ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar linee above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

Е. А. АРУТЮНЯН

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛУ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ, ВЫЧИСЛИМЫХ НА ПЕРЕДАЮЩЕМ КОНЦЕ

I. Рассматривается канал K с конечным входным $x_1, \cdots, x_M$ и выходным $y_1, \cdots, y_N$ алфавитами и с конечным числом внутренних состояний $t = 1, 2, \cdots, L$. Канал K задан [1], [2], если заданы:

1) переходная функция для состояний: в момент времени $s+1$ состояние t_{s+1} определяется состоянием t_s в момент s и переданным в момент s входным сигналом x_s: $t_{s+1} = f(t_s, x_s)$;

2) L стохастических матриц $\{p(j|i, t)\}$, $i=1, 2, \cdots, M$, $j=1, 2, \cdots, N$, $t=1, 2, \cdots, L$, где $p(j|i, t)$ есть условная вероятность получения на выходе канала символа y_j, если канал находится в данный момент в состоянии t и на входе передан символ x_i.

Предполагается [1], [2], что начальное состояние известно на входе канала, и что из каждого состояния можно перейти в любое другое состояние с помощью последовательности входных букв длины не большей L.

Как отмечалось Р. Л. Добрушиным [3] канал с конечной памятью m можно рассматривать как канал с конечным числом состояний. Для этого нужно набор m переданных до текущего момента входных символов считать состоянием в данный момент. Таким образом, приводимый ниже основной результат верен также для каналов с конечной памятью. Каналы, имеющие лишь одно состояние, называются каналами без памяти.

Последовательность n входных символов $\bar{x} = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$ называется словом на входе, а последовательность n выходных символов $\bar{y} = (y_{i_1}, \cdots, y_{i_n})$ — словом на выходе. Если t_1—начальное состояние, то вероятность $p(\bar{y}|\bar{x}, t_1)$ получить на выходе $\bar{y}$, если передано слово $\bar{x}$, равна

$$p(\bar{y}|\bar{x}, t_1) = \prod_{l=1}^{n} p(j_l|i_l, t_l),$$

где $t_l = f(t_{l-1}, x_{l-1})$, $l = 2, \cdots, n$.

Кодом $\mathfrak{M}_n$ объема S_n называется набор S_n входных слов $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{S_n}$ и S_n непересекающихся множеств выходных слов $A_1, \cdots, A_{S_n}$. Вероятностью ошибки кода $\mathfrak{M}_n$ называется

$$P_{\text{ош}}(\mathfrak{M}_n, t_1) = \frac{1}{S_n}\sum_{s=1}^{S_n}(1 - P(A_s/\bar{x}_s, t_1)),$$

где $P(A_s/\bar{x}_s, t_1) = \sum_{\bar{y}\in A_s} p(\bar{y}/\bar{x}_s, t_1)$ — вероятность того, что $\bar{y}\in A_s$ при условии, что передано $\bar{x}_s$. Код длины n объема S_n, имеющий вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$, будем называть $(n, S_n, P_{\text{ош}})$-кодом.

Конечно, вероятность ошибки кода зависит от начального состояния канала, однако, т. к. нас будут интересовать результаты асимптотические по n, а, согласно предположению, передачей небольшого числа символов канал можно привести в любое желательное состояние, мы не будем больше отмечать эту зависимость.

Цель работы — изучение асимптотической зависимости между объемом и вероятностью ошибки „оптимальных" для данного канала кодов. Можно рассматривать следующие две постановки этой задачи.

Пусть $S_n = [e^{nR}]$, тогда можно определить оптимальную вероятность ошибки так

$$P_{\text{ош}}(n, R) = \inf_{\mathfrak{M}_n} P_{\text{ош}}(\mathfrak{M}_n),$$

где нижняя грань берется по всем кодам объема, не меньшего $[e^{nR}]$. Экспонентой оптимальной вероятности ошибки $E(R)$ называется

$$E(R) = \overline{\lim_{n\to\infty}} -\frac{1}{n}\log P_{\text{ош}}(n, R)^*, \tag{1}$$

которая указывает экспоненциальную скорость убывания по n вероятности ошибки при заданной скорости передачи $R = \frac{1}{n}\log S_n$.

В другом случае можно задать вероятность ошибки кода

$$P_{\text{ош}}(n) = e^{-nE},\ 0 < E < \infty$$

и рассматривать наибольший объем кода среди всех кодов с вероятностью ошибки, не большей e^{-nE}

$$S(n, E) = \sup_{\mathfrak{M}_n} S(\mathfrak{M}_n).$$

Предел

$$C(E) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log S(n, E) \tag{2}$$

естественно назвать E-пропускной способностью канала, по аналогии с обычной пропускной способностью C и пропускной способностью при нулевой вероятности ошибки C_0 [4]. Определения кода и характеристик канала (1), (2) сохраняют силу в частном случае каналов

---

* В этой статье используются только натуральные логарифмы.

без памяти. Мы покажем, что в этом случае функция $C(E)$ является обратной к функции $E(R)$.

В работах [5], [6], [7], [8] и других изучалось поведение функции $E(R)$ для каналов без памяти. Указаны $E^+(R)$ — верхняя и $E^-(R)$ — нижняя границы для $E(R)$, причем из [8] следует, что в случае дискретного канала, определяемого переходной матрицей $\{p(j/i)\}$, $i=1,\cdots, M_1$, $j=1,\cdots, N_1$, эти границы могут быть заданы следующим образом:

$$E^+(R)=\max_{\{p(i)\}}\min_{\{q(j/i)\}}\left\{\sum_{ij} p(i)\,q(j/i)\log\frac{q(j/i)}{p(j/i)}:\right.$$
$$\left.:\sum_{ij} p(i)\,q(j/i)\log\frac{q(j/i)}{\sum_i p(i)\,q(j/i)}\leqslant R\right\}, \tag{3}$$

где $\{p(i)\}$ — распределение на входе, $\{q(j/i)\}$ — вероятностные матрицы;

$$E^-(R)=\begin{cases}E^+(R), & \text{при } R_{\text{крит}}\leqslant R<C\\ R_{\text{крит}}-E^+(R_{\text{крит}})-R, & \text{при } 0\leqslant R\leqslant R_{\text{крит}},\end{cases} \tag{4}$$

а

$$R_{\text{крит}}=\sup\left\{R:\frac{dE^+(R)}{dR}<-1\right\}. \tag{5}$$

Функции $E^+(R)$ и $E^-(R)$ при $0<R<C$ — выпуклые, невозрастающие функции, поэтому существуют их обратные, которые мы обозначим через $C^+(E)$ и $C^-(E)$. Очевидно при $0<E<\infty$

$$C^-(E)\leqslant C(E)<C^+(E). \tag{6}$$

При сравнении характеристики различных каналов мы будем отмечать соответствующими обозначениями.

Параллельно с каналом K можно рассматривать канал без памяти $K(n_0, t)$, который имеет входным алфавитом слова $\bar{x}$ длины $n_0>2$ канала K, переводящие начальное состояние t снова в t, т. е. $f(t_{n_0}, x_{ln_0})=t$, выходным алфавитом—слова $\bar{y}$, и матрицу переходных вероятностей со следующими элементами:

$$p(\bar{y}/\bar{x})=p(j_1/i_1,\ t)\,p(j_2/i_2, f(t, x_1))\cdots p(j_n/i_n,\ f(t_{n_0-1},\ x_{n_0-1})).$$

Таким образом, у канала $K(n_0,\ t)$ число $M_1(n_0,\ t)$ символов входного алфавита не превышает M^{n_0}, а число $N_1(n_0,\ t)$ выходных символов равно N^{n_0}. Характеристики канала $K(n_0,\ t)$ мы будем обозначать так же, как и соответствующие характеристики канала K, но с добавлением в скобках n_0, t. (Мы предпочитаем приписывать n_0 и t не как индексы, а в виде аргумента, т. к. это графически удобнее). Так, например, пропускная способность канала $K(n_0,\ t)$ будет обозначаться $C(n_0,\ t)$, E — пропускная способность — $C(n_0,\ t,\ E)$, критическое значение скорости — $R_{\text{крит}}(n_0,\ t)$ и т. д. Аналогично (2) имеем

$$C(n_0,\ t,\ E)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{1}{k}\log S(n_0,\ t,\ k,\ E), \tag{7}$$

где

$$S(n_0,\ t,\ k,\ E) = \sup_{\mathfrak{M}_k} S(n_0,\ t,\ \mathfrak{M}_k), \tag{8}$$

а верхняя грань берется по всем кодам длины k для канала $K(n_0,\ t)$, имеющим вероятность ошибки не большую, чем e^{-kE}. Шенноном [1] показано, что

$$C = \lim_{n_0 \to \infty} \frac{1}{n_0} C(n_0,\ t) = \sup_{n_0} \frac{1}{n_0} C(n_0,\ t). \tag{9}$$

Здесь будет доказана следующая

Теорема. *При* $0 < E < \infty$

$$C(E) = \sup_{n_0} \frac{1}{n_0} C(n_0,\ t,\ n_0 E) = \lim_{n_0 \to \infty} \frac{1}{n_0} C(n_0,\ t,\ n_0 E). \tag{10}$$

Одновременно

$$C^-(E) \leqslant C(E) \leqslant C^+(E), \tag{11}$$

где

$$C^-(E) = \overline{\lim_{n_0 \to \infty}} \frac{1}{n_0} C^-(n_0,\ t,\ n_0 E) \ \text{и}\ C^+(E) = \overline{\lim_{n_0 \to \infty}} \frac{1}{n_0} C^+(n_0,\ t,\ n_0 E),$$

а $C^-(n_0, t, E)$ *и* $C^+(n_0, t, E)$ — *нижняя и верхняя границы для* $C(n_0, t, E)$, *определяемые согласно* (3), (4), (5), (6). *При этом, как и в* (3), (4), *при* $0 < E < E_{\text{крит}}$

$$C^-(E) = C^+(E) = C(E), \tag{12}$$

где

$$E_{\text{крит}} = \lim_{n_0 \to \infty} \frac{1}{n_0} E_{\text{крит}}(n_0, t) \tag{13}$$

а

$$E_{\text{крит}}(n_0, t) = E(R_{\text{крит}}(n_0,\ t)) = E^+(R_{\text{крит}}(n_0,\ t)). \tag{14}$$

2. Целью данного пункта является доказательство совпадения в случае каналов без памяти функций $C(E)$ и обратной к $E(R)$. Доказательство будет опираться на лемму, которая может быть очень полезна не только для целей этого пункта.

Лемма 1. *Для каналов без памяти* $E(R)$ *является непрерывной выпуклой функцией при всех* R, *для которых* $E(R)$ *конечна.*

Доказательство леммы фактически содержится в работе [7]. Если заменить обозначения из [7] на наши $N_1 = N_2 = n$, $M = e^{nR_1}(e^{nR_2} - 1)$, $L_2 = 1$, $L_1 = e^{nR_1} - 1$, то, вследствие неравенства (1.5) и [7] и определения (1), легко получить

$$E\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(E(R_1) + E(R_2)).$$

Утверждение леммы следует из теоремы 111 [9].

Обозначим теперь при $0 < E < \infty$

$$R(E) = E^{-1}(R), \tag{15}$$

существование обратной следует из леммы и из невозрастания $E(R)$. Отметим, что $R(E)$ непрерывна при всех $E \in (0,\ \infty)$.

Лемма 2. *Для каналов без памяти* $C(E)=R(E)$.

Доказательство. Согласно (2) $C(E)$ есть число такое, что для любого $\varepsilon>0$ существует $n(\varepsilon)$ и бесконечно возрастающая подпоследовательность n_r, $r=1,2,\cdots$; $n(\varepsilon)\leqslant n_1$ такая, что для всех r существуют коды

$$(n_r,\ e^{n_r(C(E)-\varepsilon)},\ e^{-n_rE}). \tag{16}$$

В свою очередь из (1) видно, что $E(R)$ это число такое, что для любого $\varepsilon_1>0$ существует $n(\varepsilon_1)$ и бесконечно возрастающая подпоследовательность $n_{r'}$, $r'=1,2,\cdots$; $n(\varepsilon_1)<n_1'$, для которых существуют коды

$$(n_{r'},\ e^{n'_{r'}R},\ e^{-n'_{r'}(E(R)-\varepsilon_1)}). \tag{17}$$

Из сопоставления (15) и (17) получаем, что существуют коды

$$(n_{r'}\ e^{n'_{r'}R(E)},\ e^{-n'_{r'}(E-\varepsilon_1)}),$$

согласно (2) это означает, что

$$C(E-\varepsilon_1)\geqslant R(E). \tag{18}$$

Из (16), при $E_1=E-\varepsilon_1$, следует, что

$$E(C(E-\varepsilon_1)-\varepsilon)\geqslant E-\varepsilon_1,$$

или, учитывая невозрастание $E(R)$, а, следовательно, и $R(E)$

$$C(E-\varepsilon_1)-\varepsilon\leqslant R(E-\varepsilon_1). \tag{19}$$

Из (18), (19) вследствие произвольности ε, ε_1 и непрерывности $R(E)$ получаем утверждение леммы.

Теперь можно приступать к доказательству теоремы.

3. Доказательство теоремы аналогично доказательству Шеннона [1] равенства (9) и состоит из нескольких последовательных шагов.

а) Покажем, что для произвольных целых положительных l

$$C(ln_0,\ t,\ lE)\geqslant l\,C(n_0,\ t,\ E). \tag{20}$$

Действительно, согласно определению $C(n_0,\ t,\ E)$, для канала $K(n_0,t)$ при любом $\varepsilon>0$ и $E>0$ имеется $k(\varepsilon)$ и бесконечная последовательность k_r, $r=1,\ 2,\cdots$; $k_1\geqslant k(\varepsilon)$ такие, что существуют коды

$$(k_r,\ e^{k_r(C(n_0,\ t,\ E)-\varepsilon)},\ e^{-k_rE}). \tag{21}$$

Положим

$$c_r=\left[\frac{k_r}{l}\right]+1,\ \text{т. е.}\ k_r=c_rl-l',\ \text{где}\ 0<l'_r\leqslant l.$$

Кодам (21) тривиальным образом можно сопоставить коды

$$\left(k_r + l'_r,\ e^{(k_r + l'_r)\left(1-\frac{l'_r}{k_r+l'_r}\right)(C(n_0,\, t,\, E)-\varepsilon)},\ e^{-(k_r+l'_r)\left(1-\frac{l'_r}{k_r+l'_r}\right)E}\right)$$

для канала $K(ln_0, t)$, приписывая всем кодовым словам кодов (21) одну и ту же при каждом r последовательность l_r символов канала $K(n_0, t)$. Но теперь эти же коды будут при достаточно больших k_r для канала $K(ln_0, t)$ кодами

$$(c_r,\ e^{c_r\, l\,(C(n_0,\, t,\, E)-2\varepsilon)},\ e^{-c_r\, l\,(E-\varepsilon)}).$$

Это значит, что

$$C(ln_0,\ t,\ l(E-\varepsilon)) \geqslant l(C(n_0,\ t,\ E)-2\varepsilon),$$

откуда, учитывая произвольность ε и непрерывность $C(n_0, t, E)$ по E, получим (20).

б) $C(t, E)$ не зависит от t

$$C(t, E) = \bar{C}(E). \tag{22}$$

Согласно определению $C(t, E)$ $\left(C(t, E) = \sup\limits_{n_0} \frac{1}{n_0} C(n_0, t, n_0 E)\right)$ можно выбрать n_1 настолько большим, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n_1} C(n_1, t, n_1 E) > C(t, E) - \varepsilon \tag{23}$$

и

$$(C(t, E)-\varepsilon)\frac{n_1}{n_1 + 2L} > C(t, E) - 2\varepsilon. \tag{24}$$

По определению $C(n_1, t, n_1 E)$ для канала $K(n_1, t)$ при данном $\varepsilon > 0$ имеется последовательность целых чисел k_s, $s = 1, 2, \cdots$; $k_1 > k(\varepsilon)$, $k_s > k_{s-1}$ такая, что существуют коды

$$(k_s,\ e^{k_s(C(n_1,\, t,\, n_1 E)-\varepsilon)},\ e^{-k_s n_1 E}),$$

т. е., согласно (23), существуют коды

$$(k_s,\ e^{k_s(n_1(C(t,\, E)-\varepsilon)-\varepsilon)},\ e^{-k_s n_1 E}).$$

Рассмотрим канал $K(n_1 + d_1 + d_2, t')$. Согласно предположению, существуют последовательность $\bar{x}_1$ длины $d_1 \leqslant L$, переводящая состояние t' в t, и последовательность $\bar{x}_2$ длины $d_2 \leqslant L$, переводящая t в t', поэтому, если к каждому символу канала $K(n_1, t)$ приписать спереди $\bar{x}_1$ и сзади $\bar{x}_2$, получим символы канала $K(n_1 + d_1 + d_2, t')$. Таким образом, для канала $K(n_1 + d_1 + d_2, t')$ существуют коды

$$\left(k_1,\ e^{k_s (n_1+d_1+d_2)\frac{n_1 (C(t,\, E-\varepsilon)-\varepsilon)}{n_1+d_1+d_2}},\ e^{-k_s (n_1+d_1+d_2)\frac{n_1 E}{n_1+d_1+d_2}}\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{n_1+d_1+d_2}\, C\left(n_1+d_1+d_2,\ t',\ \frac{n_1 E}{n_1+d_1+d_2}\right) \geqslant \frac{n_1}{n_1+d_1+d_2}\,(C\,(t,\,E)-\varepsilon)-\varepsilon,$$

откуда, с учетом (24), ясно, что $C\,(t',\,E-\varepsilon) \geqslant C\,(t,\,E)-3\varepsilon$.

Функция $C\,(t',\,E)=\sup\limits_{n_0}\frac{1}{n_0}\,C\,(n_0,\,t',\,n_0E)$ является верхней гранью выпуклых по n_0E функций и поэтому выпукла, кроме того она ограничена, например, числом $\log M$, значит непрерывна.

Поменяв местами t и t' и проведя те же рассуждения, получим $C\,(t,\,E-0) \geqslant C\,(t',\,E)-3\varepsilon$.

Учитывая произвольность ε и непрерывность $C\,(t',\,E)$ и $C\,(t,\,E)$ по E, получим (22).

в) *Докажем теперь, что*

$$\bar{C}\,(E)=\lim_{n_0\to\infty}\frac{1}{n_0}\,C\,(n_0,\,t,\,n_0E).$$

Из (20) следует, что

$$\bar{C}(E)=\overline{\lim_{n_0\to\infty}}\,\frac{1}{n_0}\,C\,(n_0,\,t,\,n_0\,E).$$

Возьмем любую последовательность $n_1,\,n_2,\cdots,n_u,\cdots,\ n_u>n_u-1$. Покажем, что

$$\sup_u\frac{1}{n_u}\,C\,(n_u,\,t,\,n_u\,E)=\tilde{C}\,(E).$$

Для данного $\varepsilon>0$ и t' выберем n_0 таким, чтобы

$$\frac{1}{n_0}\,C\,(n_0,\,t',\,n_0\,E)\geqslant\bar{C}\,(E)-\varepsilon. \tag{25}$$

Для любого $n_u>n_0$ можно найти r_u такое, что $(r_u-1)\,n_0<n_u<r_u n_0$. Согласно (20) и (25)

$$\frac{1}{(r_u-1)\,n_0}\,C\,((r_u-1)\,n_0,\,t',\,(r_u-1)\,n_0\,E)\geqslant\bar{C}\,(E)-\varepsilon. \tag{26}$$

Возьмем некоторое входное слово $\bar{x}$ длины $n_u-(r_u-1)\,n_0$. Предположим, что оно переводит состояние t' в t. Теперь параллельно с каналом $K\,(n_u,\,t)$ можно рассмотреть канал $K\,((r_u-1)\,n_0,\,t')$. При больших k для любого $\varepsilon>0$ существуют коды

$$(k,\ e^{k\,(C\,((r_u-1)\,n_0,\,t',\,(r_u-1)\,n_0E)-\varepsilon)},\ e^{-k\,(r_u-1)\,n_0E}), \tag{27}$$

следовательно, для канала $K(n_u, t)$ существует код, кодовые слова которого получаются из кодовых слов кода (27) прибавлением после каждых $(r_u - 1)\, n_0$ символов $n_u - (r_u - 1)$ символов $\bar{x}$. Этот код будет иметь параметры

$$\left(k,\ e^{k\,(C\,((r_u-1)\,n_0,\ t',\ (r_u-1)\,n_0 E)-\varepsilon)},\ e^{-kn_u\,\frac{(r_u-1)\,n_0 E}{n_u}}\right).$$

Следовательно

$$C\left(n_u,\ t,\ n_u\left(1-\frac{1}{r_u}\right)E\right) \geqslant C\,((r_u-1)\,n_0,\ t',\ (r_u-1)\,n_0 E)-\varepsilon,$$

и из (27)

$$C\left(n_u,\ t,\ n_u\left(1-\frac{1}{r_u}\right)E\right) > (r_u-1)\,n_0\,(\bar{C}(E)-\varepsilon)-\varepsilon,$$

или

$$\frac{1}{n_u}\,C\left(n_u,\ t,\ n_u\left(1-\frac{1}{r_u}\right)E\right) > \frac{(r_u-1)\,n_0}{n_u}\,(\bar{C}(E)-\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{n_u} >$$

$$\geqslant\left(1-\frac{1}{r_u}\right)(\bar{C}(E)-2\varepsilon).$$

При $n_u \to \infty$ имеем $r_u \to \infty$, и вследствие непрерывности

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{n_u}\,C\,(n_u,\ t,\ n_u E) > \tilde{C}(E)-2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε следует в).

д) Для доказательства (10) нам остается показать, что

$$C(E) = \bar{C}(E). \tag{28}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ согласно (2) существует последовательность n_r, $r = 1, 2, \cdots$, $n_r > n_{r-1}$ такая, что для канала K

$$e^{n_r\,(C\,(E)-\varepsilon)} \leqslant S\,(n_r,\ E). \tag{29}$$

Сопоставим следующим образом каждому коду для канала K код для канала $K(n_0 + 2L,\ t)$. Предположим, что $n_r = n_0 l + n'$, $0 < n' \leqslant n_0$. Тогда каждое кодовое слово кода для канала K, скажем $\bar{x}_s$, разобьем на $l+1$ частей, из которых l одинаковой длины n_0 символов, и последняя — длины n'. Этому слову $\bar{x}_s$ сопоставим кодовое слово длины $l+1$ для канала $K(n_0+2L,\ t)$. Перед каждой частью припишем L символов, переводящих состояние t в состояние, которым начинается данная часть. После каждой части, включая l-ую, добавим L символов, переводящих состояние, которым оканчивается данная часть, в состояние t. После $l+1$ части припишем $n_0 + L - n'$ символов, переводящих состояние, которым оканчивается $l+1$-ая часть, в состояние t. Множествам декодирования A_s кода для канала K сопоставим множества декодирования для канала $K(n_0 + 2L,\ t)$ так, что новое множество включает все выходные слова канала $K\,(n_0 + 2L,\ t)$, которые получаются добавлением к выходным словам из A на тех местах, где к $\overline{x}_s$ были добавлены символы всевозможных выходных символов канала K. Таким образом, получим код длины $l+1$ для канала $K(n_0+2L, t)$, имеющий тот же объем и ту же вероятность ошибки, что и исходный код длины n_r для канала K. Это значит, что

$$S(n_r, E) \leqslant S\left(n_0+2L, t, l+1, \frac{n_0 l + n'}{l+1} E\right).$$

Выбрав сначала достаточно большое n_0, затем достаточно большое l, учитывая (7), (22), (29), определение и непрерывность $\tilde{C}(E)$ и произвольность ε, получим $C(E) \leqslant \tilde{C}(E)$.

Для установления обратного неравенства заметим, что любой код длины l для канала $K(n_0, t)$ можно рассматривать как код для канала K длины ln_0 с тем же объемом и с той же вероятностью ошибки. Следовательно, $S(ln_0, E) \geqslant S(n_0, t, l, n_0 E)$.

Учитывая снова (2), (7), (22), получим $C(E) \geqslant \tilde{C}(E)$.

е) Первая часть теоремы доказана. Неравенства (11) очевидны. Для доказательства (12) остается выяснить (13). Функции $C^+(n_0, t, E)$ выпуклые по E, следовательно $C^+(E)$, будучи верхним пределом выпуклых функций, также выпуклая. Известно, что при сходимости выпуклых функций сходятся также их первые производные (там, где они существуют у предельной функции). Учитывая (5) и (14), имеем

$$E_{\text{крит}}(n_0, t) = \sup\left\{E: \frac{dC^+(n_0, t, E)}{dE} < -1\right\}$$

и, следовательно, $E_{\text{крит}}$ существует и равно

$$E_{\text{крит}} = \sup\left\{E: \frac{dC^+(E)}{dE} < -1\right\}.$$

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 5.VI.1968

Ե. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Վերջավոր թվով մուտքում ճայտնի վիճակ ունեցող կապի գծի միջոցով ինֆորմացիայի հաղորդման օպտիմալության մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում է դիսկրետ վերջավոր թվով ներքին վիճակ ունեցող կապի գծերի դասը, որը ընդգրկում է նաև վերջավոր հիշողություն ունեցող կապի գծերի դասը։ Ուսումնասիրվում է հաղորդման ասիմպտոտիկորեն մաքսիմալ արագությունը $C(E)$ *սխալի հավանականության տված* e^{-nE} *նվազման դեպքում (*n*-ը հաղորդման երկարությունն է)։ Կառուցվում են* $C(E)$*-ի վերին ու ներքին գնահատականները, երբ* $0 < E < \infty$*, որոնք համընկնում են, երբ* $0 < E < E_{\text{крит}}$*։*

E. A. HAROUTUNIAN. *On optimality of information transmission over a finite-state channel with state calculable by the sender* (summary)

The class of channels with finite number of interior states, including the class of channels with finite memory, is considered. The assymptotically maximal rate of transmission $C(E)$ for a given decrease of error probability e^{-nE} (n is the duration transmission) is studied. The upper and lower bounds for $C(E)$ which coincide wh $0 < E < E_{крит}$ are constructed for $0 < E < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Э. Шеннон.* Некоторые результаты теории кодирования для каналов с шумам В сборнике Шеннон К. Э., Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ М., 1963, 509—531.
2. *Дж. Вольфовиц.* Теоремы кодирования теории информации, „Мир", М., 1967.
3. *Р. Л. Добрушин.* Математические вопросы шенноновской теории оптимального к дирования информации, В сборнике Проблемы передачи информации, АН СССР № 10, 1961, 63—107.
4. *К. Э. Шеннон.* Пропускная способность канала с шумом при нулевой ошибке, сборнике Шеннон К. Э., Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ М., 1963, 464—488.
5. *Р. Л. Добрушин.* Асимптотические оценки вероятности ошибки при передаче сооб щения по дискретному каналу связи без памяти с симметрической матрице вероятностей перехода, Теория вероятностей и ее применения, 1962, 7, 3, 283-311.
6. *Р. Г. Галлагер.* Простой вывод теоремы кодирования и некоторые применения Киберн. сборник, вып. 3, 1966.
7. *C. E. Shannon, R. G. Gallager, E. R. Berbkamp.* Lower Bounds to the Error Pro bability for Coding on Discrete Memoryless Channels I, Information and Contro 10, 1, 1967, 65—103.
8. *Е. А. Арутюнян.* Оценки экспоненты вероятности ошибки для полунепрерывного канала без памяти, Проблемы передачи информации, № 4, 1968.
9. *Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, ГИИЛ, М., 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

Э. В. МОРОЗЮК

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ Р. ЛАГРАНЖА

Статья посвящена распространению некоторых классических теорем анализа на ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}, \tag{1}$$

где $|\lambda_k| \to \infty$ и $|\mu_k| \to \infty$ при $k \to \infty$.

Ряды (1) изучались Р. Лагранжем [1], а затем Г. В. Бадаляном [2]. Следуя Г. В. Бадаляну, мы будем называть их рядами Р. Лагранжа.

Нетрудно проверить, что если сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\mu_k|}$, то ряд (1) сходится на всей плоскости, кроме точек $z=-\mu_k$, $k=1, 2, \cdots$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что хотя бы один из этих рядов расходится.

И Р. Лагранж, и Г. В. Бадалян предполагали, что все λ_k лежат на одном луче, а все μ_k—на другом. Мы положим, что λ_k и μ_k находятся внутри угла раствора, меньшего π. Не уменьшая общности, можно считать, что вершина этого угла лежит в начале координат, а ось симметрии совпадает с положительной частью вещественной оси. Тогда $|\arg\lambda_k| \leqslant \psi_0$, $|\arg \mu_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Удобно ввести следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (β), если

1) $|\lambda_k| \to \infty$ и $|\mu_k| \to \infty$ при $k \to \infty$;

2) $|\arg \lambda_k| < \psi_0$, $|\arg \mu_k| \leqslant \psi_0$, где $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$;

3) по крайней мере один из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|} \text{ расходится.}$$

Отметим, что в условиях (β) не содержится требования монотонности возрастания $|\lambda_k|$ и $|\mu_k|$.

Определение 2. Пусть последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (β), а z_0—некоторая точка плоскости. Тогда $G(z_0, \delta, R, \rho)$ мы будем называть сектор

$$|z - z_0| \leqslant R, \ |\arg(z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \delta,$$

где $R > 0$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \psi_0$,

с выброшенными из него достаточно малыми окрестностями $|z - \mu_k| < \rho$, $\rho > 0$ точек μ_k, попавших в этот сектор.

Для рядов Р. Лагранжа имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательности* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ *удовлетворяют условиям* (β) *и ряд* (1) *сходится в точке* z_0, *отличной от* λ_k, $k = 1, 2, \cdots$. *Тогда он равномерно сходится в любой области* $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Доказательство. Ряд (1) сходится в точке z_0, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_0 такой, что при $n > N_0$ остатки

$$|R_n| = \left| \sum_{q=n+1}^{\infty} a_q \frac{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(1 - \frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(1 + \frac{z_0}{\mu_k}\right)} \right| < \varepsilon.$$

Пусть $K = \max\{N_0, K_0\}$, где K_0 будет определено ниже.

Применив к отрезку ряда (1) преобразование Абеля при $N > K$, $M > K$, получим

$$|T_{N,M}(z)| = \left| \sum_{n=N}^{M} a_n \prod_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z + \mu_k} \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=N}^{M} R_n \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} \right) + \right.$$

$$\left. + R_{N-1} \prod_{k=1}^{N} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{N} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - R_M \prod_{k=1}^{M+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{M+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left(\sum_{n=N}^{M} \left| \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} \right| + \right.$$

$$\left. + \prod_{k=1}^{N} \left| \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \right| \prod_{k=1}^{N} \left| \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} \right| + \prod_{k=1}^{M+1} \left| \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \right| \cdot \prod_{k=1}^{M+1} \left| \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} \right| \right).$$

Оценим дробь $\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}$, если z принадлежит $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Пусть числам 0, $z_0 + \mu_k$, $z + \mu_k$ соответствуют точки O, A_k, B_k. Рассмотрим ΔOA_kB_k. Очевидно

$$A_kB_k = |z - z_0|, \ OA_k = |z_0 + \mu_k|, \ OB_k = |z + \mu_k|.$$

По условию

$$|\arg (z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \delta, \quad |\arg \lambda_k| < \psi_0.$$

Можно указать такой номер K_1, что при всех $k > K_1$ выполняется неравенство

$$|\arg (z_0 + \mu_k)| < \psi_0 + \frac{\delta}{2}.$$

Пусть OB_k' — проекция отрезка OB_k на направление OA_k. Тогда

$$\angle B_k A_k B_k' < |\arg (z - z_0)| + |\arg (z_0 + \mu_k)| < \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$OB_k > OB_k' > OA_k + A_k B_k \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)$$

или

$$|\mu_k + z| > |\mu_k + z_0| + |z - z_0| \sin \frac{\delta}{2},$$

или

$$\left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < 1 - \frac{|z - z_0|}{|\mu_k + z|} \sin \frac{\delta}{2}$$

для всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ и всех $k > K_1$.

Аналогично оценивается дробь

$$\left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| < 1 - \frac{|z - z_0|}{|\lambda_k - z_0|} \sin \frac{\delta}{2}$$

для всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ и всех $k > K_2$.

Выберем $K_0 = \max\{K_1, K_2\}$. При $k > K_0$ и всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ дроби

$$\left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < 1 \quad \text{и} \quad \left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| < 1$$

и, следовательно, произведение

$$\prod_{k=1}^{N} \left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| \prod_{k=1}^{N} \left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < \prod_{k=1}^{K_0} \left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| \cdot \prod_{k=1}^{K_0} \left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < c, \tag{2}$$

где c — постоянная, не зависящая от N, $N > K_0$, и z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Перейдем к оценке суммы

$$H_{N,M}(z) = \sum_{n=N}^{M} \left|\prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{n=N}^{M} \left(\prod_{k=K_0+1}^{n} \left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - z_0}\right| \cdot \left|\frac{\mu_k + z_0}{\mu_k + z}\right| \frac{|z - z_0| \cdot |\lambda_{n+1} + \mu_{n+1}|}{|\lambda_{n+1} - z_0| \cdot |\mu_{n+1} + z|}\right).$$

Обозначим

$$\sum_{k=K_0+1}^{n} \left[\left(1 - \frac{|z - z_0| \sin \frac{\delta}{2}}{|\lambda_k - z_0|}\right)\left(1 - \frac{|z - z_0| \sin \frac{\delta}{2}}{|\mu_k + z|}\right)\right] = P_n(z).$$

Очевидно $P_n(z) < 1$ для всех $n > K_0$ и всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$. Тогда получим

$$H_{N,M}(z) \leqslant c \sum_{n=N}^{M} P_n(z) \frac{|z-z_0|\,|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\lambda_{n+1}-z_0|\,|\mu_{n+1}+z|} =$$

$$= \frac{c}{\sin\frac{\delta}{2}} \sum_{n=N}^{M} \left[P_n(z) \left(\frac{|z-z_0|}{|\lambda_{n+1}-z_0|} \sin\frac{\delta}{2} + \frac{|z-z_0|}{|\mu_{n+1}+z|} \sin\frac{\delta}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{|z-z_0|^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}{|\lambda_{n+1}-z_0|\,|\mu_{n+1}+z|} \right) \frac{|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|-|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}} \right] =$$

$$= \frac{c}{\sin\frac{\delta}{2}} \sum_{n=N}^{M} [P_n(z) - P_{n+1}(z)] \frac{|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|-|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Выражение

$$\frac{|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|-|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\lambda_{n+1}-z_0|+|\mu_{n+1}+z|+|z-z_0|}{\frac{1}{2}(|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|)} =$$

$$= 2 + \frac{2|z-z_0|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|} < d,$$

где постоянная d не зависит от n и z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Поэтому

$$H_{N,M}(z) \leqslant \frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}} \sum_{n=N}^{M} [P_n(z) - P_{n+1}(z)] =$$

$$= \frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}} [P_N(z) - P_{M+1}(z)] \leqslant \frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}}. \qquad (3)$$

Окончательно имеем

$$|T_{N,M}(z)| \leqslant \varepsilon \left(2c + \frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}} \right).$$

Теорема доказана.

Нетрудно получить несколько следствий теоремы 1.

Понятно, что вследствие непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из теоремы 1 вытекает вторая теорема Абеля в том виде, как ее обычно формулируют, то есть справедливо

Следствие 1 (аналог второй теоремы Абеля). Если выполняются условия теоремы 1, то

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)}$$

при $z \to z_0$ по путям, лежащим в $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Благодаря произвольности δ, R и ρ получаем некоторую информацию об области сходимости ряда (1), следующую из его сходимости в одной точке.

Следствие 2 (аналог первой теоремы Абеля). Если выполняются условия теоремы 1, то ряд (1) сходится по крайней мере в угле

$$|\arg (z - z_0)| < \frac{\pi}{2} - \psi_0$$

с выброшенными точками $z = -\mu_k$, $k = 1, 2, \cdots$, попавшими в этот угол.

Следствие 3. Если ряд (1) расходится в точке z_1, причем последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (β), то он расходится по крайней мере в угле

$$|\arg (z - z_0) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \psi_0,$$

за исключением попавших в него точек λ_k, $k = 1, 2, \cdots$.

Третье следствие легко доказывается от противного.

Вторая теорема Абеля для рядов Р. Лагранжа при определенных условиях на порядок a_n при $n \to \infty$ имеет обращение, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Таубера). *Пусть последовательности* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ *удовлетворяют условиям* (β) *и*

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} = S$$

при $z \to z_0$ *по некоторому пути, лежащему в* $G(z_0, \delta, R, \rho)$. *Если при* $n \to \infty$

$$\left| a_n \frac{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}} \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)} \right| = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

то ряд (1) *сходится в точке* z_0 *и сумма его равна* S.

Доказательство. Положим $N=\left[\dfrac{1}{|z-z_0|}\right]$ и покажем, что при $z\to z_0$ стремится к нулю

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{z}{\mu_k}\right)}-\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{z_0}{\mu_k}\right)}=S_1(z)-S_2(z),$$

где

$$S_1(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{z}{\mu_k}\right)}$$

и

$$S_2(z)=\sum_{n=1}^{N}a_n\left[\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{z_0}{\mu_k}\right)}-\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{z}{\mu_k}\right)}\right].$$

Оценим слагаемое $S_1(z)$.

При достаточно больших n из (4) следует, что

$$\left|a_n\frac{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{z_0}{\mu_k}\right)}n\right|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Будем считать z настолько близким к z_0, что для $N+1$ это неравенство выполняется. Тогда

$$|S_1(z)|<\varepsilon\frac{1}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\dfrac{z}{\lambda_k}}{1-\dfrac{z_0}{\lambda_k}}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\dfrac{z_0}{\mu_k}}{1+\dfrac{z}{\mu_k}}\frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right|\cdot|z-z_0|\left|\frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}\right|=$$

$$=\varepsilon\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\prod_{k=1}^{n+1}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right|\times$$

$$\times\frac{|(z_0-\lambda_{n+1})(z+\mu_{n+1})|}{|\lambda_{n+1}\mu_{n+1}|}\leqslant\varepsilon h\frac{cd}{\sin\dfrac{\delta}{2}},\qquad(5)$$

где неравенство

$$\frac{1}{N+1} < |z - z_0|$$

следует из определения N; неравенство

$$\left|\frac{(z_0 - \lambda_{n+1})(z + \mu_{n+1})}{\lambda_{n+1}\ \mu_{n+1}}\right| = \left|1 - \frac{z_0}{\lambda_{n+1}}\right| \cdot \left|1 + \frac{z}{\mu_{n+1}}\right| < h$$

очевидно, причем h не зависит от z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ и n; кроме того, в оценке (5) использовано неравенство (3), справедливость которого установлена при доказательстве теоремы 1; там же введены постоянные c и d.

Итак

$$S_1(z) \to 0 \text{ при } z \to z_0.$$

Перейдем к оценке второго слагаемого

$$|S_2(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left[\left| a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{z_0}{\mu_k}\right)} \frac{\lambda_{n+1}\ \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1} + \mu_{n+1}}\, n \right| \cdot \frac{1}{n} \left| 1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} \right| \cdot \left| \frac{\lambda_{n+1} + \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ \mu_{n+1}} \right| \right].$$

Дробь $\left|\frac{\lambda_{n+1} + \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ \mu_{n+1}}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$\left|\frac{\lambda_{n+1} + \mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ \mu_{n+1}}\right| < p = \text{const}.$$

Преобразуем множитель

$$\frac{1}{n}\left|1 - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| = P_1(z, n)\, P_2(z, n),$$

где

$$P_1(z, n) = \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right)^{\frac{j-1}{n}}\right|$$

и

$$P_2(z, n) = \left| 1 - \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right)^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right)^{\frac{1}{n}} \right|.$$

Множитель

$$P_1(z, n) \leqslant g_1$$

как среднее арифметическое слагаемых, модули которых не превышают g_1, причем $g_1 = \max\{1, c\}$; постоянная c введена в неравенстве (2).

Нетрудно показать, что

$$P_2(z, n) \leqslant g_2\, |z - z_0|,$$

g_2 не зависит от n и z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

В результате получаем

$$\frac{1}{n}\left|1-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right|<g\,|z-z_0|,$$

где $g=g_1g_2$.

Из определения N следует, что $|z-z_0|\leqslant\frac{1}{N}$.

Поэтому для $S_2(z)$ окончательно имеем

$$|S_2(z)|\leqslant pg\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)}\ \frac{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}\,n\right|\to 0$$

при $N\to\infty$, то есть при $z\to z_0$, по известной лемме [3], как среднее арифметическое слагаемых, стремящихся к нулю. Теорема доказана.

По своим свойствам ряд Р. Лагранжа близок к рядам Ньютона

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{6}$$

и факториальному

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}. \tag{7}$$

Существует связь между областями равномерной сходимости рядов (1) и (6), а также (1) и (7). Приведем одну из теорем такого типа.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{\mu_k\}$ *такова, что* $|\mu_k|\to\infty$ *при* $k\to\infty$ *и* $|\arg\mu_k|\leqslant\psi_0<\frac{\pi}{2}$, *а ряд Ньютона* (6) *равномерно сходится в конечной области* G, *не содержащей сколь угодно малой окрестности* $z=0$; *все точки области* G *удовлетворяют неравенству*

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\psi_0-\delta,\ 0<\delta<\frac{\pi}{2}-\psi_0.$$

Тогда ряд Р. Лагранжа (1) *сходится равномерно в той же области.*

Доказательство. При $n>N_0$ для всех z из G

$$|R_n(z)|=\left|\sum_{q=n+1}^{\infty}a_q\prod_{k=1}^{q}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\right|<\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

К отрезку ряда (1) применим преобразование Абеля, $N>N_0$, $M>N_0$.

$$|T_{M,N}(z)|=\left|\sum_{n=N}^{M}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} + \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{M+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} + \sum_{n=N}^{M}\left| \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} \right| \right].$$

Аргумент $\left|\arg\frac{z}{\mu_k}\right| < \frac{\pi}{2} - \delta$, значит $\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right| > 1$, а дробь $\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} < 1$ для всех z из G и всех n и монотонно убывает с ростом n. Поэтому выражение

$$\sum_{n=N}^{M}\left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} \right) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{M+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} < 1$$

для всех z из G и любых N и M.

Покажем, что

$$\left| \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} \right| < \gamma \left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|} \right),$$

где γ — положительная постоянная, не зависящая от z из G и n. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{|\mu_k + z| - |\mu_k|}{|z|} > \frac{1}{\gamma} > 0 \quad (k = n+1).$$

Так как область G конечна, то $\frac{1}{|z|} > \gamma_1 = \text{const}$.

Рассмотрим

$$|\mu_k + z| - |\mu_k| =$$

$$= \frac{2\, Re\, \mu_k\, Re\, z + 2\, Im\, \mu_k\, Im\, z + |z|}{\sqrt{(Re\, \mu_k + Re\, z)^2 + (Im\, \mu_k + Im\, z)^2} + \sqrt{(Re\, \mu_k)^2 + (Im\, \mu_k)^2}}.$$

По условию теоремы

$$|Im\, \mu_k| < Re\, \mu_k \operatorname{tg} \psi_0,\ Re\, z > 0 \text{ и } |Im\, z| < Re\, z \operatorname{ctg}(\psi_0 + \delta).$$

Поэтому

$$|\mu_k + z| - |\mu_k| >$$

$$> \frac{2 Re\, \mu_k\, Re\, z - 2\, Re\, \mu_k \operatorname{tg}\psi_0\, Re\, z \operatorname{ctg}(\psi_0 + \delta)}{\sqrt{(Re\, \mu_k + Re\, z)^2 + [Re\, \mu_k \operatorname{tg}\psi_0 + Re\, z \operatorname{ctg}(\psi_0+\delta)]^2} + \sqrt{(Re\mu_k)^2(1+\operatorname{tg}^2\psi_0)}} =$$

$$= \frac{2\, Re\, z \left| 1 - \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0 + \delta)} \right|}{\sqrt{\left(1 + \frac{Re\, z}{Re\, \mu_k}\right)^2 + \left[\operatorname{tg} \psi_0 + \frac{Re\, z \operatorname{ctg}(\psi_0 + \delta)}{Re\, \mu_k}\right]^2} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_0}} > \gamma_2,$$

где γ_2 — постоянная, не зависящая от z из G и k, так как последняя дробь равномерно по z из G стремится к положительному пределу, равному

$$\frac{Re\, z \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0 + \delta)} \right]}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_0}} > \frac{\eta \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0 + \delta)} \right]}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_0}} > 0,$$

причем $Re\, z > \eta > 0$ согласно условиям теоремы.

Значит

$$|T_{N, M}(z)| < \varepsilon\, (2 + \gamma),$$

где $\gamma = \dfrac{1}{\gamma_1 \gamma_2}$.

Теорема доказана.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору М. Г. Хапланову за внимание к работе.

Ростовский—на Дону
государственный университет

Поступило 2.XII.1967.

Է. Վ. ՄՈՐՈԶՅՈՒԿ. Ռ. Լագրանժի շարքերի որոշ հատկությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում դիտարկված են

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{z}{\mu_k}\right)}$$

Ռ. Լագրանժի շարքերը հետևյալ պայմանների դեպքում՝

1. $|\lambda_k| \to \infty, \ |\mu_k| \to \infty$ *երբ* $k \to \infty$.

2. $|\arg \lambda_k| < \psi_0, \ |\arg \mu_k| < \psi_0,$ *որտեղ* $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.

3. $\sum \frac{1}{|\lambda_k|}$ *և* $\sum \frac{1}{|\mu_k|}$ *շարքերից թեկուզ մեկը տարամետ է։*

Այդ շարքերի վրա տարածված են Աբելի առաջին և երկրորդ թեորեմները, Տաուբերի թեորեման. կապ է հաստատված Ռ. Լագրանժի և Նյուտոնի շարքերի հավասարաչափ -զուգամիտության որոշ տիրույթների միջև։

E. V. MOROSUK. *Some properties of Lagrange series* (summary)

The Lagrange series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{z}{\mu_k}\right)}$$

subject to the conditions

1) $|\lambda_k| \to \infty$, $|\mu_k| \to \infty$ when $k \to \infty$;

2) $|\arg \lambda_k| < \psi_0$, $|\arg \mu_k| < \psi_0$, where $0 < \psi_0 < \dfrac{\pi}{2}$;

3) at last one of the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_k|}$ or $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\mu_k|}$ diverges are studied. The first and the second Abel's theorems and Tauber's theorem are extended on these series. An interrelation between some domains of uniform convergence of Lagrange and Newton series is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Lagrange.* Mémoire sur les séries d'interpolation, Acta Mathematica, vol. 64.
2. *Г. В. Бадалян.* Обобщенные факториальные ряды, Сообщения института математики и механики Академии наук Армянской ССР, вып. 5, 1950.
3. *E. Титчмарш.* Теория функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

ПОСТРОЕНИЕ ПОРОЖДАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА И ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ В КЛАССЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе исследуется однородная задача Дирихле для уравнения колебания стручы

$$(1+\lambda)\,u_{xx}-(1-\lambda)\,u_{yy}=0, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma}=0 \tag{2}$$

в выпуклой области D с кусочно гладкой границей Γ, где λ — действительный параметр с модулем, меньшим единицы.

Основные результаты этой работы без доказательств опубликованы в заметке [1].

В связи с необходимостью рассмотрения обобщенных решений задачи (1), (2) в классе измеримых функций, в работе [1] было дано следующее определение обобщенного решения, представляющее собой естественное обобщение принадлежащего Р. А. Александряну понятия обобщенной собственной функции [2, 3].

Определение. *Измеримая функция* $u_\lambda(x, y)$ *называется обобщенным решением задачи* (1), (2), *если она представима в виде суммы двух измеримых в* D *функций*

$$u_\lambda(x, y)=f_\lambda(x, y)+g_\lambda(x, y),$$

где $f_\lambda(x, y)$ *постоянна почти на всех характеристиках первого семейства, а* $g_\lambda(x, y)$ — *почти на всех характеристиках второго семейства характеристик уравнения* (1), *и если на границе* Γ $u_\lambda(x, y)$ *почти везде равна нулю.*

Если при $\lambda=\lambda_0$ *существует нетривиальное обобщенное решение* $u_{\lambda_0}(x, y)$ *задачи* (1), (2), *то* λ_0 *называется обобщенным собственным значением* (ОСЗ), *а* $u_{\lambda_0}(x, y)$ — *обобщенной собственной функцией* (ОСФ) *этой задачи.*

В случае выпуклых областей Р. А. Александряном [3] построено порождающее множество граничных точек для класса кусочно непрерывных функций и доказано, что любая ОСФ из этого класса представляет собой предел линейных комбинаций так называемых элементарных ОСФ, принимающих лишь три значения 0 и ± 1 и соответствующих тому же ОСЗ.

В работе [4] эти же результаты были доказаны для случая невыпуклых и даже многосвязных областей.

В настоящей работе для выпуклых областей удается построить порождающее множество граничных точек уже для класса измеримых функций.

Оказывается, что построенное порождающее множество не уже соответствующего порождающего множества для класса кусочно непрерывных функций и может совпадать с ним лишь для частного вида областей. Именно в этих исключительных случаях можно обойтись лишь кусочно непрерывными ОСФ. В общем же случае не всякая ОСФ из $L_p(D)$ $(p>0)$ может быть приближена в $L_p(D)$ кусочно непрерывными ОСФ.

Вместе с тем оказывается, что указанные Р. А. Александряном элементарные ОСФ, рассматриваемые уже в более широком классе функций и поэтому необязательно кусочно постоянные, но имеющие ту же простую структуру (принимающие лишь три значения $0, \pm 1$), образуют полную систему в том смысле, что любая ОСФ из $L_p(D)$ есть предел в метрике $L_p(D)$ конечных линейных комбинаций элементарных ОСФ.

Напомним определение специальных автоморфизмов S_λ^+, S_λ^- границы Γ, которые впервые были привлечены к исследованию задач на собственные значения Р. А. Александряном в работах [2, 3, 5].

Будем считать область D допустимой, т. е. такой, что при всех рассматриваемых λ характеристики уравнения (1) пересекают ее границу не более, чем в двух точках.

Автоморфизм S_λ^+ (соответственно S_λ^-) относит каждой точке $\theta \in \Gamma$ точку пересечения с границей Γ характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через θ. При этом, если проходящая через θ характеристика не пересекает границы в другой точке, то образом точки θ при соответствующем отображении считается сама θ.

Будем говорить, что отображение S_λ^+ (S_λ^-) абсолютно непрерывно, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого множества e граничных точек из $\operatorname{mes} e<\delta$ *следует* $\operatorname{mes} S_\lambda^+ e<\varepsilon$ $(\operatorname{mes} S_\lambda^- e<\varepsilon)$.

§ 1. Построение порождающего множества граничных точек для класса измеримых функций

В дальнейшем рассматриваются лишь такие допустимые области, для которых автоморфизмы S_λ^+ и S_λ^-, следовательно $S_\lambda = S_\lambda^- S_\lambda^+$ являются абсолютно непрерывными (например, области с кусочно гладкими границами).

Множество точек $\mathfrak{M}_\lambda(\theta) = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^k \theta$ называется циклом точки $\theta \in \Gamma$ относительно автоморфизма S_λ (S_λ^{-k} означает k-ую итерацию обратного отображения S_λ^{-1}).

Множество точек $M_\lambda(\theta) = \mathfrak{M}_\lambda(\theta) \cup \mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^- \theta)$ *называется циклом точки* θ *относительно автоморфизмов* S_λ^+ *и* S_λ^-.

Множество $E \subset \Gamma$ *назовем инвариантным относительно* S_λ^+ *и* S_λ^-, *если* $S_\lambda^+ E = E$ *и* $S_\lambda^- E = E$.

Лемма 1. *Множество* $M_\lambda(\theta)$, *а также его замыкание* $\overline{M_\lambda(\theta)}$, *инвариантны относительно* S_λ^+ *и* S_λ^- *для любой точки* $\theta \in \Gamma$.

Доказательство. Инвариантность множества $M_\lambda(\theta)$ непосредственно вытекает из его определения.

Пусть $\theta^* \in \overline{M_\lambda(\theta)}$, тогда существует последовательность точек $\theta_n \in M_\lambda(\theta)$ такая, что $\theta_n \to \theta^*$. В силу непрерывности автоморфизма S_λ^+ $S_\lambda^+\theta_n \to S_\lambda^+\theta^*$. Но $S_\lambda^+\theta_n \in M_\lambda(\theta)$, следовательно $S_\lambda^+\theta^* \in \overline{M_\lambda(\theta)}$, т. е. $S_\lambda^+ \overline{M_\lambda(\theta)} \subset \overline{M_\lambda(\theta)}$. Учитывая, что $(S_\lambda^+)^{-1} = S_\lambda^-$, получим $S_\lambda^+ \overline{M_\lambda(\theta)} = \overline{M_\lambda(\theta)}$.

Совершенно так же убеждаемся в инвариантности множества $\overline{M_\lambda(\theta)}$ относительно S_λ^-.

Точка $\theta \in \Gamma$ *называется периодической точкой автоморфизма* S_λ, *или* λ*-периодической, если множество* $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ *состоит из конечного числа точек, при этом число точек этого множества называется периодом точки* θ.

Значение $\lambda \in (-1, 1)$ *назовем неэргодическим, если число вращения Пуанкаре* [6] *автоморфизма* S_λ *рационально.*

Поскольку S_λ является сохраняющим ориентацию непрерывным отображением замкнутой кривой Γ на себя, то, как показал Пуанкаре [6], в случае неэргодического значения λ существует целое число r такое, что отображение S_λ^r имеет неподвижную точку θ, т. е. $S_\lambda^r\theta = \theta$. А это означает, что θ является периодической точкой автоморфизма S_λ.

Таким образом, для неэргодического значения λ множество $A(\lambda, \Gamma)$ периодических точек автоморфизма S_λ границы Γ не пусто.

Лемма 2. *Пусть* λ *— неэргодическое значение. Тогда для любой точки* $\theta \in \Gamma$ *множество* $\overline{M_\lambda(\theta)}$ *имеет меру нуль и содержит конечное число* λ*-периодических точек, причем все предельные точки этого множества* λ*-периодические.*

Доказательство. Известно, что множество всех λ-периодических точек $A(\lambda, \Gamma)$ замкнуто и все точки из $A(\lambda, \Gamma)$ имеют один и тот же период.

Рассмотрим дополнение этого множества на Γ, которое состоит из не более чем счетного числа интервалов, т. е.

$$CA(\lambda, \Gamma) = \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Очевидно множество $A(\lambda, \Gamma)$ инвариантно относительно S_λ, следовательно его дополнение тоже инвариантно относительно S_λ. Концы интервалов (a_i, b_i) принадлежат инвариантному относительно S_λ множеству, поэтому образ любого интервала (a_i, b_i) из $CA(\lambda, \Gamma)$ при отображении S_λ совпадает с некоторым интервалом из $CA(\lambda, \Gamma)$, в частности $S_\lambda^r(a_i, b_i) = (a_i, b_i)$, где r — период λ-периодических точек.

Если θ является λ-периодической точкой, то, очевидно, $S_\lambda^+\theta$ также является λ-периодической, следовательно $M_\lambda(\theta)$ состоит из конечного числа λ-периодических точек, т. е. в этом случае утверждения леммы очевидны.

Пусть θ не является λ-периодической точкой, тогда она принадлежит некоторому интервалу (a, b) из $CA(\lambda, \Gamma)$, и, поскольку S_λ сохраняет ориентацию, то точки $S_\lambda^{rn+k}\theta$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ образуют монотонную последовательность на интервале $S_\lambda^k(a, b)$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, и, стало быть, эта последовательность имеет лишь одну предельную точку θ_k^*, принадлежащую замыканию интервала $S_\lambda^k(a, b)$.

Таким образом, в силу непрерывности отображения S_λ^r, будем иметь

$$S_\lambda^r\theta_k^* = \lim_{n\to\infty} S_\lambda^r S_\lambda^{nr+k}\theta = \lim_{n\to\infty} S_\lambda^{(n+1)r+k}\theta = \theta_k^*,$$

т. е. θ_k^* является λ-периодической точкой. Но $S_\lambda^k[a, b]$ имеет только две λ-периодические точки $S_\lambda^k a$ и $S_\lambda^k b$, следовательно θ_k^* совпадает с одной из этих точек.

Аналогичным образом убеждаемся, что монотонная последовательность $S_\lambda^{-rn+k}\theta$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ стремится к другому концу интервала $S_\lambda^k(a, b)$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, т. е. множество $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ имеет всего $2r$ предельных точек, которые λ-периодические.

Поскольку $S_\lambda^+\theta$ не является λ-периодической, то совершенно так же множество $\mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^+\theta)$ имеет $2r$ предельных точек $S_\lambda^k S^+ a$ и $S_\lambda^k S_\lambda^+ b$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, которые λ-периодические.

Таким образом, множество $\overline{M_\lambda(\theta)}$ получается из счетного множества $M_\lambda(\theta)$ присоединением конечного числа λ-периодических точек, следовательно $\operatorname{mes}\overline{M_\lambda(\theta)} = 0$ и лемма доказана.

Заданная на Γ *измеримая функция* $f(s)$ *называется инвариантной относительно автоморфизмов* S_λ^+ *и* S_λ^-, *если для почти всех* $\theta\in\Gamma$

$$f(\theta) = f(S_\lambda^+\theta) = f(S_\lambda^-\theta). \tag{3}$$

Лемма 3. *Для того чтобы* λ *было ОСЗ задачи* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы либо существовала отличная от константы инвариантная относительно* S_λ^+ и S_λ^- *измеримая функция* $f(s)$, *либо существовало инвариантное относительно* S_λ^+ *и* S_λ^- *подмножество* $Q\subset\Gamma$ *такое, что* $\operatorname{mes}\Gamma > \operatorname{mes} Q > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$ ОСФ задачи (1), (2), а $f_\lambda(s)$ и $g_\lambda(s)$ — функции на Γ, совпадающие соответственно с граничными значениями функций $f_\lambda(x, y)$ и $g_\lambda(x, y)$. Покажем, что $f_\lambda(s)$ и $g_\lambda(s)$ являются инвариантными относительно S_λ^+ и S_λ^- функциями. В самом деле, из определения обобщенного решения и из абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^- нетрудно заключить, что существует инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- и имеющее полную меру подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$, на котором $u_\lambda(x, y) = 0$, т. е. $g_\lambda(s) = -f_\lambda(s)$, и, кроме того, функции $f_\lambda(x, y)$ и $g_\lambda(x, y)$ постоянны на всех характеристиках соответствующих семейств, проходящих через точки множества Γ_0.

Из сказанного следует, что если $\theta \in \Gamma_0$ и $f_\lambda(\theta) = a$, то $f_\lambda(S_\lambda^+\theta) = a$ и $g_\lambda(\theta) = -a$. Отсюда вытекает, что $g_\lambda(S_\lambda^-\theta) = g_\lambda(S_\lambda^+\theta) = -a$ и, следовательно $f_\lambda(S_\lambda^-\theta) = a$, т. е. $f_\lambda(s)$ и $g_\lambda(s)$ являются инвариантными относительно S_λ^+ и S_λ^- функциями. Кроме того, поскольку $v_\lambda(x, y)$ — нетривиальное решение задачи (1), (2), то, очевидно, $f_\lambda(s)$ отлична от постоянной.

Легко убедиться, что существование функции $f_\lambda(s)$ с указанными свойствами равносильно существованию инвариантного относительно S_λ^+ и S_λ^- подмножества Q граничных точек такого, что $0 < \text{mes}\, Q < \text{mes}\, \Gamma$.

В самом деле, поскольку $f_\lambda(s)$ отлична от постоянной, то существует такое число ξ, что множество $Q^* = E(f_\lambda(s) > \xi)$ и его дополнение CQ^* имеют положительную меру. Пусть $Q = Q^* \cap \Gamma_0$, тогда имеем

$$\text{mes}\, \Gamma > \text{mes}\, Q = \text{mes}\, Q^* > 0.$$

Пусть $\theta \in Q$, тогда $f_\lambda(\theta) > \xi$ и, кроме того, во всех точках множества $M_\lambda(\theta) \subset \Gamma_0$ f_λ принимает одно и то же значение $f_\lambda(\theta)$, т. е. $M_\lambda(\theta) \subset Q^*$. Таким образом, точки $S_\lambda^\pm\theta$ принадлежат как множеству Γ_0, так и множеству Q^*, т. е. $S_\lambda^\pm\theta \in Q$, и, поскольку очевидно $(S_\lambda^+)^{-1} = S_\lambda^-$, то отсюда заключаем, что Q инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-.

Обратно, пусть существует инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- множество $Q \subset \Gamma$ такое, что $0 < \text{mes}\, Q < \text{mes}\, \Gamma$.

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{на} \quad Q \\ 0, & \text{на} \quad CQ. \end{cases}$$

Очевидно $f(s)$—отличная от постоянной измеримая и инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция.

Достаточность. Продолжая функцию $f(s)$ по характеристикам первого семейства на всю область D, полагая ее постоянной на этих характеристиках, определим функцию $\overset{*}{f_\lambda}(x, y)$. Такое продолжение возможно, поскольку множество Q, следовательно и его дополнение, инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^-. Продолжая функцию $g(s) = -f(s)$ аналогичным образом по характеристикам второго семейства, определим функцию $\overset{*}{g_\lambda}(x, y)$. Заметим, что из гладкости границы Γ следует, что множества точек из D, лежащих на характеристиках каждого из семейств, проходящих через Q (соответственно через CQ), имеют положительную плоскую меру. Так что сумма этих функций

$$u_\lambda^*(x, y) = f_\lambda^*(x, y) - g_\lambda^*(x, y)$$

будет нетривиальным решением задачи (1), (2), т. е. $u_\lambda^*(x, y)$ является ОСФ соответствующей ОСЗ λ. Лемма доказана.

Таким образом, исследование ОСФ задачи (1), (2) сводится к исследованию заданных на Γ инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^- функций. Но значения инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функции на каком-либо участке Γ жестко определяют эту функцию на определенных участках границы. Поэтому возникает вопрос о выделении такого по возможности узкого множества граничных точек, значениями на котором полностью определяется инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция. В этой связи Р. А. Александряном было введено понятие порождающего множества граничных точек и в случае выпуклых областей это множество построено для класса кусочно непрерывных функций [3].

Приведем определение порождающего множества граничных точек для класса измеримых функций.

Измеримое множество $E \subset \Gamma$ называется множеством единственности относительно S_λ^+ и S_λ^- для класса измеримых функций, если из того, что инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция равна нулю почти всюду на E, следует, что она равна нулю почти всюду на Γ.

Измеримое множество $F \subset \Gamma$ называется множеством продолжимости относительно S_λ^+ и S_λ^- для класса измеримых функций, если для любой измеримой функции f, заданной на F, существует определенная на Γ инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримая функция f^*, которая почти всюду на F совпадает с f.

Измеримое множество $\gamma \subset \Gamma$ называется порождающим множеством относительно S_λ^+ и S_λ^- для класса измеримых функций, если оно одновременно является как множеством единственности, так и множеством продолжимости.

Очевидно любое расширение множества единственности E снова есть множество единственности и любое сужение множества продолжимости F снова есть множество продолжимости. Поэтому для существования порождающего множества необходимо и достаточно, чтобы существовали настолько узкое множество единственности E и настолько широкое множество продолжимости F, чтобы $E \subseteq F$.

Очевидно далее, что, в силу абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^-, из измеримости множества E следует измеримость множества $M_\lambda(E)$.

Лемма 4. *Для того чтобы измеримое множество E было множеством единственности для класса измеримых функций, необходимо и достаточно, чтобы множество $M_\lambda(E)$ имело полную меру.*

Доказательство. Необходимость. Допустим обратное, пусть E — множество единственности, а $\mathrm{mes}\, M_\lambda(E) < \mathrm{mes}\, \Gamma$. По лемме 1 $M_\lambda(E)$ инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, следовательно его дополнение $CM_\lambda(E)$ тоже инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^- и имеет положительную меру.

Таким образом, вопреки предположению, E не является множеством единственности, поскольку, например, функция

$$f(s) = \begin{cases} 0, & \text{на } M_\lambda(E) \\ 1, & \text{на } CM_\lambda(E) \end{cases}$$

инвариантна, исчезает на E и не эквивалентна нулю.

Достаточность. Пусть $\mathrm{mes}\, M_\lambda(E) = \mathrm{mes}\, \Gamma$ и $f(s)$ — произвольная инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримая функция, равная нулю почти всюду на E. Пусть E_1 — множество точек из E, где $f(s)$ равна нулю. Из инвариантности функции $f(s)$ следует, что для почти всех $\theta \in \Gamma$ она принимает одно и то же значение на всем множестве $M_\lambda(\theta)$. В самом деле, множество $e \subset \Gamma$, на котором нарушается равенство (3), имеет меру нуль, а в силу абсолютной непрерывности S_λ^+ и S_λ^- множество $M_\lambda(e)$ также имеет меру нуль. Таким образом, для любой точки θ из инвариантного и имеющего полную меру множества $CM_\lambda(e)$ выполняется указанное равенство и, следовательно, $f(s)$ принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$.

Пусть E_2 множество таких точек θ из E_1, для которых $f(s)$ принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$. Согласно сказанному выше $\mathrm{mes}\, E_2 = \mathrm{mes}\, E_1$, кроме того, $f(s)$ равна нулю на множестве $M_\lambda(E_2)$.

Имеем $M_\lambda(E) = M_\lambda(E_2) \cup M_\lambda(E \setminus E_2)$. И поскольку $E \setminus E_2$ имеет меру нуль, то $\mathrm{mes}\, M_\lambda(E \setminus E_2) = 0$. Таким образом, множество $M_\lambda(E_2)$, на котором $f(s)$ равна нулю, имеет полную меру, и лемма доказана.

Лемма 5. *Для того чтобы измеримое множество $F \subset \Gamma$ было множеством продолжимости для класса измеримых функций, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех точек этого множества из $\theta_1 \neq \theta_2$ следовало, что $M_\lambda(\theta_1) \cap M_\lambda(\theta_2) = \varnothing$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим обратное, пусть F — множество продолжимости, и пусть для любого множества $\tilde{F} \subset F$, мера которого совпадает с мерой F, найдутся хотя бы две разные точки $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{F}$ такие, что $M_\lambda(\theta_1) = M_\lambda(\theta_2)$. (Здесь мы воспользовались тем, что для любых двух граничных точек p, q множества $M_\lambda(p)$ и $M_\lambda(q)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек).

Пусть f — измеримая функция на F такая, что в разных точках этого множества принимает разные значения (например, сужение на множестве F линейной функции).

Поскольку F является множеством продолжимости, то на Γ существует инвариантная функция $f^*(s)$, почти всюду на F совпадающая с f.

Обозначим через F_1 подмножество множества F, где $f^*(s)$ совпадает с f. Пусть Γ_1 множество всех точек θ из Γ, для каждой из которых $f^*(s)$ принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$. Тогда, как уже было замечено, $\operatorname{mes}\Gamma_1=\operatorname{mes}\Gamma$. Рассмотрим множество $F^*=F_1\cap\Gamma_1$. Имеем $\operatorname{mes}F^*=\operatorname{mes}F_1=\operatorname{mes}F$.

Таким образом, на множестве F^* функция $f^*(s)$ совпадает с f, и для каждой точки $\theta\in F^*$ она принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$. С другой стороны, согласно предположению, существуют точки θ_1, $\theta_2\in F^*$ такие, что $\theta_1\neq\theta_2$ и $M_\lambda(\theta_1)=M_\lambda(\theta_2)$, т. е. $f^*(\theta_1)=f^*(\theta_2)$. Кроме того, имеем

$$f(\theta_1)=f^*(\theta_1)=f^*(\theta_2)=f(\theta_2),$$

которое противоречит тому, что f принимает разные значения в разных точках из F^*.

Достаточность. Пусть f—произвольная измеримая функция на некотором измеримом множестве F и пусть F_1 такое подмножество этого множества, что $\operatorname{mes}F_1=\operatorname{mes}F$ и для любых двух разных точек θ_1 и θ_2 из F_1 $M_\lambda(\theta_1)\cap M_\lambda(\theta_2)=\varnothing$. Надо показать, что F является множеством продолжимости, т. е. что существует на Γ инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримая функция $f^*(s)$, почти всюду на F совпадающая с f.

Для этого напомним, что $M_\lambda(F_1)=\bigcup\limits_{\theta\in F_1}M_\lambda(\theta)$ и определим на всем Γ функцию $f^*(s)$ следующим образом: для каждой точки $\theta\in F_1$ положим $f^*(s)$ на всем множестве $M_\lambda(\theta)$ равной значению f в точке θ и равной нулю на множестве $CM_\lambda(F_1)$. Учитывая измеримость множества F_1, следовательно множеств $M_\lambda(F_1)$ и $CM_\lambda(F_1)$, а также инвариантность последних двух множеств, легко заключить, что $f^*(s)$ является измеримой и инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функцией, которая на F_1 совпадает с f, т. е. почти всюду на F совпадает с f, и лемма доказана.

Точка $p\in\Gamma$ называется λ-вершиной, если хотя бы одна из двух характеристик, проходящих через эту точку, не имеет других пересечений с границей Γ. Очевидно допустимая область может иметь не более чем четыре λ-вершины p_λ^i $(i=1, 2, 3, 4)$. Пусть λ неэргодическое значение. Согласно лемме 1 замыкание множества

$$Q_\lambda=\bigcup_{i=1}^{4}M_\lambda(p_\lambda^i)$$

инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, а, в силу леммы 2, оно имеет меру нуль. Поэтому дополнение множества $\overline{Q}_\lambda$ инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, имеет полную меру и состоит из не более чем счетного числа интервалов

$$C\overline{Q}_\lambda=\bigcup_i\delta_i.$$

Концы этих интервалов принадлежат инвариантному множеству $\overline{Q}_\lambda$.

Следовательно, образ каждого интервала δ_l при отображении S_λ^+ (S_λ^-) совпадает с некоторым из этих интервалов, т. е. $C\overline{Q}_\lambda$ образует инвариантную относительно S_λ^+ и S_λ^- систему интервалов. При этом, в силу того, что $C\overline{Q}_\lambda$ не содержит λ-вершин, для любого интервала $\delta_l \in C\overline{Q}_\lambda$

$$S_\lambda^+ \delta_l \cap \delta_l = \varnothing.$$

Из сказанного следует, что если δ некоторый из этих интервалов, то возможны два случая:

1. $S_\lambda^r \delta = \delta$, где r — период λ-периодических точек, следовательно концы этого интервала — λ-периодические точки. Легко видеть, что при этом $S_\lambda^r S_\lambda^+ \delta = S_\lambda^+ \delta$, т. е. δ и $S_\lambda^+ \delta$ — периодические интервалы автоморфизма S_λ, и в силу сказанного выше

$$\mathfrak{M}_\lambda(\delta) \cap \mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^+ \delta) = \varnothing. \tag{4}$$

2. При $n \neq m$ $S_\lambda^n \delta \cap S_\lambda^m \delta = \varnothing$. Следовательно, $S_\lambda^n S_\lambda^+ \delta \cap S_\lambda^m S_\lambda^+ \delta = \varnothing$, т. е. δ и $S_\lambda^+ \delta$ — непериодические интервалы автоморфизма S_λ, и справедливо (4).

Пусть G_λ^1 — множество всех периодических, а G_λ^2 — множество всех непериодических интервалов из $C\overline{Q}_\lambda$. Очевидно эти множества не пересекаются между собой и инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^-.

По лемме 2 $\overline{Q}_\lambda$ содержит конечное число λ-периодических точек. Поэтому G_λ^1 состоит из конечного числа интервалов. Пусть α_i ($i = 1, 2, \cdots, n_1$) такие интервалы из G_λ^1, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_i) = G_\lambda^1 \text{ и при } i \neq j \; M_\lambda(\alpha_i) \cap M_\lambda(\alpha_j) = \varnothing. \tag{5}$$

Пусть β_1 — некоторый интервал из G_λ^2 с концами a_1, b_1. Поскольку $\overline{Q}_\lambda$ получается из счетного множества Q_λ° присоединением конечного числа λ-периодических точек, то очевидно a_1 принадлежит множеству $M_\lambda(p_\lambda^k)$, где p_λ^k — некоторая из четырех вершин. При этом очевидно $M_\lambda(a_1) = M_\lambda(p_\lambda^k)$. Аналогичным образом $M_\lambda(b_1) = M_\lambda(p_\lambda^l)$. Если β_2 такой интервал с концами a_2, b_2, что $M_\lambda(a_2) \cup M_\lambda(b_2) = M_\lambda(p_\lambda^k) \cup M_\lambda(p_\lambda^l)$, то, очевидно, $M_\lambda(\beta_1) = M_\lambda(\beta_2)$. Отсюда, в силу конечности числа λ-вершин, легко заключить, что существует конечное число интервалов β_i ($i = 1, 2, \cdots, n_2$) из G_λ^2 таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_2} M_\lambda(\beta_i) = G_\lambda^2 \text{ и при } i \neq j \; M_\lambda(\beta_i) \cap M_\lambda(\beta_j) = \varnothing. \tag{6}$$

Пусть A_i — множество всех λ-периодических точек на замыкании $\overline{\alpha}_i$ λ-периодического интервала α_i. Известно, что все λ-периодические точки образуют замкнутое множество на Γ, так что A_i замкнуто на $\overline{\alpha}_i$ и следовательно его дополнение на α_i состоит из не более чем счетного числа λ-периодических интервалов α_l^j, т. е.

$$C_{\alpha_l} A_l = \bigcup_j \alpha_l^j.$$

Пусть θ_l^j — произвольная точка в интервале α_l^j. Тогда точка $S_\lambda^r \theta_l^j$ принадлежит интервалу α_l^j и не совпадает с θ_l^j. Пусть $[\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j)$ тот из двух полуинтервалов, образованных точками θ_l^j и $S_\lambda^r \theta_l^j$, который принадлежит α_l^j.

Образуем множество

$$\gamma_\lambda = \left\{ \bigcup_{l=1}^{n_1} A_l \right\} \cup \left\{ \bigcup_{l=1}^{n_1} \bigcup_j [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{l=1}^{n_2} \beta_l \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть значение параметра λ для рассматриваемой области D является неэргодическим. Тогда построенное множество γ_λ является порождающим множеством граничных точек для класса измеримых функций.*

Доказательство. Из структуры множества γ_λ очевидным образом следует его измеримость. Покажем, что γ_λ является множеством единственности для класса измеримых функций. В силу леммы 4 для этого надо показать, что множество $M_\lambda(\gamma_\lambda)$ имеет полную меру.

Имеем

$$M_\lambda \left\{ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n \left\{ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \cup S_\lambda^+ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{r} \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^{nr+k} \left\{ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \cup S_\lambda^+ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{r} \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j, S_\lambda^{(n+1)r+k} \theta_l^j) \cup [S_\lambda^{nr+k} S_\lambda^+ \theta_l^j, S_\lambda^{(n+1)r+k} S_\lambda^+ \theta_l^j) \right\}. \quad (7)$$

Поскольку точки множества $\bigcup_{n=0}^{+\infty} S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j$ образуют монотонную последовательность на интервале $S_\lambda^k \alpha_l^j$ (см. доказательство леммы 2), которая стремится к одному концу этого интервала, а точки множества $\bigcup_{n=0}^{-\infty} S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j$ образуют противоположно направленную последовательность на том же интервале, которая сходится к другому концу этого интервала, то легко заключить, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j, S_\lambda^{(n+1)r+k} \theta_l^j) \right\} = S_\lambda^k \alpha_l^j \quad (k=1, 2, \cdots, r). \quad (8)$$

Кроме того, в силу λ-периодичности интервала α_l^j, имеем

$$M_\lambda(\alpha_l^j) = \bigcup_{k=1}^{r} S_\lambda^k (\alpha_l^j \cup S_\lambda^+ \alpha_l^j). \quad (9)$$

Из (7), (8) и (9) вытекает равенство

$$M_\lambda \{[\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j)\} = M_\lambda (\alpha_l^j). \quad (10)$$

Учитывая (10), получим

$$M_\lambda(\gamma_\lambda) = \left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(A_l)\right\} \cup \left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} \bigcup_j M_\lambda([\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j))\right\} \cup \left\{\bigcup_{l=1}^{n_2} M_\lambda(\beta_l)\right\} =$$

$$= \left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(A_l)\right\} \cup \left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} \bigcup_j M_\lambda(\alpha_l^j)\right\} \cup G_\lambda^2 =$$

$$= \left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(A_l \cup \bigcup_j \alpha_l^j)\right\} \cup G_\lambda^2 = \left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_l)\right\} \cup G_\lambda^2 = G_\lambda^1 \cup G_\lambda^2 = C\overline{Q}_\lambda.$$

В силу леммы 2 множество $\overline{Q}_\lambda$ имеет меру нуль, следовательно $C\overline{Q}_\lambda$ имеет полную меру, т. е. γ_λ является множеством единственности для класса измеримых функций.

Покажем теперь, что γ_λ является множеством продолжимости. Для этого согласно лемме 5 достаточно показать, что для любых двух разных точек θ_1 и θ_2 из γ_λ справедливо соотношение

$$M_\lambda(\theta_1) \cap M_\lambda(\theta_2) = \varnothing. \tag{11}$$

Это соотношение очевидно, если θ_1 и θ_2 — разные периодические точки из γ_λ, а также если θ_1—периодическая, а θ_2—непериодическая точки из γ_λ.

Пусть θ_1 и θ_2—две разные точки, причем $\theta_1 \in \beta_i$, $\theta_2 \in \beta_j$, где β_i и β_j—непериодические интервалы γ_λ. Тогда условие (11) для этих точек при $i \neq j$ вытекает из (6), а при $i = j$ — из (4) и из того, что для любого непериодического интервала δ из $C\overline{Q}_\lambda$, при $n \neq m$ $S_\lambda^n \delta \cap S_\lambda^m \delta = \varnothing$.

Аналогичным образом, исходя из (4) и (5), заключаем, что (11) справедливо, если $\theta_1 \in [\theta_l^i, S_\lambda^r \theta_l^i)$, а $\theta_2 \in [\theta_k^j, S_\lambda^r \theta_k^j)$. Остается рассмотреть случай, когда $\theta_1 \in [\theta_l^i, S_\lambda^r \theta_l^i)$, а $\theta_2 \in \beta_k$. Справедливость соотношения (11) в этом случае вытекает из того, что множества G_λ^1 и G_λ^2 не пересекаются.

Таким образом, для любых двух разных точек θ_1 и θ_2 из γ_λ имеет место соотношение (11), т. е. γ_λ является множеством продолжимости для класса измеримых функций и, тем самым, теорема доказана.

Следствие 1. γ_λ *целиком содержит хотя бы один интервал.* В самом деле, пусть mes $G_\lambda^2 > 0$, тогда γ_λ содержит хотя бы один непериодический интервал β_l. Если G_λ^2 имеет меру нуль, то в силу леммы 2 множество $G_\lambda^1 = \bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_l)$ имеет полную меру. Если при этом все точки некоторого интервала α_l λ-периодические, то α_l входит в γ_λ, в противном случае γ_λ содержит хотя бы один полуинтервал $[\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j)$.

Следствие 2. *Все неэргодические значения* λ *являются ОСЗ задачи* (1), (2).

В самом деле, пусть (a, b)—некоторый интервал, принадлежащий множеству γ_λ, а θ—некоторая точка из (a, b). Рассмотрим множество $M_\lambda[(a, \theta)]$. Это множество инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-

(см. лемму 1), имеет положительную меру, строго меньшую чем мера Γ, поскольку оно не имеет точек из (θ, b). В силу леммы 3 λ является ОСЗ задачи (1), (2).

Пусть Φ_λ — линейная система измеримых на γ_λ функций, факторизованная по подгруппе констант, а U_λ — линейная система всех ОСФ задачи (1), (2), соответствующих ОСЗ λ.

Следствие 3. *Линейные системы* Φ_λ *и* U_λ *изоморфны.* В самом деле. Пусть $u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$ принадлежит линейной системе U_λ. Рассмотрим на Γ измеримую функцию $f_\lambda(s) = f_\lambda(x, y)|_\Gamma$. Как было показано при доказательстве леммы 3 $f_\lambda(s)$ является инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функцией. Пусть $\mathring{f}_\lambda$ — сужение функции $f_\lambda(s)$ на порождающее множество γ_λ. Сопоставим $u_\lambda(x, y)$ тот элемент ξ из Φ_λ, который содержит $\mathring{f}_\lambda$. Поскольку $u_\lambda(x, y)$ определяет $f_\lambda(x, y)$ с точностью до постоянного слагаемого, то $f_\lambda(s)$, а следовательно и $\mathring{f}_\lambda$ определяются с точностью до постоянного слагаемого, т. е. $u_\lambda(x, y)$ при таком соответствии однозначно определяет элемент ξ из Φ_λ. Таким образом, определено отображение T линейной системы U_λ в линейную систему Φ_λ. Очевидно, что T сохраняет линейную комбинацию

$$T\left(\sum_i a_i \, u_\lambda^i(x, y)\right) = \sum_i a_i \xi_i,$$

т. е. оно является гомоморфизмом.

Пусть $Tu_\lambda(x, y) = 0$, где 0—нулевой элемент из Φ_λ. Это означает, что $\mathring{f}_\lambda$ константа на γ_λ, и поскольку инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция однозначно определяется своими значениями $\mathring{f}_\lambda$ на γ_λ, то $f_\lambda(s)$ постоянна на Γ. Отсюда следует, что $f_\lambda(x, y)$ постоянна и следовательно $u_\lambda(x, y) = 0$, т. е. T является мономорфизмом.

Покажем, что T является эпиморфизмом. Пусть ξ—произвольный элемент из Φ_λ, а $\mathring{f}_\lambda$—некий представитель из ξ. Из определения порождающего множества γ_λ следует, что существует на Γ инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция $f_\lambda(s)$, которая почти всюду на γ_λ совпадает с $\mathring{f}_\lambda$. Продолжая функцию $f_\lambda(s)$, как и в лемме 3, по характеристикам первого семейства на всю область D, полагая ее постоянной на этих характеристиках, определим функцию $f_\lambda(x, y)$. Такое продолжение возможно в силу инвариантности функции $f_\lambda(s)$ относительно S_λ^+ и S_λ^-. Продолжая функцию $g_\lambda(s) = -f_\lambda(s)$ аналогичным образом по характеристикам второго семейства, определим функцию $g_\lambda(x, y)$. Сумма этих функций

$$u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$$

будет ОСФ задачи (1), (2), соответствующей ОСЗ λ.

Очевидно

$$Tu_\lambda(x, y) = \xi,$$

т. е. T отображает U_λ на все множество Φ_λ. Таким образом, T является изоморфизмом линейных систем U_λ и Φ_λ.

Следствие 4. *Неэргодические значения λ являются бесконечнократными ОСЗ.*

В самом деле, в силу следствия 1, γ_λ содержит целый интервал, следовательно размерность линейной системы Φ_λ бесконечна. Применяя следствие 3, заключаем, что каждому неэргодическому значению λ соответствует бесчисленное множество линейно независимых ОСФ, которые в частности могут быть выбраны из $L_p(D)$.

Следствие 5. *Если область D такова, что для неэргодического значения λ не все точки границы Γ являются λ-периодическими, то кусочно постоянные собственные функции задачи* (1), (2), *соответствующие ОСЗ λ, не полны в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, соответствующих тому же ОСЗ λ.*

В самом деле, в этом случае порождающее множество γ_λ содержит хотя бы один непериодический интервал $\beta=(a, b)$. Пусть $u_\lambda(x, y)= =f_\lambda(x, y)+g_\lambda(x, y)$ — кусочно постоянная собственная функция. Тогда функция $f_\lambda(s)=f_\lambda(x, y)|_\Gamma$ постоянна на интервале (a, b). В самом деле, допустим обратное, пусть $f_\lambda(s)$ имеет разрыв в некоторой точке $\theta\in(a, b)$. Тогда, поскольку (a, b) — непериодический интервал, $f_\lambda(s)$ будет разрывной во всех точках счетного множества $M_\lambda(\theta)$, что противоречит кусочной постоянности $f_\lambda(s)$. Пусть σ—множество всех точек из D, которые находятся на пересечениях характеристик разных семейств, проходящих через точки $M_\lambda(\beta)$. Очевидно σ имеет положительную меру. Пусть $f_\lambda(s)=c$ на β, тогда $g_\lambda(s)=-c$ на β и следовательно $u_\lambda(x, y)=0$ на σ. Таким образом, любая кусочно постоянная собственная функция, отвечающая ОСЗ λ, равна нулю на σ. Рассмотрим на γ_λ функцию $\tilde{f}_\lambda$, которая равна единице на (a, θ) и нулю—в остальных точках γ_λ, где θ—некоторая точка из (a, b). Пусть ξ тот элемент из Φ_λ, который содержит $\tilde{f}_\lambda$. Тогда легко убедиться, что собственная функция $u_\lambda(x, y)=T^{-1}\xi$, которая принимает три значения 0 и ±1, принадлежит $L_p(D)$ и отлична от нуля на некотором подмножестве положительной меры множества σ, т. е. эту собственную функцию нельзя приблизить кусочно постоянными.

§ 2. О полноте системы элементарных ОСФ в классе всех ОСФ из $L_p(D)$

В этом параграфе с помощью построенного для класса измеримых функций порождающего множества γ_λ (см. § 1) доказывается, что конечные линейные комбинации элементарных ОСФ, которые принимают лишь три значения 0 и ±1 (следовательно имеют весьма простую структуру), плотны в классе всех ОСФ, а именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть D — произвольная область из рассматриваемого класса, а λ-неэргодическое для этой области значение параметра, тогда совокупность отвечающих λ элементарных ОСФ полна в метрике $L_p(D)$ $(p>0)$ в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, отвечающих этому же ОСЗ λ.*

Заметим, что в случае $0<p<1$ под нормой $\|\cdot\|^p_{L_p(D)}$ будем, как это принято, понимать выражение $\int\limits_D |\cdot|^p\,dxdy$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Пусть H_λ — класс всех элементарных измеримых функций на Γ (принимающих только два значения 0 и 1), инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^-.

Лемма 6. *Каждую инвариантную относительно S_λ^+ и S_λ^- функцию из $L_p(\Gamma)$ $(p>0)$ можно аппроксимировать в метрике $L_p(\Gamma)$ с любой степенью точности конечной линейной комбинацией функций из H_λ.*

Доказательство. Пусть $f(s)\in L_p(\Gamma)$ — инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция. Образуем функцию

$$f_N(s)=\begin{cases} f(s), & \text{при } |f|\leqslant N\\ 0, & \text{при } |f|>N.\end{cases}$$

Известно, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что

$$\|f-f_N\|_{L_p(\Gamma)}<\varepsilon. \tag{12}$$

Легко видеть, что $f_N(s)$ является инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функцией. В самом деле, пусть K — множество всех точек на Γ, для которых $f(s)$ удовлетворяет условию (3). В тех точках $\theta\in K$, в которых $|f(s)|\leqslant N$, функция $f_N(s)$ совпадает с $f(s)$, следовательно в этих точках $f_N(s)$ удовлетворяет условию (3).

Пусть в точке $\theta\in K$ $|f(s)|>N$. Тогда в силу (3)

$$|f(S_\lambda^+\theta)|>N \text{ и } |f(S_\lambda^-\theta)|>N.$$

Следовательно, в точках θ, $S_\lambda^+\theta$ и $S_\lambda^-\theta$ $f_N(s)$ равна нулю и, стало быть, удовлетворяет условию (3), т. е. $f_N(s)$ инвариантна относительно S_λ^+ и S_λ^-.

На границе Γ рассмотрим множества

$$\Gamma_i=\begin{cases} M_\lambda(\alpha_i) & (i=1,2,\cdots,n_1)\\ M_\lambda(\beta_i) & (i=n_1+1,\ n_1+2,\cdots,\ n_1+n_2),\end{cases}$$

где α_i — периодические, а β_i — непериодические интервалы автоморфизма S_λ, удовлетворяющие соответственно условиям (5) и (6).

Напомним, что Γ_i — непересекающиеся между собой, инвариантные относительно S_λ^+ и S_λ^- множества на Γ, сумма которых имеет полную меру. Поэтому $f_N(s)$ с точностью до эквивалентности можно представить в виде

$$f_N(s)=\sum_{l=1}^{n_1+n_2} f_l(s), \tag{13}$$

где

$$f_l(s)=\begin{cases} f_N(s), & \text{на } \Gamma_l \\ 0, & \text{на } \Gamma\setminus\Gamma_l. \end{cases}$$

Очевидно $f_l(s)$—инвариантные относительно S_λ^+ и S_λ^- функции.

Пусть $i>n_1$, т. е. β_l — непериодический интервал, принадлежащий порождающему множеству γ_λ. По заданному $\varepsilon>0$ можно выбрать такой номер $n>0$, что

$$\operatorname{mes} B_n^{\pm}(\beta_l)<\frac{\varepsilon}{3(2N)^p}, \tag{14}$$

где

$$B_n^-(\beta_l)=\bigcup_{k=-\infty}^{-n} S_\lambda^k(\beta_l\cup S_\lambda^+\beta_l),\quad B_n^+(\beta_l)=\bigcup_{k=n}^{+\infty} S_\lambda^k(\beta_l\cup S_\lambda^+\beta_l).$$

В силу абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^- по данному n можно выбрать такое $\delta>0$, чтобы из $e\subset\Gamma$, $\operatorname{mes} e<\delta$ следовало

$$\operatorname{mes} B_n(e)<\frac{\varepsilon}{3(2N)^p}, \tag{15}$$

где $B_n(e)=\bigcup\limits_{k=-n}^{n} S_\lambda^k(e\cup S_\lambda^+e)$.

По теореме Лузина для данного числа δ на интервале β_l существует непрерывная функция φ такая, что мера множества $e\subset\beta_l$, где φ не совпадает с функцией $f_l(s)$, не превосходит числа δ и, кроме того, $|\varphi|\leqslant N$.

Продолжим функцию φ с множества β_l нулем вне $M_\lambda(\beta_l)$, а на этом множестве инвариантным относительно S_λ^+ и S_λ^- образом, т. е. для любой точки $\theta\in\beta_l$ положим ее на всем множестве $M_\lambda(\theta)$ равной значению φ в точке θ. Обозначим через φ_l полученную таким образом функцию.

Учитывая (14) и (15), получаем

$$\int_\Gamma |f_l-\varphi_l|^p\,ds=\Big(\int_{B_n(e)}|f_l-\varphi_l|^p\,ds+\int_{B_n^+(\beta_l)}|f_l-\varphi_l|^p\,ds+\int_{B_n^-(\beta_l)}|f_l-\varphi_l|^p\,ds\Big)<\varepsilon. \tag{16}$$

Пусть ψ — кусочно постоянная функция на интервале β_l такая, что во всем интервале β_l выполняется неравенство

$$|\varphi_l-\psi|^p<\frac{\varepsilon}{\operatorname{mes}\Gamma_l}.$$

Пусть ψ_l — функция, полученная путем продолжения функции ψ на все множество $M_\lambda(\beta_l)$ инвариантным образом и нулем вне $M_\lambda(\beta_l)$. В силу инвариантности функций φ_l и ψ_l на всем множестве Γ_l сохранится оценка

$$|\varphi_l - \psi_l|^p < \frac{\varepsilon}{\text{mes } \Gamma_l}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем

$$\|f_l - \psi_l\|_{L_p(\Gamma)} < 2\,\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \text{при } p > 1$$

$$\|f_l - \psi_l\|_{L_p(\Gamma)} < 2\varepsilon, \quad \text{при } p < 1. \tag{18}$$

Заметим, что поскольку множество точек, где ψ_l постоянна, инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, то ψ_l можно представить в виде конечной линейной комбинации функций из H_λ, а именно

$$\psi_l = \sum_{j=1}^{l} c_j\, h_j^l,$$

где h_j^l равна 1 на всем множестве, на котором ψ_l принимает отличное от нуля значение c_j, и равна нулю вне этого множества.

Замечание. Поскольку $M_\lambda(\beta_l)$ имеет конечное число предельных точек (см. лемму 2), то разрывы функций h_j^l накапливаются в окрестности конечного числа точек и следовательно вне любых окрестностей этих точек функции h_j^l кусочно постоянны.

Пусть α_l — один из удовлетворяющих условию (5) λ-периодических интервалов. Представим дополнение множества A_l на интервале α_l в виде

$$C_{\alpha_l} A_l = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} \alpha_l^j\right\} \cup \left\{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty} \alpha_l^j\right\} = D_n \cup R_n.$$

В силу абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^- по заданному $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число $\delta > 0$, чтобы из mes $e < \delta$ следовало

$$\text{mes } M_\lambda^r(e) < \frac{\varepsilon}{2\,(2N)^p}, \tag{19}$$

где $M_\lambda^r(e) = \bigcup_{n=0}^{r-1} S_\lambda^n (e \cup S_\lambda^+ e)$, r—период λ-периодических точек.

Возьмем n настолько большим, чтобы мера множества R_n не превосходила δ. Тогда из (19), учитывая равенство

$$M_\lambda(R_n) = M_\lambda^r(R_n),$$

получаем

$$\text{mes } M_\lambda(R_n) < \frac{\varepsilon}{2\,(2N)^p}. \tag{20}$$

Пусть дополнение множества D_n на отрезке $\bar{\alpha}_l$ имеет положительную меру. Тогда она, с точностью до конечного числа точек, состоит из конечного числа λ-периодических отрезков $[a_k, b_k]$ $(k=1, 2, \cdots$

$\cdots, m$). Очевидно множества $M_\lambda(\alpha_l^j)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ и $M_\lambda([a_k, b_k])$ $(k=1, 2, \cdots, m)$ не пересекаются между собой и инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^-. Следовательно функцию $f_l(s)$ можно представить в виде

$$f_l(s)=\sum_{j=1}^{n} f_l^j(s)+\sum_{k=1}^{m} \widetilde{f}_l^k(s), \tag{21}$$

где

$$f_l^j(s)=\begin{cases} f_l(s), \text{ на } M_\lambda(\alpha_l^j) \\ 0, \text{ вне } M_\lambda(\alpha_l^j), \end{cases} \qquad \widetilde{f}_l^k(s)=\begin{cases} f_l(s), \text{ на } M_\lambda([a_k, b_k]) \\ 0, \text{ вне } M_\lambda([a_k, b_k]). \end{cases}$$

Очевидно $f_l^j(s)$ и $\widetilde{f}_l^k(s)$ — инвариантные относительно S_λ^+ и S_λ^- функции.

Для любого полуинтервала $[\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ из порождающего множества γ_λ, учитывая равенство $M_\lambda(\alpha_l^j)=M_\lambda([\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j))$ и поступая совершенно так же, как и в случае непериодического интервала β_l, построим функцию ψ_l^j, представляющую собой конечную линейную комбинацию инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^- элементарных функций и удовлетворяющую условию

$$\|f_l^j-\psi_l^j\|_{L_p(\Gamma)}<\frac{\varepsilon}{n} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Следовательно

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_l^j-\sum_{j=1}^{n}\psi_l^j\Big\|_{L_p(\Gamma)}<\varepsilon. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь периодические отрезки $[a_k, b_k]$ $(k=1, 2, \cdots, m)$. По той же теореме Лузина на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ существует непрерывная функция φ_k такая, что

$$|\varphi_k|\leqslant N \text{ и } \operatorname{mes} e_k<\frac{\delta}{m}, \tag{23}$$

где e_k — множество всех точек из $[a_k, b_k]$, где φ_k отлична от $\widetilde{f}_l^k$.

Пусть $\widetilde{\varphi}_l$ — функция на Γ, которая для любой точки $\theta\in[a_k\, b_k]$ во всех точках множества $M_\lambda^r(\theta)$ совпадает с $\varphi_k(\theta)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$ и равна нулю вне множества $M_\lambda(C_{\alpha_l} D_n)$.

Учитывая (19) и (23), получим

$$\int_\Gamma\Big|\sum_{k=1}^{m}\widetilde{f}_l^k-\widetilde{\varphi}_l\Big|^p ds=\int\limits_{\bigcup_{k=1}^{m} M_\lambda^r(e_k)}\Big|\sum_{k=1}^{m}\widetilde{f}_l^k-\widetilde{\varphi}_l\Big|^p ds<\varepsilon. \tag{24}$$

На множестве $\bigcup_{k=1}^{m}[a_k, b_k]$ выберем кусочно постоянную функцию ψ_l такую, что

$$|\psi_l| \leqslant N \text{ и } |\bar{\varphi}_l - \psi_l|^p < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mes} M_\lambda (A_l)}. \tag{25}$$

Заметим, что с точностью до конечного числа точек

$$C_{\overline{\alpha}_l} D_n = \bigcup_{k=1}^{m} [a_k, b_k] = A_l \cup R_n$$

и, поскольку множество R_n не является множеством продолжимости, функцию ψ_l, вообще говоря, нельзя продолжить из $C_{\alpha_l} D_n$ инвариантным образом относительно S_λ^+ и S_λ^-. Поэтому поправим ψ_l следующим образом: пусть $\bar{\psi}_l$ — функция на $C_{\alpha_l} D_n$, которая совпадает с ψ_l на множестве A_l, а на каждом интервале $\alpha_l^j \in R_n$ равна одному из значений ψ_l на α_l^j. Очевидно $|\bar{\psi}_l| \leqslant N$ и, кроме того, она кусочно постоянна, поскольку ψ_l может не быть постоянной только на конечном числе интервалов α_l^j из R_n.

Поскольку A_l принадлежит порождающему множеству γ_λ, а α_l^j — периодические интервалы, то легко убедиться, что заданную на $C_{\alpha_l} D_n$ произвольную функцию, которая постоянна на каждом интервале $\alpha_l^j \in R_n$, можно продолжить из $C_{\alpha_l} D_n$ на все множество $M_\lambda (C_{\alpha_l} D_n)$ инвариантным образом.

Продолжим $\bar{\psi}_l$ инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^- на все множество $M_\lambda (C_{\alpha_l} D_n)$ и нулем—вне этого множества, и обозначим полученную таким образом функцию снова через $\bar{\psi}_l$. Таким образом, $\bar{\psi}_l$ уже инвариантна, кусочно постоянна, на множестве $M_\lambda (A_l)$ удовлетворяет условию

$$|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mes} M_\lambda (A_l)} \tag{26}$$

и, кроме того, $|\bar{\psi}_l| \leqslant N$.

Учитывая (20) и (26), получим

$$\int_\Gamma |\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p ds = \left(\int_{M_\lambda (A_l)} |\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p ds + \int_{M_\lambda (R_n)} |\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p ds \right) < \varepsilon. \tag{27}$$

Отсюда и из (24) вытекает

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \bar{f}_l^k - \bar{\psi}_l \right\|_{L_p(\Gamma)} < 2 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \text{при } p > 1, \tag{28}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \bar{f}_l^k - \bar{\psi}_l \right\|_{L_p(\Gamma)} < 2\varepsilon, \quad \text{при } 0 < p < 1.$$

Заметим, что $\bar{\psi}_l$ можно представить в виде конечной линейной комбинации кусочно постоянных элементарных функций, инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^-. Поэтому, учитывая, что n_1 и n_2—конечные числа, зависящие только от области D, и сопоставляя (12), (13), (18), (21), (22) и (28), легко завершить доказательство леммы.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$ — ОСФ задачи (1), (2), принадлежащая $L_p(D)$. Тогда легко убедиться, что функция $f(s) = f_\lambda(x, y)_\Gamma$ принадлежит $L_p(\Gamma)$ и, по лемме 6, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^- элементарных функций $h_i(s)$ такая, что

$$\left\| f(s) - \sum_{i=1}^{l} c_i h_i^+(s) \right\|_{L_p(\Gamma)} < \varepsilon \text{ и } \left\| g(s) - \sum_{i=1}^{l} c_i h_i^-(s) \right\|_{L_p(\Gamma)} < \varepsilon, \quad (29)$$

где $g(s) = g_\lambda(x, y)|_\Gamma$, $h_i^-(s) = -h_i^+(s)$.

В силу сделанных замечаний относительно функций h_j^i и $\bar{\psi}_i$ можно на Γ указать конечное число точек, вне любых окрестностей которых функция $\sum_{i=1}^{l} c_i h_i^+(s)$ кусочно постоянна.

Пусть ξ—тот элемент из Φ_λ, который содержит $h_i(s)$ $(i=1, 2, \cdots, l)$ (см. следствие 3 теоремы 1). Тогда

$$T^{-1}\xi_i = h_i^+(x, y) + h_i^-(x, y) = v_\lambda^i(x, y)$$

будет элементарной ОСФ, соответствующей ОСЗ λ.

Поскольку функции $f_\lambda(x, y)$, $h_i^+(x, y)$ и $g_\lambda(x, y)$, $h_i^-(x, y)$ постоянны на почти всех характеристиках соответствующих семейств, то из неравенств (29) вытекает оценка

$$\left\| u_\lambda(x, y) - \sum_{i=1}^{l} c_i v_\lambda^i(x, y) \right\| < \varepsilon d,$$

где d — константа, зависящая от области D, и теорема 2 доказана.

Отметим, что в силу сказанного выше, можно указать конечное число характеристик, вне любых окрестностей которых функция

$\sum_{i=1}^{l} c_i v_\lambda^i(x, y)$ кусочно постоянна.

В работе [7] доказано, что для любой выпуклой области D с гладкой границей множество всех неэргодических значений параметра λ состоит из счетного числа компонент, каждая из которых является либо точкой, либо отрезком, и что дополнение этого множества на интервале $(-1,1)$, т. е. множество всех эргодических значений параметра λ, имеет положительную меру, и для почти всех эргодических значений λ решение соответствующей задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 3.IX.1968

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի ծնող բազմության և չափելի ֆունկցիաների դասում ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաների կառուցումը *(ամփոփում)*

Աշխատության մեջ ուռուցիկ տիրույթներում դիտարկվում է լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի (1), (2) համասեռ խնդիրը։ λ պարամետրի ոչ էրգոդիկ արժեքների համար կառուցվում է այդ խնդրի եզրային կետերի ծնող բազմությունը։ Այդ բազմության կառուցումը հնարավորություն է տալիս ապացուցել հետևյալ հիմնական թեորեմը։

Թեորեմ. Եթե λ-ն դիտարկվող D տիրույթի համար պարամետրի ոչ էրգոդիկ արժեք է, ապա λ-ին համապատասխանող էլեմենտար ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաների բազմությունը (սեփական ֆունկցիաներ, որոնք ընդունում են միայն 0 և ± 1 արժեքներ) $Lp(D)$-ի մետրիկայով լրիվ է $Lp(D)$-ին պատկանող և միևնույն λ սեփական արժեքին համապատասխանող բոլոր ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաների դասում։

S. G. HOVSEPIAN. The construction of the generating set and generalized eigenfunctions in the class of measurable functions of the Dirichlet problem for vibrating string equation (summary)

The homogeneous Dirichlet problem (1), (2) for the vibrating string equation is considered in convex domains. The generating set of the boundary points is constructed, λ taken to be non-ergodic. This enables to prove the following

Theorem. If λ is non-ergodic parameter value for the domain D, so the set of elementary generalized eigenfunctions (eigenfunctions assuming only the valued $0, \pm 1$) corresponding to λ is complete with respect to $L_p(D)$ metrics in the class of generalised eigenfunctions, which belong to $L_p(D)$ and correspond to the same eigenvalue λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Овсепян.* О порождающем множестве граничных точек и о полноте системы обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения струны, ДАН АрмССР, XLVII, № 1, 1968, 3—8.
2. *Р. А. Александрян.* Диссертация, МГУ, 1949.
3. *Р. А. Александрян.* Докторская диссертация, МГУ, 1962.
4. *С. Г. Овсепян.* Диссертация, ЕГУ, 1965.
5. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды ММО, 9, 1960, 455—505.
6. *H. Poincaré.* Sur les courbes définies par les équations différentiales, Journ. Math. pures et appl., 1, 1885, 167—244.
7. *С. Г. Овсепян.* Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. II, Известия АН АрмССР, „Математика“, 2, № 3, 1967, 195—209.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

Н. О. СИНАНЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Введение

Н. К. Бари в работе [1] установила, что для всякой измеримой почти везде конечной функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, существует ряд по системе Хаара, который сходится к ней почти всюду на $[0,1]$.

В работе [2] было установлено существование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n (x) \tag{1}$$

по системе Хаара, обладающего тем свойством, что для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ существует подряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k} (x)$ ряда (1), сходящийся к $f(x)$ почти всюду.

Эти результаты были значительно усилены Ф. Г. Арутюняном в работе [3], а именно, была установлена

Теорема 1. Пусть $f(x)$—измеримая почти везде конечная функция на $[0,1]$. Тогда существует абсолютно сходящийся почти всюду ряд по системе Хаара такой, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k (x) = f(x) \tag{2}$$

почти всюду на $[0, 1]$.

В настоящей работе для системы Хаара $\{\chi_n (x)\}$ и для некоторого более общего класса ортогональных систем $\{\varphi_n (x)\}$ исследуется следующая задача.

Пусть $\{\varphi_{n_k} (x)\}$—подсистема системы $\{\varphi_n (x)\}$. Найти условия (если возможно, необходимые и достаточные) на подпоследовательности $\{\varphi_{n_k} (x)\}$, обеспечивающие возможность представления любой функции $f(x)$ сходящимся к ней почти всюду рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k} (x).$$

Близкие к вышеприведенной задаче вопросы были исследованы в работах [4[и [5].

В работе [4] было установлено, что если из полной в $L_2 [0, 1]$ ортонормальной системы $\{\varphi_n (x)\}$ удалить любое конечное число функций, то множество линейных комбинаций остальных функций всюду плотно в смысле сходимости по мере в пространстве конечных измеримых функций.

Было установлено также, что аналогичное свойство сохраняется и для некоторых подсистем $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, где отсутствует бесконечное число функций из системы $\{\varphi_n(x)\}$.

В работе [5] была показана следующая

Теорема 2. Пусть $\Phi = \{\Phi_n\}$ есть подсистема системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$. Пусть далее $E_n = \{x\colon \Phi_n(x) \neq 0\}$ и $E = \lim\limits_{n\to\infty} \sup E_n$. Тогда множество линейных комбинаций функций Φ всюду плотно в смысле сходимости по мере в пространстве конечных измеримых функций на измеримом множестве G тогда и только тогда, когда

$$\text{mes } G = \text{mes } (G \cap E). \tag{3}$$

Доказывается, что эту теорему можно значительно усилить, а именно, справедлива

Теорема 3. *Если $\{\Phi_n(x)\}$ есть множество функций Хаара, для которого выполнено условие* (3), *то для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на множестве G, существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x),$$

абсолютно сходящийся к $f(x)$ почти всюду на G.

Эта теорема получена как следствие более общей теоремы, для формулировки которой нам нужно привести определение одного класса ортогональных систем.

Пусть дана последовательность положительных чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ $\cdots, \varepsilon_n, \cdots$, которые удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_n < 1, \ n = 0, 1, 2, \cdots \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty. \tag{4}$$

Определим первую функцию следующим образом:

$$\psi_0^{(0)}(x) = 1, \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Внутри отрезка $[0, 1]$ возьмем интервал $\gamma_0^{(1)}$, длина которого равна ε_0. Разделим $\gamma_0^{(1)}$ на два равных интервала $\overset{+}{\gamma}{}_0^{(1)}$ и $\overset{-}{\gamma}{}_0^{(1)}$, и определим функцию $\psi_0^{(1)}(x)$ следующим образом:

$$\psi_0^{(1)}(x) \left| \begin{array}{l} 1 \text{ при } x \in \overset{+}{\gamma}{}_0^{(1)} \\ -1 \text{ при } x \in \overset{-}{\gamma}{}_0^{(1)} \\ 0\text{—в остальных точках.} \end{array} \right. \tag{6}$$

Через $\overline{\gamma}{}_1^{(k)}$ $(k = 1, \cdots, \nu_1)$ обозначим интервалы, на каждом из которых функция $\psi_0^{(1)}(x)$ принимает постоянные значения. Число ν_1

равно трем, если интервал $\gamma_0^{(1)}$ имеет общий конец с отрезком $[0, 1]$ и четырем—в противном случае.

Пусть $\gamma_1^{(k)}$ такие интервалы, что

$$\gamma_1^{(k)} \subset \tilde{\gamma}_1^{(k)}, \quad \text{mes}\ \gamma_1^{(k)} = \varepsilon_1 \cdot \text{mes}\ \tilde{\gamma}_1^{(k)}, \quad k=1, \cdots, \nu_1; \tag{7}$$

разделим $\gamma_1^{(k)}$ на два равных интервала и обозначим эти интервалы слева направо через $\overset{+}{\gamma}{}_1^{(k)}$ и $\overset{-}{\gamma}{}_1^{(k)}$.

Определим функции первой группы следующим образом:

$$\psi_1^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \overset{+}{\gamma}{}_1^{(k)} \\ -1 \text{ при } x \in \overset{-}{\gamma}{}_1^{(k)} \\ 0\text{—в остальных точках,} \end{cases} \tag{8}$$

где $k = 1, \cdots, \nu_1$.

Предположим, что построены функции $\psi_{p-1}^{(k)}(x)$ $(p-1)$-ой группы. Обозначим через $\gamma_{p-1}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, \nu_{p-1})$ интервал минимальной длины, вне которого $\psi_{p-1}^{(k)}(x)$ тождественно равна нулю

Положим

$$G = [0, 1] - \bigcup_{k=1}^{\nu_{p-1}} \overline{\gamma_{p-1}^{(k)}},$$

и обозначим через $E_{p-1}^{(i)}$ составляющие интервалы этого множества. Пусть $\overset{+}{\gamma}{}_{p-1}^{(k)} = \{x : \psi_{p-1}^{(k)}(x) = 1\}$ и $\overset{-}{\gamma}{}_{p-1}^{(k)} = \{x : \psi_{p-1}^{(k)}(x) = -1\}$. Внутри каждого из отрезков $\overline{\overset{+}{\gamma}{}_{p-1}^{(k)}}$, $\overline{\overset{-}{\gamma}{}_{p-1}^{(k)}}$ и $\overline{E_{p-1}^{(i)}}$ возьмем по интервалу с длиной, равной соответственно $\varepsilon_p \cdot |\overset{+}{\gamma}{}_{p-1}^{(k)}|$, $\varepsilon_p \cdot |\overset{-}{\gamma}{}_{p-1}^{(k)}|$ и $\varepsilon_p \cdot |E_{p-1}^{(i)}|$.

Полученные интервалы обозначим через $\gamma_p^{(k)}$, $k=1, \cdots, \nu_p$. Функции $\psi_p^{(k)}(x)$ определим следующим образом:

$$\psi_p^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \overset{+}{\gamma}{}_p^{(k)} \\ -1 \text{ при } x \in \overset{-}{\gamma}{}_p^{(k)} \\ 0\text{—в остальных точках,} \end{cases} \tag{9}$$

где $k = 1, \cdots, \nu_p$ и $\overset{+}{\gamma}{}_p^{(k)}$ и $\overset{-}{\gamma}{}_p^{(k)}$ интервалы, полученные разделением $\gamma_p^{(k)}$ на две равные части.

Продолжая этот процесс, получим систему попарно ортогональных функций

$$\psi_0^{(0)}(x), \psi_0^{(1)}(x), \quad \{\psi_n^{(k)}(x)\}; \ 1 \leqslant k \leqslant \nu_n, \ n=1, 2, \cdots \tag{10}$$

и множество интервалов

$$\gamma_0^{(1)}, \ \{\gamma_n^{(k)}\}; \ 1 \leqslant k \leqslant \nu_n, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Положим $\gamma_n = \bigcup\limits_k \gamma_n^{(k)}$ и $\gamma = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{l=n}^{\infty} \gamma_l$.

Установим, что

$$\mathrm{mes}\,\gamma = 1. \tag{12}$$

Для этого достаточно показать, что $\mathrm{mes} \bigcup\limits_{l=n}^{\infty} \gamma_l = 1$ для любого n. Это равносильно следующему соотношению $\mathrm{mes}\, C \bigcup\limits_{l=n}^{\infty} \gamma_l = 0$;

$$\mathrm{mes}\, C \bigcup_{l=n}^{\infty} \gamma_l = \mathrm{mes} \bigcap_{l=n}^{\infty} C\gamma_l.$$

Из определения γ_l легко следует, что

$$\mathrm{mes} \bigcap_{l=n}^{\infty} C\gamma_l = \prod_{l=n}^{\infty} (1-\varepsilon_l).$$

В силу условия (4) последнее выражение равно нулю, чем и устанавливается соотношение (12).

Если $\varepsilon_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$, то система (10) совпадает с системой $\left\{ \frac{\chi_n(x)}{\max\limits_{0<x<1} \chi_n(x)} \right\}$, $n = 0, 1, \cdots$, где $\{\chi_n(x)\}$ — система Хаара. Если же $\varepsilon_n < 1$ хотя бы для одного значения n, то легко видеть, что система не полна.

Применяя метод доказательства теоремы 1 (см. [3]), можно установить следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ измеримая почти везде конечная функция на $[0,1]$. Тогда существует абсолютно сходящийся почти всюду ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x)$ по системе (10) такой, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x) = f(x) \tag{13}$$

почти всюду на $[0,1]$.

Пусть $\{\psi_{n_l}^{(k)}(x)\}$ есть некоторое множество функций системы (10) и $E \subset [0, 1]$—некоторое множество положительной меры.

Обозначим

$$\varphi_{l,k}(x) = \begin{cases} \psi_{n_l}^{(k)}(x), \text{ если } \mathrm{mes}\,(\overset{+}{\gamma}{}_{n_l}^{(k)} \cdot E) \geqslant \mathrm{mes}(\overset{-}{\gamma}{}_{n_l}^{(k)} \cdot E) \\ -\psi_{n_l}^{(k)}(x) - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{14}$$

Сохраняя порядок системы $\{\varphi_{l,k}(x)\}$, занумеруем ее следующим образом:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \cdots,\ \varphi_n(x), \cdots. \tag{15}$$

Обозначим через Δ_k интервал минимальной длины, вне которого $\varphi_k(x)$ тождественно равна нулю и $\overset{+}{\Delta}_k = \{x : \varphi_k(x) > 0\}$, $\overset{-}{\Delta}_k = \{x : \varphi_k(x) < 0\}$.

Ясно, что любой ряд по системе (15) можно записать в виде ряда по системе $\{\psi_{n_l}^{(k)}(x)\}$.

Теорема 5. *Чтобы для любой измеримой почти везде конечной функции $f(x)$, определенной на E, существовал почти везде абсолютно сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по системе* (15) *такой, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x) \tag{16}$$

почти всюду на E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{mes}(E \cdot \overline{\lim_{k \to \infty}} \Delta_k) = \operatorname{mes} E. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 4 вытекает из (12) и теоремы 5.

§ 2. Доказательство теоремы 5

Необходимость. Предположим, что условие (17) не выполнено, то есть имеет место соотношение

$$\operatorname{mes}\left(E \cdot \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \Delta_n\right) < \operatorname{mes} E. \tag{18}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\operatorname{mes}\left(E - E \cdot \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \Delta_n\right) > 0. \tag{19}$$

Можно указать такой номер N, чтобы множество

$$A = E - E \cdot \bigcup_{n=N}^{\infty} \Delta_n \tag{20}$$

имело положительную меру.

Из определения множества A вытекает, что

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ при } x \in A \subset E;\ n > N. \tag{21}$$

Отсюда непосредственно следует необходимость условия (17) теоремы 5.

Для доказательства достаточности нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть множество E и система* (15) *таковы, что имеет место соотношение* (17) *и $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на E. Пусть далее заданы $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и натуральное число τ_0.*

Тогда существует множество

$$G \subset E,\ \operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E - \varepsilon \tag{22}$$

и полином по системе (15)

$$Q(x) = \sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x),\ N > \tau_0, \tag{23}$$

удовлетворяющие условиям

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n\varphi_n(x)-f(x)\right|<\delta, \text{ при } x\in G \tag{24}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{N+\mu} |a_n\varphi_n(x)|\leqslant\frac{16\,|f(x)|}{\varepsilon}, \text{ при } x\in G. \tag{25}$$

Лемма 2. *Пусть множество E и система* (15) *таковы, что имеет место соотношение* (17); $f(x)$ *измеримая почти везде конечная функция, определенная на E, и пусть заданы $\varepsilon>0$, $\delta>0$ и натуральное число τ_0.*

Тогда существует множество

$$G\subset E,\ \text{mes}\, G>\text{mes}\, E-\varepsilon \tag{26}$$

и полином по системе (15), *удовлетворяющие условиям*

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n\varphi_n(x)-f(x)\right|<\delta,\ N>\tau_0,\ x\in G \tag{27}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{N+\mu} |a_n\varphi_n(x)|<\frac{16\,|f(x)|}{\varepsilon}, \text{ при } x\in G. \tag{28}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $P\subset E$ — совершенное множество, удовлетворяющее условию

$$\text{mes}\, P>\text{mes}\, E-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{29}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на P, следовательно для $\delta>0$ существует $\sigma>0$ такое, что из соотношения $|x-x_1|<\sigma$, где $x, x_1\in P$, следует неравенство

$$|f(x)-f(x_1)|<\frac{\delta}{4}. \tag{30}$$

Существует число N_1, удовлетворяющее условию

$$\text{mes}\, \Delta_n<\sigma, \text{ при } n>N_1. \tag{31}$$

Действительно, выберем натуральное число k настолько большим, чтобы имело место соотношение

$$\frac{1}{2^k}<\sigma. \tag{32}$$

Выберем далее n_1 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{mes}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n-\bigcup_{n=1}^{n_1}\Delta_n\right)<\frac{1}{2}. \tag{33}$$

Если $t>n_1$, то либо $\Delta_t\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n-\bigcup\limits_{n=1}^{n_1}\Delta_n$, либо $\Delta_t\subset\bigcup\limits_{n=1}^{n_1}\Delta_n$. Очевидно, что в первом случае $\text{mes}\,\Delta_t<\frac{1}{2}$. Во втором случае, как видно из определения системы (10), $\Delta_t \subset \Delta_{n'}$, где $n' < n_1$, и, следовательно, в силу определения системы имеем

$$\text{mes}\, \Delta_t < \frac{1}{2}\, \text{mes}\, \Delta_{n'} < \frac{1}{2}.$$

Допустим мы указали такое n_l, что $\text{mes}\, \Delta_n < \frac{1}{2^l}$ при $n > n_l$. Для множества $\bigcup\limits_{n=n_l+1}^{\infty} \Delta_n$ выберем n_{l+1} настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{mes} \left(\bigcup_{n=n_l+1}^{\infty} \Delta_n - \bigcup_{n=n_l+1}^{n_{l+1}} \Delta_n \right) < \frac{1}{2^{l+1}}.$$

Если $t > n_{l+1}$, то либо $\Delta_t \subset \bigcup\limits_{n=n_l+1}^{\infty} \Delta_n - \bigcup\limits_{n=n_l+1}^{n_{l+1}} \Delta_n$, либо $\Delta_t \subset \bigcup\limits_{n=n_l+1}^{n_{l+1}} \Delta_n$.

Очевидно, что в первом случае $\text{mes}\, \Delta_t < \frac{1}{2^{l+1}}$, а во втором случае $\Delta_t \subset \Delta_j$, где j — некоторое число, удовлетворяющее соотношению $n_l < j \leqslant n_{l+1}$, и, следовательно,

$$\text{mes}\, \Delta_t < \frac{1}{2}\, \text{mes}\, \Delta_j \leqslant \frac{1}{2^{l+1}}.$$

Отсюда следует существование такого числа n_k, что $\text{mes}\, \Delta_t < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ при $t > n_k = N_1$. Обозначим

$$N = \max(\tau_0, N_1). \tag{34}$$

Выберем l так, чтобы

$$\frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{1}{2^{l-1}}. \tag{35}$$

Из соотношения (17) следует, что для произвольного k

$$\text{mes} \left(E - \bigcup_{n=k}^{\infty} \Delta_n \right) = 0. \tag{36}$$

Следовательно, можно выбрать число m_1 так, чтобы имело место соотношение

$$\text{mes} \left(E - \bigcup_{n=N+1}^{N+m_1} \Delta_n \right) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{37}$$

В последовательности

$$\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \cdots, \Delta_{N+m_1} \tag{38}$$

рассмотрим те интервалы Δ_{n_t}, для которых

$$\text{mes}\, (\Delta_{n_t} \cdot P) \neq 0 \tag{39}$$

и выберем тот из них, который имеет наименьший номер. Обозначим этот интервал через $\Delta_{1,1}^{(1)}$. Среди оставшихся интервалов, удовлетворяющих условию (30), выберем тот, для которого $\Delta_{n_t} \cdot \Delta_{1,1}^{(1)} = 0$ и Δ_{n_t}

имеет наименьший номер в последовательности (38). Этот интервал обозначим через $\Delta_{2,1}^{(1)}$.

Допустим таким способом выбраны все интервалы из последовательности (38)

$$\Delta_{1,1}^{(1)},\ \Delta_{2,1}^{(1)},\cdots,\ \Delta_{k,1}^{(1)}. \tag{40}$$

Обозначим через $\varphi_{l,1}^{(1)}(x)$ ту функцию $\varphi_n(x)$ из системы (15), для которой имеет место соотношение

$$\Delta_{l,1}^{(1)}=\{x:\varphi_n(x)\neq 0\},$$

а через $\overset{+}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}$, $\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}$ — те интервалы, для которых имеет место

$$\overset{+}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}=\{x:\varphi_n(x)>0\},\ \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}=\{x:\varphi_n(x)<0\}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} E_1=\operatorname{mes}\left(E-\bigcup_{l=1}^{k}\Delta_{l,1}^{(1)}\right)<\frac{\varepsilon}{8}\cdot \tag{41}$$

Отсюда

$$\operatorname{mes} E\cdot\bigcup_{l=1}^{k}\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}<\frac{\operatorname{mes} E}{2}\cdot \tag{42}$$

Из соотношения (36) следует, что можно указать натуральное число m_2, которое удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{mes}\left(E\cdot\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}-\bigcup_{n=N+m_1+1}^{N+m_2}\Delta_n\right)<\frac{\varepsilon}{16\cdot k},\ i=1,2,\cdots,k. \tag{43}$$

В последовательности

$$\Delta_{N+m_1+1},\ \Delta_{N+m_1+2},\cdots,\ \Delta_{N+m} \tag{44}$$

рассмотрим те интервалы, которые удовлетворяют соотношению $\Delta_{n_l}\subset\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}$, и обозначим через $\Delta_{l,1}^{(2)}$ тот из них, который в последовательности (44) имеет наименьший номер.

Выбранные таким образом интервалы обозначим через

$$\Delta_{l,1}^{(2)},\ \Delta_{l,2}^{(2)},\cdots,\ \Delta_{l,k-1}^{(2)}.$$

Рассмотрим те интервалы последовательности (44), которые удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_{n_l}\subset\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}\ \text{и}\ \Delta_{n_l}\cdot\bigcup_{j=1}^{k-1}\Delta_{l,j}^{(2)}=0. \tag{45}$$

Обозначим через $\Delta_{l,k}^{(2)}$ тот из этих интервалов, который имеет наименьший номер.

Допустим таким образом выбраны всевозможные интервалы последовательности (44)

$$\Delta_{l,1}^{(2)},\ \Delta_{l,2}^{(2)},\cdots,\ \Delta_{l,k(l,2)}^{l(2)}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} E_2=\operatorname{mes}\left(E\cdot\bigcup_{l=1}^{k}\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}-\bigcup_{l=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(l,2)}\Delta_{l,j}^{(2)}\right)<\frac{\varepsilon}{16}\cdot \tag{46}$$

Отсюда и из (42) следует

$$\operatorname{mes}\left(E\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,2)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(2)}\right)<\frac{\operatorname{mes}E}{2^2}. \tag{47}$$

Далее допустим, что уже выбраны число m_{l-1} и последовательность интервалов

$$\Delta_{i,1}^{(l-1)},\ \Delta_{i,2}^{(l-1)},\cdots,\Delta_{i,k(i,l-1)}^{(l-1)};\ i=1,2,\cdots,k, \tag{48}$$

которые удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{mes}\left(E\cdot\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}\right)<\frac{\operatorname{mes}E}{2^{l-1}} \tag{49}$$

Возьмем m_l настолько большим, чтобы имело место соотношение

$$\operatorname{mes}E_l=\operatorname{mes}\left(E\cdot\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}-\bigcup_{n=N+m_{l-1}+1}^{N+m_l}\Delta_n\right)<\frac{\varepsilon}{2^{l+2}}\cdot \tag{50}$$

В последовательности

$$\Delta_{N+m_{l-1}+1},\ \Delta_{N+m_{l-1}+2},\cdots,\Delta_{N+m_l} \tag{51}$$

рассмотрим те интервалы, для которых имеет место соотношение $\Delta_{n_i}\subset\bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}$, и обозначим через $\Delta_{i,1}^{(l)}$ тот из них, который в последовательности (51) имеет наименьший номер. Допустим выбраны интервалы

$$\Delta_{i,1}^{(l)},\ \Delta_{i,2}^{(l)},\cdots,\ \Delta_{i,q-1}^{(l)}.$$

Рассмотрим те интервалы в последовательности (51), которые удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_{n_i}\subset\bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}\quad\text{и}\quad\Delta_{n_i}\cdot\bigcup_{j=1}^{q-1}\Delta_{i,j}^{(l)}=0. \tag{52}$$

Обозначим через $\Delta_{i,q}^{(l)}$ тот из этих интервалов, который в последовательности (51) имеет наименьший номер. Предположим таким способом выбраны всевозможные интервалы последовательности (51)

$$\Delta_{i,1}^{(l)},\ \Delta_{i,2}^{(l)},\cdots,\Delta_{i,k(i,l)}^{(l)}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes}\left(E\cdot\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}-\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l)}\Delta_{i,j}^{(l)}\right)<\frac{\varepsilon}{2^{l+2}}\cdot \tag{53}$$

Из (35), (49) и из определения системы (11) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(E\cdot\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l)}\overline{\Delta}_{i,j}^{(l)}\right)<\frac{\operatorname{mes}E}{2^l}<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{54}$$

Положим $k(i,1)=1$ и рассмотрим множество

$$G=P\cdot\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{l=1}^{l}\bigcup_{j=1}^{k(i,l)}\overset{+}{\Delta}{}_{i,j}^{(l)}. \tag{55}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$G=P\cdot\left(\bigcup_{l=1}^{l}\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l)}\overset{+}{\Delta}{}_{i,j}^{(l)}\right)=E-C_E\left[P\cdot\left(\bigcup_{l=1}^{l}\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k(i,l)}\overset{+}{\Delta}{}_{i,j}^{(l)}\right)\right]=$$

$$= E - \left[C_E \cdot P + C_E \left(\bigcup_{t=1}^{l} \bigcup_{l=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(l,t)+} \Delta_{l,j}^{(t)} \right) \right] \supset E -$$

$$- \left(C_E \cdot P + E \cdot \bigcup_{l=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(l,l)-} \Delta_{l,j}^{(l)} + \bigcup_{t=1}^{l} E_t \right). \tag{56}$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{mes} G \geqslant \operatorname{mes} E - C_E \cdot P - \operatorname{mes} \left| E \cdot \left(\bigcup_{l=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(l,l)-} \Delta_{l,j}^{(l)} \right) \right| -$$

$$- \bigcup_{t=1}^{l} \operatorname{mes} E_t \geqslant \operatorname{mes} E - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \sum_{t=1}^{l} \frac{\varepsilon}{2^{2+t}} \geqslant \operatorname{mes} E - \varepsilon; \tag{57}$$

Обозначим через $\varphi_{l,j}^{(t)}(x)$ ту функцию $\varphi_n(x)$ из системы (15), для которой имеет место соотношение

$$\Delta_{l,j}^{(t)} = \{x : \varphi_n(x) \neq 0\}. \tag{58}$$

Рассмотрим полином

$$T(x) = \sum_{t=1}^{l} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{r(l,t)} 2^{t-1} \varphi_{l,j}^{(t)}(x). \tag{59}$$

и докажем, что

$$\sum_{t=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(l,t)} 2^{t-1} \varphi_{l,j}^{(t)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \bigcup\limits_{t=1}^{\nu} \bigcup\limits_{l=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{k(l,t)+} \Delta_{l,j}^{(t)} \\ -2^{\nu}+1 \text{ при } x \in \bigcup\limits_{l=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{k(l,\nu)-} \Delta_{l,j}^{(\nu)}, \end{cases} \tag{60}$$

а в остальных точках $[0,1]$ имеет место соотношение

$$-2^{\nu}+1 < \sum_{t=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(l,t)} 2^{t-1} \varphi_{l,j}^{(t)}(x) \leqslant 0. \tag{61}$$

При $\nu = 1$ утверждения очевидны.

Допустим, что соотношения (60) и (61) верны для $\nu = n \geqslant 1$. Для $\nu = n+1$ справедливость утверждений (60) и (61) вытекает из следующих соотношений:

$$\Delta_{l,j}^{(n+1)} \subset \bigcup_{l=1}^{k} \bigcup_{l=1}^{k(l,n)-} \Delta_{l,j}^{(n)} \text{ и } \Delta_{l,j}^{(n+1)} \cdot \Delta_{l,s}^{(n+1)}, \; s \neq j. \tag{62}$$

Отсюда следует, что при $x \in \bigcup\limits_{t=1}^{l} \bigcup\limits_{l=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{k(l,t)+} \Delta_{l,j}^{(t)}$

$$T(x) = 1 \tag{63}$$

и

$$\sum_{t=1}^{l} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(l,t)} 2^{t-1} |\varphi_{l,j}^{(t)}(x)| < 2^{l} - 1, \; x \in [0, 1]. \tag{64}$$

Пусть точки $x_1, x_2, \cdots, x_k$ таковы, что

$$x_l \in \Delta_{l,1}^{(1)} \cdot P. \tag{65}$$

Положим

$$a_i = \begin{cases} f(x_i) & \text{при } |f(x_i)| > \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{при } |f(x_i)| < \frac{\delta}{2} \end{cases}. \tag{66}$$

Рассмотрим полином

$$Q(x) = \sum_{t=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(i,t)} a_i 2^{t-1} \varphi_{i,j}^{(t)}(x). \tag{67}$$

Из определения функции $\varphi_{i,j}^{(t)}(x)$ следует, что $\varphi_{i,j}^{(t)}(x) = 0$ при $x \overline{\in} \Delta_{i,1}^{(1)}$. Следовательно при $x \in \Delta_{i,1}^{(1)} \cdot G$

$$Q(x) = f(x_i). \tag{68}$$

Пусть $x \in G$. Тогда $x \in \Delta_{i,1}^{(1)}$, где i принимает некоторое значение в промежутке $1 \leqslant i \leqslant k$.

Из (30), (34) и (68) вытекает, что при $x \in G$

$$|Q(x) - f_1(x)| < \frac{\delta}{4}. \tag{69}$$

Покажем, что для $x \in G$ имеет место соотношение

$$\sum_{t=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(i,t)} |a_i 2^{t-1} \varphi_{i,j}^{(t)}(x)| < \frac{16|f(x)|}{\varepsilon}. \tag{70}$$

Так как $x \in G$, то $x \in \Delta_{i,1}^{(1)}$ для некоторого i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant k$

Тогда, либо $|f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$, и тогда $a_i = 0$ и (70) выполнено, либо $|f(x_i)| \geqslant \frac{\delta}{2}$ и значит, используя (30), мы получим

$$|f(x)| > |f(x_i)| - |f(x_i) - f(x)| > \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4}. \tag{71}$$

Отсюда, из (64) и из (35) следует

$$\sum_{t=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(i,t)} |a_i 2^{t-1} \varphi_{i,j}^{(t)}(x)| \leqslant |f(x_i)| (2^l - 1) \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_i) - f(x)| 2^{l-1} \cdot 2 + |f(x)| 2^{l-1} \cdot 2 \leqslant$$

$$\leqslant 4|f(x)| \cdot \frac{4}{\varepsilon} = \frac{16|f(x)|}{\varepsilon}, \text{ при } x \in G. \tag{72}$$

Соотношения (34), (57), (69) и (72) доказывают справедливость леммы 1.

Доказательство леммы 2. Пусть $\psi(x)$—непрерывная функция такая, что

$$\psi(x) = f(x), \ x \in G_1, \ G_1 \subset E, \ \text{mes } G_1 > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{73}$$

Возьмем совершенное множество P такое, чтобы выполнялись соотношения

$$P \subset G_1, \ \text{mes}\, P > \text{mes}\, E - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{74}$$

В силу леммы 1 существует множество G

$$G \subset P, \ \text{mes}\, G > \text{mes}\, P - \frac{\varepsilon}{2} \tag{75}$$

и полином $\sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x)$, для которых выполняется условие

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x) - \psi(x) \right| < \delta, \ x \in G \tag{76}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{N+\mu} |a_n \varphi_n(x)| < \frac{16\, |\psi(x)|}{\varepsilon}, \ x \in G. \tag{77}$$

Выполнение соотношений (27) и (28) следует из (73)—(78).

Тем самым лемма 2 доказана.

Доказательство достаточности теоремы 5. Пусть

$$1 > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > \cdots > 0 \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < +\infty. \tag{78}$$

Положим $\delta_k = \alpha_{k+1}^2$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, $f_0(x) = f(x)$, $\tau_0 = 0$. В силу леммы 2 существует множество G_0, $\text{mes}\, G_0 > \text{mes}\, E - \alpha_0$ и полином по системе (15)

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_n \varphi_k(x), \ n_1 > \tau_0, \tag{79}$$

удовлетворяющий соотношениям

$$\left| \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \varphi_k(x) - f_0(x) \right| < \delta_0, \ x \in G_0 \tag{80}$$

и

$$\sum_{k=n_L}^{n_2} |a_k \varphi_k(x)| > \frac{16\, |f_1(x)|}{\alpha_0}, \ x \in G_0. \tag{81}$$

Пусть уже определены функции $\{f_k(x)\}$, $0 \leqslant k \leqslant p$, множества G_k, $0 \leqslant k \leqslant p$ и полином $\sum\limits_{k=n_{2t+1}}^{n_{2t+2}} a_k \varphi_k(x)$, $0 \leqslant t \leqslant p$ следующим образом:

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots < n_{2p+2}, \tag{82}$$

$$f_j(x) = f_0(x) - \sum_{t=0}^{j-1} \sum_{k=n_{2t+1}}^{n_{2t+2}} a_k \varphi_k(x), \ 1 \leqslant j \leqslant p, \tag{83}$$

$$\text{mes}\, G_j > \text{mes}\, E - \alpha_j, \ 1 \leqslant j \leqslant p, \tag{84}$$

$$\left| \sum_{k=n_{2j+1}}^{n_{2j+2}} a_k \varphi_k(x) - f_j(x) \right| < \delta_j, \ x \in G_j, \tag{85}$$

$$\sum_{k=n_{2j}+1}^{n_{2j}+1} |a_k \varphi_k(x)| \leqslant \frac{16\,|f_j(x)|}{\alpha_j}\quad x \in G_j. \tag{86}$$

Положим

$$f_{p+1}(x) = f_0(x) - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l}+2} a_k \varphi_k(x) \tag{87}$$

Применяя лемму 2 к $f(x)=f_{p+1}(x)$, $\varepsilon = \alpha_{p+1}$, $\delta=\delta_{p+1}$ и $\nu_0=n_{2(p+1)+1}$, находим множество G_{p+1} и полином $\sum_{k=n_2(p+1)+1}^{n_2(p+1)+2} a_k \varphi_k(x)$, удовлетворяющие соотношениям (83)—(86), где вместо j берется $p+1$.

Обозначим

$$\overline{G}_j = G_{j-1}\cdot G_j,\ j=1,\ 2,\cdots. \tag{88}$$

Из (78) и (84) следует

$$\overline{G}_j = E - [(E-G_{j-1})+(E-G_j)],\ \text{mes}\,\overline{G}_j > \text{mes}\,E - 2\alpha_{j-1}. \tag{89}$$

В силу (85) при $x \in G_{j-1}$ из (73) получим

$$|f_j(x)| = |f_0(x) - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l}+2} a_k \varphi_k(x)| =$$

$$= \left| f_0(x) - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l}+2} a_k \varphi_k(x) - \sum_{k=n_{2(j-1)+1}}^{n_{2(j-1)+2}} a_k \varphi_k(x) \right| =$$

$$= \left| f_{j-1}(x) - \sum_{k=n_{2(j-1)+1}}^{n_{2(j-1)+2}} a_k \varphi_k(x) \right| < \delta_{j-1},\ j \geqslant 1. \tag{90}$$

Отсюда, из (86) и (88) при $x \in \overline{G}_j$ получим

$$|f_j(x)| < \delta_{j-1} < \delta_j \tag{91}$$

и

$$\sum_{k=n_{2j}+1}^{n_{2j}+2} |a_k \varphi_k(x)| \leqslant \frac{16\,|f_j(x)|}{\alpha} \leqslant \frac{16\,\delta_{j-1}}{\alpha_j}\ 16\,\alpha_j. \tag{92}$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{93}$$

удовлетворяет требованиям теоремы. В самом деле, убедимся прежде всего в том, что ряд (93) абсолютно сходится почти всюду.

Обозначим

$$R_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} G_j \ \text{ и } R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n. \tag{94}$$

Имеем

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots \subset R_n \subset \cdots. \tag{95}$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} R_n = \operatorname{mes} R. \tag{96}$$

Очевидно

$$R_n = E - \sum_{j=n}^{\infty} (E - \overline{G}_j). \tag{97}$$

Значит в силу (89)

$$\operatorname{mes} R_n \geqslant \operatorname{mes} E - \sum_{j=n}^{\infty} 2\alpha_j \to \operatorname{mes} E \text{ при } n \to \infty. \tag{98}$$

Пусть теперь $x_0 \in R$, тогда существует такое p_0, что $x \in R_p$ для всех $p \geqslant p_0$ и, следовательно, $x_0 \in \overline{G}_p$ для $p \geqslant p_0$.

Из (92) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \varphi_k(x_0)| = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| =$$

$$= \sum_{l=0}^{p_0-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| + \sum_{l=p_0}^{\infty} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{p_0-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| + \sum_{l=p_0}^{\infty} 16\, \alpha_l < \infty \tag{99}$$

Далее при $p \geqslant p_0$ из (87) и (91) получим

$$\left| f_0(x_0) - \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} a_k \varphi_k(x_0) \right| = |f_p(x_0)| < \alpha_p \to 0 \text{ при } p \to \infty. \tag{100}$$

Из соотношений (96), (98)—(100) следует справедливость достаточности условий теоремы 5. Теорема доказана.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и за оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 8.V.1968

Ն. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. Օրթոգոնալ սիստեմների մի դասի մասին (*ամփոփում*)

Օրթոգոնալ սիստեմների որոշակի դասի համար գտնված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որին եթե բավարարում է այդ սիստեմներից որևէ մեկի ինչ որ ենթասիստեմ, ապա ամեն մի համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիայի համար այդ ենթասիստեմով կարելի է գրել համարյա ամենուրեք այդ ֆունկցիային զուգամիտող բացարձակ զուգամետ շարք։

N. H. SINANIAN. On a class of orthogonal systems (summary)

For a class of orthogonal systems the necessary and sufficient conditions are found under which every subsystem of a system is a representation system in the sence of convergence almost everywhere, in the set of all finite measurable functions. The series, representing $f(x)$ may be chosen in a way, ensuring absolute convergence almost everywhere.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Лузин*. Интеграл и тригонометрический ряд. Москва, 1957, стр. 627.
2. *А. А. Талалян*. О рядах, универсальных относительно перестановок, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 567—604.
3. *Ф. Г. Арутюнян*. О рядах по системе Хаара, ДАН АрмССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
4. *А. А. Талалян*. О сходимости почти всюду последовательности частных сумм общих ортогональных рядов, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., 10, 1957, 17—34.
5. *J. J. Price* and *Robert E.* Zink. On sets of completeness for families of Haar functions, Trans. Amer. Math. Society, 119, № 2, 1965, 262—269.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

УДК 51.01:518.5 РЕФЕРАТ

С. Н. МАНУКЯН

О КОНСТРУКТИВНЫХ КРИВЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В статье рассматривается ряд геометрических свойств конструктивных кривых и криволинейных интегралов, а также их приложения в теории конструктивных функций комплексной переменной. Аппарат конструктивного анализа применяется в том виде, как он введен в работе [1]. В частности применяется принцип А. А. Маркова [2]. В изложении ряда теоретико-алгорифмических вопросов используются результаты главы II работы [3]. При рассмотрении геометрических свойств конструктивных кривых используются результаты работы [4]; используются также понятия, терминология и обозначения работы [4]. В частности, основную роль в дальнейшем изложении играет понятие континентности кривой, входящее в условие конструктивного варианта теоремы Жордана ([4], § 1, теорема 1).

Все рассматриваемые объекты являются словами в алфавите

$$\{0,\ 1,\ -,/,\ \Diamond,\ \sigma,\ *,\ \Delta,\ \nabla,\ \oplus,\ o\},$$

обозначаемом через Щ. Понятия конструктивного анализа, для которых не дается отдельных определений, употребляются в том же смысле, как в [1], [4], [6]; ε, δ, η суть переменные, для которых допустимыми значениями являются положительные рациональные числа.

1. Основные определения

Конструктивное множество всех точек, которые являются внутренними (соответственно, не являются внешними) относительно равномерно непрерывной замкнутой континентной кривой Г, будем называть открытой (соответственно, замкнутой **односвязной областью**, определенной посредством кривой Г.

Говорим, что кривая K **содержится** (**строго содержится**) в Г, если все точки, лежащие на кривой K, не являются внешними (являются внутренними) относительно Г.

Пусть континентные кривые $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ строго содержатся в континентной кривой Г, и пусть все кривые $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, Г попарно ε-удалены друг от друга. Конструктивное множество всех точек, являющихся внутренними относительно Г и внешними относительно γ_1,

$\gamma_2, \cdots, \gamma_n$ назовем **многосвязной открытой областью** G, определенной кривыми $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$.

Говорим, что кривая K содержится в многосвязной открытой области G, если все точки кривой K принадлежат G.

Будем говорить, что кривая K определенная на $\alpha\Delta\beta$, является **простой дугой**, если

$$\forall t_1 t_2 \, (t_1, t_2 \in \alpha\Delta\beta \,\&\, t_1 \neq t_2 \supset K(t_1) \neq K(t_2)).$$

Пусть K—простая дуга. Мы скажем, что K является **континентной**, если

$$\forall n \exists m \forall t_1 t_2 \, (t_1, t_2 \in \alpha\Delta\beta \,\&\, \rho\,(K(t_1), K(t_2)) < 2^{-m} \supset |t_1 - t_2| < 2^{-n}).$$

Пусть K—кривая, определенная на $\alpha\Delta\beta$, $x \square y$—точка, удаленная от K, φ—угловая функция кривой K относительно точки $x \square y$. FR—число, $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ будем называть **скачком** угловой функции φ.

Пусть $t_1 * t_2 * \cdots * t_n$—определяющее дробление ломаной L. Точки $L(t_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ будем называть **вершинами** ломаной L, а отрезки $L(t_{i-1}) \Delta L(t_i)$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$ будем называть **сторонами** ломаной L.

Пусть ε—положительное рациональное число. Слово вида $x_1 \square y_1 * x_2 \square y_2 * \cdots * x_n \square y_n$ называется ε-**цепью**, если

$$\rho\,(x_i \square y_i, \; x_{i+1} \square y_{i+1}) < \varepsilon \quad (1 \leqslant i < n),$$

$$\rho\,(x_n \square y_n, \; x_1 \square y_1) < \varepsilon.$$

ε-цепь $x_1 \square y_1 * x_2 \square y_2 * \cdots * x_n \square y_n$ будем называть ε-**цепью относительно точки** $x \square y$, если

$$\rho\,(x_i \square y_i, \; x \square y) \geqslant 2\varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Пусть $x_1 \square y_1 * x_2 \square y_2 * \cdots * x_n \square y_n$ — ε-цепь относительно точки $x \square y$. **Порядком** ε-цепи $x_1 \square y_1 * x_2 \square y_2 * \cdots * x_n \square y_n$ относительно точки $x \square y$ будем называть целое число $\dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{2\pi}$, где φ есть угловая функция относительно точки $x \square y$ замкнутой ломаной с вершинами $x_1 \square y_1$, $x_2 \square y_2, \cdots, x_n \square y_n, x_1 \square y_1$.

Пусть $x_1 \square y_1 * x_2 \square y_2 * \cdots * x_n \square y_n$ — ε-цепь, и K— замкнутая кривая, определенная на $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что $x_1 \square y_1 * x_2 \square y_2 * \cdots * x_n \square y_n$ есть ε-**цепь кривой** K, **если** осуществимы такие FR-числа $t_1, t_2, \cdots, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n$ из $\alpha\Delta\beta$, что $K(t_1) = x_1 \square y_1$, $K(t_2) = x_2 \square y_2, \cdots$, $K(t_n) = x_n \square y_n$

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_i, \quad t_{i+1} \leqslant t_{i+2} \leqslant \cdots \leqslant t_n,$$

и выполнено одно из неравенств $t_i \leqslant t_{i+1}$ или $t_n \leqslant t_1$.

Две ε-цепи $x'_1 \square y'_1 * x'_2 \square y'_2 * \cdots * x'_n \square y'_n$ и $\dot{x}_1 \square \dot{y}_1 * \dot{x}_2 \square \dot{y}_2 * \cdots * \dot{x}_m \square \dot{y}_m$ называются **равными**, если $n = m$ и $x'_i \square y'_i = \dot{x}_i \square \dot{y}_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

Слово вида $x_1 \square y_1 \Delta x_2 \square y_2 \Delta \cdots \Delta x_n \square y_n$ (соответственно, $x_1 \square y_1 \nabla x_2 \square y_2 \nabla \cdots \nabla x_n \square y_n$) будем называть **замкнутым** (соответственно, **откры-**

тым) многоугольником, если линейный образ цепочки отрезков $x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 * x_2 \beth y_2 \Delta x_3 \beth y_3 * \cdots * x_n \beth y_n \Delta x_1 \beth y_1$ является самонепересекающейся ломаной.

Контуром многоугольника $x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 \Delta \cdots \Delta x_n \beth y_n$ (соответственно, $x_1 \beth y_1 \nabla x_2 \beth y_2 \nabla \cdots \nabla x_n \beth y_n$) будем называть цепочку отрезков $x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 * x_2 \beth y_2 \Delta x_3 \beth y_3 * \cdots * x_{n-1} \beth y_{n-1} \Delta x_n \beth y_n * x_n \beth y_n \Delta x_1 \beth y_1$ (соответственно $x_1 \beth y_1 \nabla x_2 \beth y_2 * x_2 \beth y_2 \nabla x_3 \beth y_3 * \cdots * x_{n-1} \beth y_{n-1} \nabla x_n \beth y_n * x_n \beth y_n \nabla x_1 \beth y_1$).

ЛО-контуром многоугольника S будем называть линейный образ контура S (для краткости, в дальнейшем вместо „ЛО-контур многоугольника" будем говорить „ЛО-многоугольник").

Будем говорить, что точка $x_0 \beth y_0$ принадлежит замкнутому многоугольнику $x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 \Delta \cdots \Delta x_n \beth y_n$ (соответственно, открытому многоугольнику $x_1 \beth y_1 \nabla x_2 \beth y_2 \nabla \cdots \nabla x_n \beth y_n$) и писать $x_0 \beth y_0 \in x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 \Delta \cdots \cdots \Delta_n x \beth y_n$ (соответственно, $x_0 \beth y_0 \in x_1 \beth y_1 \nabla x_2 \beth y_2 \nabla \cdots \nabla x_n \beth y_n$), если $x_0 \beth y_0$ является внутренней (соответственно, не является внешней) точкой относительно ЛО-многоугольника $x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 \Delta \cdots \Delta x_n \beth y_n$.

Многоугольник вида $x_1 \beth y_1 \Delta x_2 \beth y_2 \Delta x_3 \beth y_3$ (соответственно, $x_1 \beth y_1 \nabla \nabla x_2 \beth y_2 \nabla x_3 \beth y_3$) называется замкнутым (соответственно, открытым) треугольником.

Слово P в алфавите Щ будем называть симплексным многочленом, если P имеет вид $k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n$, где $n > 1$, $k_1, k_2 \cdots, k_n$ — целые числа, а $s_1, s_2, \cdots, s_n$ — отрезки.

Будем говорить, что симплексный многочлен α непосредственно эквивалентен симплексному многочлену β, если α и β имеют один из следующих видов:

1) $$\alpha = k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n,$$
$$\beta = k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k \circ s \oplus k_{l+1} \circ s_{l+1} \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n,$$

где $k = -k_l$, а отрезок s получается из отрезка s_l заменой начальной точки конечной точкой, а конечной точки—начальной точкой.

2) $\alpha = k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n$, где отрезки s_l и s_j $(1 \leqslant l, j \leqslant n)$ совпадают;

$$\beta = k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k \circ s_l \oplus k_{l+1} \circ s_{l+1} \oplus \cdots \oplus k_{j-1} \circ s_{j-1} \oplus$$
$$k_{j+1} \circ s_{j+1} \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n, \text{ где } k = k_l + k_j.$$

3) $$\alpha = k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k_{l-1} \circ s_{l-1} \oplus 0 \circ k_l \oplus k_{l+1} \circ s_{l+1} \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n;$$
$$\beta = k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \oplus k_{l-1} \circ s_{l-1} \oplus k_{l+1} \circ s_{l+1} \oplus \cdots \oplus k_n \circ s_n.$$

Будем говорить, что симплексные многочлены α и β эквивалентны, если существует система симплексных многочленов $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ такая, что $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ и α_l непосредственно эквивалентен α_{l+1} при $l = 1, 2, \cdots, n-1$.

Будем говорить, что симплексный многочлен $k_1 \circ s_1 \oplus k_2 \circ s_2 \oplus \cdots \cdots \oplus k_n \circ s_n$ является характеристическим симплексным многочленом многоугольника $x_1 \beth y_1 \omega x_2 \beth y_2 \omega \cdots \omega x_n \beth y_n$, где ω есть или Δ или ∇, если $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$, каждое s_l при $1 \leqslant l \leqslant n-1$ является отрезком $x_l \beth y_l \omega x_{l+1} \beth y_{l+1}$, и s_n является отрезком $x_n \beth y_n \omega x_1 \beth y_1$.

Суммой симплексных многочленов α и β будем называть симплексный многочлен $\alpha \oplus \beta$.

Будем говорить, что многоугольник L **составлен** из многоугольников $L_1, L_2, \cdots, L_n$, если сумма характеристических симплексных многочленов $L_1, L_2, \cdots, L_n$ эквивалентна характеристическому симплексному многочлену многоугольника L, и каждый из ЛО-многоугольников $L_i (1 \leqslant i < n)$ содержится в ЛО-многоугольнике L.

2. Некоторые свойства конструктивных кривых

Теорема 2.1. *Какова бы ни была равномерно непрерывная континентная простая дуга K, определенная на $\alpha\Delta\beta$, для всяких двух точек $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \supset y_2$, удаленных от K, осуществима ломаная L, соединяющая точки $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \supset y_2$ и удаленная от K.*

Доказательство проводится тем же методом, что и доказательство теоремы 1 из [4] (см. [4], § 6).

Теорема 2.2. *Пусть K—равномерно непрерывная континентная замкнутая кривая. Для всякого $t \in \alpha\Delta\beta$ и для всякого n осуществима точка $x \supset y$, внешняя относительно K и такая, что $\rho\,(x \supset y, K(t)) < 2^{-n}$.*

Теорема 2.3. *Пусть γ и Γ суть замкнутые равномерно непрерывные континентные кривые. Если γ содержится в Γ, то всякая точка, внутренняя относительно γ, является внутренней также относительно Γ, и всякая точка, внешняя относительно Γ, является внешней также относительно γ.*

Теорема 2.4. *Пусть $x \supset y$ и $u \supset v$—внутренние точки относительно континентной замкнутой кривой Γ, заданной на $\alpha\Delta\beta$. Пусть ω_1 и ω_2—какие-либо угловые функции для кривой Γ относительно точек $x \supset y$ и $u \supset v$ соответственно. Тогда $\omega_1(\beta) - \omega_1(\alpha) = \omega_2(\beta) - \omega_2(\alpha)$.*

Теорема 2.5. *Пусть точка $x_0 \supset y_0$ не лежит на отрезке $x_1 \supset y_1 \Delta x_2 \supset y_2$ и пусть ω есть угловая функция для ЛО-отрезка $x_1 \supset y_1 \Delta x_2 \supset y_2$, определенного на $\alpha\Delta\beta$, относительно точки $x_0 \supset y_0$. Тогда $|\omega(\beta) - \omega(\alpha)| < \pi$.*

Следующие две теоремы носят вспомогательный характер и служат для обоснования переходов от кривых к аппроксимирующим ломаным в доказательствах последующих теорем.

Теорема 2.6. *Пусть слово $x_0 \supset y_0 * x_1 \supset y_1 * \cdots * x_n \supset y_n$ является ε-цепью относительно точки $x \supset y$. Пусть точка $x' \supset y'$ не совпадает ни с одной из точек $x_i \supset y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ и такова, что при некотором k от 1 до $n-1$ имеет место*

$$\rho\,(x' \supset y', x_k \supset y_k) \leqslant \varepsilon, \ \rho\,(x' \supset y', x_{k-1} \supset y_{k-1}) \leqslant \varepsilon \quad \rho\,(x' \supset y', x \supset y) \geqslant 2\varepsilon.$$

Тогда порядки цепей $x_0 \supset y_0 * x_1 \supset y_1 * \cdots * x_n \supset y_n$ и $x_0 \supset y_0 * x_1 \supset y_1 * \cdots * x_{k-1} \supset y_{k-1} * x' \supset y' * x_{k+1} \supset y_{k+1} * \cdots * x_n \supset y_n$ относительно точки $x \supset y$ совпадают.

Теорема 2.7. *Пусть K—равномерно непрерывная континентная замкнутая кривая на $\alpha\Delta\beta$, и пусть $\eta > 0$. Тогда осуществимо такое $\delta < \eta$, что для любого $\varepsilon < \delta$ и для любой ε-цепи Ц кривой K*

относительно любой точки $x \supset y$, η-удаленной от K, оказывается: порядок цепи Ц относительно $x \supset y$ совпадает со скачком угловой функции K относительно $x \supset y$, деленным на 2π.

Теорема 2.8. *Всякий ЛО-многоугольник континентен.*

Теорема 2.9. *Скачок угловой функции равномерно непрерывной замкнутой кривой относительно любой ее внутренней точки равен 2π или -2π.*

Теорема 2.10. Пусть Γ *есть ЛО-многоугольник, отрезок $x_1 \supset y_1 \Delta x_2 \supset y_2$ пересекается с некоторой стороной S ломаной Γ в точке, не равной ни одной из вершин S, и не равной ни $x_1 \supset y_1$, ни $x_2 \supset y_2$, пусть, кроме того, $x_1 \supset y_1 \Delta x_2 \supset y_2$ не имеет других точек пересечения с Γ. Тогда $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \supset y_2$ разноименны относительно Γ.*

Теорема 2.11. *Для любого многоугольника L с рациональными вершинами можно построить треугольники $L_1, L_2, \cdots, L_n$ такие, что L составлен из треугольников $L_1, L_2, \cdots, L_n$.*

Теорема 2.12. *Пусть K—равномерно непрерывная кривая, определенная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть FR-число $u > 0$ таково, что для любых двух точек $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \supset y_2$, лежащих на кривой K, оказывается: $\rho(x_1 \supset y_1, x_2 \supset y_2) \leqslant u$. Тогда для любых двух точек $x_1 \supset y_1$ и $x_2 \supset y_2$, внутренних относительно, K будет: $\rho(x_1 \supset y_1, x_2 \supset y_2) < u$.*

Теорема 2.13. *Пусть кривая K, определенная на $\alpha\Delta\beta$, точка $x_0 \supset y_0$ и FR-число $u > 0$ таковы, что расстояние всякой точки, лежащей на кривой K, от точки $x_0 \supset y_0$ не превосходит u. Тогда расстояние всякой точки, внутренней относительно K, до точки $x_0 \supset y_0$ меньше u.*

3. Комплексные числа и функции

Комплексным FR-числом (сокращенно KFR—числом) называется всякое слово, являющееся двумерной точкой или действительным FR-числом. Символы z, w, ζ будут употребляться в качестве переменных, допустимыми значениями которых являются KFR-числа. Действительная и мнимая компоненты KFR-числа, модуль KFR-числа, арифметические действия над KFR-числами, равенство KFR-чисел определяются естественным образом; для них вводятся такие же обозначения, как в классическом анализе.

Алгорифм F называется комплексной функцией, если F перерабатывает всякое KFR-число, к которому он применим, в KFR-число, и таков, что

$$\forall z_1 z_2 \, (z_1 = z_2 \,\&\, ! \, F(z_1) \supset \, ! \, F(z_2) \,\&\, F(z_1) = F(z_2)).$$

Понятие комплексной функции, определенной на конструктивном множестве M, а также комплексной функции, непрерывной, равномерно непрерывной, дифференцируемой, равномерно дифференцируемой на конструктивном множестве M, вводятся естественным образом по аналогии с определениями из [1], [3], [5], [6].

Пусть K—кривая, содержащаяся в области G, определенной посредством кривой Γ, F—комплексная функция, определенная в G. Понятие *интегрируемости по Риману* функции F вдоль кривой K, а также понятие *интеграла Римана* функции F вдоль кривой K определяются естественным образом по аналогии с определениями из [8]. Легко устанавливается, что для всякой спрямляемой кривой K и для всякой комплексной функции F, равномерно непрерывной на K, осуществимо KFR-число z, являющееся интегралом Римана F по K. Интеграл Римана будет обозначаться таким же образом, как это делается в классическом анализе.

4. Интегралы от комплексных функций

Лемма 4.1. *Пусть f есть функция, равномерно непрерывная в односвязной замкнутой области G, определенной посредством кривой Γ. Пусть спрямляемая несамопересекающаяся замкнутая кривая K определена на $\alpha\Delta\beta$, удалена от Γ и содержится в Γ. Тогда для любого ε и для любого η осуществима замкнутая ломаная γ с рациональными вершинами такая, что все стороны ее попарно не коллинеарны, γ строго содержится в Γ, всякая точка, лежащая на Γ, удалена от K меньше, чем на η, и имеет место неравенство*

$$\left| \int_K f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.1. (*конструктивный вариант теоремы Коши*). *Пусть f—равномерно непрерывная и дифференцируемая функция в односвязной замкнутой области G, определенной посредством кривой Γ. Тогда для всякой замкнутой несамопересекающейся кривой K, удаленной от Γ и содержащейся в Γ, оказывается* $\int_K f(z)\,dz = 0$.

Теорема 4.2. *Пусть G—многосвязная область, определенная кривыми Γ, γ_1, γ_2, $\cdots$, γ_n. Пусть K—континентная замкнутая кривая, содержащаяся в G, определенная на $\alpha\Delta\beta$, удаленная от кривых Γ, γ_1, $\gamma_2, \cdots$, γ_n и такая, что всякая точка, лежащая на одной из указанных кривых, является внешней относительно K. Пусть f—дифференцируемая и равномерно непрерывная функция в G. Тогда*

$$\int_K f(z)\,dz = 0$$

Лемма 4.2. *Пусть G—двусвязная замкнутая область, определенная кривыми Γ и γ, где γ определена на невырожденном сегменте, пусть K—спрямляемая замкнутая континентная кривая, определенная на $\alpha\Delta\beta$, содержащаяся в G, удаленная от Γ и γ. Пусть f—функция, дифференцируемая и равномерно непрерывная в G. Тогда для любых ε, δ, η осуществима несамопересекающаяся ломаная L с рациональными вершинами, определенная на $\alpha\Delta\beta$, содержащаяся в G, удаленная от Γ и γ, и такая, что стороны L*

попарно не коллинеарны, скачки угловых функций кривых K и L относительно любой точки, δ-удаленной от K, совпадают, всякая точка, лежащая на ломаной L, удалена от кривой K меньше, чем на η, и имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_K f(z)\,dz - \int\limits_L f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Теорема 4.3. *Пусть G—двусвязная область, определенная кривыми Γ и γ, f—функция. равномерно непрерывная и дифференцируемая в G, L и K—континентные спрямляемые замкнутые кривые в области G, удовлетворяющие следующим условиям:* 1) *L и K удалены друг от друга и от кривых Γ и γ;* 2) *Всякая точка кривой γ является внутренней относительно K;* 3) *всякая точка кривой K является внутренней относительно L;* 4) *скачки угловых функций кривых L и K относительно любых их внутренних точек совпадают. Тогда*

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_K f(z)\,dz.$$

Теорема 4.4. *Пусть f—функция, равномерно непрерывная и дифференцируемая в односвязной замкнутой области G, определенной посредством континентной кривой Γ. Пусть K—континентная спрямляемая кривая, содержащаяся в области G и удаленная от Γ, и пусть z—внутренняя точка относительно K. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Теоремы интуиционистской математики, аналогичные ряду теорем настоящей статьи, были получены в работах [10] и [11]; в частности, в работе [10] получены интуиционистские теоремы, аналогичные теоремам 2.1, 2.2, 2.6, 2.9; в работе [11] получены интуиционистские варианты теоремы Коши и теоремы об интеграле Коши. Однако эти теоремы получены в существенно более сильных предположениях по сравнению с рассмотрениями настоящей статьи; так, например, в работе [10] исследуются лишь кривые, допускающие обратное равномерно непрерывное отображение на окружность или отрезок; в [11] исследуются лишь равномерно дифференцируемые кривые и равномерно дифференцируемые функции. Рассмотрения работ [10] и [11] существенно связаны с предпосылками интуиционистской математики и не могут быть непосредственно интерпретированы в рамках конструктивного направления. Библиографий 11.

Вычислительный центр АН АрмССР
и Ереванского государственного университета
Поступило 20.VI.1968

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

УДК 517.535 РЕФЕРАТ

М. Н. ШЕРЕМЕТА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть функция $\omega(z)$, $z=\rho e^{i\theta}$ — аналитическая в области $\{\rho>a, |\theta|<\pi-\eta\}$ (где $\eta>0$ — некоторая достаточно малая постоянная), действительная на вещественной оси, удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(z)=\omega(\rho)+\omega_1(\rho,\theta)+i\omega_2(\rho,\theta)$, где $\omega_1(\rho,\theta)$ и $\omega_2(\rho,\theta)$ — действительные величины, которые при $|\theta|<\pi-\eta$ и $\rho\to\infty$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\omega_1(\rho,\theta)=O\left(\frac{1}{\ln\rho\ln_2\rho}\right) \text{ и } \omega_2(\rho,\theta)=O\left(\frac{1}{\ln\rho\ln_2\rho}\right);$$

2) $\omega'(z)=O\left(\frac{1}{\rho\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ при $\rho\to\infty$ и $|\theta|<\pi-\eta$;

3) $\omega''(z)=O\left(\frac{1}{\rho^2\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ при $\rho\to\infty$ и $|\theta|<\pi-\eta$;

4) $0<\lambda_1\leqslant\omega(\rho)\leqslant\lambda_2<\infty$, $\lambda_1\equiv\text{const}$, $\lambda_2\equiv\text{const}$.

Здесь через $\ln_k x$ обозначена k-я итерация логарифма:

$$\ln_1 x=\ln x,\ \ln_k x=\ln(\ln_{k-1}x),\ k=2,3,4,\cdots.$$

Примером функции, удовлетворяющей указанным выше условиям, может служить функция

$$\omega(z)=\frac{1}{2}\{\lambda_1+\lambda_2+(\lambda_2-\lambda_1)\sin(\ln_3 z)\},$$

где каждый логарифм понимается в смысле главного значения.

Миттаг-Леффер [1] исследовал асимптотику степенного ряда

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

где $x=re^{i\varphi}$, а α — постоянная величина, $0<\alpha<\infty$, нашей целью является исследование асимптотического поведения ряда

$$E_\omega(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))}, \tag{1}$$

где $\omega(z)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и для целочисленных значений k, $0\leqslant k\leqslant[a]+1$, $\omega(k)$ — произвольная последовательность. Здесь $[a]$ — целая часть числа a. Исследование асимптотического поведения ряда (1) мы проводим в основном тем же методом, что и Миттаг-Леффлер [1], используя при этом метод перевала (см. [2], [3]).

Обобщением функции Миттаг-Леффлера занимались многие авторы, обзор см. в [4], §§ 18.1, 18.3. В этом обзоре не указаны работы М. М. Джрбашяна, подытоженные в монографии [5], и статьи В. Ж. Риекстыни [6], [7]. В отличие от всех этих работ, где рассматривались случаи, когда нижний порядок функции λ равен порядку ρ, мы будем рассматривать и тот случай, когда $\lambda \neq \rho$. Класс функций, рассматриваемый нами, содержит все известные нам обобщения функций типа Миттаг-Леффлера, которые рассматривались ранее, но асимптотика, которую мы находим, менее точна, чем известная в частных случаях.

1°. Обозначим через $\mu(r)$ максимальный член ряда (1), через $\nu = \nu(r)$ — его центральный индекс. Используя свойства Г-функции ([8], стр. 32, 36), а также условия 2), 3), 4), можно показать, что $\mu(r)$ и $\nu(r)$ при $r \to \infty$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\ln r = \omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right), \tag{2}$$

$$\mu(r) = \exp\left\{\nu\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right)\right)\right\}.$$

Асимптотика функции (1) находится при помощи функции $\omega(\nu)$. Пусть $x = re^{i\varphi}$, $\delta > 0$ — достаточно малая постоянная величина, $m = 0, 1, 2, \cdots$. Введем следующие обозначения. Скажем, что

$$x \in D_0, \text{ если } \left|\begin{array}{l} \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 1 - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\dfrac{\pi\omega)\nu)}{2} + \delta\right); \end{array}\right.$$

$$x \in D_m^{(1)}, \text{ если } \left\{\begin{array}{l} 2m - \dfrac{\delta}{\pi} \leqslant \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2m + 1 - \dfrac{\delta}{\pi}\cdot \\ 2m\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta - 2m\pi; \end{array}\right.$$

$$x \in D_m^{(2)}, \text{ если } \left|\begin{array}{l} 2m + 1 - \dfrac{\delta}{\pi} \leqslant \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ -2(m+1)\pi + \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2(m+1)\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right); \end{array}\right.$$

$$x \in D_m^{(3)}, \text{ если } \left|\begin{array}{l} 2m + 1 - \dfrac{\delta}{\pi} < \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ 2(m+1)\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta - 2m\pi; \end{array}\right.$$

$$x \in D_m^{(4)}, \quad \text{если} \quad \left| \begin{array}{l} 2(m+1) - \frac{\delta}{\pi} \leqslant \frac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) + 1 - \frac{\delta}{\pi}, \\ -2(m+1)\pi + \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2(m+2)\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right). \end{array} \right.$$

Кроме того, через D_δ обозначим следующее множество:

$$D_\delta = G / \left\{ \left| \varphi \pm \frac{\pi\omega(\nu)}{2} \right| < \delta \right\},$$

где через G обозначена плоскость переменного x.

Имеет место следующая

Основная теорема. *Для функции $E_\omega(x)$, представленной рядом (1), где $\omega(z)$ — аналитическая в области $\{|z| > a,\ |\arg z| < \pi - \eta\}$, действителная на вещественной оси функция, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3) и 4), справедливы следующие соотношения:*

$$E_\omega(x) = \left| \begin{array}{ll} \exp\left\{ O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, \text{ если } x \in D_0 \cap D_\delta, & (3) \\ \exp\left\{ O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \sum\limits_{n=-(m+j)}^{m} \exp\left\{ (1 + o(1))\, x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} e^{\frac{2\pi i n}{\omega(\nu)}} \right\} + & \\ \quad + O\left(\frac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right), \text{ если } x \in \left(\bigcup\limits_{i=1}^{4} D_m^{(i)} \right) \cap D_\delta, & (4) \end{array} \right.$$

где

$$j = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{если } x \in D_\delta \cap (D_m^{(1)} \cup D_m^{(2)}), \\ 1, & \text{если } x \in D_\delta \cap (D_m^{(3)} \cup D_m^{(4)}). \end{array} \right.$$

2°. Пусть функция $\lambda_1(\rho) > 0$ при $\rho > a$ монотонно стремится к нулю, когда $\rho \to \infty$, причем $\underline{\lim}_{\rho \to \infty} \lambda_1(\rho) \ln_4 \rho = c > 0$, а функция $\lambda_2(\rho) > 0$ при $\rho > a$ монотонно стремится к ∞, когда $\rho \to \infty$, причем $\overline{\lim}_{\rho \to \infty} \lambda_2(\rho)(\ln_4 \rho) = d < \infty$, и пусть функция $\omega(z)$ вместо условия 4) удовлетворяет более слабому условию

5) $$\lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2(\rho).$$

Примером такой функции может служить

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \{(\ln_4 z)^{-1} + \ln_4 z + (\ln_4 z - (\ln_4 z)^{-1}) \sin(\ln_3 z)\},$$

где каждый логарифм понимается в смысле главного значения.

Основная теорема допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Для функции $E_\omega(x)$, представленной рядом (1), где $\omega(z)$ удовлетворяет условиям основной теоремы, кроме условия 4), которое заменено условием 5), справедливы соотношения (3) и (4), где в (4) вместо*

$$\exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}$$

стоит

$$\exp\left\{O\left(\frac{\nu (\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}.$$

В случае, когда $\lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2 < 2$, $\lambda_2 \equiv \text{const}$, основная теорема уточняется, а именно, если обозначить через $\check{D}_0$ множество тех значений $x = re^{i\varphi}$, для которых

$$\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right),$$

через $\check{D}_0^{(1)}$ — множество тех значений $x = re^{i\varphi}$, для которых

$$-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right) < \varphi \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu},$$

а через $\check{D}_\delta$ — следующее множество

$$\check{D}_\delta = \left\{\nu > a,\ \lambda_1(\nu) \leqslant \omega(\nu) \leqslant \lambda_2\right\} \setminus \left\{\left|\varphi \pm \frac{\pi\omega(\nu)}{2}\right| < \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right\},$$

где $\delta > 0$ — произвольно малое число, то имеет место

Теорема 2. *Для функции $E_\omega(x)$ справедливы соотношения*

$$E_\omega(x) = \begin{cases} \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, \text{ если } x \in \check{D}_0 \cap \check{D}_\delta, \\ \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \exp\left\{(1+o(1))\, x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} + O\left(\frac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right)\right\}, \\ \qquad \text{если } x \in \check{D}_0^{(1)} \cap D_\delta \end{cases}$$

при $r \to \infty$.

3°. Из равенства (2), используя условие 2), можно получить, что

$$\omega(\nu) = \omega(r) + o(1),$$

а используя условия, наложенные на функции $\lambda_1(\rho)$ и $\lambda_2(\rho)$, а также условия 2) и 5), можно показать, что

$$O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right) = O\left(\frac{\nu (\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right) = o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right),\quad O\left(\frac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right) = o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right).$$

Поэтому из основной теоремы и теорем 1 и 2 легко получить, что

$$\ln M(r, E_\omega) = \ln E_\omega(r) = (1 + o(1))\, r^{\frac{1}{\omega(\nu)}},$$

где $M(r, E_\omega) = \max\limits_{|x|=r} |E_\omega(x)|$. Нетрудно также показать, что характеристическая функция Неванлинны удовлетворяет следующему соотношению:

$$T(r, E_\omega) = (1 + o(1)) \frac{\omega(\nu)}{\pi} \sin\left\{\min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\omega(\nu)}\right)\right\} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}$$

при $r \to \infty$.

4°. Пусть $f(re^{i\varphi})$ — целая функция порядка ρ и нижнего порядка λ, $\lambda \leqslant \rho$. Класс таких функций обозначим через $\Lambda_{\lambda, \rho}$. Если $f(re^{i\varphi}) \in \Lambda_{\lambda, \rho}$, то (см. [9] и [10])

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+|f(re^{i\varphi})|}{T(r, f)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \pi\lambda, & \lambda > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Так как $T(r, f) \leqslant \ln M(r, f)$, то в случае, когда $\lambda = 0$, очевидно, что оценка (6) точна. Если $\frac{1}{2} < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, пример целой функции из класса $\Lambda_{\lambda, \rho}$, показывающий точность оценки (6), построил В. П. Петренко [11]. Функция $E_\omega(x)$ указывает на точность оценки (6) и в случае, когда $0 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, без ограничения $\lambda > \frac{1}{2}$. Действительно, если положить $\lambda_1 = \frac{1}{\rho}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$, $0 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, и выбрать $\omega(r)$ так, чтобы $\varlimsup_{r\to\infty} \omega(\nu) = \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$, $\varliminf_{r\to\infty} \omega(\nu) = \lambda_1 = \frac{1}{\rho}$ (а это возможно, ввиду (5)), то легко видеть, что порядок функции $E_\omega(x)$ равен ρ, а нижний порядок равен λ. При $\varphi = 0$ выполняется $\ln^+|E_\omega(re^{i\varphi})| = \ln M(r, E_\omega)$ и

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, E_\omega)}{T(r, E_\omega)} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\pi}{\omega(\nu) \sin\left\{\min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\omega(\nu)}\right)\right\}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & 0 < \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \pi\lambda, & \lambda > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Автор выражает глубокую признательность А. А. Гольдбергу за внимательное руководство и М. А. Евграфову за ценные указания.
Библиографий 11.

Львовский государственный университет
им. Франко

Поступило 15.VIII.1968.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ե. Ա. Հարությունյան. *Վերջավոր թվով մուտքում հայտնի վիճակ ունեցող կապի գծի միջոցով ինֆորմացիայի հաղորդման օպտիմալության մասին* 81

Է. Վ. Մորոզյուկ. *Ռ. Լագրանժի շարքերի որոշ հատկությունների մասին* 91

Ս. Գ. Հովսեփյան. *Լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի ծնող բազմության և չափելի ֆունկցիաների դասում բոլոր ընդհանրացած սեփական ֆունկցիաների կառուցումը* 102

Ն. Հ. Սինանյան. *Օրթոգոնալ սիստեմների մի դասի մասին* 122

ՌԵՖԵՐԱՏՆԵՐ

Մ. Ն. Շերեմետա. *Միտտագ-Լեֆֆլերի տիպի ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ վարքը և նրանց կիրառությունները* 137

Ս. Ն. Մանուկյան. *Կոնստրուկտիվ կորերի և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների կորագիծ ինտեգրալների մասին* 144

СОДЕРЖАНИЕ

Е. А. Арутюнян. Об оптимальной передаче информации по каналу с конечным числом состояний, вычислимых на передающем конце 81

Э. В. Морозюк. Некоторые свойства рядов Р. Легранжа 91

С. Г. Овсепян. Построение порождающего множества и всех обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны в классе измеримых функций 102

Н. О. Синанян. Об одном классе ортогональных систем. 122

РЕФЕРАТЫ

С. Н. Манукян. О конструктивных кривых и криволинейных интегралах от функции комплексной переменной 137

М. Н. Шеремета. Асимптотическое поведение функций типа Миттаг-Леффлера и их приложение 144

CONTENTS

E. A. Haroutunian. On optimality of information transmission over a finite-state channel with state calculable by the sender 81

E. V. Morosuk. Some properties of Lagrange series 91

S. G. Hovsepian. The construction of the generating set and generalized eigenfunction in the class of measurable functions of the Dirichlet problem for vibrating string equation 102

N. H. Sinanian. On a class of orthogonal systems 122

ABSTRACTS

S. N. Manukian. On constructive curves and contour integrals of a function of complex variable 137

M. N. Sheremeta. Asymptotic behaviour of Mittag-Loeffler functions (with application) 144