ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի-կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 30 կ.
ЦЕНА 30 К.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 2, 1968 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Исследованию корректности различных задач для гиперболических уравнений с данными (всеми или некоторыми) на линии параболического вырождения посвящен ряд работ (см. [1, 2]). Наиболее подробно исследована следующая, представляющая, по-видимому, наибольший интерес, задача Коши

$$-\Delta^2(x, y)\, U_{xx} + U_{yy} = aU_x + bU_y + cU + f \quad (y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (0.1)$$

$$U(x, +0) = \mu(x),\ U_y(x, +0) = \nu(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (0.2)$$

где

$$\Delta(x, y) = \omega(x, y)\, \Delta(y),\ 1 \leqslant \omega \leqslant \text{const},\ \Delta(y) > 0\ (y > 0),\ \Delta(+0) = $$
$$= 0,\ \Delta' \geqslant 0. \qquad (0.3)$$

Л. Берс [3] показал, что задача (0.1)—(0.2) корректна в классическом смысле, если в уравнении (0.1) отсутствуют члены низшего порядка.

В дальнейшем было замечено, что ограничениям нужно подвергать только коэффициент $a(x, y)$. Следующее (по-видимому, до сих пор наиболее общее) условие корректности установлено Проттером [4]

$$a_0(x) = \overline{\lim_{y \to +0}} \frac{y\, |a(x, y)|}{\Delta(y)} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (0.4)$$

Однако даже в случае степенного убывания функции $\Delta(y)$ это условие оказывается жестким. В частности, при $\Delta(x, y) = y$ Хельвиг [5] показал, что достаточна оценка $a_0(x) < 2$, а при $\Delta(x, y) = y^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ Чи Минь-Ю [6] указывает оценку $a_0(x) < \alpha$. Из недавних результатов С. А. Терсенова для гиперболической системы [7] следует, что если $\Delta(x, y) = y^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $a_0(x) \leqslant \text{const}$ и все параметры задачи (0.1)—(0.2) дифференцируемы по x достаточное число раз (в зависимости от a_0), то эта задача поставлена корректно.

Случаи нарушения устойчивости в классическом смысле были отмечены Геллерстедтом [8] и И. С. Березиным [9]. Именно последним было показано, что существует решение задачи

$$-y^{2\alpha} U_{xx} + U_{yy} = U_x \quad (\alpha > 1,\ y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (0.5)$$

$$U(x, +0) = \frac{\sin \tau x}{\tau^{k+1}} \left(\text{или } \frac{\cos \tau x}{\tau^{k+1}} \right) (\tau > 0,\ k \geqslant 1),\ U_y(x, +0) = 0, \qquad (0.6)$$

непрерывно дифференцируемое при $y \geqslant 0$ и такое, что

$$\overline{\lim_{\tau\to+\infty}}\ \max_{\substack{0\leqslant y\leqslant h(\tau)\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} |U(x, y)| = +\infty, \tag{0.7}$$

где $h(\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$, в то время как начальные данные вместе со своими производными до k-го порядка, очевидно, стремятся к нулю.

В предлагаемой работе упомянутые выше критерии уточняются и обобщаются.

§ 1. Постановка задачи. Основные результаты. Рассмотрим оператор

$$LU = AU_{xx} + 2BU_{xy} + U_{yy}\ (y>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1), \tag{1}$$

где функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы при $y>0$ и

$$\Delta^2(x, y) = B^2 - A > 0\quad (y>0),\ \Delta(x, +0)\geqslant 0. \tag{2}$$

Изучается задача Коши

$$LU = a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U + f(x, y),\ (y>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1), \tag{3}$$

$$U(x, +0) = \mu(x),\ U_y(x, +0) = \nu(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{4}$$

Характеристики уравнения (3) определяются из соотношений

$$dx = \Phi_i(x, y)\,dy\quad (y\geqslant 0,\quad i = 1, 2), \tag{5}$$

где

$$\Phi_1 = B + \Delta,\ \Phi_2 = B - \Delta,\ A = \Phi_1\Phi_2, \tag{5'}$$

$$2B = \Phi_1 + \Phi_2,\ 2\Delta = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Решение задачи (3)—(4) ищется в открытом характеристическом треугольнике D, опирающемся на отрезок $(y = 0,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$.

Задачу (3)—(4) можно привести к виду (0.1)—(0.2) с симметрично расположенными характеристиками, однако для этого нужно иметь явные уравнения характеристик. С другой стороны, один из основных результатов (теорема 2) теряет свой смысл при замене переменных, и поэтому мы выбираем форму (3) исследуемого уравнения.

Приведем формулировки основных результатов.

1°. Для произвольной функции $\varphi(x, y)$, $(x, y)\in D$, непрерывной при $y>0$, введем обозначение

$$\varphi^*(y) = \max_{x}\ |\varphi(x, y)|\quad (y>0). \tag{6}$$

Обозначим далее

$$\alpha_1 = a - bB + B_y + \Delta_y + B(B_x + \Delta_x),\ \alpha_2 = a - bB +$$
$$+ B_y + \Delta_y + B(B_x - \Delta_x),\ 2\Delta\alpha = |\alpha_1| + |\alpha_2|. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть функции a, b и yc непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ по x $2p+2$ раза $(p\geqslant 0)$, функции A, B и f — $2p+3$ раза, а функции ν и μ, соответственно, $2p+4$ и $2p+5$ раз; кроме того A и B непрерывно дифференцируемы в D по y.*

Если для некоторого $i\,(=1, 2)$

$$\int_0^y t\Delta^*(t)\, d\left\{ f_p^i(t) \exp\left(\int_t^y \alpha^*(\tau)\, d\tau \right)\right\} < +\infty \quad (y>0), \tag{8}$$

где

$$f_p^i(y) = \int_0^y \alpha_i^*(t_1)(y-t_1)\int_0^{t_1} \alpha_i^*(t_2)(t_1-t_2)\cdots$$

$$\cdots \int_0^{t_p} \alpha_i^*(t_{p+1})(t_p-t_{p+1})\, dt_{p+1}\cdots dt_1, \tag{8'}$$

то задача (3)—(4) имеет единственное решение U, обладающее непрерывными в $\overline{D}$ производными $\dfrac{\partial^k U}{\partial x^{k-l}\partial y^l}$ $(i=0, 1, 2;\ i \leqslant k \leqslant p+1)$. *Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i, μ_i и ν_i $(i=1, 2)$ соответствуют решения U_i. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что из оценки*

$$\sum_{k=0}^{2p+3} \max_{\overline{D}} \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f_1-f_2)\right| + \sum_{k=0}^{2p+4} \max_x \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\nu_1-\nu_2)\right| +$$

$$+\sum_{k=0}^{2p+5} \max_x \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\mu_1-\mu_2)\right| < \delta \tag{9}$$

следует

$$\sum_{l=0}^{2}\sum_{k=l}^{p+1} \max_{\overline{D}} \left|\frac{\partial^k (U_1-U_2)}{\partial x^{k-l}\partial y^l}\right| < \varepsilon. \tag{9'}$$

2°. Зафиксируем некоторую область Ω комплексной плоскости $z=x+it$, содержащую отрезок $(t=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$. Непрерывную в $\overline{D}$ функцию $\varphi(x, y)$ отнесем к классу $H(D, \Omega)$, если при каждом фиксированном $y\geqslant 0$ она аналитически продолжается по x в область Ω.

Теорема 2. *Если функции A, B, Δ, a, b, c, f, μ и ν принадлежат классу $H(D, \Omega)$, то задача (3)—(4) имеет единственное решение $U(x, y)\in H(D, \Omega_1)$, где область Ω_1 также содержит отрезок $(t=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ и зависит только от Ω.*

Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i, μ_i и ν_i $(i=1, 2)$ соответствуют решения U_i. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что если

$$|f_1(z, y)-f_2(z, y)|+|\mu_1(z)-\mu_2(z)|+|\nu_1(z)-\nu_2(z)|<\delta,\ z\in\Omega,\ y\geqslant 0, \tag{10}$$

то

$$|U_1(z, y)-U_2(z, y)|<\varepsilon,\ z\in\Omega_1,\quad y\geqslant 0. \tag{10'}$$

Упомянутый во введении пример И. С. Березина показывает, что из оценки (10) при $\operatorname{Im} z=0$, вообще говоря, не следует оценка (10) при $\operatorname{Im} z=0$. В то же время из этого примера, аналогичного известному примеру Адамара для уравнения Лапласа, и из теоремы 2 следует, что задача (3)—(4) может обладать свойствами, присущими задаче Коши для эллиптического уравнения.

§ 2. Система интегральных уравнений. Прежде всего заметим, что без ограничения общности условия (4) можно считать однородными

$$U(x, +0)=0, \ U_y(x, +0)=0 \quad (0 < x < 1). \tag{4'}$$

Действительно, если $U(x, y)$ — решение задачи (3)—(4), то функция

$$\widetilde{U}(x, y)=U(x, y)-\mu(x)-\int_x^{x+y} \nu(t)\, dt$$

является решением задачи (3)—(4') с измененным свободным членом.

Обозначив правую часть уравнения (3) через $F(x, y, U, U_x, U_y)$, перепишем его в следующих двух эквивалентных формах:

$$\begin{gathered}\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial}{\partial s_1}\sqrt{1+\Phi_2^2}\frac{\partial U}{\partial s_2}=F+(\Phi_{2y}+\Phi_1\Phi_{2x})\,U_x,\\ \sqrt{1+\Phi_2^2}\frac{\partial}{\partial s_2}\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial U}{\partial s_1}=F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,U_x,\end{gathered}\tag{11}$$

где через s_1 и s_2 обозначены составляющие с осью $x=0$ острый угол направления характеристик (5) при $i=1, 2$ соответственно.

Здесь учтены очевидные соотношения

$$\sqrt{1+\Phi_i^2}\frac{\partial}{\partial s_i}=\frac{\partial}{\partial y}+\Phi_i\frac{\partial}{\partial x} \quad (i=1, 2). \tag{11'}$$

Если U — решение задачи (3)—(4'), то уравнения (11) перепишутся в виде*

$$\begin{gathered}\sqrt{1+\Phi_2^2}\frac{\partial U}{\partial s_2}=\int_{l_1}\{F+(\Phi_{2y}+\Phi_1\Phi_{2x})\,U_x\}\,dy,\\ \sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial U}{\partial s_1}=\int_{l_2}\{F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,U_x\}\,dy,\end{gathered}\tag{12}$$

где через $l_i=l^i(x, y)$ $(i=1, 2)$ обозначен кусок характеристики, заключенный между точкой (x, y) и осью $y=0$.

Воспользовавшись формулами (11) и обозначив

$$V=U_x, \ W=\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial U}{\partial s_1}, \tag{13}$$

придем к системе

$$2V\Delta=\int_{l_2}\{F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,V\}\,dy-$$

---

* Здесь и далее мы пользуемся криволинейными интегралами второго рода, содержащими дифференциал ординаты.

$$-\int_{\gamma_1}^{y} \{F + (\Phi_{2y} + \Phi_1\Phi_{2x})\, V\}\, dy \equiv R\,(V,\ W), \tag{14}$$

$$W = \int_{\gamma_2}^{y} \{F + (\Phi_{1y} + \Phi_2\Phi_{1x})\, V\}\, dy \equiv S\,(V,\ W), \tag{15}$$

где

$$F = F\left(x,\, y,\, \int_{\gamma_1}^{y} W dy,\ V,\, W - \Phi_1 V\right). \tag{15'}$$

Таким образом, если существует непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение U задачи (3)—(4′), оно восстанавливается из некоторого решения системы (14)—(15) по любой из формул

$$U = \int_{\gamma_1}^{y} W dy, \quad U = \int_{0}^{y} (W - \Phi_1 V)\, dy. \tag{16}$$

§ 3. Сведение к системе (14)—(15). Система (14)—(15), вообще говоря, не эквивалентна задаче (3)—(4′).

Действительно, пусть, например, в уравнении (3) $b \equiv c \equiv f \equiv 0$, а функции A, B и a не зависят от x, $\Delta(0) = 0$. Легко проверить, что в этом случае система (14)—(15) имеет ненулевое решение

$$V = 1, \quad W = \int_{0}^{y} a\,(t)\, dt + \Phi_1 - B(0),$$

однако формулы (16) представляют различные функции, причем при $a \not\equiv 0$ ни одна из них не является решением уравнения (3).

Из решений системы (14)—(15) нужное нам решение выделяет следующая

Лемма 1. *Пусть система* (14)—(15) *имеет непрерывно дифференцируемое в* D *решение* $(V,\ W)$, *причем* $V(x,\ +0) = 0$ *и* (см. (6))

$$\int_{0}^{y} |W_x - (\Phi_1 V)_x|^*\, dy < +\infty \quad (y > 0). \tag{17}$$

Тогда функция U, *восстанавливаемая по любой из формул* (16), *является одним и тем же решением задачи* (3)—(4′).

Доказательство. Из (14) и (15)

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\,\frac{\partial W}{\partial s_2} - \sqrt{1+\Phi_1^2}\,\frac{\partial}{\partial s_1}\,(W - 2V\Delta) =$$
$$= (\Phi_{1y} - \Phi_{2y} + \Phi_{1x}\Phi_2 - \Phi_{2x}\Phi_1)\, V \quad (y > 0).$$

С другой стороны, согласно формулам (11′) это же выражение записывается в виде

$$2\,\{(V\Delta)_y + \Phi_1\,(V\Delta)_x - \Delta W_x\}.$$

Воспользовавшись соотношениями (5'), получим, что

$$V_y = W_x - (\Phi_1 V)_x.$$

Проинтегрировав это равенство, из условий леммы получим

$$V = \int_0^y \{W_x - (\Phi_1 V)_x\}\, dy.$$

Таким образом, функция

$$U = \int_0^y (W - \Phi_1 V)\, dy$$

дифференцируема по x и $U_x = V$. Так как, очевидно, $U_y = W - \Phi_1 V$, то по (11')

$$\sqrt{1+\Phi_1^2}\, \frac{\partial U}{\partial s_1} = U_y + \Phi_1 U_x = W$$

или, согласно уравнению (15),

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\, \frac{\partial}{\partial s_2} \sqrt{1+\Phi_1^2}\, \frac{\partial U}{\partial s_2} = F + (\Phi_{1y} + \Phi_2 \Phi_{1x})\, U_x,$$

где $F = F(x, y, U, U_x, U_y)$.

Лемма доказана, так как, очевидно $U(x, +0) = 0$ и $U_y(x, +0) = 0$, а уравнения (11) эквивалентны уравнению (3).

§ 4. **Вспомогательные построения.** В этом параграфе устанавливаются некоторые вспомогательные предложения, на которые опирается доказательство основных теорем.

1°. Рассмотрим уравнение

$$U(y) = \int_0^y K(t) U(t)\, dt + f(y) \quad (0 < y < y_0), \tag{18}$$

где функции K и f непрерывны при $y > 0$ и

$$\int_0^{y_0} K(t)\, dt = \infty. \tag{18'}$$

Уравнение (18) иногда не имеет решения (например, при $f = 1$ и $K(y) > 0$). С другой стороны, если $K > 0$, то функция

$$U_0(y) = \exp\left\{\int_{y_0}^y K(t)\, dt\right\} \tag{19}$$

очевидно является непрерывным ненулевым решением однородного уравнения.

Если функция f удовлетворяет условию

$$\int_0^{y_0} \frac{K(t)\, |f(t)|}{U_0(t)}\, dt < +\infty, \tag{20}$$

то единственным решением уравнения (18), удовлетворяющим условию

$$U(y) = U_0(y)\, o(1),\ y \to +0 \tag{20'}$$

будет функция

$$u(y) = f(y) + U_0(y)\int_0^y \frac{K(t)}{U_0(t)} f(t)\, dt = U_0(y)\int_0^y \frac{f'(t)}{U_0(t)}\, dt, \tag{21}$$

причем правая часть этой формулы соответствует дифференцируемой функции f.

Формула (21), очевидным образом видоизмененная для уравнения на характеристической кривой, в дальнейшем будет неоднократно применена.

Лемма 2. *Пусть ряд* $\varepsilon(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(y)$, *где* $\varepsilon_n(y) \geqslant 0$ — *непрерывные при* $0 \leqslant y \leqslant y_0$ *функции, равномерно сходится, и* $\varepsilon(y)$ *удовлетворяет условию* (20). *Если*

$$\omega_n(y) \leqslant \int_0^y K(t)\, \omega_{n-1}(t)\, dt + \varepsilon_n(y)\ (n \geqslant 1,\ \omega_0 = \varepsilon_0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0), \tag{22}$$

то ряд $\omega(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(y)$ $(0 \leqslant y \leqslant y_0)$ *равномерно сходится и его сумма удовлетворяет условию* (20').

Очевидно, что можно ограничиться случаем, когда в соотношениях (22) стоит знак равенства. В этом случае

$$\omega_n(y) = \int_0^y K(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_{n-k}}{k!}\left(\int_t^y K(\tau)\, d\tau\right)^k dt + \varepsilon_n(y),$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{p} \omega_n(y) = \int_0^y K(t) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left(\int_t^y K(\tau)\, d\tau\right)^k \sum_{l=0}^{p-k} \varepsilon_l(t)\, dt + \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_n(y) \quad (p \geqslant 0).$$

В силу условий леммы можно под знаком интеграла перейти к пределу при $p \to +\infty$, поэтому

$$\omega(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(y) = U_0(y) \int_0^y \frac{K(t)\,\varepsilon(t)}{U_0(t)}\, dt + \varepsilon(y).$$

Поскольку функция ω, очевидно, непрерывна, по известной теореме Дини (см., например, [10], стр. 454) ряд $\sum \omega_n$ сходится равномерно.

Сделаем некоторые замечания. Легко усмотреть, что если в оценке (22) к функции K прибавить интегрируемую при $y > 0$ функцию K_1, то утверждение леммы 2 останется справедливым. Менее очевидно следующее замечание: лемма 2 останется справедливой, если вместо (22)

$$\omega_n(y) \leqslant \int_0^y K(t)\left\{1+\int_t^y a(\tau)\,d\tau\right\}\omega_{n-1}(t)\,dt+\varepsilon_n(y), \qquad (22')$$

где функция $a(y) \geqslant 0$ интегрируема при $y \geqslant 0$.

Нетрудно видеть, что достаточно доказать существование решения уравнения

$$U(y)=\int_0^y\left\{K(t)\,U(t)+a(t)\int_0^t K(\tau)\,U(\tau)\,d\tau\right\}dt+f(y), \qquad (18')$$

удовлетворяющего условию (20), если f этому условию удовлетворяет. Для этого, обозначив

$$F(y)=\int_0^y K(t)\,U(t)\,dt,$$

перепишем (18′) в виде

$$U(y)=F(y)+\int_0^y a(t)\,F(t)\,dt+f(y),$$

откуда

$$F(y)=U(y)-f(y)-\int_0^y a(t)\exp\left(-\int_t^y a(\tau)\,d\tau\right)(U(t)-f(t))\,dt$$

или

$$U(y)=\int_0^y\left\{K(t)+a(t)\exp\left(-\int_t^y a(\tau)\,d\tau\right)\right\}U(t)\,dt+$$
$$+\int_0^y a(t)\exp\left(-\int_t^y a(\tau)\,d\tau\right)f(t)\,dt+f(y),$$

и это уравнение, согласно первому замечанию к лемме, имеет нужное нам решение.

2°. Докажем, что уравнение*

$$U\Delta=\int_{l_2}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial s_2}+\alpha\Delta\right)U\,dy+\iint(\beta U+f)\,dx\,dy, \qquad (23)$$

где функции $\max_x|\alpha|$, $\max_x|\beta|$ и $\max_x|f|$ интегрируемы при $y \geqslant 0$, имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $U(x,+0)=0$. Для этого обозначим

$$\alpha_1(x,y)=(s_2)\int_y^{y_0}\alpha\,dy,$$

---

* Двойной интеграл здесь и далее считается распространенным по характеристическому треугольнику с вершиной в точке (x, y).

где $y_0 > 0$ — некоторая постоянная, а интеграл взят по части характеристики с направлением s_2, проходящей через точку (x, y). Зафиксировав определенную характеристику и воспользовавшись формулой (21), без труда можно доказать, что уравнение (23) эквивалентно следующему:

$$U = e^{\alpha_1} \int_{l_2} \frac{e^{-\alpha_1}}{\Delta} \frac{\partial}{\partial s_2} \left[\iint (\beta U + f)\, dxdy \right] dy. \tag{23'}$$

Обозначим теперь через

$$\xi = \varphi(\eta, x, y)$$

уравнение характеристики с направлением s_1, проходящей через точку (x, y). Так как функция φ непрерывно дифференцируема по x, то уравнение (23′) можно переписать в виде

$$U = 2e^{\alpha_1} \int_{l_2} e^{-\alpha_1} \int_{l_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\beta U + f)\, d\eta dy, \tag{24}$$

а к этому уравнению уже без помех можно применить обычный метод последовательных приближений.

3°. Пусть теперь функции α, β и f непрерывно дифференцируем в $\overline{D}$ по x $p+1$ раз $(p \geqslant 0)$.

Рассмотрим оператор

$$LV = 2\int_{l_2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial s_2} + \beta\Delta \right) V dy + \int_{l_2 - l_1} (\alpha V + f)\, dy =$$

$$= 2\int_{l_2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial s_2} + \beta\Delta \right) V dy + \iint (\alpha V + f)_x\, dxdy. \tag{25}$$

В частном случае, когда $b \equiv c \equiv 0$, система (14) — (15) сводится к уравнению

$$2V\Delta = LV, \ (x, y) \in D, \tag{26}$$

где

$$\alpha = a + \Phi_{2y} + \Phi_1 \Phi_{2x}, \ \beta = -\Phi_{2x}. \tag{26'}$$

Это уравнение, как мы увидим ниже, уже заключает в себе все те специфические особенности задачи (3)—(4′), которые являются следствием вырождения типа уравнения (3).

Рассмотрим далее функции $V^k_{p-k}(x, y)$ $(k = 0, 1, \cdots, p)$, определяемые системой

$$2V^k_{p-k}\Delta = 2\int_{l_2} \Delta' \, V^k_{p-k} dy + \iint \sum_{l=0}^{k+1} C^l_{k+1} \, a^{(k+1-l)} \, V^l_{p-l}\, dxdy +$$

$$+ \iint f^{(k+1)} dxdy, \ k = 0, 1, \cdots, p-1; \quad V^p_0 \equiv 0 \ (p \geqslant 0), \tag{27}$$

где функции a и f дифференцированы по x, а функции A и B считаются не зависящими от x.

Нетрудно убедиться, что решение системы (27) сводится к последовательному решению уравнений типа (24), так что существует нужная нам функция $V_p^0(x, y)$ и $V_p^0(x, +0) = 0$.

В случае, когда A и B зависят и от x, уравнения (27) составляются следующим образом: уравнение (26) формально дифференцируется по x k раз ($k=0, 1, \cdots, p-1$) и вместо $\dfrac{\partial^k V}{\partial x^k}$ подставляется V_{p-k}^k.

В этом случае мы получим, разумеется, гораздо более громоздкие выражения, однако и в этом случае оказывается справедливой следующая

Лемма 3. *Пусть*

$$f_p(x, y) = 2V_p^0\Delta - LV_p^0, \ (x, y) \in D. \tag{28}$$

Тогда (см. обозначение (6))

$$|f_p| \leqslant \text{const} \int_0^y \alpha^*(t) \int_t^y \Delta^*(\tau)\, d\tau \int_0^t \alpha^*(t_1)(t-t_1) \times$$

$$\times \int_0^{t_1} \alpha^*(t_2)(t_1-t_2) \cdots \int_0^{t_{p-2}} \alpha^*(t_{p-1})(t_{p-2}-t_{p-1})\, t_{p-1}^2\, dt_{p-1} \cdots dt_1\, dt \ \ (p > 1).$$

Доказательство наметим в предположении, что A и B от x не зависят.

Обозначим

$$\alpha_k = V_{p-k}^k - \frac{\partial}{\partial x} V_{p-k+1}^{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, p).$$

Из формул (27) имеем

$$2V_p^0\Delta - LV_p^0 = 2V_p^0\Delta - 2\int_{l_0} \Delta' V_p^0\, dy -$$

$$- \iint (\alpha V_p^0)_x\, dx dy = \iint \alpha\alpha_1\, dx dy. \tag{29}$$

С другой стороны, функции α_k удовлетворяют системе

$$2\alpha_k\Delta = 2\int_{l_1} \Delta'\alpha_k\, dy + \iint \alpha\alpha_{k+1}\, dx dy +$$

$$+ \iint \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i\, \alpha^{(k-i)} \alpha_{i+1}\, dx dy \quad (k = 1, 2, \cdots, p-1;\ p > 1). \tag{30}$$

$$2\alpha_p\Delta = -2\Delta \frac{\partial}{\partial x} V_1^{p-1} = 2\int_{l_1} \Delta'\alpha_p\, dy -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \iint \sum_{i=0}^{p-1} C_{k+1}^i\, \alpha^{(k+1-i)}\, V_{p-i}^i\, dx dy - \iint f^{(p-1)}\, dx dy.$$

Применив результаты предыдущего пункта к системе (30), получим оценки (см. обозначение (6))

$$\alpha_1^* \leq \text{const} \int_0^y (y-t)\, \alpha^*(t)\, \alpha_1(t)\, dt,$$

$$\alpha_k^* \leq \text{const} \int_0^y (y-t) \left(\alpha\alpha^* + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^*\right) dt \leq$$

$$\leq \text{const} \int_0^y (y-t)\, \alpha^*(t)\, \alpha_{k-1}(t)\, dt \quad (k = 2, 3, \cdots, p-1),$$

$$\alpha_p^* \leq \text{const}\ y^2.$$

Применив эти оценки к формуле (29), получим оценку (28′).

4°. Применим к уравнению (26) следующий метод последовательных приближений:

$$2V_n\Delta = 2 \int_{l_2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial s_2} - \Psi_{2x}\Delta\right) V_n\, dy +$$

$$+ \iint (\alpha V_{n-1} + f)_x\, dxdy. \tag{31}$$

Согласно результатам пункта 2°, при заданном V_{n-1} это уравнение имеет единственное решение V_n, удовлетворяющее условию $V_n(x, +0) = 0$.

Обозначим $\omega_n = V_n - V_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

Лемма 4. *Если α и f принадлежат $H(D, \Omega)$ (см. § 1, п.2°), то*

$$|\omega_n(x, y)| \leq M_1 M_2^n y^{2n}, \tag{32}$$

где M_1 и M_2 не зависят от x и y.

Доказательство проведем в случае, когда A и B не зависят от x. Тогда (см. п. 2°)

$$\omega_n = 2 \iint_{l_2\ l_1} (\alpha\omega_{n-1})_x\, d\eta dy \quad (n \geq 2), \tag{33}$$

$$\omega_1 = 2 \iint_{l_2\ l_1} f_x\, dxdy.$$

Пусть теперь $\alpha, f \in H(D, \Omega)$. Тогда, как известно,

$$\left|\frac{\partial^k \alpha}{\partial x^k}\right|, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right| \leq C_1 C_2^k k! \ (k \geq 0), \tag{34}$$

где C_1 и C_2 не зависят от x и y.

С другой стороны, из формул (33)

$$\omega_n = 2^n \iint_{l_2\ l_1} \frac{\partial}{\partial x} \alpha \iint_{l_2\ l_1} \frac{\partial}{\partial x} \alpha \cdots \iint_{l_2\ l_1} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha\omega_1)\, d\eta_n dy_n \cdots d\eta_1 dy_1. \tag{33′}$$

Обозначим

$$A_n = \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, \eta_1) \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, \eta_2) \cdots \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(x, \eta_n) w_1(x, \eta_n) \right] \right|.$$

Тогда, применив оценку (34), получим

$$A_n \leqslant C_3^n \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = n} i_1!\, i_2! \cdots i_n! = C_3^n\, n! \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{i_{n-1}} 1 \leqslant$$

$$\leqslant C_3^n (2n+1)^n \leqslant C_4^n\, n!,$$

откуда и из (33′) следует оценка (32).

В случае, когда A и B зависят и от x, формула (33′) сильно усложнится, так как в формуле (31) контуры l_1 и l_2 могут деформироваться при изменении x. Однако можно показать, что это повлияет только на значения постоянных M_1 и M_2.

§ 5. **Доказательство теорем.** 1°. В частном случае, когда $b = c = 0$, теорема 2 непосредственно следует из леммы 4. Действительно, из оценки (32) следует, что при малых y последовательность V_n, построенная по формуле (31), равномерно сходится к решению V уравнения (26). В то же время, формально продифференцировав формулу (31) по x k раз ($k \geqslant 1$), можно показать, что функция V удовлетворяет оценке типа (34), т. е. принадлежит классу $H(D, \Omega)$. Это замечание очевидно в случае, когда функции A и B от x не зависят, так как в этом случае формулы (33) можно дифференцировать по x под знаком интеграла.

Если же A и B зависят от x, соответствующие формулы имеют, естественно, довольно громоздкий вид, что, однако, не отражается на результате. Что же касается устойчивости в смысле формулировки теоремы 2, то она следует из того факта, что если $|f(z, y)| < \delta$ при $z \in \Omega$, $y \geqslant 0$, то в оценке (34) для функции f можно положить $C_1 = \delta$, а число M_1 в оценке (32), как нетрудно видеть, можно взять сколь угодно малым при $\delta \to 0$.

В общем случае, когда b или C не равны тождественно нулю, идея доказательства та же, и мы лишь набросаем схему построения последовательности (V_n, W_n).

Положим (см. (14)—(15))

$$\begin{gathered}
2V_n\Delta = 2 \int_{l_2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial s_2} - \Phi_{2x}\Delta \right) V_n\, dy + \iint \{F + (\Phi_{2y} + \Phi_1 \Phi_{2x}) V_{n-1}\}_x\, dx dy, \\
W_n = \int_{l_1} \{F + (\Phi_{1y} + \Phi_2 \Phi_{1x}) V_{n-1}\}\, dy, \quad n \geqslant 1, \quad V_0 \equiv 0,
\end{gathered} \tag{35}$$

причем вместо V и W в функцию F (см. (15′)) подставлены соответственно значения V_{n-1}, W_n. Второе из этих уравнений определяет функцию W_n через V_{n-1}, так как фактически является вольтерровским уравнением с непрерывным ядром (при $c \equiv 0$ можно даже выписать явную формулу). Решив первое из уравнений (35) относительно V_n (см. п. 2° § 4), можно, повторив все этапы доказательства леммы 4, получить оценку (32), которая, как уже указывалось, позволяет доказать теорему 2.

2°. Покажем сначала, что при $b = c = 0$ теорема 1 непосредственно следует из лемм 1 и 3. Для этого построим для системы (14)—(15) разрешающую последовательность

$$
\begin{aligned}
2V_n\Delta &= R\,(V_{n-1},\ W_n),\\
W_n &= S\,(V_{n-1},\ W_n),\ n\geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

где принято $V_0 = V_p^0$ (см. п. 3° § 4).

При $b \equiv c \equiv 0$ эта система сводится к одному первому уравнению, причем, согласно лемме 3

$$
2\,(V_1 - V_p^0)\,\Delta = f_p,
\tag{37}
$$

откуда, обозначив $\omega_n = V_n - V_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$, получим, что

$$
2\omega_n\Delta = \int_{l_1}^{x} \alpha_2\,\omega_{n-1}\,dy - \int_{l_1}^{x} \alpha_1\,\omega_{n-1}\,dy \quad (n\geqslant 2),
$$

$$
2\omega_1\Delta = f_p,
\tag{37'}
$$

где α_1 и α_2 определены в п. 2° § 1.

В тех же обозначениях из формулы (37′), положив $2\omega_n\Delta = \varepsilon_n$, получим оценку

$$
\overset{*}{\varepsilon}_n(y) \leqslant \int_0^y \alpha^*(t)\,\overset{*}{\varepsilon}_{n-1}(t)\,dt \quad (n\geqslant 2),\quad \overset{*}{\varepsilon}_1(y) = \overset{*}{f}_p(y).
\tag{38}
$$

Если теперь выполняется критерий (8) при $i = 1$, то, применив лемму 2 к последовательности $\overset{*}{\varepsilon}_n$, получим, что последовательность $\{V_n\}_0^{+\infty}$ равномерно сходится. Дифференцируемость функции $V = \lim V_n$ по x вытекает из следующих соображений: если формально продифференцировать уравнение (36) по x, (а это допустимо, согласно условиям теоремы 1, и так как функция V_n зависит от производных f по x до $p+1$ порядка), то для определения V_{nx} и W_{nx} получим *такую же* систему, как и (36), отличающуюся от (36) лишь тем, что f заменено на f_x и справа добавлены слагаемые, являющиеся интегралами от V_n и W_n. В результате вместо оценки (38) (при $b \equiv c \equiv 0$) для функции $\varepsilon_n = 2(V_n - V_{n-1})_x\,\Delta$ получим оценку типа (22) и можем применить лемму 2 (так как сходимость $\{V_n\}_0^{+\infty}$ уже доказана).

Нетрудно провести такие же рассуждения и в общем случае, когда $b \equiv 0$ или $c \equiv 0$, только нужно воспользоваться замечаниями к лемме 2.

Таким образом, воспользовавшись леммой 1, можно утверждать, что решение задачи (3)—(4) существует и обладает дифференциальными свойствами, указанными в теореме 1. Последнее вытекает из возможности формального дифференцирования системы (36) (и применения леммы 3 для доказательства сходимости решения), вообще говоря, не более чем $p+1$ раз. Из изложенного следует также устойчивость в указанном в теореме 1 смысле.

Остается доказать утверждение теоремы 2 о единственности решения. Рассмотрим и здесь сначала простейший случай $b=c=0$. Пусть $V(x, y)$ — решение однородной системы (14)—(15) (сходящейся к одному уравнению), обладающее требуемой гладкостью.

Так как уравнение (31) удовлетворяется при $f=0$ и $V_n=V$, то, применив формулу (24), получим

$$V = e^{\beta} \int\limits_{l_2} e^{-\beta} \int\limits_{l_1}^{*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\alpha_1 V)_x \, d\tau dy, \tag{39}$$

где β — интеграл функции $-\Phi_{2x}$ по соответствующему куску характеристики.

Согласно условиям теоремы равенство (39) можно дифференцировать p раз по x. Поэтому, составив p-тую итерацию формулы (39) и воспользовавшись тем, что функция $\dfrac{\partial^{p+1} V}{\partial x^p \, \partial y}$ непрерывна в $\overline{D}$, без труда получим оценку (см. обозначения (6) и (8'))

$$V^* (y) \leqslant \text{const } f_p^1 (y).$$

С другой стороны, обозначив $V\Delta = \omega$, из уравнения (14) имеем

$$\omega^* (y) \leqslant \int\limits_0^y \alpha^* (t) \, \omega^* (t) \, dt \quad (y > 0). \tag{39'}$$

И, наконец, воспользовавшись условием (8) и применив лемму 2 (при $\varepsilon_0 = \omega_n = \omega$, $\varepsilon_n = 0$ $(n \geqslant 1)$), получим, что $\omega^* = 0$, т. е. $V=0$, откуда следует, что $W \equiv 0$ и, значит, $U \equiv 0$ (см. (16)).

§ 6. **Задача Коши для системы**. Рассмотрим систему

$$U_{iy} + A_i U_{1x} + B_i U_{2x} = F_i (x, y, U_1, U_2) \; (i=1, 2; \; y > 0. \; 0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{40}$$

гиперболическую при $y > 0$ и, возможно, вырождающуюся при $y=0$, т. е.

$$\Delta^2 (x, y) = (A_1 - B_2)^2 + 4A_2 B_1 \; (y > 0), \; \Delta (x, +0) \geqslant 0. \tag{40'}$$

Изучается задача Коши

$$U_i (x, +0) = \mu_i (x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad i = 1, 2). \tag{41}$$

Частный случай этой задачи изучал С. А. Терсенов [7]. Характеристики системы (40) определяются из уравнений

$$dx = \lambda_i (x, y) \, dy \quad (i = 1, 2), \tag{42}$$

где

$$2\lambda_1 = \Delta - (A_1 + B_2), \; 2\lambda_2 = -\Delta - (A_1 + B_2). \tag{42'}$$

Без ограничения общности можно считать, что $A_1 \geqslant B_2$. Случай $A_2 = B_1 = 0$ неинтересен, так как, очевидно, в этом случае задача

(40)–(41) корректна. Дополнительно потребуем, чтобы при $y>0$ $A_2>0$ (это условие можно было бы наложить на B_1). Обозначив

$$c = A_1 - B_2 + \Delta \geqslant \Delta, \ c_1 = 2\Delta - c < \Delta,$$

$$2A_2V_1 = 2A_2U_1 - cU_2; \ 2A_2V_2 = 2A_2U_1 + c_1U_2, \tag{43}$$

сведем систему (40) к виду

$$\sqrt{1+\lambda_1^2}\,\frac{\partial V_1}{\partial s_1} \equiv V_{1y} - \lambda_1 V_{1x} = F_1 - \frac{c}{2A_2}F_2 - \left\{\left(\frac{c}{2A_2}\right)_y - \lambda_1\left(\frac{c}{2A_2}\right)_x\right\}U_2, \tag{44}$$

$$\sqrt{1+\lambda_2^2}\,\frac{\partial V_2}{\partial s_2} \equiv V_{2y} - \lambda_2 V_{2x} =$$

$$= F_1 - \frac{c}{2A_2}F_2 + \frac{\Delta}{A_2}F_2 + \left\{\left(\frac{c_1}{2A_2}\right)_y - \lambda_2\left(\frac{c_1}{2A_2}\right)_x\right\}U_2, \tag{45}$$

где в аргументах функций F_1 и F_2 подставлено

$$U_1 = V_1 + \frac{c}{2\Delta}(V_2 - V_1), \ U_2 = \frac{A_2}{\Delta}(V_1 - V_2). \tag{46}$$

Как обычно, без ограничения общности, в условиях (41) можно положить $\psi_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$. Тогда в обозначениях

$$V = U_2, \ W = V_1, \ \omega A_2 = \Delta \tag{47}$$

задача (40)–(41) сведется к следующей системе:

$$\omega V = \int\limits_{l_2 - l_1} F dy + \int\limits_{l_2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s_2} + \Delta\beta + \omega F_2\right) V\,dy, \tag{48}$$

$$W = \int\limits_{l_1} F d\,y, \tag{49}$$

где

$$F = F_1 - \frac{c}{2A_2}F_2 - V\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{c}{2A_2}\right), \ \beta = \left(\frac{c}{2A_2}\right)_x \tag{50}$$

с учетом обозначений (46) и (47) в аргументах функций F_1 и F_2.

Разумеется, как и в случае одного уравнения второго порядка, система (48)–(49), вообще говоря, не эквивалентна задаче (40)–(41), однако не представляет труда доказать здесь лемму, отличающуюся от леммы 1 лишь заменой в условии (17) функции Φ_1 на $\dfrac{c}{2A_2}$.

Как мы видим, система (48)–(49) вполне аналогична системе (14)–(15), и поэтому при ее исследовании можно применить развитый выше метод. Не останавливаясь на несущественных видоизменениях доказательств, приведем формулировки результатов в линейном случае

$$F_i = a_i u_1 + b_i u_2 - f_i \ (i=1, 2;\ y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{51}$$

Как обычно, через D обозначим открытый характеристический треугольник, опирающийся на отрезок $(y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$. Обозначим также

$$2d = A_1 + B_2,\ 2A_2 e = c,\ \alpha_1 = b_1 + e_y + de_x + \\ + e\,(a_1 - ea_2 - b_2),\ \alpha_2 = a_1 + \omega_y + d\omega_x,\ \omega\alpha = |\alpha_1| + |\alpha_2|. \tag{52}$$

Аналог теоремы 1 формулируется следующим образом: пусть функции a_i, b_i и c непрерывны в $\overline{D}$ вместе с производными по x до $2p+2$-го $(p \geqslant 0)$ порядка, A_i, B_i и f_i — до $2p+3$-го, а μ_i до $2p+4$-го порядка; кроме того, пусть функции A_i, B_i и c непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ по y. Тогда, если (см. обозначение (6)) при некотором $i\,(=1,\ 2)$

$$\int_0^y t\omega^*(t)\ \frac{d}{dt}\left\{f_p^i(t)\exp\left(\int_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right)\right\}dt < \infty \quad (y > 0), \tag{53}$$

где

$$f_p^i(y) \leqslant \int_0^y A_2(t_1)\int_0^{t_1} \alpha_i^*(t_2)\cdots\int_0^{t_{2p}} A_2^*(t_{2p+1})\int_0^{t_{2p+1}} \alpha_i^*(t_{2p+2})\,dt_{2p+2}\cdots dt_1, \tag{53'}$$

то задача (40)—(41) имеет единственное решение (U_1, U_2), обладающее непрерывными в $\overline{D}$ производными

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}\ (i = 1,\ 2;\ j = 0,\ 1;\ j \leqslant k \leqslant p+1).$$

Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям μ_i^j и $f_i^j\,(i,\ j = 1,\ 2)$ соответствуют решения $U^j = (U_1^j, U_2^j)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из оценки

$$\sum_{k=0}^{2p+3}\sum_{j=1}^{2}\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,(f_j^1 - f_j^2)\right| + \\ + \sum_{k=0}^{2p+1}\sum_{j=1}^{2}\max_{x}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,(\mu_j^1 - \mu_j^2)\right| < \delta \tag{54}$$

следует, что

$$\sum_{l=0}^{1}\sum_{k=l}^{p+1}\sum_{j=1}^{2}\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial^k (U_j^1 - U_j^2)}{\partial x^{k-l}\,\partial y^l}\right| < \varepsilon. \tag{54'}$$

Теорема 2 остается справедливой и для задачи (40)—(41), если функции A_i, B_i, a_i, b_i, f_i $(i = 1,\ 2)$, c, d, e и ω принадлежат классу $H(D,\ \Omega)$.

§ 7. **Другие обобщения и уточнения**. 1°. Теорему 1 можно обобщить на случай, когда правая часть уравнения (3) является нелинейной функцией $F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)$. Для простоты остановимся на случае $p = 0$. Пусть функция F дважды непрерывно дифференцируема по x в области $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant h,\ \max\{|U - \mu|,\ |U_x - \mu_x|,\ |U_y - \nu|\} \leqslant \gamma = \mathrm{const})$, и в этой же области существуют непрерывные производные F_u, F_{u_x}, F_{u_y} (это условие можно было бы заменить условием Липшица). Тогда, если

$$\int\limits_0^y t\Delta^*(t)\,d\left\{\int\limits_0^t \beta(\tau)(t-\tau)\,d\tau\,\exp\left(\int\limits_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right)\right\}<\infty\quad(y>0), \tag{55}$$

где (см. обозначение (6))

$$\beta(y)=\{B_y+\Delta_y+B(B_x+\Delta_x)\}^*+a(y)+b(y)B^*, \tag{55'}$$

$$a(y)=\max_{x,\,u,\,u_x,\,u_y}|F_{u_x}|,\ b(y)=\max_{x,\,u,\,u_x,\,u_y}|F_{u_y}|,\ \alpha\Delta=\beta,$$

то в некоторой области $D_1=D\cap(0\leqslant y\leqslant h_1<h,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ (D — основной характеристический треугольник) соответствующая нелинейная задача (3)—(4) имеет единственное решение U, обладающее непрерывными в $\overline{D}_1$ производными $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^{2-i}\partial y^i}$ $(i=0,\ 1,\ 2)$. Устойчивость решения характеризуется оценками (9) и (9') при $p=0$ (с заменой области D на D_1).

Нетрудно сформулировать соответствующий результат и при $p>0$, а также перенести эти обобщения на задачу (40)—(41).

2°. Теорема 1 для задачи (40)—(41) (см. § 6) останется справедливой, если в правой части системы (40) добавить член вида

$$\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^y K_j^i(x,\ y,\ \tau)\,U_j(x,\tau)\,d\tau\quad(i=1,\ 2;\ y>0), \tag{56}$$

где непрерывные функции K_j^i достаточно гладкие по x.

Для доказательства этого утверждения достаточно повторить схему § 5 и воспользоваться замечаниями к лемме 2. С другой стороны, уравнение (3) обозначением $U_x=U_1$, $U_y=U_2$ сводится к системе (40) с добавкой члена вида (56). Таким образом, задачу (3)—(4) можно считать частным случаем задачи (40)—(41). Отметим также, что добавка (56) может содержать также криволинейные интегралы вольтерровского типа.

3°. В ходе доказательства теоремы 1 фактически был получен также следующий результат: пусть (в обозначениях (6) и (7)) для некоторого i $(=1,\ 2)$

$$\int\limits_0^y \Delta^*(t)\exp\left\{\int\limits_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right\}df_p^i(t)<\infty\quad(y>0), \tag{57}$$

где

$$f_p^i(y)=\int\limits_0^y \alpha_i^*(t_1)(y-t_1)\,y\int\limits_0^{t_p}\alpha_i^*(t_{p-1})\,(t_p-t_{p-1})\dot t_{p-1}\,dt_{p-1}\cdots dt_1,\quad(p\geqslant 0) \tag{57'}$$

и функции a, b, yc непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ по x $r+2$ раза $(r\geqslant p)$, A, B и f — $r+3$ раза, а ν и μ, соответственно, $r+4$ и $r+5$ раз, кроме того, A и B непрерывно дифференцируемы в D по

y. Тогда существует решение U задачи (3)—(4) (получаемое методом последовательных приближений п. 1° § 5), обладающее непрерывными производными $\frac{\partial^{s+2} U}{\partial x^{s+2-i}\,\partial y^i}$ ($i=0, 1, 2$; $s=r-p>0$). В этом случае единственности решения доказать не удалось, однако нетрудно видеть, что если решение единственно, то оно устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i, μ_i, ν_i $(i=1, 2)$ соответствуют решения U_i. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из оценки

$$\sum_{k=0}^{n+3} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1-f_2) \right| + \sum_{k=0}^{n+4} \max_{x} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\nu_1-\nu_2) \right| +$$

$$+\sum_{k=0}^{n+5} \max_{x} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mu_1-\mu_2) \right| < \delta \quad (p \leqslant n \leqslant r) \tag{58}$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{k=i}^{n-p+2} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^k (U_1-U_2)}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i} \right| < \varepsilon. \tag{58'}$$

Критерий существования (57) при $r=2p$ заметно сильнее критерия корректности (8).

Нетрудно сформулировать соответствующее уточнение и для задачи (40)—(41).

4°. Теорему 1 можно усилить, отказавшись от непрерывности функций a, b и yc при $y=0$. Действительно, в доказательстве ничего не нужно менять, если предположить, что (см. обозначение (6)) функции $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} a\right)^*$, $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} b\right)^*$ и $y\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} c\right)^*$ ($i=1, 2$; $k=0, 1, \cdots 2p+2$) (или функции $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} a_i\right)^*$ и $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} b_i\right)^*$ ($i=1, 2$; $k=0, 1, \cdots, 2p+2$) в задаче (40)—(41)) интегрируемы при $y \geqslant 0$.

Что же касается функции f, то в условиях теоремы 1 можно потребовать, чтобы функции $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} f\right)^*$ ($k=0, 1, \cdots, 2p+3$) мажорировались некоторой функцией $g(y) \geqslant 0$, интегрируемой при $y>0$. В этом случае нетрудно доказать следующий результат: если в условии (8) под знаком интеграла заменить сомножитель t на $\int_0^t g(\tau)\,d\tau$, то существует единственное U задачи (3)—(4) с непрерывными в $\bar{D}$ производными $\frac{\partial^k U}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i}$ ($i=0, 1$, $0 \leqslant k \leqslant p+2$) и непрерывными при $y>0$ производными

$$\left| \frac{\partial^{k+2} U}{\partial x^k\,\partial y^2} \right| \leqslant \text{const}\; g(y) \quad (k=0, 1, \cdots, p). \tag{59}$$

Вместо оценок (9) и (9′) устойчивость характеризуется, соответственно, следующими оценками:

$$\sum_{k=0}^{2p+3} \max_x \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| < \varepsilon g(y) \quad (y > 0),$$

$$\sum_{k=0}^{2p+4} \max_x \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\nu_1 - \nu_2) \right| + \sum_{k=0}^{2p+5} \max_x \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mu_1 - \mu_2) \right| < \varepsilon, \tag{60}$$

$$\sum_{l=0}^{1} \sum_{k=l}^{p+2} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^k (U_1 - U_2)}{\partial x^{k-l}\, \partial y^l} \right| < \varepsilon,$$

$$\sum_{k=0}^{p} \max_x \left| \frac{\partial^{k+2} (U_1 - U_2)}{\partial x^k\, \partial y^2} \right| < \varepsilon g(y), \ (y > 0). \tag{60′}$$

Соответствующий результат можно сформулировать и для задачи (40)—(41).

5°. Если дополнительно потребовать непрерывной n-кратной $(0 \leqslant n \leqslant p)$ дифференцируемости параметров задачи (3)—(4) в $\overline{D}$ по y то, очевидно, решение U будет иметь непрерывные в $\overline{D}$ производные $\dfrac{\partial^k U}{\partial x^{k-i}\, \partial y^i}$ $(i = 0, 1, \cdots, n+2;\ i \leqslant k \leqslant p+2)$. Соответственно усилится характеристика устойчивости (9)—(9′).

6°. Очевидно, что задача (3)—(4) при $\mu \equiv \nu \equiv 0$ (или (40) — (41) при $\mu_l \equiv 0$) всегда имеет хотя бы одно дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение, если в условиях теоремы 1 при $p = 0$ вместо оценки (8) потребовать, чтобы функции $f^*(y)$ и $(f_x)^*$ (или функции f_l^* и $(f_{lx})^*$ в случае задачи (40)—(41)) достаточно быстро стремились к нулю при $y \to +0$.

§ 8. **Анализ результатов**. 1°. Для сравнения полученных результатов (теоремы 1 с уточнением п. 4° § 7) с известными ранее (см. введение) рассмотрим задачу (0.1)—(0.2) с условиями (0.3). Прежде всего заметим, что даже без условия монотонности $\Delta(y)$ эта задача корректна, если функция $\dfrac{1}{\Delta}$ интегрируема при $y \geqslant 0$ (поскольку в этом случае условие (8) выполняется при $p = 0$). Предположим теперь, что

$$a(x, y) = \bar{a}(x, y)\, \Delta'(y), \tag{61}$$

где функция $\bar{a}$ ограничена в $\overline{D}$. Тогда функция (8′) оценивается так

$$f_p'(y) \leqslant \text{const} \cdot [y \Delta(y)]^{p-1}, \tag{61′}$$

причем последняя оценка тем грубее, чем быстрее стремится к нулю $\Delta(y)$ при $y \to +0$. Условие (8) заведомо выполняется, если

$$\varlimsup_{y \to +0} \max_x |\bar{a}(x, y)| = q,$$

$$\int_0^y t^{p+2}[\Delta(t)]^{1+p-q}\Delta'(t)\,dt < \infty \quad (y > 0). \tag{62}$$

Таким образом, задача (0.1)—(0.2) корректна в смысле теоремы 1, если, независимо от скорости убывания $\Delta(y)$, $q < p+2$.

В том случае, когда $\Delta(y) = y^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ в обозначении (0.4), из (62) следует, что достаточна оценка

$$a_0(x) < (\alpha+1)(p+2) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{63}$$

Эта оценка усиливает все известные ранее критерии корректности задачи (0.1)—(0.2) при $\Delta(y) = y^{\alpha}$.

2. Из условия (0.4) заведомо следует выполнение условия (8) при $p=0$, поэтому можно усилить критерий Проттера. Однако не удобно улучшать этот критерий в терминах функции $a_0(x)$ в случае, когда $\Delta(y)$ стремится к нулю быстрее любой степени y. Действительно, применение критерия (62) к функции $\Delta(y) = \exp\{-y^{-\beta}\}$ $(\beta > 0)$ дает следующее условие корректности в смысле теоремы 1:

$$\overline{\lim_{y\to+0}} \frac{y^{\beta+1}|a(x,y)|}{\Delta(y)} < \beta(p+1) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{64}$$

откуда видно, что функция $a_0(x)$ может быть равна $+\infty$.

Нетрудно заметить из условия (62), что чем быстрее убывает $\Delta(y)$ при $y \to 0$, тем грубее критерий (0.4).

Выбор Проттером критерия корректности в форме (0.4) продиктован случаем $\Delta(y) = y^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$, и при подробном рассмотрении оказывается, что доказательство этого критерия проведено в работе [6] (вопреки утверждению автора в конце § 3) лишь в случае, когда $\Delta(y)$ убывает медленнее некоторой степени y. Во всяком случае, изложенный в [6] метод доказательства не проходит даже в случае $a=0$, если

$$\gamma = \overline{\lim_{y\to+0}} \frac{\displaystyle\int_0^y \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \int_0^t \Delta(\tau)\,d\tau\,dt}{\displaystyle\int_0^y \Delta(t)\,dt} = 1, \tag{65}$$

так как автор по существу использовал условие $\gamma < 1$ (см. [6], второе из условий (17), используемое в третьей снизу на стр. 549 формуле). Пример функции $\Delta(y) = y^{-\beta-1}\exp\{-y^{-\beta}\}$ $(\beta > 0)$ показывает, что условие (65) выполняется для быстро убывающих функций. Действительно, для этой функции имеем

$$\frac{\Delta'(y)}{\Delta(y)} \int_0^y \Delta(t)\,dt = \left(1 - \frac{\beta+1}{\beta} y^{\beta}\right)\Delta(y) \quad (y > 0), \tag{65'}$$

откуда и следует равенство (65).

3°. Из условия (53) следует, что задача (40)—(41) всегда корректна (даже если функции F_i нелинейны и удовлетворяют обычным в таких случаях условиям Липшица), если функция $(\min_x \omega)^{-1}$ интегрируема при $y > 0$. Это относится, например, к системе

$$
\begin{aligned}
&u_{1y} + A(x, y)\, u_{1x} + y^{\alpha}\, \varepsilon(y)\, u_{2x} = F_1(x, y, u_1, u_2),\\
&u_{2y} + \varepsilon(y)\, u_{1x} + A(x, y)\, u_{2x} = F_2(x, y, u_1, u_2),
\end{aligned}
\tag{66}
$$

где $0 \leqslant \alpha < 2$, $\varepsilon(y) > 0$ $(y > 0)$, $\varepsilon(+0) = 0$, хотя дискриминант этой системы $\Delta^2 = y^{\alpha} \varepsilon^2(y)$ может при $y \to 0$ стремиться к нулю с любой наперед заданной скоростью.

4°. В работе Чи Минь-ю [11] общее решение уравнения

$$
-y^2 u_{xx} + u_{yy} = a u_x \quad (y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{67}
$$

при $a = \text{const}$ получено в явном виде. В частном случае, когда $a = 4n + 1$ ($n > 0$ — целое), задача Коши с начальными данными $u(x, +0) = \mu(x)$, $u_y(x, +0) = 0$ $(0 < x < 1)$ имеет следующее единственное решение:

$$
u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\pi}\, y^{2k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mu\left(x + \frac{y^2}{2}\right). \tag{67'}
$$

Отсюда следует, что при больших a эта задача имеет только обобщенное решение, если функция μ не бесконечно дифференцируемая. В то же время формула (67′) дает явную зависимость характера устойчивости решения от величины a.

Непосредственное применение к этой задаче критерия (63) дает несколько более ограничительное условие корректности (от μ требуется примерно вдвое больше производных), однако этот же пример показывает, что теорема 1 не может быть существенно улучшена.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 1.XII.1967

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱԾՎՈՂ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՇԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտվում է Կոշու խնդիրը այն դեպքում, երբ տվյալները տրված են պարաբոլական գծի վրա, իսկ հավասարումը տիրույթում հիպերբոլական է։ Ընդհանրացվում և ճշտվում են հայտնի կոռեկտության հայտանիշները։ Արդյունքները տարածվում են երկրորդ կարգի սիստեմների վրա

A. B. NERSESIAN

ON CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATING HYPERBOLIC EQUATION OF SECOND ORDER

Summary

In the paper the correctness of Cauchy problem for the hyperbolic equation of second order (two independent variables), whith initial conditions given on the line of parabolic degeneration is investigated. The known sufficient conditions for the correctnes of this problem are generalised and made more precise. The results are transfered to the case of the hyperbolic system of the second order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа. Изд. АН СССР. 1959.
2. *Л. Берс.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.
3. *L. Bers.* On the continuation of a potential gas flow across the sonic line, NACA Technical Note, 2058, 1950.
4. *M. H. Protter.* The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line, Canad. J. Math., 6, 4, 1954, 542—553.
5. *M. H. Protter.* On partial equations of mixed type, „Proceedings of the conference on differential equations (dedicated to A. Weinstein)", Univ. of Maryland Book Store, 1956.
6. *Qi Min-You.* On the Cauchy problem for second order hyperbolic equations in the variables with initial data on the parabolic degenerating line, Acta Math. Sinica, v. 12, 1, 1962, 68—76.
7. *С. А. Терсенов.* О задаче Коши с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа, ДАН СССР, 155, 2, 1964.
8. *S. Gellerstedt.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielle du second ordre de type mixte, These, Uppsala, 1935.
9. *И. С. Березин.* О задаче Коши для линейных уравнений второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Мат. сборник, 24, 1949, 301—320.
10. *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
11. *Чи Минь-Ю.* О задаче Коши для одного класса гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения, Acta Math. Sinica, v. 8, 4, 1958, 521—529.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 2. 1968 Математика

В. И. ШЕВЦОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМИ ОБЩИМИ РЯДАМИ

А. Ф. Леонтьев в работе [1] рассмотрел вопрос о представлении целых функций рядами вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$, при этом учитывались только порядки целых функций. В настоящей заметке мы рассмотрим вопрос о представлении целых функций такого вида рядами, когда учитываются как порядки, так и типы целых функций.

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть $f(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция конечного порядка $\rho>0$ и нормального типа σ, причем $a_n\neq 0$ $(n=0, 1, 2,\cdots)$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}=(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{1.1}$$

Пусть $L(\lambda)=\sum\limits_{0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция порядка $\rho_1>\rho$ и конечного типа σ_1. Предположим, что выполняется условие: существует последовательность окружностей $|\mu|=r_k\uparrow\infty$ таких, что при любом $\varepsilon>0$

$$|L(re^{i\varphi})|>e^{(\sigma_1^{*}-\varepsilon)\, r^{\rho_1}}, \quad r=r_k,\ k>K(\varepsilon), \tag{2.1}$$

где $0<\sigma_1^{*}\leqslant\sigma_1$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,\cdots$ нули $L(\lambda)$, расположенные в порядке неубывания их модулей, а через $p_1, p_2,\cdots, p_n,\cdots$ соответственно их кратности. Возьмем произвольную целую функцию $F(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} b_n z^n$ конечного порядка ρ_2 и типа σ_2 такую, что выполняется одно из условий:

(A) $$\frac{1}{\rho_2}>\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1},$$

(B) $$\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1},\quad (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}\,(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Введем интерполирующую функцию

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)], \qquad (3.1)$$

где $D^k F(z) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n \frac{a_{n-k}}{a_n} z^{n-k}$ — обобщенные производные в смысле Гельфонда-Леонтьева [2]. Покажем, что при условии (A) или (B) функция $\omega_L(\mu, F)$ является целой.

Используя условие (1.1), находим

$$|D^k F(0)| = \left| a_0 \frac{b_k}{a_k} \right| < A(\varepsilon) \frac{[(\sigma_2 + \varepsilon) e\rho_2]^{\frac{k}{\rho_2}}}{[(\sigma - \varepsilon) e\rho]^{\frac{k}{\rho}}} k^{\left(-\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho}\right) k}. \qquad (4.1)$$

Не нарушая общности, можно считать $\rho_2 > \rho$, так что $-\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho} > 0$. На основании этого при $|\mu| < R$, $R > 1$ в случае (A) получаем, что общий член ряда (3.1) по модулю меньше

$$A(\varepsilon) \left(\frac{a}{n} \right)^{n \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \right)} n R^n,$$

где a — некоторая постоянная.

Отсюда следует, что при условии (A) функция $\omega_L(\mu, F)$ — целая. В случае (B) общий член ряда (3.1) по модулю меньше

$$|c_n| R^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{|D^k (F(0)|}{R^k} < A(\varepsilon) |c_n| R^n \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k k^{\frac{k}{\rho_1}}}{R^k}, \qquad (5.1)$$

где $\alpha = \frac{[(\sigma_2 + \varepsilon) e\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}}{[(\sigma - \varepsilon) e\rho]^{\frac{1}{\rho}}}$, $|\mu| < R$, $R > 1$.

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k k^{\frac{k}{\rho_1}}}{R^k} = \sum_{\alpha k^{\frac{1}{\rho_1}} < R} + \sum_{\alpha k^{\frac{1}{\rho_1}} > R} = \sum{}' + \sum{}''.$$

Очевидны неравенства

$$\sum{}' < n + 1, \quad \sum{}'' < (n+1) \frac{\alpha^n n^{\frac{n}{\rho_1}}}{R^n},$$

в силу которых при больших n

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k k^{\frac{k}{\rho_1}}}{R^k} < 2(n+1) \frac{\alpha^n n^{\frac{n}{\rho_1}}}{R^n}.$$

Таким образом, общий член ряда (3.1) по модулю, учитывая (5.1), меньше

$$2A(\varepsilon)\,|c_n|\,(n+1)\,r^n\,n^{\frac{n}{\rho_1}} < A_1(\varepsilon)\left\{\frac{[(\sigma_2+\varepsilon)\,e\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}\,[(\sigma_1+\varepsilon)\,e\rho_1]^{\frac{1}{\rho_1}}}{[(\sigma-\varepsilon)\,e\rho]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}^n (n+1). \qquad (5.1')$$

Фигурная скобка, в силу условия (B), для достаточно малого $\varepsilon>0$ меньше единицы, и поэтому ряд с общим членом (6.1) сходится; следовательно $\omega_k(\mu, F)$ является целой функцией. Можно показать, что условия (A) и (B) являются необходимыми в определенном смысле для того, чтобы ряд (3.1) сходился.

Замечание. Пусть последовательность целых функций $\{\varphi_m(z)\}$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$ сходится во всей плоскости к функции $L(z)$, причем для любого $\varepsilon>0$

$$|\varphi_m(z)| < e^{(\sigma_1+\varepsilon)\,|z|^{\rho_1}}, \quad |z| > r(\varepsilon),$$

где $r(\varepsilon)$ не зависит от m. Тогда при $m \to \infty$

$$\omega_{\varphi_m}(\mu, F) \to \omega_L(\mu, F).$$

Это утверждение следует из того, что при любом фиксированном n

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi_m^{(n)}(0)}{n!} = \frac{L^{(n)}(0)}{n!}$$

и известное неравенство для тейлоровских коэффициентов

$$\left|\frac{\varphi_m^{(n)}(0)}{n!}\right| < \left[\frac{e\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)}{n}\right]^{\frac{n}{\rho_1}}$$

выполняется при $n > N(\varepsilon)$, где число $N(\varepsilon)$ не зависит от m. Функции $F(z)$ приведем в соответствие ряд

$$F(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} K_n(z),$$

где

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \frac{\omega_L(\mu, F)}{f(0)\,L(\mu)}\, f(\mu z)\, d\mu.$$

Здесь c_n — замкнутый контур, внутри которого лежит нуль λ_n функции $L(\lambda)$ и нет других нулей этой функции. В случае, когда λ_n — простой нуль, имеем

$$K_n(z) = \frac{\omega_L(\lambda_n, F)}{f(0)L'(\lambda_n)}\, f(\lambda_n z).$$

Теорема 1. *Для целой функции $F(z)$, порядок и тип которой удовлетворяют условию* (A) *или* (B), *имеет место представление*

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty} F_m(z),\quad F_1(z)=\sum_{|\lambda_j|<r_1} K_j(z),$$

$$F_m(z)=\sum_{r_{m-1}<|\lambda_j|<r_m} K_j(z),$$

причем ряд сходится абсолютно и в любой ограниченной области равномерно. Более того, при любом $\varepsilon>0$ *и любых* k *и* z

$$|F(z)-\sum_{m=1}^{k} F_m(z)|<A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^{*} r_k^{\rho_1}}, \tag{6.1}$$

где

$$\gamma=\alpha^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}(\rho_1-\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1^{*}}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}},\quad 0<\alpha<1,\ \beta=1-\alpha.$$

Укажем достаточные условия, при которых функция $F(z)$ будет представляться рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z)$.

Теорема 2. *Допустим, что функция* $L(\lambda)$ *дополнительно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *все нули* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ *функции* $L(\lambda)$ — *простые, число нулей* $L(\lambda)$ *в кольце* $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$ *не превосходит некоторого фиксированного числа* p, *одного и того же для всех* $k=2, 3, \cdots$;

2) *существуют такие постоянные* A *и* h, $h<\rho_1$, *что для любых* λ_m *и* λ_n $(m\neq n)$ *из кольца* $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$

$$|\lambda_m-\lambda_n|>Ae^{-r_k^h};$$

3) $\dfrac{r_k}{r_{k-1}}<q$ $(k=2, 3, \cdots)$, *где* q — *некоторая постоянная.*

Тогда

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z),\quad A_k=\frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{f(0)\, L'(\lambda_k)},$$

причем ряд сходится абсолютно, а в любой ограниченной области — равномерно.

В дальнейшем (см. § 6) мы покажем, что оценка (6.1) в теореме (1) является в некотором смысле точной.

И. И. Репин в работах [3], [4] рассмотрел оператор

$$M_L(F)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z).$$

Оператор $M_L(F)$ применим ко всякой целой функции $F(z)$, порядок и тип которой удовлетворяют условию (А) или (В). При условии (А) (см. [3], стр. 12) показывается, что, если характеристическая функция

$L(z)$ не имеет нулей, то единственным решением однородного уравнения

$$M_L(F)=0$$

является функция $F(z)\equiv 0$. При условии (B) аналогичное утверждение не было известно. В § 4 мы показываем, что такое утверждение справедливо также при условии (B) (см. § 4, теорема 3).

Ю. Н. Фролов в работе [8] рассмотрел вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения

$$M_L(F)=\Phi(z), \tag{7.1}$$

когда порядок ρ_2 правой части в (7.1) удовлетворяет условию (A). Естественно поставить вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения (7.1) при условии (B). В этом случае (поскольку оператор $M_L(F)$ преобразует функцию $F(z)$ в функцию $\Phi(z)$ вообще большего роста) представляет интерес нахождение частного решения уравнения (7.1), когда функция $\varphi(z)$ из класса $[\rho_2, \infty)$, т. е. когда $\Phi(z)$ принадлежит к классу функций, к которым вообще не применим оператор $M_L(F)$.

Мы показываем (см. § 4), что при некотором виде характеристической функции можно всегда указать нужное частное решение уравнения (7.1). Отметим, что метод нахождения частного решения уравнения (7.1) при этом существенно опирается на теорему 2 и является отличным от метода нахождения частного решения в работе [8].

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения и оценки

Рассмотрим функцию

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^m}{s_n^m}\right), \tag{1.2}$$

где $0<s_1<s_2<\cdots<s_n<\cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{s_n^{\rho_1}}=\tau,\quad 0<\tau<\infty, \tag{2.2}$$

при некотором $d>0$

$$s_{n+1}-s_n>ds_n^{1-\rho_1}, \tag{3.2}$$

m — целое, $m>\rho_1$.

Лемма. *Пусть функция $L(z)$ — целая порядка ρ_1 и типа $\sigma_1=\dfrac{\pi\tau}{\sin\dfrac{\pi\rho_1}{m}}$. Кроме того, она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существует последовательность окружностей $|\mu|=r_k\uparrow\infty$ таких, что для любого $\varepsilon>0$*

$$|L(re^{i\varphi})|>e^{(\sigma_1^*-\varepsilon)r_k^{\rho_1}},\quad r=r_k,\ k>k(\varepsilon),\ \sigma_1^*=\pi\tau\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi\rho_1}{m},$$

2) *для любого* $\varepsilon > 0$

$$|L'(s_n)| < e^{(\sigma_1^* + \varepsilon)\, s_n^{\rho_1}}, \quad n > N(\varepsilon),$$

3) *все нули функции* $L(z)$ — *простые, число нулей* $L(z)$ *в кольце* $r_{k-1} < |z| < r_k$ *не превосходит* m, *для любых нулей* λ_n *и* λ_s $(n \neq s)$ *функции* $L(z)$ *из этого кольца* $|\lambda_s - \lambda_n| \geq h > 0$,

4) $\dfrac{r_k}{r_{k-1}} \to 1, \ k \to \infty.$

Доказательство. Показывается (см. [6], стр. 160), что для функции $L(z)$ существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}} = \frac{\pi\tau}{\sin \dfrac{\pi\rho_1}{m}} \cos\left(\frac{\pi\rho_1}{m} - \rho_1\varphi\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

Таким образом, $L(z)$ — целая, порядка ρ_1 и типа $\sigma_1 = \dfrac{\pi\tau}{\sin \dfrac{\pi\rho_1}{m}}$. Ее индикатриса роста $h(\varphi)$ равна

$$h(\varphi) = \frac{\pi\tau}{\sin \dfrac{\pi\rho_1}{m}} \cos\left(\frac{\pi\rho_1}{m} - \rho_1\varphi\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

В силу непрерывности индикатрисы имеем

$$h(0) = \pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho_1}{m}.$$

Так как выполнены условия (1.2) и (2.2), то выполняется (см. [7], стр. 255) следующее асимптотическое равенство:

$$\ln |L'(s_n)| \approx h(0)\, s_n^{\rho_1}.$$

Из него непосредственно следует, что выполняется свойство 2).

Из вида функции $L(z)$ имеем

$$|L(z)| \geq |L(|z|)|. \tag{4.2}$$

Обозначим через $\{\mu_s\}$ множество нулей функции $L(z)$. В силу условий (1) и (2) вне кружков $|z - \mu_s| < d' |\mu_s|^{1-\rho_1}$ выполняется (см. [7], стр. 129) асимптотическое равенство

$$\ln |L(re^{i\varphi})| \approx h(\varphi)\, r^{\rho_1}. \tag{5.2}$$

При $d' < \dfrac{1}{2} d$ на положительной оси между s_n и s_{n-1} возьмем точку $r_n = \dfrac{s_n + s_{n-1}}{2}$. Согласно (4.2) и (5.2)

$$\ln |L(r_n e^{i\varepsilon})| > [h(0) - \varepsilon]\, r_n^{\rho_1}, \quad n > N(\varepsilon).$$

Свойство 1) установлено. Свойства 3), 4) очевидны. Лемма доказана.

Перейдем теперь к некоторым оценкам. Положим

$$\Phi_k(z, \lambda) = L(\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r_k}\frac{f(z\mu)\,d\mu}{(\mu-\lambda)\,L(\mu)},\quad |\lambda|<r_k.$$

Нетрудно убедиться, что эта функция, как функция переменного λ, является целой. Оценим ее модуль. Для $|\lambda|\leqslant r_k-1$ имеем

$$|\Phi_k(z, \lambda)|\leqslant J_k\,|L(\lambda)|,\quad J_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=r_k}\left|\frac{f(z\mu)}{L(\mu)}\right|\,|d\mu|.$$

Для λ, лежащих вне окружности $|\mu|=r_k$, справедливо представление

$$\Phi_k(z, \lambda)=L(\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r_k}\frac{f(z\mu)}{(\mu-\lambda)\,L(\mu)}\,d\mu+f(\lambda z).$$

Поэтому для $|\lambda|\geqslant r_k+1$

$$|\Phi_k(z, \lambda)|\leqslant J_k\cdot|L(\lambda)|+|f(\lambda z)|. \tag{6.2}$$

Так как $f(z)$ — целая функция порядка ρ и типа σ, а

$$\left|\frac{1}{L(\mu)}\right|<A(\varepsilon)\,e^{-(\sigma_1^*-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}},\quad |\mu|=r_k,$$

то для J_k получаем следующую оценку:

$$J_k<A_1(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|\,r_k)^{\rho}-(\sigma_1^*-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}}=$$

$$=A_1(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|r_k)^{\rho}-(\alpha\sigma_1^*-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}}\cdot e^{-\beta\sigma_1^*\,r_k^{\rho_1}},\quad 0<\alpha<1,\ \beta=1-\alpha.$$

Отметим, что

$$\max_{x>0}\left[(|z|\,x)^{\rho}\,(\sigma+\varepsilon)-(\alpha\sigma_1^*-\varepsilon)\,x^{\rho_1}\right]=$$

$$=\left[\alpha^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}(\rho_1-\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1^*}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}+\varepsilon_1\right]|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}=(\gamma+\varepsilon_1)\,|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}},$$

где ε_1 мало вместе с ε.

Таким образом

$$J_k<A_2(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon_1)\,|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^*\,r_k^{\rho_1}}.$$

Следовательно для модуля $\Phi_k(z, \lambda)$ при $|\lambda|\leqslant r_k-1$ справедлива следующая оценка:

$$|\Phi_k(z, \lambda)|<A(\varepsilon)\,e^{(\sigma_1+\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^*r_k^{\rho_1}}.$$

Здесь $A(\varepsilon)$ — некоторая постоянная. Ради простоты и впредь различные постоянные, зависящие от ε, будем обозначать через $A(\varepsilon)$. Имея в виду соотношение (6.2), оценим теперь $|f(\lambda z)|$ при $|\lambda|\geqslant r_k+1$. Имеем

$$|f(\lambda z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|\lambda|\,|z|)^{\rho}-(\sigma_1^*-\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\sigma_1^*-\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}<$$

$$<A(\varepsilon)\,e^{\sigma_1\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\sigma+\varepsilon)\,(|\lambda|\,|z|)^{\rho}-(\alpha\sigma_1^*-\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{-\beta\sigma_1^*\,|\lambda|^{\rho_1}}.$$

Отсюда, следуя предыдущим рассуждениям и учитывая, что $|\lambda| > r_k + 1$, находим

$$|f(\lambda z)| < A(\varepsilon)\, e^{\sigma_1|\lambda|^{\rho_1}}\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}.$$

Имея это в виду, на основании (6.2), получаем, что при $|\lambda| \geq r_k + 1$ справедливо неравенство

$$|\Phi_k(z, \lambda)| < A(\varepsilon)\, e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}}\, e^{(\gamma-\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}.$$

В силу принципа максимума модуля аналогичная оценка будет иметь место и в кольце $r_k - 1 < |\lambda| < r_k + 1$. Следовательно можно утверждать, что при любом $\varepsilon > 0$ и любых k, z и λ справедливо неравенство

$$|\Phi_k(z, \lambda)| < A(\varepsilon)\, e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}}\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}. \tag{7.2}$$

Разложим функцию $\Phi_k(z, \lambda)$ в ряд по степеням λ

$$\Phi_k(z, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k(z)\, \lambda^m.$$

Для $|A_m^k(z)|$ имеем оценку

$$|A_m^k(z)| \leq \frac{\max\limits_{|\lambda|=r} |\Phi_k(z, \lambda)|}{r^m} < A(\varepsilon) \frac{e^{(\sigma_1+\varepsilon) r^{\rho_1}}}{r^m}\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}},$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Подставляя $r = \left|\frac{m}{\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)}\right|^{\frac{1}{\rho_1}}$, получаем

$$|A_m^k(z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}} \left[\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)\right]^{\frac{m}{\rho_1}} \left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{m}{\rho_1}}. \tag{8.2}$$

В дальнейшем нам придется иметь дело с рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m^k(z)\; D^m\; F(0)$, покажем, что он сходится. Используя оценки (8.2) и (4.1) для $|D^m F(0)|$, получим

$$|A_m^k(z) D^m F(0)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}} \frac{\left[\rho_2(\sigma_2+\varepsilon)\right]^{\frac{m}{\rho_2}} \left[\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)\right]^{\frac{m}{\rho_1}}}{\left[\rho(\sigma-\varepsilon)\right]^{\frac{m}{\rho}}} \times$$

$$\times \left(\frac{e}{m}\right)^{m\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right)}.$$

Отсюда и заключаем, что при условии (A) и (B) рассматриваемый ряд сходится и, кроме того

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k(z)\, D^m F(0)\right| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}. \tag{9.2}$$

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Установим сначала следующее соотношение:

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=r_k} \frac{\omega_L(u, F)}{f(0)\, L(u)} = \frac{1}{f(0)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k(z)\, D^m F(0) \tag{1.3}$$

(ряд в правой части сходится, это было показано в предыдущем параграфе).

Оно легко проверяется для функции $F(z) = f(tz)$ и конечных линейных комбинаций таких функций. При $\rho_2 < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ оно получено в работе [1]. Для доказательства соотношения (1.3) в случае, когда $\rho_2 = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ и $(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция порядка $\rho > 0$, и типа σ с тейлоровскими коэффициентами $a_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, а $F(z)$ — выше рассматриваемая функция. Можно так подобрать последовательность $\{\mu_j\}$ $(0 < |\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \cdots, \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{|\mu_n|^{\rho_1}} = \tau)$, что будет верно представление*

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{p_n} A_{nj} f(\mu_j z),$$

причем

$$|p_n(z)| = \Big|\sum_{j=1}^{p_n} A_{nj} f(\mu_j z)\Big| < e^{(\alpha+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}, \quad |z| > r(\varepsilon),$$

где $r(\varepsilon)$ не зависит от n, $\alpha > \sigma_2$ и

$$(\alpha\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.3}$$

Доказательство этой леммы проводится совершенно так же, как доказательство соответствующего результата в работе А. Ф. Леонтьева [3]. Поэтому мы его опускаем. Воспользовавшись леммой заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} D^m p_n(0) = D^m F(0)$$

и $\left(\text{в нашем случае } \rho_2 = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}\right)$ при любом $\varepsilon > 0$

$$|D^m p_n(0)| < A(\varepsilon) \frac{[(\alpha+\varepsilon)e\rho_2]^{\frac{m}{\rho_2}} m^{-\frac{m}{\rho_2}}}{[(\sigma-\varepsilon)e\rho]^{\frac{m}{\rho}} m^{-\frac{m}{\rho}}}, \tag{3.3}$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от n и m.

Как уже отмечалось выше имеет место равенство

$$p_n(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u|=r_2}\frac{\omega_L(u,p_n)}{f(0)\,L(u)}\,f(uz)\,du=\frac{1}{f(0)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^m\,p_n(0). \qquad (4.3)$$

Мы хотим убедиться, что это равенство в пределе дает соотношение (1.3). Имеем

$$J=\left|\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,[D^m F(0)-D^m p_n(0)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{N-1}|A_m^k(z)|\,|D^m F(0)-D^m p_n(0)|+\sum_{m=N}^{\infty}|A_m^k(z)|\,|D^m F(0)|+$$

$$+\sum_{m=N}^{\infty}|A_m^k(z)|\,|D^m p_n(0)|=J_1+J_2+J_3.$$

Для слагаемого J_3, используя оценку (3.2) и (3.3), получаем

$$J_3<A(\varepsilon)\sum_{m=N}^{\infty}e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}\left\{\frac{[(\sigma_1+\varepsilon)\rho_1]^{\frac{1}{\rho_1}}\,[(\sigma+\varepsilon)\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}}{[\rho(\sigma-\varepsilon)]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}^m.$$

Фигурная скобка, в силу (2.3), при малом $\varepsilon>0$ меньше единицы. Следовательно можно выбрать N столь большим, чтобы в фиксированном круге $|z|<R$ было $J_3<\frac{\delta}{3}$. Можно считать, в силу аналогичных рассуждений, что и $J_2<\frac{\delta}{3}$ при том же N. Фиксируем это N. Тогда J_1 будет меньше $\frac{\delta}{3}$ при $n>n_0$, на основании того, что при любом m $\lim\limits_{n\to\infty}D^m p_n(0)=D^m F(0)$. Таким образом $J<\delta$, $n>n_0$, а, значит, правая часть (4.3) действительно стремится, при $n\uparrow\infty$, к правой части (1.3). Аналогичным образом убеждаемся, что при $|u|\leqslant R$ равномерно

$$\lim_{n\to\infty}\omega_L(u,p_n)=\omega_L(u,F).$$

Значит левая часть (4.3) стремится к левой части (5.2). Тем самым соотношение (1.3) установлено. Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. В силу основного соотношения (1.3), используя оценку (9.2), находим

$$\left|F(z)-\sum_{m=1}^{k}F_m(z)\right|=\left|\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^m F(0)\right|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\delta r_1^k\,r_2^k}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}F_m(z)$ внутри плоскости, а также его абсолютная сходимость. Действительно, имеем

$$F_k(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m^{k-1}(z)-A_m^k(z)\right]D^m F(0)$$

и, значит

$$|F_k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{-\beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}.$$

Мы считаем, что в каждом кольце $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$ лежит хотя бы один нуль $L(z)$. Поэтому ряд сходится абсолютно. Все утверждения теоремы 1 доказаны. Докажем теорему 2.

Пусть в кольце $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$ расположены точки $\lambda_{n_{k-1}+1},\cdots,\lambda_{n_k}$. Имеем

$$F_k(z)=\sum_{j=r}^{s}A_j f(\lambda_j z),\ A_j=\frac{\omega(\lambda_j,F)}{f(0)\,L'(\lambda_j)}\quad (r=n_{k-1}+1,\ s=n_k;\ s-r+1\leqslant p).$$

Рассмотрим систему равенств

$$\sum_{j=r}^{s}A_j f(\lambda_j z)=F_k(z),$$

$$\sum_{j=r}^{s}A_j\lambda_j f(\lambda_j z)=DF_k(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=r}^{s}A_j\lambda_j^{s-r} f(\lambda_j z)=D^{(s-r)}F_k(z).$$

Из этой системы находим, что $A_j f(\lambda_j z)=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_r & \lambda_{r+1} & \cdots & \lambda_s\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \lambda_r^{s-r} & \lambda_{r+1}^{s-r} & \cdots & \lambda_s^{s-r}\end{vmatrix},\quad \Delta_j=\begin{vmatrix}1 & \cdots & F_k(z) & \cdots & 1\\ \lambda_r & \cdots & DF_k(z) & \cdots & \lambda_s\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ \lambda_r^{s-r} & \cdots & D^{s-r}F_k(z) & \cdots & \lambda_s^{s-r}\end{vmatrix}.$$

Определитель Δ представляет собой произведение разностей $(\lambda_m-\lambda_n)$ $(m\neq n)$, и в силу того, что $|\lambda_m-\lambda_n|>A\,e^{-r_k^h}$, $h<\rho_1$, имеет следующую оценку снизу:

$$|\Delta|>B\,e^{-\alpha r_k^h},\quad \alpha>0.$$

Согласно теореме 1

$$|F_k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1}}.$$

Отсюда получаем, что и

$$|D^m F_k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1}},\quad 0\leqslant m\leqslant p,$$

ибо p — фиксированное число. Следовательно

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^{*} r_{k-1}^{\rho_1} + \varepsilon r_k^{\rho_1}}.$$

Используя условие $\frac{r_k}{r_{k-1}} < q$, далее находим

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A\, e^{-\nu r_k^{\rho_1} + (\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}, \quad \nu = q^{-\rho_1}(\beta\sigma_1^{*} - \varepsilon). \tag{5.3}$$

Так как мы считаем, что в каждом кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ лежит по крайней мере один нуль функции $L(z)$, то отсюда и следуют все утверждения теоремы 2. Отметим также, что если $\frac{r_k}{r_{k-1}} \to 1$ при $k \uparrow \infty$, то мы получим более точное неравенство

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{-(\beta\sigma_1^{*} - \varepsilon) r_k^{\rho_1} + (\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}, \tag{6.3}$$

из которого, полагая $z = 0$, находим

$$|A_j| < A(\varepsilon)\, e^{-(\beta\sigma_1^{*} - \varepsilon)|\lambda_j|^{\rho_1}}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{7.3}$$

Эта оценка будет нами использована в дальнейшем при рассмотрении точности оценки (1.6) в теореме 1, а также в приложениях.

§ 4. Об одном операторе

Пусть, как и выше, $f(z)$ — целая функция порядка $\rho > 0$ и нормального типа σ с тейлоровскими коэффициентами $a_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $L(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — целая функция конечного порядка ρ_1 $(\rho_1 > \rho)$ и конечного типа σ_1, $F(z)$ — целая функция конечного порядка ρ_2 и конечного типа σ_2. Рассмотрим оператор

$$M_L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z).$$

Его можно представить (см. [4], [5]) также в виде

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{a_n} \frac{F^{(n)}(0)}{n!},$$

где $B_n(z)$ — коэффициенты следующего разложения:

$$L(\eta) f(z\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z)\, \eta^n.$$

Оператор $M_L(F)$ применим ко всякой целой функции $F(z)$ порядок и тип которой удовлетворяют одному из условий

(A) $$\rho_2 < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

(B) $$\rho_2 = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}, \quad (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Оператор $M_L(F)$ обладает (см. [4], [5]) следующими свойствами:

1. $$M_L(F_1 + F_2) = M_L(F_1) + M_L(F_2),$$
$$M_L(cF) = cM_L(F), \ c = \mathrm{const};$$

2. При любом z и произвольном значении параметра η
$$M_L[f(\eta z)] = L(\eta) f(\eta z);$$

3. Пусть последовательность целых функций $\{F_m(z)\}$ сходится во всей плоскости к функции $F(z)$, причем $|F_m(z)| < A(\varepsilon) e^{(\sigma_2 + \varepsilon)|z|^{\rho_2}}$, где $A(\varepsilon)$ не зависит от n и ρ_2, σ_2 удовлетворяют условию А или В. Тогда во всей плоскости $\lim\limits_{m \to \infty} M_L(F_m) = M_L(F)$, причем сходимость равномерная в любой ограниченной области.

Рассмотрим сначала вопрос о решении однородного уравнения

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F(z) = 0 \tag{1.4}$$

в зависимости от вида характеристической функции $L(z)$. Изучим этот вопрос в двух случаях:

1) характеристическая функция $L(z)$ не имеет нулей;

2) $L(z)$ имеет конечное число нулей.

Теорема 3. *Если характеристическая функция не имеет нулей, то $F(z) = 0$ является единственным решением уравнения (1.4) (в рассматриваемом классе целых функций).*

Доказательство. Так как $L(z)$ — целая функция конечного порядка, не имеющая нулей, то она имеет вид $L(z) = e^{p(z)} = \sum_0^{\infty} e_n z^n$, где $p(z)$ — многочлен. Пусть функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению $M_L(F) = 0$. Покажем, что тогда она удовлетворяет уравнению $M_{L^{(s)}}(F) = 0$, где $L^{(s)}(z)$ — s-я производная характеристической функции $L(z)$. Ясно, что $L^{(s)}(z) = Q(z) e^{p(z)}$, где $Q(z)$ — многочлен некоторой степени m, так что

$$L^{(s)}(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0) e^{p(z)}. \tag{2.4}$$

Отметим, что

$$M_{z^p L}(F) = \sum_{k=p}^{\infty} c_{k-p} D^k F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{n+p} F(z).$$

Так как $M_L(F) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z) = 0$, то

$$M_{z^p L}(F)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{n+p} F(z) = D^p \left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F(z)\right\} = 0.$$

Но тогда, в силу (2.4), имеем $M_{L^{(s)}}(F)=0$, откуда

$$M_{L^{(s)}}(D^m F)_{z=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ m=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.4}$$

Предположим противное, что $F(z) \not\equiv 0$. Тогда найдется такое e, что $F^{(e)}(0) \neq 0$. Введем вспомогательную функцию

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^{k+e} F(0)\, z^k.$$

Покажем, что при условии (A) и (B) функция $\psi(z)$ регулярна в круге радиуса, большего 1. Действительно

$$|c_k D^{k+e} F(0)| < \left(\frac{e}{k}\right)^{k\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)} \left\{\frac{[(\sigma_1+\varepsilon)\rho_1]^{\frac{1}{\rho_1}}\,[(\sigma_2+\varepsilon)\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}}{[(\sigma-\varepsilon)\rho]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}^k, \quad k>K(\varepsilon).$$

Из этого неравенства находим

1) при условии (A) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k D^{k+e} F(0)|} = 0$, в силу чего $\psi(z)$ — целая функция,

2) при условии (B) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k D^{k+e} F(0)|} < \dfrac{(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}}$, в силу чего функция $\psi(z)$ регулярна в круге радиуса $R>1$.

Используя (3.4), находим последовательно

$$\psi(1)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^{k+e} F(0) = M_L(D^e F)_0=0,\ \psi'(1)=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k D^{k+e} F(0) =$$
$$= M_{L'}(D^{e+1} F)_0=0, \cdots,\ \psi^{(m)}(1) = M_{L^{(m)}}(D^{e+m}F)_0 = 0, \cdots.$$

Отсюда $\psi(z) \equiv 0$, в частности, $\psi(0)=c_0 D^e F(0)=0$. Так как в силу предположения $F^{(e)}(0) \neq 0$, то $c_0=L(0)=0$. Но $L(0)\neq 0$ и, значит, мы приходим к противоречию. Таким образом $F(z) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическая функция имеет конечное число нулей. Нам понадобится следующая лемма (см. [7], стр. 23—24).

Лемма. *Если* $L(\gamma)$ — *многочлен с простыми нулями* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, *то общее решение уравнения* $M_L(F)=0$ *в классе целых функций имеет вид*

$$F(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j f(\lambda_j z),$$

где c_j — *произвольные постоянные.*

Используя доказанную выше теорему и сформулированную лемму, легко установить следующее предложение:

Теорема 4. *Если характеристическая функция имеет конечное число простых нулей $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, то целые функции (из рассматриваемого класса), удовлетворяющие уравнению $M_L(F) = 0$, имеют вид*

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(\lambda_j z),$$

где c_j — произвольные постоянные.

Эти результаты не опирались на теоремы предыдущих параграфов. Последующие результаты уже существенно будут опираться на эти теоремы.

Рассмотрим вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения

$$M_L(F) = \Phi(z). \qquad (4.4)$$

Пусть характеристическая функция $L(z)$ имеет вид

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m}\right), \qquad (5.4)$$

где $\lambda_n > 0$, причем существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}} = \tau \neq 0, \infty$, m — целое, $m > 2\rho_1$ $(\rho_1 > \rho)$. Функция $L(z)$ — целая порядка ρ_1 и типа $\sigma_1 = \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho_1}{m}}$.

Для $L(z)$ существует предел (см. [6], стр. 160)

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}} = \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho_1}{m}} \cos\left(\frac{\pi\rho_1}{m} - \rho_1\varphi\right), \; 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}. \qquad (6.4)$$

Поставим задачу: найти частное решение уравнения (4.4) в том случае, когда $\Phi(z)$ — целая функция из класса $[\rho_2, \infty)$, причем $\rho_2 = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$, т. е. функция $\Phi(z)$ принадлежит к классу функций, к которым вообще не применим оператор $M_L(F)$. Рассмотрим функцию

$$L_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^m}{s_n^m}\right),$$

где последовательность точек s_n $(0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n \cdots)$ имеет плотность с показателем ρ_1, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{s_n^{\rho_1}} = \tau_1$, $0 < \tau_1 < \infty$ и при некотором $d > 0$ $s_{n+1} - s_n > ds_n^{1-\rho_1}$, m — целое, $m > 2\rho_1$. $L_1(z)$ — целая функция порядка ρ_1 и типа $\tilde{\sigma}_1 = \frac{\pi\tau_1}{\sin \frac{\pi\rho_1}{m}}$. Пусть $\Phi(z)$ принадлежит классу $[\rho_2, \bar{\sigma}_2]$, подберем последовательность s_n так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}(\tilde{\sigma}_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Функция $L_1(z)$ (см. лемму § 2) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому функцию $\Phi(z)$, согласно этой теореме, можно представить в виде

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j f(\mu_j z),\quad A_j=\frac{\omega_{L_1}(\mu_j, F)}{f(0)\,L_1(\mu_j)},$$

где μ_j — нули функции $L_1(z)$. Ряд сходится абсолютно, а внутри плоскости равномерно. Кроме того (см. оценку(7.3))

$$|A_j|<A(\varepsilon)\,e^{-(\beta\overset{*}{\sigma}_1-\varepsilon)|\mu_j|^{\rho_1}},\quad \overset{*}{\sigma}_1=\pi\tau_1\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho_1}{m}$$

для всех j, где $0<\beta<1$.

Покажем, что функция

$$F(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j}{L(\mu_j)}f(\mu_j z)$$

является решением неоднородного уравнения (4.4).

Для этого убедимся сначала, что порядок и тип последовательности

$$F_m(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{L(\mu_j)}f(\mu_j z)\quad(m=1,2,\cdots)$$

удовлетворяет условию (B). В силу выбора функции $L_1(z)$ и (6.4) легко получаем, что при больших j

$$\ln|L(\mu_j)|>(\sigma_1-\varepsilon)\,|\mu_j|^{\rho_1}.$$

Используя это, находим с помощью стандартных рассуждений, что

$$|F_m(z)|<\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{A_j}{L(\mu_j)}\right||f(\mu_j z)|<A(\varepsilon)\;e^{(\sigma_2+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},$$

где

$$\sigma_2=(\rho_1-\rho)\frac{\rho^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}}{\rho_1^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}}\cdot\frac{\sigma^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}}{(\beta\overset{*}{\sigma}_1+\sigma_1)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}}.$$

Легко подсчитываем, что

$$(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}=(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}\left(\frac{\sigma_1}{\beta\overset{*}{\sigma}_1+\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Следовательно порядок и тип последовательности $\{F_m(z)\}$ удовлетворяют условию (B). При этом мы говорим, что последовательность $\{\Phi_m(z)\}$ имеет порядок $\bar{\rho}$ и тип τ, если при любом $\varepsilon>0$

$$|\Phi_m(z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\tau+\varepsilon)|z|^{\bar{\rho}}},$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от m, и нет меньших $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\sigma}$ с таким свойством. В силу свойства (1) и (2) оператора $M_L(F)$ имеем

$$M_L(F_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{L(\mu_j)} M_L[f(\mu_j z)] = \sum_{j=1}^{m} A_j f(\mu_j z).$$

Так как порядок и тип последовательности $\{F_m\}$ удовлетворяет условию (В), то в силу свойства 3 оператора возможен предельный переход в этом равенстве. В пределе получим

$$\lim_{m\to\infty} M_L(F_m) = M_L(F) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_j f(\mu_j z) = \Phi(z).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5. *Пусть характеристическая функция уравнения (4.4) имеет вид (5.4). Если правая часть принадлежит классу* $[\rho_2, \infty)$, *то уравнение (4.4) всегда имеет решение, принадлежащее классу* $[\rho_2, \sigma_2]$, *где* ρ_2 *и* σ_2 *удовлетворяют условию* (B).

§ 5. Об асимптотической оценке интерполирующей функции

Рассмотрим интерполирующую функцию $\omega_L(\mu, F)$, введенную в § 1

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [D^{k-1} F(0) + \mu D^{k-2} F(0) + \cdots + \mu^{k-1} D^0 F(0)].$$

Введем следующую вспомогательную функцию

$$L_1(\mu) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^m}{s_n^m}\right), \quad s_n = \lambda_n \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi q}{m}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots)$ имеет плотность с показателем q, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^q} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, и при некотором $d > 0$ $\lambda_{n+1} - \lambda_n > d\lambda_n^{1-q}$, $q > \rho$, m — целое, $m > 2q$. Функция $L_1(\mu)$ (см. лемму § 2) — целая порядка q и типа τ. Если выполнено условие (А), то подберем число $q > \rho_1$ таким образом, чтобы

$$\rho_2 < \frac{\rho q}{q - \rho} < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}. \tag{1.5}$$

При условии (В) положим $q = \rho_1$ и подберем $\tau > \sigma_1$ таким образом, чтобы

$$(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\tau\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.5}$$

Функцию $F(z)$ разложим в ряд, согласно теореме 2

$$F(z)=\sum_{s=1}^{\infty} b_s f(\mu_s, z), \quad b_s = \frac{\omega_{L_1}(\mu_s, F)}{f(0)\, L_1'(\mu_s)},$$

где μ_s — нули функции $L_1(\mu)$.

Такое представление функции $F(z)$ возможно в силу неравенств (1.5) и (2.5), а функция $L_1(z)$ (см. лемму § 2) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Кроме того (см. оценку (7.3)) имеем

$$|b_s| < A(\varepsilon)\, e^{(\beta\sigma_1^* - \varepsilon)|\mu_s|^q}, \quad 0<\beta<1, \quad \sigma_1^* = \sigma\cos\frac{\pi q}{m}. \tag{3.5}$$

Если имеет место условие (B), то возьмем в оценке (3.5) $\frac{\sigma_1}{\sigma}<\beta<1$, и подберем m таким образом, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\beta\sigma\cos\frac{\pi q}{m} = \beta\sigma_1^* > \sigma_1. \tag{4.5}$$

Рассмотрим последовательность

$$F_k(z) = \sum_{s=1}^{k} b_s f(\mu_s, z), \tag{5.5}$$

имеем $F_k(z) \to F(z)$ и, кроме того, в силу (3.5)

$$|F_k(z)| < A(\varepsilon)\, e^{(b+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho q}{q-\rho}}},$$

причем $A(\varepsilon)$ не зависит от k, а

$$b = \left(\frac{\sigma}{q}\right)^{\frac{q}{q-\rho}} \left(\frac{\rho}{\beta\sigma_1^*}\right)^{\frac{\rho}{q-\rho}} (q-\rho).$$

Если имеет место условие (A), то $\frac{\rho q}{q-\rho} < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$, в силу (1.5). Если имеет место условие (B), то $q=\rho_1$, $\rho_2 = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ и

$$(b\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\sigma_1}{\beta\sigma_1^*}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

в силу (4.5).

Таким образом, мы показали, что порядок и тип последовательности (5.5) удовлетворяет условию (A) или (B). Легко подсчитываем, что

$$\omega_L(\mu, F_k) = \sum_{s=1}^{k} b_s \frac{L(\mu) - L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Так как порядок и тип последовательности $F_k(z)$ удовлетворяет условию (A) или (B), то (см. доказательство теоремы 1) $\lim_{k\to\infty} \omega_L(\mu, F_k) = \omega_L(\mu, F)$.

Следовательно

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \frac{L(\mu) - L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{\mu - \mu_s}, \quad B(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}. \tag{6.5}$$

Функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются мероморфными функциями, в силу (3.5) и (4.5). Таким образом, получаем

$$\omega_L(\mu, F) = L(\mu) A(\mu) - B(\mu), \tag{7.5}$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ имеют вид (6.5). Заметим, что такое представление функции $\omega_L(\mu, F)$ не является единственным. Остановимся на асимптотической оценке функции $B(\mu)$. Отметим следующее легко проверяемое тождество

$$\frac{1}{\mu - \mu_s} = \sum_{s=0}^{n} \frac{\mu_s}{\mu^{k-1}} + \left(\frac{\mu_s}{\mu}\right)^{n-1} \frac{1}{\mu - \mu_s}.$$

Согласно этому тождеству

$$B(\mu) = \sum_{s=0}^{n} \frac{B_k}{\mu^{k+1}} + B_n(\mu),$$

где

$$B_k = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k L(\mu_s), \quad B_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^{n+1} \frac{L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Напомним, что у функции $L_1(\mu)$ нули расположены на конечном числе лучей. Пусть μ принадлежит некоторому углу E_0 с вершиной в начале, в котором нет нулей $L_1(\mu)$, включая стороны. Ясно, что тогда

$$|\mu - \mu_s| > \delta |\mu|, \quad \delta > 0, \quad \mu \in E_0.$$

Отсюда находим, что

$$|B_n(\mu)| < \frac{c_n}{|\mu|^{n+2}}, \quad c_n = \frac{1}{\delta} \left| \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^{n+1} L(\mu_s) \right|.$$

Следовательно

$$B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}.$$

Рассмотрим оператор $M_L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z)$. Имеем

$$M_L(F_k) = M_L \left| \sum_{s=1}^{k} b_s f(\mu_s z) \right| = \sum_{s=1}^{k} b_s L(\mu_s) f(\mu_s z).$$

Так как по доказанному выше порядок и тип последовательности $F_k(z)$ удовлетворяет условию (A) или (B), то в силу свойства оператора $M_L(F)$ (см. § 4), имеем

$$\lim_{k\to\infty} M_L(F_k) = M_L(F) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s L(\mu_s) f(\mu_s z),$$

откуда $B_k = \dfrac{D^k [M_L(F)]_{z=0}}{f(0)}$.

Пусть функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(\Phi) = 0$, тогда найдется такое наименьшее число p, что $D^p [M_L(F)]_0 \neq 0$. Следовательно

$$B(\mu) \approx \frac{D^p [M_L(F)]_0}{f(0)\, \mu^{p+1}}, \quad \mu \in E_0. \tag{8.5}$$

Из соотношения (7.5), полагая $\mu = \lambda_n$, λ_n — нуль $L(\mu)$, находим

$$\omega_L(\lambda_n, F) = -B(\lambda_n).$$

Отсюда, согласно (8.5)

$$\omega_L(\lambda_n, F) \approx -\frac{D^p [M_L(F)]_0}{f(0)\, \lambda_n^{p+1}}, \quad \lambda_n \in E_0. \tag{9.5}$$

Изменяя вид функции $L_1(\mu)$ (а именно поворачивая лучи, на которых лежат нули функции $L_1(\mu)$) и повторяя предыдущие рассуждения, мы получим, что (9.5) справедливо для всех λ_n. Таким образом, мы доказали следующее утверждение, которое сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 6. *Если функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(\Phi) = 0$, то*

$$\omega_L(\lambda_n, F) \approx -\frac{D^p [M_L(F)]_0}{f(0)\, \lambda_n^{p+1}},$$

где λ_n — нули функции $L(z)$, а p — наименьшее целое такое, что $D^p [M_L(F)]_0 \neq 0$.

В случае (А) полученная теорема доказана А. Ф. Леонтьевым [9]. Приводимое здесь доказательство проводилось по той же схеме.

§ 6. О точности оценок, полученных в теореме 1

Напомним, что нами было установлено (см. теорему 1) неравенство

$$\left| F(z) - \sum_{m=1}^{k} F_m(z) \right| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^{*} r_k^{\rho_1}}, \tag{1.6}$$

где

$$\gamma = \alpha^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}} (\rho_1 - \rho) \left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}} \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}, \quad 0 < \alpha < 1, \ \beta = 1 - \alpha.$$

$$F_1(z) = \sum_{|\lambda_j| < r_1} k_j(z), \quad F_m(z) = \sum_{r_{m-1} \le |\lambda_j| < r_m} k_j(z), \quad k_j(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{\omega_L(\mu, F)}{f(0)\, L(\mu)} f(\mu z)\, d\mu.$$

Остановимся на вопросе о точности оценки (1.6). Рассмотрим вначале случай $\sigma_1^* < \sigma_1$.

Предположим, что у функции $f(z)$ тейлоровские коэффициенты $a_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Пусть функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(\Phi) = 0$. Будем предполагать, что функция $L(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и следующему дополнительному условию: существует бесконечная последовательность нулей функции $L(z)$, обозначим их через μ_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, таких, что выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$

$$|L'(\mu_k)| < e^{(\sigma_1^* + \varepsilon)|\mu_k|^{\rho_1}}, \quad k > K(\varepsilon). \tag{2.6}$$

Покажем, что в этом случае нельзя получить оценку вида (1.6) с $\gamma_1 = \sigma_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}}(\rho_1 - \rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1^*}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}}$, $\sigma_1 > 1$. Предположим противное. Тогда, повторяя рассуждения, которые проводились при доказательстве теоремы 2, получим

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma_1 + \varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}}},$$

в частности для $\lambda_{j_k} = \mu_k$ будем иметь

$$|A_{j_k} f(\mu_k z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma_1 + \varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}}}, \quad A_{j_k} = \frac{\omega_L(\mu_k, F)}{f(0)\, L'(\mu_k)}. \tag{3.6}$$

В силу асимптотической оценки коэффициентов A_{j_k} (см. § 5), учитывая, что $M_L(F) \neq 0$, имеем

$$|A_{j_k}| > \frac{C}{|\mu_k|^{p+1}\, |L'(\mu_k)|}, \tag{4.6}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. В (3.6) положим

$$z = |\mu_k|^{\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}}\left(\frac{\sigma_1^* \rho_1}{\rho\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\arg\mu_k} = c_k\, e^{-i\arg\mu_k},$$

тогда

$$|A_{j_k} f(c_k |\mu_k|)| < A(\varepsilon)\, e^{(a + \varepsilon_1)|\mu_k|^{\rho_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{5.6}$$

где

$$a = \gamma_1\left(\frac{\sigma_1^* \rho_1}{\rho\sigma}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}} = \sigma_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}}(\rho_1 - \rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1^*}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}}\left(\frac{\sigma_1^* \rho_1}{\rho\sigma}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}} =$$

$$= \sigma_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}}(\rho_1 - \rho)\frac{\sigma_1^*}{\rho}.$$

Так как $a_n > 0$ и существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{a_n} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > e^{(\sigma - \varepsilon)x^\rho}, \quad x > X(\varepsilon). \tag{6.6}$$

Тогда, поскольку

$$c_k |\mu_k| = \left(\frac{\sigma_1^* \rho_1}{\rho \sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} |\mu_k|^{\frac{\rho_1}{\rho}}, \ |\mu_k| \uparrow \infty,$$

из (6.6) следует, что

$$f(c_k |\mu_k|) > e^{(\sigma - \varepsilon)(c_k |\mu_k|)^\rho}, \ k > K(\varepsilon).$$

Из полученной оценки и (4.6) и (2.6) имеем

$$|A_{j_k} f(c_k |\mu_k|)| > Ce^{(\sigma - \varepsilon)(c_k |\mu_k|)^\rho - (\sigma_1^* + \varepsilon)|\mu_k|^{\rho_1}}, \ k > K_1(\varepsilon).$$

Но

$$(\sigma - \varepsilon)(c_k |\mu_k|)^\rho - (\sigma_1^* + \varepsilon)|\mu_k|^{\rho_1} = \left(\sigma_1^* \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} - \varepsilon_1\right) |\mu_k|^{\rho_1}, \ \varepsilon_1 > 0.$$

Таким образом, мы получаем

$$|A_{j_k} f(c_k |\mu_k|)| > C e^{\left(\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \sigma_1^* - \varepsilon\right) |\mu_k|^{\rho_1}}, \ k > K_2(\varepsilon). \qquad (7.6)$$

Из (5.6) и (7.6) следует, что $\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \sigma_1^* \leqslant \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}} \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \sigma_1^*$, откуда $\alpha_1 \leqslant 1$, и мы приходим к противоречию.

Покажем теперь, что в оценке (1.6) и число β нельзя заменить числом, большим единицы, если $M_L(F) \neq 0$, функция $L(\mu)$ удовлетворяет условию (2.6), всем условиям теоремы 2, причем в теореме 2 пусть $\frac{r_k}{r_{k-1}} \to 1$, $k \uparrow \infty$. Предположим противное. Тогда, следуя в точности рассуждениям, которые проводились при получении оценки (7.3), получим

$$|A_j| < A(\varepsilon) e^{-(\beta_1 \sigma_1^* - \varepsilon)|\lambda_j|^{\rho_1}}, \ A_j = \frac{\omega_L(\lambda_j, F)}{f(0) L'(\lambda_j)}, \ \beta_1 > 1,$$

в частности для номеров j_k ($\lambda_{j_k} = \mu_k$) будем иметь

$$|A_{j_k}| < A(\varepsilon) e^{-(\beta_1 \sigma_1^* - \varepsilon)|\mu_k|^{\rho_1}}, \ A_{j_k} = \frac{\omega_L(\mu_k, F)}{f(0) L'(\mu_k)}. \qquad (8.6)$$

В силу асимптотической оценки коэффициентов A_{j_k}, учитывая, что $M_L(F) \neq 0$ и условия (2.6), получим

$$|A_{j_k}| > c\, e^{-(\sigma_1^* + \varepsilon)|\mu_k|^{\rho_1}}, \ k > K(\varepsilon).$$

Из последнего неравенства и (8.6) находим $\sigma_1^* \geqslant \beta_1 \sigma_1^*$, т. е. $\beta_1 \leqslant 1$. Мы приходим к противоречию. Легко привести пример функции $L(z)$, обладающей перечисленными выше свойствами. Например, в качестве такой функции можно взять функцию (1.2) (см. лемму § 2).

Рассмотрим теперь случай $\sigma_1^* = \sigma_1$. Покажем, что в этом случае нельзя получить оценку вида (1.6) с

$$\gamma_1 = \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}(\rho_1-\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}, \quad \alpha_1 > 1,$$

даже без дополнительных условий на $f(z)$. Действительно, пусть, следуя методу от противного,

$$\left|F(z) - \sum_{k=1}^{m} F_k(z)\right| < A(\varepsilon)e^{(\gamma_1+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},$$

тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{m} F_k(z)\right| < A_1(\varepsilon)e^{(\gamma_1+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}. \tag{9.6}$$

Отметим, что

$$(\gamma_1\nu)^{\frac{1}{\nu}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = \alpha_1^{-\frac{1}{\rho_1}}(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \nu = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}. \tag{10.6}$$

Из вида функций $F_k(z)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ легко находим, что

$$M_L\left(\sum_{k=1}^{m} F_k(z)\right) = 0.$$

В последнем равенстве, так как выполняется (10.6), возможен (см. § 4, свойство 3 оператора $M_L(F)$) предельный переход, совершая его, получим $M_L(F) = 0$.

Таким образом, если $M_L(F) \neq 0$, то в оценке (1.6) нельзя число α заменить числом, большим единицы.

Покажем теперь, что в оценке (1.6) число β также нельзя заменить числом, большим единицы. Рассмотрение будем производить в условиях теоремы 2, считая, что в этой теореме $\frac{r_k}{r_{k-1}} \to 1$, $k \uparrow \infty$. Пусть число β можно заменить большим единицы в оценке (1.6), тогда, в точности следуя рассуждениям, которые проводились при получении оценки (7.3), придем к неравенству

$$|A_j| < A(\varepsilon)\, e^{-(\beta_1\sigma_1 - \varepsilon)|\lambda_j|^{\rho_1}}, \quad \beta_1 > 1.$$

Отсюда с помощью стандартных рассуждений находим, что для любого m

$$\left|\sum_{j=1}^{m} A_j f(\lambda_j z)\right| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma_1+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},$$

где

$$\gamma_1 = \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}, \quad \alpha_1 > 1.$$

Откуда, как и выше, заключаем, что $M_L(F) = 0$.

Таким образом, если $M_l(F) = 0$, то указанные оценки в теореме 1 не допускают улучшения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. А. Ф. Леонтьеву.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 27.V. 1967

Վ. Ի. ՇԵՎՑՈՎ

ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ա. Ֆ. Լեոնտևը [1] աշխատանքում հետազոտել է ամբողջ ֆունկցիաների $\sum_{0}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$ *տեսքի շարքերով ներկայացնելու հարցը, ընդ որում հաշվի առնելով միայն ամբողջ ֆունկցիաների կարգը։ Սույն աշխատանքում քննարկվում է ամբողջ ֆունկցիաների այդպիսի շարքերով ներկայացման հարցը, հաշվի առնելով ինչպես ամբողջ ֆունկցիայի կարգը, այնպես էլ տիպը։*

V. Y. SCHEVTZOV

ON THE REPRESENTATION OF ENTIRE FUNCTIONS BY ARBITRY SERIES

Summary

A. F. Leont'ev in [1] has considered the question of representing entire functions by the series $\sum_{n=0}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$ considering only the orders of entire functions. In this paper the question of representing entire functions by the series is considered, when the types of the entire functions are taken in consideration as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Леонтьев.* О представлении целых функций некоторыми общими рядами, Мат. сборник, 71 (113):1, 1966, 3—13.
2. *А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев.* Об одном обобщении ряда Фурье, Мат. сборник, 29 (71):3, 1951, 477—600.
3. *А. Ф. Леонтьев.* К вопросу о представлении целых функций последовательностями линейных агрегатов, Мат. сборник, 33 (75), № 2, 1953, 453—462.
4. *И. И. Репин.* О последовательности линейных агрегатов аналитических функций, равномерно ограниченных по росту, Мат. сборник, 36 (78):1, 1955, 3—24.
5. *И. И. Репин.* Об одном операторе и его свойствах, Доклады на научной конференции Ярославского пед-та, т. 2, вып. 3, 1964, 103—107.

6. *А. Ф. Леонтьев.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Тр. МИАН, т. 39, 1951.

7. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, Москва, 1956.

8. *Ю. Н. Фролов.* О решениях уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 64, 1961, 294—315.

9. *А. Ф. Леонтьев.* К вопросу о представлении произвольных целых функций рядами Дирихле и другими более общими рядами, Известия АН Армянской ССР, „Математика“, 2, № 5, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 2, 1968 Математика

Г. Л. АУНЦ

ОБ ОЦЕНКАХ РОСТА КАНОНИЧЕСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Статья посвящена оценкам индикатрисы $h(\varphi)$ и нижней индикатрисы $\mathbf{h}(\varphi)$ целой функции

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)\ (z=re^{i\varphi}), \tag{1}$$

где $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{|\lambda_n|}<\infty$. Сначала рассматривается случай, когда $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел с нижней плотностью $\alpha=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{\lambda_n}$ и верхней плотностью $\beta=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{\lambda_n}$. А. А. Гольдберг изучал более общий класс целых функций, считая заданными верхнюю и нижнюю угловые плотности нулей [1]. В частности, для функций вида (1) и положительных λ_n полученные им оценки являются точными во всем классе. При этом нижняя оценка для $\mathbf{h}(\varphi)$ стремится к $-\infty$ при $\varphi\to 0$ (и при $\varphi\to\pi$). И. Ф. Красичков нашел условие, необходимое и достаточное для того, чтобы при всех φ ($\varphi\neq 0$, $\varphi\neq\pi$) имело место неравенство $\mathbf{h}(\varphi)>C$, где C — константа, однако примененный им метод не позволяет оценить эту константу [2].

Ниже при некоторых дополнительных ограничениях будут найдены такие функции $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$, что $H_1(\varphi)\leqslant\mathbf{h}(\varphi)\leqslant h(\varphi)\leqslant H_2(\varphi)$, причем $H_2(\varphi)-H_1(\varphi)\to 0$ равномерно в интервалах $(0,\pi)$, $(\pi, 2\pi)$, если $\beta-\alpha\to 0$. Этот результат был доложен автором на Международном конгрессе математиков в Москве [3].

1°. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел с нижней плотностью α и верхней плотностью $\beta<\infty$. В силу симметрии будем всегда рассматривать рост функции $f(z)$, определенной равенством (1), только для $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Если $0<\alpha'<\alpha$, $\beta'>\beta$, то при достаточно большом n имеем

$$\frac{n}{\beta'}<\lambda_n<\frac{n}{\alpha'}, \tag{2}$$

а так как величина

$$p(t;\ z)=\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|=\sqrt{\frac{r^4}{t^4}-2\frac{r^2}{t^2}\cos 2\varphi+1}\quad (t>0)$$

при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ возрастает с уменьшением t, то

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha'^2 z^2}{n^2}\right)\right| \leqslant \left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)\right| \leqslant \left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\beta'^2 z^2}{n^2}\right)\right|$$

и, следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом r

$$\pi(\alpha'-\varepsilon)\sin\varphi \leqslant \frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant \pi(\beta'+\varepsilon)\sin\varphi,$$

то есть $\pi\alpha\sin\varphi \leqslant \underline{h}(\varphi) \leqslant h(\varphi) \leqslant \pi\beta\sin\varphi$, так как α' и β' можно взять сколь угодно близкими к α и β. В дальнейшем, имея это в виду, мы будем в неравенствах (2) писать, для простоты, α и β вместо α' и β'.

Пусть теперь $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Тогда функция $p(t; z)$ (z фиксировано) убывает от $+\infty$ до $\sin 2\varphi$, когда t изменяется от 0 до $\frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ $\left(p = 1 \text{ при } t = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right)$ и возрастает от $\sin 2\varphi$ до 1, когда t изменяется от $\frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ до $+\infty$. Пусть число n' таково, что $\lambda_{n'} \leqslant \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\lambda_{n'-1} > \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, тогда $p(\lambda_n; z) < p\left(\frac{n}{\beta}; z\right)$ при $n \leqslant n'$ и $p(\lambda_n; z) < p\left(\frac{n}{\alpha}; z\right)$ при $n > n'$. Пользуясь неравенствами (2) будем иметь $\frac{n'}{\beta} < \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{n'+1}{\alpha} > \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, откуда

$$\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - 1 < n' \leqslant \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \tag{3}$$

Положим далее $n_1 = \left[\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right]$, $n_2 = \left[\frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + 1\right]$, тогда $\frac{n_1}{\alpha} \leqslant \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{n_2}{\beta} \geqslant \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, поэтому, в силу (2), $p(\lambda_{n_1}; z) > p\left(\frac{n_1}{\alpha}; z\right)$ и, тем более, $p(\lambda_n; z) > p\left(\frac{n}{\alpha}; z\right)$ при $n < n_1$; аналогично $p(\lambda_{n_2}; z) > p\left(\frac{n_2}{\beta}; z\right)$ и, тем более, $p(\lambda_n; z) > p\left(\frac{n}{\beta}; z\right)$ при $n > n_2$. Заметим для дальнейшего, что имеют место очевидные неравенства

$$\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - 1 < n_1 \leqslant \frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} < n_2 \leqslant \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + 1,$$

а также, как это следует из (2),

$$\frac{\alpha r}{\beta\sqrt{\cos 2\varphi}} - \frac{1}{\beta} < \lambda_{n_1} < \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} < \lambda_{n_2} < \frac{\beta r}{\alpha\sqrt{\cos 2\varphi}} + \frac{1}{\alpha}. \tag{4}$$

Из определения чисел n', n_1, n_2 следует

$$\prod_{n=1}^{n_1} p\left(\frac{k}{\alpha};\, z\right)\prod_{k=n_1+1}^{n_2-1} p(\lambda_k;\, z)\prod_{k=n_2}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, z\right)\leqslant|f(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n'} p\left(\frac{k}{\beta};\, z\right)\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, z\right)$$

или

$$\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, z\right)\prod_{k=n_2}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, z\right)\left(\prod_{k=n_1+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, z\right)\right)^{-1}\prod_{k=n_1+1}^{n_2-1} p(\lambda_k;\, z)\leqslant$$

$$\leqslant|f(z)|\leqslant\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, z\right)\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, z\right)\left(\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, z\right)\right)^{-1}. \tag{5}$$

2. Перейдем к оценке произведений, входящих в (5). Заметим сначала, что при $\varphi\neq 0$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, re^{i\varphi}\right)=\pi\beta\sin\varphi,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, re^{i\varphi}\right)=$$

$$=\pi\alpha\sin\varphi.$$

Имеем далее (при больших r)

$$\ln\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\alpha r}{k},\, \varphi\right)\sim$$

$$\sim\frac{1}{2}\int_{n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\alpha r}{u},\, \varphi\right)du, \tag{6}$$

где $q(t,\, u)=\ln\left[(t-\cos 2\varphi)^2+\sin^2 2\varphi\right]$. При $u\geqslant\dfrac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ всегда $q\left(\dfrac{\alpha r}{u},\, \varphi\right)\leqslant 0$, и поэтому при достаточно большом r из (3) и (6) получим

$$\frac{1}{r}\ln\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, re^{i\varphi}\right)\leqslant\frac{1}{2r}\int_{\beta r\cos^{-1/2}2\varphi}^{\infty} q\left(\frac{\alpha r}{u},\, \varphi\right)du.$$

Выражение в правой части последнего равенства (как легко в этом убедиться с помощью подстановки $\dfrac{\alpha^2 r^2}{u^2}=t$) не зависит от r и является некоторой элементарной функцией от φ; обозначим ее через $g_1(\alpha,\beta,\varphi)$. Не выписывая (ввиду громоздкости) эту функцию в явном виде, заметим лишь, что

$$g_1(\alpha,\beta,0)=-\beta\ln(\beta^2-\alpha^2)-\alpha\ln\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}+2\beta\ln\beta$$

и $g_1\left(\alpha,\beta,\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

Аналогично имеем

$$\ln \prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{k}, \varphi\right) \sim$$

$$\sim \frac{1}{2} \int_{n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{u}, \varphi\right) du. \tag{7}$$

Если $\beta \leqslant \alpha\sqrt{2}$, то при $\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \leqslant u \leqslant \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ имеем $\frac{\beta^2 r^2}{u^2} \leqslant \frac{2\alpha^2 r^2}{u^2} \leqslant$ $\leqslant 2\cos 2\varphi$, поэтому $\left(\frac{\beta^2 r^2}{u^2} - \cos 2\varphi\right)^2 \leqslant \cos^2 2\varphi$, следовательно $q\left(\frac{\beta r}{u}, \varphi\right) \leqslant$ $\leqslant 0$ и поэтому из (3) и (7) при достаточно большом r следует

$$\frac{1}{r} \ln \prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; re^{i\varphi}\right) \geqslant \frac{1}{2r} \int_{\alpha r \cos^{-1/2} 2\varphi}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{u}, \varphi\right) du.$$

Выражение в правой части последнего неравенства не зависит от r и является некоторой элементарной функцией $g_2^{(1)}(\alpha, \beta, \varphi)$, причем

$$g_2^{(1)}(\alpha, \beta, 0) = -\alpha \ln(\beta^2 - \alpha^2) - \beta \ln \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} + 2\alpha \ln \alpha; \; g_2^{(1)}\left(\alpha, \beta, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Если $\beta > \alpha\sqrt{2}$, то при $\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} < u < \frac{\beta r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$ имеем $q\left(\frac{\beta r}{u}, \varphi\right) > 0$ и поэтому теперь оценка иная:

$$\frac{1}{r} \ln \prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; re^{i\varphi}\right) \geqslant \frac{1}{2r} \int_{\beta r (2\cos 2\varphi)^{-1/2}}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{u}, \varphi\right) du =$$

$$= g_2^{(2)}(\alpha, \beta, \varphi) = g_2^{(1)}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}, \beta, \varphi\right).$$

Положив $g_2(\alpha, \beta, \varphi) = g_2^{(1)}(\alpha, \beta, \varphi)$, если $\beta \leqslant \alpha\sqrt{2}$ и $g_2(\alpha, \beta, \varphi) =$ $= g_2^{(2)}(\alpha, \beta, \varphi)$, если $\beta > \alpha\sqrt{2}$, мы приходим к следующей оценке:

$$h(\varphi) \leqslant H(\varphi), \tag{8}$$

где $H(\varphi) = \pi\beta \sin\varphi$ при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $H(\varphi) = \pi\beta \sin\varphi + g_1(\alpha, \beta, \varphi) -$ $- g_2(\alpha, \beta, \varphi)$ при $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ (оценка справедлива и при $\varphi = 0$, в силу непрерывности как функции $H(\varphi)$, так и индикатрисы $h(\varphi)$). Заметим, что в силу тригонометрической выпуклости индикатрисы из (8) следует, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$

$$h(\varphi) \leqslant (\pi\beta - h_0) \sin\varphi + h_0 \cos\varphi,$$

где $h_0 = g_1(\alpha, \beta, 0) - g_2(\alpha, \beta, 0)$ ($h_0 = h_0(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция, $h_0 > 0$ при $\beta > \alpha$, $h_0 = 0$ при $\beta = \alpha$).

Повторяя те же выкладки, что и выше, и учитывая асимптотические равенства $\frac{n_1}{r} \sim \frac{\alpha}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{n_2}{r} \sim \frac{\beta}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, получим

$$\frac{1}{r} \ln \prod_{k=n_1+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha};\, re^{i\varphi}\right) \sim g_1(\alpha, \alpha, \varphi),$$

причем, как легко подсчитать, $g_1(\alpha, \alpha, 0) = -2\alpha \ln 2$ и

$$\frac{1}{r} \prod_{k=n_2}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, re^{i\varphi}\right) \sim g_2^{(1)}(\beta, \beta, \varphi),$$

причем $g_2^{(1)}(\beta, \beta, 0) = -2\beta \ln 2$.

Что касается последнего множителя в левой части (5), то очевидно, что

$$\ln \prod_{k=n_1+1}^{n_2-1} p(\lambda_k;\, re^{i\varphi}) = \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \ln \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{\lambda_k^2} \right| > \frac{(\beta-\alpha)\, r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \ln \sin 2\varphi,$$

так как $n_2 - n_1 \sim \frac{(\beta-\alpha)\, r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и $\min\limits_t \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{t^2} \right| = \sin 2\varphi$.

Таким образом, доказана оценка

$$h(\varphi) \geqslant H(\varphi), \tag{9}$$

где $H(\varphi) = \pi\alpha \sin \varphi$, если $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и

$$H(\varphi) = \pi\alpha \sin \varphi + g_2(\beta, \beta, \varphi) - g_1(\alpha, \alpha, \varphi) + \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \ln \sin 2\varphi,$$

если $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$. Нетрудно проверить, что оценки (8), (9) справедливы и при $\alpha = 0$.

Оценки (8), (9) по существу содержатся в упомянутых результатах А. А. Гольдберга (хотя и не в такой форме).

3°. Предположим теперь, что $\alpha > 0$ и последовательность нулей $\{\lambda_n\}$ функции $f(z)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Пусть, сначала, существует такая положительная постоянная γ, что для некоторой монотонной и дифференцируемой функции $F(x)$ такой, что $F(n) = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, имеет место неравенство $F'(x) \geqslant \gamma$ при любом $x > 0$.

Так как $\ln \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{t^2} \right| < 0$ тогда и только тогда, когда

$$t > \frac{r}{\sqrt{2 \cos 2\varphi}}, \text{ то}$$

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \ln \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{\lambda_k^2} \right| \sim \frac{1}{2} \int_{n_1}^{n_2} q\left(\frac{r}{F(u)}, \varphi\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{F_1}^{F_2} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)\theta'(t)\,dt > \frac{1}{2\gamma}\int_{\overline{F}_1}^{F_2} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)dt; \tag{10}$$

здесь $F_1 = F(n_1)$, $F_2 = F(n_2)$, $\overline{F}_1 = \max\left(F_1, \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right)$, θ — функция, обратная по отношению к F. Вычислив интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, получим

$$\int_{\overline{F}_1}^{F_2} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)dt = r\,[\Phi(v_2, \varphi) - \Phi(v_1, \varphi) + \tilde{\Phi}(v_2, \varphi) - \tilde{\Phi}(v_1, \varphi)] + rO(\varphi, r),$$

где
$$v_1 = \max\left(\frac{F_1}{r}, \frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right),\ v_2 = \frac{F_2}{r},\ \Phi(v, \varphi) =$$

$$= (v - \cos\varphi)\left|\ln\left(\frac{1}{v} - \cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi\right|,$$

$$\tilde{\Phi}(v, \varphi) = (v + \cos\varphi)\ln\left|\left(\frac{1}{v} + \cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi\right|,$$

а $O(\varphi, r) = \sin\varphi\cdot O(1)$ — функция, которую мы не будем выписывать. Из определения величин v_1, v_2 и неравенств (4) следует, что (асимптотически)

$$\max\left(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\cos 2\varphi}}, \frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right) \leqslant v_1 < \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \leqslant v_2 \leqslant \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\cos 2\varphi}} \tag{11}$$

и

$$0 \leqslant v_2 - v_1 \leqslant \min\left|\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right|.$$

Функция $\Phi(v, \varphi)$ непрерывна, как в этом легко можно убедиться, всюду (в том числе и в точке $v = 1$, $\varphi = 0$). Оценим разности $\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0)$ и $\tilde{\Phi}(v_2, 0) - \tilde{\Phi}(v_1, 0)$. Имеем

$$\Phi'(v, 0) = 2\left(\ln\left|\frac{1}{v} - 1\right| + \frac{1}{v}\right).$$

Уравнение $\Phi'(v, 0) = 0$ имеет единственный действительный корень $v_0 = \frac{1}{1 + u_0}$ $(0{,}78 < v_0 < 0{,}79)$, где u_0 — корень уравнения $e^{-u} = eu$ $(0{,}27 < u_0 < 0{,}28)$. При $v = v_0$ функция $\Phi(v, 0)$ имеет максимум и, так как $v_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то из (11) получаем

$$0 \geqslant \Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) \geqslant \Phi\left(\frac{\beta}{\alpha}, 0\right) - \Phi\left(\max\left(\frac{\alpha}{\beta}, v_0\right), 0\right).$$

Итак, если $\frac{\alpha}{\beta} \geqslant v_0 = 0{,}78\cdots$, то

$$\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) \geqslant 2(\beta - \alpha)\left|\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\right|.$$

Если же $\frac{\alpha}{\beta} < v_0$, то

$$\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) \geqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 2(v_0 - 1)\ln\left(\frac{1}{v_0} - 1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{v_0}\right),$$

(мы воспользовались тем, что v_0 — корень уравнения $\Phi'(v, 0) = 0$), то есть в этом случае $\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) > 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 0{,}56$.

Что касается разности $\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0)$, то оценим ее по формуле Лагранжа. Имеем всегда

$$\bar{\Phi}'(v, 0) = 2\left|\ln\left(\frac{1}{v} + 1\right) - \frac{1}{v}\right| < 0, \ \Phi''(v) = -\frac{1}{v(v+1)} + \frac{1}{v^2} > 0$$

и поэтому

$$\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0) \geqslant (v_2 - v_1) \min_{[v_1, v_2]} \bar{\Phi}'(v, 0) = (v_2 - v_1)\,\bar{\Phi}'(v_1, 0).$$

Если $\beta \leqslant \alpha\sqrt{2}$, то $v_2 - v_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$ и

$$\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0) \geqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left|\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

Если же $\beta > \alpha\sqrt{2}$, то

$$\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0) > 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left|\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}\right| >$$

$$> -1{,}07 \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом, при φ близком к 0 имеем асимптотически

$$\frac{1}{r}\sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \ln\left|1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{\gamma_k^2}\right| > \frac{k(\alpha, \beta)}{\gamma} - \frac{O(\varphi)}{\gamma},$$

где $O(\varphi)$ зависит также от α и β, но $\lim\limits_{\varphi \to 0} O(\varphi) = 0$ при любых α и β, а

$$k(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)\left|\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\right|,$$

если $\frac{\alpha}{\beta} > v_0 = 0{,}78\cdots$,

$$k(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)\left|\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\right| - 0{,}28,$$

если $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{\alpha}{\beta} < v_0$, и

$$k(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - \left|0{,}28 + 0{,}54\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|,$$

если $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Итак при $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ имеем

$$\underline{h}(\varphi) > \pi\alpha \sin\varphi + g_2(\beta, \beta, \varphi) - g_1(\alpha, \alpha, \varphi) + \frac{k(\alpha, \beta)}{\gamma} + \frac{O(\varphi)}{\gamma} = \underline{\bar{H}}(\varphi),$$

причем $\underline{\bar{H}}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi\alpha \sin\dfrac{\pi}{4}$. Функция $\dfrac{1}{f(z)}$ — голоморфна в любом угле $0 < \delta \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, и ее индикатриса не превышает в этом угле $-\underline{\bar{H}}(\varphi)$.

Обозначим $\underline{\bar{H}}(0) = \underline{h}_0$. Из непрерывности функции $\underline{\bar{H}}(\varphi)$ и тригонометрической выпуклости индикатрисы отсюда следует (δ можно взять сколь угодно малым), что индикатриса функции $\dfrac{1}{f(z)}$ в угле $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ не превышает величины

$$-\sqrt{2}\, \underline{h}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \pi\alpha \sin\varphi.$$

Следовательно, при $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ имеем

$$\underline{h}(\varphi) > \pi\alpha \sin\varphi + \sqrt{2}\, \underline{h}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = (\pi\alpha - \underline{h}_0) \sin\varphi + \underline{h}_0 \cos\varphi, \quad (12)$$

причем

$$\underline{h}_0 = -2(\beta - \alpha) \ln 2 + \frac{k(\alpha, \beta)}{\gamma}$$

($\underline{h}_0 = \underline{h}_0(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция, $\underline{h}_0 < 0$, если $\beta > \alpha$, $\underline{h}_0 = 0$, если $\beta = \alpha$).

Условие $F'(x) \geqslant \gamma > 0$ можно ослабить. Из приведенных рассуждений следует, что оценка (12) сохранится, если потребовать лишь, чтобы для некоторого $\gamma > 0$ множество $E_\gamma(x)$ точек $t \in (0, x)$, в которых $\theta'(t) > \dfrac{1}{\gamma}$, было таково, что

$$\int\limits_{E_\gamma(x)} \theta'(t)\,dt = o(x).$$

Действительно, в этом случае неравенство (10) сохранится (и даже усилится), если к его правой части прибавить величину

$$P(r, \varphi, \gamma) = \frac{1}{2}\int_G q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)\cdot\theta'(t)\,dt,$$

где $G=[\bar{F}_1, F_2]\cap E_\gamma$, а E_γ — множество всех точек t, в которых $\theta'(t) > \frac{1}{\gamma}$. Но

$$P(r, \varphi, \gamma) > \frac{1}{2}\ln\sin 2\varphi \cdot \int_{E_\gamma(F_2)} \theta'(t)\,dt,$$

а так как $F_2 \leqslant \frac{\beta r}{\alpha\sqrt{\cos 2\varphi}}$, то при любом $\varphi \neq 0$. в силу сделанного предположения,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}P(r, \varphi, \gamma) = 0.$$

4°. Итак, если $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел с конечной верхней плотностью, найдены функции $H_1(\alpha, \beta, \varphi)$, $H_2(\alpha, \beta, \varphi)$ такие, что

$$H_1(\alpha, \beta, \varphi) \leqslant \underline{h}(\varphi) \leqslant h(\varphi) \leqslant H_2(\alpha, \beta, \varphi) \tag{13}$$

(H_1 и H_2 — четные функции от φ и $H_i(\alpha, \beta, \varphi+\pi) = H_i(\alpha, \beta, \varphi)$, $i=1, 2$). При некоторых дополнительных условиях $\lim\limits_{\beta\to\alpha}(H_2 - H_1) = 0$ равномерно. Перейдем к случаю, когда $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, расположенных в угле $|\arg z| < \theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $\sigma=[a,b]$ — некоторый отрезок, σ_i — интервал, полуинтервал, отрезок или точка, $\sigma_i\cap\sigma_k=\varnothing$ при $i\neq k$, $\sigma=\bigcup\sigma_i$, α и β — меры, заданные на σ, причем $0\leqslant\alpha(\sigma_i)\leqslant\beta(\sigma_i)\leqslant M$ для любого $\sigma_i\subset\sigma$, а $K(\alpha, \beta, \psi)$ — действительная функция, ограниченная в области $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant M$, $a\leqslant\psi\leqslant b$. Пусть, наконец, l — некоторый признак, в соответствии с которым всякому σ_i ставится в соответствие точка ψ_i, принадлежащая $\bar{\sigma}_i$. Положим, по определению,

$$\overline{\int_{\sigma, l}} K[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \psi] = \sup\sum_i K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \psi_i],$$

$$\underline{\int_{\sigma, l}} K[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \psi] = \inf\sum_i K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \psi_i],$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем конечным и счетным разбиениям отрезка σ.

Если $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\theta}$, причем r и ρ фиксированы, то величина $\left|1-\frac{z^2}{w^2}\right|$ возрастает и убывает одновременно с $|\sin(\varphi-\theta)|$, поэтому если признаки l_1 и l_2 состоят в том, что при заданном φ для множества σ_i выбирается такое $\theta = \theta_i \in \sigma_i$, для которого величина $|\sin(\varphi - \theta)|$ — наименьшая, соответственно — наибольшая, то из (13) следует, что для индикатрисы $h(\varphi)$ и нижней индикатрисы $\underline{h}(\varphi)$ функции $f(z)$, определенной равенством (1), вне углов $|\arg(\pm z)| \leqslant \vartheta$ имеют место оценки

$$\int_{\theta\in\sigma_i} H_1[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \varphi-\theta] \leqslant \underline{h}(\varphi) \leqslant h(\varphi) \leqslant \int_{\theta\in\sigma_i} H_2[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \varphi-\theta],$$

где $\sigma = [-\vartheta, \vartheta]$, $\alpha(\sigma_i)$, $\beta(\sigma_i)$ — соответственно нижняя и верхняя плотности той подпоследовательности из $\{\lambda_n\}$, для которой $\arg\lambda_n \in \sigma_i$.

Московский институт химического машиностроения

Поступило 20.VI.1967

Գ. Լ. ԼՈՒՆՑ

ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ԱՃԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$ *պայմանի առկայության դեպքում գնահատվում է*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

ամբողջ ֆունկցիայի ինդիկատոր ֆունկցիան և ստորին ինդիկատոր ֆունկցիան։

Տրվում է բավարար պայման $\{\lambda_n\}$ *բազմությունը պարունակող անկյուններից դուրս ստորին ինդիկատոր ֆունկցիայի ներքևից սահմանափակության համար։*

Այդ պայմանի դեպքում ստորին ինդիկատոր ֆունկցիայի համար տեղի ունի էֆեկտիվ գնահատական։

G. L LUNTS

ON ESTIMATIONS OF THE GROWTH OF A CANONICAL PRODUCT

Summary

The indicator function and the lower indicator function of an entire function

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

are estimated for the case $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$.

A sufficient condition is mentioned which assures the uniforme boundedness from below of the lower indicator function out of the angles containing the set $\{\lambda_n\}$. Under this condition effective estimation of lower indicator function is carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гольдберг.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, (4 статьи): Матем. сб., 58 (100), 1962, 289—334; 61 (103), 1963, 334—349; 65 (107), 1964, 414—453; 66 (108), 1965, 411—457.
2. *И. Ф. Красичков.* Оценки снизу для целых функций конечного порядка, Сибирский матем. журнал, 6, № 4, 1965, 840—861.
3. *Г. Л. Луиц.* Оценка роста канонического произведения, Международный конгресс математиков, Москва, 1966, Тезисы кратких научных сообщений, секция 4, стр. 64.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3. № 2. 1968 Математика

Л. Д. ПОКРОВСКИЙ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

Введение

Содержание настоящей статьи составляет изучение однородной краевой задачи в полупространстве для уравнений в свертках или псевдодифференциальных уравнений, зависящих от параметра.

В §§ 1—2 доказывается теорема существования и единственности и устанавливаются оценки решения в пространствах, естественно связанных с рассматриваемой задачей.

В §§ 3—4 проводится построение и обоснование асимптотического разложения решения в виде ряда по степеням малого параметра.

Для удобства изложения доказательства некоторых вспомогательных утверждений перенесены в § 5.

Теория краевых задач для уравнений в свертках подробно изучена в статье М. И. Вишика и Г. И. Эскина [1].

В настоящей работе рассматриваются операторы свертки, символы* которых содержат параметр, и это обстоятельство позволяет доказать при некоторых условиях однозначную разрешимость краевой задачи (1.1)—(1.2) (см. § 1), в то время как в [1] для задач такого типа, и более общих, доказана лишь нормальная разрешимость. Отметим, что для дифференциальных уравнений с частными производными такой подход к изучению вопроса разрешимости граничных задач был предложен М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком в [2].

Другая часть работы посвящена применению асимптотических методов для нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи. Для дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных, существуют задачи, в которых возникает явление пограничного слоя, описанное М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником в [3] (там же указана литература). Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и для некоторых псевдодифференциальных уравнений. При этом асимптотика решения также содержит так называемые функции типа пограничного слоя, однако последние уже не имеют, вообще говоря, вида $\exp\left(-\frac{\lambda x_n}{\varepsilon}\right)$ $(\lambda > 0)$, но сохраняют свойство экспоненциального убывания по x_n для $x_n > 0$.

---

* Определение символа псевдодифференциального оператора приведено ниже.

Отметим, что излагаемые в настоящей статье вопросы изучались автором в работе [5] в случае операторов свертки с символами вида $a_\varepsilon(\xi) = 1 + \sum \varepsilon^j a_j(\xi)$, где $a_j(\xi)$ — рациональные функции ξ.

Перечислим некоторые определения и обозначения, используемые ниже. Пусть $a(x, \xi, q)$ — некоторая гладкая функция, определенная на $R^n \times R^n$, зависящая от параметра q. Более точно условия на $a(x, \xi, q)$ формулируются ниже. Условимся в дальнейшем через $\tilde{u}(\xi)$ ($\tilde{a}(\tau, \xi, q)$) обозначать преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$ ($F_{x\to\tau}$) функции $u(x)$($a(x, \xi, q)$), т. е.

$$\tilde{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} u(x)\,dx, \quad \tilde{a}(\tau, \xi, q) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\tau} a(x, \xi, q)\,dx,$$

$$x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (\xi', \xi_n),$$
$$\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}, \tau_n) = (\tau', \tau_n).$$

Далее, для достаточно гладких и убывающих при $|x| \to \infty$ функций $u(x)$ положим

$$Au = (Au)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} a(x, \xi, q)\, \tilde{u}(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Будем говорить, что формула (1) определяет оператор A, канонически построенный по символу $a(x, \xi, q)$ и иногда писать в этом случае $A = Op(a(x, \xi, q))$. Пусть $a(x, \xi, q) = a^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q)$, причем $a'(x, \xi, q)$ финитна по x. Легко показать, что

$$\widetilde{(Au)}(\xi) = a^{(0)}(\xi, q)\, \tilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}'(\xi - \eta, \eta, q)\, \tilde{u}(\eta)\,d\eta. \tag{2}$$

При изучении операторов свертки, содержащих параметр, удобно использовать нормы, зависящие от этого параметра. Положим

$$\|u\|_{s,q} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (|q|^2 + |\xi|^2)^s\, |\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi \right)^{1/2}, \tag{3}$$

$$\|u\|_{s,\varepsilon} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\varepsilon\xi|^2)^s\, |\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{|q|}. \tag{4}$$

Очевидно $|q|^{-s} \|u\|_{s,q} = \|u\|_{s,\varepsilon}$. Ясно также, что при фиксированных q или нормы (3) и (4) эквивалентны обычной норме Соболева-Слободецкого

$$\|u\|_s = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|^2)^s\, |\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi \right)^{1/2}. \tag{5}$$

Обозначим через $H_s(R^n)$ пополнение по норме (5) пространства $S(R^n)$ функций, убывающих при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$

вместе с производными по x любого порядка, а через $\overset{\circ}{H}{}^{-}_{s}$ — подпространство $H_s(R^n)$, состоящее из функций, равных нулю при $x_n<0$. Если s — целое положительное число, функции из $\overset{\circ}{H}{}^{-}_{s}$ обращаются в нуль при $x_n=0$ вместе с производными до порядка $s-1$.

Пусть $D'(R^n_+)$ — множество обобщенных функций, заданных при $x_n>0$. Подмножество $D'(R^n_+)$ функций f, для которых существует продолжение $lf\in H_s(R^n)$ на все R^n [2] (причем $lf=f$ при $x_n>0$) по определению образует пространство $H_s(R^n_+)$.

Наконец, нам понадобится пространство H^+_s, состоящее из функций $u_+(x)\in H_s(R^n_+)$, продолженных нулем для $x_n<0$. Функции из H^+_s мы будем обозначать через $u_+(x)$ или $u^+(x)$. Норма в $H_s(R^n_+)$ и H^+_s задается по следующей формуле:

$$\|u_+\|^+_s=\|\Pi^+(\xi_n-i\sqrt{|\xi'|^2+1})^s\, lu(\xi)\|_0, \tag{6}$$

где оператор Π^+ — образ Фурье (в обобщенном смысле) оператора θ^+ умножения на функцию $\theta^+(x)$, равную единице при $x_n>0$ и нулю при $x_n\leqslant 0$ (см. [1], [5]). Норма (6), очевидно, не зависит от вида продолжения lu функции u_+ на R^n, причем указанное продолжение всегда можно выбрать так, что будут справедливы неравенства ([1], [2])

$$C_1\|u_+\|^+_s\leqslant\|lu\|_s\leqslant C_2\|u_+\|^+_s. \tag{7}$$

Аналогично вводятся нормы в полупространстве, зависящие от параметра q или ε;

$$\|u_+\|^+_{s,q}=\|\Pi^+(\xi_n-i\sqrt{|\xi'|^2+|q|^2})^s\, lu(\xi)\|_0,\quad \|u_+\|^+_{s,\varepsilon}=\|\Pi^+(\varepsilon\xi_n-$$
$$-i\sqrt{|\varepsilon\xi'|^2+1})^s\, lu(\xi)\|_0. \tag{8}$$

Для норм вида (8) так же как в [2] устанавливается справедливость неравенств типа (7)

$$C_1\|u_+\|^+_{s,q}\leqslant\|lu\|_{s,q}\leqslant C_2\|u_+\|^+_{s,q} \tag{9}$$

и такие же неравенства для нормы $\|\cdot\|_{s,\varepsilon}$. В (9) и всюду в дальнейшем C_i обозначают различные константы, не зависящие от q. Более подробное объяснение принятой терминологии и обозначений можно найти в [1], [2], а также в [5].

§ 1. Постановка задачи. Класс символов

В полупространстве $x_n>0$ рассмотрим следующую задачу:

$$P^+|q|^{-m}Au_+=f(x),\ x_n>0, \tag{1.1}$$

$$P^+\left.\frac{\partial^j u_+}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0}=0\quad (j=0,1,\cdots,\varkappa-1), \tag{1.2}$$

где A — оператор свертки, канонически построенный по символу $a(x,\xi,q)$, P^+ — оператор сужения на полупространство $x_n>0$, $\varkappa$ — индекс факторизации (см. § 3, а также [1]) символа $a(x, \xi, q)$. Функция $f(x)$ принадлежит пространству $H_{s-m}(R^n_+)$, а решение $u_+(x)$ ищется в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^+_s \cap H_s$, $(s \geqslant 0)$.

В случае, когда символ оператора A не содержит параметра, в работе [1] для задач типа (1.1)—(1.2) (и более общих) доказана нормальная разрешимость. Целью настоящей работы является доказательство однозначной разрешимости рассматриваемой задачи для некоторого класса символов и построение асимптотики решения $u_+(x, \varepsilon)$ в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = |q|^{-1}$

$$u_+(x, \varepsilon) = u_0^+(x) + \varepsilon u_1^+(x) + \dots + \varepsilon^N u_N^+(x) + z_{N+1}^+(x, \varepsilon),$$

где $z_{N+1}^+(x, \varepsilon)$ — величина порядка $O(\varepsilon^{N+1})$ в некоторой естественно связанной с задачей норме.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать функции вида

$$a(x, \xi, q) = a^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q), \tag{1.3}$$

причем $a'(x, \xi, q)$ бесконечно дифференцируемая финитная функция x. Пусть далее, $a(x, \xi, q)$ является положительно однородной функцией переменных ξ и вещественного* параметра $q > 0$ степени $m + im_1$, то есть $a(x, t\xi, tq) = t^{m+im_1} a(x, \xi, q)$ $(t > 0$, m и m_1 — произвольные действительные числа).

Допустим также, что $a(x, \xi, q)$ имеет первую производную по ξ, ограниченную при $|\xi| + q = 1$ $(q > 0)$. Наконец, будем предполагать, что для производных более высокого порядка по ξ и для производных по x при $q \geqslant q_0 > 0$ справедливы оценки

$$|D_x^\beta a(x, \xi, q)| \leqslant C_\beta (q + |\xi|)^m, \tag{1.4}$$

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi, q)| \leqslant C_{\alpha\beta} (q + |\xi|)^{m-1} \quad (q \geqslant q_0 > 0), \tag{1.4'}$$

где $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 0$ — произвольные мультииндексы**.

Класс символов $a(x, \xi, q)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через O_m, а если, кроме того, $a(x, \xi, q)$ как функция комплексной переменной ξ_n допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $Im\, \xi_n > 0$ $(Im\, \xi_n < 0)$ при любых x, ξ' и q таких, что $|\xi'| + q \neq 0$, то будем говорить, что $a(x, \xi, q)$ принадлежит O_m^+ (O_m^-). Например, $(\xi_n \pm i\sqrt{|\xi'|^2 + q^2})^m \in O_m^\pm$). Легко проверить, что для $a(x, \xi, q) \in O_m$ справедливы также следующие оценки

$$|\tau^\beta \tilde{a}'(\tau, \xi, q)| \leqslant C_\beta \frac{(q + |\xi|)^m}{(1 + |\tau|)^p}, \tag{1.5}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \tau^\beta \tilde{a}'(\tau, \xi, q)| \leqslant C_{\alpha\beta} \frac{(q + |\xi|)^{m-1}}{(1 + |\tau|)^p} \quad (\alpha \geqslant 1), \tag{1.5'}$$

где p сколь угодно велико.

* С небольшими изменениями рассуждения, проводимые в работе, справедливы и для некоторых комплексных значений q.

** То есть $\partial_\xi^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\partial\xi_2^{\alpha_2}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = |\alpha|$. Аналогично записывается D_x^β.

Ниже нам понадобится небольшое обобщение некоторых известных фактов из теории псевдодифференциальных операторов.

Предложение 1.1. *Оператор A, построенный по символу $a(x, \xi, q) \in O_m$, ограничен из пространства $H_s(R^n)$ в пространство $H_{s-m}(R^n)$ при любом s и $q \geqslant q_0$. Точнее, имеет место оценка*

$$\|Au\|_{s-m,\,q} \leqslant C\|u\|_{s,\,q}.$$

Доказательство этого утверждения, по существу, повторяет доказательство соответствующей теоремы из [4], если неравенство (3.6) из [4] заменить следующими:

$$\frac{q_1}{2}\frac{q+|\eta|}{1+|\xi-\eta|} < q+|\xi| < \frac{2}{q_1}(q+|\eta|)(1+|\xi-\eta|), \tag{1.6}$$

где $q_1 = \min\{q_0, 1\}$, а $q \geqslant q_0$.
Неравенства (1.6) вытекают из помещенных ниже неравенств (1.10).

Предложение 1.2. *Пусть $a(x, \xi, q) \in O_m$ и $b(x, \xi, q) \in O_{m'}$. Тогда при $q \geqslant q_0 > 0$ произведение ABu разлагается в следующую сумму:*

$$ABu = Cu + Tu,$$

где C — оператор порядка $m+m'$ с символом $c(x, \xi, q) = a(x, \xi, q) \times b(x, \xi, q)$, а T — оператор порядка $m+m'-1$, то есть

$$\|Tu\|_{s-(m+m'-1),\,q} \leqslant C\|u\|_{s,\,q}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Используя определение псевдодифференциального оператора (формулы (1), (2)) и учитывая (1.3), получим

$$ABu = Op\,(a^{(0)}(\xi, q)\,b^{(0)}(\xi, q) + b'(x, \xi, q)\,a^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q)\,b^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q)\,b'(x, \xi, q))\,u + Tu,$$

где $Tu = R_1u + R_2u$ и

$$(R_1u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a^{(0)}(\xi, q) - a^{(0)}(\eta, q))\tilde{b}'(\xi-\eta, \eta, q)\,u(\eta)\,d\eta, \tag{1.8}$$

$$(R_2u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{a}'(\xi-\eta, \eta, q) - \tilde{a}'(\xi-\eta, \tau, q))\tilde{b}'(\eta-\tau, \tau, q)\,u(\tau)\,d\tau\,d\eta. \tag{1.9}$$

Для дальнейших выкладок потребуются неравенства

$$\frac{q_1}{2}\frac{q+|\eta|}{1+|\xi-\eta|} < q+|\xi+\theta(\eta-\xi)| < \frac{2}{q_1}(q+|\eta|)(1+|\xi-\eta|), \tag{1.10}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, а q_1 такое же как в (1.6).

Докажем оценку снизу (оценка сверху очевидна). Если $|\xi-\eta| \leqslant \frac{|\eta|}{2}$,

то $|\xi+\theta(\eta-\xi)| \geqslant \frac{|\eta|}{2}$ и $(q+|\xi+\theta(\eta-\xi)|)^{-1} \leqslant 2(2q+|\eta|)^{-1} \leqslant$

$\leqslant 2(q+|\eta|)^{-1}(1+|\xi-\eta|)$. Если же $|\xi-\eta|>\frac{|\eta|}{2}$, то

$$(q+|\xi+\theta(\eta-\xi)|)^{-1}\leqslant \frac{1}{q}(q+|\eta|)(q+|\eta|)^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q}\frac{q+2|\xi-\eta|}{q+|\eta|}\leqslant 2\frac{1+q^{-1}|\xi-\eta|}{q+|\eta|}=\frac{2}{q_0}\frac{q_0+|\xi-\eta|}{q+|\eta|}.$$

Теперь, если $q_0>1$, то заменяем $|\xi-\eta|$ на $q_0|\xi-\eta|$, а если $q_0<1$, то в числителе заменяем q_0 на единицу. В результате получим (1.10). Далее, в силу свойств символа $a(x, \xi, q)$, учитывая (1.5) и (1.10), будем иметь

$$|a^{(0)}(\xi, q)-a^{(0)}(\eta, q)|\leqslant C(q+|\eta|)^{m-1}(1+|\xi-\eta|)^{|m-1|},$$

$$|\tilde{a}'(\xi-\eta, \eta, q)-\tilde{a}'(\xi-\eta, \xi, q)|\leqslant C'(q+|\eta|)^{m-1}(1+|\eta-\xi|)^{|m-1|}\times$$
$$\times(1+|\xi-\eta|)^{-p},$$

где $p>0$ — сколь угодно большое число.

Дальнейшая оценка R_1u и R_2u проводится так же как в [4] (см. также доказательство леммы 2.2 § 5).

§ 2. Эллиптическая задача в полупространстве

Пусть $a(x, \xi, q)\in O_m$ и, кроме того, выполнено условие эллиптичности (с параметром)

$$a(x, \xi, q)\neq 0 \text{ при } |\xi|+q\neq 0 \tag{2.1}$$

для всех $x\in R^n$ и всех вещественных ξ и $q>0$. Тогда, как показано в [1], для функции $a(x, \xi, q)$ справедливо следующее представление, называемое факторизацией

$$a(x, \xi, q)=a_+(x, \xi', \xi_n, q)\,a_-(x, \xi', \xi_n, q),$$

где $a_+(x, \xi', \xi_n, q)\in O_\varkappa^+$, $a_-(x, \xi', \xi_n, q)\in O_{m-\varkappa}^-$ и $a_+(x, \xi', \xi_n, q)\neq 0$ при $Im\,\xi_n>0$, $a_-(x, \xi', \xi_n, q)\neq 0$ при $Im\,\xi_n<0$.
Число $\varkappa$ называется индексом факторизации символа $a(x, \xi, q)$. Мы будем предполагать, что $\varkappa$—целое положительное число. Отметим, что указанные свойства $a_\pm(x, \xi', \xi_n, q)$ следуют из явного представления этих функций, полученного в [1].

При изучении уравнений в свертках в полупространстве важную роль играют гладкие операторы. Оператор A порядка m называется гладким в полупространстве $x_n>0$, если оценка

$$\|P^+Au_+\|^+_{s-m,\,q}\leqslant C\|u_+\|^+_{s,\,q}$$

выполняется при любом $s\geqslant 0$ для любой функции $u_+\in H_s^+$.

Теорема 2.1. *Пусть при $s\geqslant 0$ для некоторой функции $g(x, \xi, q)$ имеет место разложение следующего вида:*

$$\xi_-^s g(x, \xi, q)=g_-(x, \xi, q)+r_{-1}(x, \xi, q),\quad \xi_-=\xi_n-i\sqrt{|\xi'|^2+q^2}, \tag{2.2}$$

в котором $g_-(x, \xi, q)$ *допускает аналитическое продолжение по* ξ_n *в полуплоскость* $\operatorname{Im}\xi_n < 0$, *причем справедливы оценки*

$$|g_-(x, \xi, q)| \leqslant C(q + |\xi|)^{m-s}, \quad |r_{-1}(x, \xi, q)| \leqslant C_1 \frac{(q+|\xi'|)^{m-s+1}}{q+|\xi'|+|\xi_n|} \tag{2.3}$$

и, кроме того, для $g_-(x, \xi, q)$ *и* $r_{-1}(x, \xi, q)$ *выполнены соотношения, аналогичные* (1.3).

Тогда $G = Op(g(x, \xi, q))$ — *гладкий в полупространстве оператор порядка* m, *то есть для любого* $s > 0$ *справедлива оценка*

$$\|P^+ Gu_+\|^+_{s-m, q} \leqslant C\|u_+\|^+_{s, q}.$$

Замечание. Теорема 2.1 аналогична теореме 1.7 из [1], однако доказывается несколько иначе.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $g_-^{(0)}(\xi, q) = 0$ и $r_-^{(0)}(\xi, q) = 0$. Далее, по определению нормы в полупространстве имеем

$$\|P^+ Gu_+\|^+_{s-m, q} = \|\Pi^+ \xi_-^{s-m}(Gu_+)(\xi)\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \|\Pi^+ \xi_-^{s-m}(Glu)(\xi)\|_0 + \|\Pi^+ \xi_-^{s-m}(Gu_-)(\xi)\|_0. \tag{2.4}$$

Так как оператор Π^+ ограничен в $L_2(R^1_{\xi_n})$ [2], и $|\xi_-^{s-m}| \leqslant (|\xi| + q)^{s-m}$, то первое слагаемое в правой части (2.4) оцениваем во всем пространстве, используя предложение 1.1 и неравенство (9)

$$\|\Pi^+ \xi_-^{s-m}(Glu)(\xi)\|_0 \leqslant C_1 \|lu\|_{s, q} \leqslant C_2 \|u_+\|^+_{s, q}. \tag{2.5}$$

Учитывая (2), (2.2) и (2.3), далее будем иметь

$$\|\Pi^+ \xi_-^{s-m}(Gu_-)(\xi)\|_0 = \|\Pi^+ \xi_-^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_-^{s-m} \tilde{g}'(\xi - \eta_1, \eta_1, q)\, \eta_-^{m-s} u_-(\eta)\, d\eta\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \|\Pi^+ \xi_-^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}'_-(\xi - \eta_1, \eta_1, q)\, \eta_-^{m-s} u_-(\eta)\, d\eta\|_0 +$$
$$+ \|\Pi^+ \xi_-^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{r}'(\xi - \eta_1, \eta_1, q)\, \eta_-^{m-s} u_-(\eta)\, d\eta\|_0. \tag{2.6}$$

Первое слагаемое в правой части (2.6), очевидно, равно нулю, кроме того, в силу (2.3)

$$|\tilde{r}_{-1}(\xi - \eta_1, \eta_1, q)| \leqslant C \frac{(q+|\eta'|)^{s+1}}{(q+|\eta'|+|\eta_n|)(1+|\xi-\eta|)^p}, \tag{2.7}$$

где $p > 0$ сколь угодно велико.

Продолжая оценивать (2.6) (с помощью (2.7)), получим

$$\|\Pi^+ \xi_-^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{r}_{-1}(\xi - \eta_1, \eta_1, q)\, \eta_-^{m-s} u_-(\eta)\, d\eta\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(q+|\eta'|)^{s+1} |u_-(\eta)|\, d\eta}{(1+|\xi-\eta|)^{p_1} (q+|\eta'|+|\eta_n|)} \right\|_0 \leqslant C_1 \|(q+|\eta'|)^s |u_-(\eta)|\|_0.$$

В последней оценке использовано известное неравенство

$$\left\| \int \varphi(\xi-\eta)\, v(\eta)\, d\eta \right\|_0 \leqslant \int |\varphi(\xi)|\, d\xi\, \|v\|_0.$$

Далее, так же как в теореме 1.4 из [1] можно показать, что

$$\|(q+|\xi'|)^s u_-(\eta)\|_0 \leqslant C_2 \|lu\|_{s,q} \leqslant C_3 \|u_+\|^+_{s,q}. \tag{2.8}$$

Из (2.4), (2.5), (2.8) получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем для доказательства свойства гладкости некоторых операторов свертки определенного вида удобно сформулировать следующее условие гладкости (см. [1]).

Условие C_1. Функция $a_+(x, \xi, q)$ при любом x аналитически продолжается по ξ_n вне полукруга $|\xi_n| \leqslant R(|\xi'|+q)$, $Im\,\xi_n \leqslant 0$ ($R>0$ не зависит от ξ' и q), причем в результате продолжения получается отличная от нуля однозначная аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки.

Лемма 2.1. *Пусть* $a(x, \xi, q) \in O_m$ — *эллиптический символ, причем* $a_-(x, \xi, q)$ *удовлетворяет условию* C_1.

Тогда операторы, построенные по символам вида

$$\frac{\partial^p}{\partial \xi_n^p} a_+^{-1}(x, \xi', \xi_n, q),\ \partial^\alpha_x a(x, \xi', \xi_n, q)\ (p \geqslant 0, \alpha \geqslant 0)$$

являются гладкими в полупространстве.

Доказательство леммы, помещенное в § 5, заключается в установлении для указанных символов соотношений типа (2.2), (2.3) теоремы 2.1. Лемма 2.1 при $p \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 1$ используется в § 4.

Переходим к основному утверждению этого параграфа.

Теорема 2.2. *Для любой функции* $f(x) \in H_{s-m}(R^n_+)$ *при* $s \geqslant \varkappa$ *и* $q \geqslant q_2$, *где* q_2 *достаточно велико, существует единственное решение задачи* (1.1)—(1.2), *принадлежащее* $\overset{0}{H}{}^+_s \cap H^-_s$, *причем справедлива априорная оценка*

$$\|u_+\|^+_{s,q} \leqslant C \|P^+ Au_+\|^+_{s-m,q} \tag{2.9}$$

или

$$\|u_+\|^+_{s,\varepsilon} \leqslant C \|P^+ q^{-m} Au_+\|^+_{s-m,\varepsilon}. \tag{2.9'}$$

Доказательство. Обозначим $f_1(x) = q^m f(x)$ и положим

$$Rf_1(x) = Op(a_+^{-1}(x, \xi, q))\,\theta^-\,Op(a_-^{-1}(x, \xi, q))\, lf_1(x). \tag{2.10}$$

Мы сейчас покажем, что оператор R, определенный формулой (2.10), является левым и правым регуляризатором оператора A, то есть

1. R ограничен из $H_{s-m}(R^n_+)$ в H^+_s, точнее

$$\|Rf_1\|_{s,q} \leqslant C\|f_1\|_{s-m,q}; \tag{2.11}$$

2. Выполнены соотношения

$$RP^+ Au_+ = u_+ + \theta^+ T_1 u_+, \quad \|\theta^+ T_1 u_+\|^+_{s,q} \leqslant C\|u_+\|^+_{s-1,q}, \tag{2.12}$$

$$P^+ ARf_1 = f_1 + P^+ T_2 f_1, \quad \|P^+ T_2 f_1\|^+_{s-m,q} \leqslant C_1 \|f_1\|^+_{s-m-1,q}. \tag{2.13}$$

Ограниченность R следует из теоремы 2.1, так как, в силу леммы 2.1, $a_-^{-1}(x, \xi, q)$ — гладкий символ.

Докажем сначала формулы (2.13). Применяя оператор P^+A к (2.10) и используя предложение 1.2, получим

$$P^+ ARf_1 = P^+ Op\,(a_-(x, \xi, q))\,\theta^+ Op\,(a_-^{-1}(x, \xi, q))\,lf_1 +$$
$$+ P^+ V_1 \theta^+ Op\,(a_-^{-1}(x, \xi, q))\,lf_1, \tag{2.14}$$

где V_1 — оператор порядка $m - \varkappa - 1$. Кроме того справедлива

Лемма 2.2. *Оператор V_1 — гладкий в полупространстве.* Доказательство леммы 2.2 помещено в § 5.

Применяя вновь предложение 1.2 к первому слагаемому правой части (2.14), получим*

$$P^+ ARf_1 = f_1 + P^+ (V_2 + V_3)\, f_1 = f_1 + P^+ T_2 f_1,$$

где $V_2 = V_1 \theta^+ Op\,(a_-^{-1}(x, \xi, q))$, в силу леммы 2.2, гладкий в полупространстве оператор порядка -1. Этим же свойством обладает и V_3. Отсюда следует оценка (2.13). Далее, в силу свойства нормы (3), см. [2], из (2.13) получим

$$\|P^+ T_2 f_1\|^+_{s-m,q} \leqslant \frac{C_1}{q} \|f_1\|^+_{s-m,q}.$$

Теперь, если q достаточно велико ($q \geqslant q_2$), то оператор T_2 имеет малую норму в пространстве $H_{s-m}(R^n_+)$ и, следовательно, оператор $I + P^+T_2$, как хорошо известно, обладает ограниченным обратным $(I + P^+ T_2)^{-1}$. Полагая

$$R' f_1 = R\,(I + P^+ T_2)^{-1} f_1,$$

из (2.13) получим $P^+ AR' f_1 = f_1$, т. е. R' — точный правый обратный оператор.

Докажем теперь формулы (2.12). Найдем выражение RP^+Au_+ (R по-прежнему определен (2.10)).

$$RP^+ Au_+ = Op\,(a_-^{-1}(x, \xi, q))\,\theta^+ Op\,(a_+^{-1}(x, \xi, q))\,Au_+ =$$
$$= Op\,(a_-^{-1}(x, \xi, q))\,[Op\,(a_-(x, \xi, q)) + \theta^+ V_4]\,u_+ =$$
$$= u_+ + \theta^+ V_5 u_+ + \theta^+ V_6 u_+ = u_+ + \theta^+ T_1 u_+,$$

где $V_5 u_+ = Op\,(a_-^{-1}(x, \xi, q))\,\theta^+ V_4 u_+$. Свойство гладкости в полупространстве операторов V_5 и V_6 доказывается точно так же как для

* Легко проверить соотношение [2]: $P^+ A_-\theta^+ g = P^+ A_- g$, где A — произвольный оператор свертки, символ которого $a_-(x, \xi)$ — аналитическая функция при $Im\,\xi_n < 0$. Кроме того, в доказательстве будет использован следующий очевидный факт. Сумма и свертка функций, равных нулю при $x_n < 0$, равны нулю при $x_n < 0$.

оператора V_1. Кроме того, из предложения 1.2 следует, что $T_1 = V_5 + V_6$ имеет порядок, равный -1, т. е. справедлива оценка (2.12). Далее, повторяя те же рассуждения, что и выше, получаем выражение для левого обратного оператора

$$R'' = (I + \theta^+ T_1)^{-1} R.$$

Из ограниченности R'' вытекает априорная оценка (2.9). Легко видеть также, что функция $u_+ = R' f_1 = R(I + P^+ T_2)^{-1} f_1$ — решение уравнения (1.1) принадлежит $\overset{0}{H}{}^-_{\cdot} \cap H^+_{\cdot}$ при $f_1 \in H_{\cdot, -m}(R^n_+)$ и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям (1.2). Теорема доказана.

§ 3. Построение асимптотики

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о нахождении приближенного решения задачи (1.1)—(1.2) когда q достаточно велико. Будем искать решение $u_+(x, \varepsilon)$ $\left(\varepsilon = \frac{1}{q}\right)$ в виде ряда по степеням малого параметра ε

$$u_+(x, \varepsilon) = w_0^+(x) + \varepsilon w_1^+(x) + \cdots, \tag{3.1}$$

причем функции $w_k^+(x)$ равны нулю при $x_n < 0$.

Разложим символ $q^{-m} a(x, \xi, q)$ оператора $q^{-m} A$ по степеням ε

$$q^{-m} a(x, \xi, q) = a(x, \varepsilon\xi, 1) = a(x, 0, 1) + \sum_{1 \le |\alpha| \le N} \frac{\varepsilon^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \xi^\alpha \partial^\alpha a(x, 0, 1) +$$

$$+ \varepsilon^{N+1} r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon), \tag{3.2}$$

$$r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon) = \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{1}{(N+1)!} \partial^\alpha a(x, \varepsilon\theta\xi, 1) \xi^\alpha, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1. \tag{3.3}$$

Если отдельным слагаемым в (3.2) сопоставить каноническим образом операторы свертки, то получим

$$q^{-m} A u_+ = a(x) u_+ + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j A_j u_+ + \varepsilon^{N+1} R_{N+1} u_+, \quad a(x) = a(x, 0, 1). \tag{3.4}$$

Формула (3.4) дает для исходного оператора представление в виде суммы дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и псевдодифференциального оператора $\varepsilon^{N+1} R_{N+1}$. Подставляя (3.1) и (3.4) в исходное уравнение (1.1)

$$P^+ q^{-m} A u_+ = f(x), \quad x_n > 0 \tag{1.1}$$

и приравнивая выражения, содержащие ε в одинаковых степенях, получим

$$w_0^+(x) = \theta^+ a^{-1}(x)\, l f(x),$$

$$w_1^+(x) = -\theta^+ a^{-1}(x) A_1 w_0^+(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3.5}$$

. . . .

$$w_k^+(x) = -\theta^+ \sum_{l=1}^{k} a^{-1}(x) A_l\, w_{k-l}^+(x)$$

. . . .

Таким образом, все функции $w_k^+(x)$ определяются через известную функцию $f(x)$, например,

$$w_0^+(x) = \theta^+ a^{-1}(x)\, lf(x),$$

$$w_1^+(x) = -\theta^+ a^{-1}(x) A_1 \theta^+ a^{-1}(x)\, lf(x), \tag{3.6}$$

$$w_2^+(x) = -\theta^+ a^{-1}(x) A_1 \theta^+ a^{-1}(x) A_1 \theta^+ a^{-1}(x)\, lf(x) +$$
$$+ \theta^+ a^{-1}(x) A_2 \theta^+ a^{-1}(x)\, lf(x),$$

. . . .

и, очевидно, не зависят от вида продолжения функции $f(x)$ на все R^n. Легко видеть, что имеет место

Теорема 3.1. *Для функций $w_k^+(x)$, определяемых по формулам* (3.5), *справедлива оценка*

$$\|w_k^+(x)\|_s^+ \leqslant C\|f\|_{s+k}.$$

Замечание. Функции $w_k^+(x)$ иногда удобно записывать в виде $w_k^+(x) = \theta^+ \Phi_k(x)$.

В силу теоремы 3.1 можно утверждать, что, если норма $\|f\|_{s-k}$ конечна (то есть $f(x)$ — достаточно гладкая и убывающая при $x_n > 0$ функция), то $\Phi_k(x)$ является гладким продолжением $w_k^+(x)$ на все пространство и при этом

$$C\|\Phi_k(x)\|_{s,R^n} \leqslant \|w_k^+(x)\|_s^+ \leqslant C_1\|f\|_{s-k}. \tag{3.7}$$

Заметим, однако, что функции $w_k^+(x)$, определенные формулами (3.5) и (3.6), не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям (1.2). Это обстоятельство не позволяет получить равномерную асимптотику, используя лишь разложения (3.1) и (3.4). Такая ситуация является типичной для уравнений, содержащих малый параметр при членах более высокого порядка, так как при этом для вырожденного уравнения (которое приходится решать, если искать решение в виде (3.1)) всегда оказывается корректной задача с меньшим числом граничных условий (в нашем случае вообще без граничных условий).

Для того чтобы получить равномерную вплоть до границы асимптотику мы будем, используя идею, предложенную в [3] для дифференциальных уравнений, прибавлять к функциям w_k^+ некоторые функции v_k^+, называемые функциями типа пограничного слоя, так, чтобы сумма $w_k^+ + v_k^+$ удовлетворяла граничным условиям (см. также [5]). Таким образом, мы ищем решение в виде

$$u_+(x,\varepsilon) = w_0^+ + \varepsilon w_1^+ + \cdots + \varepsilon^N w_N^+ + v_0^+ + \varepsilon v_1^+ + \cdots + \varepsilon^N v_N^+ + z_{N+1}(x,\varepsilon).$$

При этом, так как $\sum\limits_k \varepsilon^k w_k^-$ дает некоторое приближение к решению неоднородного уравнения (1.1), естественно искать функции v_k^- таким образом, чтобы $\sum\limits_k \varepsilon^k v_k^-$ являлась приближенным решением соответствующего однородного уравнения, т. е.

$$P^- q^{-m} A \left(v_0^- + \varepsilon v_1^- + \varepsilon^2 v_2^- + \cdots\right) = 0. \tag{3.8}$$

Далее, так как по условию функции типа пограничного слоя v_k^- должны быть заметно отличны от нуля лишь вблизи границы $x_n = 0$, естественно сделать замену переменных $x' \to x'$, $x_n \to t_n = \frac{x_n}{\varepsilon}$, что означает растяжение масштаба в направлении, нормальном к границе [1]. В результате мы получаем новое разложение оператора $q^{-m} A$ по степеням ε, причем главная часть этого разложения является оператором свертки лишь по переменной t_n с коэффициентами, не зависящими от t_n, а зависящими только от x'. В самом деле, замечая, что преобразованию $x_n \to t_n = \frac{x_n}{\varepsilon}$ отвечает в ξ-представлении преобразование $\xi_n \to \eta_n = \varepsilon\xi_n$ и используя свойство однородности символа $a(x, \xi', \xi_n, q)$, получим

$$q^{-m} a(x', x_n, \xi', \xi_n, q) = a(x', \varepsilon t_n, \varepsilon\xi', \eta_n, 1).$$

Разлагая полученное выражение по формуле Тейлора по степеням ε, будем иметь

$$q^{-m} a(x, \xi, q) = a(x', 0, 0, \eta_n, 1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sum_{|\alpha|+\beta=j} \partial_{\xi'}^{\alpha} D_{x_n}^{\beta} a(x', 0, 0, \eta_n, 1)\, t_n^{\beta} \xi'^{\alpha} + \varepsilon^{N+1} r_{N+1}^{(1)}(x', t_n, \xi', \eta_n, \varepsilon) =$$

$$= b_0(x', \eta_n) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j b_j(x', t_n, \xi', \eta_n) + \varepsilon^{N+1} r_{N+1}^{(1)}(x', t_n, \xi', \eta_n, \varepsilon), \tag{3.9}$$

где

$$b_0(x', \eta_n) = a(x', 0, 0, \eta_n, 1), \quad b_j = \sum_{|\alpha|+\beta=j} \frac{1}{j!}\, t_n^{\beta}\, \partial_{\xi'}^{\alpha} D_{x_n}^{\beta} a(x', 0, 0, \eta_n, 1)\, \xi'^{\alpha},$$

$$r_{N+1}^{(1)}(x', t_n, \xi', \eta_n, \varepsilon) = \sum_{|\alpha|+\beta=N+1} \frac{1}{(N+1)!} \times$$

$$\times t_n^{\beta}\, \partial_{\xi'}^{\alpha} D_{x_n}^{\beta} a(x', \varepsilon\theta t_n, \varepsilon\theta\xi', \eta_n, 1)\, \xi'^{\alpha} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1). \tag{3.10}$$

Сопоставляя каждому символу в разложении (3.9) оператор свертки, получим второе (в отличие от (3.4)) расщепление оператора $q^{-m} A$

$$q^{-m} A = B_0 + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j B_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^{(1)}. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.8) и приравнивая члены, содержащие ε в одинаковых степенях, получим

$$
\begin{aligned}
&P^+ B_0 v_0^+ = 0,\\
&P^+ B_0 v_1^+ = -P^+ B_1 v_0^+,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P^+ B_0 v_l^+ = -P^+ \sum_{k=1}^{l} B_k v_{l-k}^+,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

В силу указанных выше свойств символа $b_0(x', \tau_{in})$ уравнения (3.12), по существу, являются уравнениями в свертках с постоянным символом в полупространстве (x' в левых частях (3.13) играет роль параметра), что позволяет получить их решения в явном виде [1], [5], используя факторизацию

$$b_0(x', \tau_{in}) = b_0^+(x', \eta_n)\, b_0^-(x', \tau_{in}). \tag{3.13}$$

Факторизация (3.13) следует из факторизации (2.1) исходного символа. При этом функции $b_0^\pm(x', \tau_{in})$ обладают теми же свойствами по τ_{in}, что и $a_\pm(x, \xi', \xi_n, q)$ по ξ_n (см. § 2).

Обозначив $\hat{v}(x', \tau_{in}) = F_{t_n \to \tau_{in}} v(x', t_n)$, из (3.12) и (3.13) получим (так же как в [1], [5])

$$\hat{v}_0^+(x', \tau_{in}) = \frac{1}{b_0^+(x', \tau_{in})} \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k^{(0)}(x')\, \tau_{in}^{k-1}, \tag{3.14}$$

$$\hat{v}_l^+(x', \tau_{in}) = \frac{1}{b_0^+(x', \tau_{in})} \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k^{(l)}(x')\, \tau_{in}^{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{b_0^+(x', \tau_{in})} \Pi^- \frac{1}{b_0^-(x', \tau_{in})} \sum_{i=1}^{l} \widehat{B_i v_{l-i}^+}(x', \tau_{in}) \quad (l = 1, 2, \cdots, N). \tag{3.15}$$

Далее рассмотрим сумму $u_0^+(x) = w_0^+(x) + v_0^+(x', t_n)$.
Совершая преобразование Фурье и используя (3.5) и (3.14), получим*

$$\hat{u}_+^{(0)} = \hat{w}_+^{(0)}(x', \xi_n) + \varepsilon\, \hat{v}_0(x', \tau_{in}) = \Pi^+ \hat{l f_2}(x', \xi_n) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{b_0^+(x', \tau_{in})} \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k^{(0)}(x')\, \tau_{in}^{k-1} \quad (lf_2(x) = a^{-1}(x)\, lf(x)). \tag{3.16}$$

---

* В (3.16) используется следующий простой факт. Если

$$g(x', t_n) = g\left(x', \frac{x_n}{\varepsilon}\right) = g_1(x', x_n) \text{ ,то } F_{x_n \to \xi_n} g_1(x', x_n) =$$

$$= \varepsilon F_{t_n \to \tau_{in}} g(x', t_n), \ \eta_n = \varepsilon \xi_n.$$

Подчиняя $\overset{*}{u}{}^{(0)}_{+}$ граничным условиям (1.2), получим линейную алгебраическую систему для определения $c_k^{(0)}(x')$

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} b_{jk}(x')\, c_k^{(0)}(x') = f_j^{(0)}(x') \; (j = 0, 1, \cdots, \varkappa-1), \tag{3.17}$$

где

$$b_{jk}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^{+} \frac{\tau_{in}^{j+k-1}}{b_0^{+}(x', \tau_{in})}\, d\tau_{in}, \tag{3.18}$$

$$f_j^{(0)}(x') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^{-} \tau_{in}^{j}\, l \overset{*}{f}_2(x', \xi_n)\, d\xi_n,$$

причем интегралы в (3.18) существуют, так как символ $|b_0^{+}(x', \tau_{in}|^{-1}$ гладкий, в силу леммы 2.1. Кроме того, мы предполагаем, что для граничной задачи (1.1)—(1.2) выполнен аналог условия Шапиро-Лопатинского [2] $det \, \|b_{jk}(x')\| \neq 0$, так что система (3.17) разрешима.

Пусть далее $\|b_{kj}^{(1)}(x')\|$ — обратная к $\|b_{jk}(x')\|$ матрица. Тогда,

$$c_k^{(0)}(x') = \sum_{j=1}^{\varkappa} b_{kj}^{(1)}\, f_j^{(0)}(x').$$

Совершенно аналогично определяются $c_k^{(l)}(x')$, если учесть, что второе слагаемое в правой части (3.15) очевидно удовлетворяет граничным условиям (1.2), так как принадлежит $\overset{0}{H}_{\varkappa}$. Мы получаем, учитывая замечание к теореме 3.1

$$c_k^{(l)}(x') = \sum_{j=1}^{\varkappa} b_{kj}^{(1)}(x')\, f_j^{(l)}(x') \quad (k = 1, 2, \cdots, \varkappa; \; l = 0, 1, \cdots, N), \tag{3.19}$$

где

$$f_j^{(l)}(x') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^{-} \eta_n^{j}\, \overset{*}{\Phi}_l(x', \xi_n)\, d\xi_n. \tag{3.20}$$

В результате мы получаем, что при всех $l = 0, 1, \cdots, N$ сумма $u_l^{+} = w_l^{+}(x', x_n) + v_l^{+}(x', t_n)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2).

Таким образом, формальное построение асимптотики закончено. Решение $u_+(x, \varepsilon)$ имеет вид

$$u_+(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k w_k^{+}(x) + \sum_{l=0}^{N} \varepsilon^l v_l^{+}(x', t_n) + z_{N+1}(x, \varepsilon), \tag{3.21}$$

где функции $w_k^{+}(x', x_n)$ определяются из соотношений (3.5), функции $v_l^{+}(x', t_n) = F^{-1}_{\tau_n \to t_n} \overset{*}{v}{}_l^{+}(x', \tau_{in})$ — из соотношений (3.15), (3.16), причем $\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j (w_j^{+} + v_j^{+})$ удовлетворяет граничным условиям (1.2).

Отметим, что определение функций w_k^+ и v_k^+ аналогично соответственно первому и второму итерационным процессам для дифференциальных уравнений [3].

§ 4. Оценка остаточного члена

Теорема 4.1. *Для остаточного члена $z_{N+1}^+(x, \varepsilon)$ в разложении (3.21) при любом $s > 0$ и при достаточно малых ε справедливы оценки*

$$\|z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{s,\varkappa}^+ \leqslant C_1 \varepsilon^{N+1} \|f\|_{s+N_1}^+, \tag{4.1}$$

$$\|z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{L_1} \leqslant C_2 \varepsilon^{N+1} \|f\|_{N_1}^+, \tag{4.2}$$

$$\|P^+ D_x^p z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{L_1} \leqslant C_3 \varepsilon^{N+1-|p|} \|f\|_{N_1+|p|}^+, \tag{4.3}$$

где N_1 — некоторое число, зависящее от m, $\varkappa$ и N. (Выражение для N_1 приведено в конце доказательства этой теоремы).

Доказательство. Из формулы (3.21) следует, что остаточный член $z_{N+1}^+(x, \varepsilon)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2). Поэтому при достаточно малых ε для z_{N+1}^+ справедлива оценка (2.9′) теоремы 2.2

$$\|z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{s,\varkappa}^+ \leqslant C \|P^+ q^{-m} A z_{N+1}^+\|_{s-m,\varkappa}^+. \tag{4.4}$$

Вычислим $P^+ q^{-m} A z_{N+1}^+$. Применяя оператор $P^+ q^{-m} A$ к (3.21) и учитывая соотношения (3.4) и (3.11), получим

$$f(x) = P^+ \left(a(x) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j A_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}\right)(w_0^+ + \varepsilon w_1^+ + \cdots + \varepsilon^N w_N^+) +$$

$$+ P^+ \left(\sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j B_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^{(1)}\right)(v_0^+ + \varepsilon v_1^+ + \cdots + \varepsilon^N v_N^+) + P^+ q^{-m} A z_{N+1}^+. \tag{4.5}$$

Так как всегда выполнены соотношения (3.5) и (3.12), в уравнении (4.5) будут отсутствовать члены, содержащие $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^N$, так что

$$P^+ q^{-m} A z_{N+1}^+ = P^+ \varepsilon^{N+1} \left(R_{N+1} w_0^+ + \sum_{j=1}^{N} A_{N-j+1} w_j^+ + \right.$$

$$\left. + R_{N+1}^{(1)} v_0^+ + \sum_{j=1}^{N} B_{N-j+1} v_j^+\right) + \cdots, \tag{4.6}$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка по ε. Теперь из (4.4) и (4.6) видно, что для оценки остаточного члена достаточно оценить по норме выражения, стоящие в правой части (4.6).

Так как A_j — дифференциальные операторы порядка j, используя теорему 3.1, получим

$$\|P^+ A_j w_k^+\|_{s-m,\varkappa}^+ \leqslant C_1 \|P^+ A_j w_k\|_{s-m}^+ \leqslant C_2 \|w_k\|_{s-m+j}^+ \leqslant C_3 \|f\|_{s-m+j+\dots}^+. \tag{4.7}$$

Далее из (3.3), (1.4) и (1.10) выводим

$$|r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon)| \leqslant C\,(1+|\xi|)^{m'+N}, \text{ где } m' = \max\,[m,\, 1]$$

и, так как в силу леммы 2.1 R_{N+1} — гладкий в полупространстве оператор, то

$$\|P^+ R_{N+1} w_k\|^+_{s-m,\varepsilon} \leqslant C\,\|w_k\|_{s-m'+m+N} \leqslant C_1\,\|f\|^+_{s-m-m'-N+k}. \tag{4.8}$$

Переходим к оценке слагаемых вида $B_i v_k^+$ и $R^{(1)}_{N+1} v_k^+$ в правой части (4.6). Предварительно сформулируем две вспомогательные леммы. Введем обозначения

$$Rv = Op\left(\frac{1}{b_0^+(x', \gamma_{in})}\right)\theta^+ Op\left(\frac{1}{b_0^-(x', \gamma_{in})}\right) v\,(x', t_n),$$

$$r_-^{(p)}(x', t_n) = F^{-1}_{\gamma_{in}\to t_n}\, \hat r_-^{(p)}(x', \gamma_{in}) = F^{-1}_{\xi_n\to t_n} \frac{1}{b_0^-(x', \gamma_{in})} \sum_{k=1}^{p} c_k^{(p)}(x')\,\gamma_{in}^{k-1}.$$

Кроме того, для оценки функций типа пограничного слоя естественно использовать норму следующего вида:

$$\|v_+\|^+_{s,\varepsilon} = \|\Pi^+ \hat\gamma_1^{\,s}\, l v\|_{0+} \quad \left(\hat\gamma_1 = \varepsilon\xi_n - i\sqrt{|\xi'|^2+1}\right). \tag{4.9}$$

Лемма 4.1. *При любом $\lambda > 0$ справедливы оценки*

$$\|P^+ t_n^\lambda B_j v_+\|^+_{s,\varepsilon} \leqslant C_1 \sum_{\mu\leqslant\lambda+j} \|t_n^\mu v_+\|^+_{s+m'+j,\varepsilon}, \tag{4.10}$$

$$\|t_n^\lambda Rv\|^+_{s,\varepsilon} \leqslant C_2 \sum_{\mu\leqslant\lambda} \|t_n^\mu v_+\|^+_{s+s_1,\varepsilon},\quad s_1 = \max\,[0, \varkappa - m], \tag{4.11}$$

$$\|P^+ R^{(1)}_{N+1} v_+\|^+_{s,\varepsilon} \leqslant C_3 \sum_{\mu\leqslant N+1} \|t_n^\mu v_+\|^+_{s+m'+N+1,\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Лемма 4.2. *При любом $\lambda > 0$ справедлива оценка*

$$\|t_n^\lambda r_+^{(\mu)}\|^+_{s,\varepsilon} \leqslant C\,\|f\|^+_{s+\varkappa+\mu+\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Доказательство лемм 4.1 и 4.2 помещено в § 5.

Исходя из формул (3.14) и (3.15), нетрудно убедиться, по индукции, что выражение для $v_k^+(x', t_n)$ можно записать в виде

$$v_k^+(x', t_n) = \sum_{j=0}^{k} \sum^{(1)}_{|pj_p|=j} (RB_1)^{j_1}\cdots(RB_k)^{j_k}\, r_+^{(k-j)}, \tag{4.14}$$

где $|pj_p| = j_1 + 2j_2 + \cdots + kj_k$, а $\Sigma^{(1)}$ обозначает суммирование в указанных пределах, учитывающее все слагаемые, которые получаются при перестановке любых RB_i и RB_j.

В силу неравенства (4.10) леммы 4.1

$$\|P^+ B_i v_k^+\|^+_{s-m,\varepsilon} \leqslant C \sum_{\substack{\mu\leqslant l\\ j\leqslant k}} \sum^{(1)}_{|pj_p|=j} \|t_n^\mu (RB_1)^{j_1}\cdots(RB_k)^{j_k} r_+^{(k-j)}\|^+_{s-m+m'+l,\varepsilon}. \tag{4.15}$$

В конечной сумме (4.15) достаточно оценить каждое слагаемое. Предварительно оценим оператор $t_n^\mu RB_p$, используя леммы 4.1 и 4.2.

Имеем

$$\|t_n R B_p v_+\|^+_{\mu, \varepsilon} \leqslant C_1 \sum_{\nu \leqslant \mu} \|P^+ t_n B_p v_+\|^+_{\nu + s_1, \varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{\nu \leqslant \mu} \sum_{\sigma \leqslant \nu + p} \|t_n^\sigma v_+\|^+_{\nu + s_1 + m' + p, \varepsilon} \leqslant C_3 \sum_{\sigma \leqslant \mu + p} \|t_n^\sigma v_+\|^+_{\mu + s_1 + p + m', \varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\|t_n^\mu (RB_p)^{j_p} v_+\|^+_{s, \varepsilon} \leqslant C_4 \sum_{\sigma \leqslant \mu + p j_p} \|t_n^\sigma v_+\|^+_{s + j_p s_1 + j_p (m' + p), \varepsilon}. \tag{4.16}$$

Таким образом из (4.15) и (4.16) получим следующую (грубую) оценку:

$$\|P^+ B_l v_k^+\|^+_{s-m, \varepsilon} \leqslant C \sum_{j \leqslant k} \sum_{\sigma \leqslant l + j} \|t_n^\sigma r_+^{(k-l)}\|^+_{s_{lj}, \varepsilon}, \tag{4.17}$$

где $s_{lj} = s - m + js_1 + j(m' + 1) + i + m'$.

Применяя лемму 4.2, будем иметь

$$\|P^+ B_l v_k^+\|^+_{s-m, \varepsilon} \leqslant C_1 \|f\|^+_{s'_{lk}}, \quad s'_{lk} = s_{lk} + k + \varkappa + \frac{1}{2} \tag{4.18}$$

и аналогичную оценку с $i = N + 1$ для $R^{(1)}_{N+1} v_k^+$.

С помощью формул (4.7), (4.8), (4.18) (в которых $j = N$, $k = N$, $i = N + 1$), учитывая соотношения (4.4) и (4.6), получаем (4.1) с

$$N_1 = \max\, [s - m + 2N,\ s - m + 2N + m',\ s'_{N+1, N}].$$

Не составляет труда проверить, что на самом деле при любых m и $\varkappa$ $N_1 = s'_{N+1, N}$. Формула (4.2) получается из (4.1) при $s = 0$, а (4.3) легко выводится из (4.1) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Теорема доказана.

§ 5. Доказательство лемм

Доказательство леммы 2.1. Запишем разложение функции $a_+(x, \xi', \xi_n, q)$ в ряд Лорана по степеням $\xi_+ = \xi_n + i\sqrt{|\xi'|^2 + q^2}$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$a_+(x, \xi', \xi_n, q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, \xi', q)\, \xi_+^{\varkappa - k}, \tag{5.1}$$

$$c_k(x, \xi', q) = \frac{1}{2\pi i} \oint \xi_+^{-\varkappa + k - 1} a_+(x, \xi', \xi_n, q)\, d\xi_n, \tag{5.1'}$$

где контур интегрирования в комплексной плоскости ξ_n является границей круга: $|\xi_n| \leqslant R(|\xi'| + q)$. Дифференцируя почленно ряд (5.1)-($\alpha \geqslant 1$), с помощью формулы Лейбница получим

$$\partial_\xi^\alpha a_+(x, \xi', \xi_n, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta'| + |\gamma| = |\alpha|} \sum_{j=0}^{|\gamma'|-1} a_{\beta\gamma}\, \partial_{\xi'}^{\beta'} c_k(x, \xi', q)\, d_{\gamma j}^{(\gamma)}(\xi', q)\, \xi_+^{\varkappa - k - |\gamma| + j}, \tag{5.2}$$

причем $|d_{-}^{(\gamma)}(\xi', q)| \leqslant C(|\xi'| + q)^{-j}$ и, следовательно, ограничены при $q \geqslant q_0 > 0$. Для дальнейшего достаточно записать ряд (5.2) в виде

$$\partial_{\xi}^{\alpha} a_{-}(x, \xi, q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x, \xi', q)\, \xi_{+}^{\alpha-k}. \tag{5.3}$$

Заметим, что это очевидно можно сделать, так как, если k, $|\gamma|$ и j изменяются в указанных пределах, $\xi_{+}^{\alpha-k}$ в (5.3) имеет ту же совокупность значений, что и $\xi_{-}^{\alpha-k-|\gamma|+j}$. При этом, так как $a_{-}(x, \xi', \xi_n, q) \in \in O_{\alpha}^{1}$ (см. (1.4)) и все $d_{-j}^{(\gamma)}(\xi', q)$ ограничены при любых ξ' и $q \geqslant q_0 > 0$, то из (5.1′), (5.2), (5.3) выводим

$$|c_k(x, \xi', q)| \leqslant C(|\xi'| + q)^{k-1}, \tag{5.4}$$

где C не зависит от ξ' и q. Из (5.3) и (5.4), учитывая, что ξ_{-}^{s} (при целых $s \geqslant 0$) является полиномом по ξ_{+} (и по ξ_n), получим разложение

$$\xi_{-}^{s} \partial_{\xi}^{\alpha} a_{-}(x, \xi, q) = p_{s+\alpha-1}(x, \xi, q) + r_{-1}(x, \xi, q), \tag{5.5}$$

где $p_{s+\alpha-1}$ — полином по ξ_n, причем имеют место следующие оценки:

$$|p_{s+\alpha-1}(x, \xi, q)| \leqslant C_1 (q + |\xi|)^{s+\alpha-1}, \quad |r_{-1}(x, \xi, q)| \leqslant C_2 \frac{(q + |\xi'|)^{s+\alpha}}{q + |\xi'| + \xi_n}. \tag{5.6}$$

Легко видеть также, что для $p_{s+\alpha-1}(x, \xi, q)$ и $r_{-1}(x, \xi, q)$ выполнены условия типа (1.3).

Далее, вновь применяя формулу Лейбница, будем иметь

$$\xi_{-}^{s} \partial_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi, q) = \xi_{-}^{s} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} a_{\beta\gamma}\, \partial_{\xi}^{\beta} a_{+}(x, \xi, q)\, \partial_{\xi}^{\gamma} a_{-}(x, \xi, q).$$

Легко видеть, что $\partial_{\xi}^{\beta} a_{+}(x, \xi, q)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $Im\,\xi_n < 0$ (с сохранением свойств (1.3) и (1.4), и, следовательно, определяет гладкий в полупространстве оператор.

Воспользовавшись теперь леммой 3.4 из [1]*, которая очевидно справедлива для символов, зависящих от x и от q, получим

$$\xi_{-}^{s} \partial_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi, q) = a_{-}^{(1)}(x, \xi, q) + r_{-1}^{(1)}(x, \xi, q), \ \alpha \geqslant 1, \tag{5.7}$$

где $a_{-}^{(1)}(x, \xi, q)$ и $r_{-1}^{(1)}(x, \xi, q)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1, откуда следует, что оператор, построенный по символу $\partial_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi, q)$ гладкий в полупространстве (порядка $m-1$).

В случае $\alpha = 0$ отметим дополнительно, что в разложении

$$\xi_{-}^{s} a(x, \xi, q) = a_{-}(x, \xi, q) + r_{-1}(x, \xi, q), \tag{5.8}$$

$a_{-}(x, \xi, q) \in O_{s+m}^{-}$ и $r_{-1}(x, \xi, q) \in O_{s+m}$, причем, как видно из доказательства, справедливы оценки

---

* В лемме 3.4 из [1] утверждается, что произведение символов, удовлетворяющих условиям типа (2.2), (2.3) теоремы 2.1 или (5.5) и (5.6), также удовлетворяет условиям указанного вида.

$$|a_-(x, \xi, q)| \leqslant C_1 (q + |\xi|)^{s+m}, \quad |r_{-1}(x, \xi, q)| \leqslant C_2 \frac{(q+|\xi'|)^{s+m+1}}{q+|\xi'| + |\xi_n|}, \tag{5.9}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi} a_-(x, \xi, q)\right| \leqslant C_3 (q + |\xi|)^{s+m-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi} r_{-1}(x, \xi, q)\right| \leqslant C_4 \frac{(q+|\xi'|)^{s+m}}{q+|\xi'| + |\xi_n|}. \tag{5.9'}$$

Наконец, для символа $\frac{\partial^p}{\partial \xi_n^p} a_+^{-1}(x, \xi, q)$ можно провести аналогичные рассуждения, если учесть, что $a_+(x, \xi, q) \neq 0$ при $Im\, \xi_n > 0$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2.2. Будем пользоваться обозначениями, принятыми в предложении 1.2 (§ 1), при $b(x, \xi, q) = a_+^{-1}(x, \xi, q)$, $m' = -\varkappa$. Нам надо доказать для $Tv_+ = R_1 v_+ + R_2 v_+$, где R_1 и R_2 определяются формулами (1.8) и (1.9), вместо (1.7) соответствующую оценку в полупространстве

$$\| P' Tv_+ \|_{s-(m-\varkappa-1), q} \leqslant C \| v_+ \|_{s, q}. \tag{5.10}$$

Докажем свойство гладкости оператора R_2 (для R_1 доказательство несколько проще). В силу леммы 2.1

$$\tilde{a}'(\tau, \xi, q) = \tilde{a}_-^{(2)}(\tau, \xi, q) + \tilde{r}_{-s-1}^{(2)}(\tau, \xi, q), \quad \tilde{b}'(\tau, \xi, q) = \tilde{b}_-(\tau, \xi, q) +$$

$$+ \tilde{r}_{-s-1}^{(3)}(\tau, \xi, q), \tag{5.11}$$

причем

$$|\tilde{a}_-^{(2)}(\tau, \xi, q)| \leqslant C_1 \frac{(q + |\xi|)^m}{(1 + |\tau|)^p}, \quad |\tilde{r}_{-s-1}^{(2)}(\tau, \xi, q)| \leqslant C_2 \frac{(q + |\xi'|)^{m+s+1}}{(1+|\tau|)^p (q + |\xi'| + |\xi_n|)^{s+1}} \tag{5.12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{a}_-^{(2)}(\tau, \xi, q)\right| \leqslant C_3 \frac{(q + |\xi|)^{m-1}}{(1+|\tau|)^p}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{r}_{-s-1}^{(2)}(\tau, \xi, q)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \frac{(q + |\xi'|)^{m+s}}{(1 + |\tau|)^p (q + |\xi'| + |\xi_n|)^{s+1}}, \tag{5.13}$$

где p сколь угодно велико, и, кроме того, выполняются оценки, аналогичные (5.12) для $\tilde{b}'_-(\tau, \xi, q)$ и $\tilde{r}^{(3)}(\tau, \xi, q)$.

Поясним написанные неравенства. Мы имеем $\tilde{a}_-^{(2)}(\tau, \xi, q) = \xi_-^{-s} \tilde{a}'_-(\tau, \xi, q)$ и $\tilde{r}_{-s-1}^{(2)}(\tau, \xi, q) = \xi_-^{-s} \tilde{r}'_{-1}(\tau, \xi, q)$ (см. (5.8)). Теперь из (5.9) получаем (5.12). Далее $\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{r}_{-s-1}^{(2)}(\tau, \xi, q) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi_-^{-s}) \tilde{r}'_{-1}(\tau, \xi, q) +$

$$+ \xi_-^{-s} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{r}'_{-1}(\tau, \xi, q).$$

Учитывая (5.9'), получаем (5.13).

Переходим к оценке $R_2 v_+$.

$$\| P' R_2 v_+ \|_{s, q}^{+} \leqslant \| R_2 l v_+ \|_{s, q} + \| \Pi^+ \xi_-^{+s} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{a}_-^{(2)}(\xi - \eta, \eta, q) - \tilde{a}_-^{(2)}(\xi - \eta, \tau, q)) \times$$

$$\leqslant \tilde{r}^{(3)}_{-s-1}(\eta_1-\tau, \tau, q)\, v_-(\tau)\, d\eta_1 d\tau\|_0 + \|\Pi^+ \xi^s_- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{r}^{(2)}_{-s-1}(\xi-\eta_1, \eta_1, q) -$$

$$-\tilde{r}^{(2)}_{-s-1}(\xi-\eta_1, \tau, q))\, \tilde{b}_-(\eta_1-\tau, \tau, q)\, v_-(\tau) d\eta_1 d\tau\|_0 + \|\Pi^+ \xi^s_- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{r}^{(2)}_{-s-1}(\xi-\eta_1, \eta_1, q) -$$

$$-\tilde{r}^{(2)}_{-s-1}(\xi-\eta_1, \tau, q))\, \tilde{r}^{(3)}_{-s-1}(\eta_1-\tau, \tau, q)\, v_-(\tau)\, d\eta_1 d\tau\|_0. \qquad (5.14$$

Первое слагаемое в правой части (5.14) оценивается во всем пространстве как в предложении 1.1. Далее оценим, например, третье слагаемое. Запишем его в виде $\|\Pi^+ \xi^s_- \int k(\xi, \tau)\, v_-(\tau)\, d\tau\|_0$. Используя неравенство (5.13) и (1.10), будем иметь

$$|\tilde{r}^{(2)}_{-s-1}(\xi-\eta_1, \eta_1, q) - \tilde{r}^{(2)}_{-s-1}(\xi-\eta_1, \tau, q)| \leqslant C\, \frac{(q+|\tau'|)^{m+s}}{(q+|\tau'|+|\tau_n|)^{s+1}}\, \frac{(1+|\eta_1-\tau|)^{p_2}}{(1+|\xi-\eta_1|)^{p_1}},$$

причем p_1 — сколь угодно большое число, $p_2 = |m+s|+s+2$. Учитывая также, что

$$|\tilde{b}_-(\eta_1-\tau, \tau, q)| \leqslant \frac{(q+|\tau|)^m}{(1+|\eta-\tau|)^{p_3}},$$

оценим ядро $k(\xi, \tau)$, интегрируя по η_1

$$|k(\xi, \tau)| \leqslant C\, \frac{(q+|\tau'|)^{m+s-s}}{(q+|\tau'|+|\tau_n|)^{s+1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta_1}{(1+|\xi-\eta_1|)^{p_1}\,(1+|\eta_1-\tau|)^{p_3-p_2}}.$$

Можно показать [4], что последний интеграл не превосходит $\dfrac{C_1}{(1+|\xi-\tau|)^{p_4}}$, причем p_4 можно взять сколь угодно большим, так как p_1 и p_3 можно взять сколь угодно большими. Так как

$$|\xi^s_-| \leqslant C_2\,(q+|\tau|)^s\,(1+|\xi-\tau|)^s \quad (s>0),$$

получим

$$\|\Pi^+ \xi^s_- \int k(\xi, \tau)\, v_-(\tau)\, d\tau\|_0 \leqslant C_3 \left\| \int \frac{(q+|\tau'|)^{m+s-s}\, v_-(\tau)\, d\tau}{(q+|\tau'|+|\tau_n|)(1+|\xi-\tau|)^{p_5}} \right\|_0.$$

Далее, по4торяя доказательство теоремы 2.1 (§ 2), получаем требуемую оценку. Аналогично оцениваются остальные слагаемые в правой части (5.14). Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.1. Используя (3.9), запишем выражение для $t^\lambda_n b_j(x', t_n, \xi', \eta_n)$ в виде

$$t^\lambda_n b_j(x', t_n, \xi', \eta_n) = \sum_{|\alpha|+\beta=j} \frac{1}{j!}\, t^{\beta+\lambda}_n\, \partial^\alpha_{\xi'} D^\beta_{x_n} a(x', 0, 0, \eta_n, 1)\, \xi'^\alpha =$$

$$= t^{\beta+\lambda}_n\, b^{(1)}_j(x', \xi', \eta_n).$$

Далее имеем ($B^{(1)}_j = Op\,(b^{(1)}_j(x', \xi', \eta_n))$),

$$\|P^+ t_n^{\beta+\lambda} B_j^{(1)} v_+\|_{s,\varepsilon}^+ \leqslant \sum_{\gamma+\beta=\beta+\lambda} \Big\| \Pi^+ \hat{\tau}_{i-}^{s} \times$$

$$\times F_{x'\to\xi'} \left[Op\left(\frac{\partial^{\gamma} b_j^{(1)}(x', \xi', \tau_{in})}{\partial \tau_{in}^{\gamma}} \right) \frac{\partial^{\beta}}{\partial \tau_{in}^{\beta}} \hat{v}_+(x', \tau_{in}) \right] \Big\|_0 .$$

Учитывая свойства символа $a(x, \xi, q)$ (формулы (1.5), (1.5')) и лемму 2.1, легко видеть, что символу $\frac{\partial^{\gamma}}{\partial \tau_{in}^{\gamma}} b_j^{(1)}(x', \xi', \tau_{in})$ отвечает гладкий в полупространстве оператор порядка $j+m'$, $m' = \max(m, 1)$. Отсюда вытекает первое утверждение леммы—формула (4.10). Аналогично доказываются соотношения (4.11) и (4.12). При доказательстве (4.11) следует заметить, что $\frac{\partial^{\gamma}}{\partial \tau_{in}^{\gamma}} [b_0^-(x', \tau_{in})]^{-1}$ — аналитическая функция τ_{in} при $Im\,\tau_{in} < 0$ и, следовательно, соответствующий оператор будет гладким в полупространстве (порядка $s_1 = \max(0, \varkappa - m)$). Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.2. Предположим для простоты, что $[b_0^+(x', \tau_{in})]^{-1}$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция x'. Обозначим $\tilde{b}_{\alpha}(\zeta', \tau_{in}) = F_{x'\to\zeta'} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau_{in}^{\alpha}} [b_0^+(x', \eta_n)]^{-1}$. Записывая τ_{i-}^{s} в виде $\tau_{i-}^{s} = \sum_{j=0}^{s} d_{s-j}(\xi')\,\tau_{in}^{j}$, $(|d_{s-j}(\xi')| < (1+|\xi'|)^{s-j})$, получим

$$\|t_n^{\lambda} r_{\mu}^+\|_{s,\varepsilon} \leqslant C \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{\alpha+\beta=\lambda} \Big\| \Pi^+ d_{s-j}(\xi') \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{in}^{k+j-\beta-1}\, \tilde{b}_{\alpha}(\xi'-\zeta', \tau_{in})\, c_k^{\mu}(\zeta')\, d\zeta' \Big\|_0 \tag{5.15}$$

(слагаемые, для которых $k-\beta < 1$, равны нулю).

В силу леммы 2.1 при $\sigma > \varkappa$ имеем

$$\tau_{in}^{\sigma} \tilde{b}_{\alpha}(\xi'-\zeta', \tau_{in}) = \tilde{p}_{\sigma-\varkappa}(\xi'-\zeta', \tau_{in}) + \tilde{r}_{-1}^{(\alpha)}(\xi'-\zeta', \tau_{in}),$$

где $p_{\sigma-\varkappa}$ — полином по τ_{in} степени $\sigma-\varkappa$, причем

$$|\tilde{p}_{\sigma-\varkappa}(\xi'-\zeta', \tau_{in})| \leqslant C_1 \frac{(1+|\tau_{in}|)^{\sigma-\varkappa}}{(1+|\xi'-\zeta'|)^{p_1}}, \quad |\tilde{r}_{-1}^{(\alpha)}(\xi'-\zeta', \tau_{in})| <$$

$$< C_2 \frac{1}{(1+|\tau_{in}|)(1+|\xi'-\zeta'|)^{p_1}},$$

где p_1 сколь угодно велико.

Так как $\Pi^+ \tilde{p}_{\sigma-\varkappa}(\xi'-\zeta', \tau_{in}) = 0$ [1], продолжая оценивать (5.15), получим

$$\|t_n^{\lambda} r_{\mu}^+\|_{s,\varepsilon} \leqslant C \Big\| \int \frac{(1+|\zeta'|)^{s-j}}{(1+|\xi'-\zeta'|)^{p_1}} c_k^{(\mu)}(\zeta')\, d\zeta' \Big\|_0 \leqslant C_1 \|c_k^{(\mu)}\|_{s-j}' \leqslant C_2 \|c_k^{(\mu)}\|', \tag{5.16}$$

где норма $\|\cdot\|'$ берется по гиперплоскости $x_n = 0$.

Из (3.19) легко видеть, что для оценки $c_k^{(\nu)}(x')$ достаточно оценить $f_l^{(\nu)}(x')$, определяемые формулами (3.20). (В (3.20) оператор Π^{-} можно опустить, так как $\Phi_l(x', x_n)$ — гладкая функция во всем пространстве, а интегрирование по ξ_n означает в x-представлении сужение на гиперплоскость $x_n = 0$). Далее, используя неравенство Коши-Буняковского (так же как в [2] и [5]) и (3.7), получим

$$\|f_l^{(\nu)}(x')\|_s \le \left(\int (1+|\xi'|^2)^s \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{1n}^{j}\Phi_l(\xi)\, d\xi_n\right|^2 d\xi'\right)^{1/2} \le C\|f\|^{+}_{\ldots+\frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

Из (5.16) и (5.17) получаем (4.13). Лемма доказана.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Вишику, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский энергетический институт

Поступило 7.XII.1967

Լ. Դ. ՊՈԿՐՈՎՍԿԻ

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԾԱԼՔԻ ՏԻՊԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Այս աշխատանքում ապացուցված է ընդհանուր տեսքի սիմվոլով պարամետրից կախված ծալքի տիպի հավասարման համար եզրային խնդրի միարժեք լուծելիությունը կիսատարածությունում։

Բացի դրանից, տրված և հիմնավորված է մի մեթոդ, որն արտահայտում է մոտավոր լուծումը փոքր պարամետրի նկատմամբ շարքի տեսքով։ Ինչպես և դիֆերենցիալ հավասարումների դեպքում, լուծման ասիմպտոտիկան պարունակում է այսպես կոչված եզրային շերտի տիպի ֆունկցիաներ, որոնք կոմպենսացնում են եզրային պայմանների բավարարման մեջ եղած շեղումը։

L. D. POKROVSKYI

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATIONS IN CONVOLUTIONS, CONTAINING PARAMETER

S u m m a r y

The simple solvability for homogeneous boundary value problem in the semispace for an equation in convolutions with symbol, depending on parameter is proved.

Furthermore the method of constructing the approximate solution in the form of a series of powers of the small parameter is pointed out.

As in the case of partial differential equations, the approximate solution contains the so called boundary layer functions, which compensate the discordance in the boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, вып. 3, 1965, 89—152.
2. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX, вып. 3, 1964, 53—161.
3. *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, XII, вып. 5, 1957, 3—122.
4. *J. J. Kohn, L. Nirenberg.* On algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure and Appl. Math., 18, № 1—2, 1965, 269—305.
5. *Л. Д. Покровский.* Асимптотика решений некоторых классов уравнений в свертках, Доклады научн. техн. конференции МЭИ, секция математическая, 1967, 155—185.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 2, 1968 Математика

Э. Т. АВАНЕСОВ

К ВОПРОСУ ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СКОЛЕМА

В работе [1] Сколем доказал следующую теорему (см. [1], стр. 179—181).

Теорема Сколема. *Пусть*

$$F_t\ (x_1, \cdots, x_k) = \sum_{l=0}^{\infty} p^l f_{tl}\,(x_1, x_2, \cdots, x_k),$$

где p — нечетное простое число, а все f_t — многочлены с целыми коэффициентами от неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Если для всякого t ($t=1, 2, \cdots, k$) существует такой целочисленный многочлен $h_{j,t}\,(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, что имеет место функциональное сравнение

$$\sum_{j=1}^{k} f_{0,j}\,(x_1, x_2, \cdots, x_k)\ h_{j,t}\,(x_1, x_2, \cdots, x_k) \equiv h_t\,(x_t)\ (mod p),$$

в котором h_t зависит только от x_t, и не все коэффициенты $h_{j,t}\,(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ будут $\equiv 0$ (modp), то система уравнений

$$F_j = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

имеет конечное число решений в целых рациональных (и более того, в целых p-адических) числах.

Далее он высказал гипотезу о возможности эффективного определения верхней границы для этого числа.

В этой заметке мы рассмотрим специальный случай взятой Сколемом системы, имеющий важное значение (см., например, [2], [3], [4], [5]), в теории неопределенных уравнений высших степеней, и, приведем решение гипотезы Сколема для такой системы, являющейся в некотором смысле аналогом теоремы Крамера для систем линейных уравнений в локальных полях.

Теорема 1. *Если определитель $|a_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, \cdots, k$) равен $\Delta \not\equiv 0$ (modp), $p \neq 2$ — простое число, то система уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_k$*

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + p \sum_{r_1+\cdots+r_k=2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ij}^{(1)} + p^2 \sum_{r_1+\cdots+r_k=3} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ij}^{(2)} + \cdots +$$

$$+ p^s \sum_{r_1+\cdots+r_k=s+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ij}^{(s)} + \cdots = b_i\,,\ i=1, 2, \cdots, k, \tag{1}$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij}, b_i и $m_{ij}^{(s)}$ — произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых p-адических числах, а, значит, не более одного целого рационального решения.

Доказательство теоремы 1 приводится конструктивным путем, а именно: если некоторое решение системы (1) представить в виде

$$x_j = x_j^{(0)} + p x_j^{(1)} + p^2 x_j^{(2)} + \cdots + p^t x_j^{(t)} + \cdots, \; j = 1, 2, \cdots, x, \tag{2}$$

то указывается алгоритм для последовательного получения $x_j^{(t)}$, $t = 0, 1, 2, \cdots$; $j = 1, 2, \cdots, k$. Из существования и единственности значений $x_j^{(t)}$ и будет вытекать утверждение теоремы 1. Итак, представим систему (1) в виде

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \equiv b_i \; (mod p), \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{3}$$

Последовательное исключение неизвестных x_j приводит (3) к системе

$$\Delta x_j \equiv \Delta_j \; (mod p), \quad j = 1, 2, \cdots, k, \tag{4}$$

где Δ_j означает определитель, получаемый из Δ заменой j-го столбца свободными членами b_j. Но $\Delta \not\equiv 0 \, (mod p)$, и, таким образом, из системы (3) определяется единственное решение

$$x_j \equiv x_j^{(0)} \; (mod p), \quad j = 1, 2, \cdots, k. \tag{5}$$

Для нахождения $x_j^{(1)}$ запишем (2) следующим образом:

$$x_j \equiv x_j^{(0)} + p x_j^{(1)} \; (mod p^2), \quad j = 1, 2, \cdots, k \tag{6}$$

и подставим (6) в (1), рассматривая (1) как систему сравнений по $mod p^2$. Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{(0)} - p \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{(1)} + p \sum_{r_1 + \cdots + r_k = 2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j^{(0)} + p x_j^{(1)}}{r_j} m_{il}^{(1)} \equiv b_i \; (mod p^2),$$

$$i = 1, 2, \cdots, k,$$

или после элементарных преобразований

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{(1)} \equiv \frac{1}{p} \left[b_j - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{(0)} - p \sum_{r_1 + \cdots + r_k = 2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j^{(0)}}{r_j} m_{il}^{(1)} \right] (mod p), \tag{7}$$

и ввиду условия $\Delta \not\equiv 0$ $(mod p)$ находим, что система (7) определяет единственное решение относительно $x_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ в поле вычетов по $mod p$.

Соответствующий несложный переход по индукции от τ к $\tau + 1$ устанавливает следующий рекуррентный процесс, позволяющий вычислять коэффициенты $x_j^{(\tau+1)}$ по известным значениям

$$x_j^{(0)}, x_j^{(1)}, \cdots, x_j^{(\tau)}; \; j = 1, 2, \cdots, k.$$

Пусть найдены величины $x_j^{(0)}, x_j^{(1)}, \cdots, x_j^{(\tau)}$ в p-адическом представлении решения системы (1), тогда значения $x_j^{(\tau+1)}$ являются решениями следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{(\tau+1)} = \frac{1}{p^{\tau+1}} \Big\{ b_i - \sum_{t=0}^{\tau} p^t \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^{(t)} -$$

$$-\sum_{t=1}^{\tau+1} p^t \sum_{r_1+\cdots+r_k=t+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{\bar{x}_j^{(\tau-t+1)}}{r_j} m_{ii}^{(t)} \Bigg\} (mod p), \tag{8}$$

где $x_j^{(\tau-t+1)}=x_j^{(0)}+px_j^{(1)}+\cdots+p^{\tau-t+1}x_j^{(\tau-t+1)}$; $i=1, 2, \cdots, k$. Тем самым однозначно построенный рекуррентный процесс доказывает теорему 1.

Аналогичным же образом доказывается

Теорема 2. *Если определитель* $|a_{ij}|$ $(i, j=1, 2, \cdots, k)$ *равен нечетному числу, то система уравнений относительно неизвестных* $x_1, x_2, \cdots, x_k$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j - 4 \sum_{r_1+\cdots+r_j=2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(1)} + 4^2 \sum_{r_1+\cdots+r_k=3} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(2)} + \cdots +$$

$$+ 4^s \sum_{r_1+\cdots+r_k=s+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(s)} + \cdots = b_i, \quad i=1, 2, \cdots, k,$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij}, b_i *и* $m_{ii}^{(s)}$ — *произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых 4-адических числах, а значит, не более одного целого рационального решения.*

Хотя приводимые далее следствия связаны непосредственным образом с доказанными выше теоремами 1 и 2, для них можно было привести и прямые доказательства, основанные на соображениях делимости.

Следствие 1. *Если определитель* $|a_{ij}|$ $(i, j=1, 2, \cdots, k)$ *равен* $\Delta \not\equiv 0$ $(mod p)$, $p \neq 2$ — *простое число, то система уравнений*

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + p \sum_{r_1+\cdots+r_k=2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(1)} + p^2 \sum_{r_1+\cdots+r_k=3} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(2)} + \cdots +$$

$$+ p^s \sum_{r_1+\cdots+r_k=s+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(s)} + \cdots = 0, \quad i=1, 2, \cdots, k,$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij} *и* $m_{ii}^{(s)}$ — *произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых числах, а именно:* $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$.

Следствие 2. *Если определитель* $|a_{ij}|$ $(i, j=1, 2, \cdots, k)$ *равен нечетному числу, то система уравнений*

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + 4 \sum_{r_1+\cdots+r_k=2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(1)} + 4^2 \sum_{r_1+\cdots+r_k=3} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(2)} + \cdots +$$

$$+ 4^s \sum_{r_1+\cdots+r_k=s+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{ii}^{(s)} + \cdots = 0, \quad i=1, 2, \cdots, k,$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij} *и* $m_{ii}^{(s)}$ — *произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых числах, а именно:* $x_1=x_2=\cdots=x_k=0$. Заметим, что следствие 2 является обобщением соответствующей теоремы (см. [4], стр. 148).

В качестве иллюстрации рассмотрим приложение установленных теорем и следствий в теории представлений бинарными биквадратичными формами.

Признак 1. *Обозначим через* $0(\gamma_1)$ *кольцо, порожденное произвольным корнем* γ_1 *уравнения* $\gamma_1^4 - 3a_2\gamma_1^2 - 3a_3\gamma_1 - 3a_4 = 0$, a_2, a_3, a_4 — *целые рациональные числа, имеющего ровно одну пару комплексных корней. Пусть* $a_4 \equiv -1 \pmod 3$, *а основные единицы кольца* $0(\gamma_1)$ *есть* $\varepsilon_1 \equiv \gamma_1^3 - 4\gamma_1^2 - 4\gamma_1 + 1 \pmod 9$ *и* $\varepsilon_2 \equiv 3\gamma_1^3 + 2\gamma_1^2 + 3\gamma_1 - 2 \pmod 9$. *Тогда диофантово уравнение*

$$x^4 - 3a_2x^2y^2 + 3a_3xy^3 - 3a_4y^4 = 1 \tag{9}$$

кроме тривиального решения $x = 1$, $y = 0$ *может иметь еще не более двух целых решений.*

Заметим, что здесь и далее решения (x, y) и $(-x, -y)$ естественно не считать различными.

Доказательство. С точки зрения теории единиц целые решения (x, y) уравнения (9) являются двучленными единицами вида $x + y\gamma_1$ кольца $0(\gamma_1)$. В силу известной теоремы Дирихле все единицы $x + y\gamma_1 + z\gamma_1^2$ выражаются как степени, со всевозможными целыми рациональными показателями, двух основных единиц кольца $0(\gamma_1)$; и, таким образом, задача сводится к решению показательного уравнения

$$x + y\gamma_1 = \varepsilon_1^{\alpha}\ \varepsilon_2^{\beta} \tag{10}$$

с двумя неизвестными показателями α и β.

Пусть $\alpha = 9\gamma + r$, $\beta = 3\delta + s$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ или 8; $s = 0$, 1 или 2. Непосредственно обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^9 = 1 + 3A, \quad A \equiv \gamma_1^3 \pmod 3, \\ &\varepsilon_2^3 = 1 + 3B, \quad B \equiv -a_3\gamma_1^3 - (a_4+1)\gamma_1^2 \pmod 3). \end{aligned} \tag{11}$$

Обозначив далее $\varepsilon_1^r\varepsilon_2^s$ через $V(r, s)$, составим таблицу значений $V(r, s)$:

$V(0,0) \equiv 1$, $\quad V(0,1) \equiv -\gamma_1^2 + 1$, $\quad V(0,2) \equiv \gamma_1^2 + 1$,

$V(1,0) \equiv \gamma_1^3 - \eta^2 + \gamma_1 + 1$, $\quad V(1,1) \equiv \gamma_1^2 + \gamma_1 + 1$, $\quad V(1,2) \equiv -\gamma_1^3 + \gamma_1 + 1$,

$V(2,0) \equiv -\gamma_1^2 - \gamma_1 + 1$, $\quad V(2,1) \equiv \gamma_1^3 + \gamma_1^2 - \gamma_1 + 1$, $\quad V(2,2) \equiv -\gamma_1^3 - \gamma_1 + 1$,

$V(3,0) \equiv \gamma_1^3 + 1$, $\quad V(3,1) \equiv \gamma_1^3 - \gamma_1^2 + 1$, $\quad V(3,2) \equiv \gamma_1^3 + \gamma_1^2 + 1$,

$V(4,0) \equiv -\gamma_1^3 - \gamma_1^2 + \gamma_1 + 1$, $\quad V(4,1) \equiv \gamma_1^3 + \gamma_1^2 + \gamma_1 + 1$, $\quad V(4,2) \equiv \gamma_1 + 1$,

$V(5,0) \equiv \gamma_1^3 - \eta^2 - \gamma_1 + 1$, $\quad V(5,1) \equiv -\gamma_1^3 + \gamma_1^2 - \eta + 1$, $\quad V(5,2) \equiv -\eta + 1$,

$V(6,0) \equiv -\gamma_1^3 + 1$, $\quad V(6,1) \equiv -\gamma_1^3 - \gamma_1^2 + 1$, $\quad V(6,2) \equiv -\gamma_1^3 + \gamma_1^2 + 1$,

$V(7,0) \equiv -\gamma_1^2 + \eta + 1$, $\quad V(7,1) \equiv -\gamma_1^3 - \gamma_1^2 + \eta + 1$, $\quad V(7,2) \equiv \gamma_1^3 + \gamma_1 + 1$,

$V(8,0) \equiv -\gamma_1^3 - \gamma_1^2 - \gamma_1 + 1$, $\quad V(8,1) \equiv \gamma_1^2 - \gamma_1 + 1$, $\quad V(8,2) \equiv \gamma_1^3 - \gamma_1 + 1 \pmod 3$.

Рассматривая (10) как сравнение по $mod\,3$, убеждаемся, что условию двучленности элемента в кольце $0(\gamma_1)$ по $mod\,3$ удовлетворяют лишь $V(0,0)$, $V(4,2)$ и $V(5,2)$.

Соответственно каждой из этих возможностей проведем исследование.

Первый случай: $r = s = 0$. Тогда

$$x + y\eta = \varepsilon_1^{9\gamma}\varepsilon_2^{3\delta} = (1+3A)^{\gamma}(1+3B)^{\delta} = 1 + 3(A\gamma + B\delta) + 3^2(\quad) + \cdots .$$

Подставив значения A и B из (11), находим:

$$x + y\eta = 1 + 3\{\eta^3\gamma - [a_3\eta^3 + (a_4+1)\eta^2]\delta\} + 3^2(\quad) + \cdots ,$$

откуда

$$\begin{cases} 0 = \gamma - a_3\delta + 3(\quad) + 3^2(\quad) + \cdots , \\ 0 = -(a_4+1)\delta + 3(\quad) + 3^2(\quad) + \cdots . \end{cases} \qquad (12)$$

Но определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1, & -a_3 \\ 0, & -(a_4+1) \end{vmatrix} = -(a_4+1) \not\equiv 0 \ (mod\, 3),$$

а потому, на основании следствия 1, система уравнений (12) имеет единственное решение $\gamma = \delta = 0$, и далее $x + y\eta = 1$, $x = 1$, $y = 0$.

Второй случай: $r = 4$, $s = 2$. При этом

$$x + y\eta = \varepsilon_1^{9\gamma+4}\varepsilon_2^{3\delta+2} = \varepsilon_1^4\varepsilon_2^2(1+3A)^{\gamma}(1+3B)^{\delta} \equiv \varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 + 3\{\eta^3\gamma -$$
$$-[(a_3+a_4+1)\eta^3 + (a_4+1)\eta^2]\delta\} \equiv 3(1-a_2)\eta^3 + 3(1+a_2-a_3)\eta^2 - (3a_4+$$
$$+2)\eta + 3a_4 + 4 + 3\{\eta^3\gamma - [(a_3+a_4+1)\eta^3 + (a_4+1)\eta^2]\delta\} \ (mod\, 9).$$

Соответствующая система уравнений

$$\begin{cases} a_2 - 1 = \gamma - (a_3 + a_4 + 1)\delta + 3(\ ) + 3^2(\ ) + \cdots , \\ a_3 - a_2 - 1 = -(a_4+1)\delta + 3(\ ) + 3^2(\ ) + \cdots , \end{cases}$$

ввиду условия $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1, & -(a_3 + a_4 + 1) \\ 0, & -(a_4+1) \end{vmatrix} = -(a_4+1) \not\equiv 0 \ (mod\, 3)$

и теоремы 3, имеет единственное решение в целых 3-адических числах, а значит, не более одного целого рационального решения. Подобным же образом рассматривается и случай $r = 5$, $s = 2$, также дающий не более одного целого рационального решения, и признак 1 доказан.

Заметим, что наряду с признаком 1 можно получить еще пятнадцать признаков для уравнения (9), если $a_4 \not\equiv -1 \ (mod\, 3)$ и основные единицы удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_1 \equiv (\eta^3 - 4\eta^2 + 4\eta + 1)^{\rho} \ (mod\, 9), \quad \rho = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;$$

$$\varepsilon_2 \equiv (3\eta^3 + 2\eta^2 + 3\eta - 2)^{\sigma} \ (mod\, 9), \quad \sigma = 1, 2,$$

оба показателя одновременно не обращаются в единицу.

Признак 2. *Обозначим через* $O(\eta)$ *кольцо, порожденное произвольным корнем* η *уравнения* $\eta^4 - 3a_2\eta^2 + (3a_3 - 1)\eta - 3a_4 = 0$, a_2, a_3, a_4 — *целые рациональные числа, имеющего ровно одну пару комплексных корней. Пусть* $a_3 + a_4 \equiv 0 \ (mod\, 3)$, *а основные единицы кольца* $O(\eta)$ *есть* $\varepsilon_1 \equiv (4\eta^3 - 3\eta^2 - \eta - 2)^r$, $\varepsilon_2 \equiv (-\eta^3 - 4\eta^2 + 2\eta - 2)^s$ $(mod\, 9)$; $r = 1, 2$; $s = 1, 2$. *Тогда диофантово уравнение* $x^4 - 3a_2x^2y^2 -$

$-(3a_3-1)xy^3-3a_4y^4=1$ *имеет только одно решение* $x=1$, $y=0$ *в целых числах.*

Признак 3. *Обозначим через* $0(\tau_1)$ *кольцо, порожденное произвольным корнем* τ_1 *уравнения* $\tau_1^4-4a_1\tau_1^3-4a_2\tau_1^2-4a_3\tau_1-3a_4=0$, *все* a_i — *целые рациональные числа, имеющего ровно одну пару комплексных корней. Если основные единицы кольца* $0(\tau_1)$ *удовлетворяют условиям:* $\varepsilon_1\equiv(\tau_1-1)^r$, $\varepsilon_2\equiv(\tau_1^3-1)^s \pmod{16}$, $r=1, 2, 3, 4, 5, 6$ *или* 7; $s=1, 2$ *или* 3, *то диофантово уравнение* $x^4+4a_1x^3y-4a_2x^2y^2+$ $+4a_3xy^3-4a_4y^4=1$ *кроме тривиального решения* $x=1$, $y=0$ *может иметь еще не более одного решения в целых числах.*

Ивановский государственный
педагогический институт

Поступило 11.IV.1967

Է. Տ. ԱՎԱՆԵՍՈՎ

ՍԿՈԼԵՄԻ ՄԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Այս հոդվածում հաստատվում է Սկոլեմի հիպոթեզը լոկալ դաշտերում հատուկ սիստեմի գծային հավասարումների լուծումների քանակի էֆեկտիվ սահմանի գոյության մասին։

Որպես կիրառություն վերականգնված է բինար բիքառակուսային ֆորմերի միավորի ներկայացման քանակի գնահատականը։

E. T. AVANESOV

A NOTE ON A THEOREM OF SKOLEM

Summary

In this paper Skolem's congecture on the existence of an effective bound for the number of solutions of a special system of linear equations in local fields is affirmed.

As an application the estimates for the number of representations of unity by means of certain classes of binary quadrtic forms are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. Skolem*. Ein verfahren zur Behandlung dewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen, 8-de Skand. Math. Kongress, Stockholm, 1934,163—188.
2. *W. Ljunggren*. Einige Bemerkungen über die Darstellung ganzen zahlen durch binäre kubische Formen mit positiver Diskriminante, Acta Math. 75, 1—2, Uppsala, 1942, 1—21.
3. *W. Ljunggren*. On the diophantine equation $y^2-k=x^3$, Acta Arithmetica, 8, 4, 1963, 451—463.
4. *В. И. Баулин*. О неопределенном уравнении третьей степени с наименьшим положительным дискриминантом, Уч. Записки Тульского Госпединститута, вып. 7, 1960, 138—170.
5. *Э. Т. Аванесов*. Решение одной проблемы фигурных чисел, Acta Arithmetica, 12, 4, 1967, 409—420.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հ. Բ. Ներսեսյան. *Երկրորդ կարգի վերածվող հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի մասին* 79

Վ. Ի. Շևցով. *Ամբողջ ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր շարքերով ներկայացման մասին* 101

Գ. Լ. Լունց. *Կանոնական արտադրյալի աճի գնահատականների մասին* 126

Լ. Դ. Պոկրովսկի. *Եզրային խնդիր պարամետր պարունակող ծալքի տիպի հավասարումների համար* 137

Է. Տ. Ավանեսով. *Սկոլեմի մի թեորեմի մասին* 160

СОДЕРЖАНИЕ

А. Б. Нерсесян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка 79

В. И. Шевцов. О представлении целых функций некоторыми общими рядами 101

Г. Л. Лунц. Об оценках роста канонического произведения 126

Л. Д. Покровский. Краевая задача для уравнений в свертках, содержащих параметр 137

Э. Т. Аванесов. К вопросу об одной теореме Сколема 160

CONTENTS

A. B. Nersessian. On Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation of second order 79

V. Y. Schevtzov. On the representation of entire functions by arbitrary series . 101

L. L. Lunts. On estimations of the growth of a canonical product 126

L. D. Pokrovskyi. The boundary value problem for equations in convolutions, containing parameter 137

E. T. Avanesov. A note on a theorem of Skolem 160