

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Ֆլեավուր Խմբագիր Մ. Մ. ԶՐԱՍԵՏԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԿՍԱՆԴՐՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱՀԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով:

Օտարերկրյա հեղինակները՝ հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով:

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում: Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ակնթան գծով:

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում:

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը:

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում:

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում:

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը:

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չղբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով:

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը:

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը:

10. Հեղինակների ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր:

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»:

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
Р. М. МАРТИРОСЯН

С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Багькамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
H. M. MARTIROSIAN
S. N. MERGELIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.
2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.
3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.
4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.
5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.
6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.
7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.
8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.
9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.
10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

Б. И. ГОЛУБОВ

КРИТЕРИИ КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ

1. Введение. В настоящей заметке доказываются аналоги критериев компактности М. Рисса [1] и А. Н. Колмогорова [2] для пространств AC_M^* , введенных Муселаком и Орличем [3]. Для этой цели введено понятие $M(M')$ —модуля непрерывности функции пространства AC_M .

Вообще пространства AC_M определяются в зависимости от функции $M(u)$, которая задана, непрерывна и не убывает на $[0, +\infty)$, причем $M(0) = 0$ и $M(u) > 0$ при $u > 0$. Однако мы в этой работе наложим на функцию $M(u)$ дополнительные следующие ограничения:

(с) $M(u)$ выпукла на $[0, +\infty)$;

$$\{0\} \quad \lim_{u \rightarrow +0} \frac{M(u)}{u} = 0;$$

$\{\Delta_2\}$ существуют постоянные $a > 0$, $b > 0$ такие, что

$$M(2u) \leq bM(u) \text{ при } 0 < u \leq a.$$

Все рассматриваемые ниже функции $x(t)$ считаются комплекснозначными, периодическими с периодом $T = 1$, причем $x(0) = 0$. Однако результаты можно распространить и на непериодические функции.

Отметим, что многие определения и обозначения заимствованы нами из [3]. На основании результатов этой же работы доказаны почти все необходимые вспомогательные утверждения.

2. Класс V_M . Л. Юнг [5], обобщая определение функции ограниченной p -вариации, введенное Н. Винером [6], рассмотрела класс V_M функций ограниченной M -вариации. Говорят, что функция $x(t)$ принадлежит классу V_M , если

$$V_M(x) \equiv \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^m M[|x(t_i) - x(t_{i-1})|] < \infty,$$

где $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$.

2.01. В [3] показано, что для того чтобы класс V_M был линейен (линейность означает, что условие $x_i \in V_M$ ($i = 1, 2$) влечет $x_1 + x_2 \in V_M$

* Один критерий компактности для пространств AC_M (см. ниже, лемму 3.24) вытекает из результата Г. Е. Шилова [4].

и $cx_1 \in V_M$ для любого комплексного c), необходимо и достаточно, чтобы функция $M(u)$ удовлетворяла условию (Δ_2) . В наших предположениях условие (Δ_2) выполнено, следовательно, класс V_M линейен.

2.1. Класс AC_M . Муселак и Орлич [3], обобщая определение класса V^p Лава [7], рассмотрели класс AC_M таких функций $x(t)$, которые обладают следующим свойством.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует, такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{l=1}^m M[|x(\beta_l) - x(\alpha_l)|] < \varepsilon$$

для всякой конечной системы неперекрывающихся интервалов $(\alpha_l, \beta_l) \subset [0, 1]$, если только

$$\sum_{l=1}^m M(\beta_l - \alpha_l) < \delta.$$

Если $x \in AC_M$, то говорят, что $x(t)$ абсолютно непрерывна относительно функции $M(u)$. Легко видеть, что $AC_M \subset V_M$, и функции класса AC_M непрерывны.

2.2. M -модуль непрерывности. Если $x \in V_M$, то положим

$$\omega_M(\delta, x) = \inf k,$$

где точная нижняя грань распространяется на все числа $k > 0$, удовлетворяющие условию

$$V_M^{\delta}\left(\frac{x}{k}\right) \equiv \sup_{|\Pi| < \delta} \sum_{l=1}^m M\left[\frac{|x(t_l) - x(t_{l-1})|}{k}\right] \leq 1;$$

($|\Pi| = \max_{1 \leq l \leq m} (t_l - t_{l-1})$). Величину $\omega_M(\delta, x)$ назовем M -модулем непрерывности функции $x(t)$. Например, при $M(u) = u^p$ ($1 < p < \infty$) имеем

$$\omega_{u^p}(\delta, x) = \sup_{|\Pi| < \delta} \left\{ \sum_{l=1}^m |x(t_l) - x(t_{l-1})|^p \right\}^{1/p}.$$

Величину $\omega_{u^p}(\delta, x)$ ввела Л. Юнг [8], а систематически использовал А. П. Терехин [9].

2.3. Свойства M -модуля непрерывности и определение пространств V_M и AC_M . Как показали Муселак и Орлич [3] (см. п.п. 3.03, 3.21, 1.01) при наших предположениях относительно функции $M(u)$ величина $\omega_M(1, x)$ является нормой (напомним, что $x(0) = 0$) в линейном классе $V_M(AC_M)$, причем $V_M(AC_M)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_M = \omega_M(1, x).$$

Подобным же образом можно доказать, что при любом фиксированном $\delta > 0$ величина $\omega_M(\delta, x)$ обладает всеми свойствами нормы, в частности, справедливо неравенство треугольника

$$\omega_M(\delta, x_1 + x_2) \leq \omega_M(\delta, x_1) + \omega_M(\delta, x_2).$$

Используя результаты [3] (см. п. 2.11), легко показать, что, в силу (0), условие

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_M(\delta, x) = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция x из класса V_M принадлежала AC_M .

2.4. M' -модуль непрерывности. Пусть $x_h(t) = x(t+h)$. Положим

$$\omega_M(\delta, x) = \sup_{0 < h < \delta} \|x_h - x\|_M.$$

Назовем эту величину M' -модулем непрерывности функции $x \in V_M$. При наших предположениях относительно функции $M(u)$ условие $\omega_M(\delta, x) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow +0$) необходимо и достаточно для того, чтобы функция x класса V_M принадлежала AC_M (см. [3], п. п. 2.41, 3.11).

3. Основные предложения.

3.1. Критерий М. Рисса для пространств AC_M . Для компактности множества $K \subset AC_M$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

$$1^\circ) \quad \|x\|_M \leq C \quad (x \in K, C = C(K));$$

$$2^\circ) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{x \in K} \omega_M(\delta, x) = 0.$$

3.2. Критерий Колмогорова для пространств AC_M . Для компактности множества $K \subset AC_M$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$1^\circ) \quad |x(t)| \leq C \quad (x \in K, C = C(K), -\infty < t < \infty);$$

$$2^\circ) \quad \lim_{h \rightarrow +0} \sup_{x \in K} \|x - x_h\|_M = 0,$$

где

$$x_h^t(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} x(\tau) d\tau$$

— функция Стеклова для $x(t)^*$.

Для доказательства теорем 3.1 и 3.2 нам понадобятся леммы 3.21 — 3.24.

3.21. Пусть $x \in V_M$ и в точках разбиения $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$ ломаная линия $x_1(t)$ совпадает с $x(t)$, т. е. $x(t_i) = x_1(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Тогда

$$\|x - x_1\|_M \leq 4\omega_M(|\Pi|, x).$$

Для доказательства заметим, что в работе [3] (см. п. 2.21) фактически доказано неравенство

$$V_M\left(\frac{x - x_1}{4k}\right) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m V_M\left(\frac{x}{k}; t_{i-1}, t_i\right),$$

* По поводу условия 1°) см. замечание в конце доказательства предложения 3.2.

где $k > 0$ — любое, $V_M(x; a, b)$ — M -вариация функции x на $[a, b]$, а M удовлетворяет условиям (0) и (Δ_2) или (0) и (c).

Правда, это неравенство доказано в [3] для случая, когда $x_1(t)$ — ступенчатая функция, непрерывная справа и совпадающая с $x(t)$ в точках разбиения Π , однако доказательство без изменений проходит и для нашего случая. Из этого неравенства следует

$$V_M\left(\frac{x-x_1}{4k}\right) \leq \frac{1}{2} V_M^{\text{III}}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы 3.21.

Пусть

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(\tau) d\tau \quad (n=1, 2, \dots)$$

для $t \in [0, 1]$, где $\chi_n(t)$ — система Хаара (см. [10], стр. 57). Тогда $\{\varphi_n(t)\}$ — система Шаудера (см. [10], стр. 63).

3.22. Система Шаудера $\{\varphi_n(t)\}$ является базисом в пространстве AC_M . Более того, если $x \in AC_M$ и

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \varphi_k,$$

то

$$\|x - S_n(x)\|_M \leq 4\omega_M(\delta_n, x),$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \varphi_k$, $\delta_0 = \delta_1 = 1$, $\delta_n = 2^{-n}$ при $2^m < n \leq 2^{m+1}$.

Приступая к доказательству, положим $x \in AC_M$. Тогда $x(t)$ непрерывна, а, поскольку система Шаудера $\{\varphi_n(t)\}$ — базис в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных (в частности, периодических с периодом $T=1$) функций на $[0, 1]$, то

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \varphi_k,$$

причем это представление единственно. Докажем, что этот ряд сходится и по норме пространства AC_M . Пусть $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность всех двоично-рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, занумерованных следующим образом: $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, w_n ($n \geq 2$) — точка максимума функции $\varphi_n(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$S_n(x) \equiv S_n(t, x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \varphi_k(t)$$

есть ломаная линия, звенья которой являются хордами кривой $y = x(t)$, а значения параметра t в концевых и угловых точках хорды равны $w_0, w_1, \dots, w_n^*$ (см. [10], стр. 63). Поэтому к функции $x - S_n(x)$ можно применить лемму 3.21, чем и завершается доказательство.

* Отметим, что функция $y = x(t)$ и $S_n(t, x)$ комплекснозначны.

Замечание. Отметим, что в силу условия $x(0) = 0$ и периодичности $x(t)$ в лемме 3.22 $a_0(x) = a_1(x) = 0$ для любой функции $x \in AC_M$.

3.23. Если $x \in AC_M$, то

$$\|x - x_h^s\|_M \leq \omega_M(h, x) \quad (h > 0),$$

где x_h^s — функция Стеклова для $x(t)$, а $\omega_M(h, x)$ — M' -модуль непрерывности функции $x(t)$.

Приступая к доказательству, отметим, что в работе [3] (см. п. 2.44) фактически установлено неравенство

$$V_M\left(\frac{x - x_h^s}{k}\right) \leq \frac{1}{h} \int_0^h V_M\left(\frac{x - x_\tau}{k}\right) d\tau$$

($k > 0$ — любое).

Повтому существует такое τ_0 , что

$$V_M\left(\frac{x - x_h^s}{k}\right) \leq V_M\left(\frac{x - x_{\tau_0}}{k}\right) \quad (0 \leq \tau_0 \leq h).$$

Из этого неравенства и определения M' -модуля непрерывности вытекает утверждение леммы 3.23.

Следующая лемма вытекает из одного результата Г. Е. Шилова [4] (см. также [11], стр. 262).

3.24. Для компактности множества $K \subset AC_M$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) $\|x\|_M \leq C \quad (x \in K, C = C(K));$

в) $\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{x \in K} \omega_M(\delta, x) = 0.$

Ссылка на результат Г. Е. Шилова [4] возможна в силу того, что AC_M является однородным банаховым пространством, т. е. из $x \in AC_M$ следует $x_h \in AC_M$, $\|x_h\|_M = \|x\|_M$ при любом h и справедливо равенство $\lim_{h \rightarrow 0} \|x_h - x\|_M = 0$ (см. [3], п.п. 2.41 и 3.11).

3.3. Доказательство предложения 3.1. Необходимость доказывается аналогично случаю пространства L_p ($1 < p < \infty$). Итак, пусть множество $K \subset AC_M$ компактно. Тогда в пространстве AC_M для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon/2$ -сеть $x_1, x_2, \dots, x_n$ для множества K . А так как $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_M(\delta, x) = 0$ для любой функции $x \in AC_M$, то $\omega_M(h, x_i) < \varepsilon/2$ при $0 < h < \delta(\varepsilon)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Наконец, пользуясь неравенством треугольника для M -модулей непрерывности $\omega_M(\delta, x)$ и их монотонностью относительно δ , имеем для любого $x \in AC_M$ и $0 < h < \delta(\varepsilon)$

$$\omega_M(h, x) \leq \omega_M(h, x - x_{i_0}) + \omega_M(h, x_{i_0}) <$$

$$< \|x - x_{i_0}\|_M + \omega_M(h, x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (i_0 = i_0(x)).$$

Необходимость условия 2) доказана. Необходимость условия 1) известна.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2) предложения 3.1. Из условия 2) и леммы 3.22 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что

$$\|x - S_n(x)\| < \varepsilon \quad (n > n_\varepsilon, x \in K),$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \varphi_k$. Отсюда и из условия 1) на основании критерия компактности для пространств с базисом (см., напр., [12], стр. 247), вытекает компактность множества K .

3.4. Доказательство предложения 3.2. Необходимость. Пусть множество $K \subset AC_M$ компактно. Тогда $\|x\|_M \leq C$ ($C = C(K)$) для $x \in K$, откуда и вытекает 1°). Условие 2°) вытекает из лемм 3.23 и 3.24.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1°) и 2°). Из условия 2°) следует, что множество $\{x_h | x \in K, h > 0\}$ является ε -сетью для множества K при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому достаточно доказать, что множество $\{x_h | x \in K\}$ компактно при любом фиксированном $h > 0$.

В самом деле, для любого разбиения $\Pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$ на основании условия 1°) имеем для любых $h > 0$ и $k > 0$:

$$\sum_{i=1}^m M \left[\frac{|x_h^s(t_i) - x_h^s(t_{i-1})|}{k} \right] \leq \sum_{i=1}^m M \left[\frac{2C(t_i - t_{i-1})}{hk} \right].$$

Но в силу условия (0) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m M(t_i - t_{i-1}) = 0$, поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \omega_M(\delta, x_h^s) = 0 \quad (h > 0 \text{ фиксировано}).$$

Из этого же самого неравенства вытекает, что

$$\|x_h^s\|_M \leq \frac{2C}{h} \|t\|_M < \infty \quad (x \in K).$$

Таким образом, для множества $\{x_h^s | x \in K\}$ ($h > 0$ фиксировано) выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.1, поэтому это множество компактно. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Условие 1°) в теореме 3.2 можно заменить условиями

$$1') \quad \|x\|_M < C \quad (x \in K, C = C(K)).$$

Это следует из доказательства. Именно условие 1') вместо 1°) фигурирует в теореме Колмогорова для пространств L_p ($1 < p < \infty$). Условие 1') всегда влечет 1°), а обратное неверно. Поэтому теорема 3.2 в смысле достаточности является более сильным утверждением, чем то, которое получится из него, если условие 1°) заменить на 1').

Բ. Ի. ԳՈԼՈՒԲՈՎ

ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՈՄՊԱԿՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔՆԵՐԸ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ
ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում ապացուցված է Մ. Ռիսսի [1] և Կոլմոգորովի [2] կոմպակտության սկզբունքի անալոգները Օրլիչի — Մուսիլակի [3] AC_M տարածության համար:

Այդ նպատակի համար մտցված է ֆունկցիաների M -մոդուլ անընդհատության հասկացողությունը AC_M տարածության մեջ:

Ենթադրվում է, որ $M(u)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին

a) $M(0) = 0$, $M(u) > 0$ և աճում է երբ $u > 0$.

c) $M(u)$ -ն ուռուցիկ է $[0, +\infty)$ տիրույթում.

0) $\lim_{u \rightarrow +0} \frac{M(u)}{u} = 0$.

(Δ_2) Գոյություն ունեն $a > 0$, $b > 0$ այնպիսի հաստատուններ, որ $M(2u) \leq bM(u)$, երբ $0 < u \leq a$:

B. I. GOLUBOV

THE CRITERIA OF COMPACTNESS OF SETS IN THE SPACES OF FUNCTIONS OF FINITE GENERALIZED VARIATIONS

S u m m a r y

In this paper some analoga of criteria of compactness by M. Riesz [1] and by Kolmogoroff [2] in the spaces AC_M of Orlicz-Musielak [3] are proved. To this aim the M -moduli of continuity in the space AC_M is introduced. The function $M(u)$ is assumed to satisfy the following conditions:

(a) $M(0) = 0$, $M(u) > 0$ and non decreasing for $u > 0$;

(c) $M(u)$ is a convex function for $u > 0$;

(0) $\lim_{u \rightarrow +0} \frac{M(u)}{u} = 0$;

(Δ_2) there exist $a > 0$ and $b > 0$ such that $M(2u) \leq bM(u)$ for $0 < u \leq a$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. Riesz. Sur les ensembles compacts de fonctions sommabl'es, Acta Sci. Math., Szeged, 6, 1933, 136—142.
2. A. H. Колмогоров. Über kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, № 1, 1931, 60—63.

3. *J. Mustelak, W. Orlicz.* On generalized variations (I), *Studia Math.*, 18, 1959, 11—41.
4. *Г. Е. Шилов.* Критерий компактности в однородном пространстве функций, *ДАН СССР*, 92, № 1, 1953.
5. *L. C. Young.* Sur une généralisation de la notion de la variation de puissance p -ième bornée au sens de N. Wiener..., *Compt. Rend.*, 204, 1937, 470—473.
6. *N. Wiener.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, *Massachusetts Journ. Math.*, 3, 1924, 73—94.
7. *E. R. Love.* A generalization of absolute continuity, *J. Lond. Math. Soc.*, 26, 1951, 1—13.
8. *L. C. Young.* An inequality of the Hölder type, connected with Stiltjes integration, *Acta Math.*, 67, 1936, 251—282.
9. *А. П. Терехин.* Приближение функций ограниченной p -вариации, *Изв. высш. учебн. завед. (математика)*, № 2, 1965, 171—187.
10. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.
11. *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, Москва, 1958.
12. *А. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, Москва, 1965.

Г. В. ЖИДКОВ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ
НА ВНЕШНОСТИ ИНТЕРВАЛА И ПОЛУОСИ

Ю. А. Брудный и Р. М. Тригуб рассмотрели вопрос о приближении функций на внешности интервала и полуоси целыми функциями конечной степени и полустепени, получив результаты аналогичные результатам А. Ф. Тимана и В. К. Дзядыка в случае приближения функций на отрезке алгебраическими полиномами [1], [2].

Таким образом, в метрике непрерывных функций были указаны необходимые и достаточные условия принадлежности функции к классу Липшица.

В данной статье в метрике функций, суммируемых с квадратом, решаются задачи, обратные к задачам, рассмотренным в работах [1], [2].

А именно, указываются свойства функций на внешности интервала и полуоси, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы наилучшее приближение удовлетворяло наравенству, имеющему место в известных классических теоремах Д. Джексона и С. Н. Бернштейна [7].

В случае приближения функций алгебраическими полиномами на отрезке аналогичный результат получен в статье [6]. Итак, пусть функция $f(x)$ определена на множестве $1 \leq x < \infty$. Введем функции

$$G_{\sigma}(x) = \int_0^{\sigma} P_{-1/2+i\tau}(x) \Phi^{*}(\tau) d\tau,$$

где

$$P_{-1/2+i\tau}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{ch} \pi \tau \int_0^{\pi} \frac{\cos \tau z dz}{V \operatorname{ch} z + x}, \quad (1)$$

$$\{\tau \operatorname{th} \pi \tau\}^{-1/2} \Phi^{*}(\tau) \in L_2[0, \infty).$$

Обозначим через $A_{\sigma}^{(2)}[f]$ наилучшее приближение $f(x)$ с помощью функций $G_{\sigma}(x)$

$$A_{\sigma}^{(2)}[f] = \inf_{G_{\sigma}(x)} \left(\int_1^{\infty} [f(x) - G_{\sigma}(x)]^2 dx \right)^{1/2}$$

и соответственно

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x \operatorname{ch} h + \sqrt{x^2 - 1} \operatorname{sh} h \cos \theta) d\theta.$$

Рассмотрим преобразование Мелера-Фока [3] функции

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} P_{-1/2+i\tau}(x) \Phi(\tau) d\tau,$$

где

$$\Phi(\tau) \sim \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_1^{\infty} P_{-1/2+i\tau}(x) f(x) dx.$$

Отсюда и из равенства Парсеваля [4]

$$\int_1^{\infty} f^2(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau \operatorname{th} \pi \tau} d\tau$$

следует

$$\begin{aligned} A_{\sigma}^{(2)}[f] &= \left(\int_1^{\infty} \left[f(x) - \int_0^{\sigma} P_{-1/2+i\tau}(x) \Phi(\tau) d\tau \right]^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^{\sigma} \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau \operatorname{th} \pi \tau} d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 1 Если функция $f(x)$ имеет s -ю производную, удовлетворяющую условию

$$\int_1^{\infty} \left[\frac{d^s f(x)}{dx^s} \right]^2 (x^2-1)^s dx < \infty,$$

то для выполнения неравенства

$$\left(\int_1^{\infty} \left[\frac{d^s f_h(x)}{dx^s} - \frac{d^s f(x)}{dx^s} \right]^2 (x^2-1)^s dx \right)^{1/2} \leq M h^{\gamma} \quad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{\sigma}^{(2)}[f] \leq \frac{C}{\sigma^{s+\gamma}}, \quad (4)$$

где M не зависит от $h > 0$, C не зависит от $\sigma > 1$, $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Покажем, что из (3) следует (4).

Пусть

$$f(\operatorname{ch} \alpha) \sim \int_0^{\infty} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \Phi(\tau) d\tau.$$

С помощью теоремы сложения

$$\begin{aligned} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} R) &= P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)} P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} \alpha) P_{-1/2+i\tau}^m(\operatorname{ch} h) \cos m \theta, \end{aligned}$$

$$\operatorname{ch} R = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} h + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} h \cos \theta$$

имеем

$$\left[\frac{d^s}{d \operatorname{ch} \alpha^s} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\operatorname{ch} R) d\theta \right) - \frac{d^s f(\operatorname{ch} \alpha)}{d \operatorname{ch} \alpha^s} \right] \operatorname{sh}^s \alpha \sim \\ \sim \int_0^{\pi} \left[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) - 1 \right] \frac{\Gamma(1/2+i\tau+s)}{\Gamma(1/2+i\tau-s)} P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \Phi(\tau) d\tau,$$

где

$$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\Gamma(1/2+i\tau-s)}{\Gamma(1/2+i\tau+s)} \operatorname{sh}^s \alpha \frac{d^s P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)}{d \operatorname{ch} \alpha^s}.$$

Применяя равенство Парсеваля для обобщенного преобразования Мелера-Фока [4]

$$\int_0^{\pi} f^2(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh}^{2s+1} \alpha d\alpha = \pi \int_0^{\pi} \frac{\Phi^2(\tau) d\tau}{\tau \operatorname{sh} \pi \tau \Gamma(1/2+i\tau+s) \Gamma(1/2-i\tau+s)},$$

получим

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{d^s}{d \operatorname{ch} \alpha^s} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\operatorname{ch} R) d\theta \right) - \frac{d^s f(\operatorname{ch} \alpha)}{d \operatorname{ch} \alpha^s} \right]^2 \operatorname{sh}^{2s+1} \alpha d\alpha = \\ = \pi \int_0^{\pi} [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \frac{\Gamma(1/2+i\tau+s)}{\Gamma^2(1/2+i\tau-s)} \frac{\Phi^2(\tau) d\tau}{\tau \operatorname{sh} \pi \tau \Gamma(1/2-i\tau+s)}.$$

Так как [3]

$$\frac{\Gamma(1/2+i\tau+s)}{\Gamma(1/2+i\tau-s)} = (-1)^s \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right], \\ \Gamma(1/2+i\tau+s) \Gamma(1/2-i\tau+s) = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \tau} \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right],$$

то, учитывая условие теоремы, будем иметь

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{d^s}{d \operatorname{ch} \alpha^s} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\operatorname{ch} R) d\theta \right) - \frac{d^s f(\operatorname{ch} \alpha)}{d \operatorname{ch} \alpha^s} \right]^2 \operatorname{sh}^{2s+1} \alpha d\alpha = \\ = \pi \int_0^{\pi} [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau) d\tau}{\tau \operatorname{th} \pi \tau} \leq M^2 h^{2\tau} \quad (5)$$

или

$$\int_{1/h}^{2/h} [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \tau^{2s-1} \operatorname{cth} \pi \tau \Phi^2(\tau) d\tau \leq M_1 h^{2\tau},$$

$$M_1 = M^2/\pi.$$

(6)

Воспользовавшись формулами [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2yz}{(\operatorname{ch} z)^{2\tau}} dz = z^{2\tau-2} \frac{\Gamma(x+y) \Gamma(x-y)}{\Gamma(2x)},$$

где

$$R(x) > 0, R(x) > |R(y)|,$$

$$|\Gamma(1/2 + i\tau)|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \tau}, \quad |\Gamma(i\tau)|^2 = \frac{\pi}{\tau \operatorname{sh} \pi \tau}$$

и интегральным представлением (1), получим ряд Маклорена

$$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \tau^2 \right) h^2 + \frac{1}{1440} \left(\frac{1}{4} + \tau^2 \right) \left(\frac{19}{4} + 3\tau^2 \right) h^4 - \dots$$

Так как ряд — знакопеременный обвертывающего типа, то

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \tau^2 \right) h^2 \left(1 - \frac{19}{960} h^2 - \frac{\tau^2 h^2}{80} \right) \leq 1 - P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \tau^2 \right) h^2. \quad (7)$$

При проведении дальнейших выкладок будем предполагать, что $0 < h \leq 1$, ибо в случае $h > 1$ доказательство теоремы проводится тривиально.

Предполагая, что $1/h \leq \tau \leq 2/h$, будем иметь

$$[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \geq \frac{1}{36} \left(\frac{1}{4} + \tau^2 \right)^2 h^4 \left(1 - \frac{19}{960} h^2 - \frac{\tau^2 h^2}{80} \right)^2 > C_1, \quad (8)$$

где C_1 — абсолютная постоянная, которая не зависит от τ и h .

Из (6) и (8) получим

$$\int_{1/h}^{2/h} \tau^{2s-1} \operatorname{cth} \pi \tau \Phi^2(\tau) d\tau \leq M_2 h^{2s}, \quad M_2 = M_1/C_1. \quad (9)$$

Следовательно

$$\int_{1/h}^{2/h} \frac{\operatorname{cth} \pi \tau}{\tau} \Phi^2(\tau) d\tau \leq M_2 h^{2s+2\tau}$$

или

$$\int_{2^j/h}^{2^{j+1}/h} \frac{\operatorname{cth} \pi \tau}{\tau} \Phi^2(\tau) d\tau \leq 2^{-2(j+\tau)} M_2 h^{2s+2\tau}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Из суммируемости по j и сходимости ряда в правой части следует

$$\int_{1/h}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \pi \tau}{\tau} \Phi^2(\tau) d\tau \leq C^2 h^{2s+2\tau}. \quad (10)$$

Соотношение (10) при $\sigma = 1/h$ и (2) дают (4).

Докажем обратное утверждение, т. е., что из (4) следует (3). Проводя аналогичные выкладки как и в начале теоремы, получим соотношение (5). Представим следующий интеграл тремя слагаемыми:

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\infty} [P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau t h \pi \tau} d\tau = \\ = \int_0^1 \dots + \int_1^{1/h} \dots + \int_{1/h}^{\infty} \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Из условия теоремы и равенства Парсеваля аналогично соотношению (5) получим

$$\pi \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau t h \pi \tau} d\tau = \int_0^{\infty} \left[\frac{d^s f(\operatorname{ch} a)}{d \operatorname{ch} a^s} \right]^2 \operatorname{sh}^{2s+1} a da < \infty.$$

Поэтому, учитывая неравенство (7) и то, что $0 < h \leq 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 [P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau t h \pi \tau} d\tau \leq \\ \leq \pi h^4 \int_0^1 \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau t h \pi \tau} d\tau = C_s h^4 \leq C_s h^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Соотношение

$$k(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \tau^{2s-1} \operatorname{ct} h \pi \tau \Phi^2(\tau) d\tau = O(\tau^{-2\gamma})$$

следует из (9) и эквивалентно (10).

Так как при $\tau > 1$ имеет место неравенство

$$\prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] < \prod_{k=1}^s \left[1 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \tau^{2s} = C_s \tau^{2s},$$

то из (7) интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} \pi \int_1^{1/h} [P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau t h \pi \tau} d\tau \leq \\ \leq C_s \int_1^{1/h} h^4 \tau^{2s+3} \operatorname{ct} h \pi \tau \Phi^2(\tau) d\tau = -C_s h^4 \int_1^{1/h} \tau^4 k'(\tau) d\tau = \\ = -C_s h^4 k(\tau) \Big|_1^{1/h} + C_s h^4 \int_1^{1/h} \tau^3 k(\tau) d\tau \leq C_s h^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Оценим третье слагаемое в соотношении (11).

В силу неравенства

$$|P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} h)| < 1$$

и условия теоремы получим

$$\pi \int_{1/h}^{\infty} [P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \prod_{k=1}^s \left[\tau^2 + \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau t h \pi \tau} d\tau \leq$$

$$\leq 4\pi C_s \int_{1/h}^{\infty} \tau^{2\nu-1} \operatorname{cth} \pi \tau \Phi^2(\tau) d\tau \leq C_4 h^{2\nu}.$$

Объединяя оценки слагаемых в выражении (11), учитывая (5) и (6), получим (3).

Далее рассмотрим теорему о наилучшем приближении функции $f(x)$, определенной на полуоси $0 \leq x < \infty$.

Для этого воспользуемся интегральным преобразованием Ханкеля [5]

$$f(x) \sim C_\nu \int_0^{\infty} j_\nu(\tau x) \Phi_\nu(\tau) \tau^{2\nu+1} d\tau, \quad (12)$$

$$\Phi_\nu(\tau) \sim \int_0^{\infty} j_\nu(\tau x) f(x) x^{2\nu+1} dx, \quad C_\nu = \frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1)}, \quad \nu > -1/2,$$

$$j_\nu(\tau x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(\tau x)}{(\tau x)^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1) k!} \left(\frac{\tau x}{2}\right)^{2k}, \quad (13)$$

$j_\nu(\tau x)$ — функция Бесселя.

В силу теоремы сложения для функций Бесселя

$$\frac{J_\nu(\tau R)}{(\tau R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{i=0}^{\infty} (\nu+i) \frac{J_{\nu+i}(\tau x) J_{\nu+i}(\tau h)}{(\tau x)^\nu (\tau h)^\nu} C_i^\nu(\cos \theta),$$

где $R^2 = x^2 + h^2 - 2xh \cos \theta$, $C_i^\nu(\cos \theta)$ — полиномы Гогенбауэра, и соотношений

$$\int_0^\pi C_i^\nu(\cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta = 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad \int_0^\pi \sin^{2\nu} \theta d\theta = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},$$

$C_0^\nu(\cos \theta) = 1$, имеем

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2) \Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\pi j_\nu(\tau R) \sin^{2\nu} \theta d\theta = j_\nu(\tau x) j_\nu(\tau h).$$

Отсюда и из (12) следует

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2) \Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\pi f(R) \sin^{2\nu} \theta d\theta \sim \\ &\sim C_\nu \int_0^{\infty} j_\nu(\tau h) j_\nu(\tau x) \Phi_\nu(\tau) \tau^{2\nu+1} d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Для преобразования Ханкеля (12) имеет место равенство Парсеваля [5]

$$\int_0^{\infty} f^2(x) x^{2\nu+1} dx = C_\nu \int_0^{\infty} \Phi_\nu^2(\tau) \tau^{2\nu+1} d\tau.$$

Построим функции

$$H_{\sigma}(x) = \int_0^{\sigma} j_{\nu}(\tau x) \Phi^*(\tau) \tau^{2\nu+1} d\tau, \quad (15)$$

где

$$\Phi^*(\tau) \tau^{\nu+1/2} \in L_2[0, \infty).$$

Обозначим через $A_{\sigma}^{*(2)}[f]$ наилучшее приближение $f(x)$ функциями $H_{\sigma}(x)$ в метрике L_2

$$A_{\sigma}^{*(2)}[f] = \inf_{H_{\sigma}(x)} \left(\int_0^{\infty} [f(x) - H_{\sigma}(x)]^2 x^{2\nu+1} dx \right)^{1/2}. \quad (16)$$

На основании равенства Парсеваля из соотношений (12) и (16) имеем

$$\begin{aligned} A_{\sigma}^{*(2)}[f] &= \left(\int_0^{\infty} \left[f(x) - \int_0^{\sigma} j_{\nu}(\tau x) \Phi_{\nu}(\tau) \tau^{2\nu+1} d\tau \right]^2 x^{2\nu+1} dx \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^{\infty} \Phi_{\nu}^2(\tau) \tau^{2\nu+1} d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ имеет s -ю производную, удовлетворяющую условию

$$\int_0^{\infty} \left[x^s \frac{d^s f(x)}{(xdx)^s} \right]^2 x^{2\nu+1} dx < \infty,$$

то для выполнения неравенства

$$\left(\int_0^{\infty} \left[x^s \frac{d^s f_h(x)}{(xdx)^s} - x^s \frac{d^s f(x)}{(xdx)^s} \right]^2 x^{2\nu+1} dx \right)^{1/2} \leq M h^{\gamma} \quad (18)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{\sigma}^{*(2)}[f] \leq \frac{C}{\sigma^{\gamma+\gamma}} \quad \gamma > -1/2, \quad 0 < \gamma < 2; \quad (19)$$

M не зависит от $h > 0$, постоянная C не зависит от $\sigma > 1$, $f_h(x)$ определяется формулой (14).

Доказательство. Покажем, что из (18) следует (19).

Из соотношения (12) имеем

$$\frac{d^s f(x)}{(xdx)^s} \sim C_{\nu} \int_0^{\infty} j_{\nu+s}(\tau x) \Phi_{\nu}(\tau) \tau^{2s+2\nu+1} d\tau.$$

С помощью равенства Парсеваля получим

$$\int_0^{\infty} \left[x^s \frac{d^s f_h(x)}{(xdx)^s} - x^s \frac{d^s f(x)}{(xdx)^s} \right]^2 x^{2\nu+1} dx =$$

$$= C_v \int_0^{\infty} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau. \quad (20)$$

Отсюда и из условия теоремы будем иметь

$$\int_0^{\infty} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq M_1 h^{2\tau}, \quad M_1 = M^2/C_v.$$

Тем более справедлива оценка

$$\int_{1/h}^{2/h} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq M_1 h^{2\tau}. \quad (21)$$

Так как в правой части выражения (13) — знакопеременный ряд, то имеют место неравенства

$$\frac{1}{v+1} \left(\frac{\tau h}{2} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2(v+2)} \left(\frac{\tau h}{2} \right)^2 \right] \leq 1 - j_v(\tau h) \leq \frac{1}{v+1} \left(\frac{\tau h}{2} \right)^2. \quad (22)$$

Неравенства (21) и (22) дают

$$\int_{1/h}^{2/h} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq M_2 h^{2\tau}, \quad M_2 = \frac{64(v+1)^2(v+2)^2}{(2v-3)^2} M_1,$$

или

$$\int_{1/h}^{2/h} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2v+1} d\tau \leq M_2 h^{2s+2\tau}. \quad (23)$$

Следовательно

$$\int_{2^j/h}^{2^{j+1}/h} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2v+1} d\tau \leq 2^{-2j(s+\tau)} M_2 h^{2s+2\tau}, \quad j=0,1,2,\dots$$

Суммируя по j , будем иметь

$$\int_{1/h}^{\infty} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2v+1} d\tau \leq M_3 h^{2s+2\tau}. \quad (24)$$

Полагая в (24) $1/h = \sigma$ и учитывая (17), получим (19). Докажем обратное утверждение. Из неравенства (24) следует

$$\int_{1/h}^{\infty} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq M_4 h^{2\tau} \quad (25)$$

и наоборот. Обозначим

$$k(\tau) = \int_{1/h}^{\infty} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau = O(\tau^{-2\tau}). \quad (26)$$

Представим следующий интеграл двумя слагаемыми

$$\int_0^{\infty} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau = \int_0^{1/h} \dots + \int_{1/h}^{\infty} \dots$$

Оценим первое слагаемое. На основании неравенства (22) и (26) интегрированием по частям получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/h} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq \\ & \leq h^4 \int_0^{1/h} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+5} d\tau = -h^4 \int_0^{1/h} \tau^4 k'(\tau) d\tau = \\ & = -h^{4-s} k(\tau) \Big|_0^{1/h} + 4h^4 \int_0^{1/h} \tau^3 k(\tau) d\tau \leq \\ & \leq 4h^4 \int_0^{1/h} \tau^3 k(\tau) d\tau \leq h^4 \int_0^{1/h} O(\tau^{-3-2\gamma}) d\tau \leq M_3 h^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Оценим второй интеграл. Так как $|j_v(\tau h)| \leq 1$, то, учитывая (25), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{1/h}^{\infty} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq \\ & \leq 4 \int_{1/h}^{\infty} \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq 4M_4 h^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок вытекает неравенство

$$\int_0^{\infty} [j_v(\tau h) - 1]^2 \Phi_v^2(\tau) \tau^{2s+2v+1} d\tau \leq (M_3 + 4M_4) h^{2\gamma}.$$

Отсюда и из (20) следует (18).

Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы

Поступило 13.IV.1967.

Գ. Վ. ԺԻԴԿՈՎ

ԻՆՏԵՐՎԱԼԻ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱՍՈՒՄ ԵՎ ԿԻՍԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ
ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Հոդվածում նշված են ֆունկցիաների այնպիսի դասեր, որոնց պատկանելի
լը անհրաժեշտ և բավարար է այն բանի համար, որպեսզի լավագույն մոտար
2—529

կումը ինտերվալի արտաքին մասում և կիսառանցքի վրա բավարարի համապատասխան անհավասարությանը:

Այս անհավասարությունը հանդիսանում է Դ. Զեկսոնի և Ս. Ն. Բերնշտեյնի *Լիպշիցի դասին պատկանող ֆունկցիաների լավագույն մոտավորությունների վերաբերյալ ուղիղ և հակադարձ թեորեմների ստրուկտուրային բնութագրությունը*:

G. V. ZIDKOV

ABOUT THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE EXTERNAL OF AN INTERVAL AND DEMIAXIS ABSTRACT

S u m m a r y

In the paper some classes of functions are indicated, belonging to which is necessary and sufficient for a function, for the best approximation in the external of an interval or on a demiaxis would satisfy certain inequality.

The inequality mentioned is a structural characteristic in well known Jackson's and Bernstein's theorems (direct and inverse) on the best approximation of functions belonging to the Lipschitz's class.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю. А. Брудный. Конструктивная характеристика функций, заданных на некоторых совершенных множествах действительной оси, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, 1961, 122—129.
2. Р. М. Тригуб. Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, 1961, 47—51.
3. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения, Изд. тех. теор. лит. 1953.
4. Н. Я. Виленкин. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений, группы движений пространства Лобачевского и обобщенные преобразования Фока-Мелера, ДАН СССР, 118, № 2, 1958, 220—223.
5. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, изд. «Наука», 1965.
6. Г. В. Жидков. Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций, ДАН СССР, 169, № 5, 1966, 1002—1005.
7. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. I, статья № 6, Изд. АН СССР, 1952, 112—123.

Е. Э. МОГУЛЬСКИЙ

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ РАЦИОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Целью настоящей статьи является перенесение известной теоремы М. В. Келдыша [1] о n -кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка на случай рационального операторного пучка. Это обобщение интересно тем, что вместо конечности порядка главной части пучка требуется лишь конечность нижнего порядка. Теорема такого рода для линейного пучка была доказана В. И. Мацаевым и Ю. А. Палантом [2], а для полиномиального пучка Ю. А. Палантом (диссертация). Для получения теоремы полноты используется метод, применявшийся В. И. Мацаевым для оценок резольвент операторов [3]. Другие обобщения теоремы М. В. Келдыша на случай рационального пучка были получены Дж. Э. Аллахвердиевым [4]. В дальнейшем будем придерживаться обозначений, введенных в [5]. Через S_{∞} обозначен класс всех линейных вполне непрерывных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Для каждого такого оператора A вводится последовательность $\{s_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ его s -чисел, определяемых как собственные числа оператора $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, занумерованная в порядке убывания

с учетом кратностей (если $r = \dim (A^*A)^{\frac{1}{2}} < \infty$, то $s_n(A) = 0$ ($n = r + 1, \dots$), и функция $\nu(t, A)$, равная количеству чисел $s_n(A)$, больших t^{-1} .

Операторным пучком $L(\lambda)$ назовем оператор-функцию $L(\lambda) = 1 - M(\lambda)$, где $M(\lambda)$ — голоморфная оператор-функция со значениями из S_{∞} , определенная в некоторой области G комплексной плоскости λ . Число λ_0 называется характеристическим числом операторного пучка, если существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in H$ такой, что $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$, а φ_0 называется собственным вектором пучка, отвечающим характеристическому числу λ_0 . Если существует векторный полином $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^k \varphi_s(\lambda - \lambda_0)^s$

($\varphi_s \in H$) такой, что $\|L(\lambda)\varphi(\lambda)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{k+1})$, то мы назовем векторы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ цепочкой векторов, присоединенных к собственному вектору φ_0 . Кратностью собственного вектора φ_0 будем называть максимальную длину цепочки присоединенных к φ_0 векторов.

Пусть φ_0 — собственный вектор кратности m , отвечающий характеристическому числу λ_0 , а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — соответствующая ему це-

пучка присоединенных векторов. Тогда, если $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s$, то

$$L(\lambda) \varphi(\lambda) = L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{\partial^k L}{\partial \lambda_0^k} (\lambda - \lambda_0)^k \right) \left(\sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right) =$$

$$= L(\lambda_0) \varphi_0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} \varphi_0 + L(\lambda_0) \varphi_1 \right) (\lambda - \lambda_0) + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_0^2} \varphi_0 + \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + L(\lambda_0) \varphi_2 \right) (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots = \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} L}{\partial \lambda_0^{m-k}} \varphi_k \right) (\lambda - \lambda_0)^m +$$

$$+ \sum_{r=1}^m \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m+r-k)!} \frac{\partial^{m+r-k} L}{\partial \lambda_0^{m+r-k}} \varphi_k \right\} (\lambda - \lambda_0)^{m+r}.$$

Но так как

$$\left\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right) \right\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{m+1}), \text{ то}$$

$$L(\lambda_0) \varphi_0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} \varphi_0 + L(\lambda_0) \varphi_1 = \dots = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} L}{\partial \lambda_0^{m-k}} \varphi_k = 0$$

и, следовательно, приведенное здесь определение цепочки совпадает с определением цепочки по М. В. Келдышу [1].

Покажем, что такое определение инвариантно в некотором смысле относительно замены независимой переменной.

Лемма 1. Если λ_0 есть характеристическое число операторного пучка, то при преобразовании $\lambda = \lambda(\mu)$, $\lambda'(\mu_0) \neq 0$ ($\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$) подпространство собственных векторов и подпространство, натянутое на собственные и присоединенные векторы, отвечающие λ_0 , переходят соответственно в подпространство собственных векторов и подпространство, натянутое на собственные и присоединенные векторы, отвечающие μ_0 ; при этом длина максимальной цепочки не изменяется.

Если $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^p \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s$ и $\|L(\lambda) \varphi(\lambda)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1})$, то

$$L(\lambda(\mu)) \varphi(\lambda(\mu)) = L(\lambda(\mu)) \left(\sum_{s=0}^p \varphi_s \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \lambda^{(k)}(\mu_0) (\mu - \mu_0)^k \right\}^s \right) =$$

$$= L(\lambda(\mu)) \left[\sum_{s=0}^p \psi_s (\mu - \mu_0)^s + (\mu - \mu_0)^{p+1} \sum_{k=1}^m x_k (\mu - \mu_0)^k \right]$$

и

$$\left\| L(\lambda(\mu)) \left(\sum_{s=0}^p \psi_s (\mu - \mu_0)^s \right) \right\| = O(|\mu - \mu_0|^{p+1}).$$

Так как при подстановке ряда в ряд n -ый коэффициент результирующего ряда зависит лишь от первых n коэффициентов исходных рядов, то вектор ψ_s является линейной комбинацией векторов $\varphi_0, \varphi_1, \dots$,

φ_s . Обратно, поскольку $\lambda'(\mu_0) \neq 0$, то функция $\lambda(\mu)$ имеет однозначную обратную функцию $\mu(\lambda)$ в окрестности точки μ_0 , и каждому полиному $\psi(\mu) = \sum_{s=0}^p \psi_s (\mu - \mu_0)^s$ такому, что $\|L(\lambda(\mu)) \psi(\mu)\| = O(|\mu - \mu_0|^{p+1})$,

отвечает функция $\varphi(\mu(\lambda)) = \sum_{s=0}^p \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s + O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1})$, причем

$$\|L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^p \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1}), \text{ и каждый вектор } \varphi_s (s=0, 1, \dots, p)$$

является линейной комбинацией $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_s$. Из приведенных рассуждений следуют все утверждения леммы.

Отметим, что при преобразовании $\lambda = \mu + b$ собственные и присоединенные векторы сохраняются.

Характеристическое число λ_0 пучка $L(\lambda)$ называется характеристическим числом конечной алгебраической кратности, если пространство нулей оператора $L(\lambda_0)$ конечномерно и кратность каждого собственного вектора конечна. Если хотя бы в одной точке оператор $L(\lambda)$ обратим, то согласно [6], множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ состоит из дискретного множества точек конечной алгебраической кратности, которое может иметь точки сгущения на границе области G .

В дальнейшем будут рассматриваться рациональные операторные пучки вида

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{s=0}^n \lambda^s B_s - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{B_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k}, \quad (1)$$

где операторы $B_s, B_{l,k} \in S_\infty$.

Если φ_0 — собственный вектор пучка (1), отвечающий характеристическому числу λ_0 , а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ — присоединенная к нему цепочка, то соотношениями

$$\varphi_0^{(v)} = \lambda_0 \varphi_0^{(v-1)}, \quad \varphi_s^{(v)} = \lambda_0 \varphi_s^{(v-1)} + \varphi_{s-1}^{(v-1)} \quad (v=1, 2, \dots, n-1; s=1, 2, \dots, r),$$

$$\varphi_s^{(k), l} = - \sum_{p=0}^k (\lambda_l - \lambda_0)^{p-s-1} \varphi_p^{(k-1), l} \quad (k=1, \dots, n_l; l=1, \dots, N; s=0, 1, \dots, r) \quad (2)$$

$$(\varphi_s^{(0)})^l = \varphi_s^{(0), l} = \varphi_s$$

определяются $n + \sum_{l=1}^N n_l - 1$ собственных векторов и присоединенных к ним цепочек. Действительно, если $\varphi_0^{(v-1)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(v-1)}, \dots, \varphi_r^{(v-1)}$ — присоединенная к нему цепочка, то

$$\left\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \varphi_s^{(v)} (\lambda - \lambda_0)^s \right) \right\| = \left\| L(\lambda) \left(\lambda_0 \varphi_0^{(v-1)} + \sum_{s=1}^r (\lambda_0 \varphi_s^{(v-1)} + \right. \right.$$

$$+ \varphi_{s-1}^{(v-1)} (\lambda - \lambda_0)^s \Big\| = \Big\| \lambda_0 L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \varphi_s^{(v-1)} (\lambda - \lambda_0)^s \right) +$$

$$+ (\lambda - \lambda_0) L(\lambda) \left(\sum_{l=0}^{r-1} \varphi_l^{(v-1)} (\lambda - \lambda_0)^l \right) \Big\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{r+1})$$

и на основании определения заключаем, что $\varphi_0^{(v)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(v)}, \dots, \varphi_r^{(v)}$ — присоединенная к нему цепочка. Если $\varphi_0^{(k-1), l}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(k-1), l}, \dots, \varphi_r^{(k-1), l}$ — присоединенная к нему цепочка, то

$$\Big\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \varphi_s^{(k), l} (\lambda - \lambda_0)^s \right) \Big\| = \Big\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \left\{ \sum_{p=0}^s (\lambda_l - \lambda_0)^{p-s-1} \varphi_p^{(k-1), l} \right\} \times \right.$$

$$\times (\lambda - \lambda_0)^s \Big) \Big\| = \Big\| \sum_{p=0}^r \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{(\lambda_l - \lambda_0)^{p+1}} L(\lambda) \left(\sum_{u=0}^{r-p} \varphi_u^{(k-1), l} (\lambda - \lambda_0)^u \right) \Big\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1}),$$

откуда следует, что $\varphi_0^{(k), l}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(k), l}, \dots, \varphi_r^{(k), l}$ — присоединенная к нему цепочка.

Полученные системы собственных и присоединенных векторов $\{\varphi_s^{(v)}\}$ ($v = 1, \dots, n-1$), $\{\varphi_s^{(k), l}\}$ ($l = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, n_l$), ($s = 0, 1, \dots, n$) в дальнейшем для удобства будем записывать в виде $\{\varphi_s^{(\tau)}\}$, где $\varphi_s^{(\tau)} = \varphi_s^{(v)}$ ($\tau = v$; $v = 1, 2, \dots, n-1$), $\varphi_s^{(\tau)} = \varphi_s^{(k), l}$ ($\tau = n + n_1 + \dots + n_{l-1} + k - 1$; $k = 1, \dots, n_l$).

В пространстве $\tilde{N}$, являющемся ортогональной суммой $n + \sum_{l=1}^N n_l$ экземпляров пространства N , рассмотрим векторы $\varphi_s \{ \varphi_s^{(0)} \}$,

$\varphi_s^{(1)}, \dots, \varphi_s \left(n + \sum_{l=1}^N n_l - 1 \right) \}$, построенные для всех характеристических зна-

чений и всевозможных цепочек. Если векторы φ_s полны в $\tilde{N}$, то мы будем говорить, что система собственных и присоединенных векторов операторного пучка (1) $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полна в N . Для случая полиномиального пучка непосредственная выкладка показывает, что это определение эквивалентно определению М. В. Келдыша из [1].

Отсюда следует, что система собственных и присоединенных векторов будет $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полной тогда и только тогда, когда из ортогональности $\tilde{g} \in \tilde{N}$ всем векторам φ_s следует, что $\tilde{g} = 0$. Покажем, что если система собственных и присоединенных векторов не является $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полной, то найдется не нулевой вектор $\tilde{g} \{ g_0; g_1; \dots; g_{n-1};$

$g_{1,1}; \dots; g_{n,1}; \dots; g_{n,N}\}$ такой, что для любого $f \in \mathbf{H}$ функция $F(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lambda^\nu L^{-1} f, g_\nu) + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} ((\lambda - \lambda_l)^{-k} L^{-1} f, g_{k,l})$ может иметь особые точки лишь при $\lambda = \lambda_l$ и на бесконечности.

Если λ_0 является полюсом порядка $p+1$ функции $L^{-1} f$ ($f \in \mathbf{H}$), то функция $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{p+1} L^{-1} f$ будет аналитической в точке λ_0 . Обозначив через $\hat{\psi}(\lambda)$ первые $p+1$ членов разложения в ряд функции $\psi(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 , найдем, что $\|L(\lambda) \hat{\psi}(\lambda)\| = \|L(\lambda) ((\lambda - \lambda_0)^{p+1} L^{-1} f + O((\lambda - \lambda_0)^{p+1}))\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1})$ и что, согласно определению, в главной части $\frac{\varphi_0}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1}} + \frac{\varphi_1}{(\lambda - \lambda_0)^p} + \dots + \frac{\varphi_p}{\lambda - \lambda_0}$ разложения функции $L^{-1} f$ в ряд Лорана коэффициентами будут собственный вектор φ_0 и векторы некоторой цепочки присоединенных к нему векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.

Покажем теперь, что главные части лорановских разложений в окрестности точки λ_0 функций $\lambda^\nu L^{-1} f$ и $(\lambda - \lambda_l)^{-k} L^{-1} f$ будут, соответственно, $\sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(\nu)}}{(\lambda - \lambda_0)^{p-s+1}}$ и $\sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k), l}}{(\lambda - \lambda_0)^{p-s+1}}$. В самом деле, рассуждая по индукции и используя (2), имеем, например

$$\begin{aligned} \text{гл. ч. } (\lambda - \lambda_l)^{-k} L^{-1} f &= \text{гл. ч. } \sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k-1), l}}{(\lambda - \lambda_l)(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} = \\ &= \sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k-1), l}}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} \left(\sum_{r=0}^{p-s} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_l - \lambda_0} \right)^r \right) = \sum_{s=0}^p \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} \times \\ &\times \left(- \sum_{r=0}^s \frac{\varphi_r^{(k-1), l}}{(\lambda_l - \lambda_0)^{s-r+1}} \right) = \sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k), l}}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}}. \end{aligned}$$

Тогда главная часть ряда Лорана функции $F(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 будет равна

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{s=0}^p \frac{(\varphi_s^{(\nu)}, g_\nu)}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \sum_{s=0}^p \frac{(\varphi_s^{(k), l}, g_{k,l})}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} = \sum_{s=0}^p \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} (\bar{\varphi}_s, \bar{g})_{\mathbf{H}} = 0.$$

$$\text{Вместе с функцией } F(\lambda) = \left(f, L^{-1}(\bar{\lambda}) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{\lambda}^\nu g_\nu + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{g_{k,l}}{(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_l)^k} \right\} \right)$$

будет иметь особенности лишь при $\lambda = \bar{\lambda}_l$ и на бесконечности функция

$$\Phi(\lambda) = \bar{F}(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda^\nu g_\nu + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{g_{k,l}}{(\lambda - \lambda_l)^k} \right\}, f \right)$$

при некотором $\bar{g} \in \bar{\mathbf{H}}$ и любом $f \in \mathbf{H}$.

Основной результат настоящей статьи составляет

Теорема 1. Пусть в операторном пучке

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{s=0}^n \lambda^s H^s A_s - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k A_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k} \quad (3)$$

операторы A_s ($s = 0, 1, \dots, n-1$), $A_{l,k}$ ($l = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, n_l - 1$) $\in S_\infty$, $A_n = 1$, $A_{l,n_l} = 1$, H и H_l — полные нормальные операторы $\in S_\infty$, n -я и n_l -я степени которых H^n и $H_l^{n_l}$ — самосопряженные операторы. Тогда система собственных и присоединенных векторов операторного пучка (3) $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полна, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H_l)}{\ln r} < \infty \quad (l = 1, \dots, N).$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется оценка резольвенты пучка, которую дает

Теорема 2. Пусть в операторном пучке

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{B_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k} \quad (4)$$

операторы B_l , $B_{l,k} \in S_\infty$. Предположим, что существует уходящая в бесконечность кривая M , обладающая тем свойством, что во всех достаточно удаленных от начала координат точках, лежащих на кривой, $\|L^{-1}(\lambda)\|$ равномерно ограничена. Пусть элементы g_l , $g_{l,k}$, $f \in H$ таковы, что функция

$$F(\lambda) = (L^{-1}(\lambda) f, g(\lambda)), \quad \text{где } g(\lambda) = \sum_{l=0}^{n-1} \bar{\lambda}^l g_l + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{g_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k},$$

имеет особенности лишь в точках λ_l и на бесконечности. Тогда при достаточно больших $r = |\lambda|$ имеет место оценка

$$\ln |F'(\lambda)| \leq (n-1) \ln r + \alpha \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)(2r)^l} t^{-1} \nu(t, B_l) dt.$$

Доказательство теоремы 2 основано на лемме 2, для формулировки которой введем следующее определение.

Ядром Пуассона для области D с границей C_D , являющейся спрямляемой кривой, мы будем называть функцию $K(z; \zeta)$ ($z \in D$; $\zeta \in C_D$) такую, что для любой гармонической функции $u(z)$, непрерывной вплоть до границы, справедливо равенство $u(z) = \int_{(C_D)} u(\zeta) K(z; \zeta) |d\zeta|$.

Отметим два известных свойства ядра: $K(z; \zeta) > 0$, $\int_{(C_D)} K(z; \zeta) |d\zeta| = 1$.

Лемма 2. Если $K_{R,a}(z; \zeta)$ — ядро Пуассона для кольца

$$D_{R,a} \{z: a < |z| < R\} \quad (R > 4a) \text{ и } |z| = |z_0| = \frac{R}{2}, \text{ то}$$

$$\max_{(\zeta \in C)} \frac{K_{R,a}(z; \zeta)}{K_{R,a}(z_0; \zeta)} \leq c_1,$$

где C — граница кольца $D_{R,a}$.

Обозначим через $\omega(z; E; D)$ гармоническую меру множества $E \subset C$ относительно области D в точке z . Тогда на основании принципа расширения области [7] $\omega(z; d\zeta \in C_R; D_{R,a}) > \omega(z; d\zeta \in C_R; D_{R, \frac{R}{3}})$, где C_R — окружность $|z| = R$ и, так как

$$\omega(z; d\zeta \in C_R; D_{R,a}) = K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) |d\zeta|, \text{ то } K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) > K_{R, \frac{R}{3}}(z; \zeta \in C_R).$$

Используя свойство инвариантности гармонической меры при конформном отображении, получим $K_{R, \frac{R}{3}}(z; \zeta \in C_R) = \frac{1}{R} K_{1, \frac{1}{3}}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right)$. Так

как $K_{1, \frac{1}{3}}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right)$ есть положительная непрерывная функция при $\frac{|z|}{R} = \frac{1}{2}$, то $K_{1, \frac{1}{3}}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right) > c_1 > 0$ и $K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) > \frac{c_1}{R}$.

Те же соображения позволяют получить оценку сверху при

$$\zeta \in C_R: K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) \leq K_{R,0}(z; \zeta \in C_R) = \frac{1}{R} K_{1,0}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right) \leq \frac{c_2}{R}$$

($K_{R,0}$ — ядро Пуассона для круга) и

$$\max_{(\zeta \in C_R)} \frac{K_{R,a}(z; \zeta)}{K_{R,a}(z_0; \zeta)} \leq \frac{c_2}{c_1}. \quad (5)$$

Перейдем к оценке ядра при $\zeta \in C_a$ (C_a — окружность $|z| = a$).

Пусть $|z_1| = \frac{3}{2}a$, тогда $K_{R,a}(z_1; \zeta \in C_a) > K_{2a,a}(z_1; \zeta \in C_a) = \frac{1}{a} K_{2,1}\left(\frac{z_1}{a}, \frac{\zeta}{a}\right) \geq \frac{c_3}{a}$ и $K_{R,a}(z_1; \zeta \in C_a) \leq K_{\infty,a}(z_1; \zeta \in C_a) = \frac{1}{a} K_{\infty,1}\left(\frac{z_1}{a}, \frac{\zeta}{a}\right) \leq \frac{c_4}{a}$ ($K_{\infty,1}$ — ядро Пуассона для внешности круга).

Рассмотрим гармоническую функцию

$$\varphi(z) = \frac{\ln \frac{R}{|z|}}{\ln \frac{2R}{3a}}.$$

Так как $K_{R,a}(z \in C_R; \zeta \in C_a) = 0$, то при $|z| = R$ и $|z| = \frac{3}{2}a$ будет выполняться неравенство

$$\frac{c_3}{a} \varphi(z) \leq K_{R,a}(z; \zeta \in C_a) \leq \frac{c_4}{a} \varphi(z). \quad (6)$$

Применяя принцип максимума, заключаем, что неравенство (6) справедливо и при $\frac{3}{2}a \leq |z| \leq R$. Если $|z| = \frac{R}{2}$, то

$$\frac{c_3}{a} \cdot \frac{\ln 2}{\ln \frac{2R}{3a}} \leq K_{R,a}(z; \zeta \in C_a) \leq \frac{c_4}{a} \cdot \frac{\ln 2}{\ln \frac{2R}{3a}}$$

$$\text{и} \quad \max_{(\zeta \in C_a)} \frac{\lambda_{R,a}(z; \zeta)}{K_{R,a}(z_0; \zeta)} \leq \frac{c_4}{c_3}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 3*. Если операторы $A_l \in S_+$, то

$$\nu \left(t, \sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \sum_{l=1}^n \nu(nt, A_l). \quad (8)$$

Пусть $l_l = \nu(nt, A_l) = \min_{(k)} \left\{ k : s_{k+1}(A_l) \leq \frac{1}{nt} \right\}$, тогда на основании неравенства Фан Цюя [8], [5] (стр. 49) получим

$$\sum_{l=1}^n s_{l_l+1} \left(\sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \sum_{l=1}^n s_{l_l+1}(A_l) \leq n \cdot \frac{1}{nt} = \frac{1}{t}.$$

Если $l = \nu \left(t, \sum_{l=1}^n A_l \right) = \min_{(k)} \left\{ k : s_{k+1} \left(\sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \frac{1}{t} \right\}$, то $l+1 \leq \sum_{l=1}^n l_l+1$,

ибо $l+1$ — наименьший номер, для которого $s_p \left(\sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \frac{1}{t}$.

Доказательство теоремы 2. Представим каждый из операторов B_l в виде суммы $B_l = B_l^{(m)} + E_l^{(m)}$, где $B_l^{(m)}$ — конечномерный оператор, s -числа которого совпадают с s -числами оператора B_l , большими $\|E_l^{(m)}\|$. Тогда операторный пучок принимает вид

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} - E(\lambda).$$

Если $\|E_l^{(m)}\| \leq \frac{1}{(n+2)R^l}$ (8), где $R > r = |\lambda|$, то для $r > r_1 = 2 \max_{(l)} |\lambda_l|$, $BN(n+2)+1$, где $B = \max_{(l,k)} \|B_{l,k}\|$, получим

$$\|E(\lambda)\| \leq \sum_{l=1}^n \frac{1}{n+2} \left(\frac{r}{R} \right)^l + B \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{|\lambda - \lambda_l|^k} < \frac{n}{n+2} + B \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{(|\lambda| - |\lambda_l|)^k} <$$

* Лемму 3 можно вывести из леммы 5.1 [9].

$$< \frac{n}{n+2} + B \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \left(\frac{2}{r} \right)^k < \frac{n}{n+2} + \frac{2BN}{r-2} < \frac{n+1}{n+2}$$

и тогда $\| (1 - E(\lambda))^{-1} \| < \sum_{l=0}^{\infty} \| E(\lambda)^l \| < n+2$.

Введем в рассмотрение две функции $D_0(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$:

$$D_0(\lambda) = \det \left(1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right),$$

$$D_1(\lambda) = (L^{-1}(\lambda) f, g(\lambda)) \cdot D_0(\lambda).$$

С помощью неравенства Вейля [10], [5] (стр. 56) устанавливается следующая оценка:

$$\begin{aligned} |D_0(\lambda)| &\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j \left(\sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right) \right) = \\ &= \exp \left\{ \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) d\nu \left(t, \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\nu \left(t, \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right)}{t^2 + t} dt \right\}. \end{aligned}$$

Так как $s_j(\lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1}) \leq |\lambda|^l \| (1 - E(\lambda))^{-1} \| \cdot s_j(B_l^{(m)})$, то на основании леммы 3 будем иметь

$$\begin{aligned} |D_0(\lambda)| &\leq \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^n \nu(n(n+2)r^l t, B_l^{(m)})}{t^2 + t} dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) d\nu(n(n+2)r^l t, B_l^{(m)}) \right\}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что в силу (8)

$$\nu(n(n+2)r^l t, B_l^{(m)}) = \begin{cases} \nu(n(n+2)r^l t, B_l) & \text{при } t \leq \frac{1}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^l, \\ \text{const} & \text{при } t > \frac{1}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^l, \end{cases}$$

то

$$|D_0(\lambda)| \leq \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \int_0^{\frac{1}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^l} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) d\nu(n(n+2)r^l t, B_l) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{(n+2)R^i} \ln \left(1 + \frac{r^i n(n+2)}{t} \right) dv(t, B_i) \right\} = \\
&= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\ln \left(1 + n \left(\frac{r}{R} \right)^i \right) v((n+2)R^i, B_i) + \right. \right. \\
&+ \left. \int_0^{(n+2)R^i} \frac{r^i n(n+2) v(t, B_i)}{t(t + r^i n(n+2))} dt \right\} \leq \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln(1+n)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \int_0^{(n+3)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \int_0^{(n+2)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt \right] \right\} \leq \exp \frac{\ln(1+n)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{(n+3)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt \right\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Так как в точке $\lambda_0 \in M(R > |\lambda_0| > r_1)$ оператор $L(\lambda_0)$ обратим и $\|L^{-1}(\lambda_0)\| \leq d$ (d не зависит от λ_0), то можно оценить $|D_0(\lambda_0)|$ снизу

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D_0(\lambda_0)} &= \det \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} (1 - E(\lambda_0))^{-1} \right)^{-1} = \det \left((1 - E(\lambda_0)) \left(1 - E(\lambda_0) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} \right) \right)^{-1} = \det \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} L^{-1}(\lambda_0) \right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|D_0(\lambda_0)|} &\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} L^{-1}(\lambda_0) \right) \right) \leq \\
&\leq \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dv(nt r_0^i d_1 B_i^{(m)}) \right\} \leq \\
&\leq \exp \beta \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{(n+3)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt \right\}, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\beta \geq \max \left(1, \frac{\ln \left(1 + \frac{nd}{n+2} \right)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \right).$$

Так как $L^{-1}(\lambda) = (1 - E(\lambda))^{-1} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda^i B_i^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right)$, то

$$\|J_{\lambda}(\lambda)\| \leq \|f\| \cdot \|g(\lambda)\| \cdot \|D_0(\lambda)\| \cdot \|(1 - E(\lambda))^{-1}\| \cdot \left\| \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda^i B_i^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right)^{-1} \right\|. \quad (11)$$

Оператор $\sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \in S_1$ и поэтому, на основании теоремы 5.1, из [5], с учетом (9), имеем

$$\left\| \left(1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j \left(\sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \right) \right)}{\left| \det \left(1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \right) \right|} \leq \\ \leq \frac{\exp \left\{ \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)R^l} t^{-1} \cdot \gamma(t, B_l) dt \right\}}{|D_0(\lambda)|}.$$

Так как $|g(\lambda)| \leq a_1 r^{n-1}$ ($r > r_1$), то можно усилить (11)

$$|D_1(\lambda)| \leq a_2 r^{n-1} \exp \left\{ \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)R^l} t^{-1} \cdot \gamma(t, B_l) dt \right\}. \quad (12)$$

Выберем $a > r_1$, тогда в кольце $D_{R,a} \{ \lambda : a < |\lambda| < R \}$ ($R > 4a$) функция $F(\lambda)$ будет аналитической, а для субгармонической функции $\ln |F(\lambda)|$ будет выполнено неравенство

$$\ln |F(\lambda)| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln \left| \frac{D_1(\zeta)}{D_0(\zeta)} \right| |d\zeta| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ \left| \frac{D_1(\zeta)}{D_0(\zeta)} \right| |d\zeta| \leq \\ \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ |D_1(\zeta)| |d\zeta| + \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta|. \quad (13)$$

Так как $\ln |D_0(\lambda)|$ также является субгармонической в кольце $D_{R,a}$ функцией, то

$$\ln |D_0(\lambda_0)| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln |D_0(\zeta)| |d\zeta| = \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) (\ln^+ |D_0(\zeta)| - \\ - \ln^- |D_0(\zeta)|) |d\zeta|$$

$$\text{и} \\ \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta| \leq \ln \frac{1}{|D_0(\lambda_0)|} + \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^+ |D_0(\zeta)| |d\zeta|. \quad (14)$$

Тогда

$$\ln |F(\lambda)| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ |D_1(\zeta)| |d\zeta| + \\ + \int_{(C)} \frac{K_{R,a}(\lambda; \zeta)}{K_{R,a}(\lambda_0; \zeta)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta| \leq$$

$$\leq \int_{(\zeta)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ |D_1(\zeta)| |d\zeta| + \max_{(\zeta \in C)} \frac{K_{R,a}(\lambda; \zeta)}{K_{R,a}(\lambda_0; \zeta)} \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta|, \quad (15)$$

где λ_0 выбирается на кривой M так, чтобы $|\lambda| = |\lambda_0|$. И в точке $\lambda \left(|\lambda| = \frac{R}{2} \right)$, на основании леммы 2 и оценок (9), (10), (12), будем иметь

$$\text{из (15), с учетом } \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) |d\zeta| = 1$$

$$\begin{aligned} \ln |F(\lambda)| &\leq \ln^+ a_s + (n-1) \ln r + \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt + \\ &+ c \left(\beta \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt + \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt \right) \leq \\ &< (n-1) \ln r + \alpha \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt. \end{aligned}$$

В процессе доказательства теоремы 1 нам потребуется

Лемма 4. Операторный пучок (3) сохраняет свой вид при преобразовании $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_p}$ в том смысле, что

$$L(\lambda(\mu)) = 1 - \sum_{s=0}^{n_p} \mu^s H_p^s A_{p,s} - \sum_{l=1}^n \mu^{-l} H^l B^l - \sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k B_{l,k}}{\left(\mu - \frac{1}{\lambda_l - \lambda_p} \right)^k},$$

где операторы

$$A_{p,0}, B_l (i=1, \dots, n-1), B_{l,k} (l=1, \dots, N; l \neq p; k=1, \dots, n_l-1) \in S_n, \\ B_n = 1, B_{l,n_l} = 1.$$

Действительно

$$L(\lambda(\mu)) = 1 - \sum_{s=0}^n \left(\lambda_p + \frac{1}{\mu} \right)^s H^s A_s - \sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k A_{l,k}}{\left(\frac{1}{\mu} + \lambda_p - \lambda_l \right)^k} - \sum_{s=0}^{n_p} \mu^s H_p^s A_{p,s},$$

так как

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\mu} + \lambda_p - \lambda_l \right)^k} = \frac{(-1)^k}{(\lambda_l - \lambda_p)^k} \cdot \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{1}{\left(\mu - \frac{1}{\lambda_l - \lambda_p} \right)^p (\lambda_l - \lambda_p)^{k-p}},$$

то

$$\begin{aligned} L(\lambda(\mu)) &= 1 - \sum_{s=0}^n \lambda_p^s H^s A_s - \sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} (-1)^k \frac{H_l^k A_{l,k}}{(\lambda_l - \lambda_p)^k} - \sum_{s=1}^{n_p} \mu^s H_p^s A_{p,s} - \\ &- \frac{1}{\mu} H \sum_{l=1}^{n-1} i l_p^{l-1} H^{l-1} A_l - \dots - \frac{1}{\mu^{n-1}} H^{n-1} (A_{n-1} + n \lambda_p H) - \frac{1}{\mu^n} H^n - \end{aligned}$$

$$-\sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} \left(\frac{H_l^k}{1 - \frac{1}{\lambda_l - \lambda_p}} \right)^k \cdot \left\{ \sum_{p=k}^{n_l} (-1)^p H_l^{p-k} A_{l,p} \frac{1}{(\lambda_l - \lambda_p)^{k+p}} \right\}.$$

После соответствующих переобозначений получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, можно считать оператор $1 - A_0$ обратимым. Действительно, сдвиг $\lambda \rightarrow \lambda + b$ (при этом собственные и присоединенные векторы не изменяются) преобразуем пучок к виду $L(\lambda + b) = 1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s -$

$$-\sum_{s=1}^{n-1} \lambda^s H^s A'_s - \lambda^n H^n - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k A_{l,k}}{(\lambda - b - \lambda_l)^k}, \text{ где операторы } A'_s \in S_n (s=1, \dots, n-1), \text{ а оператор } 1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s \text{ при}$$

$$b \in G_{\theta, c} \left\{ \lambda: |\lambda| > c, \frac{\pi p}{n} + \theta \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi(p+1)}{n} - \theta; 0 < \theta < \frac{\pi}{2n} \right\} \\ (p = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

где c достаточно велико, будет обратим в силу леммы М. В. Келдыша

$$[5] \text{ (стр. 329): } \left(1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s \right)^{-1} = \left(1 - \sum_{s=0}^{n-1} b^s (1 - b^n H^n)^{-1} H^s A_s \right)^{-1} \times \\ \times (1 - b^n H^n)^{-1} \text{ и } \left\| \left(1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s \right)^{-1} \right\| \leq c_1 \text{ всюду в } G_{\theta, c}.$$

Если теорема неверна, то найдутся $n + \sum_{l=1}^N n_l$ векторов $g_0, g_1, \dots, g_{n+N}$ таких, что при любом $f \in \mathbb{H}$ функция $F(\lambda)$ может иметь особые точки лишь при $\lambda = \lambda_l$ и на бесконечности. Изучим поведение $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Выберем $a > 2 \max_{(l)} (\max_{(l,k)} |\lambda_l|, BN(n+2)+1)$, где $B = \max_{(l,k)} \|H_l^k A_{l,k}\| \times (1 - A_0)^{-1}$ и таким образом, чтобы в области $G_{\theta, a} \|L^{-1}(\lambda)\|$ была равномерно ограничена, последнее возможно, в силу леммы М. В. Келдыша. Тогда в кольце $D_{R,a} (\lambda: a < |\lambda| < R) (R > 4a)$ функция $F(\lambda)$ будет аналитической и, на основании теоремы 2 (в качестве кривой M можно выбрать, например, биссектрису угла $\frac{\pi p}{n} + \theta \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi(p+1)}{n} - \theta$), получим

$$\ln |F(\lambda)| \leq (n-1) \ln r + \alpha \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)(2r)^l} t^{-1} \cdot v(t, H^l A_l (1 - A_0)^{-1}) dt \leq$$

$$\leq (n-1) \ln r + \sigma \ln (n+3) (2r)^n \sum_{i=1}^n \nu((n+3)(2r)^i \|A_i(1-A_0)^{-1}\|, H^i). \quad (16)$$

Если $k = \max_{(i)} \{(n+3)2^i \|A_i(1-A_0)^{-1}\|\}^{\frac{1}{i}}$, то из (16) следует:

$$\ln |F(\lambda)| \leq \alpha' \ln r + \nu(kr, H). \quad (17)$$

Пусть $M(r) = \max_{|\lambda|=r} |F(\lambda)|$, тогда в силу (17) и условия теоремы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(kr, H)}{\ln r} < \infty. \quad (18)$$

Выберем δ так, чтобы $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \frac{\pi}{2\delta}$ и применим в углах

$$\left| \arg \left(\lambda - a e^{i \frac{\pi p}{n}} \right) - \frac{\pi p}{n} \right| < \delta \quad \text{принцип Фрагмена-Линделефа [11] к функции}$$

$$\frac{F(\lambda)}{\lambda^{n-1}}.$$

Так как в области $G_{0, \alpha} |F(\lambda)| \leq d_1 r^{n-1}$ на основании леммы

М. В. Келдыша, то на сторонах углов $\left| \arg \left(\lambda - a e^{i \frac{\pi p}{n}} \right) - \frac{\pi p}{n} \right| < \delta$ ($\theta < \delta$)

$$\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda^{n-1}} \right| < d_2 \quad \text{и поэтому в виду (18) внутри углов } \left| \arg \left(\lambda - a e^{i \frac{\pi p}{n}} \right) - \frac{\pi p}{n} \right| < \delta$$

справедливо неравенство: $\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda^{n-1}} \right| \leq d_2$. Следовательно, при

$$r > \alpha \quad |F(\lambda)| \leq d' r^{n-1}. \quad (19)$$

Так как при преобразовании $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_l}$, на основании леммы 4, вид

пучка сохраняется, то исследование поведения $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_l$ сводится

к исследованию поведения $F(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Следовательно, $|F(\lambda)| \leq$

$d_l \frac{1}{|\lambda - \lambda_l|^{n_l-1}}$ при $|\lambda - \lambda_l| < a_l$ и поэтому

$$F(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} b_s \lambda^s + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{b_{k,l}}{(\lambda - \bar{\lambda}_l)^k}. \quad (20)$$

Функция $\psi(\lambda) = L^{*-1}(\lambda) g(\bar{\lambda})$ может иметь особенности лишь в точках $\bar{\lambda}_l$ и на бесконечности, а, так как при любом $f \in \mathbf{H}$ ($\psi(\lambda), f$), в силу (20), имеет лишь полюсы конечного порядка, то

$$\psi(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} \psi_s \lambda^s + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{\psi_{k,l}}{(\lambda - \bar{\lambda}_l)^k} \quad (\psi_s, \psi_{k,l} \in \mathbf{H}).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях λ и $\lambda - \bar{\lambda}_l$ в выражении $L^*(\lambda) \psi(\lambda) = g(\lambda)$. Коэффициент при наибольшей степени λ^{2n-1}

слева равен $H^n \psi_{n-1}$, а справа -0 , отсюда из полноты оператора H_n следует, что $\psi_{n-1} = 0$; коэффициент при λ^{2n-2} слева равен $A_{n-1}^* (H^*)^{n-1} \psi_{n-1} + H^n \psi_{n-2}$, а справа -0 , но, так как $\psi_{n-1} = 0$, то $\psi_{n-2} = 0$ и т. д.; аналогично проводим рассуждения и для коэффициентов при степенях $\lambda - \bar{\lambda}_l$. Следовательно, $g(\lambda) \equiv 0$, что возможно лишь при $g_0 = g_1 = \dots = g_{N,N} = 0$. Теорема доказана.

Утверждение теоремы остается в силе и в том случае, когда $A_n = e^{i\theta_n} 1$, $A_{l,n_l} = e^{i\theta_{l,n_l}} 1$, а также, когда вместо пучка (3) рассматривается пучок

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{s=0}^n \lambda^s A_s H^s - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{A_{l,k} H_l^k}{(\lambda - \lambda_l)^k}. \quad (3')$$

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Мацаеву за постоянное внимание и руководство.

Артиллерийская радиотехническая академия
им. А. А. Говорова

Поступило 14.XI.1967

Ե. Զ. ՄՈՉՈՒԼՍԿԻ

ՔԵՆՈՐԵՄ ԲԱՑԻՈՆԱԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՓԵՋԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՑՎԱՄ
ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԼՐԻՎՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում ապացուցվում է թեորեմ

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i H^i - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{A_{l,k} H_l^k}{(\lambda - \lambda_l)^k}$$

օպերատորային փնջի սեփական և միակցված ֆունկցիաների լրիվույթյան վերաբերյալ: Այստեղ A_i ($i=0,1,\dots,n-1$), $A_{l,k}$ ($k=1,\dots,n_l-1$; $l=1,\dots,N$) օպերատորները լրիվին անընդհատ են; $A_n=1$, $A_{l,n_l}=1$, իսկ H և H_l օպերատորները լրիվ նորմալ լրիվին անընդհատ օպերատորներ են, որոնց n և n_l աստիճանները ինքնահամալուծ են և

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln v(r, H)}{\ln r} < \infty, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln v(r, H_l)}{\ln r} < \infty \quad (l=1,\dots,N):$$

Այս թեորեմը Մ. Վ. Կելդիշի հայտնի թեորեմի ընդհանրացումն է:

* Примечание при корректуре. Утверждение теоремы остается верным и в том случае, когда в пучках (3) и (3') спектр операторов H и H_l ($l=1,\dots,N$) сосредоточен на системе лучей, исходящих из точки $\lambda=0$ (для каждого оператора своя система лучей).

E. Z. MOGULSKY

A COMPLETENESS THEOREM FOR THE EIGEN-AND ADJOINED FUNCTIONS OF THE RATIONAL OPERATOR BUNCH

S u m m a r y

A theorem is proved about $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -fold completeness for the system of eigen-and adjoined functions of the operator bunch

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{l=0}^n \lambda^l A_l H^l - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{A_{l,k} H_l^k}{(\lambda - \lambda_l)^k}$$

provided that $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H_l)}{\ln r} < \infty$ ($l=1, 2, \dots, N$).

Here operators A_l ($l=0, \dots, n-1$), $A_{l,k}$ ($k=1, \dots, n_l-1$; $l=1, \dots, N$) are completely continuous, $A_n=1$, $A_{l,n_l}=1$ and operator H , H_l are normal completely continuous operators, n th and n_l th powers of which are self-conjugate operators.

This theorem is a generalization of the well-known theorem by M. V. Keldysh.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, 1, 1951.
2. В. И. Мацаев. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов, ДАН СССР, 155, 2, 1964.
3. В. И. Мацаев. Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов, ДАН СССР, 154, 5, 1964.
4. Дж. Э. Аллахвердиев. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, являющихся рациональными функциями параметра, ДАН СССР, 159, 5, 1964.
5. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Изд. "Наука", 1965.
6. А. С. Маркус. О голоморфных оператор-функциях, ДАН СССР, 119, 6, 1958.
7. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941, стр. 47.
8. Ky Fan. Maximum properties and inequalities for eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 37, 1951.
9. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, Изд. "Наука", 1967, стр. 142.
10. H. Weyl. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 35, 1949.
11. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2, Изд. "Наука", 1968, стр. 206.

А. Г. РАММ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ
ПРОДОЛЖЕНИИ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ЯДРА ОПЕРАТОРА
ШРЕДИНГЕРА ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ§ 1. Аналитическое продолжение резольвентного ядра
в случае области с границей

Пусть L — полуограниченный снизу самосопряженный оператор, $R(-p^2) = (L + p^2)^{-1}$ — его резольвента, $p = \sigma + i\tau$ — комплексное переменное.

Моделируя часто встречающиеся при исследовании спектра оператора Шредингера случаи, будем считать, что оператор L имеет абсолютно непрерывный положительный спектр и дискретный отрицательный спектр конечной общей кратности. Резольвента, рассматриваемая как функция переменной p , аналитична при $\sigma > 0$, имеет разрез по мнимой оси и конечное число полюсов в точках $\sigma_n > 0$, соответствующих отрицательному дискретному спектру. Обычно используемый спектральный параметр связан с параметром p формулами $\lambda = -p^2$, $k = \sqrt{\lambda} = ip$. Нам удобно пользоваться параметром p , совпадающим с параметром преобразования Лапласа, имея в виду приложение к нестационарным задачам. В разных задачах физики и математики возникает вопрос об аналитическом продолжении аналитической при $\sigma > 0$ функции $R(-p^2)$ через разрез, соответствующий непрерывному спектру, на второй лист римановой поверхности. В работе [1] было исследовано ядро резольвенты оператора Шредингера при $\sigma \geq 0$ в случае $D = E_3$ и в случае внешности ограниченной области. В работах [2]—[3] аналогичные результаты были получены для некоторых областей с бесконечной границей. Излагаемые ниже результаты опубликованы без доказательства в заметках [4]—[6]. В настоящей работе будет исследовано аналитическое продолжение ядра резольвенты оператора Шредингера в полуплоскость $\sigma < 0$. Будет доказано, что ядро резольвенты оператора Шредингера задачи

$$(L + p^2) H(x, y, -p^2) = (-\Delta + q(x) + p^2) H(x, y, -p^2) = \delta(x - y) \text{ в } D, \quad (1.1)$$

$$H(x, y, -p^2)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (1.2)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial H}{\partial n} + p H \right|^2 ds = 0, \quad (1.3)$$

где $D \subset E_3$ — внешность ограниченной области с ляпуновской границей Γ , а потенциал $q(x)$ является вещественной финитной функцией, один раз дифференцируемой, допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного p . Это аналитическое продолжение является мероморфной функцией при $\sigma < 0$; при $\sigma \geq 0$ ядро резольвенты имеет полюса лишь в точках $\sigma_n > 0$, соответствующих отрицательному дискретному спектру оператора L . В отдельных случаях удастся показать, что некоторая полоса $-\sigma_0 < \sigma < 0$, $\sigma_0 > 0$ свободна от полюсов ядра резольвенты. В случае $D = E_3$ будет доказано, что полюса резольвенты в полуплоскости $\sigma < 0$ лежат левее некоторой логарифмики $\sigma = -A \ln|\tau| + B$, где $A > 0$ и B — некоторые постоянные. Если

$$|q(x)| = O(e^{-a|x|}), \quad a > 0 \quad (1.4)$$

для любого $a > 0$, то ядро допускает аналитическое продолжение на всю плоскость как мероморфная функция. Если оценка (4) верна для некоторого фиксированного $a > 0$, то аналитическое продолжение возможно в полуплоскость $\sigma > -\frac{a}{2}$. В плоском случае характер результатов сохраняется, но аналитическое продолжение осуществляется на плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Точка $p = 0$ является точкой ветвления логарифмического типа для ядра $H(x, y, -p^2)$.

Ниже в этом параграфе предполагается, что $D \subset E_3$ — внешность ограниченной области с ляпуновской границей. Нам понадобится следующая

Теорема 1.0. ([7], [13]). Если $A(p)$ — аналитическая операторнозначная функция, определенная в связной области Δ плоскости комплексного переменного p , и если $A(p)$ — вполне непрерывный оператор при всех $p \in \Delta$, то либо оператор $B - A(p)$ не имеет ограниченного обратного ни в одной точке области Δ , либо этот обратный существует всюду в Δ , кроме, быть может, счетного числа изолированных точек. Здесь B — ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный оператор*.

Теорема 1.1. Пусть $q(x)$ — финитная дифференцируемая функция, $D \subset E_3$ — внешность ограниченной области с ляпуновской границей, $f(y)$ — финитная дважды дифференцируемая функция. Тогда функция

$$u(x, p) = \int_D H(x, y, -p^2) f(y) dy \quad (1.5)$$

допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного p как мероморфная функция. При $\sigma \geq 0$ она имеет

* Упомянутые изолированные точки являются полюсами оператора $(B - A(p))^{-1}$ (см. приложение).

конечное число полюсов, расположенных в точках $\sigma_n = \sqrt{|\lambda_n|}$, где $\lambda_n = -|\lambda_n|$ — точки отрицательного дискретного спектра оператора задачи (1) — (3).

Доказательство. С помощью формулы Грина при $\sigma \geq 0$ получаем

$$u(x, p) = \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy - \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y) u(y, p) dy + \\ + \int_\Gamma \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (1.6)$$

Выберем число $k > 0$ так, чтобы внутренняя задача Неймана для оператора Лапласа для области $\Omega = E_3/D$ не имела собственного числа k^2 . Перепишем уравнение (6) в виде

$$Bu = u - \int_\Gamma \frac{e^{-k|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{\partial u}{\partial n} ds = g(p) - A(p)u, \quad (1.7)$$

где

$$A(p)u = \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y) u(y) dy - \\ - \int_\Gamma \frac{e^{-p|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{e^{-k|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{\partial u}{\partial n} ds = A_1(p) + A_2(p). \quad (1.8)$$

Пусть Δ — произвольная замкнутая ограниченная область на плоскости комплексного переменного p , содержащая внутри себя отрезок оси $\sigma = 0$. Обозначим

$$\alpha = \min_{p \in \Delta} \operatorname{Re} p. \quad (1.9)$$

Рассмотрим уравнение (7) в пространстве $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ с нормой

$$\|u\| = \max_{x \in D} e^{-\alpha|x|} \left[|u| + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right], \quad (1.10)$$

где поле направлений n обращается на поверхности Γ в поле нормалей к Γ . Проверим, что оператор B имеет ограниченный обратный в введенном пространстве. Пусть

$$Bu = h, \quad (1.11)$$

где $h \in C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$. Дифференцируя обе части этого уравнения по направлению нормали к поверхности Γ и устремляя после этой операции точку x к точке $s \in \Gamma$, получаем

$$\frac{\mu}{2} - Q\mu = \frac{\partial h}{\partial n}, \quad (1.12)$$

где

$$\mu(s) = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad Q\mu = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{-k|s-s'|}}{4\pi|s-s'|} \mu(s') ds', \quad (1.13)$$

а n — направление внешней к области D нормали.

Уравнение (12) является фредгольмовым в пространстве $C(\Gamma)$. Оно однозначно разрешимо, если однородное уравнение не имеет ненулевого решения. Пусть μ — ненулевое решение однородного уравнения (12). Тогда функция $u(x) = \int_{\Gamma} \frac{e^{-k|x-s|} \mu(s)}{4\pi(x-s)} ds$ является решением

однородной внутренней задачи Неймана в области Ω и, следовательно, в силу выбора числа k , есть тождественный нуль. Поэтому $u|_{\Gamma} = 0$. Функция $u(x)$ является, следовательно, решением задачи

$$(-\Delta + k^2)u = 0 \text{ в } D, u|_{\Gamma} = 0, k^2 > 0, u|_{\infty} = 0. \quad (1.14)$$

Поэтому $u \equiv 0$ в D . Следовательно, $\mu \equiv 0$, и уравнение (12) однозначно разрешимо в $C(\Gamma)$. Решение уравнения (11) имеет вид

$$u = h(x) + \int_{\Gamma} \frac{e^{-k|x-s|}}{4\pi|x-s|} \mu(s) ds$$

и, очевидно, принадлежит $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$. Таким образом, оператор B имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$. Так как $f(x)$ финитна, то свободный член в уравнении (7) есть аналитическая в $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ вектор-функция. Чтобы применить теорему 1.0 достаточно проверить, что оператор-функция $A(p)$ является аналитической и вполне непрерывной при $p \in \Delta$. Аналитичность вытекает из аналитичности ядра, финитности функции $q(x)$ и конечности границы Γ . Проверка полной непрерывности оператора $A(p)$ в пространстве $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ не составляет труда. Проверим, например, что оператор $A_2(p)$ вполне непрерывен*. Ввиду гладкости ядра оператор $A_2(p)$ повышает гладкость. Следовательно, ограниченное в $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ множество он переводит в компактное в любой конечной области множество. Полная непрерывность оператора $A_2(p)$ будет установлена, если мы проверим, что

$$\max_{|x| > N} e^{-\alpha|x|} \left[|A_2(p)u| + \left| \frac{\partial}{\partial n} A_2(p)u \right| \right] \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Имеем, например

$$\begin{aligned} \max_{|x| > N} e^{-\alpha|x|} \left| \frac{\partial}{\partial n} A_2(p)u \right| &\leq \max_{|x| > N} C e^{-\alpha|x|} \int_{\Gamma} \left| \frac{e^{-p|x-s|-k|x-s|}}{|x-s|} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| ds \leq \\ &\leq C \max_{|x| > N} \int_{\Gamma} \frac{e^{(-\alpha + |\operatorname{Re} p| - k)|x|}}{N} ds \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Слагаемое $e^{-\alpha|x|} |A_2(p)u|$ рассматривается вполне аналогично. Таким образом, полная непрерывность оператора $A(p)$ установлена. Проверим, наконец, что найдется $p \in \Delta$ такое, что однородное уравнение (7) не имеет ненулевого решения. Если это будет показано, то из теоре-

* Аналогично рассматривается оператор $A_1(p)$.

мы 1.0 и известных спектральных свойств оператора Шредингера (1) — (3) будет следовать утверждение теоремы 1. Пусть $u(x)$ — решение однородной задачи (7), $p = i\tau$, $\tau > 0$, причем τ^2 не есть собственное число оператора $-\Delta$ задачи Неймана для области Ω . Поскольку Δ содержит отрезок оси $\sigma = 0$ такое значение p найдется. Формулу (6) можно рассматривать при $f(x) = 0$ как представление функции $u(x)$. Функция $u(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (1), в котором надо положить $p = i\tau$, и условию (3). Обозначим через $\eta(s)$ граничное значение $u(x)/_{x \in \Gamma}$, и покажем, что $\eta(s) \equiv 0$. Написав для $u(x)$ представление по формуле Грина и сравнив его с формулой (6), получим

$$\int_{\Gamma} \eta(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{i\tau|x-s|}}{4\pi|x-s|} ds = 0, \quad x \in D.$$

Переходя на поверхность и используя известные формулы теории потенциала, получим

$$\frac{\eta(s)}{2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{s'}} \frac{e^{i\tau|s-s'|}}{4\pi|s-s'|} \eta(s') ds' = 0. \quad (1.15)$$

Так как τ^2 не есть собственное число внутренней задачи Неймана, то $\eta(s) \equiv 0$. Следовательно, $u(x)$ есть решение однородной задачи (1) — (3), в которой надо положить $p^2 = -\tau^2$, $\tau^2 > 0$. Поэтому $u \equiv 0$. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1.1. Утверждение и доказательство теоремы 1 сохраняют силу, если оценка (4) выполнена при любом $a > 0$.

Замечание 1.2. Если оценка (4) выполнена для некоторого фиксированного $a > 0$, то аналитическое продолжение функции $u(x, p)$ возможно лишь в полуплоскость $\sigma > -\frac{a}{2}$, поскольку интегральный оператор в уравнении (6) при сделанном о потенциале предположении является вполне непрерывным и аналитически зависящим от p оператором лишь при $\sigma > -\frac{a^*}{2}$. В самом деле, подберем

наибольшее $b > 0$ такое, чтобы этот оператор был хотя бы ограничен в $C(D, e^{-b|x|})$. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in D} e^{-b|x|} \left| \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y) v(y) dy \right| &\leq C \max_{x \in D} e^{-b|x|} \int_D \frac{e^{-\sigma|x-y| - a|y| + b|y|}}{|x-y|} dy \leq \\ &\leq C \max_{x \in D} \int_D \frac{e^{-\sigma|x-y| + (b-a)|y| - b|x|}}{|x-y|} dy \leq C \max_{x \in D} \times \\ &\times \int_D \frac{e^{-(\sigma-b)|x| + (b-a-\sigma)|y|}}{|x-y|} dy. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В [15] показано, что степенное убывание потенциала обеспечивает дифференцируемость функции $u(x, p)$ по p при $\sigma = 0$. В том случае аналитическое продолжение в область $\sigma < 0$, вообще говоря, невозможно. Исключения составляют потенциалы, аналитические по x , например, Кулоновский потенциал.

Чтобы правая часть неравенства (16) была ограничена необходимо, чтобы $-\sigma \leq b$, $-\sigma + b \leq a$, следовательно, если $b \leq \frac{a}{2}$, $-\sigma < \frac{b}{2}$, то оператор в уравнении (6) ограничен в $C(D, e^{-\frac{a}{2}|x|})$. Легко проверить, что при $b = \frac{a}{2}$ и $-\sigma < \frac{a}{2}$ этот оператор вполне непрерывен в $C(D, e^{-\frac{a}{2}|x|})$ и аналитически зависит от p при $\sigma > -\frac{a}{2}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным при доказательстве теоремы 1.

Во многих задачах интересно знать, существует ли полоса $-\sigma_0 < \sigma < 0$, $\sigma_0 > 0$, свободная от полюсов функции $u(x, p)$. Рассмотрим, например, нестационарную задачу:

$$U_{tt} + LU = f(x) e^{i\omega t} \text{ в } D \times [0, \infty), \quad (1.17)$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (1.18)$$

и будем считать, что оператор L не имеет дискретного спектра. Достаточно, например, считать, что $q(x) \geq 0$. Преобразуя задачу (17) — (18) по Лапласу и применяя формулу обращения, получим

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{pt} u(x, p)}{p - i\omega} dp, \quad \sigma > 0, \quad (1.19)$$

где $u(x, p)$ определено формулой (5). Пусть выполнена оценка

$$|u(x, p)| < \frac{C}{1 + |p|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \text{ при } |p| \rightarrow \infty, \quad \sigma > -\sigma_0, \quad \sigma_0 > 0 \quad (*)$$

и предположения теоремы 1. Тогда, если в полосе $-\sigma_0 < \sigma < 0$, $\sigma_0 > 0$ нет полюсов функции $u(x, p)$, можно передвинуть контур интегрирования в формуле (19) влево. При этом надо добавлять вычет в полюсе $p = i\omega$. В результате получим

$$U(x, t) = e^{i\omega t} u(x, i\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_1 - i\infty}^{-\sigma_1 + i\infty} \frac{u(x, p)}{p - i\omega} e^{pt} dp, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_0. \quad (1.20)$$

Отсюда, в силу оценки (*), вытекает, что при $t \rightarrow \infty$

$$U(x, t) = e^{i\omega t} u(x, i\omega) + O(e^{-\sigma_1 t}), \quad \sigma_1 > 0. \quad (1.21)$$

Покажем, что, если оценка (*) выполнена при $\sigma > -\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ и точка $p = 0$ не является полюсом функции $u(x, p)$, то эта функция не имеет полюсов в некоторой полосе $-\sigma_1 < \sigma < 0$, $\sigma_1 > 0$. Достаточно заметить, что, в силу этой оценки, при $|\tau| \geq N$ и достаточно большом N $u(x, p)$ ограничена в полосе $-\sigma_0 < \sigma < 0$. Так как по теореме 1 функция $u(x, p)$ мероморфна, то при $|\tau| > N_1 - \sigma_0 < \sigma < 0$ она не имеет полюсов. Во всех точках $\sigma = 0$, $|\tau| < N$ функция $u(x, p)$ аналитична, следовательно, вокруг каждой из них существует некоторый круг, в котором $u(x, p)$ аналитична. По лемме Гейне-Бореля существует конечная система та-

ких кругов, покрывающая отрезок $\sigma = 0$, $|\tau| < N$. Повтому существует полоса $|\tau| < N$, $-\rho < \sigma < 0$, в которой функция $u(x, p)$ аналитична. В качестве τ_1 можно взять $\min(\tau_0, \rho)$.

Мы не будем здесь касаться трудного вопроса о том, каким условиям должны удовлетворять потенциал и область для того, чтобы оценка (*) была выполнена в некоторой полосе $-\tau_0 < \sigma < 0^*$. В следующем параграфе этот вопрос будет подробно разобран в случае $D = E_3$.

§ 2. Аналитическое продолжение резольвентного ядра в случае всего пространства. Распределение полюсов резольвенты на втором листе римановой поверхности

В этом параграфе предполагается, что $D = E_3$. Решение задачи (1.1) — (1.3) для случая $D = E_3$ обозначим $G(x, y, -p^2)^*$. В силу теоремы 1.1 в условиях этой теоремы функция $G(x, y, -p^2)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость p как мероморфная функция. Полуплоскость $\sigma < 0$ соответствует второму листу римановой поверхности $\sqrt{-\lambda}$. Основная задача состоит в нахождении области в полуплоскости $\sigma < 0$, свободной от полюсов функции $v(x, p)$. Нам будет удобно использовать параметр $k = ip$, $k = k_1 + ik_2$. Исходным является уравнение

$$v(x, k) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{-4\pi|x-y|} q(y) v(y, k) dy + g(x, k), \quad (2.1)$$

где

$$g(x, k) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy. \quad (2.2)$$

Относительно $f(y)$ и $q(y)$ сохранены предположения теоремы 1.1. Интегрирование без обозначения области интегрирования ведется по всему пространству E_3 . Удобно рассматривать один раз проинтегрированное уравнение (1)

$$[I - T(k)] v = \psi, \quad (2.3)$$

где

$$T(k)v = \int T(x, y, k) q(y) v(y) dy, \quad (2.4)$$

$$T(x, y, k) = \int \frac{e^{ik[|x-z| + |z-y|]}}{16\pi^2 |x-z| \cdot |z-y|} q(z) dz, \quad (2.5)$$

$$\psi(x, k) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{-4\pi|x-y|} q(y) g(y, k) dy + g(x, k). \quad (2.6)$$

Для того чтобы указать область, свободную от полюсов функции $v(x, k)$, достаточно указать область, в которой

$$\|T(k)\| \leq \beta < 1. \quad (2.7)$$

В самом деле, в силу финитности функций $f(y)$ и $q(y)$, функции $\psi(x, k)$ и $T(x, y, k)$ являются целыми функциями k . При выполнении условия (7) уравнение (3) однозначно разрешимо и, в силу теоремы 1.0, его

* См. недавно вышедшую книгу [16].

решение аналитично по k . Займемся выяснением того, в какой области имеет место неравенство (7). Введем, как это сделано в работе [8], вытянутые сфероидальные координаты [9]:

$$\begin{aligned} z_1 &= l s t + a, \quad z_2 = l \sqrt{(s^2 - 1)(1 - t^2)} \cos \varphi + b, \\ z_3 &= l \sqrt{(s^2 - 1)(1 - t^2)} \sin \varphi + c, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \quad z = (z_1, z_2, z_3). \quad (2.9)$$

Якобиан этой замены $J = l^3 (s^2 - t^2)$. Пределы изменения новых переменных

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 1 \leq s < \infty, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (2.10)$$

Имеют место формулы

$$\begin{aligned} |x - z| + |z - y| &= 2ls, \quad |x - z| - |z - y| = 2lt, \\ 2l &= |x - y|; \quad |x - z| \cdot |z - y| = l^2 (s^2 - t^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В новых переменных ядро $T(x, y, k)$ примет вид

$$T(x, y, k) = l \int_1^{\infty} e^{2ikls} Q(s) ds, \quad (2.12)$$

где

$$Q(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dt \cdot \bar{q}(s, t, \varphi), \quad (2.13)$$

а $q(s, t, \varphi) = q(z_1, z_2, z_3)$. В силу финитности функции $q(z_1, z_2, z_3)$ интегрирование в (12) фактически ведется по конечному промежутку. Имеем

$$T(x, y, k) = -\frac{e^{2ikl}}{2ik} Q(1) - \frac{1}{2ik} \int_1^{\infty} e^{2ikls} Q'(s) ds. \quad (2.14)$$

Пусть $k_2 = \Phi(k_1)$, где $\Phi(t)$ — функция, которую мы выберем ниже. Из формулы (14) получаем

$$|T(x, y, k)| < C \frac{e^{-2l\Phi(k_1)}}{\sqrt{k_1^2 + \Phi^2(k_1)}}, \quad 2l = |x - y|. \quad (2.15)$$

Положим для $|k_1| > 1$

$$\Phi(k_1) = -A \ln |k_1|, \quad 2dA \leq \beta < 1, \quad (2.16)$$

где $d = \text{diam } D_q$, а D_q — область, вне которой финитная функция $q(x) \equiv 0$, и проверим, что при $|k_1| \rightarrow \infty$ будет выполнено условие (7), причем оператор T рассматривается в пространстве $C(E, e^{-A \ln |k_1| |x|})$. Действительно

$$|T| \leq \max_{x \in E} e^{-A \ln |k_1| \cdot |x|} \int |T(x, y, k)| |q(y)| e^{A \ln |k_1| |y|} dy \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C \max_{x \in E_1} \int_{D_q} \frac{e^{A \ln |k_1| [|x-y| - |x| + |y|]}}{\sqrt{k_1^2 + A^2 \ln^2 |k_1|}} dy \leq \frac{C}{|k_1|} \max_{x \in E_1} \int e^{A \ln |k_1| [|x| + |y| - |x| + |y|]} dy \leq \\ &\leq \frac{C}{|k_1|} \max_{x \in E} \int_{D_q} e^{2A \ln |k_1| |y|} dy \leq \frac{C}{|k_1|} e^{2 \ln |k_1|} \text{mes } D_q \leq \frac{C}{|k_1|^{1-\beta}} \xrightarrow{|k_1| \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из формулы (17) вытекает даже более сильное соотношение, чем (7) В частности из этой формулы и теоремы 1.1 вытекает

Теорема 2.1. Пусть $D = E_3$ и выполнены условия теоремы 1.1. Тогда резольвентное ядро оператора Шредингера $G(x, y, k^2)$, $k = ip$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость k как мероморфная функция. При $k_2 > 0$ она аналитична всюду за исключением конечного числа полюсов $k_n = i x_n$, $x_n \geq 0$, соответствующих точкам отрицательного дискретного спектра оператора Шредингера. В полуплоскости $k_2 < 0$ полюса резольвентного ядра $G(x, y, k^2)$ лежат под кривой

$$k_2 = -A \ln |k_1| + B, \quad (2.18)$$

где $A > 0$ и B — некоторые постоянные. Существует функция $F(k_1)$ и некоторая постоянная $d > 0$ такие, что

$$F(k_1) > d \text{ при } -\infty < k_1 < \infty; F(k_1) \sim A \ln |k_1| \text{ при } |k_1| \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

и все полюса ядра $G(x, y, k^2)$ в полуплоскости $k_2 < 0$ лежат под кривой $k_2 = -F(k_1)$. Для доказательства достаточно заметить, что ядро $G(x, y, k^2)$ удовлетворяет уравнению

$$G(x, y, k^2) + \int \frac{e^{ik_1|x-z|}}{4\pi|x-z|} q(z) G(z, y, k^2) dz = \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \quad (2.20)$$

Это уравнение легко приводится к уравнению вида (3) для функции $\Gamma(x, y, k^2) = G(x, y, k^2) - \frac{e^{ik_1|x-y|}}{-4\pi|x-y|}$. Поэтому для доказательства теоремы 1 остается заметить, что оценка (17) позволяет утверждать, что выполнено неравенство (*) для функции $\int G(x, y, -p^2) f(y) dy$. В самом деле, в силу оценки (17) из уравнения (3) вытекает, что при $|k_1| \rightarrow \infty$, $k = ip$

$$\|v\|_{C(E_3, e^{-A \ln |k_1| |x|})} \leq C \| \psi \|_{C(E_3, e^{-A \ln |k_1| |x|})}. \quad (2.21)$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$|\psi(x, k)| < \frac{C}{1 + |k|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad k_2 > -\sigma_0, \quad |k_1| \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

при всех $x \in \tilde{D}$, где $\tilde{D}$ — любая конечная область. Для этого, в силу формул (2), (6) достаточно установить оценку (22) для функции $g(x, k)$. Это легко сделать, например, следующим образом. Из определения $g(x, k)$ следует, что

$$(\Delta + k^2) g(x, k) = -f(x). \quad (2.23)$$

Поэтому

$$g(x, k) = -\frac{f(x)}{k^2} - \frac{\Delta g(x, k)}{k^2}. \quad (2.24)$$

Но

$$|\Delta g| = \left| \int \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \Delta f dy \right| \leq C \int_{D_f} \frac{e^{-k_2|x-y|}}{|x-y|} dy, \quad (2.25)$$

где D_f носитель финитной функции $f(x)$. Из (25) получаем, что при любом k_2 верно неравенство

$$\|\Delta g\|_{C(E, e^{k_2|x|})} \leq C(k_2, f). \quad (2.26)$$

Отсюда и из формулы (24) следует, что оценка (*) выполнена для оператора Шредингера в некоторой полуплоскости $k_2 > -\sigma_0$, причем $\gamma = 2$. Напомним, что всюду выше относительно функций $q(x)$ и $f(x)$ предполагались выполненными условия теоремы 1.1. Эта оценка для функции $v(x, k)$ имеет вид

$$|v(x, k)| < \frac{C}{1 + |k|^2}, \quad k_2 > -\sigma_0, \quad \sigma_0 > 0, \quad |k_1| \rightarrow \infty, \quad x \in \bar{D}, \quad (2.27)$$

где постоянная C зависит от $f(x)$ и $\bar{D}$, а $\bar{D}$ — произвольная ограниченная область. Оценка (27) имеет место и при всех k из полуплоскости $k_2 > -\sigma_0$ с вырезанными кружками вокруг точек $k_n = ix_n$, соответствующих отрицательному дискретному спектру оператора Шредингера.

Замечание 2.1. Если потенциал $q(x)$ не является финитным, но удовлетворяет оценке (1.4) при любом $a > 0$, то, как нетрудно проследить, теорема 2.1 сохраняет силу до слов „В полуплоскости...“, а ее доказательство мало меняется.

Предположим, что функции $q(x)$, $\nabla q(x)$ удовлетворяют оценке (1.4) с некоторым фиксированным $a > 0$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1 и замечания 1.2, приходим к теореме.

Теорема 2.2. Если $q(x)$ и $\nabla q(x)$ удовлетворяют оценке (1.4) при некотором $a > 0$, то ядро $G(x, y, k^2)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $k_2 > -\frac{a}{2}$ как мероморфная функция. В полуплоскости $k_2 \geq 0$ ядро $G(x, y, k^2)$ имеет конечное число полюсов $k_n = ix_n$, $x_n \geq 0$, соответствующих отрицательному дискретному спектру. В полосе $-\frac{a}{2} < k_2 < 0$, $|k_1| > N$ при достаточно большом N нет полюсов функции $G(x, y, k^2)$. При любом $\varepsilon > 0$ в полосе $-\frac{a}{2} + \varepsilon < k_2 < 0$; $|k_1| < N$ этих полюсов лишь конечное число. Су-

существует полоса $-\varepsilon_0 < k_2 < 0$, свободная от полюсов ядра $G(x, y, k^2)$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2, и оператор L не имеет дискретного спектра. Тогда для этого оператора выполнен принцип предельной амплитуды в форме (1.21).

Доказательство совпадает с приведенным перед формулой (1.21). В случае финитного потенциала аналогичная оценка получена в работе [10].

§ 3. Особенности аналитического продолжения резольвентного ядра в двумерной области. Аналитическое продолжение в случае области с бесконечной границей

Упомянутые в заглавии особенности обусловлены тем, что функция $-\frac{1}{4i}H_0^{(1)}(ipr)$ — резольвентное ядро оператора задачи (1.1) — (1.3) для случая $q(x) \equiv 0$, $D = E_2$ имеет логарифмическую точку ветвления при $p = 0$ на комплексной плоскости p . Если провести разрез $(-\infty, 0)$ на плоскости комплексного переменного p , то в разрезанной плоскости функция $\frac{1}{-4i}H_0^{(1)}(ipr)$ аналитична по p . Рассмотрим задачу (1.1) — (1.3), где $D \subset E_2$, а относительно потенциала $q(x)$ сделаны те же предположения, что и в § 1. Мы сохраняем обозначения § 1 с той разницей, что вместо ядра $\frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ надо ставить $\frac{1}{-4i}H_0^{(1)}(ipr_{xy})$, $r_{xy} = |x - y|$.

Повторяя доказательство теоремы 1.1 мы приходим к теореме.

Теорема 3.1. Пусть $D \subset E_1$ и выполнены условия теоремы 1.1. Тогда функция $u(x, p)$, определенная формулой (1.5), допускает аналитическое продолжение на плоскость комплексного переменного p с разрезом $(-\infty, 0)$ как мероморфная функция. При $\sigma > 0$ она имеет конечное число полюсов, расположенных в точках $\sigma_n = \sqrt{|\lambda_n|}$, где $\lambda_n = -|\lambda_n|$ — точки отрицательного дискретного спектра оператора Шредингера. Точка $p = 0$ — точка ветвления логарифмического типа.

К теореме 1 можно сделать замечания, аналогичные замечаниям 1.1, 1.2. В замечании, аналогичном замечанию 1.2, аналитическое продолжение функции $u(x, p)$ осуществляется в полуплоскость $\sigma > -\frac{a}{2}$ с разрезом $(-\frac{a}{2}, 0)$.

Оценку (1.21) теперь получить нельзя, так как контур интегрирования будет содержать петлю, охватывающую разрез. Тот факт, что функция $H_0^{(1)}(ipr)$ имеет при $p = 0$ точку ветвления логарифмичес-

кого типа, обуславливает явление диффузии волн в плоском и, вообще, в четномерном случае [14].

Пусть

$$U_{tt} + L U = 0 \text{ в } D \times [0, \infty), \quad (3.1)$$

$$U|_{t=0} = 0; \quad U_t|_{t=0} = g(x), \quad (3.2)$$

$$U|_{x \in \partial} = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим сначала наиболее простой случай $q(x) \equiv 0$, $D = E_2$. Предполагается, что $g(x)$ — финитная гладкая функция. Решение задачи (1) — (3) имеет вид

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} u(x, p) dp, \quad (3.4)$$

где

$$u(x, p) = \int \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ip|x-y|) g(y) dy, \quad (3.5)$$

а интеграл без обозначения области интегрирования берется по E_2 . Деформируем контур интегрирования в формуле (4) в контур, состоящий из отрезков, соединяющих точку $-i\infty - \sigma_0$ с точкой $-i0 - \sigma_0$, точку $-\sigma_0 + i0$ с точкой $-\sigma_0 - i\infty$, и петли C_{σ_0} , охватывающей разрез $(-\sigma_0, 0)$ и соединяющей точки $-\sigma_0 - i0$ и $-\sigma_0 + i0$. Тогда, учитывая, что при $x \in \bar{D}$, где $\bar{D}$ — ограниченная область, выполнена оценка

$$|u(x, p)| = O\left(\frac{1}{1 + |p|^2}\right), \quad p = \sigma + i\tau, \quad |\tau| \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

можно утверждать, что при $t \rightarrow \infty$, $x \in \bar{D}$

$$U(x, t) = O(e^{-\sigma_0 t}) + \int_{C_{\sigma_0}} e^{pt} u(x, p) dp = O(e^{-\sigma_0 t}) + J_{\sigma_0}(t). \quad (3.7)$$

Очевидно, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$J_{\sigma_0}(t) = O(e^{-\varepsilon t}) + \int_{C_\varepsilon} e^{pt} u(x, p) dp. \quad (3.8)$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2}{ipr}. \quad (3.9)$$

Из формул (5) и (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} u(x, p) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln \frac{2}{ipr_{xy}} g(y) dy = -\frac{1}{2\pi} \ln p \int g(y) dy + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{2}{ir_{xy}} g(y) dy = A \ln p + O(1) \text{ при } p \rightarrow 0, \quad x \in \bar{D}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя выражение (10) в интеграл, стоящий в правой части формулы (8) и проводя простой подсчет, получим

$$\int_{C_+} u(x, p) e^{pt} dp = 2\pi i A \frac{e^{-it} - 1}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.11)$$

Сравнивая формулы (7), (8), (11), имеем

$$|U(x, t)| = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad x \in \bar{D}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

причем, если $A \neq 0$, то порядок убывания, указанный в формуле (12), не может быть улучшен, даже если $g(y) \in C_0^\infty(E_2)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D = E_2$, $q(x) \neq 0$ — финитная дифференцируемая функция

$$q(x) > 0, \quad (3.13)$$

и изучим поведение резольвентного ядра $G(x, y, -p^2)$ при $p \rightarrow 0$.

Теорема 3.2. При сделанных предположениях существует

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(x, p) = \lim_{p \rightarrow 0} \int G(x, y, -p^2) f(y) dy = v_0(x), \quad |\arg p| < \pi \quad (3.14)$$

какова бы ни была финитная дважды дифференцируемая функция $f(y)$. Функция $v_0(x)$ является решением уравнения (1.1) при $p=0$, $D=E_2$, причем в правой части уравнения (1.1) вместо $\delta(x-y)$ нужно поставить $f(x)^*$.

Доказательство. Функция $v(x, p)$ удовлетворяет уравнению

$$[I + T(p)] v \equiv v + \int \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xy}) q(y) v(y) dy = g(x, p). \quad (3.15)$$

Интеграл без обозначения области интегрирования берется по E_2 . Будем считать, что $\sigma > 0$, и рассмотрим уравнение (15) в пространстве $C(E_2)$. Как и в [26] легко доказать, что оператор $T(p)$ вполне непрерывен в $C(E_2)$ при всех p , $\sigma > 0$, $p \neq 0$. При $p \rightarrow 0$ ядро интегрального оператора в (15) стремится к бесконечности. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr) &= \frac{1}{-4i} [J_0(ipr) + iY_0(ipr)] = \frac{1}{2\pi} J_0(ipr) \ln \frac{2}{ipr} + O(1) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln p - \frac{1}{4i} - \frac{C}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + O(p^2 r^2 \ln ipr) + o(1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, C — постоянная Эйлера, а через $o(1)$ обозначена некоторая целая функция переменной ipr , обращающаяся в ноль при $p=0$. Конкретный вид этой функции нас не интересует (см. [11], стр. 352).

Введем обозначение

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \ln p - \frac{1}{4i} - \frac{C}{2\pi}. \quad (3.17)$$

* Формулировка близкая к теоремам 3.2, 3.3 утверждений приведена в [12] для вещественных значений параметра $\lambda = -p^2$, $\lambda \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$.

Уравнение (15) перепишем в виде

$$(I + \alpha q + Kq)v = g, \quad (3.18)$$

где положено

$$\begin{aligned} \alpha q v &\equiv \alpha \int q(y) v(y) dy; Kq v \equiv \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) dy + \\ &+ \int \Psi(x, y, p) q(y) v(y) dy \equiv K_0 q v + \Psi q v, \end{aligned} \quad (3.19)$$

а

$$\Psi(x, y, p) = O(p^2 r_{xy}^2 \ln ipr) + o(1). \quad (3.20)$$

Вычислим оператор

$$R_\alpha \equiv (I + \alpha q)^{-1} \quad (3.21)$$

в явном виде. Пусть

$$(I + \alpha q)v = \Phi, \quad \Phi \in C(E_2). \quad (3.22)$$

Умножим обе части уравнения (22) на $q(y)$ и проинтегрируем по E_2 . Вводя обозначения

$$\int \Phi(y) q(y) dy = \Phi_q, \quad \int q(y) dy = q_0, \quad (3.23)$$

получим

$$v_q + \alpha q_0 v_q = \Phi_q, \quad (3.24)$$

откуда при $\alpha q \neq -1$ следует

$$v_q = \frac{\Phi_q}{1 + \alpha q_0}. \quad (3.25)$$

Заметим, что из определения (17) величины α вытекает, что при малых p можно считать условие $\alpha q_0 \neq -1$ выполненным. Из уравнения (22) находим

$$v = \Phi - \alpha v_q = \Phi - \frac{\alpha \Phi_q}{1 + \alpha q_0} \equiv R_\alpha \Phi. \quad (3.26)$$

Формула (26) определяет оператор (21) в явном виде. Подействуем на обе части уравнения (18) оператором R_α . В результате получим

$$v + R_\alpha Kq v \equiv v + Q_\alpha v = R_\alpha g; \quad Q_\alpha \equiv R_\alpha Kq. \quad (3.27)$$

Из определения (26) оператора R_α следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|R_\alpha - R_0\| = 0, \quad (3.28)$$

где

$$R_0 \Phi \equiv \Phi - \frac{1}{q_0} \Phi_q. \quad (3.29)$$

Напомним, что из условия (13) вытекает неравенство $q_0 > 0$. Уравнение (27) имеет вид

$$v + Kq v - \frac{\alpha}{1 + \alpha q_0} (Kq v)_q = g - \frac{\alpha g_q}{1 + \alpha q_0}. \quad (3.30)$$

В силу определения функции g имеем

$$g(x, p) = \int \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xy}) f(y) dy = \alpha \int f(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy + \\ + \int \Psi(x, y, p) f(y) dy \equiv \alpha f_0 + \alpha(x, p), \quad (3.31)$$

причем равномерно относительно $x \in \bar{D}$ ($\bar{D}$ — ограниченная область)

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int \Psi(x, y, p) f(y) dy = 0. \quad (3.32)$$

Так как при $p = \sigma + i\tau$, $\sigma > 0$, меняющихся в ограниченной области и любых x и y , функция $\Psi(x, y, p)$ равномерно ограничена, то из формулы (32) следует, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \int \Psi(x, y, p) f(y) dy \right\|_{C(E, \frac{1}{1+|x|})} = 0. \quad (3.33)$$

Начиная отсюда, будем рассматривать уравнение (27) в пространстве $X = C(E, \frac{1}{1+|x|})$. Оператор Kq является вполне непрерывным оператором в X . Действительно, являясь интегральным оператором типа потенциала, он вполне непрерывен как оператор из X в $C(\bar{D})$, где $\bar{D}$ — любая ограниченная область (вспомним, что $q(y)$ — финитная функция). Поэтому достаточно проверить, что

$$\sup_{\|v\|_X < 1} \max_{|x| > N} \frac{|Kqv|}{1+|x|} \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Имеем

$$|K_q v| \leq \int_{D_q} \left| \ln \frac{1}{r_{xy}} \right| |q(y)| (1+|y|) dy \leq C_q \int_{D_q} |\ln r_{xy}| dy \leq C_q (1 + |\ln |x||), \quad (3.35)$$

где D_q — носитель функции $q(y)$. Из (35) непосредственно следует (34). Так как R_α — равномерно ограниченный в X оператор при всех $\alpha > 0$, то операторы Q_α и $Q_0 = R_0 K_0 q$ — вполне непрерывны в X . Покажем, что существует и ограничен оператор $(1 + Q_0)^{-1}$. Достаточно установить отсутствие ненулевого решения в X уравнения

$$(I + Q_0) v = v + K_0 q v - \frac{1}{q_0} (K_0 q v)_q = 0. \quad (3.36)$$

Умножим обе части уравнения (36) на $q(x)$ и проинтегрируем по E_2 . Получим

$$\int q(x) v(x) dx = 0. \quad (3.37)$$

Умножим обе части уравнения (36) на $q(x) \overline{v(x)}$ и проинтегрируем по E_2 . Используя равенство (37), получим

$$\int |v|^2 dx + \iint \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) q(x) \overline{v(x)} dx dy = 0. \quad (3.38)$$

Если мы покажем, что

$$J \equiv \iint \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) q(x) \overline{v(x)} dx dy > 0 \quad (3.39)$$

для любой $v \in X$, то из равенства (38) и неравенства (13) можно будет заключить, что $v \equiv 0$. Докажем неравенство (39). Обозначив

$$w(x) = \int \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) dy = \int_{D_q} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) dy, \quad (3.40)$$

можем написать

$$J = - \int w \Delta w dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|x| < R} |\nabla w|^2 dx - \int_{|s|=R} w \frac{\partial w}{\partial n} ds \right). \quad (3.41)$$

Сходимость интегралов (39) — (41) вытекает из финитности функции $q(y)$. Из формулы

$$r_{xy} = |x - y| = |x| \left(1 - \frac{(x^0, y)}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x^0 = \frac{x}{|x|}, \quad (3.42)$$

соотношения (37) и равенства (40) следует

$$w(x) = \frac{1}{2\pi|x|} \int (x^0, y) q(y) v(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.43)$$

кроме того

$$\frac{\partial w}{\partial |x|} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Из двух последних формул следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|s|=R} w \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0. \quad (3.45)$$

Таким образом, доказано, что уравнение (36) не имеет ненулевого решения в X , и, так как оператор Q_0 вполне непрерывен в X , то существует ограниченный оператор

$$(I + Q_0)^{-1} \equiv F. \quad (3.46)$$

Из формулы (28), в которой операторы можно рассматривать как действующие в X , вытекает, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|Q_\alpha - Q_0\| = 0. \quad (3.47)$$

Отсюда и из равенства (46) следует, что $\|F_\alpha - F\| \rightarrow 0$, где $F_\alpha \equiv (I + Q_\alpha)^{-1}$.

Поэтому для любого $h \in X$ решение уравнения

$$(I + Q_\alpha) v_\alpha = h_\alpha, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|h_\alpha - h\|_X = 0 \quad (3.48)$$

сходится в X к элементу Fh

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|v_\alpha - Fh\|_X = 0. \quad (3.49)$$

Уравнение (27) имеет вид (48), причем

$$\begin{aligned}
 h_a &\equiv R_a g = g - \frac{a g_a}{1 + a q_0} = a f_0 + a(x, p) - \frac{a(a q_0 f_0 + a_q(x, p))}{1 + a q_0} = \\
 &= a(x, p) + \frac{a f_0 - a a_q(x, p)}{1 + a q_0}, \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

где мы использовали обозначения формулы (31). Из формулы (50) следует, что в смысле сходимости в X

$$\begin{aligned}
 h_a \xrightarrow{a \rightarrow \infty} a(x, 0) + \frac{f_0}{q_0} - \frac{1}{q_0} a_q(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy + \\
 + \frac{f(y) dy}{q_0} - \frac{1}{2\pi q_0} \int dx q(x) \int \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy &\equiv h. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Повторяя

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \|v_a - v_0\| = 0, \quad v_0 = Fh. \quad (3.52)$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 2 нужно показать, что функция v_0 удовлетворяет уравнению (1.1) при $p = 0$, то есть $\lambda = \infty$.

Вспомогая определения (46), (27), (29), (19), получаем уравнение для v_0

$$v_0 + \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} q v_0 dy - \frac{1}{2\pi q_0} \int dx \int \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v_0(y) dy = h. \quad (3.53)$$

Применяя к обеим частям уравнения (53) оператор $-\Delta$ и вспомогая определение (51) функции h , получаем уравнение

$$[-\Delta + q(x)] v_0(x) = f(x). \quad (3.54)$$

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $D \neq E_2$ — внешность ограниченной области с ляпуновской границей Γ , $q(x) \equiv 0$, $f(x)$ — финитная дважды дифференцируемая функция.

Теорема 3.3. При сделанных предположениях имеет место утверждение теоремы 2 для функции $v(x, p) = \int_D H_0(x, y, -p^2) f(y) dy$,

где $H_0(x, y, -p^2)$ — решение задачи (1.1) — (1.3) при $q(x) \equiv 0$, $D \neq E_2$. Доказательство. Мы исходим из уравнений

$$v(x, p) = g - \int_{\Gamma} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xs}) \mu(s, p) ds, \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{1}{2}I + Q\right) \mu = \frac{\partial g}{\partial n_s}; \quad g(x, p) = \int_D \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xy}) f(y) dy, \quad (3.56)$$

$$Q\mu = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{ss'}) \mu(s') ds'. \quad (3.57)$$

Из формулы (16) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial n_s} - \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{ss'}) = \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ss'}} + \psi(s, s', p), \quad (3.58)$$

где

$$\lim_{p \rightarrow 0} |\psi(s, s', p)| = 0 \quad (3.59)$$

равномерно относительно $s, s' \in \Gamma$.

Поэтому оператор $\frac{1}{2}I + Q$, рассматриваемый как оператор в $C(\Gamma)$, равномерно сходится при $p \rightarrow 0$ к оператору $\frac{1}{2}I + Q_0$, где

$$Q_0 \mu = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln \frac{1}{r_{ss'}} \mu(s') ds'. \quad (3.60)$$

Из теории потенциала известно, что оператор $\left(\frac{1}{2}I + Q_0\right)^{-1}$ существует и ограничен. Свободный член в уравнении (56) также имеет предел в силу соотношения (58)

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial g(s, p)}{\partial n_s} - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln \frac{1}{r_{sy}} f(y) dy \right\|_{C(\Gamma)} = 0. \quad (3.61)$$

Из сказанного и леммы 1 из работы [4] вытекает, что решение уравнения (56) имеет предел в $C(\Gamma)$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|\mu(s, p) - \mu_0(s)\|_{C(\Gamma)} = 0; \quad \mu_0(s) = \left(\frac{1}{2}I + Q_0\right)^{-1} h, \quad (3.62)$$

где

$$h \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln \frac{1}{r_{sy}} f(y) dy. \quad (3.63)$$

Исследуем предельный переход $p \rightarrow 0$ в уравнении (55).

Имеем

$$\begin{aligned} v(x, p) &= g(x, p) - \int_{\Gamma} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xs}) \mu(s, p) ds = \\ &= \alpha \int_{\Gamma} f(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy - \alpha \int_{\Gamma} \mu_0(s) ds - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r_{xs}} \mu_0(s) ds + o(1) \quad \text{при } p \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

где α определено формулой (17).

Покажем, что

$$\int_{\Gamma} \mu_0(s) ds - \int_{\Gamma} f(y) dy = 0. \quad (3.65)$$

Отсюда и из формулы (64) вытекает, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r_{xs}} \varphi_0(s) ds \equiv v_0(x). \quad (3.66)$$

Проверку того факта, что функция $v_0(x)$ является решением задачи

$$-\Delta v_0(x) = f(x), \quad (3.67)$$

$$v_0|_{\Gamma} = 0 \quad (3.68)$$

проведем вместе с доказательством формулы (65).

Для доказательства равенства (65) используем формулу (64) и вспомним, что функция $v(x, p)$ удовлетворяет условию Дирихле

$$v(x, p)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (3.69)$$

Из определения (17) следует, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} \alpha = +\infty. \quad (3.70)$$

Так как α не зависит от x , то равенства (64), (69) и (70) совместны лишь при условии, что (65) выполнено.

Остается заметить, что функция $v(x, p)$ удовлетворяет условию (69) при $p \neq 0$ и при $p \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in \bar{D}$ ($\bar{D}$ — любая ограниченная область стремится к $v_0(x)$). Поэтому и $v_0(x)$ удовлетворяет граничному условию (69). Теорема 3 доказана полностью.

Не останавливаясь на доказательстве, которое мало отличается от приведенных выше рассуждений, отметим, что имеет место

Теорема 3.4. Пусть $q(x) \in C_0^1(D)$, $f(x) \in C_0^2(D)$, где D — внешность ограниченной области с ляпуновской границей. Пусть оператор L задачи (1.1) — (1.3) не имеет дискретного спектра (для этого достаточно, чтобы было выполнено условие (13)). Тогда для функции $u(x, p) = \int_D H(x, y, -p^2) f(y) dy$ выполнено утверждение

теоремы 3. Здесь $H(x, y, -p^2)$ — решение задачи (1.1) — (1.3) при $D \subset E_2$.

В заключение сделаем замечание об аналитическом продолжении функции (1.5) в случае области $D \subset D_0$ с бесконечной границей Γ , равномерно удовлетворяющей условию Ляпунова. Предполагается, что граница Γ приближается к границе Γ_0 угловой области D_0 так, что

$$\rho(s) \equiv \rho(s, \Gamma_0) < C e^{-a|s|}, \quad a > 0. \quad (3.71)$$

Потенциал $q(x)$ — вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|q(x)| < C e^{-b|x|}, \quad b > 0. \quad (3.72)$$

В формулах (1.6) — (1.10) ядро $\frac{e^{-p|x-y|}}{-4\pi|x-y|}$ должно быть заменено функцией $G_0(x, y, ip)$, изученной в [3]. В силу оценок, полученных в [3],

уравнение (9) может быть рассмотрено точно также, как это было сделано в § 1.

Функция $\rho(s)$ играет при изучении уравнения (1.9) такую же роль, какую играет потенциал $q(x)$ при изучении уравнения (1.6). Таким образом, получаем аналог теоремы 1.

Теорема 3.5. Пусть $D \subset D_0$ — область с бесконечной границей. Пусть граница удовлетворяет условию Ляпунова, и постоянные Ляпунова равномерно ограничены. Пусть выполнены условия (71), (72). Тогда функция (1.5) допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\sigma > -\sigma_0$, $\sigma_0 = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, с разрезом $(-\sigma_0, 0)$, как мероморфная функция. В полуплоскости $\sigma > 0$ эта функция имеет лишь конечное число полюсов, расположенных в точках $\sigma_n = \sqrt{|\lambda_n|}$, где $\lambda_n = -|\lambda_n|$ — точки отрицательного дискретного спектра оператора задачи (1.1)–(1.3). Точка $p = 0$ — точка ветвления логарифмического типа.

П р и л о ж е н и е

В условиях теоремы 1.0 изолированные точки, в которых не существует оператор $(B - A(p))^{-1}$, являются полюсами этого оператора.

Доказательство использует метод, изложенный в книге [13]. Не ограничивая общности, положим $B = I$. Пусть p_0 — изолированная точка, в которой не существует оператор $(I - A(p_0))^{-1}$. Обозначим через $l_1, l_2, \dots, l_n$ базис подпространства нулей оператора $I - A(p_0)$, через $g_1, g_2, \dots, g_n$ — базис подпространства нулей оператора $I - A^*(p_0)$ ($R(I - A(p_0))$). Оператор $B(p) \equiv I - A(p) + \sum_{j=1}^n (\cdot, l_j) g_j$ при $p = p_0$ не имеет нулей, а $R(B)$ совпадает со всем пространством. Следовательно, при $|p - p_0| < \rho$, $\rho > 0$ существует $B^{-1}(p)$. Уравнение $[I - A(p)]\varphi = f$ эквивалентно уравнению $B(p)\varphi = \sum_{j=1}^n (\varphi, l_j) g_j$ или системе

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \xi_j B^{-1}(p) g_j + \eta(p); \quad \xi_j = (\varphi, l_j), \quad \eta = B^{-1}(p) f.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{jk} - b_{jk}(p)) \xi_j = \eta_k(p), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\eta_k(p) \equiv (\eta, l_k), \quad b_{jk}(p) \equiv (B^{-1}(p) g_j, l_k), \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

При $p \neq p_0$, $|p - p_0| < \rho$ определитель этой системы $\Delta(p) \neq 0$, если ρ достаточно мало. Функции $\eta_k(p)$ и $b_{jk}(p)$ — аналитические в круге $|p - p_0| < \rho$. Имеем $\xi_j = \frac{\Delta_j(p)}{\Delta(p)}$, где определители $\Delta_j(p)$, $\Delta(p)$ — аналити-

ческие при $|p-p_0| < \delta$ функции. Следовательно, $\xi_j(p)$ имеет в точке $p = p_0$ полюс (так как $\Delta(p_0) = 0$). Поэтому $\varphi = (I - A(p))^{-1} f = \eta(p) + \sum_{j=1}^n \xi_j(p) B^{-1}(p) g_j$ имеет в точке $p = p_0$ полюс. Так как f произвольна, то оператор $(I - A(p))^{-1}$ имеет полюс при $p = p_0$.

Ленинградский институт точной механики
и оптики

Поступило 27.V.1967

Ա. Գ. ՌԱՄՄ

ՈՐՈՇ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՇՐԵԴԻՆԳԵՐԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՌԵԶՈԼՎԵՆՏԱԳԻՆ ԿՈՐԻՋԻ
ԸՍՏ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Բ. Մ. Մ.

Հոդվածում տրված է անալիտիկ շարունակության մեթոդ և ապացուցված են թեորեմներ որոշ անվերջ տիրույթներում Շրեդինգերի օպերատորի ռեզոլվենտային սպեկտրալ պարամետրից կախման մերոմորֆ բնույթի մասին:

A. G. RAMM

SOME THEOREMS ON ANALYTICAL CONTINUATION OF RESOLVENT KERNELS OF SCHRÖDINGER OPERATOR WITH RESPECT TO SPECTRAL PARAMETER

S u m m a r y

In the paper a method for analytic continuation is given and some theorems about meromorphic character of dependence of the resolvent kernel of the Schrödinger operator on spectral parameter in some unbounded domains are proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Я. Повзнер. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta + C$, Матем. сб., 32, 1, 1953, 109—156.
2. А. Г. Рамм. а) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, ДАН СССР, 152, № 2, 1963, 282—285. б) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, Матем. сб., № 3, 66 (108), 1965, 321—343.
3. А. Г. Рамм. Исследование задачи рассеяния в некоторых бесконечных областях, I, II, Вестник АГУ, № 7, 1963, 45—66; № 19, 1963, 69—76.
4. А. Г. Рамм. Об аналитическом продолжении резольвентного ядра оператора Шредингера и принципе предельной амплитуды, ДАН АзССР, 21, № 1, 1965, 3—7.
5. А. Г. Рамм. Об аналитическом продолжении решения уравнения Шредингера по спектральному параметру и поведении решения нестационарной задачи при $t \rightarrow \infty$, УМН, 19, № 5, 1964, 192—194.

6. А. Г. Рамм. Об области, свободной от резонансных полюсов, в задаче рассеяния на трехмерном потенциале, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1319—1322.
7. Н. Данфорд, Д. Шварц. Ляпунговские операторы, ч. 1, ИИЛ, М., 1962, стр. 632.
8. Л. Д. Фаддеев. Единственность решения обратной задачи теории рассеяния, Вестник ЛГУ, № 7, 1956, 126—130.
9. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. I, II, ИИЛ, М., 1958.
10. О. А. Ладыженская. О принципе предельной амплитуды, УМН, 12, № 3, 1957, 161—164.
11. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ М., 1951.
12. Д. М. Эйдус. Краевые задачи в бесконечных областях и принцип предельной амплитуды, Автореферат диссертации, Ленинград, 1965.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд-во "Наука", М., 1965, стр. 37.
14. А. Г. Рамм. О диффузии воли, Математика, Известия высш. учеб. завед., № 2, 1965, 136—138.
15. А. Г. Рамм. О принципе предельной амплитуды, Диф. уравнения, 4, № 4, 1968, 714—720.
16. P. D. Lax, R. S. Phillips. Scattering theory, Berlin, Springer Verlag, 1967.

Т. В. СТРОЧИК

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ С. Е. ВАРШАВСКОГО

Пусть S — полуполоса в комплексной плоскости $w = u + iv$: $\{u > 1, \varphi_-(u) < v < \varphi_+(u)\}$, где $\varphi_{\pm}(u)$ — непрерывные функции на $[1, \infty)$. Полуполосу S можно конформно отобразить на прямолинейную полуполосу S_0 плоскости $z = x + iy$: $\{x > 0, 0 < y < 1\}$ посредством аналитической функции $z = Z(w) = X(w) + iY(w)$ так, чтобы точки $w = i_{\pm}(1)$ перешли, соответственно, в точки $z = i, z = 0$, а $w = \infty$ — в $z = \infty$.

Варшавским [1] доказаны два основных неравенства для действительной части отображающей функции в случае так называемой L -полосы. Полуполоса S называется L -полосой (с наклоном границы в точках $u = \infty$, равным нулю), если оба выражения

$$\frac{\varphi_+(u_2) - \varphi_+(u_1)}{u_2 - u_1}, \frac{\varphi_-(u_2) - \varphi_-(u_1)}{u_2 - u_1}, 0 < u_1 < u_2$$

стремятся к нулю при $u_1, u_2 \rightarrow \infty$.

Если обозначить

$$\psi(u) = \frac{\varphi_+(u) + \varphi_-(u)}{2}, \theta(u) = \varphi_+(u) - \varphi_-(u),$$

то неравенства Варшавского сформулируются следующим образом:

I. Если S является L -полосой, то $(w_j = u_j + iv_j, j = 1, 2)$

$$X(w_2) - X(w_1) \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \psi'^2(u)}{\theta(u)} du + \frac{1}{12} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\theta'^2(u)}{\theta(u)} du + o(1), \quad (I)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $u_1 < u_2, u_1 \rightarrow \infty$ равномерно по v_1, v_2 .

II. Если, кроме того, $\varphi_{\pm}(u)$ непрерывны и имеют ограниченную вариацию на $[1, \infty)$, то

$$X(w_2) - X(w_1) \geq \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \psi'^2(u)}{\theta(u)} du - \frac{1}{4} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\theta'^2(u)}{\theta(u)} du + o(1), \quad (II)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $u_1 < u_2, u_1 \rightarrow \infty$ равномерно по v_1, v_2 .

Для справедливости второго неравенства на $\varphi_{\pm}(u)$ накладываются дополнительные условия. Возникает вопрос, насколько они существенны. Рассмотренный ниже простой пример показывает, что без условия ограниченности вариации функций $\varphi_{\pm}(u)$ неравенство II, вообще говоря, может не быть верным.

Пример. Пусть $\varphi_{\pm}(u) = \pm \frac{1}{2} + \frac{\sin u^{3/2}}{u}$. Рассмотрим полуполо-

су $S: \{u > 1, \varphi_-(u) < v < \varphi_+(u)\}$. Для нее $\theta(u) \equiv 1$, $\psi'(u) = \varphi'_+(u) = \varphi'_-(u) = \frac{3 \cos u^{3/2}}{2 u^{1/2}} - \frac{\sin u^{3/2}}{u^2}$. Так как $\varphi_{\pm}(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, то S будет

L -полосой. Кроме того, $\varphi_{\pm}(u)$ непрерывны на $[1, \infty)$ и их вариация на этом промежутке неограничена, так как

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} |d\varphi_{\pm}(u)| &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_+ \left(\left(2\pi n + \frac{\pi}{2} \right)^{2/3} \right) - \varphi_+ \left((2\pi n)^{2/3} \right) \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{(2\pi n)^{1/3}} + \frac{1}{\left(2\pi n + \frac{\pi}{2} \right)^{4/3}} \right| > \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{1/3}} = \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что в нашем примере $\varphi_{\pm}(u) = O(1)$ при $u \rightarrow \infty$.

Если бы мы не добивались выполнения $\varphi_{\pm}(u) = O(1)$, то пример можно было бы построить проще.

Предположим, что для $z = Z(w)$ выполняется неравенство (II)

$$X(w_2) - X(w_1) > \int_{u_1}^{u_2} [1 + \psi'^2(u)] du + o(1) > u_2 - u_1 + \int_{u_1}^{u_2} \psi'^2(u) du - C_1. \quad (1)$$

Здесь и дальше C_j обозначают положительные постоянные, не зависящие от u_1 и u_2 .

Пусть $\tilde{S}$ — полуплоскость в w -плоскости: $\{u > 1, \tilde{\varphi}_-(u) < v < \tilde{\varphi}_+(u)\}$, где $\tilde{\varphi}_{\pm}(u) = \pm \frac{1}{2} \mp \frac{(\sin u^{3/2} \mp 1)^2}{4u}$. Так как

$$\varphi_+(u) - \tilde{\varphi}_+(u) = \frac{\sin u^{3/2}}{u} + \frac{(\sin u^{3/2} - 1)^2}{4u} = \frac{(\sin u^{3/2} + 1)^2}{4u} > 0,$$

$$\tilde{\varphi}_-(u) - \varphi_-(u) = \frac{(\sin u^{3/2} - 1)^2}{4u} - \frac{\sin u^{3/2}}{u} = \frac{(\sin u^{3/2} - 1)^2}{4u} \geq 0,$$

то $\tilde{S} \subset S$.

Рассмотрим в w -плоскости четырехугольник $\{u_1 \leq u \leq u_2, \varphi_-(u) \leq v \leq \varphi_+(u)\}$. Функция $z = Z(w)$ отображает его на четырехугольник в z -плоскости, лежащий в полуплоскости S_0 и ограниченный кривыми $z = Z(u_1 + iv)$, $\varphi_-(u_1) \leq v \leq \varphi_+(u_1)$; $z = Z(u_2 + iv)$, $\varphi_-(u_2) \leq v \leq \varphi_+(u_2)$; $y = 0$; $y = 1$.

Пусть функция $\tilde{z} = \tilde{Z}(w) = \tilde{X}(w) + i\tilde{Y}(w)$ отображает полуплоскость $\tilde{S}$ на полуплоскость $\tilde{S}_0$ плоскости $\tilde{z} = x + i\tilde{y}$: $\{x > 0, 0 < \tilde{y} < 1\}$. Обозначим

$$X(w_1^{(1)}) = \max_{\operatorname{Re} w_1 = u_1} X(w_1); \quad X(w_2^{(1)}) = \min_{\operatorname{Re} w_2 = u_2} X(w_2);$$

$$\bar{X}(w_1^{(2)}) = \min_{\operatorname{Re} w_1 = u_1} \bar{X}(w_1); \quad \bar{X}(w_2^{(2)}) = \max_{\operatorname{Re} w_2 = u_2} \bar{X}(w_2).$$

Так как модуль четырехугольника* $\{u_1 \leq u \leq u_2, \varphi_-(u) \leq v \leq \varphi_+(u)\}$ не превышает модуля четырехугольника $\{u_1 \leq u \leq u_2, \bar{\varphi}_-(u) \leq v \leq \bar{\varphi}_+(u)\}$, то имеет место неравенство

$$\bar{X}(w_2^{(2)}) - \bar{X}(w_1^{(2)}) \geq X(w_2^{(1)}) - X(w_1^{(1)}). \quad (2)$$

Полуполоса $\bar{S}$ является L -полосой, поэтому к функции $\tilde{z} = \tilde{Z}(w)$ можно применить неравенство (1) Варшавского

$$\bar{X}(w_2^{(2)}) - \bar{X}(w_1^{(2)}) \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \frac{\psi'^2(u)}{\bar{\theta}(u)}}{\bar{\theta}(u)} du + \frac{1}{12} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\bar{\theta}'^2(u)}{\bar{\theta}(u)} du + C_2. \quad (3)$$

В нашем случае $\psi'(u) = \frac{\sin u^{3/2}}{2u} = \frac{\psi(u)}{2}$; $\bar{\theta}(u) = 1 - \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u}$;

$$\bar{\theta}'(u) = -\frac{3 \sin u^{3/2} \cos u^{3/2}}{2u^{1/2}} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u^2}.$$

Неравенство (3) перепишется так

$$\begin{aligned} & \bar{X}(w_2^{(2)}) - \bar{X}(w_1^{(2)}) \leq \\ & \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{3 \sin u^{3/2} \cos u^{3/2}}{2u^{1/2}} - \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u^2} \right)^2}{1 - \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u}} du + C_2 = \\ & = \int_{u_1}^{u_2} \left[1 + \frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} + \frac{3 \sin^4 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{16u} + O\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right) \right] du + C_2 \leq \\ & \leq \int_{u_1}^{u_2} \left[1 + \frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} + \frac{3 \sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{16u} \right] du + C_3. \quad (3') \end{aligned}$$

Сравнивая (1) и (3'), согласно (2) получаем

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 + \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} + \frac{3 \sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{16u} \right) du + C_3 & \geq \\ & \geq u_2 - u_1 + \int_{u_1}^{u_2} \psi'^2(u) du - C_1 \end{aligned}$$

ИЛИ

* О модулях четырехугольников и их свойствах см., например, [7].

$$C_4 > \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{27 \cos^2 u^{3/2}}{16 u} - \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} - \frac{3 \cos^2 u^{3/2} \sin^2 u^{3/2}}{16 u} \right) du.$$

Учитывая очевидное тождество

$$27 \cos^2 \varphi - 8 \sin^2 \varphi - 8 = 3 \cos^2 \varphi + 16 \cos 2\varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} C_4 &> \frac{3}{16} \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\cos^2 u^{3/2}}{u} - \frac{\sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{u} \right) du + \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos (2u^{3/2})}{u} du = \\ &= \frac{3}{16} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du + \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos (2u^{3/2})}{u} du > \frac{3}{16} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du - C_5. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos (2u^{3/2})}{u} du$ сходится. Таким

образом, $\int_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du < C_6$. Фиксируя u_1 и устремляя u_2 к ∞ , полу-

чим, что $+\infty = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du \leq C_6$.

Мы пришли к противоречию.

В заключение выражаю благодарность А. А. Гольдбергу, под чьим руководством выполнена эта работа.

Львовский государственный университет

им. И. Франко

Поступило 20.IV.1967

S. Վ. ՍՏՐՈՉԻԿ

Ս. Ե. ՎԱՐՇԱՎՍԿԻՆԻ ՄԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ն Փ Ն Մ

Հոդվածում ցույց է տրված անվերջ շերտերի կոնֆորմ արտապատկերման վերաբերյալ վարչավսկու [1] հայտնի թեորեմում նշված մի սահմանափակման էական լինելը:

T. W. STROCHIK

ON A THEOREM OF S. E. WARSCHAWSKI

S u m m a r y

Present note shows, that in a well-known theorem of Warschawski, concerning conformal mappings of infinite stripes, a certain restriction is essential.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *С. Е. Варшавский*. Конформное отображение бесконечных полос, Сб. переводов „Математика“, 2, № 4, 1958, 67—116.
2. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва, изд. „Наука“, 1966.

А. К. ТОЛПЫГО

ДЕФОРМАЦИИ ПОДАЛГЕБР В АЛГЕБРАХ ЛИ

В обзорной работе [2] построен общий метод, позволяющий описать деформации некоторых алгебраических структур в терминах кохомологий, например, построить полное семейство деформаций данной алгебры Ли (см. также [1]), полное семейство деформаций представлений данной алгебры и т. д. Настоящая заметка имеет своей целью распространить эти результаты на деформации подалгебр в алгебрах Ли, в частности будут обобщены некоторые результаты [3]. Введем сначала некоторые определения и обозначения.

Пусть $\mathfrak{X}$ — конечномерная алгебра Ли над полем R или C , $\mathfrak{X}_1$ — ее подалгебра, G — некоторая подгруппа Ли в группе $\text{Aut } \mathfrak{X}$ всех автоморфизмов $\mathfrak{X}$. $\mathfrak{X}_1$ и G будут предполагаться фиксированными на протяжении всей работы. Пусть $\dim \mathfrak{X}_1 = n$. Обозначим через Γ_n грасманово многообразие всех n -мерных подпространств $\mathfrak{X}$. На Γ_n естественным образом действует группа G : если $g \in G$, $b \in \Gamma_n$ — n -мерное подпространство, то $g \cdot b = g(b)$ также принадлежит Γ_n . Мы будем обозначать через $a \in \Gamma_n$ точку Γ_n , соответствующую $\mathfrak{X}_1$. Далее, обозначим через M , $a \in M \subset \Gamma_n$, множество всех n -мерных подалгебр $\mathfrak{X}$. Пусть D — аналитическое множество, $0 \in D \subset R^m$ или $0 \in D \subset C^m$, в зависимости от рассматриваемого поля, назовем деформацией подалгебры $\mathfrak{X}$ такое аналитическое (над R или C соответственно) отображение $f: D \rightarrow \Gamma_n$, что

$$1. f(D) \subset M \quad 2. f(0) = a.$$

Мы будем называть две деформации $f_1: D \rightarrow \Gamma_n$ и $f_2: D \rightarrow \Gamma_n$ эквивалентными, если существует аналитическое отображение $h: D \rightarrow G$ такое, что $h(0) = e$ и $f_2(d) = h(d)(f_1(d))$ для всех $d \in D$ в некоторой окрестности нуля (вообще вся дальнейшая теория будет строиться лишь локально и рассматриваться будут, собственно говоря, не отображения, а только их ростки). Мы будем называть деформацию нулевой, если $f(d) = a$ для всех $d \in D$, и тривиальной, если она эквивалентна нулевой.

Введем теперь, как в [3], следующее описание окрестности a в Γ_n : зафиксируем произвольное дополнительное к $\mathfrak{X}_1$ подпространство $b \subset \mathfrak{X}$ и рассмотрим открытую окрестность a в Γ_n , состоящую из всех n -мерных подпространств q таких, что $q \cap b = 0$. Эту окрестность мы будем в дальнейшем отождествлять с пространством $\text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ линейных отображений $\mathfrak{X}_1$ в $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$. Именно, отождествим $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ с b естественным образом и данному отображению $S: \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ сопоставим подпространство $q = \{x + Sx/x \in \mathfrak{X}_1, Sx \in b\}$. Нетрудно построить и отображение S по подпространству q (см. также [3]). Заметим, что хотя это

отображение окрестности точки $a \in \Gamma_n$ в $\text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ и зависит от выбора подпространства b , но его дифференциал, отображающий касательное пространство T_{Γ_n} к Γ_n в $\text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ от выбора b не зависит: в самом деле, пусть b и b^1 — два дополнительных к $\mathfrak{X}_1$ подпространства, q — n -мерное подпространство, близкое к $\mathfrak{X}_1$, $S: \mathfrak{X}_1 \rightarrow b \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ и $S^1: \mathfrak{X}_1 \rightarrow b^1 \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ — соответствующие q отображения, тогда, если $x \in \mathfrak{X}_1$, $x + S^1x = y + Sy$, то $x - y = Sy - S^1x = S(y - x) + (S - S^1)x$ — величина первого порядка малости, откуда $S(y - x)$ — величина второго порядка малости и $(S - S^1)x = S(x - y) + \mathfrak{X}_1 \in \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ — также высшего порядка малости. В дальнейшем мы фиксируем b навсегда и будем отождествлять его с $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$, а $\text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ мы будем отождествлять как с окрестностью a в Γ_n , так и с касательным пространством к Γ_n в точке a .

Обозначим через $\text{Alt}^m(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ пространство всех m -линейных кососимметрических отображений $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$. Это пространство можно рассматривать как пространство m -мерных коцепей алгебры $\mathfrak{X}_1$ со значениями в $\mathfrak{X}_1$ -модуле $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ и строить соответствующую теорию когомологий. Обозначим кроме того через P — проектор $\mathfrak{X}$ на b параллельно $\mathfrak{X}_1$ и пусть $Q = E - P$; очевидно, Q — проектор $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}_1$ параллельно b . Пусть q — близкое к $\mathfrak{X}_1$ подпространство, S — соответствующее ему отображение. Как показано в [3] (это легко проверить и непосредственно), q есть подалгебра тогда и только тогда, когда для произвольных $x, y \in \mathfrak{X}_1$

$$\delta S(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (P - SQ)[x + Sx, y + Sy] = 0.$$

Очевидно, при произвольном $S \in \text{Alt}^2(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$, так что мы имеем отображение $\delta: \text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1) \rightarrow \text{Alt}^2(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$. Ясно, что $\text{Ker } \delta = \delta^{-1}(0)$ есть в точности M — пространство n -мерных подалгебр $\mathfrak{X}$. Дифференциал этого отображения $d_1: \text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1) \rightarrow \text{Alt}^2(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ имеет вид

$$(d_1 S)(x, y) = [Sx, y] + [x, Sy] - S[x, y].$$

Очевидно это обычный кограничный оператор для когомологий алгебры $\mathfrak{X}_1$ со значениями в $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$. Отсюда легко видеть, что касательное пространство к D при любой деформации $f: D \rightarrow \Gamma_n \rightarrow \text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$ отобразится с помощью $df: T_D \rightarrow \text{Alt}^1$ в пространство одномерных коциклов $Z^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$. Действительно, мы знаем, что для любой деформации f выполняется равенство $\delta \cdot f = 0$, откуда, конечно, следует, что $d_1 \cdot df = 0$, что и требовалось доказать. Очевидно также, что касательное пространство к M $T_M \subset Z^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$.

Пусть теперь f_1 и f_2 — две эквивалентные деформации. Рассмотрим отображения df_1 и $df_2: T_D \rightarrow Z^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$. Если $f_2(d) = h(d) \times \times (f_1(d))$, то $df_2(u) = h(0)(df_1(u)) + dh(u)f_1(0) = df_1(u) + dh(u)\mathfrak{X}_1$. Как легко видеть, dh есть отображение пространства T_D в алгебру Ли U группы G , действующую дифференцированием на $\mathfrak{X}$, и $df_1 - df_2 = dh \in \text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$, т. е. для каждого $u \in T_D$ разность $(df_1 - df_2)(u)$

есть скрещенный гомоморфизм $\mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$, порожденный дифференцированием из алгебры Ли U . В частности, если $G = \text{Int } \mathfrak{X}$ — группа внутренних автоморфизмов $\mathfrak{X}$, то $df_1(u)$ и $df_2(u)$ когомологичны в смысле когомологий $\mathfrak{X}_1$ со значениями в $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$.

Нам будет теперь удобно несколько изменить стандартную теорию когомологий алгебры Ли $\mathfrak{X}_1$ со значениями в $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$. Пусть $\text{Diff } \mathfrak{X}$ — алгебра Ли всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{X}$. Определим отображение $\bar{d}_0: \text{Diff } \mathfrak{X} \rightarrow \text{Alt}^1$ формулой $(\bar{d}_0 g)(x) = gx + \mathfrak{X}_1 \in \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$ (вспомним, что $g \in \text{Diff } \mathfrak{X}$ есть дифференцирование алгебры $\mathfrak{X}$). Пусть $U \in \text{Diff } \mathfrak{X}$ — подалгебра, отвечающая подгруппе $G \subset \text{Aut } \mathfrak{X}$. Обозначим через d_0 ограничение $\bar{d}_0$ на U и рассмотрим коцепной комплекс

$$U \xrightarrow{d_0} \text{Alt}^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1) \xrightarrow{d_1} \text{Alt}^2(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1) \rightarrow \dots,$$

где $d_i (i > 0)$ — обычные кограницные операторы. Положим $Z' = \ker d_1$, $B' = \text{Im } d_{1-1}$, $B^0 = 0$. Очевидно $z'/B' (i > 1)$ есть обычная группа когомологий $H'(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$. Положим $H_0^1 = H_0^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1) = z'/B^1$. Легко проверить, что $H_{\text{int}}^1 \mathfrak{X}$ есть обычная группа когомологий $H^1(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1)$. Действительно, в этом случае $U = \text{ad } \mathfrak{X}$ и $d_0(g)$ определяет отображение $\mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$. Поскольку $\mathfrak{X}_1$ — подалгебра, это отображение не зависит от выбора элемента в классе смежности $\mathfrak{X}$ по $\mathfrak{X}_1$, и корректно определено отображение $d_0(\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1): \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$, причем очевидно, что оно совпадает с обычным кограницным оператором d_0 для коцепей $\mathfrak{X}_1$ с коэффициентами в $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.

С каждой деформацией f связано линейное отображение $\tilde{df}: T_D \rightarrow H_0^1$, индуцированное отображением df . Из сказанного выше ясно, что это отображение не изменится, если заменить f эквивалентной деформацией. Тем самым каждому классу эквивалентных деформаций сопоставляется его „касательное отображение“ $\tilde{df}$ пространства T_D в H_0^1 .

Пусть задана произвольная, близкая к $\mathfrak{X}_1$ подалгебра q ; тогда мы можем получить в $\mathfrak{X}_1$ новое умножение $[\ , \]_q$, полагая для $x, y \in q$ $[Qx, Qy]_q = Q[x, y]$. Тем самым умножение в $\mathfrak{X}_1$ вполне определено. Если теперь мы имеем деформацию $f: D \rightarrow \Gamma$ подалгебры $\mathfrak{X}_1$, мы можем получить целое семейство алгебр Ли $[\ , \]_d$, полагая для произвольных $d \in D$, $x, y \in f(d)$ $[Qx, Qy]_d = Q[x, y]$ и построить таким образом по данной деформации подалгебры $\mathfrak{X}_1$ в алгебре $\mathfrak{X}$ деформацию алгебры Ли $\mathfrak{X}_1$ в смысле [1].

Мы имеем теперь отображение ψ окрестности точки a в M в пространство лиевых умножений в $\mathfrak{X}_1$, следовательно, в пространство билинейных кососимметрических функций $\text{Alt}^2(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_1)$ на $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1$ со значениями в $\mathfrak{X}_1$, причем $a \in M$ переходит в умножение, определяющее $\mathfrak{X}_1$. Найдем дифференциал отображения ψ в точке a . Если q — близкая

к $\mathfrak{M}_1$ подалгебра, $S: \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ — соответствующее отображение, то $[x, y]_Q = Q[x + Sx, y + Sy]$. Отсюда следует, что $d\psi: T_M \rightarrow \text{Alt}^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ имеет вид

$$(d\psi(S))(x, y) = Q([Sx, y] + [x, Sy]) = Q([Sx, y] + [x, Sy] - S[x, y]).$$

Поскольку S — коцикл алгебры $\mathfrak{M}_1$ со значениями в $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$, в последнем выражении оператор Q можно опустить, как тождественный на $\mathfrak{M}_1$, и окончательно

$$(d\psi(S))(x, y) = [Sx, y] + [x, Sy] - S[x, y].$$

Отсюда видно, что $d\psi$ индуцируется известным оператором $\partial: Z^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1) \rightarrow Z^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$, приводящим к кограничному оператору $\partial^*: H^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1) \rightarrow H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ точной последовательности когомологий пары $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1)$. На самом деле отображение ∂ дает оператор $\partial_O^*: H_O^1 \rightarrow H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ для любой группы R , так как всегда $\text{Ker } \partial_i \supset B^i$.

Пусть $f: D \rightarrow \Gamma_n$ — деформация подалгебры $\mathfrak{M}_1$, $\varphi = \psi \cdot f: D \rightarrow \text{Alt}^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ — соответствующая деформация алгебры Ли $\mathfrak{M}_1$, $\tilde{d}f: T_D \rightarrow H_O^1$ и $\tilde{d}\varphi: T_D \rightarrow H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ — соответствующие отображения касательных пространств. Из сказанного выше ясно, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & H_O^1 & \\ \tilde{d}f \downarrow & \xrightarrow{\partial_O^*} & \\ T_D & \xrightarrow{\tilde{d}\varphi} & H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1) \end{array} \text{ коммутативна.}$$

Мы построим теперь некоторую деформацию подалгебры $\mathfrak{M}_1$, параметризованную аналитическим множеством в H_O^1 . Эта деформация аналогична „семейству Кураниси“ алгебр Ли, построенному в [2], и обладает свойством универсальности, о котором будет сказано ниже.

Обозначим через H^i какие-нибудь фиксированные дополнительные подпространства к $B^i = B^i(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ в $Z^i = Z^i(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$, и C^i — дополнительные подпространства к Z^i в $\text{Alt}^i = \text{Alt}^i(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$, а C^0 — дополнительное подпространство к Z^0 в U . Очевидно, H^i естественно изоморфно группе i -мерных когомологий $H^i(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ при $i > 1$, а $H^1 \cong H_O^1$, и d_i устанавливает изоморфизм C^{i-1} с B^i и $B^i + H^i + C^i = \text{Alt}^i$. Рассмотрим отображение $u: C^0 + H^1 + C^1 \rightarrow \text{Alt}^1$:

$$u(c^0, h, c^1)(x) = \exp c^0(x + h(x) + c^1(x)).$$

Тогда дифференциал $du(c^0, h, c^1) = (Pc^0 + h + c^1)(x)$ есть изоморфизм линейных пространств $C^0 + H^1 + C^1$ и Alt^1 и из теоремы о неявных функциях следует

Лемма 1. *и локально является взаимно однозначным отображением на.*

Обозначим через $\pi_B: \text{Alt}^2 \rightarrow B^2$ проекцию $\text{Alt}^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ на B^2 параллельно $H^2 + C^2$, аналогично π_H , π_C — проекция Alt^2 на H^2 и C^2 параллельно соответственно $B^2 + C^2$ и $B^2 + H^2$. Пусть $M' = \{S \in \text{Alt}^1 | \pi_B \delta S = 0\}$. Ясно, что $M \subset M'$.

Лемма 2. Существует окрестность $N(\mathfrak{M}_1)$ точки a в Γ_n , окрестность $N(Z^1)$ точки 0 в Z^1 и аналитическое отображение $\alpha: N(Z^1) \rightarrow C^1$ такие, что $N(\mathfrak{M}_1) \cap M' = \{z + \alpha(z) \mid z \in N(Z^1)\}$.

В самом деле, пусть F — аналитическое отображение $Z^1 \times C^1 \rightarrow B^2$:

$$F(z, c) = \pi_B \delta(c + z) = d_1 c + \pi_B(\delta - d_1)(z + c);$$

очевидно, $F(0, 0) = 0$. Поскольку d_1 есть дифференциал δ , $dF_{(0,0)}$ есть просто $d_1 c$, и $c \rightarrow dF_{(0,0)}(0, c)$ — изоморфизм C^1 на B^2 . По теореме о неявных функциях уравнение $F(z, c) = 0$ можно решить относительно c в окрестности точки $(0, 0)$, а это и означает существование окрестностей $N(Z^1)$, $N(C^1)$ и аналитического $\alpha: N(Z^1) \rightarrow N(C^1)$ таких, что $(z, c) \in N(Z^1) \times N(C^1)$ удовлетворяют уравнению $F(z, c) = 0$ (и, следовательно, принадлежат M') тогда и только тогда, когда $c = \alpha(z)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Существует окрестность $N(\mathfrak{M}_1)$ точки a в Γ_n такая, что если $S \in N(\mathfrak{M}_1)$ и $\pi_B \delta S = \pi_H \delta S = 0$, то и $\pi_C \delta S = 0$, т. е. $\delta S = 0$.

Заметим, что $d_2 \cdot \delta S = d_2 \cdot d_1 S + d_2 \cdot (\delta - d_1) S = d_2 \cdot (\delta - d_1) S$ — величина высшего порядка малости по сравнению с δS , т. е., если мы введем произвольным образом нормы в пространствах $\text{Alt}^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ и $\text{Alt}^3(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$, то если $\|\delta S\| \rightarrow 0$ так, что $\delta S \neq 0$, то $\frac{\|d_2 \cdot \delta S\|}{\|\delta S\|} \rightarrow 0$. Очевидно

можно выбрать эти нормы так, чтобы d_2 было сохраняющим норму изоморфизмом пространств C^2 и B^3 . Предположим, что существует последовательность $S_n \rightarrow 0$ такая, что $\delta S_n = \pi_C \delta S_n \neq 0$. Тогда $\|d_2 \cdot \delta S_n\| = \|\delta S_n\|$, хотя $\delta S_n \rightarrow 0$, и полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть окрестности $N(\mathfrak{M}_1)$, $N(Z^1)$ и $\alpha: N(Z^1) \rightarrow C^1$ выбраны так, чтобы леммы 2 и 3 были для них верны. Обозначим через K аналитическое множество в H^n , выделяемое условием $\pi_H \delta(S + \alpha(S)) = 0$. Пусть $K' = \{S + \alpha(S) \mid S \in K\}$.

Заметим, что леммы 1, 2 и 3 дословно повторяют леммы 16.1, 19.1 и 19.2 из [2]. Поэтому непосредственной ссылкой на [2] получаем:

Теорема. Существует окрестность точки a $N(\mathfrak{M}_1, M) \subset M$ и окрестность нуля $N(C^0) \subset C^0$ такие, что отображение $(k, c) \rightarrow \exp(c) \cdot k$ есть аналитический гомеоморфизм $K' \times N(C^0)$ на $N(\mathfrak{M}_1, M)$.

Множества K и K' естественно гомеоморфны (аналитически), и вложение $\chi: K' \rightarrow K' \rightarrow \Gamma_n$ можно рассматривать как деформацию подалгебры $\mathfrak{M}_1$, параметризованную аналитическим множеством K . Из теоремы следует, что эта деформация обладает следующим свойством универсальности: если $f: D \rightarrow M \rightarrow \Gamma_n$ — произвольная деформация, то существует (локально) аналитическое отображение $\theta: D \rightarrow K$ такое, что деформации $\chi \circ \theta$ и f эквивалентны. Действительно, определено аналитическое отображение $\rho: N(\mathfrak{M}_1, M) \rightarrow K' \times N(C^0) \xrightarrow{p} K' \rightarrow K$ (p есть проекция на первый сомножитель), и нетрудно проверить, что $\rho \circ f$ и будет искомым отображением $D \rightarrow K$.

Отметим два важных частных случая:

А. Если $H_G^1 = 0$, то $K = \{0\}$, и любая деформация тривиальна. Более того, в этом случае локально $M = \{\exp(c) \cdot \mathfrak{M}_1 / c \in U\} = \{r \mathfrak{M}_1 / r \in G\}$, т. е. всякая близкая к $\mathfrak{M}_1$ подалгебра сопряжена с ней автоморфизмом из R . Это „Теорема жесткости“, доказанная (для произвольного алгебраически замкнутого поля) в [3];

Б. Если $H^2 = 0$, то локально $K = H_R^1$, т. е. M в окрестности точки a является аналитическим многообразием, размерность которого равна $\dim Z^1$.

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — n -мерная алгебра Ли над C без центра. Выберем в ней базис и вложим ее при помощи присоединенного представления в этом базисе в алгебру Ли $\mathfrak{M} = GL(n, C)$. Тогда существует деформация подалгебры $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}$ такая, что соответствующая деформация алгебры Ли $\mathfrak{M}_1$ совпадает с универсальной деформацией алгебры Ли $\mathfrak{M}_1$, включающей все близкие к $\mathfrak{M}_1$ алгебры Ли. Именно, пусть $\mathfrak{M}_1'$ — близкая к $\mathfrak{M}_1$ алгебра Ли, т. е. ее структурные константы c_{ij}' (в данном базисе; понятие близости двух алгебр Ли связано с выбором в них базиса) мало отличаются от структурных констант c_{ij} алгебры $\mathfrak{M}_1$. Тогда алгебра $\mathfrak{M}_1'$ также не имеет центра и ее также можно вложить в ее присоединенном представлении в том же базисе в алгебру $\mathfrak{M}$, причем она будет близкой к $\mathfrak{M}_1$ подалгеброй. Таким образом, в данном случае все универсальное семейство деформаций данной алгебры Ли может быть вложено в $\mathfrak{M}$. Нетрудно проверить, что в данном случае кограничное отображение $d^*: H^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1) \rightarrow H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ является эпиморфным, что и „объясняет“ предыдущий факт. Действительно, пусть $\xi: \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1$ — какой-нибудь двумерный коцикл алгебры $\mathfrak{M}_1$ со значениями в $\mathfrak{M}_1$ -модуле $\mathfrak{M}_1$. Рассмотрим теперь коцепь Ξ алгебры $\mathfrak{M}_1$ со значениями в $\mathfrak{M} = GL(n, C)$, определенную так: $\Xi(x)(y) = \xi(x, y)$ (напомним, что мы отождествляем алгебру $\mathfrak{M}_1$ с линейным пространством на котором действует алгебра $\mathfrak{M}$). Тогда ее граница $d\Xi(x, y)$ будет выглядеть так:

$$d\Xi(x, y)(z) = [\Xi(x), y](z) + [x, \Xi(y)](z) - \Xi([x, y])(z) = \Xi(x)([y, z]) - [y, \Xi(x)](z) + [x, \Xi(y)](z) - \Xi(y)([x, z]) - \Xi([x, y])(z) = -\xi([y, z], x) - \xi([z, x], y) - \xi([x, y], z) - [\xi(z, x), y] - [\xi(y, z), x].$$

Поскольку ξ — коцикл, последнее выражение равно $[\xi(x, y), z]$. Но это значит, что образ Ξ в группе $\text{Alt}^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1)$ является коциклом, и оператор d отображает этот коцикл как раз в $\xi(x, y)$, что и требовалось доказать.

Однако условие точности последовательности $H^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1) \xrightarrow{d^*} H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1) \rightarrow 0$ не является достаточным для возможности вложения универсального семейства деформаций подалгебры $\mathfrak{M}_1$ в алгебру $\mathfrak{M}$, что явствует из следующего примера.

Пусть $\mathfrak{M}$ — полупрямая сумма n -мерной коммутативной алгебры $\mathfrak{M}_1$ над C и алгебры $GL(n, C)$, которая естественным образом дейст-

уется в линейном пространстве $\mathfrak{M}_1$. Эту алгебру Ли можно отождествить с алгеброй Ли матриц порядка $n+1$ над C , у которых первый столбец состоит из нулей. Ее базисные векторы мы будем обозначать через E_{ij} , $i=0, 1, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, n$, $\mathfrak{M}_1$ есть подалгебра, натянутая на векторы E_{0j} , $j=1, \dots, n$. Поскольку $\mathfrak{M}_1$ — идеал, представление $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ тривиально, а так как $\mathfrak{M}_1$ к тому же коммутативная подалгебра, любая коцепь $\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1$ здесь будет коциклом. Каноническое отображение $\partial^*: H^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}/\mathfrak{M}_1) \rightarrow H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ эпиморфно: действительно, если $\xi(a, b)$ — произвольная 2-коцепь $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1$, $\xi(E_{0i}, E_{0j}) = \sum_{k=1}^n \xi_{ij}^k E_{0k}$, то $\xi(E_{0i}) = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \xi_{ij}^k E_{jk}$ есть коцикл, образ которого в

$\text{Alt}^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ есть как раз коцепь ξ . Таким образом, мы можем инфинитезимально построить универсальное семейство, но настоящее такое семейство построить, вообще говоря, нельзя. Пусть, например, $n=3$, тогда в универсальную деформацию трехмерной коммутативной алгебры Ли входят в частности полупростые трехмерные алгебры Ли A_1 (вообще в любой окрестности нулевого тензора $c_{ij}^k \equiv 0$ имеется тензор, задающий алгебру Ли, изоморфную произвольной алгебре Ли с произвольными структурными константами c_{ij}^k , а именно, тензор tc_{ij}^k при достаточно малом t). Докажем теперь, что в $\mathfrak{M}$ нет в некоторой окрестности $\mathfrak{M}_1$ подалгебр, изоморфных A_1 .

Для того чтобы вывести необходимое и достаточное условие существования в любой окрестности подалгебры $\mathfrak{M}_1$ подалгебры, изоморфной некоторой заданной n -мерной алгебре Ли f , предположим, что задано какое-то представление алгебры f в n -мерном пространстве V и что существует одномерный коцикл $\xi: f \rightarrow V$ алгебры f со значениями в f -модуле V такой, что если $\xi(h) = 0$, то $h = 0$. Пусть $E_1, \dots, E_n$ образуют базис в f , тогда $e_i = \xi(E_i)$ дают базис в V . Пусть $A_i = A_i(E_i)$ — матрицы, соответствующие E_i в этом базисе и $A_i = \sum_{j,k=1}^n \xi_{ij}^k E_{jk}$, где E_{jk} — стандартный базис в $GL(n, C)$: $E_{jk}(e_l) = \delta_{lj} e_k$. Тогда положим $\mathfrak{M}_1(t) \subset \mathfrak{M}$ натянутой на базис, состоящий из векторов

$$E_{0i} + t \sum_{j,k=1}^n \xi_{ij}^k E_{jk}. \quad (*)$$

Тогда, как легко видеть, $\mathfrak{M}_1(0) = \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1(t)$ изоморфно f при $t \neq 0$. Наоборот, если q — близкая к $\mathfrak{M}_1$ подалгебра, то в ней можно выбрать базис из векторов вида $E_{0i} + \sum_{j,k=1}^n \xi_{ij}^k E_{jk}$ и построить семейство $\mathfrak{M}_1(t)$

вида (*), все подалгебры которого, кроме нулевой, изоморфны q . Докажем теперь, что $\mathfrak{M}_1$ не может иметь деформации вида (*), в которую входит A_1 . Из предыдущих рассуждений видно, что, во-первых, из

этого следует, что в некоторой окрестности $\mathfrak{M}_1$ нет подалгебр, изоморфных A_1 , а, во-вторых, что для доказательства этого достаточно показать, что алгебра A_1 не имеет трехмерного представления, в котором существовал бы коцикл ξ , отображающий $A_1 \rightarrow C^3$ без ядра. Как известно, в любом представлении этой алгебры $H^1 = 0$, и поэтому нужно только показать, что не существует такой кограницы, т. е. что в любом из ее трехмерных представлений любой вектор переводится в 0 одним из ненулевых векторов A_1 . A_1 имеет всего 3 трехмерных представления: тривиальное, прямая сумма одномерного и двумерного неприводимого и неприводимое. В первых двух случаях $\dim A_1 V < 3$ и поэтому для любого $x \in C^3$ $\dim A_1 x < 3$ и отображение $x: A_1 \rightarrow C^3$ заведомо имеет ядро. Остается рассмотреть последний случай. Но это последнее представление — присоединенное, и C^3 можно отождествить с A_1 . Теперь ясно, что каждый вектор из C^3 переводится в 0 одним из векторов A_1 , а именно, самим собой (при этом отождествлении с помощью рассмотрения присоединенного представления), поскольку $[x, x] = 0$. Утверждение доказано.

Неверно также и предположение, что все близкие к $\mathfrak{M}_1$ подалгебры изоморфны ей, если это „верно локально“, т. е., если отображение $d\sigma: H^1_G \rightarrow H^2(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1)$ является нулевым (или, что то же, отображение $H^1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}) \rightarrow H^1_R$ является эпиморфизмом). В самом деле, нетрудно видеть, что если бы это было так, то отсюда следовало бы, что всякая подалгебра, близкая к центру Z , должна быть коммутативна. Однако противоречащим примером является хотя бы пятимерная алгебра Ли, натянутая на векторы x, y, z, u, v со следующим законом коммутирования: центр ее натянут на векторы x, y, z , а $[u, v] = z$. Здесь деформация центра Z , натянутая на векторы $x + tu, y + tv, z$ дает подалгебры, не изоморфные центру.

Настоящая работа выполнена под руководством А. Л. Онищика, которому я приношу глубокую благодарность.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 20.XI.1967

Ա. Կ. ՏՈՂԳԻԳՈ

ԼԻԻ ԱԼԳԵԲՐԱՆԵՐՈՒՄ ԵՆԹԱԼԳԵԲՐԱՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ն Ո Մ

Կոմպլեքս բազմաձևություններում դեֆորմացիայի գաղափարին անալոգ ձևով տրվում է Լիի ալգեբրայի ենթաալգեբրայի դեֆորմացիայի սահմանումը:

Հոդվածում ուսումնասիրվում է $\mathfrak{M}$ Լիի ալգեբրայի $\mathfrak{M}_1$ ենթաալգեբրայի դեֆորմացիաների և Լիի ալգեբրայի դեֆորմացիաների միջև եղած կապը:

Կառուցված է տված ենթաալգեբրայի դեֆորմացիաների ունիվերսալ ընտանիքը:

Վերջում քննարկվում են դեֆորմացիաների մի շարք հետաքրքիր օրինակներ:

A. K. TOLPIGO

DEFORMATIONS OF SUBALGEBRAS IN LIE ALGEBRAS

S u m m a r y

In this paper deformations of a subalgebra in Lie algebra are defined. The relationship between deformations of subalgebra in Lie algebra and deformations of Lie algebra is studied. A theorem is proved on the existence of the universal deformation of a given subalgebra. Some examples are discussed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. Nijenhuis and R. W. Richardson. Cohomology and deformations of algebraic structures, Bull. Amer. Math. Soc., 1964, 70, 406—411.
2. A. Nijenhuis and R. W. Richardson. Cohomology and deformations in graded Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 1966, 72, 1—29.
3. R. W. Richardson. A rigidity theorem for subalgebras of Lie and associative algebras, Illinois J. Math., 1967, 11, 1, 92—110.

А. А. ШМАТКОВ

КВАЗИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА
 C_z^n , КОНФОРМНЫЕ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

§ 1. В в е д е н и е

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения области $G \subset C_z^n$, конформные на комплексных прямых. Подобные отображения рассматривались автором ранее для пространства C_z^2 двух комплексных переменных (см. [7], [8]).

Квазиголоморфные отображения изучались ранее в работах С. Бергмана [1], [2], Д. Е. Рудника [4], Б. А. Фукса [5], стр. 415 — 417, С. Хитоцумату [6], А. А. Шматкова [7], [8].

В § 3 предлагаемой работы мы, исходя из локальных свойств рассматриваемых отображений, получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных для функций, определяющих указанные отображения. В § 4 мы находим решение этой системы и получаем функции, определяющие этот класс квазиголоморфных отображений в конечном виде.

Построенный класс квазиголоморфных отображений позволяет отображать друг на друга некоторые голоморфно неэквивалентные области. В частности, находится принадлежащее к полученному классу квазиголоморфных отображений гомеоморфное отображение единичного полицилиндра

$$E = \{(z_1, \dots, z_n): |z_k| < 1, k = 1, \dots, n\} \quad (1.1)$$

на гипершар

$$B = \left\{ (w_1, \dots, w_n): \sum_{k=1}^n |w_k|^2 < 1 \right\}. \quad (1.2)$$

§ 2. Вспомогательные рассуждения

В этом параграфе доказываются используемые далее леммы.

Пусть Δ_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ — элементы кососимметрической матрицы Φ порядка n :

$$\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

1. *Кососимметрический объект** четного порядка $n = 2m$ определяется равенством

* Мы придерживаемся терминологии, принятой в книге А. Дж. Мак-Коннела „Введение в тензорный анализ“, Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва, 1963, стр. 19—23.

$$\Delta_{p_1 p_2 \dots p_{2m}} = \Delta_{p_1 p_2} \Delta_{p_3 \dots p_{2m}} - \Delta_{p_1 p_3} \Delta_{p_2 \dots p_{2m}} + \dots + \Delta_{p_1 p_{2m}} \Delta_{p_2 \dots p_{2m-1}}, \quad (2.2)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_{2m} = 1, 2, \dots, n$.

Равенство (2.2) называется разложением кососимметрического объекта четного порядка $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_{2m}}$ по индексу p_1 .

Пусть $\Delta_p, p = 1, \dots, n$ — некоторые величины.

2. Кососимметрический объект нечетного порядка определяется равенством

$$\Delta_{p_1 \dots p_{2m+1}} = \Delta_{p_1} \Delta_{p_2 \dots p_{2m+1}} - \Delta_{p_2} \Delta_{p_1 p_3 \dots p_{2m+1}} + \dots + \Delta_{p_{2m+1}} \Delta_{p_1 \dots p_{2m}}, \quad (2.3)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_{2m+1} = 1, 2, \dots, n$.

Легко видеть, что кососимметрические объекты четного и нечетного порядков обладают следующими свойствами:

1. При перестановке двух рядом стоящих индексов $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_{2m}}$ и $\Delta_{p_1 p_2 \dots p_{2m+1}}$ меняют только знак.

2. Если любые два индекса совпадают, то кососимметрические объекты четного и нечетного порядков обращаются в нуль.

3. Исходя из разложений (2.2) и (2.3), можно получить разложения кососимметрических объектов четного и нечетного порядков по любому индексу p_k .

Рассмотрим матрицы

$$\Phi = \|\Delta_{ij}\|, \quad C = E - \Phi \bar{\Phi}, \quad (2.4)$$

где E — единичная матрица. Элементы матрицы C даются формулами

$$c_{pj} = \sum_{p_1=1}^n \Delta_{pp_1} \bar{\Delta}_{p_1 j}, \quad c_{jj} = 1 + \sum_{p_1=1}^n |\Delta_{p_1 j}|^2, \quad p, j = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Имеет место следующая

Лемма 2.1. Матрица C имеет обратную матрицу $\Gamma = C^{-1}$, элементы которой

$$\gamma_{ip} = \frac{1}{\sqrt{\det C}} \left\{ \sum \Delta_{ip} \bar{\Delta}_{p,p} - \sum_{p_1 < p_2 < p_3} \Delta_{ip_1 p_2 p_3} \bar{\Delta}_{p p_1 p_2 p_3} - \dots - \sum_{p_1 < \dots < p_{2m-3}} \Delta_{ip_1 \dots p_{2m-3}} \bar{\Delta}_{p p_1 \dots p_{2m-3}} \right\}, \quad (2.6)$$

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\det C}} \left\{ 1 + \sum_{p_1 < p_2}^{(i)} |\Delta_{p_1 p_2}|^2 + \dots + \sum_{p_1 < \dots < p_{2m-2}}^{(i)} |\Delta_{p_1 \dots p_{2m-2}}|^2 \right\}, \quad (2.7)$$

где

$$\sqrt{\det C} = 1 + \sum_{p_1 < p_2} |\Delta_{p_1 p_2}|^2 + \dots + \sum_{p_1 < \dots < p_{2m}} |\Delta_{p_1 \dots p_{2m}}|^2. \quad (2.8)$$

Здесь $m = \left[\frac{n}{2} \right]$ — целая часть $\frac{n}{2}$; $i, p = 1, \dots, n$.

Замечание. Здесь и далее во всех суммах $p_k = 1, \dots, n$,

$\sum^{(i)}, \sum^{(i,j)}$ — суммы с пропуском индексов $p_k = i, p_k = i, j$.

Доказательство. Для доказательства формул (2.6), (2.7) нам достаточно показать, что

$$C \cdot \Gamma = E. \quad (2.9)$$

Для упрощения записи доказательство проводится для $n=6$ (для произвольного n доказательство по существу не изменяется).

Недиагональные элементы матрицы $C \cdot \Gamma$ вычисляются по формуле

$$\sum_{p=1}^n \gamma_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{n(i,j)} \gamma_{ip} c_{pi} + \gamma_{ii} c_{ij} + \gamma_{ij} c_{jj}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Подставляя в (2.10) величины c_{pj} из формул (2.5) и величины γ_{ip} из формул (2.6), (2.7), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\det C} \cdot \sum_{p=1}^n \gamma_{ip} c_{pj} = & - \sum_p \sum_{p_1} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{jp_1} \left(\sum_{p_2} \Delta_{ip_2} \bar{\Delta}_{p_2 p} - \sum_{\substack{p_2, p_3, p_4 \\ p_2 < p_3 < p_4}} \Delta_{ip_2 p_3 p_4} \bar{\Delta}_{p_2 p_3 p_4} \right) - \\ & - \sum_{p_1} \Delta_{p_1 i} \bar{\Delta}_{jp_1} \left(1 + \sum_{\substack{p_2, p_3 \\ p_2 < p_3}} |\Delta_{p_2 p_3}|^2 + \sum_{\substack{p_2, \dots, p_5 \\ p_2 < \dots < p_5}} |\Delta_{p_2 \dots p_5}|^2 \right) + \\ & + \left(1 + \sum_{p_1} |\Delta_{p_1 i}|^2 \right) \left(\sum_{p_2} \Delta_{ip_2} \bar{\Delta}_{jp_2} - \sum_{\substack{p_2, p_3, p_4 \\ p_2 < p_3 < p_4}} \Delta_{ip_2 p_3 p_4} \bar{\Delta}_{jp_2 p_3 p_4} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

После перегруппировки слагаемых суммы (2.11) получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\det C} \cdot \sum_p \gamma_{ip} c_{pj} = & - \sum_{p_1, p_2, p} \Delta_{p_2 p} \bar{\Delta}_{jp_2} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{p_1 p} + \sum_{\substack{p_1, p_2, p \\ p_2 < p}} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{jp_1} |\Delta_{p_2 p}|^2 - \\ & - \sum_{\substack{p_1, p_2, p \\ p_1 < p_2 < p}} \Delta_{ip_1 p_2} \bar{\Delta}_{jp_1 p_2 p} - \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4, p \\ p_2 < p_3 < p_4 < p}} \Delta_{ip_1 p} \bar{\Delta}_{jp_1} \Delta_{ip_2 p_3 p_4} \bar{\Delta}_{p_2 p_3 p_4 p} + \\ & + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4, p \\ p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p}} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{jp_1} |\Delta_{p_2 p_3 p_4 p}|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Упорядочивая суммирование (то есть переходя к суммированию при $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p$), окончательно получим

$$\sqrt{\det C} \cdot \sum_p \gamma_{ip} c_{pj} = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4, p \\ p_1 < \dots < p_4 < p}} \Delta_{ip_1 \dots p_4 p} \bar{\Delta}_{jp_1 \dots p_4 p} = 0, \quad (2.13)$$

так как при $n=6$ и $i \neq j$ обязательно совпадают два индекса p_k .

Диагональные элементы матрицы $C \cdot \Gamma$ определяются по формуле

$$\sum_p \gamma_{ip} c_{pj} = \sum_p^{(i)} \gamma_{ip} c_{pi} + \gamma_{ii} c_{ii}. \quad (2.14)$$

Подставляя в формулу (2.14) входящие туда величины из (2.5), (2.6), (2.7), получим в результате аналогичной (2.12) перегруппировки слагаемых и упорядочивания суммирования

$$V \overline{\det C} \cdot \sum_p \gamma_{lp} c_{pl} = - \sum_p \sum_{p_1} \Delta_{p,p_1} \bar{\Delta}_{lp_1} \left(\sum_{p_2} \Delta_{lp_2} \bar{\Delta}_{p_2 p} - \sum_{\substack{p_2, p_3, p_4 \\ p_2 < p_3 < p_4}} \Delta_{lp_2 p_3 p_4} \bar{\Delta}_{p p_2 p_3 p_4} \right) + \\ + \left(1 + \sum_{p_1} |\Delta_{p_1 p}|^2 \right) \left(1 + \sum_{\substack{p_2, p_3 \\ p_2 < p_3}}^{(1)} |\Delta_{p_2 p_3}|^2 + \sum_{\substack{p_2, \dots, p_5 \\ p_2 < \dots < p_5}}^{(1)} |\Delta_{p_2 \dots p_5}|^2 \right) = V \overline{\det C}. \quad (2.15)$$

Итак, мы показали, что произведение матриц C и Γ дает единичную матрицу. Отсюда следует, что элементы матрицы $\Gamma = C^{-1} - \gamma_{ij}$ определяются по формулам (2.6), (2.7), и C — невырожденная матрица.

§ 3. Постановка задачи. Локальные рассуждения

Пусть функции

$$(T) \quad w_p = f_p(z), \quad p = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

принадлежащие к классу гладкости $C^1(G)$ в области $G \subset \mathbb{C}_z^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, осуществляют отображение области $G \subset \mathbb{C}_z^n$ на некоторую область $G^* \subset \mathbb{C}_w^n$. Пусть точка $Q \in G$, а точка $Q^* = TQ$. Перенесем начало координат пространства $\mathbb{C}_z^n$ в точку Q , пространства $\mathbb{C}_w^n$ — в точку Q^* и рассмотрим дифференциал отображения (3.1)

$$(T_d) \quad W = AZ + B\bar{Z}, \quad (3.2)$$

где

$$W = (w_1, \dots, w_n)', \quad A = \|a_{ij}\|, \quad B = \|b_{ij}\|, \quad Z = (z_1, \dots, z_n)'. \quad (3.3)$$

Матрицы A и B мы будем называть соответственно *матрицами голоморфной и антиголоморфной частей отображения T в точке Q* .

Здесь

$$a_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial z_j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

где все производные вычислены в начале координат.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}_z^n$ гиперсферу

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C}_z^n; \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = 1 \right\} \quad (3.5)$$

и сечение S_ω этой гиперсферы комплексной прямой

$$\{\omega\} \quad z_p = \omega_p t, \quad p = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Полагая $t = re^{i\varphi}$, получим, что на S_ω

$$r = \left(\sum_{k=1}^n |\omega_k|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad z_p = \omega_p e^{i\varphi} \left(\sum_{k=1}^n |\omega_k|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad p = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

При отображении T_d , $T_d S_\omega$, вообще говоря, — некоторый эллипс. Потребуем, чтобы $T_d S_\omega$ являлось окружностью для любой комплексной прямой $\{\omega\}$. Комплексные прямые $\{\omega\}$, вообще говоря, теряют свой аналитический характер.

Определение 1. Отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbb{C}_z^n$ на область $G^* \subset \mathbb{C}_w^n$ принадлежит к классу квазиголоморфных отображений B_0 в точке $Q \in G$, если: 1) его голоморфная часть в точке Q не вырождена, 2) дифференциал T_d , вычисленный в точке Q , сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие во всех комплексных прямых, проходящих через точку Q .

Имеет место

Лемма 3.1. Для того чтобы отображение T принадлежало к классу отображений B_0 в точке Q необходимо и достаточно выполнение условий

$$A' \bar{B} = \bar{\Psi}. \quad (3.8)$$

Здесь Ψ — произвольная кососимметрическая матрица.

Доказательство. Пусть κ — коэффициент линейного искажения при отображении T_d в направлении вектора $\{\omega_p e^{i\varphi}\}$, $p = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \kappa^2 = \sum_{p=1}^n |w_p|^2 = \frac{1}{\sum_{p=1}^n |\omega_p|^2} & \left\{ \left| \sum_{q=1}^n a_{pq} \omega_q \right|^2 + \sum_{q,r=1}^n a_{pq} \bar{b}_{pr} \omega_q \omega_r e^{2i\varphi} + \right. \\ & \left. + \sum_{q,r=1}^n \bar{a}_{pq} b_{pr} \bar{\omega}_q \bar{\omega}_r e^{-2i\varphi} + \left| \sum_{q=1}^n \bar{b}_{pq} \omega_q \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \kappa_{\max}^2, \kappa_{\min}^2 = \frac{1}{\sum_{p=1}^n |\omega_p|^2} & \left\{ \pm 2 \left| \sum_{p=1}^n \left(\sum_{q,r=1}^n a_{pq} \bar{b}_{pr} \omega_q \omega_r \right) \right| + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^n \left(\left| \sum_{q=1}^n a_{pq} \omega_q \right|^2 + \left| \sum_{q=1}^n \bar{b}_{pq} \omega_q \right|^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для сохранения окружностей на комплексных прямых $\{\omega\}$ необходимо и достаточно, чтобы $\kappa_{\max} = \kappa_{\min}$, что благодаря (3.10) равносильно условию

$$\sum_{p=1}^n (a_{p1} \omega_1 + \dots + a_{pn} \omega_n) (\bar{b}_{p1} \omega_1 + \dots + \bar{b}_{pn} \omega_n) = 0. \quad (3.11)$$

Так как окружности должны сохраняться на всех комплексных прямых $\{\omega\}$, то a_{pq}, b_{pq} , $p, q = 1, \dots, n$, должны удовлетворять системе уравнений

$$\omega_q: \sum_{p=1}^n a_{pq} \bar{b}_{pq} = 0; \quad \omega_q \omega_r: \sum_{p=1}^n (a_{pq} \bar{b}_{pr} + a_{pr} \bar{b}_{pq}) = 0; \quad q = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Равенства (3.12) равносильны условию (3.8). Лемма доказана.

Лемма 3.2. Произвольная кососимметрическая матрица Ψ может быть представлена в виде

$$\Psi = A' \Phi A, \quad (3.13)$$

где A — произвольно данная невырожденная матрица, являющаяся матрицей голоморфной части отображения T в точке Q , Φ — кососимметрическая матрица.

Доказательство. То, что $A' \Phi A$ является кососимметрической матрицей, проверяется непосредственно. Из невырожденности матрицы A и из уравнения (3.13) вытекает, что матрица Φ определяется по матрице Ψ однозначно.

Лемма 3.3. Уравнение

$$A' \bar{B} = \bar{\Psi} \quad (3.14)$$

(где A и B — матрицы голоморфной и антиголоморфной частей отображения T_d , матрица A невырождена, Ψ — некоторая данная кососимметрическая матрица), равносильно уравнению

$$\bar{B} = \bar{\Phi} A, \quad (3.15)$$

где Φ — некоторая кососимметрическая матрица.

Доказательство. Лемма вытекает из леммы 3.2 и невырожденности матрицы A .

Из лемм 3.1 и 3.3 имеем

Следствие. Для того чтобы отображение T принадлежало к классу отображений B_0 в точке Q необходимо и достаточно выполнение условий

$$\bar{B} = \bar{\Phi} A,$$

где Φ — произвольная кососимметрическая матрица.

Имеет место

Теорема 3.1. Для того чтобы отображение $T \in C^1(G)$ области $G \subset \mathbb{C}_z^n$ на область $G^* \subset \mathbb{C}_w^n$ принадлежало к классу B_0 квазиголоморфных отображений в точке $Q \in G$ необходимо и достаточно, чтобы дифференциал T_d , вычисленный по формуле (3.2), в точке Q имел вид

$$(T_i) \omega_i = \sqrt{\frac{1}{\det(E - \Phi \bar{\Phi})}} \left\{ \Delta_i + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} \left[\bar{\Delta}_{p_1 \dots p_{2k}} \Delta_{ip_1 \dots p_{2k}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta_{ip_1 \dots p_{2k+1}} \bar{\Delta}_{p_1 \dots p_{2k+1}} \right] \right\}, \quad i=1, \dots, n. \quad (3.16)$$

При этом

$$V \sqrt{\det(E - \Phi \bar{\Phi})} = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} |\Delta_{p_1 \dots p_{2k}}|^2. \quad (3.17)$$

Здесь $\Phi = [\Delta_{ij}]$ — кососимметрическая матрица, удовлетворяющая соотношению $\bar{B} = \bar{\Phi} A$, $\Delta = [\Delta_i] = (E - \Phi \bar{\Phi}) A Z$ — матрица-столбец, A и B — матрицы голоморфной и антиголоморфной частей отобра-

жения T в точке Q , матрица A предполагается невырожденной, $\Delta_{p_1, \dots, p_{2k}}, \Lambda_{p_1, \dots, p_{2k+1}}$ — кососимметрические объекты четного и нечетного порядков, построенные с помощью матриц Φ и Λ , $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Доказательство. Рассмотрим дифференциал T_d отображения T

$$(T_d) \quad W = AZ + B\bar{Z},$$

где W, A, B, Z — ранее определенные матрицы (см. формулы (3.2), (3.3)).

В силу следствия из лемм 3.1, 3.3 отображение $T \subset B_0$ тогда и только тогда, если $\bar{B} = \bar{\Phi}A$. Итак, для того чтобы отображение $T \subset B_0$ необходимо и достаточно, чтобы дифференциал T_d , вычисленный в точке Q , имел вид

$$(T_d) \quad W = AZ + \Phi \bar{A} \bar{Z}. \quad (3.18)$$

Докажем сначала, что уравнение (3.18) равносильно уравнению

$$W = (E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} (\Phi \bar{\Lambda} + \Lambda), \quad (3.19)$$

где $\Lambda = (E - \Phi \bar{\Phi}) AZ$.

Необходимость. Пусть имеет место равенство (3.18).

Решая это уравнение с ему сопряженным, получим

$$W = \Phi \bar{W} + (E - \Phi \bar{\Phi}) AZ = \Phi \bar{W} + \Lambda. \quad (3.20)$$

Решая уравнение (3.20) с ему сопряженным, получим равенство (3.19).

Достаточность. Обратное утверждение легко следует из уравнения (3.19) и равенства

$$(E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} \Phi = \Phi (E - \bar{\Phi} \Phi)^{-1}, \quad (3.21)$$

которое проверяется непосредственно.

Обратимся к доказательству равенства (3.16). Мы проведем вычисления для $n = 6$ (в общем случае они проводятся совершенно аналогично).

Вычислим сначала $(E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} \Lambda$:

$$\begin{aligned} \sum_p \gamma_{ip} \Lambda_p &= \sum_p^{(i)} \gamma_{ip} \Lambda_p + \gamma_{ii} \Lambda_i = \Lambda_i + \sum_{p_1, p} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{p_1 p} \Lambda_p + \sum_{\substack{p_1, p \\ p_1 < p}}^{(i)} |\Delta_{p_1 p}|^2 \Lambda_i + \\ &+ \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{ip_1 p_2 p_3} \bar{\Delta}_{p_1 p_2 p_3} \Lambda_p + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3 < p}}^{(i)} |\Delta_{p_1 p_2 p_3}|^2 \Lambda_i, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Группируя слагаемые по два, начиная со второго слагаемого, и упорядочивая суммирование (то есть переходя к суммированию при $p_1 < p_2 < p_3 < p$), получим формулу для $(E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} \Lambda$

$$\sum_p \gamma_{ip} \Lambda_p = \Lambda_i + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Lambda_{ip_1 p_2} + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \dots p_4} \Lambda_{ip_1 \dots p_4}. \quad (3.23)$$

Теперь вычислим $(E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} \Phi$:

$$\begin{aligned} \sum_p \gamma_{ip} \Delta_{pj} &= \sum_p^{(i)} \gamma_{ip} \Delta_{pj} + \gamma_{ii} \Delta_{ij} = \Delta_{ij} + \sum_{p_1, p} \Delta_{pj} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{p_1 p} + \\ &+ \sum_{\substack{p_1, p \\ p_1 < p}} \Delta_{ij} |\Delta_{p_1 p}|^2 + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{pj} \Delta_{ip_1 p_2 p_3} \bar{\Delta}_{p_1 p_2 p_3 p} + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3 < p}} \Delta_{ij} |\Delta_{p_1 p_2 p_3 p}|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Группируя, как и ранее, слагаемые по два, начиная со второго слагаемого, и упорядочивая суммирование, получим формулу для произведения $(E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} \Phi$. В конечном результате мы заменяем индекс j на p :

$$\Gamma_{ip} = \sum_{p_1} \gamma_{ip_1} \Delta_{p_1 p} = \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Delta_{ip_1 p_2 p} + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \dots p_4} \Delta_{ip_1 \dots p_4 p} + \Delta_{ip}. \quad (3.25)$$

Обратимся к получению $(E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} \Phi \bar{\Lambda}$:

$$\sum_p \Gamma_{ip} \bar{\Lambda}_p = \sum_p \bar{\Lambda}_p \left(\sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Delta_{ip_1 p_2 p} + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \dots p_4} \Delta_{ip_1 \dots p_4 p} + \Delta_{ip} \right). \quad (3.26)$$

Переходя к суммированию при $p_1 < \dots < p_4 < p$, получим

$$\sum_p \Gamma_{ip} \bar{\Lambda}_p = \sum_p \Delta_{ip} \bar{\Lambda}_p + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{ip_1 p_2 p_3} \bar{\Lambda}_{p_1 p_2 p_3} + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} \Delta_{ip_1 \dots p_4} \bar{\Lambda}_{p_1 \dots p_4}. \quad (3.27)$$

Учитывая формулы (3.23) и (3.27), мы получим для дифференциала отображения $T \subset B_0$ в случае $n = 6$ формулу

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{1}{\sqrt{\det(E - \Phi \bar{\Phi})}} \left\{ \Lambda_i + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Lambda_{ip_1 p_2} + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \dots p_4} \Lambda_{ip_1 \dots p_4} + \right. \\ &+ \sum_p \Delta_{ip} \bar{\Lambda}_p + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{ip_1 p_2 p_3} \bar{\Lambda}_{p_1 p_2 p_3} + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} \Delta_{ip_1 \dots p_4} \bar{\Lambda}_{p_1 \dots p_4}, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$\sqrt{\det(E - \Phi \bar{\Phi})} = 1 + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} |\Delta_{p_1 p_2}|^2 + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_4 \\ p_1 < \dots < p_4}} |\Delta_{p_1 \dots p_4}|^2 + |\Delta_{12 \dots 6}|^2. \quad (3.29)$$

Аналогичные вычисления приводят к формулам (3.16) и (3.17).

Итак, мы показали, что определение 1 эквивалентно в силу теоремы 3.1 следующему определению:

Определение 2. Отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbb{C}_z^n$ на область $G^* \subset \mathbb{C}_w^n$ принадлежит к классу квазиголоморфных отображе-

ний B_0 в точке $Q \in G$, если его голоморфная часть в точке Q невырождена, дифференциал T_d , вычисленный в точке Q , имеет вид T_1 .

Рассмотрим углы между двумя направлениями, лежащими в комплексной прямой, проходящей через некоторую точку Q .

Имеет место следующая

Теорема 3.2. Для того чтобы отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbb{C}_x^n$ на область $G^* \subset \mathbb{C}_w^n$ принадлежало к классу квазиголоморфных отображений B_0 в точке $Q \in G$ необходимо и достаточно, чтобы отображение T_d сохраняло углы между любыми направлениями, принадлежащими к одной и той же комплексной прямой, проходящей через эту точку.

Доказательство. Возьмем на комплексной прямой $z_p = \omega_p t$, $p = 1, \dots, n$ векторы

$$I = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}, \quad II = \{\omega_1 e^{i\varphi}, \dots, \omega_n e^{i\varphi}\}, \quad (3.30)$$

составляющие между собой угол φ . В результате отображения T_d (см. формулу (3.2)) они перейдут в векторы

$$I^* = \{L + M\}, \quad II^* = \{Le^{i\varphi} + Me^{-i\varphi}\}, \quad (3.31)$$

где L и M — векторы с составляющими L_p и M_p , $p = 1, \dots, n$,

$$L_p = \sum_{k=1}^n a_{pk} \omega_k, \quad M_p = \sum_{k=1}^n \bar{b}_{pk} \omega_k.$$

Пусть ψ — угол между векторами I^* , II^* .

Тогда соответствующие вычисления показывают, что

$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi + F^{-1} |(L, M)| \cos (\varphi + \theta)}{\sqrt{1 + F^{-1} |(L, M)| \cos \theta} \sqrt{1 + F^{-1} |(L, M)| \cos (2\varphi + \theta)}}, \quad (3.32)$$

где $F = \frac{1}{2}(|L|^2 + |M|^2)$, $\theta = \arg (L, M)$.

Теперь теорема легко получается из равенства (3.32).

Пусть отображение $T \subset B_0$, тогда, как это вытекает из равенства (3.11),

$$(L, M) = 0. \quad (3.33)$$

Из равенства (3.32) следует, что тогда $\cos \psi = \cos \varphi$.

Если углы между направлениями сохраняются, то $\cos \varphi = \cos \psi$. Из равенства (3.32) следует, что это возможно только в том случае, если имеет место равенство (3.33), то есть если отображение $T \subset B_0$.

Итак, определения 1 и 2 эквивалентны следующему определению:

Определение 3. Отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbb{C}_x^n$ на область $G^* \subset \mathbb{C}_w^n$ принадлежит к классу квазиголоморфных отображений B_0 в точке $Q \in G$, если его голоморфная часть в этой точке невырождена, во всех комплексных прямых, проходящих через точку Q , отображение T_d сохраняет углы между направлениями, принадлежащими к этим комплексным прямым.

Итак, мы установили, что следующие три требования приводят к одному и тому же классу квазиголоморфных отображений B_G в точке $Q \in G$, обладающих свойством конформности на комплексных прямых.

1. Требуется, чтобы при отображении T_d , вычисленном в точке $Q \in G$, сохранялись окружности с центром в этой точке, лежащие на комплексных прямых, проходящих через точку Q .

2. Требуется, чтобы при отображении T_d , вычисленном в точке $Q \in G$, сохранялись углы между векторами, выходящими из этой точки, принадлежащие к комплексным прямым, проходящим через точку Q .

3. Требуется, чтобы дифференциал T_d отображения T , вычисленный в точке $Q \in G$, имел вид T_1 .

§ 4. Построение квазиголоморфных отображений области $G \subset \mathbb{C}_n^n$, конформных на комплексных прямых

Лемма 4.1. Даны невырожденная матрица $\Omega = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$, и кососимметрические матрицы $U_k = \|u_{ij}^{(k)}\|$, $i, j, k = 1, \dots, n$.

Для того чтобы кососимметрические матрицы U_k , $k = 1, \dots, n$ были нулевыми необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$U_k X_m = U_m X_k, \quad k < m, \quad k, m = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Здесь $X_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$, $i = 1, \dots, n$ — матрицы-столбцы.

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна. Докажем достаточность. Представим каждую матрицу U_k , $k = 1, \dots, n$ в виде

$$U_k = (\Omega^{-1})' V_k \Omega^{-1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

где $V_k = \|v_{ij}^{(k)}\|$, $i, j, k = 1, \dots, n$ — кососимметрическая матрица порядка n . Это возможно, в силу леммы 3.2. В этом случае равенство (4.1) равносильно следующему:

$$V_k E_m = V_m E_k, \quad k < m, \quad k, m = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

где векторы E_i , $i = 1, \dots, n$ образуют простейший базис.

В силу равенства (4.3) матрицы V_k , $k = 1, \dots, n$ имеют следующую структуру (мы предполагаем, что $i \leq j \leq k$):

$$V_i = \begin{vmatrix} v_{11}^{(i)} & \dots & v_{1i}^{(i)} & \dots & v_{1i}^{(j)} & \dots & v_{1i}^{(k)} & \dots & v_{1i}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{j1}^{(i)} & \dots & v_{ji}^{(i)} & \dots & v_{ji}^{(j)} & \dots & v_{ji}^{(k)} & \dots & v_{ji}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{ki}^{(i)} & \dots & v_{ki}^{(j)} & \dots & v_{ki}^{(k)} & \dots & v_{ki}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{ni}^{(i)} & \dots & v_{ni}^{(j)} & \dots & v_{ni}^{(k)} & \dots & v_{ni}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Докажем, что все элементы матрицы V_k , $k = 1, \dots, n$, с индексами, меньшими или равными k , равны нулю. Отсюда наша лемма вы-

текает немедленно, так как тогда V_n — нулевая матрица. В матрице V_{n-1} последний столбец нулевой (последний столбец матрицы V_{n-1} состоит из элементов матрицы V_n). Воспользовавшись кососимметричностью, получим, что V_{n-1} — нулевая матрица; и так далее.

Из того, что матрицы V_k , $k=1, \dots, n$ — нулевые, на основании равенства (4.2) заключаем, что U_k , $k=1, \dots, n$ — также нулевые матрицы.

Рассмотрим матрицы V_i , V_j , V_k , $i \leq j \leq k$, $i, j, k=1, \dots, n$. Легко видеть, что выполняются следующие соотношения. (Мы пользуемся их кососимметричностью).

$$\begin{cases} v_{ij}^{(k)} + v_{ji}^{(k)} = 0 & \text{из рассмотрения матрицы } V_k; \\ v_{ij}^{(k)} + v_{ki}^{(j)} = 0 & \text{из рассмотрения матрицы } V_i; \\ v_{ji}^{(k)} + v_{ki}^{(j)} = 0 & \text{из рассмотрения матрицы } V_j. \end{cases} \quad (4.5)$$

Из системы (4.5) следует, что $v_{ij}^{(k)} = 0$, $i \leq j \leq k$, $i, j, k=1, \dots, n$.

Лемма доказана.

Переходим к доказательству основной теоремы.

Теорема 4.1. I. Отображение T^* области $G \subset \mathbb{C}_z^n$, определяемое равенствами

$$\begin{aligned} (T^*) w_i = & \frac{1}{V \det(E - \Phi \bar{\Phi})} \left\{ \Delta_i + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} \bar{\Delta}_{p_1, \dots, p_{2k}} \Delta_{ip_1, \dots, p_{2k}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} \Delta_{ip_1, \dots, p_{2k+1}} \bar{\Delta}_{p_1, \dots, p_{2k+1}} \right] \right\}, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

принадлежит к классу квазиголоморфных отображений B_0 , если $\det A = \frac{\partial(w_1, \dots, w_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \neq 0$. Здесь Δ_i , $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$, $i, j=1, \dots, n$ — функции, голоморфные в области G , $\Delta_{p_1, \dots, p_{2k}}$, $\Delta_{p_1, \dots, p_{2k+1}}$ — кососимметрические объекты четного и нечетного порядков, составленные из функций Δ_{ij} и Δ_i , $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$, $m = \left[\frac{n}{2} \right]$.

II. Если отображение $T \{w_p = f_p(z), p=1, \dots, n\} \subset B_0$ в каждой точке $Q \in G$ и функции, определяющие это отображение, принадлежат $C^2(G)$, то в некоторой окрестности точки Q оно может быть представлено в виде T^* , где Δ_i , Δ_{ij} — функции, голоморфные в точке Q .

Каждое гомеоморфное отображение T^* области G принадлежит к классу квазиголоморфных отображений B_0 .

Доказательство. Утверждение I проверяется непосредственно. Докажем утверждение II.

Если отображение $T \subset B_0$ во всякой точке $Q \in G$, то функции w_p , $p=1, \dots, n$ удовлетворяют (как это следует из леммы (3.3)) системе дифференциальных уравнений, записанных с помощью формальных производных

$$\bar{B} = \bar{\Phi} A, \quad (4.7)$$

где $A = \left\| \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \right\|$ — матрица голоморфной части,

$B = \left\| \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{z}_j} \right\|$ — матрица антиголоморфной части, $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$ — кососимметрическая матрица, элементы которой Δ_{ij} — пока произвольные функции класса $C^1(G)$.

В силу равенства (4.7) имеем

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial z_j} = \sum_{p=1}^n \bar{\Delta}_{ip} \frac{\partial w_p}{\partial z_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Выпишем еще одно равенство:

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial z_q} = \sum_{p=1}^n \bar{\Delta}_{ip} \frac{\partial w_p}{\partial z_q}, \quad i, q = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Дифференцируя теперь (4.8) по z_q , (4.9) — по z_j и вычитая из первого полученного равенства второе, имеем

$$\sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\Delta}_{ip}}{\partial z_q} \frac{\partial w_p}{\partial z_j} - \frac{\partial \bar{\Delta}_{ip}}{\partial z_j} \frac{\partial w_p}{\partial z_q} \right) = 0, \quad i, j, q = 1, \dots, n. \quad (4.10)$$

Или в матричной форме

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z_q} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_j} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_q}, \quad j, q = 1, \dots, n, \quad (4.11)$$

где $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$, $W = (w_1, \dots, w_n)$ — матрица-столбец.

Так как $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z_i}$, $i = 1, \dots, n$, кососимметрична и $\frac{\partial (w_1, \dots, w_n)}{\partial (z_1, \dots, z_n)} \neq 0$,

на основании леммы 4.1 заключаем, что $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z_i}$, $i = 1, \dots, n$ — нулевые матрицы.

Таким образом, мы показали, что Δ_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ — голоморфные функции.

Допустим, что функции w_p , $p = 1, \dots, n$, удовлетворяют системе (4.7) или, что то же самое, системе (4.8) в области G . Положим

$$\Lambda_i = w_i - \sum_{p=1}^n \Delta_{ip} \bar{w}_p, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.12)$$

где Δ_{ip} — произвольные голоморфные функции в области G , Λ_i — функции класса $C^1(G)$.

Определенные равенствами (4.12) функции Λ_i , $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Действительно, в силу (4.8)

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial z_q} = \frac{\partial w_i}{\partial z_q} - \sum_{p=1}^n \Delta_{ip} \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial z_q} = 0, \quad i, q = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

Перепишем теперь систему (4.12) в матричной форме

$$W = \Phi \bar{W} + \varphi, \quad (4.14)$$

где $W = (w_1, \dots, w_n)'$; $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$, $\varphi = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)'$, λ_p , $p=1, \dots, n$ — голоморфные функции в области G .

Из уравнения (4.14) легко получается, что

$$W = (E - \Phi \bar{\Phi})^{-1} (\Phi \bar{\varphi} + \varphi), \quad (4.15)$$

где E — единичная матрица порядка n .

Воспользовавшись теперь теоремой 3.1, мы получим отображение $T \subset B_0$ в форме (4.6).

Замечание. Полученное отображение T^* не является вырожденным, так как

$$I = \frac{\partial (w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)}{\partial (z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} = \sqrt{\det (E - \Phi \bar{\Phi})} \cdot \text{mod}^2 \det A \neq 0, \quad (4.16)$$

где $A = \left\| \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \right\|$.

§ 5. Примеры биголоморфно неэквивалентных областей, эквивалентных относительно класса квазиголоморфных отображений B_0

Теорема 5.1. Отображение

$$(S) \quad w_i = z_i \frac{(1 - |z_1|^2) \cdots (1 - |z_{i-1}|^2) (1 + |z_{i+1}|^2) \cdots (1 + |z_n|^2)}{\Gamma_n}, \quad i=1, \dots, n, \quad (5.1)$$

где $\Gamma_n = 1 + \sum_{k=1}^m |z_1 \cdots z_{2k}|^2$, $m = \left[\frac{n}{2} \right]$, принадлежащее к классу B_0 в единичном полицилиндре $E = \{(z_1, \dots, z_n) : |z_i| < 1, i=1, \dots, n\}$, осуществляет гомеоморфное отображение этого полицилиндра на единичный гипершар $B = \left\{ (w_1, \dots, w_n) : \sum_{i=1}^n |w_i|^2 < 1 \right\}$.

Доказательство. Полагая в формулах (4.6)

$$\Delta_{ij} = z_i, \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} z_i z_j, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если } i = j, i, j=1, \dots, n, \\ -z_i z_j, & \text{если } i > j, \end{cases} \quad (5.2)$$

получим отображение (5.1), принадлежащее к классу B_0 в единичном полицилиндре E .

Нетрудно показать, что

$$\sum_{k=1}^n |w_k|^2 = \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \cdots z_{p_{2k+1}}|^2 (1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \dots z_{p_{2k}}|^2 \Big)^{-1}. \quad (5.3)$$

Из формулы (5.3) вытекает, что отображение (5.1) переводит внутренность единичного полицилиндра E во внутренность гипершара B .

Нам остается доказать лишь гомеоморфизм отображения (5.1).

Заметим, что точки $z_i = 0$, $i=1, \dots, n$, и только они переходят при отображении (5.1) в точки $w_i = 0$, $i=1, \dots, n$. Поэтому мы можем предполагать, что $z_i \neq 0$ для всех $i=1, \dots, n$.

Пусть различным точкам $(z_1, \dots, z_n)$, $(z_1^*, \dots, z_n^*) \in E$ соответствует при отображении (5.1) одна точка $(w_1, \dots, w_n)$. Обозначим

$$z_k^* = \alpha_k z_k, \quad k=1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Из формул (5.1), в силу сделанных предположений, вытекает, что

$$\alpha_i \frac{(1 - |\alpha_1 z_1|^2) \dots (1 - |\alpha_{i-1} z_{i-1}|^2)(1 + |\alpha_{i+1} z_{i+1}|^2) \dots (1 + |\alpha_n z_n|^2)}{\Gamma_n^*} = \\ = \frac{(1 - |z_1|^2) \dots (1 - |z_{i-1}|^2)(1 + |z_{i+1}|^2) \dots (1 + |z_n|^2)}{\Gamma_n}, \quad i=1, \dots, n, \quad (5.5)$$

где

$$\Gamma_n = 1 + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \dots z_{p_{2k}}|^2, \quad \Gamma_n^* = 1 + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} |\alpha_{p_1} \dots \alpha_{p_{2k}} z_{p_1} \dots z_{p_{2k}}|^2,$$

$$m = \left[\frac{n}{2} \right].$$

Из уравнений (5.5) следует, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — положительные числа, причем

$$|\alpha_k z_k| < 1, \quad |z_k| < 1, \quad k=1, \dots, n. \quad (5.6)$$

Рассмотрим i -ое и $(i+1)$ -ое уравнения системы (5.5). Поделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \frac{1 - |\alpha_i z_i|^2}{1 + |\alpha_{i+1} z_{i+1}|^2} = \frac{1 - |z_i|^2}{1 + |z_{i+1}|^2}. \quad (5.7)$$

Или иначе

$$(\alpha_{i+1} - \alpha_i)(1 + \alpha_i \alpha_{i+1} |z_i z_{i+1}|^2) = (\alpha_i |z_i|^2 + \alpha_{i+1} |z_{i+1}|^2)(\alpha_i \alpha_{i+1} - 1). \quad (5.8)$$

Если $\alpha_i \alpha_{i+1} - 1 = 0$, то из уравнения (5.8) следует, что $\alpha_i = \alpha_{i+1} = 1$. Исключив пока этот случай из рассмотрения, мы можем записать равенство (5.8) в следующем виде:

$$\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i \alpha_{i+1} - 1} = \frac{\alpha_i |z_i|^2 + \alpha_{i+1} |z_{i+1}|^2}{1 + \alpha_i \alpha_{i+1} |z_i z_{i+1}|^2}. \quad (5.9)$$

Из уравнения (5.9) имеем

$$0 < \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_i \alpha_{i+1} - 1} \leq 1. \quad (5.10)$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{либо } \alpha_{i+1} \leq \alpha_i \leq 1, \text{ либо } \alpha_{i+1} > \alpha_i > 1, i=1, \dots, n-1 \quad (5.11)$$

(здесь мы учитываем и тот случай, который был ранее исключен из рассмотрения).

Так как различные точки $(z_1, \dots, z_n), (\alpha_1 z_1, \dots, \alpha_n z_n) \in E$, в силу нашего предположения, переходят при отображении (5.1) в одну и ту же точку $(w_1, \dots, w_n)$, из формулы (5.3) вытекает, что

$$\frac{\sum_{k=0}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \dots z_{p_{2k+1}}|^2}{1 + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \dots z_{p_{2k}}|^2} = \frac{\sum_{k=0}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} \alpha_{p_1}^2 \dots \alpha_{p_{2k+1}}^2 |z_{p_1} \dots z_{p_{2k+1}}|^2}{1 + \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} \alpha_{p_1}^2 \dots \alpha_{p_{2k}}^2 |z_{p_1} \dots z_{p_{2k}}|^2}, \quad (5.12)$$

где m — указанное ранее число.

Непосредственно проверяется, что из равенства (5.12) следует

$$\sum_{i=1}^n |z_i|^2 (\alpha_i^2 - 1)(1 - \alpha_i^2 |z_1|^4) \dots (1 - \alpha_{i-1}^2 |z_{i-1}|^4)(1 - \alpha_{i+1}^2 |z_{i+1}|^4) \dots (1 - \alpha_n^2 |z_n|^4) + \\ + \sum_{k=1}^m \prod_{k=1}^k (\alpha_{2k+1}^2 - 1) \dots (\alpha_{2k+1}^2 - 1) |z_1 \dots z_{2k+1}|^2 = 0. \quad (5.13)$$

Отсюда, в силу (5.11), вытекает, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1. \quad (5.14)$$

На этом заканчивается доказательство гомеоморфизма отображения (5.1)*.

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=1}^i |w_k|^2 = \frac{(1 + |z_{i+1}|^2)^2 \dots (1 + |z_n|^2)^2}{\Gamma_n^2} \sum_{k=0}^q \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \dots z_{p_{2k+1}}| \Gamma_i, \quad (5.15)$$

где $i=1, \dots, n, q = [i/2]$. Отсюда следует

Предложение. Граничные гиперповерхности $\{|z_i| = 1, |z_k| < 1, k \neq i, k=1, \dots, n\}$ переходят при отображении (5.1) в гиперсферы

$$\sum_{k=1}^i |w_k|^2 = 1. \quad (5.16)$$

Это утверждение вытекает из (5.15), если заметить, что при $|z_i| = 1$

$$\Gamma_n = (1 + |z_1|^2) \dots (1 + |z_{i-1}|^2)(1 + |z_{i+1}|^2) \dots (1 + |z_n|^2) \quad (5.17)$$

* Можно доказать, что якобиан отображения (S) отличен от нуля всюду в области E и обращается в нуль лишь на границе E .

и

$$\sum_{k=0}^q \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1}-1 \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \dots z_{p_{2k+1}}|^2 = \Gamma_l = (1 + |z_1|^2) \dots (1 + |z_{l-1}|^2). \quad (5.18)$$

Приведем еще один пример голоморфно неэквивалентных областей, эквивалентных относительно класса B_0 квазиголоморфных отображений.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}_2^2$ комплексных переменных z_1, z_2 .

Возьмем в (4.6) $\Delta_{12} = z_2 f(z_1)$, где $f(z_1)$ — голоморфная функция в круге $|z_1| < 1$ и $f(0) = 0$, $\Lambda_1 = z_1$, $\Lambda_2 = z_2$.

Справедлива следующая

Теорема 5.2. Отображение

$$w_1 = \frac{z_1 + |z_2|^2 f(z_1)}{1 + |z_2 f(z_1)|^2}, \quad w_2 = z_2 \frac{1 - \bar{z}_1 f(z_1)}{1 + |z_2 f(z_1)|^2}, \quad (5.19)$$

где $f(z_1)$ ($|f(z_1)| < 1$) — функция, голоморфная в круге $|z_1| < 1$, и $f(0) = 0$, принадлежащее к классу B_0 в полукруговой области

$$G = \left\{ (z_1, z_2) : |z_2|^2 < \frac{1 - |z_1|^2}{1 - |f(z_1)|^2} \right\}, \quad (5.20)$$

осуществляет локально гомеоморфное отображение этой области на единичный гипершар $B = \{(w_1, w_2) : |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$.

Доказательство. Из (5.19) имеем

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{1 + |z_2 f(z_1)|^2}. \quad (5.21)$$

Из равенства (5.21) следует, что область (5.20) отображается на единичный гипершар B .

Докажем теперь локальную гомеоморфность этого отображения. Вычислим

$$I = (1 + |z_2 f(z_1)|^2)^{-2} \left| \frac{\partial (w_1, w_2)}{\partial (z_1, z_2)} \right|^2. \quad (5.22)$$

В результате вычислений получим

$$I = \frac{1 - \bar{z}_1 f(z_1) + |z_2|^2 f'(z_1)(1 - \bar{z}_1 f(z_1))}{(1 + |z_2 f(z_1)|^2)^4}, \quad (5.23)$$

или

$$I = |1 - \bar{z}_1 f(z_1)| e^{-i\psi} \frac{e^{2i\psi} + |z_2|^2 f'(z_1)}{(1 + |z_2 f(z_1)|^2)^4}, \quad (5.24)$$

где $\psi = \arg(1 - \bar{z}_1 f(z_1))$.

Имеем $1 - \bar{z}_1 f(z_1) \neq 0$ в рассматриваемой области, в силу условий $|z_1| < 1$, $|f(z_1)| < 1$. Это выражение может обращаться в нуль лишь на границе рассматриваемой области.

Предположим теперь, что

$$e^{2\alpha} + |z_2|^2 f'(z_1) = 0. \quad (5.25)$$

Отсюда следует, что

$$|z_2|^2 = |f'(z_1)|^{-1}. \quad (5.26)$$

(Заметим, что в точке $(0, 0)$ $f'(0, 0) \neq 0$. Поэтому мы можем точку $(0, 0)$ исключить из рассмотрения).

Из равенства (5.26) и неравенства (5.20) вытекает оценка

$$|f'(z_1)| > \frac{1 - |f(z_1)|^2}{1 - |z_1|^2}. \quad (5.27)$$

Полученное неравенство (5.27) противоречит неравенству, найденному при доказательстве леммы Шварца (см. [3], стр. 333).

Противоречие, которое мы получили, доказывает теорему.

Отображение (5.19) существенно отличается от голоморфного, так как в рассматриваемом случае дефект (см. [5], стр. 411)

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{2|z_2 f(z_1)|}{1 - |z_2 f(z_1)|^2}. \quad (5.28)$$

В рассматриваемой области G $0 \leq \delta(z_1, z_2) < \infty$ ($\delta(z_1, z_2) = \infty$ при приближении к границе области). Отсюда следует, что рассматриваемое отображение не сводится к суперпозиции голоморфного и линейного неголоморфного отображений. Отображение является локально гомеоморфным внутри области G и имеет точки ветвления на границе области.

Замечание 1. При $f(z_1) = z_1$ в предположениях теоремы (5.2) мы получаем гомеоморфное отображение области $G = \{(z_1, z_2): |z_2| < 1\}$ на единичный гипершар $B = \{(w_1, w_2): |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$.

Замечание 2. При $f(z_1) = \alpha z_1^p$ в предположениях теоремы (5.2), где α — комплексный параметр, p — произвольное натуральное число, мы получаем локально гомеоморфное отображение двоякокривых областей вида

$$G = \left\{ (z_1, z_2): |z_2|^2 < \frac{1 - |z_1|^2}{1 - |\alpha z_1^p|^2} \right\} \quad (5.29)$$

на единичный гипершар $B = \{(w_1, w_2): |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$.

Московский институт электронного
машиностроения

Поступило 20.IV.1967

Ա. Ա. ՇՄԱՏԿՈՎ

ՀՀ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻԶՈԼՈՐՖԱՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԸ, ՈՐՈՒՔ
ԿՈՆՑՈՐՄ ԵՆ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա. մ. փ. ռ. փ. ռ. մ.

Հոդվածում կառուցվում և ուսումնասիրվում է C_x^n տարածության կվազիհոլոմորֆ, կոմպլեքս ուղիղների վրա կոնֆորմ արտապատկերումների B_G դասը: §§ 1, 2-ը ունեն ներածական բնույթ:

§ 3-ում բերվում են քվադրհոլոմորֆ արտապատկերումների B_O դասին պատկանող ֆունկցիաների երեք սահմանում և ապացուցվում է այդ սահմանումների համարժեքությունը:

§ 4-ում արտածվում են այն մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնց բավարարում են B_O դասի բոլոր ֆունկցիաները: Այդ հնարավորություն է տալիս B_O քվադրհոլոմորֆ արտապատկերումներն արտահայտել բացահայտ տեսքով:

§ 5-ը նվիրված է կառուցված B_O դասի նկատմամբ համարժեք, բայց հոլոմորֆորեն ոչ համարժեք տիրույթների որոշ օրինակներին:

Մասնավորապես ապացուցվում է, որ B_O դասին պատկանող ֆունկցիաների միջոցով կարելի է C_z^n տարածության միավոր բազմազանը հոլոմորֆ կերպով արտապատկերել C_z^n տարածության միավոր հիպերգնդի վրա:

A. A. SHMATKOV

ON QUASI-HOLOMORPHIC MAPPINGS OF C_z^n SPACE WHICH ARE CONFORM ON COMPLEX LINES

S u m m a r y

The first two sections of the paper are devoted to the introduction and some auxiliary statements.

In § 3 three definitions of the class B_O of quasi-holomorphic mappings are introduced and the equivalence of these definitions is shown.

In § 4 a system of partial differential equations, which is satisfied by the functions from B_O is derived. This enables to find an explicit representation of the function belonging to B_O .

The § 5 is devoted to the examples of holomorphically inequivalent domains which are equivalent with respect to the class B_O . In particular, the possibility of holomorphic mapping of the unit polycylinder in C_z^n on the unit hyperspher in C_z^n with the aid of the function from B_O is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. S. Bergman. A class of pseudoconformal and Quasi-pseudoconformal mappings, Math. Ann., 136, 1958, 134—138.
2. S. Bergman. A class of Quasi-pseudoconformal Transformations in the teory of functions of two complex variables, Journ. of Math and mech., 7, № 6, 1958, 937—956.
3. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного, ГИИТ, 1946.
4. Д. Е. Рудник. О квазиголоморфных отображениях, Труды МИЭМ, 1966.
5. Б. А. Фукс. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.
6. S. Hitotumatu. On quasi-conformal function of several complex variables, Journ. of Math. and Mech., 8, № 1, 1959, 77—94.
7. А. А. Шматков. Об одном классе квазиголоморфных отображений, Ученые записки Моск., обл. пед. инсттута, т. 133, 157—169.
8. А. А. Шматков. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Москва, 1965.

Н. Е. ТОВМАСЯН

НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРВОЙ, ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Постановка задач и основные результаты

Пусть задана эллиптическая система

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где A, B, C — постоянные действительные квадратные матрицы n -го порядка, $u = (u_1, \dots, u_n)$ — искомая действительная вектор-функция.

Как известно, система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det (A + 2B\lambda + C\lambda^2) = 0 \quad (2)$$

не имеет действительных корней.

Граничные условия первой, второй и третьей краевых задач для системы (1) в области G с границей S имеют соответственно вид

$$u = f \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u = h \text{ на } S,$$

где f, g и h — заданные на S n -мерные вектор-функции, N — внешняя нормаль к границе S , α — постоянное число.

В работе [1] (стр. 113) введено понятие слабой и сильной связанности системы (1). По определению слабой и сильной связанности системы (1) любая эллиптическая система (1) является либо слабо связанной, либо сильно связанной. Первая, вторая и третья краевые задачи для слабо связанных систем (1) являются фредгольмовыми (т. е. для этих задач имеют место известные альтернативы фредгольма), а для сильно связанных систем эти задачи перестают быть фредгольмовыми и нетеровыми (см. [1], [2]).

В работах [2] и [3] изучена первая краевая задача для сильно связанной системы в круге, когда $\lambda = i$ является n -кратным корнем

характеристического уравнения (2), где i — мнимая единица. В работе [2] изучена также первая краевая задача для сильно связанной системы (1) в полуплоскости. В работе [4] исследуется однородная задача Дирихле для сильно связанной системы (1) в круге при $n=2$.

Пусть система (1) состоит из двух уравнений и λ_0 — один из корней характеристического уравнения (2), причем $\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$. Обозначим через $\tau = (\sigma_1, \sigma_2)$ нетривиальное решение однородного алгебраического уравнения

$$(A + 2B\lambda_0 + C\lambda_0^2)\tau = 0.$$

В случае, когда система (1) состоит из двух уравнений, она является сильно связанной тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im} \sigma_1 \cdot \operatorname{Re} \sigma_2 - \operatorname{Re} \sigma_1 \cdot \operatorname{Im} \sigma_2 \neq 0,$$

и преобразование

$$u_j = \operatorname{Im} \sigma_j v_1 + \operatorname{Re} \sigma_j v_2 \quad (j=1, 2)$$

приводит эту систему к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} + \mu_1 \mu_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (3)$$

где $v = v_1 + iv_2$ — новая искомая функция, μ_1 и μ_2 — постоянные числа, $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| < 1$, $|\mu_1| \geq |\mu_2|$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Здесь через $|\mu_1|$ и $|\mu_2|$ обозначены модули комплексных чисел μ_1 и μ_2 , соответственно, $z = x + iy$.

Отметим, что уравнение (3) при $|\mu_1| < 1$ и $|\mu_2| < 1$ всегда является сильно связанной эллиптической системой двух дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами относительно действительных функций v_1 и v_2 .

Следовательно, в том случае, когда система (1) состоит из двух уравнений и является сильно связанной, без ограничения общности, можно рассматривать граничные задачи для уравнения (3).

Пусть D — круг $|z| < 1$, а Γ — окружность $|z| = 1$. Будем говорить, что функция $V(z)$ принадлежит классу $H(D)$ (удовлетворяет условию Гельдера в области D), если существуют положительные постоянные a и c такие, что

$$|v(z_1) - v(z_2)| \leq c |z_1 - z_2|^a,$$

где z_1 и z_2 — произвольные точки D , постоянные a и c не зависят от точек z_1 и z_2 . Аналогично определяется класс функций $H(\Gamma)$. Будем говорить, что функция $V(z)$ принадлежит классу $H_m(D)$, если

$\frac{\partial^{j+k} v}{\partial x^j \partial y^k} \in H(D)$ при $j+k \leq m$ (m — целое положительное число). Будем

говорить, что $f \in H_m(\Gamma)$, если $\frac{d^s f}{ds^k} \in H(\Gamma)$ при $k \leq m$, где s — длина дуги контура Γ .

Под значением в точке $z_0 \in \Gamma$ функции $v(z)$, заданной в области D , будем понимать предельное значение этой функции при $z \rightarrow z_0$ изнутри области D .

Первая, вторая и третья краевые задачи для уравнения (3) в области D формулируются следующим образом:

Первая краевая задача. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$v(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \quad (4)$$

где $f = f_1 + if_2$ — заданная на Γ функция из класса $H_1(\Gamma)$.

Третья краевая задача. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial v(z)}{\partial N} + \alpha v(z) = g(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ — заданное постоянное число, $g = g_1 + ig_2$ — заданная на Γ функция из класса $H(\Gamma)$, а N — внешняя нормаль к границе Γ в точке z .

Первую краевую задачу обычно называют задачей Дирихле, а третью краевую задачу при $\alpha=0$ называют второй краевой задачей или задачей Неймана.

Задачи (3), (4) и (3), (5) будем называть однородными, если $f=0$ и $g=0$, соответственно.

Как показывают теоремы 7–10, доказанные в § 2 данной работы, первая, вторая и третья краевые задачи для уравнения (3) в круге в вышеуказанной постановке не являются ни фредгольмовыми, ни нетеровыми. В случае, когда $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, а $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, однородные задачи (3), (4) и (3), (5) имеют только нулевые решения, однако эти задачи даже в этом случае некорректны по Адамару, т. е. для любого сколь угодно малого числа ε всегда можно указать функции f и g такие, что $\max |f| < \varepsilon$, $\max |g| < \varepsilon$, но соответствующие им решения $v(z)$ задач (3), (4) и (3), (5) удовлетворяют условию $\max |v| > \varepsilon^{-1}$.

Ниже мы приведем видоизмененные первую, вторую и третью краевые задачи, поставленные естественным образом, которые в круге $|z| < 1$ являются уже корректными при $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, и $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, а при $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, и $\alpha = 0, -1, \dots$ третья краевая задача является фредгольмовой.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция $F(z)$ принадлежит классу $A_{m,n}(r)$, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $F(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < 1$ и непрерывна в замкнутом кольце

$r \leq z < 1$; 2) $F(z) \in H_m$ на окружности $|z|=1$ и $F(z) \in H_n$ на окружности $|z|=r$. Класс функций $H_m(\Gamma)$ определен выше.

Из доказанных в § 2 теорем 7–10 следует, что естественно постановку задач (3), (4) и (3), (5) видоизменить следующим образом:

Видоизмененная первая краевая задача. *Найти в круге $|z| < 1$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$v(z) = F(z) \text{ при } |z| = 1, \quad (6)$$

где $F(z)$ — заданная функция, принадлежащая классу $A_{1,1}(|\mu_1|)$ при $\mu_1 \neq \mu_2$ и принадлежащая классу $A_{1,0}(|\mu_1|)$ при $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$.

Видоизмененная третья краевая задача. *Найти в круге $|z| < 1$ решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_2(D)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$\frac{\partial v(z)}{\partial N} + \alpha v(z) = \Phi(z) \text{ при } |z| = 1, \quad (7)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ — постоянное число, $\frac{\partial v}{\partial N}$ — производная по внешней нормали к окружности $|z| = 1$, а $\Phi(z)$ — заданная функция, принадлежащая классу $A_{1,1}(|\mu_1|)$ при $\mu_1 \neq \mu_2$ и принадлежащая классу $A_{1,0}(|\mu_1|)$ при $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$.

Задачи (3), (6) и (3), (7) при $F(z) \equiv 0$ и $\Phi(z) \equiv 0$ будем называть однородными задачами (3), (6) и (3), (7).

Определим норму решения $v(z)$ уравнения (3) и норму функции $F(z)$ класса $A_{m,n}(|\mu_1|)$ следующим образом:

$$\|v\| = \max_{|z| < 1} |v(z)|, \quad \|F\| = \max_{|\mu_1| < |\mu_2| < 1} |F(z)|. \quad (8)$$

Приведем теоремы, которые в какой-то мере показывают преимущество постановки первой, второй и третьей краевых задач для уравнения (3) в круге $|z| < 1$ в видоизмененном виде. Эти теоремы будут доказаны в §§ 3, 4.

Теорема 1. Пусть $|\mu_2| < |\mu_1| < 1$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, $|\mu_1| < 1$. Тогда задача (3), (6) всегда имеет и притом единственное решение, и для решения $v(z)$ этой задачи имеет место оценка

$$\|v\| \leq c \|F\|, \quad (9)$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от чисел μ_1 и μ_2 .

Теорема 2. Пусть $|\mu_2| < |\mu_1| < 1$ или $\mu_2 = \mu_1 \neq 0$, $|\mu_1| < 1$, а $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда задача (3), (7) всегда имеет и притом единственное решение, и для решения $v(z)$ этой задачи имеет место оценка

$$\|v\| \leq c \|\Phi\|, \quad (10)$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от α , μ_1 и μ_2 .

Теорема 3. Пусть $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, $|\mu_1| < 1$, $\alpha = -n$, где n — целое неотрицательное число. Тогда однородная задача (3), (7) имеет одно линейно независимое решение $v = \text{const}$ при $n = 0$ и два линейно независимых решения $v = (z + \mu_1 \bar{z})$ и $v = \bar{z}(z + \mu_1 \bar{z})$ при $n > 0$, неоднородная задача (3), (7) имеет решение тогда и только тогда, когда $\Phi(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z \Phi(z)}{z^2 + \mu_1} dz &= 0, \text{ при } n = 0, \\ \int_{\gamma} \frac{z^2 \Phi(z)}{z^2 + \mu_1} dz &= 0, \int_{\gamma} \frac{z^2 \Phi(z) dz}{(z^2 + \mu_1)^2} = 0, \text{ при } n = 1, \\ \int_{\gamma} \frac{z^{n-1} \Phi(z) dz}{(z^2 + \mu_1)^n} &= 0, \int_{\gamma} \frac{z^{n+1} \Phi(z) dz}{(z^2 + \mu_1)^{n+1}} = 0, \text{ при } n > 1, \end{aligned}$$

где γ есть граница кольца $|\mu_1| < |z| < 1$ и интегрирование совершается в направлении, оставляющем кольцо слева, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Теорема 4. Пусть $|\mu_2| < |\mu_1| < 1$, $\alpha = -n$, где n — целое неотрицательное число. Тогда однородная задача (3), (7) имеет одно линейно независимое решение $v = \text{const}$ при $n = 0$ и два линейно независимых решения $v = (z + \mu_1 \bar{z})^n$ и $v = (z + \mu_2 \bar{z})^n$ при $n > 0$; неоднородная задача (3), (7) имеет решение тогда и только тогда, когда $\Phi(z)$ удовлетворяет одному условию ортогональности при $n = 0$ и двум условиям ортогональности при $n > 0$.

Здесь условием ортогональности на функцию $\Phi(z)$ называется условие вида

$$\int_{\gamma} \Phi(z) \psi(z) dz = 0.$$

В работе [1] приведены примеры эллиптических систем, для которых однородная первая краевая задача в круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Следующая теорема показывает, что вторая и третья однородные краевые задачи для сильно связанных эллиптических систем в круге, вообще говоря, также могут иметь бесконечное число линейно независимых решений.

Теорема 5. Однородные задачи (3), (6) и (3), (7) имеют бесконечное множество линейно независимых решений тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2\pi} (\arg \mu_1 - \arg \mu_2) —$ рациональное число, $\mu_1 \neq \mu_2$, $|\mu_1| = |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Теорема 5 для задачи (3), (6) будет доказана в § 3, а для задачи (3), (7) — в § 4.

В работе [1] доказано, что однородная первая краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

в круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Используя общее решение уравнения (11), легко показать, что в круге $|z| < 1$ однородная вторая краевая задача для уравнения (11) также имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Поставим теперь задачу Коши для уравнения (1) следующим образом:

Задача Коши. Найти в круге $|z| < 1$ дважды непрерывно дифференцируемое решение $v(z)$ уравнения (11), принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$v(z) = \psi_1(z)\bar{z}, \quad \frac{\partial v}{\partial N} = \psi_2(z)\bar{z}, \quad \text{при } |z|=1, \quad (12)$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — заданные аналитические функции в круге $|z| < 1$, принадлежащие классам $H_1(D)$ и $H(D)$, соответственно, и удовлетворяющие условию

$$\psi_1(0) = \psi_2(0). \quad (13)$$

Естественность такой постановки задачи Коши для уравнения (11) в круге $|z| < 1$ следует из теоремы 11, доказанной в § 2. Следующая теорема показывает корректность задачи Коши в приведенной выше постановке.

Теорема 6. Задача (11), (12) всегда имеет и притом единственное решение. Это решение имеет вид

$$v(z) = \bar{z}\psi_1(z) + \frac{1-z\bar{z}}{2} \left[\frac{\psi_1(z) - \psi_2(z)}{z} + \psi_1'(z) \right], \quad \psi'(z) = \frac{d\psi}{dz}. \quad (14)$$

Применяя неравенство Коши

$$|\psi_1'(z)| \leq (1 - |z|)^{-1} \max_{|\zeta|=1} |\psi_1(\zeta)|,$$

из формулы (14) получим

$$\|v\| \leq \frac{1}{2} \max_{|z|=1} |\psi_2(z)| + \frac{5}{2} \max_{|z|=1} |\psi_1(z)|.$$

Теоремы 6 и 11 показывают, что для уравнения (11) вместо первой, второй и третьей краевых задач более естественно рассматривать задачу (11), (12) (т. е. задачу Коши).

В настоящей работе исследуются качественные и конструктивные свойства решений уравнения (3) в круге и строятся решения задачи (3), (6) и (3), (7) в явном виде. Эти исследования дают примерное представление о том, как можно поставить первую, вторую и третью краевые задачи для сильно связанных систем (1) в случае любого числа уравнений, чтобы эти задачи стали фредгольмовыми, и какими методами можно их решать.

§ 2. Некоторые качественные и конструктивные свойства решений уравнения (3)

Результаты данного параграфа существенно используются для исследования задач, сформулированных в § 1.

Напишем общее представление решения уравнения (3) в круге $|z| < 1$. Обозначим через D_μ внутренность эллипса в комплексной плоскости $t = \xi + i\eta$, которая является образом круга $|z| < 1$ при отображении, осуществляемом функцией $t = z + \mu\bar{z}$, где μ — постоянное число, $|\mu| < 1$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Пусть $\varphi(t)$ — аналитическая функция в области D_μ . Ясно, что функция $\varphi(z + \mu\bar{z})$ определена в единичном круге $|z| < 1$. Функцию $\varphi(z + \mu\bar{z})$ будем называть аналитической функцией относительно аргумента $z + \mu\bar{z}$. Через D будем всегда обозначать круг $|z| < 1$, а через Γ — окружность $|z| = 1$.

Уравнение (3) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) v = 0. \quad (15)$$

Общее решение уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

в круге $|z| < 1$ дается формулой

$$\omega = \varphi(z + \mu_1 \bar{z}), \quad (17)$$

где $\varphi(z + \mu_1 \bar{z})$ — произвольная аналитическая функция относительно аргумента $z + \mu_1 \bar{z}$ при $|z| < 1$. Отсюда и из (15) получим

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(z + \mu_1 \bar{z}), \quad (18)$$

где $\varphi(z + \mu_1 \bar{z})$ — аналитическая функция относительно аргумента $z + \mu_1 \bar{z}$ при $|z| < 1$.

Легко проверить, что частное решение $v_0(z)$ уравнения (18) дается формулой

$$v_0(z) = \begin{cases} \bar{z} \varphi(z + \mu_1 \bar{z}), & \text{при } \mu_1 = \mu_2, \\ \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}), & \text{при } \mu_1 \neq \mu_2, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \int_0^t \varphi(\zeta) d\zeta. \quad (20)$$

Из (15) — (20) следует, что в круге $|z| < 1$ общее решение уравнения (3) имеет вид

$$v(z) = \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}), \quad \text{при } \mu_1 \neq \mu_2, \quad (21)$$

$$v(z) = \bar{z} \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}), \quad \text{при } \mu_1 = \mu_2, \quad (22)$$

где $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$ — произвольные аналитические функции относительно аргументов $z + \mu_1 \bar{z}$ и $z + \mu_2 \bar{z}$ при $|z| < 1$.

Пусть D_μ — область, определенная в начале этого параграфа, а Γ_μ — ее граница, $|\mu| < 1$. Для исследования некоторых свойств уравнения (3) нам потребуется следующая

Лемма 1. Если $\varphi(t)$ — аналитическая функция в области D_μ , принадлежащая классу $H_k(D_\mu)$ (k — целое неотрицательное число), то она представима в виде:

$$\varphi(t) = \psi\left(\frac{t + \sqrt{t^2 - 4\mu}}{2}\right) + \psi\left(\frac{2\mu}{t + \sqrt{t^2 - 4\mu}}\right), \quad (23)$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < 1$, принадлежащая классу $H_k(D)$, причем $\psi(z)$ определяется по $\varphi(t)$ единственным образом.

В (2) под $\sqrt{t^2 - 4\mu}$ понимается ветвь, непрерывная вне отрезка с концами в точках $t_1 = 2\sqrt{\mu}$ и $t_2 = -2\sqrt{\mu}$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sqrt{t^2 - 4\mu} = 1.$$

Эту ветвь можно определить еще следующим образом:

$$\sqrt{t^2 - 4\mu} = \sqrt{|t^2 - 4\mu|} e^{\frac{1}{2}i(\arg(t+2\sqrt{\mu}) + \arg(t-2\sqrt{\mu}))}, \quad (24)$$

$$\sqrt{\mu} = \sqrt{|\mu|} e^{\frac{1}{2}i\arg \mu}, \quad (25)$$

где аргументы чисел μ , $\mu + 2\sqrt{\mu}$ и $\mu - 2\sqrt{\mu}$ определяются единственным образом из неравенств

$$0 \leq \arg \mu < 2\pi,$$

$$\frac{1}{2} \arg \mu \leq \arg(t + 2\sqrt{\mu}) < 2\pi + \frac{1}{2} \arg \mu,$$

$$\frac{1}{2} \arg \mu \leq \arg(t - 2\sqrt{\mu}) < 2\pi + \frac{1}{2} \arg \mu.$$

Доказательство леммы 1. Легко проверить, что если $\psi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и принадлежит классу $H_k(D)$, то правая часть формулы (23) аналитична в области D_μ и принадлежит классу $H_k(D_\mu)$. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Так как обе части равенства (23) аналитичны в области D_μ , то равенство (23) эквивалентно равенству

$$\varphi(t) = \psi\left(\frac{t + \sqrt{t^2 - 4\mu}}{2}\right) + \psi\left(\frac{2\mu}{t + \sqrt{t^2 - 4\mu}}\right), \quad t \in \Gamma_\mu. \quad (26)$$

По определению области D_μ точка $t \in \Gamma_\mu$ тогда и только тогда, когда

$$t = e^{i\alpha} + \mu e^{-i\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (27)$$

Подставляя значение t из (27) в (26), получим

$$\varphi(e^{i\alpha} + \mu e^{-i\alpha}) = \psi(e^{i\alpha}) + \psi(\mu e^{-i\alpha}), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (28)$$

Равенство (28) можно еще записать в виде

$$\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \psi(z) + \psi\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad |z|=1. \quad (29)$$

Так как $\varphi(t)$ — аналитическая функция в области D_μ и $\varphi(z) \in H_k(D_\mu)$, то функция $\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right)$ аналитична в кольце $|\mu| < |z| < 1$ и непрерывна в замкнутом кольце $|\mu| \leq z \leq 1$.

Поэтому условие (29) эквивалентно условию

$$\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \psi(z) + \psi\left(\frac{\mu}{z}\right), \quad \text{при } |\mu| \leq z \leq 1. \quad (30)$$

Рассмотрим ряд Лорана

$$\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad (31)$$

функции $\varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right)$ в кольце $|\mu| < |z| < 1$. Как известно, коэффициенты разложения (31) определяются формулами

$$2\pi i \cdot a_k = \int_{|z|=\sqrt{|\mu|}} \varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) z^{-k-1} dz \quad (k=0, \pm 1, \pm \dots). \quad (32)$$

Из (32) после замены $z = \frac{\mu}{\zeta}$ получим

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot a_{-k} &= \int_{|z|=\sqrt{|\mu|}} \varphi\left(z + \frac{\mu}{z}\right) z^{k-1} dz = \mu^k \int_{|\zeta|=\sqrt{|\mu|}} \varphi\left(\frac{\mu}{\zeta} + \zeta\right) \zeta^{-k-1} d\zeta = \\ &= 2\pi i a_k \mu^k. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (31) и (32) следует, что равенство (30) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\psi(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k. \quad (34)$$

Если функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_k(D_\mu)$, то $\psi(z)$, определенная формулой (34), принадлежит классу $H_k(D)$. Тем самым лемма 1 доказана.

Пусть $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда, как мы видели выше, общее решение уравнения (3) дается формулой (21). Из (21) получим

$$(-\mu_2 + \mu_1) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) = \frac{\partial v}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}, \quad (35)$$

$$(\mu_2 - \mu_1) \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) = \frac{\partial v}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}, \quad (36)$$

где $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$ — производные функций $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$ по аргументам $z + \mu_1 \bar{z}$ и $z + \mu_2 \bar{z}$, соответственно.

Следовательно, если $\mu_1 \neq \mu_2$ и решение $v(z)$ уравнения (3) принадлежит классу $H_k(D)$, то функции $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$, входящие в представление (21), также принадлежат классу $H_k(D)$. Из леммы

1 и формулы (21) следует, что если $\mu_1 \neq \mu_2$, то общее решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_k(D)$ (где k — фиксированное натуральное число), дается формулой

$$v(z) = \psi_1 \left(\frac{z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4\mu_1}}{2} \right) + \psi_1 \left(\frac{2\mu_1}{z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4\mu_1}} \right) + \\ + \psi_2 \left(\frac{z + \mu_2 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_2 \bar{z})^2 - 4\mu_2}}{2} \right) + \psi_2 \left(\frac{2\mu_2}{z + \mu_2 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_2 \bar{z})^2 - 4\mu_2}} \right), \quad (37)$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — произвольные аналитические функции в круге $|t| < 1$, принадлежащие классу $H_k(D)$.

В (37) под $\sqrt{(z + \mu_j \bar{z})^2 - 4\mu_j}$ подразумевается та ветвь, которая определяется по формуле (25), где $t = z + \mu_j \bar{z}$, $\mu = \mu_j$.

Ясно, что если в (37) $\psi_1(z)$ заменить на $\psi_1(z) + \psi_2(0)$, а $\psi_2(z)$ — на $\psi_2(z) - \psi_2(0)$, то значение выражения (37) не изменится. Поэтому в (37) без ограничения общности можно предполагать, что $\psi_2(0) = 0$. Тогда, используя (21), (35), (36) и лемму 1, легко показать, что в представлении (37) функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определяется по $v(z)$ единственным образом.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $|\mu_2| \leq |\mu_1| < 1$. Из (37) получим

$$v(z) = \psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) \text{ при } |z| = 1. \quad (38)$$

Из равенства (38) непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. Если $\mu_1 \neq \mu_2$ и $v(z)$ является в круге $|z| < 1$ решением уравнения (3), принадлежащим классу $H_k(D)$, то значение $v(z)$ на окружности $|z| = 1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k,k}(|\mu_1|)$.

Класс функций $A_{m,n}(r)$ определен в § 1.

Пусть решение $v(z)$ уравнения (3) ($\mu_1 \neq \mu_2$), заданное формулой (21), принадлежит классу $H_k(D)$. Тогда

$$\alpha v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial N} = \alpha (\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})) + \\ + (z + \mu_1 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + (z + \mu_2 \bar{z}) \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}), \quad |z| = 1, \quad (39)$$

где N — внешняя нормаль к границе Γ в точке z . Так как функции $(z + \mu_1 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + \alpha \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $(z + \mu_2 \bar{z}) \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) + \alpha \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$ аналитичны относительно аргументов $z + \mu_1 \bar{z}$ и $z + \mu_2 \bar{z}$, соответственно, при $|z| < 1$ и, в силу (35), (36), принадлежат классу $H_{k-1}(D)$, то, согласно лемме 1, они представимы в виде

$$\alpha \varphi_j(z + \mu_j \bar{z}) + (z + \mu_j \bar{z}) \varphi_j'(z + \mu_j \bar{z}) = \psi_j \left(\frac{z + \mu_j \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_j \bar{z})^2 - 4\mu_j}}{2} \right) +$$

$$+ \psi_j \left(\frac{2\mu_j}{z + \mu_j \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_j \bar{z})^2 - 4\mu_j}} \right), \quad j = 1, 2, \quad (40)$$

где $\psi_j(t)$ — аналитические функции в круге $|t| < 1$, принадлежащие классу $H_{k-1}(D)$.

Легко убедиться, что коэффициент при t^n ряда Тейлора функции $t\psi_j(t) + \alpha\psi_j(t)$ в окрестности $t=0$ при $\alpha = -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) равен нулю. Отсюда следует, что в представлении (40) при $\alpha = -n$ ($n=0, 1, \dots$) коэффициент при t^n ряда Тейлора функции

$$\psi_j \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - 4\mu_j}}{2} \right) + \psi_j \left(\frac{2\mu_j}{t + \sqrt{t^2 - 4\mu_j}} \right)$$

равен нулю, т. е.

$$\frac{d^n}{dt^n} \left[\psi_j \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - 4\mu_j}}{2} \right) + \psi_j \left(\frac{2\mu_j}{t + \sqrt{t^2 - 4\mu_j}} \right) \right] = 0, \quad \text{при } t=0 \quad (41)$$

($j=1, 2; \alpha = -n$).

В представлении (40) условие (41) будет использовано в § 4.

Подставляя выражения для функций $\alpha\varphi_j(z + \mu_j \bar{z}) + (z + \mu_j \bar{z})\varphi_j'(z + \mu_j \bar{z})$ ($j=1, 2$) из (40) в (39), получим

$$\alpha v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial N} = \psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right), \quad |z|=1. \quad (42)$$

Из равенства (42) следует

Теорема 8. Если $\mu_1 \neq \mu_2$ и $v(z)$ является в круге $|z| < 1$ решением уравнения (3), принадлежащим классу $H_k(D)$, то значение $\alpha v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial N}$ на окружности $|z|=1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k-1, k-1}(|\mu_1|)$.

Пусть теперь $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$. Тогда общее решение уравнения (3) дается формулой (22). Из (22) получим

$$\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) = \frac{\partial v}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (43)$$

$$\varphi_2(z + \mu_1 \bar{z}) = v - \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{z}. \quad (44)$$

Следовательно, если $v(z) \in H_k(D)$, то функции $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_1 \bar{z})$, входящие в представление (22), принадлежат классу $H_{k-1}(D)$, а $\bar{z}\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_1 \bar{z}) \in H_k(D)$.

Следовательно, из леммы 1 и формулы (22) получим, что, если $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ и решение $v(z)$ уравнения (3) принадлежит классу $H_k(D)$, то оно представляется в виде

$$v(z) = \bar{z} \left[\psi_1 \left(\frac{z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4\mu_1}}{2} \right) + \right.$$

$$+ \psi_1 \left(\frac{2 \mu_1}{z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4 \mu_1}} \right) + \psi_2 \left(\frac{z + \mu_2 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_2 \bar{z})^2 - 4 \mu_2}}{2} \right) + \\ + \psi_2 \left(\frac{2 \mu_2}{z + \mu_2 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_2 \bar{z})^2 - 4 \mu_2}} \right), \quad (45)$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — аналитические функции в круге $|z| < 1$, принадлежащие классу $H_{k-1}(D)$.

Из (45) получим

$$v(z) = \frac{1}{z} \left(\psi_1(z) + \psi_1 \left(\frac{\mu_1}{z} \right) \right) + \psi_2(z) + \psi_2 \left(\frac{\mu_2}{z} \right), \quad |z| = 1. \quad (46)$$

Из (46) следует

Теорема 9. Если $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ и $v(z)$ в круге $|z| < 1$ является решением уравнения (3), принадлежащим классу $H_k(D)$, то значения функции $v(z)$ на окружности $|z| = 1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k, k-1}(|\mu_1|)$.

Пусть $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ и решение $v(z)$ уравнения (3), заданное формулой (22), принадлежит классу $H_k(D)$, где k — фиксированное целое число ($k \geq 2$). Тогда

$$\alpha v(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial N} = \bar{z} \left[(1 + \alpha) \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + (z + \mu_1 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) \right] + \\ + \alpha \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + (z + \mu_2 \bar{z}) \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}), \quad |z| = 1. \quad (47)$$

По лемме 1 функции $(z + \mu_1 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + (1 + \alpha) \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$, $(z + \mu_2 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_2 \bar{z}) + \alpha \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$, входящие в (47), представимы в виде

$$(1 + \alpha) \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + (z + \mu_1 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) = \psi_1 \left(\frac{z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4 \mu_1}}{2} \right) + \\ + \psi_1 \left(\frac{2 \mu_1}{z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4 \mu_1}} \right), \quad |z| \leq 1; \quad (48)$$

$$\alpha \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + (z + \mu_2 \bar{z}) \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) = \psi_2 \left(\frac{z + \mu_2 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_2 \bar{z})^2 - 4 \mu_2}}{2} \right) + \\ + \psi_2 \left(\frac{2 \mu_2}{z + \mu_2 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_2 \bar{z})^2 - 4 \mu_2}} \right), \quad |z| \leq 1, \quad (49)$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — аналитические функции в круге $|t| < 1$, принадлежащие классу $H_{k-2}(D)$; $t = \xi + i\eta$.

Как мы выяснили выше (см. формулы (40), (41)), при $\alpha = -n$, где n — целое положительное число, функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют условиям

$$\frac{d^{n+j-2}}{dt^{n+j-2}} \left[\psi_j \left(\frac{t + \sqrt{t^2 - 4 \mu_j}}{2} \right) + \psi_j \left(\frac{2 \mu_j}{t + \sqrt{t^2 - 4 \mu_j}} \right) \right] = 0, \quad \text{при } t=0; \quad (50) \\ (j=1, 2),$$

если же $z=0$, то функция $\psi_2(z)$ удовлетворяет условию

$$\psi_2(i\sqrt{\mu_1}) + \psi_2(-i\sqrt{\mu_1}) = 0.$$

Подставляя в (47) представления (48) и (49) функций

$$(1+z)\varphi_1(z+\mu_1\bar{z}) + (z+\mu_1\bar{z})\varphi_1(z+\mu_1\bar{z}) + \alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar{z}) + \\ + (z+\mu_2\bar{z})\varphi_2(z+\mu_2\bar{z}),$$

получим

$$zv(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial N} = \frac{1}{z} \left(\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) \right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right), \quad |z|=1. \quad (51)$$

Из равенства (51) следует

Теорема 10. Пусть $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ и $v(z)$ является решением уравнения (3) в круге $|z| < 1$, принадлежащим классу $H_k(D)$ (k — целое число, $k \geq 2$). Тогда значение $zv(z) + \frac{\partial v(z)}{\partial N}$ на окружности $|z|=1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k-1, k-2}(|\mu_1|)$.

Общее решение уравнения (11) в круге $|z| < 1$ дается формулой

$$v(z) = \tilde{\varphi}_2(z) + \bar{z}\tilde{\varphi}_1(z), \quad (52)$$

где $\tilde{\varphi}_1(z)$ и $\tilde{\varphi}_2(z)$ — произвольные аналитические функции при $|z| < 1$.

Ясно, что аналитические функции $\tilde{\varphi}_1(z)$ и $\tilde{\varphi}_2(z)$ всегда можно представить в виде

$$\tilde{\varphi}_2(z) = \varphi_2(z), \quad \tilde{\varphi}_1(z) = \varphi_1(z) - z\varphi_2(z), \quad (53)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — аналитические функции в круге $|z| < 1$. Подставляя выражение $\tilde{\varphi}_1(z)$ и $\tilde{\varphi}_2(z)$ из (53) в (52), получим представление общего решения уравнения (11) в виде

$$v(z) = \bar{z}\varphi_1(z) + (1-z\bar{z})\varphi_2(z), \quad (54)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — произвольные аналитические функции в круге $|z| < 1$.

Пусть решение $v(z)$ уравнения (11) принадлежит классу $H_k(D)$ и представлено в виде (54), где k — натуральное число. Из (54) имеем

$$v(z) - \bar{z} \frac{\partial v(z)}{\partial \bar{z}} = \varphi_2(z). \quad (55)$$

Отсюда следует, что $\varphi_2(z) \in H_{k-1}(D)$.

Используя формулу Коши, легко доказать, что если $\varphi_2(z) \in H_{k-1}(D)$, то

$$\varphi_2(z)(1-z\bar{z}) \in H_{k-1}(D), \quad (1-z\bar{z})\varphi_2(z) \in H_k(D), \quad (56)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} 1 - z\bar{z}\varphi_2(z) = 0, \quad |z_0| = 1, \quad |z| < 1, \quad k \geq 1.$$

Из (54) и (56) следует, что $\varphi_1(z) \in H_k(D)$. Следовательно, в круге $|z| < 1$ общее решение уравнения (11), принадлежащее классу $H(D)$, дается

формулой (54), где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — произвольные аналитические функции, принадлежащие классам $H_k(D)$ и $H_{k-1}(D)$, соответственно.

Из (54) и (57) вытекает, что если $v(z) \in H_k(D)$, (k — натуральное число), то

$$v(z) \Big|_{\Gamma} = \bar{z} \varphi_1(z), \quad \frac{\partial v}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = \bar{z} (\varphi_1'(z) + z \varphi_1''(z) - 2z \varphi_2'(z)). \quad (58)$$

В работе [1] доказано, что если $v(z)$ является в круге $|z| < 1$ решением уравнения (11), то значение функции $zv(z)$ на окружности $|z| = 1$ совпадает с граничным значением аналитической функции в круге $|z| < 1$.

Из формулы (58) следует

Теорема 11. Если $v(z)$ является решением уравнения (11) в круге $|z| < 1$ и $v(z) \in H_k(D)$ (k — натуральное число), то значения функций $zv(z)$ и $z \frac{\partial v(z)}{\partial N}$ на окружности $|z| = 1$ совпадают со значениями на этой окружности некоторых аналитических функций

$\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, принадлежащих классам $H_k(D)$ и $H_{k-1}(D)$, соответственно, и удовлетворяющих условию

$$\psi_1(0) = \psi_2(0). \quad (59)$$

Из формул (54) и (58), в частности, следует, что задача (11), (12) имеет и притом единственное решение, задаваемое формулой (14).

§ 3. Исследование задачи (3), (6)

Из теорем 7 и 9 следует, что для разрешимости задачи (3), (4) необходимо, чтобы граничное условие $f(z)$ совпадало со значением на окружности $|z| = 1$ некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{10}(|\mu_1|)$, при $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ и классу $A_{1,1}(|\mu_1|)$, при $\mu_1 \neq \mu_2$. Поэтому при $|\mu_1| + |\mu_2| \neq 0$ более естественно рассматривать первую краевую задачу в круге $|z| < 1$ в видоизмененном виде, т. е. задачу (3), (6). В этом параграфе через D также будем обозначать круг $|z| < 1$, а через Γ — окружность $|z| = 1$.

Рассмотрим сначала задачу (3), (6) для случая, когда $\mu_1 \neq \mu_2$, $|\mu_2| \leq |\mu_1| < 1$. Тогда, как мы видели в § 2, в круге $|z| < 1$ общее решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$, дается формулой (37), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — произвольные аналитические функции при $|z| < 1$, принадлежащие классу $H_1(D)$ и удовлетворяющие условию

$$\psi_2(0) = 0. \quad (60)$$

Подставляя выражение (37) общего решения уравнения (3) в краевое условие (6), для определения функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ получим краевое условие

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = F(z), \quad |z| = 1. \quad (61)$$

Так как левая и правая части равенства (61) являются аналитическими функциями в кольце $|\mu_1| < |z| < 1$, то это равенство эквивалентно следующему:

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = F(z), \quad |\mu_1| < |z| < 1. \quad (62)$$

Ясно, что аналитическую функцию $\psi_1(z)$ всегда можно представить в виде

$$\psi_1(z) = \omega_1(z) + c, \quad (63)$$

где $\omega(z)$ — аналитическая функция, $\omega(0) = 0$, а c — постоянная. Подставляя представление (63) функции $\psi_1(z)$ в (62), получим

$$\omega_1(z) + \omega_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) + 2c = F(z). \quad (64)$$

Пусть $F(z)$ и $\Phi(z)$ — аналитические функции в кольце $|\mu_1| < |z| < 1$.

Обозначим через $F_1(z)$ и $F_2(z)$ правильную и главную части разложения Лорана функции $F(z)$, а через $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ правильную и главную части разложения Лорана функции $\Phi(z)$ в кольце $|\mu_1| < |z| < 1$. Как известно, если

$$\Phi(z) = F(z), \quad |\mu_1| < |z| < 1, \quad (65)$$

то

$$F_1(z) = \Phi_1(z), \quad \text{при } |z| < 1, \quad (66)$$

$$F_2(z) = \Phi_2(z), \quad \text{при } |z| > |\mu_1|. \quad (67)$$

Используя (65)–(67), из (64) получим

$$\omega_1(z) + \psi_2(z) = F_1(z) - F_1(0), \quad |z| < 1, \quad (68)$$

$$\omega_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = F_2(z), \quad |z| > |\mu_1|, \quad (69)$$

$$c = \frac{1}{2} F_1(0), \quad (70)$$

где

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{F(t) dt}{t-z}, \quad F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=|\mu_1|} \frac{F(t) dt}{t-z} \quad (71)$$

$$(t = \xi + i\eta).$$

Уравнение (69) можно записать также в виде

$$\omega_1(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 z}\right) = F_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 z}\right), \quad |z| < 1. \quad (72)$$

Из (68) и (72) имеем

$$\omega_1(z) = F_1(z) - F_1(0) - \psi_2(z), \quad |z| < 1, \quad (73)$$

$$\psi_2(z) - \psi_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 z}\right) = F_1(z) - F_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1 z}\right) - F_1(0), \quad |z| < 1. \quad (74)$$

Пусть

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad (75)$$

— разложение Лорана функции $F(z)$ при $|\mu_1| < |z| < 1$.

Тогда

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{z}{\mu_1}\right)^k. \quad (76)$$

Подставляя (76) в (74), получим для определения коэффициентов ряда Тейлора

$$\psi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (77)$$

функции $\psi_3(z)$ уравнения

$$(\mu_1^k - \mu_2^k) c_k = a_k \mu_1^k - a_{-k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (78)$$

Пусть $|\mu_1| < |\mu_2| < 1$, тогда из (63), (70), (73), (77) и (78) будем иметь

$$\psi_1(z) = F_1(z) - \frac{1}{2} F_1(0) - F_3(z), \quad \psi_2(z) = F_3(z), \quad (79)$$

где

$$F_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \mu_1^k - a_{-k}}{\mu_1^k - \mu_2^k} z^k. \quad (80)$$

Функцию $F_3(z)$ можно переписать в виде

$$F_3(z) = F_1(z) - F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right) - F_1(0) + F_4(z), \quad (81)$$

где

$$F_4(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_2^k (a_k - \mu_1^{-k} a_{-k})}{\mu_1^k - \mu_2^k} z^k.$$

В силу неравенства Коши для коэффициентов разложения (75) получим, что функция $F_4(z)$ аналитична в круге $|z| < \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|}$.

Из (71) и (81) следует, что функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, определенные формулами (79), аналитичны в круге $|z| < 1$ и принадлежат классу $H_1(D)$.

Следовательно, при $|\mu_2| < |\mu_1|$ задача (3), (6) всегда имеет и притом единственное решение, и это решение дается формулой (37), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ определяются формулами (79).

Теперь оценим норму решения $v(z)$ задачи (3), (6) через норму заданной функции $F(z)$. Так как $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$, то из (37) имеем

$$\|v\| \leq 2 \left(\max_{|z|=1} |\psi_1(z)| + \max_{|z|=1} |\psi_2(z)| \right). \quad (82)$$

Из (79) получим

$$\max_{|z|=1} |\psi_1(z)| \leq \frac{3}{2} \max_{|z|=1} |F_1(z)| + \max_{|z|=1} |F_3(z)|, \quad (83)$$

$$\max_{|z|=1} |\psi_2(z)| \leq \max_{|z|=1} |F_3(z)|. \quad (84)$$

В силу (79) и (74) имеем

$$|F_3(z)| \leq \left| F_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} z\right) \right| + |F_1(z)| + \left| F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right) \right| + |F_1(0)|, \quad |z| < 1. \quad (85)$$

Следовательно

$$\max_{|z|=1} |F_3(z)| \leq \max_{|z|=1} \left| F_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} z\right) \right| + 2 \max_{|z|=1} |F_1(z)| + \max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)|. \quad (86)$$

Так как $F_3(0) = 0$, то по лемме Шварца будем иметь

$$\left| F_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} z\right) \right| \leq \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right| |z| \max_{|z|=1} |F_3(z)|. \quad (87)$$

Из (86) и (87) получаем

$$\max_{|z|=1} |F_3(z)| \leq \frac{1}{|\mu_1| - |\mu_2|} [\max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| + \max_{|z|=1} 2 |F_1(z)|]. \quad (88)$$

Так как

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \quad (89)$$

то

$$\max_{|z|=1} |F_1(z)| \leq \max_{|z|=1} |F(z)| + \max_{|z|=1} |F_2(z)|, \quad (90)$$

$$\max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| \leq \max_{|z|=|\mu_1|} |F(z)| + \max_{|z|=|\mu_1|} |F_1(z)|. \quad (91)$$

Из (71) следует, что

$$\max_{|z|=1} |F_1(z)| \leq \|F\| (1 - |\mu_1|)^{-1}, \quad \max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| = \frac{|\mu_1| \cdot \|F\|}{1 - |\mu_1|}. \quad (92)$$

В силу (90), (91), (92) мы имеем

$$\max_{|z|=|\mu_1|} |F_1(z)| \leq 2\|F\| (1 - |\mu_1|)^{-1}, \quad \max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| = \frac{2\|F\|}{1 - |\mu_1|}. \quad (93)$$

Из (82), (83), (84), (88) и (93) получим

$$\|u\| \leq \frac{30 \|F\|}{(1 - |\mu_1|)(|\mu_1| - |\mu_2|)}. \quad (94)$$

Следовательно, теорема 1, сформулированная в § 1, для случая $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ полностью доказана.

Пусть $\frac{1}{\pi} [\arg \mu_1 - \arg \mu_2]$ — иррациональное число и $|\mu_1| = |\mu_2| < 1$.

Тогда

$$\mu_1^k \neq \mu_2^k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поэтому в данном случае для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, входящих в представление (37) общего решения уравнения (3), также получим формулы (79). Из (79) следует, что функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$ и принадлежат классу $H_1(D)$ тогда и только тогда, когда ряд (80) сходится в круге $|z| < 1$ и его сумма $F_3(z)$ принадлежит классу $H_1(D)$. Числа a_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) в (80) являются коэффициентами ряда Лорана (75) заданной функции $F(z)$.

Следовательно, справедлива

Теорема 12. Если $\frac{1}{\pi} [\arg \mu_1 - \arg \mu_2]$ — иррациональное число и $|\mu_1| = |\mu_2|$, то однородная задача (3), (6) имеет только нулевое решение, а неоднородная задача (3), (6) имеет решение тогда и только тогда, когда ряд (80) сходится в круге $|z| < 1$ и его сумма принадлежит классу $H_1(D)$. Если $F_3(z)$ удовлетворяет этому условию, то решение задачи (3), (6) дается формулой (37), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ определяются формулами (79).

Из теоремы 9 следует, что если $\frac{1}{\pi} [\arg \mu_1 - \arg \mu_2]$ — иррациональное число и $|\mu_1| = |\mu_2|$, то задача (3), (6) для функции вида

$$F(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k$$

всегда имеет решение, где n — любое сколь угодно большое натуральное число.

Пусть теперь числа μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям

$$|\mu_1| = |\mu_2|, \mu_1 \neq \mu_2, \frac{1}{2\pi} [\arg \mu_1 - \arg \mu_2] = \frac{m}{n}, \quad (95)$$

где m и n — целые числа, $n > 1$, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Тогда система уравнений (78) относительно s_k имеет решение тогда и только тогда, когда

$$a_{-k} = \mu_1^k \cdot a_k, \quad k = n, 2n, 3n, \dots \quad (96)$$

Пусть выполнено условие (96). Тогда из (77) и (78) получим

$$\psi_2(z) = F_3(z) + \psi(z^n), \quad (97)$$

где $\psi(t)$ — произвольная аналитическая функция в круге $|t| < 1$ ($t = z^n + i\eta$), а $F_3(z)$ дается формулой (80), в которой коэффициенты z^k при $k = n, 2n, 3n, \dots$ считаются равными нулю.

Из (96) следует, что функцию $F_3(z)$ можно переписать в виде

$$F_3(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_1^j}{\mu_1^j - \mu_2^j} \sum_{k=0}^{n-1} [F_1(\mu_1^k \mu_2^{-k} z) - F_2(\mu_2^k \mu_1^{1-k} z^{-1})] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{kj},$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ задаются формулами (71).

Так как $F(z) \in A_{11}(|\mu_1|)$, то отсюда следует, что функция $F_3(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и принадлежит классу $H_1(D)$. Следовательно, функция $\psi_2(z)$, определенная формулой (97), принадлежит классу $H_1(D)$ тогда и только тогда, когда $\psi(t) \in H_1(D)$.

Из (63), (70), (73) и (97) получим

$$\psi_1(z) = F_1(z) - \frac{1}{2} F_1(0) - F_3(z) - \psi(z^n). \quad (98)$$

Из (37) и (96)–(98) следует

Теорема 13. Если числа μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям (95), то однородная задача (3), (6) имеет бесконечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи (3), (6) необходимо и достаточно, чтобы функция $F(z)$ удовлетворяла бесконечному числу условий (96). Если выполнены условия (96), то все решения задачи (3), (6) даются формулой (37), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ определяются формулами (97) и (98), а $\psi(z)$ — произвольная аналитическая функция в круге $|z| < 1$, принадлежащая классу $H_1(D)$.

Пусть теперь $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, $|\mu_1| < 1$. Тогда, как было показано в § 2, в круге $|z| < 1$ решение $v(z)$ уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$, представляется соотношением (45), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — аналитические функции из класса $H(D)$.

Подставляя представление (45) в граничное условие (6) и используя (46), получим для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ уравнение

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + z\psi_2(z) + z\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = zF(z), \quad |z|=1. \quad (99)$$

Воспользовавшись формулой Племеля Сохоцкого (см. [5], стр. 66), уравнение (99) можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{t \rightarrow z \\ |t| < 1}} [\psi_1(t) + t\psi_2(t) - \Phi_1(t)] = \lim_{\substack{t \rightarrow z \\ |t| > 1}} \left[-\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right) - \psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)t - \Phi_1(t) \right], \quad (100)$$

где $|z|=1$,

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{zF(z)}{z-t} dz. \quad (101)$$

Так как функция $\psi_1(t) + t\psi_2(t) - \Phi_1(t)$ аналитична внутри круга $|t| < 1$, а $\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)t - \Phi_1(t)$ аналитична вне замкнутого круга $|t| \leq 1$ и

$$\left| \psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)t - \Phi_1(t) \right| \leq c|t|, \quad |t| > 1,$$

где c — постоянная, то из (100) следует, что

$$\psi_1(t) + t\psi_2(t) - \Phi_1(t) = c_0 + c_1 t, \quad |t| < 1, \quad (102)$$

$$-\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right) - \psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)t - \Phi_1(t) = c_0 + c_1 t, \quad |t| > 1, \quad (103)$$

где c_0 и c_1 — произвольные постоянные.

Поскольку функция $F(t)$ принадлежит классу $A_{1,0}(|\mu_1|)$, имеем

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \text{при} \quad |t| > 1, \quad (104)$$

где

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|\mu_1|} \frac{zF(z) dz}{z-t}. \quad (105)$$

Полагая в (103) $t = \frac{\mu_1}{z}$ и используя (104) и условие $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, получим

$$z\psi_1(z) + \mu_1\psi_2(z) + \Phi_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right) \cdot z = -c_0z - c_1\mu_1, \quad |z| < |\mu_1|. \quad (106)$$

Так как левая и правая части равенства (106) аналитичны в круге $|z| < 1$, то (106) эквивалентно равенству

$$t\psi_1(t) + \mu_1\psi_2(t) + t\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right) = -c_0t - c_1\mu_1, \quad |t| < 1. \quad (107)$$

Из (102) и (107) имеем

$$\psi_1(t) = \frac{\mu_1\Phi_1(t) + t^2\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right) + c_0(\mu_1 + t^2) + 2c_1\mu_1 t}{\mu_1 - t^2}, \quad (108)$$

$$\psi_2(t) = \frac{t\Phi_1(t) + t\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right) + 2c_0t + c_1(\mu_1 + t^2)}{t^2 - \mu_1}. \quad (109)$$

Функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ аналитичны в круге $|t| < 1$ тогда и только тогда, когда

$$c_0 = -\frac{1}{4} (\Phi_1(\sqrt{\mu_1}) + \Phi_1(-\sqrt{\mu_1}) + \Phi_2(\sqrt{\mu_1}) + \Phi_2(-\sqrt{\mu_1})), \quad (110)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} (\Phi_1(-\sqrt{\mu_1}) - \Phi_1(\sqrt{\mu_1}) + \Phi_2(-\sqrt{\mu_1}) - \Phi_2(\sqrt{\mu_1})). \quad (111)$$

Следовательно, при $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, $|\mu_1| < 1$ однородная задача (3), (6) имеет только нулевое решение, а функция $v(z)$, определенная формулой (45), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ задаются формулами (108) — (111), удовлетворяет уравнению (3) и граничному условию (6). Докажем, что $v(z)$ принадлежит классу $H_1(D)$. Так как $F(z) \in A_{1,0}(|\mu_1|)$, то, в силу (101) и (105), имеем

$$\Phi_1(t) \in H_1(D), \quad \Phi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right) \in H(D). \quad (112)$$

Поэтому функция $v(z)$, определенная формулами (45), (108) — (111), принадлежит классу $H_1(D)$ тогда и только тогда, когда

$$(1 - \bar{z}\alpha(z))\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{\alpha(z)}\right) \in H_1 \quad (113)$$

в кольце $1 - \varepsilon < |z| < 1$, где

$$\alpha(z) = \frac{1}{2} (z + \mu_1 \bar{z} + \sqrt{(z + \mu_1 \bar{z})^2 - 4\mu_1}).$$

а ε — сколь угодно малое положительное число.

Здесь ветвь корня $\sqrt{(z + \mu_1 z)^2 - 4\mu_1}$ определяется по формуле (24), где $t = z + \mu_1 z$. Функция $\alpha(z)$ бесконечно дифференцируема по x и y вне отрезка с концами $2\sqrt{\mu_1}(1 + |\mu_1|)^{-1}$ и $-2\sqrt{\mu_1}(1 + |\mu_1|)^{-1}$.

Заменяя в выражении $1 - \bar{z}\alpha(z)\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{\alpha(z)}\right)$ переменную z на t при помощи преобразования $t = \alpha(z)$, получим, что условие (113) эквивалентно условию

$$(1 - |t|^2)\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right) \in H_1(D), \quad (114)$$

где через D , как и всюду, обозначен круг $|t| < 1$.

Условие (114) получается из (112) применением интегральной формулы Коши к функции $\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right)$.

Аналогично случаю $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ здесь также можно показать, что для решения $v(z)$ задачи (3), (6) имеет место неравенство

$$\|v(z)\| \leq \frac{48}{(1 - |\mu_1|)^3} \|F\|. \quad (115)$$

Следовательно, теорема 1 для случая $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$ также доказана.

Пусть теперь область D_1 есть внутренность эллипса. Как известно, параметрическое уравнение эллипса можно записать в виде

$$x + iy = e^{i\varphi_0}(a \cos \varphi + ib \sin \varphi) + x_0 + iy_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (116)$$

где x_0, y_0, φ_0, a и b — вещественные постоянные $a > 0, b > 0, a \geq b$.

Вводя новые переменные (ξ, η) при помощи линейного преобразования

$$x + iy = e^{i\varphi_0}(a\xi + ib\eta) + x_0 + iy_0 \quad (117)$$

задачу (3), (4) в области, ограниченной эллипсом (116), приведем к задаче Дирихле для круга $|t| < 1, t = \xi + i\eta$. При линейном преобразовании (117) коэффициенты уравнения (3) могут, конечно, измениться, однако это уравнение снова будет иметь вид (3). Поэтому в случае, когда область D_1 ограничена эллипсом, в этой области также можно сформулировать видоизмененную задачу Дирихле для уравнения (3) и исследовать ее полностью.

§ 4. Исследование задачи (3), (7)

Из теорем 8 и 10 следует, что для разрешимости задачи (3), (5) в классе $H_k(D)$ необходимо, чтобы граничное условие $g(z)$ совпадало со значением на окружности $|z| = 1$ некоторой функции $\Phi(z)$, принадлежащей классу $A_{k-1, k-1}, (|\mu_1|)$, при $\mu_1 \neq \mu_2$ и классу $A_{k-1, k-2}, (|\mu_1|)$, при $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$. Поэтому при $|\mu_1| + |\mu_2| \neq 0$ более естественно вторую и третью краевые задачи в круге $|z| < 1$ рассмотреть в сформулированной в § 1 видоизмененной постановке.

Для исследования задачи (3), (7) рассмотрим уравнение

$$(z + \mu\bar{z})\varphi'(z + \mu\bar{z}) + k\varphi(z + \mu\bar{z}) = \psi(z + \mu\bar{z}), \quad |z| < 1, \quad (118)$$

где $\varphi(z + \mu\bar{z})$ — искомая аналитическая относительно $z + \mu\bar{z}$ при $|z| < 1$ функция, $\psi(z + \mu\bar{z})$ — заданная аналитическая относительно $z + \mu\bar{z}$ функция ($|z| < 1$), k и μ — постоянные, $|\mu| < 1$; $\varphi'(z + \mu\bar{z})$ — производная функции $\varphi(z + \mu\bar{z})$ относительно аргумента $z + \mu\bar{z}$. При $\alpha = -n$, где n — целое неотрицательное число, от $\psi(z + \mu\bar{z})$ дополнительно требуется, чтобы

$$\psi^{(n)}(0) = 0. \quad (119)$$

Здесь через $\psi^{(n)}(0)$ обозначена n -ая производная функции $\psi(t)$ в точке $t = 0$.

Условие (119) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (118). Введя в (118) переменную $t = z + \mu\bar{z}$, получим

$$t\varphi'(t) + k\varphi(t) = \psi(t), \quad t = \xi + i\eta \in D_\mu, \quad (120)$$

где D_μ — область, определенная в начале § 2.

Ясно, что если $\varphi(t)$ является решением уравнения (120), то $\varphi(z + \mu\bar{z})$ является решением уравнения (118), и наоборот. Решая уравнение (120) и используя указанную связь между решениями уравнений (118) и (120), получим для решения уравнения (118) следующие формулы:

$$\varphi(z + \mu\bar{z}) = (z + \mu\bar{z})^{-k} \int_0^{z + \mu\bar{z}} t^k \psi(t) \frac{dt}{t}, \quad \text{при } \operatorname{Re} k > 0, \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z + \mu\bar{z}) = & (z + \mu\bar{z})^{-k} \int_0^{z + \mu\bar{z}} t^k \left(\psi(t) - \sum_{j=0}^n \psi^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!} \right) \frac{dt}{t} + \\ & + \sum_{j=0}^n \psi^{(j)}(0) \frac{(z + \mu\bar{z})^j}{j! (j + k)}, \quad \text{при } k = -n + \beta + i\gamma, \quad -1 < \beta \leq 0, \beta + i\gamma \neq 0, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z + \mu\bar{z}) = & (z + \mu\bar{z})^{-k} \int_0^{z + \mu\bar{z}} t^k \left(\psi(t) - \sum_{j=0}^{-k} \psi^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!} \right) \frac{dt}{t} + c (z + \mu\bar{z})^{-k} + \\ & + \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(0) (j! (j + k))^{-1} (z + \mu\bar{z})^j, \quad \text{при } k = 0, -1, -2, \dots, \end{aligned} \quad (123)$$

где n — целое число, γ — действительное число, c — произвольная постоянная, t^k и $(z + \mu\bar{z})^{-k}$ определяются по формулам

$$t^k = e^{k(\ln|t| + i \arg t)}, \quad (z + \mu\bar{z})^{-k} = e^{-k(\ln|z + \mu\bar{z}| + i \arg(z + \mu\bar{z}))}, \quad (124)$$

аргументы t и $z + \mu\bar{z}$ определяются единственным образом из неравенств

$$0 < \arg t < 2\pi, \quad 0 \leq \arg(z + \mu\bar{z}) < 2\pi, \quad (125)$$

а интегрирование берется по отрезку прямой, соединяющей точки 0 и $z + \mu z$.

Рассмотрим сначала задачу (3), (7) при $\mu_1 \neq \mu_2$, $|\mu_2| \leq |\mu_1| < 1$. Тогда, как мы уже видели в § 2, в круге $|z| < 1$ общее решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_2(D)$, дается формулой (21), где $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_2 \bar{z})$ — произвольные аналитические функции относительно аргументов $z + \mu_1 \bar{z}$ и $z + \mu_2 \bar{z}$, соответственно, при $|z| < 1$, принадлежащие классу $H_2(D)$.

Подставляя общее решение (21) в граничное условие (7), получим

$$(z + \mu_1 \bar{z}) \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + z \varphi_1'(z + \mu_1 \bar{z}) + (z + \mu_2 \bar{z}) \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) + z \varphi_2'(z + \mu_2 \bar{z}) = \Phi(z), \quad |z| = 1. \quad (126)$$

Как было показано в § 2 функции

$$z \varphi_j(z + \mu_j \bar{z}) + (z + \mu_j \bar{z}) \varphi_j'(z + \mu_j \bar{z}) \quad (j = 1, 2), \quad (127)$$

входящие в (126), представимы в виде (40), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — аналитические функции в круге $|z| < 1$, принадлежащие классу $H_1(D)$ и при $\alpha = -n$ (n — целое неотрицательное число) удовлетворяющие дополнительному условию (41). Подставляя в (126) представления (40) для функций (127), получим для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ уравнение

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = \Phi(z), \quad |z| = 1. \quad (128)$$

Ясно, что функцию $\psi_2(z)$ всегда можно представить в виде

$$\psi_2(z) = \omega_2(z) + c_2, \quad (129)$$

где $\omega_2(0) = 0$, а c_2 — постоянная.

Подставляя в (128) представление $\psi_2(z)$ по формуле (129), получим уравнение

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \omega_2(z) + \omega_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = \Phi(z) - 2c_2, \quad (130)$$

которое полностью решено в § 3 (см. уравнение (61)).

Пусть $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда, подставляя решение $\psi_1(z)$, $\omega_2(z)$ уравнения (130) в (129) и (40), и используя формулы (121), (122) и (21), найдем все решения задачи (3), (7). Если же $\alpha = -n$, где n — целое неотрицательное число, то задача (3), (7) решается аналогично предыдущему случаю, только на этот раз найденные функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ нужно подчинить дополнительному условию (41). Отсюда получим необходимые и достаточные условия для разрешимости задачи (3), (7), указанные в теореме 4.

Пусть теперь $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$. Тогда решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_2(D)$, представляется в виде (22), где $\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_1 \bar{z})$ — аналитические функции относительно аргумента $z + \mu_1 \bar{z}$, при $|z| < 1$, принадлежащие классу $H_1(D)$. Подставляя представление

(22) в граничное условие (7) и используя представления (48) и (49) для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, получим уравнение

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + z\psi_2(z) + z\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = zF_2(z), \quad |z| < 1. \quad (131)$$

Уравнение (131) также полностью решено в § 3 (см. уравнение (99)). Отметим, что при $\alpha = -1, -2, -3, \dots$ в формулах (48) и (49) функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ удовлетворяют условию (50), а при $\alpha = 0$ — условию

$$\psi_2(i\sqrt{\mu_1}) + \psi_2(-i\sqrt{\mu_1}) = 0. \quad (132)$$

Пусть $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, $|\mu_1| < 1$, $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда, решая уравнение (131) и используя формулу (121) и (122), из формул (22), (48) и (49) получим все решения задачи (3), (7). Если $\alpha = -1, -2, \dots$, то эта задача решается аналогично, только решения уравнения (131) нужно еще дополнительно подчинить условию (50). Если же $\alpha = 0$, то решение $\psi_2(z)$ уравнения (131) нужно дополнительно подчинить условию (132).

В результате мы получим формулы для решения задачи (3), (7). Из этих формул, в частности, вытекают сформулированные в § 1 теоремы 2, 3, 4.

Замечание. Если при $\mu_1 \neq \mu_2$ в постановке задачи (3), (7) вместо условия $v \in H_2(D)$ и $\Phi \in A_{1,1}(|\mu_1|)$ потребовать выполнение условия $v \in H_1(D)$, $\Phi \in A_{0,0}(|\mu_1|)$, то метод решения этой задачи и полученные результаты остаются теми же.

Институт математики Сибирского
отделения АН СССР

Поступило 30.V.1968

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

ԵՐԿՐՈՒ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒԺԵՂ
ԿԱՊՎԱՆ ԷԼԻՊՏԻԿ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՄԱՐ I, II ԵՎ III ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ
ՆՈՐ ԴՐՎԱԾՔԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ n փ n i մ

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ էլիպտիկ սիստեմների համար I, II և III եզրային խնդիրները կոռեկտ չեն, շնայած որ այդ խնդիրների համար տեղի ունի միակության թեորեման: Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է այդպիսի էլիպտիկ սիստեմների լուծումների հատկությունները, և ելնելով դրանից դրվում է այդ խնդիրները նոր, այդ էլիպտիկ սիստեմների համար ավելի բնական ձևով, որի դեպքում այդ խնդիրների մեծ մասը արդեն դառնում են կոռեկտ ձևով դրված խնդիրներ: Աշխատանքում մանրամասն ուսումնասիրվում է I, II և III եզրային խնդիրները նոր դրվածքով շրջանի ներսում, երբ էլիպտիկ սիստեմը բաղկացած է 2 հավասարումներից:

N. E. TOVMASIAN

NEW STATEMENT AND INVESTIGATION OF THE I, THE II
AND THE III BOUNDARY PROBLEMS FOR TWO SECOND
ORDER ELLIPTIC STRONGLY BOUNDED SYSTEMS OF
DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

The I and the III boundary problems for certain elliptic systems of the second order differential equations are not correct, although the uniqueness theorem is valid for such systems.

The properties of the solutions of such elliptic systems are investigated, and the results obtained form a basis for new and more natural statement of the corresponding problems. In this way of the problems are transformed into correct ones.

The I, the II and the III boundary problems in the circle are investigated in their new statement in more detail when the system is composed of two equations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Издательство „Наука“, М., 1966.
2. Н. Е. Товмасян. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, II, №№ 1 и 2, 1966.
3. Е. В. Золотарева. О задаче Дирихле для эллиптических систем, ДАН СССР, 145, № 5, 1962.
4. Нуген Тхыа Хой. Задача Дирихле для сильно связанных систем эллиптического типа, ДАН СССР, 171, № 2, 1966.
5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա»-
ամսագրի 1968 թ., հ. 3, № 1—6

- Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան, Ռ. Զ. Մկրտչյան. Կամայական ինքնահամալուծ օպերատորի
սեփական ֆունկցիաների լրիվ սխտեմի կառուցման և նրանց ստորուկտուրայի
հետազոտման մասին 3, 4—5, 358
- Լ. Շ. Աղաբաբյան, Հ. Բ. Նահսբաջյան. Երրորդ կարգի վերածվող հիպերբոլական հա-
վասարման համար Կոշու խնդրի մասին 3, 4—5, 369
- Ն. Հ. Առաքելյան. Հավասարաչափ և շոշափումային մոտավորություններ անա-
լիտիկ ֆունկցիաներով 3, 4—5, 273
- Է. Տ. Ավանեսով. Սկոլեմի մի թեորեմի մասին 3, 2, 160
- Ու. Ի. Գուլյուբով. Բազմությունների կոմպակտության սկզբունքները ընդհանրաց-
ված սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաների տարածության մեջ 3, 6, 409
- Վ. Ս. Զաֆարյան. B_α արտադրյալի շառավղային սահմանը և շառավղային փո-
փոխությունը 3, 4—5, 287
- Վ. Ս. Զաֆարյան. Հավասարաչափ և շոշափումային մոտավորություններ անալի-
տիկ ֆունկցիաներով 3, 1, 38
- Ա. Ա. Թալալյան. Սխտեմների, որոնցով գրված շարքերը $L_p [0,1]$ մետրիկայով
ենթակայացնում են $L_q [0,1]$, $1 < p < q$ տարածության ֆունկցիաներ 3, 4—5, 327
- Ն. Ն. Թովմասյան. Երկու երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների ուժեղ
կապված էլիպտիկ սխտեմի համար I, II և III եզրային խնդիրների նոր
դրվածքը և նրանց հետազոտությունը 3, 6, 497
- Գ. Վ. Ժիդկով. Ինտերվալի արտաքին մասում և կիսառանցքի վրա ֆունկցիաների
լավագույն մոտավորության մասին 3, 6, 417
- Գ. Լ. Լուց. Կանոնական արտադրյալի աճի զնահատականների մասին 3, 2, 126
- Ի. Հ. Խաչատրյան. Անընդհատ ֆունկցիաների կշռային-հավասարաչափ մոտավո-
րությունը բազմանդամներով երկու ճառագայթների վրա 3, 4—5, 301
- Ն. Զ. Մազուկի. Թեորեմ ուսցիոնալ օպերատորային փնջի սեփական և միա-
կցված վեկտորների լրիվության վերաբերյալ 3, 6, 427
- Վ. Վ. Յուրաշև. Ռիչիի կորության մասին երկրաչափությունում, որոշված հուր-
մորֆ ֆունկցիաների հաշվողականության միջոցով $D \subset C^n$ տիրույթում
սիմվոլներով 3, 1, 70
համար Կոշու խնդրի մասին 3, 1, 52
3, 2, 79
- Ռ. Լ. Շահբազյան. Մալթի տիպի ինտեգրալ հավասարումների փոփոխական
սիմվոլներով 3, 1, 52
- Ռ. Լ. Շահբազյան. Պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորներ կիսատարածությունում
3, 4—5, 386
- Վ. Ի. Շևցով. Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր շարքերով ներկայացման
մասին 3, 2, 161
- Ա. Ա. Շմալեով. C_2^* տարածության քվադրատիկ արտապատկերումները,
որոնք կոնֆորմ են կոմպլեքս ուղիղների վրա 3, 6, 479
- Լ. Հ. Պետրոսյան. Որակային խաղերի մի դասի մասին 3, 3, 249
- Լ. Հ. Պետրոսյան. Հետապնդման ինվարիանտ կենտրոնը ու գծային դիֆերենցիալ
խաղերում 3, 4—5, 397
- Լ. Դ. Պելեռովսկի. Էզրային խնդիր պարամետր պարունակող ծալքի տիպի հավա-
սարումների համար 3, 2, 137
- Յու. Յ. Պյետակ. Փակ տիրույթում Կոշու տիպի ինտեգրալի անալոգների ողոր-
կության մասին 3, 1, 58

Մ. Մ. Զբաղյան, Ա. Ռ. Ներսեսյան. Կոտորակային ածանցյալները և Կոշու- խնդիրը կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար	3, 1, 3
Մ. Մ. Զբաղյան. Դանժուա-Կառլեմանի քվադրանալիտիկ դասերի ընդլայնումը	3, 3, 171
Ա. Դ. Ռամս. Որոշ թեորեմներ Շրեդինգերի օպերատորի ռեզոլվենտային կո- րիզի ըստ սպեկտրալ պարամետրի վերլուծության մասին	3, 6, 443
Ա. Ն. Ալուզիե. Ֆունկցիոնալ տարածությունների տպոլոգիական կիսակարգա- վորված անալոգները	3, 1, 30
Տ. Վ. Ստրուշկ. Ս. Ե. Վարշավսկու մի թեորեմի մասին	3, 6, 465
Ա. Կ. Տավրիզ. Լիի ազդերբրաներում ենթաակտիվությունների դեֆորմացիաները	3, 6, 470
Օ. Պ. Վինոգրադով. Հերթի երկարություն մաքսիմումի բաշխումը մի գծանի մաս- նայական սպասարկման սիստեմում	3, 3, 257

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика“
за 1968 г., т. 3, №№ 1—6

Э. Т. Аванесов. К вопросу об одной теореме Сколема	3, 2, 160
Л. Ш. Атабабян, А. Б. Нерсисян. О корректности задачи Коши для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка	3, 4—5, 36
Р. А. Александрян, Р. Э. Мкртчян. О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры	3, 4—5, 358
Н. У. Аракелян. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями	3, 4—5, 273
О. П. Виноградов. Распределение максимума длины очереди в однолинейной системе массового обслуживания	3, 3, 257
Б. И. Голубов. Критерии компактности множеств в пространствах функций ограниченной обобщенной вариации	3, 6, 409
М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка	3, 1, 3
М. М. Джрбашян. Расширение квазианалитических классов Данжуа—Карлемана	3, 3, 171
Г. В. Жидков. О наилучшем приближении функций на внешности интервала и полуоси	3, 6, 417
В. С. Захарян. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения B_α	3, 1, 38
В. С. Захарян. О радиальных предельных значениях функции B_α	3, 4—5, 287
Г. Л. Луцц. Об оценках роста канонического произведения	3, 2, 126
Е. Э. Могульский. Теорема полноты системы собственных и присоединенных векторов рационального операторного пучка	3, 6, 427
А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка	3, 2, 79
Л. А. Петросян. Об одном классе игр качества	3, 3, 249
Л. А. Петросян. Инвариантный центр преследования в нелинейных дифференциальных играх	3, 4—5, 397
Л. Д. Покровский. Краевая задача для уравнений в свертках, содержащих параметр	3, 2, 157
Ю. Ф. Пятак. О гладкости в замкнутой области аналогов интеграла типа Коши	3, 1, 58
А. Г. Рамм. Некоторые теоремы об аналитическом продолжении резольвентного ядра оператора Шредингера по спектральному параметру	3, 6, 443
С. Н. Служин. Топологические полуупорядоченные аналоги функциональных пространств	3, 1, 30
Т. В. Строчкик. К одной теореме С. Е. Варшавского	3, 6, 465
А. А. Талалян. О системах функций, ряды по которым представляют в метрике $L_p[0, 1]$ функции пространства $L_q[0, 1]$, $1 < p < q$	3, 4—5, 327
Н. Е. Товмасьян. Новые постановки и исследование первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	3, 6, 497
А. К. Тслпьяно. Деформации подалгебр в алгебре Ли	3, 6, 470

- И. О. Хачатрян.* О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах 3, 4—5, 301
- Р. Л. Шахбалян.* Интегральные уравнения в свертках с переменным символом 3, 1, 52
- Р. Л. Шахбалян.* Псевдодифференциальные операторы в полупространстве 3, 4—5, 386
- В. И. Шевцов.* О представлении целых функций некоторыми общими рядами 3, 2, 101
- А. А. Шматков.* Квазиголоморфные отображения пространства C^n , конформные на комплексных прямых 3, 6, 479
- В. В. Юрашев.* О кривизне Риччи геометрии, определяемой в области $D \subset C^n$ с помощью последовательности голоморфных функций . . . 3, 1, 70

CONTENTS

Of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR,
 seria „Matematika“, Vol. 3, No. 1—6, 1968

<i>L. Sh. Agababian, A. B. Nersisyan.</i> The Cauchy problem for a hyperbolic equation of third order with data on parabolic line	3, 4—5, 369
<i>R. A. Alexandrian, R. S. Mkrtchian.</i> On the construction of complete system of eigenfunctionals of arbitrary self-adjoint operator and investigation of their structure	3, 4—5, 358
<i>N. H. Arakelian.</i> Uniform and tangential approximation with analytic functions	3, 4—5, 273
<i>E. T. Avanesov.</i> A note on a theorem of Skolem	3, 2, 369
<i>M. M. Džrbašian and A. B. Nersisyan.</i> Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order	3, 1, 3
<i>M. M. Džrbašian.</i> Extension of quasianalytical classes of Denjoy—Carleman	3, 3, 171
<i>G. V. Gidkov.</i> About the best approximation of functions in the external of an interval and demiaxis abstract	3, 6, 417
<i>B. I. Golubov.</i> The criteria of compactness of sets in the spaces of functions of finite generalized variations	3, 6, 409
<i>I. O. Kchatchatrian.</i> On weighted-uniform approximation of continuous functions with polynoms on two halflines	3, 4—5, 301
<i>L. L. Lunts.</i> On estimations of the growth of a canonical product	3, 2, 126
<i>E. Z. Mogulsky.</i> A completeness theorem for the eigen and adjoined functions of the rational operator bunch	3, 6, 427
<i>A. B. Nersisyan.</i> On Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation of second order	3, 2, 79
<i>L. A. Petrostan.</i> On a class of games of kind	3, 3, 249
<i>L. A. Petrostan.</i> Invariant center of pursuit in a class of nonlinear differential games	3, 4—5, 397
<i>L. D. Pokrovskiy.</i> The boundary value problem for equations in convolutions, containing parameter	3, 2, 137
<i>Ju. F. Pjatak.</i> A smoothness in the closed domain of Cauchy type integral analogues	3, 1, 58
<i>A. G. Ramm.</i> Some theorems on analytical continuation of resolvent kernels of Schrödinger operator with respect to spectral parameter	3, 6, 443
<i>V. Y. Shevtsov.</i> On the representation of entire functions by arbitrary series	3, 2, 101
<i>R. L. Shakhbagian.</i> Integral equations in convolution with variable symbol	3, 1, 52
<i>R. L. Shakhbagian.</i> Pseudodifferential operators in the halfspace	3, 4—5, 386
<i>A. A. Shmatkov.</i> On quasi-holomorphic mappings of C^n space which are conform on complex lines	3, 6, 479
<i>S. N. Slugin.</i> Topological lattice analogs of functional spaces	3, 1, 30
<i>T. W. Stochik.</i> On a theorem of S. E. Warschawski	3, 6, 465
<i>A. A. Talaltan.</i> On the systems of functions, the series with respect of which represent in $L_p[0, 1]$ metric functions of $L_q[0, 1]$, $1 < p < q$ space	3, 4—5, 327
<i>N. E. Toumasian.</i> New statement and investigation of the I, the II and the III boundary problems for two second order elliptic strongly bounded systems of differential equations	3, 6, 497

<i>A. K. Tolpigo.</i> Deformations of subalgebras in Lie algebras	3, 6, 470
<i>O. P. Vinogradov.</i> On the distribution of maximal queue size in the $M G 1$ system	3, 3, 257
<i>V. V. Jurashev.</i> On the Ricci curvature of the geometry defined in a domain $D \subset C^n$ with the aid of a system of analytic functions	3, 1, 79
<i>V. S. Zakarian.</i> Radial limits and radial variations of B_n products	3, 1, 38
<i>V. S. Zakartan.</i> On radial limiting values of the function B_n	3, 4-5, 287

Բ. Ի. Գոլուբով. Բազմությունների կոմպակտության սկզբունքները ընդհանրացված սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիաների տարածության մեջ	459
Գ. Վ. Ժիգով. Ինտերվալի արտաքին մասում և կիսառանցքի վրա ֆունկցիաների լավադույն մոտավորության մասին	417
Բ. Զ. Մոզուլսկի. Բերնսի ռացիոնալ օպերատորային փնջի սեփական և միակցված վեկտորների լրիվության վերաբերյալ	427
Ա. Գ. Ռամմ. Որոշ Թեորեմներ Երեզկեզերի օպերատորի ռեզոլվենտային կորիզի ըստ օպերատրալ պարամետրի վերլուծության մասին	443
Տ. Վ. Ստրոչիկ. Ս. Ե. Վարշավսկու մի Թեորեմի մասին	465
Ա. Կ. Տոլպիգո. Լիի ալգեբրաներում ենթաալգեբրաների ղեկավարմանները	470
Ա. Ա. Շմատկով. C_z^n տարածության քվադրատիկ արտապատկերումները, որոնք կոնֆորմ են կոմպլեքս ուղիների վրա	479
Ն. Ե. Թովմասյան. Երկու երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների ուժեղ կապված էլիպտիկ սխեմի համար և եղբայր խնդիրների նոր դրվածքը և նրանց հետազոտությունը	497

СОДЕРЖАНИЕ

Б. И. Голубов. Критерии компактности множеств в пространствах функций ограниченной обобщенной вариации	409
Г. В. Жидков. О наилучшем приближении функций, суммируемых с квадратом	417
Е. З. Могульский. Теорема полноты системы собственных и присоединенных векторов рационального операторного пучка	427
А. Г. Рамм. Некоторые теоремы об аналитическом продолжении резольвентного ядра оператора Шредингера по спектральному параметру	443
Т. В. Строчик. К одной теореме С. Е. Варшавского	460
А. К. Толпыго. Деформации подалгебр в алгебре Ли	475
А. А. Шматков. Квазиголоморфные отображения пространства C_z^n , конформные на комплексных прямых	479
Н. Е. Товмасян. Новые постановки и исследование первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	497

CONTENTS

B. I. Golubov. The criteria of compactness of sets in the spaces of functions of finite generalized variations	409
G. V. Gidkov. About the best approximation of function in the external of an interval and demiaxis abstract	417
E. Z. Mogulsky. A completeness theorem for the eigen and adjoined functions of the rational operator bunch	427
A. G. Ramm. Some theorems on analytical continuation of resolvent kernels of Schrödinger operator with respect to spectral parameter	443
T. W. Strochik. On a theorem of S. E. Warschawski	465
A. K. Tolptgo. Deformations of subalgebras in Lie-algebras	470
A. A. Shmatkov. On quasi-holomorphic mappings of C_z^n space which are conform on complex lines	479
N. E. Tovmasian. New statement and investigation of the I, the II and the III boundary problem for two second order elliptic strongly bounded systems of differential equations	497