right\},$$

то из (2.12) вытекают неравенства (2.11) теоремы.

Что касается точности оценок (2.11), то это уже было отмечено в связи с теоремой 3.

Из этой теоремы, как и выше, непосредственно следует

Теорема 4'. Если $f(z) \in S_\sigma$, то круг $|w| < r_\sigma$ (но не всегда больший), где

$$r_\sigma = \exp \left\{ -2 \int_0^1 \log(1+t) d\sigma(t) \right\} \geq \frac{1}{4},$$

целиком покрывается образом круга $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$.

(6) Теорема 9. Если $f(z) \in S_\sigma$, то имеет место оценка

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \Phi_\sigma(|z|) - \Phi_\sigma(-|z|) = \int_0^1 \log \frac{1+|z|t}{1-|z|t} d\sigma(t) \quad (|z| < 1). \quad (2.13)$$

Доказательство. Из представления (2.3) функции $f(z) \in S_\sigma$ следует

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \int_0^1 \left| \arg \frac{\varphi(zt)}{zt} \right| d\sigma(t). \quad (2.14)$$

Но известно [3], что для функции $\varphi(z) \in S$ справедлива оценка

$$\left| \arg \frac{\varphi(z)}{z} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1).$$

Отсюда и из (2.14) приходим к неравенству (2.13) теоремы.

Теорема 10. Если $f(z) \in S_\sigma$, то имеет место точная оценка

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \int_0^1 \frac{1+|z|t}{1-|z|t} d\sigma(t) \quad (|z| < 1). \quad (2.15)$$

Доказательство. Из представления

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^1 \log \frac{\varphi(zt)}{zt} d\sigma(t) \right\}$$

непосредственно следует

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \int_0^1 \frac{zt\varphi'(zt) - \varphi(zt)}{\varphi(zt)} d\sigma(t),$$

т. е.

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^1 \frac{zt\varphi'(zt)}{\varphi(zt)} d\sigma(t). \quad (2.16)$$

Но, как известно [4], для функции $\varphi(z) \in S$ имеет место оценка

$$\left| \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1),$$

откуда и из (2.16) вытекает неравенство (2.15).

Наконец, легко видеть, что оценка (2.15) точная, поскольку для функции $K_\sigma(z) \in S_\sigma^* \subset S_\sigma$ мы имеем

$$\frac{zK'_\sigma(z)}{K_\sigma(z)} = \int_0^1 \frac{1+zt}{1-zt} d\sigma(t).$$

(в) В отличие от класса S_σ^* вопрос об оценке коэффициентов для всего класса S_σ остается открытым. Здесь удалось установить лишь следующую теорему.

Теорема 11. Если

$$f(z) = z + b_2 z^2 + \dots + b_p z^p + \dots \in S_\sigma, \quad (2.17)$$

то

$$|b_2| \leq \gamma_2(\sigma) = 2\mu_1(\sigma). \quad (2.18)$$

Доказательство. Как уже было отмечено при определении класса S_σ , функция $f(z) \in S_\sigma$ допускает представление вида

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^1 \frac{\varphi(tz)}{tz} d\sigma(t) \right\} = z \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l_k \mu_k z^k \right\} \quad (|z| < 1), \quad (2.19)$$

где

$$\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots,$$

а коэффициенты $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяются из разложения

$$\log \frac{\varphi(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k z^k \quad (|z| < 1),$$

причем $l_1 = a_2$.

Как легко следует из (2.17) и (2.19)

$$b_2 = l_1 \mu_1(\sigma) = a_2 \mu_1(\sigma). \quad (2.20)$$

Но поскольку $\varphi(z) \in S$, то, как известно [3], $|a_2| \leq 2$.

Отсюда и из (2.20) вытекает неравенство

$$|b_2| \leq 2\mu_1(\sigma),$$

т. е. неравенство (2.18) теоремы, в силу формулы (1.48).

Отметим, что в связи с теоремой 11 и известной проблемой коэффициентов Бибераха естественно возникает вопрос: для произвольной функции $f(z) \in S_\sigma$ вида (2.17) справедливы ли оценки

$$|b_k| \leq \gamma_k(\sigma) \quad (k=2, 3, \dots)$$

или нет?

Институт математики и механики

АН АрмССР

Поступило 2.VII.1969

Մ. ԻԲ. ՋՐԲԱՇԻԱՆ, Միաբերք ֆունկցիաների դասերի շերտավորման մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում առաջարկվում է միաբերք ֆունկցիաների հայտնի S^* և S դասերի շերտավորման մի մեթոդ, $[0,1]$ հատվածում ընկալող, սահմանափակ և նորմավորման որոշ պայմանների բավարարող յուրաքանչյուր $\tau(t)$ ֆունկցիայի հետ համապատասխանության մեջ են գրվում միաբերք ֆունկցիաների $S_0 \subset S^*$ և $S_0 \subset S$ դասեր և ապացուցվում են մի շարք թեորեմների կառուցվածքային ներկայացման, ծածկման և գործակիցների աճի մասին և վերապես բերվում են նրանց համար որոշ ճշգրիտ գնահատականներ:

M. M. DZRBASHIAN. *On the stratification of classes of shlicht functions*
(summary)

A method of stratification of well known classes S^* and S of shlicht functions is proposed. Classes of shlicht functions $S_0 \subset S^*$ and $S_0 \subset S$ are associated with each nondecreasing, bounded on $[0,1]$ function $\tau(t)$ subject to some additional normalisation conditions. A number of theorems about structural representation, coverage and coefficient growth are established and several precise estimates are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949, 436—437.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Москва, «Наука», 1966, теорема 9.12.
3. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций, Москва, «Наука», 1966.
4. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, стр. 95.

В. И. ГАВРИЛОВ

О ГРАНИЧНЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ

В этой статье будут обсуждаться граничные теоремы единственности для функций, мероморфных в единичном круге. Для того чтобы показать какое место среди известных теорем занимают новые, мы предположим их изложению небольшой обзор достигнутых в этой теории результатов.

1. Предварительные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{Q}$ обозначает расширенную комплексную плоскость. Единичный круг $|z| < 1$ будем обозначать через D , а его границу—через $C: |z| = 1$. Для произвольной точки $\zeta = e^{i\theta} \in C$ обозначим через $h(\zeta, \alpha)$ хорду круга D , оканчивающуюся в $\zeta = e^{i\theta}$ и образующую с радиусом $h(\zeta, 0)$ в этой точке угол α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Часть круга D , лежащую между хордами $h(\zeta, \alpha_1)$ и $h(\zeta, \alpha_2)$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, обозначим через $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ и будем называть в дальнейшем углом Штольца с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Если z_1 и z_2 —произвольные точки круга D , то через $\sigma(z_1, z_2)$ будем обозначать неевклидово расстояние между ними, т. е.

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Пусть функция $f(z)$ определена и мероморфна в круге D и принимает значения из $\mathbb{Q}$. Для произвольного подмножества $S \subset D$, имеющего по крайней мере одну предельную точку $\zeta = e^{i\theta}$ на границе C , обозначим через $C(f, \zeta, S)$ совокупность всех значений $a \in \mathbb{Q}$, для которых на S можно указать такие последовательности точек $\{z^{(n)}\}$, $z^{(n)} \in S$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = \zeta = e^{i\theta}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z^{(n)}) = a$.

Полагая S равным D , $h(\zeta, \alpha)$ или $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, получим предельные множества $C(f, \zeta, D)$, $C(f, h(\zeta, \alpha))$ и $C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$. Если в качестве множества S взять жорданову кривую $L_\zeta: z = z(t)$, $0 \leq t < 1$ такую, что $|z(t)| < 1$ для всех $0 \leq t < 1$ и $\lim_{t \rightarrow 1} z(t) = \zeta = e^{i\theta}$, то получим предельное множество $C(f, \zeta, L_\zeta)$ функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$ вдоль кривой L_ζ . В частном случае, когда множество $C(f, \zeta, L_\zeta)$ сос-

тоит из единственного значения $\{a\}$, $a \in \Omega$, последнее называют асимптотическим значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$ вдоль асимптотического пути L . В качестве множества S можно взять последовательность $\{z_n\}$ точек круга D , сходящуюся к граничной точке $\zeta = e^{i\theta}$, и аналогично определить предельное множество $C(f, \zeta, \{z_n\})$.

Граничную точку $\zeta = e^{i\theta}$ называют точкой Фату для функции $f(z)$, если множество $\cup C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2))$, где объединение берется по всем углам $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершинами в $\zeta = e^{i\theta}$, состоит из единственного значения $\{a\}$, $a \in \Omega$, которое называется угловым граничным значением функции $f(z)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Множество точек Фату функции $f(z)$ обозначают через $F(f)$. Если же $\cap C(f, \Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)) = \Omega$, где пересечение взято по всем углам $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ с вершинами в $\zeta = e^{i\theta}$, то точку $\zeta = e^{i\theta}$ называют точкой Плеснера функции $f(z)$, и множество таких точек $\zeta = e^{i\theta}$ обозначают через $J(f)$.

2. Классические теоремы и некоторые их обобщения

1. Первой граничной теоремой единственности следует, по-видимому, считать следующее утверждение: если голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$ имеет одно и то же угловое граничное значение a в каждой точке $\zeta = e^{i\theta}$ некоторого множества M на C положительной линейной меры ($\text{mes } M > 0$), то $f(z) \equiv a$.

Этот факт, доказанный независимо Ф. и М. Рисс и Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым (см. [15], стр. 70) и в дальнейшем называемый теоремой Ф. и М. Рисс—Н. Н. Лузина—И. И. Привалова, был значительно обобщен Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым, установившими его справедливость для произвольной мероморфной в D функции (см. [15], стр. 70 и 292). В доказательстве этого последнего утверждения помимо теоремы Ф. и М. Рисс—Н. Н. Лузина—И. И. Привалова использовалась также следующая теорема Фату: для произвольной голоморфной и ограниченной в D функции $f(z)$ множество $F(f)$ ее точек Фату не пусто, и, более того, $\text{mes } F(r) = 2\pi$. Часто используется „локальная“ форма теоремы Фату: если для мероморфной в D функции $f(z)$ в некоторой граничной точке $\zeta \in C$ имеет место $C(f, \zeta, D) \neq \Omega$, то на C существует такая дуга γ , содержащая точку ζ , что $\text{mes } (F(f) \cap \gamma) = \text{mes } \gamma$.

Теорема Н. Н. Лузина—И. И. Привалова была усилена И. И. Приваловым (см. [15], стр. 287), показавшим, что множество A_n угловых граничных значений мероморфной в D функции $f(z)$, принимаемых ею в точках $\zeta = e^{i\theta}$ множества M , $\text{mes } M > 0$, на C , не обязательно считать состоящим из единственного значения $\{a\}$. Утверждение остается в силе, если предполагать, например, что множество A_n имеет нулевую гармоническую меру. Мне не известны примеры мероморфных в D функций, у которых множества A_n угловых граничных значений в точках некоторого множества M , $\text{mes } M > 0$, на C совпали с заданным множеством на Ω положительной гармонической меры.

С другой стороны, Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым [11] (а также [15], стр. 294 и далее) были построены примеры голоморфных и ограниченных в D функций, отличных от тождественной постоянной и имеющих нулевые угловые граничные значения во всех точках произвольных наперед заданных множеств линейной меры нуль на C . Эти примеры показывают, что дальнейшие обобщения теоремы Ф. и М. Рисс—Н. Н. Лузина—И. И. Привалова могут идти лишь в направлении отказа от условия существования углового граничного значения функции $f(z)$ в каждой точке $\zeta = e^{i\theta}$ множества $M \subset C$, $\text{mes } M > 0$, и замены его условием существования в точке $\zeta \in M$ определенного асимптотического значения вдоль некоторой кривой L_ζ , лежащей в D и оканчивающейся в $\zeta = e^{i\theta}$.

2. Сейчас представляется ясным, что существуют два возможных пути для получения такого рода обобщений. Первый из них—это считать кривые L_ζ выбранными произвольно и получить результат, налагывая различного рода дополнительные ограничения на поведение функции. Возможность такого пути мотивируется следующей теоремой Линделефа: если голоморфная и ограниченная в D функция имеет в граничной точке $\zeta = e^{i\theta}$ определенное асимптотическое значение вдоль некоторой кривой L_ζ из D , оканчивающейся в $\zeta = e^{i\theta}$, то она имеет в этой точке $\zeta = e^{i\theta}$ такое же угловое граничное значение.

Понятно, что любое условие на функцию $f(z)$, обеспечивающее выполнение свойства, утверждаемого теоремой Линделефа, приводит к обобщению теоремы Ф. и М. Рисс—Н. Н. Лузина—И. И. Привалова. В недавней работе Лехто и Виртанена [10] указано такое условие для мероморфных в D функций $f(z)$. Оно состоит в существовании конечного

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) \rho(f(z)) < +\infty, \quad (1)$$

где $\rho(f(z)) = |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$ — сферическая производная функции $f(z)$.

Другое достаточное условие, обеспечивающее выполнение свойства в теореме Линделефа, получено в работе Г. Ц. Тумаркина и С. Я. Хавинсона [16] и состоит в принадлежности функции классу D (определение см. [15], стр. 116). Ниже, в § 4, будет показано, что существуют голоморфные функции класса D , которые не удовлетворяют условию (1), и наоборот.

Существуют ограничения на поведение функции иного типа, нежели в теореме Г. Ц. Тумаркина—С. Я. Хавинсона или (1), но также приводящие к обобщению теоремы Ф. и М. Рисс—Н. Н. Лузина—И. И. Привалова. Рассмотрим функцию

$$T_0(r, f) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt,$$

где

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \int \int_{|z| \leq t} [\rho(f(z))]^2 dx dy, \quad z = x + iy.$$

Р. Неванлинна ([13], стр. 210) доказал, что на мероморфные в D функции $f(z)$, удовлетворяющие условию

$$T_0(r, f) = O(1), \quad \text{когда } r \rightarrow 1, \quad (2)$$

переносится свойство голоморфных и ограниченных в D функций, утверждаемое теоремой Фату, т. е. $\text{mes } F(f) = 2\pi$. Отсюда получаем такую теорему Р. Неванлинны ([13], стр. 210): если мероморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию (2) и имеет в каждой точке $\zeta = e^{i\theta}$ некоторого множества M на C , $\text{mes } M > 0$, одно и то же асимптотическое значение $a \in \Omega$ вдоль некоторой кривой L : из D , оканчивающейся в $\zeta = e^{i\theta}$, то $f(z) \equiv a$.

Действительно, множество M содержит подмножество M' , $\text{mes } M' > 0$, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta}$ которого функция $f(z)$ имеет определенное угловое граничное значение и асимптотическое значение a вдоль соответствующей кривой L_ζ . Согласно теореме Бейджмила (см. [14], стр. 74), для любой комплекснозначной функции $f(z)$ в D на границе C существует самое большее счетное множество точек $\zeta = e^{i\theta}$, в которых $f(z)$ имеет различные асимптотические значения вдоль различных кривых L_ζ и L'_ζ из D , оканчивающихся в $\zeta = e^{i\theta}$. Поэтому во всех точках $\zeta = e^{i\theta}$ некоторого множества $M'' \subset M$, $\text{mes } M'' > 0$, наша функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения, равные a . В силу теоремы Н. Н. Лузина—И. И. Привалова $f(z) \equiv a$.

Из доказательства ясно, что утверждение теоремы Неванлинны останется справедливым в случае, когда условие (2) заменено любым другим условием, обеспечивающим лишь существование в множестве M подмножества M' , $\text{mes } M' > 0$, состоящего из точек Фату функции $f(z)$. Отметим также, что из условия (1) не следует условие (2) и наоборот (см., например, [14], стр. 156).

Основные результаты настоящей статьи являются дальнейшим продвижением на указанном в этом пункте пути.

3. Другой из возможных путей обобщения классических теорем единственности состоит в том, что считают мероморфную в D функцию $f(z)$ произвольной, а результат достигается за счет специального выбора семейства кривых $\{L_\zeta\}$, его достаточной „густоты“ и „правильного“ распределения кривых в семействе $\{L_\zeta\}$.

Первый результат в этом направлении был получен Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым, которые взяли в качестве кривых $\{L_\zeta\}$ радиусы $\{h(\zeta, 0)\}$ круга D . Мы приведем здесь формулировку результата Н. Н. Лузина—И. И. Привалова в несколько более общей форме, чем у авторов: если для мероморфной в D функции $f(z)$ можно указать такую дугу γ на C и такое метрически плотное* на γ множество

* Множество M называется метрически плотным на дуге γ , если пересечение M с любой дугой на γ имеет положительную линейную меру.

M второй категории, что в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in M$ предельное множество $C(f, h(\zeta, 0))$ по радиусу не совпадает с Ω и содержит одно и то же значение a , то $f(z) \equiv a$ (см. [14], стр. 108).

Примеры функций, построенные Н. Н. Лузиним и И. И. Приваловым ([15], стр. 304) показывают, что ни одно из условий теоремы отбросить нельзя.

Дальнейшее продвижение было получено Коллингвудом [8] (см. также [14], стр. 112, 113), который рассмотрел в качестве кривых L_α хорды $h(\zeta, \alpha)$. Характеристикой „правильности“ распределения семейства хорд $\{h(\zeta, \alpha)\}$ служит условие, что во всех точках $\zeta \in M$ хорды $h(\zeta, \alpha)$ выбираются составляющими один и тот же фиксированный угол α с радиусами. При этом был замечен следующий факт ([14], стр. 112): если функция $f(z)$ мероморфна в D и на некоторой дуге γ окружности C существует такое множество M второй категории, что при некотором фиксированном α , $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, в каждой точке

$\zeta = e^{i\theta} \in M$ предельное множество $C(f, h(\zeta, \alpha))$ по хорде $h(\zeta, \alpha)$ не совпадает с Ω , то дуга γ содержит точку $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$, в которой $C(f, \zeta_0, D) \neq \Omega$.

Этот факт позволил Коллингвуду расщепить условие в теореме Н. Н. Лузина—И. И. Привалова на две части и доказать следующее ее обобщение: если функция $f(z)$ мероморфна в D и для некоторого фиксированного α_0 , $-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, на дуге $\gamma \subset C$ существует множество M второй категории, в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in M$ которого $C(f, h(\zeta, \alpha_0)) \neq \Omega$, и если, далее, существует такое значение $a \in \Omega$ и метрически плотное на γ множество N , что $a \in C(f, h(\zeta, \alpha))$ хотя бы для одной хорды $h(\zeta, \alpha)$ в каждой точке $\zeta \in N$, то $f(z) \equiv a$ (см. [14], стр. 113).

Действительно, первое из условий этой теоремы обеспечивает выполнение обобщенной теоремы Фату, и, значит, существование такой дуги $\gamma_0 \subset \gamma$, что все ее точки, за исключением, быть может, множества линейной меры ноль, принадлежат множеству $F(f)$. Второе условие теоремы ведет к заключению, что соответствующие угловые граничные значения функции $f(z)$ равны a во всех точках некоторого множества $M_0 \subset \gamma_0$, $\text{mes } M_0 > 0$.

Существенное обобщение теоремы Коллингвуда было получено Е. П. Долженко [7], который рассматривал семейство произвольных кривых $\{L_\alpha\}$, а характеристикой „правильности“ распределения кривых в семействе $\{L_\alpha\}$ служило введенное Е. П. Долженко свойство „равномерной непрерывности“ семейства $\{L_\alpha\}$, так что семейство хорд $\{h(\zeta, \alpha_0)\}$ в теореме Коллингвуда является весьма частным примером равномерно непрерывного семейства.

Е. П. Долженко показал также что его теорема является в том смысле окончательной, что условие равномерной непрерывности семейства кривых в ней нельзя заменить условием простой непрерывности.

Мы сформулируем соответствующий пример Е. П. Долженко не полностью и в удобной для нас форме: существует голоморфная в D функция $f_0(z) \neq \text{const}$, которая в каждой граничной точке $\zeta = e^{i\theta}$ обладает следующими свойствами: 1) по некоторой хорде $h(\zeta, z_0)$ предельное множество $C(f, h(\zeta, z_0))$ состоит из единственного значения $\{0\}$; 2) на любой другой хорде $h(\zeta, \alpha)$ можно указать такую последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in h(\zeta, \alpha)$, $n=1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta = e^{i\theta}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0 \text{ и } C(f, \zeta, \{z_n\}) = \{0\}.$$

В работе Бейджмилла [2] построена голоморфная в D функция $\tilde{f}_0(z)$, которая обладает предыдущим свойством 1) и для которой каждая точка $\zeta = e^{i\theta} \in C$ является точкой Плеснера, т. е. $J(\tilde{f}_0) = C$. Неизвестно, можно ли функции в примерах Е. П. Долженко и Бейджмилла выбрать так, чтобы их максимумы модуля стремились к ∞ как угодно медленно.

3. Теоремы единственности, связанные с ростом сферической производной

1. Прежде всего введем дополнительные обозначения и определения. Пусть $\zeta = e^{i\theta}$ — произвольная точка границы C и Δ_ζ — орицикл круга D в точке ζ , т. е. окружность радиуса меньше единицы, касающаяся изнутри окружности C в точке ζ . Два орицикла $\Delta_\zeta^1, \Delta_\zeta^2$ круга D в точке ζ ограничивают некоторую односвязную область, которую диаметр круга D , проведенный в точку $\zeta = e^{i\theta}$, делит на две равные части, называемые в дальнейшем левым орициклическим углом $O^-\Delta_\zeta$ и правым орициклическим углом $O^+\Delta_\zeta$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$.

Ниже в доказательстве леммы нам понадобится следующее свойство орициклов: если точка z — произвольная точка на орицикле Δ_ζ^1 , отличная от $\zeta = e^{i\theta}$ и $\sigma(z, \Delta_\zeta^2)$ обозначает неевклидово расстояние от точки z до другого орицикла Δ_ζ^2 , т. е. $\sigma(z, \Delta_\zeta^2) = \min \{ \sigma(z, z'), z' \in \Delta_\zeta^2 \}$, то величина $\sigma(z, \Delta_\zeta^2)$ одна и та же для всех точек $z \in \Delta_\zeta^1$, $z \neq \zeta$.

Для мероморфной в D функции $f(z)$ рассмотрим предельные множества $C(f, \zeta, O^+\Delta_\zeta)$ и $C(f, \zeta, O^-\Delta_\zeta)$ в точке $\zeta = e^{i\theta}$ по правому и левому орициклическим углам $O^+\Delta_\zeta$ и $O^-\Delta_\zeta$, и, следуя Бейджмиллу [1], назовем точку $\zeta \in C$ орициклической точкой Фату функции $f(z)$, если множество $\cup C(f, \zeta, O\Delta_\zeta)$, в котором объединение берется как по всем правым орициклическим углам $O^+\Delta_\zeta$, так и по всем левым орициклическим углам $O^-\Delta_\zeta$, состоит из единственного значения $\{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Если же $\cap C(f, \zeta, O\Delta_\zeta) = \mathbb{Q}$, где пересечение также взято по всем орициклическим углам с вершиной в точке $\zeta = e^{i\theta}$, то точку $\zeta = e^{i\theta}$ называем орициклической точкой Плеснера функции $f(z)$. Если гра-

ничная точка $\zeta = e^{i\theta}$ является в одно и то же время обыкновенной точкой Плеснера и орициклической точкой Плеснера для функции $f(z)$, то будем называть ее обобщенной точкой Плеснера для функции $f(z)$. Аналогично определяется обобщенная точка Фату для функции $f(z)$. Точку $\zeta = e^{i\theta}$ назовем обобщенной точкой Мейера функции $f(z)$, если для каждой хорды $h(\zeta, \alpha)$ и каждого орицикла Δ_ζ круга D в точке $\zeta = e^{i\theta}$ имеем

$$C(f, h(\zeta, \alpha)) = C(f, \zeta, \Delta_\zeta) = C(f, \zeta, D) \neq \Omega.$$

Рассмотрим жорданову кривую $L_\zeta: z = z(t)$, $0 \leq t < 1$, $|z(t)| < 1$ для всех $0 \leq t < 1$ и $\lim_{t \rightarrow 1} z(t) = \zeta = e^{i\theta}$. Кривую L_ζ будем называть допустимой, если существует такой угол Штольца $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ или такой орициклический угол $O\Delta_\zeta$, что, начиная с некоторой точки $z_0 = z(t_0) \in L_\zeta$, все точки $z = z(t)$, $t > t_0$, кривой L_ζ будут лежать внутри угла $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$ или $O\Delta_\zeta$. Последовательность точек $\{z_n\}$ круга D , сходящуюся к точке $\zeta = e^{i\theta}$, назовем допустимой последовательностью, если точки z_n , $n = 1, 2, \dots$ лежат на некоторой допустимой кривой L_ζ , оканчивающейся в точке $\zeta = e^{i\theta}$. Таким образом, с каждой допустимой последовательностью точек $\{z_n\}$ ассоциируется некоторая допустимая кривая L_ζ .

Выше была определена величина $\sigma(z, L_\zeta)$. Теперь для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\Delta_\varepsilon L_\zeta = \{z; z \in D, \sigma(z, L_\zeta) < \varepsilon\}.$$

Для произвольного подмножества $S \subset D$ введем функцию $\mathfrak{M}(f, S)$, положив

$$\mathfrak{M}(f, S) = \sup_{z \in S} [(1 - |z|^2) \rho(f(z))].$$

2. Доказательства приводимых ниже теорем базируются на следующей лемме.

Лемма. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и $\zeta = e^{i\theta}$ — произвольная точка границы S . Если для точки $\zeta = e^{i\theta}$ можно указать допустимую последовательность точек $\{z_n\}$, обладающую свойствами: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$, 2) $C(f, \zeta, \{z_n\}) \neq \Omega$ и 3) для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ имеем $\mathfrak{M}(f, \Delta_\varepsilon L_\zeta) < \infty$, где L_ζ — допустимая кривая, ассоциированная с последовательностью $\{z_n\}$, то точка $\zeta = e^{i\theta}$ не является обобщенной точкой Плеснера для функции $f(z)$.

Замечание 1. При доказательстве этой леммы будем различать две возможности в зависимости от того является ли допустимая кривая L_ζ , ассоциированная с последовательностью $\{z_n\}$, некасательной, т. е. лежащей в некотором угле Штольца $\Delta(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$, или лежащей в некотором орициклическом угле $O\Delta_\zeta$. В первом случае эта лемма была доказана в статье ([4], теорема 1). Поэтому ее осталось доказать во втором случае.

Предположим противное, т. е., что точка $\zeta = e^{i\theta}$ является обобщенной точкой Плеснера для функции $f(z)$. Это значит, что для лю-

бого орициклического угла OA_2 имеем $C(f, \zeta, OA_2) = \Omega$. Поэтому для любого значения $a \in \Omega$ можно указать такую последовательность точек $\{z_n^{(a)}\}$ и соответствующую ей последовательность точек $\{\bar{z}_n^{(a)}\}$ на кривой L_2 , что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(a)} = \zeta$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(a)}) = a \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n^{(a)}, \bar{z}_n^{(a)}) = 0,$$

где $\bar{z}_n^{(a)} \in L_1$, $n = 1, 2, \dots$. В частности это справедливо для некоторого значения $a \in C(f, \zeta, \{z_n\})$. Согласно условию 1) леммы из последовательности $\{z_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_{n_v}\}$ такую, что $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma(z_{n_v}, \bar{z}_v^{(a)}) = 0$ и $\lim_{v \rightarrow \infty} f(z_{n_v}) \neq a$. Отсюда, опираясь на теоремы 7 и 3 из работы [5], заключаем, что существует последовательность точек $\{z'_v\}$ такая, что $\lim_{v \rightarrow \infty} \sigma(z'_v, z_{n_v}) = 0$ и $\Re(f, \{z'_v\}) = \infty$. Поскольку, начиная с некоторого номера v_0 , все точки z'_v , $v > v_0$ попадут в область $\Delta_\infty L_2$, то мы получили противоречие с условием 2) леммы. Лемма доказана.

Замечание 2. Для голоморфных функций условие 1) леммы можно несколько ослабить, заменив его условием 1') $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) < \infty$, но при этом и условие 2) нужно заменить условием 2') предельное множество $C(f, \zeta, \{z_n\})$ не содержит значения ∞ . Доказательство остается тем же, с единственным изменением, что ссылка на теорему 7 работы [5] заменяется ссылкой на теорему 8 той же работы.

3. Докажем теперь некоторые теоремы единственности.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и M — произвольное множество точек границы C , $\text{mes } M > 0$. Если в каждой точке $\zeta \in M$ выполняются условия 1), 2) и 3) леммы, а также условие 4) найдется такая хорда $h(\zeta, a_\zeta)$, своя для каждой точки $\zeta \in M$, что пересечение $\cap C(f, h(\zeta, a_\zeta))$ по всем точкам $\zeta \in M$ содержит некоторое фиксированное значение $a \in \Omega$, то $f(z) \equiv a$.

Доказательство. Согласно одной теореме Бейджмилла ([1], теорема 1), каждая точка $\zeta \in C$, за возможным исключением множества линейной меры нуль, является либо точкой Фату, либо обобщенной точкой Плеснера для функции $f(z)$ (обобщение теоремы А. И. Плеснера, [15], стр. 298). В силу леммы множество M не содержит обобщенных точек Плеснера. Поэтому некоторое его подмножество M' , $\text{mes } M' > 0$ состоит целиком из точек Фату функции $f(z)$. Условие 4) нашей теоремы показывает, что соответствующие угловые граничные значения функции $f(z)$ в точках множества M' все равны a . Утверждение теоремы 1 следует теперь из теоремы Н. Н. Лузина — И. И. Привалова.

Замечание 3. Теорему 1 интересно сравнить с теоремой единственности Р. Неванлинны (см. § 2), в которой условие $T_0(r, f) = O(1)$ имеет следствием утверждение, что $\text{mes } J(f) = 0$.

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ мероморфна в D и M — некоторое множество второй категории на дуге γ окружности C . Если в каждой точке $\zeta \in M$ выполняются условия 1), 2) и 3) леммы, а также условие 4) существует такое значение $a \in \Omega$ и такое метрически плотное на γ множество N , что $a \in C(f, h(\zeta, a))$ хотя бы для одной хорды $h(\zeta, a)$ в каждой точке $\zeta \in N$, то $f(z) \equiv a$.

Доказательство. Бейджмил [1] обобщил теорему Мейера [12], доказав, что каждая точка $\zeta \in C$, за возможным исключением множества первой категории, является либо обобщенной точкой Мейера, либо обобщенной точкой Плеснера. Так как, согласно лемме, множество M не содержит обобщенных точек Плеснера, то оно обязано содержать по крайней мере одну точку $\zeta_0 \in M$, в которой $C(f, \zeta_0, D) \neq \Omega$. Согласно теореме Фату дуга γ будет содержать некоторую дугу $\gamma_0 \subset \gamma$ такую, что $\text{mes}(F(f) \cap \gamma_0) = \text{mes} \gamma_0$. В силу условия 4) теоремы множество N будет содержать некоторое подмножество N_0 , $\text{mes} N_0 > 0$, целиком состоящее из точек Фату функции $f(z)$, и соответствующие угловые граничные значения функции $f(z)$ в точках множества N_0 все равны a . Утверждение теоремы 2 следует из теоремы Ф. и М. Рисс — Н. Н. Лузина — И. И. Привалова.

Замечание 4. Представляется очевидным как следует сформулировать соответствующие усиления теорем 1 и 2 для голоморфных функций.

Замечание 5. Интересно сравнить теорему 2 с теоремой Коллингвуда (§ 2). В теореме Коллингвуда успех достигается за счет „правильного“ распределения кривых в семействе $\{L_\varepsilon\}$, в то время как в теореме 2 кривые $\{L_\varepsilon\}$ выбраны произвольно и результат получается за счет ограничения роста сферической производной функции

$$\mathfrak{M}(f, \Delta_\varepsilon L_\varepsilon) < \infty. \quad (3)$$

Поэтому теорему 2 следует отнести к первой группе теорем единственности, рассмотренных в § 2. Отметим, попутно, что, как показывает пример Е. П. Долженко, теорема Коллингвуда перестает быть справедливой, если в ее условиях предельные множества $C(f, h(\zeta, z))$ вдоль хорд заменить предельными множествами $C(f, \zeta, \{z_n\})$ по последовательностям точек $\{z_n\}$, даже если они подчинены условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$.

Замечание 6. Условие 4) в теореме 2 обеспечивает существование такого множества N_0 , $\text{mes} N_0 > 0$, в каждой точке $\zeta \in N_0$ которого функция $f(z)$ имеет одно и то же угловое граничное значение. Поэтому его можно заменить любым другим условием, служащим этой цели. Такие условия указаны, например, в [4] (см. также [6]).

Замечание 7. Ниже (§ 4, теорема 3) будет построен пример функции, показывающий, что в терминах теоремы 2 условие (3) является наилучшим.

4. П р и м е р ы

Докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\mu(r)$ — произвольная положительная и строго возрастающая функция на $0 \leq r < 1$, $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = \infty$. Существует мероморфная в D функция $\varphi_0(z)$, обладающая следующими свойствами: 1) каждая хорда $h(\zeta, \alpha)$ круга D содержит такую последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in h(\zeta, \alpha)$, $n=1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta = e^{i\theta}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$ и $C(v_0, \zeta, \{z_n\}) = \{0\}$; 2) существует такое число r_0 , $0 < r_0 < 1$, что для всех точек $z \in D$, удовлетворяющих условию $|z| > r_0$, выполняется неравенство

$$(1 - |z|^2) \rho(\varphi_0(z)) < \mu(|z|).$$

Доказательство. Будем исходить из бесконечного произведения

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right], \quad (4)$$

изученному в работе Бейджмила, Эрдеша и Зейделя [3]. Для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{n_{k-1}} = \infty, \quad n_1 > 1, \quad (5)$$

произведение (4) сходится абсолютно и равномерно в каждом круге $|z| \leq r < 1$, и представляет, следовательно, голоморфную функцию в D , имеющую n_j простых нулей z_j на окружности $|z| = 1 - \frac{1}{n_j}$, $j=1, 2, \dots$

.... Опишем около каждого нуля z_j функции $\psi(z)$ на окружности $|z| = 1 - \frac{1}{n_j}$, $j=1, 2, \dots$, окружность γ_j радиуса $\frac{1}{j^2 n_j}$, внутренность

которой обозначим через Γ_j . Существует такое число $j_0 > 0$, что для всех $j \geq j_0$ круги Γ_j не будут иметь попарно общих точек, и следовательно, оставшаяся после выбрасывания кругов Γ_j , $j \geq j_0$ часть круга D будет некоторой областью Δ .

Известны следующие свойства функции $\psi(z)$: 1) для любой последовательности $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию (5), модуль $|\psi(z)|$ стремится к ∞ , когда $|z| \rightarrow 1$, равномерно в области Δ ([3], стр. 137); 2) почти во всех точках $\zeta = e^{i\theta} \in C$ функция $\psi(z)$ имеет асимптотическое значение ∞ вдоль радиуса $h(\zeta, 0)$ ([3], стр. 139); 3) если обозначить

$$\psi_k(z) = \prod_{j \neq k} \left[1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right],$$

то $\lim_{k \rightarrow \infty} |\psi_k(z_k)| = \infty$, где z_k — нули функции $\psi(z)$ на окружности $|z|=1$ — $\frac{1}{n_k}$ ([3], стр. 142); 4) для любой положительной и строго возрастающей функции $\mu(r)$ на $0 \leq r < 1$, $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = \infty$, можно выбрать такую последовательность чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию

$$n_k > k n_{k-1}, n_1 > 1, k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

что $M(r, \psi) = \max_{|z|=r} |\psi(z)| < \mu(r)$ для всех $r > r_0$, где $0 < r_0 < 1$ ([3], стр. 141).

Рассмотрим производную

$$\psi'(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} z^{n_v-1} \prod_{j \neq v} \left[1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right].$$

Непосредственно видно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - |z_k|^2) \rho(\psi(z_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n_k}}{1 - \frac{1}{n_k}} |\psi'_k(z_k)| = \infty.$$

Покажем, с другой стороны, что какова бы ни была положительная и строго возрастающая на $0 \leq r < 1$ функция $\mu(r)$, $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = \infty$, всегда можно выбрать такую последовательность чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющую условию

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j \right)^2 < n_k, n_1 > 1, k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

что функция $\psi(z)$, определяемая из (4), будет удовлетворять неравенству

$$(1 - |z|^2) \rho(\psi(z)) < \mu(|z|) \quad (8)$$

во всех точках z круга D , лежащих достаточно близко к границе S , т. е. для всех z , $|z| > r_0$, где $0 < r_0 < 1$.

Действительно, выберем номер k так, чтобы выполнялись неравенства

$$1 - \frac{1}{n_k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{n_{k+1}}. \quad (9)$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2) \rho(\psi(z)) &\leq (1 - |z|^2) |\psi'(z)| \leq \\ &\leq 2(1 - |z|) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} \prod_{j \neq v} \left[1 + \left(\frac{|z|}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2(1-|z|) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1-\frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{|z|}{1-\frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right] \leq$$

$$\leq 2(1-|z|) M(|z|, \psi) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1-\frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1}.$$

Покажем теперь, что для всех z , $|z| \geq r_0$ и любой последовательности чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию (7), справедлива оценка

$$2(1-|z|) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1-\frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} \leq c, \quad (10)$$

где $c < \infty$ — некоторая постоянная.

Используя неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{n_v}\right)^{-n_v} \leq 4, \quad n_v > 1, \quad v = 1, 2, \dots,$$

а также неравенства (7) и (9), получаем оценки

$$2(1-|z|) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1-\frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} \leq 2(1-|z|) \left[4 \sum_{v=1}^{k-1} n_v + 4n_k + \right.$$

$$\left. + 4c_1 \sum_{v=k+1}^{\infty} n_v |z|^{n_v} \right] < 16(1-|z|) n_k + 8c_1(1-|z|) \sum_{v=k+1}^{\infty} n_v |z|^{n_v} <$$

$$< 16 + 8c_1(1-|z|) \sum_{v=k+1}^{\infty} n_v e^{-n_v(1-|z|)},$$

в которых $c_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{n_1}} < \infty$ и использовано неравенство $\ln x < -$

$-(1-x)$, справедливое для всех x , $0 < x < 1$.

Учитывая еще раз неравенства (7), (9) и неравенство $xe^{-x} < 1$, имеющее место для любых $x > 0$, заключаем, что

$$2(1-|z|) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{n_v}{\left(1-\frac{1}{n_v}\right)^{n_v}} |z|^{n_v-1} < 16 + 8c_1(1-|z|) n_{k+1} e^{-n_{k+1}(1-|z|)} +$$

$$+ 8c_1 \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{-n_v(1-|z|)} < 16 + 8c_1 + 8c_1 \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{-\frac{n_v}{n_{k+1}}} <$$

$$< 16 + 8c_1 + 8c_1 \sum_{v=k+2}^{\infty} n_v e^{-\sqrt{n_v}} < c.$$

Таким образом, неравенство (10) доказано, а вместе с ним и неравенство

$$(1 - |z|^2) \rho(\psi(z)) < cM(|z|, \psi). \quad (11)$$

Выберем теперь последовательность чисел $\{n_k\}$ так, чтобы она удовлетворяла условию (7), а, значит, и условию (6), и чтобы

$$M(|z|, \psi) < \frac{1}{c} \mu(|z|). \quad (12)$$

Объединяя неравенства (12) и (11), получаем неравенство (8).

Круги Γ_j , участвующие в определении области Δ , можно рассматривать как неевклидовы круги с неевклидовыми радиусами $O\left(\frac{1}{j^2}\right)$ (см., например, [5], стр. 396). Поэтому для любой хорды $h(\zeta, \alpha)$, те ее части, которые не лежат в области Δ , имеют неевклидову длину, стремящуюся к нулю при приближении точки z к границе по хорде $h(\zeta, \alpha)$.

Учитывая этот факт, а также соотношение $\rho(f(z)) = \rho\left(\frac{1}{f(z)}\right)$, справедливое для любой мероморфной в D функции $f(z)$, получаем утверждение теоремы 3 для функции $\varphi_0(z) = \frac{1}{\psi(z)}$.

Замечание 8. Функция $\varphi_0(z)$ в теореме 3 не только показывает, что теорема 2 § 3 является в определенном смысле окончательной. По построению функция $\varphi_0(z)$ стремится к нулю по почти всем радиусам круга D , и ее характеристика $T_0(r, \varphi_0)$ неограничена и растет произвольно медленно, $T_0(r, \varphi) < \mu(r)$. Поэтому функция $\varphi(z)$ доставляет еще один пример того, что в терминах теоремы единственности Р. Неванлинны (§ 2) условие $T_0(r, f) = O(1)$, $r \rightarrow 1$, является наилучшим из возможных.

Замечание 9. Мейером (см. [14], стр. 130) был доказан один результат, родственный лемме из § 3: пусть функция $f(z)$ голоморфна в D и в каждой точке $\zeta = e^{i\theta}$ некоторого множества $M \subset C$ можно указать две хорды $h(\zeta, \alpha_1)$ и $h(\zeta, \alpha_2)$, на которых $f(z)$ ограничена; тогда почти всюду на M функция $f(z)$ имеет конечные угловые граничные значения. Пример Е. П. Долженко (§ 2) показывает, что эта теорема Мейера перестает быть справедливой, если предполагать ограниченность функции $f(z)$ на одной хорде $h(\zeta, \alpha_1)$ и на некоторой последовательности точек $\{z_n\}$ другой хорды $h(\zeta, \alpha_2)$, даже если последовательность $\{z_n\}$ достаточно „густа“, например, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0.$$

Замечание 10. Из построения функции $\varphi(z)$ в теореме 3 видно, что множество $F(\varphi)$ ее точек Фату пусто, в то время как по почти всем радиусам круга D она стремится к нулю. Поэтому пример функции $\varphi(z)$ показывает, что в упомянутой выше (§ 1) теореме Лехто-Виртанена условие (1) является наилучшим в терминах сферической производной $\rho(f(z))$.

Мы закончим этот параграф построением примера голоморфной в круге $|z| < 1$ функции, которая принадлежит всем классам H_δ , $\delta > 0$, а значит и классу D , (определения см. [15], стр. 78 и 116), но не удовлетворяющей условию (1), т. е. не являющейся нормальной функцией в смысле Лехто и Виртанена [10].

Рассмотрим голоморфную и неограниченную в круге $|z| < 1$ функцию

$$f_0(z) = \ln \frac{1}{1-z},$$

в которой взята главная ветвь логарифма. Функция $f_0(z)$ — нормальная: условие (1) проверяется непосредственно. Кроме того, функция $f_0(z)$ принадлежит всем классам H_δ , $\delta > 0$ (см. [15], стр. 85).

В работе Лаппана [9] доказан следующий факт: для любой голоморфной и неограниченной в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$, нормальной в смысле Лехто и Виртанена, можно указать такое произведение Бляшке $B_f(z)$, что функция $f(z) \cdot B_f(z)$ перестает быть нормальной в круге $|z| < 1$.

Такое произведение Бляшке $B_f(z)$ можно указать и для функции $f_0(z)$, так что функция $f_0(z) \cdot B_{f_0}(z)$ не удовлетворяет условию (1), но, очевидно, принадлежит всем классам H_δ , $\delta > 0$.

С другой стороны, существуют нормальные голоморфные в $|z| < 1$ функции, которые не принадлежат классу D . Это имеет место потому, что функции класса D удовлетворяют условию (2), и существуют нормальные голоморфные функции, не удовлетворяющие условию (2); например, эллиптическая модулярная функция Шварца, отображающая единичный круг $|z| < 1$ на расширенную комплексную плоскость с удаленными из нее точками 0, 1, ∞ .

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Поступило 28.III.1968

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ. Միակերպացման եզրային թեորեմների մասին (ամփոփում)

Ապացուցված են որոշ միակերպության թեորեմների միավոր շրջանում մերոմորֆ արև ֆունկցիաների համար, որոնց գնգություններն (սֆերիկ) անցյալները անհն նախորդ տված անը: Ինչպես ցույց է տալիս աշխատանքում բերված օրինակը, այդ թեորեմները չեն կարող լավացվել գնգությունների անցյալների տերմիններով:

V. I. GAVRILOV. *Boundary uniqueness theorems*
(summary)

Some uniqueness theorems for meromorphic functions in the unit disk, whose spherical derivatives possess prescribed growth are proved. An example shows that in terms of the spherical derivative the theorems cannot be improved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *F. Bagemihl*. Horocyclic boundary properties of meromorphic functions, *Annal. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. AI, № 385, 1966, p. 18.
2. *F. Bagemihl*. Chordal limits of holomorphic functions at Plessner points, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A. Div. 1, 30, № 2, 1966, 109—115.
3. *F. Bagemihl, P. Erdős, W. Sseidel*. Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes définies par certain produits dans le cercle-unité, *Ann. Sci. Ecole norm. Sup.* (3), 70, 1953, 135—147.
4. *В. И. Гаврилов*. Некоторые граничные теоремы единственности для мероморфных функций, *УМН*, 20, вып. 6, 1965, 59—63.
5. *В. И. Гаврилов*. Мероморфные в единичном круге функции с заданным ростом сферической производной, *Матем. Сб.*, 71 (113): 3, 1966, 386—404.
6. *В. И. Гаврилов*. Мероморфные и голоморфные в единичном круге функции с заданным ростом сферической производной в углах, *Сибирск. матем. журнал*, 9, № 1, 1968, 45—51.
7. *Е. П. Долженко*. О граничных теоремах единственности и поведении аналитических функций вблизи границы, *ДАН СССР*, 129, № 1, 1959, 23—26.
8. *E. F. Collingwood*. On the linear and angular cluster sets of functions meromorphic in the unit circle, *Acta math.*, 91, 3—4, 1954, 165—185.
9. *P. Lappan*. Non-normal sums and products of unbounded normal functions, *Mich. Math. J.*, 8, 1961, 187—192.
10. *O. Lehto, K. F. Virtanen*. Boundary behaviour and normal meromorphic functions, *Acta Math.*, 97, 1—2, 1957, 47—65.
11. *Н. Н. Лузин, И. И. Привалов*. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), 42, 1925, 143—191.
12. *K. Meier*. Über die Randwerte der meromorphen Funktionen, *Math. Annal.*, 142, 1961, 328—344.
13. *Р. Неванлинна*. Однозначные аналитические функции, М.—Л., ОГИЗ, ГТТА, 1941.
14. *К. Носиро*. Пределные множества, М., ИЛ., 1963.
15. *И. И. Привалов*. Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 2-ое изд., 1950.
16. *Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон*. О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданными модулями граничных значений, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 22, № 4, 1958, 543—562.

Г. М. МУШЕГЯН, Р. И. ОВСЕПЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

По теореме Кантора (см. [1]) пустое множество является U -множеством для тригонометрической системы. В связи с этим возникает вопрос, сформулированный П. Л. Ульяновым в [2]: существует ли такая ограниченная в совокупности, ортонормированная, полная в $L_2[0,1]$ система непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}$, что пустое множество является для нее M -множеством?

Следует отметить, что Агнью показал (см. [3], [4]), что для любой последовательности $\{a_n\}$ с условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty \quad (1)$$

существует на отрезке $[0,1]$ такая ортонормированная система непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ сходится к нулю всюду на $[0,1]$.

Однако методом Агнью нельзя получить полную и равномерно ограниченную систему функций с указанными свойствами*.

В настоящей работе дается положительный ответ на вопрос П. Л. Ульянова, более того, показывается, что справедлива

Теорема. *На отрезке $[0,1]$ существует ортонормированная, полная (в $L[0,1]$) система $\{\Psi_n(x)\}$ непрерывных, ограниченных в совокупности функций такая, что существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x), \quad (2)$$

удовлетворяющий условиям

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x) = 0 \quad \text{всюду на } [0,1],$$

$$б) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \infty; \quad b_k = O\left(\frac{1}{\sqrt{k \ln k}}\right), \quad k = 2, 3, \dots$$

* Разумеется, при дополнительном условии $a_n \rightarrow 0$.

§ 1. Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма. Для любой числовой последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию (1), можно построить на отрезке $[0,1]$ ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ непрерывных функций с условием

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = 0 \quad \text{всюду на } [0,1]. \quad (3)$$

Доказательство. Предположим сначала, что ни одно из чисел не равно нулю. Положим

$$B_n^2 = \frac{a_0^2}{\sum_{k=0}^n a_k^2}, \quad n=0,1,\dots, \quad (4)$$

$$A_n^2 = B_{n-1}^2 - B_n^2 = \frac{a_0^2 \cdot a_n^2}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n a_k^2\right)}. \quad (5)$$

Очевидны следующие соотношения:

$$B_0^2 = 1, \quad (6)$$

$$B_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = 1. \quad (7)$$

Пусть $\{a_n\}$, $n=1, 2, \dots$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$a_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_k^2}{\pi \cdot a_k^2} = 1. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$\beta_k = \frac{2 \cdot A_k^2}{\pi \cdot a_k^2}. \quad (9)$$

В силу (8) имеем

$$\beta_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1. \quad (10)$$

Пусть $\{\Delta_k\}$, $k=1, 2, \dots$ обозначают занумерованные слева направо непересекающиеся интервалы отрезка $[0,1]$, удовлетворяющие условию

$$\text{mes } \Delta_k = \beta_k. \quad (11)$$

Пусть далее $(x_{k-1}, x_k) \equiv \Delta_k$, $k=1, 2, \dots$

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi_0(x) = a_k \cdot \sin \left(\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \pi \right) \quad \text{при } x \in \Delta_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (12)$$

Легко убедиться в том, что из соотношений (8)–(12) следует нормированность (в L_2) и непрерывность функции $\psi_0(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Введем в рассмотрение числа

$$p_n = \frac{B_n}{A_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \frac{B_n}{A_n \cdot B_{n-1}}, \quad q_n = \frac{A_n}{B_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \frac{A_n}{B_n \cdot B_{n-1}} \quad (13)$$

и определим функции $\{\psi_n(x)\}$, $n \geq 1$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} -p_n \psi_0(x) & \text{при } x \in \bar{\Delta}_n \\ q_n \psi_0(x) & \text{при } x \in [x_n, 1] \\ 0 & \text{при } x \in [0, x_{n-1}]. \end{cases} \quad (14)$$

Очевидно, что все функции $\{\psi_n(x)\}$, $n \geq 0$ ограничены и непрерывны на отрезке $[0,1]$.

Учитывая (9)–(12), получаем

$$\int_{\Delta_n} \psi_0^2(x) dx = A_n^2, \quad n=1, 2, \dots, \quad (15)$$

откуда, в силу условия (5), вытекает

$$\int_{x_n}^1 \psi_0^2(x) dx = B_n^2, \quad n=0, 1, 2, \dots. \quad (16)$$

Из условий (5)–(16) легко вывести ортонормированность системы $\{\psi_n(x)\}$, $n=0, 1, \dots$ на отрезке $[0,1]$.

Учитывая (4)–(6), (13), легко показать справедливость соотношений

$$a_1 = \frac{a_0}{p_1}, \quad a_n = \frac{a_0}{p_n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{q_k}{p_k}\right), \quad n=2, 3, \dots, \quad (17)$$

откуда вытекает

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_n \\ a_0 \left\{ \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{q_k}{p_k}\right) \right\} & \text{при } 1 \geq x > x_n, \end{cases}$$

а это и означает выполнение условия (3).

Введем обозначение

$$\psi_m^{(k)}(x) \equiv \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{x_k - x_{k-1}}} \sin \left(m \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \pi \right), & x \in \bar{\Delta}_k \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_k, \end{cases} \quad (18)$$

$$k = 1, 2, \dots; \quad m = 2, 3, \dots$$

Очевидно, что система

$$\{\Phi_n(x)\} = \{\psi_n(x)\} + \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\psi_m^{(k)}(x); m \geq 2\} \quad (19)$$

состоит из ортонормированных и непрерывных на $[0,1]$ функций.

Если среди коэффициентов a_n есть равные нулю, то соотнесем им функции $\psi_m^{(1)}(x)$. Занумеровав подходящим образом через $\{\varphi_n(x)\}$ функции $\{\psi_n(x)\}$ и те из системы $\{\psi_m^{(1)}(x)\}$, которые соотнесены нулевым коэффициентам, получим искомую систему. Лемма доказана.

Замечание 1. Система $\{\Phi_n(x)\}$ полна в $L(0,1)$. В самом деле, конечными линейными комбинациями функций системы $\{\psi_n(x)\}$ мы можем получить любую из функций $\psi_1^{(k)}(x)^*$, $k = 1, 2, \dots$. Но при любом фиксированном k система $\{\psi_m^{(k)}(x); m \geq 1\}$ полна в $L(\bar{\Delta}_k)$, ибо система $\{\sin nx; n \geq 1\}$ полна в $L(0, \pi)$. Отсюда немедленно следует утверждение.

Таким образом, система $\{\Phi_n(x)\}$ состоит из непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, ортонормирована и полна в $L(0,1)$.

Замечание 2. Система $\{\Phi_n(x)\} - \{\varphi_n(x)\}$ содержит равномерно ограниченную подсистему, например, систему $\{\psi_m^{(2)}(x); m \geq 2\}$.

Замечание 3. Для любой последовательности чисел $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_n \uparrow 1$ систему функций $\bigcup_{k=2}^{\infty} \{\psi_m^{(k)}(x); m \geq 2\}$ можно занумеровать таким образом (пусть новой нумерации соответствует обозначение $\tilde{\psi}_1(x), \tilde{\psi}_2(x), \dots$), что выполняется неравенство

$$|\psi_n(x)| \leq c_1 M_n \quad \text{всюду на } [0,1]; n \geq 1, \quad (20)$$

где M_n — произвольная наперед заданная последовательность, стремящаяся к бесконечности; c_1 — константа, зависящая от последовательностей $\{x_k\}$ и $\{M_k\}$. Это сразу следует из того, что для фиксированного $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$|\psi_m^{(k)}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{x_k - x_{k-1}}}; \quad m \geq 2. \quad (21)$$

В доказательстве теоремы используются матрицы

$$A_k = \|a_{ij}^{(k)}\| \quad (1 \leq i, j \leq 2^k; k = 1, 2, \dots),$$

введенные А. М. Олевским в работе [5].

Приведем их определение и нужные нам свойства (доказательства см. в [5]).

Положим

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \quad (1 \leq j \leq 2^k). \quad (22)$$

Пусть далее $1 < i \leq 2^k$. Тогда

* Функции $\psi_1^{(k)}(x)$ определяются по формуле (18), если в ней положить $m=1$.

$$i = 2^s + \nu \quad (1 \leq \nu < 2^s, \quad 0 \leq s \leq k-1). \quad (23)$$

Положим

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (\nu-1)2^{k-s} + 1 \leq j \leq (2\nu-1) \cdot 2^{k-s-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (2\nu-1)2^{k-s-1} + 1 \leq j \leq \nu \cdot 2^{k-s} \\ 0 & \text{— для остальных } j. \end{cases} \quad (24)$$

Свойства матриц A_k :

1°. Матрица A_k ортонормирована при каждом $k > 1$;

$$2^\circ. \quad \sum_{j=1}^{2^k} a_{rj}^{(k)} = 0 \quad (r > 1);$$

3°. Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| < C_2; \quad \sum_{j=1}^{2^k} |a_{ij}^{(k)}| \leq 2^{k/2}, \quad 1 \leq i, j \leq 2^k; \quad k > 1,$$

где C_2 —абсолютная константа;

$$4^\circ. \quad \sum_{i=1}^{2^k} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(k)} \right| < C_3 \cdot 2^{k/2}.$$

§ 2. Доказательство теоремы

Сначала покажем, что для любой последовательности чисел $\{a_k; k > 0\}$, не равных нулю и удовлетворяющих (1) и условиям

$$a_k \rightarrow 0, \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \right)^2 \leq C_4 \cdot a_n^2 \cdot 2^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

(C_4 —константа, зависящая от $\{a_k\}$) можно построить на отрезке $[0,1]$ ортонормированную, полную, равномерно ограниченную систему $\{\Psi_n(x)\}; n > 0\}$ непрерывных функций так, что ряд

$$a_0 \Psi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{2^k}} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k} \Psi_i(x) \quad (26)$$

сходится к нулю всюду на $[0,1]$.

Пусть $\{\varphi_n(x); n > 0\}$ — система, которая получается, если к нашей последовательности $\{a_k\}$ применить лемму*, и пусть $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, x_n \uparrow 1$ означает последовательность нулей, лежащих левее единицы функции $\varphi_0(x)$, занумерованную слева направо.

Определим функции $\psi_m^{(k)}(x), k > 1; m > 1$ по формуле (18).

* Следует учесть, что, поскольку среди a_n нет равных нулю, то система $\{\varphi_n(x)\}$ совпадает с системой $\{\psi_n(x)\}, n > 0$ (см. (14)).

В силу замечаний 1, 2 система $\{\Phi_n(x)\}$ (см. 19) полна в $L[0,1]$ и содержит равномерно ограниченную подсистему $\{\psi_n^{(1)}(x); m \geq 2\}$.

Пусть $\{\tilde{\psi}_n(x); n \geq 1\}$ — функции $\psi_m^{(k)}(x)$, $m \geq 2$; $k \geq 2$, занумерованные согласно замечанию 3, где в качестве $\{M_n\}$ взята произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$M_n = o\left(\frac{1}{a_n}\right). \quad (27)$$

Следовательно эти функции удовлетворяют соотношению (20).

Из соотношений (13), (4) — (6) легко вывести равенства

$$p_n^2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2}{a_0 \cdot a_n^2}, \quad q_n^2 = \frac{a_n^2}{a_0^2}. \quad (28)$$

Из условий (25) следует, что

$$p_n^2 \leq c_5 \cdot 2^n; \quad q_n^2 \leq c_5 \cdot 2^n, \quad n \geq 1, \quad (29)$$

где c_5 — некоторая константа, зависящая от последовательности $\{a_k\}$.

Учитывая условия (8), (12), (14), (29), а также то обстоятельство, что в нашем случае

$$\varphi_n(x) \equiv \psi_n(x) \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

получаем неравенства

$$|\varphi_n(x)| \leq c_6 \cdot \sqrt{2^n}, \quad n \geq 0. \quad (30)$$

Теперь определим искомую систему $\{\psi_n(x)\}$, $n \geq 0$. Пусть

$$\Psi_0(x) \equiv \varphi_0(x), \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x) &= a_{11}^{(1)} \varphi_1(x) + a_{21}^{(1)} \psi_2^{(1)}(x) \\ \Psi_2(x) &= a_{12}^{(1)} \varphi_1(x) + a_{22}^{(1)} \psi_2^{(1)}(x) \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

Введем обозначение

$$\gamma_k = 3 + \sum_{l=1}^k (2^l - 2), \quad k \geq 1. \quad (33)$$

Для $m = 2^k - 2 + i$, где $1 \leq i \leq 2^k$, $k \geq 2$, функцию $\Psi_m(x)$ определим следующим образом:

$$\Psi_m(x) = a_{1i}^{(k)} \varphi_k(x) + a_{2i}^{(k)} \tilde{\psi}_{k-1}(x) + \sum_{r=3}^{2^k} a_{ri}^{(k)} \psi_{\gamma_{k-1} + r - 2}^{(1)}(x). \quad (34)$$

Покажем, что ряд (26) сходится к нулю на $[0,1]$.

В силу условия 2° и формул (22), (32), (34) получим

$$\frac{a_k}{\sqrt{2^k}} \cdot \sum_{l=2^{k-1}}^{2^k} \Psi_l(x) = a_k \varphi_k(x), \quad k=1, 2, \dots; \quad x \in [0, 1], \quad (35)$$

и следовательно ряд

$$a_0 \Psi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{2^k}} \left\{ \sum_{l=2^{k-1}}^{2^k} \Psi_l(x) \right\} \quad (36)$$

совпадает с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, который сходится всюду на $[0,1]$ к нулю.

Введем обозначение

$$\delta_k(x) = \max_{2^{k-1} < m < 2^k} \left\{ |a_k| \cdot 2^{-k/2} \cdot \left| \sum_{l=2^{k-1}}^m \Psi_l(x) \right| \right\}. \quad (37)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=2^{k-1}}^m \Psi_l(x) \right| &= \left| \sum_{l=2^{k-1}}^m \left\{ a_{1l}^{(k)} \varphi_k(x) + a_{2l}^{(k)} \tilde{\psi}_{k-1}(x) + \sum_{r=3}^{2^k} a_{rl}^{(k)} \psi_{1k-1+r-2}^{(1)}(x) \right\} \right| \leq \\ &\leq |\varphi_k(x)| \cdot \sum_{l=2^{k-1}}^m |a_{1l}^{(k)}| + |\tilde{\psi}_{k-1}(x)| \sum_{l=2^{k-1}}^m |a_{2l}^{(k)}| + \left| \sum_{r=3}^{2^k} \psi_{1k-1+r-2}^{(1)}(x) \cdot \sum_{l=1}^m a_{rl}^{(k)} \right|. \end{aligned}$$

Вторая сумма в силу условия 3° и (20) не превосходит $c_1 \cdot M_n \cdot 2^{n/2}$, а третья сумма, в силу условия 4° и (21), не больше, чем $c_3 \sqrt{\frac{2}{x_1}} \cdot 2^{n/2}$.

Первая сумма равна нулю для $x \leq x_{k-1}$ ($x_k \uparrow 1$). Сравнивая полученные соотношения с (37), (27), (25), получаем, что $\delta_k(x) \rightarrow 0$ для всех $x \in [0, 1]$, откуда следует сходимость ряда (26).

Взяв для $n = 2^k - 1 + i$ ($1 \leq i \leq 2^k$; $k \geq 1$)

$$b_n = \frac{a_k}{\sqrt{2^k}} \quad (38)$$

и положив в (38) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}^*$, получим для b_k требуемую оценку.

Замечание 4. Несложные вычисления показывают, что в оценке для b_k (см. условие б) теоремы) под корнем можно написать любое итерированное число логарифмов; например, справедливо утверждение

$$b_m = O\left(\frac{1}{\sqrt{m \cdot \ln m \cdot \ln \ln m}}\right).$$

Для этого достаточно положить $a_k = \frac{1}{\sqrt{k \cdot \ln k}}$.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 23.I.1969

* Последовательность $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k = 1, 2, \dots$, очевидно, удовлетворяет условию (25).

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ, Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Օրթոգոնալ շարքերի միակության մասին (ամփոփում)

Պ. Լ. Ուլյանսի կողմից [2] աշխատանքում ձևակերպված էր հետևյալ խնդիրը՝ «Գոյություն ունի արդյոք իր համախմբության մեջ սահմանափակ, անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված $\{f_n(x)\}$ L_2 -ում լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ, որի համար դատարկ բազմությունը միակության բազմություն չէ»:

Ներկա աշխատանքում ցույց է տրվում, որ նշված խնդիրը ունի դրական լուծում:

G. M. MUSHEGHIAN and R. I. HOVSEPIAN. *On the uniqueness of orthogonal series* (summary)

The problem under consideration was proposed by Uljanov in [2],
Does a system of uniformly bounded orthonormal, complete in L_2 continuous functions exist, for which the empty set is an M-set?

The present paper shows, that the answer is Yes.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
2. П. А. Ульянов. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, XIX, вып. 1, 1964.
3. R. P. Agnew. Convergence of orthogonal series, Duke Mathematical Journal, 27, № 2, 1960, 127—131.
4. Р. П. Аиню. Сходимость ортогональных рядов, Математика, сб. переводов, 6:1, 1962, 60—64.
5. А. М. Оловский. Об одной ортонормальной системе и ее применениях, Матем. сб., 71 (113): 3, 1966, 297—337.

Ф. А. ШАМОЯН

О ЗАМКНУТЫХ ИДЕАЛАХ В ОДНОЙ АЛГЕБРЕ БЫСТРО
РАСТУЩИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В последнее время появился ряд работ, посвященных описанию замкнутых идеалов в алгебрах аналитических функций ([3]—[8]). В этих работах важную роль играют различные способы факторизации функций.

Цель настоящей работы—описать замкнутые идеалы в снабженной естественной топологией алгебре всех функций f , аналитических в единичном круге U и таких, что $|f(z)| = O(\exp(1-|z|)^{-N})$ при некотором $N > 0$ (см. ниже теорему, формулируемую в конце статьи). Мы будем существенно использовать установленные М. М. Джрбашяном параметрические представления классов A_α [13].

Введем следующие обозначения:

1. U_R — открытый круг с центром в нуле и радиуса R .
2. $U = U_1$ — открытый единичный круг.
3. $H(U)$ — множество всех функций, аналитических в U .
4. Пусть $\alpha > 0$. Символом X_α обозначим множество

$$\left\{ f: f \in H(U), \|f\|_\alpha = \sup_{z \in U} |f(z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^\alpha}\right) < +\infty \right\}.$$

Снабжая X_α нормой $\|\cdot\|_\alpha$, мы превратим это множество в банахово пространство (алгебраические операции определяются естественным образом).

$$5. \quad X = \bigcup_{\alpha > 0} X_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Лемма 1. При любом натуральном n $X_n \subset X_{n+1}$. Оператор вложения пространства X_n в X_{n+1} вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть $0 < \rho < 1$. Символом E_ρ обозначим оператор, сопоставляющий функции $f \in H(U)$ функцию $E_\rho(f) \in H(U)$, заданную в U так:

$$E_\rho(r)(z) = f(\rho z) \quad (|z| < 1).$$

Пусть $S_n = \{f \in X_n : \|f\|_n \leq 1\}$. Проверим, что

$$\|f - E_\rho(f)\|_{n+1} \xrightarrow{\rho \rightarrow 1-0} 0$$

равномерно относительно f из S_n . Тогда из известной теоремы ([2], стр. 278) будет следовать утверждение леммы.

Если $f \in S_n$, то

$$|f(z) - f(\rho z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^{n+1}}\right) \leq |f(z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^{n+1}}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \exp \left[\frac{1}{(1-\rho|z|)^n} - \frac{1}{(1-|z|)^{n+1}} \right] \leq \exp \left(-\frac{1}{(1-|z|)} \right) + \\
& + \exp \left[\frac{1}{(1-\rho|z|)^n} - \frac{1}{(1-|z|)^{n+1}} \right] < \exp \left(-\frac{1}{(1-|z|)} \right) + \\
& + \exp \left(-\frac{|z|}{(1-|z|)^{n+1}} \right)
\end{aligned}$$

при всех $\rho \in (0, 1)$ и всех $z \in U$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $r_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$|f(z) - f(\rho z)| \exp \left(-\frac{1}{(1-|z|)^{n+1}} \right) < \varepsilon$$

для всех $f \in S_n$, $\rho \in (0, 1)$ и z , удовлетворяющих неравенству $r_0 < |z| < 1$.

Легко видеть, что семейство функции S_n равностепенно непрерывно на замкнутом круге $\bar{U}_{r_0}$. Поэтому существует такое число $\rho_* \in (0, 1)$, что неравенство

$$|f(z) - f(\rho z)| < \varepsilon$$

верно при всех $\rho \in (\rho_*, 1)$, $z \in U_{r_0}$ и $f \in S_n$. Значит, при любых $\rho \in (\rho_*, 1)$ и $f \in S_n$

$$|f - E_\rho(f)| < \varepsilon.$$

Доказательство закончено.

В линейном множестве X введем топологию индуктивного предела последовательности банаховых пространств X_n . Из леммы 1 следует, что X превращается в пространство типа LN^* (см. [2], стр. 412). Напомним, что множество $F \subset X$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда $F \cap X_n$ замкнуто в X_n при любом $n = 1, 2, \dots$.

Лемма 2. *Пространство X , снабженное топологией индуктивного предела последовательности пространства $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, есть топологическая алгебра (относительно поточечного умножения).*

Доказательство. Заметим, что для доказательства леммы достаточно установить замкнутость множества $T^{-1}(F)$ в $X \times X$ для любого замкнутого множества $F \subset X$, где T — оператор умножения: $T(\varphi, \psi) = \varphi \cdot \psi$. Учитывая, что $X \times X$ является LN^* — пространством, достаточно доказать замкнутость $T^{-1}(F) \cap (X_n \times X_n)$ при любых значениях $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что

$$(x_\rho, y_\rho) \in T^{-1}(F) \cap (X_n \times X_n)$$

и допустив, что последовательность $\{(x_\rho, y_\rho)\}_{\rho=1}^\infty$ сходится в топологии $X_n \times X_n$ к элементу (x, y) , докажем, что $x \cdot y = T(x, y) \in F \cap X$. Это вытекает из следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
& |T(x_\rho, y_\rho) - T(x, y)|_{n+1} = \sup_{z \in U} |x_\rho(z) \cdot y_\rho(z) - \\
& - x(z) \cdot y(z)| \exp \left(-\frac{1}{(1-|z|)^{n+1}} \right) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq c_0 \cdot \sup_{z \in U} |y_p(z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^n}\right) \sup_{z \in U} |x_p(z) - x(z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^n}\right) + \sup |x(z)| \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^n}\right) \cdot \sup_{z \in U} |y_p(z) - y(z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)^n}\right),$$

где c_0 — некоторое положительное число и в силу того, что $x_p \rightarrow x$, $y_p \rightarrow y$ в X_n , существует положительное число N такое, что $\|x_p\|_n, \|y_p\|_n \leq N$, $p = 1, 2, \dots$, так что $x_p \cdot y_p \rightarrow x \cdot y$ в топологии X_{n+1} . Но множество $F \cap X_{n+1}$ замкнуто в X_{n+1} . Следовательно получаем, что $(x, y) \in T^{-1}(F) \cap (X_n \times X_n)$. Лемма полностью доказана.

Пусть k — неотрицательная целочисленная функция, заданная в U такая, что множество $V\{z: k(z) > 0\}$ не имеет точки сгущения в U . Такую функцию k мы будем называть дивизором. Пусть $\alpha > 0$ и пусть

$$\sum_{z \in U} (1-|z|)^{1+\alpha} k(z) < +\infty. \quad (1)$$

Символом $B_k^{(\alpha)}$ мы будем обозначать произведение типа Бляшке, множество нулей которого есть $\{z \in U: k(z) > 0\}$, причем кратность нуля в точке z равна $k(z)$ (см. [1], стр. 622, формула (3, 4)). Каждой функции $f \in H(U)$ соответствует дивизор k_f , который определяется так: $k_f(z)$ равняется кратности нуля $z \in U$ для функции f .

Лемма 3. Если $f \in X$, то существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для любого $\alpha > \alpha_0$

$$f = B_{k_f}^{(\alpha)} \Phi_\alpha,$$

где $\Phi_\alpha \neq bU$ и, кроме того, $\Phi_\alpha, \Phi_\alpha^{-1} \in X$.

Доказательство. Пусть $f \in X$, тогда $f \in X_{\alpha_0}$ при некотором $\alpha_0 > 0$. Поэтому

$$\sup_{z \in U} |f(z)| \exp\left(-\frac{1}{(1-|z|)_{\alpha_0}}\right) < +\infty.$$

Вспоминая определение класса A_α (см. [1], стр. 655), мы заключаем, что $f \in A_\alpha$ при всех $\alpha > \alpha_0$. Используя теорему о параметрическом представлении для класса A_α , (см. [1], стр. 655, теорема 9,13), получаем

$$f = B_{k_f}^{(\alpha)} \Phi_\alpha,$$

где

$$\Phi_\alpha(z) = \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta), \quad S_\alpha(z) = \\ = \Gamma(1+\alpha) \left(\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right),$$

$\psi(\theta)$ — некоторая функция, имеющая конечное изменение в промежутке $[-\pi, \pi]$. Очевидно, что

$$|\Phi_\alpha(z)|, |\Phi_\alpha^{-1}(z)| < \exp \frac{c}{(1-|z|)^{\alpha+1}},$$

где c — некоторое положительное число. Значит $\Phi_\alpha, \Phi_\alpha^{-1} \in X$ при всех α , больших α_0 . Лемма доказана.

Если k — дивизор, а $r \in (0, 1)$, то обозначим через $k(r)$ дивизор, равный k в U_r и равный нулю в U/U_r .

Лемма 4. Если выполняется условие (1), то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{B_k^{(\alpha)}}{B_{k(r)}^{(\alpha)}} = 1 \quad (2)$$

(имеется в виду предел в топологии пространства X).

Доказательство. Достаточно проверить, что семейство функций

$$\left\{ \frac{B_k^{(\alpha)}}{B_{k(r)}^{(\alpha)}} \right\} \quad (r \in (0, 1)),$$

содержится в X_n при некотором n и ограничено в X_n . Действительно

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{B_k^{(\alpha)}}{B_{k(r)}^{(\alpha)}}(z) = 1$$

при любом $z \in U$ — это следует из сходимости бесконечного произведения $B_k^{(\alpha)}(z)$ (см. [1], стр. 622). Если будет доказана ограниченность нашего семейства в X_n , то из леммы 1 будет следовать, что (2) выполняется в топологии пространства X_{n+1} и тем более в X .

Пусть

$$A_\alpha(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp - W_\alpha(z, \zeta)$$

(мы пользуемся обозначением монографии [1], где

$$\begin{aligned} W_\alpha(z, \zeta) = & \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \times \\ & \times \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x^{k+1}} dx \right\} (z)^k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это выражение можно написать в следующем виде:

$$W_\alpha(z, \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1 - \frac{z\zeta}{x}\right)^{\alpha+1}} \frac{dx}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \times$$

$$\times \left\{ \int_{|z|^a}^{|z|} (1-x)^a x^{k-1} dx \right\} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{|z|^a} (1-x)^a x^{k-1} dx \right\} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k = I_1 - I_2 - I_3. \quad (3)$$

Нужно оценить $A_\alpha(z, \zeta)$. Имеем

$$|I_1| \leq \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha+1}}{\delta(1-|z|)^{\alpha+1}}, \quad (4)$$

$$|I_2| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} (|z|)^k \int_{|z|^a}^{|z|} \frac{(1-x)^a}{x} dx <$$

$$< \frac{2^{\alpha+1}}{\delta^2} \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha+1}}{(1-|z|)^{\alpha+1}} \quad (5)$$

при всех $z \in U$ и $|\zeta| > \delta$, где δ — некоторое положительное число. Поэтому достаточно оценить

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp I_3 = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \times$$

$$\times \exp \left(- U_\alpha(z, \zeta) + \int_{|z|^a}^1 \frac{(1-x)^a}{x} dx \right),$$

где

$$U_\alpha(z, \zeta) = \int_{|z|^a}^1 \frac{(1-x)^a}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \times$$

$$\times \int_0^{|z|^a} (1-x)^a x^{k-1} dx \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k.$$

Предположим, что $\alpha = p$ — целое число. Как доказано в [10] справедливо следующее равенство:

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp - U_p(z, \zeta) = \left(1 - \frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right) \times$$

$$\times \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z} \right)^k \right).$$

Но можно доказать (см., например, [12]), что

$$\left| \left(1 - u\right) \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{u^k}{k} \right) \right| \leq \exp c_p |u|^{p+1}$$

при любом u , где c_p не зависит от u . Поэтому, учитывая (3), (4), (5), получаем

$$|A_{p+1}(z, \zeta)| < \exp c_p \frac{(1-|\zeta|)^{p+1}}{(1-|z|)^{p+1}}$$

при любых $z \in U$ и $|\zeta| > \delta$, где δ — некоторое положительное число.

Лемма доказана для случая целого α (в дальнейшем мы могли бы ограничиться только этим случаем, но ради полноты мы рассмотрим и нецелые α). Пусть α — нецелое положительное число и p — целая часть α . Тогда по свойству классов A_α при любом $\zeta \in U$ функция $z \rightarrow A_\alpha(z, \zeta)$ принадлежит A_{p+1} . Следовательно можно написать представление этой функции в классе A_{p+1} . Учитывая свойства функции $U_\alpha(re^{i\theta}, \zeta) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |A_\alpha(re^{i\theta}, \zeta)|$ и операторов $D^{-\alpha}$ (см. [1], стр. 517, 617), легко установить, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(re^{i\theta}, \zeta)| = D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)|$$

равномерно относительно $\theta \in [-\pi, \pi]$. Поэтому имеем

$$A_\alpha(z, \zeta) = A_{p+1}(z, \zeta) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{p+1}(ze^{-i\theta}) D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)| d\theta \right\}.$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} |A_\alpha(z, \zeta)| &< |A_{p+1}(z, \zeta)| \exp \left\{ \frac{2\Gamma(p+2)}{\pi(1-|z|)^{p+2}} \times \right. \\ &\times \left. \int_{-\pi}^{\pi} |D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)|| d\theta \right\}. \end{aligned}$$

И, наконец, при любом $r \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(re^{i\theta}, \zeta)| &= D^{-(p+1-\alpha)} D^{-\alpha} \times \\ &\times (\log |A_\alpha(re^{i\theta}, \zeta)| = D^{-(p+1-\alpha)} r^\alpha U_\alpha(re^{i\theta}, \zeta). \end{aligned}$$

Но $U_\alpha(re^{i\theta}, \zeta) \leq 0$ при любых $r \in (0, 1)$ и $\theta \in [-\pi, \pi]$ (см. [1], стр. 617). Поэтому $D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)| \leq 0$ при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Согласно обобщенной формуле Иенсена (см. [1], стр. 605) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(p+2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D^{-(p+1)} \log |A_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)| d\theta = \\ &= W_{p+1}(0, \zeta) - W_\alpha(0, \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^{p+1} - (1-x)^\alpha}{x} dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$0 < W_\alpha(0, \zeta) - W_{p+1} < \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Таким образом

$$|A_\alpha(z, \zeta)| < |A_{\alpha+1}(z, \zeta)| \exp \frac{4}{\alpha+1} \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha+1}}{(1-|z|)^{\alpha+2}}$$

($z, \zeta \in U$). Учитывая (6), получаем

$$|A_\alpha(z, \zeta)| \leq \exp c_\alpha \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha+1}}{(1-|z|)^{\alpha+2}}$$

при любых $z, \zeta \in U$, $|\zeta| > \delta$, где c_α и δ — некоторые положительные числа. Из этой оценки и сходимости ряда (1) легко следует, что

$$\frac{B_k^{(\alpha)}}{B_{k(r)}^{(\alpha)}} \in X, \quad (\beta \geq \alpha + 2)$$

при любом $r \in (0, 1)$.

Лемма полностью доказана.

Пусть J — идеал в алгебре X . Через k_J обозначим дивизор, определенный следующим образом:

$$K_J = \inf_{f \in J} k_f. \quad (7)$$

Если k — дивизор, то через J_k будем обозначать множество

$$\{f \in X : k_f \geq k\}.$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. Пусть J — замкнутый идеал в алгебре X . Тогда

1. $J = \{f \in X : k_f \geq k_J\}$;

2. Пусть k — дивизор ($k \neq 0$), удовлетворяющий условию (1) при некотором $\alpha \geq 0$. Тогда множество

$$\{f \in X : k_f \geq k\}$$

есть замкнутый идеал в X ;

3. Всякий замкнутый идеал в X — главный, точнее, если J — замкнутый идеал в X , то существует $\alpha \geq 0$ такое, что

$$J = B_k^{(\alpha)} X,$$

где k — некоторый дивизор.

Доказательство мы проведем, опираясь на леммы 1—4, аналогично тому, как это сделано в [5]. Легко видеть, что J_{k_J} является замкнутым идеалом в X , где k_J определяется по (7). Чтобы доказать равенство $J = J_{k_J}$, достаточно установить включение $J_{k_J} \subset J$, так как обратное включение очевидно. Если $f \in J$, то $B_{k_f}^{(\alpha)} \in J$. Действительно $f = B_{k_f}^{(\alpha)} \Phi_\alpha$ (см. лемму 3), где $\Phi_\alpha, \Phi_\alpha^{-1} \in X$. Значит $B_{k_f}^{(\alpha)} = f \cdot \Phi_\alpha^{-1} \in J$.

Согласно лемме 4

$$(X) - \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{B_{k_f}^{(\alpha)}}{B_{k_f(r)}^{(\alpha)}} = G = G$$

для любого $G \in X$. Докажем, что если $G \in J_{k_f}$, то $\frac{B_{k_f}^{(a)}}{B_{k_f}^{(a)}(r)} G \in J$, для этого достаточно установить, что если z_0 такая точка, в которой

$$k_f(z_0) - k_f(z_0) > 0,$$

то

$$\frac{B_{k_f}^{(a)}}{B_{z_0}^{(a)}} \in J,$$

где

$$B_{z_0}(z) = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \exp - W_+(z, z_0).$$

Пусть $h \in J$, $h(z_0) = 0^*$ и пусть

$$G_1(z) = \frac{h(z_0) - h(z)}{B_{z_0}^{(a)}}, \quad G_2(z) = \frac{B_{k_f}^{(a)}}{B_{z_0}^{(a)}} (z \in U).$$

Функции G_1, G_2 принадлежат X . Поэтому

$$B_{k_f}^{(a)} G_1 + h G_2 \in J.$$

Так как

$$h(z_0) \frac{B_{k_f}^{(a)}}{B_{z_0}^{(a)}} = G_1 B_{k_f}^{(a)} + G_2 h \rightarrow \frac{B_{k_f}^{(a)}}{B_{z_0}^{(a)}} \in J,$$

то мы получаем утверждение 1. Утверждение 2 очевидно, а утверждение 3 следует из утверждения 1 и леммы 3. Доказательство закончено.

Замечание. Пусть J — замкнутый идеал в X . Следующие утверждения равносильны.

1. $J = \{0\}$;
2. Существует число $\beta > 0$ такое, что

$$\sum_{z \in U} (1 - |z|)^\beta k_f(z) < +\infty.$$

В доказательстве теоремы существенную роль играла природа мажорант, с помощью которых определились множества X_1 . Мы использовали конкретный аналитический аппарат, разработанный в [1]. Возникает вопрос: верна ли аналогичная теорема для других алгебр растущих функций, аналитических в U ? Нижеследующий пример показывает, что это вообще говоря не так. Мы построим алгебру функций, содержащую нетривиальный замкнутый идеал J , для которого $k_f(z) \equiv 0$ при любом $z \in U$, хотя эта алгебра содержит функцию, растущую достаточно быстро при приближении к единичной окружности.

* Случай простого нуля функции f . Аналогичным образом рассматривается и случай кратного нуля.

Пусть α — некоторое положительное число, и пусть

$$Y_\alpha = \{f \in H(U) : \sup |f(z)| (1 - |z|)^2 < +\infty,$$

$$Y = \bigcup_{\alpha > 0} Y_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Снабдив множество Y топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств Y_n (как в начале статьи), мы превратим его в пространство типа LN^* и топологическую алгебру.

Пусть

$$S(z) = \exp \left(-\frac{1+z}{1-z} \right) \quad (z \in U).$$

Докажем, что множество $J = SY$ является замкнутым нетривиальным идеалом в Y . Наше доказательство по идее близко к рассуждениям В. М. Келдыша, проведенным в связи с одной задачей среднеквадратичной аппроксимации [9].

Пусть $\psi \in \overline{J}$, тогда существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in Y$, $n = 1, 2, \dots$ такая, что при некотором m

$$(Y_m) - \lim_{n \rightarrow \infty} S f_n = \psi. \quad (8)$$

Можно считать, что f_n — многочлены. Это следует из плотности множества всех многочленов в Y . Проверим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в Y . Тогда из монтелиовости пространства Y будет следовать, что

$$(Y) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = h, \quad \text{где } h \in Y.$$

Пусть

$$\gamma = \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}.$$

Отметим, что

$$|1 - \zeta| \leq c_1 (1 - |\zeta|)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при всех } \zeta \in \gamma \quad (9)$$

(c_k , $k = 1, 2, \dots$ — абсолютные постоянные).

Учитывая (8), (9), получаем

$$\sup_n \sup_{\zeta \in \gamma} |f_n(\zeta) S(\zeta) (1 - \zeta)^{2m}| \leq c_2.$$

Но так как $|S(z)| \geq c_3$ при

$$\left| \frac{1}{2} - z \right| \geq \frac{1}{2}, \quad (10)$$

получаем

$$\max_{\zeta \in \gamma} |f_n(\zeta) (1 - \zeta)^{2m}| \leq c_4, \quad n = 1, 2, \dots$$

По принципу максимума такое неравенство верно и внутри γ . Поэтому

$$\sup_n \sup_z |f_n(z)| (1-|z|)^{2m} \leq \sup_n \sup_z |f_n(z)| (1-|z|)^{2m} \leq c_4$$

внутри γ . Но ввиду (8) и (10) получаем

$$\sup_n \sup_{z \in U} |f_n(z)| (1-|z|)^{2m} \leq c_5.$$

Доказательство закончено.

Отметим, что Y можно истолковать как некоторое пространство обобщенных функций на окружности (см. [11]).

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. П. Хавину за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный
университет

Поступило 28.III.1969

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Փակ իդեալների մասին արագ աճող անալիտիկ ֆունկցիաների մի ալգեբրայում (ամփոփում)

Վերջին ժամանակներս դարս է եկել աշխատանքների մի շարք՝ ([8]-[8]) նվիրված փակ իդեալների նկարագրմանը անալիտիկ ֆունկցիաների ալգեբրաներում: Այդ աշխատանքներում կարևոր դեր են խաղում ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տարբեր եղանակները:

Ներկա աշխատանքի նպատակն է նկարագրել փակ իդեալները միավոր շրջանում անալիտիկ և $f(z) = O(\exp(1-|z|)^{-N})$, $N > 0$ պայմանին բավարարող $I(z)$ ֆունկցիաների ալգեբրայում, ընդ որում այստեղ էապես օգտագործվում են U , U . Ջրբաշյանի կողմից ստացված A_α դասերի պարամետրական ներկայացումները [13]:

F. A. SHAMOYAN. On closed ideals in an algebra of fast growing analytic functions (summary)

The closed ideals in an algebra of analytic in the unit circle functions f , satisfying $f(z) = O(\exp(1-|z|)^{-N})$, $N > 0$ are considered, the algebra being supplied with natural topology.

The parametric representation of A_α classes, due to Dzrbashian is essentially used.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области, М., Изд. "Наука", 1966.
2. Л. В. Канторович, Р. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.
3. И. Ф. Красичков. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 1967, 37—60.
4. И. Ф. Красичков. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций, Алгебры минимального типа, Сиб. мат. ж., 9, № 1, 1968, 77—96.
5. Н. К. Никольский. Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций, Сиб. мат. ж., 9, № 1, 1968, 211—215.
6. П. К. Рашевский. О замкнутых идеалах в одной счетно нормированной алгебре целых функций, ДАН СССР, 162, № 3, 1965, 513—515.
7. L. A. Rubel, A. L. Shields. The space of bounded analytic functions on a region, Annales de l'inst Fourier, XVI, № 1, 1966, 255—277.

8. *L. Ehrenpreis*. Mean periodic functions, part I. Varieties whose annihilator ideal are principal, Amer. J. Math., 77, № 2, 1955, 233—328.
9. *М. В. Келдыш*. Sur l'approximation en moyenne par polynômes des fonctions d'une variable complexe, Матем. сб., 16 (58), 1945, 1—20.
10. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Армянской ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
11. *G. Kothe*. Die Randverteilungen analytischer Funktionen, Math. Z., 58, 1952, 13—33.
12. *Б. Я. Левин*. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

С. Г. ОВСЕПЯН

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ $L_p(D)$ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ БОЛЕЕ ГЛАДКИМИ ОБОБЩЕННЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В этой заметке мы придерживаемся определений и обозначений, принятых, например, в работе [2].

В допустимой выпуклой области D с границей Γ рассматривается однородная задача Дирихле

$$(1 + \lambda) U_{xx} - (1 - \lambda) U_{yy} = 0, \quad (1)$$

$$U|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где λ — действительный параметр с модулем, меньшим единицы.

Хорошо известно, что к необходимости исследования такой задачи приводит изучение спектральных свойств операторов, порожденных уравнением С. А. Соболева.

В работе [1] построено порождающее множество граничных точек задачи (1), (2) для класса кусочно непрерывных функций и с помощью него доказана полнота кусочно постоянных собственных функций в классе всех кусочно непрерывных собственных функций этой задачи.

В [2] построено порождающее множество граничных точек той же задачи для класса измеримых функций, которое дало возможность с любой степенью точности аппроксимировать любую обобщенную собственную функцию (ОСФ) из $L_p(D)$ так называемыми элементарными ОСФ.

Известно, что собственные функции задачи (1), (2), вообще говоря, не являются гладкими, и поэтому естественно изучить возможность аппроксимации любой ОСФ из $L_p(D)$ наиболее гладкими собственными функциями.

Заметим, что в этом смысле система элементарных ОСФ не является самой лучшей, так как элементарная ОСФ может быть разрывной во всех точках счетного множества характеристик уравнения (1).

Дело в том, что, как хорошо известно, для большинства областей даже наиболее гладкие собственные функции задачи (1), (2) обязаны иметь разрывы в точках некоторого множества характеристик уравнения (1) и что лишь для исключительных областей эта задача может обладать всюду гладкими собственными функциями.

В этой заметке для каждого неэргодического значения λ выделяется не более чем счетное множество характеристик уравнения (1)

и доказывается, что множество ОСФ, каждая из которых является гладкой всюду за исключением точек, лежащих на конечном числе характеристик из выделенного множества, полно в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, соответствующих тому же ОСЗ λ .

Доказательство этого утверждения, так же как и теоремы из [2] о полноте элементарных ОСФ в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, основано на аппроксимации инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^- функций на построенном в [2] порождающем множестве, и поэтому представляется необходимым напомнить о некоторых построениях из этой работы.

Введем на Γ в качестве параметра длину дуги s , отсчитываемую от некоторой фиксированной точки так, чтобы возрастанию s соответствовал обход против часовой стрелки. В терминах этого параметра каждый автоморфизм T границы Γ описывается определенной на всей оси вещественной функцией $g(s)$, которая определяется следующим образом: для каждого s

$$g(s) = s + |(\theta, T\theta)|,$$

где θ та точка на Γ , параметр которой равен s , а $|(\theta, T\theta)|$ — длина той дуги, образованной точками θ и $T\theta$, которая получается при движении от точки θ до $T\theta$ против часовой стрелки. Функция $g(s)$ очевидно является периодической в том смысле, что $g(s+l) = g(s) + l$, где l — длина кривой Γ .

Пусть $g_\lambda^+(s)$ и $g_\lambda^-(s)$ — функции, соответствующие описанным образом автоморфизмам S_λ^+ и S_λ^- . Очевидно, что произведению автоморфизмов будет соответствовать суперпозиция соответствующих функций. Поэтому, если обозначить через $g_\lambda(s)$ и $g_\lambda^k(s)$ функции, соответствующие автоморфизмам $S_\lambda = S_\lambda^- \cdot S_\lambda^+$ и S_λ^k , то $g_\lambda(s) = g_\lambda^-(g_\lambda^+(s))$, $g_\lambda^k(s) = g_\lambda(g_\lambda^{k-1}(s))$ при $k > 0$, $g_\lambda^0(s) \equiv s$, а при $k < 0$ $g_\lambda^k(s) = g_\lambda^{-1}(g_\lambda^{+1}(s))$, где $g_\lambda^{-1}(s) = g_\lambda^+(g_\lambda^-(s))$, которая соответствует автоморфизму S_λ^{-1} .

Пусть далее x_λ^+, y_λ^+ — прямоугольная система координат, ось y_λ^+ которой параллельна характеристикам уравнения (1), принадлежащим первому семейству. Рассмотрим функцию $x_\lambda^+(s)$, которая каждому значению s сопоставляет в этой системе координат абсциссу характеристики первого семейства, проходящей через ту точку $\theta \in \Gamma$, которая соответствует значению s . Аналогичным образом с помощью второго семейства характеристик определяется функция $x_\lambda^-(s)$. Очевидно обратные этим функциям функции будут многозначными.

Замечание. Пользуясь поворотом системы координат и теоремами о неявных функциях, можно показать, что если $\Gamma \in C^m$, то при любом λ из интервала $(-1, 1)$ функции $g_\lambda^\pm(s)$ и $x_\lambda^\pm(s)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями s до порядка m везде, кроме, быть может, значений s , соответствующих конечному числу точек из Γ . Обозначим через ζ_λ множество этих точек. Легко убедиться также, что той же гладкости будут ветви обратных к $x_\lambda^\pm(s)$ функций, кро-

ме, быть может, тех точек, которые являются образами точек ζ_λ при $x_\lambda^\pm(s)$.

Пусть λ — неэргодическое значение параметра, тогда, как было замечено в [2], множество $A(\lambda, \Gamma)$ всех λ -периодических точек не пусто и в случае, когда $A(\lambda, \Gamma)$ не совпадает с Γ , его дополнение состоит из не более чем счетного числа интервалов

$$CA(\lambda, \Gamma) = \bigcup_k (\mu_k, \nu_k),$$

поскольку, как известно, $A(\lambda, \Gamma)$ образует замкнутое множество на Γ .

Обозначим через σ_λ множество, состоящее из концевых точек μ_k, ν_k указанных интервалов, а через λ_λ — множество всех характеристик уравнения (1), проходящих через точки σ_λ .

Пусть $U^m(D, \lambda_\lambda)$ — множество всех ОСФ задачи (1), (2), соответствующих ОСЗ λ , каждая из которых непрерывно дифференцируема до порядка m всюду в D , за исключением, быть может, точек, лежащих лишь на конечном числе характеристик из λ_λ . Аналогичным образом, $U^m(\Gamma, \sigma_\lambda)$ — множество всех инвариантных относительно автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^- функций, каждая из которых непрерывно дифференцируема до порядка m везде на Γ , кроме, быть может, конечного числа точек из σ_λ .

Теорема 1. Пусть λ — неэргодическое значение для допустимой области D с границей $\Gamma \in C^m$, $m \geq 1$, а множество $A(\lambda, \Gamma)$ не совпадает с Γ . Тогда любую ОСФ из $L_p(D)$ ($p > 0$), соответствующую ОСЗ λ , можно с любой степенью точности аппроксимировать в метрике $L_p(D)$ функциями из $U^m(D, \lambda_\lambda)$.

Доказательство. Пусть $U(x, y)$ — ОСФ задачи (1), (2) из пространства $L_p(D)$, соответствующая ОСЗ λ [3]. Известно [1], что в случае $p > 1$ она представима в виде суммы двух суммируемых в D функций

$$U(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

где $f(x, y)$ постоянна на почти всех характеристиках первого семейства, а $g(x, y)$ — на почти всех характеристиках второго семейства характеристик уравнения (1). Отсюда легко вывести также, что каждая из функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ принадлежит $L_p(D)$. В случае $0 < p < 1$ имеется в виду определение ОСФ для класса измеримых функций [2] с добавлением, что f и g принадлежат $L_p(D)$.

Рассмотрим функцию

$$U_N(x, y) = f_N(x, y) + g_N(x, y),$$

где

$$f_N(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } |f| \leq N \\ 0, & \text{если } |f| > N, \end{cases} \quad g_N(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если } |g| \leq N \\ 0, & \text{если } |g| > N. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $U_N(x, y)$ также является ОСФ задачи (1), (2), соответствующей тому же ОСЗ λ .

В самом деле, поскольку почти всюду $f(x, y)|_{\Gamma} = -g(x, y)|_{\Gamma}$, то почти всюду имеет место равенство $f_N(x, y)|_{\Gamma} = -g_N(x, y)|_{\Gamma}$, т. е. $U_N(x, y)$ почти всюду на Γ равна нулю. Кроме того, $f_N(x, y)$ и $g_N(x, y)$ постоянны почти на всех характеристиках соответствующих семейств, поскольку такими свойствами обладают функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$.

При заданном $\varepsilon > 0$, как известно [4], можно выбрать такое N , чтобы выполнялось

$$\|U(x, y) - U_N(x, y)\|_{L_p(D)} < \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $f_N(s)$ и $g_N(s)$ — функции на Γ , которые соответственно совпадают с граничными значениями $f_N(x, y)$ и $g_N(x, y)$. Функции $f_N(s)$ и $g_N(s)$ инвариантны относительно S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} (см. доказательство леммы 3 из [2]).

В работе [2] было показано, что дополнение замыкания множества, состоящее из циклов всех λ -вершин, имеет полную меру и представимо в виде объединения двух непересекающихся множеств $G_{\lambda}^{(1)}$ и $G_{\lambda}^{(2)}$, причем $G_{\lambda}^{(1)}$ представляет собой конечную систему инвариантных относительно S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} периодических интервалов, а $G_{\lambda}^{(2)}$ — систему инвариантных относительно тех же автоморфизмов непериодических интервалов. Кроме того, было показано, что существуют конечное число периодических интервалов α_i ($i = 1, 2, \dots, n_1$) из $G_{\lambda}^{(1)}$ и конечное число непериодических интервалов β_i ($i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$) из $G_{\lambda}^{(2)}$ таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} M_{\lambda}(\alpha_i) = G_{\lambda}^{(1)} \text{ и при } i \neq j \quad M_{\lambda}(\alpha_i) \cap M_{\lambda}(\alpha_j) = \emptyset, \quad (4)$$

$$\bigcap_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} M_{\lambda}(\beta_i) = G_{\lambda}^{(2)} \text{ и при } i \neq j \quad M_{\lambda}(\beta_i) \cap M_{\lambda}(\beta_j) = \emptyset. \quad (5)$$

На границе Γ рассмотрим множества

$$\Gamma_i = \begin{cases} M_{\lambda}(\alpha_i) & (i = 1, 2, \dots, n_1) \\ M_{\lambda}(\beta_i) & (i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2). \end{cases}$$

Очевидно Γ_i — непересекающиеся между собой, инвариантные относительно S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} множества, сумма которых имеет полную меру. Поэтому, учитывая также инвариантность функции $f_N(s)$ относительно S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} , ее с точностью до эквивалентности можно представить в виде

$$f_N(s) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} f_i(s), \quad (6)$$

где

$$f_i(s) = \begin{cases} f_N(s) & \text{на } \Gamma_i \\ 0 & \text{на } \Gamma/\Gamma_i. \end{cases}$$

Очевидно $f_i(s)$ — инвариантные относительно S_{λ}^{+} и S_{λ}^{-} функции.

Рассмотрим один из непериодических интервалов β_i . В [2] показано, что $M_\lambda(\beta_i)$ состоит из непересекающихся между собой интервалов, поэтому ряд, составленный из длин этих интервалов, сходится. Учитывая это, по заданному $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер $n > 0$, чтобы

$$\text{mes } B_n^\pm(\beta_i) < \frac{\varepsilon}{3(2N)^p}, \quad (7)$$

где

$$B_n^-(\beta_i) = \bigcup_{k=-n}^{-1} S_\lambda^k(\beta_i \cup S_\lambda^+ \beta_i), \quad B_n^+(\beta_i) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} S_\lambda^k(\beta_i \cup S_\lambda^+ \beta_i).$$

Учитывая абсолютную непрерывность функций $g_\lambda^+(s)$, $g_\lambda^-(s)$ и их суперпозиции $g_\lambda^k(s)$, по данному n можно выбрать такое $\delta > 0$, чтобы из $e \subset \Gamma$, $\text{mes } e < \delta$ следовало

$$\text{mes } B_n(e) < \frac{\varepsilon}{3(2N)^p}, \quad (8)$$

где

$$B_n(e) = \bigcup_{k=-n}^n S_\lambda^k(e \cup S_\lambda^+ e).$$

В [2] доказано, что при любом $\varepsilon > 0$ существует инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция ψ_i такая, что $|\psi_i| \leq N$ на Γ , на интервале β_i она кусочно постоянна, равна нулю вне множества $M_\lambda(\beta_i)$ и имеет место оценка

$$\|f_i(s) - \psi_i(s)\|_{L_p(r)} < \varepsilon. \quad (9)$$

Пусть Ψ_i — определенная на интервале β_i , непрерывно дифференцируемая до порядка m функция, финитная на этом интервале и в окрестности тех точек из β_i , циклы которых содержат точки из ζ_λ (таких точек лишь конечное число, поскольку $S_\lambda^k \beta_i \cap S_\lambda^+ \beta_i = \emptyset$ при $k \neq n$, см. [2], и следовательно для каждой точки $\theta \in \Gamma$ может существовать только одна точка $p \in \beta_i$ такая, что $\theta \in M_i(p)$), по модулю ограничена числом N и мера множества e , где $\psi_i \neq \Psi_i$, меньше δ . Продолжим Ψ_i из β_i нулем вне $M_\lambda(\beta_i)$, а на $M_i(\beta_i)$ инвариантным относительно S_λ^+ и S_λ^- образом, т. е. положим $\Psi_i(g_\lambda^k(s)) = \Psi_i(g_\lambda^+(g_\lambda^+(s))) = \Psi_i(s)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$). Напомним, что такое продолжение возможно, поскольку β_i принадлежит порождающему множеству γ_λ . Заметим, что поскольку $g_\lambda^\pm(s)$ — гладкие вне ζ_λ функции, а Ψ_i финитна в окрестности всех точек из ζ_λ , кроме, быть может, тех, которые не принадлежат множеству $M_\lambda(\beta_i)$, но принадлежат его замыканию, то Ψ_i будет непрерывно дифференцируемой до порядка m везде, кроме тех точек, которые не принадлежат множеству $M_\lambda(a_i) \cup M_\lambda(b_i)$ и являются предельными для него, где a_i и b_i концы интервала β_i . Но, как было показано в [2], при доказательстве леммы 2, эти предельные точки принадлежат множеству σ и их только конечное число. Таким образом, $\Psi_i(s) \in U^m(\Gamma, \sigma_i)$.

Учитывая (7) и (8), получаем

$$\int_{\Gamma} |\psi_l - \Psi_l|^p ds = \left\{ \int_{B_n(e)} |\psi_l - \Psi_l|^p ds + \int_{B_n^-(\beta_l)} |\psi_l - \Psi_l|^p ds + \right. \\ \left. + \int_{B_n^-(\beta_l)} |\psi_l - \Psi_l|^p ds \right\} < \varepsilon. \quad (10)$$

Пусть α_l — один из удовлетворяющих условию (4) периодических интервалов. Представим дополнение замкнутого множества A_l λ -периодических точек на $\bar{\alpha}_l$ в виде

$$C_{\alpha_l} A_l = \left\{ \bigcup_{j=1}^n \alpha_l^j \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=n+1}^{\infty} \alpha_l^j \right\} = D_n \cup R_n.$$

Возьмем n настолько большим, чтобы $\text{mes } R_n < \delta$. Поскольку R_n состоит из периодических интервалов, то

$$M_\lambda(R_n) = \bigcup_{k=1}^r S_\lambda^* (R_n \cup S_\lambda^+ R_n),$$

где r — период λ -периодических точек. Отсюда и из (8) при $n > r$ получаем

$$\text{mes } M_\lambda(R_n) < \frac{\varepsilon}{3(2N)^p}. \quad (11)$$

Пусть дополнение множества D_n на отрезке $\bar{\alpha}_l$ имеет положительную меру. Тогда оно, с точностью до конечного числа точек, состоит из конечного числа λ -периодических отрезков $[a_k, b_k] (k=1, 2, \dots, \tau)$. Множества $M_\lambda(\alpha_l^j) (j=1, 2, \dots, n)$ и $M_\lambda([a_k, b_k]) (k=1, 2, \dots, \tau)$ не пересекаются между собой и инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^- . Поэтому функцию f_l можно представить в виде

$$f_l = \sum_{j=1}^n f_l^j + \sum_{k=1}^{\tau} \tilde{f}_l^k, \quad (12)$$

где

$$f_l^j = \begin{cases} f_l & \text{на } M_\lambda(\alpha_l^j) \\ 0 & \text{вне } M_\lambda(\alpha_l^j), \end{cases} \quad \tilde{f}_l^k = \begin{cases} f_l & \text{на } M_\lambda([a_k, b_k]) \\ 0 & \text{вне } M_\lambda([a_k, b_k]). \end{cases}$$

Для любого полуинтервала $[\theta_l^j, S_\lambda^+ \theta_l^j] (j=1, 2, \dots, n)$ из порождающего множества γ_λ , учитывая равенство $M_\lambda(\alpha_l^j) = M_\lambda([\theta_l^j, S_\lambda^+ \theta_l^j])$ и поступая совершенно так же, как и в случае непериодического интервала β_l , построим функцию Ψ_l^j из $U^m(\Gamma, \sigma_\lambda)$ такую, что

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_l^j - \sum_{j=1}^n \Psi_l^j \right\|_{L_p(\Gamma)} < \varepsilon. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь периодические отрезки $[a_k, b_k]$. В [2] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно постоянная и инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция $\tilde{\psi}_l$ такая, что она равна нулю вне множества $M_\lambda \left(\bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k] \right)$, не имеет точек разрыва на множестве R_n , по модулю ограничена числом N и имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^N \tilde{f}_l^k - \tilde{\psi}_l \right\|_{L_p(r)} < \varepsilon. \quad (14)$$

Нам надо подправить функцию $\tilde{\psi}_l$ так, чтобы ее разрывы были только в конечном числе точек из σ_λ .

Имеем

$$\bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k] = A_l \cup R_n.$$

Пусть p — некоторая точка разрыва из $A_l \cup R_n$ функции $\tilde{\psi}_l$, которая не принадлежит σ_λ . Тогда поскольку концы интервалов из R_n принадлежат множеству σ_λ , то либо p принадлежит замыканию σ_λ , либо дополнению замыкания R_n на $A_l \cup R_n$, т. е. в этом случае p с некоторой окрестностью (односторонней, если p является концом интервала a_l) принадлежит множеству A_l .

В первом случае, т. е. когда $p \in \overline{\sigma_\lambda}$, существует последовательность точек θ_k из σ_λ , сходящаяся к точке p , скажем, слева. Изменим функцию $\tilde{\psi}_l$ на интервале (θ_k, p) (при достаточно большом k), положив ее там постоянной, равной ее предельному значению в точке p справа.

Во втором случае, т. е. когда p с некоторой окрестностью принадлежит множеству A_l , сгладим функцию $\tilde{\psi}_l$ в точке p , сделав ее финитной в окрестности этой точки с помощью изменения ее в такой малой окрестности p , чтобы она не содержала таких точек, кроме быть может, самой точки p , циклы которых содержат точки из σ_λ .

Таким образом, заключаем, что на множестве $P = \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k]$ существует кусочно гладкая функция $\tilde{\Psi}_l$ такая, что ее разрывы лежат на σ_λ , она постоянна в окрестности конечного числа точек из P/σ_λ , циклы которых содержат точки из σ_λ и мера множества из P , где $\tilde{\Psi}_l \neq \tilde{\psi}_l$, меньше δ . Легко убедиться, что такую функцию $\tilde{\Psi}_l$ можно продолжить с множества P на все Γ инвариантным относительно S_λ^+ и S_λ^- образом. В самом деле, там, где $\tilde{\Psi}_l$ совпадает с $\tilde{\psi}_l$, ее можно продолжить, поскольку таким свойством обладает $\tilde{\psi}_l$. Далее, $\tilde{\Psi}_l$ отличается от $\tilde{\psi}_l$ либо на отрезках вида $[\theta_k, p]$, либо на множестве A_l . По

сколькx $[\theta_k, p]$ —периодический отрезок (точка p , будучи пределом периодических точек θ_k , является периодической), а $\tilde{\Psi}_i$ постоянна на нем, то ее можно продолжить инвариантно с $[\theta_k, p]$ на все $M_i([\theta_k, p])$ и остается заметить, что A_i принадлежит порождающему множеству $\mathcal{T}_i$, следовательно любую функцию из A_i можно продолжить инвариантным образом. Продолженную таким образом на $M_i(P)$ и нулем вне этого множества инвариантную функцию обозначим снова через $\tilde{\Psi}_i(s)$.

Учитывая гладкость функций $g_k^\pm(s)$ и их конечного числа суперпозиций вне множества $M_\lambda(\zeta_\lambda)$, а также постоянство $\tilde{\Psi}_i(s)$ в окрестности каждой точки из $M_i(\zeta_\lambda)/\sigma_\lambda$, заключаем, что $\tilde{\Psi}_i \in U^m(\Gamma, \sigma_\lambda)$.

Поскольку P состоит из периодических отрезков $[a_k, b_k]$, то

$$M_\lambda(P) = \bigcup_{k=1}^r S_\lambda^k (P \cup S_\lambda^+ P). \quad (15)$$

Из (15) и (8) при $n > r$ получаем

$$\int_{\Gamma} |\tilde{\Psi}_i - \bar{\Psi}_i|^p ds = \int_{M_\lambda(P)} |\tilde{\Psi}_i - \bar{\Psi}_i|^p ds < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16)$$

Таким образом, учитывая конечность чисел n_1 и n_2 и сопоставляя (6), (9), (10), (12), (13), (14) и (16), заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\Psi(s)$ из $U^m(\Gamma, \sigma_\lambda)$, которая постоянна в окрестности любой точки из $\zeta_\lambda/\sigma_\lambda$ и удовлетворяет неравенству

$$\|f_N^*(s) - \Psi(s)\|_{L_p(\Gamma)} < \varepsilon. \quad (17)$$

Продолжая функцию $\Psi(s)$ (соответственно, $\Phi(s) = -\Psi(s)$) во внутрь области D по характеристикам первого семейства (соответственно, второго семейства), полагая ее постоянной на этих характеристиках, получим функцию $\Psi(x, y)$ (соответственно, $\Phi(x, y)$).

Очевидно функция $V(x, y) = \Psi(x, y) + \Phi(x, y)$ будет ОСФ задачи (1), (2), соответствующей ОСЗ λ . Учитывая сделанное вначале замечание относительно свойств функций, обратных к $x_k^\pm(s)$, а также постоянство функции $\Psi(s)$ в окрестности любой точки из $\zeta_\lambda/\sigma_\lambda$, легко заключить, что $V(x, y) \in U^m(D, \gamma_\lambda)$. Кроме того, поскольку на Γ в качестве параметра взята длина дуги, то из (17) легко вытекает неравенство

$$\|U_N(x, y) - V(x, y)\|_{L_p(D)} < \varepsilon \cdot d, \quad (18)$$

где d —постоянная, зависящая только от области D .

Чтобы закончить доказательство теоремы остается сопоставить (3) и (18).

Аналогичная теорема независимо и другим методом доказана в докторской диссертации Т. И. Зеленька [5] для случая аналитической границы, когда γ_λ состоит из конечного числа характеристик, причем

возможность аппроксимации доказывается не в метрике L_2 , а в метрике L_2 с весом, которая для счетного множества из рассматриваемых значений параметра λ не эквивалентна метрике L_2 .

Рассмотрим теперь случай, когда $A(\lambda, \Gamma)$ совпадает с Γ , т. е. когда все точки Γ являются λ -периодическими. Учитывая, что в этом случае порождающее множество γ_λ можно выбрать так, чтобы оно состояло из одного периодического интервала, и анализируя приведенное доказательство теоремы 1, легко установить справедливость следующей теоремы

Теорема 2. Пусть $\Gamma \in C^m$, $m > 1$, тогда для того чтобы непрерывно дифференцируемые всюду в D до порядка m собственные функции задачи (1), (2), соответствующие неэргодическому собственному значению λ , были полны в метрике $L_p(D)$ в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, соответствующих этому же λ , необходимо и достаточно, чтобы $A(\lambda, \Gamma)$ совпадало с Γ .

Институт математики и механики

АН АрмССР

Поступило 20.VI.1969

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՊՅԱՆ. Լարի տառանման հավասարման համար Դիրիխլի խնդիր $L_p(D)$ -ին պատկանող ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաների մոտարկումը ավելի ուղղել ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաներով (ամփոփում)

Հարվածում Լարի տառանման հավասարման համար ողորկ եզրագիծ ունեցող, ուռուցիկ D տիրույթում դիտարկվում է (1), (2) համասեռ եզրային խնդիրը: Պարամետրի ամեն մի ոչ էրգոդիկ λ արժեքի համար նշվում է (1) հավասարման հաշվելից ոչ ավելի խառակտերիստիկների մի բազմություն և ապացուցվում է, որ $L_p(D)$ -ին պատկանող և λ սեփական արժեքին համապատասխանող ամեն մի ընդհանրացած սեփական ֆունկցիային ցանկացած ճշտությամբ $L_p(D)$ -ի մետրիկայով կարելի է մոտենալ նույն սեփական արժեքին համապատասխանող այնպիսի սեփական ֆունկցիաներով, որոնցից ամեն մեկը ողորկ է ամենուրեք D -ում բացի նշված բազմության վերջավոր թվով խառակտերիստիկների վրա գտնվող կետերից:

Այն դեպքում, երբ եզրագծի բոլոր կետերը հանդիսանում են λ -պերիոդիկ, վերահիշյալ մոտարկումը ողորկ սեփական ֆունկցիաներով հնարավոր է D -ում ամենուրեք:

S. G. HOVSEPIAN. The approximation of belonging to $L_p(D)$ generalized eigenfunctions of Dirichlet problem for vibrating string equation by smoother generalized eigenfunctions (summary)

The (1)–(2) homogenous boundary problem in as smooth convex domain D is considered.

For every non-ergodic value of parameter λ a certain countable set γ_λ of characteristics of the equation (1) is pointed out. It is proved, that every generalised eigenfunction from L_p may be approximated by corresponding to the same λ generalized eigenfunction, the latter being smooth everywhere in D , with exception may be, of finite number of characteristics from γ_λ .

In the case, when all the points of the boundary are λ -periodic, the above mentioned approximation may be performed by eigenfunctions, smooth everywhere in D .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Александрян. Докторская диссертация, МГУ, 1962.
2. С. Г. Овсянн. Построение порождающего множества и обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны в классе измеримых функций, Известия АН АрмССР, „Математика“, IV, № 2, 1969, 102—121.
3. С. Г. Овсянн. О порождающем множестве граничных точек и о полноте системы обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны, ДАН АрмССР, XLVII, № 1, 3—10.
4. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.
5. Т. И. Зеленяк. Автореферат докторской диссертации, Новосибирск, 1969.

С. Е. МАРКОСЯН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О БАЗАХ ДУГ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В настоящей статье рассмотрены вопросы существования и единственности баз дуг ориентированных графов (орграфов), дана оценка числа элементов базы, зависящая от некоторых параметров, и указана структура баз, имеющих максимальное и минимальное число элементов. Прежде чем перейти к рассмотрению этих вопросов необходимо ввести некоторые определения.

Пусть $L = (X, U; P)$ * — произвольный орграф. Упорядоченную пару двух подграфов $(L_1 = (X_1, U_1; P); L_2 = (X_2, U_2; P))$ назовем базой, а множество дуг $U_{\alpha, \beta}$, исходящих из L_1 и заходящих в L_2 , — порождающим, если L_1 и L_2 удовлетворяют следующим условиям:

- L_1 и L_2 бисвязны
- $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
- в суграфе $(X, U/U_{\alpha, \beta}; P)$ выполнено условие

$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 \exists D_{U/U_{\alpha, \beta}}(x, y),$$

где $D_{U/U_{\alpha, \beta}}(x, y)$ означает достижимость вершины y от вершины x с помощью дуг множества $U/U_{\alpha, \beta}$.

Ориентированный униграф без петель $L^Y = (X^Y, U^Y)$ ** называется приведенным графом орграфа L по множеству Y , если

1) $X^Y = \{L_i^Y\}$, где $L_i^Y = (X_i^Y, U_i^Y; P)$ бикомпонент подграфа орграфа L , порожденный множеством X/Y ;

$$2) (L_i^Y, L_j^Y) \in U^Y \Leftrightarrow \exists x \in X_i \exists y \in X_j \exists u \in U [(x \in X_i^Y) \& (y \in X_j^Y) \& P(x, u, y)].$$

Аналогично определяется понятие вполне приведенного графа L^Y орграфа L по множеству Y , только разница в том, что множество вершин X^Y вполне приведенного графа, кроме бикомпонентов L_i^Y , в качестве элемента содержит и подграф, порожденный множеством Y .

§ 1. Задача о существовании базы дуг

Как известно, каждый конечный орграф обладает базой дуг. Однако, как показано в работе [4], бесконечные орграфы не обладают

* В настоящей статье мы будем придерживаться терминологии и обозначений, введенных в [1].

** Униграф однозначно определяется заданием множества вершин и множества дуг.

этим свойством. Возникает вопрос: какие бесконечные оргграфы имеют базы дуг?

Пусть $L = (X, U; P)$ такой оргграф, что для любой пары вершин (x, y) , удовлетворяющей условию $\exists u P(x, u, y)$, число путей, идущих из вершин x в вершину y , конечно. Класс таких оргграфов обозначим через L .

Теорема 1. *Оргграфы класса L обладают базой дуг.*

Доказательство. Пусть оргграф $L = (X, U; P)$ из класса L . Для каждой вершины $x \in X$ оргграфа построим суграф $L_x = (X, U_x; P)$ следующим образом.

Обозначим через L_x^+ оргграф $(X, \bigcap_{z \in Z} V_z; P)$, где V_z — множество дуг суграфа $L_z = (X, V_z; P)$, а Z — множество тех z -вершин, для которых уже построен суграф L_z (если $Z = \emptyset$, то $L_x^+ = L$). Пусть $\{L_{\alpha_x}^+ = (X, V_{\alpha_x}^+; P)\}$ — множество тех бисвязных подграфов оргграфа L_x^+ , для которых $(x, L_{\alpha_x}^+)$ — базовая пара в оргграфе L_x^+ , а U_{α_x, β_x} — соответствующее порождающее множество. Выберем из каждого порождающего множества U_{α_x, β_x} одну дугу u_{α_x, β_x} . Пусть $U_x' = \bigcup_{\alpha_x, \beta_x} u_{\alpha_x, \beta_x}$. Построим суграф $L_x = (X, V_x; P)$, где $V_x = (\bigcap_{z \in Z} V_z / U_x) \cup U_x'$ а U_x — множество дуг, исходящих из вершины x .

Предположим, что для любой вершины $x \in X$ уже построили L_x (здесь воспользуемся аксиомой выбора).

Докажем, что множество дуг $W = \bigcap_{x \in X} V_x$ является базой исходного графа. Ясно, что в W входят только выбранные дуги u_{α_x, β_x} и только они, поэтому $W = \bigcup_{x \in X} U_x'$. Если дуга $u_{\alpha_x, \beta_x} \in W$ соединяет вершины x и y , то не может существовать пути, идущего из вершины x в y только с помощью дуг множества W . Это следует из того, что в суграфе L_x не существовал такой путь, а $W \subset V_x$. Значит условие минимальности для множества дуг W выполнено.

Докажем, что $D_U \iff D_W$. Для этого достаточно доказать, что из каждого непустого множества дуг V_Y (множества дуг $u \in U$, для которых верно $\exists x \in Y \exists y \in (X/Y) \& (P(x, u, y))$) W содержит хотя бы один элемент. Предположим $u_1 \in V_Y$ и истинно $P(x_1, u_1, y_1)$. Если $u_1 \notin W$, то множество дуг V_{x_1} суграфа L_{x_1} содержит дугу u_1 , принадлежащую множеству V_Y . Если истинно $(u_2 \in W) \& P(x_2, u_2, y_2)$, то множество V_{x_2} суграфа L_{x_2} содержит дугу u_2 из множества V_Y . Дуга u_2 не может совпадать с дугой u_1 , потому что V_{x_1} не содержит дугу u_1 , поскольку L_{x_2} построен после L_{x_1} . Если $W \cap V_Y = \emptyset$, то получим $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ бесконечное число дуг, принадлежащих V_Y , и через каждую дугу u_k проходит путь, идущий из x_1 в y_1 . Несмотря на то, что среди этих путей могут быть и совпадающие, но число их бесконечно. Этого не может быть, так как оргграф L из класса L . Теорема доказана.

Очевидно класс L не содержит все орграфы, обладающие базой дуг. Интересно найти весь класс таких орграфов.

Обозначим через V множество $U \setminus \bigcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha, \beta}$, где $U_{\alpha, \beta}$ — порождающее множество.

Теорема 2. Если орграф $L = (X, U; P)$ обладает базой дуг, то после удаления множества дуг V из орграфа L достижимость не нарушается.

Если орграф имеет базу W , то, как показано в работе [4], каждая его дуга принадлежит какому-нибудь порождающему множеству. А это и значит, что после удаления дуг множества V достижимость не будет нарушена.

Правдopodobной кажется и обратная теорема.

Если после удаления множества V из L достижимость не нарушается, то орграф обладает базой дуг. Но установить ее пока не удалось.

§ 2. Единственность базы дуг

В работах [2]–[5] дан критерий единственности для конечных орграфов.

В этом параграфе дается критерий единственности базы дуг произвольного орграфа. Пока докажем следующую теорему, которая в дальнейшем нам понадобится.

Теорема 3. Если W — база дуг орграфа $L = (X, U; P)$ и имеет конечное пересечение $W' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ с порождающим множеством U_{α_0, β_0} , то для любой дуги $u \in U_{\alpha_0, \beta_0}$ существует база, которая из U_{α_0, β_0} содержит только дугу u .

Доказательство. Пусть $w_i \in W'$ и истинно $P(x_i, u_i, y_i)$. Обозначим через L_{x_i} и L_{y_i} бикомпоненты суграфа $L' = (X, W/W'; P)$, содержащие соответственно x_i и y_i . Они разные в силу того, что $w_i \in W$. Очевидно в орграфе L существует простой путь, идущий из подграфа L_{x_i} в подграф L_{y_i} и содержащий дугу u . Пусть μ_i — такой путь, и μ_i содержит в себе такое непустое множество дуг $U^i = \{u_1^i, u_2^i, \dots, u_{k_i}^i\}$, для которых верно

$$P(x_1^i, u_1^i, y_1^i) \& P(x_2^i, u_2^i, y_2^i) \& \dots \& P(x_{k_i}^i, u_{k_i}^i, y_{k_i}^i) \& \\ \& \bigwedge D_{W/W'}(x_1^i, y_1^i) \& \bigwedge D_{W/W'}(x_2^i, y_2^i) \& \dots \& \bigwedge D_{W/W'}(x_{k_i}^i, y_{k_i}^i).$$

Пусть $T = (W/W') \cup \bigcup_{i=1}^m U^i$. Тогда $D_T \iff D_W$ и $u \in T$. Предположим $V \subset \bigcap W$ — множество таких дуг, для которых не выполнено условие минимальности, т. е.

$$\forall v \in V \forall x, y \in X [P(x, v, y) \rightarrow D_{T/v}(x, y)].$$

Докажем, что V — конечное множество. Для этого предположим обратное, пусть $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ — бесконечно. Множество V принад-

лежит базе W , поэтому для каждой дуги $u_n \in V$ существует такое U_{α_n, β_n} , порождающее множество орграфа L , что $W \cap U_{\alpha_n, \beta_n} = \{u_n\}$. Но для множества T это условие уже не верно $T \cap U_{\alpha_n, \beta_n} = \{u_n, u_n, \dots\}$, где $u_n \in \bigcup_{i=1}^m U^i$. Но множество $\bigcup_{i=1}^m U^i$ — конечное и по-

этому существует дуга $u_n \in \bigcup_{i=1}^m U^i$, которая входит в бесконечное число порождающих множеств $U_{\alpha_{n_1}, \beta_{n_1}}, U_{\alpha_{n_2}, \beta_{n_2}}, \dots, U_{\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}}, \dots$. Это означает, что каждый путь, идущий из начала дуги u_n , в ее конец и состоящий только из дуг множества базы W , должен содержать бесконечное число дуг $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}$, что невозможно. Значит, множество V — конечное. Но тогда конечно и подмножество всех тех дуг множества, для которых условие минимальности не выполнено. А это означает, что T содержит в себе базу и в эту базу входит дуга u . Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть W — база дуг, а $U_{\alpha, \beta}$ — порождающее множество орграфа $L = (X, U; P)$; тогда, если $|W \cap U_{\alpha, \beta}| < +\infty$, то орграф L имеет хотя бы $|U_{\alpha, \beta}|$ баз дуг.

Теорема очевидна.

Сейчас можно уже доказать теорему единственности.

Теорема 5. Если орграф L обладает базой дуг, то она единственна тогда и только тогда, когда все порождающие множества орграфа L состоят из одного элемента.

Доказательство. Необходимость. Пусть W — единственная база орграфа L . Покажем, что не может существовать такого порождающего множества $U_{\alpha, \beta}$, что $|U_{\alpha, \beta}| > 1$. Предположим обратное: $|U_{\alpha, \beta}| > 1$ и $U_{\alpha, \beta} = \{u_1, u_2, \dots\}$. Если множество $W \cap U_{\alpha, \beta}$ конечно, то в силу теоремы 4 орграф L имеет хотя бы $|U_{\alpha, \beta}|$ баз, что противоречит условию теоремы. А если $W \cap U_{\alpha, \beta} = \{w_1, w_2, \dots\}$ — бесконечное множество, то существует такое порождающее множество $U_{\alpha, \beta}^*$, что $W \cap U_{\alpha, \beta} = \{w_1\}$. Значит орграф L имеет хотя бы $|U_{\alpha, \beta}|$ баз дуг. Но это невозможно, так как $|U_{\alpha, \beta}| > 1$, поскольку $|U_{\alpha, \beta}| > 1$.

Достаточность. Если все порождающие множества состоят из одного элемента, то базой является объединение всех порождающих множеств $W = \bigcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha, \beta}$. Но любая база принадлежит множеству дуг $\bigcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha, \beta}$. А поскольку множество $\bigcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha, \beta}$ является базой, то не может существовать другой базы.

Теорема 6. Если граф Берга $L = (X, U; P)$ не имеет оргциклов и $V = \bigcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha, \beta}$ — соединение всех порождающих множеств, то L имеет базу и она единственна тогда и только тогда, когда $D_U \rightsquigarrow D_V$.

* См. теорему работы [4].

В графе L все бисвязные подграфы состоят из одного элемента, так как он не имеет орциклов. Значит и порождающие множества состоят из одного элемента. Поэтому, если $D_U \leq D_V$, то V является базой, и она единственна, в силу теоремы 5. А если L имеет базу, то $D_U \leq D_V$ следует из теоремы 2.

§ 3. Оценка числа элементов базы дуг и структура минимальной и максимальной баз

Бисвязный оргграф $L = (X, U; P)$ без петель назовем деревом с двугульниками (см. рис. 1), если он не содержит простых орциклов

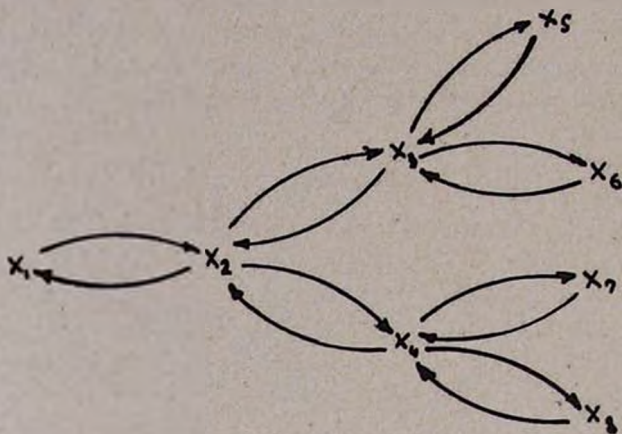


Рис. 1.

(или простых циклов), имеющих длину, большую двух. Из дерева получим дерево с двугульниками, если каждое ребро u , для которого $P(x, u, y)$, заменим двумя такими дугами v_1, v_2 , для которых истинно $P(x, v_1, y) \& P(y, v_2, x)$. Оргграф $L = (X, U; P)$ без петель назовем типа A , если

$$X = X_1 \cup X_2; X_1 \cap X_2 = \emptyset;$$

$$|X_1| = \left\lceil \frac{|X|}{2} \right\rceil, |X_2| = \begin{cases} \frac{|X|}{2}, & \text{если } \frac{|X|}{2} \text{ — целое число} \\ \left\lceil \frac{|X|}{2} \right\rceil + 1, & \text{если } \frac{|X|}{2} \text{ — не целое число} \end{cases}$$

и

$$\forall u \in U \exists x, y \in X [(x \in X_1 \& (y \in X_2) \& P(x, u, y))].$$

После этих определений можно сформулировать основную теорему этого параграфа. Предположим, что $L = (X, U; P)$ — конечный оргграф и пусть

p — число компонентов этого оргграфа;

q — число бикомпонентов;

q_1 — число бикомпонентов, содержащих одну вершину.

$$r_1 = \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor; \quad r_2 = \begin{cases} \frac{q}{2}, & \text{если } \frac{q}{2} - \text{целое число,} \\ \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1, & \text{если } \frac{q}{2} - \text{не целое число.} \end{cases}$$

Теорема 7. Пусть W — база дуг орграфа L , тогда

$$|X| + q - (p + q_1) \leq |W| \leq 2|X| - 2q + r_1 \cdot r_2,$$

причем

а) если $|W| = |X| + q - (p + q_1)$ (минимальная база), то в суграфе $L_W = (X, W; P)$ каждый бикомпонент представляет собой один простой орицикл (Гамильтонов контур), а приведенный граф каждого компонента суграфа L_W по пустому множеству является деревом;

б) если $|W| = 2|X| - 2q + r_1 \cdot r_2$ (максимальная база), то в суграфе каждый бикомпонент представляет собой дерево с двуугольниками, а приведенный граф каждого компонента суграфа L_W по пустому множеству является графом типа A .

Сначала докажем вспомогательную теорему.

Теорема 8. Если $L = (X, U; P)$ — бисвязный орграф и W — база, то

$$|X| \leq |W| \leq 2|X| - 2,$$

причем

а) если $|W| = |X|$, то суграф L_W представляет собой один простой орицикл;

б) если $|W| = 2|X| - 2$, то L_W представляет собой дерево с двуугольниками.

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции. Для орграфов $L = (X, U; P)$, для которых $|X| = 1$, теорема верна. Предположим, что для всех орграфов $L = (X, U; P)$, $|X| < n$ теорема справедлива, докажем ее для орграфов, имеющих n вершин. Ясно, что $|X| \leq |W|$ и L_W представляет собой один простой орицикл, если $|W| = |X|$. Мы докажем, что $|W| \leq 2|X| - 2$ и L_W — дерево с двуугольниками, если $|W| = 2|X| - 2$.

Пусть L_W не является деревом с двуугольниками. Тогда в L_W должен существовать $\mu = [x_0, u_1, x_1, u_2, x_2, \dots, x_{l-1}, u_l, x_l]$ — простой орицикл, где $l > 2$, в силу того, что L — бисвязный граф, а W — база. Обозначим через $L_1 = (X_1, U_1; P), \dots, L_{q'} = (X_{q'}, U_{q'}; P)$ бикомпоненты подграфа суграфа L_W , порожденные множеством X/X_μ , где $X_\mu = \{x_1, x_2, \dots, x_{l-1}\}$. Пусть $L^{X_\mu}, (X^{X_\mu}, U^{X_\mu})$ — вполне приведенный граф суграфа L_W по множеству X_μ . Тогда можно написать

$$|W| = |U_1| + |U_2| + \dots + |U_{q'}| + |U^{X_\mu}| + l.$$

По предположению $|U_i| \leq 2|X_i| - 2$ для любого

$$i = 1, 2, \dots, q', \text{ а } |U^{X_\mu}| \leq 2(q' + 1) - 2 = 2q'. \text{ Значит}$$

$$|W| \leq \sum_{i=1}^q (2|X_i| - 2) + 2q' + l = 2|X| - 2l - 2q' + 2q' + l = 2|X| - l.$$

Поскольку $l \geq 2$, то $|W| \leq 2|X| - 2$. С другой стороны, если L_W — дерево с двугульниками, то W является базой и $|W| = 2|X| - 2$. Теорема доказана.

В. Г. Визинг показал, что если оргграф $L = (X, U; P)$, $|X| \geq 5$ не имеет оргциклов и W — база, то

$$|W| \leq |X_1| \cdot |X_2|,$$

$$|X_1| = \left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor; |X_2| = \begin{cases} \frac{|X|}{2}, & \text{если } \frac{|X|}{2} \text{ — целое число} \\ \left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor + 1, & \text{если } \frac{|X|}{2} \text{ — не целое число,} \end{cases}$$

причем, если $|W| = |X_1| \cdot |X_2|$ (максимальная база), то $L = (X, U; P)$ является графом типа A .

Теперь уже можно перейти к доказательству теоремы 7. Так как оргграф L имеет q бикомпонентов $L_1 = (X_1, U_1; P), \dots, L_q = (X_q, U_q; P)$ и $|X_i| \leq |W_i|$, если $|X_i| > 1$, и W_i — база бикомпоненты L_i , то

$\sum_{k=1}^q |W_i| \geq |X| - q_1$. В приведенном графе $L_k^{\otimes} = (X_k^{\otimes}, W_k^{\otimes})$ k -ого компонента суграфа L_W по пустому множеству

$$|X_k^{\otimes}| - 1 \leq |W_k^{\otimes}|, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

поэтому

$$|W| = \sum_{i=1}^q |W_i| + \sum_{k=1}^p |W_k^{\otimes}| \geq |X| - q_1 + q - p,$$

т. е.

$$|X| + q - (p + q_1) \leq |W|,$$

и если $|W| = |X| + q - (p + q_1)$, то ясно, что L_W имеет такую структуру как описана в а) теоремы 7. С другой стороны

$$\sum_{i=1}^q |W_i| \leq \sum_{i=1}^q (2|X_i| - 2) = 2|X| - 2q,$$

и в приведенном графе $L_W^{\otimes} = (X^{\otimes}, W^{\otimes})$ суграф L_W по пустому множеству $|W^{\otimes}| \leq r_1 \cdot r_2$. Получаем

$$|W| = |W^{\otimes}| + \sum_{i=1}^q |W_i| \leq 2|X| - 2q + r_1 \cdot r_2.$$

А то, что структура суграфа L_W при $|W| = 2|X| - 2q + r_1 \cdot r_2$ и $|X^{\otimes}| \geq 5$ такая, как это описано в б) теоремы 7, следует из теоремы 8.

Вычислительный центр АН АрмССР

и Ереванского государственного
университета

Поступило 15.VI. 1968

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ. Օրիենտացված գրաֆների աղեղների բազաների մի ֆունկցիոնալ մասին
(ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկված է բազայի գոյության և միակության հարցը, ինչպես նաև գնահատված է բազայի հզորությունը և ջուլը է տրված մաքսիմալ և մինիմալ բազաների ստուգողական վերջավոր գրաֆների համար: Դրանով է բազայի գոյության անհրաժեշտ պայման կամայական գրաֆի համար և անջատված է մի դաս, որին պատկանող գրաֆները ունեն բազա: Տրված է բազայի միակության հայտանիշ կամայական գրաֆի համար:

S. E. MARKOSIAN. *Some questions about the arcs of bases of orientated graphs (summary)*

The questions connected with the existence and uniqueness of bases are considered. The capacity of bases is evaluated and structure of maximal and minimal bases for final graphs is described. A necessary conditions for the existence of a base of an arbitrary graph is pointed out and a class in which graphs do possess bases is separated. A criterion of the uniqueness of a base for arbitrary graphs is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Зыков. Теория конечных графов, 1, „Наука“, Новосибирск, 1967.
2. Я. М. Барздинь. Проблемы базиса направленных графов, Уч. записки Латв. университета, 28, 1959, 33—34.
3. С. Е. Маркосян. Критерий единственности баз дуг конечных ориентированных графов, Известия АН АрмССР „Математика“, 3, № 6, 1967.
4. С. Е. Маркосян. Базы дуг прогрессивно и регрессивно конечного ориентированного графа, ДАН АрмССР, XLVI, 1, 1968.
5. С. Е. Маркосян. Матричный критерий единственности базы дуг и нахождение некоторой базы, ДАН АрмССР, XLVI, II, 1968.
6. М. К. Гольдберг. Некоторые применения операции стягивания к сильно связным графам, УМН, XX, вып. 5, 1965.

М. А. ХАЧАТРЯН

ПРИМЕР КОНСТРУКТИВНОЙ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ
МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ

Используемые понятия конструктивного анализа определяются так же как в [1]—[6]. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Существует конструктивно всюду определенная конструктивно нигде не дифференцируемая монотонная функция.*

Доказательство. Пользуясь теоремами 2.1, 2.4, 2.6 из [4] построим шпекеровский ряд $\Sigma \xi A3$ и FR -число α такие, что

$$\forall m \left(\sum_{i=0}^m A(i) < \alpha \right),$$

и последовательность A конструктивно не стремится к нулю.

Построим конструктивную последовательность f конструктивных функций такую, что для любого FR -числа x и для любого натурального n

$$f_n(x) = \frac{A(n)}{4^n \cdot 2\pi} \arg \cos(\cos 4^n \cdot 2\pi x).$$

Ясно, что для любого натурального числа n и для любого числа x

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{A(n) \cdot \pi}{4^n \cdot 2\pi} < A(n) \cdot 4^{-n},$$

причем для любого натурального n функция f_n есть периодическая функция с периодом $T = 4^{-n}$ и, кроме того

$$f_n(0) = f_n(4^{-n}) = 0, \quad f_n(2^{-2n-1}) = A(n) \cdot 2^{-2n-1},$$

а на отрезках $0 \Delta 2^{-2n-1}$ и $2^{-2n-1} \Delta 4^{-n}$ функция f_n линейна.

Построим конструктивную последовательность F конструктивных функций такую, что для любого FR -числа x и для любого натурального n

$$F_m(x) = \sum_{n=0}^m f_n(x).$$

Так как для любых натуральных чисел m и k ($m > k$) и для любого FR -числа x

$$\begin{aligned} F_m(x) - F_k(x) &= \sum_{n=k+1}^m f_n(x) < \\ &< \sum_{n=k+1}^m A(n) 4^{-n} < \alpha \cdot \sum_{n=k+1}^m 4^{-n} < \alpha \cdot 4^{-k} \end{aligned}$$

и, кроме того, $\sum_{n=k+1}^m f_n(x) \geq 0$, то

$$0 \leq F_m(x) - F_k(x) < \alpha \cdot 4^{-k}.$$

Значит существует всюду определенная функция G такая, что для любого FR -числа x

$$G(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x).$$

Докажем, что функция G нигде не дифференцируема.

Пусть функция G дифференцируема в некоторой точке x . Тогда существует общерекурсивная функция φ такая, что

$$\begin{aligned} \forall n \forall x_1 \forall x_2 (0 < |x_1 - x| < 2^{-\varphi(n)} \& 0 < |x_2 - x| < 2^{-\varphi(n)} \supset \\ \supset \left| \frac{G(x_2) - G(x)}{x_2 - x} - \frac{G(x_1) - G(x)}{x_1 - x} \right| < 2^{-n}). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть n — фиксированное натуральное число и $k > \varphi(n)$. Если бы z_1^0 и z_2^0 были бы выбраны таким образом, что

$$\begin{aligned} z_1^0 &= \begin{cases} x + 4^{-k}, & \text{если } l \cdot 4^{-k} \leq x < (l+1) \cdot 4^{-k}, l - \text{четное целое число} \\ x - 4^{-k}, & \text{если } l \cdot 4^{-k} \leq x < (l+1) \cdot 4^{-k}, l - \text{нечетное целое число,} \end{cases} \\ z_2^0 &= \begin{cases} x + 4^{-k-1}, & \text{если } l \cdot 4^{-k-1} \leq x < (l+1) \cdot 4^{-k-1}, l - \text{четное целое число} \\ x - 4^{-k-1}, & \text{если } l \cdot 4^{-k-1} \leq x < (l+1) \cdot 4^{-k-1}, l - \text{нечетное целое число,} \end{cases} \end{aligned}$$

то мы имели бы

$$\left| \frac{G(z_2^0) - G(x)}{z_2^0 - x} - \frac{G(z_1^0) - G(x)}{z_1^0 - x} \right| = A(k). \quad (2)$$

Действительно, квазисуществимы такие целые числа $l_0, l_1, \dots, l_k$, что

$$l_m \cdot 2^{-2m-1} \leq x < (l_m + 1) \cdot 2^{-2m-1}.$$

Легко видеть, что при $i=1, 2$ и при любом m , если $m < k$, то

$$f_m(z_i^0) - f_m(x) = (-1)^{l_m} \cdot A(m) (z_i^0 - x),$$

если же $m > k$, то в силу периодичности функции f_m

$$f_m(z_i^0) = f_m(x),$$

а если $m = k$, то

$$f_m(z_1^0) = f_m(x),$$

$$f_m(z_2^0) - f_m(x) = (-1)^{l_m} \cdot A(m) (z_2^0 - x).$$

Поэтому

$$\frac{G(z_1^0) - G(x)}{z_1^0 - x} = \frac{\sum_{m=0}^{k-1} (f_m(z_1^0) - f_m(x))}{z_1^0 - x} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{l_m} A(m),$$

$$\frac{G(z_2^0) - G(x)}{z_2^0 - x} = \frac{\sum_{m=0}^k (f_m(z_2^0) - f_m(x))}{z_2^0 - x} = \sum_{m=0}^k (-1)^m A(m),$$

откуда имеем

$$\Pi \left(\left| \frac{G(z_2^0) - G(x)}{z_2^0 - x} - \frac{G(z_1^0) - G(x)}{z_1^0 - x} \right| = A(k) \right),$$

и тем самым справедливо (2).

Обозначим через $z_1^1, z_1^2, z_2^1, z_2^2, a_{ij}$ *FR*-числа, определяемые следующим образом:

$$z_1^1 = x + 4^{-k}, \quad z_1^2 = x - 4^{-k}, \quad z_2^1 = x + 4^{-k-1}, \quad z_2^2 = x - 4^{-k-1},$$

$$a_{ij} = \left| \frac{G(z_j^i) - G(x)}{z_j^i - x} - \frac{G(z_1^i) - G(x)}{z_1^i - x} \right| \quad (i, j = 1, 2).$$

Так как $|z_j^i - x| \leq 4^{-k}$, и $k > \varphi(n)$, то из (1) получаем

$$a_{ij} < 2^{-n} \quad (i, j = 1, 2).$$

Легко видеть, что квазиосуществимы такие i и j , каждое из которых есть 1 и 2, что z_1^i и z_2^j удовлетворяют условиям, указанным выше для z_1^0 и z_2^0 . При этих i и j согласно (2) имеем $a_{ij} = A(k)$, а потому $|A(k)| < 2^{-n}$. Таким образом, получаем

$$\forall n \forall k (k > \varphi(n) \supset |A(k)| < 2^{-n}),$$

вопреки предположению, что последовательность A не стремится к нулю. Значит функция G в точке x не дифференцируема. Так как x — произвольное *FR*-число, то функция G нигде не дифференцируема.

Построим функцию H такую, что для любого *FR*-числа x

$$H(x) = G(x) + \alpha \cdot x.$$

Функция H так же, как и функция G всюду определена и нигде не дифференцируема. Теорема будет установлена, если докажем, что функция H монотонна.

Пусть x и y — любые *FR*-числа такие, что $x > y$. Тогда для любого натурального числа n

$$f_n(x) - f_n(y) \geq -A(n) \cdot (x - y),$$

повтому для любого натурального m

$$F_m(x) - F_m(y) \geq -\alpha \cdot (x - y),$$

откуда имеем

$$G(x) - G(y) \geq -\alpha \cdot (x - y)$$

что и доказывает монотонность функции H . Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И. Д. Заславскому за внимание и помощь.

Вычислительный центр АН АрмССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 15.VI.1969

18. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ածանցյալ շունեցող կոնստրուկտիվ մոնոտոն ֆունկցիայի օրինակ
(ամփոփում)

Ապացուցված է, որ գոյություն ունի կոնստրուկտիվ մոնոտոն ֆունկցիա, որը ոչ մի կետում
կոնստրուկտիվորեն ածանցելի չէ:

M. A. KHACHATRIAN. *An example of constructive non-differentiable monotone function (summary)*

The existence of a constructive monotone function, which has no constructive derivative in any point is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. А. Шанин. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XVII, 1962.
2. Г. С. Цейтин. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XVII, 1962.
3. Г. С. Цейтин. Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XVII, 1962.
4. И. Д. Заславский и Г. С. Цейтин. О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962.
5. И. Д. Заславский и С. Н. Манукян. О разбиениях плоскости конструктивными кривыми. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, Труды ВЦ АН АрмССР и ЕрГУ, V, 1968.
6. М. А. Хачатрян. О конструктивных числовых рядах, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, Труды ВЦ АН АрмССР и ЕрГУ, V, 1968.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Ս. Զրբաշյան. Միաթերթ ֆունկցիաների դասերի շերտավորման մասին	225
Վ. Ի. Կավրիլով. Միակության եզրային թեորեմների մասին	244
Ն. Մ. Մուսեղյան, Ռ. Ի. Հովսեփյան. Օրթոգոնալ շարքերի միակության մասին	259
Ֆ. Ա. Շամոյան. Փակ իդեալների մասին արագ աճող անալիտիկ ֆունկցիաների մի ակ- զերրայում	267
Ս. Գ. Հովսեփյան. Լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի $L_p(D)$ -ին պատկանող ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաների մոտարկումը ավելի ողորկ ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաներով	279
Ս. Ե. Մարկոսյան. Օրիննտացված գրաֆների աղեղների բաղանների մի բանի հարցերի մասին	289
Մ. Ա. Խաչատրյան. Ածանցյալ լուսնեցող կոնստրուկտիվ մոնոտոն ֆունկցիայի օրինակ	298

С О Д Е Р Ж А Н И Е

М. М. Джрбашян. О расслоении классов однолистных функций	225
В. И. Гаврилов. О граничных теоремах единственности	244
Г. М. Мушегян, Р. И. Овсепян. О единственности ортогональных рядов	259
Ф. А. Шамоян. О замкнутых идеалах в одной алгебре быстро растущих ана- литических функций	267
С. Г. Овсепян. Об аппроксимации обобщенных собственных функций из $L_p(D)$ задачи Дирихле для уравнения колебания струны более гладкими обоб- щенными функциями	278
С. Е. Маркосян. Некоторые теоремы о базах дуг ориентированных графов	288
М. А. Хачатрян. Пример конструктивной недифференцируемой монотонной функции	296

CONTENTS

М. М. Džrbaštan. On the stratification of classes of shlicht functions	225
В. И. Gavrilov. Boundary uniqueness theorems	244
Г. М. Musheghyan and R. I. Hovsepyan. On the uniqueness of orthogonal series	259
Ф. А. Shamoyan. On closed ideals in algebra of fast growing analytic functions	267
С. Г. Hovsepyan. The approximation of belonging to $L_p(D)$ generalized eigenfunc- tions of Dirichlet problem for vibrating string equation by smoother gene- ralized engen functions	278
С. Е. Markosyan. Some questions about the arcs of bases of orientated graphs	288
М. А. Khachatryan. An example of constructive non-differentiable monotone function	296