ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ն. Հ. ԱՌԱՔՆԵՑԱՆ
Ի. Դ. ՋԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծերով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզրաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
Н. У. АРАКЕЛЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. Б. НЕРСЕСЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 50 Կ.
ЦЕНА 50 К.

индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
N. H. ARAKELIAN
S. N. MERGELIAN
A. B. NERSESIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

Г. Б. МАРАНДЖЯН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье устанавливаются некоторые свойства асимптотически оптимальных рекурсивных функций и сложностей натуральных чисел относительно них, введенных А. Н. Колмогоровым в работе [1].

Будут рассматриваться некоторые операции над частично-рекурсивными функциями и будет исследоваться вопрос о том, какие из этих операций сохраняют свойство асимптотической оптимальности. Так, в теоремах 1, 2, 4 рассматриваются вопросы, связанные с преобразованиями асимптотически оптимальных функций при помощи операции суперпозиции. А именно, изучается вопрос о том, для каких функций можно гарантировать асимптотическую оптимальность функций, получаемых при подстановке их в асимптотически оптимальные функции и при подстановке асимптотически оптимальных функций в них. В связи с этим будут введены понятия подстановочных и надстановочных функций и изучены их свойства. Другие типы преобразований частично-рекурсивных функций, сохраняющих свойство асимптотической оптимальности, рассмотрены в теоремах 11 и 12.

Будут рассматриваться также вопросы, связанные с мажорированием и минорированием асимптотически оптимальных функций, а также сложностей натуральных чисел относительно них, при помощи вычислимых функций тех или иных типов при различных вариантах мажорирования и минорирования (теоремы 6—9).

Остальная часть работы посвящена исследованию свойств функций, асимптотически оптимальных для множества одноместных примитивно-рекурсивных и множества одноместных обще-рекурсивных функций (теоремы 13—17).

В дальнейшем все термины и утверждения понимаются конструктивно [3].

1. Введем некоторые обозначения и определения. Буквами a, c, d, q, t, x, y, z будут обозначаться переменные, принимающие значения из натурального ряда чисел 0, 1, 2, 3, $\cdots$.

Строчными греческими буквами δ, φ, ψ, ζ, ρ, ω (иногда с индексами) будут обозначаться частично-рекурсивные функции.

Через σ, ι, $\varkappa$ обозначена тройка примитивно-рекурсивных функций таких, что

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\iota(x), \varkappa(x)) &= x; \\ \iota(\sigma(x, y)) &= x; \\ \varkappa(\sigma(x, y)) &= y \end{aligned}\right|.$$

Через ε будет обозначаться примитивно-рекурсивная функция такая, что $\varepsilon(x) \equiv x$.

Прописными греческими буквами Φ, Ψ, Ξ (иногда с индексами) будут обозначаться одноместные асимптотически оптимальные функции, или такие функции, для которых в той или иной связи ставится вопрос об их асимптотической оптимальности.

Множество всех одноместных примитивно-рекурсивных функций обозначим через Π^1.

Множество всех одноместных частично-рекурсивных функций обозначим через Ψ^1.

Будем использовать обозначения μ, ν, sg, $\overline{sg}$, $[\ ]$, max, $\dot{-}$, $\simeq$ в том же смысле, в каком они использованы в работе [4], а символы $!$ и $\leftrightarrows$ в том смысле, в каком они используются в работе [3].

Если φ и ψ являются одноместными частично-рекурсивными функциями, то через $\varphi \circ \psi$ будет обозначаться одноместная частично-рекурсивная функция ζ, задаваемая посредством следующего условного равенства: $\zeta(x) \simeq \varphi(\psi(x))$.

Остальные определения и обозначения будут вводиться по мере их появления в тексте.

2. В этом пункте мы введем определения длины и сложности натурального числа, а также асимптотически оптимальной функции, следуя работе [1], но в иной форме.

Через l будем обозначать примитивно-рекурсивную функцию такую, что

$$l(x) = [\log_2(x+1)]; \tag{1}$$

$l(x)$ называется *длиной* натурального числа x.

Введем 3-местный предикат P следующим образом:

$$P(y, \varphi, x) \leftrightarrows ((\varphi(x) = y) \,\&\, \forall z\,(l(z) < l(x) \supset \neg(\varphi(z) = \varphi(x)))), \tag{2}$$

где x, y, z — переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа, а φ — переменная, допустимыми значениями которой являются одноместные частично-рекурсивные функции.

Определение 1. *Будем говорить, что натуральное число x является минимальным φ—прообразом натурального числа y, если для данных x, y, φ имеет место $P(y, \varphi, x)$.*

Введем трехместный предикат K следующим образом:

$$K(y, \varphi, x) \leftrightarrows \exists z\,(P(y, \varphi, z) \,\&\, l(z) = x), \tag{3}$$

где x, y, z— переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа, а φ — переменная, допустимыми значениями которой являются одноместные частично-рекурсивные функции.

Определение 2. *Будем говорить, что натуральное число x есть сложность натурального числа y относительно одноместной частично-рекурсивной функции φ, если* $K(y, \varphi, x)$.

Отметим следующую связь принятой здесь символики с символикой, введенной в работе [1]. Условие, записываемое в [1] в виде $K_{\varphi}(y) = x$, здесь записывается в виде $K(y, \varphi, x)$.

Отход от обозначений, введенных в работе [1], связан со спецификой принятого в конструктивной математике истолкования выражений, имеющих вид $K_{\varphi}(y)$ (см. [2]. Приложение). Для того чтобы сохранить обозначение $K_{\varphi}(y)$, было бы необходимо показать, что осуществим алгорифм, который по функции φ и натуральному числу y строит объект $K_{\varphi}(y)$. Однако мы не располагаем алгорифмом, который мог бы по каждой одноместной частично-рекурсивной функции φ и натуральному числу y строить $K_{\varphi}(y)$; более того, можно доказать, что такой алгорифм (в смысле имеющихся ныне уточнений этого понятия) невозможен.

Отметим, что не существует и алгорифма, который был бы применим к тройке объектов x, y, φ тогда и только тогда, когда имеет место $P(y, \varphi x)$ (или $K(y, \varphi, x)$), но тем не менее использование предикатов P и K допустимо, поскольку в рассматриваемом случае P и K можно было бы записать в виде формулы в логико-математическом языке (см. [3]) определенного типа.

Можно доказать, что разрешимы двуместные предикаты, которые получаются при фиксировании в предикатах P и K на месте второго аргумента одноместных частично-рекурсивных функций, имеющих разрешимый график. Если функция φ обще-рекурсивна, то можно построить одноместную частично-рекурсивную функцию ψ, которая по каждому натуральному числу x, принадлежащему области значений функции φ, дает минимальный φ-прообраз (или сложность относительно φ) числа x и функция ψ не определена, если x не принадлежит области значений функции φ. Если, кроме того, функция φ принимает все натуральные значения, то существует обще-рекурсивная функция ψ, которая по каждому x вычисляет минимальный φ-прообраз (или сложность относительно φ) числа x.

Для сложностей натуральных чисел относительно функции φ из $Ч^1$ имеет место следующее свойство „однозначности“:

$$\forall \varphi xyz\,((K(z, \varphi, x)\ \&\ K(z, \varphi, y)) \supset x = y). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение трехместный предикат M

$$M(\varphi, \psi, c) \rightleftharpoons \forall xy\,(\psi(x) = y \supset \exists z\,(\varphi(z) = y \& l(z) \leqslant l(x) + c)), \tag{5}$$

где φ и ψ—переменные, допустимыми значениями которых являются одноместные частично-рекурсивные функции, а x, y, z, c—переменные, допустимыми значениями которых являются натуральные числа.

Нетрудно проверить, что

$$\forall \varphi M(\varphi, \varphi, 0); \tag{6}$$

$$\forall \varphi \psi cd\,(M(\varphi, \psi, c) \supset M(\varphi, \psi, c + d)); \tag{7}$$

$$\forall \varphi \psi \zeta cd\,((M(\varphi, \psi, c)\ \&\ M(\psi, \zeta, d)) \supset M(\varphi, \zeta, c + d)); \tag{8}$$

$$\forall\varphi\psi c\,(M(\varphi,\psi,c)\supset\forall xyz\,((K(y,\varphi,x)\,\&\,K(y,\psi,z))\supset x\leqslant z+c)). \quad (9)$$

Если области значений функций φ и ψ совпадают, то

$$\forall c\,((\forall xyz\,((K(y,\varphi,x)\,\&\,K(y,\psi,z))\supset x\leqslant z+c))\equiv M(\varphi,\psi,c)). \quad (10)$$

Определение 3. (ср. [1]). *Одноместная частично рекурсивная функция* Φ *называется* **асимптотически оптимальной** *функцией (сокращенно а.о.ф.) для некоторого конструктивного множества* L^1 *одноместных частично-рекурсивных функций, если выполнено следующее условие:*

$$\forall\varphi\,(\varphi\in L^1\supset\exists cM(\Phi,\varphi,c)). \quad (11)$$

Множество функций, асимптотически оптимальных для L^1 (обозначим его через AL^1), задается следующим образом:

$$\Phi\in AL^1\rightleftharpoons\forall\varphi\,(\varphi\in L^1\supset\exists cM(\Phi,\varphi,c)). \quad (12)$$

В работе [1] доказано, что существует а.о.ф. для множества двуместных частично-рекурсивных функций. Аналогичное утверждение можно доказать, аналогичным же образом, и для класса $Ч^1$.

Нетрудно доказать, что

$$\forall\Phi\,(\Phi\in АЧ^1\supset\forall y\exists x K(y,\Phi,x)); \quad (13)$$

$$\forall\Phi\,(\Phi\in AЧ^1\supset\forall y\exists x P(y,\Phi,x)). \quad (14)$$

Рассматривая тождественную функцию ε, можно показать, что если $\Phi\in АЧ^1$, то

$$\exists c\forall xy\,(K(y,\Phi,x)\supset x\leqslant l(y)+c). \quad (15)$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим свойством а.о.ф. Легко видеть из (13), что если $\Phi\in АЧ^1$, то Φ принимает все натуральные значения.

Замечание 1. В дальнейшем мы часто будем использовать следующее свойство а.о.ф., обнаруживающееся при совместном рассмотрении (8) и (12):

$$\forall\Phi\Psi c\,((\Phi\in AL^1\&M(\Psi,\Phi,c))\supset\Psi\in AL^1). \quad (16)$$

Для функций, принадлежащих $AЧ^1$, кроме того, имеет место следующее свойство „эквивалентности" (ср. [1], соотношение

$$|K_{A_1}(y|x)-K_{A_2}(y|x)|\leqslant C_{A_1A_2}):$$

$$\forall\Phi\Psi\,(((\Phi\in АЧ^1)\,\&\,(\Psi\in АЧ^1))\supset\exists c\,(M(\Phi,\Psi,c)\,\&M(\Psi,\Phi,c))). \quad (17)$$

3. В этом пункте будут рассмотрены некоторые преобразования частично-рекурсивных функций, сохраняющие свойство асимптотической оптимальности.

Введем понятия подстановочных и надстановочных функций и изучим их свойства.

Определение 4. *Будем говорить, что одноместная частично-рекурсивная функция* φ **сильно подстановочна** *относительно* L^1, *если существует константа* c *такая, что*

$$\forall\psi\,(\psi\in L^1\supset M(\psi\circ\varphi,\psi,c)). \quad (18)$$

В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, будем говорить, что функция φ „сильно подстановочна“, не указывая относительно какого именно класса функций она является таковой.

При совместном рассмотрении (16) и (18) нетрудно обнаружить, что в результате подстановки сильно подстановочной функции в а.о.ф. для некоторого класса функций получим функцию, являющуюся а.о.ф. для того же класса функций.

Лемма 1. *Каковы бы ни были одноместная частично-рекурсивная функция φ и натуральное число a, если функция ψ_a задана посредством условного равенства*

$$\psi_a(x) \simeq \varphi(x \dot{-} a), \tag{19}$$

то имеет место

$$\forall a M(\psi_a, \varphi, l(a)+2). \tag{20}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что имеет место следующее соотношение:

$$\forall xy(l(x+y) < l(x)+l(y)+2). \tag{21}$$

Пусть φ есть одноместная частично-рекурсивная функция, а x и y—натуральные числа такие, что $y=\varphi(x)$. Тогда для любого натурального числа a имеем $\varphi((x+a) \dot{-} a) = y$, следовательно, если ψ_a и φ связаны соотношением (19), то $\forall a(\psi_a(x+a) = y)$, а так как имеет место (21), то, следовательно, существует натуральное число z (в частности, можно взять $z = x + a$) такое, что $\forall a((\psi_a(z) = y \& l(z) \leqslant l(x)+l(a)+2)$. В силу того, что единственным условием, наложенным на x и y является условие $y = \varphi(x)$, получаем

$$\forall axy(y = \varphi(x) \supset \exists z((\psi_a(z) = y \& l(z) \leqslant l(x)+l(a)+2)),$$

следовательно (см. (5)), имеем

$$\forall a M(\psi_a, \varphi, l(a)+2).$$

Приняв во внимание произвольность выбора функции φ, завершаем доказательство. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для того чтобы одноместная частично-рекурсивная функция φ была сильно подстановочной относительно $A\text{Ч}^1$ необходимо и достаточно, чтобы существовала константа a такая, что*

$$\forall x \exists y(\varphi(y) = x \& l(y) \leqslant l(x)+a). \tag{22}$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ и натуральное число a таковы, что имеет место (22). Нужно доказать, что функция φ сильно подстановочна, то есть нужно построить константу d такую, что

$$\forall \Phi(\Phi \in A\text{Ч}^1 \supset M(\Phi \circ \varphi, \Phi, d)).$$

Сейчас мы убедимся, что можно взять $d = a$. Зафиксируем а.о.ф. Φ. Пусть $\Phi(x) = y$. Поскольку функция φ, согласно предположению, удовлетворяет условию (22), то $\exists z(\varphi(z) = x \& l(z) \leqslant l(x)+a)$. Следовательно

$$\Phi(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(\varphi(z)) = y \,\&\, l(z) \leqslant l(x) + a),$$

откуда получаем

$$\forall xy\,(\Phi(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(\varphi(z)) = y \,\&\, l(z) \leqslant l(x) + a),$$

значит, $M(\Phi \circ \varphi, \Phi, a)$. Поскольку не было сделано никаких предположений относительно функции Φ кроме того, что $\Phi \in A\text{Ч}^1$, то имеем

$$\forall \Phi\,(\Phi \in A\text{Ч}^1 \supset M(\Phi \circ \varphi, \Phi, a)),$$

то есть имеет меото (18) при $c = a$. Следовательно, функция φ сильно подстановочна. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть функция φ сильно подстановочна. Нам нужно доказать, что в этом случае можно построить константу v такую, что будет иметь место (22). По определению сильно подстановочной функции для функции φ существует константа c такая, что имеет место (18). Пусть а.о.ф. Φ такова, что

$$\Phi(1) = 0 \,\&\, \forall x\,(x \neq 1 \supset \neg(\Phi(x) = 0)). \tag{23}$$

(Очевидно, что такую а.о.ф. можно построить). Согласно предположению о функции φ имеем $M(\Phi \circ \varphi, \Phi, c)$. Пусть q есть натуральное число. Построим частично-рекурсивную функцию Ψ_q следующим образом:

$$\Psi_q(x) \simeq \Phi(x \dot{-} q). \tag{24}$$

По лемме 1 имеем

$$\forall q M(\Psi_q, \Phi, l(q) + 2), \tag{25}$$

откуда, согласно замечанию 1, можно утверждать, что при любом q функция Ψ_q есть а. о. ф. для Ч^1. Следовательно

$$\forall q M(\Psi_q \circ \varphi, \Psi_q, c), \tag{26}$$

где c — константа, упомянутая выше и не зависящая от Ψ_q. Из (25) и (26), используя свойство (8), получим

$$\forall q M(\Psi_q \circ \varphi, \Phi, c + l(q) + 2),$$

или, что то же самое

$$\forall qxy\,(\Phi(x) = y \supset \exists z\,(\Psi_q(\varphi(z)) = y \,\&\, l(z) \leqslant l(x) + l(q) + c + 2)).$$

Поскольку $\Phi(1) = 0$, то

$$\forall q \exists z\,(\Psi_2(\varphi(z)) = 0 \,\&\, l(z) \leqslant l(q) + c + 3).$$

Но функция Ψ_2 принимает значение 0 только при значении аргумента, равном $q + 1$, следовательно

$$\forall q \exists z\,(\varphi(z) = q + 1 \,\&\, l(z) \leqslant l(q) + c + 3). \tag{27}$$

Пусть а. о. ф. Ξ такова, что

$$\Xi(0) = 0 \,\&\, \forall x\,((x \neq 0) \supset \neg(\Xi(x) = 0)). \tag{28}$$

Очевидно, что такая а. о. ф. существует. В силу предположения о сильной подстановочности функции φ имеем $M(\Xi \circ \varphi, \Xi, c)$ (фигурирующая здесь константа c та же, что и выше), откуда, исходя из того, что $\Xi(0) = 0$, получаем, используя (5)

$$\exists z(\overline{\varphi}(z)=0 \,\&\, l(z)\leqslant c). \tag{29}$$

Из (27) и (29), как легко видеть, следует, что

$$\forall q \exists z(\overline{\varphi}(z)=q \,\&\, l(z)\leqslant l(q)+c+3). \tag{30}$$

Выбрав $a=c+3$, получим (22). Теорема доказана.

Из теоремы, в частности, следует, что какова бы ни была функция $\Phi \in \text{АЧ}^1$, функции

$$\Psi(x)\simeq\Phi(x+a),$$

$$\Xi(x)\simeq\Phi\left(\left[\frac{x}{a}\right]\right), \text{ где } a>0,$$

всегда принадлежат множеству АЧ^1, в то время как функции

$$\psi_1(x)\simeq\Phi(x^2),$$

$$\psi_2(x)\simeq\Phi(x+a),$$

$$\psi_3(x)\simeq\Phi(l(x)),$$

вообще говоря, могут не входить в АЧ^1 (хотя можно подобрать функцию $\Phi \in \text{АЧ}^1$ так, что ψ_1 и ψ_2 будут входить в АЧ^1, что же касается функции ψ_3 то ни при какой Φ функция ψ_3 не будет принадлежать множеству АЧ^1).

Заметим, что тем же методом, каким доказана теорема, можно доказать, что имеет место большее, чем утверждается в теореме, а именно, функция $\overline{\varphi}$ сильно подстановочна относительно множества Ч^1 (а не только АЧ^1) функций тогда и только тогда, когда функция φ при некотором a удовлетворяет условию (22). По этой причине естественно говорить о функции, сильно подстановочной относительно АЧ^1 просто „сильно подстановочная функция“, опуская указание на то, относительно какого именно класса функций это справедливо. Заметим лишь, что для некоторых классов функций можно построить сильно подстановочные функции, не являющиеся сильно подстановочными, скажем для Ч^1. Например, функция $\varphi(x)\equiv 2x$ сильно подстановочна для конструктивного множества частично-рекурсивных функций, область определения которых состоит лишь из четных чисел, но $\overline{\varphi}$ не будет сильно подстановочной относительно Ч^1.

Следствие 1. *Функция φ сильно подстановочна для конструктивного множества Ч^1 одноместных частично-рекурсивных функций тогда и только тогда, когда*

$$\exists a M(\varphi, \varepsilon, a). \tag{31}$$

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Если $\Phi \in \text{АЧ}^1$, то Φ — сильно подстановочная функция для любого конструктивного множества L^1 частично-рекурсивных функций.*

Доказательство. В силу того, что $\Phi \in \text{АЧ}^1$, имеем

$$\exists a M(\Phi, \varepsilon, a), \tag{32}$$

а затем, использовав следствие 1, завершаем доказательство.

Следствие 3. *Если* $\Phi \in$ АЧ^1 *и* $\Psi \in$ АЧ^1, *то* $\Phi \circ \Psi \in$ АЧ^1, *то есть множество* АЧ^1 *замкнуто относительно операции суперпозиции функций.*

Доказательство. В силу следствия 2 имеем

$$\exists a M(\Phi \circ \Psi, \Phi, a),$$

откуда, используя замечание 1, заключаем, что $\Phi \circ \Psi \in$ АЧ^1.

Следствие 4. *Класс функций, сильно подстановочных для* АЧ^1, *замкнут относительно операции суперпозиции.*

Доказательство этого утверждения, очевидно, можно провести и без использования теоремы 1, на основании только определения сильной подстановочности.

Из предыдущих рассмотрений вытекает естественный вопрос о характеризации класса функций φ, определенных аналогично сильно подстановочным функциям (см. определение 4), но не подставляемым в а. о. ф., а „навешиваемым" на а. о. ф., то есть удовлетворяющим условию

$$\exists c \forall \Phi (\Phi \in A L^1 \supset M(\varphi \circ \Phi, \Phi, c)). \tag{33}$$

Такую функцию φ будем называть **сильно надстановочной** относительно AL^1. Ответ для АЧ^1 дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Для того чтобы одноместная частично-рекурсивная функция* φ *была сильно надстановочной относительно* АЧ^1, *необходимо и достаточно, чтобы имело место* $\varphi(x) \equiv x$.

Доказательство. Достаточность условия $\varphi(x) \equiv x$ для того, чтобы функция φ была сильно надстановочной, очевидна. Докажем необходимость. Допустим, что функция φ является сильно надстановочной и константа c такова, что имеет место

$$\forall \Phi (\Phi \in \text{АЧ}^1 \supset M(\varphi \circ \Phi, \Phi, c)).$$

Выберем а.о.ф. Φ таким образом, чтобы функция Φ не была определена при значении аргумента, равном 0. Рассмотрим конструктивную последовательность Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3, $\cdots$ частично-рекурсивных функций, задаваемых следующим образом:

$$\Phi_a(x) \simeq \begin{cases} a & \text{при } x = a \\ \Phi(x - (a+1) \cdot 2^{c+1}) & \text{при } x \neq a, \end{cases} \tag{34}$$

где a принимает натуральные значения 0, 1, 2, 3, $\cdots$, а c—константа, упомянутая в начале доказательства. Нетрудно видеть, что функция Φ_a на отрезке натуральных чисел от 0 до $(a+1) \cdot 2^{c+1}$ включительно не определена для значений аргумента, отличных от a. Согласно лемме 1 при любом a функция Φ_a есть а.о.ф. и, следовательно, в силу предположения о том, что φ сильно надстановочна, имеем

$$\forall a M(\varphi \circ \Phi_a, \Phi_a, c), \tag{35}$$

где c—все та же константа.

Обозначим через G_y конструктивное множество, определяемое следующим образом:

$$x \in G_y \leftrightarrows \varphi(x) = y. \tag{36}$$

Для каждого y множество G_y непусто (так как функция φ принимает все натуральные значения—в противном случае функция $\varphi \circ \Phi$ не могла бы быть асимптотически оптимальной) и рекурсивно перечислимо.

Рассматривая совместно (35) и (36), получим

$$\forall axy\,(\Phi_a(x) = y \supset \exists z\,(\Phi_a(z) \in G_y \,\&\, l(z) \leqslant l(x) + c)). \tag{37}$$

Положив в (37) $y = a$, получим

$$\forall ax\,(\Phi_a(x) = a \supset \exists z\,(\Phi_a(z) \in G_a \,\&\, l(z) \leqslant l(x) + c)). \tag{38}$$

Но по (34) имеем $\Phi_a(a) = a$, следовательно, из (38), взяв $x = a$, получаем

$$\forall a \exists z\,(\Phi_a(z) \in G_a \,\&\, l(z) \leqslant l(a) + c). \tag{39}$$

По определению функции Φ_a, единственным значением аргумента таким, что $!\,\Phi_a(z)$ и $l(z) \leqslant l(a) + c$, является значение $z = a$, причем $\Phi_a(a) = a$. Следовательно

$$\forall a\,(a \in G_a),$$

откуда, учитывая (36), получаем $\forall a\,(\varphi(a) = a)$. Теорема доказана. Таким образом, существует лишь одна, тривиальная, сильно надстановочная относительно АЧ^1 функция.

Рассмотрим теперь еще один класс одноместных частично-рекурсивных функций таких, что в результате подстановки в функцию из этого класса функции из АЧ^1, получается функция, принадлежащая АЧ^1.

Определение 5. *Будем говорить, что одноместная частично-рекурсивная функция* φ **слабо надстановочна** *относительно класса* L^1, *если выполнено следующее условие:*

$$\forall \psi\,(\psi \in L^1 \supset \varphi \circ \psi \in L^1). \tag{40}$$

Прежде чем доказать основную теорему, относящуюся к слабо надстановочным функциям, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Каковы бы ни были функции* $\Phi \in$ АЧ^1 *и* $\varphi \in$ Ч^1 *существует константа* c *такая, что*

$$\forall xyz\,(!\varphi(y) \supset ((K(y, \Phi, z) \,\&\, K(\varphi(y), \Phi, x)) \supset x \leqslant z + c)). \tag{41}$$

Отметим, что (41) в терминах работы [1] запишется следующим образом:

$$\forall y\,(!\varphi(y) \supset K_\Phi(\varphi(y)) \leqslant K_\Phi(y) + C). \tag{41'}$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in$ АЧ^1 и $\varphi \in$ Ч^1. Тогда существует константа c такая, что $M(\Phi, \varphi \circ \Phi, c)$. Следовательно

$$\forall xy\,(!\varphi(y) \supset (\varphi(\Phi(x)) = \varphi(y) \supset \exists t\,(\Phi(t) = \varphi(y) \,\&\, l(t) \leqslant l(x) + c))). \tag{42}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\forall xy\,(!\varphi(y) \supset (\Phi(x) = y \supset \varphi(\Phi(x)) = \varphi(y))). \tag{43}$$

Из (42) и (43) получаем

$$\forall xy\,(!\varphi(y) \supset (\Phi(x) = y \supset \exists t\,(\Phi(t) = \varphi(y)\ \&\ l(t) \leqslant l(x) + c))), \quad (44)$$

а отсюда, как нетрудно видеть, следует, что

$$\forall xyz\,(!\varphi(y) \supset ((K(y, \Phi, z)\ \&\ K(\varphi(y), \Phi, x)) \supset x \leqslant z + c)). \quad (45)$$

Теорема доказана.

Таким образом, никакой алгорифм по числам, имеющим „малую" сложность, не может строить числа, имеющие существенно большую сложность относительно а.о.ф. для $Ч^1$.

Теорема 4. *Для того чтобы одноместная частично-рекурсивная функция φ была слабо надстановочной относительно* $АЧ^1$, *необходимо и достаточно, чтобы φ принимала все натуральные значения.*

Доказательство. Необходимость того, чтобы функция φ, слабо надстановочная для $АЧ^1$, принимала все натуральные значения, очевидна: если функция φ принимает не все натуральные значения, то функция $\varphi\circ\Phi$ ни при какой Φ не может оказаться асимптотически оптимальной. Докажем достаточность указанного условия. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ принимает все натуральные значения. Тогда, коль скоро зафиксирована схема вычисления функции φ, можно ввести функцию ζ следующим образом:

$$\zeta(x) \simeq \nu y\,(\varphi(y) = x),$$

где символ ν используется в том же смысле, в каком он введен в работе [4] (теорема XXV).

В силу предположения о том, что функция φ принимает все натуральные значения, функция ζ оказывается общерекурсивной, то есть $\forall x\,!\zeta(x)$. Далее, в силу того, что, очевидно, $\varphi(\zeta(x)) \equiv x$, получаем, что если для некоторых натуральных x и y имеем $\Phi(x) = \zeta(y)$, то $\varphi(\Phi(x)) = y$, следовательно

$$\forall xy\,(\Phi(x) = \zeta(y) \supset \exists z\,(\varphi(\Phi(z)) = y \&\ l(z) \leqslant l(x))). \quad (46)$$

Но по предыдущей теореме (см. (46)) имеем при некотором c, зависящем только от Φ и ζ

$$\forall xy\,(\Phi(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = \zeta(y)\ \&\ l(z) \leqslant l(x) + c)). \quad (47)$$

Рассматривая совместно (46) и (47), получаем

$$\forall xy\,(\Phi(x) = y \supset \exists z\,(\varphi(\Phi(z)) = y\ \&\ l(z) \leqslant l(x) + c))$$

или, короче, $M(\varphi\circ\Phi, \Phi, c)$. Следовательно, функция $\varphi\circ\Phi$, при сделанных в начале доказательства предположениях, является а.о.ф. для $Ч^1$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть A и B являются конструктивными рекурсивно изоморфными множествами натуральных чисел и рекурсивная функция φ представляет рекурсивный изоморфизм множества A на множество B. Тогда какова бы ни была функция $\Phi \in АЧ^1$, существует константа c такая, что каковы бы ни были $x \in A$ и*

$y \in B$, соответствующие друг другу в указанном изоморфизме, всегда имеет место

$$\forall zt\,((K(x, \Phi, z)\ \&\ K(y, \Phi, t)) \supset |z - t| \leqslant c).$$

Доказательство вытекает очевидным образом из теоремы 3.

4. Рассмотрим теперь вопросы, связанные с мажорированием и минорированием а.о.ф., а также сложностей натуральных чисел относительно них при помощи вычислимых функций тех или иных типов при различных вариантах мажорирования и минорирования.

Теорема 6. *Какова бы ни была функция $\Phi \in A\text{Ч}^1$ не существует одноместной обще-рекурсивной функции φ такой, что*

$$\forall x\,(!\,\Phi(x) \supset \Phi(x) \leqslant \varphi(x)). \tag{48}$$

Доказательство. Доказательство проводим методом приведения к нелепости. Допустим, что одноместная обще-рекурсивная функция φ и $\Phi \in A\text{Ч}^1$ таковы, что выполнено условие (48). Построим функцию ψ следующим образом:

$$\psi(x) = \max\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(2^x)\} + 1.$$

Очевидно, что функция ψ обще-рекурсивна. Нетрудно видеть, что

$$\forall xy\,(\Phi(x) = \psi(y) \supset l(x) \geqslant y). \tag{49}$$

В силу того, что $\Phi \in A\text{Ч}^1$, существует константа c такая, что $M(\Phi, \psi, c)$ или, что то же самое

$$\forall xy\,(\psi(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = y\ \&\ l(z) \leqslant l(x) + c)). \tag{50}$$

Из (49) и (50) получаем

$$\forall xy\,(\psi(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = y\ \&\ l(z) \leqslant l(x) + c\ \&\ x \leqslant l(z))),$$

а затем

$$\forall xy\,(\psi(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = y\ \&\ x \leqslant l(x) + c)). \tag{51}$$

Поскольку функция ψ обще-рекурсивна, то из (51) получаем

$$\forall x \exists z\,(\Phi(z) = \psi(x)\ \&\ x \leqslant l(x) + c), \tag{52}$$

откуда имеем $\forall x\,(x \leqslant l(x) + c)$. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Следствие 1. *Никакая функция, асимптотически оптимальная для* Ч^1, *не продолжима до обще-рекурсивной функции.*

Следствие 2. *Не существует одноместной обще-рекурсивной функции, асимптотически оптимальной для* Ч^1.

Следствие 3. *Область определения функции, асимптотически оптимальной для* Ч^1, *не рекурсивна.*

Рассмотрим теперь вопрос о существовании нижних и верхних вычислимых оценок для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для Ч^1.

В теореме 7 отрицательно решается вопрос о существовании рекурсивной нижней оценки для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для Ч^1.

Теорема 7. *Какова бы ни была функция* $\Phi \in АЧ^1$ *не существует одноместной обще-рекурсивной функции* φ, *принимающей сколь угодно большие значения и такой, что*

$$\forall xy\,(K(y, \Phi, x) \supset \varphi(y) \leqslant x). \tag{53}$$

Доказательство. Доказываем методом приведения к нелепости. Допустим, что одноместная обще-рекурсивная функция φ и $\Phi \in АЧ^1$ таковы, что для них имеет место (53).

Введем функцию ψ посредством следующей схемы:

$$\psi(0) = 0,$$

$$\psi(x+1) = \sigma(\varkappa(\psi(x))+1,\ \varkappa(\psi(x))+1)\cdot \overline{sg}\,((\varkappa(\psi(x))+1) \dot{-} \varphi(x+1)) + \sigma(0,\ \varkappa(\psi(x)))\cdot sg\,((\varkappa(\psi(x))+1) \dot{-} \varphi(x+1)),$$

где σ, ι, $\varkappa$ — функции, введенные в начале статьи.

Легко проверить, что ψ является обще-рекурсивной функцией.

Введем далее функцию ζ следующим образом:

$$\zeta(x) = \iota(\psi(x)).$$

Нетрудно показать, что функция ζ общерекурсивна, принимает все натуральные значения, отличные от 0, в точности по одному разу (значение 0 функции ζ может принимать более чем один раз) и минорирует функцию φ, а следовательно, справедливо следующее:

$$\forall xy\,(\Phi(x) = y \supset \zeta(y) \leqslant l(x)). \tag{54}$$

Введем функцию ω следующим образом:

$$\omega(x) \simeq \mu y\,(\zeta(y) = x). \tag{55}$$

Нетрудно видеть, что функция ω обще-рекурсивна и принимает сколь угодно большие значения. Кроме того из (55) следует, что

$$\forall xy\,(\omega(x) = y \supset x = \zeta(y)). \tag{56}$$

Поскольку $\Phi \in АЧ^1$ и $\omega \in Ч^1$, то существует константа c такая, что

$$\forall xy\,(\omega(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = y \,\&\, l(z) \leqslant l(x) + c)). \tag{57}$$

Рассмотрев совместно (56) и (57), получим

$$\forall xy\,(\omega(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = y \,\&\, l(z) \leqslant l(\zeta(y)) + c)). \tag{58}$$

Затем из (54) и (58) имеем

$$\forall xy\,(\omega(x) = y \supset \exists z\,(\Phi(z) = y \,\&\, \zeta(y) \leqslant l(\zeta(y)) + c)),$$

откуда следует, что

$$\forall xy\,(\omega(x) = y \supset \zeta(y) \leqslant l(\zeta(y)) + c).$$

Но функция ω не ограничена, следовательно, бесконечное число раз будет иметь место

$$\zeta(\omega(x)) \leqslant l(\zeta(\omega(x))).$$

Функция $\zeta\omega\omega$ неповторяющаяся, значит последнее соотношение абсурдно. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Следующая теорема является усилением теоремы 7.

Теорема 8. *Какова бы ни была функция* $\Phi \in АЧ^1$ *не может существовать одноместной частично-рекурсивной функции* φ, *принимающей сколь угодно большие значения и такой, что*

$$\forall xy\,(!\varphi(y) \supset (K(y, \Phi, x) \supset x \geqslant \varphi(y))). \qquad (59)$$

Доказательство. Доказываем методом приведения к противоречию. Допустим, что неограниченная одноместная частично-рекурсивная функция φ и функция $\Phi \in АЧ^1$ таковы, что для них имеет место (59).

Построим функцию ρ следующим образом:

$$\rho(0) \simeq \nu y\,(!\varphi(y) \,\&\, y > 0),$$

$$\rho(x+1) \simeq \nu y\,(\varphi(y) > \varphi(\rho(x)) \,\&\, y > x),$$

где символ ν понимается в том же смысле, что и в [4] (мы полагаем, конечно, что уже зафиксирована конкретная схема вычисления функции φ).

Поскольку функция φ неограниченная, то и функция ρ оказывается неограниченной и обще-рекурсивной. Пусть функция θ задана посредством следующей схемы:

$$\theta(x) \simeq \varphi(\rho(x)).$$

Очевидно, что функция θ также обще-рекурсивна и неограничена.

Построим теперь функцию ψ посредством следующей схемы:

$$\psi(0) = 0;\ \psi(x+1) = \sigma(\theta(\varkappa(\psi(x))), \theta(\varkappa(\psi(x)))) \cdot \overline{sg}(|(x+1) - \rho(\varkappa(\psi(x)))|) +$$
$$+ \sigma(0, \varkappa(\psi(x))) \cdot sg(|(x+1) - \rho(\varkappa(\psi(x)))|).$$

Нетрудно показать, что функция ψ при сделанных в начале доказательства предположениях обще-рекурсивна.

Введем, наконец, функцию ζ следующим образом:

$$\zeta(x) = \iota(\psi(x)).$$

Можно доказать, что функция ζ обще-рекурсивна, принимает сколь угодно большие значения и удовлетворяет условию

$$\forall x\,(\zeta(x) \neq 0 \supset (!\varphi(x) \,\&\, \varphi(x) \geqslant \zeta(x))).$$

Следовательно, имеем

$$\forall xy\,(\zeta(x) \neq 0 \supset (\Phi(y) = x \supset l(y) \geqslant \zeta(x))).$$

Очевидно, что $\zeta(x) = 0 \supset (\Phi(y) = x \supset l(y) \geqslant \zeta(x))$, следовательно

$$\forall xy\,(\Phi(y) = x \supset l(y) > \zeta(x)).$$

Таким образом, мы получили, что неограниченная обще-рекурсивная функция ζ оценивает снизу сложность натуральных чисел относительно функции, асимптотически оптимальной для $Ч^1$, что невозможно в силу теоремы 7. Полученное противоречие завершает доказательство. Теорема доказана.

Итак, для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для $Ч^1$, не существует нетривиальных частично-рекурсивных оценок снизу. Из этого также, в частности, можно заключить, что ни для какой функции из $АЧ^1$ не может существовать алгорифма для вычисления сложности натуральных чисел относительно выбранной функции.

Сейчас мы покажем, что всякую оценку сверху для сложностей натуральных чисел относительно функции, асимптотически оптимальной для $Ч^1$, можно существенно понизить так, что новая оценка будет лучше старой в бесконечном рекурсивном множестве точек.

Теорема 9. *Пусть одноместная частично-рекурсивная функция* φ *и* $\Phi \in АЧ^1$ *таковы, что*

$$\forall xy\,((!\varphi(x)\,\&\,K(y,\ \Phi, x)) \supset x \leqslant \varphi(y)), \tag{60}$$

и область определения функции φ *бесконечна. Тогда существует одноместная частично-рекурсивная функция* ψ *с областью определения, совпадающей с областью определения функции* φ, *такая, что*

$$\forall xy\ ((!\varphi(y)\,\&\,K(y,\Phi,x)) \supset (x \leqslant \psi(y)\,\&\,\psi(y) \leqslant \varphi(y))), \tag{61}$$

причем для бесконечного рекурсивного множества значений аргумента y *справедливо строгое неравенство:* $\psi(y) < \varphi(y)$.

Доказательство. Пусть одноместная частично-рекурсивная функция φ с бесконечной областью определения и функция $\Phi \in АЧ^1$ таковы, что для них имеет место (60). Рассмотрим функцию ζ, заданную следующим образом:

$$\zeta(x) \simeq \varphi(x) \dot{-} 1.$$

Очевидно, что φ принимает сколь угодно большие значения, следовательно, и функция ζ не является ограниченной. Тогда, в силу теоремы 8, для бесконечного числа значений аргумента y нарушается условие

$$!\zeta(y)\,\&\,K(y,\Phi,x)\,\&\,x \geqslant \zeta(y), \tag{62}$$

так как если бы это условие нарушалось лишь конечное число раз, то существовала бы неограниченная частично-рекурсивная функция, оценивающая сложность натуральных чисел относительно а.о.ф. для $Ч^1$, что невозможно.

Построим частично-рекурсивную функцию ω следующим образом:

$$\omega(x) \simeq \nu y\,(!\Phi(y)\,\&\,\Phi(y) = x\,\&!\zeta(x)\,\&\,l(y) < \zeta(x)).$$

Используя утверждение, относящееся к (62), можно показать, что функция ω перечисляет без повторений бесконечное рекурсивно-перечислимое множество, и, кроме того, область определения функции ω содержится в области определения функции ζ. Выделим в области определения функции ω бесконечное рекурсивное множество и обозначим через χ характеристическую функцию последнего. Будем считать, что χ принимает значение 0 при значениях аргумента, принадлежащих вы-

деленному рекурсивному множеству. Тогда частично-рекурсивная функция ψ, задаваемая посредством схемы

$$\psi(x) \simeq \varphi(x) \cdot \chi(x) + \zeta(x) \cdot \overline{sg}(\chi(x)),$$

будет, как нетрудно убедиться, искомой. Теорема доказана.

Следствие 1. *Какова бы ни была функция* $\Phi \in$ АЧ^1 *существует бесконечная конструктивная последовательность* φ_0, φ_1, $\varphi_2, \cdots$ *одноместных обще-рекурсивных функций таких, что*

1) *для каждой пары функций* φ_t, φ_q *при* $t \neq q$ *функция с большим индексом минорирует функцию с меньшим индексом, причем для бесконечного числа значений аргумента—строго минорирует;*

2) *выполняется условие*

$$\forall txy\,(K(y, \varphi, x) \supset x \leqslant \varphi_t(y)). \qquad (63)$$

Доказательство. По данной а.о.ф. Φ можно найти такую константу c, что имеет место $M(\Phi, \varepsilon, c)$. Следовательно, можно взять

$$\varphi_0(x) = l(x) + c.$$

Применяя далее теорему 9 к функции φ_0, порождаем функцию φ_1, затем, применяя теорему 9 к функции φ_1, порождаем функцию φ_2, затем — φ_3 и так далее. Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 9 вытекает, что не существует окончательной верхней вычислимой оценки для сложностей натуральных чисел относительно функций, асимптотически оптимальных для Ч^1.

5. Сложность натурального числа x относительно частично-рекурсивной функции φ определяется длиной наименьшего значения аргумента, при котором функция φ принимает значение x. Таким образом, представляет определенный интерес исследование свойств множества тех значений аргумента, при которых функция φ „впервые" принимает то или иное значение. В теореме 10 выясняется одно из таких свойств указанных множеств в случае асимптотически оптимальных для Ч^1 функций.

Определение 6. *Будем говорить, что конструктивное множество* S *натуральных чисел есть* **стержень** *функции* φ, *если*

$$x \in S \leftrightarrows (!\varphi(x) \,\&\, \forall y\,(y < x \supset \neg(\varphi(y) = \varphi(x)))).$$

Теорема 10. *Пусть функция* Φ *принадлежит* АЧ^1. *Тогда стержень* S *функции* Φ *есть иммунное, но не гипериммунное множество.*

Доказательство. Иммунность множества S вытекает из теоремы 8: если бы S не было бы иммунным, то оно содержало бы бесконечное рекурсивно-перечислимое множество и можно было бы построить неограниченную одноместную частично-рекурсивную функцию, оценивающую снизу сложность натуральных чисел относительно функции Φ, что невозможно. Докажем, что множество S не гипериммунно.

Поскольку $\Phi \in$ АЧ^1, то найдется константа c такая, что

$$\forall x \exists y (\Phi(y) = x \& l(y) \leqslant l(x) + c). \tag{64}$$

Введем функцию δ посредством следующей схемы примитивной рекурсии:

$$\delta(0) = 0,$$
$$\delta(x+1) = (\delta(x)+1)\cdot 2^{c+1},$$

где c — константа, фигурирующая в (64).

Рассмотрим конструктивную последовательность $A_0, A_1, A_2, \cdots$ множеств натуральных чисел такую, что множество A_t $(t = 0, 1, 2, \cdots)$ содержит все числа x такие, что $\delta(t) \leqslant x < \delta(t+1)$. Таким образом, множества A_t и A_q при $t \neq q$ не пересекаются. Докажем, что каждое из этих множеств содержит, по меньшей мере, один элемент из множества S. Рассмотрим множество A_0. Ясно, что A_0 содержит, по меньшей мере, то натуральное число, которое является прообразом числа 0 относительно функции Φ. Следовательно, множество S пересекается с множеством A_0. Рассмотрим теперь множество A_{t+1}. На отрезке натуральных чисел от 0 до $\delta(t+2)-1$ функция Φ принимает не менее чем $\delta(t+1)+1$ различных значений, следовательно, на этом отрезке натуральных чисел по меньшей мере $\delta(t+1)+1$ чисел принадлежат множеству S. Но множества $A_0, A_1, \cdots, A_t$, вместе взятые, покрывают лишь отрезок натуральных чисел от 0 до $\delta(t+1)-1$, а вместе с множеством A_{t+1} содержат не менее чем $\delta(t+1)+1$ элементов множества S. Следовательно, множество A_{t+1} содержит по меньшей мере один элемент из множества S. Таким образом, множество S не гипериммунно. Теорема доказана.

Теорема 11. *Какова бы ни была функция* $\Phi \in АЧ^1$ *существует функция* $\Psi \in АЧ^1$ *такая, что функция* Φ *есть продолжение функции* Ψ, *причем разность между областью определения функции* Φ *и областью определения функции* Ψ *есть бесконечное рекурсивное множество натуральных чисел и, кроме того, имеет место*

$$M(\Phi, \Psi, 0) \& M(\Psi, \Phi, 0).$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in АЧ^1$. Рассмотрим множество R, определяемое следующим образом:

$$x \in R \rightleftarrows (!\Phi(x) \& \exists y (y < x \& \Phi(y) = \Phi(x))).$$

Очевидно, что множество R рекурсивно-перечислимо. В силу предыдущей теоремы оно бесконечно, так как если бы оно было бы конечным, то область определения функции Φ оказалась бы иммунной. Выделим в множестве R бесконечное рекурсивное подмножество и обозначим через W.

Зададим функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(x) \simeq \begin{cases} \text{не определена, если } x \in W; \\ \Phi(x) \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция Ψ и есть искомая.

Теорема 12. *Какова бы ни была функция* $\Phi \in АЧ^1$ *суще-*

ствуют функции $\Psi \in A\text{Ч}^1$ *и* $\varphi \in \Pi^1$ *такие, что* Φ *является продолжением функции* Ψ, *имеет место*

$$M(\Psi, \Phi, 0) \& M(\Phi, \Psi, 0)$$

и функция Ψ *принимает каждое значение* x *не более чем* $\varphi(x)$ *раз.*

Доказательство. Для $\Phi \in A\text{Ч}^1$ существует константа c такая, что $M(\Phi, \varepsilon, c)$, где ε — тождественная функция.

Зададим функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(x) \simeq \begin{cases} \Phi(x), & \text{если } !\Phi(x) \,\&\, l(x) \leqslant l(\Phi(x)) + c \\ \text{не определена в противном случае,} \end{cases}$$

а функцию φ выберем следующим образом: $\varphi(x) = 2^{l(x)+c+1}$. Нетрудно видеть, что функции Ψ и φ и есть искомые. Теорема доказана.

6. Рассмотрим теперь свойства функций, асимптотически оптимальных для Π^1.

Очевидно, что всякая функция, асимптотически оптимальная для Ч^1, будет а.о.ф. и для Π^1. Пользуясь методом, примененным в работе [1], можно доказать, что существует одноместная обще-рекурсивная функция, асимптотически оптимальная для Π^1.

Теорема 13. *Если* $\Phi \in A\Pi^1$ *и* Φ*—обще-рекурсивная функция, то существуют обще-рекурсивные функции* φ *и* ψ, *примитивно-рекурсивные относительно** Φ *такие, что*

$$\forall x, P(x, \Phi, \varphi(x)),$$

$$\forall x K(x, \Phi, \psi(x)).$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in A\Pi^1$ и Φ обще-рекурсивна. Тогда, как нетрудно показать, существует константа c такая, что $M(\Phi, \varepsilon, c)$. Введем функцию φ следующим образом:

$$\varphi(x) = \mu y_{y < (x+1)\cdot 2^{c+1}} (\Phi(y) = x).$$

Нетрудно видеть, что функция φ примитивно-рекурсивна относительно функции Φ и удовлетворяет условию $\forall x P(x, \Phi, \varphi(x))$. Функцию ψ введем следующим образом: $\psi(x) = l(\varphi(x))$. Функция ψ примитивно-рекурсивна относительно функции Φ и, как легко убедиться, удовлетворяет условию

$$\forall x K(x, \Phi, \psi(x)).$$

Теорема доказана.

Теорема 14. *Для того чтобы обще-рекурсивная функция* φ *была сильно подстановочной относительно* $A\Pi^1$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала константа* c *такая, что* $M(\varphi, \varepsilon, c)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 1. *Суперпозиция обще-рекурсивных функций из* $A\Pi^1$ *принадлежит* $A\Pi^1$.

Теорема 15. *Если функция* φ *сильно надстановочна относительно* $A\Pi^1$, *то* $\varphi(x) \equiv x$.

---

* Определение относительной примитивной рекурсивности см. в работе [4], § 47.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 с той разницей, что вместо того, чтобы в точке 0 считать функцию неопределенной, принимаем $\Phi(0)=p$, где p—некоторое натуральное число; остальная перестройка доказательства связана только с указанной особенностью и легко может быть проведена.

Теорема 16. *Если функция* $\Phi \in АП^1$, *то не существует одноместной примитивно-рекурсивной функции* φ *такой, что*

$$\forall x\,(|\Phi(x) \supset \Phi(x) \leqslant \varphi(x)).$$

Доказательство. См. доказательство теоремы 6.

Следствие 1. *Не существует примитивно-рекурсивной функции, асимптотически оптимальной для* $П^1$.

Теорема 17. *Какова бы ни была одноместная обще-рекурсивная функция* $\Phi \in АП^1$ *существует одноместная неповторяющаяся обще-рекурсивная функция* $\Psi \in АП^1$ *такая, что*

$$M(\Psi, \Phi, 0).$$

Доказательство. Пусть Φ является обще-рекурсивной функцией такой, что $\Phi \in АП^1$. Построим функцию Ψ посредством следующей схемы:

$$\Psi(0) = 0;\ \Psi(x+1) = \Phi(\mu y\,(\forall t_{t<x}\,(\Phi(y) \neq \Psi(t)))).$$

Нетрудно показать, что функция Ψ и есть искомая.

Следствие 1. *Существует рекурсивная перестановка, асимптотически оптимальная для* $П^1$.

Пользуясь теоремой 17, нетрудно показать, что утверждение теоремы 4 перестает быть справедливым, если в формулировке теоремы 4 заменить $АЧ^1$ на $АП^1$. Действительно, пусть Φ является неповторяющейся одноместной обще-рекурсивной функцией, асимптотически оптимальной для $П^1$ (такая функция Φ существует в силу теоремы 17). Зададим функцию φ посредством следующей схемы:

$$\varphi(x) = \mu y\,(\Phi(y) = x).$$

Очевидно, что функция φ обще-рекурсивна и принимает все натуральные значения. Но функция $\varphi \circ \Phi$, как легко видеть, не является асимптотически оптимальной для $П^1$.

7. Обратимся к свойствам функций, асимптотически оптимальных для множества $О^1$ одноместных обще-рекурсивных функций. Поскольку методы доказательств остаются в основном теми же, что и выше, то приведем лишь краткую сводку результатов, касающихся свойств функций, асимптотически оптимальных для множества $О^1$.

Теоремы 1, 2, 6—12 и все следствия из них остаются справедливыми при замене в их формулировках всех вхождений $АЧ^1$ на $АО^1$. Следствие 1 теоремы 16 остается справедливым при следующей переформулировке: не существует обще-рекурсивной функции, асимптотически оптимальной для $О^1$. Очевидно, однако, что существует частично-рекурсивная функция, асимптотически оптимальная для $О^1$. Возникает следующая проблема: существует ли частично-рекурсивная функ-

ция, асимптотически оптимальная для O^1, но не являющаяся асимптотически оптимальной для $Ч^1$?

В заключение автор приносит глубокую благодарность И. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа. Автор глубоко признателен А. Н. Колмогорову и А. А. Маркову за ряд ценных замечаний и советов, способствовавших улучшению этой работы.

Вычислительный центр АН АрмССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 2.XII.1967

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ. Ասիմպտոտիկաբար օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում են Ա. Ն. Կոլմոգորովի [1] աշխատության մեջ սահմանված ասիմպտոտիկաբար օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների (ԱՕՖ) հատկությունները։ Մասնավորապես ուսումնասիրվում են մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների (ՄՌՖ) որոշ ձևափոխությունները, որոնք պահպանում են ԱՕՖ լինելու հատկությունը։ Այդ նպատակով սահմանվում են խիստ տեղադրվող և թույլ վերադրվող ֆունկցիաներ և նրանց համար տրվում են հայտանշաններ։

Ապացուցվում են նաև հետևյալ թեորեմները ՄՌՖ-ների (և ընդհանուր ռեկուրսիվ՝ ԸՌՖ-ների) համար ԱՕՖ հանդիսացող և վերջիններիս հարաբերականությամբ բնական թվերի բարդությունների վերին և ներքին գնահատականների վերաբերյալ։

1. Եթե Φ-ը հանդիսանում է ԱՕՖ բոլոր միատեղանի ՄՌՖ-ների (կամ ԸՌՖ-ների) համար, ապա գոյություն չունի ԸՌՖ, որը վերին գնահատական է հանդիսանում Φ-ի համար։

2. ՄՌՖ-ների (կամ ԸՌՖ-ների) համար ԱՕՖ հանդիսացող ֆունկցիայի հարաբերականությամբ բնական թվերի բարդությունը չունի անսահմանափակ ներքին մասնակի ռեկուրսիվ գնահատական։

3. ՄՌՖ-ների (կամ ԸՌՖ-ների) համար ԱՕՖ հանդիսացող ֆունկցիայի հարաբերականությամբ բնական թվերի բարդության ամեն մի վերին մասնակի ռեկուրսիվ գնահատականը կարելի է լավացնել անվերջ ռեկուրսիվ բազմություն կազմող կետերում։

Համանման հաստատումներ ապացուցվում են ԸՌՖ-ների համար, որոնք ԱՕՖ են հանդիսանում պրիմիտիվ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների համար։

10-րդ թեորեմում ապացուցվում է, որ եթե Φ-ը ԱՕՖ է հանդիսանում միատեղանի ՄՌՖ-ների (կամ ԸՌՖ-ների) համար, ապա այնպիսի n բնական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$!\Phi(n)\,\&\,\forall m\,(m<n\supset\neg(\Phi(m)=\Phi(n)))$$

իմունային է, բայց հիպերիմունային չէ։

H. B. MARANDJIAN. *On some properties of asymptotically optimal recursive functions* (summary)

The paper deals with the properties of asymptotically optimal recursive functions (AOF) defined by A. N. Kolmogorov [1]. Particularly, the transformations of partial recursive functions (PRF) which preserve the property of asymptotical optimality are investigated. To this end the notions of strongly substitutional, strongly and weakly superimposed functions are introduced criteria provided. The following theorems are proved on the majorization and minorization of AOFs and the complexity of natural numbers with respect to them.

1. If Φ is an AOF for the class of all one-place PRFs (or GRFs), then no general recursive majorizing Φ function exists.

2. No unlimited PRF exists which could minorize the complexity of natural numbers with respect to a function which is an AOF for the class of all one-place PRFs (or GRFs).

3. Any recursive majorant of the complexity of natural numbers with respect to a function which is an AOF for the class of one-place PRFs (or GRFs) can be improved in an infinite recursive set of points.

Similar statements are proved for general recursive functions which are AOFs for the class of all one-place primitive recursive functions.

The theorem 10 states that if Φ is an AOF for the class of all one-place PRFs (or GRFs) then the set of natural numbers n such that

$$! \Phi(n) \,\&\, \forall m\, (m < n \supset \neg (\Phi(m) = \Phi(n))),$$

is holds, is immune but not hyperimmune.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Н. Колмогоров.* Три подхода к определению понятия „количество информации", Проблемы передачи информации, т. I, вып. 1. 1965, 3—11.
2. *Н. А. Шанин.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 15—294.
3. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LII, 1958, 226—311.
4. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, New York and Toronto (Van Nostrand), 1952, X+550 pp. Русский перевод: С. К. Клини. Введение в метаматематику, ИИЛ, М., 1957, 526.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

Г. Г. КАЗАРЯН

L_p-ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕРЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

1. Пусть функция $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ определенная в n-мерном евклидовом пространстве E_n такова, что для данного набора многочленов $P_j(\xi)$ $(j=1,\cdots,N)$

$$\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)f\|_{L_p}<\infty,\quad 1<p<\infty, \tag{1}$$

где $D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$. Ставится задача о нахождении множества векторов $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами, для которых имеет место оценка

$$\|D^{\nu}f\|_{L_q}\leqslant C\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)\|_{L_p},\quad q\geqslant p, \tag{2}$$

для всех функций $f(x)$ с конечной правой частью и с константой C, не зависящей от $f(x)$.

Для однородных многочленов одного и того же порядка, с добавлением еще многочлена $P_0(\xi)\equiv 1$, эта задача решена Смитом [1], для обобщенно однородных многочленов — О. В. Бесовым [2]. В случае набора одночленов эта задача решена В. П. Ильиным [3]. Ими найдены неравенства типа (2) также и для функций $f(x)$, заданных в ограниченных областях некоторого класса. Нами здесь получены оценки типа (2) для более широкого класса многочленов $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$, в случае функций, определенных во всем евклидовом пространстве E_n.

Мы будем в дальнейшем рассматривать бесконечно дифференцируемые финитные функции $f(x)$ $(f(x)\in C_0^{\infty})$, так что для них условие (1) выполняется.

Пусть $P_j(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}^{j}\xi^{\alpha}$ — набор многочленов с, вообще говоря, комплексными коэффициентами. Характеристическим многогранником (*х. м.*) набора $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$ назовем минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{M}$, содержащий множество показателей $\{\alpha\}$, для которых $\gamma_{\alpha}^{j}\neq 0$, $j=1,\cdots,N$. Обозначим вершины этого многогранника через e^k, $k=1,\cdots,N_0$, его k-мерные некоординатные грани — через $\mathfrak{M}_k^{l}$, $k=1,\cdots,M_l$; $l=0,1,\cdots,n-1$. Пусть $\partial'\mathfrak{M}=\bigcup_k \mathfrak{M}_k^{n-1}$, $P_j^{k,l}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}_k^{l}}\gamma_{\alpha}^{j}\xi^{\alpha}$.

Определение 1. Многочлен $P(\xi)$ назовем допустимым, если существуют константы $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ такие, что для всех $\xi\in R_n$ имеет место неравенство

$$\delta_1\cdot\sum_{k=1}^{N_0}|\xi^{e^k}|\leqslant|P(\xi)|\leqslant\delta_2\sum_{k=1}^{N_0}|\xi^{e^k}|. \tag{3}$$

Определение 2. Измеримая функция $\Phi(\xi)$ называется мультипликатором из L_p в L_q $(\Phi\in M_p^q)$, если преобразование T_Φ: $L_p\to L_q$, определенное равенством

$$T_\Phi f=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R_n}\Phi(\xi)\tilde{f}(\xi)\,e^{i(x,\xi)}\,d\xi,$$

является ограниченным:

$$\|T_\Phi f\|_{L_q}\leqslant C\,\|f\|_{L_p},\quad q\geqslant p.$$

Имеет место теорема П. И. Лизоркина [5]. Пусть функция $\Phi(\xi)$ непрерывна вместе с производной $\partial^n\Phi/\partial\xi_1\cdots\partial\xi_n$ и всеми предшествующими ей производными при $|\xi_j|>0$, $j=1,\cdots,n$. Тогда $\Phi(\xi)\in M_p^q$, если

$$\left|\xi_1^{k_1+\beta}\cdots\xi_n^{k_n+\beta}\,\frac{\partial^k\Phi}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_n^{k_n}}\right|\leqslant M,$$

где $\beta=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\geqslant 0$, k_j принимает значение 0 или 1, $k=\sum_{j=1}^{n}k_j=0,1,\cdots,n$.

Лемма 1. [4]. Если $\mathfrak{M}$—характеристический многогранник для многочлена $P(\xi)=\sum_\alpha\gamma_\alpha\xi^\alpha$, то какова бы ни была точка $\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$, существует константа C такая, что неравенство

$$|\xi^\beta|\leqslant C\sum_{l=1}^{N_0}|\xi^{e^k}|$$

справедливо для всех $\xi\in R_n$, где e^k, $k=1,\cdots,N_0$ — вершины $\mathfrak{M}$.

Лемма 2. Пусть набор многочленов $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$ таков, что 1) его х.м. имеет вершины в начале координат и на каждой координатной оси (вне начала координат), 2) многочлены

$$P_j^{k,\,l}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}_k^l}\gamma_\alpha^j\xi^\alpha,\quad j=1,\cdots,N$$

ни для какого $k=1,\cdots,M_l$ не имеют общего действительного нуля вне координатных плоскостей, тогда многочлен $Q(\xi)=\sum_{j=1}^{N}|P_j(\xi)|^2$ является допустимым.

Доказательство следует из того, что многочлен

$$Q^{k,\,l}(\xi)=\sum_{\beta\in\mathfrak{M}_k^l}\tilde{\gamma}^{\beta}\,\xi^{\beta}=\sum_{j}|P_j^{k,\,l}(\xi)|^2$$

не может обращаться в нуль вне координатных плоскостей. А для таких многочленов, называемых полными, невырожденными, В. П. Михайловым [4] доказано неравенство (3). (Многочлен $Q(\xi)$ является еще неотрицательным, $Q(\xi)\geqslant 0$).

Теорема А. *Пусть задан набор многочленов* $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$, его х.м. $\mathfrak{M}$ *удовлетворяет условию 1) леммы 2, тогда:*

1) Условие 2) леммы 2 необходимо и достаточно для того, чтобы для всех точек ν, *при* $\nu+\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$ *имело место неравенство* (2), *где* $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $\beta_i=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, $i=1,\cdots,n$;

2) *Если для некоторой* ν, $\nu+\beta$ *находится вне* $\overline{\mathfrak{M}}$, *то неравенство* (2) *не может иметь места.*

Наметим доказательство (п. 1). Достаточность. Совершим преобразование Фурье функции $f(x)\in C_0^{\infty}$.

$$F[D^{\nu}f]=\xi^{\nu}\cdot F[f],$$

$$F[P_i(D)f]=P_i(\xi)\,F[f],\quad i=1,\cdots,N.$$

Умножив i-ое тождество на $\overline{P_i(\xi)}$ и сложив полученные тождества, находим

$$F[D^{\nu}f]=\sum_{m=1}^{N}\frac{\xi^{\nu}\cdot\overline{P_m(\xi)}}{\sum\limits_{l=1}^{N}|P_l(\xi)|^2}\cdot F[P_m(D)f]. \tag{4}$$

Достаточно доказать, что функции

$$\Phi_m(\xi)=\frac{\xi^{\nu}\cdot\overline{P_m(\xi)}}{\sum\limits_{l=1}^{N}|P_l(\xi)|^2}=\frac{\xi^{\nu}\cdot\overline{P_m(\xi)}}{Q(\xi)},\quad m=1,\cdots,N$$

являются мультипликаторами из L_p в L_q. Согласно теореме о мультипликаторах надо показать непрерывность и ограниченность выражений

$$\left|\xi_1^{k_1+\beta}\cdots\xi_n^{k_n+\beta}\frac{\partial^k\Phi_m(\xi)}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_n^{k_n}}\right|,\quad m=1,\cdots,N,\ k=\sum_{j=1}^{n}k_j=0,1,\cdots,n.$$

Пусть $\nu+\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$. Согласно лемме 2 $Q(\xi)$ — допустимый многочлен. Пусть сначала $k=0$, тогда

$$|\xi^{\beta}\Phi_m(\xi)|=\left|\frac{\xi^{\nu+\beta}\overline{P_m(\xi)}}{Q(\xi)}\right|\leqslant C\frac{\xi^{2(\nu+\beta)}}{\sum\limits_{k=1}^{N_*}\xi^{2e^k}}+C\frac{|\overline{P_m(\xi)}|^2}{\sum\limits_{k=1}^{N_*}\xi^{2e^k}}\cdot$$

Из леммы 1 следует, что первое слагаемое ограничено. Ограниченность второго слагаемого следует из того, что все точки α с $\gamma_\alpha\neq 0$ в $P_m(\xi)$ входят в $\overline{\mathfrak{M}}$ и надо снова применить лемму 1.

Таким же образом доказывается ограниченность

$$|\xi^{k+\beta} D^k \Phi_m(\xi)| \quad \text{при всех} \quad 0 < k \leqslant n.$$

Необходимость. Пусть $P_j^{k_0, l_0}(\xi^0) = 0$, $j = 1, \cdots, N$, и для некоторой точки ν при $\nu + \beta \in \overline{\mathfrak{M}}_{k_0}^{l_0}$ имеет место неравенство (2). Аналогично тому, как это делается в [6] и [2], рассмотрим функцию

$$f_\lambda(x) = \varphi(x)\, e^{i \cdot \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\sigma_k} \xi_k^0 x_k},$$

где $\varphi(x) \in C_0^\infty$, $\lambda > 0$, σ_k, $k = 1, \cdots, n$ таковы, что $P_j^{k_0, l_0}(\xi) = \sum_{(\alpha, \sigma) = 1} \gamma_{j\alpha} \xi^\alpha$.

Подставляя $f_\lambda(x)$ в неравенство (2) и деля обе части на λ, получим, что при $\lambda \to \infty$ левая часть стремится к постоянной, отличной от нуля, в то время как правая — к нулю.

п. 2) Пусть точка ν такова, что $\alpha = \nu + \beta$ находится вне $\overline{\mathfrak{M}}$. Докажем, что неравенство (2) не имеет места. Достаточно доказать, что не существует постоянной такой, что для всех функций $f(x) \in C_0^\infty$

$$\|D^\nu f\|_{L_q} \leqslant C \sum_{l=1}^{N_0} \|D^{e^l} f\|_{L_p}. \tag{5}$$

Пусть, напротив, (5) выполняется. Так как $\mathfrak{M}$ — выпуклый многогранник и $\alpha \in \overline{\mathfrak{M}}$, то существует хотя бы одна грань многогранника $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M}$ и точка α лежат по разные стороны гиперплоскости, проходящей через эту грань. Пусть $A_1\nu_1 + \cdots + A_n\nu_n = 1$ — уравнение этой гиперплоскости, тогда для всех вершин многогранника $\mathfrak{M}$

$$\sum_{l=1}^{n} A_l e_l^j = B^j \geqslant 1, \quad j = 1, \cdots, N_0,$$

а для α

$$\sum_{l=1}^{n} A_l \alpha_l = B < 1.$$

Возьмем функцию $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon^{A_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{A_n} x_n)$. По предположению для нее имеет место (5), т. е.

$$\varepsilon^B \cdot \|D^\nu f(x)\|_{L_q} \leqslant C \cdot \sum_{l=1}^{N} \varepsilon^{B_l} \|D^{e^l} f(x)\|_{L_p}.$$

Поделим обе части неравенства на ε^B, пусть $\varepsilon \to 0$, тогда правая часть стремится к нулю, в то время как левая часть — положительная постоянная. Это противоречит оценке (5), теорема доказана.

2. Пусть задан набор многочленов $P_l(x, \xi)$, $l = 1, \cdots, N$ с переменными коэффициентами. Ставится задача о нахождении неотрицательных целочисленных векторов $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$, для которых выполняется оценка

$$\|D^{\nu} f\|_{L_q} \leqslant C \cdot \sum_{l=1}^{N} \|P_l(x, D) f\|_{L_p} + C\|f\|_{L_p} \tag{6}$$

для всех $f \in C_0^{\infty}$.

Пусть $\mathfrak{M}(x)$ х. м., построенный на многочленах $P_j(x, \xi)$, $j = 1, \cdots, N$, для данной точки x. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{M}(x)$ не зависит от x и для каждой точки x удовлетворяются условия леммы 2. Пусть еще для „главных" коэффициентов $\gamma_{\alpha}^{j}(x)$ многочленов $P_j(x, \xi)$, $j = 1, \cdots, N$ выполняется неравенство

$$0 < d \leqslant |\gamma_{\alpha}^{j}(x)| \leqslant M, \quad j = 1, \cdots, N.$$

(Это условие выполняется, например, когда область изменения x, $x \in \Omega$ ограничена). Тогда (см. [4]) многочлен $Q(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N} |P_j(x, \xi)|^2$ является допустимым с константами $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, не зависящими от x, т. е.

$$\delta_1 \sum_{k=1}^{N_0} |\xi^{2\varepsilon^k}| \leqslant |Q(x, \xi)| \leqslant \delta_2 \sum_{k=1}^{N_0} |\xi^{2\varepsilon^k}|.$$

Мы будем предполагать в дальнейшем, что многочлены

$$P_j(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{j}(x) \xi^{\alpha}, \quad j = 1, \cdots, N$$ таковы, что

а) все $\gamma_{\alpha}^{j}(x)$, $j = 1, \cdots, N$ определены во всем E_n, измеримы и ограничены;

в) для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная система открытых множеств $\{U_j^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{k(\varepsilon)}$ $(k(\varepsilon) < \infty)$, покрывающая пространство E_n вместе с системой $\{U_{j,\varepsilon}^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{k(\varepsilon)}$, где $U_{j,\varepsilon}^{(\varepsilon)} = \{x \in U_j^{(\varepsilon)};\ \rho(x, E_n \setminus U_j^{(\varepsilon)}) > \delta\}$;

с) каждая точка $x \in E_n$ покрывается не более чем m_0 множествами $U_j^{(\varepsilon)}$, где m_0 не зависит от ε;

d) $|\gamma_{\alpha}^{j}(x') - \gamma_{\alpha}^{j}(x'')| < \varepsilon$, $j = 1, \cdots, N$ для любой пары $x', x'' \in U_j^{(\varepsilon)}$, $\alpha \in \partial' \mathfrak{M}$.

Теорема В. *Пусть набор многочленов $P_j(x, \xi)$, $j = 1, \cdots, N$ удовлетворяет условиям леммы 2 для каждого $x \in E_n$ и условиям* а)—d), его х. м. $\mathfrak{M}$ *удовлетворяет условию: все внешние нормали $\partial' \mathfrak{M}$ имеют неотрицательные координаты. Тогда:* 1) *неравенство* (6) *имеет место для всех ν при $\nu + \beta \in \overline{\mathfrak{M}}$;* 2) *ни для одной точки ν при $\nu + \beta \in \overline{\mathfrak{M}}$ неравенство* (6) *не может иметь места.*

Доказательство. 1). Так как для всех точек ν при $\nu + \beta \in \overline{\mathfrak{M}}$ согласно теореме А имеет место неравенство

$$\|D^{\nu} f\|_{L_q} \leqslant C \sum_{k=1}^{N_0} \|D^{\varepsilon^k} f\|_{L_p} \leqslant C \sum_{\mu \in \partial' \mathfrak{M}} \|D^{\mu} f\|_{L_p}, \tag{7}$$

то достаточно доказать оценку

$$\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|D^\mu f\|_{L_p}\leqslant C\sum_{k=1}^{N}\|P_k(x,D)f\|_{L_p}+C\|f\|_{L_p},\tag{8}$$

откуда и будет следовать (6).

Следуя Гордингу [7], построим разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_j^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{k(\varepsilon)}$. Пусть $\psi_j(x)>0$, $\psi_j(x)\in C_0^\infty(E_n)$, $\sum_{k=1}^{k(\varepsilon)}\psi_j^\rho(x)=1$, $\psi_j(x)=1$ при $x\in U_{j-\frac{1}{2}}^{(\varepsilon)}$, $\psi_j(x)=0$ при $x\overline{\in}U_j^{(\varepsilon)}$.

Возьмем фиксированную точку $x^j\in U_j^{(\varepsilon)}$, тогда

$$\left\|\psi_j(x)\sum_{k=1}^{N}P_k(x,D)f-\sum_{k=1}^{N}P_k(x^j,D)(\psi_j f)\right\|_{L_p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\psi_j\cdot\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}[\gamma_\alpha^k(x)-\gamma_\alpha^k(x^j)]D^\mu f\right\|_{L_p}+C\sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{M}}\setminus\partial'\mathfrak{M}}\|D^\alpha f\|_{L_p}.$$

Согласно условию d) $|\gamma_\alpha^k(x)-\gamma_\alpha^k(x^j)|<\varepsilon$ для любой точки $x\in U_j^{(\varepsilon)}$, а для точек $\alpha\in\overline{\mathfrak{M}}/\partial'\mathfrak{M}$, имеет место оценка [3]

$$\|D^\alpha f\|_{L_p}\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|D^\mu f\|_{L_p}+C(\varepsilon)\|f\|_{L_p},\tag{9}$$

так что можно записать

$$\left\|\psi_j\sum_{k=1}^{N}P_k(x,D)f-\sum_{k=1}^{N}P_k(x^j,D)(\psi_j f)\right\|_{L_p}\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|\psi_j D^\mu f\|_{L_p}+$$

$$+C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|D^\mu(\psi_j f)\|_{L_p}+C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}.$$

Но согласно теореме А для постоянных коэффициентов, если $Q(x^j,\xi)=\sum_{k=1}^{N}|P_k(x,\xi)|^2$ — допустимый многочлен, то

$$\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|D^\mu(\psi_j f)\|_{L_p}\leqslant C\sum_{k=1}^{N}\|P_k(x^j,D)(\psi_j f)\|_{L_p}+C(\varepsilon)\|f\|_{L_p},\tag{10}$$

так что

$$\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|D^\mu(\psi_j f)\|_{L_p}\leqslant\sum_{k=1}^{N}\|\psi_j\cdot P_k(x,D)f-P_k(x^j,D)(f\psi_j)\|_{L_p}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\|\psi_j\cdot P_k(x,D)f\|_{L_p}+C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}\leqslant C\cdot\varepsilon\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}}\|D^\mu(\psi_j f)\|_{L_p}+$$

$$+C\sum_{k=1}^{N}\|\psi_j P_k(x,D)f\|_{L_p}+C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}.$$

Считая $C\cdot\varepsilon<1$, перенесем слагаемое с ε в левую сторону, получим

$$\sum_{\nu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^\nu(\psi_j f)\|_{L_p} \leqslant C\cdot \sum_{k=1}^{N} \|\psi_j P_k(x, D) f\|_{L_p} + C\|f\|_{L_p}$$

или

$$\sum_{\nu\in\partial'\mathfrak{M}} \|\psi_j D^\nu f\|_{L_p} \leqslant C\sum_{k=1}^{N} \|\psi_j P_k(x, D) f\|_{L_p} + C\|f\|_{L_p}.$$

Взяв сумму по j, и утверждая, что $\sum_{j=1}^{m_\alpha} \psi_j^\alpha = 1$, получим (8), откуда и следует (6).

п. 2) теоремы доказывается так же, как в теореме A.

3. Пусть рассматриваемые функции $f(x)$ таковы, что они обращаются в нуль вне некоторой ограниченной области Ω. Пусть задан набор многочленов $P_j(x, \xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha^j(x)\xi^\alpha$, где все $\gamma_\alpha^j(x)$ определены на $\overline{\Omega}$. Мы будем предполагать, что х. м. $\mathfrak{M}(x)$ не зависит от $x\in\overline{\Omega}$ и удовлетворяются условия леммы 2 для каждой точки $x\in\Omega$.

Теорема C. *Пусть набор многочленов $P_j(x, \xi)$, $j=1,\cdots, N$ таков, что все коэффициенты $\gamma_\alpha^j(x)$ измеримы и ограничены, а „главные" коэффициенты непрерывны в $\overline{\Omega}$, тогда неравенство*

$$\|D^\nu f\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L_p(\Omega)} + C\|f\|_{L_p(\Omega)}$$

имеет место для всех ν при $\nu+\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме B.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 18.XII.1967

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Խառը ածանցյալների գնահատականները տված դիֆերենցիալ բազմանդամների միջոցով *(ամփոփում)*

Դիցուկ $\mathfrak{M}$-ով նշանակված է ամենափոքր ուռուցիկ բազմանիստը, որը պարունակում է տված $P_j(x,D)=\sum_\alpha \gamma_\alpha^j(x)\,D^\alpha$ $(j=1,\cdots, N)$ դիֆերենցիալ բազմանդամների բոլոր α մուլտիինդեքսները, որոնց համար $\gamma_\alpha^j\not\equiv 0$, իսկ $\mathfrak{M}_l^k$ $(l=1,\cdots, M_k,\ k=0,\cdots, n-1)$ այդ բազմանիստի k-չափանի նիստերն են, որոնք գտնվում են կոորդինատական հարթությունների դուրս։

Ապացուցվում է, որ

$$\sum_{\nu\in\mathfrak{M}} \|D^\nu f\|_{L_p} < C\sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L_p} \quad (f\in C_0^\infty)$$

գնահատականի համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $P_j^{l,k}(x,\xi)=\sum_{\nu\in\mathfrak{M}_l^k}\gamma_\alpha^j(x)\xi^\alpha$ $(j=1,\cdots,N)$ բազմանիստները ոչ մի (l, k) զույգի դեպքում ամեն մի x-ի համար չունենան իրական ընդհանուր արմատներ կոորդինատական հարթություններից դուրս։

Ապացույցը հիմնականում տարվում է (L_p, L_q) մուլտիպլիկատորների մասին թեորեմայի հիման վրա։

H. G. KAZARIAN. *L_p—estimates of mixed derivatives with given differential polynoms* (summary)

Let $\mathfrak{M}$ be the smallest convex polyhedron containing all the multiindexes of given differential polynoms $P_j(x, D) = \sum_{\gamma} a_{\gamma}^j(x) D^{\gamma}$ $(j = 1, \cdots, N)$, for which $a_{\gamma}^j \neq 0$ and $\mathfrak{M}_i^k$ $(i = 1, \cdots, M_k,\ k = 0, \cdots, n-1)$ be those K—dimensional edges of this polyhedron which do not lie on coordinate planes. It is proved that the necessary and sufficient condition for the validity of

$$\sum_{\nu=n} \|D^{\nu} f\|_{L_p} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L_p} \quad (f \in C_0^{\infty})$$

is that the polynoms $P_j^{i,k}(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} a_{\alpha}^j(x) \xi^{\alpha}$ have no common real zeros outside coordinate planes for any pair (i, k) and for each x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. T. Smith.* Inequalites for formally positive integro-differential forms, Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67, № 4, 368—370.
2. *О. В. Бесов.* О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева, Матем. сб., 73 : 4, 1967, 585—600.
3. *В. П. Ильин.* О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных, Труды МИАН, 84: 4,1965, 144—173.
4. *В. П. Михайлов.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН, 91, 1967, 59—81.
5. *П. И. Лизоркин.* (L_p, L_q)—мультипликаторы интегралов Фурье, ДАН СССР, 152, № 4, 1963, 808—811.
6. *J. Necas.* Sur les mormes equivalentes dans $W_p^{(m)}(\Omega)$ et sur la coercitivite des formes formellement positives, Seminaire de Mathematiques superienres, Ete 1965.
7. *L. Garding.* Dirichlet's problem for linear elliptic partical differential equations, Math. Scad 1, 1953, 55—72.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

И. А. ФЕДОТОВ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В R^n, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ, ИМЕЮЩИЕ РАЗРЫВНЫЕ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Введение

В данной статье рассматриваются эллиптические дифференциальные уравнения в R^n, зависящие от двух больших вещественных параметров q, p $(q < p)$, которые распадаются на два уравнения в полупространствах $R^n_+ = R^n\{x = (x_1, \cdots, x_n): x_n > 0\}$ и $R^n_- = R^n\{x : x_n < 0\}$. В R^n_+ уравнение зависит только от параметра q, а в R^n_- — от q и от p. Для такой задачи изучается вопрос о гладком сопряжении решений указанных уравнений на гиперплоскости $x_n = 0$, а также доказывается теорема единственности гладкого решения и априорная оценка.

Примером подобных задач являются некоторые задачи дифракции, изученные в работе [1] для уравнений второго порядка. В этой работе рассматривалась, в частности, следующая задача:

$$\left|\begin{array}{l} Au \equiv \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{lk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f_+(x) \text{ в } G, \\ Bu \equiv \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(b_{lk}\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0 \text{ в } R^n \setminus G, \\ u(x) \in H_2(R^n). \end{array}\right.$$

Настоящая статья представляет собой первый шаг к обобщению таких задач на случай общих эллиптических дифференциальных уравнений, когда уравнения задаются в полупространствах.

При решении указанной задачи мы используем получившую в последние годы широкое развитие теорию псевдодифференциальных операторов [2] или, как их иначе называют [3] уравнений в свертках.

Вообще говоря, вместо дифференциальных операторов мы могли бы рассматривать псевдодифференциальные операторы, но это повлекло бы за собой большое количество различных предположений, связанных с поведением факторизации символов. Ограничимся поэтому изучением только дифференциальных уравнений, используя факторизацию полиномов, рассматриваемую в [4] (гл. 4).

При доказательстве теорем существования и единственности используется метод работы [5], в которой наличие параметра позволяет обратить исходный оператор. Мы решаем задачу в пространствах, в которых нормы естественно связаны с параметрами, что оказывается существенным для данной задачи.

Для доказательства теоремы существования и априорной оценки строятся правый и левый регуляризаторы, причем при $p \to \infty$ они превращаются в регуляризаторы первой краевой задачи для уравнения в R^n_+ с нулевыми граничными условиями, следовательно, изучаемая нами задача в некотором смысле моделирует первую краевую задачу для эллиптического уравнения в R^n_+.

Мы будем использовать ряд обозначений работы [3].

§ 1. Постановка задачи

Пусть $a(x, \xi, q) = \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta \xi^\alpha$ — однородный порядка $2m$ эллиптический полином

$$a(x, \xi, q) \neq 0 \text{ при } |\xi| + q \neq 0,\ x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \equiv (x', x_n),\ \xi = (\xi', \xi_n). \quad (1.1)$$

Предположим, что коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ удовлетворяют условию

$$a_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}(\infty) + a'_{\alpha\beta}(x), \quad (2.1)$$

где $a'_{\alpha\beta}(x) \in S_x$.

По функции $a(x, \xi, q)$ построим дифференциальный оператор

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta D^\alpha u(x) \quad (D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},\ D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}), \quad (3.1)$$

который в соответствии с (2.1) может быть представлен в виде

$$Au = A(\infty)\, u + A'u = \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(\infty)\, q^\beta D^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a'_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta D^\alpha u(x). \quad (4.1)$$

Функцию $a(x, \xi, q)$ будем называть символом оператора A.

Наряду с $a(x, \xi, q)$ рассмотрим символ $b(x, \xi, q, p)$

$$b(x, \xi, q, p) = \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=2m} b_{\alpha\beta\gamma}(x)\, q^\beta p^\gamma \xi^\alpha, \quad (5.1)$$

также допускающий представление вида (2.1) и эллиптический по ξ, q, p, т. е. $b(x, \xi, q, p) \neq 0$ при $|\xi| + q + p \neq 0$, q и $p > 0$.

Соответствующий $b(x, \xi, q, p)$ оператор имеет вид

$$Bu = B(\infty)\, u + B'u = \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=2m} b_{\alpha\beta\gamma}(x)\, q^\beta p^\gamma D^\alpha u(x). \quad (6.1)$$

Будем решать в R^n следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned} \theta^+ Au_+(x) &\equiv \theta^+ \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta D^\alpha u_+(x) = f_+(x) \\ \theta^- Bu_-(x) &\equiv \theta^- \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=2m} b_{\alpha\beta\gamma}(x)\, q^\beta p^\gamma D^\alpha u_-(x) = f_-(x) \end{aligned}\right\}, \quad (7.1)$$

где $f_+(x)$ определена при $x_n > 0$, $f_-(x)$ — при $x_n \leqslant 0$, $\theta^+(x)$ — функция Хевисайда, а $\theta^-(x) = 1 - \theta^+(x)$. Функция $f(x) = f_+ + f_-$ определена в R^n и принадлежит $L_2(R^n)$. Задачу (7.1) будем решать при условии: $u_+ + u_- \in H_{2m}(R^n)$ при фиксированных q и p.

Определим оператор $\mathbf{A}$ по формуле $\mathbf{A}u = \theta^+ Au + \theta^- Bu$.

Тогда задача (7.1) примет вид:

$$\mathbf{A}u = f, \quad u \in H_{2m}(R^n). \tag{8.1}$$

§ 2. Некоторые нормировки в пространствах H

1. Пространство $\mathbf{H}_{m,m}$ состоит из функций, заданных на R^n. Норму в $\mathbf{H}_{m,m}$ введем по формуле

$$\|v\|_{m_1, m_2} = \|(q + p + |\xi|)^{m_1} (q + |\xi|)^{m_2} \tilde{v}(\xi)\|_0. \tag{1.2}$$

Здесь $\tilde{v}(\xi)$ есть преобразование Фурье функции $v(x)$, определяемое формулой

$$\tilde{v}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{i(x,\xi)} v(x)\, dx \equiv F[v(x)], \quad (x, \xi) \equiv x\xi \equiv x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n.$$

Очевидно, что при фиксированных q и p это пространство совпадает с $H_{m_1+m_2}$. В частности, при $m_1 = m_2 = m$ мы получаем пространство H_{2m}, а при $m_1 = m$, $m_2 = -m$ — пространство H_0.

2. Пространство $\mathbf{H}^\mu$. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\mu_-(\xi) \equiv \mu_-(\xi, q, p) = \frac{[\xi_n - i(q + p + |\xi'|)]^m}{[\xi_n - i(q + |\xi'|)]^m}, \tag{2.2}$$

$$\mu_+(\xi) \equiv \mu_+(\xi, q, p) = \frac{[\xi_n + i(q + |\xi'|)]^m}{[\xi_n + i(q + p + |\xi'|)]^m}. \tag{3.2}$$

Пространство $\mathbf{H}^\mu$ состоит из функций $g = g_+ + g_- = \theta^+ g + \theta^- g$, определенных на прямой сумме $\overline{H_0^+} + \overline{H_0^-}$, для которых норма вводится по формуле

$$\|g\| = \|\Pi^+ \mu_-(\xi, q, p)\, \tilde{g}_+(\xi)\|_0 + \|\Pi^- \mu_+(\xi, q, p)\, \tilde{g}_-(\xi)\|_0 \quad (\Pi^\pm = F[\theta^\pm] \text{ (см. [3])}). \tag{4.2}$$

Отметим, что при фиксированных значениях параметров q и p, следующие нормы являются эквивалентными:

$$\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_{m,-m} \sim \|\cdot\|.$$

Теорема 1.2. *Оператор* $\mathbf{A}$ *ограничен из пространства* $\mathbf{H}_{m,m}$ *в* $\mathbf{H}^\mu$, *т. е.*

$$\|\mathbf{A}u\| \leqslant c\|u\|_{m,m}. \tag{5.2}$$

Доказательство.

$$\|\mathbf{A}u\| = \|\Pi^+ \mu_- \tilde{A}u\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{B}u\|_0 = \|\Pi^+ \mu_- (\Pi^+ \tilde{A}u + \Pi^- \tilde{B}u)\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^+ \mu_- (\Pi^+ \tilde{A}u + \Pi^- \tilde{B}u)\|_0 = \|\Pi^+ \mu_- \tilde{A}u\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{B}u\|_0 \leqslant C(\|\mu_- \tilde{A}u\|_0 + \|\mu_+ \tilde{B}u\|_0). \tag{6.2}$$

В последнем неравенстве мы использовали тот факт, что операторы $\Pi^{\pm}$ ограничены в H_0 (см. [3]), $(\Pi^{-} g_{+} = 0)$.

Запишем формулы для $\widetilde{Au}$, $\widetilde{Bu}$

$$\widetilde{Au}(\xi) = a(\infty, \xi, q)\,\widetilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \widetilde{a'}(\xi - \eta, \eta, q)\widetilde{u}(\eta)\,d\eta, \tag{7.2}$$

$$\widetilde{Bu}(\xi) = b(\infty, \xi, q, p)\widetilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \widetilde{b'}(\xi - \eta, \eta, q, p)\widetilde{u}(\eta)\,d\eta, \tag{8.2}$$

что следует из (4.1) и (6.1), если в этих формулах перейти к преобразованию Фурье от x к ξ. Легко проверяются следующие оценки:

$$|a(\infty, \xi, q)| \leqslant C(q + |\xi|)^{2m}, \quad |\widetilde{a'}(\xi - \eta, \eta, q)| \leqslant C_r \frac{(q + |\eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}, \tag{9.2}$$

$$|b(\infty, \xi, q, p)| \leqslant C(q + p + |\xi|)^{2m}, \quad |\widetilde{b'}(\xi - \eta, \eta, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q + p + |\eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}. \tag{10.2}$$

Константа C_r зависит от r, где r может быть сколь угодно большим.

В силу этих неравенств имеем

$$\|\mu_{-} \widetilde{Au}\|_0 \leqslant C\left(\left\|\frac{(q + p + |\xi|)^m}{(q + |\xi|)^m}(q + |\xi|)^{2m}\widetilde{u}\right\|_0 + \left\|\frac{(q + p + |\xi|)^m}{(q + |\xi|)^m} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int \frac{(q + |\eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}\widetilde{u}(\eta)\,d\eta\right\|_0\right). \tag{11.2}$$

Воспользуемся элементарными неравенствами

$$(q + p + |\xi|)^m \leqslant C(q + p + |\eta|)^m (1 + |\xi - \eta|)^m, \tag{12.2}$$

$$(q + |\xi|)^{-m} \leqslant C(q + |\eta|)^{-m} (1 + |\xi - \eta|)^m, \tag{13.2}$$

тогда (11.2) примет вид

$$\|\mu_{-} \widetilde{Au}\|_0 \leqslant C\left(\|u\|_{m,m} + \left\|\int (q + p + |\eta|)^m (q + |\eta|)^m \frac{(1 + |\xi - \eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}\widetilde{u}\,d\eta\right\|_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u\|_{m,m} + \left\|\int (q + p + |\eta|)^m (q + |\eta|)^m \frac{\widetilde{u}|\eta|}{(1 + |\xi - \eta|)^{r_1}}\,d\eta\right\|_0\right). \tag{14.2}$$

Воспользуемся теперь известным неравенством

$$\left\|\int g(\eta)\,\varphi(\xi - \eta)\,d\eta\right\|_0 \leqslant \int |\varphi(\xi)|\,d\xi \cdot \|g\|_0. \tag{15.2}$$

Тогда, взяв в (9.2) r достаточно большим, из (14.2) получим

$$\|\mu_{-} \widetilde{A}\,u(\xi)\|_0 \leqslant C\|u\|_{m,m}. \tag{16.2}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\|\mu_{+} \widetilde{B}\,u(\xi)\|_0 \leqslant C\|u\|_{m,m}. \tag{17.2}$$

Подставляя (16.2) и (17.2) в (6.2), получаем (5.2). Теорема доказана.

§ 3. Факторизация символов a и b

Известно, что полиномы $a(x, \xi, q)$ и $b(x, \xi, q, p)$ могут быть факторизованы по ξ_n

$$a(x, \xi, q) = a_+(x, \xi', \xi_n, q)\, a_-(x, \xi', \xi_n, q), \tag{1.3}$$

$$b(x, \xi, q, p) = b_+(x, \xi', \xi_n, q, p)\, b_-(x, \xi', \xi_n, q, p), \tag{2.3}$$

где a_+, b_+ (a_-, b_-) — аналитически продолжимы в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n > 0$ ($\operatorname{Im} \xi_n < 0$) и однородны порядка m по ξ, q, p. Следуя работе [4], запишем a_+ в виде

$$a_+(x, \xi', \xi_n, q) = \sum_{k=0}^{m} a^+_{m-k}(x, \xi', q)\, \xi_n^k, \quad a^+_0 = 1. \tag{3.3}$$

Коэффициенты a^+_{m-k} могут быть определены из системы

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\oint_{\Gamma^+} \frac{\zeta_n^{j+k}\, d\zeta_n}{a(x, \xi', \zeta_n, q)}\right) a^+_{m-k}(x, \xi', q) = -\oint_{\Gamma^+} \frac{\zeta_n^{j+m}\, d\zeta_n}{a(x, \xi', \zeta_n, q)}, \tag{4.3}$$

$$(j = 0, 1, \cdots, m-1),$$

где Γ^+ — контур, охватывающий все корни полинома $a(x, \xi', \xi_n, q)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Im} \xi_n > 0$, а из условия эллиптичности следует, что

$$\Delta = \det \left\| \oint_{\Gamma^+} \frac{\zeta_n^{j+k}\, d\zeta_n}{a(x, \xi', \zeta_n, q)} \right\| \neq 0.$$

Отметим следующие важные свойства функции $a_+(x, \xi, q)$:

1) $a_+(x, \xi, q)$ — однородная степени m функция, удовлетворяющая условию эллиптичности

$$a_+(x, \xi, q) \neq 0 \text{ при } |\xi| + q \neq 0;$$

2) $a_+(x, \xi, q)$ представима в виде

$$a_+(x, \xi, q) = a_+(\infty, \xi, q) + a'_+(x, \xi, q),$$

где $a'_+(x, \xi, q) \in S_x$ $(a_+(\infty, \xi, q) \neq 0)$;

3) Дифференцирование по x не изменяет порядка однородности символа $a_+(x, \xi, q)$, т. е. для любого мультииндекса α

$$\operatorname{ord} [D^\alpha a_+(x, \xi, q)] = m;$$

4) Однократное дифференцирование по ξ снижает порядок однородности $a_+(x, \xi, q)$ на единицу, причем $\dfrac{\partial}{\partial \xi_l}\, a_+$ ограничена на единичной сфере $|\xi| + q = 1$

$$\operatorname{ord} [\partial^1_{\xi_l} a_+(x, \xi, q)] = m - 1 \quad \left(\partial^1_{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right).$$

Для доказательства свойств 1)—4) достаточно разрешить систему (4.3) для какого-либо $a^{\pm}_{m-k}$ и затем проверить указанные свойства для одного из слагаемых суммы (3.3).

В дальнейшем нам понадобится рассмотрение символов вида $[a_+(x, \xi, q)]^{-1}$. Ясно, что такой символ может быть представлен в виде

$$\frac{1}{a_+(x, \xi, q)} = \frac{1}{a_+(\infty, \xi, q)} + \frac{a_+(\infty, \xi, q) - a_+(x, \xi, q)}{a_+(\infty, \xi, q)\, a_+(x, \xi, q)} \equiv \frac{1}{a_+(\infty)} + k'_+,$$

где $k'_+ \in S_x$ и также является „плюсовой" в том смысле, что ее можно аналитически продолжить в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n > 0$.

Все сказанное можно с небольшими видоизменениями отнести и к символам $a_-(x, \xi, q)$, $b_\pm(x, \xi, q, p)$.

§ 4. Представление решения задачи (7.1) в случае постоянного символа

Пусть символы a и b не зависят от x. Рассмотрим задачу

$$\theta^+ A(D, q)\, u(x) + \theta^- B(D, q, p)\, u(x) = f(x). \tag{1.4}$$

Сделаем в (1.4) преобразование Фурье. Тогда получим

$$\Pi^+ \tilde{A}(\xi, q)\, \tilde{u}(\xi) + \Pi^- \tilde{B}(\xi, q, p)\, \tilde{u}(\xi) = \tilde{f}(\xi). \tag{2.4}$$

Решением задачи (2.4), принадлежащим H_{2m} при фиксированных значениях q и p, является функция

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\tilde{A}_+(\xi, q)\, \tilde{B}_-(\xi, q, p)} \left[\Pi^+ \frac{\tilde{B}_-(\xi, q, p)}{\tilde{A}_-(\xi, q)} \tilde{f}(\xi) + \Pi^- \frac{\tilde{A}_+(\xi, q)}{\tilde{B}_+(\xi, q, p)} \tilde{f}(\xi) \right]. \tag{3.4}$$

Действительно

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{u}(\xi) = [\Pi^+ \tilde{A}(\xi, q) + \Pi^- \tilde{B}(\xi, q, p)] \left[\frac{1}{\tilde{A}_+ \tilde{B}_-} \left(\Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} + \Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f} \right) \right] =$$

$$= \Pi^+ \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{B}_-} \Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} + \Pi^+ \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{B}_-} \Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f} + \Pi^- \frac{\tilde{B}_+}{\tilde{A}_+} \Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} +$$

$$+ \Pi^- \frac{\tilde{B}_+}{\tilde{A}_+} \Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f}.$$

Учитывая, что „минусовые" и „плюсовые" функции образуют алгебру по умножению и что $\Pi^\pm \varphi_\mp = 0$, а также, что $\Pi^\mp g_\pm \Pi^\mp f = \Pi^\mp g_\pm f$, получаем

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{u}(\xi) = \Pi^+ \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{B}_-} \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} + \Pi^- \frac{\tilde{B}_+}{\tilde{A}_+} \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f} = \Pi^+ \tilde{f} + \Pi^- \tilde{f} = \tilde{f},$$

т. е. (3.4) есть решение задачи (1.4), причем это решение принадлежит пространству $H_{2m}(R^n)$.

§ 5. Определение псевдодифференциального оператора

В теории псевдодифференциальных операторов [2] оператор, построенный по символу $a(x, \xi)$, задается следующей формулой:

$$Au(x) = F^{-1}_{\xi \to x}\, a(x, \xi)\, \bar{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\, a(x, \xi)\, \bar{u}(\xi)\, d\xi. \qquad (1.5)$$

Если символ $a(x, \xi)$ допускает представление

$$a(x, \xi) = a(\infty, \xi) + a'(x, \xi), \quad a'(x, \xi) \in S_x, \qquad (2.5)$$

то вместо (1.5) пользуются также формулой

$$\tilde{A}u \equiv \widetilde{Au} = a(\infty, \xi)\bar{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \bar{a}'(\xi - \eta, \eta)\bar{u}(\eta)\, q\eta, \qquad (3.5)$$

где $\bar{a}'(\xi - \eta, \eta) = F_{x \to (\xi - \eta)}\, a'(x, \eta)$.

При построении доказательства разрешимости задачи (7.1) нам придется рассматривать операторы, построенные по символам вида

$$\frac{1}{a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p)}, \quad \frac{b_-(x, \xi, q, p)}{a_-(x, \xi, q)}, \quad \frac{a_+(x, \xi, q)}{b_+(x, \xi, q, p)} \text{ и т. п.}$$

Соответствующие этим символам операторы будем обозначать большими буквами, например,

$$\frac{1}{A_+ B_-}\, g(x) \equiv O_p\, \frac{1}{a_+ b_-}\, g(x)$$

обозначает оператор, построенный по символу $\dfrac{1}{a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p)}$.

Для композиции двух псевдодифференциальных операторов примем обозначение $A \circ B$.

Формулой композиции двух псевдодифференциальных операторов, как обычно, будем называть такую формулу:

$$A \circ B = AB + T, \qquad (4.5)$$

где оператор T имеет следующий вид:

$$\tilde{T}\bar{g}(x) \equiv \tilde{T}g(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \Big[a(\infty, \xi) - a(\infty, \tau) \Big] \bar{b}'(\xi - \tau, \tau)\, \bar{g}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n} \int\int \Big[\bar{a}'(\xi - \eta, \eta) - \tilde{a}'(\xi - \eta, \tau) \Big] \tilde{b}'(\eta - \tau, \tau)\, \bar{g}(\tau)\, d\tau d\eta. \qquad (5.5)$$

В нашем случае, когда все символы зависят от параметра, формула композиции принципиально ничем не отличается от (4.5).

Вывод формулы (4.5) приведен, например, в работах [2], [3].

§ 6. Формула правого регуляризатора задачи (7.1).

По аналогии с решением (3.4) задачи (1.4) запишем формулу правого регуляризатора задачи (7.1) в виде (см., например, [6])

$$\mathbf{R}f = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+\frac{B_-}{A_-}f + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^-\frac{A_+}{B_+}f. \tag{1.6}$$

Формулы композиции, в соответствии с (4.5), имеют вид

$$A \circ \frac{1}{A_+ B_-} = \frac{A_-}{B_-} + T_A, \tag{2.6}$$

$$B \circ \frac{1}{A_+ B_-} = \frac{B_+}{A_+} + T_B, \tag{3.6}$$

$$\frac{A_-}{B_-} \circ \frac{B_-}{A_-} = E + T_-^{(1)}, \tag{4.6}$$

$$\frac{B_+}{A_+} \circ \frac{A_+}{B_+} = E + T_+^{(1)}, \tag{5.6}$$

E—единичный оператор.

Найдем выражение $\mathbf{AR}f$, где $\mathbf{A}$ обозначает оператор $\theta^+A + \theta^-B$. Учитывая (2.6)—(5.6), получим

$$\mathbf{AR}f = f + Tf, \tag{6.6}$$

где $T = T_1 + T_2 + T_3$,

$$T_1 f = \theta^+ T_-^{(1)} f + \theta^- T_+^{(1)} f, \tag{7.6}$$

$$T_3 f = \theta^+ T_A g_+ + \theta^- T_B g_+, \quad g_+(x) = \theta^+ \frac{B_-}{A_-} f(x), \tag{8.6}$$

$$T_3 f = \theta^+ T_A g_- + \theta^- T_B g_-, \quad g_-(x) = \theta^- \frac{A_+}{B_+} f(x). \tag{9.6}$$

Лемма 1.6. *Для оператора T, действующего в пространстве* $\mathbf{H}^p$, *при условии* $0 < q < p$ *справедлива оценка*

$$\|Tf\| \leqslant \frac{C}{q}\|f\|, \tag{10.6}$$

где константа C не зависит от f, q и p.

Доказательство леммы 1.6 мы приведем в § 8.

Следствие 1.6. Оператор T при достаточно больших q имеет малую норму.

Следствие 2.6. Оператор $E+T$ обратим в $\mathbf{H}^p$, а обратный к нему оператор ограничен.

Из следствия 2.6 вытекает следующая

Теорема 1.6. *Для любой функции* $f \in \mathbf{H}^p$ *при достаточно большом* q_0 ($q > q_0$, $p > q$) *существует решение задачи* (7.1), *имеющее вид*

$$u(x) = \mathbf{R}(E+T)^{-1} f \in \mathbf{H}^{m,\,m}.$$

В самом деле

$$Au = AR\,(E+T)^{-1} f = (E+T)\,(E+T)^{-1} f = f.$$

Принадлежность функции f пространству $H_{m,\,m}$ следует из леммы 2.9, доказанной ниже.

§ 7. Оценки символов

В этом параграфе мы приведем некоторые оценки символов, необходимые для доказательства леммы 1.6 и теоремы единственности.

Введем ряд обозначений. Во-первых, как и раньше, будем писать

$$a_\pm(x, \xi, q) = a_\pm(\infty, \xi, q) + a'_\pm(x, \xi, q), \tag{1.7}$$

$$b_\pm(x, \xi, q, p) = b_\pm(\infty, \xi, q, p) + b'_\pm(x, \xi, q, p). \tag{2.7}$$

Далее обозначим

$$\frac{1}{a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p)} = k(\infty, \xi, q, p) + k'(x, \xi, q, p), \tag{3.7}$$

$$\frac{a_-(x, \xi, q)}{b_-(x, \xi, q, p)} = k_-(\infty, \xi, q, p) + k'_-(x, \xi, q, p), \tag{4.7}$$

$$\frac{b_+(x, \xi, q, p)}{a_+(x, \xi, q)} = k_+(\infty, \xi, q, p) + k'_+(x, \xi, q, p), \tag{5.7}$$

$$\frac{b_-(x, \xi, q, p)}{a_-(x, \xi, q)} = l_-(\infty, \xi, q, p) + l'_-(x, \xi, q, p), \tag{6.7}$$

$$\frac{a_+(x, \xi, q)}{b_+(x, \xi, q, p)} = l_+(\infty, \xi, q, p) + l'_+(x, \xi, q, p), \tag{7.7}$$

$$a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p) \equiv b_-(x, \xi, q, p)\, a_+(x, \xi, q) = h(\infty, \xi, q, p) + h'(x, \xi, q, p). \tag{8.7}$$

В силу свойства 2) (§ 5) и аналогичных свойств символов $a_-(x, \xi, q)$, $b_\pm(x, \xi, q, p)$ мы можем утверждать, что все штрихованные символы формул (1.7)—(8.7) принадлежат классу S_x равномерно относительно ξ, $q + p + |\xi| = 1$. Отметим сначала следующие очевидные неравенства:

$$c\,(q + |\xi|)^m \leqslant |(1+|x|)^s a'_\pm(x, \xi, q)| \leqslant C_s\,(q + |\xi|)^m, \tag{9.7}$$

$$c\,(q + p + |\xi|)^m \leqslant |(1+|x|)^s b'_\pm(x, \xi, q, p)| \leqslant C_s\,(q + p + |\xi|)^m. \tag{10.7}$$

Далее справедливы следующие оценки:

$$|\overline{k}'(\eta - \tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{1}{(q + |\tau|)^m\,(q + p + |\tau|)^m\,(1 + |\eta - \tau|)^r}, \tag{11.7}$$

$$|\overline{l}'_-(\eta - \tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q + p + |\tau|)^m}{(q + |\tau|)^m\,(1 + |\eta - \tau|)^r}, \tag{12.7}$$

$$|\overline{l}'_+(\eta - \tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q + |\tau|)^m}{(q + p + |\tau|)^m\,(1 + |\eta - \tau|)^r}, \tag{13.7}$$

$$|\tilde{h}'(\eta-\tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^m (q+p+|\tau|)^m}{(1+|\eta-\tau|)^r}, \tag{14.7}$$

$$|\tilde{a}'(\eta-\tau, \tau, q)| \leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^{2m}}{(1+|\eta-\tau|)^r}, \tag{15.7}$$

$$|\tilde{b}'(\eta-\tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q+p+|\tau|)^{2m}}{(1+|\eta-\tau|)^r}. \tag{16.7}$$

Отметим еще такие оценки

$$|a(\infty, \xi, q) - a(\infty, \tau, q)| \leqslant C\,[(q+|\xi|)^{2m-1} + (q+|\tau|)^{2m-1}]\,|\xi-\tau|, \tag{17.7}$$

$$|\tilde{a}'(\xi-\eta, \eta, q) - \tilde{a}'(\xi-\eta, \tau, q)| \leqslant C_r \frac{[(q+|\eta|)^{2m-1} + (q+|\tau|)^{2m-1}]\,|\eta-\tau|}{(1+|\xi-\eta|)^r}, \tag{18.7}$$

$$|b(\infty, \xi, q, p) - b(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C[(q+p+|\xi|)^{2m-1} + (q+p+|\tau|)^{2m-1}]|\xi-\tau|, \tag{19.7}$$

$$|\tilde{b}'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{b}'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \frac{[(q+p+|\eta|)^{2m-1} + (q+p+|\tau|)^{2m-1}]\,|\eta-\tau|}{(1+|\xi-\eta|)^r}, \tag{20.7}$$

$$|\tilde{k}_-'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}_-'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} \frac{(1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{21.7}$$

$$|k_-(\infty, \xi, q, p) - k_-(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\xi-\tau|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} |\xi-\tau|, \tag{22.7}$$

$$|\tilde{k}_+'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}_+'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{23.7}$$

$$|k_+(\infty, \xi, q, p) - k_+(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\xi-\tau|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}} |\xi-\tau|, \tag{24.7}$$

$$|\tilde{l}_-'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{l}_-'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{25.7}$$

$$|l_-(\infty, \xi, q, p) - l_-(\infty, \tau, q, p)| \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\tau-\xi|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}} |\tau-\xi|, \tag{26.7}$$

$$|\tilde{l}_+'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{l}_+'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m (1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{27.7}$$

$$|l_+(\infty, \xi, q, p) - l_+(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\xi-\tau|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} |\xi-\tau|, \qquad (28.7)$$

$$|\tilde{k}'(\xi-\tau_1, \tau_1, q, p) - \bar{k}'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$

$$\leqslant C_r \frac{(1+|\eta-\tau|)^{2m}}{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m+1} (1+|\xi-\eta|)^r} |\tau_1-\tau|, \qquad (29.7)$$

$$|k(\infty, \xi, q, p) - k(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(1+|\xi-\tau|)^{2m}}{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m+1}} |\xi-\tau|. \qquad (30.7)$$

Некоторые из этих оценок мы докажем в дополнении, а остальные будут иметь аналогичные доказательства, либо вообще тривиальны.

Замечание. При доказательстве оценок (11.7)—(30.7) мы использовали полиномиальную специфику рассматриваемой задачи. Если же потребовать выполнение указанных оценок, то можно считать операторы A и B псевдодифференциальными, записав задачу в виде

$$\theta^+ Au + \theta^- Bu = f(x).$$

§ 8. Доказательство леммы 1.6

Лемма 1.8. *Пусть* $T_{\pm}^{(1)}$ *и* $T_{-}^{(1)}$ *— операторы, определенные в* (4.6) и (5.6). *Тогда для любого* $f \in \mathbf{H}^{\mu}$ *выполнимы следующие оценки:*

$$\|\Pi^{\pm} \mu_{\mp} \tilde{T}_{\pm}^{(1)} f\|_0 \leqslant \frac{C}{q} \|\!|f|\!\|, \qquad (1.8)$$

Доказательство. Пусть в (4.5) $A = \frac{A_-}{B_-}$, $B = \frac{B_-}{A_-}$. Тогда в силу (5.5) оператор $T_{-}^{(1)}$ имеет вид

$$\tilde{T}_{-}^{(1)} f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \left[k_-(\infty, \xi, q, p) - k_-(\infty, \tau, q, p) \right] \tilde{l}'_-(\xi-\tau, \tau, q, p) \tilde{f}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n} \int\int \left[\tilde{k}'_-(\xi-\eta, \eta, q, p) - \bar{k}'_-(\xi-\eta, \tau, q, p) \right] \times$$

$$\times \tilde{l}'_-(\eta-\tau, \tau, q, p)\, \tilde{f}(\tau)\, d\eta\, d\tau. \qquad (2.8)$$

Рассмотрим выражение

$$\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_{-}^{(1)} f = \Pi^+ \mu_- \tilde{T}_{-}^{(1)} \frac{1}{\mu_-} \cdot \mu_- f. \qquad (3.8)$$

Используя разложение $\mu_- \tilde{f} = \Pi^+ \mu_- \tilde{f} + \Pi^- \mu_- \tilde{f}$, получим

$$\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_{-}^{(1)} f = \Pi^+ \mu_- \tilde{T}_{-}^{(1)} \frac{1}{\mu_-} \Pi^+ \mu_- \tilde{f}. \qquad (4.8)$$

Так как оператор Π^+ ограничен в H_0 из (3.8) следует

$$\|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_-^{(1)} f\|_0 \leqslant \|\mu_-(\xi, q, p)\ \bar{T}_-^{(1)} \frac{1}{\mu_-} \Pi^+ \mu_- \bar{f}\|_0. \tag{5.8}$$

Учитывая (2.8), получаем

$$\|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_-^{(1)} f\|_0 \leqslant \|\mu_-(\xi, q, p) \int \Big| k_-(\infty, \xi, q, p) - k_-(\infty, \tau, q, p) \Big| \bar{l}'_-(\xi - \tau, \tau, q, p) \times$$

$$\times \frac{1}{\mu_-} (\Pi^+ \mu_- \tilde{f})\, d\tau\|_0 + \|\mu_- \int \int \Big| \bar{k}'_-(\xi - \eta, \eta, q, p) - \bar{k}'_-(\xi - \eta, \tau, q, p) \Big| \times$$

$$\times \bar{l}'_-(\eta - \tau, \tau, q, p) \frac{1}{\mu_-(\tau, q, p)} (\Pi^+ \mu_- \bar{f})\, d\eta\, d\tau\|_0 = N_1 + N_2. \tag{6.8}$$

Оценим норму N_1. Учитывая неравенства (12.2), (13.2), мы можем написать

$$|\mu_-(\xi)| \leqslant C \frac{(q + p + |\xi|)^m}{(q + |\xi|)^m} \leqslant C \frac{(q + p + |\tau|)^m}{(q + |\tau|)^m} (1 + |\xi - \tau|)^{2m}. \tag{7.8}$$

Следовательно, в силу неравенств (22.7) и (12.7) имеем

$$N_1 \leqslant \|\int \frac{1}{(q + |\tau|)} \frac{1}{(1 + |\xi - \tau|)^{r-4m}} |\Pi^+ \mu_- f(\tau)| d\tau\|_0. \tag{8.8}$$

Если теперь взять в формуле (12.7) r достаточно большим и воспользоваться неравенством (15.2), то из (8.8) следует

$$N_1 \leqslant \frac{C}{q} \|\Pi^+ \mu_- \bar{f}(\xi)\|_0 \leqslant \frac{C}{q} |||f|||. \tag{9.8}$$

Теперь оценим N_2

$$N_2 \leqslant \Big\| \int \frac{\mu_-(\xi, q, p)}{\mu_-(\tau, q, p)} \Pi^+ \mu_-(\tau, q, p)\, \bar{f}(\tau)\, d\tau \int \Big[\bar{k}'_-(\xi - \eta, \eta, q, p) -$$

$$- \bar{k}'_-(\xi - \eta, \tau, q, p) \Big] \bar{l}'_-(\eta - \tau, \tau, q, p)\, d\eta \Big\|.$$

Оценивая внутренний интеграл с помощью неравенств (21.7) и (12.7), получаем

$$N_2 \leqslant \frac{C}{q} \Big\| \int \Big\{ \Big| \frac{\mu_-(\xi)}{\mu_-(\tau)} \Big| \cdot |\Pi^+ \mu_-(\tau) \tilde{f}(\tau)| \int \frac{d\eta}{(1 + |\xi - \eta|)^{r_1} (1 + |\eta - \tau|)^{r_1}} \Big\} d\tau \Big\|_0 \tag{10.8}$$

$$(r_1 = r - 2m).$$

Воспользуемся известным неравенством

$$\int \frac{d\eta}{(1 + |\xi - \eta|)^{r_1} (1 + |\eta - \tau|)^{r_1}} \leqslant \frac{C}{(1 + |\xi - \tau|)^{r_1}}. \tag{11.8}$$

Оценивая $\mu_-(\xi)$ по (7.8), получим

$$N_2 \leqslant \frac{C}{q} \Big\| \int \frac{1}{(1 + |\xi - \tau|)^{r_1 - 2m}} |\Pi^+ \mu_-(\tau) \bar{f}(\tau)|\, d\tau \Big\|_0 \leqslant \frac{C}{q} \|\Pi^+ \mu_- \bar{f}\|_0 \leqslant \frac{C}{q} |||f|||. \tag{12.8}$$

Из (9.8) и (12.8) следует первая из формул (1.8).

Вторая из формул (1.8) доказывается аналогично. Лемма 1.8 доказана.

Лемма 2.8. *Имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\Pi^+\left(\frac{\widetilde{B}_-}{\widetilde{A}_-}\right)f\right\|_0 \leqslant C\|\Pi^+\mu_-\widetilde{f}\|_0, \tag{13.8}$$

$$\left\|\Pi^-\left(\frac{\widetilde{A}_+}{\widetilde{B}_+}\right)f\right\|_0 \leqslant C\|\Pi^-\mu_+\widetilde{f}\|_0. \tag{14.8}$$

Доказательство. В силу определения псевдодифференциального оператора, принимая во внимание обозначение (6.7), запишем

$$\left\|\Pi^+\frac{\widetilde{B}_-}{\widetilde{A}_-}f\right\|_0 = \left\|\Pi^+\int\widetilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\widetilde{f}(\eta)\,d\eta + \Pi^+ l_-(\infty,\xi,q,p)\widetilde{f}(\xi)\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant\left\|\Pi^+\int\widetilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\widetilde{f}(\eta)\,d\eta\right\|_0 + \|\Pi^+ l_-(\infty,\xi,q,p)\widetilde{f}(\xi)\|_0.$$

Далее поступаем, как в лемме 1.8, учитывая (13.7)

$$\left\|\Pi^+\int\widetilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\widetilde{f}(\eta)\,d\eta\right\|_0 = \left\|\Pi^+\int\widetilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\frac{1}{\mu_-(\eta)}\Pi^+\mu_-(\eta)\times\right.$$

$$\left.\times\widetilde{f}(\eta)\,d\eta\right\|_0 \leqslant\left\|\int\left|\widetilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\frac{1}{|\mu_-(\eta)|}\right|\Pi^+\mu_-\widetilde{f}\,|d\eta\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C\left\|\int\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^r}\left|\Pi^+\mu_-\widetilde{f}\right|d\eta\right\|_0 \leqslant\left\|\Pi^+\mu_-\widetilde{f}\right\|_0.$$

Неравенство (14.8) доказывается аналогично. Надо только вместо (13.7) использовать неравенство типа (12.7). Лемма 2.8 доказана.

Лемма 3.8. *Пусть операторы T_A и T_B определены формулами* (2.6) *и* (3.6). *Тогда для любой функции $g\in H_0$ выполнимы оценки*

$$\|\mu_-\widetilde{T}_A g\|_0 \leqslant\frac{C}{q}\|g\|_0, \tag{15.8}$$

$$\|\mu_+\widetilde{T}_B g\|_0 \leqslant\frac{C}{q}\|g\|_0. \tag{16.8}$$

Докажем неравенство (15.8). Полагая в (4.5) $A=A$, $B=\dfrac{1}{A_+B_-}$, запишем (5.5) в виде

$$\widetilde{T}_A g=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int a(\infty,\xi,q)-a(\infty,\tau,q)]\widetilde{k}'(\xi-\tau,\tau,q,p)\,\widetilde{g}(\tau)\,d\tau+$$

$$+(2\pi)^{-n}\int\int[\widetilde{a}'(\xi-\eta,\eta,q)-\widetilde{a}'(\xi-\eta,\tau,q)]\widetilde{k}'(\eta-\tau,\tau,q,p)\,\widetilde{g}(\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Отсюда легко получается следующая оценка (если применить неравенства (17.7), (18.7) и (11.7)):

$$|\bar{T}_A \bar{g}| \leqslant \int \frac{(q+|\tau|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}} \bar{g}(\tau)\, d\tau. \tag{17.8}$$

Поступая далее как при доказательстве леммы 1.8, получим

$$\|\mu_- \tilde{T}_A g\|_0 \leqslant \left\| \frac{(q+p+|\xi|)^m}{(q+|\xi|)^m} \int \frac{(q+|\tau|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}} \bar{g}(\tau)\, d\tau \right\|_0 \leqslant \frac{C}{q} \|g\|_0.$$

Для доказательства (16.8) надо записать (5.5) применительно к операторам B и $\dfrac{1}{A_+ B_-}$ и воспользоваться оценками (19.7), (20.7), (11.7), а также учесть, что $q < p$.

Перейдем теперь к доказательству леммы 1.6. Напомним, что нам надо доказать неравенство

$$\|Tf\| \leqslant \frac{C}{q} \|f\|.$$

По определению оператора T имеем

$$\|Tf\| \equiv \|\Pi^+ \mu_- \bar{T} f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \bar{T} f\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_1 f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_2 f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_3 f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \bar{T}_1 f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_2 f\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \bar{T}_3 f\|_0 = \|\Pi^+ \mu_- \Pi^+ \bar{T}_-^{(1)} f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \Pi^+ \tilde{T}_A g_+\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \Pi^+ \bar{T}_A g_-\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \Pi^- \bar{T}_+^{(1)} f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \Pi^- \tilde{T}_B g_+\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \Pi^- T_B g_-\|_0 =$$

$$= \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_A g_+\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_A g_-\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \bar{T}_+^{(1)} f\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \bar{T}_B g_+\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \bar{T}_B g_-\|_0 \leqslant \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} f\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \bar{T}_+^{(1)} f\|_0 + \|\mu_- \bar{T}_A g_+\|_0 + \|\mu_+ \bar{T}_B g_+\|_0 + \|\mu_- \bar{T}_A g_-\|_0 + \|\mu_+ \tilde{T}_B g_-\|_0.$$

Применяя теперь к первым двум слагаемым неравенство леммы 1.8, а к остальным—неравенства леммы 3.8, получим

$$\|Tf\| \leqslant \frac{C}{q} \|f\| + \frac{C}{q} \|\bar{g}_+\|_0 + \frac{C}{q} \|\bar{g}_-\|_0 = \frac{C}{q} \left(\|f\| + \|\Pi^+ \frac{\bar{B}_-}{A_-} f\|_0 + \|\Pi^- \frac{\bar{A}_+}{B_+} f\|_0 \right).$$

Наконец использование леммы 2.8 дает

$$\|Tf\| \leqslant \frac{C}{q} (\|f\| + \|\Pi^+ \mu_- f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ f\|_0) = \frac{C}{q} \|f\|.$$

§ 9. Левый регуляризатор и априорная оценка

В этом параграфе мы докажем, что левый регуляризатор задачи (1.7) совпадает с правым, т. е., что если положить R таким же, как в формуле (1.6), то

$$\mathbf{RA}u = u + T'u, \tag{1.9}$$

где оператор T' имеет малую норму в пространстве $\mathbf{H}_{m,\,m}$ при большом значении параметра q.

Пусть попрежнему

$$\mathbf{A}u = \theta^+ Au + \theta^- Bu, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{RA}u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-}\mathbf{A}u + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+}\mathbf{A}u. \tag{3.9}$$

Запишем следующие формулы композиции:

$$\frac{B_-}{A_-} \circ A = B_- A_+ + T_1', \tag{4.9}$$

$$\frac{A_+}{B_+} \circ B = A_+ B_- + T_2', \tag{5.9}$$

$$\frac{1}{A_+ B_-} \circ A_+ B_- = E + T_3'. \tag{6.9}$$

Здесь $B_- A_+$ — оператор, построенный по символу $b_- a_+$, а $A_+ B_-$ — построен по символу $a_+ b_- = b_- a_+$. Следовательно, $A_+ B_- = B_- A_+$. Учитывая это, подставим (2.9) в (3.9).

$$\mathbf{RA}u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-}\theta^+ Au + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-}\theta^- Bu +$$

$$+ \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+}\theta^+ Au + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+}\theta^- Bu =$$

$$= \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-} \circ Au + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+} \circ Bu =$$

$$= \frac{1}{A_+ B_-}\{\theta^+ B_- A_+ u + \theta^+ T_1' u + \theta^- A_+ B_- u + \theta^- T_2' u\} =$$

$$= \frac{1}{A_+ B_-}\{A_+ B_- u + \theta^+ T_1' u + \theta^- T_2' u\} = u + T_3' u + T_1' u + T_2' u = u + T' u,$$

где

$$T' = T_1' = T_2' + T_3', \tag{7.9}$$

$$T_1' u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ T_1' u, \quad T_2' u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- T_2' u, \quad T_3' = T_3'. \tag{8.9}$$

Лемма 1.9. *Оператор T' является сглаживающим в пространстве $H_{m,\,m}$, именно*

$$\|T' u\|_{m,\,m} \leqslant C \|u\|_{m,\,m-1}. \tag{9.9}$$

Константа C от q, p, и не зависит.

Доказательство. Оценим каждый оператор из суммы (7.9) в отдельности.

1) Оператор T_1'. Применяя оператор $\frac{1}{A_+ B_-}$ с символом k, получаем

$$\|T_1' u\|_{m,\,m} \leqslant C\left(\|k(\infty, \xi, q, p)\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_{m,\,m} + \right.$$
$$\left. + \left\| \int k'(\xi-\tau_i, \tau_i, q, p)\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u(\eta)\,d\eta \right\|_{m,\,m}\right).$$

Если теперь воспользоваться оценками (11.7) и аналогичной оценкой для $k(\infty, \xi, q, p)$, то

$$\|T_1' u\|_{m,\,m} \leqslant C\|(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^m \frac{1}{(q+|\xi|)^m (q+p+|\xi|)^m}\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_0' +$$
$$+ C\left\| \int \frac{(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^m}{(q+|\tau_i|)^m (q+p+|\tau_i|)^m} \frac{1}{(1+|\xi-\tau_i|)^r}\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u(\tau_i)\,d\tau_i \right\|_0 \leqslant$$
$$< C\|\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_0 + C\left\| \int \frac{1}{(1+|\xi-\tau_i|)^{r_1}}\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u(\eta)\,d\tau_i \right\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant C\|\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_0 \leqslant C\|\widetilde{T}_1' u\|_0'.$$

Таким образом

$$\|T_1' u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\widetilde{T}_1' u\|_0'. \tag{10.9}$$

Оценим норму $\|\widetilde{T}_1' u\|_0$. Положим в (5.5) $A = \frac{B_-}{A_-}$, $B = A$, тогда

$$\widetilde{T}_1' u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int [l_-(\infty, \xi, q, p) - l_-(\infty, \tau, q, p)]\,\widetilde{a}'(\xi-\tau, \tau, q)\,\widetilde{u}(\tau)\,d\tau +$$
$$+ (2\pi)^{-n} \int\int [\widetilde{l}_-'(\xi-\eta_i, \eta_i, q, p) - \widetilde{l}_-'(\xi-\eta_i, \tau, q, p)] \times$$
$$\times \widetilde{a}'(\eta-\tau, \tau, q)\,\widetilde{u}(\tau)\,d\eta d\tau. \tag{11.9}$$

В силу оценок (25.7) и (15.7) ядро I_2 второго интеграла мажорируется следующим образом:

$$|I_2| \leqslant C \int \frac{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{2m} (1+|\tau-\xi|)^{2m}}{(q+|\tau|)^{m+1} (1+|\xi-\eta|)^r (1+|\eta-\tau|)^r}\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}. \tag{12.9}$$

А для подынтегрального выражения I_1 первого интеграла по (26.7) и (15.7) имеем

$$|I_1| \leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\xi-\tau|)^{2m}}{(q+|\tau|)^{m+1} (1+|\xi-\tau|)^r} (q+|\tau|)^{2m} \leqslant$$
$$\leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m-1}}{(1+|\tau-\xi|)^{r_1}}. \tag{13.9}$$

Следовательно

$$|\widetilde{T}_1' u| \leqslant C \int (q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m-1} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}\,\widetilde{u}(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда в силу неравенства (15.2)

$$\|\tilde{T}_1' u\|_0 \leqslant C\|(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^{m-1}\tilde{u}\|_0 \equiv C\|u\|_{m,m-1}. \tag{14.9}$$

Подставляя (14.9) в (10.9), получаем

$$\|T_1' u\|_{m,m} \leqslant C\|u\|_{m-m,1}. \tag{15.9}$$

2) Точно так же, как и в 1)

$$|\tilde{T}_2' u| \leqslant C\int (q+|\tau|)^{m-1}(q+p+|\tau|)^m \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}\tilde{u}(\tau)\,d\tau, \tag{16.9}$$

откуда

$$\|\tilde{T}_2' u\|_0 \leqslant C\|(q+|\xi|)^{m-1}(q+p+|\xi|)^m \tilde{u}\|_0 \equiv C\|u\|_{m,m-1}. \tag{17.9}$$

Далее как в 1)

$$\|T_2' u\|_{m,m} \leqslant C\|\tilde{T}_2' u\|_0 \leqslant C\|u\|_{m,m-1}. \tag{18.9}$$

3) Положим в (5.5) $A = \dfrac{1}{A_+B_-}$, $B = A_+B_-$, тогда

$$T_3' u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int [k(\infty,\xi,q,p) - k(\infty,\tau,q,p)]\tilde{h}'(\xi-\tau,\tau,q,p)\tilde{u}(\tau)\,d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n}\int\int [\tilde{k}'(\xi-\eta,\eta,q,p) - \tilde{k}'(\xi-\eta,\tau,q,p)]\tilde{h}'(\xi-\tau,\tau,q,p)\tilde{u}(\tau)\,d\eta\,d\tau. \tag{19.9}$$

После применения оценок (29.7), (30.7) и (14.7) получаем

$$|\tilde{T}_3' u| \leqslant C\int \frac{1}{(q+|\tau|)}\frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}\tilde{u}(\tau)\,d\tau, \tag{20.9}$$

откуда

$$\|T_3' u\|_{m,m} \leqslant C\left\|(|\xi|+q)^m (q+p+|\xi|)^m \int \frac{1}{(q+|\tau|)}\frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}\tilde{u}(\tau)\,d\tau\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C\left\|\int \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(q+p+|\tau|)^m}{(1+|\xi-\tau|)^{r_2}}\tilde{u}(\tau)\,d\tau\right\|_0 \leqslant C\|(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^{m-1}\times$$

$$\times \tilde{u}(\xi)\|_0 = C\|u\|_{m,m-1}. \tag{21.9}$$

Таким образом

$$\|T_3' u\|_{m,m} \leqslant C\|u\|_{m,m-1}. \tag{22.9}$$

Складывая (15.9), (18.9) и (22.9), получаем (9.9). Лемма 1.9 доказана.

Следствие 1.9. Из неравенства (9.9) следует, что при $q < p$ справедлива оценка

$$\|T'u\|_{m,m} \leqslant \frac{C}{q}\|u\|_{m,m}. \tag{23.9}$$

Следовательно, если взять q достаточно большим, то оператор T' имеет малую норму.

Лемма 2.9. *Оператор* $\mathbf{R}$ *ограничен из* $\mathbf{H}^{\mu}$ *в* $\mathbf{H}_{m,m}$, *т.е.*

$$\|Rf\|_{m,m} \leqslant C\|f\|, \quad f \in \mathbf{H}^{\mu}. \tag{24.9}$$

Доказательство. Используя обозначения формул (8.6), (9.6), напишем

$$\mathrm{R}f = \frac{1}{A_+B_-}\theta^+\frac{B_-}{A_-}f + \frac{1}{A_+B_-}\theta^-\frac{A_+}{B_+}f = \frac{1}{A_+B_-}g_+ + -\frac{1}{A_+B_-}g_-. \tag{25.9}$$

Оценим по норме выражение

$$\frac{1}{A_+B_-}g_+ = k(\infty,\xi,q,p)\,\tilde{g}_+(\xi,q,p) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int \tilde{k}'(\xi-\eta_i,\eta_i,q,p)\,\tilde{g}_+ \times$$

$$\times g_+(\eta,q,p)\,d\eta, \tag{26.9}$$

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_+\right\|_{m,\,m} \leqslant \|(q+|\xi|)^m(q+p+|\xi|)^m k(\infty,\xi,q,p)\,\tilde{g}_+(\xi,q,p)\|_0 +$$

$$+ C\left\|\int (q+|\eta_i|)^m(q+p+|\eta_i|)^m(1+|\xi-\eta_i|)^{2m}\tilde{k}'(\xi-\eta,\eta,q,p)\,\tilde{g}_+(\eta,q,p)\,d\eta\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C\|\tilde{g}_+(\xi,q,p)\|_0 = C\left\|\Pi^+\frac{\tilde{B}_-}{A_-}f\right\|_0. \tag{27.9}$$

Отсюда по лемме 2.8 имеем

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_+\right\|_{m,\,m} \leqslant C\|f\|. \tag{28.9}$$

Аналогично доказывается

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_-\right\|_{m,\,m} \leqslant C\|g_-\|_0 = C\left\|\Pi^-\frac{\tilde{A}_+}{B_+}f\right\|_0, \tag{29.9}$$

откуда в силу леммы 2.8

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_-\right\|_{m,\,m} \leqslant C\|f\|. \tag{30.9}$$

Из (28.9) и (30.9) следует (31.9). Лемма 2.9 доказана.

Теорема 1.9 (*об априорной оценке*). *Пусть оператор* A *удовлетворяет условиям* § 1. *Тогда имеет место оценка*

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\mathbf{A}u\| \quad (q_0 < q < p). \tag{31.9}$$

Доказательство. Так как из формулы (1.9) следует, что

$$u = \mathbf{R}\mathbf{A}u - T'u, \tag{32.9}$$

то

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant \|\mathbf{R}\mathbf{A}u\|_{m,\,m} + \|T'u\|_{m,\,m}. \tag{33.9}$$

Оценив первое слагаемое с помощью леммы 2.9, а второе — с помощью следствия 1.9, получим

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\mathbf{A}u\| + \frac{C}{q}\|u\|_{m,\,m}, \tag{34.9}$$

q выбрано таким, что $\frac{C}{q} < 1$, следовательно

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\mathbf{A}u\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.9. Задача (7.1) имеет единственное решение для любой функции $f \in \mathbf{H}^{+}$.

Объединим результат теорем 1.6 и 1.9 в следующее утверждение.

Основная теорема. *Пусть* $\mathbf{A}$*—оператор, определенный по формуле*

$$\mathbf{A}u = \theta^{+} Au + \theta^{-} Bu,$$

где A *и* B*—эллиптические дифференциальные операторы, определенные формулами* (3.1) *и* (6.1). *Тогда для любой функции* $f \in \mathbf{H}^{+}$ *существует единственное решение* $u \in \mathbf{H}_{m,\,m}$ *задачи*

$$\mathbf{A}u = f \quad \text{при} \quad q_0 < q < p.$$

Замечание. Можно считать, что функции f и u принадлежат, соответственно, H_0 и H_{2m} с требованием выполнения ограниченности функций f и u в нормах, соответствующих пространствам $\mathbf{H}^{+}$, $\mathbf{H}_{m,\,m}$.

§ 10. Дальнейшие замечания

1°. До сих пор мы считали, что символы операторов A, B суть однородные функции. Это ограничение легко снимается. В самом деле, пусть

$$A^{(1)}u = \sum_{|\alpha|+\beta<2m} a_{\alpha\beta}(x)\,q^{\beta} D^{\alpha} u,$$

$$B^{(1)}u = \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma<2m} b_{\alpha\beta\gamma}\,q^{\beta}p^{\gamma} D^{\alpha} u.$$

Обозначим старшие части этих операторов через A, B. Будем считать, что они попрежнему удовлетворяют условиям § 1. Представим оператор $\mathbf{A}^{(1)} = \theta^{+} A^{(1)} + \theta^{-} B^{(1)}$ в виде

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)}.$$

$\mathbf{A}^{(2)}$ содержит лишь младшие слагаемые операторов $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$. Соответствующие части этих операторов обозначим через $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$.

1) ограниченность $\mathbf{A}^{(1)}$. Для оператора $\mathbf{A}^{(1)}$ справедливо утверждение теоремы 1.2.

В самом деле

$$\|\mathbf{A}^{(1)}u\| \leqslant \|\mathbf{A}u\| + \|\mathbf{A}^{(2)}u\|. \tag{1.10}$$

С другой стороны

$$\|\mathbf{A}^{(2)}u\| \leqslant \|\mu_{-}\tilde{A}^{(2)}u\|_0 + \|\mu_{+}\tilde{B}^{(2)}u\|_0 \leqslant \tag{2.10}$$

$$\leqslant \frac{C}{q}\left\|\frac{(q+p+|\xi|)^m}{(q+|\xi|)^m}(q+|\xi|)^{2m}\,\tilde{u}\right\|_0 + \frac{C}{q}\left\|\frac{(q+|\xi|)^m}{(q+p+|\xi|)^m}(q+p+|\xi|)^{2m}\,\tilde{u}\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C/q\,\|u\|_{m,\,m}.$$

Учитывая (2.10) и теорему 1.2, получим нужный результат.

2) Правый и левый регуляризаторы. Оператор $\mathbf{R}$, определенный по формуле (1.6), является правым и левым регуляризатором для $\mathbf{A}^{(1)}$.

Действительно

$$\mathbf{AR}f = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{R}f + \mathbf{A}^{(2)}Rf = f + Tf + \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{R}f. \tag{3.10}$$

С помощью (2.10) и леммы 2.9 можно оценить

$$\|\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{R}f\| \leqslant \frac{C}{q}\|\mathbf{R}f\|_{m,\ m} \leqslant \frac{C}{q}\|f\|, \tag{4.10}$$

т. е. оператор $\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{R}$ имеет малую норму.

Аналогично доказывается, что $\mathbf{R}$—левый регуляризатор для $\mathbf{A}^{(1)}$.

2°. Предельный случай задачи.

Здесь мы приведем совершенно нестрогие соображения, указывающие на то, что при предельном переходе $(p \to \infty)$ регуляризатор $\mathbf{R}$ переходит в регуляризатор первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями.

Пусть после факторизации символа b (см. § 3)

$$b_-(x, \xi, q, p) = \sum_{k=0}^{m} b^-_{m-k}(x, \xi', q, p)\,\xi_n^k.$$

Поскольку факторизация определена с точностью до множителя, зависящего от x, мы можем ее заменить следующей:

$$b(x, \xi, q, p) = [b^-_m(x, 0, 0, 1)\,b_+(x, \xi', \xi_n, q, p)]\left[\frac{1}{b^-_m(x, 0, 0, 1)} \times \right.$$

$$\left. \times\, b_-(x, \xi', \xi_n, q, p)\right] \equiv b'_+\, b'_-. \tag{5.10}$$

Будем писать в формуле (1.6) вместо b_+ и b_- соответственно b'_+ и b'_-. При $p \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{p^m}\,b'_-(x, \xi, q, p) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^k}\,b^-_{m-k}\left(x, \frac{\xi'}{p}, \frac{q}{p}, 1\right)\xi_n^k \frac{1}{b^-_m(x, 0, 0, 1)} \to 1.$$

Переходя теперь к пределу при $p \to \infty$ в формуле 1.6, получим

$$\lim_{p\to\infty} \mathbf{R}f = \lim_{p\to\infty} Op\left(\frac{1}{a_+ b'_-}\right)\theta^+ Op\left(\frac{b'_-}{a_-}\right)f = \lim_{p\to\infty} Op \times$$

$$\times \frac{1}{a_+ \cdot p^m\, b'_-\left(x, \frac{\xi}{p}, \frac{q}{p}, 1\right)}\,\theta^+ Op\,\frac{b'_-}{a_-}f =$$

$$= \lim_{p\to\infty} Op\,\frac{1}{a_+\, b'_-\left(x, \frac{\xi}{p}, \frac{q}{p}, 1\right)}\,\theta^+ Op\left(\frac{1}{p^m}\,b'_-\,\frac{1}{a_-}\right)f = \frac{1}{A_+}\,\theta^+\,\frac{1}{A_-}f =$$

$$= \frac{1}{A_+}\,\theta^+\,\frac{1}{A_-}\,lf_+^*, \tag{6.10}$$

но это есть вид регуляризатора для первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями (см. [3]). Заметим, что при $p \to \infty$ исходная задача вырождается в следующую:

$$\left.\begin{aligned} \theta^+ Au_+ &= f_+ \\ u_- &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.10}$$

---

* lf_+ обозначает произвольное продолжение функции f_+ на все R^n, так что $lf_+ \in H_0(R^n)$.

Положим всюду $p = 1/\varepsilon$, тогда $p \to \infty$ эквивалентно $\varepsilon \to 0$. После такого перехода получаем, что решение $u \in H_{0,\,m}$ или, что то же самое, $u \in \overset{0}{H}{}^{+}_{m,\,q}$, где

$$\|u\|^2_{\overset{0}{H}{}^{+}_{m,\,q}} \sim \int (q + |\xi|)^{2m} |\tilde{u}|^2 \, d\xi, \quad u_- = \theta^- u = 0, \quad u = u_+ + u_-.$$

Априорная оценка принимает вид

$$\|\tilde{u}\|_{0,\,m} \leqslant C \| \Pi^+ [\xi_n - i (|\xi'| + q)]^{-m} \tilde{f}_+ (\xi) \|_0. \tag{8.10}$$

Дополнение

Здесь мы докажем некоторые оценки § 11. Отметим сначала, что оценки (11.7)—(16.7) легко доказываются, если применить способ доказательства леммы 4.2 работы [7]. Мы не будем останавливаться на этих оценках, так как при выводе неравенств типа (21.7) будет использована по существу та же техника.

Оценки (17.7)—(20.7) тривиальны, а оценки (21.7)—(30.7) доказываются почти одинаково. Поэтому остановимся подробно лишь на выводе одной из оценок, например, на неравенстве (21.7).

Оценим сначала

$$\int \left| D^\alpha \partial_\zeta^1 k'_- (x, \zeta, q, p) \right|_{\zeta = \tilde{\zeta} = \eta + \varkappa(\eta - \tilde{\eta})} dx, \quad 0 < \varkappa < 1, \tag{1.Д}$$

где

$$k'_- = \frac{a'_-(x)\, b_-(\infty) - a_-(\infty)\, b'_-(x)}{b_-(x)\, b_-(\infty)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a'_-(x, \xi, q)\, b_-(\infty, \xi, q, p) - a_-(\infty, \xi, q)\, b'_-(x, \xi, q, p)}{b_-(x, \xi, q, p)\, b_-(\infty, \xi, q, p)}, \tag{2.Д}$$

в силу (4.7).

После дифференцирования (2.Д) по ζ получим

$$D^\alpha \partial_\zeta^1 k'_-(x, \zeta, q, p) = \sum_{l=1}^{n} D^\alpha \Bigg\{ \frac{\partial_l^1 a'_-(x, \zeta, q)}{b_-(x, \zeta, q, p)} +$$

$$+ \frac{b'_-(x, \zeta, q, p)}{b_-(x, \zeta, q, p)} \left[\frac{a_-(\infty, \zeta, q)\, \partial_l^1 b_-(\infty, \zeta, q, p)}{[b_-(\infty, \zeta, q, p)]^2} - \frac{\partial_l^1 a_-(\infty, \zeta, q)}{b_-(\infty, \zeta, q, p)} \right] -$$

$$- \frac{a_-(\infty, \zeta, q)}{b_-(\infty, \zeta, q, p)} \frac{\partial_l^1 b'_-(x, \zeta, q, p)}{b_-(x, \zeta, q, p)} + \frac{\partial_l^1 b_-(x, \zeta, q, p)}{[b_-(x, \zeta, q, p)]^2} \times$$

$$\times \left[\frac{a_-(\infty, \zeta, q)\, b'_-(x, \zeta, q, p)}{b_-(\infty, \zeta, q, p)} - a'_-(x, \zeta, q) \right] \Bigg\}. \tag{3.Д}$$

Здесь ∂ обозначает дифференцирование по второму аргументу, $\partial_l = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_l}$. Так как в каждом слагаемом имеется множитель, принадлежащий S_x, то при интегрировании все интегралы будут сходиться в

силу того, что если $\varphi(x, \xi, q) \in S_x$ и однородна по q и ξ порядка m, то

$$|\varphi(x, \xi, q)| \leqslant C_s (q + |\xi|)^m (1+|x|)^{-s},$$

следовательно, члены суммы (3.Д) достаточно оценить по однородности. Мы учтем, что

$$|b_-(x, \zeta, q, p)| > C (q + p + |\zeta|)^m,$$

а также то, что дифференцирование по ζ снижает порядок однородности на единицу. Будем оценивать каждое слагаемое (3.Д).

Используя формулу Лейбница, получим (см. формулу (II—4) из [7])

$$\int |D^\alpha \{[b_-(x, \zeta, q, p)]^{-1} |\partial_i^1 a'_-(x, \zeta, q)]\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\sigma|+|\delta|=|\alpha|} C_{\sigma\delta} \int |D^\sigma \partial_i^1 a'_-(x, \zeta, q)|\, |D^\delta [b_-(x, \zeta, q, p)]^{-1}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\sigma|+|\delta|=|\alpha|} \int_\upsilon |D^\sigma \partial_i^1 a'_-(x, \zeta, q)| \sum_{k=1}^{|\delta|} [b_-(x, \zeta, q, p)]^{-k-1} \times$$

$$\times \sum_{|\beta_1|+\cdots+|\beta_k|=|\delta|} C_{i_1, \ldots, i_k} D^{\beta_1} b_- \cdots D^{\beta_k} b_- \Big| dx \leqslant$$

$$\leqslant C (q + |\zeta|)^{m-1} (q+p+|\zeta|)^{-mk-m} (q+p+|\zeta|)^{mk} = C \frac{(q + |\zeta|)^{m-1}}{(q + p + |\zeta|)^m}.$$

Последнее неравенство следует из оценок по однородности сверху.

Таким образом

$$\sum_{i=1}^n \int \left| D^\alpha \frac{\partial_i^1 a'_-(x, \zeta, q)}{b_-(x, \zeta, q, p)} \right| dx \leqslant C \frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \qquad (4.Д)$$

Оцениваем интеграл от следующего слагаемого (3.Д)

$$\int \Big| D^\alpha \{[b'_-(x, \zeta, q, p)] [b_-(x, \zeta, q, p]^{-1}\} \times$$

$$\times \left[\frac{a(\infty) \partial_i^1 b_-(\infty) - \partial_i^1 a_-(\infty)\, b_-(\infty)}{[b_-(\infty)]^2} \right] \Big| dx \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{(q + |\zeta|)^m (q+p+|\zeta|)^{m-1} + (q + |\zeta|)^{m-1} (q+p+|\zeta|)^m}{(q + p + |\zeta|)^{2m}} \times$$

$$\times \int \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} |D^\beta b'_- D^\gamma b_-^{-1}|\, dx \leqslant \frac{(q + |\zeta|)^{m-1}}{(q + p + |\zeta|)^m} \times$$

$$\times (q+p+|\zeta|)^m (q+p+|\zeta|)^{-mk-m} (q+p+|\zeta|)^{mk} = \frac{(q + |\zeta|)^{m-1}}{(q + p + |\zeta|)^m}. \qquad (5.Д)$$

Далее

$$\int \left| D^\alpha \frac{a_-(\infty)}{b_-(\infty)} \frac{\partial_i^1 b'_-(x)}{b_-(x)} \right| d\zeta \leqslant \frac{(q + |\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m} \int \sum C_{\beta\gamma} |D^\beta \partial_i^1 b'_- D^\gamma b_-^{-1}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}\,(q+p+|\zeta|)^{m-1}(q+p+|\zeta|)^{-m} =$$

$$= C\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|^{m-1}} < C\frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \qquad (6.Д)$$

Оцениваем четвертое слагаемое (3.Д)

$$\int\left|D^{\gamma}\frac{\partial_i^1 b_-(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\,\frac{b_-'(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\,\frac{a_-(\infty,\zeta,q)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}\int\sum C_{\gamma_1}\left|D^{\gamma_1}\frac{\partial_i^1 b_-(x)}{b_-(x)}\right|\left|D^{\gamma}\frac{b_-'(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\right|dx \leqslant \qquad (7.Д)$$

$$\leqslant C\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}\,\frac{(q+p+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}\int\left|D^{\gamma}\frac{b_-'(x)}{b_-(x)}\right|dx \leqslant C\frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}.$$

Наконец

$$\int\left|D^{\alpha}\frac{\partial_i^1 b_-(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\cdot\frac{a_-'(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{(q+p+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}\,\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m} \leqslant C\frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \qquad (8.Д)$$

Складывая (4.Д)—(8.Д), получим

$$\int|D^{\alpha}\partial_{\xi}^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\overline{\zeta}}\,dx \leqslant C\frac{(q+|\overline{\zeta}|)^{m-1}}{(q+p+|\overline{\zeta}|)^m}. \qquad (9.Д)$$

Воспользуемся следующей оценкой:

$$(q+p+|\overline{\zeta}|)^m > C\frac{(q+p+|\tau|)^m}{(1+|\tau-\eta|)^m}$$

(см. формулу (3.20) работы [7]), тогда получим

$$\int|D^{\alpha}\partial_{\xi}^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\overline{\zeta}}\,dx \leqslant C\frac{(q+|\tau|)^{m-1}+(q+|\eta|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m}(1+|\tau-\eta|)^m. \qquad (10.Д)$$

Заменяя $(q+|\eta|)^{m-1}$ большей величиной $C(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\tau-\eta|)^{m-1}$, из (10.Д) заключаем

$$\int|D^{\alpha}\partial_{\xi}^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\xi=\tau}\,dx \leqslant C\frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\tau-\eta|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m}. \qquad (11.Д)$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье от x к $\xi-\eta$, примененное к функции

$$k_1 = (1+D^{\alpha})[k_-'(x,\eta,q,p) - k_-'(x,\tau,q,p)] =$$
$$= (1+D^{\alpha})\,\partial_{\xi}^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\overline{\zeta}}\ (\eta-\tau). \qquad (12.Д)$$

Имеем

$$F_{x\to(\xi-\eta)}k_1 \equiv \int e^{ix(\xi-\eta)}k_1\,dx = (1+|\xi-\eta|)^{\alpha}[\widetilde{k_-'}(\xi-\eta,\eta,q,p) -$$
$$-\widetilde{k_-'}(\xi-\eta,\tau,q,p)]. \qquad (13.Д)$$

Отсюда следует

$$(1+|\xi-\eta|)^{\varkappa}|\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\eta,q,p)-\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\tau,q,p)|\leqslant\int|k_1|\,dx=$$

$$=\int|(1+D^{\varkappa})\,\partial_{\xi}^{1}k'_{-}(\xi-\eta,\tau,q,p)|_{\xi=\tau}|\eta-\tau|\,dx.$$

Если теперь воспользоваться оценкой (11.Д), то получим

$$(1+|\xi-\eta|)^{\varkappa}|\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\eta,q,p)-\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\tau,q,p)|\leqslant$$
$$\leqslant C\frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\tau-\eta|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^{m}}|\eta-\tau|.$$

Таким образом, формула (21.7) полностью доказана.

Отметим, что формулы (23.7), (25.7), (27.7) доказываются аналогично, а доказательство оценок для постоянных составляющих символов значительно проще.

Московский энергетический институт

Поступило 7.XII.1967

Ի. Ա. ՖԵԴՈՏՈՎ. Խզվող գործակիցներով էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումներ *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է պարամետրերից կախված երկու էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների ողորկ լծորդման խնդիրը։ Այդ հավասարումները ունեն միևնույն կարգը և տրված են տարբեր կիսատարածություններում։ Ապացուցվում են պարամետրերի հետ բնականորեն կապված նորմաններում գոյության թեորեմը և ապրիոր գնահատականը։ Հեղինակը օգտագործում է պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների տեսությունը։

I. A. FEDOTOV. *Elliptic differential equations with a breakable coefficients* (summary)

This article is devoted to the problem of smooth connection of solutions of two elliptic differential equations depending on parameters. These equations have identical order and are set on different halfspaces. The existence theorem and a priori estimation are prooved in spaces naturally connected with parameters. The theory of pseudodifferential operators is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник.* Асимптотическое поведение линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями, УМН 15, вып. 4, 1960, 27—95.
2. *J. J. Kohn, L. Nirenberg.* On the algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math., 18, № 1—2, 1965, 269—305.
3. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН 20, вып. 3, 1965, 89—152.
4. *С. Л. Эйдельман.* Параболические системы, М., „Наука“, 1964.
5. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН 19, вып. 3, 1964, 53—161.
6. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках в ограниченной области, Матем. сб., 71, 2, 1966, 162—190.
7. *Л. Р. Волевич.* Локальные свойства неоднородных псевдодифференциальных операторов, Труды Моск. матем. об-ва, 16, 1967, 51—98.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА

§ 1. Введение

Система Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\ \chi_1^{(2)}(x),\ \cdots,\ \chi_n^{(1)}(x),\cdots,\ \chi_n^{(2^n)}(x),\cdots \qquad (1)$$

определяется следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1,\ \text{при}\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

$$\chi_0^{(1)}(x)=\begin{cases} 1, & \text{при}\ 0\leqslant x<\dfrac{1}{2} \\ -1, & \text{при}\ \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1 \\ 0, & \text{при}\ x=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Для определения функций $\chi_n^{(k)}(x)$ $(n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,2^n)$ разделим отрезок $[0,1]$ на 2^{n+1} равных частей и положим

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{при}\ \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}} \\ -\sqrt{2^n}, & \text{при}\ \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k}{2^{n+1}} \\ 0, & \text{при}\ x\overline{\in}\left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}},\ \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right]. \end{cases} \qquad (3)$$

Далее полагаем

$$\chi_n^{(k)}(0)=\chi_n^{(k)}(+0)\ \text{и}\ \chi_n^{(k)}(1)=\chi_n^{(k)}(1-0),$$

а в каждой точке разрыва функция Хаара считается равной полусумме ее левого и правого пределов в этой же точке.

Для удобства обозначим через $\overset{+}{\gamma}{}_n^k$ $(\overset{-}{\gamma}{}_n^k)$ множество всех внутренних точек множества $E\{\chi_n^{(k)}(x)>0\}$ $(E\{\chi_n^{(k)}(x)<0\})$. Интервалы $\overset{+}{\gamma}{}_n^k$ и $\overset{-}{\gamma}{}_n^k$ будем называть γ-интервалами функции $\chi_n^{(k)}(x)$.

Определение 1. Будем говорить, что множество E является M-множеством при условии A для системы Хаара, если существует ряд

$$a_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x), \tag{4}$$

сходящийся к нулю вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию A и не все $a_n^{(k)}$ равны нулю.

Определение 2. Если задан ряд по системе Хаара, то будем говорить, что коэффициенты ряда (4) удовлетворяют условию B, если для произвольной точки $x_0\in[0,1]$ выполняется соотношение

$$\lim_{l\to\infty}\frac{a_{n_l}^{(k_l)}}{\chi_{n_l}^{(i_l)}(x_0)}=0,\quad 1\leqslant k_l\leqslant 2^{n_l}, \tag{5}$$

где $\{\chi_{n_l}^{(k_l)}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ — множество всех тех функций, которые не равны нулю в точке x_0.

В последние годы появился ряд работ, посвященных вопросам единственности рядов по системе Хаара и проблеме восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов по этой системе.

В работе [2] было установлено существование совершенных M-множеств при довольно сильных ограничениях на коэффициенты рядов (4).

В работе [1] было доказано, что если условие (B) нарушается хотя бы в одной точке, то для таких рядов Хаара M-множеством может служить даже множество, состоящее из одной точки. В работе [4] была доказана следующая

Теорема 1. *Для того чтобы множество E для системы Хаара было M-множеством при условии (B) необходимо и достаточно, чтобы множество E содержало непустое совершенное подмножество.*

В настоящей работе доказывается, что теорема 1 в некотором смысле окончательна. Именно: для класса рядов по системе Хаара, для которых в условии (B) отношения $\dfrac{a_{n_l}^{(k_l)}}{\chi_{n_l}^{(i_l)}(x_0)}$ в каждой точке имеют произвольную фиксированную и стремящуюся к нулю мажоранту, доказывается существование совершенных непустых множеств, не являющихся M-множествами.

Теорема 2. *Для любой наперед заданной последовательности положительных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, сходящейся к нулю всюду на отрезке* [0,1], *существует непустое совершенное множество, не являющееся M-множеством для класса рядов, коэффициенты которых удовлетворяют следующему условию: для произвольной точки $x_0\in[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\frac{a_{n_l}^{(k_l)}}{\chi_{n_l}^{(i_l)}(x_0)}<\varphi_{n_l}(x_0)\quad (i=1,2,\cdots), \tag{c}$$

где $\{\gamma_{n_l}^{(k_l)}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ *— множество всех тех функций, которые не равны нулю в точке* x_0*.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Прежде чем приступить к доказательству теоремы напомним некоторые известные факты.

а) Лемма. Если ряд (4) сходится к нулю всюду в некотором интервале δ, кроме, быть может, счетного множества точек и его коэффициенты удовлетворяют условию (B), то $a_n^{(k)}=0$ для всех тех функций $\gamma_n^{(k)}(x)$, которые тождественно равны нулю вне сегмента $\overline{\delta}$. Доказательство этого утверждения можно найти в работе [4].

в) Пусть δ является γ-интервалом функции $\gamma_n^{(k_n)}(x)$, где k_n — некоторое целое число, удовлетворяющее соотношению $1 \leqslant k_n \leqslant 2^n$. Все те функции системы Хаара, один из γ-интервалов которых содержит δ, назовем основными функциями относительно δ, а указанные γ-интервалы назовем основными γ-интервалами относительно δ. Остальные γ-интервалы основных функций назовем сопряженными γ-интервалами относительно δ.

Пусть

$$\gamma_0^{(0)}(x),\ \gamma_0^{(1)}(x),\ \gamma_1^{(k_1)}(x),\ \gamma_2^{(k_2)}(x),\cdots,\ \gamma_{n-1}^{(k_{n-1})}(x),\gamma_n^{(k_n)}(x)$$

являются основными функциями относительно интервала δ, и пусть задана сумма

$$S_n^{(k_n)}(x)=a_0^{(0)}\gamma_0^{(0)}(x)+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{2^m}a_m^{(k)}\gamma_m^{(k)}(x)+\sum_{k-1}^{k_n}a_n^{(k)}\gamma_n^{(k)}(x). \qquad (6)$$

Если при некотором $t<n$ выполняется условие $|S_t^{(k_t)}(x)|\geqslant d>0$ для всех $x\in\delta$ и $S_{t+1}^{(k_{t+1})}(x)$, $S_{t+2}^{(k_{t+2})}(x),\cdots,S_n^{(k_n)}(x)$ соответственно равны нулю на сопряженных относительно δ интервалах функций $\gamma_{t+1}^{(k_{t+1})}(x)$, $\gamma_{t+2}^{(k_{t+2})}(x),\cdots,\gamma_{n-1}^{(k_{n-1})}(x)$, $\gamma_n^{(k_n)}(x)$, то для всех $x\in\delta$ имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{gathered}\frac{|a_{t+1}^{(k_{t+1})}|}{|\gamma_{t+1}^{(k_{t+1})}(x)|}=\frac{|a_{t+2}^{(k_{t+2})}|}{|\gamma_{t+2}^{k_{t+2}}(x)|}=\cdots=\frac{|a_{n-1}^{(k_{n-1})}|}{|\gamma_{n-1}^{(k_{n-1})}(x)|}=\frac{|a_n^{(k_n)}|}{|\gamma_n^{(k_n)}(x)|}\geqslant\frac{d}{2^{t+1}}\\ |S_n^{(k_n)}(x)|\geqslant 2^{n-t}\cdot d\end{gathered}\right\}. \qquad (7)$$

В самом деле, допустим, что $S_t^{(k_t)}(x)=c$ при $x\in\delta$. Из определения системы Хаара следует, что среди функций $\gamma_t^{(k)}(x)$, $k_t<k\leqslant 2^t$ и $\gamma_{t+1}^{(k)}(x)$, $1\leqslant k\leqslant k_{t+1}$ только $\gamma_{t+1}^{(k_{t+1})}(x)$ отлична от нуля на δ и на со-

* Как будет видно из доказательства теорема будет верной, если условие (c) задать только на двоично рациональных точках, а на остальном множестве требовать выполнения условия (B).

пряженном относительно δ γ-интервале функции $\chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)$. Так как $S_l^{(k_l)}(x)=c$, $\chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)=\text{const}$, а $S_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)=0$ на сопряженном относительно δ γ-интервале функции $\chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)$, то на этом же множестве имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} &a_{l+1}^{(k_{l+1})}\ \chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)|=|\sqrt{2^{l+1}}\ a_{l+1}^{(k_{l+1})}|=|c| \\ &\frac{|a_{l+1}^{(k_{l+1})}|}{|\chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)|}=\frac{|c|}{2^{l+1}}>\frac{d}{2^{l+1}} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Поскольку функция $\chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)$ на своих γ-интервалах, один из которых содержит δ, принимает равные по модулю и разные по знаку значения, то отсюда и из (5) следует, что

$$S_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)=2c \text{ и } \frac{|a_{l+1}^{(k_{l+1})}|}{|\chi_{l+1}^{(k_{l+1})}(x)|}>\frac{d}{2^{l+1}} \text{ для всех } x\in\delta.$$

Продолжив это рассуждение, мы докажем утверждение в).

Построим совершенное множество P следующим образом. Так как последовательность положительных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю в точках $x=0$ и $x=1$, то существует номер M_1 такой, что имеет место соотношение

$$\varphi_n(0)<\frac{1}{4},\ \varphi_n(1)<\frac{1}{4} \quad \text{для всех } n>M_1. \tag{9}$$

Обозначим $N_1=M_1+2$ и выберем точки $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, удовлетворяющие соотношениям $|x_1^{(1)}-0|=\frac{1}{2^{N_1+1}}$, $|x_1^{(2)}-1|=\frac{1}{2^{N_1+1}}$. Интервал $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$ обозначим через $\delta_1^{(1)}$.

Множество $[0,1]-\delta_1^{(1)}$ представляет собой сумму двух сегментов (обозначим их через $\overline{\Delta}_1^{(1)}$ и $\overline{\Delta}_1^{(2)}$). Ясно, что интервалы $\Delta_1^{(1)}$ и $\Delta_1^{(2)}$ являются γ-интервалами разных функций системы Хаара из группы с номером N_1 (номером группы считается нижний индекс).

На втором шагу рассмотрим точки $x=0$, $x=1$, $x=x_1^{(i)}$, $i=1,2$, и выберем натуральное число M_2 так, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi_n(0)<\frac{1}{4^2},\quad \varphi_n(1)=\frac{1}{4^2},\ \varphi_n(x_1^{(i)})=\frac{1}{4^2},\ i=1,2 \text{ для всех } n\geqslant M_2. \tag{10}$$

Обозначим через $N_2=\max[M_2, N_1+2]$. Рассмотрим сегменты $\Delta_1^{(i)}$, $i=1,2$. Обозначим через $x_2^{(2l-1)}$, $(x_2^{(2l)})$ ту точку, которая принадлежит сегменту $\overline{\Delta}_1^{(i)}$ и находится от его левого (правого) конца на расстоянии $\frac{1}{2^{N_2+1}}$. Интервал $(x_2^{(2l-1)}, x_2^{(2l)})$ обозначим через $\delta_2^{(i)}$. Множество $\Delta_2^{(i)}-\delta_2^{(i)}$ представляет собой сумму двух сегментов. Обозна-

чим их через $\Delta_2^{(2l-1)}$ и $\Delta_2^{(2l)}$. Ясно, что интервалы $\Delta_2^{(2l-1)}$ и $\Delta_2^{(2l)}$ являются γ-интервалами разных функций системы Хаара из группы с номером N_2, а точки $x_2^{(2l-1)}$, $x_2^{(2l)}$ являются точками разделимости этих же функций (для удобства в дальнейшем общий конец γ-интервалов функции $\chi_n^{(k)}(x)$ будем называть точкой разделимости этой же функции).

Действительно, так как $\Delta_1^{(l)}$ является γ-интервалом некоторой функции из группы с номером $N_1 < N_2$, то его концы являются двоично рациональными числами порядка* не выше, чем N_1+1. Пусть даны два двоично-рациональных числа α и β, порядки которых равны соответственно P_α и P_β. Допустим $P_\beta > P_\alpha$, тогда $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ являются двоично-рациональными числами порядка P_β. Следовательно $x_2^{(2l-1)}$ и $x_2^{(2l)}$ имеют порядок N_2+1. Отсюда и из определения системы Хаара следует справедливость утверждения.

Допустим на k—1-ом шагу построены числа $N_1, N_2, \cdots, N_{k-1}$ и интервалы $\Delta_{k-1}^{(l)}$, $i=1, 2, \cdots, 2^{k-1}$, которые являются γ-интервалами разных функций системы Хаара из группы с номером N_{k-1}. Выберем натуральное число M_k настолько большим, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi_n(0) < \frac{1}{4^k},\ \varphi_n(1) < \frac{1}{4^k},\ \varphi_n(x_l^j) < \frac{1}{4^{k-1}} \text{ для всех } n \geqslant M_k, \tag{11}$$

где $i=1, 2, \cdots, k-1$; $j=1, 2, \cdots, 2^l$. Обозначим через $N_k = \max[M_k, N_{k-1}+2]$ и рассмотрим сегменты $\overline{\Delta}_{k-1}^{(l)}$. Обозначим через $x_k^{(2l-1)}$ ($x_k^{(2l)}$) ту точку, которая принадлежит сегменту $\overline{\Delta}_{k-1}^{(l)}$ и находится от его левого (правого) конца на расстоянии $\frac{1}{2^{N_{k+1}}}$. Интервал $(x_k^{(2l-1)}, x_k^{(2l)})$ обозначим через δ_k^l. Множество $\overline{\Delta}_{k-1}^{(l)} - \delta_k^{(l)}$ можно представить как сумму двух сегментов. Обозначим их через $\overline{\Delta}_k^{(2l-1)}$ и $\Delta_k^{(2l)}$. Можно убедиться, как и выше, что каждый из этих интервалов является γ-интервалом некоторой функции системы Хаара из группы с номером N_k, а точки $x_k^{(2l-1)}$ и $x_k^{(2l)}$ являются точками разделения γ-интервалов этих функций. Продолжив этот процесс бесконечно, мы построим последовательность интервалов

$$\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(2)}, \cdots, \delta_k^{(1)}, \cdots, \delta_k^{(2^{k-1})}, \cdots. \tag{12}$$

Рассмотрим множество

$$P = [0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \delta_k^{(l)}. \tag{13}$$

Ясно, что P является непустым совершенным множеством, так как интервалы $\delta_k^{(l)}$ не имеют общих точек и общих концов. Легко видеть,

---

* Порядком двоично рационального числа считается степень числа 2 в знаменателе несократимой дроби.

что mes $P=0$, потому что, как видно из построения, mes $\delta_{k+1}^{(i)} > \frac{1}{2}$ mes $\overline{\Delta}_k^{(i)}$ для всех $k=1, 2, \cdots$ и $i=1, 2, \cdots, 2^k$.

Докажем, что множество P не является M-множеством при условии (c). Предположим обратное, то есть, что существует ряд

$$a_0^{(0)}\gamma_0^{(0)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)}\gamma_n^{(k)}(x), \tag{14}$$

сходящийся к нулю всюду вне множества P, коэффициенты которого удовлетворяют условию (c) и хотя бы один из них отличен от нуля. Пусть $a_{n_0}^{(k_0)}$ первый отличный от нуля коэффициент ряда (8). Покажем, что n_0 принадлежит множеству $\{0, (N_k+1)_{k=1}^{\infty}\}$.

Допустим обратное, т. е., что $N_j+1<n_0<N_{j+1}+1$. Функция $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)$ должна быть тождественно равной нулю на множестве

$$\sum_{k=1}^{j}\sum_{l=1}^{2^k-1}\delta_l^{(i)}. \tag{15}$$

Предположим обратное, пусть соотношение $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)\equiv 0$ не выполняется на множестве (15) и, следовательно, на некотором интервале $\delta_e^{(i_0)}$, где $1\leqslant e\leqslant j$, $1\leqslant i_0\leqslant 2^{e-1}$. Так как концы интервала $\delta_e^{(i_0)}$ являются двоично рациональными точками, порядок которых не больше N_j+1, то легко видеть, что сегмент $\delta_e^{(i_0)}$ можно представить как сумму замыканий γ-интервалов функций системы Хаара, которые принадлежат группе с номером N_j. Отсюда и из соотношения $N_{j+1}<n_0$ следует, что функция $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)$ тождественно равна нулю вне сегмента $\overline{\delta}_e^{(i_0)}$. Так как ряд (14) сходится к нулю во всех точках интервала $\delta_e^{(i_0)}$, то в силу условия а) имеем $a_{n_0}^{(k_0)}=0$, что противоречит условию $a_{n_0}^{(k_0)}\neq 0$, откуда и следует справедливость утверждения.

Поскольку $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)\equiv 0$ на множестве (15), то отсюда следует, что $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)\equiv 0$ вне некоторого сегмента $\overline{\Delta}_j^{(i_0)}$, $1\leqslant i_0\leqslant 2^j$. $\Delta_j^{(i_0)}$ является γ-интервалом некоторой функции системы Хаара, принадлежащей группе с номером N_j. Так как $n_0>N_j+1$, то $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)$ отлична от нуля только на одной половине интервала $\Delta_j^{(i_0)}$. Эту половину обозначим через α. Тогда из определения интервала $\delta_{j+1}^{(i_0)}$ и из соотношения $n_0<N_{j+1}+1$ легко следует, что один из γ-интервалов функции $\gamma_{n_0}^{(k_0)}(x)$ принадлежит интервалу $\delta_{j+1}^{(i_0)}$. Этот γ-интервал обозначим через γ_1. Рассмотрим частную сумму

$$S_{n_0}^{(k_0)}(x)=a_0^{(0)}\gamma_0^{(0)}(x)+\sum_{n=1}^{n_0-1}\sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)}\gamma_n^{(k)}(x)+\sum_{k=1}^{k_0} a_{n_0}^{(k)}\gamma_{n_0}^{(k)}(x). \tag{16}$$

Она принимает отличное от нуля постоянное значение на интервале γ_1. Функции $\gamma_n^{(k)}(x)$, $n>n_0$ или тождественно равны нулю в интервале γ_1, или вне сегмента $\overline{\gamma}_1$. Согласно а) коэффициенты $a_n^{(k)}=0$ для функ-

ций, тождественно равных нулю вне сегмента $\bar{\gamma}_{11}$. А так как ряд (14) сходится к нулю в интервале γ_{11}, то

$$S_{n_0}^{(k_0)}(x)\equiv a_{n_0}^{(k_0)}\,\chi_{n_0}^{(l_0)}(x)=0, \text{ если } x\in\gamma_{11}.$$

Последнее равенство противоречит предположению $a_{n_0}^{(k_0)}\neq 0$.

Рассмотрим случай $n_0=N_j+1$ (если $n_0=0$, $k_0=0$, то рассуждение можно провести аналогично нижеприводимому, причем надо начинать со второго шага). Точно так же, как это делалось выше, взяв $n_0=N_j+1$, можно доказать, что $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)\equiv 0$ на множестве (15). Следовательно $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)\equiv 0$ вне некоторого сегмента $\bar{\Delta}_j^{(l_0)}$. Интервал $\Delta_j^{(l_0)}$ является γ-интервалом некоторой функции системы Хаара из группы с номером N_j. Отсюда следует, что $a_{n_0}^{(k_0)}\,\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ принимает на каждой половине интервала $\Delta_j^{(l_0)}$ равные по модулю и разные по знаку значения. Один из них обозначим через Δ_1. Допустим

$$|a_{n_0}^{(k_0)}\,\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)|=|c| \qquad \text{для всех } x\in\Delta_1. \tag{17}$$

Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n_0<n<N_{j+1}$ тождественно равны нулю или на интервале Δ_1, или вне сегмента $\bar{\Delta}_1$. Через $\Delta_{j+1}^{(l_0)}$ обозначим тот из интервалов $\Delta_{j+1}^{(2l_0-1)}$ и $\Delta_{j+1}^{(2l_0)}$, который содержится в Δ_1. Рассмотрим функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $N_j+1=n_0<n\leqslant N_{j+1}$, являющиеся основными относительно $\Delta_{j+1}^{(l_0)}$. Обозначим их через $\chi_{n_0+1}^{(\alpha_1)}(x)$, $\chi_{n_0+2}^{(\beta_1)}(x),\cdots,\chi_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)$. Из определения интервала $\delta_{j+1}^{(l_0)}$ легко следует, что те γ-интервалы указанных основных функций, которые сопряжены относительно $\Delta_{j+1}^{(l_0)}$, принадлежат множеству $\delta_{j+1}^{(l_0)}$. Возьмем произвольную основную функцию $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ относительно $\Delta_{j+1}^{(l_0)}$, причем $n_0<n_1\leqslant N_{j+1}$. γ-интервал функции $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$, сопряженный относительно интервала $\Delta_{j+1}^{(l_0)}$, обозначим через γ. Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n\geqslant n_1$ тождественно равны нулю или на интервале γ, или вне сегмента $\bar{\gamma}$. Так как ряд (14) сходится к нулю на множестве $\delta_{j+1}^{(l_0)}$, следовательно и на интервале γ, то, в силу условия а), справедливо соотношение $a_n^{(k)}=0$ для тех n и k, для которых $n\geqslant n_1$ и $\chi_n^{(k)}(x)\equiv 0$ при $x\in\bar{\gamma}$. Отсюда следует, что

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x)=0 \qquad \text{для всех } x\in\gamma. \tag{18}$$

Так как n_1—произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству $n_0<n_1\leqslant N_{j+1}$, то, как видно из (18), условия утверждения в) выполнены. Отсюда следует, что

$$S_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)=2^{N_{j+1}-N_j-1}\cdot c \qquad \text{для всех } x\in\Delta_{j+1}^{(l_1)},$$

$$\frac{|a_{n_0+1}^{(\alpha_1)}|}{|\chi_{n_0+1}^{(\alpha_1)}(x)|}=\frac{|a_{n_0+2}^{(\beta_1)}|}{|\chi_{n_0+2}^{(\beta_1)}(x)|}=\cdots=\frac{|a_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}|}{|\chi_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)|}=\frac{|c|}{2^{N_j+2}}, \text{ где } x\in\Delta_{j+1}^{(l_1)}. \tag{19}$$

На втором шагу рассмотрим интервал $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$, который является γ-интервалом функции $\chi_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)$. Из функций $\chi_{N_{j+1}}^{(k)}(x)$, где $\sigma_1<k\leqslant 2^{N_{j+1}}$ и

$\gamma_{N_{j+1}+1}^{(k)}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{N_{j+1}+1}$, только одна функция не равна тождественно нулю на интервале $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$. Эту функцию обозначим через $\gamma_{N_{j+1}+1}^{(k')}(x)$. Она на каждой половине интервала $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$ принимает равные по модулю и разные по знаку значения. Следовательно, хотя бы на одной половине интервала $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$ (ее обозначим через Δ_2) имеет место соотношение

$$|S_{N_{j+1}+1}^{(k')}(x)| > 2^{N_{j+1}-N_{j-1}} \cdot c|. \tag{20}$$

Через $\Delta_{j+2}^{(l_2)}$ обозначим тот из интервалов $\Delta_{j+2}^{(2l_1-1)}$ и $\Delta_{j+2}^{(2l_1)}$, который содержится в интервале Δ_2. Рассмотрим те функции $\gamma_n^{(k)}(x)$, $N_{j+1}+2 \leqslant n \leqslant N_{j+2}$, которые являются основными относительно интервала $\Delta_{j+2}^{(l_2)}$ (их обозначим через $\gamma_{N_{j+1}+2}^{(\alpha_2)}(x)$, $\gamma_{N_{j+1}+3}^{(\beta_2)}(x)$, $\cdots$, $\gamma_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}(x)$. Возьмем произвольную функцию $\gamma_{n_2}^{(k_2)}(x)$ из множества указанных основных функций. Через γ_2 обозначим сопряженный γ-интервал относительно $\Delta_{j+2}^{(l_2)}$ функции $\gamma_{n_2}^{(k_2)}(\gamma)$. Функции $\gamma_n^{(k)}(x)$, $n > n_2$ тождественно равны нулю или на интервале γ_2, или вне сегмента $\bar{\gamma}_2$. Поскольку ряд (14) сходится к нулю всюду на интервале $\delta_{j+2}^{(l_2)}$, следовательно и на множестве γ_2, то согласно а) $a_n^{(k)}=0$ для тех функций, которые тождественно равны нулю вне сегмента $\bar{\gamma}_2$, откуда следует, что

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) = 0 \qquad \text{для всех } x \in \gamma_2. \tag{21}$$

Так как n_2—произвольное целое число из промежутка $N_{j+1}+2 \leqslant n \leqslant N_{j+2}$, то из (17) и (16) вытекает, что условия утверждения в) выполнены. Следовательно имеют место соотношения

$$|S_{N_{j+2}}^{(\alpha_2)}(x)| > |2^{N_{j+2}-N_j-2} \cdot c| \qquad \text{для всех } x \in \Delta_{j+2}^{(l_2)}$$

и

$$\frac{|a_{N_{j+1}+2}^{(\alpha_2)}|}{|\gamma_{N_{j+1}+2}^{(\alpha_2)}(x)|} = \frac{|a_{N_{j+1}+3}^{(\beta_2)}|}{|\gamma_{N_{j+1}+3}^{(\beta_2)}(x)|} = \cdots = \frac{|a_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}|}{|\gamma_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}(x)|} = \frac{|c|}{2^{N_{j+3}}} \text{ при } x \in \Delta_{j+2}^{(l_2)} \tag{22}$$

Допустим, что после некоторого $(n-1)$-ого шага мы получили интервал $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$, являющийся γ-интервалом функции $\gamma_{N_{j+n-1}}^{(\sigma_{n-1})}(x)$. Предположим, что имеет место соотношение

$$|S_{N_{j+n-1}}^{(\sigma_{n-1})}(x)| > |2^{N_{j+n}-N_{j-n+1}} \cdot c| \quad \text{для всех } x \in \Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}. \tag{23}$$

Из функций $\gamma_{N_{j+n-1}}^{(k)}(x)$, $\sigma_2 < k \leqslant 2^{N_{j+n-1}}$ и $\gamma_{N_{j+n-1}}^{(k)}(x)$, $1 \leqslant k < 2^{N_{j+n-1+1}}$ только одна не равна тождественно нулю на интервале $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$. Обозначим ее через $\gamma_{N_{j+n-1}}^{(k_{n-1})}(x)$. Ясно, что функция $\gamma_{N_{j+n-1+1}}^{(k_{n-1})}(x)$ на разных половинах интервала $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$ принимает равные по модулю и разные по знаку значения. Следовательно хотя бы на одной половине интервала $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$ (ее обозначим через Δ_{n-1}) имеет место соотношение

$$|S^{(k_{n-1})}_{N_{j+n-1}}(x)| \geqslant |2^{N_{j+n-1}-N_j-n+1}\cdot c| \quad \text{для всех } x \in \Delta_{n-1}. \tag{24}$$

Тот из интервалов $\Delta^{(2l_{n-1}+1)}_{j+n}$ и $\Delta^{(2l_{n-1})}_{j+n}$, который содержится в множестве Δ_{n-1}, обозначим через $\Delta^{(l_n)}_{j+n}$. Те функции $\chi^{(k)}_m(x)$, $N_{j+n-1}+1 < m \leqslant N_{j+n}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^m$, которые являются основными относительно интервала $\Delta^{(l_n)}_{j+n}$, обозначим через

$$\chi^{(\sigma_n)}_{N_{j+n-1}+2}(x), \chi^{(\beta_n)}_{N_{j+n-1}+3}(x), \cdots, \chi^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}(x). \tag{25}$$

Возьмем произвольную функцию из множества (25), обозначим её через $\chi^{(k_n)}_{m_n}(x)$; γ-интервал функции $\chi^{(k_n)}_{m_n}(x)$, сопряженный относительно $\Delta^{(l_n)}_{j+n}$, обозначим через γ_n. Ясно, что $\gamma_n \in \delta^{(l_{n-1})}_{j+n}$. Функции $\chi^{(k)}_m(x)$, $m > m_n$ тождественно равны нулю или на интервале γ_n, или вне сегмента $\overline{\gamma}_n$. Поскольку ряд (14) сходится к нулю на интервале $\delta^{(l_{n-1})}_{j+n}$, следовательно и на множестве γ_n, то $a^{(k)}_n = 0$ для функций, тождественно равных нулю вне сегмента $\overline{\gamma}_n$. Следовательно для последовательности (25) условия утверждения в) выполнены. Отсюда следует, что

$$|S^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}(x)| \geqslant |2^{N_{j+n}-N_j-n}\cdot c| \quad \text{для всех } x \in \Delta^{(l_n)}_{j+n},$$

$$\frac{|a^{(\sigma_n)}_{N_{j+n-1}+2}|}{|\chi^{(\sigma_n)}_{N_{j+n-1}+2}(x)|} = \frac{|a^{(\beta_n)}_{N_{j+n-1}+3}|}{|\chi^{(\beta_n)}_{N_{j+n-1}+3}(x)|} = \cdots = \frac{|a^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}|}{|\chi^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}(x)|} \geqslant \frac{|c|}{2^{N_{j+n+1}}} \tag{26}$$

для всех $x \in \Delta^{(l_n)}_{j+n}$. Продолжив этот процесс бесконечно, мы получим последовательность интервалов

$$\Delta^{(l_1)}_{j+1} \supset \Delta^{(l_2)}_{j+2} \supset \Delta^{(l_3)}_{j+3} \supset \cdots \supset \Delta^{(l_n)}_{j+n} \supset \cdots. \tag{27}$$

Выберем число k_0 настолько большим, чтобы имело место соотношение

$$\frac{1}{4^{j+k_0-1}} < \frac{|c|}{2^{N_j+k_0+1}}. \tag{28}$$

Интервал $\Delta^{(l_{k_0})}_{j+k_0}$ является γ-интервалом функции $\chi^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}(x)$. Обозначим через x_0 тот конец интервала $\Delta^{(l_{k_0})}_{j+k_0}$, у которого порядок меньше числа $N_{j+k}+1$. В силу определения чисел N_k из (11) и условия (c) следует, что для точки x_0 имеет место соотношение

$$\frac{|a^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}|}{|\chi^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}(x)|} < \varphi_{N_{j+k_0}}(x_0) < \frac{1}{4^{j+k_0-1}}. \tag{29}$$

Из (26) следует, что

$$\frac{|a^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}|}{|\chi^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}(x_0)|} \geqslant \frac{|c|}{2^{N_j+k_0+1}}. \tag{30}$$

Сопоставляя (30), (28) и (29), мы придем к противоречию, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить А. А. Талаляна за постановку задачи и за оказанное внимание при ее решении.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 2.II.1968

Ն. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Հաարի սիստեմի համար միակության բազմություններ մասին *(ամփոփում)*

Կասենք, որ Հաարի սիստեմով $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ *շարքը պատկանում է (*) դասին, եթե կամայական* $y \in [0, 1]$ *կետի համար*

$$\frac{|a_{n_k}|}{|\chi_{n_k}(y)|} \to 0, \text{ երբ } k \to \infty. \qquad (**)$$

որտեղ $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *այն բոլոր ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնց համար* $\chi_{n_k}(y) \neq 0$.

[4] աշխատանքում ստացված էր հետևյալ արդյունքը՝
Թեորեմա. Որպեսզի E-ն (*) դասի շարքերի համար լինի միակության բազմություն, անհրաժեշտ է և բավարար որպեսզի E-ն չպարունակի կատարյալ ենթաբազմություն։

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ նշված արդյունքը որոշ իմաստով վերջնական է։ Այսինքն, եթե (**) հարաբերությունը մնում է փոքր $[0,1]$*-ում որոշված և ամենուրեք զերոյի ձգտող* $\{\varphi_k(y) > 0\}_{k=1}^{\infty}$ *մաժորանտից, ապա նոր դասի շարքերի համար գոյություն ունի P կատարյալ միակության բազմություն։*

H. M. MOUSHEKHIAN *On the uniqueness sets for Haar system* (summary)

Definition. The series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ with respect to Haar systems is said to belong to the class (*), if for every $y \in [0, 1]$

$$\frac{|a_{n_k}|}{|\chi_{n_k}(x)|} \to 0, \text{ when } k \to \infty, \qquad (**)$$

with $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ being the set of all functions for which $\chi_{n_k}(y) \neq 0$.

It was proved in [4], that in order E to be a set of uniqueness for the class (*), it is necessary and sufficient for E not to contain a non empty perfect subset.

It is shown in the present paper, that if (**) possesses a magorant $\{\varphi_k(y) > 0\}$, which is defined on [0, 1] and everywhere tends to zero, then for the new class of series a perfect set of uniqueness does exists.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян* и *А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
2. *Н. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964.
3. *Н. Б. Петровская.* Некоторые теоремы единственности для рядов по системе Хаара, Вестник МГУ, № 5, 1964.
4. *Г. М. Мушегян.* О множествах единственности для системы Хаара, Изв. АН АрмССР, Математика, 2, № 6, 1967, 350—361.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

Կ. Ա. ԹԱՔՏԱՋՅԱՆ

ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ, ՈՐՈՆՔ ՊԱՀՊԱՆՎՈՒՄ ԵՆ ՈՒԺԵՂ ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Տիպար ասելով հասկանում ենք M ոչ դատարկ բազմութիւն և պրեդիկատներ որոշված M-ում.

$$\Gamma = \langle M, P_1, P_2, \cdots, P_k \rangle:$$

Դիտարկենք մեկ ուրիշ տիպար.

$$\Gamma' = \langle M', P_1', P_2', \cdots, P_k' \rangle$$

այնպիսին, որ P_i-ն և P_i'-ը $(1 \leqslant i \leqslant k)$ նույն տեղանի են, P_i-ն և P_i'-ը $(1 \leqslant i \leqslant k)$ կանվանենք իրար համապատասխան պրեդիկատներ։

Ունենք M բազմութեյան փ արտապատկերում M'-ի վրա, այդ նշանակենք այսպես $M \xrightarrow{\varphi} M'$։

Եթե կամայական $x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$ համար $P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$-ի ճշմարտացիութեյունից բիւում է $P_i'(x_1\varphi, x_2\varphi, \cdots, x_n\varphi)$-ի ճշմարտացիութեյունը, ապա փ արտապատկերումը կանվանենք Γ-ի հոմոմորֆիզմ Γ'-ի վրա և դա կնշանակենք այսպես $\Gamma \xrightarrow{\varphi} \Gamma'$, փ հոմոմորֆիզմը կոչվում է ուժեղ այն դեպքում, երբ $P_i'(x_1\varphi, x_2\varphi, \cdots, x_n\varphi)$-ի ճշմարտացիութեյունից հետևում է, որ գոյութեյուն ունեն $y_1, y_2, \cdots, y_n \in M$ այնպես, որ $x_1\varphi = y_1\varphi, \cdots, x_n\varphi = y_n\varphi$ և $P_i(y_1, \cdots, y_n)$ ճշմարիտ է։

Այժմ դիտարկենք առաջին աստիճանի պրեդիկատների հաշվի բանաձևերը, որոնք բաղկացած են $\forall$, $\exists$, $\&$, $\vee$, $\neg$ նշաններից $P_1, P_2, \cdots, P_k$ պրեդիկատային տառերից և առարկայական փոփոխականներից։ Դիտարկենք միայն այնպիսի բանաձևեր, որոնց մեջ բացասման նշանները գտնվում են բացառապես անմիջապես պրեդիկատային տառից առաջ և իրար անմիջապես հաջորդող բացասման նշաններ չկան։

Հայտնի է, որ այն բանաձևերը, որոնք բացասման նշան չունեն պահպանվում են հոմոմորֆիզմի ժամանակ։ Առանց բացասման նշանի բանաձևերը կոչվում են դրական։ Կանգ առնենք այնպիսի բանաձևերի վրա, որոնք պահպանվում են ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ։ Պարզ է, որ դրական բանաձևերը պահպանվում են ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ, քանի որ ուժեղ հոմոմորֆիզմը դա և հոմոմորֆիզմ է։

Ապացուցենք հետևյալ լեմմաները։ Ունենք փոփոխական $A_1, A_2, \cdots, A_n$ տառերից բաղկացած դրական բանաձև, որտեղ չի մասնակցում իմպլիկացիայի նշանը։ Այդ բանաձևը նշանակենք այսպես՝

$$\mathfrak{A}(A_1, A_2, \cdots, A_n)։$$

Լեմմա 1։ Թող $A_1, A_2, \cdots, A_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ ընդունեն ճշմարիտ արժեքներ, իսկ $A_{r+1}, \cdots, A_n$-ը սխալ արժեքներ և այդ դեպքում $\mathfrak{A}(A_1, A_2, \cdots$

$\dots, A_n)$ ճշմարիտ է, ապա, եթե որոշ սիալ արժեքներ գարձնենք ճշմարիտ, մնացած արժեքներին ձեռք չտալով, բանաձևը իր ճշմարտացիությունը չի փոխի:

Ա պ ա ց ու ց ց. Փոփոխական ասույթների համար լեմմալի պնդումը հիշա է: Երբ A-ի և B-ի համար ճիշտ է, ապա հեշտ է տեսնել, որ $A\&B$-ի և $A\vee B$-ի համար նույնպես ճիշտ է:

Ասպացույցը հեշտ ստացվում է ինդուկցիայով ըստ բանաձևի կառուցմանը:

R տիպի բանաձև կանվանենք այն բանաձևը, որում նույն առարկայական փոփոխականը մեկ անգամից ավելի չի մասնակցում ազատ բացասման նշանից:

D տիպի բանաձև կանվանենք այն բանաձևը, որում նույն առարկայական փոփոխականը մեկ անգամից ավելի չի մասնակցում բացասման նշանի տակ:

Պարզ է, որ ΓR-ն D տիպի բանաձև է և ΓD-ն R տիպի բանաձև է:

Վերցնենք R տիպի բաց բանաձև (ալսինքն առանց կվանտորների) որում $x_1, x_2, \dots, x_r$ բոլոր առարկալական փոփոխականներն են, նշանակենք այն $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$:

Ենթադրենք $\Gamma \overset{\varphi}{\sim} \Gamma'$ և φ-ն ուժեղ հոմոմորֆիզմ է:

Լ ե մ մ ա 2. Եթե $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ'-ի վրա ինչ որ $x'_1, x'_2, \dots, x'_r \in M'$ համար, ապա գոյություն ունեն $x_1, x_2, \dots, x_r \in M$, որոնք բավարարում են $x_1\varphi = x'_1, \dots, x_r\varphi = x'_r$ պայմաններին և $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$-ն ճշմարիտ է Γ-ում:

Ա պ ա ց ու ց ց. $R(x'_1, \dots, x'_r)$ բանաձևից առանձնացնենք այն պրեդիկատները, որոնք ճշմարիտ են $x'_1, \dots, x'_r$-ի համար և չեն գտնվում բացասման նշանից անմիջապես հետո. առանձնացնենք նաև այն պրեդիկատները; որոնք սխալ են և որոնց առջևում կա բացասման նշան:

Ալսպես

$$P'_{i_1}, P'_{i_2}, \dots, P'_{i_k}, \tag{1}$$

$$\neg P'_{j_1}, \neg P'_{j_2}, \dots, \neg P'_{j_e}, \tag{2}$$

Քանի որ մեր բանաձևը R տիպի է, ապա բոլոր առարկալական փոփոխականները, որոնք մասնակցում են (1) շարքի պրեդիկատներում, իրարից տարբեր են և քանի որ φ հոմոմորֆիզմը ուժեղ է, ուստի մենք ալնպես կարող ենք ընտրել $x_1, x_2, \dots, x_r \in M$, որ $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ պրեդիկատները նույնպես մնան ճշմարիտ Γ-ում և $x_1\varphi = x'_1, \dots, x_r\varphi = x'_r$, ալդ դեպքում (2) շարքի անդամների ճշմարտացիությունը մեքենալապես կմնա նույնը: Ալստեղ ունենք լեմմա 1-ի պալմանները և հետևաբար $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է:

Մենք ապացուցեցինք, որ եթե $\exists x_1, \dots, \exists x_r\, R(x_1, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ'-ում, ապա ճշմարիտ է և Γ-ում:

Վերցնենք D տիպի բաց բանաձև,

Թ ե ո ր ե մ՝ $\forall x_1, \dots, \forall x_r\, D(x_1, \dots, x_r)$ բանաձևը պահպանվում է ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ:

Ա պ ա ց ու յ ց. Ենթադրենք, որ չի պահպանվում այդ պնդումը գոյություն ունեն Γ և Γ' այնպես, որ $\Gamma \xrightarrow{\varphi} \Gamma'$ և φ-ն ուժեղ հոմոմորֆիզմ է, բայց $\forall x_1, \ldots, \forall x_r\, \Phi(x_1, \ldots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ-ում և սխալ է Γ'-ում. հետևաբար $\exists x_1, \ldots, \forall x_r \neg\Phi(x_1, \ldots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ'-ում, այնինչ $\exists x_1, \ldots, \exists x_r \neg\Phi(x_1, \ldots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ'-ում:

Հայտնի է որ $\neg\Phi$-ն $\aleph$ տիպի բանաձև է և ըստ լեմմա 2-ի $\exists x_1 \ldots \exists x_r \neg\Phi(x_1, \ldots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ-ում, ստացանք հակասություն:

Թեորեման ապացուցված է:

Նույնպես հեշտ ապացուցվում է, որ եթե ունենք $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ Φ տիպի բաց բանաձևեր, ապա $\forall x_1, \ldots, \forall x_e (\Phi_1 \& \ldots, \& \Phi_k)$-ն պահպանվում է ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ:

Կառուցենք Φ տիպի փակ բանաձև՝ $\forall x \neg P(x)$, որը չի պահպանվում հոմոմորֆիզմի ժամանակ (չնայած, որ պահպանվում է ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ), $\Gamma = \langle \{a\}, P(x) \equiv u \rangle$, $\Gamma' = \langle \{a'\}, P'(x) \equiv \text{ճ} \rangle$, Γ-ում $\forall x \neg P(x)$ ճշմարիտ է, իսկ Γ'-ում՝ սխալ:

Ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ պահպանվում են նաև հետևյալ տիպի բանաձևերը՝

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \forall y_1 \cdots \forall y_m \; \Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

$$\forall y_1 \cdots \forall y_m \; \exists x_1 \cdots \exists x_n \; \Phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

որտեղ $\Phi(x_1 \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ Φ տիպի բանաձև է և x_i-ն $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ոչ մի բացասման նշանի տակ չի մասնակցում:

Այս փաստերի ապացույցը հեշտությամբ ստացվում է վերոհիշյալ ապացուցման եղանակներով:

ՀՍՍՀ ԳԱ և Եր. պետական համալսարանի
հաշվողական կենտրոն

Ընդունված է 19.XI.1968

К. А. ТАХТАДЖЯН. *О логических формулах, сохраняющихся при сильном гомоморфизме (резюме)*

Рассматриваются формулы исчисления предикатов первой ступени, где знаки отрицания находятся непосредственно перед предикатными буквами. Указывается конкретный класс формул, сохраняющихся при сильном гомоморфизме.

K. A. TAKHTADJIAN. *On a class of formulae closed under strong homomorphism* (summary)

We investigate the formulae of the first order predicate calculus, in which the symbols of negations are found immediately before the symbols of predicates. The concrete class of formulas closed under strong homomorphism is pointed out.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *A. Horn.* On sentences which are true of direct unions of algebras, J. Symb. Logic. 16, 1951, 14 — 21.
2. *R. Lyndon.* Properties preserved under algebraic constructions, Bull. Amer. Math, Soc., 65, 1959, 287—299.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

В. В. ЮРАШЕВ

О КВАЗИГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ПРИДАЮЩИХ ВСЕМ КОМПЛЕКСНЫМ ПРЯМЫМ ОДИНАКОВЫЙ ДЕФЕКТ

Рассмотрим отображение (T): $W = W(Z)$, где

$$W = (w_1 \cdots w_n)', \quad Z = (z^1 \cdots z^n)' \tag{1}$$

— гомеоморфное и принадлежащее классу гладкости C^1 в окрестности некоторой точки $M \in C^n_Z$. Пусть

$$W = AZ + \overline{B}\overline{Z}, \tag{2}$$

где $A = (a_{ij})_{n,n}$, $\overline{B} = (\overline{b}_{ei})_{n,n}$, $a_{ij} = \left.\dfrac{\partial w_i(Z)}{\partial z_j}\right|_M$, $b_{ei} = \left.\dfrac{\partial w_e(Z)}{\partial \overline{z}^i}\right|_M$ — дифференциал $d_M T$ отображения (T) в точке M. Мы предположим, что $\det A \neq 0$. Отображение (2) переводит произвольно взятую комплексную прямую

$$Z = \Omega t, \quad \Omega = (\omega_1 \cdots \omega_n)' \tag{3}$$

в некоторую, вообще говоря, неаналитическую плоскость

$$W = A\Omega t + \overline{B}\overline{\Omega}\overline{t}. \tag{4}$$

Величина

$$\operatorname{def}(\Omega, T) = 2\left(\sum_{k>l} |\gamma_{lk}|^2\right)^{1/2}\left[\sum_{l=1}^{n}(|\alpha_l|^2 - |\beta_l|^2)^2 + 4\sum_{k>l}|\gamma_{lk}|^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где $\gamma_{lk} = \alpha_l\beta_k - \beta_l\alpha_k$, $\alpha_l = \sum_{l=1}^{n} a_{ll}\omega_l$, $\beta_k = \sum_{s=1}^{r}\overline{b}_{ks}\overline{\omega}_s$, $i, k = 1 \cdots n$ называется дефектом неаналитической плоскости (4). Она равна синусу двугранного угла, который составляет плоскость (4) и единственная комплексная прямая (аналитическая плоскость), пересекающаяся с ней по какой-то действительной прямой. Можно показать, что этот угол не зависит от этой действительной прямой (см. Д. Е. Рудник [4], Б. А. Фукс [1]). Если (4) — комплексная прямая, то дефект (5) равен нулю.

Наряду с отображением (2) мы будем рассматривать приведенный дифференциал $d_M T$ отображения (T)

$$\overline{W} = EZ + \overline{B}\,\overline{A}^{-1}\overline{Z} = EZ + B\overline{Z}, \tag{6}$$

где $B = (b_{ik})_{n,n} = \overline{B}\,\overline{A}^{-1}$. Очевидно, что дефект, который приобретает произвольно взятая комплексная прямая при отображениях (2) и (6), один и тот же. Действительно, отображение (2) является суперпози-

цией отображений $Z_1 = AZ$ и (6), а первое из этих отображений не изменяет аналитического характера комплексных прямых (аналитических плоскостей).

Мы рассмотрим отображение (T), определенное для всех точек $M \in D$, где D — некоторая область пространства C_Z^n. Наша цель состоит в выделении класса E_D отображений (T), обладающих следующим свойством: если $(T) \in E_D$, $M \in D$, то отображение $d_M T$ придает всем комплексным прямым (6) одинаковый дефект $\operatorname{def}(\Omega, T) = \psi(M)$. Локально биголоморфные отображения области D принадлежат к классу E_D для них $\psi(M)$. Мы называем отображения $(T) \in E_D$ квазиголоморфными отображениями области D, придающими всем комплексным прямым одинаковый дефект.

В § 1 находятся необходимые и достаточные условия для элементов матриц A, $\bar{B}$, т. е. для производных функций (1), определяющих $d_M T$, $(T) \in E_D$, $M \in D$. Эти условия выражаются теоремой 1.

§ 2 посвящен интегрированию полученных дифференциальных уравнений и нахождению в замкнутой форме отображения (T), определяющего в области D класс E_D (теорема 2). Оказывается, что в уравнения (1), определяющие указанный класс отображений, входит $n+1$ произвольных функций, голоморфных в области D.

Затем в § 3 строится пример отображения, принадлежащего E_D, при помощи которого можно произвести гомеоморфное отображение области $\sum_{l=2}^{n} |z^l|^2 < 1$ пространства C_Z^n на гипершар $\sum_{s=1}^{n} |w_s|^2 < 1$. Очевидно, что эти области биголоморфно не эквивалентны друг другу.

§ 1

Дефект, который приобретает комплексная прямая (3) при отображении (6), вычисляется по формуле

$$\operatorname{def}(\Omega, T) = (1+c^2)^{-1/2}, \tag{1.1}$$

$$c = \left(2 \sum_{k>l} |\omega_l \beta_k - \omega_k \beta_l|^2 \right)^{-1/2} \left| \sum_{l=1}^{n} |\omega_l|^2 - |\beta_l|^2 \right|, \tag{1.2}$$

где $\beta_l = \sum_{l=1}^{n} b_{ll} \bar{\omega}_l$, b_{ll} — элементы матрицы B. Очевидно, что для того чтобы дефект был одинаковым для всех Ω необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты, стоящие перед всеми $\omega_\alpha \omega_v \bar{\omega}_l \bar{\omega}_f$ $\alpha, v, l, f = 1, \cdots, n$ в выражении (1.1) обращались в нуль. Это условие приводит к следующим равенствам, связывающим элементы матрицы B

$$-4 b_{\alpha\alpha} b_{\beta\beta} = c^{-2} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{l\alpha} \bar{b}_{l\beta} \right)^2, \quad \alpha \neq \beta, \ \alpha, \beta = 1 \cdots n, \tag{1.3}$$

$$4\sum_{k=1}^{n}|b_{k\gamma}|^2=c^{-2}\left(1-\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2\right)^2,\quad \alpha\neq k,\ \alpha=1\cdots n, \tag{1.4}$$

$$-2b_{\alpha\alpha}(\overline{b}_{\gamma\beta}+\overline{b}_{\beta\gamma})=c^{-2}\sum_{l=1}^{n}b_{l\alpha}\,b_{l\beta}\sum_{k=1}^{n}b_{k\alpha}\,\overline{b}_{k\gamma},\quad \alpha\neq\beta\neq\gamma;\ \alpha,\beta,\gamma=1\cdots n, \tag{1.5}$$

$$2b_{\gamma\gamma}(\overline{b}_{\gamma\beta}+\overline{b}_{\beta\gamma})=c^{-2}\left(1+2c^2-\sum_{l=1}^{n}|b_{l\gamma}|^2\right)\sum_{l=1}^{n}b_{l\gamma}\,\overline{b}_{l\beta},\quad \gamma\neq\beta,\ \gamma,\beta=1\cdots n, \tag{1.6}$$

$$-2(b_{\beta\gamma}+b_{\gamma\beta})(\overline{b}_{\alpha\delta}+b_{\delta\alpha})=c^{-2}\sum_{l=1}^{n}\overline{b}_{l\alpha}\,b_{l\beta}\sum_{k=1}^{n}\overline{b}_{k\delta}\,b_{k\gamma},\quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta=1\cdots n, \tag{1.7}$$

$$-2(\overline{b}_{\alpha\gamma}+\overline{b}_{\gamma\alpha})(b_{\alpha\beta}+b_{\beta\alpha})=c^{-2}\left[\left(1+2c^2-\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2\right)\sum_{l=1}^{n}b_{l\beta}\,\overline{b}_{l\gamma}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=1}^{n}b_{l\alpha}\,\overline{b}_{l\gamma}\sum_{l=1}^{n}\overline{b}_{l\alpha}\,b_{l\beta}\right],\quad \alpha\neq\beta\neq\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma=1\cdots n, \tag{1.8}$$

$$2\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{l\beta}|^2+|b_{l\alpha}|^2-|b_{\alpha\beta}+b_{\beta\alpha}|^2\right)=c^{-2}\left[\left(1-\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\sum_{k=1}^{n}|b_{k\beta}|^2+\left|\sum_{l=1}^{n}b_{l\alpha}\,\overline{b}_{l\beta}\right|^2\right)\right],\quad \alpha\neq\beta\ \alpha,\beta=1\cdots n. \tag{1.9}$$

Теорема 1. *Для того чтобы отображение* (6) *принадлежало к классу* E_D *в точке* $M\in D$ *необходимо и достаточно, чтобы*

1. *Матрица* B *была кососимметрической.*

2. *Матрица* B *отличалась от унитарной на множитель* $(\sqrt{1+c^2}-c)^{-1}$, *если* $\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2<1$ *и* $(\sqrt{1+c^2}+c)^{-1}$, *если* $\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2>1$.

Для доказательства кососимметричности матрицы B покажем прежде всего, что если все элементы, стоящие на главной диагонали B, отличны от нуля $b_{kk}\neq 0$, $k=1\cdots n$, то равенства (1.3)—(1.9) не выполняются. Из соотношений (1.5) и (1.6) с учетом (1.3) можно получить

$$4|b_{\gamma\gamma}|^2=-c^{-2}\left(1+2c^2-\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2\right)^2. \tag{1.10}$$

Равенство (1.10) выполняться не может, так как по предположению все

$$b_{\gamma\gamma}\neq 0,\ \gamma=1\cdots n,\ \alpha\neq\gamma.$$

Теперь предположим, что среди элементов b_{kk}, $k=1\cdots n$ есть как равные нулю, так и отличные от нуля. Пусть для определенности $b_{tt}=0$, а $b_{ss}\neq 0$. Из равенства (1.6) с учетом (1.3) получаем, что $\overline{b}_{ts}+\overline{b}_{st}=0$, а из равенства (1.9) с учетом (1.4)

$$|b_{ss}|^2=-c^{-2}\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{ls}|^2-\sum_{k=1}^{n}|b_{kt}|^2\right)^2.$$

Равенство (1.11) не выполняется, так как по предположению $b_{ss} \neq 0$, следовательно, все $b_{ll} = 0$, $i = 1 \cdots n$. Покажем, что $b_{lm} = -b_{ml}$ для всех $m \neq l$, l, $m = 1 \cdots n$. Допустим противное, т. е. $b_{lm} + b_{ml} \neq 0$, тогда из (1.7) и (1.8) получаем

$$b_{l\beta} + b_{\beta l} = 0, \quad b_{m\beta} + b_{\beta m} = 0, \quad \beta \neq l; \ \beta \neq m. \tag{1.12}$$

Из соотношения (1.9) с учетом (1.12) следует равенство

$$|b_{lm} + b_{ml}|^2 = 0, \tag{1.13}$$

которое противоречит нашему допущению.

В результате мы получаем, что матрица B—кососимметрическая.

Из равенства (1.3) следует далее, что все элементы матрицы B^*B равны нулю за исключением элементов, стоящих на главной диагонали. Из (1.9) и (1.4) видно, что на главной диагонали матрицы B^*B стоит величина $(\sqrt{1+c^2} - c)^2$, если $\sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2 < 1$ и $(\sqrt{1+c^2} + c)^2$, если $\sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2 > 1$. Следовательно

$$B^*B = (\sqrt{1+c^2} - c)^2 E, \text{ если } \sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2 < 1, \tag{1.14}$$

$$B^*B = (\sqrt{1+c^2} + c)^2 E, \text{ если } \sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2 > 1. \tag{1.15}$$

Из соотношений (1.14) и (1.15) видно, что матрицы

$$B_1 = (\sqrt{1+c^2} - c)^{-1} B = \frac{\operatorname{def}(\Omega, T)}{1 - \sqrt{1 - \operatorname{def}^2(\Omega, T)}} B, \text{ если } \sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2 < 1, \tag{1.16}$$

$$B_2 = \left(\sqrt{1+c^2} + c\right)^{-1} B = \frac{\operatorname{def}(\Omega, T)}{1 + (\sqrt{1 - \operatorname{def}^2(\Omega, T)})} B, \text{ если } \sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2 > 1 \tag{1.17}$$

унитарны. Теорема 1 доказана.

В работе А. А. Шматкова [3] показано, что выполнение первого условия теоремы 1 необходимо и достаточно для того, чтобы отображение (1) было бы конформным на комплексных прямых. Дифференциал такого отображения переводит комплексные прямые, вообще говоря, в действительно двумерные неаналитические плоскости. Однако углы между векторами, принадлежащими некоторой комплексной прямой, сохраняются, окружности с центром в начале координат, лежащие на комплексных прямых, переходят в окружности. Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Отображение, придающее всем комплексным прямым одинаковый дефект, является конформным на комплексных прямых.*

Если число $n = 2$—выполнение второго условия теоремы 1 вытекает из выполнения ее первого условия (при соответствующем подбо-

ре величины C). Поэтому в пространстве C_z^n отображение, конформное на комплексных прямых всегда придает всем комплексным прямым одинаковый дефект. Этот факт был обнаружен А. А. Шматковым [2]. Если число n нечетно, первое и второе условия теоремы совместны в том и только в том случае, когда $\operatorname{def}(\Omega, T)=0$, т. е. когда все комплексные прямые при отображении (2) переходят снова в комплексные прямые. Если это имеет место во всех точках области D, то отображение (1) является (учитывая, что у нас $\operatorname{def} A\neq 0$) локально биголоморфным. Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. *В комплексном нечетномерном пространстве C^{2m+1} отображение, придающее всем комплексным прямым одинаковый дефект во всех точках некоторой области D, является локально биголоморфным.*

§ 2

1. Если отображение (1) принадлежит в области $D\subset C_z^n$ к классу E_D, то функции w_k, $k=1\cdots n$ удовлетворяют в D, в силу теоремы 1, системе дифференциальных уравнений

$$(\widetilde{B}\,\overline{A}^{-1})'=-\overline{\widetilde{B}}\,\overline{A}^{-1}, \tag{2.1}$$

$$(\widetilde{B}\,\overline{A}^{-1})^*\cdot(\widetilde{B}\overline{A}^{-1})=\lambda E. \tag{2.2}$$

Здесь элементы матриц A и $\widetilde{B}$ — производные неизвестных функций $\lambda=\sum_{l=1}^{n}|b_{l\alpha}|^2$, $\alpha=1\cdots n$. Здесь и далее b_{ij}, $i, j=1\cdots n$—элементы матрицы $B=\widetilde{B}\,\overline{A}^{-1}$.

Из уравнений (2.1) и (2.2) вытекает, что функции (1) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}^j}=\sum_{s=1}^{n} b_{ls}\,\frac{\partial w_s}{\partial z^j}. \tag{2.3}$$

Мы предположим, что отображение (T) имеет второй класс гладкости в D и $J=\dfrac{\partial(w_1\cdots w_n)}{\partial(z^1\cdots z^n)}\Big|_M\neq 0$ во всех точках $M\in D$. Из условий интегрируемости системы (2.3) можно получить (см. А. А. Шматков [3]), что элементы матрицы B—голоморфные функции.

Из (2.3) получаем

$$\frac{\partial w_l}{\partial z^j}=-\lambda^{-1}\sum_{s=1}^{n}\overline{b}_{ls}\,\frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}^j},\quad j=1\cdots n. \tag{2.4}$$

Из условий интегрируемости системы (2.4), так как $\det\widetilde{B}\neq 0$ ($\det\widetilde{B}=0$ тогда и только тогда, когда (T)—голоморфное отображение), находим, что $-\sum_{s=1}^{n}\overline{b}_{ls}\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}|^2\right)^{-1}$ — голоморфные функции. Если b_{es}, $-\sum_{s=1}^{n}b_{es}\times$ $\times\left(\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}|^2\right)^{-1}$ голоморфные функции, то матрица B может быть записана в виде

$$B = \varphi L, \tag{2.5}$$

где φ — произвольная голоморфная функция, $L = (l_{ij})_{n,n}$ — некоторая постоянная кососимметрическая унитарная матрица. В самом деле, пусть $s_1 \cdots s_n$ и $-s_l \left(\sum_{k=1}^{n} |s_k|^2 \right)^{-1} = v_l$, $l = 1 \cdots n$ голоморфные функции. Можно записать, что

$$-s_l \left(\sum_{k=1}^{n} |s_k|^2 \right)^{-1} = -\alpha_{l-1} \left[s_l (1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}) \right]^{-1}, \tag{2.6}$$

где $\alpha_{l-1} = |s_l|^2 |s_1|^{-2}$, $\alpha_0 = 1$, $l = 1 \cdots n$. Так как v_l — голоморфные функции, то

$$\frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}^j} = s_1 \left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \right)' \bar{z}^j \cdot v_1^2 = 0,$$

$$\frac{\partial v_{p+1}}{\partial \bar{z}^j} = \left[\frac{1}{\alpha_p} s_{p+1} \left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \right)' \bar{z}^j - \right. \tag{2.7}$$

$$\left. - \frac{(\alpha_p)'}{\alpha_p^2} \bar{z}^j s_{p+1} \left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \right) \right] v_{p+1}^2, \quad j = 1 \cdots n, \; p = 1 \cdots n-1,$$

отсюда получаем

$$s_k = \beta_k s_1, \tag{2.8}$$

где β_k — некоторые постоянные числа, $k = 1 \cdots n$. Выражение (2.5) следует из (2.8).

Используя системы (2.3) и (2.4), можно найти, что

$$\Lambda = W - B\overline{W} \tag{2.9}$$

$$R = \overline{W} + \overline{B} W |\varphi|^{-2} \tag{2.10}$$

— голоморфные функции. Здесь $\Lambda = (\Lambda_1 \cdots \Lambda_n)'$ и $R = (R_1 \cdots R_n)'$. Для совместности систем (2.9) и (2.10) нужно, чтобы имело место соотношение

$$R = \overline{L} \Lambda \varphi^{-1}. \tag{2.11}$$

Из (2.9) можно вычислить

$$W = (\varphi L \overline{\Lambda} + \Lambda)(1 + |\varphi|^2)^{-1}. \tag{2.12}$$

II. Пусть отображение первого класса гладкости в D задается уравнением

$$W = (\varphi L \overline{\Lambda} + \Lambda)(1 + |\varphi|^2)^{-1}, \text{ где } \varphi \text{ и } \Lambda = (\Lambda_1 \cdots \Lambda_n)'$$

— голоморфные функции в области $D \subset C_z^n$, L — постоянная унитарная кососимметрическая матрица и $J = \dfrac{\partial (w_1 \cdots \overline{w_n})}{\partial (z^1 \cdots \overline{z^n})} \neq 0$. Легко проверить, что в каждой точке $M \in D$, $\det A \neq 0$ матрица $\overline{B}\,\overline{A}^{-1} = B$ — ко-

сосимметрическая и отличается от унитарной на множитель $|\varphi(M)|^2 = \sum_{l=1}^{n} |b_{l\alpha}|^2$, $\alpha = 1 \cdots n$. Здесь $\bar{B} = \left(\frac{\partial w_l}{\partial \bar{z}^j}\right)_{n,n}\Big|_M$, $A = \left(\frac{\partial w_l}{\partial z^k}\right)_{n,n}\Big|_M$, $\varphi(M)$ — значение функции φ в точке M.

Итак, мы показали, что справедлива

Теорема 4. *I. Если отображение* $\{W = W(Z)\}$ *второго класса гладкости принадлежит классу* E_D, *то в некоторой окрестности каждой точки* $M \in D$ *оно может быть представлено в виде* $W = (\varphi L \bar{\Lambda} + \Lambda)(1 + |\varphi|^2)^{-1}$ *где* φ *и* $\Lambda = (\Lambda_1 \cdots \Lambda_n)'$ — *голоморфные функции в области* $D \subset C_Z^n$, L — *постоянная унитарная кососимметрическая матрица.*

II. *Всякое отображение* $\{W = W(Z)\}$ *первого класса гладкости в области* D, *задаваемое уравнением* (2.12), *принадлежит к классу* E_D *при* $J = \frac{\partial(w_1 \cdots w_n)}{\partial(z^1 \cdots z^n)} \neq 0$ *в каждой точке* $M \in D$.

§ 3

Пусть область $D \subset C_Z^n$ и матрица L имеет вид

$$l_{2i-1\,l} = \begin{cases} 0, & l \neq 2i \\ 1, & l = 2i \end{cases} \qquad l_{2i\,p} = \begin{cases} 0, & p \neq 2i-1 \\ -1, & p = 2i-1, \end{cases} \quad i = 1 \cdots \frac{n}{2}, \quad p, l = 1 \cdots n, \tag{3.1}$$

тогда

$$w_k = (\Lambda_k + \varphi \bar{\Lambda}_{k+1})(1 + |\varphi|^2)^{-1}, \quad \text{если } k \text{—нечетно},$$
$$w_k = (\Lambda_k - \varphi \bar{\Lambda}_{k-1})(1 + |\varphi|^2)^{-1}, \quad \text{если } k \text{—четно}, \tag{3.2}$$

где Λ_k и φ — некоторые голоморфные функции.

Легко подсчитать, что

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\Lambda_k|^2 (1 + |\varphi|^2)^{-1}. \tag{3.3}$$

Положим $\varphi = z^1$, $\Lambda_k = z^k$, $k = 1 \cdots n$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z^k|^2 (1 + |z^1|^2)^{-1}, \tag{3.4}$$

$$w_k = (z^k + z^1 \bar{z}^{k+1})(1 + |z^1|^2)^{-1}. \quad \text{если } k - \text{нечетно},$$
$$w_k = (z^k - z^1 \bar{z}^{k-1})(1 + |z^1|^2)^{-1}, \quad \text{если } k - \text{четно}. \tag{3.5}$$

При помощи (3.5) можно осуществить отображение области $\sum_{l=2}^{n} |z^l|^2 < 1$ на гипершар $\sum_{p=1}^{n} |w_p|^2 < 1$. Отображение, обратное отображению (3.5), вычисляется по формуле

$$z^1 = w_1 (1 + \bar{w}_2)^{-1}, \quad z^2 = w_2 + |w_1|^2 (1 + \bar{w}_2)^{-1}, \tag{3.6}$$

$$z^{2l-1} = w_{2l-1} - w_1 \overline{w_{2l}}\,(1+\overline{w_2})^{-1},\quad z^{2l} = w_{2l} + w_1 w_{2l-1}(1+\overline{w_2})^{-1}.$$

Очевидно, что отображение (3.5) гомеоморфно в области $\sum_{l=2}^{n}|z^l|^2<1$.

Заметим, что области $\sum_{l=2}^{n}|z^l|^2<1$ и $\sum_{p=1}^{n}|w_p|^2<1$ биголоморфно неэквивалентны (их биголоморфные автоморфизмы имеют разную размерность).

Дефект комплексных прямых при отображении (3.5) изменяется от нуля (при $z^1=0$) до единицы (при $|z^1|=1$).

Итак, нами доказана

Теорема 5. *Отображение*

$$w_k = (z^k + z^1\overline{z}^{k+1})(1+|z^1|^2)^{-1},\ \textit{если } k \textit{ — нечетно},$$

$$w_k = (z^k - z^1\overline{z}^{k-1})(1+|z^1|^2)^{-1},\ \textit{если } k \textit{ — четно},$$

принадлежащее к классу E_D *в области* $\sum_{l=2}^{n}|z^l|^2<1$, *осуществляет гомеоморфное отображение этой области на гипершар* $\sum_{p=1}^{n}|w_p|^2<1$.

В заключение выражаю благодарность Б. А. Фуксу за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Московский институт электронного машиностроения

Поступило 21.II.1968

Վ. Վ. ՅՈՒՐԱՇԵՎ. Բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին միևնույն դեֆեկտ տվող քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումների մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին միևնույն դեֆեկտ տվող քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումների E_D *դասը։ Դուրս են արտապատկերումների* E_D *դասին պատկանելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։ Այդպիսի արտապատկերումները գտնվում են փակ տեսքով։

V. V. YURASHEV. *On quasi conformal transformations which ascribe the same defect to every complex line* (summary)

The necessary and sufficient conditions for a transformation to belong to the class described in the heading is found. These transformations are written in a closed form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, ГИФМЛ, Москва, 1963.
2. *А. А. Шматков.* Об одном классе квазибиголоморфных отображений, Ученные записки Московского областного пед. института им. Н. К. Крупской, том 166, 1966.
3. *А. А. Шматков.* Квазиголоморфные отбражения пространства C_E^n, конформные на комплексных прямых, Известия АН АрмССР, „Математика“, 3, № 6. 1968.
4. *Д. Е. Рудник.* Квазиголоморфные отображения с ограниченным дефектом, Труды МИЭМ, вып. 4, Изд. „Высшая школа“.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅԱՒՆ

Հ. Բ. Մառանջյան. Ասիմպտոտիկարար օպտիմալ ռեկուրսիվ ֆունկցիաների հատկությունների մասին 3
Հ. Գ. Ղազարյան. Խառը ածանցյալների գնահատականները տված դիֆերենցիալ բազմանդամների միջոցով 23
Ի. Ա. Ֆեդոտով. Եզվող գործակիցներով էլիպտական դիֆերենցիալ հավասարումներ . 31
Հ. Մ. Մուշեղյան. Հաարի սիստեմի համար միակության բազմությունների մասին . 55
Կ. Ա. Թախտաջյան. Տրամաբանական բանաձևեր, որոնք պահպանվում են ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ 66
Վ. Վ. Յուրաշև. Բոլոր կոմպլեքս ուղիղներին միևնույն դեֆեկտ տվող քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումների մասին 69

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Б. Маранджян. О некоторых свойствах асимптотически оптимальных рекурсивных функций 3
Г. Г. Казарян. L_p—оценки смешанных производных через данные дифференциальные многочлены 23
И. А. Федотов. Эллиптические дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами 31
Г. М. Мушеян. О множествах единственности для системы Хаара 55
К. А. Тахтаджян. О логических формулах, сохраняющихся при сильном гомоморфизме 66
В. В. Юрашев. О квазиголоморфных отображениях, придающих всем комплексным прямым одинаковый дефект 69

CONTENTS

H. B. Marandjian. On some properties of asymptotically optimal recursive functions 3
H. G. Kazarian. L_p—estimates of mixed derivatives with given differential polynoms 23
I. A. Fedotov. Elliptic differential equations with a breakable coefficients . . . 31
H. M. Moushekhian. On the uniqueness sets for Haar system 55
K. A. Takhtadjian. On a class of formulae closed under strong homomorphism . 66
V. V. Yurashev. On quasi conformal transformations which ascribe the same defect to every complex line 69