

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԻՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒՆԳՐԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԲԱՇԵԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ի. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱՀՐԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենադրված, ևրկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությանը, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, այնպեք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։ Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոնեզերենը շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թիվ շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում շրջադիվ մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներից ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
Р. М. МАРТИРОСЯН

С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН
Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
H. M. MARTIROSIAN
S. N. MERGELIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Drafts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work was carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia



Академик АН Армянской ССР
М. М. ДЗРБАШЯН.

ДОРОГОЙ МХИТАР МКРТИЧЕВИЧ!

*Редакция журнала „Математика“ в день Вашего
пятидесятилетия посвящает Вам этот выпуск с
глубоким уважением и самыми наилучшими
пожеланиями.*

Н. У. АРАКЕЛЯН

РАВНОМЕРНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Центральными задачами теории приближения функций комплексного переменного являются задачи о возможности приближения. К настоящему времени многие из этих задач получили исчерпывающее решение. Это относится, в частности, к задачам о возможности равномерного приближения полиномами и целыми функциями. В настоящей работе показывается, что методы, развитые в этом направлении, дают возможность полностью решить более общую задачу о возможности равномерного приближения аналитическими функциями, особенности которых лежат на заданном фиксированном множестве.

Такая постановка вопроса представляет интерес не только с точки зрения теории приближений. Она, по-видимому, имеет важные точки соприкосновения с такими разделами теории функций, как теория распределения значений и теория граничных свойств аналитических функций.

Настоящая работа состоит из трех пунктов. В первом из них приводится точная постановка задачи и формулировка ее решения, а доказательство решения находится в пункте 3. В пункте 2 доказываются необходимые для пункта 3 леммы.

1°. **Постановка задачи и формулировка результатов.** Пусть $\bar{C}$ — расширенная комплексная плоскость, D — область в $\bar{C}$, $\partial D \neq \emptyset$ — граница D . Рассмотрим множество $E \subset D$, замкнутое относительно D (так что D/E — открытое), и пусть E° — множество внутренних точек E . Введем следующие обозначения:

- $C(E)$ — класс комплекснозначных функций, непрерывных на E ;
- $C_A(E)$ — класс комплекснозначных функций, непрерывных на E и аналитических в E° ;
- $A(D)$ — класс функций, аналитических в D ;
- $A_D(E)$ — равномерное замыкание множества сужений функций из $A(D)$ на E .

Очевидно, что

$$A_D(E) \subset C_A(E) \subset C(E), \quad (1)$$

$$C_A(E) = C(E) \Leftrightarrow E^\circ = \emptyset, \quad (2)$$

$$f \in A_D(E) \Leftrightarrow \inf_{G \in A(D)} \sup_{z \in E} |f(z) - G(z)| = 0. \quad (3)$$

Отметим, что функции из $C(E)$, вообще говоря, не ограничены на E , если только E не компактен в $\bar{C}$.

Теперь основную задачу можно сформулировать следующим образом: при каких условиях на E любая функция, непрерывная на E и аналитическая в E° , допускает равномерную аппроксимацию сужениями функций, аналитических в D , т. е. когда имеет место равенство

$$A_D(E) = C_A(E)? \quad (4)$$

Решая эту задачу, мы тем самым получим также, в силу (1) и (2), ответ на аналогичный вопрос о равенстве

$$A_D(E) = C(E). \quad (5)$$

Для формулировки решения основной задачи (4) нам нужны некоторые определения.

Для произвольных множеств $A, B \subset \bar{C}$ обозначим через $\rho(A, B)$ их сферическое расстояние

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{z \in A \\ \zeta \in B}} \frac{|z - \zeta|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |\zeta|^2)}}.$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ через $V_\varepsilon(\partial D)$ обозначим ε -окрестность границы области D

$$V_\varepsilon(\partial D) = \{z \in \bar{C} \mid \rho(z, \partial D) < \varepsilon\}.$$

Определение 1. Пусть F — компакт из $\bar{C}$, $z \in \bar{C}/F$, γ — непрерывное отображение полуинтервала $[0, 1]$ в $\bar{C}$ такое, что

$$\gamma(0) = z, \quad \lim_{t \rightarrow 1} \rho(\gamma(t), F) = 0.$$

Тогда мы скажем, что γ соединяет z с F .

Определение 2. Множество E , замкнутое относительно области D , называется K_D -множеством ($E \in K_D$), если для любой точки $z \in D/E$ существует непрерывная кривая $\gamma_z \subset D/E$ такая, что

- γ_z соединяет точку z с ∂D ;
- для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из условия $z \in V_\varepsilon(\partial D)$ следует $\gamma_z \subset V_\delta(\partial D)$.

Отметим, что в случае, когда $\infty \in \partial D$, при определении K_D -множеств вместо сферического расстояния $\rho(A, B)$ можно воспользоваться расстоянием в R^2 .

Перечислим теперь некоторые свойства K_D -множеств.

- Пусть $\{E_k\}_{k=1}^n$ — конечное семейство K_D -множеств. Тогда $\bigcap_{k=1}^n E_k \in K_D$. Аналогичное свойство для бесконечного числа множеств неверно. Однако имеет место свойство

- Пусть A — произвольное множество, $\varphi: \alpha \rightarrow E_\alpha$ — отображение A в K_D , обладающее свойством: для любого компакта $F \subset D$ равенство $(D/E_\alpha) \cap F = \emptyset$ выполняется для всех $\alpha \in A$, кроме, быть может, конечного числа индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_F}$ (эквивалентное свойство: для любого $\varepsilon > 0$ имеем $D/E_\alpha \subset V_\varepsilon(\partial D)$, $\alpha \in A$, $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_F}$). Тогда $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \in K_D$.

3. Пусть $E \in K_D$, F — множество, замкнутое относительно D , $F \subset E$, $F^\circ = E^\circ$. Тогда $F \in K_D$. В частности, если $\overline{E_D}$ — замыкание E° относительно D , тогда $\overline{E_D} \in K_D$.

4. Пусть φ — гомеоморфизм области D в $\overline{C}$ (в частности, дробно-линейное отображение). Тогда из условия $E \in K_D$ следует $\varphi(E) \in K_{\varphi(D)}$. Решение задачи (4) дается следующей основной теоремой.

Теорема 1. $A_D(E) = C_A(E) \iff E \in K_D$. (6)

Из этой теоремы следует также решение задачи (5). В самом деле, в силу (1), (2) и (6), равенство $A_D(E) = C(E)$ имеет место тогда и только тогда, когда $E \in K_D$ и $E^\circ = \emptyset$. В свою очередь, отсюда легко следует

Теорема 2. Пусть $E \in K_D$, $E^\circ = \emptyset$, $f, \varepsilon \in C(E)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $G \in A(D)$ такая, что

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon(z), \quad z \in E. \quad (7)$$

В случае, когда $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $\rho(z, \partial D) \rightarrow 0$, приближения вида (7) называются асимптотическими или касательными. Если $E \in K_D$, но $E^\circ \neq \emptyset$, приближение с касанием возможно не всегда, а в случае, когда оно возможно, функция $\varepsilon(z)$, вообще говоря, не может произвольно быстро стремиться к нулю при $\rho(z, \partial D) \rightarrow 0$.

Отметим, что теорему 2 можно рассматривать как общую схему для построения примеров аналитических в D функций с патологическим поведением на границе.

Замечание. Задача (4) наиболее подробно изучена в случае, когда D — конечная комплексная плоскость C , т. е. когда рассматривается аппроксимация целыми функциями. Подробные сведения о равномерных приближениях целыми функциями можно найти в работах [1] и [2]. Отметим только, что эта задача впервые рассмотрена Карлеманом [3]. Теорему 2 в случае, когда $D = C$, $E^\circ = \emptyset$ и E — континуум, установили М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев [4]. Утверждение

$$E \in K_D \implies A_C(E) = C_A(E)$$

в случае $E^\circ \neq \emptyset$, E — континуум, установили М. В. Келдыш и С. Н. Мергелян [5], [1]. Наконец, в работе автора [2] теорема 1 доказана для случая $D = C$. Отметим также, что Каплан [6] рассматривает приближение вида (7) на множествах E , состоящих из счетной совокупности жордановых дуг, сгущающихся к границе области D .

2°. Вспомогательные леммы. Пусть $A, B \subset C$. Обозначим через $\delta(A)$ и $d(A, B)$ соответственно диаметр множества A и расстояние между A и B в метрике R^1

$$\delta(A) = \sup_{z_1, z_2 \in A} |z_1 - z_2|, \quad d(A, B) = \inf_{\substack{z_1 \in A \\ z_2 \in B}} |z_1 - z_2|. \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть K — ограниченный континуум в C со связным дополнением, φ — конформное и однолистное отображение области $\overline{C}/K$ на круг $|w| < 1$, $\varphi(\infty) = 0$. Тогда имеет место оценка

$$1 - |\varphi(z)| < 2 \left[\frac{d(z, K)}{\delta(K)} \right]^{1/2}, \quad z \in \overline{C}/K. \quad (9)$$

Если K лежит в круге $|z| \leq R$ и $0 \in K$, то

$$|\varphi(0)| > \frac{\delta(K)}{6R} \left[1 + \frac{\delta^2(K)}{(6R)^2} \right], \quad \left| \frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} \right| < 3 \text{ при } |z| = 2R. \quad (10)$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $z_0 \in K$, и рассмотрим дробно-линейное отображение $z \longleftrightarrow \zeta$

$$\zeta = \frac{\varphi'(\infty)}{z - z_0}, \quad z = z_0 + \frac{\varphi'(\infty)}{\zeta}, \quad \varphi'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \varphi(z).$$

Функция $w = \varphi\left(z_0 + \frac{\varphi'(\infty)}{\zeta}\right)$ определена в некоторой области, не содержащей точки $\zeta = \infty$, поэтому обратная ей функция $\zeta = f(w)$ принадлежит известному классу S . По теореме искажения Бибербаха имеем [7]

$$\left| \frac{\varphi'(\infty)}{z - z_0} \right| = |f(w)| \leq \frac{|\varphi(z)|}{(1 - |\varphi(z)|)^2}. \quad (11)$$

Отсюда, учитывая оценку [7]

$$\frac{1}{4} \delta(K) \leq |\varphi'(\infty)| \leq \min\{\delta(K), R\}, \quad (12)$$

получим неравенство (9), так как $|\varphi(z)| < 1$ и $z_0 \in K$ — произвольная.

Далее из (11), учитывая, что $|z_0| \leq R$, имеем

$$|\varphi(0)| \geq \left(2 + \frac{R}{|\varphi'(\infty)|} \right)^{-1} (1 + |\varphi(0)|^2). \quad (13)$$

Первое неравенство в (10) следует из (12) и (13), так как

$$|\varphi(0)| > \left(2 + \frac{R}{|\varphi'(\infty)|} \right)^{-1} > \frac{\delta(K)}{6R}.$$

Для доказательства второго неравенства рассмотрим функцию

$$\psi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{1 - \overline{\varphi(z)} \varphi(\zeta)} \frac{d(z, K)}{\zeta - z},$$

аналитическую в области $\bar{C}/K$. Учитывая, что $\psi(\infty) = 0$ и

$$\lim_{d(\zeta, K) \rightarrow 0} |\psi(\zeta)| \leq 1,$$

по лемме Шварца имеем

$$|\psi(\zeta)| \leq |\varphi(\zeta)|, \quad \zeta \in \bar{C}/K.$$

Умножая это неравенство на $|\zeta|$ и переходя к пределу при $\zeta \rightarrow \infty$, получим

$$|\varphi(z)| \leq \frac{|\varphi'(\infty)|}{d(z, K)}, \quad z \in \bar{C}/K.$$

В частности, при $|z| = 2R$ имеем

$$|\varphi(z)| \leq \frac{|\varphi'(\infty)|}{R}.$$

Отсюда и следует требуемое неравенство, если учитывать, что, в силу (12) и (13),

$$|\varphi'(\infty)| \leq R, \quad |\varphi(0)| > \left(2 + \frac{R}{|\varphi'(\infty)|}\right)^{-1} > \frac{|\varphi'(\infty)|}{3R}.$$

Лемма доказана.

Следующая лемма сходна с леммой С. Н. Мергеляна о приближении ядра Коши рациональными функциями.

Лемма 2. Пусть область σ_ζ лежит в круге $|z - \zeta| < R$ и $\alpha \in \sigma_\zeta$. Для произвольного натурального числа m существует рациональная функция R_ζ с единственным полюсом в точке α такая, что

$$\left| R_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{(6R)^m}{|\zeta - z|^{m+1}} \text{ при } |z - \zeta| > 2R, \quad (14)$$

$$|R_\zeta(z)| < \left[\frac{6R}{\delta(\sigma_\zeta)} \right]^m \frac{2}{|\zeta - z|} \text{ для } z \in \overline{C}/\sigma_\zeta. \quad (15)$$

Доказательство. Можно считать, что $\zeta = 0$. Рассмотрим жорданову дугу γ , удовлетворяющую условиям

$$\gamma \subset \sigma_\zeta, \quad 0 \notin \gamma, \quad \delta(\gamma) \left[1 + \frac{\delta^2(\gamma)}{(6R)^2} \right] > \delta(\sigma_\zeta). \quad (16)$$

Пусть φ — конформное и однолиственное отображение области $\overline{C}/\gamma$ на круг $|w| < 1$, $\varphi(\infty) = 0$. По теореме Рунге для любого $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция Q с полюсом в точке α , $Q(\infty) = 0$ такая, что

$$|\varphi(z) - Q(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \overline{C}/\sigma_\zeta.$$

Отсюда, учитывая (10) и (16), для достаточно малых ε имеем

$$|Q(0)| > \frac{\delta(\sigma)}{6R}, \quad |Q(z)| < 1 \text{ для } z \in \overline{C}/\sigma_\zeta, \quad (17)$$

$$\left| \frac{Q(z)}{Q(0)} \right| < 3 \text{ при } |z| = 2R. \quad (18)$$

Искомую рациональную функцию $R_0(z)$ определим формулой

$$R_0(z) = \frac{1}{z} \left[1 - \left(\frac{Q(z)}{Q(0)} \right)^m \right]. \quad (19)$$

Неравенство (15) следует из (17) и (19). Кроме того, функция $z^{m+1} \left[R_0(z) - \frac{1}{z} \right]$ аналитична при $|z| > 2R$, а на окружности $|z| = 2R$ ее модуль, согласно (18) и (19), не превосходит $(6R)^m$, что доказывает оценку (14). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $E \in K_D$, Q — рациональная функция с единственным полюсом в точке $\alpha \in D/E$. Для любого $\eta > 0$ существует функция $\psi \in A(D)$, удовлетворяющая неравенству

$$|\psi(z) - Q(z)| < \eta \text{ для } z \in E. \quad (20)$$

При этом для любого $r > 0$ существует $\lambda = \lambda(r) > 0$ такое, что неравенство (20) выполняется также для $z \in V_r(\partial D)$, как только $z \in V_\lambda(\partial D)$.

Эту лемму нетрудно доказать методом вывода полюсов, как лемму 3 в работе [2].

Лемма 4. Пусть D — область, $\infty \notin D$. Существует бесконечно дифференцируемая в D функция ρ такая, что*

$$0 < \rho(z) < \rho(z, \partial D), \quad \left| \frac{\partial \rho(z)}{\partial \bar{z}} \right| < 1, \quad z \in D. \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ и $0 < r_0 \leq \frac{1}{2}$. Рас-

смотрим квадрат

$$K = \{z = x + iy \mid |x - x_0| < r_0, |y - y_0| < r_0\},$$

и предположим, что $K \subset D$. Определим в D бесконечно дифференцируемую неотрицательную функцию $\varphi(z, K)$, полагая

$$\varphi(z, K) = (|z_0|^2 + 1)^{-1} \exp \{ -[r_0^2 - |x - x_0|^2]^{-1} - [r_0^2 - |y - y_0|^2]^{-1} \}$$

при $z = x + iy \in K^\circ$ и $\varphi(z, K) = 0$ для $z \in D/K^\circ$.

Учитывая, что при $z \in K$

$$d(z, \partial K) = \min \{ [r_0 - |x - x_0|], [r_0 - |y - y_0|] \},$$

и используя элементарное неравенство $e^{-\frac{1}{t}} < t$ ($t > 0$), получим

$$\begin{aligned} \varphi(z, K) &< (|z_0|^2 + 1)^{-1} [r_0 - |x - x_0|][r_0 - |y - y_0|] \leq \\ &\leq \frac{d(z, \partial K)}{2(1 + |z_0|^2)} \leq \rho(z, \partial K) \leq \rho(z, \partial D). \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично, используя неравенство $e^{-\frac{1}{t}} < 2t^2$ ($t > 0$), получим

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < \frac{\varphi(z, K)}{(r_0^2 - |x - x_0|^2)^2} < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < \frac{\varphi(z, K)}{(r_0^2 - |y - y_0|^2)^2} < 1,$$

так что

$$\left| \frac{\partial \varphi(z, K)}{\partial \bar{z}} \right| < 1 \quad \text{для } z \in D. \quad (23)$$

Возьмем теперь произвольное комплексное число a и натуральное число n . Прямые $x = \operatorname{Re} a + p \cdot 2^{-n}$ и $y = \operatorname{Im} a + q \cdot 2^{-n}$ ($p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) разбивают плоскость на равные квадраты со стороной 2^{-n} , называемые квадратами ранга n .

Пусть $\{K_{l,j}(a)\}_{j=1}^{m_l}$ ($m_l \leq +\infty$) — все квадраты первого ранга, лежащие в D . Если уже выбраны квадраты $\{K_{l,j}(a)\}_{j=1}^{m_l}$ ($m_l \leq +\infty$) — ранга $l \leq n-1$, то пусть $\{K_{n,j}(a)\}_{j=1}^{m_n}$ ($m_n \leq +\infty$) — все квадраты ранга n , лежащие в области

* По определению, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $z = x + iy$.

$$D \left| \bigcup_{l=1}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{m_l} K_{l,j}(a) \right|.$$

Продолжая этот процесс, мы получим

$$D = \bigcup_{n=1}^N \bigcup_{j=1}^{m_n} K_{n,j}(a), \quad N \leq +\infty. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь бесконечно дифференцируемую в D функцию

$$\rho_a(z) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{m_n} \varphi(z, K_{n,j}(a)).$$

В силу (24), для любой точки $z \in D$ существуют натуральные числа n и j такие, что

$$\rho_a(z) = \varphi(z, K_{n,j}(a)), \quad \frac{\partial \rho_a(z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, K_{n,j}(a)).$$

С учетом (22) и (23) отсюда следует, что функция $\rho_a(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы, кроме строгой положительности ($\rho_a(z) = 0$ для $z \in \partial K_{n,j}(a)$). Для обеспечения этого условия достаточно рассмотреть функцию

$$\rho(z) = \frac{1}{3} [\rho_{a_1}(z) + \rho_{a_2}(z) + \rho_{a_3}(z)],$$

где числа $\operatorname{Re}(a_k - a_j)$, $\operatorname{Im}(a_k - a_j)$ ($k \neq j$, $k, j = 1, 2, 3$) иррациональны (например, $a_1 = 0$, $a_2 = (1+i)\sqrt{2}$, $a_3 = (1+i)\sqrt{3}$). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть D — область, $\infty \notin D$, функция f непрерывна в D . Для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции φ и δ , непрерывно дифференцируемые соответственно в D и C , $\delta(z) = 0$ при $z \in C/D$, удовлетворяющие для $z \in D$ неравенствам

$$0 < \delta(z) < \frac{1}{2} \rho(z, \partial D), \quad \left| \frac{\partial \delta(z)}{\partial z} \right| < \min \{ \varepsilon, \delta^{1/2}(z) \}, \quad (25)$$

$$|\varphi(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right| < \frac{\varepsilon}{\delta(z)}. \quad (26)$$

При этом, если для некоторой точки $z \in D$ функция f аналитична в круге $|z - z| < \delta(z)$, то $\varphi_z(z) = 0$.

Доказательство. Считая $\varepsilon < 1$, построим сначала функцию $\delta(z)$. Для компактного в C множества

$$K_\lambda = \{z \in D | \rho(z, \partial D) \geq \lambda\}, \quad 0 < \lambda < 1$$

из условия $z \in K_\lambda$ и $|z - z| \leq \delta \leq \frac{\lambda}{2}$ следует, что $z \in K_\lambda$.

Учитывая это, обозначим

$$\omega(\lambda, \delta) = \max_{\substack{z \in K_\lambda \\ |z - z| \leq \delta}} |f(z) - f(z)|.$$

Далее из уравнения $\omega(\lambda, \delta) + \delta = \frac{\lambda \varepsilon}{2}$ определим непрерывную функцию $\delta = \delta_1(\lambda)$ и положим

$$\delta_2^{1/2}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \delta_1^{1/2}(t) dt.$$

Имеем очевидно

$$\delta_2(\lambda) < \delta_1(\lambda) < \frac{\lambda \varepsilon}{2} < \frac{\lambda}{2}, \quad (27)$$

$$\delta_2'(\lambda) = \delta_1^{1/2}(\lambda) \delta_1^{1/2}(\lambda) < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \delta_2^{1/2}(\lambda)\right). \quad (28)$$

Теперь для $z \in D$ положим $\delta(z) = \delta_2(\rho(z))$, где $\rho^*(z)$ — построенная в лемме 4 функция. Неравенства (25) следуют из (27), (28) и (21). Непрерывная дифференцируемость функции $\delta(z)$ в C следует из неравенств (25), если для $z \in C/D$ положить $\delta(z) = 0$.

Теперь определим функцию $\varphi(z)$ формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi \delta^2(z)} \iint_{|\zeta - z| < \delta(z)} f(\zeta) ds.$$

Заметим, во-первых, что

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - f(z)| &\leq \max_{|\zeta - z| < \delta(z)} |f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(\rho(z), \delta(z)) < \\ &\leq \omega(\rho(z), \delta_1(\rho(z))) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее, используя формулу Грина, имеем

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \delta(z)}{\partial \bar{z}} \frac{\delta^{-1}(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \delta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{\delta^{-2}(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \delta(z)} f(\zeta) d\zeta. \quad (30)$$

Второе неравенство в (26) следует из (29), (30) и оценки $|\delta_z'(z)| < \frac{1}{2}$.

Для доказательства последнего утверждения леммы заметим, что из аналитичности функции f в круге $|\zeta - z| < \delta(z)$ по теореме о среднем арифметическом имеем, что $\varphi(z) = f(z)$, и оба интеграла в (30) обращаются в нуль. Лемма доказана.

3°. **Доказательство теоремы I. Необходимость.** Пусть E — замкнутое относительно области D множество и $E \in K_D$. Докажем, что существует функция $f \in C_A(E)$, для которой

$$\inf_{G \in A(D)} \sup_{z \in E} |f(z) - G(z)| \geq 1. \quad (31)$$

Пусть $\{D_k\}_{k=1}^N$ ($N \leq +\infty$) — компоненты открытого множества $D|E$. Если $\rho(D_k, \partial D) > 0$ для некоторого k , тогда наше утверждение оче-

видно. Рассматривая точки $z_0, \zeta_0 \neq \infty, z_0 \in D_k, \rho(\zeta_0, D_k) > 0$, мы полагаем

$$f(z) = 2A \left(\frac{z - \zeta_0}{z - z_0} \right), \quad A = \sup_{z \in D_k} \left| \frac{z - z_0}{z - \zeta_0} \right| < +\infty.$$

Пусть поэтому $\sup_{k \in N} \rho(D_k, \partial D) = 0$. Из условия $E \notin K_D$ следует существование числа $\lambda > 0$ и последовательности областей $\{\Omega_m\}$ попарно без общих точек таких, что

$$\Omega_m \subset D, \partial \Omega_m \subset E \cup \{z \in D \mid \rho(z, \partial D) > \lambda\}, \quad 0 < \rho(\Omega_m, \partial D) \rightarrow 0.$$

В силу компактности ∂D в $\bar{C}$ существует точка $\zeta \in \partial D$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\Omega_m, \zeta) = 0.$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\zeta = \infty$. Рассматривая, если нужно, вместо последовательности Ω_m соответствующую подпоследовательность, можно считать, что области Ω_m ограничены, пересекаются с кругом $|z| < \frac{1}{\lambda}$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\Omega_m, \infty) = 0.$$

Отсюда следует существование последовательности $\{p_n\}$ натуральных чисел и последовательности $\{\gamma_n\}$ жордановых дуг, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_n \subset \Omega_{2p_n+1}, \quad 0 < d(0, \gamma_n) \rightarrow +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d(0, \gamma_n)}{\delta(\gamma_n)} \right]^{1/2} < +\infty. \quad (32)$$

Пусть φ_n — конформное и однолистное отображение области $\bar{C}/\gamma_n$ на круг $|w| < 1$, $\varphi_n(\infty) = 0, \varphi_n(0) > 0$. Возьмем последовательность $\{q_n\}$ натуральных чисел и последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел так, чтобы

$$a_n \in \Omega_{2q_n}, \quad a_n \rightarrow \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a_n)| < +\infty. \quad (33)$$

Докажем, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n(z), \quad b_n(z) = \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(a_n)}{1 - \overline{\varphi_n(a_n)} \varphi_n(z)}$$

в области $C \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ сходится к некоторой аналитической функции $B(z)$, $|B(z)| < 1$, все нули которой лежат в точках $\{a_n\}$. Для этого достаточно доказать сходимость в точке $z = 0$ и равномерную сходимость произведения $\prod_{n=1}^{\infty} |b_n(z)|$ в любом круге $|z| \leq r$ для некоторого $N = N(r)$.

Первое утверждение с учетом (33), (32) и оценки (9) леммы 1 следует из неравенства

$$|1 - b_n(0)| \leq \frac{|1 - \varphi_n(0)| + 2|\varphi_n(a_n)|}{1 - |\varphi_n(a_n)|}.$$

Второе утверждение следует из первого и из теоремы Гарнака, так как $|b_n(z)| < 1$, функции $b_n(z)$ аналитичны и не обращаются в нуль при $|z| \leq r$ и $n > N$, где число N выбрано так, что $|a_n| > r$ и $d(0, \gamma_n) > r$ при $n > N$.

Перейдем к доказательству неравенства (31), полагая $f(z) = 2B^{-1}(z)$. В самом деле, если неравенство (31) не выполняется, то

$$\sup_{z \in E} |B(z) G(z) - 2| < 1$$

для некоторой функции $G \in A(D)$. Пусть

$$K_\lambda = \{z \in D \mid \rho(z, \partial D) > \lambda\}, \quad M = \max_{z \in K_\lambda} |B(z) G(z) - 2|.$$

Обозначим через Ω'_{2q_n} максимальную область, определенную условиями

$$a_n \in \Omega'_{2q_n}, \quad \Omega'_{2q_n} \subset \Omega_{2q_n} \cap V, \quad V = \left\{z \in \bar{C} \mid |z| > \frac{1}{\lambda}\right\}.$$

По принципу максимума имеем

$$|B(z) G(z) - 2| < 1 + M\omega(z, l_n, V), \quad z \in \Omega'_{2q_n},$$

где $l_n = \partial V \cap \partial \Omega'_{2q_n}$, ω — гармоническая мера l_n относительно области V . Из представления ω интегралом Пуассона легко следует оценка

$$\omega(z, l_n, V) < \lambda \text{ д.л. } l_n, \quad |z| > \frac{2}{\lambda}.$$

Отсюда для точки $z = a_n$ имеем

$$1 < M\omega(a_n, l_n, V) < \lambda \text{ д.л. } l_n.$$

Однако $l_n \cap l_m = \emptyset$ при $n \neq m$ и поэтому д.л. $l_n \rightarrow 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (31).

Достаточность. Пусть $E \in K_D$ и $f \in C_A(E)$. Докажем, что $f \in A_D(E)$. Согласно теореме Титце-Урысона будем считать, что f непрерывна в D . Можно также считать, что $\infty \notin D$.

Возьмем число $\varepsilon > 0$ и пусть φ и δ — построенные в лемме 5 функции. Рассмотрим множества

$$\partial E = E/E^\circ, \quad E_\varepsilon = \{\zeta \in E \mid d(\zeta, \partial E) < \delta(\zeta)\}.$$

В силу последнего утверждения леммы 5 имеем

$$\frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \zeta} \equiv 0 \text{ для } \zeta \in E/E_\varepsilon. \quad (34)$$

Для любого $r > 0$ и $\zeta \in C$ обозначим $K_r^\zeta = \{z \in C \mid |z - \zeta| < r\}$. Пусть $\zeta \in E_\varepsilon$. Тогда $(D/E) \cap K_{\delta(\zeta)}^\zeta \neq \emptyset$ и, в силу условия $E \in K_D$, существует область $\sigma_\zeta \subset (D/E) \cap K_{\delta(\zeta)}^\zeta$ диаметра $\delta(\sigma_\zeta) > \delta(\zeta)$. Применяя к области σ_ζ лемму 2 в случае, когда $R = 2\delta(\zeta)$ и $m = 2$, мы получим рациональную функцию R_ζ с полюсом в σ_ζ , удовлетворяющую неравенствам

$$\left| R_z(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < \frac{[12 \delta(\zeta)]^2}{|\zeta - z|^3} \text{ для } z \in \bar{C} / K_{\delta}^z(\zeta), \quad (35)$$

$$|R_z(z)| < \frac{2 \cdot 12^2}{|\zeta - z|} \text{ для } z \in E \cup (\bar{C} / K_{\delta}^z(\zeta)). \quad (36)$$

Функцию $R_z(z)$ можно считать кусочно-непрерывной по ζ на E , равномерно относительно z .

Докажем теперь, что для $z \in E$ справедлива оценка

$$\frac{1}{\pi} \iint_{E_z} \left| \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \left[R_z(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] \right| ds_{\zeta} < c\varepsilon, \quad (37)$$

где ds_{ζ} — элемент площади, c — абсолютная константа.

В силу неравенств (26), (35) и (36) для этого достаточно доказать оценки

$$I_1 = \iint_{V_z} \frac{ds_{\zeta}}{\delta(\zeta) |\zeta - z|} < c, \quad I_2 = \iint_{C/V_z} \frac{\delta(\zeta)}{|\zeta - z|^3} ds_{\zeta} < c, \quad z \in D,$$

где $V_z = \{\zeta \in D \mid |\zeta - z| < 4\delta(\zeta)\}$. С этой целью заметим, что по теореме о среднем значении, учитывая (25), имеем

$$|\delta(\zeta) - \delta(z)| \leq \left| \frac{\partial \delta(\zeta^*)}{\partial \bar{\zeta}} \right| |\zeta - z| < \varepsilon |\zeta - z|, \quad \zeta, z \in D. \quad (38)$$

Отсюда, считая $\varepsilon < \frac{1}{8}$, при $\zeta \in V_z$ получим

$$\frac{1}{2} \delta(z) < \delta(\zeta) < 2\delta(z), \quad \zeta \in V_z \Rightarrow \zeta \in K_{\delta/2}^z(z).$$

Поэтому

$$I_1 < \frac{2}{\delta(z)} \iint_{K_{\delta/2}^z(z)} \frac{ds_{\zeta}}{|\zeta - z|} = 32\pi.$$

Если же $\zeta \in C/V_z$, то аналогично $\zeta \in C/K_{2\delta}^z(z)$, и мы имеем

$$I_2 < 2\pi + \iint_{K_1^z/K_{2\delta}^z(z)} \frac{\delta(\zeta)}{|\zeta - z|^3} ds_{\zeta} = 2\pi + \int_0^{2\pi} I_3(\theta) d\theta.$$

Далее с учетом (25) и оценки

$$\delta(\zeta) \leq |\zeta - z| \text{ для } \zeta \in G/K_{2\delta}^z(z),$$

интегрированием по частям имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_{2\delta(z)}^1 \delta(z + \rho e^{i\theta}) d \frac{1}{\rho} < \frac{\delta(z + 2\delta(z) e^{i\theta})}{2\delta(z)} + \\ &+ \int_{2\delta(z)}^1 \frac{\delta^{1/2}(z + \rho e^{i\theta})}{\rho} d\rho < 1 + \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} = 3. \end{aligned}$$

Оценка (39) доказана.

Возьмем теперь замкнутое относительно D множество $F \subset D \setminus E$ так, чтобы при $z \in C$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\pi} \iint_{D \setminus (E \cup F)} \left| \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \frac{ds_{\zeta}}{|\zeta - z|} < \varepsilon \quad (39)$$

и интеграл сходиллся равномерно относительно z . Рассмотрим рациональную по z функцию

$$Q_{\zeta}(z) = \begin{cases} R_{\zeta}(z), & \text{для } \zeta \in E_0 \\ \frac{1}{\zeta - z}, & \text{для } \zeta \in F. \end{cases}$$

Для полюса α функции Q_{ζ} имеем

$$\rho(\alpha, \partial D) \leq \rho(\zeta, \partial D) + \rho(\alpha, \zeta) < \rho(\zeta, \partial D) + 2\delta(\zeta) < 2\rho(\zeta, \partial D). \quad (40)$$

По лемме 3 существует функция $\psi_{\zeta} \in A(D)$, удовлетворяющая для $z \in E$ неравенству

$$|\psi_{\zeta}(z) - Q_{\zeta}(z)| < \frac{\delta(\zeta)}{(1 + |\zeta|)^3}. \quad (41)$$

В силу (40) и последнего утверждения леммы для любого $r > 0$ существует $\lambda = \lambda(r) > 0$ такое, что неравенство (41) выполняется также при $z \in V_r(\partial D)$, как только $\zeta \in V_{\frac{\lambda}{2}}(\partial D)$. Отметим, что функцию $\psi_{\zeta}(z)$

можно считать кусочно-постоянной по ζ равномерно относительно z .

Построим, наконец, функцию $G \in A(D)$, аппроксимирующую на E функцию φ . С этой целью возьмем последовательность областей $\{D_n\}$, $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ так, что ∂D_n состоит из конечного числа гладких линий Жордана. Тогда по обобщенной формуле Коши, учитывая (34), имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_{D_n \setminus (E \cup E_0)} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds_{\zeta}}{\zeta - z} \quad \text{при } z \in D_n, m \leq n. \quad (42)$$

Рассмотрим последовательность функций

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_{D_n \cap (E_0 \cup F)} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \psi_{\zeta}(z) ds_{\zeta}, \quad (43)$$

аналитических в области D_m при $m \leq n$. Докажем, что $G_n(z)$ сходится равномерно на любом компакте $K \subset D$.

В самом деле, пусть $N < m < n$ и $K \subset D_N$. Обозначив $D_n^m = D_n \setminus D_m$, согласно (42) и (43), для $z \in K$ имеем

$$\begin{aligned} G_n(z) - G_m(z) &= \frac{1}{\pi} \iint_{D_n^m \cap (E_0 \cup F)} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \left[\psi_{\zeta}(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] ds_{\zeta} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \iint_{D_n^m \setminus (E \cup F)} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds_{\zeta}}{\zeta - z} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

В силу (39) интеграл I_2 равномерно на K сходится к нулю при $m, n \rightarrow \infty$. Для интеграла I_1 имеем

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{D_n^m \cap (E_\delta \cup F)} \left| \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \left| Q_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| ds_\zeta + \\ + \frac{1}{\pi} \iint_{D_n^m \cap (E_\delta \cup F)} \left| \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \left| \psi_\zeta(z) - Q_\zeta(z) \right| ds_\zeta = I'_1 + I''_1.$$

Пусть $\rho(K, \partial D) = r$. Нетрудно видеть, что неравенство (35) выполняется для $z \in K$, если $\zeta \in V_{\frac{r}{3}}(\partial D)$. Кроме того, $\rho(z, \zeta) \geq \frac{2}{3}r$, так что

$$\frac{1}{|\zeta - z|} < \frac{3}{r} \frac{1}{1 + |\zeta|}. \quad (44)$$

Возьмем число N так, чтобы $\partial D_N \subset V_{\frac{r}{3}}(\partial D)$, и пусть $n > m > N$. С учетом (25), (26), (35) и (44) получим

$$I'_1 \leq 12^2 \iint_{D_n^m} \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|^3} \leq 12^2 \left(\frac{3}{r} \right)^3 \iint_{D \cap D_m} \frac{ds_\zeta}{(1 + |\zeta|)^3} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Вполне аналогично, с учетом (41) оценивается интеграл I''_1 , в предположении, что $N < m < n$ и $\partial D_N \subset V_{\frac{\lambda(r)}{2}}(\partial D)$. Таким образом, $G_n \rightarrow G \in A(D)$. Для $z \in E$ согласно (42) и (43) имеем

$$G(z) - \varphi(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{E_\delta \cup F} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \left[\psi_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right] ds_\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D \setminus (E \cup F)} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{ds_\zeta}{\zeta - z} = \\ = I_3 + I_4.$$

Однако $|I_4| < \varepsilon$, в силу (39). Кроме того, учитывая (37), (41) и (26), имеем

$$|I_3| < c\varepsilon + \frac{1}{\pi} \iint_{E_\delta \cup F} \left| \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \left| \psi_\zeta(z) - Q_\zeta(z) \right| ds_\zeta < c\varepsilon + \int_\zeta \frac{ds_\zeta}{(1 + |\zeta|)^3} < (c + 2)\varepsilon.$$

Окончательно для $z \in E$ получим

$$|G(z) - f(z)| \leq |G(z) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - f(z)| < (c + 4)\varepsilon,$$

где c — абсолютная константа. Теорема 1 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 5.VI.1968

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԵՎ ՇՈՇԱՓՈՒՄԱՅԻՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ
ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիցուք D -ն տիրույթ է ընդլայնված կոմպլեքս հարթությունից, $E \subset D$ -ի նկատմամբ փակ բազմություն է: Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. E -ի վրա ինչպիսի պայմանների դեպքում E -ի վրա անընդհատ և E -ի ներքին կետերում անալիտիկ ամեն մի ֆունկցիա հավասարաչափ կերպով մոտարկվում է D տիրույթում անալիտիկ ֆունկցիաներով:

Ապացուցվում է, որ դրա համար անհրաժեշտ է ու բավարար, որպեսզի E -ն լինի K_D - բազմություն:

N. H. ARAKELIAN

UNIFORM AND TANGENTIAL APPROXIMATION WITH
ANALYTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

Let D be a domain in the extended complex plain $\bar{\mathbb{C}}$. Consider a set $E \subset D$ which is closed with respect to D . The following basic problem is investigated in the present paper.

What are the conditions to be satisfied by E in order that an arbitrary continuous on E and analytic in the interior of E function permits uniform approximation by analytical in D functions?

It is proved that the above stated problem has a positive solution if and only if $E \in K_D$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Н. Мерицян. Равномерные приближения функций комплексного переменного УМН, VII, вып. 2, 1952, 31—122.
2. Н. У. Аракелян. О равномерном приближении целыми функциями на замкнутых множествах, Изв. АН СССР, серия матем., 28, 5, 1964, 1187—1206.
3. T. Carleman. Sur un theoreme de Weierstrass, Arkiv for Mathematik. Astronomi och Fysik, Bd. 20, No. 4, 1927, 1—5.
4. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев. Об одной задаче Карлемана, ДАН СССР, 23, № 8, 1939, 746—748.
5. М. В. Келдыш. О приближении голоморфных функций целыми функциями, ДАН СССР, 47, № 4, 1945, 243—245.
6. W. Kaplan. Approximation by entire functions, The Michigan Math. Journal, vol. 3, No. 1, 1955—1956, 43—52.
7. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.

В. С. ЗАХАРЯН

О РАДИАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
ФУНКЦИИ B_α

В связи с построением общей теории параметрического представления мероморфных в единичном круге функций в работах М. М. Джрбашяна [1а, б] для каждого значения параметра α ($-1 < \alpha < \infty$) была введена функция $B_\alpha(z, A)$, являющаяся естественным обобщением произведения Бляшке и совпадающая с ним при значении параметра $\alpha = 0$.

В работах [2а, б] исследованы граничные свойства функции $B_\alpha(z, A)$ при значениях параметра $\alpha \in (-1, 0)$. Установлено, что радиальные пределы

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} B_\alpha(re^{i\gamma}, A) = B_\alpha(e^{i\gamma}, A)$$

существуют не только почти для всех $\gamma \in [0, 2\pi]$, как это имеет место для обычного произведения Бляшке

$$B(z, A) \equiv B_0(z, A) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \cdot \frac{|a_k|}{a_k},$$

а более того, что эти пределы существуют всюду, за исключением, быть может, некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, γ -емкость которого — нуль, где $\gamma \in (1+\alpha, 1)$ любое.

В настоящей статье устанавливаются некоторые новые результаты о граничных свойствах функции М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z, A)$ и, в частности, доказывается, что предыдущее утверждение относительно емкости исключительного множества E справедливо и при $\gamma = 1 + \alpha$.

1° Основные определения. В предположении, что $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($0 < |a_k| < 1$) — некоторая последовательность чисел из единичного круга $D: \{|z| < 1\}$, пронумерованная в порядке неубывания их модулей и удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha < \infty), \quad (1)$$

функция $B_\alpha(z, A)$ строится таким образом

$$B_\alpha(z, A) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{-W_\alpha(z, a_k)}, \quad (2)$$

где

$$W_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\tau} z) V_\alpha(e^{i\tau}, \zeta) d\tau, \quad (3)$$

$$V_2(re^{i\varphi}, \zeta) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right|, \quad (4)$$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}. \quad (5)$$

Здесь $D^{-\alpha}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, т. е., если $\varphi(r) \in L_1(0,1)$, то

$$D^{-\alpha} \varphi(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \quad (0 < \alpha < \infty),$$

$$D^{-\alpha} \varphi(r) = \frac{d}{dr} \{ D^{-(1+\alpha)} \varphi(r) \} \quad (-1 < \alpha < 0),$$

причем, поскольку почти всюду на $(0,1)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} D^{-\alpha} \varphi(r) = \varphi(r),$$

то естественно полагается, что

$$D^0 \varphi(r) = \varphi(r), \quad r \in (0,1).$$

При условии (1) произведение $B_n(z, A)$ равномерно и абсолютно сходится в любом замкнутом круге $|z| \leq r < 1$, определяя аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию, обращающуюся в нуль только на последовательности A .

Приведем некоторые хорошо известные определения [3, 4], которые понадобятся нам в дальнейшем.

а) Пусть E — некоторое множество в комплексной плоскости и $h(r)$ — некоторая вещественная функция меры, то есть $h(r)$ непрерывная и неубывающая функция при $r > 0$, $h(0) = 0$ и $r^{-2} h(r)$ не возрастает. Внешняя h -хаусдорфова мера множества E определяется следующим числом:

$$M_h(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h[d(E_i)] : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, d(E_i) < \varepsilon, i=1, 2, \dots \right\},$$

где $d(E_i)$ означает диаметр множества E_i .

Если $h(r) = r^\beta$, где $0 < \beta < 2$, то мера называется β -хаусдорфовой и обозначается через $M_\beta(E)$.

б) Пусть E — ограниченное борелево множество на комплексной плоскости и β ($0 < \beta < 2$) — фиксированное число. Если существует такое положительное распределение масс μ на E , что $\mu(E) = 1$, и интеграл

$$\int_E \frac{d\mu(\zeta)}{|z - \zeta|^\beta}$$

ограничен для всех z , то говорят, что множество E имеет положительную β -емкость, в противном случае говорят, что β -емкость множества E равна нулю и пишут $C_\beta(E) = 0$.

в) Если для ограниченного борелева множества E $M_\beta(E) = 0$, то $C_\beta(E) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Если для компактного множества E имеем $M_h(E) > 0$, где функция меры $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{t^{1+\beta}} dt < +\infty,$$

то можем утверждать, что $C_\beta(E) > 0$.

В дальнейшем, если не указано особо, мы будем рассматривать только значения α из промежутка $(-1, 0)$, а через c обозначать абсолютные константы, не обязательно равные между собой.

2°. Результаты вспомогательного характера. Следующая теорема о борелевых рядах носит довольно общий характер. Отметим, что при $\alpha = 0$ эта теорема была установлена Л. Карлесоном [3].

Теорема 1. Пусть $\{\alpha_n\}$ ($0 \leq |\alpha_n| < 1$) — последовательность комплексных чисел из круга D , а $\{A_n\}_1^\infty$ ($0 < A_n < 1$) — произвольная последовательность.

Если $h(r)$ — функция меры такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{1+\alpha} \int_{A_n}^2 \frac{h(r)}{r^{2+\alpha}} dr < +\infty \quad (-1 < \alpha \leq 0), \quad (6)$$

то $M_h(E) = 0$, где

$$E = \left\{ z : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{|z - \alpha_n|} \right)^{1+\alpha} = +\infty \right\}.$$

Доказательство. Теорема доказывается тем же методом Берлинга, что и доказательство Л. Карлесона. Изложим это доказательство для случая $\alpha \in (-1, 0]$.

Поскольку $r^{-2} h(r)$ не возрастает, то из условия (6) теоремы следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(A_n) < +\infty.$$

Для любого целого $p \geq 1$ обозначим через O_p открытое множество

$$O_p = \left\{ z : \sum_p \left(\frac{A_n}{|z - \alpha_n|} \right)^{1+\alpha} > 1 \right\}.$$

Пусть μ — неотрицательная вполне аддитивная функция распределения такая, что

$$\mu(r, a) \leq h(r),$$

где $\mu(r, a)$ — масса, расположенная на части множества O_p , лежащего в круге радиуса r с центром в точке a . Вне множества O_p $\mu(r, a)$ равна нулю.

Для любого $\alpha, \nu > p$ опишем круги с радиусами A_ν и с центрами в этой точке, и обозначим через G_p внешность этих кругов. Ввиду того, что $\mu(r, \alpha) \leq h(r)$, на совокупности кругов $\bigcup_p K$, масса μ не больше, чем

$$\sum_p h(A_\nu) = \varepsilon_p.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \mu(G_p) &\leq \int_{O_p} d\mu(z) \sum_p \left(\frac{A_\nu}{|z - a_\nu|} \right)^{1+\alpha} \leq \sum_p A_\nu^{1+\alpha} \int_{A_\nu}^3 \frac{d\mu(r, \alpha)}{r^{1+\alpha}} < \\ &\leq \frac{h(3)}{3} \sum_p A_\nu^{1+\alpha} + \sum_p A_\nu^{1+\alpha} \int_{A_\nu}^3 \frac{h(r)}{r^{2+\alpha}} dr = \varepsilon_p, \end{aligned}$$

следовательно

$$\sup_{\mu < h(r)} \mu(O_p) \leq \varepsilon_p + \varepsilon_p = \varepsilon_p.$$

Так как легко видеть, что $\varepsilon_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, то μ -мера множества O_p равна нулю для любой μ , удовлетворяющей условию $\mu(r, \alpha) \leq h(r)$. Так как кроме точек a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, p-1$) O_p содержит множество E , то получается, что такая μ -мера множества E также равна нулю. Отсюда вытекает, что $M_h(E) = 0$.

Если принять $h(r) = r^{1+\alpha}$ ($-1 < \alpha < 0$) и $A_\nu = 1 - |a_\nu|$, то из теоремы 1 получим

Следствие 1. Если

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - |a_\nu|)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1 - |a_\nu|} < +\infty,$$

то $M_{1+\alpha}(E) = 0$, где

$$E = \left\{ e^{i\theta} : \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |a_\nu|}{|e^{i\theta} - a_\nu|} \right)^{1+\alpha} = +\infty, \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Принимая в теореме 1 $\alpha = 0$ и $h(r) = r$, получим

Следствие 2. Если для последовательности положительных чисел $\{A_\nu\}_1^\infty$ ($0 < A_\nu < 1$)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \ln \frac{1}{A_\nu} < +\infty,$$

то ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{|z - a_\nu|}$$

сходится почти всюду.

Следующая теорема при более слабых условиях, чем (7), налагаемых на последовательность A_ν , утверждает, что $C_{1+\alpha}(E) = 0$.

Теорема 2. Если

$$\sum_{v=1}^{\infty} (1-|a_v|)^{1+\alpha} < +\infty, \quad (10)$$

то

$$C_{1+\alpha}(E) = 0.$$

Доказательство. Вопреки утверждению предположим, что $C_{1+\alpha}(E) > 0$, тогда найдется такая мера μ , $\mu(E) = 1$, что

$$\int_E \frac{d\mu(\theta)}{|e^{i\theta} - z|^{1+\alpha}} < M < +\infty,$$

и, следовательно

$$\int_E \left(\frac{1-|a_v|}{|e^{i\theta} - a_v|} \right)^{1+\alpha} d\mu(\theta) \leq M (1-|a_v|)^{1+\alpha}.$$

Отсюда вытекает

$$\int_E \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1-|a_v|}{|e^{i\theta} - a_v|} \right)^{1+\alpha} d\mu(\theta) < +\infty,$$

что противоречит условию, что на множестве E ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1-|a_v|}{|e^{i\theta} - a_v|} \right)^{1+\alpha} \quad (11)$$

расходится.

Точно таким же методом доказывается следующая

Теорема 3. Если

$$\sum_{v=1}^{\infty} (1-|a_v|)^{1+\alpha} < +\infty,$$

то $C_1(E_\alpha) = 0$, где

$$E_\alpha = \left\{ e^{i\theta} : \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(1-|a_v|)^{1+\alpha}}{|e^{i\theta} - a_v|} = +\infty, \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Следствие. Ввиду свойства в) для емкости и хаусдорфовой меры множества, отмеченной выше, можем утверждать также, что

$$M_h(E_\alpha) = 0,$$

где h — любая функция меры, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} \frac{h(r)}{r^2} dr < +\infty.$$

3°. Радиальные предельные значения функции $B_z(z, A)$. Для данного сходящегося в круге $|z| < 1$ произведения $B_z(z, A)$ обозначим

$$U_\alpha(re^{i\tau}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\tau}, A)|. \quad (12)$$

Следующая теорема для $\alpha \in [0, +\infty)$ была доказана М. М. Джрбашяном [16].

Теорема А. Почти для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \bigcup_{\alpha} (re^{i\varphi}) = 0 \quad (0 \leq \alpha < \infty).$$

Там же было высказано предположение, что теорема, по-видимому, верна и в случае $\alpha \in (-1, 0)$. В этом пункте мы доказываем, что это предположение верно, если последовательность A удовлетворяет условию (7). Для этого приведем одну простую лемму, на основании которой и было высказано вышеупомянутое предположение М. М. Джрбашяна относительно справедливости теоремы А для значений $\alpha \in (-1, 0)$.

Так как, согласно (2)

$$B_{\alpha}(z, A) = \prod_{k=1}^{\infty} A_{\alpha}(z, a_k),$$

где

$$A_{\alpha}(z, a_k) = \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{-W_{\alpha}(z, a_k)}, \quad (13)$$

то

$$\bigcup_{\alpha} (re^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\alpha}(re^{i\varphi}, a_k), \quad (14)$$

где

$$u_{\alpha}(re^{i\varphi}, a_k) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |A_{\alpha}(re^{i\varphi}, a_k)|.$$

Лемма 1. Для каждого $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $|\zeta| < 1$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} u_{\alpha}(re^{i\varphi}, \zeta) = 0.$$

Доказательство. Согласно (13) имеем

$$u_{\alpha}(re^{i\varphi}, \zeta) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| - \operatorname{Re} r^{-\alpha} D^{-\alpha} W_{\alpha}(re^{i\varphi}, \zeta). \quad (15)$$

С другой стороны ([16], стр. 582)

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| = \operatorname{Re} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{x - \frac{\zeta}{re^{i\varphi}}} dx, \quad (16)$$

и ([16], стр. 576)

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} S_{\alpha}(re^{i\varphi}) = S_0(re^{i\varphi}),$$

где

$$S_0(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

так что $S_0(e^{-i\varphi} z)$ есть известное ядро Шварца, а $\operatorname{Re} S_0(e^{-i\varphi} z)$ — ядро Пуассона. Согласно (3) получим, что при $z = re^{i\varphi}$

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} W_{\alpha}(re^{i\varphi}, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_0(e^{-i\theta} z) V_{\alpha}(e^{i\theta}, \zeta) d\theta.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F_\alpha(w) = \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x-w} dx \quad (-1 < \alpha < 0),$$

условившись понимать интеграл в смысле главного значения при $w \in (0, 1)$.

Справедливо следующее утверждение ([16], стр. 584): функция $F_\alpha(w)$ непрерывна всюду на плоскости w за исключением точек $w=0$ и $w=1$.

Следовательно, можно утверждать, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \operatorname{Re} \{r^{-\alpha} D^{-\alpha} W_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta)\} = V_\alpha(e^{i\varphi}, \zeta),$$

а из (4) и (16) вытекает также

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\{ r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\} = V_\alpha(e^{i\varphi}, \zeta).$$

Имея в виду последние два равенства и соотношение (15), получим утверждение леммы.

Теорема 4. Если для данного $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(1-|a_v|)^{1+\alpha}}{|e^{i\varphi} - a_v|} < +\infty, \quad (17)$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} U_\alpha(re^{i\varphi}) = 0.$$

Доказательство. Согласно (14) и лемме 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что ряд (14) для указанного значения сходится равномерно относительно r на интервале $[0, 1]$ при условии (17).

Известно, что ([16], стр. 628)

$$u_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta) = -\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{|\zeta|}^1 \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x} + \frac{x}{|\zeta|}\right) \cos(\varphi - \arg \zeta) + r^2}{\left|1 - \frac{re^{-i\varphi}}{x} \zeta\right|^2 \cdot \left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} x\right|^2} \cdot \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx. \quad (18)$$

Нижеследующие оценки до определенного момента аналогичны оценкам М. М. Джрбашяна [5].

Введем следующие обозначения:

$$J_\alpha^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta) = 2 \int_{|\zeta|}^1 \frac{r(|\zeta|x)^{-1}(|\zeta|^2 + x^2) \sin^2 \frac{\varphi - \arg \zeta}{2}}{\left|1 - \frac{re^{-i\varphi}}{x} \zeta\right|^2 \cdot \left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} x\right|^2} \cdot \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \quad (19)$$

$$J_\alpha^{(2)}(re^{i\varphi}, \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x} + \frac{x}{|\zeta|}\right) + r^2}{\left|1 - \frac{re^{-i\varphi}}{x} \zeta\right|^2 \cdot \left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} x\right|^2} \cdot \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \quad (20)$$

с помощью которых запишем формулу (18) в виде

$$u_{\alpha}(re^{i\varphi}, \zeta) = -\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)} \{J_{\alpha}^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta) + J_{\alpha}^{(2)}(re^{i\varphi}, \zeta)\}. \quad (1)$$

Перейдем к оценкам $J_{\alpha}^{(1)}$ и $J_{\alpha}^{(2)}$.

а) Из (19) получим при $\varphi \neq \arg \zeta$

$$|J_{\alpha}^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta)| \leq \frac{r}{|\zeta|^3} \frac{(\varphi - \arg \zeta)^2}{\delta^2(\varphi, \zeta)} \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{\left|1 - \frac{re^{-i\varphi}}{x} \zeta\right|^2} dx,$$

где

$$\delta(\varphi, \zeta) = \min_{|\zeta| < x < 1} \left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} x\right| = \min_{|\zeta| < x < 1} \frac{r}{|\zeta|} \left|x - \frac{\zeta}{re^{i\varphi}}\right| \geq \min_{0 < x < 1} \frac{r}{|\zeta|} \left|x - \frac{\zeta}{re^{i\varphi}}\right|,$$

откуда

$$\delta(\varphi, \zeta) > \begin{cases} |\sin(\varphi - \arg \zeta)|, & |\varphi - \arg \zeta| < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq |\varphi - \arg \zeta| \leq \pi. \end{cases}$$

Следовательно, вообще для любого r ($0 \leq r \leq 1$), ζ ($0 < |\zeta| < 1$) $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеет место оценка

$$|J_{\alpha}^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta)| \leq \frac{\pi^2}{|\zeta|^3} \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{\left|1 - \frac{re^{-i\varphi}}{x} \zeta\right|^2} dx. \quad (21)$$

При $|\zeta| \leq x \leq 1$ имеем

$$\left|1 - \frac{re^{-i\varphi}}{x} \zeta\right| \geq 1 - \frac{r|\zeta|}{x} > 1 - r \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} |x - re^{-i\varphi} \zeta| &> |1 - re^{-i\varphi} \zeta| - (1-x) > |1 - re^{-i\varphi} \zeta| - (1-|\zeta|) = \\ &= |1 - re^{-i\varphi} \zeta| \left(1 - \frac{1-|\zeta|}{|1 - re^{-i\varphi} \zeta|}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим теперь, что

$$\left|z - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right| > \left|e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right| - |z - e^{i\varphi}|, \quad \left|z - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right| > |z - e^{i\varphi}|.$$

Следовательно

$$\left|z - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right| > \frac{1}{2} \left|e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{\zeta}}\right| = \frac{1}{2} |e^{i\varphi} - \zeta| \cdot |\zeta|^{-1},$$

или, что

$$|1 - re^{-i\varphi} \zeta| > \frac{1}{2} |1 - \zeta e^{-i\varphi}| \cdot |\zeta|^{-1}, \quad (24)$$

Согласно условию (17) теоремы следующий ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1-|a_v|}{|e^{i\varphi} - a_v|} < +\infty$$

сходится и поэтому его общий член стремится к нулю, с другой стороны, согласно (24)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1-|a_v|}{|1 - r a_v e^{-i\varphi}|} = 0 \quad (25)$$

равномерно относительно $r \in [0, 1]$.

Следовательно из (23) и (24) получим

$$|x - r e^{-i\varphi} \zeta| \geq \frac{c}{|\zeta|} |1 - e^{-i\varphi} \zeta|. \quad (26)$$

Согласно (22) и (25) из (21) имеем

$$(1-r^2) |J_a^{(1)}(r e^{i\varphi}, \zeta)| \leq \frac{c}{|\zeta|} \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|e^{i\varphi} - \zeta|}. \quad (27)$$

в) Заметим, что

$$1 - \frac{r}{|\zeta| x} (x^2 + |\zeta|^2) + r^2 = \left(r - \frac{x}{|\zeta|}\right) \left(r - \frac{|\zeta|}{x}\right)$$

и

$$\left|1 - \frac{r e^{i\varphi}}{x} \zeta\right| \geq \left|1 - \frac{r |\zeta|}{x}\right|, \quad \left|1 - \frac{r e^{-i\varphi}}{x} \zeta\right| \geq \left|1 - \frac{r |\zeta|}{x}\right|,$$

тогда из (20), согласно (24), получим

$$|J_a^{(2)}(r e^{i\varphi}, \zeta)| \leq \frac{c}{|1 - \zeta e^{-i\varphi}|} \int_{|\zeta|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha}}{|1 - r e^{i\varphi} x|} dx. \quad (28)$$

Далее имеем при $|\zeta| \leq x \leq 1$

$$|\zeta - x r e^{i\varphi}| \geq |\zeta - r e^{i\varphi}| - r(1-x) \geq |\zeta - r e^{i\varphi}| - r(1-|\zeta|)$$

и

$$|\zeta - r e^{i\varphi}| = \frac{1}{|\zeta|} \|\zeta|^2 - r \bar{\zeta} e^{i\varphi}\| \geq \frac{1}{|\zeta|} |1 - r \bar{\zeta} e^{i\varphi}| - \frac{1}{|\zeta|} (1-|\zeta|^2),$$

так что

$$|\zeta - x r e^{i\varphi}| \geq \frac{1}{|\zeta|} |1 - r \bar{\zeta} e^{i\varphi}| - (1-|\zeta|) \left(r + \frac{1+|\zeta|}{|\zeta|}\right)$$

и

$$\left| \frac{\zeta - x r e^{i\varphi}}{1 - r \bar{\zeta} e^{-i\varphi}} \right| \geq \frac{1}{|\zeta|} - \frac{1-|\zeta|}{|1 - r \bar{\zeta} e^{-i\varphi}|} \left(r + \frac{1+|\zeta|}{|\zeta|}\right).$$

Таким образом, согласно (25)

$$\left| \frac{\zeta - x r e^{i\varphi}}{1 - r \bar{\zeta} e^{-i\varphi}} \right| \geq \frac{c}{|\zeta|} > 0, \quad |\zeta| \leq x \leq 1,$$

и, так как $|1 - r \bar{\zeta} e^{-i\varphi}| \geq 1 - r |\zeta| \geq 1 - r$, то

$$\left| \frac{\zeta - x r e^{i\varphi}}{1 - r} \right| \geq \frac{c}{|\zeta|} > 0.$$

Отсюда и из (28) получим

$$(1-r^2) \left| J_a^{(2)}(re^{i\varphi}, \zeta) \right| \leq c \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-e^{-i\varphi}\zeta|}. \quad (29)$$

В итоге из (18'), согласно (27) и (29), имеем

$$|u_a(re^{i\varphi}, \zeta)| \leq \frac{c}{|\zeta|} \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-e^{-i\varphi}\zeta|}. \quad (30)$$

Из неравенства (30), ввиду условия (17) теоремы, следует, что ряд (14) сходится равномерно относительно $r \in [0, 1]$. Ввиду леммы 1 отсюда вытекает утверждение теоремы.

Следующая теорема была доказана в работе [6].

Теорема В. Если для данного $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1-|a_v|}{|e^{i\varphi}-a_v|} \right)^{1+\alpha} < +\infty, \quad (31)$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} B_\alpha(re^{i\varphi}, A) = B_\alpha(e^{i\varphi}, A)$$

существует и конечен.

Теперь, объединяя следствие 1 теоремы 1 с теоремами 4 и В, а также теоремы 2, В и 4, приходим к следующим теоремам.

Теорема 5. При условии

$$\sum_{v=1}^{\infty} (1-|a_v|)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-|a_v|} < +\infty$$

функция $B_\alpha(z, A)$ всюду на $[0, 2\pi]$ имеет радиальные предельные значения, кроме, быть может, некоторого множества E , внешняя $(1+\alpha)$ -хаусдорфова мера которого равна нулю. При этом почти всюду на $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \{r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}, A)|\} = 0.$$

Теорема 6. При условии

$$\sum_{v=1}^{\infty} (1-|a_v|)^{1+\alpha} < +\infty$$

произведение $B_\alpha(z, A)$ всюду на $[0, 2\pi]$ имеет радиальные предельные значения, кроме, быть может, некоторого множества E , $(1+\alpha)$ -емкость которого — нуль. При этом всюду на $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \{r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}, A)|\} = 0,$$

кроме, быть может, некоторого множества $E_\alpha \subset [0, 2\pi]$, такого, что $C_1(E_\alpha) = 0$.

Отметим, что, таким образом, первая часть утверждения этой теоремы является усилением теоремы работ [2а, б], о которой упоминалось во введении статьи, где утверждалось, что предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} B_\alpha(re^{i\gamma}, A)$$

существует всюду, за исключением, быть может, некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, γ -емкость которого — нуль, где $\gamma \in (1+\alpha, 1)$ любое.

Отметим, что, согласно следствию теоремы 3, имеем также, что

$$M_h(E_\alpha) = 0,$$

где h — любая функция меры, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \frac{h(r)}{r^2} dr < +\infty.$$

Имея в виду отношения между $(1+\alpha)$ -емкостью и $(1+\alpha)$ -хаусдорфовыми мерами множеств, ясно, что теоремы 5 и 6 не покрывают друг друга и представляют самостоятельный интерес.

4°. **Непрерывность функции $B_\alpha(z, A)$ в граничной точке.** Следующая теорема дает необходимый и достаточный признак того, чтобы $B_\alpha(z, A)$ была непрерывна в точке $z = e^{i\theta}$.

Теорема 7. Если $z = e^{i\theta}$ не является точкой сгущения для последовательности $A = \{a_k\}_1^\infty$, то произведение $B_\alpha(z, A)$ абсолютно и равномерно сходится и непрерывно в окрестности точки $z = e^{i\theta}$, ($|z| \leq 1$).

Доказательство. Запишем $B_\alpha(z, A)$ в следующем виде:

$$B_\alpha(z, A) = \prod_{\nu=1}^\infty [1 + C_\alpha(z, a_\nu)],$$

где

$$C_\alpha(z, a_\nu) = A_\alpha(z, a_\nu) - 1,$$

и, согласно (2)

$$A_\alpha(z, a_\nu) = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) \exp[-W_\alpha(z, a_\nu)].$$

В неравенстве

$$|C_\alpha(z, a_\nu)| \leq |1 - A_0(z, a_\nu)| + |A_0(z, a_\nu) - A_\alpha(z, a_\nu)| \quad (32)$$

первое слагаемое оценивается как в работе [7]

$$|1 - A_0(z, a_\nu)| \leq \frac{1 - |a_\nu|}{|a_\nu|} + \frac{1 - |a_\nu|^2}{|1 - \bar{a}_\nu z| |a_\nu|}.$$

Так как $e^{i\theta}$ не принадлежит A' , то для $|z| \leq 1$ можно найти постоянные ε и $\delta(\varepsilon)$ такие, что

$$\left|z - \frac{1}{a_\nu}\right| > \varepsilon, \text{ при } |z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, если $|z| \leq 1$, то

$$|1 - A_0(z, a_\nu)| \leq \frac{1 - |a_\nu|}{|a_\nu|} + \frac{1 - |a_\nu|^2}{\varepsilon |a_\nu|^2}, \quad \text{при } |z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, согласно (1), ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} [1 - A_0(z, a_v)] \quad (|z| \leq 1) \quad (33)$$

абсолютно и равномерно сходится при условии $|z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon)$. Но так как $1 - A_0(z, a_v)$ — регулярная функция в $|z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon)$, $|z| \leq 1$, то ряд (33) абсолютно и равномерно сходится и непрерывен в $|z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon)$, $|z| \leq 1$.

Для оценки второго слагаемого из (32) заметим, что

$$|A_0(z, a_v) - A_\alpha(z, a_v)| \leq c \left(\frac{1 - |a_v|}{|1 - z\bar{a}_v|} \right)^{1+\alpha}$$

(см. [6], неравенства (26), (14) и (17)).

Следовательно

$$|A_0(z, a_v) - A_\alpha(z, a_v)| \leq c \frac{(1 - |a_v|)^{1+\alpha}}{|a_v|^{1+\alpha} \varepsilon^{1+\alpha}}, \text{ при } |z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon), |z| \leq 1,$$

откуда заключаем, что ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} [A_0(z, a_v) - A_\alpha(z, a_v)] \quad (|z| \leq 1)$$

абсолютно и равномерно сходится и непрерывен в $|z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon)$, $|z| \leq 1$.

Согласно (32) получим, что при $|z| \leq 1$ ряд $\sum_{v=1}^{\infty} C_\alpha(z, a_v)$ или, что

то же самое, $\prod_{v=1}^{\infty} [1 + C_\alpha(z, a_v)] = B_\alpha(z, A)$ абсолютно и равномерно сходится и непрерывен в $|z - e^{i\theta}| \leq \delta(\varepsilon)$, $|z| \leq 1$, что и надо было доказать.

5°. Непрерывность радиальной вариации функции $B_\alpha(z, A)$. Для произведения $B_\alpha(z, A)$ определим радиальные вариации в точке $e^{i\varphi}$ единичной окружности S следующим образом:

$$V(B_\alpha, \varphi) = \int_0^1 |B'_\alpha(re^{i\varphi}, A)| dr.$$

Очевидно, что $V(B_\alpha, \varphi)$ есть длина кривой, на которую отображается радиус с концом в $e^{i\varphi}$ посредством функции $B_\alpha(z, A)$.

Как известно [6], при условии (31) $V(B_\alpha, \varphi)$ конечно.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. При условии (31)

$$|B_\alpha(e^{i\varphi}, A)| > q > 0.$$

Доказательство. Согласно (2) имеем

$$\frac{B_\alpha(z, A)}{B_0(z, A)} = \prod_{v=1}^{\infty} \exp \{W_0(z, a_v) - W_\alpha(z, a_v)\}$$

и, следовательно

$$\ln \left| \frac{B_\alpha(z, A)}{B_0(z, A)} \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re} [W_\nu(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)]. \quad (34)$$

В работах [2а, 6] доказано, что

$$\operatorname{Re} [W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)] > 0,$$

а в работе [6] была установлена оценка

$$|W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)| \leq c \left(\frac{1 - |a_\nu|}{|e^{i\varphi} - a_\nu|} \right)^{1+\alpha}.$$

Используя условие (31), можем записать, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re} [W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)] \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)| \leq c < +\infty.$$

Поэтому из равенства (34) следует

$$\ln \left| \frac{B_\alpha(z, A)}{B_0(z, A)} \right| \geq -c > -\infty. \quad (35)$$

Согласно условию (31) и теореме В можно перейти к пределу в неравенстве (35) при $r \rightarrow 1 - 0$. Тогда получим

$$\ln |B_\alpha(e^{i\varphi}, A)| > -c > -\infty,$$

так как $|B_0(e^{i\varphi}, A)| = 1$. Лемма доказана.

Теперь нетрудно доказать следующую теорему, специальный случай которой при $\alpha = 0$ был установлен Р. Колуэлом [8].

Теорема 8. Пусть для функции $B_\alpha(z, A)$ в каждой точке окружности S удовлетворяется условие (31). Тогда $V(B_\alpha, \varphi)$, как функция от φ , терпит разрыв при $\varphi = \varphi_0$ тогда и только тогда, когда $e^{i\varphi_0} \in A'$, где A' — множество предельных точек последовательности $A = \{a_k\}_1^\infty$.

Доказательство. С помощью результата теоремы 7 доказательство проводится как и в случае $\alpha = 0$. Только необходимо иметь в виду, что в случае $\alpha = 0$ при доказательстве существенно то, что, ввиду условия теоремы, $|B_0(e^{i\varphi}, A)| = 1$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. При $\alpha \in (-1, 0)$ вместо этого необходимо использовать результат предыдущей леммы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.IV.1968

Վ. Ս. ՀԱՔԱՐՅԱՆ

B_α ֆունկցիայի Շևրեպոլուսի եզրային արժեքների մասին

Ա Մ Փ Ն Փ Ն Ն Մ

Հորվածում ստացված են նոր արդյունքներ $B_\alpha(z, A)$ ֆունկցիայի եզրային արժեքների մասին:

Մասնավորապես ապացուցված է, որ եթե

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} (1-|\alpha_{\gamma}|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha \leq 0),$$

ապա $B_{\alpha}(z, A)$ ֆունկցիան ամենուրեք $[0, 2\pi]$ հատվածի վրա ունի շառավիղային եզրային արժեքներ, բացի գուցե մի E բազմություն, որի $\gamma=1+\alpha$ ունակությունը զերո է: Ընդ որում, ամենուրեք $[0, 2\pi]$ հատվածի վրա

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} D^{-\alpha} \log |B_{\alpha}(re^{i\varphi}, A)| = 0,$$

բացի գուցե մի $E \subset [0, 2\pi]$ բազմությունից, որի $\gamma=1$ ունակությունը զերո է:

V. S. SAKCHARIAN

ON RADIAL LIMITING VALUES OF THE B_{α} FUNCTION

S u m m a r y

Some new results on the limiting values of the $B_{\alpha}(z, A)$ function are stated.

In particular, if

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} (1-|\alpha_{\gamma}|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha \leq 0),$$

then the function $B_{\alpha}(z, A)$ possesses every where on $[0, 2\pi]$ radial limits with a possible exception of a set E , whose $\gamma=1+\alpha$ capacity is equal zero. At the same time every where $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} D^{-\alpha} \log |B_{\alpha}(re^{i\varphi}, A)| = 0,$$

with a possible exception of a set $E \subset [0, 2\pi]$, whose $\gamma=1$ capacity is equal zero.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1а. М. М. Джрбашян. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
- б. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
- 2а. М. М. Джрбашян и В. С. Захарян. О граничных свойствах мероморфных функций класса N_{α} , ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.
- б. Граничные свойства мероморфных функций класса N_{α} , Изв. АН АрмССР, «Математика», 2, № 5, 1967, 275—294.
3. L. Carleson. On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Uppsala, 1950.
4. O. Frostman. Sur les produits de Blaschke. Kungl. Fysiogr. Sallsk, i Lund Forh., 12, 1942, 169—182.
5. М. М. Джрбашян. Об одном свойстве функции Бляшке, ДАН СССР, 175, № 5, 1967, 981—984.
6. В. С. Захарян. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения B_{α} , Изв. АН АрмССР, «Математика», 3, № 1, 1968, 38—51.
7. С. Tanaka. Boundary convergence of Blaschke products in the unit circle, Proc. Japan. Acad., 39, 1963, 410—412.
8. P. Colwell. On the boundary behavior of Blaschke products in the unit disk, Proc. of the Amer. Math. Soc., 17, No. 3, 1966, 582—587.

И. О. ХАЧАТРЯН

О ВЗВЕШЕННО-РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ
НА ДВУХ ЛУЧАХ

1°. Пусть на лучах $E: \arg z = \pm \frac{\pi}{\rho_1}$ определена вещественная измеримая функция $\varphi(t) > 1$ такая, что

$$t^n \varphi^{-1}(t) \rightarrow 0 \text{ при } |t| \rightarrow +\infty, t \in E, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Обозначим через $C_\varphi(E)$ пространство непрерывных на E функций, удовлетворяющих условию

$$f(t) \varphi^{-1}(t) \rightarrow 0 \text{ при } |t| \rightarrow +\infty, t \in E.$$

Норма элемента f вводится следующим образом:

$$\|f\| = \sup_{t \in E} \left| \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right|. \quad (2)$$

Из (1) следует, что полиномы входят в $C_\varphi(E)$.

Аналогично классической проблеме С. Н. Бернштейна [1] для случая вещественной оси в ряде работ ставился вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, накладываемого на функцию $\varphi(t)$, при котором полиномы составляют всюду плотное множество в пространстве $C_\varphi(E)$.

Отметим здесь работы А. Л. Шагиняна [2], М. М. Джрбашяна [3] и С. Н. Мергеляна [4], где задача о весовой полноте полиномов рассмотрена на произвольных кривых довольно общей природы. Приведем результаты этих авторов для того случая, когда аппроксимация совершается на двух лучах.

Из общего результата А. Л. Шагиняна о нормальных семействах аналитических функций следует

Теорема (А. Л. Шагинян). Если полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi(E)$, то

$$\int_E \frac{\ln \varphi(t)}{1 + |t|^{1+\rho_1}} |dt| = +\infty, \int_E \frac{\ln \varphi(t)}{1 + |t|^{1+\rho_2}} |dt| = +\infty, \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2. \quad (3)$$

М. М. Джрбашяном [3] получены достаточные условия для полноты в общем случае, когда аппроксимация совершается на кривых в комплексной области. Из его результата, в частности, следует

Теорема (М. М. Джрбашян). Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (3) и нормально возрастающая, то есть представляется в виде

$$\varphi(t) = \varphi(|t|) = C \exp \int_1^{|t|} \frac{\omega(u) du}{u},$$

где $\omega(u) \uparrow +\infty$ при $u \uparrow +\infty$, то полиномы составляют всюду плотное множество в $C_\varphi(E)$.

Приведенные теоремы, окончательно решая поставленную задачу для нормально растущих весовых функций, одновременно показывают, что очень важно, в какой зависимости находятся полнота и расстояние угла, на границе которого происходит аппроксимация.

Результат М. М. Джрбашяна получен методом интегрального преобразования Коши, которым позже пользовался также С. Н. Мергелян [4] при решении проблемы С. Н. Бернштейна для оси.

В 1957 г. Б. Я. Левиным этот метод распространен на общие функциональные пространства Банаха, что позволило ему ввести новые квазианалитические классы функций на оси и связать квазианалитичность с возможностью весовой аппроксимации.

В работе [4] С. Н. Мергеляна дано необходимое и достаточное условие полноты без каких-либо ограничений на вес $\varphi(t)$. Чтобы сформулировать этот результат введем следующие обозначения.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{p(t)}{t+1} \right\| \leq 1,$$

а через $\psi(z)$

$$\psi(z) = \sup_{p \in \mathfrak{M}_\varphi} |p(z)|.$$

Теорема (С. Н. Мергелян). Для полноты полиномов в $C_\varphi(E)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad z \notin E.$$

В настоящей работе приводится интегральный критерий полноты полиномов в $C_\varphi(E)$ для произвольной функции $\varphi(t)$ аналогично критерию С. Н. Мергеляна для оси. Далее на основании этого критерия по схеме рассуждений Б. Я. Левина, приведенной в [5], дается характеристика класса функций, допускающих аппроксимацию полиномами в том случае, когда система полиномов не полна во всем $C_\varphi(E)$.

2°. Обозначим через D_1 угловую область $|\arg z| < \frac{\pi}{\rho_1}$, а через

D_2 — дополнительную область с раствором $\frac{\pi}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} = 2$.

Теорема 1. Для полноты системы полиномов в $C_\varphi(E)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$J(\psi, \rho_k, E) = \int_E \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+\rho_k}} |dt| = +\infty, \quad k=1, 2. \quad (4)$$

(В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $\rho_1 > \rho_2$).

Доказательство. Необходимость. Пусть полиномы всюду плотны в $C_{\varphi}(E)$. Тогда, согласно общему критерию С. Н. Мергеляна, $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \in E$.

Имеем

$$\ln |p(z)| < \int_E \ln |p(t)| \frac{\partial G_k(t; z)}{\partial n} ds, \quad z \in D_k, \quad k=1, 2, \quad (5)$$

где $G_k(t; z)$ — функция Грина области D_k .

Пусть теперь $p(z) \in \mathfrak{M}$, т. е. $|p(t)| \leq \psi(t)$. Из (5) имеем

$$\ln |p(z)| \leq \int_E \ln \psi(t) \frac{\partial G_k(t; z)}{\partial n} ds$$

для любого полинома $p \in \mathfrak{M}$, $z \in D_k$.

Беря верхнюю грань в некоторой точке $z_0 \in D_k$ в левой части последнего неравенства, получим

$$\int_E \ln \psi(t) \frac{\partial G_k(t; z_0)}{\partial n} ds = +\infty, \quad z_0 \in D_k, \quad k=1, 2,$$

что эквивалентно расходимости интеграла (4).

Достаточность. Докажем, что, если полиномы не плотны в $C_{\varphi}(E)$ то $J(\psi, \rho_1, E) < +\infty$.

Пусть полиномы не плотны в $C_{\varphi}(E)$. Так как $\mathfrak{M}_{\varphi} = \mathfrak{M}_{\psi}$ [4], то полиномы не плотны также в $C_{\psi}(E)$. Тогда, согласно теореме Хана-Банаха, существует нетривиальный линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на полиномах. Пусть V — произвольный функционал такой, что

$$V[t^n] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда для любого многочлена $p(t)$ можем утверждать, что

$$V \left[\frac{p(t) - p(z)}{t - z} \right] = 0, \quad z \in D_k \quad (k=1, 2).$$

Обозначая через $F(z) = V \left[\frac{1}{t - z} \right]$, будем иметь $p(z) F(z) = V \left[\frac{p(t)}{t - z} \right]$.

Пусть теперь $p(z) \in \mathfrak{M}_{\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| V \left[\frac{p(t)}{t - z} \right] \right| &\leq \|V\| \cdot \left\| \frac{p(t)}{t - z} \right\| = \left\| \frac{p(t)}{t+1} \cdot \frac{t+1}{t-z} \right\| \cdot \|V\| \leq \\ &\leq \|V\| \cdot \left\| \frac{p(t)}{t+1} \right\| \cdot \max_{t \in E} \left| \frac{t+1}{t-z} \right| \leq C \frac{1+|z|}{\delta(z)}, \end{aligned}$$

где C — константа, не зависящая от полинома $p \in \mathfrak{M}_{\varphi}$, а $\delta(z)$ — расстояние точки z до E .

Таким образом, для любого полинома $p(z) \in \mathfrak{M}_{\varphi}$ имеем

$$|p(z) F(z)| \leq \frac{C(1+|z|)}{\delta(z)},$$

откуда следует, что

$$\psi(z) \cdot |F(z)| \leq \frac{C(1+|z|)}{\delta(z)}$$

или

$$|F(z)| \leq \frac{C(1+|z|)}{\delta(z)\psi(z)}.$$

Из общего вида линейного функционала в $C_2(E)$ имеем

$$F(z) = V \left[\frac{1}{t-z} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)},$$

где $\sigma(s)$ — функция от длины дуги s , отсчитываемой от некоторой точки на E , имеющая ограниченную вариацию на E . Из (7) следует, что функция $F(z)$ голоморфна в областях D_1 и D_2 .

Так как, по предположению, система полиномов полна в $C_2(E)$, то $\psi(z) \neq +\infty$ хотя бы в одной из областей D_k . Если $\psi(z_0) < +\infty$, $z_0 \in D_k$, то, как следует из рассуждений С. Н. Мергеляна [4], $\psi(z) < +\infty$ для всех $z \in D_k$. Следовательно, возможны следующие случаи

а) $\psi(z) < +\infty$, $z \in D_1$; $\psi(z) = +\infty$, $z \in D_2$,

б) $\psi(z) < +\infty$,

в) $\psi(z) = +\infty$, $z \in D_1$; $\psi(z) < +\infty$, $z \in D_2$.

Рассмотрим первый случай. Пусть

$$\psi(z) = +\infty, z \in D_2. \quad (8)$$

Из (8), как при доказательстве необходимости, получим, что $J(\psi, \rho_2, E) = +\infty$.

Далее из (6) и (8) следует, что при $z \in D_2$

$$V \left[\frac{1}{t-z} \right] = F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)} = 0, z \in D_2. \quad (9)$$

Тождество (9) означает, что функционал V обращается в нуль на функциях вида

$$\sum_{k=0}^p a_{k,p} (t-z_k)^{-\alpha_k}, z_k \in D_2$$

и на их замыкании ($a_{k,p}$ — постоянные числа, $\alpha_k \geq 0$ — целые числа), т. е.

$$V \left[\sum \frac{a_{k,p}}{(t-z_k)^{\alpha_k}} \right] = 0, z_k \in D_2. \quad (9')$$

Далее из (9) на основании известной теоремы И. И. Привалова заключаем, что функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{e^{i\tau(s)} d\sigma_1(s)}{(t-z)\psi(t)}, z \in D_1 \quad (9'')$$

почти всюду на E имеет предельные значения изнутри области D_1 , равные $\frac{\gamma_1(s)}{\psi(t)}$, т. е. $F(t) = \frac{\gamma_1(s)}{\psi(t)}$.

Обозначим через $w = \gamma(z)$ функцию, конформно отображающую область D_1 на круг $|w| < 1$. Обратную функцию обозначим через $z = \gamma(w)$.

Отобразим область D_1 на некоторую ограниченную область d_1 плоскости Z посредством функции $Z = (z - z_0)^{-1}$, $z_0 \in D_2$. Тогда функция $\chi(z) = \chi_1(Z)$ будет голоморфной в d_1 и непрерывной в замкнутой области $\bar{d}_1$. Следовательно, по известной аппроксимационной теореме, найдется такая последовательность многочленов $Q_n(Z)$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(Z) = \chi_1(Z)$$

равномерно в замкнутой области $\bar{d}_1$. В частности, это равенство верно и на границе области d_1 . Возвращаясь к переменной z , получим, что функцию $\chi(t)$, а также функцию $\chi^n(t)$ при любом натуральном n можно равномерно приблизить полиномами $R\left(\frac{1}{t - z_0}\right)$, $z_0 \in D_2$. Но из равномерной аппроксимации будет следовать аппроксимация с весом $\psi(t)$, следовательно, согласно (9') будем иметь

$$V[\chi^n(t)] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$\int_E \chi^n(t) d\sigma_2(t) = 0, \quad d\sigma_2(t) = \frac{d\sigma(s)}{\psi(t)},$$

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^n d\sigma_2(\gamma(\zeta)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что функция $\sigma_3(\theta) = \sigma_2(\gamma(e^{i\theta}))$ абсолютно непрерывна при $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и, следовательно

$$\int_0^{2\pi} \zeta^n \sigma_3'(\theta) d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Возвращаясь на плоскость z , будем иметь

$$\int_E \chi^n(t) \frac{\sigma'(s)}{\psi_1(t)} ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Далее функция $F(\gamma(w))$ голоморфна в круге $|w| < 1$, почти всюду на окружности $|w| = 1$ имеет предельные значения $F(\gamma(e^{i\theta})) = F(\gamma(\zeta))$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{|\zeta|=1} F(\gamma(\zeta)) \gamma'(\zeta) \zeta^n d\zeta = \int_E F(t) \chi^n(t) dt =$$

$$= \int_E \frac{\sigma'_1(s)}{\psi_1(t)} \gamma^n(t) dt = \int_E \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)} \gamma_n(t) ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Это означает, что функция $F(\gamma(w)) \gamma'(w)$ принадлежит классу H_1 и, в частности, классу A в круге $|w| < 1$. Следовательно

$$\int_0^{2\pi} |\ln |F(\gamma(e^{i\theta})) \cdot \gamma'(e^{i\theta})|| d\theta < +\infty.$$

Но легко видеть, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \ln |\gamma'(e^{i\theta})| d\theta$$

конечен, следовательно конечен также интеграл

$$\int_0^{2\pi} |\ln |F(\gamma(e^{i\theta}))|| d\theta.$$

Переходя к переменной t , получим

$$\int_E \ln \left| \frac{\sigma'_1(s)}{\psi(t)} \cdot \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} \right| > -\infty. \quad (10)$$

Но на основании известного неравенства

$$\int f d\mu \leq \ln \left[\int \exp f d\mu \right], \quad \int d\mu = 1$$

можем написать, что

$$\begin{aligned} & \int_E \ln |\sigma'_1(s)| \frac{c |dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} \leq \ln \left[\int_E |\sigma'_1(s)| \frac{c |dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} \right] = \\ & = \ln \int_E c \frac{|d\sigma_1(s)|}{1+|t|^{1+\rho_1}} < +\infty, \quad \text{где} \quad \int_E \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} = \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\int \ln \psi(t) \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} < +\infty.$$

Таким образом, в случае а) имеем

$$J(\psi, \rho_1, E) < +\infty, \quad J(\psi, \rho_2, E) = +\infty.$$

Отсюда вытекает, что случай в) невозможен, так как в противном случае мы получили бы, что $J(\psi, \rho_1, E) = +\infty$, $J(\psi, \rho_2, E) < +\infty$, что противоречит предположению $\rho_2 \leq \rho_1$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая б). Пусть $\psi(z) < +\infty$ для любого z . Тогда среди функционалов V , обращающихся в нуль на степенях t^n , $n = 0, 1, \dots$, найдется такой, что соответствующая функция $F(z) \neq 0$ ни в одной из областей D_k ($k=1, 2$).

Обозначим через D_k угловую область, лежащую строго внутри D_k , со сторонами E_k , параллельными сторонам области D_k и равноудаленными от них.

Из представления (7) следует, что $F(z)$ ограничена в областях D_k ($k = 1, 2$). Следовательно, согласно теореме Карлемана

$$\int_{E_1} \frac{|\ln |F(t_1)||}{1 + |t_1|^{1+p_1}} |dt_1| < +\infty, \quad \int_{E_2} \frac{|\ln |F(t_2)||}{1 + |t_2|^{1+p_2}} |dt_2| < +\infty,$$

откуда, учитывая оценки (6), будем иметь

$$J(\psi, \rho_1, E_1) < +\infty, \quad J(\psi, \rho_2, E_2) < +\infty. \quad (12)$$

Из условия $\rho_1 > \rho_2$ и из (12) следует, что

$$J(\psi, \rho_1, E_2) < +\infty. \quad (13)$$

Из (13) вытекает, что субгармоническая во всей плоскости функция $\ln \psi(z)$ имеет гармоническую мажоранту в той угловой области с границей E_2 , которая содержит множество E (эту область обозначим через D). Следовательно $J(\psi, \rho_1, E) < +\infty$, и доказательство теоремы 1 завершается.

Но мы докажем несколько больше, а именно, установим, что $J(\psi, \rho_2, E) < +\infty$.

С этой целью запишем неравенство

$$\ln |p(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln |p(t_2)| \frac{\partial G(t_2; z)}{\partial n} |dt_2|, \quad z \in D,$$

где G — функция Грина области D . В частности, полагая $z = t$, $t \in E$, будем иметь

$$\ln |p(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln |p(t_2)| \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} |dt_2|, \quad t \in E,$$

откуда следует, что

$$\ln \psi(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln \psi(t_2) \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} |dt_2|, \quad t \in E, \quad (14)$$

где, вследствие (13), интеграл в правой части сходится для любого $t \in E$.

Умножая обе части неравенства (14) на $(1 + |t|^{1+p_2})^{-1}$ и интегрируя по множеству E , получим

$$\begin{aligned} J(\psi, \rho_2, E) &\leq \int_E \left[\frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln \psi(t_2) \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} |dt_2| \right] \frac{|dt|}{1 + |t|^{1+p_2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln \psi(t_2) \left[\int_E \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} \frac{|dt|}{1 + |t|^{1+p_2}} \right] |dt_2|. \end{aligned} \quad (15)$$

Но имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}} &= \int_{|t| < \frac{1}{2}|t_2|} \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}} + \\ &+ \int_{|t| > \frac{1}{2}|t_2|} \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}} < \frac{c_1}{1+|t_2|^{p_1+1}} \int_{|t| < \frac{1}{2}|t_2|} \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}} + \\ &+ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}|t_2|\right)^{1+p_2}} \int_{|t| > \frac{1}{2}|t_2|} \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} |dt| < \frac{c_1}{1+|t_2|^{1+p_1}} \int_E \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}} + \\ &+ \frac{c_2}{c_3+|t_2|^{1+p_2}} \int_E \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} |dt| < \frac{c_4}{1+|t_2|^{1+p_1}} + \frac{c_5}{c_3+|t_2|^{1+p_2}}, \end{aligned}$$

откуда, вследствие условия $\rho_1 > \rho_2$, получаем

$$\int \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n} \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}} < \frac{\text{const}}{1+|t_2|^{1+p_2}}. \quad (16)$$

Из (16), (15) и второго из неравенств (12) следует, что

$$J(\psi, \rho_2, E) < +\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что в случае б) сходятся оба интеграла

$$\int_E \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+p_k}} |dt|, \quad k=1, 2.$$

3°. Предположим теперь, что полиномы не составляют плотного множества в $C_r(E)$. Это означает, что в $C_r(E)$ существуют непрерывные функции, которые нельзя приблизить полиномами с любой наперед заданной точностью. Выясним теперь следующий вопрос: какими должны быть те непрерывные функции из $C_r(E)$, которые все же допускают приближение полиномами?

Множества функций, допускающих приближение полиномами в случае неполноты полиномов во всем $C_r(E)$, различны в зависимости от поведения функции $\psi(z)$ в дополнительной области D_2 , т. е. они различаются в зависимости от сходимости или расходимости интеграла $J(\psi, \rho_2, E)$. Поэтому эти случаи мы будем рассматривать отдельно.

Рассмотрим первый случай:

$$a) \quad J(\psi, \rho_1, E) < +\infty, \quad J(\psi, \rho_2, E) = +\infty.$$

Пусть функция $f_0(t) \in C_r(E)$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $p(t)$ такой, что

$$\|f_0(t) - p(t)\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для приближающих полиномов имеем $p \in \mathfrak{M}$ или $\|f_0\| + 1 = c$ или

$$\frac{1}{c} p(z) \in \mathfrak{M},$$

следовательно

$$|p(z)| \leq c \psi(z) < +\infty, z \in \bar{D}_1,$$

то есть эти полиномы составляют нормальное семейство в любой под-области $D_1^{(R)}$: $|z| \leq R$, $z \in D_1$. Следовательно, из семейства $\{p_k(z)\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{p_k(z)\}$, равномерно сходящуюся в D_1 к голоморфной функции. Но эта функция на E_φ ($t \in E_\varphi$, если $\varphi(t) \neq +\infty$) совпадает с $f_0(t)$. Это означает, что функция $f_0(t)$ аналитически продолжается в D_1 . Продолженную таким образом функцию обозначим через $f_0(z)$:

$$f_0(z) = \lim p_k(z), z \in D_1.$$

Имеем

$$|f_0(z)| \leq c \psi(z), z \in D_1,$$

$$|f_0(t)| \leq c \psi(t), t \in E_\varphi.$$

Из сходимости интеграла $J(\psi, \rho_1, E)$ и из неравенства

$$\ln \psi(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \psi(t) \frac{\partial G(t; z)}{\partial n} ds, z \in D_1$$

заключаем, что субгармоническая функция $\ln \psi(z)$ имеет гармоническую мажоранту в D_1 и

$$\ln \psi(x) = o(x^{\rho_1}), x \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, $\ln |f_0(z)|$ также имеет гармоническую мажоранту в D_1 и $\ln |f_0(x)| = o(x^{\rho_1})$ при $x \rightarrow +\infty$.

Таким образом, обозначая через $C_\varphi^*(E)$ множество функций $f(z)$ из $C_\varphi(E)$, голоморфных в D_1 и удовлетворяющих условиям:

I. $\ln |f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в D_1 ,

II. $\ln |f(x)| = o(x^{\rho_1})$ при $x \rightarrow +\infty$,

можем утверждать следующее.

Теорема 2. Пусть полиномы не составляют всюду плотного множества в $C_\varphi(E)$. Тогда функции из $C_\varphi(E)$, допускающие аппроксимацию полиномами, входят в множество $C_\varphi^*(E)$.

Возникает вопрос: когда любая функция из $C_\varphi^*(E)$ допускает аппроксимацию полиномами? Ответ на этот вопрос дается нижеследующей теоремой.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество голоморфных в D_1 функций $f(z)$, непрерывных в $\bar{D}_1$ (за возможным исключением точки $z = \infty$), удовлетворяющих условиям I и II, и таких, что

$$\left\| \frac{f(t)}{t+1} \right\| \leq 1, \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{(t+1)\varphi(t)} = 0, t \in E,$$

а через $\psi_1(z) = \sup_{z \in \mathfrak{M}_1} |f(z)|$.

Теорема 3. Пусть полиномы не составляют плотного множества в $C_\varphi(E)$. Тогда для того чтобы полиномы составляли всюду плотное множество в $C_\varphi^*(E)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_1(z) \equiv \psi(z), \quad z \in D_1. \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество полиномов плотно в $C_\varphi^*(E)$, то есть для любой функции $f(t) \in C_\varphi^*(E)$ и для заданного $\varepsilon > 0$ существует такой полином $p_n(t)$, что

$$\left| \frac{f(t) - p_n(t)}{\varphi(t)} \right| < \varepsilon, \quad t \in E. \quad (18)$$

По условию теоремы имеем

$$\psi(z) \leq C_R, \quad z \in \overline{D}^{(R)}: |z| \leq R, \quad z \in \overline{D}_1. \quad (19)$$

Функция

$$\theta(t) = \frac{\psi(t)}{|t+1|} \leq \varphi(t) \quad (20)$$

всюду конечна и ограничена на E_R . Наряду с нормой (2) введем новую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{t \in E} \frac{|f(t)|}{\theta(t)}. \quad (20')$$

Докажем, что, если $f(t) \in C_\varphi^*(E)$, то $\|f\| = \|f\|_1$.

Из (20) имеем

$$\|f\| \leq \|f\|_1. \quad (21)$$

Из определения $\theta(t)$ при $p \in \mathfrak{M}$ будем иметь

$$\sup_{t \in E} |p(t)(t+1)^{-1} \theta^{-1}(t)| \leq 1, \quad \text{т. е. } \|p(t)(t+1)^{-1}\|_1 \leq 1.$$

Неравенство $\|p(t)(t+1)^{-1}\| \leq c$ влечет неравенство $\|p(t)(t+1)^{-1}\|_1 \leq c$ т. е.

$$\|p(t)(t+1)^{-1}\| \geq \|p(t)(t+1)^{-1}\|_1$$

и, следовательно, для полиномов $q(t) = (t+1)p(t)$ получим

$$\|q(t)\| = \|q(t)\|_1. \quad (22)$$

Из условия (18) имеем $\|p_n - p_m\| \rightarrow 0$. Из (22) заключаем, что $\|p_n - p_m\|_1 \rightarrow 0$, т. е. последовательность $\{p_n\}$ сходится в себе по норме (2'), значит она сходится к некоторой функции $f_1(t)$:

$$\lim \|p_n - f_1\|_1 = 0. \quad (23)$$

Но функция $\theta(t)$ всюду конечна и полиномы не составляют плотного множества в $C_\theta(E)$. По теореме 2 заключаем, что $f_1(t) \in C_\theta^*(E)$. Из (21) и (23) следует, что

$$\lim \|p_n - f_1\| = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим функцию $f_2(t) = f(t) - f_1(t)$. Из (18) и (24) следует, что $\|f_2\| = 0$. Докажем, что $f_2(t) \equiv 0$. Из $f \in C_\varphi^*$ и $f_1 \in C_\theta^* \subset C_\varphi^*$ и из неравенства $\ln(a+b) \leq \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2$ выводим, что $f_2 \in C_\varphi^*$. Предположим, что $f_2 \neq 0$. Тогда существует точка $z_0 \in D_1$ такая, что $f_2(z_0) \neq 0$. С другой стороны, так как по предположению полиномы всюду плотны в C_φ^* , для произвольного N существует полином $p(t)$ такой,

что $\|f_2(t) - p(t)\| \leq \frac{1}{N}$ и $|p(z_0) - f_2(z_0)| < \frac{1}{2} |f(z_0)|$. Но $\|f_2\| = 0$, следовательно, $\|p(t)\| \leq \frac{1}{N}$ или

$$Q(t) = Np(t) \in \mathfrak{M}.$$

Имеем $|Q(z_0)| = N|p(z_0)| > \frac{1}{2} N|f_2(z_0)|$. Вследствие произвольности N отсюда заключаем, что $\psi(z_0) = +\infty$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $f_2(z) \equiv 0$ и $f_1(z) \equiv f(z)$ и, следовательно, $\lim \|f - p_n\|_1 = 0$.

Далее имеем $\|f\| = \lim \|p_n\|$, $\|f\|_1 = \lim \|p_n\|_1$. Из (22) заключаем, что $\|f\| = \|f\|_1$. Итак, из (18) следует

$$\frac{|f(t) - p_n(t)|}{\Theta(t)} < \varepsilon, \quad t \in E.$$

Теперь докажем равенство (17). Возьмем произвольную точку $z_0 \in D_1$ и пусть $\delta > 0$ — произвольное число. Подберем функцию $f_\delta(z) \in C_\varphi^*(E)$ из множества $\mathfrak{M}_1$ такую, что

$$|f_\delta(z_0)| > \psi_1(z_0) - \delta.$$

Выберем полином $p_{\delta, n}(t) \in \mathfrak{M}$ так, чтобы

$$\|p_{\delta, n}(t) - f_\delta(t)\|_1 < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число. Отсюда следует равномерная

сходимость последовательности $\{p_{\delta, n}(t)\}$ к $f_\delta(t)$ на отрезке $[0, 2|z_0|e^{\frac{\pi}{2\rho}}]$. Но $\{p_{\delta, n}(z)\}$ (или некоторая ее подпоследовательность) сходится в области $|z| < 2|z_0|$, $z \in D_1$. Легко видеть, что предельная функция должна совпасть с $f_\delta(z)$. Следовательно

$$\lim |p_{\delta, n}(z_0)| = |f_\delta(z_0)|,$$

откуда заключаем, что

$$\sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z_0)| \geq |f_\delta(z_0)| > \psi_1(z_0) - \delta,$$

значит $\psi(z_0) > \psi_1(z_0)$.

Обратное неравенство очевидно, т. е. имеем равенство (17).

Достаточность. Докажем, что при равенстве (17) в рассматриваемом случае, т. е. когда

$$\psi(z) < +\infty, \quad z \in D_1; \quad \psi(z) = +\infty, \quad z \in D_2,$$

любой функционал V , обращающийся в нуль на полиномах, есть тождественный нуль в $C_\varphi(E)$.

Итак, пусть система не полна в $C_\varphi(E)$. Тогда она не полна также в $C_\psi(E)$. Пусть V — произвольный нетривиальный функционал, ортогональный всем степеням t^n , $V[t^n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Продолжим функционал V на пространство $C_\varphi(E)$.

Обозначая через

$$F(z) = V \left[\frac{1}{t-z} \right] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{e^{i\varphi(s)} d\sigma_1(s)}{t-z},$$

будем иметь $F(z) \equiv 0$, $z \in D_2$. В теореме 1 установлено, что тогда $\sigma_1(s)$ будет абсолютно непрерывной функцией и предельные значения $F(t)$ функции $F(z)$, $z \in D_1$ почти всюду на множестве E совпадают с $\sigma'_1(s) = \sigma'(s) \psi^{-1}(t)$, т. е. имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{F(t) dt}{t-z}.$$

Это означает, что функция $F(z)$ представима своим интегралом Коши в угловой области D_1 и, следовательно, в любой подобласти $D_1^{(R)}$: $|z| \leq R$, $z \in D_1$.

Пусть $f(z)$ — любая голоморфная в D_1 функция, непрерывная на $\bar{D}_1$ и удовлетворяющая условию

$$|f(z)| \leq c|z+1|\psi(z), \quad z \in \bar{D}_1. \quad (25)$$

Функция $f_1(z) = f(z) \cdot F(z)$ представима интегралом Коши в области $D_1^{(R)}$

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f_1(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} \frac{f_1(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta-z}, \quad z \in D_1^{(R)}. \quad (26)$$

Имеем

$$|f_1(t)| = |f(t)| |F(t)| \leq c|t+1|\psi(t) \frac{|\sigma'_1(s)|}{\psi(t)} = c|t+1| |\sigma'_1(s)|, \quad (26')$$

откуда следует абсолютная сходимость интеграла

$$\int_E \frac{f_1(t) dt}{t-z} \quad (27)$$

для любого $z \notin E$. Из (26), устремляя R к бесконечности, получим, что существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta-z} = g(z) \quad (28)$$

для любого $z \in D_1$.

Докажем, что предел в левой части равенства (28) существует для любого конечного z , т. е., что $g(z)$ — целая функция. Имеем для любого z , $|z| < R_0$ (R_0 — произвольно)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f_1(t) dt}{t-z} = 0,$$

где интеграл берется по границе области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho_1}$, $R_0 < R < |z| < R$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_{R \uparrow}} \frac{f_1(t) dt}{t-z} - \int_{E_{RR'}^+} \frac{f_1(t) dt}{t-z} + \int_{C_{R \downarrow}} \frac{f_1(t) dt}{t-z} - \int_{E_{RR'}^-} \frac{f_1(t) dt}{t-z} \right] = 0.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших R и R' имеем, вследствие абсолютной сходимости интеграла (27),

$$\left| \int_{E_{RR'}} + \int_{E_{RR'}} \right| < \varepsilon,$$

следовательно, для достаточно больших R и R' будем иметь

$$\left| \int_{C_R} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_{R'}} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \varepsilon, \quad |z| < R_0,$$

т. е. существует предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = g(z)$$

для любого z , равномерно в любом конечном круге $|z| < R_0$, откуда следует, что $g(z)$ — целая функция.

Устремляя R к бесконечности, из (26) получим

$$f(z) \cdot F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{f(t) F(t)}{t - z} dt + g(z), \quad z \in D_1$$

или

$$V \left| \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \right| = g(z), \quad z \in D_1. \quad (29)$$

Далее при $z \in D_2$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f_1(t)}{t - z} dt = 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} \frac{f_1(t)}{t - z} dt, \quad z \in D_2,$$

откуда, устремляя R к бесконечности, получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{f_1(t)}{t - z} dt, \quad z \in D_2. \quad (30)$$

Оценим теперь целую функцию $g(z)$. При $z \in D_1$ из (29), как при доказательстве оценки (6), имеем

$$|g(z)| \leq \left| V \left| \frac{f(t)}{t - z} \right| \right| + |f(z)| \cdot |F(z)| \leq \|V\| \cdot \frac{c_1(1+|z|)}{\delta(z)} + |f(z)| \cdot |F(z)|. \quad (31)$$

Из (6'), (25) и (31) следует оценка

$$|g(z)| \leq \frac{c_2(|z|+1)}{\delta(z)}, \quad z \in D_1. \quad (32)$$

При $z \in D_2$ из (30) и (26') следует, что

$$|g(z)| \leq \frac{c_3}{\delta(z)}, \quad z \in D_2,$$

$$|g(x)| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (33)$$

Но легко видеть, что из условий (32) и (33) вытекает, что $g(z) \equiv 0$.

Таким образом, для любой голоморфной в D_1 и непрерывной в $\bar{D}_1$ функции, удовлетворяющей условию (25), имеем

$$V \left| \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \right| = 0, \quad z \in D_1. \quad (34)$$

Пусть теперь $h(z)$ — произвольная непрерывная в $\bar{D}_1$ функция из $C_\varphi^*(E)$. Тогда из (17) будем иметь $|h(z)| < c\psi(z)$, следовательно, функция $\tilde{h}(z) = (z - z_0)h(z)$, $z_0 \in D_1$ удовлетворяет условию (25). Тогда из (34) получим

$$V \left| \frac{\tilde{h}(t) - \tilde{h}(z)}{t - z} \right| = 0, \quad z \in D_1.$$

Полагая здесь, в частности, $z = z_0$, будем иметь $V|h(t)| = 0$, т. е. функционал V равен нулю на всех непрерывных в $\bar{D}_1$ функциях $h(t) \in C_\varphi^*$, следовательно, и на всех функциях пространства C_φ^* .

Замечание 1. Доказанная теорема тесно примыкает к результатам А. Л. Шагиняна [2] и М. М. Джрбашяна [6] о взвешенно-средней аппроксимации по площади полиномами голоморфных в D_1 функций, когда весовая функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$, $z \in D_1$ частного вида (А. Л. Шагинян) и когда она нормально возрастающая. Именно в этих работах впервые было установлено, что для аппроксимации голоморфных в D_1 функций полиномами в области D_1 нет необходимости требовать расхождения интеграла $J(\varphi, \rho_1, E)$, а достаточно расхождение интеграла $J(\varphi, \rho_2, E)$.

Замечание 2. Если условие (17) не выполняется, то полиномы не могут составить плотного множества во всем C_φ^* . Однако в этом случае можем утверждать, что, если голоморфная функция $f(z)$ удовлетворяет условию $|f(z)| \leq c\psi(z)$, $z \in D_1$, то она может быть приближена полиномами (в доказательстве достаточности нами использовано только неравенство $|h(z)| \leq c\psi(z)$).

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая:

$$b) \quad J(\psi, \rho_k, E) < +\infty, \quad k = 1, 2. \quad (35)$$

В этом случае имеем $\psi(z) < +\infty$ во всей плоскости и, как и в теореме 2, получим, что любая функция, допускающая аппроксимацию полиномами в $C_\varphi(E)$, должна на множестве E_φ совпасть со значениями некоторой целой функции (которую мы обозначим через $f_0(z)$) и

$$|f_0(z)| \leq c\psi(z).$$

Из (35) и из неравенств

$$\ln \psi(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \psi(t) \frac{\partial G_k(t; z)}{\partial n} ds, \quad z \in D_k, \quad k=1, 2, \quad (36)$$

где G_k — функция Грина области D_k ($k=1, 2$), следует, что субгармоническая функция $\ln \psi(z)$ имеет гармоническую мажоранту в каждой из областей D_k ($k=1, 2$) и

$$\psi(z) < A(\varepsilon) \exp(\varepsilon |z|^{p_k}), \quad z \in D_k.$$

Нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае

$$J(\psi, \rho_2, E_k) < +\infty, \quad k=1, 2,$$

где E_k — параллельно E и лежит в D_k . Тогда, написав аналогичные (36) неравенства по множествам E_k , заключаем, что $A(\varepsilon) \leq A < +\infty$ и, следовательно, асимптотически

$$\psi(z) \leq A \exp(\varepsilon |z|^{p_k}), \quad z \in D_k, \quad k=1, 2$$

в замкнутом угле $\bar{D}_k$ ($k=1, 2$). Отсюда следует, что функция $f_0(z)$ — целая, порядка ρ_1 и минимального типа и такая, что $\ln |f_0(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в каждой из областей D_k ($k=1, 2$) и асимптотически

$$\ln |f_0(z)| \leq A \exp\{\varepsilon |z|^{p_1}\}, \quad z \in D_2.$$

Таким образом, обозначая через $C_{\varphi}^*(E)$ множество целых функций $f \in C_{\varphi}(E)$, обладающих перечисленными свойствами, можем утверждать следующее.

Теорема 4. Пусть полиномы не составляют всюду плотного множества в $C_{\varphi}(E)$ и пусть $J(\psi, \rho_2, E) < +\infty$. Тогда функции из $C_{\varphi}(E)$, допускающие аппроксимацию полиномами, входят в множество $C_{\varphi}^*(E)$ (точнее: на E_{φ} совпадают со значениями некоторой функции из C_{φ}^*).

Чтобы сформулировать утверждение, аналогичное утверждению теоремы 3, введем следующие обозначения.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество целых функций $f(z) \in C_{\varphi}^*$, удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{f(t)}{t+1} \right\| \leq 1, \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{(t+1) \varphi(t)} = 0, \quad t \in E,$$

а через $\psi_1(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(z)|$.

Теорема 5. Пусть полиномы не составляют плотного множества в $C_{\varphi}(E)$ и пусть $I(\psi, \rho_2, E) < +\infty$. Тогда для того чтобы полиномы составляли всюду плотное множество в $C_{\varphi}^*(E)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_1(z) \equiv \psi(z).$$

Доказательство по существу не отличается от доказательств теоремы 3, поэтому мы его опускаем.

4°. Рассмотрим теперь задачу весовой полноты полиномов в пространстве непрерывных функций, заданных на нескольких лучах.

Пусть на множестве E — совокупности лучей $E_1, E_2, \dots, E_n$, исходящих из начала координат и перенумерованных в порядке возрастания аргумента, определена вещественная функция $\varphi(t) \geq 1$, стремящаяся к $+\infty$ быстрее любой степени $|t|^n$ при $|t| \rightarrow +\infty$, и пусть $C_\varphi(E)$ означает пространство непрерывных на E функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(t) \varphi^{-1}(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow +\infty, t \in E$. Норма элемента определяется, как в пункте 1°, равенством (2).

Угловую область, ограниченную лучами E_k и E_{k+1} ($E_{n+1} = E_1$), обозначим через $D_{k, k+1}$, а ее раствор — через $\frac{\pi}{p_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим далее через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\varphi$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{p(t)}{1+|t|} \right\| \leq 1,$$

а через $\psi(z) = \sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)|$.

Теорема 6. Для полноты системы полиномов в $C_\varphi(E)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{E_k + E_{k+1}} \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+p_k}} |dt| = +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Доказательство. Необходимость доказывается как и в теореме 1.

Докажем, что, если полиномы не плотны в $C_\varphi(E)$, то хотя бы один из интегралов (37) сходится.

Пусть полиномы не плотны в $C_\varphi(E)$. Тогда они не плотны также в $C_\psi(E)$, и пусть V — произвольный нетривиальный функционал в $C_\psi(E)$ такой, что $V[t^n] = 0$.

Введем, как и в теореме 1, обозначение

$$r(z) = V \left[\frac{1}{t-z} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{e^{i\varphi(s)} d\sigma(s)}{\psi(t)(t-z)}.$$

Если $\psi(z) < +\infty$ во всей плоскости, то по схеме доказательства теоремы 1 легко устанавливается сходимость всех интегралов (37).

Пусть теперь $\psi(z) \equiv +\infty$ в некоторых областях. Рассмотрим ту из них, которая граничит с областью, где $\psi(z) < +\infty$. Пусть эти области суть D_{12} и D_{23} :

$$\psi(z) = +\infty, \quad z \in D_{12}, \quad \psi(z) < +\infty, \quad z \in D_{23}.$$

Тогда будем иметь

$$F(z) \equiv 0, \quad z \in D_{12}. \quad (38)$$

Представим функцию $F(z)$ в виде

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_1 + E_2} \frac{e^{t\varphi(s)} d\sigma(s)}{\psi(t)(t-z)}, \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E - (E_1 + E_2)} \frac{e^{t\varphi(s)} d\sigma(s)}{\psi(t)(t-z)}.$$

Из (38) следует, что в области D_{21} $f_1(z) \equiv -f_2(z)$.

По теореме Привалова можем написать, что почти всюду на E_2

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \in E_2 \\ z \in D_{21}}} f_1(z) + f_2(t) = \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)}$$

или

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \in E_2 \\ z \in D_m}} f_1(z) = \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)} - f_2(t),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \in E_2 \\ z \in D_m}} F(z) = \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)}. \quad (39)$$

Записав теперь $F(z)$ в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_2 + E_3} \frac{e^{t\varphi(s)} d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)} + f^*(z)$$

и учитывая, что $f^*(z)$ представляется интегралом Коши в области D_{23}

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_2 + E_3} \frac{f^*(t) dt}{t-z},$$

будем иметь представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_2 + E_3} \frac{d\zeta_1(t)}{t-z}. \quad (40)$$

Из (40) следует сходимость интеграла

$$\int_{E_2 + E_3} \frac{\ln |F(t)|}{1 + |t|^{1+p_2}} |dt|,$$

где $F(t)$ -- предельное значение функции $F(z)$ в точке $t \in E_2 + E_3$ изнутри области D_{23} . Тогда из (39) будет следовать сходимость интеграла

$$\int_{E_2} \left| \ln \left| \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)} \right| \right| \frac{|dt|}{1 + |t|^{1+p_2}},$$

откуда, как и в теореме 1, следует сходимость интеграла

$$\int_{E_2} \frac{\ln \psi(t)}{1 + |t|^{1+p_2}} |dt|. \quad (41)$$

Сходимость интеграла (41) по лучу E_3 устанавливается аналогично, если $\psi(z) \equiv +\infty$ в области D_{31} . Если же $\psi(z) < +\infty$, $z \in D_{31}$, то сходимость интеграла

$$\int_{E_3} \frac{\ln \psi(t)}{1 + |t|^{1+\beta}} |dt|$$

доказывается как и в теореме 1.

Замечание. Легко видеть, что приведенное доказательство необходимого и достаточного условия полноты полиномов на системе лучей применимо также в случае, когда аппроксимация совершается на произвольной системе кривых в комплексной области, удовлетворяющих условиям М. М. Джрбашяна [3].

5°. Приведем теперь несколько примеров весовых функций, предложенных С. Н. Мергеляном. Эти весовые функции интересны тем, что они стремятся к $+\infty$ существенно разными скоростями на различных лучах, при этом по одному лучу требуется минимальный по шкале экспонент рост, а по остальным лучам рост диктуется требованием полноты на рассматриваемой системе лучей.

1. Рассмотрим сначала весовую аппроксимацию на вещественной оси.

Пусть на оси $(-\infty, +\infty)$ весовая функция $\varphi(t)$ определена следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp |t|^\alpha, & t < 0 \\ \exp |t|^\beta, & t \geq 0. \end{cases}$$

Докажем, что при $\alpha > 1/2$, $\beta > 1$ система полиномов всюду плотна на $C_\varphi(-\infty, +\infty)$.

При применении общего интегрального критерия весовой аппроксимации С. Н. Мергеляна или Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна мы сталкиваемся с определенными трудностями, вызванными возможным резко несимметричным ростом весовой функции $\varphi(t)$, поэтому мы применяем метод, принадлежащий Б. Я. Левину, который связывает полноту с квазианалитичностью определенных классов бесконечно дифференцируемых функций на оси $(-\infty, +\infty)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяющих условию

$$|p(x)| \leq \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

а через $\mathfrak{M}_1$ — множество полиномов $R(z)$, удовлетворяющих условиям

$$|R(x)| \leq \exp |x|^{2\beta}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$|R(iy)| \leq \exp |y|^{2\alpha}, \quad -\infty < y < +\infty,$$

и введем соответствующие функционалы

$$\sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)| = \psi(z), \quad \sup_{R \in \mathfrak{M}_1} |R(z)| = \psi_1(z).$$

Легко видеть, что из $\psi(z) \equiv +\infty$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ следует тождество $\psi_1(z) \equiv +\infty$, $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z \neq 0$ и обратно. Это означает, что полнота по-

полиномов в $C_{\overline{z}}(-\infty, +\infty)$ эквивалентна полноте полиномов в $C_{\overline{z}_1}(E)$, где

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \exp |t|^{2\beta}, & -\infty < t < +\infty \\ \exp |t|^{2\alpha}, & \operatorname{Re} t = 0, \end{cases}$$

а через E обозначены координатные оси.

Предположим, что нет полноты в $C_{\overline{z}}(-\infty, +\infty)$. Тогда нет полноты также в $C_{\overline{z}_1}(E)$. Это означает, что на E существует функция $\sigma(t)$ ограниченной вариации и такая, что $\sigma(t) \not\equiv \text{const}$ и

$$\int_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi_1(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \int_E e^{i\lambda t} \frac{d\sigma(t)}{\varphi_1(t)} = f_1(\lambda) + f_2(\lambda),$$

где

$$f_1(\lambda) = \int_{-t_\infty}^{+t_\infty} e^{i\lambda t} e^{-|t|^{2\alpha}} d\sigma(t), \quad (2)$$

$$f_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} e^{-|t|^{2\beta}} d\sigma(t). \quad (3)$$

Так как по условию $2\alpha \geq 1$, $2\beta > 2$, то функция $f_1(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda = u < 1$, а $f_2(\lambda)$ — целая, следовательно, $f(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости $u < 1$. Из (1) следует, что $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots$, откуда заключаем, что $f(\lambda) \equiv 0$, или

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0. \quad (4)$$

Оценим целую функцию $f_2(\lambda)$. Из (3), применяя неравенство Гельфера, получим

$$|f_2(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|\lambda| |t|} e^{-|t|^{2\beta}} |d\sigma(t)| \leq C \exp \left(\frac{1}{2\beta'} |\lambda|^{2\beta'} \right), \quad \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta'} = 1,$$

т. е. $f_2(\lambda)$ имеет порядок $2\beta' < 2$.

Далее из (3) следует, что на вещественной оси $-\infty < u < +\infty$ $|f_2(u)| \leq c$, а из (2) следует неравенство $|f_1(iv)| \leq c$, $-\infty < v < +\infty$, следовательно, согласно (4), $|f_2(iv)| \leq c$, $-\infty < v < +\infty$.

Таким образом, целая функция $f_2(\lambda)$ ограничена на координатных осях. Так как ее порядок меньше двух, то она ограничена во всей плоскости и, следовательно, постоянна.

Итак

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} e^{-|t|^{2\beta}} d\sigma(t) \equiv \text{const},$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-|t|^{2\beta}} d\sigma(t) = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Но функцию $f(t) = |t|$ можно приблизить полиномами $p(t)$ ($p(0) = 0$) на оси $(-\infty, +\infty)$ при наличии веса $\exp |t|^{2\beta}$, $2\beta > 1$, следовательно, $\sigma(t) \equiv \text{const}$, при $-\infty < t < +\infty$, что, в свою очередь, дает $f_1(\lambda) \equiv 0$, т. е. $\sigma(t) \equiv \text{const}$ на мнимой оси. Таким образом, мы получили, что $\sigma(t) \equiv \text{const}$ на E , что противоречит условию и, тем самым, наше утверждение доказано.

2. Приведем теперь аналогичный пример весовой функции, определенной на двух лучах комплексной плоскости. Пусть E означает систему двух лучей $\arg t = 0$ и $\arg t = \frac{\pi}{\rho}$ ($\rho > 1$), и пусть на E определена весовая функция $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp |t|^{\alpha}, & \arg t = 0 \\ \exp |t|^{\beta}, & \arg t = \frac{\pi}{\rho} \end{cases}$$

Докажем, что, если $\alpha \geq 1/2$, $\beta > \rho$, то система полиномов полна в $C_{\varphi}(E)$, т. е. покажем, что из равенств

$$\int_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

следует, что $\sigma(t) \equiv \text{const}$ на E .

С этой целью составим функцию

$$f(\lambda) = \int_E \text{ch} \sqrt{\lambda t} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}.$$

Как и в первом примере, легко показать, что $f(\lambda) \equiv 0$. Представим $f(\lambda)$ в виде $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$, где

$$f_1(\lambda) = \int_0^{\infty} \text{ch} \sqrt{\lambda t} e^{-|t|^{\alpha}} d\sigma(t), \quad (1)$$

$$f_2(\lambda) = \int_0^{e^{\frac{\pi}{\rho}}} \text{ch} \sqrt{\lambda t} e^{-|t|^{\beta}} d\sigma(t). \quad (2)$$

Функция $f_2(\lambda)$ — целая. Из (2) с помощью неравенства Гельдера убеждаемся, что $f_2(\lambda)$ имеет порядок $\beta' \left(\frac{1}{2\beta'} + \frac{1}{2\beta} = 1 \right)$ и нормальный тип.

Далее опять таки из представления (2) следует, что $f_2(\lambda)$ ограничена на луче $\arg \lambda = \pi - \frac{\pi}{\rho}$

$$|f_2(|\lambda| e^{i\pi(1-1/\rho)})| \leq c.$$

Представление (1), в свою очередь, нам дает следующую оценку на вещественном отрицательном луче:

$$|f_1(|\lambda| e^{i\pi})| \leq c. \quad (3)$$

Из (3) и тождества $f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0$ следует, что $f_2(\lambda)$ также ограничена на отрицательной вещественной полуоси

$$|f_2(|\lambda| e^{i\pi})| \leq c.$$

Таким образом, целая функция $f_2(\lambda)$ ограничена на сторонах угла $\pi(1-1/\rho) \leq \arg \lambda \leq \pi$ раствора $\frac{\pi}{\rho}$, имеет порядок β' и нормальный тип.

Раствор дополнительного угла обозначим через $\frac{\pi}{\rho_1} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 2 \right)$.

Легко видеть, что $\beta' < \rho$, $\beta' < \rho_1$, и, применяя принцип Фрагмена-Линделфа, заключаем, что $f_2(\lambda) \equiv \text{const}$, то есть

$$\int_0^{\frac{t}{\rho} \infty} \text{ch} \sqrt{\lambda t} e^{-|\eta|^\beta} d\sigma(t) \equiv \text{const},$$

что, в свою очередь, дает $d\sigma(t) \equiv 0$ на луче $\arg t = \frac{\pi}{\rho}$. Тогда из тождества $f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0$ будет следовать, что $f_2(\lambda) \equiv 0$ или $d\sigma(t) \equiv 0$ на луче $(0, +\infty)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что тем же способом можно доказать, что, если

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp t^{1/\rho}, & \arg t = 0 \\ \exp |t|^\rho \ln(1+|t|), & \arg t = \frac{\pi}{\rho} \end{cases},$$

то опять полиномы всюду плотны в $C_\varphi(E)$.

Отметим здесь, что существует функция $h(t)$, определенная на полуоси $(-\infty, 0)$ и такая, что система полиномов полна в $C_h(-\infty, 0)$ и вместе с тем эта система не полна на оси $(-\infty, +\infty)$ при весе

$$\varphi(t) = \begin{cases} h(t), & t < 0 \\ \exp t^\beta, & t \geq 0 \end{cases}$$

ни для одного конечного значения β .

3. В первом примере мы показали, что в случае веса

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \exp |t|^\alpha, & \text{Im } t = 0, \alpha \geq 1 \\ \exp |t|^\beta, & \text{Re } t = 0, \beta > 2 \end{cases}$$

система полиномов полна в C_φ на координатных осях. Сейчас мы покажем, что полнота имеет место также в случае веса

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp t^{\alpha}, & \arg t = 0, \alpha > 1/2 \\ \exp |t|^{\beta}, & \arg t = \frac{\pi}{2}, \beta > 2 \\ \exp |t|^{\gamma}, & \arg t = \pi, \gamma > 1 \\ \exp |t|^{\delta}, & \arg t = 3\frac{\pi}{2}, \delta > 2. \end{cases}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\delta = \beta$. Для доказательства достаточно установить, что из равенств

$$\int_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

следует, что $d\sigma(t) \equiv \text{const}$ на координатных осях.

Составим функцию

$$f(\lambda) = \int_E e^{\lambda \sqrt{t}} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}.$$

Она — целая и

$$f^{(2n)}(0) = \int_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е. $f(\lambda)$ — нечетная функция, следовательно

$$f(\lambda) + f(-\lambda) \equiv 0. \quad (1)$$

Представим $f(\lambda)$ в виде $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$, где

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-|t|^{\alpha}} e^{\lambda \sqrt{t}} d\sigma(t), \\ f_2(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda \sqrt{t}} e^{-|t|^{\beta}} d\sigma(t) + \int_{-\infty}^0 e^{\lambda \sqrt{t}} e^{-|t|^{\gamma}} d\sigma(t) + \int_{-\infty}^0 e^{\lambda \sqrt{t}} e^{-|t|^{\delta}} d\sigma(t) = \\ &= f_{21}(\lambda) + f_{22}(\lambda) + f_{23}(\lambda). \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) имеем

$$f_1(\lambda) + f_1(-\lambda) + f_2(\lambda) + f_2(-\lambda) \equiv 0. \quad (1')$$

Функция $f_1(\lambda) + f_1(-\lambda)$ ограничена на мнимой оси, следовательно, сумма $f_2(\lambda) + f_2(-\lambda)$ также ограничена на мнимой оси

$$|f_2(i|\lambda) + f_2(-i|\lambda)| \leq c. \quad (3)$$

Но $f_2(\lambda)$ ограничена в области $\frac{\pi}{4} \leq \arg \lambda \leq \pi/2 + \frac{\pi}{4}$, так как

$$|f_{21}(\lambda)| \leq c, \quad \frac{\pi}{4} \leq \arg \lambda \leq \pi + \frac{\pi}{4},$$

$$|f_{22}(\lambda)| \leq c, \quad 0 \leq \arg \lambda \leq \pi,$$

$$|f_{23}(\lambda)| \leq c, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg \lambda \leq 3\frac{\pi}{4},$$

и, значит

$$|f_2(i|\lambda)| \leq c. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует ограниченность $f_2(\lambda)$ на отрицательной мнимой полуоси

$$|f_2(-i|\lambda)| \leq c. \quad (5)$$

Рассмотрим функцию $f_{22}(\lambda)$. Она ограничена в верхней полуплоскости и

$$|f_{22}(\lambda)| \leq |f_2(\lambda)| + |f_{21}(\lambda)| + |f_{23}(\lambda)|.$$

Из (5) следует, что

$$|f_{22}(-i|\lambda)| \leq c + |f_{21}(-i|\lambda)| + |f_{23}(-i|\lambda)|.$$

С помощью неравенства Гельдера легко показать, что функции $f_{21}(\lambda)$ и $f_{23}(\lambda)$ имеют порядок $< \frac{4}{3}$, а функция $f_{22}(\lambda)$ имеет порядок < 2 .

Таким образом, целая функция $f_{22}(\lambda)$ имеет порядок < 2 , ограничена в верхней полуплоскости, а по мнимому отрицательному лучу имеет порядок роста $< \frac{4}{3}$. Отсюда с помощью известных соображений

(рассмотрение функции $f_{22}(\lambda) \cdot \exp(a\lambda^p)$, $p < \frac{4}{3}$) получаем, что

$f_{22}(\lambda)$ имеет порядок $< \frac{4}{3}$. Следовательно, функция $f_2(\lambda)$ имеет по-

рядок меньше $\frac{4}{3}$. Применяя принцип Фрагмена-Линделефа, получим, что $f_2(\lambda) \equiv \text{const}$. Доказательство нашего утверждения заканчивается как в предыдущих примерах.

4. Следующий пример относится к вопросу о весовой полноте системы $\{t^n\}$ на вещественной оси. Во всех работах, посвященных этому вопросу, полнота системы $\{t^n\}$ исследовалась при предположении, что система степеней $\{t^n\}$ полна.

Но естественно ожидать, что, если система $\{t^{\lambda_n}\}$ богаче системы $\{t^n\}$, то она может быть полной при меньшем требовании, налагаемом на рост весовой функции $\varphi(t)$, как это имеет место при приближении

на одном луче: например, система $\{t^{\frac{n}{2}}\}$ полна на полуоси $(0, +\infty)$ в случае веса $\exp t^{1/4}$, хотя система $\{t^n\}$ не полна.

Но, с другой стороны, легко видеть, что в случае веса $\varphi(t)$ таком, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \varphi(t) dt}{1+t^2} < +\infty,$$

никакая система $\{t^{\lambda_n}\}$, $c_1 \leq |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq c_2$ не может быть полной в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$. Тем не менее мы покажем, что по одному лучу рост весовой функции можно снизить за счет обогащения системы $\{t^n\}$.

Определим весовую функцию $\varphi(t)$ на оси $(-\infty, +\infty)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp |t|^\alpha, & t \leq 0, \alpha > 1/4 \\ \exp t^\beta, & t \geq 0, \beta > 1, \end{cases}$$

и покажем, что система $\{t^{n/2}\}$ полна в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$, хотя система $\{t^n\}$ может и не быть полной (если $\alpha < 1/2$).

Мы должны показать, что из равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{n/2} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

следует тождество $\sigma(t) \equiv \text{const}$.

Составим функцию

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{ch}(\sqrt{\lambda} \sqrt[4]{t}) \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}.$$

Как и в предыдущих примерах, из (1) следует, что $f(\lambda) \equiv 0$. Преобразуя $f(\lambda)$ в виде

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^0 \text{ch} \sqrt{\lambda} \sqrt[4]{t} e^{-|t|^\alpha} d\sigma(t) + \int_0^{+\infty} \text{ch} \sqrt{\lambda} \sqrt[4]{t} e^{-t^\beta} d\sigma(t) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$$

будем иметь

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0.$$

Функция $f_1(\lambda)$ ограничена на луче $\arg \lambda = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $f_2(\lambda)$

также ограничена на этом луче. С другой стороны, $f_2(\lambda)$ ограничена на отрицательной полуоси. Таким образом, целая функция $f_2(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |f_2(i|\lambda|)| &\leq c, \\ |f_2(-|\lambda|)| &\leq c. \end{aligned} \quad (2)$$

С помощью неравенства Гельдера легко устанавливается оценка

$$|f_2(i\lambda)| \leq C \exp(c_1 |\lambda|^{2\beta'}), \quad \frac{1}{4\beta} + \frac{1}{4\beta'} = 1, \quad (3)$$

то есть $f_2(\lambda)$ имеет порядок $2\beta' < 2/3$ и нормальный тип. Из (2) и (3) следует, что $f_2(\lambda) \equiv \text{const}$, и доказательство заканчивается, как и в предыдущих примерах.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Джрбашяну Б. Я. Левину за обсуждение работы и ценные советы.

Институт математики и механики

АН АрмССР

Поступило 6.V.1968

Ի. Ն. ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ

ԱՆՐԵՂԻՄԱՆ ՅՈՒՆԿՑԻԱՆՆԵՐԻ ԿՇՌԱՅԻՆ-ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ
ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ԵՐԿՈՒ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում բերված է անհրաժեշտ և բավարար պայման որպեսզի հար-
թույթյան երկու ճառագայթների վրա՝ E տված $\varphi(t) > 1$ կշռով հնարավոր լինի
ամեն մի անընդհատ ֆունկցիայի $C_0(E)$ տարածությունից մոտարկել բազ-
մանդամներով ($f \in C_0(E)$, եթե $f(t) \cdot \varphi^{-1}(t) \rightarrow 0$ երբ $|t| \rightarrow +\infty$, $t \in E$,
իսկ տարածության նորման որոշվում է (2) բանաձևով):

Այդ պայմանը (4) ինտեգրալների տարամիտությունն է, որտեղ

$$\psi(t) = \sup_{\left| \frac{p(t)}{t+1} \right| < 1} |p(t)|, \text{ իսկ } \frac{\pi}{\rho_1} \text{ և } \frac{\pi}{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2 \right)$$

դիտարկվող ճառագայթներով կազմված անկյունների մեծություններն են:

Քննարկված է նաև այն դեպքը, երբ ամբողջ $C_0(E)$ տարածությունում
այդպիսի մոտավորություն հնարավոր չէ և նկարագրված է այն անընդհատ
ֆունկցիաների դասը, որոնք թույլատրում են նման մոտարկում:

Հոդվածի վերջում բերված են ոչ սիմետրիկ կշռային ֆունկցիաների մի
քանի օրինակներ:

I. O. KCHATCHATRIAN

ON WEIGHTED-UNIFORM APPROXIMATION OF CONTINUOUS
FUNCTIONS WITH POLYNOMS ON TWO HALFLINES

S u m m a r y

The necessary and sufficient condition of completeness with weight
for polynoms in the space $C_0(E)$ of functions continuous on two half-
lines is given.

The condition is the divergence of the integrals

$$\int_E \frac{\ln \psi(t)}{1 + |t|^{1+\rho_k}} |dt|, \quad k = 1, 2,$$

where E stands for the halflines, where the approximation takes place,

$\frac{\pi}{\rho_1}$ and $\frac{\pi}{\rho_2}$ are the angles, formed by these halflines and $\psi(t)$ is related

to the weighting function $\varphi(t)$ as follows

$$\psi(t) = \sup_{\left| \frac{p(t)}{t+1} \right| < 1} |p(t)|.$$

The case, when the polynoms do not form a complete system in the whole C , is also considered. Here the class of continuous on E functions, which may be nevertheless approximated with polynoms, is described.

Several examples of nonsymmetrical weighting functions are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *S. Bernstein*. Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel et l'une de ses applications, Bull. Math. de France, 52, 1924, 399—410.
2. *А. Л. Шапкин*. О полноте семейств аналитических функций в комплексной области, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 1, 1947.
3. *М. М. Джрбашян*. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сб., т. 36, № 3, 1955, 353—440.
4. *С. Н. Мерголян*. Весовые приближения многочленами, УМН, т. XI, вып. 5 (71), 1956, 107—152.
5. *И. О. Хачатрян*. О взвешенном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси, Записки мех.-матем. факультета и Харьковского матем. об-ва, серия 4, том 29, 1963, 129—142.
6. *М. М. Джрбашян*. Докторская диссертация, МГУ, 1948.

А. А. ТАЛАЛЯН

О СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ, РЯДЫ ПО КОТОРЫМ
ПРЕДСТАВЛЯЮТ В МЕТРИКЕ $L_p[0, 1]$ ФУНКЦИИ
ПРОСТРАНСТВА $L_q[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$

В в е д е н и е

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, принадлежащих пространству $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, и M — некоторый класс функций, входящих в $L_p[0, 1]$.

Определение 1. Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется системой представления функций класса M в метрике $L_p[0, 1]$, если для любой функции $f(x) \in M$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1)$$

сходящийся к $f(x)$ в метрике $L_p[0, 1]$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x) \right|^p dx = 0. \quad (2)$$

В том частном случае, когда $M \equiv L_p[0, 1]$ и для каждой функции $f(x)$ сходящийся к ней ряд (1) определяется единственным образом, система $\{\varphi_n(x)\}$ будет базисом пространства $L_p[0, 1]$.

В настоящей работе устанавливается, что некоторые основные свойства базисов пространства $L_p[0, 1]$, касающиеся представления произвольных измеримых функций рядами (см., напр., [1], теорему 1) и вопроса сходимости почти всюду разложений по базисам пространства L_p (см. [2], [3], [4]), имеют место также для любых систем $\{\varphi_n(x)\}$, являющихся системами представления функций класса $L_q[0, 1]$ в метрике $L_p[0, 1]$, где $1 \leq p \leq q < \infty$.

Доказательство этих теорем в общих чертах совпадает с доказательством соответствующих теорем о базисах, однако в некоторых местах необходимо применять методы, существенно отличающиеся от методов, примененных в случае базисов.

Для формулировки первой теоремы удобно привести следующее определение, введенное в [1].

Определение 2. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ почти везде конечных измеримых функций на множестве G асимптотически сходит-

ся к функции $f(x)$ в метрике L_p , если для любого $\varepsilon > 0$ можно определить множество $E \subset G$ такое, что

$$\text{mes } E > \text{mes } G - \varepsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - f(x) \right|^p dx = 0. \quad (3)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть p и q — любые числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leq p \leq q < \infty$, и $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$.

Тогда для любой почти везде конечной на отрезке $[0, 1]$ измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (4)$$

асимптотически сходящийся на этом отрезке к $f(x)$ в метрике L_p .

Вторая теорема, доказанная в настоящей работе, представляет обобщение и, в некотором смысле, усиление формулируемой ниже теоремы Ульянова и Олевского о расходимости рядов Фурье по полным ортогональным системам после перестановок.

Теорема (Ульянов—Олевский). Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0, 1]$ ортонормированная система, то существует расходящийся почти всюду на отрезке $[0, 1]$ ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{v_k} \varphi_{v_k}(x), \quad (5)$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} a_{v_k}^2 < +\infty$ и $\{v_k\}$ — некоторая перестановка последовательности натуральных чисел.

Заметим, что в работе [2] П. Л. Ульянова аналогичная теорема была доказана для базисов пространства $L_2[0, 1]$.

В дальнейшем эта теорема была усилена и обобщена в разных направлениях. Именно, А. М. Олевский [3] показал, что в сформулированной выше теореме ряд (5) можно выбрать так, чтобы он был рядом Фурье непрерывной функции по системе $\{\varphi_{v_k}(x)\}$. Ф. Г. Арутюнян [4] распространил теорему Ульянова на базисы любого пространства $L_p[0, 1]$, $p > 1$. При доказательстве всех этих теорем фундаментальную роль играет установленный П. Л. Ульяновым факт о том, что ряд Фурье некоторой функции класса $L_2[0, 1]$ по некоторой системе $\{\chi_{v_k}(x)\}$, полученной после определенной перестановки системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$, может неограниченно расходиться почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Используя приведенное в [3] усиление указанного свойства системы Хаара (см. [3], стр. 349) и несколько видоизменяя метод, примененный в работах [3] и [4], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть p и q — числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leq p \leq q < \infty$, и $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$.

Тогда существуют сходящийся в метрике $L_p[0, 1]$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (6)$$

и последовательность $\{v_k\}$, полученная путем некоторой перестановки последовательности натуральных чисел $\{n\}$, такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{v_k} \varphi_{v_k}(x) \quad (7)$$

расходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Нам представляется целесообразным обратить внимание на некоторые вопросы, возникающие в связи с теоремами 1 и 2.

1. Пусть $p > 1$ и $M \subset L_p[0, 1]$ — некоторый класс функций, для которого верна теорема 1, если заменить в ее формулировке класс $L_q[0, 1]$ классом M , иначе говоря, из того, что $\{\varphi_n(x)\}$ является системой представления функций класса M в метрике L_p , вытекает, что для любой конечной измеримой функции $f(x)$ существует сходящийся к ней асимптотически в метрике L_p ряд (4).

Множество всевозможных таких классов функций $M \subset L_p[0, 1]$ обозначим через A_p .

Естественно поставить вопрос о том, насколько узкими могут быть классы M , принадлежащие множеству A_p ? Может ли, например, такой класс M совпадать с классом дифференцируемых функций?

2. Обозначим через B_p множество всевозможных классов $M \subset L_p[0, 1]$, для каждого из которых верна теорема 2, если заменить в ее формулировке класс $L_q[0, 1]$ классом M .

Иначе говоря, $M \in B_p$, если для любой системы $\{\varphi_n(x)\}$, являющейся системой представления функций класса M в метрике L_p существуют сходящийся в метрике L_p ряд (6) и некоторая перестановка v_k последовательности натуральных чисел, обладающих тем свойством, что ряд (7) расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Возникает вопрос: насколько узким может быть класс M , принадлежащий множеству B_p ? Может ли, например, такой класс M совпадать с классом дифференцируемых функций?

3. Представляются интересными также вопросы о взаимоотношениях между множествами A_p и B_p для данного p , вопросы о взаимоотношениях между множествами A_p , а также — между множествами B_p в отдельности.

Можно ли, например, утверждать, что $A_p = B_p$?

Можно ли утверждать, что $A_p \subset A_q$, если $1 \leq q < p$? Ответы на вышеприведенные вопросы нам неизвестны. Теоремы 1 и 2 лишь частично отвечают на вопросы, поставленные в пунктах 1 и 2.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1.1. Пусть X — сепарабельное F -пространство* с некоторой нормой $\|x\|_1$, $x \in X$, и X' — подмножество множества X , тоже являющееся сепарабельным F -пространством с некоторой нормой $\|x\|_2$, $x \in X'$, где $\|x\|_2$ сильнее, чем $\|x\|_1$ **.

Пусть далее последовательность $\{x_n\}$ отличных от нуля элементов пространства X обладает тем свойством, что для любого элемента $x \in X'$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \quad (1.1)$$

который сходится к x по норме пространства X , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k - x \right\|_1 = 0. \quad (1.2)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $\|x\|_2 \leq \delta$, то найдется ряд (1.1), который сходится к x в смысле равенства (1.2) и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1 \leq \varepsilon. \quad (1.3)$$

Доказательство. Обозначим через $y = y(x)$ класс рядов (1.1), сходящихся по норме пространства X к одному и тому же элементу $x \in X$. Другими словами, y — класс рядов (1.1), удовлетворяющих (1.2) для данного $x \in X$.

Рассмотрим множество Y всех классов $y = y(x)$, где x — всевозможные элементы из X , для которых существуют сходящиеся к ним в метрике пространства X ряды (1.1)***. В множестве Y естественным образом можно ввести линейные операции и норму.

Если $y_1 = y(x_1)$ и $y_2 = y(x_2)$, то через $y_1 + y_2$ обозначается класс рядов, сходящихся по норме пространства X к элементу $x_1 + x_2$. Если $y = y(x)$ и c — действительное число, то через cy обозначается класс рядов (1.1), сходящихся к элементу cx . Отметим, что в полученном линейном пространстве нулевым элементом является класс тех рядов, которые по норме пространства X сходятся к нулю.

Каждому элементу $y \in Y$ приписывается норма

$$\|y\| = \inf_{\{c_k\}} \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1, \quad (1.4)$$

где $\{c_k\}$ — последовательность коэффициентов ряда класса y .

* Определение F -пространств см. [5], стр. 81.

** Если $x_n \in X'$, $x \in X'$ и $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$, то $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$.

*** Множество таких элементов x содержит множество X' .

Нетрудно видеть, что линейное пространство Y с нормой (1.4) является F -пространством (см. [6], замечание 2).

Рассмотрим совокупность Z упорядоченных пар $(x, y(x))$, где x пробегает множество X' и $y(x)$ — класс рядов вида (1.1), сходящихся к элементу x по норме пространства X .

Легко видеть, что множество Z становится F -пространством, если определить линейные операции и норму соотношениями

$$\alpha(x_1, y(x_1)) + \beta(x_2, y(x_2)) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y(x_1) + \beta y(x_2)) = \\ = (\alpha x_1 + \beta x_2, y(\alpha x_1 + \beta x_2)), \quad (1.5)$$

$$\|(x, y(x))\| = \|x\|_2 + \|y(x)\|; \quad (1.6)$$

непрерывность линейных операций и свойство инвариантности метрики (1.6) непосредственно следуют из соответствующих свойств пространств X' и Y .

Проверим выполнение свойства полноты. Если последовательность элементов $(x'_n, y'_n) = (x'_n, y(x'_n))$, $n = 1, 2, \dots$ фундаментальна в смысле метрики (1.6), то

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x'_n - x'_m\|_2 = 0, \quad (1.7)$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y'_n - y'_m\| = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y(x'_n - x'_m)\| = 0. \quad (1.8)$$

Из полноты пространств X' и Y вытекает существование элементов $x \in X'$ и $y' \in Y$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_2 = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \|y'_n - y'\| = 0. \quad (1.9)$$

Пусть $x' \in X$ — тот элемент, к которому сходятся ряды класса y' , т. е. $y' = y(x')$. Тогда из определения нормы (1.4) и из того, что $\|y'_n - y'\| = \|y(x'_n - x')\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x'\|_1 = 0. \quad (1.10)$$

С другой стороны, из первого равенства (1.9) выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_1 = 0. \quad (1.11)$$

Следовательно, $x = x'$ и последовательность $\{(x'_n, y(x'_n))\}$ сходится в метрике пространства Z к элементу $(x, y(x)) \in Z$.

Рассмотрим отображение $A \{(x, y(x))\} = x$ F -пространства Z на F -пространство X' . Так как линейный оператор A непрерывен и взаимно однозначно отображает Z на X' , то обратный оператор A^{-1} , отображающий X' на Z , тоже непрерывен ([5], стр. 114). Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ можно определить $\delta > 0$ такое, что, если $\|x\|_2 < \delta$, $x \in X'$, то

$$\|y(x)\| \leq \|y(x)\| + \|x\|_2 < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Из (1.12) и (1.4) непосредственно вытекает существование сходящегося к x в метрике пространства X ряда (1.1), частные суммы которого удовлетворяют неравенству

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1 < \varepsilon. \quad (1.13)$$

Тем самым лемма 1.1. доказана.

Положим в формулировке этой леммы $X \equiv L_p [0, 1]$, $p \geq 1$
 $X' \equiv L_q [0, 1]$, $q \geq p$, тогда справедлива

Лемма 1.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность отличных от нуля функций пространства $L_p [0, 1]$, обладающих тем свойством, что для любой функции $f(x) \in L_q [0, 1]$, $1 \leq p \leq q$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.14)$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L_p [0, 1]$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $f(x) \in L_q [0, 1]$ и

$$\|f(x)\|_{L_q}^q = \left(\int_0^1 |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \delta, \quad (1.15)$$

то существует сходящийся к $f(x)$ в метрике $L_p [0, 1]$ ряд (1.14), частные суммы которого удовлетворяют неравенствам

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p}^{L_p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \varepsilon; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

При доказательстве теорем применяется следующая

Лемма 1.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система отличных от нуля функций пространства $L_p [0, 1]$, являющаяся системой представления класса $L_p [0, 1]$ в метрике пространства $L_p [0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, и l — действительное число.

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ можно определить $\delta > 0$ такое, что, если $[c, d] \subset [0, 1]$, $d - c < \delta$, то для любых $\eta > 0$ и натурального N существуют функция $\psi(x)$ и полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (1.17)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$1^\circ. \quad \psi(x) = \begin{cases} l, & x \in E_1 \\ -l, & x \in E_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_1 \cup E_2), \end{cases} \quad (1.18)$$

где множества E_1, E_2 состоят из конечного числа непересекающихся отрезков, лежащих на отрезке $[c, d]$ и

$$E_1 \cap E_2 = 0, \text{mes } E_1 = \text{mes } E_2 = \frac{1}{4} (d-c); \quad (1.19)$$

$$2^\circ. \quad \left\| \psi(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \eta; \quad (1.20)$$

$$3^\circ. \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (1.21)$$

Доказательство. Заметим, что, не ограничивая общности, можно считать $l > 0$. Согласно лемме 1.2 существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любой функции $f(x) \in L_q[0, 1]$ из неравенства

$$\|f(x)\|^{L_q} < \delta_1 \quad (1.22)$$

вытекает существование сходящегося к $f(x)$ в метрике $L_p[0, 1]$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, частные суммы которого удовлетворяют неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Пусть

$$0 < \delta < \left(\frac{\delta_1}{l}\right)^q, \quad [c, d] \subset [0, 1], \quad d-c < \delta. \quad (1.24)$$

Рассмотрим последовательность $\{\psi_n(x)\}$, где

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} l \cdot \zeta_n \left(\frac{x-c}{d-c} \right), & x \in [c, d] \\ 0, & x \notin [c, d] \end{cases} \quad (1.25)$$

и $\{\zeta_n(x)\}$ — система Радемахера.

Так как

$$\|\psi_n(x)\|^{L_q} = \frac{1}{2} (d-c)^{1/q} \cdot l < \delta_1, \quad n=1, 2, \dots, \quad (1.26)$$

то для каждой функции $\psi_n(x)$, $n=1, 2, \dots$ существует сходящийся к ней в метрике $L_p[0, 1]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} \varphi_k(x), \quad (1.27)$$

частные суммы которого удовлетворяют неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^i a_k^{(n)} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad i=1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Из (1.28) вытекает, что для каждого фиксированного значения k последовательность чисел $a_k^{(n)}$, $n=1, 2, \dots$ ограничена. Следовательно, существует возрастающая последовательность натуральных чисел

$$m_1 < m_2 < \dots < m_l < \dots \quad (1.29)$$

такая, что каждая последовательность $\{a_k^{(m_j)}\}$, $1 \leq k \leq N$ имеет некоторый конечный предел b_k

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_k^{(m_j)} = b_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (1.30)$$

Рассмотрим последовательность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} \varphi_k(x), \text{ где } c_k^{(j)} = a_k^{(m_{j-1})} - a_k^{(m_j)}, j = 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

Так как

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_k^{(j)} = 0, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (1.32)$$

то число j_0 можно взять настолько большим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^N c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \frac{\eta}{2}. \quad (1.33)$$

Положим

$$\psi_0(x) = \psi_{m_{j_0-1}}(x) - \psi_{m_{j_0}}(x). \quad (1.34)$$

Пользуясь тем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \quad (1.35)$$

сходится к $\psi_0(x)$ в метрике L_p , возьмем $m > N$ такое, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) - \psi_0(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2}. \quad (1.36)$$

Теперь легко убедиться, что функция $\psi(x) \equiv \psi_0(x)$ и полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{k=N+1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x), \quad c_k = c_k^{(j_0)}, \quad N < k \leq m \quad (1.37)$$

удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3° леммы 1.3.

Выполнение условия 1° непосредственно следует из (1.25), (1.34) и из определения функций Радемахера $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$.

Условие 2° выполнено ввиду (1.33) и (1.36).

Так как, согласно (1.28)

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k^{(m_{j_0-1})} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=1}^n c_k^{(m_{j_0})} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.38)$$

то для полинома (1.37) выполнено также условие 3° и, следовательно, лемма 1.3 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Лемма 2.1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике $L_r[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, а $f(x)$ — функция, принимающая постоянные значения на каждом из непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq s$ и равная нулю вне множества $\Delta = \bigcup_{k=1}^s [a_k, b_k]$.

Тогда для любого натурального N и положительного числа $\sigma > 0$ можно определить ступенчатую функцию $g(x)$ и полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N,$$

удовлетворяющие условиям

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ -f(x), & x \in E' \\ 0, & x \in [0, 1] - (E \cup E'), \end{cases} \quad (2.1)$$

где множества E, E' состоят из конечного числа отрезков $E \cup E' \subset \Delta$

$$E \cap E' = 0, \quad \text{mes } E = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta, \quad \text{mes } E' = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta, \quad (2.2)$$

$$|g(x)| \leq \max |f(x)|, \quad x \in [0, 1]^*, \quad (2.3)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - g(x) \right\|^{L_p} \leq \sigma, \quad (2.4)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \sigma + \|g(x)\|^{L_p}, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.5)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} = \left(\int_{c\Delta} \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \sigma, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть число $\delta > 0$ выбрано так, что оно удовлетворяет условиям леммы 1.3 для каждого значения l функции $f(x)$ и для $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$.

Разделим множество Δ на конечное число непересекающихся интервалов Δ_i , $1 \leq i \leq \zeta$, где

$$\text{mes } \Delta_i < \delta, \quad 1 \leq i \leq \zeta. \quad (2.7)$$

Согласно лемме 1.3 для заданных $N = N_l$, $\eta = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$ и отрезка $[c, d] = \Delta_i$ можно определить функцию $\psi_l(x)$ и полином

$$\sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x), \quad (2.8)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\psi_l(x) = \begin{cases} l_l, & x \in E_1^{(l)} \\ -l_l, & x \in E_2^{(l)} \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_1^{(l)} \cup E_2^{(l)}), \end{cases} \quad (2.9)$$

* Неравенство (2.3) вытекает из (2.1), но для дальнейшего удобно привести его отдельно.

где l_i — значение функции $f(x)$ на интервале Δ_i , а множества $E_i^{(1)}$ состоят из конечного числа непересекающихся отрезков, лежащих на Δ_i и

$$E_1^{(1)} \cap E_2^{(1)} = 0, E_1^{(1)} \cup E_2^{(1)} \subset \Delta_i, \text{mes } E_1^{(1)} = \text{mes } E_2^{(1)} = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta_i, \quad (2.10)$$

$$\left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \psi_i(x) \right\|^{L_p} < \frac{\sigma}{2^i}, \quad 1 \leq i \leq \zeta, \quad (2.11)$$

$$\left\| \sum_{k=N_i+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad N_i + 1 \leq n \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq \zeta. \quad (2.12)$$

Выбирая для каждого Δ_i , $1 \leq i \leq \zeta$ функцию $\psi_i(x)$ и полином (2.8) очевидно, можно требовать, чтобы выполнялось также условие

$$N = N_1, \quad N_i = m_{i-1}, \quad 1 < i \leq \zeta. \quad (2.13)$$

Докажем, что функция

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\zeta} \psi_i(x) \quad (2.14)$$

и полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad N_1 = N, \quad m = m_{\zeta}. \quad (2.15)$$

удовлетворяют условиям леммы 2.1. В самом деле, полагая

$$E = \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i^{(1)}, \quad E' = \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_2^{(1)} \quad (2.16)$$

и учитывая условия (2.9), (2.10), можно немедленно проверить, что условия (2.1), (2.2) и (2.3) леммы 2.1 для функции (2.14) выполнены. Далее, согласно (2.11), имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^j \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \sum_{i=1}^j \psi_i(x) \right\|^{L_p} \leq \sum_{i=1}^j \left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \psi_i(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad j \leq \zeta. \quad (2.17)$$

Из (2.17), где положено $j = \zeta$, и из равенств (2.14) и (2.15) вытекает выполнение условия (2.4) леммы 2.1.

Пусть $N+1 \leq n \leq m$ и число j выбрано так, что

$$N_j + 1 \leq n \leq m_j, \quad 1 \leq j \leq \zeta. \quad (2.18)$$

Проверим выполнение условий (2.5) и (2.6).

В том случае, когда $j = 1$, выполнение этих условий следует из (2.12). Если же $2 \leq j \leq \zeta$, учитывая (2.17) и (2.12), будем иметь

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i(x) \right\|^{L_p} + \sigma. \quad (2.19)$$

С другой стороны, так как $\psi_i(x) = 0$, $x \in c\Delta_i$, имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^j \psi_i(x) \right\|^{L_p} \leq \|g(x)\|^{L_p}, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) следует (2.5).

Так как $c\Delta \subset c\Delta_i$ и, следовательно, $\psi_i(x) = 0$, $x \in c\Delta$, то из (2.11) следует, что

$$\left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \psi_i(x) \right\|^{L_p} < \frac{\sigma}{2^i}, \quad 1 \leq i \leq s. \quad (2.21)$$

Учитывая (2.21) и (2.12), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} &= \left\| \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено также условие (2.6), и лемма (2.1) доказана.

Лемма 2.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $\mathcal{A}_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, а $f(x)$ принимает постоянные значения на каждом из непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq s$ и равна нулю вне множества $\Delta = \bigcup_{k=1}^s [a_k, b_k]$.

Тогда для любых натуральных чисел R и N и положительного числа $\eta > 0$ существуют полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N \quad (2.22)$$

измеримое множество $F \subset \Delta$, удовлетворяющие условиям

$$\text{mes } F = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^R \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.23)$$

$$\|H(x) - f(x)\|_F^{L_p} = \left(\int_F |f(x) - H(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta, \quad (2.24)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \eta, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.25)$$

где $c\Delta = [0, 1] - \Delta$.

$$\leq \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \psi_l(x) \right\|^{L_p} + \sigma. \quad (2.19)$$

С другой стороны, так как $\psi_l(x) = 0$, $x \in c\Delta_l$, имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{l=1}^j \psi_l(x) \right\|^{L_p} \leq \|g(x)\|^{L_p}, \quad 1 \leq j \leq \zeta. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) следует (2.5).

Так как $c\Delta \subset c\Delta_l$ и, следовательно, $\psi_l(x) = 0$, $x \in c\Delta$, то из (2.11) следует, что

$$\left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) - \psi_l(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad 1 \leq l \leq \zeta. \quad (2.21)$$

Учитывая (2.21) и (2.12), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} &= \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено также условие (2.6), и лемма (2.1) доказана.

Лемма 2.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $\mathcal{L}_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, а $f(x)$ принимает постоянные значения на каждом из непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq s$ и равна нулю вне множества $\Delta = \bigcup_{k=1}^s [a_k, b_k]$.

Тогда для любых натуральных чисел R и N и положительного числа $\eta > 0$ существуют полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N \quad (2.22)$$

измеримое множество $F \subset \Delta$, удовлетворяющие условиям

$$\text{mes } F = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^R \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.23)$$

$$\|H(x) - f(x)\|_p^{L_p} = \left(\int_F |f(x) - H(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta, \quad (2.24)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \eta, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.25)$$

где $c\Delta = [0, 1] - \Delta$.

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta + 2^R \cdot M, \quad N < n \leq m, \quad (2.26)$$

где $M = \max |f(x)|$.

Эта лемма доказывается путем последовательного применения леммы 2.1. На первом шагу применим лемму 2.1 для функции $f(x)$, натурального N и положительного числа $\sigma = \frac{\eta}{2^R}$.

Тогда мы можем определить ступенчатую функцию $g_1(x)$ и полином вида

$$\sum_{k=N+1}^{m_1} c_k \varphi_k(x), \quad (2.27)$$

удовлетворяющие условиям

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in c\Delta = [0, 1] - \Delta \\ f(x), & x \in E_1, \end{cases} \quad (2.28)$$

где E_1 состоит из конечного числа отрезков и

$$E_1 \subset \Delta, \quad \text{mes } E_1 = \frac{1}{4} \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.29)$$

$$|g_1(x)| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad (2.30)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} c_k \varphi_k(x) - g_1(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2^R}, \quad (2.31)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2^R} + \|g_1(x)\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2^R} + M, \quad N+1 \leq n \leq m_1, \quad (2.32)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \frac{\eta}{2^R}, \quad N+1 \leq n \leq m_1. \quad (2.33)$$

Заметим также, что согласно (2.28) и (2.31) будем иметь

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{E_1}^{L_p} \leq \frac{\eta}{2^R}. \quad (2.34)$$

Пусть определены ступенчатые функции $g_i(x)$, множества E_i , $1 \leq i \leq \zeta$, $\zeta < R$ и полиномы

$$\sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad 1 \leq i \leq \zeta, \quad \zeta < R, \quad (2.35)$$

удовлетворяющие условиям

$$\bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i \subset \Delta \quad \text{и} \quad \text{mes } \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4} \right)^{\zeta} \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.36)$$

где множество

$$\Delta_{\zeta} = \Delta - \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i \quad (2.37)$$

является соединением конечного числа отрезков;

$$g_l(x) = 0, \quad x \in c\Delta, \quad |g_l(x)| \leq 2^{l-1} \cdot M, \quad x \in [0, 1], \quad 1 \leq l \leq \zeta, \quad (2.38)$$

$$\sum_{l=1}^{\zeta} g_l(x) = f(x), \quad x \in \bigcup_{l=1}^{\zeta} E_l, \quad (2.39)$$

$$N = N_1, \quad m_l = N_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq \zeta - 1, \quad (2.40)$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{\zeta} \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) - \sum_{l=1}^{\zeta} g_l(x) \right\|_{L^p}^{L^p} < \frac{\zeta \cdot \eta}{2R}, \quad \zeta < R. \quad (2.41)$$

Положим

$$f_{\zeta}(x) = f(x) - \sum_{l=1}^{\zeta} g_l(x). \quad (2.42)$$

Из (2.38) и (2.39) следует, что

$$f_{\zeta}(x) = 0, \quad x \in c\Delta_{\zeta}, \quad c\Delta_{\zeta} = [0, 1] - \Delta_{\zeta}, \quad (2.43)$$

$$|f_{\zeta}(x)| \leq 2^{\zeta} \cdot M. \quad (2.44)$$

Применим лемму 2.2, полагая в ее формулировке $f(x) = f_{\zeta}(x)$, $N = m_{\zeta}$,

$\sigma = \frac{\eta}{2R}$. Тогда определяются функция $g_{\zeta+1}(x)$, множество $E_{\zeta+1}$ и по-

лином

$$\sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^{m_{\zeta+1}} c_k \varphi_k(x), \quad N_{\zeta+1} \equiv m_{\zeta}, \quad m_{\zeta+1} > N_{\zeta+1} \quad (2.45)$$

такие, что

$$\max |g_{\zeta+1}(x)| \leq 2^{\zeta} \cdot M, \quad (2.46)$$

$$g_{\zeta+1}(x) = f_{\zeta}(x), \quad x \in E_{\zeta+1}, \quad g_{\zeta+1}(x) = 0, \quad x \in c\Delta_{\zeta}, \quad (2.47)$$

где множество $E_{\zeta+1}$ является соединением конечного числа отрезков и

$$E_{\zeta+1} \subset \Delta_{\zeta}, \quad \text{mes} E_{\zeta+1} = \frac{1}{4} \text{mes} \Delta_{\zeta}, \quad (2.48)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^{m_{\zeta+1}} c_k \varphi_k(x) - g_{\zeta+1}(x) \right\|_{L^p}^{L^p} \leq \frac{\eta}{2R}, \quad (2.49)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{L^p}^{L^p} \leq \frac{\eta}{2R} + \left\| g_{\zeta+1}(x) \right\|_{L^p}^{L^p} \leq \frac{\eta}{2R} + M \cdot 2^{\zeta}, \quad N_{\zeta+1} < n \leq m_{\zeta+1}, \quad (2.50)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{C\Delta}^{L^p} \leq \left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{C\Delta_{\zeta}}^{L^p} < \frac{\eta}{2R}, \quad N_{\zeta+1} < n \leq m_{\zeta+1}. \quad (2.51)$$

Теперь заметим, что, в силу (2.36), (2.37) и (2.48)

$$\bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l \subset \Delta \text{ и } \text{mes} \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l = \text{mes} \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^{\zeta} \text{mes} \Delta + \text{mes} E_{\zeta+1}, \quad (2.52)$$

где

$$\text{mes } E_{\zeta+1} = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta_{\zeta} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{\zeta} \cdot \text{mes } \Delta. \quad (2.53)$$

Из (2.52) и (2.53) следует

$$\bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l \subset \Delta, \quad \text{mes } \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4} \right)^{\zeta+1} \cdot \text{mes } \Delta. \quad (2.54)$$

Далее, из (2.39), (2.42), (2.47) и (2.48) вытекает

$$\sum_{l=1}^{\zeta+1} g_l(x) = f(x), \quad x \in \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l. \quad (2.55)$$

Так как $f_{\zeta+1}(x) = f(x) - \sum_{l=1}^{\zeta+1} g_l(x)$ есть ступенчатая функция и множе-

ство $\Delta_{\zeta+1} = \Delta - \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l$ состоит из конечного числа отрезков, то описанное выше построение полиномов (2.45) и функций $g_{\zeta+1}(x)$ можно продолжить неограниченно.

Для всех значений $0 \leq \zeta \leq R-1$ будут выполнены условия (2.48)–(2.51) и (2.54), (2.55).

Положим

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) = \sum_{\zeta=1}^R \sum_{k=N_{\zeta}+1}^{m_{\zeta}} c_k \varphi_k(x), \quad N_1 = N, \quad m_{\zeta} = N_{\zeta+1}, \quad m_R = m \quad (2.56)$$

и

$$F = \bigcup_{\zeta=1}^R E_{\zeta}. \quad (2.57)$$

Легко видеть, что полином (2.56) и множество (2.57) удовлетворяют условиям (2.23)–(2.26) леммы 2.2.

В самом деле, (2.23) выполнено согласно (2.54), где положено $\zeta = R-1$.

Из (2.49) и (2.56) вытекает

$$\left\| H(x) - \sum_{\zeta=1}^R g_{\zeta}(x) \right\|_{L_p}^{L_p} \leq \sum_{\zeta=1}^R \left\| \sum_{k=N_{\zeta}+1}^{m_{\zeta}} c_k \varphi_k(x) - g_{\zeta}(x) \right\|_{L_p}^{L_p} < \eta \quad (2.58)$$

и, следовательно, на основании (2.55), где $\zeta = R-1$, и (2.57) получаем

$$\|H(x) - f(x)\|_{L_p}^{L_p} \leq \eta. \quad (2.59)$$

Остается проверить выполнение (2.25) и (2.26).

Пусть $N+1 \leq n \leq m$ и число i выбрано так (см. (2.56)), что

$$N_i < n \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq R. \quad (2.60)$$

При $i=1$ в (2.60) выполнение (2.25) и (2.26) вытекает из (2.51) и (2.50), в которых положено $\zeta=0$ (см. также (2.32) и (2.33)).

Если же $i \geq 2$, имеем

$$\sum_{k=N_l+1}^n c_k \varphi_k(x) = \sum_{\tau=1}^{l-1} \sum_{k=N_{\tau}+1}^{m_{\tau}} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_l+1}^n c_k \varphi_k(x), \quad N_l < n \leq m_l, \quad i \leq R. \quad (2.61)$$

Из (2.61) и (2.51), где $1 \leq \tau \leq i$, получаем

$$\sum_{k=N_l+1}^n c_k \varphi_k(x) \left\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \sum_{\tau=1}^{l-1} \left\| \sum_{k=N_{\tau}+1}^{m_{\tau}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_l+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{i}{R} \cdot \eta < \eta, \quad (2.62)$$

а из (2.50), где $1 < \tau \leq i$, вытекает

$$\sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \left\|^{L_p} < \sum_{\tau=1}^{l-1} \left\| \sum_{k=N_{\tau}+1}^{m_{\tau}} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_l+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \frac{i}{R} \cdot \eta + M \cdot \sum_{\tau=1}^l 2^{\tau-1}. \quad (2.63)$$

Следовательно

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \eta + 2^{l-1} \cdot M \leq \eta + 2^R \cdot M, \quad N < n \leq m. \quad (2.64)$$

Таким образом, лемма 2.2 доказана.

На основании леммы 2.2 устанавливаются две леммы (см. леммы 2.3 и 2.4), которые непосредственно применяются при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$ и $F(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, равная нулю вне некоторого измеримого множества E , $E \subset [0, 1]$.

Тогда для любого натурального N и положительного $\sigma > 0$ можно определить множества F_1, F_2 и полином вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (2.65)$$

для которых выполнены условия

$$\text{а) } F_1 \subset E, \quad \text{mes } F_1 > \text{mes } E - \sigma,$$

$$\text{б) } F_2 \subset cE, \quad \text{mes } F_2 > \text{mes } cE - \sigma, \quad cE = [0, 1] - E,$$

$$\gamma) \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - F(x) \right\|_{F_1}^{L_p} < \sigma,$$

$$\text{д) } \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \sigma, \quad N+1 \leq n \leq m.$$

Доказательство. Возьмем ступенчатую функцию $f(x)$, обладающую свойствами

$$f(x) = 0, \quad x \in c\Delta, \quad (2.66)$$

где Δ — соединение конечного числа отрезков

$$\text{mes } \Delta \cap E > \text{mes } E - \frac{\sigma}{2}, \quad (2.67)$$

$$\text{mes } c\Delta \cap cE > \text{mes } cE - \sigma, \quad (2.68)$$

$$|F(x) - f(x)| < \frac{\sigma}{2}, \quad x \in \Delta \cap E. \quad (2.69)$$

Далее возьмем натуральное число R такое, что

$$\left(\frac{3}{4}\right)^R < \frac{\sigma}{2}. \quad (2.70)$$

Применив лемму 2.2 для N , R и $\eta = \frac{\sigma}{2}$, определим полином (2.65) и множество F , которые, согласно (2.23), (2.24) и (2.25), будут удовлетворять условиям

$$F \subset \Delta, \quad \text{mes } F > \text{mes } \Delta - \frac{\sigma}{2}, \quad (2.71)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_F^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad (2.72)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.73)$$

Положим

$$F_1 = F \cap E, \quad F_2 = c\Delta \cap cE. \quad (2.74)$$

Из (2.71) и (2.67) следует, что

$$\text{mes } F_1 > \text{mes } E - \sigma. \quad (2.75)$$

Следовательно, множества F_1 и F_2 , определенные равенствами (2.74) удовлетворяют условиям а) и б) (см. (2.68)).

Так как $F_1 \subset E$ и $F_1 \subset \Delta \cap E$, то из (2.72) и (2.69) следует

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - F(x) \right\|_{F_1}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} + \left\| f(x) - F(x) \right\|_{F_1}^{L_p} < \sigma. \quad (2.76)$$

Из (2.73) и из того, что $F_2 \subset c\Delta$, вытекает

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.77)$$

Таким образом, лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$.

Тогда для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ можно определить число $\delta > 0$ такое, что, если $F(x)$ — измеримая функция, равная нулю вне измеримого множества $E \subset [0, 1]$ и такая, что

$$\|F(x)\|_E^{Lp} < \delta^*, \quad (2.78)$$

то для любого натурального N и положительного числа ε существуют множества E_1, E_2 и полином вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (2.79)$$

удовлетворяющие условиям

$$A) \quad E_1 \subset E, \quad \text{mes } E_1 > \text{mes } E - \varepsilon,$$

$$B) \quad E_2 \subset cE, \quad \text{mes } E_2 > \text{mes } cE - \varepsilon,$$

$$C) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - F(x) \right\|_{E_1}^{Lp} < \varepsilon,$$

$$D) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{Lp} < \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m,$$

$$E) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{E_2}^{Lp} < \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m.$$

Доказательство. Возьмем натуральное R настолько большим, чтобы

$$\left(\frac{3}{4}\right)^R < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.80)$$

и после выбора R выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для функции $F(x)$ из выполнения неравенства (2.78) вытекало существование такого измеримого множества E_0 , что

$$E_0 \subset E, \quad \text{mes } E_0 > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.81)$$

$$\max_{x \in E_0} |F(x)| = M < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^R}. \quad (2.82)$$

Предположим, что $F(x)$ — измеримая функция, удовлетворяющая неравенству (2.78), и E_0 — выбранное в зависимости от этой функции множество, удовлетворяющее (2.81) и (2.82).

Снова, как и при доказательстве леммы 2.3, возьмем ступенчатую функцию $f(x)$, обладающую свойствами

$$f(x) = 0, \quad x \in c\Delta, \quad (2.83)$$

где Δ — соединение конечного числа отрезков,

$$\text{mes } \Delta \cap E_0 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.84)$$

$$\text{mes } c\Delta \cap cE > \text{mes } cE - \varepsilon, \quad (2.85)$$

* Нужно отметить, что в формулировке этой леммы число δ зависит только от ε и после его выбора N , σ , $F(x)$ и множество E произвольны (при выполнении (2.78)).

$$|f(x) - F(x)| < \frac{\sigma}{2}, \quad x \in \Delta \cap E_0, \quad (2.86)$$

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in E_0. \quad (2.87)$$

Применив лемму 2.2 для N , R и $\tau_1 = \min \left\{ \frac{\sigma}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, определим полином (2.79) и измеримое множество F , удовлетворяющие условиям

$$F \subset \Delta, \quad \text{mes } F = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4} \right)^R \cdot \text{mes } \Delta > \text{mes } \Delta - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.88)$$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right\|_F^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad (2.89)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.90)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot 2^R < \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.91)$$

Положим

$$E_1 = F \cap E_0, \quad E_2 = c\Delta \cap cE. \quad (2.92)$$

Из (2.88), (2.84) и (2.81) следует

$$E_1 \subset E, \quad \text{mes } E_1 > \text{mes } E - \varepsilon, \quad (2.93)$$

а, в силу (2.85)

$$E_2 \subset cE, \quad \text{mes } E_2 > \text{mes } cE - \varepsilon. \quad (2.94)$$

Таким образом, множества E_1 , E_2 , определенные равенствами (2.92) удовлетворяют условиям *A*) и *B*) леммы 2.4.

Так как $E_1 \subset \Delta \cap E_0$ и $E_1 \subset F$ (см. (2.88) и (2.92)), то из (2.86) и (2.89) следует выполнение условия *C*).

Выполнение *D*) следует из (2.91).

Точно так же выполнение условия *E*) следует из (2.90) и из того что $E_2 \subset c\Delta$. Итак, лемма 2.4 доказана.

Теперь обратимся к доказательству теоремы 1. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел, где

$$0 < \varepsilon_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty, \quad (2.95)$$

а $\{\delta_k\}$ — такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, что каждое число δ_k , $k = 1, 2, \dots$ выбрано в зависимости от ε_k согласно лемме 2.4, т. е., если в формулировке этой леммы положить $\varepsilon = \varepsilon_k$, то $\delta = \delta_k$ удовлетворяет требованиям леммы 2.4. Пусть далее $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$.

Применяя лемму 2.3, определим полином

$$\sum_{k=1}^{m_1} c_k \varphi_k(x)$$

и множество A_1 такие, что

$$A_1 \subset [0, 1], \text{mes } A_1 > 1 - \varepsilon_1, \quad (2.96)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_1} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_1}^{Lp} < \delta_2. \quad (2.97)$$

Предположим, что определен полином

$$\sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{l=1}^j \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x), \quad 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_j \quad (2.98)$$

и множество A_j такие, что

$$A_j \subset [0, 1], \text{mes } A_j > 1 - \varepsilon_j, \quad (2.99)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_j}^{Lp} < \delta_{j+1}. \quad (2.100)$$

Применив лемму 2.4 для функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x), & x \in A_j \\ 0, & x \in cA_j \end{cases} \quad (2.101)$$

и для чисел $\varepsilon = \varepsilon_{j+1}$, $\delta = \delta_{j+1}$, $N = n_j$, $\sigma = \frac{\delta_{j+2}}{4}$, мы определим полином

$$\sum_{k=n_j+1}^{m_j} c_k \varphi_k(x), \quad n_j > m_j \quad (2.102)$$

и множество E_j , удовлетворяющие условиям

$$E_j \subset A_j, \text{mes } E_j > \text{mes } A_j - \varepsilon_{j+1}, \quad (2.103)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{E_j}^{Lp} = \left\| \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_j+1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{E_j}^{Lp} \leq \frac{\delta_{j+2}}{4}, \quad (2.104)$$

$$\left\| \sum_{k=n_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{E_j}^{Lp} \leq \left\| \sum_{k=n_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{Lp} \leq \varepsilon_{j+1}, \quad n_j + 1 \leq n \leq m_j. \quad (2.105)$$

Заметим, что (2.103), (2.104) и (2.105) следуют, соответственно, из условий A), C) и D) леммы 2.4. Вследствие этого, как видно из дальнейших рассуждений, при доказательстве теоремы 1 можно применять только указанные условия леммы.

После определения полинома (2.102) применяем лемму 2.3, полагая

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x), & x \in cE_j \\ 0, & x \in E_j, \end{cases} \quad (2.106)$$

$$N = m_j, \sigma = \min \left\{ \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \frac{\delta_{j+2}}{4} \right\}. \quad (2.107)$$

Определяются полином

$$\sum_{k=m_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x), \quad n_{j+1} > m_j + 1 > n_j \quad (2.108)$$

и множества F_1 и F_2 , для которых

$$F_1 \subset cE_j, \text{mes } F_1 > \text{mes } cE_j - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \quad (2.109)$$

$$F_2 \subset E_j, \text{mes } F_2 > \text{mes } E_j - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \quad (2.110)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} < \frac{\delta_{j+2}}{4}, \quad (2.111)$$

$$\left\| \sum_{k=m_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \frac{\delta_{j+2}}{4} \right\}, \quad m_j < n \leq n_{j+1}. \quad (2.112)$$

Положим

$$A_{j+1} = F_1 \cup F_2, \quad (2.113)$$

тогда

$$\text{mes } A_{j+1} > 1 - \varepsilon_{j+1}. \quad (2.114)$$

Так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_{j+1}}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} + \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_2}^{L_p},$$

где, согласно (2.104), (2.110) и (2.112), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_2}^{L_p} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_2}^{L_p} + \left\| \sum_{k=m_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} + \left\| \sum_{k=m_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \frac{\delta_{j+2}}{4} + \frac{\delta_{j+2}}{4}, \end{aligned}$$

то, учитывая также (2.111), получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_{j+1}}^{L_p} \leq \delta_{j+2}. \quad (2.115)$$

Обозначая, для удобства, $B_j \doteq F_2$ и учитывая (2.105), (2.110) и (2.112), легко видеть, что

$$\left\| \sum_{k=n_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{B_j}^{L_p} \leq \varepsilon_{j+1} + \frac{\varepsilon_{j+1}}{2} < 2\varepsilon_{j+1}, \quad n_j + 1 \leq n \leq n_{j+1}, \quad (2.116)$$

где, в силу (2.110), (2.103) и (2.99),

$$B_j \subset A_j, \text{mes } B_j > 1 - \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2} = 1 - \varepsilon_j + 2\varepsilon_{j+1}. \quad (2.117)$$

Из (2.114) и (2.115) следует, что приведенное выше построение полиномов

$$\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \quad (2.118)$$

и множеств A_{j+1} и B_j можно продолжить неограниченно. Тем самым определяются ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (2.119)$$

возрастающая последовательность целых чисел $\{n_j\}$ и множества A_{j+1} , B_j , $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям (2.114), (2.115), (2.116) и (2.117) для всех $j = 1, 2, \dots$.

Теперь легко доказать, что ряд (2.119) сходится к $f(x)$ асимптотически в метрике $L_p[0, 1]$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и j_0 выбрано так, что

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} (\varepsilon_j + 2\varepsilon_{j+1}) < \varepsilon. \quad (2.120)$$

Положим

$$E = \sum_{j=j_0}^{\infty} B_j. \quad (2.121)$$

Из (2.117) и (2.120) следует

$$E \subset B_j \subset A_j, \quad j > j_0; \quad \text{mes } E > 1 - \varepsilon. \quad (2.122)$$

Если n — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$n_{j+1} < n \leq n_{j+2}, \quad j > j_0, \quad (2.123)$$

из (2.115) и (2.116), где вместо j взято $j+1$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_E^{L_p} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_E^{L_p} + \left\| \sum_{k=n_{j+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_E^{L_p} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_{j+1}}^{L_p} + \left\| \sum_{k=n_{j+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{B_{j+1}}^{L_p} < \delta_{j+1} + 2\varepsilon_{j+1}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j = 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_E^{L_p} = 0. \quad (2.124)$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

При доказательстве теоремы непосредственно применяются лемма 2.1 и некоторые результаты работ [2], [3] и [4] о сходимости рядов по системе Хаара.

Напомним, что функции системы Хаара определяются следующим образом:

$$\gamma_0^{(0)}(x) = 1, \text{ при } x \in [0, 1],$$

$$\gamma_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k-1}{2^{m+1}} \right) \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}} \right) \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, и для всякого фиксированного m индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\gamma_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ обозначаем систему Хаара, упорядоченную в алфавитном порядке индексов m и k .

Приведем также определение некоторого класса ортогональных систем, представляющих естественное обобщение системы Хаара, которые были рассмотрены в работах [3], [4].

Определяется система множеств $E_0^{(0)}, \bar{E}_m^{(k)}, \bar{E}_m^{(k)}$, $m = 1, 2, \dots$; $1 \leq k \leq 2^m$ следующим образом*.

Положим

$$E_0^{(0)} = [0, 1]. \quad (3.1)$$

Разделим множество $E_0^{(0)}$ на два множества $\bar{E}_0^{(1)}, \bar{E}_0^{(1)}$, где

$$\bar{E}_0^{(1)} \cap \bar{E}_0^{(1)} = 0, \text{ mes } \bar{E}_0^{(1)} = \text{mes } \bar{E}_0^{(1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Если уже определены множества

$$E_0^{(3)}, \bar{E}_0^{(1)}, \bar{E}_0^{(1)}, \dots, \bar{E}_{m-1}^{(1)}, \bar{E}_{m-1}^{(1)}, \dots, \bar{E}_{m-1}^{(2^m-1)}, \bar{E}_{m-1}^{(2^m-1)}, \quad (3.3)$$

то множества

$$\bar{E}_m^{(2^k-1)}, \bar{E}_m^{(2^k-1)}, \bar{E}_m^{(2^k)}, \bar{E}_m^{(2^k)}, 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (3.4)$$

определяются следующим образом:

$$\bar{E}_m^{(2^k-1)} \cup \bar{E}_m^{(2^k-1)} = \bar{E}_m^{(k)}; \bar{E}_m^{(2^k-1)} \cap \bar{E}_m^{(2^k-1)} = 0, \text{ mes } \bar{E}_m^{(2^k-1)} = \text{mes } \bar{E}_m^{(2^k-1)}, \quad (3.5)$$

$$\bar{E}_m^{(2^k)} \cup \bar{E}_m^{(2^k)} = \bar{E}_m^{(k)}, \bar{E}_m^{(2^k)} \cap \bar{E}_m^{(2^k)} = 0, \text{ mes } \bar{E}_m^{(2^k)} = \text{mes } \bar{E}_m^{(2^k)}. \quad (3.6)$$

Положим

$$\psi_0^{(0)}(x) = 1, \text{ при } x \in E_0^{(0)}, \quad (3.7)$$

* Приводится определение, данное в [4].

$$\psi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \bar{E}_m^{(k)} \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \bar{E}_m^{(k)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad (3.8)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, и для всякого фиксированного m индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\psi_n(x)\}$ обозначаем систему $\{\psi_0^{(0)}(x), \psi_m^{(k)}(x)\}$, упорядоченную в алфавитном порядке индексов m и k . Полученные вышеуказанным образом ортонормированные системы $\{\psi_n(x)\}$ называются обобщенными системами Хаара.

В работе [3] была доказана

Лемма 3.1. Существует ограниченная на $[0, 1]$ функция $\Phi(x)$, ряд Фурье которой по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma_n(x) \quad (3.9)$$

после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$, т. е. для некоторой последовательности $\{\nu_k\}$, полученной путем перестановки последовательности натуральных чисел, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu_k} \gamma_{\nu_k}(x) \quad (3.10)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Из этой леммы немедленно вытекает

Лемма 3.2. Существуют последовательность действительных чисел $\{b_n\}$ и последовательность $\{\nu_k\}$, полученная путем некоторой перестановки последовательности натуральных чисел, обладающие следующим свойством.

Для любой обобщенной системы Хаара $\{\psi_n(x)\}$ частные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(x) \quad (3.11)$$

равномерно ограничены на $[0, 1]$, т. е.

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \psi_k(x) \right| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x) \quad (3.13)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]^*$.

Вывод леммы 3.2 из леммы 3.1 для одного специального класса систем $\{\psi_n(x)\}$ приведен в работе [3]. Справедливость леммы для про-

* Аналогичная лемма сформулирована в работе [4] (см. лемму 2), где, однако, подчеркивается то важное для применения леммы обстоятельство, что коэффициенты b_n и перестановка ν_k одни и те же для всех систем $\{\psi_n(x)\}$.

извольной обобщенной системы Хаара $\{\psi_n(x)\}$ можно доказать дословным повторением рассуждений, приведенных в [3], однако для полноты изложения сделаем одно замечание, которое вместе с леммой 3.1 дает лемму 3.2.

Замечание. Пусть задан полином по системе Хаара

$$\sum_{k=1}^m a_k \gamma_k(x), \quad (3.14)$$

и пусть

$$\sum_{k=1}^m a_k \psi_k(x) \quad (3.15)$$

является полиномом по обобщенной системе Хаара с теми же коэффициентами a_k .

Тогда существуют два разбиения отрезка $[0, 1]$ на непересекающиеся множества F_i , $1 \leq i \leq \nu$, E_i , $1 \leq i \leq \nu$ такие, что

$$1) \quad F_j \cap F_i = 0, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{\nu} F_i = [0, 1], \quad (3.16)$$

$$2) \quad E_j \cap E_i = 0, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{\nu} E_i = [0, 1], \quad (3.17)$$

$$3) \quad \text{mes } E_i = \text{mes } F_i, \quad 1 \leq i \leq \nu, \quad (3.18)$$

4) полиномы (3.14) (3.15) на множествах F_i и E_i , $1 \leq i \leq \nu$, соответственно, принимают одно и то же постоянное значение.

Указанное свойство полиномов (3.14) и (3.15) легко установить по индукции, рассматривая частные суммы этих полиномов и учитывая конструкцию систем $\{\psi_n(x)\}$.

Так как частные суммы ряда (3.9) равномерно ограничены на отрезке $[0, 1]$, то таким же свойством обладают и частные суммы ряда (3.11).

С другой стороны, свойствами 1), 4) обладают также частные суммы

$$\sum_{k=1}^n b_{\nu_k} \gamma_{\nu_k}(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n b_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

следовательно, из неограниченной расходимости ряда (3.10) вытекает неограниченная расходимость почти всюду на $[0, 1]$ рядов (3.13).

Наряду с леммой 3.2 при доказательстве теоремы 2 применяется также следующая

Лемма 3.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, $E \subset [0, 1]$ — множество, состоящее из конечного числа интервалов и l — действительное число.

Тогда для произвольного натурального числа N и положительного числа η существуют полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N \quad (3.19)$$

и функция $\psi(x)$, обладающие свойствами

$$1^\circ) \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{E}^+ \\ -1, & x \in \bar{E}^- \\ 0, & \text{при } x \in E, \end{cases}$$

где $\bar{E}^+, \bar{E}^-$ — множества, состоящие из конечного числа интервалов

$$\bar{E}^+ \cap \bar{E}^- = 0, \quad \bar{E}^+ \cup \bar{E}^- = E, \quad \text{mes } \bar{E}^+ = \text{mes } \bar{E}^- = \frac{1}{2} \cdot \text{mes } E, \quad (3.20)$$

$$2^\circ) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|^{L_p} < \eta, \quad (3.21)$$

$$3^\circ) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \eta + 2 \left\| \psi(x) \right\|^{L_p}, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (3.22)$$

Доказательство. Пусть натуральное R таково, что

$$\left(\frac{1}{2^R} \cdot \text{mes } E \right)^{1/p} \cdot l < \frac{\eta}{2}. \quad (3.23)$$

Пусть далее определены полиномы

$$\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad N = m_0, \quad m_{i-1} < m_i, \quad 1 \leq i \leq j, \quad j < R \quad (3.24)$$

и функции

$$g_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i \\ -1, & x \in E'_i \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_i \cup E'_i), \end{cases} \quad 1 \leq i \leq j, \quad j > R, \quad (3.25)$$

где множества E_i, E'_i состоят из конечного числа интервалов и обладают свойствами

$$E_i \cap E'_i = 0, \quad E_i \cup E'_i \subset E, \quad (E_r \cup E'_r) \cap (E_s \cup E'_s) = 0, \quad r \neq s, \quad (3.26)$$

$$\text{mes } E_i = \text{mes } E'_i, \quad 1 \leq i \leq j, \quad \text{mes } \bigcup_{i=1}^j (E_i \cup E'_i) = \text{mes } E - \frac{1}{2^j} \cdot \text{mes } E. \quad (3.27)$$

Положим

$$\Delta_j = E - \bigcup_{i=1}^j (E_i \cup E'_i) \quad (3.28)$$

и применим лемму 2.1, полагая в ее формулировке $N = m_j$, $\sigma = \frac{\eta}{2^R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_j \\ 0, & x \in \Delta_j^c. \end{cases} \quad (3.29)$$

Тогда, в силу условий (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5) этой леммы, определяются полином

$$\sum_{k=m_{j+1}}^{m_{j+1}+1} c_k \varphi_k(x) \quad (3.30)$$

и функция $g_{j+1}(x)$ такие, что

$$g_{j+1}(x) = \begin{cases} l, & x \in E_{j+1} \\ -l, & x \in E'_{j+1} \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_{j+1} \cup E'_{j+1}), \end{cases} \quad (3.31)$$

где множества E_{j+1} , E'_{j+1} состоят из конечного числа отрезков

$$E_{j+1} \cup E'_{j+1} \subset \Delta_j, \quad E_{j+1} \cap E'_{j+1} = 0, \quad \text{mes } E_{j+1} = \text{mes } E'_{j+1} = \frac{1}{4} \cdot \text{mes } \Delta_j, \quad (3.32)$$

$$\left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - g_{j+1}(x) \right\|^{L_p} < \frac{\eta}{2R}, \quad (3.33)$$

$$\left\| \sum_{k=m_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R} + \|g_{j+1}(x)\|^{L_p}, \quad m_j + 1 \leq n \leq m_{j+1}. \quad (3.34)$$

Из (3.27), (3.28) и (3.32) следует

$$(E_{j+1} \cup E'_{j+1}) \cap (E_i \cup E'_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq j; \quad \text{mes } \bigcup_{i=1}^{j+1} (E_i \cup E'_i) = \text{mes } E - \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \text{mes } E. \quad (3.35)$$

Сравнивая (3.25), (3.26) и (3.27) с (3.31), (3.32) и (3.35), мы заключаем, что для всех значений i , $1 \leq i \leq R$ можно построить полиномы (3.24) и функции (3.25), для которых условия (3.26), (3.27) выполнены для всех $1 \leq i \leq R$ и условия (3.33), (3.34) — для всех $0 \leq j \leq R-1$.

Множество

$$F = E - \bigcup_{i=1}^R (E_i \cup E'_i) \quad (3.36)$$

разделим на два непересекающихся множества F_1 , F_2 , каждое из которых является соединением конечного числа отрезков и

$$\text{mes } F_1 = \text{mes } F_2 = \frac{1}{2} \text{mes } F. \quad (3.37)$$

Положим

$$\bar{E} = F_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^R E_i \right), \quad \bar{E} = F_2 \cup \left(\bigcup_{i=1}^R E'_i \right), \quad (3.38)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} l, & x \in \bar{E} \\ -l, & x \in \bar{E} \\ 0, & x \in {}^+cE = c(\bar{E} \cap \bar{E}), \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^R \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad m_0 = N, \quad m_R = m \quad (3.40)$$

и докажем, что функция (3.39) и полином (3.40) удовлетворяют требованиям леммы.

Выполнение условия (3.20) леммы 3.3 для множеств (3.38) немедленно следует из определения множеств E_i , E'_i , $1 \leq i \leq R$ и F_1, F_2 .
Так как

$$\text{mes } F = \frac{1}{2^R} \cdot \text{mes } E \quad (3.41)$$

$$\psi(x) - \sum_{i=1}^R g_i(x) = \begin{cases} l, & x \in F_1 \\ -l, & x \in F_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - (F_1 \cup F_2), \end{cases} \quad (3.42)$$

то из (3.23) следует

$$\left\| \psi(x) - \sum_{i=1}^R g_i(x) \right\|^{L_p} = \left(\int_F l^p dx \right)^{1/p} < \frac{\eta}{2}. \quad (3.43)$$

Заметим также, что

$$\left\| \sum_{i=1}^j g_i(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| \psi(x) \right\|^{L_p}, \quad 1 \leq j \leq R, \quad \left\| g_i(x) \right\| \leq \left\| \psi(x) \right\|^{L_p}, \quad 1 \leq i \leq R, \quad (3.44)$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^j g_i(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in \bigcup_{i=1}^j (E_i \cup E'_i) \\ 0 & \text{— в остальных точках.} \end{cases}$$

Из (3.33) и (3.40) имеем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - \sum_{i=1}^R g_i(x) \right\|^{L_p} \leq \sum_{i=1}^R \left\| \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - g_i(x) \right\|^{L_p} < \\ < \frac{\eta}{2R} \cdot R = \frac{\eta}{2}, \quad (3.45)$$

и учитывая (3.43), получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|^{L_p} < \eta. \quad (3.46)$$

Остается проверить условие 3°. Пусть $N+1 \leq n \leq m$. Тогда для некоторого j

$$m_{j-1} + 1 \leq n \leq m_j. \quad (3.47)$$

Если $j=1$, выполнение неравенства (3.22) для полинома (3.40) вытекает из (3.34), где $j=0$, и (3.44).

Так как (см. (3.33))

$$\sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \sum_{i=1}^{j-1} g_i(x) \left\|^{L_p} \leq \sum_{i=1}^{j-1} \left\| \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - g_i(x) \right\|^{L_p} < \frac{\eta}{2}$$

и, следовательно

$$\left\| \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{j-1} g_i(x) \right\|^{L_p}, \quad j \geq 2, \quad (3.48)$$

то при $j > 2$, учитывая (3.47), (3.44) и (3.34), получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=m_{l-1}+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=m_{j-1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \leq \eta + 2 \left\| \psi(x) \right\|^{L_p}.$$

Тем самым условие 3°) также выполнено и лемма 3.3 доказана. Теперь приступим к доказательству теоремы 2.

Предположим, что определены ступенчатые функции

$$\psi_0^{(0)}(x) = 1, \quad x \in E_0^{(0)} = [0, 1], \quad (3.49)$$

$$\psi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & x \in E_n^{+(k)} \\ -\sqrt{2^n}, & x \in E_n^{-(k)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad (3.50)$$

где $0 \leq n \leq m-1$, $1 \leq k \leq 2^n$, представляющие первые 2^m функций некоторой обобщенной системы Хаара, и полиномы по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x), \quad 0 = n_0, \quad n_{l-1} < n_l, \quad 1 \leq l \leq 2^m, \quad m \geq 0. \quad (3.51)$$

Легко видеть, что путем последовательного применения леммы 3.3, в формулировке которой полагается $E = E_m^{+(1)}$, $l = b_{2^m+1} \cdot \sqrt{2^m}$;

$$E = E_{m-1}^{-(1)}, \quad l = b_{2^m+2} \sqrt{2^m}; \dots; E = E_{m-1}^{+(2^m-1)}, \quad l = b_{2^m+1-1} \cdot \sqrt{2^m}; E = \\ = E_{m-1}^{-(2^m-1)}, \quad l = b_{2^m+1} \sqrt{2^m}; \quad \eta = \frac{1}{2^i}, \quad 2^m + 1 \leq i \leq 2^{m+1}, *$$

можно определить ступенчатые функции $\psi_i(x)$, $2^m + 1 \leq i \leq 2^{m+1}$ и полиномы

$$\sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x), \quad 2^m + 1 \leq i \leq 2^{m+1}, \quad n_{l-1} < n_l, \quad (3.52)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\psi_{2k-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & x \in E_m^{+(2k-1)} \\ -\sqrt{2^m}, & x \in E_m^{-(2k-1)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (3.53)$$

$$\psi_{2k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & x \in E_m^{+(2k)} \\ -\sqrt{2^m}, & x \in E_m^{-(2k)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (3.54)$$

* Здесь b_i ($2^m + 1 \leq i \leq 2^{m+1}$) — коэффициенты рядов (3.11) (см. лемму 3.2).

где

$$\bar{E}_m^{+(2k-1)} \cap \bar{E}_m^{-(2k-1)} = 0, \bar{E}_m^{+(2k-1)} \cup \bar{E}_m^{-(2k-1)} = \bar{E}_m^{(k)}, \text{mes } \bar{E}_m^{+(2k-1)} = \text{mes } \bar{E}_m^{-(2k-1)}, \quad (3.55)$$

$$\bar{E}_m^{+(2k)} \cap \bar{E}_m^{-(2k)} = 0, \bar{E}_m^{+(2k)} \cup \bar{E}_m^{-(2k)} = \bar{E}_m^{(k)}, \text{mes } \bar{E}_m^{+(2k)} = \text{mes } \bar{E}_m^{-(2k)}, \quad (3.56)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{1}{2^l}, \quad 2^m + 1 \leq l \leq 2^{m+1}, \quad (3.57)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{1}{2^l} + 2 \|b_l \psi_l(x)\|^{L_p}, \quad n_{l-1} + 1 \leq n \leq n_l, \quad 2^m < l \leq 2^{m+1}. \quad (3.58)$$

Из (3.53), (3.54), (3.55) и (3.56) видно, что функции (3.50), (3.53) и (3.54) вместе составляют первые 2^{m+1} функций некоторой обобщенной системы Хаара.

Следовательно, существует обобщенная система Хаара $\{\psi_l(x)\}$ $1 \leq l < \infty$ и полиномы (3.52), для которых имеют место (3.57) и (3.58) при всех значениях $l = 1, 2, \dots$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) \quad (3.59)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 2.

Так как $\{\psi_l(x)\}$ — обобщенная система Хаара и частные суммы ортогонального ряда

$$\sum_{l=1}^n b_l \psi_l(x) \quad (3.60)$$

равномерно ограничены на $[0, 1]$ (см. лемму 3.2), то ряд (3.60) сходится в метрике $L_p[0, 1]$ для любого $p \geq 1$.

Легко видеть, что частные суммы

$$S_{n_j}(x) = \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^j \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) \quad (3.61)$$

при $j \rightarrow \infty$ сходятся в метрике $L_p[0, 1]$. В самом деле

$$\begin{aligned} \left\| S_{n_j}(x) - S_{n_r}(x) \right\|^{L_p} &\leq \left\| \sum_{l=r+1}^j b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} + \sum_{l=r+1}^j \left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - \right. \\ &\quad \left. - b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p}, \quad j > r, \end{aligned}$$

и тогда, согласно (3.57)

$$\left\| S_{n_j}(x) - S_{n_r}(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{1}{2^r} + \left\| \sum_{l=r+1}^j b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p}, \quad j > r. \quad (3.62)$$

Поскольку ряд (3.60) сходится в метрике $L_p[0, 1]$, то

$$\lim_{r, j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{l=r+1}^j b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} = 0. \quad (3.63)$$

Следовательно (см. (3.62)), существует $f(x) \in L_p[0, 1]$, к которой сходится последовательность частных сумм (3.61) в метрике $L_p[0, 1]$.

Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad n_l < n \leq n_{j+1}, \quad j \geq 1. \quad (3.64)$$

Тогда

$$\|S_n(x) - f(x)\|^{L_p} \leq \|S_{n_j}(x) - f(x)\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=n_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p}. \quad (3.65)$$

Из (3.65) и (3.58), где положено $i=j+1$, имеем

$$\|S_n(x) - f(x)\|^{L_p} \leq \|S_{n_j}(x) - f(x)\|^{L_p} + \frac{1}{2^{j+1}} + 2 \left\| b_{j+1} \psi_{j+1}(x) \right\|^{L_p}.$$

Так как $j \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, учитывая (3.63), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|^{L_p} = 0. \quad (3.66)$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 2 достаточно проверить расходимость ряда, стоящего в правой части (3.59), после некоторой перестановки его членов.

Из неравенства

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right| dx \leq \left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} < \frac{1}{2^l}$$

вытекает, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right)$$

почти всюду на $[0, 1]$ абсолютно сходится.

Поскольку ряд (3.60) почти всюду неограниченно расходится после некоторой перестановки членов (см. лемму 3.2), то после той же перестановки почти всюду неограниченно будет расходиться также ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x).$$

Теорема 2 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 3.VI.1968

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ, ՈՐՈՆՑՈՎ ԳՐՎԱԾ ՇԱՐՔԵՐԸ $L_p[0, 1]$ ՄԵՏՐԻԿԱՑՈՎ
ՆԵՐԿԱՅԱՑՆՈՒՄ ԵՆ $L_q[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

Ա Մ փ ո փ ո լ մ

Դիցուք $1 \leq p \leq q < \infty$ և $\{\varphi_n(x)\}$ սխտեմը ալիպիսին է, որ կամայա-
կան $f(x) \in L_q[0, 1]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $L_p[0, 1]$ մետրի-
կայով այդ ֆունկցիային զուգամիտող $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ շարք:

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ այդպիսի սխտեմները օժտված են
 L_p տարածության բազիսների որոշ հիմնական հատկություններով:

A. A. TALALIAN

ON THE SYSTEMS OF FUNCTIONS, THE SERIES WITH
RESPECT OF WHICH REPRESENT IN $L_p[0, 1]$ METRIC
FUNCTIONS OF $L_q[0, 1]$, $1 \leq p < q$ SPACE

S u m m a r y

Let $1 \leq p \leq q < \infty$ and let the system $\{\varphi_n(x)\}$ possess the proper-
tie, that for an arbitrary function $f(x) \in L_q[0, 1]$ not necessary unic
series

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

exist, which converges to $f(x)$ in $L_p(0, 1)$ metric. The present paper
establishes, that such systems share certain fundamental properties of
basis in L_p .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Талалян. Представление измеримых функций рядами, УМН, 15, вып. 5, 1960, 77—141.
2. П. А. Ульянов. Расходящиеся ряды Фурье, УМН, 16, № 3, 1961, 61—142.
3. А. М. Олевский. Расходящиеся ряды Фурье, Известия АН СССР, серия матем., 27, 1963, 343—366.
4. Ф. Г. Арутюнян. О сходимости почти всюду рядов по базисам пространства $L_p[0, 1]$, ДАН АрмССР, XLI, № 5, 1965, 364—371.
5. К. Иосада. Функциональный анализ, Издательство „Мир“, М., 1967.
6. А. А. Талалян. О системах, ряды по которым представляют любые измеримые функции, Матем. сборник, 76, (118): 1, 1968, 39—51.

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. Э. МКРТЧЯН

О ПОСТРОЕНИИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА И ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ИХ СТРУКТУРЫ

1°. Введение. Пусть A — самосопряженный оператор* с областью определения $D(A)$, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть далее E_λ — соответствующее спектральное семейство проекционных операторов, а $r(\lambda) = \|E_\lambda g\|^2$, где g — так называемый порождающий элемент. Обозначим через V оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы и осуществляющий изометрическое отображение пространства H в пространство L^2_r так, что оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

В работе [1] показано, что полную систему собственных функционалов $T_\lambda(\varphi)$ оператора A можно строить по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} T_{\lambda+\tau}(\varphi), \quad T_\tau(\varphi) = \frac{(R_\tau \varphi, R_\tau g)}{\|R_\tau g\|^2},$$

где R_τ — резольвента оператора A . Однако в этой работе линейное многообразие тех элементов φ , для которых указанный выше предел существует, а также топология, относительно которой эти функционалы непрерывны, описываются в терминах изометрического оператора V .

Вместе с тем, при исследовании конкретных самосопряженных операторов, разумеется, оператор V , вообще говоря, нельзя предполагать известным.

В настоящей работе прежде всего указывается процедура построения полной системы собственных функционалов, которая не опирается на знание оператора V и описывается только в терминах резольвенты R_τ .

Затем исследуется характер непрерывности построенных нами функционалов $T_\lambda(\varphi)$ в терминах, аналогичных тем, которые использованы в работах Ю. М. Березанского [2, 3], Г. И. Каца [4, 5] и К. Морена [6, 7] при доказательстве возможности спектральных разложений произвольных самосопряженных операторов по обобщенным собственным элементам.

Кроме того, попутно доказывается новая формула обращения для интегралов типа Коши — Лебега — Стильтьеса.

* Для упрощения формулировок мы предполагаем, что спектр оператора A простой.

2°. В этом пункте мы докажем теорему, которая дает представление изометрического оператора V в терминах резольвенты R_ε рассматриваемого самосопряженного оператора A .

Теорема 1. Пусть спектр оператора A простой и непрерывный, и пусть g — его порождающий элемент, тогда для каждого $\varphi \in H$ и любого λ из некоторого множества Λ_φ полной ρ -меры

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} = V\varphi \in L_\varphi^2. \quad (1)$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\Phi(\lambda) = V\varphi$, тогда легко видеть [1], что

$$\frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} - V\varphi = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\lambda) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}},$$

потому имеет место неравенство

$$\left| \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} - V\varphi \right| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда легко видеть [8], что для каждого $\delta > 0$ можно указать такое $\tau_1(\delta) > 0$, чтобы для всех $\tau \leq \tau_1(\delta)$ имело место неравенство

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} < \frac{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{|\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} + \varepsilon.$$

Введем в рассмотрение новую неотрицательную меру $\tilde{\rho}_\lambda(x)$ по формуле

$$\tilde{\rho}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x |\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t), \quad (2)$$

тогда в силу теоремы Радона — Никодима легко заключить, что

$$\left| \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} - V\varphi \right| \leq \frac{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\tilde{\rho}_\lambda(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} + \varepsilon. \quad (3)$$

Интегрируя по частям числитель и знаменатель справа в соотношении (3), будем иметь

$$\left| \frac{(R_{\lambda+it} \varphi, R_{\lambda+it} g)}{\|R_{\lambda+it} g\|^2} - V \varphi \right| \leq \frac{\frac{\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2} + 2 \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \tilde{\rho}_{\lambda}(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}}{\frac{\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2} + 2 \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \rho(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}} + \varepsilon. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\frac{\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2}}{\frac{\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2}} = \frac{\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta)}{\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)}, \quad (5)$$

и убедимся, что оно стремится к нулю вместе с δ для всех λ из некоторого множества полной ρ -меры.

В самом деле, пусть $h(x) = \int_{-\infty}^x \Phi(t) d\rho(t)$, тогда, поскольку она

абсолютно непрерывна по мере ρ , множество ее точек Лебега Λ_{ρ} относительно системы Витали, состоящей из всевозможных замкнутых интервалов вещественной оси, имеет полную ρ -меру [9], т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{[\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)]} \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} |\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t) = 0$$

для всех λ , принадлежащих множеству Λ_{ρ} полной ρ -меры. Заметив теперь, что в силу (2)

$$\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta) = \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} |\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t),$$

заключаем, что отношение справа в (5) действительно стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_{\rho}$.

Разбивая интегралы в числителе и знаменателе соотношения (4) на две части и вводя новые переменные интегрирования, получим для отношения этих интегралов следующее выражение:

$$\frac{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \tilde{\rho}_{\lambda}(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}}{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \rho(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}} = \frac{\int_0^{\delta} \frac{t [\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+t) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-t)] dt}{[t^2 + \tau^2]^2}}{\int_0^{\delta} \frac{t [\rho(\lambda+t) - \rho(\lambda-t)] dt}{[t^2 + \tau^2]^2}}. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь отношение подынтегральных функций справа в соотношении (6), которое очевидно равно

$$\frac{\rho_\lambda(\lambda+t) - \rho_\lambda(\lambda-t)}{\rho(\lambda+t) - \rho(\lambda-t)}, \quad 0 \leq t \leq \delta$$

и по доказанному выше стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$, повтому, принимая во внимание неотрицательность подынтегрального выражения в знаменателе, легко убеждаемся, что отношение справа в (6) также стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$. Таким образом, при $\delta \rightarrow 0$, как отношение (5), так и (6) стремятся к нулю для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$, откуда легко заключить, в силу неотрицательности слагаемых в знаменателе, что отношение справа в (4) также стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$, независимо от выбора τ . Пусть $\delta_\lambda(\varepsilon) > 0$ такое, что отношение справа в (4) не превосходит ε для всех $\tau > 0$, и пусть $\tau_\lambda^*(\varepsilon) = \tau_\lambda(\delta_\lambda(\varepsilon))$, тогда легко видеть, что для каждого $\lambda \in \Lambda_\tau$ и любого $\tau < \tau_\lambda^*(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{(R_{\lambda+t} \varphi, R_{\lambda+t} g)}{\|R_{\lambda+t} g\|^2} - V_\varphi \right| \leq 2\varepsilon,$$

т. е. предельное соотношение (1) доказано.

Очевидно, что полученный результат можно сформулировать также следующим образом: для каждого $\varphi \in H$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} T_\tau(\varphi) = T_\lambda(\varphi) \quad (7)$$

существует всюду, кроме множества ρ -меры нуль, зависящего, однако, от элемента φ .

Легко понять, что из этого результата непосредственно не следует существование даже одного λ_0 , при котором упомянутый предел существует для плотного множества элементов из H . Вместе с тем, в плане построения полной системы собственных функционалов, необходимо доказать существование некоторого множества полной ρ -меры, на котором этот предел существует одновременно для всех φ из возможно широкой, во всяком случае всюду плотной, совокупности элементов из H . В работе [10] было указано, что если $\varphi \in \mathcal{Q}_A$, то предел (1) существует для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Оказывается, что этот предел существует также для всех без исключения λ , когда φ принадлежит более широкой совокупности, чем $\mathcal{Q}_A$. Пусть M_A — совокупность элементов $\varphi \in H$ и таких, что для $V\varphi = \Phi(t)$ каждая точка $t \in (-\infty, +\infty)$ является точкой Лебега относительно упомянутой выше системы Витали.

Тогда из доказательства теоремы 1 легко усмотреть справедливость следующей ее модификации.

Теорема 1 bis. В условиях теоремы 1 для всех $\varphi \in M_A$ и всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+\tau} \varphi, R_{\lambda+\tau} g)}{\|R_{\lambda+\tau} g\|^2} = T_{\lambda}(\varphi) = \Phi(\lambda).$$

3°. Из рассмотрений предыдущего пункта легко следует, что для каждого счетного, всюду плотного в метрике H и инвариантного относительно A линейного многообразия $\Omega \subset D(A)$, существует зависящее от Ω множество Λ полной ρ -меры, такое, что предел (7) существует для всех $\lambda \in \Lambda$ и всех $\varphi \in \Omega$ и определяет на Ω функционал, удовлетворяющий соотношению

$$T_{\lambda}(A\varphi) = \lambda T_{\lambda}(\varphi), \quad \varphi \in \Omega. \quad (8)$$

Для того чтобы построенные по формуле (7) функционалы $T_{\lambda}(\varphi)$ были собственными функционалами оператора A , они должны быть непрерывными в некоторой разумной* топологии. Этот пункт посвящен построению таких функционалов и изучению их структуры, т. е. выяснению характера непрерывности этих функционалов.

Пусть G — неограниченный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения D_G , обратный к которому G^{-1} определен на всей области значений оператора G , совпадающей со всем H . Для элементов $\varphi \in D_G$ введем новую норму по формуле: $\|\varphi\|_* = \|G\varphi\|$.

Легко проверить, что эта новая норма превратит линейное многообразие $D(G)$ в некоторое пространство Банаха E_G . В указанных условиях оператор G^{-1} оказывается ограниченным, поэтому сходимость в метрике пространства E_G сильнее, чем сходимость в H . Легко проверить также, что имеют место вложения $E_G \subset H \subset E_G^*$ и что H всюду плотно в E_G . Докажем теперь важное для дальнейшего вспомогательное утверждение

Лемма. Пусть A — произвольный оператор с простым спектром, ag — его порождающий элемент, и пусть оператор G^{-1} является оператором Гильберта — Шмидта, тогда существует зависящее от выбора G множество Λ полной ρ -меры такое, что для всех $\varphi \in D_G$ и $\lambda \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$|T_{\lambda+\tau}(\varphi)| \leq K_{\lambda} \|\varphi\|_*. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $G^{-1} = US$ — полярное представление [11] оператора G^{-1} , тогда известно [11], что

$$G^{-1}\varphi = \sum_{i=1}^{r(s)} \mu_i a_i \omega_i, \quad a_i = (\varphi, \psi_i),$$

где ψ_i — ортонормированная и полная в $D(G)$ система собственных элементов оператора S , соответствующих собственным значениям μ_i , а $\omega_i = U\psi_i$.

В наших условиях очевидно, что $r(s) = \infty$

* Пространство H должно быть всюду плотным в соответствующем сопряженном пространстве.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 < +\infty,$$

а система $\{\psi_i\}$, а также система $\{\omega_i\}$ полны во всем H .

Пусть φ — произвольный элемент из $D(G)$ такой, что $\|\varphi\|_* = 1$, тогда очевидно $\varphi = G^{-1}\psi$, причем $\|\psi\| = 1$, поэтому

$$\sup_{\|\varphi\|_* = 1} |T_z(\varphi)| = \sup_{\|\psi\| = 1} |T_z(G^{-1}\psi)|,$$

откуда будем иметь

$$\sup_{\|\varphi\|_* = 1} |T_z(\varphi)| = \sup_{\{a_k\}} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \gamma_k(t) \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} \right|}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}, \quad (10)$$

где положено $\gamma_k(t) = V\omega_k$, а верхняя грань берется по всевозможным последовательностям таким, что $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 1$. Оценивая числитель справа в соотношении (10) по неравенству Коши-Буняковского, будем иметь

$$\sup_{\|\varphi\|_* = 1} |T_z(\varphi)| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\sum_{(k)} \mu_k^2 |\gamma_k(t)|^2} d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}. \quad (11)$$

Заметим теперь, что ряд

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 |\gamma_k(t)|^2 \quad (12)$$

сходится почти везде по мере ρ и представляет собой функцию $F^2(t)$ из L_ρ . В самом деле, для ряда, полученного путем почленного интегрирования (12), имеем

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_k(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty,$$

поэтому, в силу известной теоремы Лебега об интегрировании монотонных последовательностей функций [12], будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t) d\rho(t) = \sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty,$$

тогда, поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(t) = 1$, то $F(t)$ также принадлежит L_p . Таким образом, неравенство (11) мы можем переписать в виде

$$\sup_{\|\varphi\|_0=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}, \quad (13)$$

где $F(t)$, как было доказано выше, суммируема по мере ρ . Изменяя, если это потребуется, функцию $F(t)$ на множестве ρ -меры нуль и пользуясь теоремой 1, мы заключаем, что существует множество Λ_F полной ρ -меры такое, что предел правой части (13) при $\tau \rightarrow +0$ конечен и равен $F(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda_F$.

Таким образом, с одной стороны, при каждом $\lambda \in \Lambda_F$ существует такое $\tau_0(\lambda) > 0$, что

$$\sup_{\|\varphi\|_0=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq F(\lambda) + 1, \quad 0 < \tau \leq \tau_0(\lambda),$$

с другой стороны

$$\sup_{\|\varphi\|_0=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq \frac{1}{\tau_0^2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| d\rho(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} = \bar{F}(\lambda), \quad \tau_0(\lambda) \leq \tau \leq 1,$$

поэтому справедливо неравенство

$$\sup_{\|\varphi\|_0=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq K_\lambda, \quad 0 < \tau \leq 1,$$

где $K_\lambda = \max \{1 + F(\lambda); \bar{F}(\lambda)\}$.

Полезно заметить, что функционалы T_z , будучи ограниченными в H при каждом не вещественном z , по теореме Рисса представимы в виде $T_z(\varphi) = (\varphi, h_z)$, где $h_z \in H$, однако, как легко убедиться, нормы h_z для $\lambda \in S_i^*(A)$ могут быть ограничены при $\tau \rightarrow 0$ только в том случае, когда точка λ принадлежит точечному спектру оператора A , т. е. в случае, когда λ есть точка разрыва E_λ . Однако, как это следует из доказанной выше леммы, если рассматривать функционалы $T_{\lambda+i\tau}$ как элементы из E_σ^* , то их нормы оказываются ограниченными константой K_λ , не зависящей от τ для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ за исключением, быть может, некоторого множества нулевой ρ -меры, независимо от характера спектра.

Теперь уже мы в состоянии построить полную систему собственных функционалов рассматриваемого оператора A путем продолжения построенных выше функционалов T_λ , определенных на многообразии Ω , состоящем лишь из некоторого счетного множества элементов.

В самом деле, если полагать, что совокупность Ω состоит из элементов, принадлежащих $D(G)$, то из доказанной выше леммы непосредственно следует, что упомянутые функционалы $T_\lambda(\varphi)$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ ограничены в топологии пространства E_G и поэтому они однозначно продолжимы по непрерывности на замыкание Ω в пространстве E_G , которое будет совпадать со всем пространством E_G .

Полученные после такого продолжения функционалы, которые очевидно также будут принадлежать E_G^* , мы будем продолжать обозначать через $T_\lambda(\varphi)$.

Пусть теперь для некоторого $\varphi_0 \in E_G$ известно, что $T_\lambda(\varphi_0) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и докажем, что φ_0 — нулевой элемент. В самом деле, пусть u_k — последовательность из Ω , стремящаяся к φ_0 в метрике E_G , а, следовательно, и в метрике H .

Тогда очевидно $u_k \rightarrow \varphi_0$ в метрике L^2 , поэтому существует подпоследовательность u_{k_n} такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = \varphi_0$ почти всюду по мере ρ . С другой стороны, по определению $T_\lambda(\varphi_0)$ будем иметь

$$T_\lambda(\varphi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(u_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = \varphi_0,$$

откуда $\varphi_0 = 0$ почти всюду по мере ρ и, следовательно, $\varphi_0 = \theta$. Таким образом, построенная совокупность функционалов $\{T_\lambda \in E_G^*, \lambda \in \Lambda\}$ образует полную систему. Также просто убедиться в справедливости разложения

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(f) \overline{T_\lambda(\varphi)} d\rho(\lambda), \quad f, \varphi \in E_G. \quad (14)$$

В самом деле, для всех $f, \varphi \in H$ по основной спектральной теореме имеем

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \overline{\Phi(\lambda)} d\rho(\lambda), \quad F(\lambda) = Vf, \quad \Phi(\lambda) = V\varphi,$$

с другой стороны, как это было только что доказано, для всех $\varphi \in E_G$ $V\varphi$ совпадает с $T_\lambda(\varphi)$ почти всюду по мере ρ .

Предположим теперь, что многообразие $D(G) \cap D(A)$ всюду плотно в пространстве H и инвариантно относительно оператора A , тогда легко видеть, что соотношение (8) будет иметь место для всех $\varphi \in D(G) \cap D(A)$. Таким образом, нами доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть A — произвольный самосопряженный оператор с простым спектром, тогда, при сделанных выше предположениях относительно оператора A , построенные выше функционалы $T_\lambda(\varphi)$ непрерывны в топологии пространства E_G , образуют полную систему собственных функционалов оператора A , и имеет место следующая формула разложения:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\lambda}(f) \overline{T_{\lambda}(\varphi)} d\rho(\lambda),$$

справедливая для всех f и φ из $D(G)$.

Замечание. В том случае, когда спектр оператора A , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H , не является простым, пространство H , как известно, может быть представлено в виде ортогональной суммы таких, инвариантных относительно A , подпространств H_k , в каждом из которых его спектр простой.

Пусть g_k — порождающий элемент, соответствующий подпространству H_k , тогда, поступая так же как и в случае простого спектра и отправляясь от формул

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}, R_{\lambda+i\tau} g_k)}{\|R_{\lambda+i\tau} g_k\|^2} = T_{\lambda}^{(k)}(\varphi) \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

мы можем построить полную систему собственных функционалов $T_{\lambda}^{(k)}(\varphi)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) для случая общих операторов с произвольным спектром, причем так, чтобы все эти функционалы были непрерывны в топологии пространства E_G и имела место формула разложения

$$(f, \varphi) = \sum_{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\lambda}^{(k)}(f) \overline{T_{\lambda}^{(k)}(\varphi)} d\rho_k(\lambda),$$

где $\rho_k(\lambda) = \|E_{\lambda} g_k\|^2$.

4°. В этом пункте мы покажем, что из доказанной выше теоремы 1 вытекает новая формула обращения, представляющая собой обобщение известной формулы обращения для интегралов типа Коши.

Пусть $\rho(t)$ — фиксированная неубывающая функция с ограниченным изменением на всей вещественной оси, и пусть B_{ρ} — класс функций $F(z)$, регулярных вне вещественной оси (а также во всех точках постоянства функции $\rho(t)$) и представимых интегралом типа Коши — Лебега — Стильтьеса, т. е. в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) d\rho(t)}{t-z},$$

где функция $f(t)$ вещественна и суммируема на всей оси по мере ρ .

Оказывается, что значения функции $F(z)$ восстанавливают значения плотности $f(t)$ с помощью следующей формулы обращения:

$$f(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{F(\lambda + i\tau) - F(\lambda - i\tau)}{G(\lambda + i\tau) - G(\lambda - i\tau)}, \quad (15)$$

которая справедлива почти для всех λ по мере ρ и где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{t-z}.$$

В самом деле, легко видеть, что

$$\frac{F(\lambda + i\tau) - F(\lambda - i\tau)}{G(\lambda + i\tau) - G(\lambda - i\tau)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\varphi(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}},$$

и поэтому, в силу теоремы 1, это отношение стремится к $f(\lambda)$ почти всюду по мере ρ .

В частном случае, когда $\rho(t) \equiv t$ при $|t| < 1$ и постоянна вне этого интервала (так однако, чтобы быть непрерывной на концах), $G(\lambda + i\tau) - G(\lambda - i\tau) \equiv 1$, и формула (15) превращается в известную формулу обращения интеграла типа Коши.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 6.XII.1967

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻԱՆ, Ռ. Ջ. ՄԿՐՏԻՉԻԱՆ

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼՆԵՐԻ
ԼՐԻՎ ՍԻՍՏԵՄԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՅԻ
ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հորվածում ապացուցված է, որ (1) բանաձևը տալիս է (բոլոր $\varphi \in H$ համար) A կամայական, պարզ և անընդհատ սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորի համապատասխանող V իզոմետրիկ օպերատորի ներկայացումը: ապացուցված է նաև (9) անհավասարությունը, որտեղից բխում է T_λ սեփական ֆունկցիոնալների անընդհատությունը $\|\cdot\|$ նորմայով:

Ստացված է նաև նոր շրջման բանաձև (15) Կոշու-Լեբեգի-Ստիլտյեսի տիպի ինտեգրալների համար:

R. A. ALEXANDRIAN, R. Z. MKRTICHIAN

ON THE CONSTRUCTION OF COMPLETE SYSTEM OF EIGENFUNCTIONALS OF ARBITRARY SELF-ADJOINT OPERATOR AND ITS STRUCTURE INVESTIGATION

S u m m a r y

It is proved that the formula (1) gives (for all $\varphi \in H$) the representation of the isometric operator V associated with the arbitrary self-adjoint operator A with simple and continuous spectrum. The inequality (9) which implies the continuity of eigenfunctionals in respect to the norm $\|\cdot\|$ is established.

Besides, the new inversion formula for integrals of Cauchy—Lebesgue—Stiltjes type is derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Александрян. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, 1, 1965, 11—14.
2. Ю. М. Березанский. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ, 11, 1, 1959, 16—24.
3. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд. "Наукова думка", Киев, 1965.
4. Г. И. Кац. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, ДАН СССР, 119, 1, 1958, 19—22.
5. Г. И. Кац. Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства, УМЖ, 13, 4, 1961, 13—33.
6. К. Maurin. Math. Scand, 9, 1961, 359—371.
7. К. Морен. Методы гильбертова пространства, Изд. "Мир", Москва, 1965.
8. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН АрмССР, "Математика", 1, 1, 1966, 25—34.
9. Г. Е. Шилов, Б. А. Гуревич. Интеграл, мера и производная, Изд. "Наука", Москва, 1967.
10. Р. А. Александрян. Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговским спектром, ДАН АрмССР, 11, 5, 1965, 257—263.
11. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. "Наука". 1965.
12. С. Сакс. Теория интеграла, Изд. иностранной литературы, Москва, 1949, стр. 48.

Л. Ш. АГАБАБЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В в е д е н и е

Задача Коши для гиперболического уравнения с данными на линии параболического вырождения изучалась лишь в случае уравнения второго порядка. Результаты, полученные в этом направлении, мы охарактеризуем на примере простейшей задачи Коши на плоскости

$$-u_{yy} + \Delta^2(y) u_{xx} = au_x + bu_y + cu + f, \quad (0.1)$$

$$(y > 0)$$

$$u(x, +0) = 0, \quad u_y(x, +0) = 0, \quad (0.2)$$

где

$$\inf u(x, y) > 0; \quad \Delta(y) > 0 \quad (y > 0); \quad \Delta(+0) = 0; \quad \Delta'(y) \geq 0,$$

а коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ — достаточно гладкие функции. Первый общий результат, принадлежащий Проттеру [1] гласит, что задача (0.1) — (0.2) корректна в классическом смысле, если при $y \rightarrow +0^*$

$$a^*(y) = \max_x |a(x, y)| = \frac{\Delta(y)}{y} o(1). \quad (0.3)$$

Затем, при $\Delta(y) = y^\alpha$ ($\alpha > 1$), были получены более точные критерии корректности, и, в частности, замечено, что повышенная гладкость параметров задачи по переменному x позволяет накладывать меньше ограничений на скорость убывания коэффициента $a(x, y)$ (см. библиографию в [2]).

Известно, что задача (0.1) — (0.2) сводится к системе интегральных уравнений. Метод решения этой системы, предложенный в работе [3], позволил уточнить и обобщить все известные ранее критерии (см. [2]).

В частности, из результатов работы [2] следует, что задача (0.1) — (0.2) корректна в классическом смысле, если при некотором $p > 0$

$$\int_0^y t^{p+2} \Delta(t)^r \exp \left\{ \int_t^y \frac{a^*(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau \right\} dt < +\infty \quad (0.4)$$

и все параметры задачи дифференцируемы по x достаточное число

* Следует отметить, что доказательство критерия (0.3) в работе [1] проходит лишь в случае степенного убывания функции $\Delta(y)$.

раз. Таким образом, оказывается, что задача (0.1) — (0.2) корректна, если при $y \rightarrow +0$, $a^*(y) = O(\Delta'(y))^*$.

В случае вырождающихся гиперболических уравнений порядка выше второго, насколько нам известно, аналогичные вопросы не рассматривались. В предлагаемой работе методом работы [3] исследуется корректность задачи Коши для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка с данными на линии вырождения. В частности, оказывается, что в случае модельного уравнения

$$-u_{yyy} + \Delta^2(y) u_{xx} = a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + g(x, y) u + f(x, y), \quad (0.5)$$

где

$$\Delta(y) > 0 \quad (y > 0), \quad \Delta(+0) = 0, \quad \Delta'(y) > 0$$

соответствующая задача корректна, если

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| &\leq \text{const } \Delta(y) \Delta'(y) \\ |b(x, y)| &\leq \text{const } \Delta'(y) \\ |d(x, y)| &\leq \text{const } \frac{\Delta'(y)}{y} \end{aligned} \right\} \quad (0.6)$$

и все параметры достаточно гладки по x .

Предлагаемый метод позволяет исследовать задачу Коши для более общих уравнений и даже для довольно широкого класса вырождающихся гиперболических систем произвольного порядка (см. § 5).

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим гиперболический дифференциальный оператор третьего порядка

$$L[u] = u_{yyy} + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) u_{xy} + (\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_3) u_{xx} + \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 u_{xxx} \quad (y > 0), \quad (1.1)$$

где

$$\Delta_i = \Delta_i(y), \quad \Delta_i(+0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Изучается задача Коши с данными на линии вырождения

$$L[u] = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu + f, \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad u_y(x, 0) = \mu_2(x), \quad u_{yy}(x, 0) = \mu_3(x) \quad (0 \leq x \leq 1; y > 0). \quad (1.4)$$

Характеристики определяются из равенств

$$dx = -\Delta_i dy \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Не нарушая общности, можно считать, что одна из характеристик параллельна оси y . Пусть, например, $\Delta_3(y) = 0$. Решение ищется в открытом характеристическом треугольнике D , ограниченном соответствующими характеристиками из семейства

$$\xi = x - \int_y^0 \Delta_i(t) dt \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

и отрезком оси x .

* В многомерном случае наиболее общие результаты получены О. А. Олейник [4] (см. также [5] и [6]).

Основным результатом настоящей работы является теорема существования и единственности решения задачи (1.3) — (1.4), подробно доказанная для случая, когда

$$\Delta_1(y) = -\Delta_2(y) = \Delta(y). \quad (1.7)$$

Теорема 1. Пусть в D функция $f(x, y)$ дифференцируема по x $2p+4$ раза, функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $e(x, y)$, $g(x, y)$ дифференцируемы по x $2p+2$ раза, функции $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ дифференцируемы $2p+5$ раз, $\Delta(y)$ дважды дифференцируема в $\bar{D}$ по y и $\Delta'(y) > 0$.

Пусть, кроме того

$$|a(x, y)| \leq a_0 \Delta(y) \Delta'(y), \quad (1.8)$$

$$|b(x, y)| \leq b_0 \Delta'(y), \quad (1.9)$$

$$|d(x, y)| \leq d_0 \frac{\Delta'(y)}{y}, \quad (1.10)$$

где $a_0, b_0, d_0 = \text{const}$, а функции $c(x, y)$, $e(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по y в промежутке $0 < y < y_0$. Тогда, если

$$p > [2a_0 + 2b_0 + 2d_0] + 2, \quad (1.11)$$

то существует единственное решение задачи (1.3) — (1.4), обладающее непрерывными в $\bar{D}$ производными $\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i}$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $i \leq k \leq p+3$).

Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i , μ_{1i} , μ_{2i} , μ_{3i} соответствуют решения u_i ($i = 1, 2$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=0}^{2p+4} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^{2p+5} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mu_{1i} - \mu_{12}) \right| < \delta \quad (1.12)$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{k=i}^{p+3} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (u_1 - u_2) \right| < \varepsilon. \quad (1.13)$$

§ 2. Сведение к системе интегральных уравнений

Прежде всего заметим, что, без ограничения общности, можно считать условия (1.4) однородными. Действительно, если

$$u(x, +0) = u_y(x, +0) = u_{yy}(x, +0) = 0 \quad (2.1)$$

и $u(x, y)$ есть решение задачи (1.3) — (1.4), то функция

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) - \mu_1(x) - y\mu_2(x) - \frac{1}{2}y^2\mu_3(x)$$

является решением задачи (1.3) — (2.1) с измененной правой частью.

Обозначая правую часть уравнения (1.3) через $F \equiv F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$, перепишем его в трех эквивалентных формах

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\Delta_1^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial u}{\partial y} &= F + \Delta_2' u_{xy}, \\ \sqrt{1+\Delta_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \sqrt{1+\Delta_1^2} \frac{\partial u}{\partial s_1} &= F + \Delta_2 \Delta_1' u_{xx} + 2\Delta_1' u_{xy} + \Delta_1'' u_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1+\Delta_1^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta_2^2} \frac{\partial u}{\partial s_2} &= F + (\Delta_1 \Delta_2)' u_{xx} + (2\Delta_2' + \Delta_1'') u_{xy} + \Delta_2'' u_x. \end{aligned}$$

Здесь использованы очевидные соотношения

$$\sqrt{1+\Delta_i^2} \frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta_i \frac{\partial u}{\partial x} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

а через s_1, s_2 обозначены составляющие с осью y острый угол направления характеристик (1.5).

Как было замечено выше основные результаты относятся к случаю (1.7). Принимая это во внимание, будем иметь

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{l_1} \{F - \Delta' u_{xy}\} dy, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial u}{\partial s_1} &= \int_{l_2} \{F - \Delta \Delta' u_{xx} + 2\Delta' u_{xy} + \Delta'' u_x\} dy, \\ \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial u}{\partial s_2} &= \int_{l_3} \{F - (\Delta^2)' u_{xx} - \Delta' u_{xy} - \Delta'' u_x\} dy. \end{aligned}$$

Используя формулы (2.2), получим

$$\begin{aligned} -\Delta^2 u_{xx} + u_{yy} &= \int_{l_2} \{[a - (\Delta^2)'] u_{xx} + b u_{xy} + d u_x + c u_{yy} + \\ &\quad + e u_y + g u + f\} dy, \\ \Delta u_{xy} + u_{yy} &= \int_{l_3} \{a u_{xx} + (b + \Delta') u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + g u + f\} dy, \\ -\Delta u_{xy} + u_{yy} &= \int_{l_1} \{a u_{xx} + (b - \Delta') u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + g u + f\} dy. \end{aligned}$$

После очевидных преобразований, обозначая

$$u_{xx} = V_1, u_{xy} = V_2, u_{yy} = V_3, \quad (2.3)$$

придем к системе

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 V_1 &= \int_{l_1} \{a V_1 + (b - \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + \\ &\quad + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f\} dy_1 + \int_{l_2} \{a V_1 + (b + \Delta') V_2 + c V_3 + \end{aligned}$$

$$+ d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1 - 2 \int_{l_1} \{ [a -$$

$$(2.4)$$

$$-(\Delta^2)'] V_1 + b V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1,$$

$$2\Delta V_2 = \int_{l_1} \{ a V_1 + (b + \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt +$$

$$+ g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1 - \int_{l_1} \{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt +$$

$$+ e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1, \quad (2.5)$$

$$2V_3 = \int_{l_1} \{ a V_1 + (b + \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt +$$

$$+ g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1 + \int_{l_1} \{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + c V_3 +$$

$$+ d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1. \quad (2.6)$$

Таким образом, если существует непрерывно дифференцируемое в D решение $u(x, y)$ задачи (1.3) — (2.1), то оно восстанавливается из некоторого решения системы (2.4), (2.5), (2.6) по формуле

$$u(x, y) = \int_0^y V_3(x, t) (y - t) dt. \quad (2.7)$$

Система (2.4), (2.5), (2.6), вообще говоря, не эквивалентна задаче (1.3) — (2.1). Действительно, пусть все коэффициенты правой части уравнения (1.3), кроме a , равны нулю, а коэффициент a зависит только от y . Тогда легко видеть, что одним из решений системы (2.4), (2.5), (2.6) будет

$$V_1 = 1, \quad V_2 = 1, \quad V_3 = \int_0^y a(t) dt,$$

хотя функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^y a(t) (y - t)^2 dt$$

при $a \neq 0$ не является решением уравнения (1.3).

Нужное решение выделяет следующая

Лемма 1. Пусть система (2.4), (2.5), (2.6) имеет непрерывно дифференцируемое в $\bar{D}$ решение $\{V_1, V_2, V_3\}$, причем

$$V_1(x, 0) = 0, \quad V_2(x, 0) = 0,$$

а V_3 дважды дифференцируема по x . Если, кроме того

$$\int_0^y |V_3(x, y)]_x dy < +\infty,$$

$$\int_0^y |V_2(x, y)]_x dy < +\infty,$$

$$\int_0^y |V_3(x, y)]_{xx} dy < +\infty,$$

то функция $u(x, y)$, восстанавливаемая по формуле (2.7), является решением задачи (1.3)–(2.1).

Доказательство. Из системы (2.4), (2.5), (2.6) имеем

$$\sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (V_3 + \Delta V_2) - \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_1} (V_3 - \Delta V_2) = 2\Delta' V_2,$$

с другой стороны, согласно (2.2), это выражение записывается в виде

$$2(\Delta V_2)_y - 2\Delta V_{3x},$$

откуда $V_{2y} = V_{3x}$.

Интегрируя это тождество и имея в виду, что $V_2(x, 0) = 0$, получим

$$V_2 = \int_0^y V_{3x} dy.$$

Таким образом, функция

$$u^* = \int_0^y V_3(y-t) dt$$

дифференцируема по x и y и $u^*(x, y)_{xy} = V_2$. Аналогично, из системы (2.4), (2.5), (2.6) получим

$$V_1 = \int_0^y V_{2x} dy = \int_0^y \int_0^y V_{3xx}(y-t) dt,$$

то есть функция $u^*(x, y)$ дважды дифференцируема по x и $u^*_{xx} = V_1$. Так как, очевидно

$$u^*_{yy} = V_3(x, y)$$

то, согласно (2.2),

$$\sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial y} u^*(x, y) = u^*_{yy} - \Delta u^*_{xy} = V_3 - \Delta V_2,$$

откуда, согласно (2.4), (2.5) и (2.6), получим

$$\sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial y} u^*(x, y) = t - \Delta' u_{xy}^*,$$

где

$$F = F(x, y, u^*, u_x^*, u_y^*, u_{xx}^*, u_{xy}^*, u_{yy}^*).$$

Лемма доказана, так как, очевидно

$$u^*(x, 0) = u_y^*(x, 0) = u_{yy}^*(x, 0) = 0,$$

а $u^*(x, y)$ удовлетворяет уравнению (3).

§ 3. Вспомогательные предложения

В этом параграфе будут сделаны некоторые замечания, используемые в дальнейшем.

Пусть $\varphi(x, y)$ — произвольная непрерывная в D функция двух переменных. Обозначим

$$\varphi^*(y) = \max_x |\varphi(x, y)|. \quad (3.1)$$

Этим обозначением мы будем регулярно пользоваться.

1°. Для простоты дальнейшего изложения будем считать, что коэффициенты $c(x, y)$, $e(x, y)$ и $g(x, y)$ равны нулю. Этим система (2.4), (2.5), (2.6) сведется к системе двух уравнений, для которой и будет доказано существование и единственность решения. Коэффициенты c, e и g не играют роли в вопросах существования и единственности решения системы (2.4), (2.5), (2.6). Действительно, из (2.6) имеем

$$2V_3 = \int_{l_1+l_2} c V_3 dy + \int_{l_1+l_2} \left\{ e \int_0^{y_1} V_3 dt \right\} dy_1 + \int_{l_1+l_2} \left\{ g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt \right\} dy_1 + F_1. \quad (3.2)$$

Отсюда, пользуясь обозначением (3.1), получим

$$2V_3^* \leq 2 \int_0^y [c^*(s) + \int_s^y e^*(t) dt + \int_s^y g^*(t)(t-s) dt] V_3^*(s) ds + F_1, \quad (3.3)$$

откуда видно, что для разрешимости (3.2) относительно V_3 достаточно, чтобы функции $c^*(y)$, $e^*(y)$, $g^*(y)$, F_1 были интегрируемы. Относительно условий, налагаемых на функцию F_1 , или, что то же самое, на коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $d(x, y)$ и $f(x, y)$, было сказано в теореме 1.

Таким образом, при сделанных предположениях, из существования и единственности решения системы

$$2\Delta^2 V_1 = \int_{l_1} \{a V_1 + (b - \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f\} dy_1 + \int_{l_2} \{a V_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + (b + \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1 - 2 \int_{l_n}^{\infty} \{ [a - (\Delta^2)'] V_1 + b V_2 + \\
& \quad + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Delta V_2 = & \int_{l_n}^{\infty} \{ a V_1 + (b + \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1 - \\
& - \int_{l_n}^{\infty} \{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

удовлетворяющего условиям леммы 1, автоматически следует существование и единственность решения задачи (1.3) — (2.1).

2°. Приведем некоторые простые соображения (см. [3]), играющие в дальнейшем важную роль.

Пусть дано уравнение

$$u(y) = \int_0^y K(t) u(t) dt + f(y) \quad (0 < y \leq y_0), \quad (3.6)$$

где функции K и f непрерывны при $y > 0$ и

$$\int_0^{y_0} K(t) dt = +\infty. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) не всегда имеет решение (например, при $f \equiv 1$ и $K(y) > 0$). С другой стороны, если $K(y) \geq 0$, то функция

$$u_0(y) = \exp \left\{ - \int_0^y K(t) dt \right\} \quad (3.8)$$

является, очевидно, непрерывным, ненулевым решением однородного уравнения. Если функция $f(y)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{y_0} \frac{K(t) f(t)}{u_0(t)} dt < +\infty, \quad (3.9)$$

то единственным непрерывным решением уравнения (3.6) будет функция

$$u(y) = f(y) + u_0(y) \int_0^y \frac{K(t) f(t)}{u_0(t)} dt = u_0(y) \int_0^y \frac{f'(t)}{u_0(t)} dt, \quad (3.10)$$

причем правая часть этой формулы соответствует дифференцируемой функции f . Это решение удовлетворяет условию

$$\int_0^y \frac{u(t)}{u_0(t)} dt < +\infty. \quad (3.11)$$

Формула (3.10), соответствующим образом преобразованная, будет в дальнейшем неоднократно применена.

3°. Следующее замечание касается схемы последовательных приближений.

Для решения системы (3.4), (3.5) будем строить следующие приближения:

$$\begin{aligned}
 2\Delta^2 V_1^n = & \int_{I_2} 2(\Delta^2)' V_1^n dy + \int_{I_2-I_1} \Delta' V_2^{n-1} dy + \int_{I_1-I_2} \left\{ a V_1^{n-1} + \right. \\
 & + b V_2^{n-1} + d \int_0^{y_1} V_2^{n-1} dt + f \left. \right\} dy_1 + \int_{I_2-I_2} \left\{ a V_1^{n-1} + b V_2^{n-1} + d \int_0^{y_1} V_2^{n-1} \times \right. \\
 & \left. \times dt + f \right\} dy_1, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\Delta V_2^n = & 2 \int_{I_2} \Delta' V_2^n dy + \int_{I_2-I_1} \left\{ a V_1^{n-1} + (b - \Delta') V_2^{n-1} + d \int_0^{y_1} V_2^{n-1} dt + \right. \\
 & \left. + f \right\} dy_1, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} V_1^0 &= V_2^0 = 0, \\ V_1^1 &= \int_{I_1-I_2} f(x, y) dy + \int_{I_2-I_1} f(x, y) dy \\ V_2^1 &= \int_{I_2-I_1} f(x, y) dy \end{aligned} \right\}. \quad (3.14)$$

Обозначая

$$V_1^n - V_1^{n-1} = \varepsilon_n, \quad V_2^n - V_2^{n-1} = \lambda_n,$$

из (3.12) и (3.13) получим

$$\begin{aligned}
 2\Delta^2 \varepsilon_n = & \int_{I_2} 2(\Delta^2)' \varepsilon_n dy + \int_{I_2-I_1} \Delta' \lambda_{n-1} dy + \int_{I_1-I_2} \left\{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + \right. \\
 & + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \left. \right\} dy_1 + \int_{I_2-I_2} \left\{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \right\} dy_1, \\
 2\Delta \lambda_n = & 2 \int_{I_2} \Delta' \lambda_n dy + \int_{I_2-I_1} a \varepsilon_{n-1} + (b - \Delta') \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \left. \right\} dy_1.
 \end{aligned}$$

При непосредственной оценке ε_n и λ_n получаются расходящиеся интегралы. Для преодоления этой трудности поступим следующим образом: из (3.4) и (3.5), используя (3.10) и делая очевидные преобразования, формально получим

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{l_2}^{\frac{1}{\Delta}} \left\{ \int_{l_2-l_1} [\Delta' \lambda_n + a \varepsilon_n + b \lambda_n + d \int_0^{y_1} \lambda_n dt]_x dy_1 \right\} dy, \quad (3.15)$$

$$\lambda_n = \int_{l_1} \left\{ \int_{l_1} [a \varepsilon_{n-1} + (b - \Delta') \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt]_x dy_1 \right\} dy, \quad (3.16)$$

где*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy - \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy \\ \lambda_1 &= \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy + \int_{D_2} f_x(x, y) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Из формул (3.15), (3.16) и (3.17) видно, что ε_1 и λ_1 имеют при $y \rightarrow 0$ порядок малости $\Delta(y) \cdot y^2$ (чего не достаточно для сходимости). Но если функция $f(x, y)$ имеет достаточное число производных по x , то можно ожидать, что на некотором шагу порядок малости ε_n и λ_n будет уже достаточным для сходимости рядов $\Sigma \varepsilon_n$ и $\Sigma \lambda_n$. Точная оценка ε_n и λ_n , а также условия, налагаемые на a, b, d и f , будут даны в следующем параграфе.

§ 4. Последовательные приближения

Для решения системы (3.4), (3.5) применим схему (3.12) — (3.14). Обозначим

$$V_1^n - V_1^{n-1} = \varepsilon_n; \quad V_2^n - V_2^{n-1} = \lambda_n. \quad (4.1)$$

Наложим на коэффициенты a, b и d следующие ограничения

$$\left. \begin{aligned} a^*(y) &\leq a_0 \Delta(y) \Delta'(y) \\ b^*(y) &\leq b_0 \Delta'(y) \\ d^*(y) &\leq d_0 \frac{\Delta'(y)}{y} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

(a_0, b_0, d_0 — постоянные, $y > 0$, $\Delta'(y) > 0$).

1°. Теорема существования. Из системы (3.12) — (3.14) имеем

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 \varepsilon_n &= \int_{l_2} 2(\Delta^2)' \varepsilon_n dy + \int_{l_2-l_1} \Delta' \lambda_{n-1} dy + \int_{l_1-l_2} \{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + \\ &+ d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \} dy_1 + \int_{l_2-l_2} \{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \} dy_1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$2\Delta \lambda_n = 2 \int_{l_2} \Delta' \lambda_n dy + \int_{l_2-l_1} \{ a \varepsilon_{n-1} + (b - \Delta') \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \} dy_1. \quad (4.4)$$

* D_1 и D_2 — характеристические треугольники, ограниченные соответственно, кривыми l_1, l_3 и осью x и l_2, l_3 и осью x .

Принимая во внимание замечание п. 3° § 3, из (3.15), (3.16) и (3.17) получим

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{1x}| &= \left| \iint_{D_1} f_{xx}(x, y) dx dy - \iint_{D_1} f_{xx}(x, y) dx dy \right| \leq \\ &\leq 2M \int_0^y \Delta(s)(y-s) ds \leq M\Delta(y)y^2, \end{aligned}$$

$$|\lambda_{1x}| = \left| \iint_{D_1+D_2} f_{xx}(x, y) dx dy \right| \leq M\Delta(y)y^2,$$

$$\varepsilon_{p+1} \leq \text{const } \Delta^p(y) y^{2p+2}; \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.5)$$

$$\lambda_{p+1} \leq \text{const } \Delta^p(y) y^{2p+2}; \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

при условии, что $f(x, y)$ дифференцируема по x $p+1$ раз, а коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ дифференцируемы по x p раз.

Далее, разрешая систему (4.3), (4.4) относительно ε_n и λ_n и подставляя оценки (4.2), будем иметь

$$\varepsilon_n^* \leq \int_0^y 2a_0 \frac{\Delta'}{\Delta} \varepsilon_{n-1}^* dt + \int_0^y (2b_0 + 2d_0 + 1) \frac{\Delta'}{\Delta^2} \lambda_{n-1}^* dt \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (4.7)$$

$$\lambda_n^* \leq \int_0^y a_0 \Delta' \varepsilon_{n-1}^* dt + \int_0^y (b_0 + d_0 + 1) \frac{\Delta'}{\Delta} \lambda_{n-1}^* dt \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.8)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0^*(y) &\leq R_1 \Delta^p(y) y^{2p+2} \\ \lambda_0^*(y) &\leq R_1 \Delta^p(y) y^{2p+2} \\ (R_1 - \text{постоянная}) \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Покажем, что ε_n^* и λ_n^* удовлетворяют оценкам

$$\varepsilon_n^* \leq \frac{R_1 M_1^n}{n!} \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt, \quad (4.10)$$

$$\lambda_n^* \leq \frac{R_1 M_2^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt \quad (4.11)$$

(M_1 и M_2 — некоторые постоянные, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Для $n = 0$ из (4.10) и (4.11) следует оценка (4.9). Применяя полную индукцию, из (4.7) и (4.8) получим

$$\varepsilon_{n+1}^* \leq \int_0^y 2a_0 \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left\{ \frac{R_1 M_1^n}{n!} \int_0^t \Delta^p(s) s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \left[\ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(s)} \right]^n ds \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times dt + \int_0^y (2b_0 + 2d_0 + 1) \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left\{ \frac{R_1 M_2^n}{n!} \Delta(t) \int_0^t \Delta^p(s) s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \times \right. \\ & \times \left[\ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(s)} \right]^n ds \Big\} dt = \frac{R_1 [2M_1^n a_0 + M_2^n (2b_0 + 2d_0 + 1)]}{(n+1)!} \int_0^y \Delta^p(s) \times \\ & \times s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(s)} \right]^{n+1} ds. \end{aligned}$$

Аналогично, для λ_{n+1}^* имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^* & \leq \frac{R_1 [M_1^n a_0 + M_2^n (b_0 + d_0 + 1)]}{(n+1)!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(s) s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \times \\ & \times \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(s)} \right]^{n+1} ds. \end{aligned}$$

Для выполнения оценок (4.10) и (4.11) достаточно положить

$$M_1 = M_2 = R_2 = 2a_0 + 2b_0 + 2d_0 + 1. \quad (4.12)$$

Окончательно имеем

$$\varepsilon_n^* \leq \frac{R_1 R_2^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt, \quad (4.13)$$

$$\lambda_n^* \leq \frac{R_1 R_2^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt. \quad (4.14)$$

Суммируя ε_n^* и λ_n^* , получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^* \leq R_1 \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^{R_1} dt, \quad (4.15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^* \leq R_1 \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^{R_2} dt. \quad (4.16)$$

Для сходимости интегралов в правой части этих неравенств достаточно условие $p \geq [R_2] + 1$ или

$$p \geq [2a_0 + 2b_0 + 2d_0] + 2. \quad (4.17)$$

При выполнении этого условия ряды (4.15), (4.16) сходятся к предельным функциям $V_1^*(y)$ и $V_2^*(y)$ равномерно, причем $V_1^*(0) = 0$, $V_2^*(0) = 0$. Кроме того, как легко видеть, решение $V_1(x, y)$, $V_2(x, y)$ системы (3.4), (3.5) удовлетворяет всем условиям леммы 1. Таким образом, доказана следующая

Теорема существования. Пусть функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $e(x, y)$ и $g(x, y)$ дифференцируемы в $\bar{D}$ по x p раз,

функция $f(x, y)$ дифференцируема в $\bar{D}$ по x $p+1$ раз, а функции $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ дифференцируемы в $\bar{D}$ $p+3$ раза. Пусть, кроме того, имеют место условия (4.2) и (4.17). Тогда задача (1.3)–(1.4) имеет в $\bar{D}$ решение $u(x, y)$, которое дважды непрерывно дифференцируемо по x и трижды непрерывно дифференцируемо по y .

2°. Теорема единственности. В этом пункте будет показано, что условие дифференцируемости по x решения $V_1(x, y)$, $V_2(x, y)$ системы (3.4), (3.5) $q+1$ раз, а коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ $-p+q$ раз (число q будет уточнено ниже) влечет за собой единственность и устойчивость решения задачи (1.3)–(2.1).

Пусть $\{V_1^0(x, y), V_2^0(x, y)\}$ — решение следующей однородной системы, соответствующей системе (3.4), (3.5) (которое существует согласно теореме существования):

$$2\Delta^2 V_1 = \int_{I_2} 2(\Delta^2)' V_1 dy + \int_{I_2-I_1} \Delta' V_2 dy + \int_{I_1-I_2} \left\{ a V_1 + b V_2 + d \times \right. \\ \left. \times \int_0^{y_1} V_2 dt \right\} dy_1 + \int_{I_2-I_1} \left\{ a V_1 + b V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt \right\} dy_1, \quad (4.18)$$

$$2\Delta V_2 = 2 \int_{I_1} \Delta' V_2 dy + \int_{I_2-I_1} \left\{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt \right\} dy_1. \quad (4.19)$$

Так как система (3.12), (3.13) удовлетворяется при $f(x, y) \equiv 0$ и $V_1^n = V_1^0$, $V_2^n = V_2^0$, то из (3.15) и (3.16) формально будем иметь

$$V_1^0 = \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{I_2-I_1} [\Delta' V_2^0 + a V_1^0 + b V_2^0 + d \int_0^{y_1} V_2^0 dt]_x dy_1 \right\} dy, \\ V_2^0 = \int_{I_2} \left\{ \int_{I_1} a V_1^0 + (b - \Delta') V_2^0 + d \int_0^{y_1} V_2^0 dt \right\}_x dy_1 \Bigg\} dy.$$

Предположим, что V_1^0 и V_2^0 дифференцируемы по x $q+1$ раз, а коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ $-q$ раз. Тогда, составляя для V_1^0 и V_2^0 q -тую итерацию, получим оценки

$$V_1^{0*} \leq \text{const } \Delta^q(y) y^{2q+2},$$

$$V_2^{0*} \leq \text{const } \Delta^q(y) y^{2q+2}.$$

С другой стороны, обозначая

$$2\Delta^2 V_1^0 = \varepsilon, \quad 2\Delta V_2^0 = \lambda,$$

из системы (4.18), (4.19) получим

$$\varepsilon^* \leq \int_0^y \frac{\Delta'}{\Delta} (2a_0 + 2) \varepsilon^* dt + \int_0^y \frac{\Delta'}{\Delta} (2b_0 + 2d_0 + 1) \lambda^* dt,$$

$$\lambda^* \leq \int_0^y \frac{\Delta'}{\Delta} (b_0 + d_0 + 2) \lambda^* dt + \int_0^y a_0 \frac{\Delta'}{\Delta} \varepsilon^* dt.$$

Далее аналогично формулам (4.13), (4.14) получим

$$\varepsilon^* \leq \text{const} \frac{Q^n}{n!} \int_0^y \Delta^q(t) t^{2q+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left| \ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right|^n dt, \quad (4.20)$$

$$\lambda^* \leq \text{const} \frac{Q^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^q(t) t^{2q+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left| \ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right|^n dt \quad (4.21)$$

($n = 0, 1, 2, 3, \dots$),

где

$$Q \leq 2a_0 + 2b_0 + 2d_0 + 3.$$

Пусть теперь

$$q \geq [2a_0 + 2b_0 + 2d_0] + 4. \quad (4.22)$$

Из (4.20), (4.21) видно, что n можно выбрать настолько большим, что ε^* и λ^* будут меньше любого наперед заданного положительного числа, то есть $\varepsilon^* = \lambda^* = 0$. Таким образом, при выполнении условия (4.22) решение задачи (1.3) — (2.1) единственно. Легко видеть, что оно будет устойчивым в следующем смысле: пусть функциям f_1 и f_2 соответствуют решения u_1 и u_2 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=0}^{p+q+2} \max_D \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| < \delta$$

следует, что

$$\sum_{l=0}^3 \sum_{k=l}^{q+3} \max_D \left| \frac{\partial^k}{\partial x^{k-l} \partial y^l} (u_1 - u_2) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема единственности. Пусть решение системы (3.4), (3.5) дифференцируемо по x $q+1$ раз, коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ дифференцируемы по x $p+q$ раз. Тогда, если имеет место условие (4.22), решение задачи (1.3) — (2.1) единственно.

Из теорем существования и единственности следует теорема 1.

§ 5. Некоторые уточнения и обобщения

1°. В случае

$$\Delta(y) = y^\alpha \quad (\alpha > 0) \quad (5.1)$$

теорему 1 можно усилить.

Действительно, в этом случае ряды (4.15) и (4.16) сходятся при $p(\alpha+2)+2 > R_2$ и, следовательно, если из оценки типа (4.2) вытекает

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| &\leq A y^{2\alpha-1} \\ |b(x, y)| &\leq B y^{\alpha-1} \\ |d(x, y)| &\leq C y^{\alpha-2} \end{aligned} \right\}, \quad (5.2)$$

где $A, B, C = \text{const}$, то из условия

$$p > \frac{2(A+B+C)}{\alpha+2} + \frac{\alpha-2}{\alpha+2} \quad (5.3)$$

следует справедливость теоремы 1.

Условие (5.3) гораздо менее ограничительно, чем (1.11). В частности, отсюда следует, что при $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ достаточно потребовать лишь ограниченности коэффициентов a, b и d .

2°. Теорему 1 можно обобщить на случай, когда $\Delta_3(y) \equiv 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(y) &= C_1 \Delta(y)^\alpha \\ \Delta_2(y) &= C_2 \Delta(y)^\beta \quad (\alpha > \beta > 0) \end{aligned} \right\}, \quad (5.4)$$

где $\alpha, \beta, C_1, C_2 = \text{const}$. В этом случае, несущественно видоизменив выкладки §§ 2–4, получим, что если

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| &\leq \text{const } \Delta(y)^{\alpha+\beta-1} \Delta'(y) \\ |b(x, y)| &\leq \text{const } \Delta(y)^{\beta-1} \Delta'(y) \end{aligned} \right\}, \quad (5.5)$$

то теорема 1 верна при соответствующем подборе числа $p > 0$.

Более того, анализ применяемых методов показывает, что характер результатов не изменится, если $\Delta_3 \equiv 0$, Δ_1 и Δ_2 достаточно гладкие функции по x и

$$0 < \text{const} \leq \frac{\ln |\Delta_1(x, y)|}{\ln |\Delta_2(x, y)|} \leq \text{const}. \quad (5.6)$$

3°. При применении методов настоящей работы к исследованию задачи Коши для вырождающихся гиперболических систем произвольного порядка пока еще не преодолены все трудности, имеющие, главным образом, аналитический характер. Однако в одном частном случае схема настоящей работы должна проходить. Именно, пусть рассматривается задача Коши:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y} + \Delta_i(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \sum_{0 \leq j < k < n-1} a_{jk}^*(x, y) \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j}} + f(x, y), \quad (5.7)$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=0} = 0 \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad (5.8)$$

причем функции Δ_i имеют вид

$$\Delta_i(y) = C_i \Delta(y), \quad (5.9)$$

где C_i — действительные постоянные, $C_i \neq C_j$ ($i \neq j$),

$$\Delta(y) > 0 (y > 0), \quad \Delta(+0) = 0, \quad \Delta'(y) > 0.$$

Применением методов §§ 2—4 можно, по-видимому, доказать следующий результат: пусть

$$|a_j^k(x, y)| \leq \text{const } y^{k-n+1} \frac{d}{dy} (\Delta(y)^j). \quad (5.10)$$

Тогда, если все параметры задачи (5.7), (5.8) достаточно гладки по x , то эта задача корректна в классическом смысле.

В частности, если $\Delta(y) = y^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{n-1}$, достаточно потребовать лишь ограниченности коэффициентов a_j^k .

В заключение заметим, что пока еще не ясно, какого типа ограничения должны подвергаться коэффициенты уравнения (5.7) (и, в частности, [1.1], когда Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 произвольны) в общем случае, когда только $\Delta_i(y) \neq \Delta_j(y)$ ($i \neq j$, $y > 0$), а при $y = 0$ некоторые характеристические направления совпадают.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 18.IX.1967

Ереванский государственный армянский
педагогический институт им. Х. Абовяна

Լ. Շ. ԱՂԱՐԱՔՅԱՆ, Ղ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

ԵՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱԾՎՈՂ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԾԱՆ ՀԱՄԱՐ
ԿՈՇՈՒ ԽՆԴԻՒ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթության վրա երրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի կոռեկտությունը, երբ տվյալները պարաբոլական գծի վրա են տրված: Մասնավորաբար

$$-U_{yy} + \Delta^3(y) U_{xy} = aU_{xx} + bU_{xy} + cU_{yy} + dU_x + eU_y + gU + f$$

հավասարման համար (որտեղ $\Delta(y) > 0$ ($y > 0$), $\Delta(+0) = 0$, $\Delta'(y) \geq 0$) ապացուցված է, որ Կոշու խնդիրը կոռեկտ է, եթե գործակիցները և ֆունկցիան բավականաչափ ողորդ են ըստ x -ի և

$$|a(x, y)| \leq \text{const } \Delta(y) \Delta'(y),$$

$$|b(x, y)| \leq \text{const } \Delta'(y),$$

$$|d(x, y)| \leq \text{const } \frac{\Delta'(y)}{y}.$$

L. Sh. AGABABIAN, A. B. NERSESIAN

THE CAUCHY PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION OF THIRD ORDER WITH DATA ON PARABOLIC LINE

Summary

In the present paper the character of correctness of Cauchy problem for hyperbolic differential equation of third order with initial values on the parabolic line is considered. In particular, it is proved that for an equation

$$-U_{yyy} + \Delta^2(y) U_{xy} = a(x, y) U_{xx} + b(x, y) U_{xy} + c(x, y) U_{yy} + d(x, y) U_x + e(x, y) U_y + g(x, y) U + f(x, y),$$

where

$$\Delta(y) > 0 \quad (y > 0), \quad \Delta(+0) = 0, \quad \Delta'(y) > 0$$

the corresponding problem is correct in classic sense, if

$$|a(x, y)| \leq \text{const } \Delta(y) \Delta'(y),$$

$$|b(x, y)| \leq \text{const } \Delta'(y),$$

$$|d(x, y)| \leq \text{const } \frac{\Delta'(y)}{y}$$

and all parameters are sufficiently smooth with respect to x .

ЛИТЕРАТУРА

1. M. H. Protter. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on parabolic line, *Canad. J. Math.*, 6, 4, 1954, 542—553.
2. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *ДАН СССР*, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
3. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *Известия АН АрмССР, "Математика"*, 3, № 2, 1968.
4. О. А. Олейник. Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе, *ДАН СССР*, 169, № 3, 1966.
5. М. М. Смирнов. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, "Наука", М., 1966.
6. С. М. Фатеева. Задача Коши и краевая задача для линейных и квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *ДАН СССР*, 172, № 6, 1967, 1278—1281.

Р. Л. ШАХБАГЯН

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В последнее время появился ряд работ (см. [1], [2]), посвященных построению алгебры, так называемых, псевдодифференциальных операторов, рассматриваемых в евклидовом пространстве R^n . Эта алгебра содержит в себе как дифференциальные операторы с частными производными, так и сингулярные интегральные операторы.

Далее, в цикле работ М. И. Вишика и Г. И. Эскина (см. [3], там же приведены дальнейшие ссылки) развита теория псевдодифференциальных операторов на компактных многообразиях с краем.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости и гладкости некоторых классов псевдодифференциальных операторов в полупространстве.

В § 1 приводятся основные сведения и определения, относящиеся к рассматриваемому классу псевдодифференциальных операторов, а также вводятся классы функциональных пространств, естественно связанных с рассматриваемыми операторами.

В § 2 выделяется некоторый класс псевдодифференциальных операторов, обладающих свойством гладкости в полупространстве.

Третий параграф посвящен построению регуляризатора однородной краевой задачи в полупространстве для псевдодифференциальных операторов, порожденных эллиптическими символами.

§ 1. Определения и обозначения. Функциональные пространства

1°. В пространстве $R_x^n \times \{R_\xi^n / 0\}$ рассмотрим функцию $a(x, \xi)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$), удовлетворяющую следующим условиям:

1) $a(x, \xi)$ — положительно определенная функция относительно ξ , при всех $x \in R^n$, степени α (α — вещественное число), т. е.

$$a(x, t\xi) = t^\alpha a(x, \xi), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad (1.1)$$

$a(x, \xi) \in C^\infty(R_x^n)$ при всех $\xi \in R_\xi^n / 0$;

2) существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x, \xi) = a(\infty, \xi)$, причем $a'(x, \xi) = a(x, \xi) - a(\infty, \xi)$ принадлежит пространству S_x функций, убывающих при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|x|$ равномерно относительно ξ^* .

* Подробнее определение пространства S см., например, [5].

Класс символов $a(x, \xi)$, удовлетворяющих условиям 1), 2), обозначим через O_2 .

Через $\tilde{u}(\xi)$ (или иногда $Fu(\xi)$) будем обозначать преобразование Фурье функции $u(x)$

$$\tilde{u}(\xi) = Fu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-i(x, \xi)} u(x) dx,$$

$$\text{где } (x, \xi) = \sum_{l=1}^n x_l \xi_l.$$

Требование однородности (1.1) несущественно, его можно заменить более общим условием, налагаемым на рост символа $a(x, \xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, именно

$$|a(x, \xi)| \leq C (1 + |\xi|)^\alpha, \quad x \in R^n, \quad (1.1')$$

где C — постоянная.

Как известно [1], псевдодифференциальным оператором, определенном во всем пространстве и канонически построенном по символу $a(x, \xi)$, называется оператор

$$Au = F_{x \rightarrow \xi}^{-1} a(x, \xi) F_{\xi \rightarrow x} u = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} \zeta(\xi) a(x, \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi, \quad (1.2)$$

где $\zeta(\xi)$ — бесконечно гладкая функция, равная нулю в некоторой окрестности $\xi = 0$ и равная единице вне несколько более широкой окрестности нуля. Функция $\zeta(\xi)$ введена с целью погасить возможную особенность в нуле символа $a(x, \xi)$. При $\alpha > 0$ можно считать в (1.2) $\zeta(\xi) \equiv 1$. Число α называется степенью оператора A . Найдем преобразование Фурье оператора A :

$$\tilde{A}u(\xi) = \zeta(\xi) a(\infty, \xi) \tilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \zeta(\eta) a'(\xi - \eta, \eta) \tilde{u}(\eta) d\eta, \quad (1.2')$$

где $a'(\tau, \eta) = F_{x \rightarrow \tau} a'(x, \eta)$.

В [1] установлено, что оператор A , рассматриваемый на пространстве $H_s(R^n)$ (s — любое вещественное число), является гладким оператором, то есть A ограниченным образом действует из пространства H_s в $H_{s-\alpha}$, причем истинный порядок оператора A $\text{ord } A = \alpha$.

2°. Введем в рассмотрение ряд функциональных пространств. Под $\bar{R}_+^n$ ($\bar{R}_-^n$) будем понимать замкнутое подпространство пространства R^n точек $\{x; x_n \geq 0\}$ ($\{x; x_n \leq 0\}$)*, а R_+^n (R_-^n) — соответствующее открытое полупространство.

Для произвольного вещественного s через $\dot{H}_s^+ = \dot{H}_s^+(R_+^n)$ обозначим подпространство пространства H_s , состоящее из функций, носи-

* Мы следуем обозначениям, введенным в [4].

тели которых сосредоточены в $\bar{R}_+^n$, то есть тождественно равных нулю в R_-^n . Пространство $\dot{H}_s^- = \dot{H}_s^-(R_-^n)$ определяется аналогично. Образ Фурье пространства $\dot{H}_s^+$ обозначается через $\tilde{H}_s^+$.

Через θ^+ обозначим оператор умножения на функцию Хевисайда

$$\theta(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_n > 0, \\ 0, & \text{при } x_n < 0 \end{cases} \text{ а через}$$

Π^+ — преобразование Фурье оператора умножения на $\theta(x_n)$:

$$\Pi^+ \tilde{f}(\xi', \xi_n) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n} d\eta_n, \quad (1.3)$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, а интеграл в правой части (1.3) понимается в смысле главного значения по Коши.

Можно доказать (см. [4]), что оператор Π^+ , задаваемый формулой (1.3), действует ограниченным образом в пространстве $\tilde{H}_s$ при $|s| < \frac{1}{2}$, причем $\Pi^+ \tilde{H}_s = \tilde{H}_s^+$.

Нам понадобится пространство $H_s(R_+^n)$ функций, являющихся сужениями функций из $H_s(R^n)$. Как хорошо известно [6], в пространстве $H_s(R_+^n)$ можно ввести норму по формуле

$$\|f\|_{H_s(R_+^n)} = \|f\|_s^+ = \|\Pi^+ (\xi_- - i)^s \tilde{f}(\xi)\|_0, \quad (1.4)$$

где $\xi_- = \xi_n - i|\xi'|$, $|\xi'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right)^{1/2}$, $\tilde{f} \in H_s(R^n)$ — произвольное l — продолжение функции $f(x)$, определенной на R_+^n ; $\|\cdot\|_0$ — норма в $H_0(R^n) = L_2(R^n)$.

Введем в рассмотрение оператор проектирования P^+ , определяемый как сужение функции $f(x) \in H_s(R^n)$ на R_+^n ; по определению $P^+ H_s(R^n) = H_s(R_+^n)$.

Наконец, нам понадобится шкала пространств H_s^+ ($s \geq 1/2$), состоящих из функций $f_+(x) \in H_0^+$ таких, что $f_+(x) \in H_s(R_+^n)$ на R_+^n . При $s < \frac{1}{2}$, по определению, $H_s^+ = \dot{H}_s^+$. Норму в пространстве H_s^+ ($s \geq 0$)

введем по формуле (1.4), в качестве lf можно взять, например, $f_+ \in H_s^+$. При $s < 0$ с помощью формулы (1.4) можно также задать норму в пространстве H_s^+ , расширив область определения оператора Π^+ (см. [4]).

3°. Определение псевдодифференциального оператора в R_+^n . Псевдодифференциальным оператором в пространстве R_+^n назовем оператор вида

* Подробнее об операторе Π^+ см. [4].

$$P^+ A u_+ = (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} \zeta(\xi) a(x, \xi) \tilde{u}_+(\xi) d\xi, \quad (1.5)$$

где $u_+ \in S$.

§ 2. Гладкие псевдодифференциальные операторы в R_+^n

1°. Введем в рассмотрение класс символов, обеспечивающих гладкость порожденных ими операторов, то есть сформулируем условия на символы $a(x, \xi)$, при которых $P^+ A u_+$ принадлежит $H_{s-\alpha}^-(R_+^n)$, если $u_+ \in H_s^+$.

Пусть символ $a(x, \xi) \in O_\alpha$ удовлетворяет следующему условию гладкости (см. [4]):

с) При каждом $x \in R^n$ имеет место представление

$$\xi_-^s a(x, \xi) = a_-(x, \xi) + R(x, \xi), \quad (2.1)$$

где $a_-(x, \xi) \in O_{\alpha+s}$ допускает аналитическое продолжение по ξ_n в полуплоскость $\text{Im } \xi_n < 0$ при каждом x и ξ' . (Класс функций $a_-(x, \xi)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через $O_{\alpha+s}^-$; аналогично можно определить класс O_α^+ , заменив $\text{Im } \xi_n < 0$ на $\text{Im } \xi_n > 0$).

При любом $p > 0$ имеет место оценка

$$|D_x^p (a_-(x, \xi))| \leq C_p (1 + |\xi|)^{\alpha+s}; \quad (2.2)$$

функция $R(x, \xi)$ удовлетворяет условию 2) п° 1, § 1 и для нее справедлива оценка

$$|D_x^p R(x, \xi)| \leq C_p \frac{(1 + |\xi'|)^{s+\alpha+1}}{1 + |\xi'| + |\xi_n|} \quad (2.3)$$

при любом $p > 0$.

В случае, если символ $a(x, \xi)$ имеет неинтегрируемую особенность, регуляризации интеграла (1.5) можно добиться, взяв

$$\zeta(\xi) = \frac{\xi_-^M}{(\xi_- - i)^M},$$

где $M > 0$ — целое, достаточно большое число.

Тогда легко убедиться, что символ оператора $A a_1(x, \xi) = \zeta(\xi) a(x, \xi)$ также удовлетворяет условиям типа (2.1)–(2.3).

Теорема 1 (о гладкости). Пусть символ $a(x, \xi) \in O_\alpha$ оператора A , заданного формулой (1.5), удовлетворяет условию с). Тогда при любом s имеет место оценка

$$\|P^+ A u_+\|_{s-\alpha}^+ \leq C \|u_+\|_s^+ \quad (2.4)$$

для любой функции $u_+ \in H_s^+$; C — постоянная, не зависящая от u_+ .

Доказательство. Перепишем (1.5) в следующем виде:

$$P^+ A u_+ = (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} a_1(\infty, \xi) \tilde{u}_+(\xi) d\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} a'_1(x, \xi) \bar{u}_+(\xi) d\xi, \quad (1.5')$$

где $a_1(\infty, \xi) = \zeta(\xi)$ а $a(\infty, \xi)$, $a'_1(x, \xi) = a_1(x, \xi) - a_1(\infty, \xi)$.

Справедливость оценки (2.4) для оператора с постоянным символом $a_1(\infty, \xi)$ установлена в [4].

Таким образом, теорема будет доказана, если мы получим оценку (2.4) для оператора

$$P^+ A_1 u_+ = (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} a'_1(x, \xi) \bar{u}_+(\xi) d\xi. \quad (2.5)$$

Пусть $u_+ \in H^+_s$, а lu — произвольное l — продолжение функции u_+ на все пространство такое, что $\|lu\|_s \leq C_1 \|u_+\|_s^+$, где постоянная C_1 не зависит от u_+ .

Преобразование Фурье оператора A_1 , согласно (1.2'), имеет вид

$$\bar{A}_1 \bar{lu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \bar{a}_1(\xi - \eta, \eta) \bar{lu}(\eta) d\eta. \quad (2.6)$$

Оценим

$$\begin{aligned} \|P^+ A_1 u_+\|_{s-2}^+ &= \|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-2} \bar{A}_1 \bar{u}_+\|_0 \leq \\ &\leq \|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-2} \bar{A}_1 \bar{lu}\|_0 + \|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-2} \bar{A}_1 \bar{u}_-\|_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первое слагаемое правой части неравенства (2.7) оценивается элементарно

$$\|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-2} \bar{A}_1 \bar{lu}\|_0 \leq \|(\xi_- - i)^{s-2} \bar{A}_1 \bar{lu}\|_0 \leq C_2 \|lu\|_s \leq C_3 \|u_+\|_s^+. \quad (2.8)$$

При выводе оценки (2.8) мы воспользовались ограниченностью оператора Π^+ в пространстве $H_0(R^n)$ и гладкостью оператора A_1 во всем пространстве.

Заметим далее, что функции $\tilde{f}_-(\xi', \xi_n) \in O_s^-$ входят в ядро оператора Π^+ , то есть $\Pi^+ \tilde{f}_-(\xi', \xi_n) = 0$. Используя разложение (2.1) и учитывая сделанное замечание, оценим второе слагаемое правой части (2.7). Имеем

$$\|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-2} \bar{A}_1 u_-(\xi)\|_0 \leq C_4 \left\| \Pi^+ \int_{R^n} (\xi_- - i)^{s-2} \bar{R}'(\xi - \eta, \eta) \bar{u}_-(\eta) d\eta \right\|_0, \quad (2.9)$$

где $\bar{R}'(\tau, \eta) = F_{x \rightarrow \tau} R'(x, \eta)$, $R'(x, \eta) = R(x, \eta) - R(\infty, \eta)$, и $\bar{R}'(\tau, \eta)$ удовлетворяет неравенству

$$|(1 + |\tau|^2)^p \bar{R}'(\tau, \eta)| \leq C_p \frac{(1 + |\eta'|)^{s+\alpha+1}}{1 + |\eta'| + |\eta_n|},$$

$p \geq 0$ — произвольное число.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
|(\xi_- - i)^{s-\alpha} \tilde{R}'(\xi - \eta, \eta) \tilde{u}_-(\eta)| &= \frac{|\xi_- - i|^{s-\alpha} |\eta_- - i|^{s-\alpha} |\tilde{R}'(\xi - \eta, \eta)| |\tilde{u}_-(\eta)|}{|\eta_- - i|^{s-\alpha}} \leq \\
&\leq C_p \frac{|\xi_- - i|^{s-\alpha}}{|\eta_- - i|^{s-\alpha}} \cdot \frac{(1 + |\eta'|)^{s+1} |\tilde{u}_-(\eta)|}{(1 + |\xi - \eta|^2)^p (1 + |\eta'| + |\eta_n|)} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\left| (\xi_- - i)^{s-\alpha} \int_{R^n} \tilde{R}'(\xi - \eta, \eta) \tilde{u}_-(\eta) d\eta \right| \leq \\
&< C_p \int_{R^n} \frac{1}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}} (1 + |\eta'|)^s |\tilde{u}_-(\eta', \eta_n)| d\eta' d\eta_n, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

где положено $p = \frac{n+1}{2} + \frac{|s-\alpha|}{2}$. Подставляя (2.11) в (2.9) и используя ограниченность оператора Π^+ в $H_0(R^n)$, получим

$$\begin{aligned}
\|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-\alpha} \tilde{A}_1 \tilde{u}_-(\xi)\|_0 &\leq C_5 \|(1 + |\eta'|^2)^{s/2} u_-(\eta', \eta_n)\|_0 \leq \\
&\leq C_6 \|(1 + |\eta'|^2)^{s/2} \tilde{u}_0\|_0 \leq C_7 \|u\|_s \leq C_8 \|u_+\|_s^+. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

При выводе неравенства (2.10) мы воспользовались тем фактом, что свертка пространств $L_1(R^n)$ и $H_0(R^n)$ принадлежит $H_0(R^n)$, то есть, если $a(x) \in L_1(R^n)$, $b(x) \in H_0(R^n)$, то

$$\|a(x) * b(x)\|_0 \leq \|a(x)\|_{L_1(R^n)} \|b(x)\|_0.$$

Из неравенств (2.8) и (2.12) вытекает оценка (2.4). Теорема доказана.

§ 3. Построение регуляризатора

1°. Целью настоящего параграфа является доказательство существования регуляризатора однородной краевой задачи в полупространстве для псевдодифференциальных операторов, порожденных классом, так называемых, эллиптических символов.

Определение. Символ $a(x, \xi)$ называется эллиптическим, если

$$a(x, \xi) \neq 0, \quad x \in R^n, \quad \xi \neq 0 \quad (3.1)$$

(ξ вещественно).

Пусть символ $a(x, \xi) \in O_{a_s}$ имеет при $\xi' \neq 0$ первые производные по ξ , ограниченные при $|\xi| = 1$, $x \in R^n$. Класс таких символов обозначим через $O_{a_s}^1$. Пусть далее $a(x, \xi)$ удовлетворяет условию эллиптичности (3.1). Тогда, как доказано в [4], справедливо представление

$$a(x, \xi', \xi_n) = a_+(x, \xi', \xi_n) a_-(x, \xi', \xi_n)^*, \quad (3.2)$$

где $a_+(x, \xi', \xi_n) \in O_{a_s}^{1+}$ и $a_+(x, \xi', \xi_n) \neq 0$

* Факторизация (3.2) имеет место на самом деле при более слабых предположениях.

при $x \in R^n$, $\xi \neq 0$, $\text{Im } \xi_n > 0$,

$$a_-(x, \xi', \xi_n) \in O_{\xi_n}^{l-1} \text{ и } a_-(x, \xi', \xi_n) \neq 0$$

при $x \in R^n$, $\xi \neq 0$, $\text{Im } \xi_n \leq 0$, κ — индекс факторизации. Предполагается, что κ — целое неотрицательное число.

Предположим далее, что функция $a_+(x, \xi)$ удовлетворяет условию гладкости с) (условие с) для нее заведомо выполняется, если предположить, что $a_+(x, \xi)$ продолжается по ξ_n в полуплоскость $\text{Im } \xi_n \leq 0$ вне полукруга $|\xi_n| \leq l|\xi'|$, где $l > 0$ не зависит от ξ' и ξ_n , причем такое продолжение дает однозначную аналитическую функцию в окрестности бесконечно удаленной точки). В силу эллиптичности символа $a(x, \xi)$ легко убедиться в том, что оператор, канонически построенный по символу $a_+^{-1}(x, \xi)$, также гладкий). Это обстоятельство будет нами использовано при построении регуляризатора.

2°. В полупространстве R_+^n рассмотрим уравнение вида

$$P^+ A u_+ = f_+(x), \quad (3.3)$$

где A — псевдодифференциальный оператор, канонически построенный по символу $a(x, \xi)$. Пусть $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в предыдущем пункте.

Решение $u_+(x)$ уравнения (3.3) ищется в пространстве $\dot{H}_x^+ \cap H_s^+$, где κ — индекс факторизации символа $a(x, \xi)$:

$$u_+(x) \in \dot{H}_x^+ \cap H_s^+; \quad (3.4)$$

$f_+(x)$ предполагается принадлежащей пространству $H_{s-\kappa}(R_+^n)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$R f_+ = A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} l f, \quad (3.5)$$

где A_+^{-1} и A_-^{-1} — операторы, канонически построенные по символам $a_+^{-1}(x, \xi)$ и $a_-^{-1}(x, \xi)$ соответственно*; $l f$ — продолжение функции $f_+(x) \in H_{s-\kappa}(R_+^n)$ на все пространство; через $\circ$ обозначена операция композиции.

Мы докажем, что оператор R , задаваемый формулой (3.5), является левым и правым регуляризатором задачи (3.3), (3.4). Иными словами, нам необходимо установить, что оператор R ограниченным образом действует из пространства $H_{s-\kappa}(R_+^n)$ в пространство $\dot{H}_x^+ \cap H_s^+$, то есть

$$\|R f_+\|_s^+ \leq C \|f_+\|_{s-\kappa}^+, \quad (3.6)$$

где C — постоянная, не зависящая от f_+ . Далее следует убедиться в существовании псевдодифференциальных операторов T_1 и T_2 таких, что

* В случае, если порядок однородности функции a_+^{-1} или a_-^{-1} отрицательный, необходима регуляризация, которой, как и выше, можно достичь домножением соответствующего символа на функцию $\chi(\xi)$.

$$R \circ P^+ A u_+ = (E + P^+ T_1) u_+, \quad (3.7)$$

$$P^+ A \circ R f_+ = (E + P^+ T_2) f_+, \quad (3.8)$$

где T_1 и T_2 — операторы порядка не выше -1 , точнее

$$\|P^+ T_1 u_+\|_s^+ \leq C_1 \|u_+\|_{s-1}^+, \quad (3.9)$$

$$\|P^+ T_2 f_+\|_{s-\alpha}^+ \leq C_2 \|f_+\|_{s-\alpha-1}^+, \quad (3.10)$$

константы C_1 и C_2 , участвующие в оценках (3.9), (3.10), не зависят от u_+ и f_+ соответственно.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, касающееся композиции псевдодифференциальных операторов.

Теорема о композиции. Пусть A и B — псевдодифференциальные операторы, символы которых $a(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$ принадлежат, соответственно, классам O_α^1 и O_β^1 .

Тогда справедливо представление

$$A \circ B u = C u + T u, \quad (3.11)$$

где C — оператор, канонически построенный по произведению $a(x, \xi) \times b(x, \xi)$ символов, а T — оператор порядка $\leq \alpha + \beta - 1$, то есть

$$\|T u\|_{s-(\alpha+\beta-1)} \leq \text{const} \|u\|_s, \quad (3.12)$$

для любого вещественного s^* .

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1].

Из теоремы о композиции и свойстве гладкости операторов A_+^{-1} и A_-^{-1} в полупространстве очевидным образом следует ограниченность оператора $R: H_{s-\alpha}(R_+^+) \rightarrow \dot{H}_s^+ \cap H_s^+$, то есть оценка (3.6).

Обратимся к доказательству представлений (3.7) и (3.8). Имеем согласно (3.5), (3.2) и (3.11)

$$\begin{aligned} R \circ P^+ A u_+ &= A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} \circ P^+ A u_+ = \\ &= A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} \circ A u_+ = A_+^{-1} \circ (\theta^+ A_+ + \theta^+ T_1) u_+ = \\ &= u_+ + \theta^+ T_2 u_+ + A_+^{-1} \circ \theta^+ T_1 u_+ = (E + \theta^+ T_3) u_+, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где положено $T_3 = T_2 + A_+^{-1} \circ \theta^+ T_1$.

При выводе (3.13) мы воспользовались следующим свойством оператора P^+ , а именно тем, что $P^+ A_- \theta^+ u_+ = P^+ A_- u_+$ для любого оператора A_- , символ которого $a_-(x, \xi)$ принадлежит классу O_α^- .

Применим теперь оператор R к A справа. Имеем

$$\begin{aligned} P^+ A \circ R f_+ &= P^+ A \circ A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} f = P^+ A_- \circ \theta^+ A_-^{-1} f + \\ &+ P^+ T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1} f = P^+ A_- \circ A_-^{-1} f + P^+ T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1} f = \\ &= f_+ + P^+ T_5 f_+ + P^+ T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1} f = (E + P^+ T_6) f_+, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $T_6 = T_5 + T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1}$.

* Теорема остается справедливой при более общих предположениях.

Таким образом, мы получили следующие представления:

$$R \circ P^+ A u_+ = (E + \theta^+ T_3) u_+ \quad (3.7')$$

$$P^+ A \circ R f_+ = (E + P^+ T_6) f_+. \quad (3.8')$$

Установим теперь, что T_3 и T_6 являются гладкими в полупространстве R_+^n операторами порядка -1 , то есть, что они удовлетворяют оценкам (3.9), (3.10). Отсюда уже будет следовать, что оператор R является регуляризатором задачи (3.3), (3.4).

3°. Для доказательства гладкости оператора T_3 установим, что этим свойством обладает оператор T_1 . Справедлива

Лемма. Оператор T_1 — гладкий в полупространстве R_+^n и имеет порядок, равный $\kappa - 1$, то есть для любого вещественного s справедлива оценка

$$\|T_1 u_+\|_{s-(\kappa-1)}^+ \leq C \|u_+\|_s^+, \quad (3.15)$$

где C — постоянная, не зависящая от u_+ .

Доказательство. Пусть $a_-^{-1}(x, \xi) = a'_-(x, \xi) + a_-^{-1}(\infty, \xi)$, где $a'_-(x, \xi) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ в смысле топологии S равномерно относительно ξ .

Преобразование Фурье оператора T_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 u_+(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} [\tilde{a}'_-(\xi - \eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi - \eta, \tau)] \tilde{a}'(\eta - \tau, \tau) \tilde{u}_+(\tau) d\tau + \\ &+ (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} [\tilde{a}^{-1}(\infty, \xi) - \tilde{a}^{-1}(\infty, \eta)] \tilde{a}'(\xi - \eta, \eta) \tilde{u}_+(\eta) d\eta = \\ &\equiv \tilde{T}_1^{(1)} u_+(\xi) + \tilde{T}_1^{(2)} u_+(\xi). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Докажем неравенство (3.15) для оператора $T_1^{(1)}$ (для $T_1^{(2)}$ оценка проводится аналогично и несколько проще). Заметим далее, что, поскольку $a(x, \xi) \in O_{\alpha}^1$, имеет место оценка

$$|\tilde{a}'_-(\xi - \eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi - \eta, \tau)| \leq \text{const} \frac{(1 + |\eta|)^{\kappa - s - 1} + (1 + |\tau|)^{\kappa - s - 1}}{(1 + |\xi - \eta|)^p} |\eta - \tau|, \quad (3.17)$$

где p достаточно велико.

Согласно свойству c гладкости символа $a(x, \xi)$ имеем представление (§ 2, (2.1)–(2.3))

$$\tilde{a}'(\eta - \tau, \tau) = \tilde{a}_-(\eta - \tau, \tau) + \tilde{R}(\eta - \tau, \tau), \quad (3.18)$$

причем

$$|\tilde{a}_-(\eta - \tau, \tau)| \leq C_p \frac{(1 + |\tau|)^s}{(1 + |\eta - \tau|)^p}, \quad (3.19)$$

$$|\tilde{R}(\eta - \tau, \tau)| \leq C_p \frac{\tau^{-s}(1 + |\tau'|)^{s+\kappa+1}}{(1 + |\eta - \tau|)^p (1 + |\tau'| + |\tau_n|)}, \quad (3.20)$$

где p — любое достаточно большое число.

Теперь нетрудно убедиться, пользуясь оценками (3.17), (3.19), (3.20), в справедливости неравенств

$$\int_{R^n} |\tilde{a}'_-(\xi-\eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi-\eta, \tau)| |\tilde{a}_-(\eta-\tau, \tau)| d\eta \leq \text{const} \frac{(1+|\tau|)^{x-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{p_1}}, \quad (3.21)$$

$$\int_{R^n} |\tilde{a}'_-(\xi-\eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi-\eta, \tau)| |\tilde{R}(\eta-\tau, \tau)| d\eta \leq \text{const} \frac{(1+|\tau|)^{x-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{p_1}}, \quad (3.22)$$

где p_1 достаточно велико.

Из неравенств (3.21) и (3.22) получаем следующую оценку:

$$\int_{R^n} |\tilde{a}'_-(\xi-\eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi-\eta, \tau)| |\tilde{a}'_-(\eta-\tau, \tau)| d\eta \leq C_{p_1} \frac{(1+|\tau|)^{x-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{p_1}}. \quad (3.23)$$

Повторяя теперь буквально те же рассуждения, что и в соответствующем месте доказательства теоремы 1, убеждаемся в гладкости оператора $T_1^{(1)}$, как оператора, действующего из пространства H_s^+ в пространство $H_{s-(x-1)}(R_+^n)$.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается гладкость остальных операторов, входящих в представления операторов T_3 и T_6 .

Таким образом, доказана

Теорема 2. Оператор R , задаваемый формулой (3.5), является левым и правым регуляризатором задачи (3.3)–(3.4).

Вычислительный центр АН АрмССР

и Ереванского государственного

университета

Поступило 25.III.1968

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳԻԱՆ

ՊՍԵՎԴԴԻԳԵՆԵՆՑԻԱԿ ԹՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ԿԻՍԱՏԱՐԱՄՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքը նվիրված է կիսատարածությունում պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների որոշակի դասերի ռառամասիրությունը:

Առանձնացվում է ողորք (որոշակի ֆունկցիոնալ տարածություններում) օպերատորների մի դաս:

Տրվում է էլիպտիկ պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների համար կիսատարածությունում համասեռ եզրային խնդրի լուծումը:

R. L. SHAHBAGIAN

PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS IN THE HALFSpace

S u m m a r y

The paper is devoted to investigation of some classes of pseudodifferential operators in a halfspace. A certain class of operators, which

posses a smoothness properties in some functional spaces and are naturally related with the operators under consideration, is introduced.

The regularisator of homogenous boundary problem in the half-space for pseudodifferential operators, generated by elliptic symbols, is constructed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. Kohn and L. Nirenberg.* An algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 18, № 1—2, 1965, 269—305.
2. *L. Hörmander.* Pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 18, № 3, 1965, 501—517.
3. *М. И. Вишик и Г. И. Эскин,* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения, УМН, 22, вып. 1, 1967, 15—76.
4. *М. И. Вишик и Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, 20, вып. 3, 1965, 89—152.
5. *Л. Шварц.* Математические методы для физических наук, Изд. „Мир“, М., 1965.
6. *J. Peetre.* Another approach to elliptic boundary problems, Comm. Pure Appl. Math., 14, № 4, 1961, 711—731.

Л. А. ПЕТРОСЯН

ИНВАРИАНТНЫЙ ЦЕНТР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Рассматриваемые в настоящей заметке игры представляют собой простое преследование на $n-1$ -мерных поверхностях в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Пусть в R^n задана некоторая $n-1$ -мерная поверхность S . Преследователь P перемещается по ней, имея возможность в каждый момент изменять направление своего движения. Величина его скорости предполагается постоянной и равной u . Аналогично, преследуемый E перемещается на S , имея возможность в каждый момент времени управлять направлением вектора своей скорости. Скорость E также постоянна и равна v . Предполагаем, что $u > v$. Таким образом, в процессе игры игроки остаются на поверхности S . Если поверхность задается уравнениями

$$z = z_i (s_1, \dots, s_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

то уравнения движения игроков записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial z_i}{\partial l_k} \dot{l}_k(t) = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

для игрока P , и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial z_i}{\partial m_k} \dot{m}_k(t) = \psi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

для игрока E .

Здесь l и m — координаты игроков P и E на поверхности S , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — компоненты скорости игрока P , а $\psi_1, \dots, \psi_n$ — компоненты скорости игрока E (находящиеся под управлением игроков).

Игра имеет предписанную заранее продолжительность T , информация полная, целью игрока P является минимизация расстояния (по поверхности) между ним и игроком E к моменту окончания игры. Игрок E преследует противоположную цель. Как обычно, под стратегией игрока $P(E)$ будет пониматься любая функция $\varphi(l, s, t)$ ($\psi(l, s, t)$), удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(l, s, t) = u^2 \quad \left(\sum_{i=1}^n \psi_i^2(l, s, t) = v^2 \right) \quad (4)$$

и такая, что любая ситуация (φ, ψ) и начальные условия l_0, s_0 однозначно определяют траектории игроков в игре. Полученную таким образом игру преследования мы будем обозначать через $\Gamma(l_0, s_0, T)$. Прежде чем перейти к непосредственному изложению результатов нам

понадобятся некоторые определения и теорема. Доказательство теоремы приводить здесь не будем, поскольку оно изложено в [1].

Определение 1. Множество точек $C_P^T(l)$, в которые может попасть игрок P в момент времени T , используя свои всевозможные стратегии, из точки l , называется множеством достижимости преследователя P (понятие множества достижимости впервые использовалось в дифференциальных играх в [2]).

Аналогичным образом определяется множество достижимости преследуемого E , $C_E^T(m)$.

Множество достижимости мы будем предполагать замкнутым.

Для любой пары точек $l, m \in S$ определим функцию $\hat{\rho}_T(l, m)$ следующим образом:

$$\hat{\rho}_T(l, m) = \max_{\eta \in C_E^T(l)} \min_{\xi \in C_P^T(m)} \rho(\xi, \eta), \quad (5)$$

где $\rho(l, m)$ — расстояние между точками l, m по поверхности.

Определение 2. Пусть

$$\hat{\rho}_T(l, m) = \rho(\xi, \eta).$$

Любая траектория $l^*(t)$, соединяющая точки l и ξ так, что $l^*(0) = l$ и $l^*(T) = \xi$, называется условно оптимальной траекторией преследователя P . Любая траектория $m^*(t)$, соединяющая точки m и η так, что $m^*(0) = m$ и $m^*(T) = \eta$, называется условно оптимальной траекторией преследуемого E .

Определение 3. Точка M называется центром преследования в игре $\Gamma(l, s, T)$, если

$$\hat{\rho}_T(l, s) = \rho(\xi, M). \quad (6)$$

Центр преследования называется инвариантным, если он один и тот же во всех играх преследования

$$\Gamma(l^*(t), m^*(t), T-t),$$

где $l^*(t), m^*(t)$ — любая пара условно оптимальных траекторий, выходящих из точек $l, m \in S$.

Теорема. Пусть в игре $\Gamma(l, m, T)$ существует единственный инвариантный центр преследования M , и пусть $\hat{\rho}_T(l, m) > 0$, тогда условно оптимальные траектории игры являются оптимальными и значение игры равно $\hat{\rho}_T(l, m)$.

Определим „регулярный кусок“ $\bar{S}$ поверхности S следующим образом. Область $\bar{S}$ на поверхности S называется регулярным куском поверхности S , если

1. Через любые две точки $z_1, z_2 \in \bar{S}$ можно провести кратчайшую линию.

2. Любые две различные кратчайшие, лежащие в $\bar{S}$, пересекаются в $\bar{S}$ самое большее в одной точке.

3. Никакая точка $x \in \bar{S}$ не может быть концом кратчайшей (то есть отрезок кратчайшей, соединяющий две любые точки на поверхности продолжим в обе стороны)*.

Игру $\Gamma(l, m, T)$ мы будем называть регулярной, если объединение $C_P^T(l) \cup C_E^T(m)$ областей достижимости игроков содержится в некотором регулярном куске поверхности $\bar{S}$.

Лемма 1. Пусть l и m — начальные местоположения игроков P и E . Рассмотрим отрезок кратчайшей, соединяющей точки l и m . Продолжим его на расстояние vT от точки m **. Пусть M_1 — точка, расположенная на этом отрезке на расстоянии vT от точки m . Тогда в регулярной игре точка M_1 является центром преследования, и всякий центр преследования может быть получен таким образом.

Доказательство. Заметим, что, ввиду предположенной регулярности игры и условия 3 на „регулярный кусок“ поверхности, отрезок кратчайшей $[l, m]$ продолжим на расстояние vT , следовательно, указанная в лемме точка M_1 действительно существует. Предположим теперь, что центр преследования M отличен от точки M_1 , тогда, поскольку $M \in C_E^T(m)$

$$\rho(m, M) \leq \rho(m, M_1) = vT, \quad (7)$$

кроме того

$$l(l, m) \leq \rho(l, m) + \rho(m, M), \quad (8)$$

$$\rho(l, M) \leq \rho(l, m) + \rho(m, M_1) = \rho(l, M_1) \quad (9)$$

(так как M_1 находится на кратчайшей, соединяющей точки l и m). Однако

$$\min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M) = \rho(l, M) - uT$$

и

$$\min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M_1) = \rho(l, M_1) - uT. \quad (10)$$

Следовательно, из (9) получаем

$$\min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M) < \min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M_1) \leq \max_{\eta \in C_E^T(m)} \min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, \eta),$$

а это противоречит тому, что точка M является центром преследования. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Центр преследования в игре $\Gamma(l, m, T)$ единственен (при условии регулярности игры).

Доказательство немедленно следует из того, что игра регулярна, и леммы 1, так как согласно лемме 1 центр преследования распо-

* Условиям 1—3 удовлетворяют регулярные (в обычном смысле), геодезически выпуклые поверхности (см., например, [5]).

** Продолжение понимается в том смысле, что новый, „продолженный“, отрезок является отрезком кратчайшей, проходящим через l и m .

ложен на кратчайшей, соединяющей точки l и m на расстоянии vT от точки m . Если бы существовало два центра преследования, то кратчайшие, соединяющие их с точкой l совпадали бы на отрезке $[l, m]$, однако это противоречит условию 2 регулярности.

Лемма 3. *Центр преследования в игре $\Gamma(l, m, T)$ инвариантен (при условии регулярности игры).*

Доказательство. Пусть $l^*(t)$, $m^*(t)$ — условно-оптимальные траектории в игре $\Gamma(l, s, T)$. Из леммы 1 имеем, что они предписывают движение игроков P и E по кратчайшей, проходящей через точки l и m . Используя повторно лемму 1, получаем, что центр преследования в играх $\Gamma(l^*(t), m^*(t), T-t)$ при всех $0 \leq t < T$ совпадает с точкой M_1 , которая представляет собой центр преследования в игре $\Gamma(l, m, T)$.

Теорема об инвариантном центре преследования и леммы 1, 2, 3 дают возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Регулярная игра $\Gamma(l, m, T)$ (если $\hat{\rho}_T(l, m) > 0$) имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях, при этом оптимальная стратегия игрока P заключается в каждый момент времени в выборе направления отрезка кратчайшей, соединяющей его местоположение и местоположение игрока E в этот момент времени. Значение игры равно $\hat{\rho}_T(l, m)$.*

Пример. Простое преследование на сфере.

Рассмотрим преследование на куске трехмерной сферы, который обладает описанным выше свойством регулярности. Кратчайшие, соединяющие две любые точки сферы, представляют собой отрезки окружности большого круга. Кинематические уравнения в полярных координатах записываются в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= -r \sin l_1 \sin l_2 \varphi_2 + r \cos l_1 \cos l_2 \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin l_1 \cos l_2 \varphi_2 + r \cos l_1 \sin l_2 \varphi_2, \\ x_3 &= -r \sin l_1 \varphi_3 \end{aligned} \quad (11)$$

для игрока P и

$$\begin{aligned} y_1 &= -r \sin m_1 \sin m_2 \psi_2 + r \cos m_1 \cos m_2 \psi_1, \\ y_2 &= r \sin m_1 \cos m_2 \psi_2 + r \cos m_1 \sin m_2 \psi_1, \\ y_3 &= -r \sin m_1 \psi_3 \end{aligned} \quad (12)$$

— для игрока E .

Условие постоянства величины скорости (простое движение) накладывает на управляющие переменные φ_1 , φ_2 и ψ_1 , ψ_2 игроков P и E следующие ограничения:

$$r^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \sin^2 l_1 \dot{\varphi}_2^2) = u^2, \quad (13)$$

$$\dot{\psi}_1^2 + \sin^2 m_1 \dot{\psi}_2^2 = v^2. \quad (14)$$

Поскольку функция значения игры теперь зависит только от координат l , m и T , то переменные l , m , T оказываются позиционными и вместо уравнений движения (2), (3) оказывается достаточным рассмотреть уравнения движения

$$\dot{l}_1 = \varphi_1(l, m, T), \quad (15)$$

$$\dot{l}_2 = \varphi_2(l, m, T)$$

для P и

$$\dot{m}_1 = \psi_1(l, m, T), \quad (16)$$

$$\dot{m}_2 = \psi_2(l, m, T)$$

— для E , описывающие изменение координат на поверхности (теперь уже позиционных переменных) в процессе игры. При этом, конечно, условия (13) и (14) на управляющие переменные сохраняются.

Можно сделать еще одно упрощение, рассматривать игру $\Gamma(l, m, T)$ в редуцированном пространстве. Для этого перенесем игрока P в точку на сфере с координатами $(0, 0)$. Тогда координаты m_1, m_2 будут обозначать относительное местоположение игрока E относительно P . Кинематические уравнения (15) — (16) переписутся в редуцированном пространстве в виде

$$\dot{m}_1 = \psi_1 + \varphi_1, \quad (17)$$

$$\dot{m}_2 = \psi_2 + \varphi_2,$$

где управляющие переменные подчиняются ограничениям

$$\varphi_1^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2, \quad (18)$$

$$\psi_1^2 + \sin^2 m_1 \psi_2^2 = v^2. \quad (19)$$

Длина кратчайшей, соединяющей точки P и E , равна rm_1 . Значение игры $V(m, T)$, которое определяется с использованием последней теоремы, равно

$$\varphi_T(l, m) = V(m, T) = rm_1 + vT - uT. \quad (*)$$

Разумеется, что решение игры справедливо только на „регулярных“ кусках сферы. Покажем, что полученная функция значения игры удовлетворяет уравнению Айзекса — Беллмана (см. [3], [4]) (заметим, что непосредственное интегрирование уравнения Айзекса — Беллмана представляет значительные трудности).

Первая форма уравнения Айзекса — Беллмана записывается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \min_{\varphi} \max_{\psi} \left[\frac{\partial V}{\partial m_1} (\psi_1 + \varphi_1) + \frac{\partial V}{\partial m_2} (\psi_2 + \varphi_2) \right], \quad (20)$$

где минимакс берется при условиях

$$\varphi_1^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2, \quad \psi_1^2 + \sin^2 m_1 \psi_2^2 = v^2 \quad (21)$$

при начальном условии

$$V(m, 0) = rm_1. \quad (22)$$

Находя φ^* и ψ^* , доставляющие минимакс в (20) и подставляя их вместо φ и ψ в (20), получаем вторую форму основного уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial m_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right) \frac{1}{\sin m_1} \left(\frac{\partial V}{\partial m_2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial m_1}\right)^2 + \frac{v}{r \sin m_1} \left(\frac{\partial V}{\partial m_2}\right)^2}} - \frac{u}{r} \frac{\partial V}{\partial m_1} \quad (23)$$

при начальном условии

$$V(m, 0) = rm_1.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция (*) удовлетворяет уравнению (21) и начальному условию.

Подкоренное выражение в (21) обращается в нуль при $m_1 = \pi$, то есть при $m_1 = \pi$ мы получаем сингулярную поверхность. Этот случай соответствует начальным местоположениям игроков в двух диаметрально противоположных точках окружности большого круга, что в нашем случае означает нарушение условия регулярности.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило 7.XII.1967.

Լ. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՀԵՏԱՊԵՐՍԻՏԱՆ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ԿԵՆՏՐՈՆԸ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ
ԴԻՖԲԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԵՐՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է հետապնդման ինվարիանտ կենտրոնի գոյությունը $n-1$ -չափանի ուղղանկյուն մակերևույթների վրա դիտարկվող հետապնդման խաղերում:

Այդպիսինի գոյությունից բխում է խաղի արժեքի ֆունկցիայի և երկու խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիայի գոյությունը:

Հավելվածում տրվում է սվերայի վրա հետապնդման խնդրի լրիվ լուծումը:

L. A. PETROSIAN

INVARIANT CENTER OF PERSUIT IN A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL GAMES

S u m m a r y

In this paper we prove the existence of an invariant center of persuit on $n-1$ -dimensional regular surfaces. The existence of such a center implies the existence of the value function and of optimal pure

strategies for both players. In addition the complete solution of spherical pursuit is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Петросян.* Об одном инварианте в дифференциальных играх преследования, Вестник ЛГУ, № 1, 1968.
2. *Н. Н. Красовский, Ю. М. Репин, В. Е. Третьяков.* О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
3. *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры, Изд. „Мир“, 1967.
4. *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.* Математическая теория оптимальных процессов, ФМ, М., 1961.
5. *В. Бляшке.* Введение в дифференциальную геометрию, ТТЛ, М., 1967.

Բ ՈՎ ԱՆԴԱԿ ՈՒԹՅՈՒՆ

Ն. Հ. Առաքելյան. Հավասարաչափ և շոշափումային մոտավորությունների անալիտիկ ֆունկցիաներով	273
Վ. Ս. Զախարյան. B_α ֆունկցիայի շառավղային եզրային արժեքների մասին	287
Ի. Հ. Խաչատրյան. Անընդհատ ֆունկցիաների կշռային-հավասարաչափ մոտավորությունը բազմանդամներով երկու ճառագայթների վրա	301
Ա. Ա. Քալայյան. Սիստեմներ, որոնցով գրված շարքերը $L_p [0, 1]$ մետրիկայով ներկայացնում են $L_q [0, 1]$, $1 < p < q$ տարածության ֆունկցիաները	327
Ռ. Ա. Ալեքսանդրյան, Ռ. Զ. Մկրտչյան. Կամայական ինքնահամայնած օպերատորի սեփական ֆունկցիաների լրիվ սիստեմի կառուցման և նրանց ստրուկտուրայի հետազոտման մասին	356
Լ. Շ. Աղաբաբյան, Հ. Բ. Ներսեսյան. Երրորդ կարգի վերածվող հիպերբոլական հավասարման համար Կոշլու խնդրի մասին	369
Ռ. Լ. Շահբաղյան. Փսևդոդիֆերենցիալ օպերատորներ կիսատարածությունում	386
Լ. Ա. Պետրոսյան. Հետապնդման ինվարիանտ կենտրոնը ոչ գծային դիֆերենցիալ խաղերում	397

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Н. У. Аракелян. Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями	273
В. С. Захарян. О радиальных предельных значениях функции B_α	287
И. О. Хачатрян. О взвешенно-равномерном приближении непрерывных функций полиномами на двух лучах	301
А. А. Талалаян. О системах функций, ряды по которым представляют в метрике $L_p [0, 1]$ функции пространства $L_q [0, 1]$, $1 < p < q$	327
Р. А. Александриян, Р. З. Мкртчян. О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры	358
Л. Ш. Агабабян, А. Б. Нерсисян. О корректности задачи Коши для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка	369
Р. Л. Шахбагян. Псевдодифференциальные операторы в полупространстве	386
Л. А. Петросян. Инвариантный центр преследования в нелинейных дифференциальных играх	397

C O N T E N T S

N. H. Arakeltan. Uniform and tangential approximation with analytic functions	273
V. S. Zakchartan. On radial limiting values of the B_α function	287
I. O. Kchatchatryan. On weighted-uniform approximation of continuous functions with polynoms on two halflines	301
A. A. Talalian. On the systems of functions, the series with respect of which represent in $L_p [0, 1]$ metric functions of $L_q [0, 1]$, $1 < p < q$ space	327
R. A. Alexandrian, R. S. Mkrтчian. On the construction of complete system of eigenfunctionals of arbitrary self-addjoint operator and investigation of there structure	358
L. Sh. Agababian, A. B. Nersesian. The Cauchy problem for a hyperbolic equation of third order with data on parabolic line	369
R. L. Shahbagian. Pseudodifferential operators in the halfspace	386
L. A. Petrosian. Invariant center of persuit in a class of nonlinear differential games	397