# ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

## ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
## МАТЕМАТИКА

## Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

*Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝*

*1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։*

*Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։*

*2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։*

*Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։*

*3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։*

*4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։*

*Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։*

*5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։*

*6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։*

*7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։*

*8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։*

*9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։*

*10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։*

*Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։*

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.


Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

индекс 77735



## TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaying of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

# ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНСТРУКТИВНЫХ ОБЪЕКТОВ И ОПЕРАЦИЙ

1. Понятия конструктивного объекта и конструктивной операции (алгорифма) являются основными понятиями современной конструктивной математики ([1]—[7]). Как правило, всякая общая концепция конструктивной математики строится на основе того или иного понятия конструктивного объекта, к которому в дальнейшем присоединяется тот или иной вариант понятия алгорифма. Вместе с тем, вопросы построения точных определений конструктивного объекта и конструктивной операции, по мнению автора, еще не выяснены исчерпывающим образом и требуют дальнейшего исследования.

Методы введения понятий конструктивного объекта и конструктивной операции, чаще всего применяемые в настоящее время в конструктивной математике, в основном характеризуются следующими чертами. За основу берутся какие-либо конкретные типы конструктивных объектов (например, слова в алфавитах ([1], [3], [4], [5], [6]), натуральные числа ([2], [7]), „вещи“ ([7], § 50) и т. п.) и конкретные типы простейших операций над объектами (например, соединение слов, приписывание буквы к слову, прибавление единицы к натуральному числу и т. п.). Эти понятия чаще всего строятся на основе внематематических („физических“) представлений. Как правило, приходится заимствовать из внематематических („физических“) соображений также и ряд основных свойств конструктивных объектов и операций. Общее понятие конструктивной операции (алгорифма) в традиционных построениях конструктивной математики вводится уже после того, как выяснен основной набор свойств конструктивных объектов и простейших операций над ними.

При введении основных понятий конструктивной математики указанным методом возникает ряд трудностей, как принципиальных, так и технических. Принципиальной трудностью является, например, отсутствие при таком построении четкого водораздела между утверждениями, которые мы принимаем в качестве исходных положений теории и заимствуем из внематематических („физических“) соображений, и утверждениями, которые мы получаем путем логической дедукции из исходных положений. Отметим, что сама по себе апелляция к внематематическим соображениям, быть может, неизбежна при построении конструктивной математики. Вместе с тем, естественно стремиться к тому, чтобы такая апелляция не „просачивалась“ в ткань развиваемой теории, а была бы по возможности четко локализована в исходных положениях теории. Ясно, что, используя внематематические („физические“) соображения по ходу построения развиваемой теории, мы рискуем лишить теорию ее дедуктивного характера.

Технические трудности, связанные с традиционными методами введения основных понятий конструктивной математики, заключаются в основном в недостаточной общности и гибкости как самого исходного понятия конструктивного объекта, так и основанных на нем вспомогательных понятий. Беря за основу конструктивные объекты какого-либо одного вида (например, слова в алфавите), мы вынуждены представлять в их терминах конструктивные объекты любых типов, что приводит часто к неоправданно громоздким и искусственным построениям.

В этой статье мы будем рассматривать несколько иной способ определения понятий конструктивного объекта и операции на основе применения аксиоматического метода (вполне аналогичного аксиоматическому методу классической математики) с сохранением основных принципов конструктивной установки. Рассматриваемый способ, по-видимому, в меньшей степени подвержен указанным выше трудностям по сравнению с традиционной методикой. Предлагаемый подход можно условно назвать „аксиоматико-генетическим“. (ср. [7], § 8). *Аксиоматичность* подхода выражается в том, что определения конструктивных объектов и операций не связываются непосредственно ни с какими их конкретными „физическими“ образами. Предлагается, напротив, рассматривать *произвольные* объекты и операции, удовлетворяющие определенным условиям (аксиомам), и устанавливать свойства этих объектов и операций посредством логической дедукции из аксиом (точка зрения, в определенном смысле сходная с высказанной, указана в отношении натуральных чисел в [7], § 6, § 50, см., например, [7], стр. 26 русского перевода, абзац 5-й снизу; однако эта точка зрения не получает систематического развития в [7]).

*Генетичность* предложенного подхода выражается в том, что считается возможным рассматривать как одновременно существующие лишь конечное число объектов (см. [5], стр. 287, верхний абзац). Таким образом, если мы не ограничиваемся рассмотрением заранее фиксированного конечного множества объектов, то должны рассматривать их как *порождаемые* при помощи некоторых фиксированных порождающих операций (см. [4], стр. 227; [5], стр. 286—287; [7], § 6, § 8, § 50). Хотя подобная точка зрения является одной из составных частей конструктивной установки в математике ([3]), однако мы отмечаем ее здесь отдельно, так как она весьма существенна для конструктивной интерпретации аксиоматического метода. Отметим следующее следствие из приведенного положения: *если мы не хотим ограничить наше рассмотрение заранее фиксированным конечным множеством объектов, то вынуждены допустить рассмотрение операций с заранее не определенной областью задания.* Рассмотрение операций с заранее не определенной областью задания в конструктивной математике, по-видимому, надлежит считать естественным: если мы порождаем, например, слова в алфавите или натуральные числа при помощи операций приписывания буквы или прибавления единицы, то область задания таких порождающих операций, очевидно, не может быть определена заранее; напротив, порождаемые объекты могут быть построены лишь при том условии, что мы *предварительно* определили порождающие их операции. При традиционном построении конструктивной математики это явление обычно остается в тени, так как употребляемое общее понятие операции (алгорифма), как правило, вводится уже после того, как основное понятие конструктивного объекта сформировано при помощи „порождающих операций", которые после этого по существу не фигурируют в построениях или же рассматриваются как частные случаи общего понятия алгорифма. Создается таким образом иллюзия того, что для каждой рассматриваемой операции (алгорифма) мы имеем дело с вполне определенной заранее областью ее определения. Но если мы вообще должны узаконить рассмотрение операций без предварительного определения областей их задания, то не видно причин, почему мы должны сохранять такое положение для одних операций и избегать его для других. В соответствии со сказанным мы не будем в дальнейшем фиксировать заранее областей задания для рассматриваемых операций.

Для логической дедукции из аксиом мы будем пользоваться конструктивными методами рассуждений, имеющимися в традиционной конструктивной математике и логике ([3], [4], [5], [7]). Будут использоваться конструктивные логические связи &, $\vee$, $\supset$, $\urcorner$, $\forall$, $\exists$, понимаемые обычным образом. Мы не будем пользоваться методами рассуждений, которые формулируются в существующих теориях конструктивного истолкования суждений ([3]; [7], § 81); не будем прибегать также к рассуждениям, опирающимся на метод конструктивного подбора ([2]). Таким образом, мы будем пользоваться лишь некоторой частью методов рассуждений, принятых в конструктивной математике; эта часть приблизительно соответствует тем методам рассуждений, которые формализуются в конструктивной (или, в терминологии [7], — интуиционистской) формальной арифметике. Конструктивные методы рассуждений будут пониматься содержательно, а не формально; мы не будем строить никакой формальной логической системы, в которой формализовывались бы применяемые рассуждения (хотя при желании такую систему можно было бы построить). Таким образом, мы предполагаем, что из внематематических (в данном случае — из логических) источников нам дано представление об определенном наборе „конструктивных методов рассуждений", так что мы можем отличать конструктивные доказательства от последовательностей рассуждений, не являющихся конструктивными доказательствами.

2. Г. Крейсел в работе [8] строит формальную систему, которую он называет „абстрактной теорией конструкций"; эта система предназначается Г. Крейселом для аксиоматического описания понятий „конструкции" и „конструктивного доказательства". Некоторые дета-

ли работы Г. Крейсела будут применяться в дальнейшем изложении (например, введение равенства и других аналогичных понятий с помощью операций; рассмотрение понятий пары и компонент пары на аксиомататической основе и т. п.). Однако результаты, полученные Г. Крейселом в работе [8], относятся в основном к обоснованию исчислений интуиционистской логики и не пересекаются с утверждениями, устанавливаемыми в настоящей статье.

Аксиоматическое построение рекурсивной арифметики, т. е. теории рекурсивных операций над натуральными числами было предложено Х. Б. Карри ([9]) и Р. Л. Гудстейном ([10], [11], см. также [12], раздел „рекурсивная арифметика“). Аксиоматический подход к определению конкретных операций (рекурсивных функций) сближает рекурсивную арифметику с рассмотрениями настоящей статьи; однако в рекурсивной арифметике отсутствует общность рассмотрения понятия объекта (в роли объектов используются лишь натуральные числа), и, кроме того, применяемый логический аппарат сильно сужен по сравнению с обычным логическим аппаратом конструктивной математики. Следует также отметить, что рекурсивная арифметика рассматривается как формально-логическая система, и логика понимается в ней формально, а не содержательно. Все это обуславливает существенные отличия рекурсивной арифметики от рассматриваемой здесь разновидности аксиоматического метода; результаты, получаемые для рекурсивной арифметики, не пересекаются с утверждениями, устанавливаемыми в этой статье. В работах [13], [14], [15], [16] и в ряде других работ аксиоматический метод применяется в рамках конструктивного направления в математике; однако исходные установки, направление исследований и результаты, полученные в этих работах, отличают их от настоящей статьи. Приводимые ниже аксиомы бинормальной К-структуры внешне сходны с отношениями между алгорифмами, определенными в § 6 из [16]; некоторые из них сходны также с рядом формул, указанных в [13].

Отметим еще, что некоторые понятия, вводимые в дальнейшем при рассмотрении конструктивного аксиоматического метода, аналогичны понятиям, рассматриваемым в соответствующих классических теориях. Так например, рассматриваемое ниже понятие К-структуры имеет ряд общих черт с понятиями конструктивной алгебры и алгебры ([17], § 1, п. 13).

3. Уточним теперь некоторые конкретные черты предлагаемого метода.

По ряду соображений технического характера оказывается удобным не рассматривать по отдельности понятия „операции“ и „объекта“, а рассматривать эти понятия как синонимы, считая всякий объект операцией (быть может „вырожденной“), и, употребляя слова „операция“ и „объект“ лишь для того, чтобы подчеркнуть в каком именно аспекте проводится то или иное рассмотрение. Элементарные предикаты над объектами мы будем также рассматривать как операции; мы будем фиксировать в качестве выделенных значений, выдаваемых этими операциями, некоторые объекты И и Л, понимаемые как символ истинности и символ ложности (вместе с тем, мы не будем требовать, чтобы каждое значение, выдаваемое операцией указанного типа, совпало бы с И и с Л).

Таким образом, понятия „объекта", „операции", „элементарного предиката" мы сводим к единому понятию операции.

Каждая рассматриваемая операция будет обладать определенной „размерностью" $n \geqslant 0$; размерность операции мы будем называть также „количеством мест" или „количеством переменных" данной операции и говорить о нульместных, одноместных, двуместных и т. п. операциях (можно было бы при желании выделить „собственно объекты" как нульместные операции, однако мы этого делать не будем, и, более того, будем отличать объект от нульместной операции, выдающей этот объект). Область задания операции, в соответствии со сказанным выше, не фиксируется, и соответствующее понятие не вводится. Операция может преобразовывать любые объекты, в частности, любые операции; не исключается также случай применения операции к ней самой. Будем считать работу операции детерминированной, т. е. будем считать, что если операция работает в разных случаях над одними и теми же исходными данными, то ее работа протекает в этих случаях одинаковым образом.

Сказанное следует воспринимать, разумеется, не как математические определения, а как наводящие соображения, находящиеся вне математики. Нижеследующие положения являются попыткой провести грань между математическими и внематематическими рассмотрениями. Для этого мы вводим некоторые термины, предложения и типы предложений, которые объявляются „понятными" на основе внематематических соображений. После того как мы зафиксировали элементы языка, мы можем воспользоваться уже ранее зафиксированными способами построения сложных предложений языка (они были взяты нами на основе определенных логических средств, т. е. также исходя из внематематических соображений) для построения определенных аксиом (выбираемых на основании внематематических соображений), исходя из которых мы можем выводить новые предложения с помощью имеющихся в нашем распоряжении способов рассуждений (снова выбираемых на основе имеющихся логических средств). Математика, таким образом, начинается там, где уже выбраны язык, логика и аксиомы*.

---

* Подобная точка зрения, разумеется не может претендовать на новизну, ибо она является модификацией многочисленных имеющихся концепций, касающихся формализации математических теорий. Однако применение подобного рода концепций в конструктивной математике, насколько известно автору, не предлагалось. Естественное возражение против этого применения заключается в том, что подобная формализация может показаться „порочным кругом" на том основании, что аппарат формализации здесь обладает такой же сложностью, как и формализуемая теория. Автор не согласен с такого рода возражением. Некоторые доводы против него будут приведены ниже. Сейчас отметим лишь, что средства метаязыка, как правило, более сильны, чем средства языка: проще „называть" объекты, чем их фактически „выписывать".

Итак, мы допускаем употребление слов:

(1) Операция (синоним: объект);

(2) Нульместная, одноместная, двуместная,... операция (синонимы: операция размерности нуль, один, два,...). Мы считаем „понятным" смысл следующих предложений:

(3) После подачи на вход $n$-местной операции $f$ объектов $x_1, x_2, \cdots, x_n$ операция срабатывает и выдает на выходе объект $y$.

(4) Объект $x$ есть И.

(5) Объект $x$ есть Л.

Мы допускаем образование новых предложений из уже построенных при помощи обычных логических связок &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.

Мы допускаем образование новых понятий из уже имеющихся при помощи правил порождения. Под „правилом порождения" мы понимаем предложение следующего вида (где $f_1, f_2, \cdots, f_m$ суть фиксированные операции размерностей, соответственно, $k_1, k_2, \cdots, k_m$);

(6) Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ суть некоторые объекты, и если для $y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1l_1}$ имеет место $P_1$, для $y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2l_2}$ имеет место $P_2, \cdots$, для $y_{r1}, y_{r2}, \cdots, y_{rl_r}$ имеет место $P_r$, и если после подачи на вход $k_1$-местной операции $f_1$ объектов $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1k_1}$ операция срабатывает и выдает на выходе объект $v_1$, и если после подачи на вход $k_2$-местной операции $f_2$ объектов $u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2k_2}$ операция срабатывает и выдает на выходе объект $v_2, \cdots$, и если после подачи на вход $k_m$-местной операции $f_m$ объектов $u_{m1}, u_{m2}, \cdots, u_{mk_m}$ операция срабатывает и выдает на выходе объект $v_m$, то для $z_1, z_2, \cdots, z_q$ имеет место $Q$.

(Здесь $P_1, P_2, \cdots, P_r$ — некоторые понятия, уже имеющиеся или определяемые, $Q$ — некоторое определяемое понятие, каждый из объектов $y_{ij}$ и $u_{ij}$ имеет вид $x_\alpha$, каждый из объектов $z_l$ имеет вид $x_\alpha$ или $v_\beta$).

Мы считаем, таким образом, понятным каждое конкретное правило указанного типа и допускаем задание понятия или группы понятий при помощи таких правил.

Мы считаем, наконец, „понятными" кванторы общности и осуществимости, вводимые для понятий, определяемых при помощи правил порождения.

4. Сделаем некоторые замечания по поводу введенных соглашений.

Говоря об „$n$ переменных", а также в других аналогичных местах, мы не предполагаем известным понятие натурального числа. Для построения каждой конкретной теории нам нужны лишь операции фиксированной размерности, поэтому мы могли бы при желании ограничиться операциями размерности, например, не больше двух или трех. Числительные „два" или „три" здесь вовсе не обязательно употреблять, так же, как не обязательно помечать индексами 1, 2,$\cdots$ объекты, подаваемые на вход операции; вместо этого можно было бы говорить, например, о „розовом входе" и „голубом входе" операции (ср. [18], „Предисловие для учащегося"). Аналогично обстоит дело с натуральными индексами в приведенном выше описании порождающего правила.

Вместо общего описания того, что такое порождающее правило, мы могли бы без вреда для дела объявить „понятными“ лишь те конкретные порождающие правила, которые нам потребуются в дальнейшем.

Заметим, что при соблюдении некоторых аксиом (например, указанных ниже аксиом для спаривающих или системных операций) мы можем, не нарушая общности по существу, ограничить наше рассмотрение лишь нульместными, одноместными и двуместными операциями (так, как это сделано ниже при введении аксиом $(A_{27})$—$(A_{40})$ бинормальной структуры). Можно также ограничить использование генетических определений лишь несколькими заранее фиксированными случаями (см., например, [17], § 1, п. 1.3, теорема 1).

5. Введем некоторые обозначения. Суждение вида (3) из раздела 3 будем обозначать через „$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть $y$“, а тот объект $y$, который выдается на выходе, если имеет место ситуация (3) из раздела 3, будем обозначать через $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Суждение $\exists y\,(f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть $y)$ будем обозначать через $!\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Суждение (4) раздела 3 будем обозначать через $x^+$, а суждение (5)—через $x^-$. Мы будем употреблять символ $\lambda$, понимаемый аналогично тому, как это определено в [19] (см. также [12]), а именно: если $\Sigma$ есть выражение со свободными переменными $x_1, x_2, \cdots, x_n$, то выражение $\lambda x_1 x_2 \cdots$ $\cdots x_n \cdot \Sigma$ понимается как обозначение операции, которая для всяких объектов $x_1, x_2, \cdots, x_n$, для которых выражение $\Sigma$ имеет смысл, выдает значение выражения $\Sigma$ для заданных значений $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Мы не будем рассматривать выражений вида $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n \cdot \Sigma$ в тех случаях, когда выражение $\Sigma$ содержит свободные переменные, отличные от $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

В случае, когда в выражении вида $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ операция $f$ сама задается при помощи какого-либо выражения, мы будем выражение, определяющее $f$, заключать в фигурные скобки. Мы будем иногда применять указанные в [12] и [19] правила преобразования выражений, содержащих фигурные скобки и символ $\lambda$; допустимость применения указанных преобразований каждый раз очевидна на основании содержательной интерпретации указанной символики. Например, выражение $\{\lambda x \cdot f(x)\}(y)$ обозначает тот же объект, что $f(y)$.

Записывая обозначение операции, мы будем иногда указывать размерность этой операции при помощи верхнего индекса в скобках; так, например, $f^{(2)}$, $x^{(5)}$, $F^{(0)}$ суть обозначения соответственно двуместной, пятиместной, нульместной операции. Иногда мы будем опускать обозначение размерности в тех случаях, когда размерность рассматриваемой операции очевидна или несущественна.

6. Введем теперь понятие К-структуры, которое будет играть основную роль в дальнейшем изложении, а также некоторые понятия, связанные с ним. Определения, излагаемые в этом разделе, не являются определениями внутри аксиоматических теорий, а потому мы не будем ограничиваться при их введении установленными ранее жесткими нормами языка.

Всякий набор операций вида $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ мы будем называть *конструктивной структурой* или, *сокращенно* К-*структурой*. Операции $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)}$ мы будем называть *базисными элементами* К-структуры $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$.

Понятие *элемента* К-структуры $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$, (обозначаемой далее через $S$), вводится посредством следующих порождающих правил:

(1) Каждый из объектов $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)}$ есть элемент К-структуры $S$.

(2) Если $F^{(n)}$ есть элемент К-структуры $S$ и $x_1, x_2, \cdots, x_n$ суть элементы $S$ и $! \, F^{(n)} (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, то $F^{(n)} (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть элемент К-структуры $S$.

После введения понятия элемента К-структуры $S$ мы допускаем употребление квантора всеобщности $\forall$ и квантора потенциальной осуществимости $\exists$ относительно переменных, для которых допустимыми значениями являются элементы рассматриваемой К-структуры. В роли таких переменных мы будем употреблять символы $x$, $y$, $z$, $f$, $g$, $h$, $F$, $G$, $H$ с индексами или без индексов. Вместо „элемент К-структуры $S$" в случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем говорить просто „элемент".

При рассмотрении К-структуры $(f_1, f_2, \cdots, f_n, R)$ двуместный элемент $R$ мы будем называть *операцией равенства*, вместо $R(x, y)^+$ будем писать $x = y$, а вместо $R(x, y)^-$ будем* писать $x \neq y$. Суждения вида

$$! \, f (x_1, x_2, \cdots, x_n) \vee ! \, g (y_1, y_2, \cdots, y_m) \supset$$
$$\supset f (x_1, x_2, \cdots, x_n) = g (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

мы будем записывать следующим образом:

$$f (x_1, x_2, \cdots, x_n) \simeq g (y_1, y_2, \cdots, y_m).$$

Будем говорить, что К-структура $(f_1, f_2, \cdots, f_n, R)$ является *подструктурой* К-структуры $(g_1, g_2, \cdots, g_m, Q)$, если $f_1, f_2, \cdots, f_n, R$ являются элементами К-структуры $(g_1, g_2, \cdots, g_m, Q)$, и имеет место $Q(R, Q)^+$. Будем говорить, что К-структура $(f_1, f_2, \cdots, f_k, R)$ является *правильной*, если в этой структуре выполнены следующие аксиомы:

$(A_1)$ $\quad \forall x \, (x = x)$;

$(A_2)$ $\quad \forall xy \, (x = y \supset y = x)$;

$(A_3)$ $\quad \forall xyz \, (x = y \,\&\, y = z \supset x = z)$;

$(A_4)$ $\quad \forall xy \, (x = y \vee x \neq y)$;

$(A_5)$ $\quad \forall xy \neg (x = y \,\&\, x \neq y)$;

---

* Таким образом, $x \neq y$ непосредственно не определяется как отрицание $x = y$. Однако эквивалентность $x \neq y$ и $\neg (x = y)$ вытекает из приведенных ниже аксиом $(A_4)$ и $(A_5)$.

$(A_6)$ Для любых $n$-местных операций $F^{(n)}$ и $G^{(n)}$

$$\forall x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_n (F^{(n)} = G^{(n)} \& x_1 = y_1 \& \\ \& x_2 = y_2 \& \cdots \& x_n = y_n \supset F^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \simeq G^{(n)}(y_1, y_2, \cdots, y_n)).$$

(Заметим, что аксиома $(A_3)$ по существу является схемой аксиом). В дальнейшем мы будем рассматривать лишь правильные К-структуры.

Будем говорить, что элемент $f^{(n)}$ К-структуры является *всюду определенным*, если

$$(A_7) \quad \forall x_1 x_2 \cdots x_n \,!\, f^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

К-структуру $(f_1, f_2, \cdots, f_k, R)$ будем называть *сплошной*, если все базисные элементы $f_1, f_2, \cdots, f_k, R$ всюду определены.

Рассмотрим теперь некоторые примеры применения понятия К-структуры. А именно, мы покажем, каким образом в терминах К-структур можно определить понятия натурального числа, слова, а также понятия пары и системы объектов. Правильную К-структуру $(a, s^{(1)}, R^{(2)})$ будем называть *пеановой*, если в ней выполнены следующие аксиомы:

$$(A_8) \qquad \forall x \,!\, s^{(1)}(x);$$

$$(A_9) \qquad \forall x\, (s^{(1)}(x) \neq a);$$

$$(A_{10}) \qquad \forall xy\, (s^{(1)}(x) = s^{(1)}(y) \supset x = y).$$

*Натуральные числа* можно определить теперь как элементы пеановой К-структуры, определяемые при помощи следующих порождающих правил (1) $a$ есть натуральное число; 2) если $x$ есть натуральное число, то $s(x)$ есть натуральное число. Как правило, элемент $a$ пеановой К-структуры $(a, s, R)$ мы будем обозначать через 0; вместо $s(x)$ иногда будем писать $x+1$; элементы $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, $\cdots$ будем обозначать иногда через 1, 2, 3, $\cdots$.

Аксиома индукции при содержательном восприятии понятия натурального числа не должна вводиться; правомерность рассуждений по индукции непосредственно следует из генетического характера понятия натурального числа (см. [1], подстрочное примечание на стр. 18). Следует заметить, однако, что при формализации рассуждений о К-структурах в рамках некоторой формально-логической системы (скажем, наподобие той, которая была указана в [7], § 19), схема аксиом индукции (или некоторая эквивалентная ей схема) является необходимой, иначе мы будем лишены возможности проводить в нашей системе рассуждения по индукции. Можно сказать, что схема аксиом индукции как раз и является тем средством, при помощи которого в формально-логическую систему вводится генетическая концепция понятия объекта.

Понятие натурального числа можно было бы вводить и на основе иных К-структур. Так, например, можно было бы ввести операции следования, сложения, умножения, на основе обычных аксиом (см. [7], § 19). Точно так же можно было бы рассматривать в качестве операций суперпозицию, примитивную рекурсию и $\mu$-оператор и, таким образом, строить аксиоматическую теорию рекурсивных функций.

Рассмотрим теперь аксиоматическое определение понятия слова в алфавите. Правильную К-структуру $(a, s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \cdots, s_n^{(1)}, R)$, где $n \geqslant 1$, будем называть *n-алфавитной*, если в ней выполнены следующие аксиомы:

$$(A_{11}) \qquad \forall x \,!\, s_i^{(1)}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n);$$

$$(A_{12}) \qquad \forall x \;(s_i^{(1)}(x) \neq a) \;(1 \leqslant i \leqslant n);$$

$$(A_{13}) \qquad \forall xy \;(s_i^{(1)}(x) \neq s_j^{(1)}(y)) \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j \end{pmatrix};$$

$$(A_{14}) \qquad \forall xy \,(s_i^{(1)}(x) = s_i^{(1)}(y) \supset x = y) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

*Слова в n-буквенном алфавите* определяются теперь как элементы $n$-алфавитной К-структуры $(a, s_1, s_2, \cdots, s_n, R)$, задаваемые посредством следующих порождающих правил:

1) $a$ есть слово;

2) если $x$ есть слово, то $s_i(x)$ есть слово $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Аналогично тому, как это было отмечено для натуральных чисел, мы можем строить теорию слов на основе операции объединения слов, а также на основе операций композиции, разветвления, повторения операций над словами и других операций, рассматриваемых в [1].

Рассмотрим аксиоматические определения понятий *пары* и *системы* объектов. Пусть задана некоторая К-структура. Будем говорить, что операция $\sigma^{(2)}$ этой К-структуры является *спаривающей*, если можно построить такие операции $\iota^{(1)}$, $\varkappa^{(1)}$ (называемые *обратными спаривающими операциями*) для $\sigma^{(2)}$, что выполнены следующие аксиомы:

$$(A_{15}) \qquad \forall xy \,!\, \sigma^{(2)}(x, y);$$

$$(A_{16}) \qquad \forall z \,!\, \iota^{(1)}(z);$$

$$(A_{17}) \qquad \forall z \,!\, \varkappa^{(1)}(z);$$

$$(A_{18}) \qquad \forall xy \;(\iota^{(1)}(\sigma^{(2)}(x, y)) = x);$$

$$(A_{19}) \qquad \forall xy \;(\varkappa^{(1)}(\sigma^{(2)}(x, y)) = y).$$

Если дана спаривающая функция $\sigma$, то объект $z$ называется *парой*, если имеются такие объекты $x$ и $y$ (называемые *компонентами* пары), что $\sigma(x, y) = z$. Ясно, что по паре $z$ всегда возможно однозначно восстановить ее компоненты.

Аналогичным образом определяются системы объектов. Пусть задана некоторая К-структура $S$, пусть $\sigma^{(2)}$ — спаривающая операция в $S$, и пусть $\iota^{(1)}$ и $\varkappa^{(1)}$ — обратные спаривающие операции для $\sigma^{(2)}$. Пусть далее $(0, s^{(1)}, R^{(2)})$ — пеанова подструктура К-структуры $S$. Тогда будем говорить, что элементы $\pi^{(2)}$, $\delta^{(1)}$ и $\Lambda$ являются *системными* относительно $\sigma^{(2)}$, $\iota^{(1)}$, $\varkappa^{(1)}$, 0, $s^{(1)}$, если удовлетворяются следующие аксиомы:

$(A_{20})$ $\forall x\,!\,\delta^{(1)}(x)$;

$(A_{21})$ Для всякого элемента $x$ и для всякого натурального $k$ $!\,\pi^{(2)}(x, k)$.

$(A_{22})$ $\delta^{(1)}(\Lambda) = 0$;

$(A_{23})$ $\forall xy\,(\delta^{(1)}(\sigma^{(2)}(x, y)) = s^{(1)}(\delta^{(1)}(y)))$;

$(A_{24})$ $\forall xy\,(\pi^{(2)}(\sigma^{(2)}(x, y), 0) = x)$;

$(A_{25})$ Для всяких элементов $x$ и $y$ и для всякого натурального $k$ $\pi^{(2)}(\sigma^{(2)}(x, y), s^{(1)}(k)) = \pi^{(2)}(y, k)$.

Если заданы системные элементы $\pi$, $\delta$, $\Lambda$ относительно $\sigma$, $\iota$, $x$, 0, s, то понятие *системы*, а также отношения „натуральное число $k$ есть длина системы $y$“ „элемент $x$ есть $k$-ый член системы $y$“, вводятся при помощи следующих порождающих правил:

1) $\Lambda$ есть система;
2) 0 есть длина $\Lambda$;
3) если $x$ есть элемент, $y$ есть система, $k$ есть длина системы $y$, и $z$ есть $i$-й член системы $y$, то
(3a) $\sigma(x, y)$ есть система;
(3b) $s(k)$ есть длина системы $\sigma(x, y)$;
(3c) $x$ есть 0-й член системы $\sigma(x, y)$;
(3d) $z$ есть $s(i)$-й член системы $\sigma(x, y)$.

Легко видеть, что по каждой системе $z$ можно однозначно определить ее длину $\delta(z)$ при помощи операции $\delta$ и все ее члены $\pi(z, 0)$, $\pi(z, 1)$, $\cdots$, $\pi(z, k)$ (где $s(k) = \delta(z)$) при помощи операции $\pi$.

В дальнейшем мы будем пользоваться понятиями натурального числа, слова в алфавите, пары, системы, считая известными основные свойства этих объектов, рассматриваемые в конструктивной математике. Исходя из изложенных принципов соответствующие теории, очевидно, можно развить на аксиоматической основе; мы не утверждаем, что введенных выше аксиом достаточно для вывода всех свойств рассматриваемых объектов, рассматриваемых в традиционных изложениях конструктивной математики; однако набор аксиом, достаточный для этой цели, очевидно, может быть построен; такое построение представляет собой самостоятельную проблему, которой мы здесь не будем заниматься.

Введем, наконец, понятие *бинормальной* К-структуры. Будем говорить, что правильная К-структура $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ является *бинормальной*, если в ней выполнены следующие аксиомы:

$$(A_{26.\,i})\ \exists F \forall g_1^{(1)} g_2^{(1)} \cdots g_{n_i}^{(1)} x\,(!\,F(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)})\ \&$$
$$\&\ \{F(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)})\}(x) \simeq f_i^{(n_i)}(g_1^{(1)}(x), g_2^{(1)}(x), \cdots, g_{n_i}^{(1)}(x)))\ \ (1 \leqslant i \leqslant k);$$

$$(A_{27})\ \exists F \forall f^{(1)} g^{(0)}\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(0)})\ \&\ \{F(f^{(1)}, g^{(0)})\}(\ ) \simeq f^{(1)}(g^{(0)}(\ )));$$

$$(A_{28})\ \exists F \forall f^{(1)} g^{(1)} x\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(1)})\ \&\ \{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x) \simeq f^{(1)}(g^{(1)}(x)));$$

$$(A_{29})\ \exists F \forall f^{(1)} g^{(2)} xy\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(2)})\ \&\ \{F(f^{(1)}, g^{(2)})\}(x, y) \simeq f^{(1)}(g^{(2)}(x, y)));$$

$$(A_{30})\ \exists F \forall f^{(2)} g^{(1)} h^{(1)} x\,(!\,F(f^{(2)}, g^{(1)}, h^{(1)})\ \&$$
$$\&\ \{F(f^{(2)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x) \simeq f^{(2)}(g^{(1)}(x), h^{(1)}(x)));$$

$$(A_{31})\ \exists F \forall f^{(2)} g_1^{(2)} g_2^{(2)} xy\,(!\,F(f^{(2)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)})\ \&$$
$$\&\ \{F(f^{(2)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)})\}(x, y) \simeq f^2(g_1(x, y), g_2(x, y)));$$

$$(A_{32})\ \exists F \forall f^{(1)} g^{(1)} h^{(1)} x\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\ \&$$
$$\&\ (f^{(1)}(x)^+ \supset \{F(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x) \simeq g^{(1)}(x)\ \&$$
$$\&\ f^{(1)}(x)^- \supset \{F(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x) \simeq h^1(x)\ \&$$
$$\&\ (\neg\, f^{(1)}(x)^+\ \&\ \neg\, f^{(1)}(x)^- \supset \neg\,!\,\{F(f^1, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x)));$$

$(A_{33})$ Можно построить такой элемент $F$, что для любых $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $x$ оказывается: $!\,F(f^{(1)}, g^{(1)})$, и, кроме того, $!\,\{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x)$ имеет место в том и только в том случае, когда можно построить систему элементов $x_0, x_1, \cdots, x_n$, где $n \geqslant 0$, такую, что $x_0 = x$, $x_{i+1} = f^{(1)}(x_i)$ при $0 \leqslant i < n$, $g(x_i)^-$ при $0 \leqslant i < n$, $g(x_n)^+$; и, наконец, если $!\,\{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x)$ то $\{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x) = x_n$, где $x_n$ есть последний член построенной указанным образом системы.

$$(A_{34})\ \exists F \forall f^{(0)} x\,(!\,F(f^{(0)})\ \&\ \{F(f^{(0)})\}(x) \simeq f^{(0)}(\ \ ));$$
$$(A_{35})\ \exists F \forall f^{(1)} xy\,(!\,F(f^{(1)})\ \&\ \{F(f^{(1)})\}(x, y) \simeq f^{(1)}(x));$$
$$(A_{36})\ \exists F \forall f^{(1)} xy\,(!\,F(f^{(1)})\ \&\ \{F(f^{(1)})\}(x, y) \simeq f^{(1)}(y));$$
$$(A_{37})\ \exists F \forall x\,(\{F(x)\}(\ \ ) = x);$$
$$(A_{38})\ \exists f \forall x\,(f(x) = x);$$
$$(A_{39})\ \exists f \forall x f(x)^+;$$
$$(A_{40})\ \exists f \forall x f(x)^-.$$

Как уже указывалось выше, аксиомы бинормальной структуры внешне сходны с условиями, указанными в определении нормального замыкания ([16], § 6); отличие заключается, во-первых, в том, что мы не вводим здесь понятия „предиката", рассматривая по существу „предикаты" как частный случай „функторов"; во-вторых, вместо условия, касающегося отбрасывания фиктивной переменной, здесь употребляется аксиома $(A_{37})$, касающаяся осуществимости функций—констант; наконец, аксиомы бинормальной структуры формулируются лишь для операций с ограниченными размерностями (большинство аксиом сформулировано для размерностей, не превосходящих двух, чем и обусловлено название „бинормальная структура").

При рассмотрении бинормальных структур мы будем употреблять некоторые специальные термины и обозначения (ср. [16], § 6). Пусть фиксирована операция $F_{32}$, удовлетворяющая условию, указанному в аксиоме $(A_{32})$ (говоря точнее—условию, получающемуся из $(A_{32})$ посредством удаления $\exists F$), тогда для любых $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $h^{(1)}$ мы будем называть $F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})$ *разветвлением* $g^{(1)}$ *и* $h^{(1)}$ *относительно* $f^{(1)}$ и обозначать посредством $\text{if}\, f^{(1)+}\ \text{then}\ g^{(1)}\ \text{else}\ h^{(1)}$; кроме того, $\{F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x)$ мы будем обозначать посредством if $f^{(1)}(x)^{+}$ then $g^{(1)}(x)$ else $h^{(1)}(x)$, причем в этой записи мы будем иногда заменять $f^{(1)}(x)$, $g^{(1)}(x)$, $h^{(1)}(x)$ другими эквивалентными им выражениями. Далее пусть фиксирована операция $F_{33}$, удовлетворяющая условию, указанному в аксиоме $(A_{33})$; тогда для любых $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ мы будем называть $F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)})$ *повторением* $f^{(1)}$ относительно $g^{(1)}$ и обозначать while $g^{(1)-}$ do $f^{(1)}$;знак $^{-}$ иногда будем вводить внутрь записи $g$, например, вместо $(\lambda x \cdot R(x, 0))^{-}$ будем писать $\lambda x \cdot x \neq 0$.

Замечание 1. Слова if, then, else while, do заимствованы из языка АЛГОЛ-60 ([20]); введенное здесь обозначение разветвления в точности совпадает с обозначением разветвления, принятым в АЛГОЛ-60, однако обозначение повторения несколько сокращено по сравнению с указанным языком; точная запись повторения по правилам языка АЛГОЛ-60 могла бы иметь, например, следующий вид:

$$\text{for } x := x \text{ while } g^{(1)}(x) \text{ do } x := f^{(1)}(x).$$

Замечание 2. При рассмотрении повторения мы не допускаем обозначений типа while $g^{(1)}(x)^{-}$ do $f^{(1)}(x)$, наподобие тех, которые были введены для разветвления. Дело в том, что при употреблении обозначений типа while $g^{(1)}(x)^{-}$ do $f^{(1)}(x)$ могут возникнуть недоразумения: повторение алгорифмов, в отличие от разветвления, не инвариантно относительно подстановки. Так, например, мы можем написать

$$\{\text{if } f^{+} \text{ then } g \text{ else } h\}(u(x)) \simeq \{\text{if } \lambda z \cdot f(u(z))^{+} \text{ then } \lambda z \cdot g(u(z)) \text{ else } \lambda z \cdot h(u(z))\}(x),$$

но было бы неверным утверждать, что $\{\text{while } g^{-} \text{ do } f\}(u(x))$ равносильно $\{\text{while } \lambda z \cdot g(u(z))^{-} \text{ do } \lambda z \cdot f(u(z))\}(x)$.

7. В качестве примера математических рассмотрений на основе конструктивного аксиоматического метода мы рассмотрим вопрос о возможности описания в рамках такой теории любых конструктивных преобразований объектов соответствующей К-структуры. Наше рассмотрение при этом будет в определенной степени зависимым от концепций традиционной теории алгорифмов, поскольку „эталон" общего понятия алгорифма мы будем заимствовать из традиционных источников.

Пусть фиксирована некоторая К-структура $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ (в дальнейшем будем ее обозначать через $S$). Введем в рассмотрение попарно различные буквы $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$, (, , ,) (мы описываем рассмотрения, связанные со словами в алфавитах, в традиционных терминах, хотя то же самое можно было бы сделать и на аксиоматическом языке).

*Термами* К-структуры $S$ будем называть слова в алфавите $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega, (, , ,)\}$, определяемые следующими порождающими правилами: 1) каждая из букв $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$ есть терм; 2) если $T_1, T_2, \cdots, T_{n_l}$ — термы, то слово $\Phi_l(T_1, T_2, \cdots, T_{n_l})$ есть терм; 3) если $T_1$ и $T_2$ суть термы, то $\Omega(T_1, T_2)$ есть терм. Зафиксируем конструктивное взаимно однозначное соответствие $\Xi$ между термами К-структуры $S$ и натуральными числами, определяемое следующими правилами.

1) Если длина терма $T_1$ больше длины терма $T_2$, то натуральное число, соответствующее терму $T_1$, больше натурального числа, соответствующего терму $T_2$.

2) Если длины термов $T_1$ и $T_2$ равны $n$, и при лексикографическом упорядочении всех слов длины $n$ в алфавите $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega, (, , , )\}$ терм $T_1$ предшествует терму $T_2$, то натуральное число, соответствующее терму $T_1$, меньше натурального числа, соответствующего терму $T_2$.

Очевидно, что указанные правила однозначно определяют соответствие $\Xi$. Легко проверить, в частности, что согласно соответствию $\Xi$, однобуквенным словам $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$ соответствуют натуральные числа $1, 2, \cdots, k, k+1$. В дальнейшем натуральное число, соответствующее терму $T$ в силу соответствия $\Xi$ мы будем называть *$\Xi$-номером* терма $T$.

*Значение терма* в К-структуре $S$ определяется следующими порождающими правилами: 1) значение каждого из термов $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$ определено и совпадает, соответственно, с $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)}$; 2) если $T_1, T_2, T_{n_l}$—термы, и значения их суть, соответственно, $t_1, t_2, \cdots \cdots, t_{n_l}$, то значение терма $\Phi_l(T_1, T_2, \cdots, T_{n_l})$ определено в том, и только в том случае, когда $! f_l^{(n_l)}(t_1, t_2, \cdots, t_{n_l})$ и если определено, то совпадает с $f_l^{(n_l)}(t_1, t_2, \cdots, t_{n_l})$; 3) если $T_1$ и $T_2$—термы, и значения их суть, соответственно, $t_1$ и $t_2$, то значение терма $\Omega(T_1, T_2)$ определено в том и только в том случае, когда $! R^{(2)}(t_1, t_2)$ и в этом случае совпадает с $R^{(2)}(t_1, t_2)$.

Ясно, что для каждого объекта $x$ К-структуры $S$ имеется хотя бы один терм со значением $x$. Это непосредственно вытекает из генетического характера понятия „элемент К-структуры".

Частично-рекурсивную функцию $\varphi$ от одной переменной будем называть *рекурсивным преобразованием элементов* К-структуры $S$, если для любых натуральных чисел $k$ и $l$ оказывается: если термы $T_1$ и $T_2$ с $\Xi$-номерами $k$ и $l$ определены и таковы, что для их значений $x_1$ и $x_2$ имеет место $x_1 = x_2$, то тогда (1) если одно из значений $\varphi(k)$ и $\varphi(l)$ определено, то и другое из них также определено; (2) если оба значения $\varphi(k)$ и $\varphi(l)$ определены, то тогда если значение одного из двух термов, имеющих $\Xi$-номера $\varphi(k)$ и $\varphi(l)$ определено, то тогда и значение другого из них определено; (3) если значения $x$ и $y$ обоих термов, указанных в предыдущем пункте, определены, то $x = y$.

Пусть $\varphi$—рекурсивное преобразование элементов К-структуры $S$. *Результатом преобразования* элемента $x$ К-структуры $S$ посредством $\varphi$ будем называть элемент $y$ К-структуры $S$, который получается в результате следующих действий: 1) находим какой-либо терм $T$, имеющий значение $x$; 2) находим $\Xi$-номер $k$ терма $T$; 3) находим $\varphi(k)$; 4) находим терм $T'$, имеющий номер $\varphi(k)$; 5) в качестве $y$ берем значение терма $T'$ (если оно определено). Ясно, что если результат преобразования элемента $x$ посредством $\varphi$ определен, то он единственен с точностью до отношения равенства, определяемого операцией $R^{(2)}$.

Будем говорить, что элемент $f^{(1)}$ К-структуры $S$ является *ориентиром* рекурсивного преобразования $\varphi$ элементов этой К-структуры, если для любого элемента $x$ К-структуры $S$ оказывается: результат преобразования элемента $x$ посредством $\varphi$ определен в том, и только в том случае, когда $!\, f^{(1)}(x)$, и в этом случае, если $y$ есть результат преобразования $x$ посредством $\varphi$, то $y = f^{(1)}(x)$.

Будем говорить, что К-структура $S$ является *рекурсивно полной*, если для всякого рекурсивного преобразования $\varphi$ элементов К-структуры $S$ можно построить элемент $f^{(1)}$ К-структуры $S$, являющийся ориентиром $\varphi$.

Теорема 1. *Всякая правильная сплошная бинормальная К-структура* $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$, *в которой имеется элемент, являющийся спаривающей операцией, и имеются элементы* $x_1$ *и* $x_2$ *такие, что* $x_1 \neq x_2$, *рекурсивно полна.*

(Иначе говоря, для рекурсивной полноты К-структуры $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ достаточно, чтобы были выполнены аксиомы $(A_1)$—$(A_6)$, $(A_7)$ для $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}$, $(A_{15})-(A_{19})$ для некоторых $\sigma$, $\iota$, $\varkappa$, $A_{36}-A_{40}$ и, кроме того, $x_1 \neq x_2$ для некоторых $x_1$ и $x_2$).

Доказательство. Обозначим структуру $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ через $S$. Покажем, прежде всего, что в $S$ имеется пеанова подструктура $S^*$.

Построим согласно условию теоремы элементы $x_1$ и $x_2$ К-структуры $S$ такие, что $x_1 \neq x_2$, и операции $\sigma$, $\iota$, $\varkappa$, удовлетворяющие аксиомам $(A_{15})$—$(A_{19})$. Тогда для любых элементов $x$ и $y$ структуры $S$

$$
\begin{array}{ll}
!\, \sigma(x, y); & \iota(\sigma(x, y)) = x; \\
!\, \iota(x); & \varkappa(\sigma(x, y)) = y. \\
!\, \varkappa(x); &
\end{array}
$$

Построим теперь элементы $\sigma(x_1, x_1)$, $\sigma(x_1, x_2)$, $\sigma(x_2, x_1)$, $\sigma(x_2, x_2)$ и обозначим их через $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$. Ввиду свойств операций $\sigma$, $\iota$, $\varkappa$ имеем: $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Следовательно, согласно $(A_1)-(A_4)$, можно построить такой элемент $y_\gamma$, что $y_\gamma \neq x_i$ при $i = 1, 2$. Обозначим $y_\gamma$ через 0. Построим теперь операцию $s$ такую, что при любом $x$

$$s(x) \simeq \sigma(0, x).$$

Для этого согласно $(A_{37})$ построим такую нульместную операцию $\eta$, что $\eta(\ ) = 0$. Затем, согласно $(A_{34})$ построим одноместную операцию $\theta$ такую, что $\forall x (\theta(x) = 0)$. Затем, согласно $(A_{38})$, построим такую одноместную операцию $\varphi$, что $\forall x (\varphi(x) = x)$. Наконец, согласно $(A_{30})$ построим такую операцию $s$, что $\forall x (s(x) \simeq \sigma(\theta(x), \varphi(x)))$. Легко проверить, что операция $s$ будет требуемой. В дальнейшем мы не будем подробно проводить построений такого рода, предоставляя это читателю; методы подобных построений описаны, например, в [7], § 44.

Теперь рассмотрим подструктуру $(0, s, R)$ структуры $S$; эту подструктуру будем обозначать через $S^*$. Легко проверить, что К-структура $S^*$ является пеановой. В самом деле, если $s(x)=s(y)$, то $\sigma(0, x) = \sigma(0, y)$, а тогда, согласно $(A_{19})$, $x=y$. Далее, если бы было $s(y)=0$, то $\sigma(0, y) = \sigma(x_i, x_j)$ при некоторых $i$, $j$ от 1 до 2, и тогда, согласно $(A_{18})$, $0 = x_i$, что противоречит выбору 0.

Теперь элементы структуры $S$, полученные исходя из 0 посредством $s$, мы будем рассматривать как натуральные числа (при аксиоматическом построении теории натуральных чисел мы освобождаемся от обязанности вводить для этих объектов некое новое наименование, а также устанавливать их конструктивное взаимно-однозначное соответствие с „подлинными" натуральными числами). Для введенных таким образом натуральных чисел мы будем рассматривать рекурсивные функции, определяемые обычным образом ([7]). Покажем, что (В) *для всякой рекурсивной функции* $\varphi$ *от одной переменной можно построить такой элемент* $f$ *структуры* $S$, *что для любого натурального* $k$

$$\varphi(k) \simeq f(k).$$

Построим вначале такие элементы $s$, $t$, $p$, $q$, $r$ структуры $S$, что при любых натуральных $k$ и $l$

$$s(k) = k+1;$$

$$t(k) = k \dot{-} 1;$$

$$p(k, l) = k+l;$$

$$q(k, l) = k \dot{-} l;$$

$$r(k, l) = k \cdot l.$$

Элемент $s$ с указанным свойством был уже построен ранее. В качестве $t$ можно взять элемент

$$\lambda x \cdot (\text{if } x=0 \text{ then } 0 \text{ else } \iota(\{\text{while } \lambda z \cdot s(\iota(z)) \neq \varkappa(z)$$
$$\text{do } \lambda z \cdot \sigma(s(\iota(z)), \varkappa(z))\}(\sigma(0, x)))).$$

В качестве $p$ можно взять элемент

$$\lambda xy \cdot (\iota(\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(s(\iota(z)), t(\iota(z)))\}(\sigma(x, y)))).$$

В качестве $q$ можно взять элемент

$$\lambda xy \cdot (\iota(\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(t(\iota(z)), t(\varkappa(z)))\}(\sigma(x, y)))).$$

В качестве $r$ можно взять элемент

$$\lambda xy \cdot (\varkappa(\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa(\iota(z)) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(\sigma(\iota(\iota(z)),$$
$$t(\varkappa(\iota(z)))), p(\iota(\iota(z)), \varkappa(z)))\}(\sigma(\sigma(x, y), 0)))).$$

Построим теперь элемент

$$\lambda x \cdot [t(\iota(\{\text{while } \lambda z \cdot q(1, q(r(\iota(z), \iota(z)), \varkappa(z))) \neq 0$$

$$\text{do}\ \lambda z \cdot \sigma (s (\iota (z)),\ \varkappa (z))\} (\sigma (0,\ x))))],$$

который мы обозначим через Quad и элемент

$$\lambda x \cdot q (x,\ r (\mathrm{Quad} (x),\ \mathrm{Quad} (x))),$$

который мы обозначим через Quadres.

Легко проверить, что для всякого натурального числа $k$ Quadres $(k)$ есть натуральное число, равное расстоянию $k$ от наибольшего точного квадрата, не превосходящего $k$.

Таким образом, для всякого натурального числа $k$

$$\mathrm{Quadres} (k) = \mathrm{quadres} (k),$$

где quadres — примитивно-рекурсивная функция, рассматриваемая в [21], § 1 и § 7.

Докажем теперь, что утверждение (B) справедливо для всякой примитивно-рекурсивной функции $\varphi$ от одной переменной. Согласно теореме Р. Робинсона ([22], см. также [21], § 7), всякая одноместная примитивно-рекурсивная функция может быть получена из функций $\lambda x \cdot (x+1)$ и quadres посредством операторов суммирования, суперпозиции и итерации. Для функций прибавления единицы и quadres утверждение B уже доказано (в роли элемента $f$ в этих случаях можно взять, соответственно, элементы $s$ и Quadres). Докажем, что операторы суммирования, суперпозиции и итерации сохраняют утверждение (B), иначе говоря: (I) если для одноместных примитивно-рекурсивных функций $\varphi$ и $\psi$ утверждение (B) справедливо, то оно справедливо также для суммы $\varphi$ и $\psi$ и для суперпозиции $\varphi$ и $\psi$; (II) если для одноместной примитивно-рекурсивной функции $\varphi$ справедливо (B), то оно справедливо и для итерации функции $\varphi$. На основании $(A_{30})$ и $(A_{27})$ (беря в $(A_{30})$ $p$ в роли $f^{(2)}$), легко устанавливаем (I). Докажем (II). Пусть $\varphi$—одноместная примитивно-рекурсивная функция, удовлетворяющая (B), пусть элемент $f$ таков, что при любом натуральном $k$

$$\varphi (k) = f (k),$$

и пусть $\psi$ есть итерация $\varphi$. Тогда при любом натуральном $k$

$$\psi (0) = 0;$$

$$\psi (k+1) = \varphi (\psi (k)).$$

Построим элемент

$$\lambda x \cdot [\iota (\{\text{while}\ \lambda z \cdot \varkappa (z) \neq 0\ \text{do}\ \lambda z \cdot \sigma (f (\iota (z)),\ t (\varkappa (z)))\} (\sigma (0,\ x)))],$$

который мы обозначим через $g$. Легко проверить, что для любого натурального $k$

$$g (k) = \psi (k).$$

Таким образом, (II) доказано. Тем самым мы установили (B) для любой примитивно-рекурсивной функции $\varphi$.

Проведем несколько построений, опирающихся на это утверждение. Построим элемент $\upsilon$ такой, что для любого натурального $k$

$$\nu(k) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Далее, на основании $(A_{29})$, $(A_{31})$ и $(A_{35})$ построим элемент $\sigma^*$ такой, что для любых $k$ и $l$.

$$\sigma^*(k, l) = \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} + k.$$

Кроме того, снова опираясь на справедливость утверждения (B) для всякой одноместной примитивно-рекурсивной функции, построим элементы $\iota^*$ и $\varkappa^*$ такие, что при любом натуральном $k$ $\iota^*(k)$ и $\varkappa^*(k)$ суть натуральные числа, и, кроме того

$$\iota^*(\sigma^*(k, l)) = k;$$

$$\varkappa^*(\sigma^*(k, l)) = l;$$

$$\sigma^*(\iota^*(k), \varkappa^*(k)) = k$$

при любых натуральных $k$ и $l$.

Покажем теперь, что (B) справедливо также и для частично-рекурсивных функций. Пусть $\varphi$—произвольная частично-рекурсивная функция от одной переменной. Как известно ([7]), можно построить такую примитивно-рекурсивную функцию $\psi$ от двух переменных, что при любом натуральном $k$

$$\varphi(k) \simeq \mu l\, [\psi(k, l) = 0].$$

Легко видеть, что осуществима примитивно-рекурсивная функция $\overline{\psi}$ такая, что при любом натуральном $k$

$$\overline{\psi}(k) = \psi(\iota^*(k), \varkappa^*(k)).$$

Построим элемент $h$ такой, что при любом натуральном $k$

$$h(k) = \overline{\psi}(k).$$

Построим, наконец, элемент

$$\lambda x \cdot [\varkappa(\{\text{while } \lambda z \cdot h(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(\iota^*(z), s(\varkappa^*(z)))\}(\sigma(x, 0)))]$$

и обозначим его через $f$. Легко проверить, что при любом натуральном $k$

$$f(k) \simeq \varphi(k).$$

Тем самым (B) полностью доказано.

Мы переходим теперь к построению элементов $F$ и $L$ таких, что для любого натурального числа $n$ элемент $F(n)$ есть значение терма, имеющего $\Xi$-номер $n$, и для любого элемента $x$ $L(x)$ есть элемент, удовлетворяющий условию $F(L(x)) =_{,} x$.

Построим прежде всего элементы

$$\lambda xy \cdot \sigma(s(\iota(y)), \sigma(x, \varkappa(y)))$$

$$\lambda z \cdot \iota(\varkappa(z))$$

$$\lambda z \cdot \sigma(t(\iota(z)), \varkappa(\varkappa(z))),$$

которые обозначим соответственно через $\sigma^{**}$, $\iota^{**}$, $\varkappa^{**}$. Легко видеть, что $\sigma^{**}$, $\iota^{**}$, $\varkappa^{**}$ удовлетворяют аксиомам $(A_{15})$—$(A_{19})$, и, таким образом, $\sigma^{**}$ есть спаривающая операция, а $\iota^{**}$ и $\varkappa^{**}$ являются для нее обратными спаривающими операциями. Построим теперь элемент

$$\lambda xy\cdot[\iota\,(\varkappa\,(\iota\,(\{\text{while}\ \lambda z\cdot\varkappa\,(z)\neq 0\ \text{do}\ \lambda z.$$
$$\sigma\,(\varkappa\,(\iota\,(z)),\ t\,(\varkappa\,(z)))\}\ (\sigma\,(x, y)))))]$$

и обозначим его через $\pi$. Нетрудно проверить, что объекты $\pi$, $\iota$, $\sigma(0, 0)$ являются *системными* относительно $\sigma^{**}$, $\iota^{**}$, $\varkappa^{**}$, 0, $s$, иначе говоря, для объектов $\pi$, $\iota$, $\sigma\,(0, 0)$, $\sigma^{**}$, $\iota^{**}$, $\varkappa^{**}$, 0, $s$ выполнены аксиомы $(A_{20})$—$(A_{25})$, если эти объекты взять в роли объектов, соответственно, $\pi$, $\partial$, $\Lambda$, $\sigma$, $\iota$, $\varkappa$, 0, $s$ в указанных аксиомах. Следовательно, мы можем понимать определение системы объектов, а также определения отношений „$k$ есть длина системы $z$"; „$x$ есть $k$-й член системы $z$" на основе построенных объектов $\pi$, $\iota$, $\sigma\,(0, 0)$, $\sigma^{**}$, $\iota^{**}$, $\varkappa^{**}$, 0, $s$.

В дальнейшем эти понятия будут употребляться лишь в указанном смысле (отметим, что на обычном языке „с многоточиями" систему, состоящую из $m$ объектов $x_1, x_2, \cdots, x_m$, понимаемую в смысле введенного определения, можно записать в виде $\sigma\,(m, \sigma\,(x_1, \sigma\,(x_2, \cdots, \sigma\,(x_{m-1}, \sigma\,(x_m, 0))\cdots))))$.

Введем некоторые сокращенные обозначения. Посредством $\sigma_n\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, где $n > 2$, мы будем обозначать выражение

$$\sigma\,(\sigma\,(\cdots\sigma\,(\sigma\,(x_1,\ x_2),\ x_3),\cdots,\ x_{n-1}),\ x_n);$$

посредством $\iota_n^k\,(z)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, будем обозначать выражение

$$\underbrace{\iota\,(\iota\,(\iota\cdots\iota}_{n-1}\,(z)\cdots))$$

в случае $k=1$, и выражение

$$\varkappa\,(\underbrace{\iota\,(\iota\cdots\iota}_{n-k}\,(z)\cdots))$$

—в случае $k>1$. Легко видеть, что всегда

$$\iota_n^k\,(\sigma_n\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = x_k\ \ (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Аналогичным образом будут пониматься обозначения

$$\sigma_n^{*}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \sigma_n^{**}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \iota_n^{*k}\,(z),\ \iota_n^{**k}\,(z).$$

Определим теперь несколько понятий, связанных с термами. Пусть $T$—некоторый терм, и $T'$—некоторый подтерм терма $T$ (т. е. некоторое слово, являющееся термом и входящее в слово $T$). *Уровень* заданного вхождения подтерма $T'$ в терм $T$ определим следующим образом: 1) уровень вхождения терма $T$ в терм $T$ есть 0; 2) если уровень вхождения подтерма $\Phi_l\,(T_1, T_2, \cdots, T_{n_l})$ или $\Omega\,(T_1, T_2)$ в терм $T$ есть $m$, то уровень каждого из рассматриваемых при этом вхождений подтермов $T_1, T_2, \cdots, T_{n_l}$ или $T_1$, $T_2$ в терм $T$ есть $m+1$. Наибольший уровень вхождений подтермов в заданный терм $T$ будем называть *глубиной* терма $T$. Уменьшенное на единицу количество различных вхождений подтермов терма $T$, имеющих некоторый фиксированный уровень $m$, будем называть ***шириной*** уровня $m$ в терме $T$. Будем говорить, что заданное вхождение подтерма $T'$ терма $T$ расположено ***левее*** заданного вхождения подтерма $T''$ того же терма, если указанное вхождение подтерма $T'$ входит в левое крыло рассматриваемого вхождения ([1], гл. I, § 4) подтерма $T''$ в терм $T$. ***Абсциссой*** вхождения подтерма $T'$ в терм $T$ будем называть количество различных вхождений подтермов терма $T$, имеющих тот же уровень, что и $T'$ и расположенных левее $T'$. ***Главной функциональной буквой*** терма $T$, имеющего вид $\Phi_i\,(T_1,\ T_2, \cdots, T_{n_i})$ или $\Omega\,(T_1,\ T_2)$ будем называть, соответственно, $\Phi_i$ или $\Omega$.

Нетрудно построить частично-рекурсивные (на самом деле даже примитивно-рекурсивные) функции $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ такие, что

1) Если $n$ есть $\Xi$-номер терма $T$, то $\alpha\,(n)$ есть глубина терма $T$.

2) Если $n$ есть $\Xi$-номер терма $T$ и $0 \leqslant m \leqslant \alpha\,(n)$, то $\beta\,(n,\ m)$ есть ширина уровня $m$ в терме $T$.

3) Если $n$ есть $\Xi$-номер терма $T$, $0 \leqslant m \leqslant \alpha\,(n)$ и $0 \leqslant l \leqslant \beta\,(n,\ m)$, то $\gamma\,(n,\ m,\ l)$ есть $\Xi$-номер подтерма $T'$ терма $T$, имеющего уровень $m$ и абсциссу $l$ в терме $T$.

4) Если $n$ есть $\Xi$-номер терма $T$, имеющего вид $\Phi_i\,(T_1,\ T_2, \cdots$ $\cdots, T_{n_i})$ или $\Omega\,(T_1,\ T_2)$, то $\delta(n)$ есть $i$ в первом случае и $k+1$—во втором случае (т. е. $\delta\,(n)$ есть номер главной функциональной буквы терма $T$).

5) Если $n$ есть $\Xi$-номер терма $T$, $0 \leqslant m \leqslant \alpha\,(n)$, $0 \leqslant l \leqslant \beta\,(n,\ m)$ и подтерм $T'$ терма $T$, имеющий уровень $m$ и абсциссу $l$ в терме $T$, имеет вид $W\,(T_1,\ T_2, \cdots, T_j)$, и если $0 \leqslant i \leqslant j-1$, то $\varepsilon\,(n,\ m,\ l,\ i)$ есть абсцисса рассматриваемого при этом вхождения подтерма $T_{i+1}$ в терм $T$.

Пользуясь ранее доказанным утверждением (B), построим элементы $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ такие, что для любых натуральных $n$, $m$, $l$, $i$

$$a\,(n) \simeq \alpha\,(n);$$

$$b\,(\sigma^*\,(n,\ m)) \simeq \beta\,(n,\ m);$$

$$c\,(\sigma^*_3\,(n,\ m,\ l)) \simeq \gamma\,(n,\ m,\ l);$$

$$d\,(n) \simeq \delta\,(n);$$

$$e\,(\sigma^*_4\,(n,\ m,\ l,\ i)) \simeq \varepsilon\,(n,\ m,\ l,\ i).$$

Построим далее элементы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}, \bar{\bar{f}}_1\,\bar{\bar{f}}_2, \cdots, \bar{\bar{f}}_k, \bar{\bar{f}}_{k+1}$, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$, $J$ такие, что для любых элементов $x$ и $z$ и любого натурального числа $n$ оказывается (напомним, что рассматриваемая К-структура $\underline{S}$ имеет вид $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$:

$$\bar{f}_1(\quad) = f_1^{(n_1)};\ \bar{\bar{f}}_1\,(z) \simeq f_1^{(n_1)}\,(\pi\,(z,\ 0),\ \pi\,(z,\ 1), \cdots, \pi\,(z,\ n_1-1));$$

$$\bar{f}_2(\quad) = f_2^{(n_2)};\ \bar{\bar{f}}_2\,(z) \simeq f_2^{(n_2)}\,(\pi\,(z,\ 0),\ \pi\,(z,\ 1), \cdots, \pi\,(z,\ n_2-1));$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{f}_k(\ ) = f_k^{(n_k)};\ \bar{\bar{f}}_k(z) \simeq f_k^{(n_k)}(\pi(z, 0),\ \pi(z, 1), \cdots, \pi(z, n_k - 1));$$

$$\bar{f}_{k+1}(\ ) = R^{(2)};\ \bar{\bar{f}}_{k+1}(z) \simeq R^{(2)}(\pi(z, 0),\ \pi(z, 1));$$

$$\bar{G}(n) \simeq \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } n = 1 \text{ then } \bar{f}_1(\ )$$
$$\text{else if } n = 2 \text{ then } \bar{f}_2(\ ) \text{ else} \cdots \text{ if } n = \mathbf{k}$$
$$\text{then } \bar{f}_k(\ ) \text{ else if } n = \mathbf{k+1} \text{ then } \bar{f}_{k+1}(\ ) \text{ else } 0;$$

$$\bar{\bar{G}}(x, z) \simeq \text{if } x = 0 \text{ then } z \text{ else if } x = 1 \text{ then } \bar{\bar{f}}_1(z)$$
$$\text{else if } x = 2 \text{ then } \bar{\bar{f}}_2(z) \text{ else} \cdots \text{ if } x = \mathbf{k}$$
$$\text{then } \bar{\bar{f}}_k(z) \text{ else if } x = \mathbf{k} + 1 \text{ then } \bar{\bar{f}}_{k+1}(z) \text{ else } z;$$

$$J(x) \simeq \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } x = 1 \text{ then } n_1$$
$$\text{else if } x = 2 \text{ then } n_2 \text{ else} \cdots \text{ if } x = \mathbf{k} \text{ then}$$
$$n_k \text{ else if } x = \mathbf{k} + 1 \text{ then } n_2 \text{ else } 0.$$

В приведенных формулах части, выделенные жирным шрифтом, означают выражения вида $s(s(s \cdots s(s(0)) \cdots))$. Построение указанных элементов производится очевидным образом на основании аксиом $(A_{26})$, $(A_{28})$, $(A_{30})$, $(A_{32})$, $(A_{34})$, $(A_{37})$; отметим, что для построения элемента $\bar{\bar{G}}$ вначале надлежит построить элемент $\bar{\bar{G}}'$ такой, что при всяком $y$

$$\bar{\bar{G}}'(y) \simeq \text{if } \iota(y) = 0 \text{ then } \varkappa(y) \text{ else if } \iota(y) = 1$$
$$\text{then } \bar{\bar{f}}_1(\varkappa(y)) \text{ else if } \iota(y) = 2 \text{ then } \bar{\bar{f}}_2(\varkappa(y))$$
$$\text{else} \cdots \text{ else if } \iota(y) = \mathbf{k} + 1 \text{ then } \bar{\bar{f}}_{k+1}(\varkappa(y))$$
$$\text{else } \varkappa(y),$$

после чего требуемый элемент $\bar{\bar{G}}$ строится так, чтобы при любых $x$ и $z$ было

$$\bar{\bar{G}}(x, z) \simeq \bar{\bar{G}}'(\sigma(x, z)).$$

Построим теперь элемент

$$\lambda x \cdot \pi \underset{1}{(}\ \iota_3^3 \underset{2}{(} \underset{3}{\{} \text{while } \lambda z \cdot \iota_3^2(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma_3 \underset{4}{(}\ \iota_3^1(z),$$

$$t \underset{5}{(}\ \iota_3^2(z) \underset{5}{)},\ \iota_5^5 \underset{6}{(}\ \underset{7}{\{} \text{while } \lambda y \cdot \iota_5^4(y) \neq 0 \text{ do } \lambda y \cdot \sigma_5 \underset{8}{(}\ \iota_5^1(y),$$

$$\iota_5^2(y),\ \iota_5^3(y),\ t \underset{9}{(}\ \iota_5^4(y) \underset{9}{)},\ \sigma^{**} \underset{10}{(} \bar{\bar{G}} \underset{11}{(} d \underset{12}{(} c \underset{13}{(} \sigma_3 \underset{14}{(}\ \iota_5^1(y),\ \iota_5^2(y),$$

$$t \underset{15}{(}\ \iota_5^4(y) \underset{15}{)} \underset{14}{)} \underset{13}{)} \underset{12}{)},\ \iota_6^6 \underset{16}{(}\ \underset{17}{\{} \text{while } \lambda u \cdot \iota_6^5(u) \neq 0 \text{ do } \lambda u \cdot \sigma_6 \underset{18}{(}\ \iota_6^1(u),$$

$$\iota_6^2(u),\ \iota_6^3(u),\ \iota_6^4(u),\ t \underset{19}{(}\ \iota_6^5(u) \underset{19}{)},\ \sigma^{**} \underset{20}{(} \pi \underset{21}{(}\ \iota_6^4(u),\ e \underset{22}{(} \sigma_4^* \underset{23}{(}\ \iota_6^1(u),\ \iota_6^2(u),$$

$$\iota^3_6(u).\,t\underset{24}{(}\,\iota^5_6(u)\underset{24}{)}\underset{23}{)}\underset{22}{)}\underset{21}{)},\ \iota^5_6(u)\underset{20}{)}\underset{18}{)}\underset{17}{|}\underset{25}{(}\sigma_6\underset{26}{(}\iota^1_5(y),\ \iota^2_5(y),\ t\underset{27}{(}\iota^4_5(y)\underset{27}{)},$$

$$\iota^3_5(y),\ J\underset{28}{(}d\underset{29}{(}c\underset{30}{(}\sigma^*_3\underset{31}{(}\iota^1_5(y),\ \iota^2_5(y),\ t\underset{32}{(}\iota^4_6(y)\underset{32}{)}\underset{31}{)}\underset{30}{)}\underset{29}{)}\underset{28}{)},\ \sigma(0,0)\underset{26}{)}$$

$$\underset{25}{)}\underset{16}{)}\underset{11}{)},\ \iota^5_5(y)\underset{10}{)}\underset{8}{)}\underset{7}{\}}\underset{33}{(}\sigma_5\underset{34}{(}\iota^1_3(z),\ t\underset{35}{(}\iota^2_3(z)\underset{35}{)},\ \iota^3_3(z),$$

$$s\underset{36}{(}b\underset{37}{(}\sigma^*\underset{38}{(}\iota^1_3(z),\ t\underset{39}{(}\iota^2_3(z)\underset{39}{)}\underset{38}{)}\underset{37}{)}\underset{36}{)},\ \sigma(0,0)\underset{34}{)}\underset{33}{)}\underset{6}{)}\underset{4}{)}\underset{3}{|}$$

$$\underset{40}{(}\sigma_3\underset{41}{(}x,\ a(x),\ \iota^3_3\underset{42}{(}\underset{43}{\{}\text{while } \lambda w\cdot\iota^2_3(w)\neq 0 \text{ do } \lambda w.$$

$$\sigma_3\underset{44}{(}\iota^1_3(w),\ t\underset{45}{(}\iota^2_3(w)\underset{45}{)},\ \sigma^{**}\underset{46}{(}\overline{G}\underset{47}{(}c\underset{48}{(}\sigma^*_3\underset{49}{(}\iota^1_3(w),\ a\underset{50}{(}\iota^1_3(w)\underset{50}{)},$$

$$t\underset{51}{(}\iota^2_3(w)\underset{51}{)}\underset{49}{)}\underset{48}{)}\underset{47}{)},\ \iota^3_3(w)\underset{46}{)}\underset{44}{)}\underset{43}{\}}\underset{52}{(}\sigma_3\underset{53}{(}x,\ s\underset{54}{(}b\underset{55}{(}\sigma^*\underset{56}{(}x,$$

$$a(x)\underset{56}{)}\underset{55}{)}\underset{54}{)},\ \sigma(0,0)\underset{53}{)}\underset{52}{)}\underset{42}{)}\underset{41}{)}\underset{40}{)}\underset{2}{)},\ 0\underset{1}{)},$$

который мы обозначим через $F$.

Нетрудно проверить, что приведенное выражение для $F$ обладает следующими свойствами:

1) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в фигурных скобках 17, по всякому элементу вида $\sigma_6(n, m, l, y, i, x)$ (где $n$ есть $\Xi$-номер некоторого терма $T$; $m$ есть натуральное число такое, что $0 \leqslant m < \alpha(n)$; $l$ есть натуральное число такое, что $0 \leqslant l \leqslant \beta(m, n)$; $y$ есть система, составленная из последовательно взятых (слева направо) значений всех подтермов терма $T$, имеющих уровень $m+1$; $i$ есть натуральное число, не превосходящее размерности главной функциональной буквы подтерма терма $T$, имеющего уровень $m$ и абсциссу $l$; $x$ есть пустая система) выдает элемент $\sigma_6(n', m', l', y', 0, x')$, где $n'$, $m'$, $l'$, $y'$ совпадают соответственно, с $n$, $m$, $l$, $y$; $x'$ есть пустая система в случае $i=0$, и $x'$ есть система, состоящая из элементов

$$\pi(y, \varepsilon(n, k, l, 0))$$
$$\pi(y, \varepsilon(n, k, l, 1))$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi(y, \varepsilon(n, k, l, i-1))$$

в случае $i>0$.

2) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в фигурных скобках 7, по всякому элементу вида $\sigma_5(n, m, y, i, x)$ (где $n$ есть $\Xi$ — номер некоторого терма $T$; $m$ есть натуральное число такое, что $0 \leqslant m < \alpha(n)$; $y$ есть система, составленная из последовательно взятых (слева направо) значений всех подтермов терма $T$, имеющих уровень $m+1$; $i$ есть натуральное число, не превосходящее $\beta(n, m)+1$; $x$ есть

пустая система) выдает элемент вида $\sigma_5(n', m', y', 0, x')$, где $n'$, $m'$, $y'$ совпадают, соответственно, с $n$, $m$, $y$; $x'$ есть пустая система в случае $i=0$, и $x'$ есть система значений последовательно взятых $(i-1)$ подтермов $T$, имеющих уровень $m$ и абсциссы от 0 до $i-1$ в случае $i>0$.

3) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в фигурных скобках 43, по всякому элементу вида $\sigma_3(n, m, x)$ (где $n$ есть $\Xi$-номер некоторого терма $T$, $m$ есть натуральное число, не превосходящее $\beta(n, \alpha(n))+1$, $x$ есть пустая система), выдает элемент $\sigma_3(n', 0, x')$, где $n'$ совпадает с $n$; $x'$ есть пустая система при $m=0$ и $x'$ есть система, состоящая из значений $m-1$ последовательно взятых подтермов терма $T$, имеющих уровень, равный глубине терма $T$ и абсциссы от 0 до $m-1$ при $m>0$.

4) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в в фигурных скобках 3, по всякому элементу вида $\sigma_3(n, m, x)$ (где $n$ есть $\Xi$-номер некоторого терма $T$, $m$ есть натуральное число, не превосходящее $\alpha(n)$, $x$ есть система всех последовательно взятых подтермов терма $T$, имеющих уровень $m$), выдает элемент $\sigma_3(n', 0, x')$, где $n'$ совпадает с $n$, и $x'$ есть одноэлементная система, единственный член которой есть значение терма $T$.

Опираясь на указанные свойства основных частей выражения для $F$, легко показать, что элемент $F$ обладает следующим свойством: (C) *если $n$ есть $\Xi$-номер терма $T$, то $F(n)$ есть значение терма $T$.*

Построим, наконец, элемент

$$\lambda x \cdot \iota\,(\{\text{while } \lambda z \cdot F(\iota(z)) \neq \varkappa(z) \text{ do}$$

$$\lambda z \cdot \sigma(s(\iota(z)), \varkappa(z))\}(\sigma(0, x)))$$

и обозначим его через $L$. Из определения $L$ немедленно следует, что (D) *для любого элемента $x L(x)$ есть натуральное число такое, что $F(L(x))=x$.*

Пусть теперь $\varphi$ есть произвольное рекурсивное преобразование элементов К-структуры $S$. Согласно (B) построим элемент $g$ такой, что для любого натурального $k$

$$\varphi(k) \simeq g(k).$$

Построим элемент

$$\lambda x \cdot F(g(L(x)))$$

и обозначим его через $f$. Из (B), (C), (D) немедленно следует, что элемент $f$ является ориентиром $\varphi$.

Теорема доказана.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 использованы некоторые методы, употребляемые в доказательстве теоремы 7.6 из [16].

8. Пусть фиксирована некоторая К-структура $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$, которую мы будем обозначать через $S$. Для всякого терма $T$ К-структуры $S$ определим выражение $\overline{T}$, получающееся из $T$ посред-

ством замены всех символов $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k$ символами $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}$ и всех символов $\Omega$ символами $R^{(2)}$. Пусть $A$—некоторая система аксиом относительно символов элементов К-структуры $S$. Будем говорить, что система аксиом $A$ является *разрешающей*, если для любых термов $T_1$ и $T_2$ оказывается: из $A$ выводимо $\widetilde{T_1} = \widetilde{T_2}$ или из $A$ выводимо $\widetilde{T_1} \neq \widetilde{T_2}$ (примером разрешающей системы аксиом относительно символов базисных элементов может служить система аксиом пеановой К-структуры, дополненная аксиомами

$$0^{(0)}(\quad) = 0^{(0)};\ s^{(1)}(s^{(1)}) = 0^{(0)};$$

$$s^{(1)}(R^{(2)}) = 0^{(0)};\ s^{(1)} \neq 0^{(0)};\ R^{(2)} \neq 0^{(0)};\ s^{(1)} \neq R^{(2)};$$

$$\forall x\,(s^{(1)}(x) \neq s^{(1)});\ \forall x\,(s^{(1)}(x) \neq R^{(2)});\ \forall x\,(x^{+} \supset$$

$$\supset x = 0^{(0)}\ \&\ x^{-} \supset x = s^{(1)}(0)\ \&x = 0^{(0)} \supset x^{+}\ \&$$

$$x = s^{(1)}(0) \supset x^{-})).$$

Пусть теперь $S$ есть К-структура вида

$$(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_{k-3}^{(n_{k-3})}, \sigma^{(2)}, \iota^{(1)}, \varkappa^{(1)}, R^{(2)}),$$

удовлетворяющая условиям теоремы 1, причем $\sigma^{(2)}$ есть спаривающая операция в $S$, а $\iota^{(1)}$ и $\varkappa^{(1)}$ суть обратные спаривающие операции для $\sigma^{(2)}$. Пусть $A$—разрешающая система гксисм относительно символов базисных элементов К-структуры $S$. К-структуру, удовлетворяющую указанным условиям, а также аксиомам из $A$ и аксиомам

$$(A_{41})\quad \forall xy\,(x^{+}\ \&\ y^{+} \supset x = y);$$

$$(A_{42})\ \forall xy\,(x^{-}\ \&y^{-} \supset x = y),$$

будем называть *регулярной* К-структурой.

Пусть фиксированы некоторые операции $F_{26,1}, F_{26,2}, \cdots, F_{26,k}, F_{27}, F_{28}, F_{29}, F_{30}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, f_{38}, f_{39}, f_{40}$, удовлетворяющие условиям, указанным в соответствующих аксиомах $(A_{26})-(A_{40})$ (точнее—условиям, получающимся после удаления $\exists F$ или $\exists f$ из соответствующих аксиом). Пусть фиксированы элементы $x_1$ и $x_2$ такие, что $x_1 \neq x_2$. Введем понятие *регулярной операции* при помощи следующих порождающих правил:

1) Элементы

$$f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_{k-3}^{(n_{k-3})}, \sigma^{(2)}, \iota^{(1)}, \varkappa^{(1)}$$

$$R^{(2)}, F_{37}(f_1^{(n_1)}), F_{37}(f_2^{(n_2)}), \cdots, F_{37}(f_{k-3}^{(n_{k-3})}),$$

$$F_{37}(\sigma^{(2)}), F_{37}(\iota^{(1)}), F_{37}(\varkappa^{(1)}), F_{37}(x_1),$$

$$F_{37}(x_2), f_{38}, f_{39}, f_{40}$$

являются регулярными операциями.

2) Если $1 \leqslant i \leqslant k-3$ и $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)}$ суть регулярные операции, то $F_{26,i}(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)})$ есть регулярная операция; если $g_1^{(1)}$ и

$g_2^{(1)}$ суть регулярные операции, то $F_{26,\,k-2}\,(g_1^{(1)},\ g_2^{(1)})$, $F_{26,\,k-1}\,(g_1^{(1)})$, $F_{26,\,k}\,(g_1^{(1)})$ суть регулярные операции.

3) Если $u^{(0)}$, $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $h^{(1)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$, $z^{(2)}$ суть регулярные операции, то $F_{27}\,(f^{(1)},\ u^{(0)})$, $F_{28}\,(f^{(1)},\ g^{(1)})$, $F_{29}\,(f^{(1)},\ v^{(2)})$, $F_{30}\,(v^{(2)},\ f^{(1)},\ g^{(1)})$, $F_{31}\,(v^{(2)},\ w^{(2)},\ z^{(2)})$, $F_{32}\,(f^{(1)},\ g^{(1)},\ h^{(1)})$, $F_{33}\,(f^{(1)},\ g^{(1)})$, $F_{34}\,(u^{(0)})$, $F_{35}\,(f^{(1)})$, $F_{36}\,(f^{(1)})$ суть регулярные операции.

Теорема 2. *Пусть S-регулярная К-структура с выделенными в ней регулярными операциями. Тогда:* (1) *для каждого рекурсивного преобразования термов К-структуры S можно построить регулярную операцию, являющуюся ориентиром этого преобразования*; (2) *каждая регулярная операция является ориентиром некоторого рекурсивного преобразования термов К-структуры S.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ есть рекурсивное преобразование термов К-структуры $S$. Тогда ориентир для $\varphi$ строится в точности таким образом, как это было указано в теореме 1; из доказательства теоремы 1 непосредственно усматривается, что все необходимые при этом построения можно провести, сохраняя регулярность получаемых операций. Тем самым утверждение (1) доказано.

Доказательство утверждения (2) получается непосредственным образом при помощи индукции по построению регулярных операций. Тривиальным образом (2) верно для операций—констант

$F_{37}\,(f_i^{(n_i)})$, $F_{37}\,(\sigma^{(2)})$, $F_{37}\,(\iota^{(1)})$, $F_{37}\,(\varkappa^{(1)})$, $F_{37}\,(R^{(2)})$, $F_{37}\,(x_1)$, $F_{37}\,(x_2)$, $f_{39}$, $f_{40}$, а также для тождественной операции $f_{38}$. Для операций

$$f_1^{(n_1)},\ f_2^{(n_2)}, \cdots, f_{k-3}^{(n_{k-3})},\ \sigma^{(2)},\ \iota^{(1)},\ \varkappa^{(1)},\ R^{(2)}$$

утверждение (2) легко устанавливается, исходя из свойств $\Xi$-номеров термов (в самом деле, для каждой из букв $\Phi_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ легко построить примитивно-рекурсивную функцию $\varphi_i$ от $n_i$ переменных, которая для любых натуральных чисел $l_1, l_2, \cdots, l_{n_i}$, являющихся $\Xi$-номерами термов $T_1,\ T_2, \cdots,\ T_{n_i}$) выдавала бы $\Xi$-номер терма $\Phi_i(T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_{n_i})$ (аналогичное утверждение верно для $\Omega$). Далее, если утверждение (2) справедливо для объектов, подаваемых на вход одной из операций $F_{26}$, $F_{27}$, $F_{28}$, $F_{30}$, $F_{31}$, $F_{34}$, $F_{35}$, $F_{36}$, то оно будет, очевидно, справедливо и для объекта, выдаваемого в этом случае на выходе соответствующей операции (суперпозиция рекурсивных функций рекурсивна, и добавление фиктивного аргумента не нарушает рекурсивности).

Аналогичное утверждение для $F_{32}$ и $F_{33}$ легко доказывается на основании известных теорем о рекурсивных функциях (см., например, [7]), с использованием разрешающей системы аксиом $A$. В самом деле, из наличия разрешающей системы аксиом в рамках определенной формально-дедуктивной системы следует на основании теоремы Э. Поста (см. [7], § 57, теор. VI (c)) рекурсивность предикатов „$n_1$ и $n_2$ суть $\Xi$-номера термов $T_1$ и $T_2$, для которых из $A$ выводимо $T_1 = \widetilde{T}_2$“, „$n_1$ и $n_2$ суть $\Xi$-номера термов $T_1$ и $T_2$, для которых из $A$ выводимо $\widetilde{T}_1 \neq \widetilde{T}_2$“.

Обозначим рекурсивную характеристическую функцию для первого из этих предикатов через $\xi$; $\Xi$-номер терма $R^{(2)}(x_1, x_2)$ обозначнм через $u$; $\Xi$-номер терма $R^{(2)}(x_1, x_2)$ обозначим через $v$. Теперь, если $\varphi$, $\psi$, $\omega$—рекурсивные преобразования элементов К-структуры $S$ с ориентирами $f$, $g$, $h$, то тогда рекурсивная функция $\rho$, определяемая системой равенств $\delta(0, 1, n)=\psi(n)$; $\delta(1, 0, n)=\omega(n)$; $\rho(n)=\delta(\xi(u, \varphi(n)), \xi(v, \varphi(n)), n)$ к которой добавлены определяющие системы равенств для $\varphi$, $\psi$, $\omega$, будет рекурсивным преобразованием элементов К-структуры $S$ с ориентиром if $f^+$ then $g$ else $h$; функция $\tau$, определяемая системой равенств $\delta(n, 0)=n$; $\delta(n, k+1)=\psi(\delta(n, k))$; $\tau(n)=\delta(n, \mu k\,[\xi(u, \varphi(\delta(n, k)))=0])$, будет рекурсивным преобразованием элементов К-структуры $S$ с ориентиром while $f^-$ do $g$.

Теорема доказана.

Мы можем теперь ввести некоторый вариант уточненного понятия алгорифма на основе аксиоматического подхода. В роли такого понятия можно рассматривать понятие *регулярной операции в произвольной регулярной К-структуре*. На основании теоремы 2 мы можем утверждать взаимную моделируемость регулярных операций и рекурсивных функций. Естественно ожидать, что теория регулярных операций в регулярных К-структурах будет содержать аналоги всех основных утверждений теории алгорифмов, которые будут при этом получаться посредством логической дедукции из аксиом регулярной К-структуры. Проверка этой гипотезы выходит за рамки настоящей статьи. В случае подтверждения этой гипотезы мы получим изложение одного из разделов конструктивной математики, не апеллирующее в процессе его развертывания ни к классической математике, ни к „физике".

9. В заключение остановимся еще на одном вопросе, связанном с аксиоматическим построением конструктивных математических теорий, а именно, на вопросе о *реализациях* систем аксиом. Реализацией некоторой системы аксиом естественно называть набор конкретных операций, удовлетворяющих этим аксиомам. Естественным образом можно строить реализации систем аксиом в рамках других аксиоматических систем, так, например, по ходу доказательства теоремы 1 мы построили реализацию системы аксиом $(A_{20})$—$(A_{23})$ средствами аксиоматической системы, рассматривавшейся в теореме 1. (Заметим, что аналогичным образом, можно интерпретировать, например, построение геделевской нумерации „вещей" в [7], § 50 или кодирование натуральных чисел посредством слов в [1], [3], [5]. Но кроме построения подобных, так сказать, „относительных" реализаций одних систем аксиом в рамках других, естественно рассматривать также и вопрос об „абсолютных" реализациях систем аксиом, т. е. о таких реализациях, которые существовали бы автономно, а не в рамках других аксиоматических систем. Однако, поставив вопрос таким образом, мы приходим к выводу о том, что у многих систем аксиом рассматриваемого типа, даже у столь простых, как система аксиом пеановой К-структуры, „абсолютных" реализаций может и не существовать. В самом деле,

очевидно, что ни операция приписывания палочек на бумаге ([1], стр. 12; [5], стр. 39), ни операция постановки точек на бумаге ([23], стр. 24 русского перевода), ни операция бросания зерен в кучу не удовлетворяют аксиомам пеановой К-структуры; более того, каждый раз мы можем в таких случаях указать границу, начиная с которой дальнейшее применение операции $s$ становится заведомо физически невозможным (ср. [7], стр. 54—55). Ссылка на абстракцию потенциальной осуществимости ([1], стр. 15; [3], стр. 8—9; [4], стр. 229; [5], стр. 287) в данном случае означала бы просто, что мы волевым образом провозгласили бы наличие реализаций у систем аксиом, которые на самом деле реализаций не имеют.

Автор отнюдь не предлагает отказываться вследствие указанных обстоятельств от рассмотрения системы аксиом пеановой К-структуры или других родственных систем аксиом; однако невозможность предъявления „абсолютных" (физических) реализаций таких систем аксиом есть факт, с которым необходимо считаться. Из-за этого, в частности, непротиворечивость подобного рода систем аксиом может быть доказана лишь метаматематическими методами.

Формализация системы аксиом указанного типа в рамках формально-логических систем не может, таким образом, рассматриваться как „порочный круг" (см. подстрочное примечание на стр. 157); напротив, без такой формализации мы были бы не в состоянии удовлетворительно решать целый ряд вопросов, касающихся системы аксиом, в том числе и вопрос о ее непротиворечивости.

Автор приносит глубокую благодарность участникам Ленинградского семинара по конструктивной математике, и, в особенности его руководителю Н. А. Шанину, за ряд ценных советов и замечаний, значительно повлиявших на окончательную редакцию статьи.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 10.VII.1968

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ. Կոնստրուկտիվ առարկաների և օպերացիաների աքսիոմատիկ սահմանման մասին *(ամփոփում)*

*Առաջարկվում է մի եղանակ կոնստրուկտիվ մաթեմատիկայի որոշ բաժինների աքսիոմատիկ հիմնավորման համար։*

*Այս եղանակում կոնստրուկտիվ ուղղության հիմնական նախադրյալները զուգակցված են աքսիոմատիկ տեսությունների կառուցման սկզբունքների հետ։ Սահմանվում է ալգորիթմի խիստ գաղափարի աքսիոմատիկ ձևը, որը վերաբերվում է ցանկացած բնույթ ունեցող առարկաներին։ Ապացուցվում է, որ այս գաղափարը որոշ իմաստով համարժեք է ռեկուրսիվ ֆունկցիայի գաղափարին։*

I. D. ZASLAVSKII. *On axiomatic definition of constructive objects and operations*
(summary)

A method for developing some parts of constructive mathematics in axiomatic aspect is proposed. This method combines the chief concepts of the constructive branch in mathematics with the principles concerning to formal derivation of theorems from the axioms. The axiomatic variant of the concept of algorithm dealing with the objects of any nature is defined. The theorems about the equivalence between the concept of algorithm and the notion of recursive function, are proved.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *А. А. Марков.* Теория алгорифмов, Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, XLII, 1954.
2. *А. А. Марков.* О конструктивных функциях, Труды Математ. института им. В. А. Стеклова, LII, 1958, 315—348.
3. *А. А. Марков.* О конструктивной математике, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXVII 1962, 8—14.
4. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LII, 1958, 226—311.
5. *Н. А. Шанин.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 15—294.
6. *Н. А. Шанин.* К вопросу о конструктивном понимании опорных формул 1, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 1964, 348—379.
7. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, New York—Toronto (русский перевод: С. К. Клини. Введение в метатематику и математику, ИЛ, М., 1957).
8. *G. Kreisel.* Foundation of intuitionistic logic. Logic Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress, Edit. by P. Nagel. P. Suppes, A. Tarski, Standford Univ. Press, Standford, California, 1962, 198—210. (русский перевод; Крейсел Г. Основания интуиционистской логики, Сб., „Математическая логика и ее применения" под редакцией Э. Нагеля, П. Саппса, А. Тарского, перев. под ред. А. И. Мальцева, „Мир", М., 1965, 229—244).
9. *H. B. Curry.* A formalisation of recursive arithmetic, Amer. Journ. of Math., 63, 1941, 263—282.
10. *R. L. Goodstein.* Constructive formalism, Essays of the foundation of mathematics, Leicester. 1951.
11. *R. L. Goodstein.* Recursive number theory, Amsterdam, 1957.
12. *R. L. Goodstein.* Mathematical logic. Leicester, 1957. (русский перевод; Р. Л. Гудстейн, Математическая логика, ИЛ, М., 1958).
13. *А. В. Идельсон.* Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 1964, 228—343.
14. *А. В. Идельсон.* Замечания об исчислениях конструктивной логики с подчиненными переменными и аксиомой полной индукции, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XCIII, 1967, 106—112.
15. *В. А. Лившиц.* О конструктивных математических теориях, согласованных с классической логикой, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XCIII, 1967, 113—122.
16. *И. Д. Заславский.* Граф—схемы с памятью, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 1964, 99—192.
17. *А. И. Мальцев.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М., „Наука", 1965.
18. *E. Landau.* Grundlagen der Analysis, Göttingen, 1930 (русский перевод: Э. Ландау. Основы анализа, М. ИЛ, 1947).
19. *A. Church.* The calculi of λ-conversions, Annals of Math. Studies, 6, 1941.
20. *J. W. Backus, F. L. Bauer, J. Green, C. Katz, J. Mc. Carthy, P. Naur* (editor), *A. J. Perlis, H. Rutishauser, K. Samelson, B. Vauquois, J. H. Wegstein, A. Van Wijngaarden, M. Woodger.* Report on the algorithmic language ALGOL—60, Numerische Math., 2, 1960, 106—139. Русский перевод: Дж. Бэкус, Ф. Л. Бауэр, Дж. Грин, С. Кэтц, Дж. Маккарти, П. Наур, Э. Дж. Перлис, Х. Рутисхаузер,

К. Замельзон, Б. Вокуа, Дж. Уэгстейн, А. Ван-Венгаарден, М. Вуджер, Сообщение об алгорифмическом языке „АЛГОЛ—60" под редакцией Петера Наура. Вычислительная математика и математическая физика, 2, 1961.

21. *R. Peter*. Rekursive Funktionen, Budapest, (русский перевод: Р. Петер, Рекурсивные функции, ИЛ, М., 1954).

22. *R. M. Robinson*. Primitive recursive functions, Bull of Amer. Math. Soc., 53, 1947, 925—942.

23. *A. Heyting*. Intuitionism. An introduction, Amsterdam, 1956 (русский перевод: А. Гейтинг. Интуиционизм. Введение, „Мир", М., 1965).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН

# О БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе [1] изучалась следующая задача Коши:

$$AU_{xx}+2BU_{xt}+U_{tt}=aU_x+bU_t+CU+f,\qquad t>0, \tag{1}$$

$$U(0,x)=\mu(x),\ U_t\ (0,x)=\nu(x)\qquad (0\leqslant x\leqslant 1), \tag{2}$$

где

$$\lambda^2\ (t,x)=B^2-A>0\ (t>0),\ \lambda\,(0,x)\geqslant 0, \tag{3}$$

т. е. на оси $t=0$ допускается параболическое вырождение.

Оказывается ([1], теорема 1), что задача (1)—(2) корректна при определенных ограничениях на поведение коэффициентов $a$ и $b$ при $t\to 0$, причем эти ограничения тем слабее, чем больше производных по $x$ имеют данные задачи.

В частности ([1], теорема 2), если все данные аналитичны по $x$, то существует единственное аналитическое по $x$ решение без каких-либо иных ограничений на $a$ и $b$.

В предлагаемой заметке исследуется промежуточный случай, а именно: предполагается, что данные задачи (1)—(2) бесконечно дифференцируемы по $x$ (но, вообще говоря, не аналитичны) и находятся ограничения на $a$ и $b$, обеспечивающие существование и единственность бесконечно дифференцируемого решения из определенного класса и позволяющие судить о характере устойчивости и о структуре решения (п. 3°).

1°. Характеристики уравнения (1) определяются из соотношений

$$dx=\Phi_i\ (t,x)\ dt\ \ (t\geqslant 0,\ i=1,2), \tag{4}$$

где

$$\Phi_1=B+\lambda,\ \Phi_2=B-\lambda,\ A=\Phi_1\Phi_2. \tag{4'}$$

Обозначив правую часть уравнения (1) через $F\,(t,x,u,u_t,u_x)$, перепишем его в следующих двух эквивалентных формах:

$$\sqrt{1+\Phi_1^2}\ \frac{\partial}{\partial s_1}\sqrt{1+\Phi_2^2}\ \frac{\partial u}{\partial s_2}=F+(\Phi_{2t}+\Phi_1\Phi_{2x})\ u_x, \tag{5}$$

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\ \frac{\partial}{\partial s_2}\sqrt{1+\Phi_1^2}\ \frac{\partial u}{\partial s_1}=F+(\Phi_{1t}+\Phi_2\Phi_{1x})\ u_x,$$

где через $s_1$ и $s_2$ обозначены характеристические направления, составляющие с осью $x=0$ острый угол.

Обозначим теперь через $l_i = l_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ кусок характеристики с направлением $s_i$, заключенный между точкой $(t, x)$ и осью $t=0$, а также введем новые неизвестные функции

$$V = u_x, \quad W = \sqrt{1+\Phi_1^2}\, \frac{\partial u}{\partial s_1}. \tag{6}$$

Тогда задача (1)—(2) приводится к системе (без ограничения общности можно считать, что $\mu \equiv \nu \equiv 0$)

$$2\lambda V = \int\limits_{l_2} \{F + (\Phi_{1t} + \Phi_2\Phi_{1x}) V\} dt - \int\limits_{l_1} \{F + (\Phi_{2t} + \Phi_1\Phi_{2x}) V\} dt, \tag{7}$$

$$W = \int\limits_{l_2} \{F + (\Phi_{1t} + \Phi_2\Phi_{1x}) V\} dt, \tag{8}$$

где

$$F = F\Big(t, x, \int\limits_{l_2} w\,dt,\ w - \Phi_1 V,\ V\Big). \tag{9}$$

Можно показать, что если существует решение системы (7)—(8), непрерывно дифференцируемое и такое, что $V(+0, x) = 0$, то решение задачи (1)—(2) можно восстановить по этому решению по формулам (6) (обратное утверждение очевидно).

При решении системы (7)—(8) основные затруднения связаны с наличием в левой части уравнения (7) множителя $\lambda$, обращающегося, вообще говоря, в нуль при $t=0$. В частности, когда $b \equiv c \equiv 0$, система эта распадается, причем уравнение (8) оказывается обыкновенным вольтерровским, а уравнение (7) принимает вид

$$2\lambda V = 2\int\limits_{l_2} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial s_2} + \beta\lambda\right) V\, dt + \int\limits_{l_2 - l_1} (\alpha V + f)\, dx, \tag{10}$$

где

$$\alpha = a + \Phi_{2t} + \Phi_1\Phi_{2x}, \quad \beta = -\Phi_{2x}. \tag{10'}$$

Последний интеграл в уравнении (10) можно переписать в виде

$$\iint \frac{\partial}{\partial x}\,(\alpha V + f)\, dx dt, \tag{11}$$

где двойной интеграл (здесь и далее) берется по характеристическому треугольнику, ограниченному осью $t=0$ и характеристиками $l_1$ и $l_2$.

Оказывается, что уравнение (10) уже содержит в себе все специфические особенности системы (7)—(8), так что предположение $b \equiv c \equiv 0$, по сути, не является ограничением в том смысле, что присутствие этих коэффициентов не создает никаких дополнительных затруднений (кроме громоздкости выкладок).

2°. Мы будем считать, что все коэффициенты уравнения (1) и функции $f$, $\mu$ и $\nu$ принадлежат по переменному $x$ классу Жеврея $J_\gamma$ $(\gamma > 1)$, состоящему из бесконечно дифференцируемых на отрезке [0,1] функций, удовлетворяющих оценкам

$$\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}\right| \leqslant (\mathrm{const})^p\, \Gamma\,(1+\gamma_p) \qquad (p=0, 1, 2, \cdots). \tag{12}$$

Решение $u(t, x)$ также будем искать в некотором классе $J\gamma_1$, причем в этом случае постоянная в правой части неравенства (12) (так же, как и для функций $A$, $B$, $a$, $b$, $c$ и $f$) считается не зависящей от $t$.

Сначала остановимся на простейшем частном случае, когда функции $A$, $B$ и $a$ от $x$ не зависят, $b\equiv 0$ и $c\equiv 0$. В этом случае уравнение (10) перепишется в виде

$$2\lambda V = 2\int\limits_{l_2}\frac{\partial\lambda}{\partial s_2}V\,dt + \iint \alpha\, V_x\,dxdt + \iint f_x\,dxdt. \tag{13}$$

Применим теперь следующую схему последовательных приближений: обозначим $V^0\equiv 0$, $V^n - V^{n-1} = \varepsilon^n$ $(n>1)$,

$$2\lambda\varepsilon^n = 2\int\limits_{l_2}\frac{\partial\lambda}{\partial s_2}\varepsilon^n\,dt + \iint \alpha\,\varepsilon_x^{n-1}\,dt \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{14}$$

где

$$2\lambda\varepsilon^0\,(t, x) = 2\int\limits_{l_2}\frac{\partial\lambda}{\partial s_2}\varepsilon^0\,dt + \iint f_x\,dxdt. \tag{14'}$$

Функцию $\varepsilon^0$ легко можно определить из уравнения (14′) в явной форме

$$\varepsilon^0 = \int\limits_{l_2}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\iint f_x\,dxdt\right)dt =$$

$$= \int\limits_{l_2}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\int\limits_{l_2-l_1} f dt\right)dt + \iint\limits_{l_2\,l_1} f_x\,dtdt. \tag{15}$$

Точно так же получим

$$\varepsilon^n\,(t, x) = \iint\limits_{l_2\,l_1}(\alpha\,\varepsilon^{n-1})_x\,dtdt \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{15'}$$

С другой стороны, решение уравнения (14) (если считать $\varepsilon^{n-1}$ заданным и учитывать вид (10)) можно переписать в виде

$$2\lambda\,\varepsilon^n\,(t, x) = \int\limits_{l_2-l_1}\alpha\,\varepsilon^{n-1}dt - \lambda\int\limits_{l_2}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int\limits_{l_2'-l_1}\alpha\,\varepsilon^{n-1}\,dtdt. \tag{16}$$

Эта формула справедлива, так как интегралы справа сходятся. В этом легко убедиться, прибегнув к индукции на основании формул (15) и (15′) и учитывая бесконечную дифференцируемость $f$.

После $k$-кратного $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ применения формулы (16) получим

$$\max_x |\varepsilon^n| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^t |\alpha| \max_x |\varepsilon^{n-1}|\, dt - \int_0^t \int_0^\tau |\alpha| \max_x |\varepsilon^{n-1}|\, d\tau d\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \int_0^t \frac{|\alpha|}{\lambda} \max_x |\varepsilon^{n-1}|\, dt \leqslant \frac{1}{k!}\int_0^t \frac{|\alpha(t_1)|}{\lambda(t_1)} \left\{ \int_{t_1}^t \frac{|\alpha(\tau)|}{\lambda(\tau)}\, d\tau \right\}^k \max_x |\varepsilon^{n-k-1}|\, dt_1. \qquad (17)$$

С другой стороны, из формулы (15′) таким же образом получим

$$\max_x |\varepsilon^{n-k-1}(t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \int_0^{t_1} |\alpha(t_2)| \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} |\alpha(t_3)| \cdots \int_0^{t_{2(n-k-1)}} \int_0^{t_{2(n-k)-1}} |\alpha(t_{2(n-k)})| \max_x \left|\frac{\partial^{n-k} f}{\partial x^{n-k}}\right| \times$$

$$\times dt_{2(n-k)} \cdots dt_1 = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^t \tau |\alpha(\tau)| \left\{ \int_\tau^t \tau_1 |\alpha(\tau_1)|\, d\tau_1 \right\}^{n-k} \max_x \left| \frac{\partial^{n-k} f(\tau, x)}{\partial x^{n-k}} \right| d\tau. \qquad (18)$$

Таким образом, поскольку $f \in J_\gamma$ (см. (12)), приходим к следующей оценке

$$\max_x |\varepsilon^n(t, x)| \leqslant \frac{(\mathrm{const})^{n-k}\, \Gamma(1 + \gamma(n-k))}{k!\,(n-k)!} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{|\alpha(\tau)|}{\lambda(\tau)} \left[ \int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)}\, ds \right]^k \left[ \int_0^\tau s\, |\alpha(s)|\, ds \right]^{n-k} d\tau \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1). \qquad (19)$$

3°. Сформулируем и докажем теперь основной результат.

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *и функции* $f$, $\mu$ *и* $\nu$ *принадлежат классу* $J_\gamma$ ($\gamma \geqslant 1$) *и непрерывны при* $t \geqslant 0$ *и, кроме того,* $A$ *и* $B$ *непрерывно дифференцируемы при* $t > 0$.

*Тогда, если*

$$\lim_{t\to 0} \max_{0 < \tau < t} \left( \int_0^\tau \tau \alpha^*(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left( \int_\tau^t \frac{\alpha^*(\tau)}{\lambda_*(\tau)}\, d\tau \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 0, \qquad (20)$$

где

$$\alpha^*(t) = \max_x |\alpha(t, x)|, \quad \lambda_*(t) = \min_x \lambda(t, x),$$

*то в некоторой полосе* $0 \leqslant t \leqslant h$ (*где* $h$, *вообще говоря, зависит от* $f$, $\mu$ *и* $\nu$) *задача* (1)—(2) *имеет единственное решение* $u(t, x) \in J_\gamma$. *Решение это устойчиво в следующем смысле: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что лишь только*

$$\left|\frac{d^k \mu}{dx^k}\right|, \left|\frac{d^k \nu}{dx^k}\right|, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right| < \delta M^k \Gamma(1 + \gamma k) \quad (k > 0),$$

*то*

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right| \leqslant \varepsilon M_1^k \Gamma(1+\gamma k) \quad (k > 0),$$

*где* $M_1$ *не зависит от* $\delta$.

Доказательство проведем сначала для случая, разобранного в 2°, т. е. при $b \equiv c \equiv 0$ и когда $A$, $B$ и $a$ от $x$ не зависят.

Выберем в формуле (19) $k$ таким, чтобы

$$1 + k = \frac{\gamma - 1}{\gamma} n - \theta_n, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{21}$$

Тогда из (19) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon^n (t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{const})^n \int_0^t \left( \int_0^\tau s |\alpha(s)| ds \right)^{\frac{n}{\gamma}+1} d_\tau \left( \int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)} ds \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} n} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{const})^n \left\{ \left( \int_0^\tau s |\alpha(s)| ds \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left( \int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)} ds \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}^n d\tau. \tag{22}$$

Из условия (20) следует, что ряд (22) равномерно сходится при подходящем выборе $t < h$.

Таким образом, существует решение $V$ задачи (1)—(2). Это решение будет бесконечно дифференцируемым.

Действительно, из оценок типа (17)—(18) без труда можно получить следующее обобщение оценки (19):

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \varepsilon^n (t, x) \right| \leqslant \frac{(\mathrm{const})^{n-k+p} \Gamma(1 + \gamma (n - k + p))}{k! \, (n-k)!} I_{nk}(t), \tag{23}$$

где интегральный множитель $I_{nk}(t)$ — тот же, что и в формуле (19). В силу (21) получим

$$\left| \frac{\partial^p \varepsilon^n}{\partial x^p} \right| \leqslant \frac{(\mathrm{const})^{n+p} \Gamma(1 + n + \gamma (p+1))}{\Gamma(n+1)} I_{nk}. \tag{23'}$$

Если теперь воспользоваться известной формулой Эйлера

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0), \tag{24}$$

то при достаточно малом $t$ из (23) получим (так же, как и в (22)),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^p \varepsilon^n}{\partial x^p} \right| \leqslant \int_0^\infty e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{const})^{n+p} x^{\gamma(p+1)+n}}{\Gamma(n+1)} \times$$

$$\times \int_0^t \left\{ \left( \int_0^\tau s |\alpha(s)| ds \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left( \int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)} ds \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}^n d\tau dx \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{const})^{\mu} \int\limits_0^{\infty} x^{\gamma(p+1)} e^{-(1-\theta)x} dx, \quad 0 \leqslant \theta < 1, \tag{25}$$

откуда немедленно следует, что $V \in J_\gamma$, т. е. $U \in J_\gamma$.

В случае, когда данные задачи (1)—(2) зависят от $x$, доказательство будет дано в пункте 5°.

4°. Пусть $\{\varphi_k(t, x)\}_1^\infty$ — бесконечно дифференцируемые по $x$ функции. Рассмотрим выражение

$$L_k = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(t^{(k)}, x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{k-1}(t^{(k-1)}, x) \cdots \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(t^{(1)}, x) \quad (k \geqslant 1,\ 0 \leqslant t^{(j)} \leqslant h). \tag{26}$$

Справедлива

Лемма. *Если*

$$\left|\frac{\partial^i}{\partial x^i} \varphi_k(t, x)\right| \leqslant M^i \Gamma(1 + \gamma i) \ (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant h,\ \gamma \geqslant 1,\ i \geqslant 0,\ k \geqslant 1), \tag{27}$$

*где* $M = \mathrm{const}$ *не зависит от* $t$ *и* $k$, *то*

$$|L_k| \leqslant (\mathrm{const})^k \Gamma(1 + \gamma^k) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ k \geqslant 1). \tag{27'}$$

Доказательство. При $k = 1$ оценка (27′) очевидна. Более того, из (27) следует, что

$$\left|\frac{\partial^i}{\partial x^i} L_1\right| \leqslant M^{i+1} \Gamma(1 + \gamma(i+1)).$$

Пусть теперь при $p \geqslant 0$ и некотором $n \geqslant 1$

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_n\right| \leqslant M_1^{n+p} \Gamma(1 + \gamma(n+p)). \tag{28}$$

Докажем, что тогда неравенство (28) справедливо и при замене $n$ на $n+1$ (откуда, в частности, будет следовать лемма).

Действительно, из (26) имеем

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left( L_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \varphi_k \frac{\partial}{\partial x} L_n \right).$$

Раскрыв это выражение и применив оценки (27) и (28), получим

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{p} C_j^p \left\{ \left| \frac{\partial^{1+j} \varphi_k}{\partial x^{1+j}} \frac{\partial^{p-j} L_n}{\partial x^{p-j}} \right| + \left| \frac{\partial^j \varphi_k}{\partial x^j} \frac{\partial^{p-j+1} L_n}{\partial x^{p-j+1}} \right| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{p} C_j^p [M^{1+j} M_1^{p-j+n} \Gamma(1 + \gamma(1+j)) \Gamma(1 + \gamma(p-j+n)) +$$

$$+ M^j M_1^{p-j+n+1} \Gamma(1 + \gamma j) \Gamma(1 + \gamma(p-j+n+1))]. \tag{29}$$

Воспользовавшись формулой (24), заметим, что

$$T_{pn}^a(\alpha, \beta) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a^j C_j^p \Gamma(\alpha + \gamma j) \Gamma(\beta + \gamma(p-j+n)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a^j C_j^p \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)} x_1^{\alpha+\gamma j-1} x_2^{\beta+\gamma(p-j+n)-1} dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)} x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1} (ax_1^{\gamma}+x_2^{\gamma})^p dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} e^{-s} (s-x_2)^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1} [a(s-x_2)^{\gamma}+x_2^{\gamma}]^p ds dx_2 =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s} \int_0^{s} (s-x_2)^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1} [a(s-x_2)^{\gamma}+x_2^{\gamma}]^p dx_2 ds \ (a>0). \tag{30}$$

Но при фиксированном $s>0$ нетрудно доказать, что

$$a(s-x_2)^{\gamma}+x_2^{\gamma} \leqslant K_a s^{\gamma} \ (0 \leqslant x_2 \leqslant s), \tag{30'}$$

где

$$K_a = \left(1+a^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)^{1-\gamma} a, \ \gamma>1 \ (\text{при } \gamma=1 \ K_a=a). \tag{30''}$$

Таким образом, из (30) и (30′) получим оценку

$$T_{pn}^{a}(\alpha, \beta) \leqslant (K_a)^p \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\gamma p} \int_0^{s} (s-x_2)^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1} dx_2 ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\gamma_n)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma_n)} (K_a)^p \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\alpha+\beta+\gamma(n+p)-1} ds =$$

$$= (K_a)^p \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\gamma_n)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma_n)} \Gamma(\alpha+\beta+\gamma(n+p)). \tag{31}$$

Применив оценку (31) к неравенству (29), получим

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1}\right| \leqslant MM_1^{p+n} T_{pn}^{a}(\gamma+1, 1) +$$

$$+ M_1^{p+n+1} T_{pn}^{a}(1, \gamma+1) \leqslant M_1^{p+n} (K_a)^p \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2+\gamma(n+p+1))}{\Gamma(2+\gamma(n+1))} [M\Gamma(\gamma+1)\Gamma(1+\gamma n)+M_1\Gamma(1+\gamma(1+n))]$$

$$\left(a=\frac{M}{M_1}\right). \tag{32}$$

Приняв теперь $M_1>M$ и учитывая известную формулу Стирлинга

$$\Gamma(a) = \sqrt{2\pi}\, a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a} e^{\frac{\theta}{12a}}, \ 0<\theta<1, \ a>0,$$

получим

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1}\right| \leqslant N (K_a)^p M_1^{p+n+1} \left(1+\frac{p}{n}\right) \Gamma (1+\gamma (n+p+1)), \tag{32'}$$

где $a=\dfrac{M}{M_1}$, и $N=\text{const}$ не зависит от $n$ и $p$.

Заметим теперь, что при $a \to 0$ $K_a \sim a$ (см. (30″)), так что, выбрав $\dfrac{M}{M_1}$ достаточно малым (т. е. $M_1$ достаточно большим), из (32′) получим, что оценка (28) справедлива и при замене $n$ на $n+1$. Лемма доказана.

5°. Наметим теперь доказательство теоремы п. 3° в общем случае. Пусть сначала, все же, $b \equiv c \equiv 0$ (чтобы не иметь дела с системой).

Тогда нетрудно видеть, что формула (16) не изменится. Что же касается равенства (15′), то оно, так же как и оценка (17), не изменится, однако при обобщении неравенства (18) нужно учитывать, что от $x$ зависят как $\alpha$, так и кривые $l_i$. Тем не менее не представляет труда убедиться, что лемма предыдущего пункта позволяет обойти все возникающие трудности, и оценки (19)—(25) остаются в силе.

Что же касается случая, когда $a$ и $b$ могут быть отличны от нуля, то тогда нужно применить следующую схему последовательных приближений к системе (7)—(8):

$$2\lambda V_n = 2\int_{l_2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s_2} - \lambda\Phi_{2x}\right) V_n\, dt +$$

$$+ \int_{l_2 - l_1} \{(\Phi_{1t} - \Phi_2\Phi_{1x})\, V_{n-1} + F(t, x, \int_{l_1} W_n\, dt,\ W_n - \Phi_1 V_{n-1}, V_{n-1})\}\, dt, \tag{33}$$

$$W_n = \int_{\gamma_2} \{(\Phi_{1t} - \Phi_2\Phi_{1x})\, V_{n-1} + F(t, x, \int_{l_1} W_n\, dt,\ W_n - \Phi_1 V_{n-1}, V_{n-1})\}\, dt. \tag{33'}$$

Уравнения (33) относительно $V_n$ и (33′) относительно $W_n$ без труда решаются, так как соответствующие ядра непрерывны. Все остальные препятствия могут быть преодолены применением леммы п. 4° и оценок типа оценок п. 3°.

Что касается замечания о характере устойчивости решения задачи, то оно очевидным образом следует из полученных оценок.

6°. В заключение рассмотрим интересный частный случай

$$u_{tt} - t^{2\alpha} u_{xx} = a u_x + b u_t + c u + f, \tag{34}$$

где $\alpha > 0$. Пусть

$$|a(t, x)| \leqslant \text{const}\cdot t^\beta \quad (0 \leqslant \beta < \alpha - 1). \tag{34'}$$

Тогда

$$\int_0^\tau s a^*(s)\, ds = \frac{1}{\beta+2}\, \tau^{\beta+2},$$

$$\int_{\tau}^{t} \frac{\alpha^*(s)}{\lambda(s)}\, ds = \frac{1}{\beta-\alpha+1}\left(t^{\beta-\alpha+1} - \tau^{\beta-\alpha+1}\right).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\max_{0<\tau<t} \tau^{\frac{\beta+2}{\gamma}} \left(t^{\beta-\alpha+1} - \tau^{\beta-\alpha+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \mathrm{const}\ t^{\frac{1}{\gamma}[\beta+2+(\gamma-1)(\beta-\alpha+1)]}, \tag{35}$$

т. е. условие (20) выполняется при

$$\beta > \alpha - 1 - \frac{\alpha+1}{\gamma}.$$

Если, например

$$\alpha < \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (\gamma > 1), \tag{36}$$

то на коэффициенты уравнения (34) нет необходимости налагать никаких дополнительных ограничений.

В частности, в известном примере Березина [2], когда $\alpha = 1 + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ и $a \equiv 1$, достаточно выбрать

$$\gamma < 1 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Соотношение (36) показывает, что, действительно, теорема п. 3° является промежуточным звеном между теоремами 1 и 2 работы [1]: при $\gamma=1$ получается теорема 2 (так как можно брать $\beta=0$), а при $\gamma \to \infty$ можно считать, что $\beta \to \alpha - 1$.

Институт математики и механики
АН АрмССР
Ереванский государственный
университет

Поступило 16.VII.1968

**Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ.** Վերածվող հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի անվերջ դիֆերենցելի լուծումների մասին *(ամփոփում)*

*Ուսումնասիրվում է (1)—(3) Կոշու խնդիրը ըստ տարածական փոփոխականի անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների որոշակի դասերում (տես (12) պայմանը)։*

*Արդյունքները միջանկյալ տեղ են գրավում Կոշի-Կովալևսկայա-ի թեորեմի և [1] աշխատանքի 1 թեորեմի միջև։*

A. B. NERSESIAN. *On infinite differentiable solutions of Cauchy problem degenerate hyperbolic equations of second order* (summary)

Cauchy problem in certain classes of infinite-differentiable (with respect to spacious variable) functions is considered.

The result obtained occypies intermediate position between Cauchy-Kovalevskaja theorem and theorem I in [П].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
2. *И. С. Березин.* О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Мат. сб., 24, № 2, 1949, 301—320.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## Введение

В работе изучаются краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа, имеющих вид

$$\mathfrak{M}(u) \equiv P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u + L(t, x, D)\, u = h(t, x), \tag{0.1}$$

где

$$P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \equiv \sum_{q=0}^{s} a_q(t, x)\, u^{(q)}, \quad u^{(q)} \equiv \frac{\partial^q u}{\partial t^q}, \quad a_s = \pm 1, \quad s \geqslant 1;$$

$$L(t, x, D)\, u \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(t, x)\, D^\alpha u$$

—эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$ ($s \geqslant 1$ и $m \geqslant 1$ произвольны).

Напомним (см. [6]—[8]), что оператор $\mathfrak{M}(u)$ называется эллиптико-параболическим в области $Q$, если для любой точки $(t, x) \in Q$

$$a_s (i\tau)^s + L_{2m}(t, x, i\xi) \neq 0,$$

где произвольные вещественные $\tau$ и $\xi$ таковы, что $|\tau| + |\xi| \neq 0$. ($L_{2m}$ — означает главную часть оператора $L$).

В цитированных работах [6]—[8] для эллиптико-параболических уравнений изучались краевые задачи в неограниченном цилиндре $Q = G \times [0, \infty)$, а также периодические решения по $t$. Здесь изучаются общие краевые задачи для уравнений (0,1) в ограниченном цилиндре $Q = G \times [0, T]$. Ввиду того, что эллиптико-параболические уравнения некорректны в смысле Адамара-Петровского [6] (исключение составляет лишь случай $P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, т. е. параболическое уравнение), прежде всего возникает вопрос о постановке задачи по времени, т. е. вопрос о числе условий, которые следует в дополнение к уравнению (0.1) задавать при $t=0$ и при $t=T$. Как выяснилось число таких условий при $t=0$ и при $t=T$, вообще говоря, различно. Именно, если $s$ нечетно и $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s > 0$, то при $t=0$ требуется $s-k$ условий, где $k = \left[\frac{s}{2}\right]$, а при $t = T$ оно равно $k$. Если же $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s < 0$, то плоскости $t = 0$ и $t = T$ меняются ролями. В случае же четных $s = 2k$ число условий при $t = 0$ и $t = T$ одинаково и равно $k$.

(В связи с этим отметим, что простейшие краевые задачи, рассмотренные в [7] для уравнения (0,1), являются сопряженными друг к другу в том смысле, что при изменении знака $t$ при нечетном $s$ они меняются ролями, а при четном $s$ остаются инвариантными. Это свойство является весьма важным и во всей теории эллиптико-параболических уравнений).

Как показано в настоящей работе для эллиптико-параболических уравнений справедлив принцип локальности, т. е. принцип „замораживания" коэффициентов, широко используемый в настоящее время при изучении эллиптических и параболических уравнений. Как известно, этот принцип состоит в локальном изучении задачи внутри области и вблизи границы и последующем свертывании с помощью разбиения единицы. Следуя этой схеме, мы устанавливаем в § 1 разрешимость краевой задачи для уравнения (0.1) вначале в бесконечном цилиндре $Q = G \times \mathbf{R}^1$ в пространствах типа $L_2(Q)$. Затем в § 2 устанавливается аналогичная теорема о разрешимости краевой задачи по $t$ в полуограниченном цилиндре $Q = G \times [0, \infty)$. При этом доказываются точные двусторонние оценки.

Теорема в § 3, касающаяся малых возмущений оператора $L(t, x, D)$, носит вспомогательный характер. Основные теоремы о фредгольмовости поставленных задач получены в §§ 4 и 5. Отметим, что нами рассмотрен здесь случай, когда оператор $L(t, x, D)$ является самосопряженным (§ 4) или полуограниченным снизу (более точно см. § 5). Дело в том, что при изучении краевых задач в цилиндрической области необходимо возникают вопросы согласования начальных условий при $t = 0$ и $t = T$ (заметим, что при переходе через верхнюю или нижнюю кромку цилиндра $Q$, меняется число граничных условий, т. е. меняется индекс факторизации символа оператора $\mathfrak{M}(u)$ (см. [4]). Условия согласования для рассматриваемых в §§ 5 и 6 задач состоят в возможности разложения начальных условий и правой части уравнения $h(t, x)$ в ряды Фурье по собственным функциям оператора $L(t, x, D)$. В случае же общего эллиптического оператора $L(t, x, D)$ эти условия могут иметь иной характер. Вопрос согласования начальных и граничных условий при переходе через угловые точки цилиндра $Q$ есть, по существу, вопрос о правильном понимании в этих точках известного условия Шапиро-Лопатинского или условия дополнительности (см., например, [1], [4]). Изучение этого вопроса требует иного подхода и выходит за рамки настоящей работы.

В заключительном § 6 более детально изучается краевая задача, аналогичная задаче Дирихле для эллиптических уравнений, в частности получена теорема единственности. В конце параграфа приведены примеры.

## § 1. Краевая задача в неограниченном цилиндре

Пусть $Q = G \times \mathbf{R}^1$ — неограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial G \times \mathbf{R}^1$, $G \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим в цилиндре $Q$ уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(x, D)\, u = h(t, x) \tag{1.1}$$

при условиях

$$B_j(x, D)\, u|_S = 0, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{1.2}$$

Здесь

$$L(x, D)\, u \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u, \quad a_\alpha(x) \in C^\infty$$

—эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$ с гладкими комплексными коэффициентами. Напомним, что оператор $L(x, D)$ называется эллиптическим в области $G \subset \mathbf{R}^n$, если для любого $x = (x_1, \cdots, x_n) \in G$ и любых вещественных $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$

$$L_{2m}(x, i\xi) \neq 0, \quad |\xi| \neq 0.$$

Допустим, что граничные дифференциальные операторы

$$B_j(x, D)\, u \equiv \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x)\, D^\beta u, \quad m_j \leq 2m-1, \quad j = 1, \cdots, m$$

определяют для оператора $L(x, D)$ полуограниченную самосопряженную задачу (о необходимых и достаточных условиях справедливости этого требования см., например, [2], [12], [13]). Пусть $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$ —система собственных функций этой задачи с собственными значениями $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$. В дальнейшем условимся говорить о функциях $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$ как о собственных функциях оператора $L(x, D)$.

Введем необходимые для дальнейшего пространства. Пусть $H^l \equiv H^l(G)$, где $l \geq 0$ — вещественное число,—пространство Соболева-Слободецкого (см. [11], [10] или [5]). Напомним, что при целых $l$ норма в $H^l$ равна

$$\|u\|_l^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_G |D^\alpha u|^2\, dx.$$

Обозначим далее через $H(r, l)$ ($r \geq 0$ — целое число) пространство функций $u(t, x)$, заданных в цилиндре $Q = I \times G$, где $I \subset \mathbf{R}^1$ есть либо вся ось (к § 1), либо полуось $[0, \infty)$ (к § 2), либо отрезок $[0, T]$ (к § 4), с нормой

$$\|u\|_{r,l}^2 = \int_I \left(\|u\|_l^2 + \|u^{(r)}\|_0^2\right) dt.$$

Определим теперь пространство $H^l\{B_j\}$ как пространство рядов Фурье по собственным функциям оператора $L(x, D)$. Более точно, функция $u(x) \in H^l\{B_j\}$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ представима в виде ряда

$$u(x) = c_0\omega_0(x) + c_1\omega_1(x) + \cdots,$$

сходящегося в метрике пространства $H^l$. Как известно (см., например, [2], [3]) $H^0\{B_j\}\equiv L_2(G)$, а при $l=2m$ пространство $H^{2m}\{B_j\}$ есть подпространство функций $u(x)\in H^{2m}$, удовлетворяющих условиям

$$B_j(x, D)\,u|_{\partial G}=0,\quad j=1,\cdots, m.$$

При $l>2m$ пространство $H^l\{B_j\}$ уже указанного подпространства.

Наконец, $H(r, l)\{B_j\}$ означает пространство рядов Фурье, сходящихся в метрике $H(r, l)$, т. е. функция $u(t, x)\in H(r, l)\{B_j\}$ тогда и только тогда, когда $u(t, x)$ представима в виде ряда

$$u(t, x)=c_0(t)\,\omega_0(x)+c_1(t)\,\omega_1(x)+\cdots,$$

сходящегося в $H(r, l)$. Пространство $H(r, l)\{B_j\}$ в дальнейшем есть пространство решений задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1. *Если $s$ нечетно и среди собственных чисел оператора $L(x, D)$ нет нуля, т. е. $\lambda_i\neq 0$, $i=0, 1,\cdots$, то отображение*

$$\mathfrak{M}(u): H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}\to H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$$

*есть изоморфизм. При этом справедлива двусторонняя оценка:*

$$\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant C_1\left(\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}}+\bar{\lambda}^{-\frac{r}{s}}\|u\|_{0,0}\right)\leqslant C_2\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.3}$$

*где $C_1>0$, $C_2>0$ — постоянные,* $\bar{\lambda}=\min|\lambda_i|$, $i=0, 1,\cdots$.

Доказательство. В прямую сторону утверждение теоремы очевидно. Докажем обратное, т. е., что для любой функции $h\in H_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}\{B_j\}$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) $u\in H_{r, r\frac{2m}{s}}\{B_j\}$, причем имеет место неравенство (1.3). Будем искать решение $u(t, x)$ в виде ряда

$$u(t, x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(t)\,\omega_l(x). \tag{1.4}$$

Подставляя ряд (1.4) в уравнение (1.1), убеждаемся, что функции $c_l(t)$ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_s c_l^{(s)}(t)+\lambda_l c_l(t)=h_l(t), \tag{1.5}$$

где

$$h_l(t)=(h, \omega_l)\equiv\int_G h(t, x)\,\omega_l(x)\,dx.$$

Лемма 1. *Если $s$ нечетно и $\lambda\neq 0$, то для любой функции $h(t)\in H^{r-s}(\mathrm{R}^1)$ уравнение*

$$a_s u^{(s)}(t)+\lambda u(t)=h(t) \tag{1.6}$$

*имеет единственное решение* $u(t) \in H^r(\mathbf{R}^1)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|h^{(r-s)}\| + |\lambda|^{\frac{r-s}{s}} \|h\| \leqslant C_1 \left(\|u^{(r)}\| + |\lambda|^{\frac{r}{s}} \|u\|\right) \leqslant C_2 \left(\|h^{(r-s)}\| + |\lambda|^{\frac{r-s}{s}} \|h\|\right), \tag{1.7}$$

*где* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — *постоянные*, $\|u\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^2 \, dt$.

Доказательство. Общее решение уравнения (1.6) можно записать в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s-1} e^{\mu_j t} \left(B_j + \frac{W_j}{W} \int\limits_0^t e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau\right), \tag{1.8}$$

где $\mu_j(\lambda)$ — корни характеристического полинома $a_s \mu^s + \lambda = 0$, $b_j$ — произвольные постоянные, $W$ — определитель Вандермонда из чисел $\mu_j$, $W_j$ — алгебраические дополнения последней строки $W$. Пусть корни $\mu_0, \cdots, \mu_{k-1}$ таковы, что $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ $(i = 0, \cdots, k-1)$, а $\operatorname{Re} \mu_k < 0, \cdots, \operatorname{Re} \mu_{s-1} < 0$. Положим для $j = 0, \cdots, k-1$

$$B_j = -\frac{W_j}{W} \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau,$$

а для $j = k, \cdots, s-1$

$$B_j = \frac{W_j}{W} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau.$$

Осталось показать, что для $h(t) \in H^{r-s}$ так определенное решение (2.7) $u(t) \in H^r$ и справедливо неравенство (1.7). Имеем

$$u(t) = -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{W_j}{W} e^{\mu_j t} \int\limits_t^{\infty} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau + \sum_{j=k}^{s-1} \frac{W_j}{W} e^{\mu_j t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau,$$

или, что то же,

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{W_j}{W} \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu_j \tau} \, h(t+\tau) \, d\tau + \sum_{j=k}^{s-1} \frac{W_j}{W} \int\limits_0^{\infty} e^{\mu_j \tau} \, h(t-\tau) \, d\tau,$$

откуда, используя известное неравенство Минковского и тот факт, что $|\mu_j| = |\lambda|^{\frac{1}{s}}$, получаем оценку

$$|\lambda| \cdot \|u\| \leqslant C \|h\|.$$

После этого, из уравнения (1.6) последовательно по $r$ получаем оценку (1.7). Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы 1. Рассмотрим ряд (1.4), где функции $c_l(t)$ являются решениями уравнений (1.5), найденными в лемме 1. Покажем, что так определенный ряд сходится в $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$

и является искомым решением. Пусть $u_n(t, x) = \sum_{l=0}^{n} c_l(t)\,\omega_l(x)$ — частичная сумма ряда (1.4). Очевидно $u_n(t, x)$ можно представить в виде

$$u_n(t, x) = \sum_{\lambda_l<0} c_l(t)\,\omega_l(x) + \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} c_l(t)\,\omega_l(x) \equiv u_n^-(t, x) + u_n^+(t, x).$$

Получим вначале оценку для составляющей $u_n^-(t, x)$. Поскольку система собственных функций $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$ ортонормирована, то из неравенства леммы (1.7) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|u_n^{-(r)}\|_0^2\,dt + \sum_{\lambda_l<0} |\lambda_l|^{\frac{2r}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |c_l|^2\,dt \leqslant C_2\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} \|h_-^{(r-s)}\|_0^2\,dt +$$

$$+ \sum_{\lambda_l<0} |\lambda_l|^{\frac{2(r-s)}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |h_l|^2\,dt\Bigr),$$

где $h_-(t, x) = \sum_{\lambda_l<0} h_l(t)\,\omega_l(x)$.

Ввиду того, что функция $u_n^-(t, x)$ порождается конечным числом функций $\omega_l(x)$, $\lambda_l<0$, то последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\|u_n^-\|_{r,\, r\frac{2m}{s}} + \bar{\lambda}^{\frac{r}{s}} \|u_n^-\|_{0,0} \leqslant C_3 \|h_-\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь составляющую $u_n^+(t, x)$. Из неравенства (1.7), как и раньше, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|u_n^{+(r)}\|_0^2\,dt + \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} |\lambda_l|^{\frac{2r}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |c_l|^2\,dt \leqslant C_2\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} \|P_n h_+^{(r-s)}\|_0^2\,dt +$$

$$+ \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} |\lambda_l|^{\frac{2(r-s)}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |h_l|^2\,dt\Bigr), \tag{1.10}$$

где $P_n h_+ = \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} h_l(t)\,\omega_l(x)$.

Заметим теперь, что сужение оператора $L(x, D)$ на подпространство $H_+^{2m}\{B_j\} \subset H^{2m_1}\{B_j\}$, порожденное собственными функциями $\omega_l(x)$, у которых $\lambda_l > 0$, есть самосопряженный оператор, который обозначим $L_+$. Поскольку оператор $L_+$ положителен, то определена его степень $L_+^{\alpha}$ для любого вещественного $\alpha>0$. Учитывая сказанное и ортонормированность системы $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$, замечаем, что неравенство (1.10) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\|u_n^{+(r)}\|_0^2+\frac{\bar{\lambda}^{\frac{r}{s}}}{2}\|u_n^+\|_0+\frac{1}{2}\|L_+^{\frac{r}{s}}u_n^+\|_0^2\right)dt < C_2\int_{-\infty}^{\infty}(\|P_nh_+^{(r-s)}\|_0^2+\|L_+^{\frac{r-s}{s}}P_nh_+\|_0^2)\,dt$$

или, что то же,

$$\|u_n^+\|_{r,\, r\frac{2m}{s}}+\bar{\lambda}^{\frac{r}{s}}\|u_n^+\|_{0,0} < C_3\|P_n h_+\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.11}$$

ибо

$$\|u_n^+\|_{r\frac{2m}{s}} \leqslant C_4\|L^{\frac{r}{s}}u_n^+\|_0 \leqslant C_5\|u_n^+\|_{r\frac{2m}{s}}.$$

Полученное неравенство (1.11) вместе с неравенством (1.9) приводит к основной оценке частичной суммы $u_n(t, x)$

$$\|u_n\|_{r,\, r\frac{2m}{s}}+\bar{\lambda}^{\frac{r}{s}}\|u_n\|_{0,0} \leqslant C_6\|P_n h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}},$$

где $P_nh=\sum_{l=0}^{n}h_l(t)\,\omega_l(x)$. Из этой оценки немедленно вытекает, что последовательность $u_n(t, x)$ фундаментальна в $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ как только $h(t, x)\in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. Следовательно, ряд (1.4) сходится в пространстве $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. Нетрудно видеть, что $u_n(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$a_s u_n^{(s)}+L(x, D)\,u_n=P_n\,h(t, x),$$

откуда, устремляя $n\to+\infty$, находим, что сумма ряда (1.4) $u(t, x)\in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ является решением уравнения (1.1).

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь случай четного $s$.

Теорема 2. *Пусть* $s=2k$ *и* $(-1)^k a_{2k}>0$. *Тогда, если собственные числа* $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ *оператора* $L$ *положительны, т. е.* $\lambda_0>0$, *то оператор* $\mathfrak{M}(u)$ *отображает пространство* $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ *на пространство* $H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ *изоморфно. При этом справедливо неравенство*

$$\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant C_1(\|u\|_{r,\, r\frac{2m}{s}}+\lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u\|_{0,0}) < C_2\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.12}$$

*где* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — *постоянные.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

В заключение этого параграфа укажем другой вариант теоремы разрешимости задачи (1.1), (1.2) в цилиндре $Q = G \times (-\infty, \infty)$.

Нижеследующая теорема для нечетных $s$ менее точна, чем теорема 1, однако здесь задача (1.1), (1.2) изучается в пространствах $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, отличающихся от пространств $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ тем, что элементы этих пространств не связаны с разложениями по собственным функциям оператора $L(x, D)u$. Этот результат будет использован в § 5.

Определение 1. Оператор $\mathfrak{M}(u)$ называется эллиптико-параболическим, если для вещественных $\tau \in \mathbf{R}^1$ и $\xi \in \mathbf{R}^n$ таких, что $|\tau| + |\xi| \neq 0$

$$a_s(i\tau)^s + L_{2m}(x, i\xi) \neq 0, \tag{1.13}$$

где $L_{2m}(x, i\xi) \equiv \sum\limits_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ — главная часть полинома $L(x, i\xi)$.

Обозначение. Допустим, что оператор $L(x, D)u$ полуограничен снизу (самосопряженность не требуется). Тогда положим

$$\lambda_0 = \inf_{u \in H^{2m}\{B_j\}} \frac{\operatorname{Re}(L(x, D)u, \bar{u})}{(u, \bar{u})}. \tag{1.14}$$

Очевидно, в случае самосопряженности оператора $L(x, D)u$ $\lambda_0$ есть первое собственное число.

Теорема 3. *Пусть оператор* $\mathfrak{M}(u)$ *эллиптико-параболичен и* $\lambda_0 > 0$. *Тогда для любой правой части* $h(t, x) \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$ *существует единственное решение задачи* (1.1), (1.2) $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{t}\right)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant C_1\left(\|u\|_{r,\,r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u\|_{0,0}\right) < C_2\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.15}$$

*где* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — *постоянные, не зависящие от* $u(t, x)$ *и* $\lambda_0$.

Доказательство. Перейдем в задаче (1.1), (1.2) к преобразованию Фурье по $t$. Тогда получим, что функция $\tilde{u}(\tau, x) = F_{t\to\tau}[u(t, x)]$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\mathfrak{M}}(\tilde{u}) \equiv [a_s(i\tau)^s + L(x, D)]\,\tilde{u}(\tau, x) = \tilde{h}(\tau, x), \tag{1.16}$$

$$B_j(x, D)\,\tilde{u}(\tau, x)|_S = 0,\ j = 1, \cdots, m, \tag{1.17}$$

где $\tilde{h}(\tau, x) = F_{t\to\tau}[h(t, x)]$.

Поскольку оператор $\mathfrak{M}(u)$ является эллиптико-параболическим, то при любом $\tau$ задача (1.16), (1.17) есть эллиптическая задача с параметром, меняющимся на вещественной оси. Как доказано в работе [1] эта задача при любом $\tau \in R^1$ фредгольмова, а при $|\tau| \gg 1$ однозначно разрешима. Кроме того, при больших по модулю $\tau$ имеет место оценка

$$\|\tilde{h}\|_{(r-s)\frac{2m}{s}} + |\tau|^{r-s}\|\tilde{h}\|_0 \leqslant C_1 (\|\tilde{u}\|_{r\frac{2m}{s}} + |\tau|^r \|\tilde{u}\|_0) \leqslant C_2 (\|\tilde{h}\|_{(r-s)\frac{2m}{s}} + |\tau|^{r-s}\|\tilde{h}\|_0). \tag{1.18}$$

С другой стороны, из неравенства

$$(\tilde{\mathfrak{M}}(\tilde{u}), \ \tilde{\tilde{u}}) \geqslant \lambda_0 \|\tilde{u}\|_0^2 \tag{1.19}$$

(напомним, что $\lambda_0 > 0$) вытекает, что всегда имеет место единственность решения. Значит в силу фредгольмовости задача (1.16), (1.17) однозначно разрешима при любом $\tau \in R^1$ и для любой правой части $\tilde{h}(\tau, x) \in H^{(r-s)\frac{2m}{s}}(G)$. Легко видеть теперь, что и оценка (1.18) имеет место для любого $\tau$. Следовательно, функция $u(t, x) = F^{-1}_{\tau \to t}[\tilde{u}(\tau, x)]$ определяет искомое решение задачи (1.1), (1.2). Оценка (1.15) следует из оценки (1.18) и неравенства (1.19) (по существу (1.15) есть известная оценка резольвенты эллиптического оператора). Теорема 3 доказана.

## § 2. Краевая задача в полуограниченном цилиндре

Пусть $Q = G \times [0, \infty)$ — полуограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial G \times [0, \infty)$. Рассмотрим в цилиндре $Q$ эллиптико-параболическое уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(x, D)\, u = h(t, x) \tag{2.1}$$

при граничных и начальных условиях

$$B_j(x, D)\, u|_S = 0, \ j = 1, \cdots, m, \tag{2.2}$$

$$u^{(n_i)}(0, x) = \varphi_i(x), \ i = 0, \cdots, s-1-k, \ n_i \geqslant 0, \tag{2.3}$$

где число $k$ определяется следующим образом:

а) $k = \left[\frac{s}{2}\right]$, если $s$ нечетно и $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s > 0$,

б) $k = \left[\frac{s}{2}\right] + 1$, если $s$ нечетно и $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s < 0$,

в) $k = \frac{s}{2}$, если $s$ четно.

Как и в § 1 считаем, что граничные условия (2.2) самосопряженны. Кроме того, допустим, что выполнено следующее условие (аналог условия Шапиро-Лопатинского в теории эллиптических задач).

**Условие 1.** *Для любого* $\lambda > 0$ определитель

$$\det \| \mu_j^{n_i}(\lambda) \| \neq 0, \quad i, j = 0, \cdots, s-1-k,$$

где $\mu_j(\lambda)$ — корни алгебраического уравнения $a_s \mu^s + \lambda = 0$ такие, что $\mathrm{Re}\, \mu_j(\lambda) < 0$.

**Теорема 4.** *Пусть выполнено условие* 1 *и первое собственное число* $\lambda_0 > 0$. *Тогда для любой функции* $h(t, x) \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right) \times \{B_j\}$ *и любой системы начальных значений* $\varphi_l(x) \in H^{l_l}\{B_j\}$, $l_l = (r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}$ *существует единственное решение задачи* (2.1)—(2.3) *и* $(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. *При этом справедлива двусторонняя априорная оценка*

$$\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} + \sum_{l=0}^{s-1-k} \|\varphi_l\|_{l_l} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\|u\|_{r,\,r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|u\|_{0,\,0}\right) \leqslant C_2 \left(\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} + \sum_{l=0}^{s-1-k} \|\varphi_l\|_{l_l}\right), \tag{2.4}$$

*где* $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — *постоянные,* $r \geqslant \max(s, n_l + 1)$.

**Доказательство.** Первое неравенство в оценке (2.4) очевидно. Докажем теорему существования и вторую часть оценки (2.4). Будем искать решение задачи (2.1)—(2.3) в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(t)\, \omega_\nu(x), \tag{2.5}$$

где функции $c_\nu(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_s c_\nu^{(s)}(t) + \lambda_\nu c_\nu(t) = h_\nu(t), \quad \nu = 0, 1, \cdots \tag{2.6}$$

при условиях

$$c_\nu^{(n_l)}(0) = \varphi_{l\nu}, \quad i = 0, \cdots, s-1-k, \tag{2.7}$$

где $h_\nu(t) = (h, \omega_\nu)$, $\varphi_{l\nu} = (\varphi_l, \omega_\nu)$.

**Лемма 2.** *Пусть* $\lambda_\nu > 0$ *и выполнено условие* 1. *Тогда для любой функции* $h_\nu(t) \in H^{r-s}(0, \infty)$ *существует единственное решение* $c_\nu(t) \in H^r(0, \infty)$ *уравнения* (2.6) *с условиями* (2.7).

*При этом справедлива оценка*

$$\|c_\nu^{(r)}\| + \lambda_\nu^{\frac{r}{s}} \|c_\nu\| \leqslant C_3 \left(\|h_\nu^{(r-s)}\| + \lambda_\nu^{\frac{r-s}{s}} \|h_\nu\| + \sum_{l=0}^{s-1-k} \lambda_\nu^{\frac{1}{s}(r-n_l) - \frac{1}{2s}} |\varphi_{l\nu}|\right), \tag{2.8}$$

*где* $C_3 > 0$, $\|c_\nu\|$ — *норма в* $L_2(0, \infty)$, $r > \max(s, n_l + 1)$.

**Доказательство.** Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$c_\nu(t) = \sum_{j=0}^{s-1} e^{\mu_{j\nu} t}\left(B_{j\nu} + \frac{W_{j\nu}}{W}\int_0^t e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\, d\tau\right), \tag{2.9}$$

где $B_{j\nu}$ — произвольные постоянные. Обозначим через $\mu_{0\nu}, \cdots, \mu_{s-1-k,\nu}$ ($k$ — число, указанное в начале параграфа) такие корни характеристического уравнения, у которых $\operatorname{Re}\mu_{j\nu} < 0$; остальные корни $\mu_{j\nu}$, $j = s-k$, $\cdots$, $s-1$, имеют $\operatorname{Re}\mu_{j\nu} > 0$. Ввиду этого положим для $j = s-k, \cdots, s-1$

$$B_{j\nu} = e^{\mu_{j\nu} t}\cdot\frac{W_{j\nu}}{W}\int_0^\infty e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\, d\tau.$$

Остальные неизвестные постоянные определяются из начальных условий (2.9)

$$\sum_{j=0}^{s-1-k} \mu_{j\nu}^{n_i} B_{j\nu} = \varphi_{i\nu} + \alpha_{i\nu}, \quad i = 0, \cdots, s-1-k, \tag{2.10}$$

где

$$\alpha_{i\nu} = \frac{d^{n_i}}{dt^{n_i}}\left(\sum_{j=s-k}^{s-1} \frac{W_{j\nu}}{W} e^{\mu_{j\nu} t}\int_t^\infty e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\, d\tau\right)\Bigg|_{t=0} -$$

$$-\frac{d^{n_i}}{dt^{n_i}}\left(\sum_{j=0}^{s-1-k} \frac{W_{j\nu}}{W} e^{\mu_{j\nu} t}\int_0^t e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\, d\tau\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Поскольку по условию $\det \|\mu_{j\nu}^{n_i}(\lambda)\| \neq 0$, то система (2.10) имеет единственное решение

$$B_{j\nu} = \sum_{i=0}^{s-1-k} \beta_{ij\nu}(\varphi_{i\nu} + \alpha_{i\nu}),$$

где $\beta_{ij\nu} \equiv \beta_{ij\nu}(\lambda)$ — однородные функции порядка $\operatorname{ord}\beta_{ij\nu} = -\frac{n_i}{s}$. Тем самым найдено искомое решение задачи (2.6), (2.7). К оценке (2.8) теперь приводят непосредственные вычисления. Лемма 2 доказана.

Покажем теперь, что ряд (2.5), где коэффициенты $c_\nu(t)$ определены в лемме 2, сходится в пространстве $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ и определяет решение исходной задачи (2.1)—(2.3). Действительно, для частичной суммы $u_n(t, x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(t)\,\omega_\nu(x)$ неравенство (2.8) приводит к оценке

$$\|u_n\|_{r,0} + \|L^{\frac{r}{s}} u_n\|_{0,0} + \lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u_n\|_{0,0} \leqslant C_1\Big(\|P_n h\|_{r-s,0} + \|L^{\frac{r-s}{s}} P_n h\|_{0,0} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1-k} \|L^{\frac{1}{s}(r-n_i)-\frac{1}{2s}} P_n\varphi_i\|_0\Big),$$

где $L^{\alpha} \equiv L^{\alpha}(x, D)$ — степень $\alpha$ положительно определенного эллиптического оператора $L(x, D)$; $P_n h = \sum_{\nu=0}^{n} h_{\nu}(t)\,\omega_{\nu}(x)$, то же $P_n \varphi_l$. Поскольку для любого $\alpha > 0$

$$\|L^{\alpha} u_n\|_0 \leqslant C_5 \|u_n\|_{2m\alpha} \leqslant C_6 \|L^{\alpha} u_n\|_0,$$

то последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\|u_n\|_{r,\, r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|u_n\|_{0,\,0} \leqslant C_7 \left(\|P_n h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} + \sum_{l=0}^{s-1-k} \|P_n \varphi_l\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}}\right).$$

Полученная оценка означает, что ряд (2.5) сходится в пространстве $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ и поскольку

$$a_s u_n^{(s)} + L(x, D)\, u_n = P_n h,$$

то функция $u(t, x) = c_0(t)\,\omega_0(x) + \cdots$ есть решение уравнения (2.1). Очевидно для $u(t, x)$ справедлива оценка (2.4). Теорема доказана.

Замечание. Если самосопряженный оператор $L(x, D)$ не положителен, но полуограничен снизу, то задача (2.1)—(2.2) нормально разрешима, т. е. имеет конечномерное ядро и коядро. В частности, для однозначной разрешимости, очевидно, достаточно, чтобы правая часть $h(t, x)$ была ортогональна корневому подпространству оператора $L(x, D)$, порожденному собственными функциями с неположительными собственными значениями.

## § 3. Малые возмущения оператора $L(x, D)$ и

1. Рассмотрим в цилиндре $Q = G \times \mathrm{R}^1$ уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(t, x, D)\, u = h(t, x), \tag{3.1}$$

где

$$L(t, x, D)\, u \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_{\alpha}(t, x)\, D^{\alpha} u$$

—эллиптический дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами. Для уравнения (3.1) вновь ставится задача отыскания решения, удовлетворяющего на боковой поверхности $S = \partial G \times \mathrm{R}^1$ условиям

$$B_j(x, D)\, u|_S = 0, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{3.2}$$

Теорема 5. *Пусть в некоторой точке* $(x_0, t_0) \in Q$ *оператор* $L(t_0, x_0, D)$ *с граничными условиями* (3.2) *является полуограниченным эллиптическим оператором. Пусть далее в* $Q$ *справедливы неравенства*

$$|a_{\alpha}(t, x) - a_{\alpha}(t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon, \quad |\alpha| \leqslant 2m.$$

*Тогда для любой функции* $h(t, x) \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$ *сущест-*

*вует единственное решение задачи* (3.1), (3.2) $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, *если только* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало, а первое „собственное число"* $\lambda_0 > 0$ *оператора* $L(t_0, x_0, D)$, *напротив, достаточно велико. При этом справедлива оценка*

$$\|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant C_1 \left(\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|u\|_{0,0}\right) \leqslant C_2 \|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Обозначим через $\overset{0}{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, $r \geqslant s$ подпространство функций $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, удовлетворяющих на боковой поверхности $S$ цилиндра $Q$ граничным условиям (3.2). Очевидно оператор $\mathfrak{M}(u)$ есть ограниченный оператор, действующий из пространства $\overset{0}{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ в пространство $H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$. Нам надлежит доказать, что при малых $\varepsilon > 0$ и больших $\lambda_0 > 0$ оператор $\mathfrak{M}(u)$ имеет ограниченный обратный. Обозначим через $\mathfrak{M}_0(u)$ оператор

$$\mathfrak{M}_0(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(t_0, x_0, D) u,$$

т. е. оператор $\mathfrak{M}(u)$ с фиксированными в точке $(x_0, t_0)$ коэффициентами. По теореме 3 $\mathfrak{M}_0(u)$ обратим, т. е. существует оператор

$$R_0 : H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right) \to \overset{0}{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right),$$

причем, если $h \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$, то

$$\|R_0 h\|_{r, r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|R_0 h\|_{0,0} \leqslant C_1 \|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{3.4}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $h(t, x)$ и $\lambda_0$. Рассмотрим оператор $\mathfrak{M}(R_0 h)$. Очевидно

$$\mathfrak{M}(R_0 h) \equiv \mathfrak{M}_0(R_0 h) + (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0)(R_0 h) \equiv h + Th.$$

Покажем, что $Th$, как оператор, действующий в пространстве $H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$, имеет малую норму. Допустим вначале, что $r$ кратно $s$. Тогда применяя формулу Лейбница, находим, что

$$\|Th\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant \delta \|R_0 h\|_{r, r\frac{2m}{s}} + \sum_{|\alpha| < 2m} \left[\sum_{k=1}^{r-s} \|b_\alpha^{(k)}(t, x) D^\alpha (R_0 h)^{(r-s-k)}\|_{0,0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\beta| + |\gamma| < (r-s)\frac{2m}{s}} \|D^\beta b_\alpha(t, a) D^{\alpha+\gamma}(R_0 h)\|_{0,0}\right], \ |\beta| \geqslant 1, \tag{3.5}$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $b_\alpha(t, x) \equiv a_\alpha(t, x) - a_\alpha(t_0, x_0)$.

Используя известное неравенство

$$\|u^{(l-1)}\|_0 \leqslant \eta \|u^{(l)}\|_0 + C(\eta)\|u\|_0, \quad \eta > 0,$$

получаем из (3.5) оценку

$$\|Th\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant (\delta + \eta C_2)\|R_0 h\|_{r,\,r\frac{2m}{s}} + C_3(\eta)\|R_0 h\|_{0,0},$$

откуда, с помощью неравенства (3.4), приходим к тому, что

$$\|Th\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant [C_1(\delta + \eta C_2) + \lambda_0^{-\frac{r}{s}} C_1 C_3(\eta)]\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}. \tag{3.6}$$

Последнее неравенство получено для $r$, кратных $s$, однако в силу интерполяционных теорем в шкале соболевых пространств (см., например, [9]) оно справедливо для любого целого $r \geqslant 0$.

Полагая в неравенстве (3.6) $\delta > 0$ и $\eta > 0$ столь малыми, а $\lambda_0 > 0$ столь большим, чтобы $C_1(\delta + \eta C_2) + \lambda_0^{-\frac{r}{s}} C_1 C_3(\eta) \equiv q < 1$, получим

$$\|Th\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant q\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}},$$

что, как известно, влечет обратимость оператора $(I + T)h$.

Следовательно существует непрерывный оператор

$$(I+T)^{-1} : H\left(r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}\right) \to H\left(r-s,\,r-s)\frac{2m}{s}\right).$$

Полагая теперь $R = R_0(I + T)^{-1}$, получаем, что $\mathfrak{M}R = I$. Теорема доказана.

## § 4. Краевая задача в ограниченном цилиндре в случае самосопряженного оператора $L(x, D)u$. Фредгольмовость

Пусть $Q = G \times [0, T]$—ограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial G \times [0, T]$.

Рассмотрим в $Q$ уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv P_s\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)u + L(x, D)u = h(t, x), \tag{4.1}$$

где

$$P_s\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)u \equiv \sum_{q=0}^{s} a_q(t)\,u^{(q)}, \quad a_s = \pm 1,$$

$a_q(t)$, $0 \leqslant q < s$ — гладкие комплекснозначные функции переменного $t$.

Оператор $L(x, D)u$ есть, как и раньше, полуограниченный самосопряженный эллиптический оператор порядка $2m$.

К уравнению (4.1) присоединяются дополнительные условия на границе цилиндра $Q$

$$B_j(x, D)u|_S = 0, \quad j = 1, \cdots, m, \tag{4.2}$$

$$P_i\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u|_{t=0} = \psi_i(x), \ i=0, \cdots, s-1-k, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Re}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u|_{t=T} = \chi_l(x), \ l=0, \cdots, k-1. \tag{4.4}$$

Здесь

$$P_i\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \equiv \sum_{q=0}^{n_i} p_{iq}(t, x)\, u^{(q)}, \ p_{in_i}=1,$$

$$\mathrm{Re}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \equiv \sum_{q=0}^{n_l} r_{lq}(t, x)\, u^{(q)}, \ r_{ln_l}=1$$

—дифференциальные операторы по $t$ порядков $n_i$ и $n_l$; число $k$ то же, что и в § 2.

Допустим, что выполнено (см. § 2)

Условие 1. Для любого $\lambda > \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}$ — некоторое число, справедливы неравенства

1) $\det \|\mu_j^{n_i}\| \neq 0$, $i, j=0, \cdots, s-1-k$, где $\mu_j(\lambda)$—корни алгебраического уравнения

$$a_s \mu^s + \lambda = 0 \tag{4.5}$$

такие, что $\mathrm{Re}\, \mu_j(\lambda) < 0$;

2) $\det \|\mu_j^{n_l}\| \neq 0$, $l, j = 0, \cdots, k-1$, где $\mu_j(\lambda)$ — корни уравнения (4.5), имеющие положительную вещественную часть, т. е. $\mathrm{Re}\, \mu_j(\lambda) < 0$.

Теорема 6. *Если выполнено условие* 1, *то задача* (4.1)—(4.4) *фредгольмова. Это значит, что для любых функций*

$$h(t, x) \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}, \ \psi_i(x) \in H^{(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\},$$

$$\chi_l(x) \in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\},$$

*подчиненных конечному числу независимых условий (пусть число этих условий равно* $\varkappa$*), задача* (4.1)—(4.4) *разрешима в пространстве* $H\left(r, r\dfrac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. *Решение задачи определяется с точностью до любого решения однородной задачи, среди которых имеется ровно* $\varkappa$ *линейно независимых. Кроме того, справедлива следующая двусторонняя оценка*

$$A(h, \psi, \chi) \leqslant C_1 \left(\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}} - \|u\|_{0,0}\right) \leqslant C_2 A(h, \psi, \chi), \tag{4.6}$$

*где*

$$A(h, \psi, \chi) \equiv \|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}} + \sum_{i=0}^{s-1-k} \|\psi_i\|_{(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}} + \sum_{l=0}^{k-1} \|\chi_l\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}},$$

$C_1$, $C_2$ — *постоянные.*

*Для доказательства сформулированной теоремы достаточно доказать следующую теорему.*

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* 1 *и* $\lambda_0>0$ *достаточно велико. Тогда задача* (4.1)—(4.4) *однозначно разрешима. Это значит, что для любых функций* $h(t, x)\in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_l\}$,

$$\psi_l(x)\in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\},\ \chi_l(x)\in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}$$

*существует единственное решение уравнения* (4.1), *удовлетворяющее условиям* (4.2)—(4.4). *При этом верна оценка*

$$A(h, \psi, \chi)\leqslant C_1\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}}\leqslant A(h, \psi, \chi), \tag{4.7}$$

*где* $C_1$, $C_2$ — *постоянные.*

Действительно, положим

$$\mathbf{B}(u)\equiv(\mathfrak{M}(u),\ P_i u|_{t=0},\ \operatorname{Re} u|_{t=T}),$$

где $i=0, \cdots, s-1-k$, $l=0,\cdots, k-1$, и рассмотрим $\mathbf{B}u$ как оператор, отображающий пространство

$$Y=H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}\times\prod_{l=0}^{s-1-k}H^{r\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}\times\prod_{l=0}^{k-1}H^{r\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}$$

в пространство

$$Z=H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}\times\prod_{l=0}^{s-1-k}H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}\times$$

$$\times\prod_{l=0}^{k-1}H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}.$$

Тогда задача (4.1)—(4.4) эквивалентна операторному уравнению

$$\mathbf{B}(y)=Z,$$

где $y\in Y$, $z\in Z$.

Заметим теперь, что если положить

$$\mathbf{B}_q(u)\equiv(\mathfrak{M}(u)+qu,\ P_i u|_{t=0},\ R_l u|_{t=T}),$$

то $\lambda_{0q}\equiv\lambda_0+q$ будет также сколь угодно большим. Следовательно, по теореме 7 для таких $q$ уравнение $\mathbf{B}_q(y)=Z$ однозначно разрешимо.

С другой стороны, оператор $\mathbf{B}$ отличается от оператора $\mathbf{B}_q$ на вполне непрерывное слагаемое, ибо вложение $Y\subset Z$ вполне непрерывно. Как известно, фредгольмовость оператора инвариантна относительно вполне непрерывных возмущений. Значит, исходная задача (4.1)—(4.4) фредгольмова, что и доказывает теорему 6.

Доказательство теоремы 7 (изложение следует работе [1]).

Возьмем на отрезке $[0, T]$ достаточно гладкое разбиение единицы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu(t) \equiv 1. \tag{4.8}$$

Очевидно это разбиение можно выбрать так, чтобы носители лишь двух функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_N(t)$ содержали точки $t=0$ и $t=T$ соответственно. Для каждого $\nu$ возьмем функцию $\psi_\nu(t) \in C^\infty(0, T)$, равную тождественно единице в окрестности носителя функции $\varphi_\nu(t)$ и нулю в несколько большей окрестности.

Очевидно оператор $\mathbf{B}(u)$ можно представить в виде

$$\mathbf{B}(u) = \sum_{\nu=1}^{N-1} \varphi_\nu \mathbf{B}(\psi_\nu u)$$

или, что то же

$$\mathbf{B}(u) = \varphi_1 \mathbf{B}(\psi_1 u) + \sum_{\nu=2}^{N-1} \varphi_\nu \mathbf{B}(\psi_\nu u) + \varphi_N \mathbf{B}(\psi_N u).$$

Будем считать, что коэффициенты исходного оператора $\mathfrak{M}(u)$ и граничных операторов $P_i$ и $R_l$ определены в бесконечном цилиндре $Q = G \times \mathbf{R}^1$. Тогда операторы $\mathbf{B}(\psi_\nu u) \equiv \mathbf{B}_\nu(\psi_\nu u)$ можно рассматривать для $\nu=2, \cdots, N-2$ во всем цилиндре $Q$, а для $\nu=1$ и $\nu=N$—в полуограниченном цилиндре $Q = G \times [0, \infty)$ (в последнем случае $t$ заменяется на $-t$).

Положим теперь

$$\mathbf{B}_0(u) = (\mathfrak{M}_0(u),\ P_{i0}\, u|_{t=0},\ R_{l0}\, u|_{t=T}),$$

где

$$\mathfrak{M}_0(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(x, D)\, u,\ P_{i0} u \equiv u^{(n_i)},\ R_{l0} u \equiv u^{(n_l)},$$

$$i = 0, \cdots, s-1-k;\ l = 0, \cdots, k-1.$$

Согласно теоремам 1, 2 и 4 при $\lambda_0 > 0$ операторы $\mathbf{B}_{\nu 0}$ имеют обратные операторы $R_\nu(h, \psi, \chi)$ $(\nu=1, N)$, где $\psi = (\psi_0, \cdots, \psi_{s-1-k})$, $\chi = (\chi_0, \cdots \cdots, \chi_{l-1})$ и $R_\nu(h)$, $\nu = 2, \cdots, N-1$.

При этом справедливы соответствующие оценки (1.3), (1.12) или (2.4).

Пусть

$$R(h, \psi, \chi) = \sum_{\mu=1}^{N} \psi_\mu R_\mu(\varphi_\mu h, \varphi_\mu \psi, \varphi_\mu \chi).$$

Тогда оператор $R(h, \psi, \chi)$ действует из пространства $Z$ в пространство $Y$ ограниченным образом. Покажем, что если $\lambda_0 > 0$ достаточно велико, то имеет место формула

$$\mathbf{B} R = I + T, \tag{4.9}$$

где $I$—единичный оператор в $Z$, а норма $T$ достаточно мала. Приведем соответствующие рассуждения из работы [1] (стр. 87).

Имеем

$$\mathbf{B} R(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \mathbf{B}_\nu \psi_\nu \psi_\mu R_\mu(\varphi_\mu h, \varphi_\mu \psi, \varphi_\mu \chi).$$

В этой сумме отличны от нуля только те слагаемые, в которых $\psi_\nu\varphi_\mu \neq 0$. Полагая $u_\mu = R_\mu(\varphi_\mu h, \varphi_\mu \psi, \varphi_\mu \chi)$, мы можем преобразовать такое слагаемое следующим образом:

$$\varphi_\nu \mathbf{B}_\nu \varphi_\nu \psi_\mu u_\mu = \varphi_\nu \mathbf{B}\, \psi_\nu \psi_\mu u_\mu = \varphi_\nu \mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu u_\mu.$$

Иначе говоря, мы можем заменить оператор $\mathbf{B}_\nu$ оператором $\mathbf{B}_\mu$, перейдя при этом к соответствующим локальным координатам. Теперь мы имеем

$$\mathbf{B}\, R(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu R_\mu \varphi_\mu (h, \psi, \chi).$$

Напишем теперь

$$\mathbf{B} R(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_{\mu 0} R_\mu \varphi_\mu (h, \psi, \chi) + T(h, \psi, \chi),$$

где

$$T(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu [\mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_\mu]\, u_\mu + \sum_\mu \sum_\nu \psi_\nu \psi_\nu \psi_\mu [\mathbf{B}_\mu - \mathbf{B}_{\mu 0}] u_\mu. \tag{4.10}$$

Так как оператор $R_\mu$ является обратным к $\mathbf{B}_{\mu 0}$, то

$$\sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_{\mu 0} R_\mu \varphi_\mu (h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\mu \psi_\nu \psi_\mu \varphi_\nu (h, \psi, \chi) =$$

$$= \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \varphi_\mu (h, \psi, \chi) = \Big(\sum_\nu \varphi_\nu\Big)^2 (h, \psi, \chi) = (h, \psi, \chi),$$

откуда и вытекает формула (4.9)''.

Оценим теперь норму оператора $T(h, \psi, \chi)$, как оператора в пространстве $Z$.

Пусть $\|\cdot\|_Z$ — норма в пространстве $Z$, как норма прямого произведения. Имеем для фиксированных $\mu$ и $\nu$

$$\|\varphi_\nu [\mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu - \varphi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_\mu]\, u_\mu\|_Z \leqslant C \Big\{ \|[\mathfrak{M}\, \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu \mathfrak{M}]\, u_\mu\|_{r-s,\, (r-s)\frac{2m}{s}} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{s-1-k} \|[P_l \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu P_l]\, u_\mu\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} \|[R_l \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu R_l]\, u_\mu\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}}. \tag{4.11}$$

Очевидно операторы, стоящие в квадратных скобках, ни содержат старших членов. Воспользуемся теперь для оценки правой части в (4.11) неравенствами (1.3), (1.12) и (2.4) (оценки для $u_\mu$) и тем фактом, что производные промежуточного порядка оцениваются через старшие производные со сколь угодно малым коэффициентом и саму функцию, т. е.

$$\|u^{(q)}\|_0 \leqslant \varepsilon \|u^{(s)}\|_0 + C(\varepsilon)\|u\|_0, \quad 0 \leqslant q < s.$$

Тогда получим неравенство

$$\|\varphi_\nu [\mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_\mu]\, u_\mu\|_Z \leqslant (\varepsilon + C(\lambda_0))\, \|(h, \psi, \chi)\|_Z,$$

где $\varepsilon$ сколь угодно мало, а $C(\lambda_0) \to 0$ при $\lambda_0 \to +\infty$ и не зависит от рассматриваемых функций.

Точно также оценивается и второе слагаемое в формуле (4.10). Следовательно при достаточно большом $\lambda_0 > 0$ получаем оценку

$$\|T(h, \psi, \chi)\|_Z \leqslant \frac{1}{2} \|(h, \psi, \chi)\|_Z,$$

из которой вытекает, что оператор $I + T$ обратим. Положив теперь $\mathbf{B}^{-1} = R(I+T)^{-1}$, убеждаемся, что $\mathbf{B}^{-1}$ есть правый обратный для оператора $\mathbf{B}$. Он же является и левым обратным. Априорная оценка (4.7) устанавливается совершенно аналогичными рассуждениями с разбиением единицы (ср. стр. 76--79 в [1]). Теорема доказана.

## § 5. Обобщение предыдущих результатов

Пусть $Q$ — ограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S$. Требуется найти решение эллиптико-параболического уравнения

$$\mathfrak{M}(u) \equiv P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u + L(t, x, D)\, u = h(t, x) \tag{5.1}$$

с коэффициентами, зависящими от $t$ и $x$; $a_s = \pm 1$. К уравнению (5.1) присоединяются граничные условия (4.2)—(4.4).

Допустим, что выполнены следующие условия.

I. Для любого фиксированного $t \in [0, T]$ оператор $L(t, x, D)$ полуограничен снизу, т. е.

$$\lambda_0(t) = \inf_{u \in H^{2m}\{B_j\}} \frac{\operatorname{Re}(L(t, x, D)\, u, \bar{u})}{(u, \bar{u})} > -\infty.$$

II. Для любых фиксированных $t \in [0, \varepsilon]$ $(t \in [T - \varepsilon, T])$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число, оператор $L(t, x, D) \equiv L(0, x, D)$ $(L(t, x, D) \equiv L(T, x, D))$ является самосопряженным оператором в пространстве $H^{2m}\{B_j\}$.

III. Граничные операторы удовлетворяют условию 1 § 4.

IV. Коэффициенты оператора $\mathfrak{M}(u)$ и граничных операторов (4.2)—(4.4) достаточно гладки, причем $a_q(t, x) \equiv a_q(t)$ для $t \in [0, \varepsilon]$ и $t \in [T - \varepsilon, T]$.

Прежде, чем сформулировать основную теорему этого параграфа, введем необходимые пространства. Обозначим через $\widetilde{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ пространство функций $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, удовлетворяющих условиям (4.2) и таких, что если $\varphi(t) \in C^\infty[0, T]$ и $\operatorname{supp} \varphi(t) \cap [0, \varepsilon] \neq \varnothing$ или $\operatorname{supp} \varphi(t) \cap [T - \varepsilon, T] \neq \varnothing$, то $\varphi(t)\, u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. Иными словами, от функций $u(t, x) \in \widetilde{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ требуется, чтобы в некоторых окрестностях точек $t=0$ и $t=T$ они разлагались в ряды по собственным функциям операторов $L(0, x, D)$ и $L(T, x, D)$ соответственно. В остальном они произвольны.

Теорема 8. *Если выполнены условия* I—IV, *то задача* (5.1), (4.2) *и* (4.4) *фредгольмова.*

*Это значит, что для любых функций*

$$h(t,x)\in\widetilde{H}\left(r-s,\ (r-s)\frac{2m}{s}\right)$$

$$\psi_i(x)\in H^{(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}\ (i=0,\cdots,s-1-k),\ \chi_l(x)\in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}$$

$$(l=0,\ \cdots,\ k-1),$$

*подчиненных конечному числу условий* $\varkappa$, *существует решение задачи* (5.1), (4.2)—(4.4) $u(t,x)\in\widetilde{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, *определяемое с точностью до* $\varkappa$ *линейно независимых решений однородной задачи. Если же* $\lambda_0=\min\lambda_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ *достаточно велико, то* $\varkappa=0$, *т. е. имеется изоморфизм. При этом справедливы оценки* (4.6) *и* (4.7) *соответственно.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 7, только разбиение единицы следует взять и по $x$. При этом, поскольку коэффициенты главной части оператора $L(t, x, D)$ и, вообще говоря, переменны, следует по ним сделать локализацию (см. [1]), воспользовавшись при оценке оператора $T(h, \psi, \chi)$ теоремами 3 из § 1 и 4 из § 2, а также теоремой 5 из § 3. Выкладки остаются прежними. Теорема 8 доказана.

## § 6. Аналог задачи Дирихле. Теорема единственности

В этом параграфе рассмотрим простейший пример задачи, которая изучалась в предыдущем параграфе. Именно, ищется решение следующей задачи:

$$P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u+L(x,D)\,u=h(t,x), \tag{6.1}$$

$$B_j(x,D)\,u|_S=0,\ j=1,\cdots,m, \tag{6.2}$$

$$u(0,x)=0,\cdots,u^{(s-1-k)}(0,x)=0, \tag{6.3}$$

$$u(T,x)=0,\cdots,u^{(k-1)}(T,x)=0. \tag{6.4}$$

Как вытекает из теоремы 6 задача (6.1)—(6.4) фредгольмова. Сейчас нас будет интересовать вопрос однозначной разрешимости этой задачи. Справедлив следующий результат.

Теорема 9 (теорема единственности). *Если полином*

$$A(\tau,\lambda_0)\equiv\operatorname{Re}\sum_{q=0}^{s}a_q(i\tau)^q+\lambda_0>0,$$

*то задача* (6.1)—(6.4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $s=2k+1$, $(-1)^k a_s>0$. Тогда условия (6.2)—(6.3) принимают вид

$$u(0,x)=0,\cdots,\ u^{(k)}(0,x)=0, \tag{6.5}$$

$$u(T,x)=0,\cdots,\ u^{(k-1)}(T,x)=0. \tag{6.6}$$

Допустим, что $h(t,x)\equiv 0$ и покажем, что решение нашей задачи $u(t,x)\equiv 0$. Имеем

$$\left[P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u,\ \bar{u}\right]+[L(x,D)\,u,\ \bar{u}]=0, \tag{6.7}$$

где $[u,\ v]$ означает интеграл по $Q$.

Продолжим решение $u(t,x)$ тождественным нулем для $t\leqslant 0$ и $t>T$, обозначив полученное продолжение по-прежнему $u(t,x)$. Легко видеть, что

$$\left[P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u,\ \bar{u}\right]\equiv\sum_{q=0}^{s}a_q[u^{(q)},\bar{u}]=(-1)^k a_s\,[u^{(k+1)},\ \bar{u}^{(k)}]+$$
$$+\sum_{q=0}^{2k}(-1)^l\,[u^{(q-l)},\ \bar{u}^{(l)}],$$

где $0\leqslant l\leqslant k$. Далее находим, что

$$\operatorname{Re}\left[P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u,\ \bar{u}\right]=(-1)^k\frac{a_s}{2}\|u^{(k)}(T,x)\|_0^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_G\operatorname{Re}\sum_{q=0}^{s}a_q\,(i\tau)^q\,|\tilde{u}(\tau,x)|^2d\tau dx,$$

где $\tilde{u}(\tau,x)$— преобразование Фурье по $t$ функции $u(t,x)$. Следовательно, учитывая определение числа $\lambda_0$, из (6.7) выводим неравенство

$$(-1)^k\frac{a_s}{2}\|u^{(k)}(T,x)\|_0^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_G A(\tau,\lambda_0)\,|\tilde{u}(\tau,x)|^2\,d\tau dx\leqslant 0.$$

Поскольку полином $A(\tau,\lambda_0)>0$, то это означает, что $\tilde{u}(\tau,x)\equiv 0$, т. е. и $u(t,x)\equiv 0$. Случаи $s=2k+1$, $(-1)^k a_s<0$ и $s=2k$ трактуются аналогично. Теорема единственности доказана.

### Примеры

1. Рассмотрим уравнение

$$-u'''+(-1)^m\,\Delta^m\,u=h(t,x).$$

В этом случае требуется найти решение при условиях (6.2) такое, что $u(0,x)=u'(0,x)=0$ и $u(T,x)=0$. Задача имеет единственное решение для любой правой части $h(t,x)$.

2. Рассмотрим уравнение

$$u'''+(-1)^m\,\Delta^m\,u=h(t,x).$$

В этом случае, наоборот, $u(0,x)=0$ и $u(T,x)=0$, $u'(T,x)=0$. Задача однозначно разрешима.

3. Рассмотрим уравнение четного порядка

$$u^{(2k)} + (-1)^{m-k} \Delta^m u = h(t, x).$$

Для этого уравнения условия по $t$ (6.2), (6.3) превращаются в условия Дирихле $u(0, x) = 0, \cdots, u^{(k-1)}(0, x) = 0$, $u(T, x) = 0, \cdots, u^{(k-1)} \times$ $\times (T, x) = 0$, определяющие корректную задачу.

Московский энергетический
институт

Поступило 20.У.1968

ՅՈՒ. Ա. ԴՈՒԲԻՆՍԿԻ. Կոշու խնդրի և հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի եզրային խնդիրների մասին *(ամփոփում)*

*Դիցուք* $Q = I \times G$ $(I = (-\infty, +\infty)$, $I = [0, +\infty)$ *կամ* $I = [0, T]$, $T < \infty$; $G \subset R)$ *գլանային տիրույթ է.*

*Տիրույթում դիտարկվում է*

$$P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}, x, t\right)u + L(D, x, t)\, u = h(x, t)$$

*տեսքի էլիպտիկա-պարաբոլական հավասարումների համար ընդհանուր եզրային խնդիր, որտեղ* $P_s(x, t, \tau)$*-ն* $s > 1$ *կարգի բազմանդամ է* $\tau$*-ից,* $L$*-ը՝* $2m$ *կարգի էլիպտական օպերատոր։*

*Հիմնական արդյունքը՝ այդ խնդիրը նորմալ լուծելի է։*

YU. A. DUBINSKII. *On Cauchy and boundary problems for a class of differential equations with constant coefficients* (summary)

Let $Q = I \times G$ $(I = (-\infty, +\infty)$, $I = [0, +\infty]$ or $I = [0, T]$, $T < \infty$; $G \subset R)$ be a cylindrical domain. General boundary problems for elliptic-parabolic equations

$$P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}, x, t\right)u + L(D, x, t)\, u = h(x, t),$$

where $P_s(x, t, \tau)$ is polinomial of $\tau$ of degree $s > 1$, $L$— elliptic operator of order 2m, are considered in $Q$.

As a main result—the normal solvability of the problems is obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 19, вып. 3, 1964, 53—161.
2. *S. Agmon.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. pure appl. math., XV, 1962, 119—147.
3. *Н. И. Бриш, И. Н. Валешкевич.* Метод Фурье для нестационарных уравнений с общими краевыми условиями, Дифф. уравн., 1, № 3, 1965, 523—528.
4. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, вып. 3, 1965, 90—153.
5. *Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, XX, вып. 1, 1965, 3—74.
6. *Ю. А. Дубинский.* Задача Коши для операторно-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1968.
7. *Ю. А. Дубинский.* Смешанные задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными, Труды Моск. матем. об-а, 1969.

8. *Ю. А. Дубинский*. Периодические решения эллиптико-параболических уравнений, Мат. сб., 1968.

9. *Э. Мадженес*. Интерполяционные пространства и уравнения с частными производными, УМН, XXI, вып. 2, 1966, 169—218.

10. *Л. Н. Слободецкий*. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 197, 1958, 54—112.

11. *С. Л. Соболев*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962.

12. *M. Schechter*. General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. pure appl. math., XII, № 3, 1959, 457—486, русский перевод, Математика, т. 4:5, 1960.

13. *M. Schechter*. Remarks on elliptic boundary value problems, Comm. pure appl. math., XII, № 4, 1959, 561—578, русский перевод, Математика, т. 4 : 6, 1960, 3—22.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

Б. М. ЕДИГАРЯН

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ РАНГА ОДИН НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

1°. Теорема. "Пусть $A$—квадратная матрица порядка $n$ ранга $r$ над произвольным полем $K$. Тогда существуют две прямоугольные матрицы $B$ и $C$ размеров $(n\times r)$ и $(r\times n)$ и ранга $r$ такие, что $A=BC$. Такое разложение однозначно с точностью до умножения $B$ справа на невырожденную матрицу $M$ размера $r\times r$ и одновременного умножения $C$ слева на обратную.

$$A=BC=(BM)\ (M^{-1}C)."$$

Пусть $G$—полугруппа всех квадратных матриц порядка $n$. Двусторонние идеалы этой полугруппы образованы матрицами ранга $\leqslant r$, где $r$—любое число от 1 до $n$. Поэтому они образуют простую структуру

$$G\supset G_{n-1}\supset\cdots G_1\supset 0.$$

Изучим строение структуры одночленных (главных) идеалов, т. е. таких, которые порождаются одним элементом.

Пусть $r$—ранг порождающей матрицы $A$. Тогда в силу теоремы

$$A=BC,$$

где $B$ и $C$ матрицы размеров $(n\times r)$, $(n\times n)$ ранга $r$. Идеал, порожденный матрицей $A$, составляет множество $B\ (CX)=BC'$, где $B$ фиксированное, а $C$ состоит из всех матриц размера $r\times n$.

Матрица $B$ определяется с точностью до умножения справа на невырожденную матрицу. Поэтому, если идеалу сопоставить подпространство размерности $r$, натянутое на столбцы матрицы $B$, оно не меняется при умножении $B$ справа на невырожденную матрицу и будет однозначно соответствовать идеалу.

Обратно для любого $r$-мерного подпространства найдется соответствующий идеал (в качестве $B$ можно взять матрицу, столбцы которой составляют базис подпространства).

Итак между одночленными идеалами и подпространствами $n$-мерного пространства имеется взаимно однозначное соответствие. Это соответствие есть структурный изоморфизм: вложению идеалов соответствует вложение подпространств. Число одночленных идеалов (при конечном поле $K$) ранга $r$ равно числу подпространств размерности $r$ $n$-мерного пространства над полем $K$. Как известно, оно равно

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1})}{(q^r-1)(q^r-q)\cdots(q^r-q^{r-1})}=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q-1)},$$

здесь $q$—число элементов поля.

Число элементов в идеале равно числу матриц $C'$ и равно $q^{nr}$.

Исследуем с какой матрицей связаны два подпространства $n$-мерного пространства строк и столбцов размерности $r$ (имеются ввиду пространство, натянутое на столбцы и пространство, натянутое на строки).

Пусть $A$ такая матрица, $R_A$ — пространство столбцов, $L_A$—пространство строк.

Для любых двух подпространств размерности $r$ можно найти матрицу $A$, для которой эти подпространства будут $R_A$ и $L_A$.

Именно, пусть

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nr}\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn}\end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $C$ составляют базис пространства $R$, а строки матрицы $B$ составляют базис пространства $L$.

Положим

$$A=CMB,$$

где $M$—любая невырожденная матрица порядка $r$. Тогда

$$R_A=R,\ L_A=L.$$

Это есть общий вид таких матриц, так что при фиксированных $R$ и $L$ имеется взаимно однозначное соответствие с невырожденными матрицами $M$ порядка $r$.

Выберем базис для каждого подпространства. Над конечным полем будет конечное число подпространств $N_{r,n}$.

Пусть $B_i$ и $C_j$ — матрицы, соответствующие выбранным базисам $i$-го подпространства $R_i$ и $j$-го подпространства $L_j$ $(i=1,\cdots,N;$ $j=1,\cdots,N)$.

Пусть

$$A_1=B_iM_1C_j,\ A_2=B_kM_2C_l.$$

Тогда

$$A_1A_2=B_i(M_1C_jB_kM_2)\,C_l=B_iM_3C_l,$$

где

$$M_3=M_1P_{jk}M_2,$$

$$P_{jk}=C_jB_k.$$

В том случае, когда $C_jB_k$—вырожденная матрица, заменим ее нулем, если мы рассматриваем полугруппу матриц ранга $r$ „с точностью до матриц меньшего ранга“, т. е. „склеиваем“ их с нулем.

Для каждого подпространства $R$ пространства столбцов существует „ортогональное“ к нему подпространство $R^*$ в пространстве строк. Если размерность $R$ равна $r$, то размерность $R^*$ равна $n-r$.

Для того чтобы матрица $C_j B_k$ была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_j^* \cap R_k = 0.$$

Отметим, что

1. Число невырожденных матриц порядка $r$ равно

$$S_r = (q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-1}).$$

2. Число прямоугольных матриц $n \times r$ ранга $r$ равно

$$A_{n,r} = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1}).$$

3. Число подпространств $n$-мерного пространства размерности $r$ равно

$$C_{n,r} = \frac{A_{n,r}}{S_r} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1})}{(q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-1})}.$$

4. Число матриц порядка $n$ и ранга $r$ равно

$$C_{n,r}^2 \cdot S_r,$$

где $C_{n,r}$ есть число строк и столбцов определяющей матрицы $P = \| C_j B_k \|$, а $S_r$ есть число элементов группы невырожденных матриц.

2°. Этот пункт посвящен исследованию матрицы $P$.

Пусть $N = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $L_1, \cdots, L_N$ — все одномерные подпространства $n$-мерного пространства над полем $K$ из $q$ элементов, $Z_1, \cdots, Z_n$ — какие-либо ненулевые векторы, содержащиеся, соответственно, в $L_1, \cdots, L_N$. Выберем их следующим образом (координаты расположены в столбцах);

$$\begin{matrix} \cdots 1 & \cdots 0 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots z_{i_2} & \cdots 1 \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots z_{j_3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & 1 & \cdot \\ \cdots z_{i_n} & \cdots z_{j_n} \cdots & z_{j_n} & 1. \end{matrix}$$

Это множество векторов обозначим через $\mathfrak{M}$. Выбор такой, что первая отличная от нуля координата равна 1. Тогда остальные, независимо друг от друга, пробегают все значения в поле.

Матрицы ранга 1 имеют вид $Z_j C Z_l'$, где $Z_j$, $Z_l'$ независимо пробегают все множество $\mathfrak{M}$, $c \in K$, $c \neq 0$. Умножение таких матриц осуществляется по формуле

$$Z_j c_1 Z_l', \ Z_k c_2 Z_l' = Z_j (c_1 Z_l' Z_k c_2) Z_l' = Z_j c_3 Z_l',$$

где

$$c_3 = c_1 c_2 Z_l' Z_k.$$

Поэтому нас интересует матрица $P=(P_{ik})$, составленная из „скалярных“ произведений $P_{ik}=Z_i' Z_k$, рассматриваемая в групповой алгебре мультипликативной группы поля над полем комплексных чисел.

Пусть $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$—все характеры мультипликативной группы, $\chi_0$—главный характер. Через $\chi(p)$ обозначим матрицу, получающуюся из матрицы $P$ посредством замены каждого ее элемента значением характера $\chi$, причем полагаем $\chi(0)=0$. Покажем, что $\det\chi(p)\neq 0$. Для этого рассмотрим

$$|\det\chi(p)|^2=|\det\chi(p)\bar{\chi}(p')|,$$

здесь $P'$—матрица, транспонированная к $p$, $\bar{\chi}$—характер, сопряженный с $\chi$.

Элемент $i$-ой строки и $k$-го столбца матрицы $\chi(p)\bar{\chi}(p')$ равен

$$\psi(Z_i, Z_k)=\sum_{U\in\mathfrak{M}}\chi(Z_i' U)\bar{\chi}(u' Z_k).$$

Пусть $T$—невырожденное преобразование основного пространства. Если $U$ пробегает все векторы совокупности $\mathfrak{M}$, то $TU$ пробегает все векторы совокупности $\mathfrak{M}$ с точностью до скалярного множителя

$$TU_l=\alpha_{l,T}\cdot U_{l(T)}.$$

Поэтому

$$\psi(TZ_i, TZ_k)=\sum_{U\in\mathfrak{M}}\chi(Z_i' T' U)\bar{\chi}(U'TZ_k)=$$

$$=\sum_{U\in\mathfrak{M}}\chi(Z_i' U\cdot\alpha_{U,T'})\bar{\chi}(\alpha_{U,T'}\cdot U'Z_k)=$$

$$=\sum_{U\in\mathfrak{M}}\chi(Z_i' U)\chi(\alpha_{U,T'})\bar{\chi}(\alpha_{U,T'})\bar{\chi}(U'Z_k)=$$

$$=\sum_{U\in\mathfrak{M}}\chi(Z_i' U)\bar{\chi}(U' Z_k)=\Psi(Z_i, Z_k).$$

Но любую пару векторов можно перевести линейным невырожденным преобразованием в любую другую пару векторов.

Поэтому как все диагональные элементы матрицы $\chi(p)\bar{\chi}(p')$, так и все недиагональные элементы равны между собой. Достаточно подсчитать $\Psi(Z_1, Z_2)$ и $\psi(Z_1, Z_1)$,
где

$$Z_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad Z_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\Psi(Z_1, Z_1)=\sum_{U\in\mathfrak{M}}\chi(Z_1' U)\bar{\chi}(U' Z_1)=q^{n-1}.$$

Если характер $\chi \neq \chi_0$, то $\Psi(Z_1, Z_2) = 0$, а для главного характера $\chi = \chi_0$

$$\Psi(Z_1, Z_2) = \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_1' U) \overline{\chi}(U', Z_2) = q^{n-1} - q^{n-2}.$$

Соответственно, для $\chi \neq \chi_0$ имеем

$$|\det \chi(p)|^2 = \begin{vmatrix} q^{n-1}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0 & , q^{n-1}, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, \\ 0, & 0, & \cdots, & q^{n-1} \end{vmatrix},$$

отсюда

$$|\det \chi(p)| = q^{\frac{1}{2}(n-1)\frac{q^n-1}{q-1}}$$

и

$$|\det \chi_0(p)| = \begin{vmatrix} q^{n-1}, & q^{n-1}-q^{n-2}, & \cdots, & q^{n-1}-q^{n-2} \\ q^{n-1}-q^{n-2}, & q^{n-1}, & \cdots, & q^{n-1}-q^{n-2} \\ \cdot & & \cdots, & q^{n-1} \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q^{n-1}-q^{n-2}, & q^{n-1}-q^{n-2}, & \cdots, & q^{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда

$$|\det \chi_0(p)| = q^{\frac{1}{2}\left[(n-2)\frac{q^n-1}{q-1}+n\right]}.$$

3°. Полугрупповая алгебра над полем комплексных чисел $C$ полугруппы матриц ранга $\leqslant 1$ с элементами из $K$ образована формальными суммами

$$\sum a_{jlc} Z_j c \; Z_l'.$$

где $a_{jlc} \in C$, $c \in K$. Будем считать, что при $c=0$ соответствующие слагаемые равны нулю ($bC$), то есть нуль полугруппы считаем нулем полугрупповой алгебры. Элементы полугрупповой алгебры можно представить в виде

$$\sum_{l,\,j} b_{jl} Z_j \; Z_l',$$

где

$$b_{lj} = \sum a_{jlc}\, c$$

— элементы групповой алгебры для групп $K^*$ ненулевых элементов поля $K$.

Умножение осуществляется по правилу

$$(*) \quad \sum_{l,\,j} b_{jl} Z_j \; Z_l' \cdot \sum_{k,\,l} b_{kl} Z_k \; Z_l' = \sum b_{jl}\, p_{lk}\, b_{kl}\, Z_j\, Z_l' \cdot$$

Если ввести обозначение $B = (b_{lk})$, то в терминах этих матриц правило (*) умножения имеет вид

$$B_1 \circ B_2 = B_1 P B_2,$$

где через $\circ$ обозначено умножение по правилу (*).

Так как $P$—невырожденная матрица как доказано в 2 полугрупповая алгебра изоморфна алгебре матриц над групповой алгеброй группы $K^*$. Поэтому она вполне приводима и все представления естественно продолжают представления $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$ мультипликативной группы $K^*$ поля $K$.

Результат настоящей работы является конкретизацией результатов А. Клиффорда [1] и И. С. Понизовского [2], [3].

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю, член-корреспонденту АН СССР, профессору Д. К. Фаддееву за помощь и ценные советы.

Ереванский государственный университет

Поступило 18.X.1968

Բ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ. Վերջավոր դաշտի վրա մեկ ռանգի քառակուսային մատրիցների կիսախմբերի ներկայացումներ *(ամփոփում)*

*Աշխատանքում ապացուցվում է, որ վերջավոր դաշտի վրա մեկ ռանգի քառակուսային մատրիցների կիսախմբերի բոլոր ներկայացումները կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա լրիվ բերելի են և այդպիսի կիսախմբի բոլոր ներկայացումների համար տրվում է սպառիչ պատասխան։*

B. M. EDIGARIAN. *Representation of the semigroup of square matricies of rang 1 over the finite field* (summary)

The paper establishes, that all representations of the semigroup mentioned in the heading are entirely reducable. The full answer is given for all representations of the semigroup.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Н. Clifford.* Matrix representations of completely simple semigroups, Amer. Journ. Math., 64, 1942, 327—342.
2. *И. С. Понизовский.* О матричных представлениях ассоциативных систем, Матем. сб., 38, 1956, 241—260.
3. *И. С. Понизовский.* О матричных неприводимых представлениях конечных полугрупп, УМН, 13, 1958, 139—144.

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ի. Դ. Զասլավսկի. *Կոնստրուկտիվ օբյեկտների և օպերացիաների աքսիոմատիկ սահմանման մասին* . . . . . . . . . . . 153
Ա. Բ. Ներսեսյան. *Վերածվող հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի անվերջ դիֆերենցելի լուծումների մասին* . . . . . . . 182
Յու. Ա. Դուբինսկի. *Կոշու խնդրի և հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի եզրային խնդիրների մասին* . . . . . . . . 192
Բ. Մ. Եդիգարյան. *Վերջավոր դաշտի վրա մեկ ռանգի քառակուսային մատրիցների կիսախմբերի ներկայացումներ* . . . . . . . . 215

## СОДЕРЖАНИЕ

*И. Д. Заславский.* Об аксиоматическом определении конструктивных объектов и операций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
*А. Б. Нерсесян.* О бесконечно дифференцируемых решениях задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка . . . . . . 182
*Ю. А. Дубинский.* О задаче Коши и краевых задачах для некоторого класса дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . 192
*Б. М. Едигарян.* Представления полугруппы квадратных матриц ранга один над конечным полем . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215

## CONTENTS

*I. D. Zaslavskii.* On axiomatic definition of constructive objects and operations . 153
*A. B. Nersessian.* On infinite differentiable solutions of Cauchy problem degenerate hyperbolic equations of second order . . . . . . . . . . . . . . . . 182
*Yu. A. Dubinskii.* On Cauchy and boundary problems for a class of differential equations with constant coefficients . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 192
*B. M. Edigarian.* Representation of the semigroup of square matricies of rang 1 over the finite field . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215